

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Vórtices em teorias de campo
com violação da invariância de Lorentz**

Carlisson Miller Cantanhede Pereira

ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

CO-ORIENTADOR: MANOEL MESSIAS FERREIRA JUNIOR

SÃO LUÍS, FEVEREIRO DE 2012

Vórtices em teorias de campo com violação da invariância de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Co-Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, FEVEREIRO DE 2012

Pereira, Carlisson Miller Cantanhede

Vórtices em teorias de campo com

violação da invariância de Lorentz./ Carlisson Miller Cantanhede Pereira - 2012
87.p

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Co-Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior

1. Simetria de Lorentz 2. Defeitos Topológicos 3. Vórtices. I Título

CDU 537.8

CARLISSON MILLER CANTANHEDE PEREIRA

Vórtices em teorias de campo com violação da invariância de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*Orientador*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Manoel Messias Ferreira Junior (*Co-Orientador*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Gastão Inácio Krein

Doutor em Física - Instituto de Física Teórica (IFT-UNESP)

Edilberto Oliveira Silva

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Aos meus Pais

Agradecimentos

À minha família, sem a qual esse trabalho não seria possível.

Ao professor Rodolfo Alván Casana Sifuentes pela orientação, amizade e grande aprendizado que me foi dado desde o início. Agradeço também pelas boas discussões na academia e fora dela, que foram determinantes para a realização desse trabalho.

Ao professor Manoel Messias Ferreira Junior pela co-orientação, pelo grande apoio e ensinamentos que tanto me passou ao longo de todos esses anos.

Aos amigos do GFTPC, pela enorme amizade e pelas inúmeras conversas sobre Física que contribuíram muito para desenvolver meu conhecimento.

À Capes pelo apoio financeiro no mestrado e a pós-graduação em Física.

Ser o homem mais rico do cemitério não é o que mais importa para mim... Ir para cama à noite e pensar que foi feita alguma coisa grande. Isso é o que mais importa para mim.

Steve Jobs

Resumo

Esta dissertação aborda os efeitos da quebra espontânea da covariância de Lorentz na obtenção das soluções estacionárias de vórtices BPS e não-BPS no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs abeliana suplementada pelo setor de “gauge” CPT-par e não-birrefringente do Modelo Padrão Estendido (MPE) de Colladay & Kostelecky. O trabalho inicia fazendo uma revisão sobre defeitos topológicos em modelos de campos escalares em $(1+1)$ -dimensões. A partir do critério de finitude da energia estacionária, estabelecemos condições de contorno sobre os campos e suas derivadas. Apresentamos, também o bem conhecido método de Bogomol’nyi, usado para obter as equações BPS que minimizam a energia do sistema. Por fim, apresentamos o defeito tipo Kink com o potencial tipo ϕ^4 , que conecta estados assintóticos de mínima energia (vácuos) diferentes. No segundo capítulo, seguindo o procedimento de Bogomol’nyi, obtemos as soluções de vórtices BPS estacionárias em modelos abelianos acoplados ao campo de Higgs. Iniciamos com o modelo Maxwell-Higgs submetido a um potencial tipo $|\phi|^4$, usando o ansatz rotacionalmente simétrico a fim de obter as equações de vórtices BPS, e impondo condições sobre os campos na origem/no infinito. Em seguida, estudamos as soluções de vórtices BPS no modelo Chern-Simons puro acoplado ao campo de Higgs (CSH), sujeito a um potencial do tipo $|\phi|^6$. Apresentamos uma importante relação de acoplamento entre o setor elétrico e o setor magnético, e obtemos as equações BPS e a energia mínima do modelo, via o método de Bogomol’nyi. Ainda neste capítulo, estudamos vórtices BPS no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH). Para isto, argumentamos a necessidade de introduzir no modelo um campo escalar neutro N dinâmico submetidos a um potencial do tipo $|\phi|^4$ dependente do campo N . As condições sobre N também foram obtidas. No terceiro capítulo, apresentamos a primeira contribuição original deste trabalho. Consideramos o modelo Maxwell-Higgs na presença de termos CPT-pares que violam a covariância de Lorentz, pertencentes ao MPE. Iniciamos usando uma parametrização que retém apenas o setor não-birrefringente do modelo. Escrevemos as equações de movimento e aplicamos a prescrição usual para soluções rotacionalmente simétricas, obtendo soluções de vórtices descarregados BPS e não-BPS para um potencial do tipo $|\phi|^4$. Nestas, o parâmetro de violação de Lorentz (paridade-par) desempenha papel importante, permitindo controlar a espessura do perfil do defeito, que pode tornar-se mais estreito (aproximando-se do padrão “compacton”) ou mais largo. No capítulo 4, mostramos que os parâmetros da quebra de Lorentz de paridade-ímpar possibilitam a obtenção de vórtices carregados sempre que seja inserido no modelo um campo escalar neutro Ψ na lagrangiana,

similarmente ao que ocorre no modelo MCSH. Usamos um potencial tipo $|\phi|^4$ dependente do campo Ψ e de sua derivada.

Palavras Chaves: Defeitos topológicos, Quebra de simetria de Lorentz, Vórtices, Equações BPS.

Abstract

This work addresses the effects of spontaneous Lorentz symmetry breaking on the vortex solutions of the abelian Maxwell-Higgs (AMH) model. Our model is composed by the usual AMH model where the kinetic part of the gauge field is supplemented by a non-birefringent CPT-even term contained in the electrodynamic sector of the Standard Model extension (SME) of Colladay & Kostelecky. The work is developed in the following way: In the chapter 1, we start by doing a review about topological defects in (1+1)-dimensional scalar field theories. Based on the criterion of energy finiteness, it has been established appropriated boundary conditions for the fields. By following the well-known Bogomol'nyi's method and by minimizing the system energy, we have obtained the BPS equations (first order equations) which solves the Euler-Lagrange second order equations. By last, we study the more simple topological defect, named kink, which is obtained from a $\lambda\phi^4$ scalar field theory. The kink solution connects two different minimum energy potential states or vacuum's states. The second chapter is devoted to the study of stationary BPS vortices in field theories where abelian gauge fields are coupled to the Higgs field. The first field theory to be studied is the Maxwell-Higgs model in a $|\phi|^4$ -type potential. Next, we study the BPS vortex solutions in a model with a pure Chern-Simons term coupled to the Higgs field (CSH), subject to a $|\phi|^6$ -type potential. The third and last model to be analyzed is the Maxwell-Chern-Simons-Higgs model (MCSH). To obtain charged BPS vortex in MCSH model, it is necessary to introduce a dynamical and neutral scalar field N coupled to the Higgs field in a modified $|\phi|^4$ which depends explicitly of the field N . In the third and four chapters, we present the original contributions of the present monograph. We study the Maxwell-Higgs model in the presence of Lorentz-violating CPT-even terms belonging to the nonbirefringent electrodynamics of the SME. The nonbirefringent SME term is composed by both parity-even and parity-odd sectors. The third chapter we shows that the parity-even LIV coefficients admit only uncharged BPS and non-BPS vortices in the usual $|\phi|^4$ -potential. Our analysis shows that the parity-even LIV parameter controls the radial thickness of the profile of the defect, which can become narrower or wider (approaching to the standard behavior of a "compacton-type defect). In chapter 4, we show that the LIV parity-odd parameters allow the existence of BPS-type charged vortices if we include a neutral scalar field Ψ in the original model, the situation is similar to what occurs in the MCSH model. We use a $|\phi|^4$ -potential which explicitly depends in the field Ψ and its derivative.

Keywords: topological defects, Lorentz symmetry violation, Vortices, BPS equations.

Sumário

Introdução	1
1 Defeitos topológicos em teorias de campos escalares	5
1.1 Campos escalares em (1+1)-D	6
1.2 O método de Bogomol'nyi	8
1.3 Defeitos topológicos em sistemas descritos por campos escalares	9
1.3.1 Índices topológicos e carga topológica	9
1.4 Defeito tipo kink	12
2 Campos de gauge abelianos acoplados ao campo de Higgs	15
2.1 Vórtices no modelo de Maxwell-Higgs abeliano	15
2.1.1 Energia estacionária do sistema	17
2.1.2 Comportamento assintótico dos campos	21
2.1.3 Soluções numéricas do modelo de Maxwell-Higgs abeliano	22
2.2 Vórtices no modelo de Chern-Simons-Higgs abeliano	24
2.2.1 Energia estacionária do sistema e equações BPS	27
2.2.2 Comportamento assintótico dos campos	30
2.2.3 Soluções numéricas para os vórtices BPS do modelo CSH abeliano	31
2.3 Vórtices no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs abeliano	34
2.3.1 Energia estacionária do sistema e equações BPS	36
2.3.2 Comportamento assintótico dos campos	39
2.3.3 Soluções numéricas para os vórtices BPS carregados	40
3 Modelo abeliano de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz:	
Vórtices sem carga elétrica	44
3.1 Energia estacionária do sistema	47

3.2	Vórtices BPS descarregados	49
3.2.1	Comportamento assintótico dos vórtices BPS descarregados	51
3.2.2	Soluções numéricas para os vórtices BPS descarregados	52
4	Modelo abeliano de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz:	
	Vórtices carregados	56
4.1	Comportamento assintótico dos vórtices carregados no marco da LIV	60
4.1.1	Soluções numéricas para os vórtices carregados	61
5	Conclusões e perspectivas	66
A	Notações e Convenções	70
B	Publicações	71
B.1	Artigo publicado no Physical Review D	71
B.2	Artigo publicado no Physics Letters B	72
	Referências Bibliográficas	72

Introdução

Em uma grande mesa redonda há um prato de macarrão para cada pessoa sentada e há um garfo em cada lado, um à direita e outro à esquerda, de modo que o número de garfos é igual ao número de pratos. Cada um dos convidados deve se apossar de um dos dois garfos à sua proximidade. Como não há uma regra pré-estabelecida, a primeira pessoa da mesa que pegar o garfo tem duas opções igualmente prováveis, o garfo da direita ou o da esquerda. Uma vez escolhido um dos garfos todos os convidados passam a escolher o garfo da mesma forma: todos têm que pegar o garfo situado do mesmo lado que o primeiro convidado pegou. Dizemos assim que, há duas possibilidades em que todos terão garfos para a macarronada. E ambas têm igual probabilidade de acontecer. Mas, uma vez escolhida uma, a simetria está quebrada. Há, contudo, uma outra possibilidade que vamos ilustrar agora. Supomos que um certo convidado pegue o garfo situado a sua direita, enquanto o convidado diametralmente oposto pega o garfo situado à sua esquerda. Se as pessoas vizinhas seguirem esses convidados, em algum momento, alguém não terá nenhum garfo para pegar e outrem ficará com dois garfos à sua disposição tal como mostrado na figura 1(a). Essa configuração representa *um defeito*.

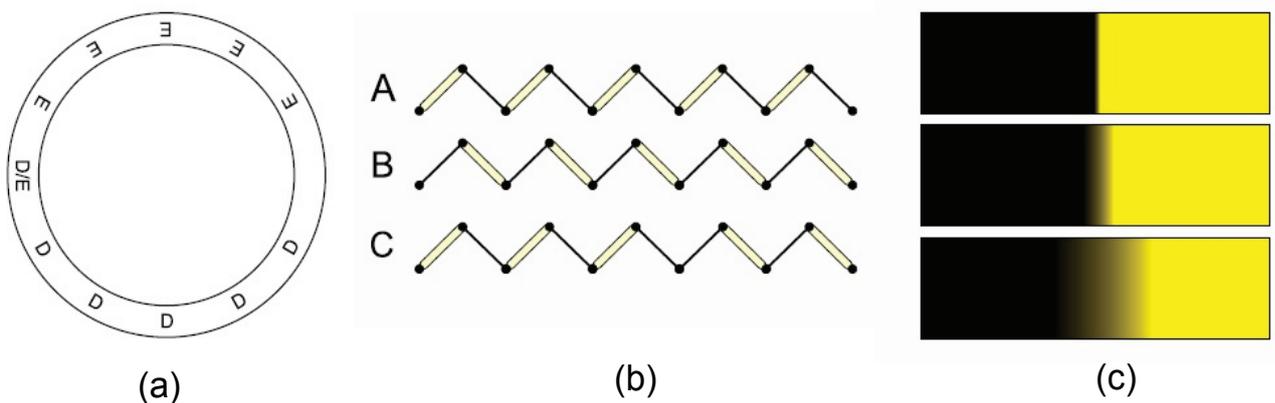


Figura 1:

Para resolver este problema o convidado que tem dois garfos dá um deles para o que não tem nenhuma, jogando ou indo até ele, outra maneira é o que tem dois garfos dá um à seu vizinho,

este por sua vez passa para o próximo, e assim sucessivamente, até chegar ao convidado sem garfo. Finalmente, todos da mesa ficarão com os garfos a sua esquerda ou a sua direita, que é uma das duas situações ordenadas.

Na natureza, os defeitos são configurações que surgem no cotidiano, e em situações onde há uma interface entre duas regiões com soluções ordenadas de forma distinta. Por vezes, temos que decidir entre duas opções que para nós são igualmente satisfatórias. Por exemplo, uma cadeia polimérica de poliacetileno, que se comporta de maneira unidimensional, possui um estado fundamental duplamente degenerado. Essa degenerescência está estritamente relacionada com a instabilidade de Peierls [1, 2]. Existem dois padrões distintos para os elétrons se ligarem aos átomos de carbono para formar a cadeia de poliacetileno com mínima energia - veja as ilustrações A e B da figura 1(b). As configurações *trans* são termodinamicamente estáveis. Cada círculo preto representa um elemento $(CH)_x$. As ligações duplas e simples são ilustradas por linhas duplas e simples, respectivamente. A estrutura do tipo A pode ser levada a B por trocas de ligações, contudo essa troca despense um alto gasto energético, o que torna A e B estáveis. As redes de poliacetileno podem apresentar falhas em suas estruturas que denominamos de *defeitos* do mesmo tipo do exemplo da mesa redonda. Veja a ilustração C da figura 1(b). Há duas ligações simples para um $(CH)_x$. A energia da configuração C é maior do que as de A e B, apesar disso por razões topológicas, ela não decai em uma das duas. Este defeito pode se mover para um dos lados da cadeia, percorrendo todo o polímero ou se aniquilando com um defeito de característica oposta (com duas ligações duplas), assim como no exemplo da mesa, que é a situação com dois garfos percorrendo a mesa até encontrar a situação sem garfo.

Nos exemplos citados acima, a transição de um estado de energia mínima para outro se faz de maneira discreta. Contudo é bem mais comum em sistemas físicos que a passagem se realize de maneira contínua, pois tem graus de liberdades contínuos. Veja por exemplo na figura 1(c), se assumirmos que a região de cor uniforme ilustra um estado de mínima energia, a transição entre as cores pode se realizar discretamente, ou de maneira contínua, como vemos na passagem do preto para o amarelo. O caso mostrado na figura 1(c), ocorre em sistemas ferromagnéticos onde os domínios magnéticos são formados para minimizar a soma das energias magnetostáticas, de troca, de anisotropia e de Zeeman. Em cada domínio os vetores de magnetização estão alinhados em uma mesma direção do espaço. Estes domínios têm tamanhos finitos e entre eles formam-se áreas de transições denominadas paredes de domínios magnéticas. A energia de troca é mais baixa quando a mudança de um domínio para o outro se dá com muitos spins. O termo parede de domínio foi cunhado por P. Weiss em 1907 [3]. Uma parede que separa dois domínios onde

os vetores formam 180° , o ângulo muda de maneira contínua de um domínio para o outro - veja a figura 2. Há dois principais tipos de estruturas de spin dentro de paredes de domínio: paredes de Bloch e paredes de Néel. Nas do primeiro tipo, o vetor de magnetização gira fora do plano dos domínios. Enquanto no segundo tipo, a rotação do spin é no próprio plano.

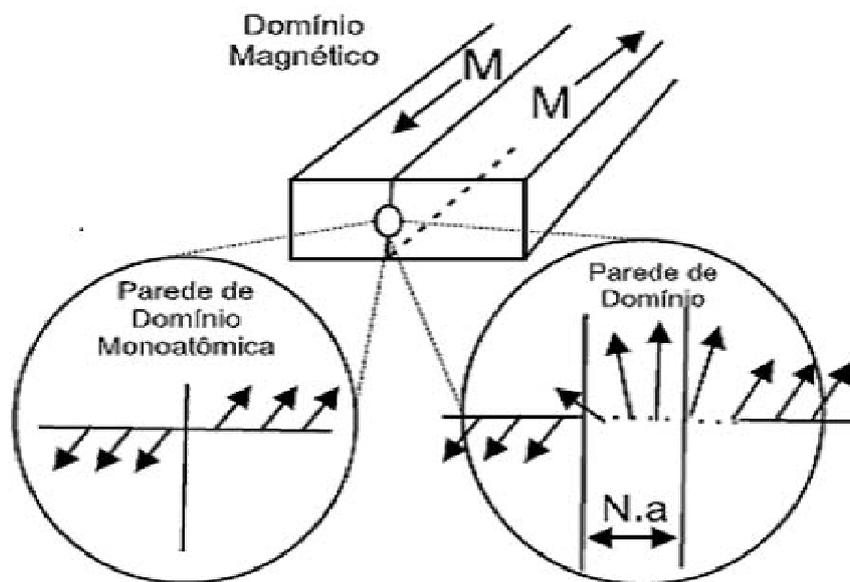


Figura 2:

Na verdade, a simetria discreta de um sistema não é uma condição necessária para a existência de paredes de domínio. É preciso apenas que haja dois estados de energia iguais e que estes estejam desconectados. Novamente ressaltamos o exemplo da mesa. O convidado pode ter dois tipos diferentes de garfos à sua disposição. Não é necessário que elas sejam iguais, o que importa é que um desses garfos não se sobressaia nessa escolha e não que sejam iguais. Caso contrário todos escolheriam as colheres do mesmo lado e não haveria defeito. Recentemente, alguns modelos sem simetria discreta (mas com vácuos desconectados) foram estudados [4] e soluções do tipo paredes foram encontradas. O estudo de soluções de energia localizada foi iniciado por volta de 1845, quando J. Scott Russel [5] apresentou a conjectura de que uma propagação isolada de um pulso de água em canais estreitos fosse causada pelas propriedades do meio. Cinquenta anos depois, Korteweg e de Vries [6] demonstraram que a estabilidade do pulso devia-se a combinação de efeitos não-lineares e dispersivos. A equação de KdV é dada por $\partial u/\partial t + \partial^3 u/\partial t^3 + u\partial u/\partial x = 0$, onde u é a altura de água levantada. As soluções têm velocidades constantes que dependem da amplitude. Algumas das aplicações desta equação são os estudos de ondas na atmosfera, ondas íons-acústicas em um plasma e ondas de pressão em misturas de líquido e gases [7]. Há algumas modificações dessa equação como a mKdV, a de

Schrödinger não-linear, a de Burgers, entre outras. Em 1965, Zabusky e Krustal [8] cunharam a palavra sóliton para caracterizar concentrações de energia em movimento que não se dispersavam e que preservavam sua forma após colisões com outras de mesma propriedade. E por causa dessas características, sólitons apresentam uma boa estrutura matemática para a descrição de uma partícula clássica.

Existem defeitos associados a quebras de simetrias contínuas. Eles são formados na transição de domínios mais sofisticados. Estes defeitos são, por exemplo, cordas e monopólos que quebram as simetrias $U(1)$ e $SU(2)$, respectivamente. Em três dimensões, cordas são objetos unidimensionais e carregados. Foram inicialmente investigados por Nielsen e Olesen [9], que introduziram um modelo de campo escalar complexo acoplado ao campo de Maxwell sendo, por sua vez, uma extensão relativística do modelo de Ginzburg-Landau [10]. Monopólos são configurações puntiformes introduzidas por 't Hooft [11] e Polyakov [12]. Têm carga magnética, e algumas vezes carga elétrica, e são obtidos em modelos onde um isovetor ϕ^a de três componentes é acoplado ao campo não abeliano de Yang-Mills.

Geralmente, modelos que suportam soluções localizadas em teoria de campos relativística envolvem campos escalares que interagem de forma não-linear. Esta espécie de campo é muito utilizada por sua simplicidade e serve para descrever diversas possibilidades presentes na natureza. Por exemplo, paredes de domínio magnéticas podem ser modeladas no limite do contínuo do modelo de Ising, por um simples modelo de teoria de um campo escalar real que corresponde a elongação angular dos spins. Campos escalares surgem naturalmente em física de partículas e campos. O campo escalar de Higgs, por exemplo, é muito importante do modelo padrão, pois ao adquirir valor esperado não nulo, possibilita a geração de massa para as partículas elementares.

O propósito desta dissertação é descrever um tratamento analítico e numérico para o estudo das configurações de vórtices do tipo BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld) em modelos que suportam violação da covariância de Lorentz. Especificamente, modificamos o modelo de Maxwell-Higgs abeliano adicionando termos que violam a covariância de Lorentz que pertencem à eletrodinâmica não birrefringente do setor CPT-par do MPE. É nesse modelo que estudamos a existência de vórtices não carregados e carregados.

Capítulo 1

Defeitos topológicos em teorias de campos escalares

Entre os diferentes campos descrevendo as propriedades de diferentes sistemas físicos, os campos escalares são os mais simples encontrados na natureza. Sua dinâmica e interações podem ser governadas a partir de uma teoria não relativística (no caso da matéria condensada) ou por uma relativística (no caso das partículas fundamentais e suas interações) [13]. Uma das aplicações mais importantes dos campos escalares, está no desenvolvimento da física de partículas e campos, devido ao fato deles apresentarem o fenômeno da quebra espontânea de simetria [14]. Esse fenômeno é de grande interesse na física pelo seguinte fato: faz surgir massa para as partículas elementares, unifica as interações.

Muitos sistemas físicos tridimensionais se comportam de maneira planar ou unidimensional. Os mais simples defeitos podem ser modelados por teorias definidas em uma dimensão espacial. Neste capítulo investigamos defeitos topológicos em modelos de campos escalares reais em $(1 + 1)$ -dimensões. Como é conhecido, a Topologia é uma importante área da matemática relacionada com as propriedades que são preservadas sob deformações contínua de objetos, tais como deformações que envolvem alongamento, mas sem rasgar ou cortar.

Em teorias de campos, defeitos são soluções clássicas das equações de movimento, caracterizados em uma região do espaço em que a ordem do sistema (válida em regiões distantes) é alterada ou quebrada. Desta forma, defeitos podem ser vistos como um conjunto de soluções das equações de movimento que conectam os estados vácuo (mínimos do potencial) do campo em questão. Tais defeitos podem ainda ser classificados como topológicos e não topológicos. Os defeitos topológicos são aqueles que conectam diferentes estados de mínima energia da teoria, válidos em regiões assintóticas; por outro lado, os defeitos não topológicos conectam um

estado de vácuo a ele mesmo, nas duas regiões assintóticas. Desse modo, estamos interessados nos limites assintóticos dos campos (estados de vácuo), ou seja, em seus comportamentos no infinito, e como esta propriedade influencia no sistema físico.

1.1 Campos escalares em (1+1)-D

Nesta seção apresentamos uma revisão sobre sistemas de um único campo escalar real $\phi(x, t)$, imerso no espaço-tempo bidimensional. Avaliamos a presença de soluções clássicas que representam defeitos topológicos. Há uma classe de modelos de um único campo em que a equação de movimento de segunda ordem pode ser resolvida através de equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções minimizam a energia do sistema em consideração e são linearmente estáveis. Iniciamos escrevendo a densidade lagrangiana desse modelo em (1 + 1) – dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (1.1)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial de auto-interação não-linear que, sem perda de generalidade, consideraremos não negativo. Em nosso caso, consideramos uma densidade lagrangiana invariante frente à transformação $\phi \rightarrow -\phi$ (simetria discreta). A equação que rege a dinâmica do campo, também conhecida como equação de movimento, em analogia com a dinâmica de partículas, é obtida via o princípio da mínima ação ($\delta S = 0$), que resulta na seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.2)$$

A substituição da Eq. (1.1) na equação de Euler-Lagrange (1.2), conduz à equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (1.3)$$

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (1.4)$$

que é uma equação diferencial parcial com um termo não-linear. Para configurações de campos estáticos, ou seja, $\phi \rightarrow \phi(x)$, a equação acima reduz-se a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = - \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (1.5)$$

Note que, se obtivermos uma solução estática $\phi(x)$, então a solução correspondente $\phi(x, t)$ é facilmente construída mediante um "boost" de Lorentz $x \rightarrow \gamma(x - vt)$, com $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$,

desde que o modelo em questão admita soluções do tipo onda-viajante, $f(x, t) = f(x - ut)$. Portanto, o problema central aqui é, dado um potencial $V(\phi)$, obter a solução estática, isto é, resolver a equação diferencial de segunda ordem (1.5). Escrevemos agora o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ do modelo, variando-se a ação da densidade lagrangiana (1.1) com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, encontramos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi - V(\phi) \right]. \quad (1.6)$$

A densidade de energia do modelo, correspondente à componente T_{00} da Eq. (1.6), sendo escrita como

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi). \quad (1.7)$$

Dessa forma, a energia estacionária do sistema é dada pela integral sobre todo o espaço da expressão (1.7)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (1.8)$$

As soluções estáticas do modelo devem possuir energia finita. Isto significa que a densidade de energia, T_{00} , tem que ser localizada, sendo nula para $x \rightarrow \pm\infty$, ou seja, $T_{00} = 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Deste modo, a partir da Eq. (1.8), valem as seguintes condições assintóticas:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(\phi) \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

A condição (1.9) indica que o campo ϕ deve ser constante em $x \rightarrow \pm\infty$. Já a condição (1.10) implica que no infinito o campo deve igualar-se a uma das soluções ϕ_i que asseguram $V(\phi_i) = 0$. Formalizamos esta condição escrevendo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \phi_1, \quad (1.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \phi_2, \quad (1.12)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são os *zeros* do potencial, ou seja, $V(\phi_1) = 0 = V(\phi_2)$, e que representam possíveis configurações assintóticas do campo escalar. Pode ocorrer de uma solução conectar a mesma configuração assintótica de mínimo, tanto em $x \rightarrow -\infty$ quanto em $x \rightarrow +\infty$, sendo esta solução denominada de não topológica. Pode ocorrer também da solução conectar configurações assintóticas de mínimo diferentes em $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$, sendo esta solução denominada

de topológica. A classe de modelos que têm sido comumente estudada [15] é constituída de potenciais cujos zeros são os próprios pontos de mínimo absoluto, dados na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} [\mathcal{U}(\phi)]^2, \quad (1.13)$$

onde $\mathcal{U}(\phi)$ é uma função suave (contínua). Neste caso, as soluções passam a conectar pontos de mínimo do potencial. A partir do potencial dado pela Eq. (1.13), a energia do sistema é reescrita como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} [\mathcal{U}(\phi)]^2 \right]. \quad (1.14)$$

1.2 O método de Bogomol'nyi

Para encontrar soluções em uma teoria de campos, usualmente se resolve as equações de Euler-Lagrange, que são de segunda ordem. Entretanto, na década de 70, Bogomol'nyi mostrou que em certas teorias de campos não-lineares a energia é limitada inferiormente por uma carga topológica atingida quando os campos satisfazem equações estáticas de primeira ordem ([16]). Além disso, as soluções são estáveis desde que elas minimizem a energia num dado setor topológico. O método consiste em escrever a energia do sistema em termos de quadrados perfeitos, tal que resulta fácil extremizá-la. A implementação do método de solução de Bogomol'nyi consiste em reescrever a expressão da energia (1.14) na seguinte forma quadrática,

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{d\phi}{dx} \mp \mathcal{U}(\phi) \right]^2 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(\phi) \frac{d\phi}{dx} dx, \quad (1.15)$$

onde se nota que o primeiro termo é definido positivo. Notamos ainda que, para que a energia seja mínima, este termo deve ser nulo, conduzindo à seguinte equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \mathcal{U}(\phi), \quad (1.16)$$

e à correspondente energia mínima do sistema,

$$E_{\min} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(\phi) \frac{d\phi}{dx} dx. \quad (1.17)$$

A energia mínima pode ser expressa em termos de uma função avaliada nas configurações assintóticas do campo ϕ . Com efeito, definindo uma função $W(\phi)$, contínua e diferenciável, tal que, $\mathcal{U}(\phi) = dW/d\phi = W_\phi$ (W é chamado um superpotencial pois a lagrangiana associada ao mesmo corresponde ao setor bosônico de uma extensão supersimétrica), escrevemos a energia

mínima como sendo

$$E_{\min} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} dx = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dx} dx = \pm \{W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]\},$$

$$E_{\min} = \pm [W(\phi_2) - W(\phi_1)] = |\Delta W| = E_B, \quad (1.18)$$

que é conhecido como limite de Bogomol'nyi. Notamos que, mesmo sem conhecer a solução $\phi(x)$, este limite é determinado conhecendo-se apenas o superpotencial $W(\phi)$ e os valores assintóticos de $\phi(x)$, que são mínimos de $V(\phi) = (1/2) [\mathcal{U}(\phi)]^2 = (1/2) [W_\phi]^2$, ou seja, pontos críticos de W . Escrevemos a Eq. (1.16) em termos de W_ϕ ,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \mathcal{U}(\phi) = \pm W_\phi. \quad (1.19)$$

Os estados que são soluções da equação (1.16) são aqueles que saturam o limite de Bogomol'nyi, com energia $E_B = E_{\min} = |\Delta W| \neq 0$. São chamadas de *estados BPS* (Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfeld) [17]. Neste caso, o método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção da equação diferencial de primeira ordem, permite escrever a energia associada à configuração estática de forma simples, fechada e mínima. Usando as Eqs. (1.16) e (1.13) extraímos uma importante condição

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \geq 0. \quad (1.20)$$

Embora uma solução $\phi(x)$ da equação de movimento de segunda ordem (1.5) sujeita às condições de contorno (1.9) e (1.10) deva ser tal que $V(\phi) = (1/2) [d\phi/dx]^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, nem todos os potenciais necessitam ser da forma (1.13) acima. No entanto, não podemos ter solução conectando pontos de máximo pelo seguinte fato. Se a solução "interpola" ϕ_1 e ϕ_2 quando x vai de $-\infty$ a $+\infty$, então supor que ϕ_i ($i = 1$ ou 2) é ponto máximo local de $V(\phi)$, com $V(\phi_i) = 0$, conduz a $V(\phi(x)) < 0$ para valores de $\phi(x)$ próximo de ϕ_i , que é incompatível com a Eq. (1.20).

1.3 Defeitos topológicos em sistemas descritos por campos escalares

1.3.1 Índices topológicos e carga topológica

Outro conceito importante é dos índices topológicos e carga topológica. A idéia é usar alguma propriedade das soluções, que nos permita classificá-las [18]. Para sistemas definidos

em uma dimensão espacial, para ter soluções de energia finita, a densidade de energia deve ser localizada, implicando que o campo assuma os valores de vácuo no $-\infty$ e no $+\infty$, onde cabe a possibilidade inclusive de assumir o mesmo valor. Em geral, os mínimos do potencial formam um conjunto discreto. Assim, em algum instante de tempo, t_0 , temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t_0) = \phi. \quad (1.21)$$

Quando o tempo evolui, o campo muda continuamente com t , em cada ponto de x . Assim, $\phi(\infty, t)$ é uma função contínua de t . Para que a energia da solução seja finita, é necessário que $\phi(\infty, t)$ assuma algum dos mínimos discretos do potencial, ϕ_i . Sabemos que a configuração assintótica não pode pular (mudar abruptamente) de ϕ_i a outro mínimo qualquer, uma vez que a mudança deve ocorrer de forma contínua, como já vimos. Por outro lado, a condição de finitude da energia estipula que a configuração assintótica deve estar sempre "amarrada" em um dos valores mínimos, que formam um conjunto discreto e não contínuo. A conclusão então é que a configuração assintótica do campo, uma vez definida no mínimo ϕ_i , permanece fixa neste mínimo, não podendo mudar para nenhum outro ϕ_j , com $i \neq j$, conferindo caráter estacionário a $\phi(\infty, t)$. O mesmo vale para $\phi(-\infty, t)$, que assume o valor mínimo ϕ_l , com $i = l$, ou $i \neq l$. Logo, todas as soluções de energia finita terão suas condições de contorno fixas.

As diferentes configurações assintóticas servem para dividir de soluções de energia finita em setores topológicos, caracterizados por dois índices topológicos (i, j), que determinam os valores dos mínimos $\phi_i = \phi(x = \infty)$ e $\phi_j = \phi(x = -\infty)$. Estes setores são topologicamente desconectados, no sentido de que uma vez estabelecida uma determinada configuração assintótica (definindo um certo setor), o campo não pode ser deformado a outra configuração assintótica (que define outro setor), sem violar a condição de energia finita.

Além dos índices, existe outra quantidade usada na literatura conhecida como carga topológica, que é uma carga conservada que não está associada com uma corrente de Noether¹. De um modo geral, as soluções da equação de movimento de segunda ordem (1.5), podem ser classificadas através da introdução da seguinte corrente topológica:

$$j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (1.22)$$

Considerando o caráter antisimétrico de $\epsilon^{\mu\nu}$, vemos que se trata de uma corrente conservada, pois

$$\partial_\mu j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0, \quad (1.23)$$

¹O teorema de Noether garante que, para cada simetria contínua, temos uma quantidade conservada. Podemos construir sistemas que possuem carga conservada sem que esta advenha da corrente de Noether.

esta não é uma corrente de Noether por não advir de uma simetria contínua no sistema.

A densidade de carga correspondente é $\rho = j_0 = d\phi/dx$, por conseguinte, a carga conservada associada é escrita como

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = \phi_1 - \phi_2. \quad (1.24)$$

Note que o valor da carga depende apenas dos comportamentos assintóticos do campo $\phi(x)$. Baseado na Eq. (1.24), uma solução é chamada de topológica quando apresenta carga topológica diferente de zero ($Q \neq 0$), situação em que o campo deve assintoticamente ir à valores distintos; quando $Q = 0$, o setor é denominado de não topológico. Assim, as soluções são topológicas se $\phi_1 \neq \phi_2$, ou seja, quando conectam mínimos distintos do potencial V , e não topológicas quando $\phi_1 = \phi_2$, isto é, quando conectam um mínimo a ele mesmo. Para os modelos com $V = (1/2) W_\phi^2$ as soluções BPS são topológicas, caso contrário, teríamos $\phi_1 = \phi_2$, levando a $\Delta W = W(\phi_2) - W(\phi_1) = 0$. As soluções da equação de primeira ordem (1.19) são exatamente as soluções da equação de segunda ordem (1.5), o que é particularmente válido no caso de $V = (1/2) W_\phi^2$, indicando que todas as soluções topológicas destes modelos são BPS. Como foi visto anteriormente, no caso de sistemas de campos escalares descritos por potenciais inferiormente limitados, para que haja soluções topológicas é exigido que o potencial considerado apresente mais de um mínimo. Estas soluções representam objetos denominados *defeitos topológicos*. Para termos uma ideia destes objetos notemos que, no caso de um sistema de um campo escalar com solução (topológica) $\phi(x)$, o defeito topológico corresponde a uma interface $[x_0 - \Delta/2; x_0 + \Delta/2]$ que separa duas regiões onde o campo $\phi(x)$ assume os diferentes pontos de mínimo $\phi_1 \equiv \phi(-\infty) \approx \phi(x < x_0 - \Delta/2)$ e $\phi_2 \equiv \phi(+\infty) \approx \phi(x > x_0 + \Delta/2)$. Como a densidade de energia da solução topológica $\phi(x)$ é dada por $\epsilon(x) = (d\phi/dx)^2$ então a energia está concentrada principalmente na região do defeito $[x_0 - \Delta/2; x_0 + \Delta/2]$. Tal defeito recebe o nome de *kink* e sua imersão em três dimensões espaciais representa uma parede de espessura Δ no eixo x centrada em x_0 e se estendendo paralelamente ao plano yz , denominada *parede de domínio*. Mas existem também defeitos topológicos que surgem como soluções de outras teorias de campos, envolvendo não apenas campos escalares reais. De um modo geral, estes defeitos são classificados de acordo com o grupo de simetria da *variedade de vácuo*, que é o conjunto de pontos de mínimo de potencial. Assim, nos modelos com campos escalares reais descritos por potenciais que possuem uma quantidade finita de pontos de mínimos, apresentando *simetria discreta*, surgem os kinks, como veremos mais adiante, e as paredes de domínio. Por outro lado, em modelos envolvendo campos complexos e campos de gauge com *simetria contínua abeliana* do grupo $U(1)$ temos *vórtices* e as chamadas *cordas cósmicas* de Nielsen e Olesen e no caso

de simetria de gauge não abeliana surgem os monopólos de 't Hooft-Polyakov. Tais objetos topológicos têm muitas aplicações em cosmologia, onde as cordas cósmicas são frequentemente usadas na explicação da formação de galáxias e aglomerados de galáxias.

1.4 Defeito tipo kink

Já sabemos que para a existência de soluções topológicas $\phi(x)$ é necessário que o potencial de interação tenha mais de um mínimo e seja limitado inferiormente. Quando tais soluções são obtidas num espaço-tempo de $(1+1)$ -dimensões, são chamadas de soluções tipo-kink [19]. Esse tipo de defeito é originado a partir de uma simetria discreta ($\phi \rightarrow -\phi$), possui energia finita, suas soluções são estáveis e conectam duas regiões do espaço onde o campo assume diferentes mínimos. Existem ainda aplicações de kinks em matéria condensada. Para ver de forma explícita o defeito tipo kink, consideramos a seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi). \quad (1.25)$$

O potencial para este modelo é o conhecido como $\lambda\phi^4$, possuindo a seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2. \quad (1.26)$$

É fácil notar que este potencial é não-negativo, apresenta a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ e possui mínimos em $(\phi^2 = a^2)$, λ é um parâmetro positivo com dimensão de energia e a é positivo.

A equação de movimento é obtido a partir da equação de Euler-Lagrange, e possui a seguinte forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi \quad (1.27)$$

Lembrando que estamos considerando apenas soluções estáticas, escrevemos a equação de movimento na forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi. \quad (1.28)$$

Usando (1.26) na equação de primeira ordem (1.19), temos que

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \lambda (\phi^2 - a^2). \quad (1.29)$$

cuja solução, obtida por integração direta, é dada por

$$\phi(x) = \pm a \tanh[\lambda a(x + x_0)], \quad (1.30)$$

onde x_0 é um ponto qualquer no eixo x . A solução positiva é denominada kink e a negativa é denominada anti-kink (Vide Figura 1.1).

Conforme (1.18), a energia mínima de Bogomol'nyi é escrita como

$$E_B = \pm \lambda \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi (\phi^2 - a^2) \quad (1.31)$$

resultando em um valor de energia constante

$$E_B = \frac{4}{3} \lambda a^3, \quad (1.32)$$

que é realmente finita, tanto para o *kink*, quanto para o *anti-kink* (Veja figura 1.1).

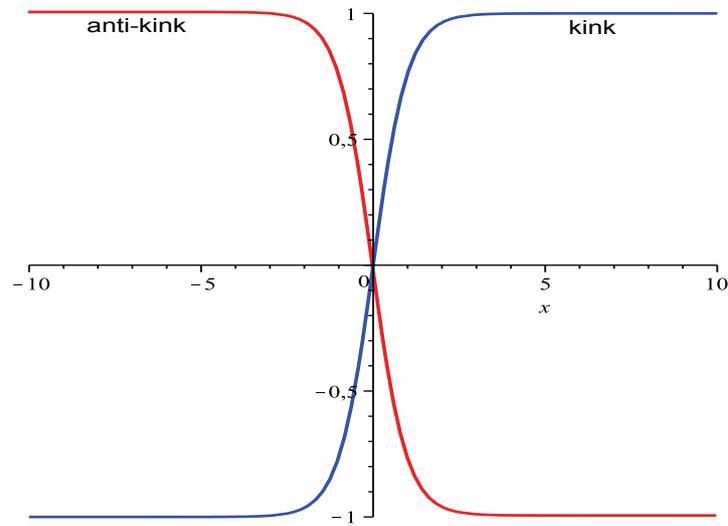


Figura 1.1: $\phi(x)$, a solução do sistema para $a = 1$, $\lambda = 1$ e $x_0 = 0$.

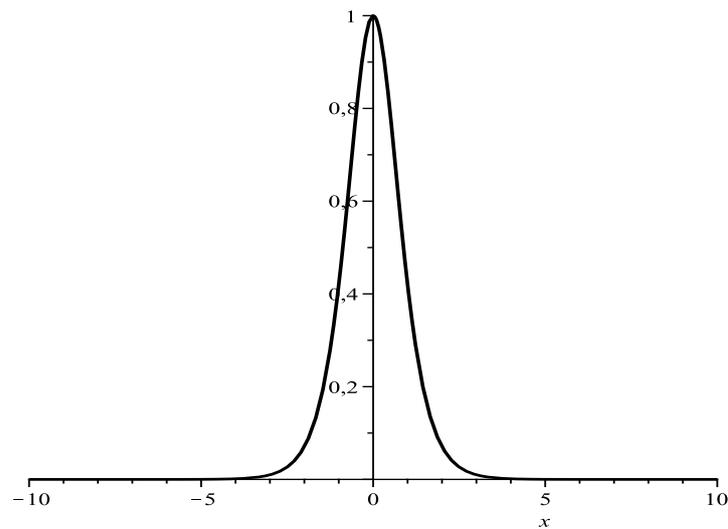


Figura 1.2: A densidade de energia ε do sistema para $a = 1$, $\lambda = 1$ e $x_0 = 0$.

A densidade de energia ε do sistema é, facilmente, obtida a partir de (1.31) usando (1.30)

$$\varepsilon = \pm \lambda a^2 \operatorname{sech}^2 [\lambda a (x + x_0)] \quad (1.33)$$

Note que, quando $x \rightarrow \pm\infty$, $\phi(x)$ tende para os estados de vácuo do potencial (vide Fig. 1.2). Assim, concluí-se que em um modelo escalar real em $(1 + 1)$ -dimensões, é possível obter soluções estáticas de energia finita, desde que certas condições de contorno sejam satisfeitas.

Capítulo 2

Campos de gauge abelianos acoplados ao campo de Higgs

2.1 Vórtices no modelo de Maxwell-Higgs abeliano

O modelo Maxwell-Higgs abeliano descreve um campo de gauge abeliano interagindo com um campo escalar carregado num potencial tipo $|\phi|^4$. A densidade lagrangiana deste modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.1)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante, λ é a constante de acoplamento, e v é o valor esperado no vácuo do campo escalar de Higgs. A densidade lagrangiana acima é invariante frente as transformações de gauge locais do tipo

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) e^{i\alpha(x)}, \quad (2.2)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.3)$$

Note-se que, λ^2 , e^2 e v^2 tem cada um dimensão de massa; e a densidade lagrangiana (2.1) tem uma fase de Higgs com um campo de gauge de massa $m_g = \sqrt{2}ev$, junto com um campo escalar real de massa $m_s = \sqrt{2}\lambda v$. Em geral, estas duas escalas de massa são independentes, e modelo Maxwell-Higgs abeliano apresenta um comportamento muito diferente, dependendo da magnitude relativa destas duas escalas [23].

O modelo (2.1) exhibe soluções estáveis de vórtices (sem carga) carregando fluxo magnético que foram primeiramente estudados por Nielsen e Olesen [9]. Estas configurações de vórtices

são muito importantes na teoria de Landau-Ginzburg da supercondutividade [10], isso porque o funcional da energia estática para o modelo Maxwell-Higgs abeliano relativístico coincide com a energia livre não-relativística de Landau-Ginzburg na teoria de supercondutores tipo II, na qual soluções de vórtices foram primeiramente estudadas por Abrikosov [20].

Podemos extrair as equações de movimento da densidade lagrangiana (2.1) via as equações de Euler-Lagrange, que são

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu, \quad (2.4)$$

$$D_\mu D^\mu \phi + \lambda^2 (|\phi|^2 - v^2) \phi = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$J^\mu = i [\phi (D^\mu \phi)^* - \phi^* D^\mu \phi], \quad (2.6)$$

define a densidade de corrente conservada do modelo. Vamos escrever estas equações de movimento em sua forma indicial. Fazendo inicialmente $\mu = 0$ em (2.4), obtemos a lei de Gauss do modelo,

$$\partial_i E^i = eJ_0. \quad (2.7)$$

com $E^i = F^{i0}$ definindo as componentes do campo elétrico. Por outro lado, para $\mu = i$ em (2.4), obtemos a lei de Ampère,

$$\partial_t E^i + \epsilon_{ij} \partial_j B = eJ_i, \quad (2.8)$$

onde $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j = F_{12}$ define o campo magnético, que em (1+2) dimensões é um pseudo-escalar.

A equação de movimento do campo de Higgs (2.5) pode ser escrita em forma explícita

$$\square \phi - 2ieA_0 \partial_t \phi - ie\phi \partial_t A_0 - e^2 A_0^2 \phi + 2ieA_i \partial_i \phi + ie\phi \partial_i A_i + e^2 A_i^2 \phi = -\lambda^2 (|\phi|^2 - v^2) \phi. \quad (2.9)$$

A partir de agora, consideramos apenas configurações estáticas de campos; sendo assim, podemos reescrever as equações de movimento na forma seguinte

$$\partial_i^2 A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.10)$$

$$\partial_i (\partial_k A_k) - \partial_i^2 A_i = eJ_i, \quad (2.11)$$

$$-\partial_i^2 \phi - e^2 A_0^2 \phi + 2ieA_k \partial_k \phi + ie\phi (\partial_k A_k) + e^2 A_i^2 \phi = -\lambda^2 (|\phi|^2 - v^2) \phi. \quad (2.12)$$

Em uma primeira abordagem, o setor elétrico pode ser feito nulo ($A_0 = 0$), condição esta consistente com as equações de movimento dadas em (2.4) e (2.5), o que implica na obtenção de

soluções de vórtices descarregados. Como as soluções de vórtices são rotacionalmente simétricas, utilizamos o seguinte ansatz

$$\phi = vg(r) \exp(in\theta), \quad (2.13)$$

$$A_r = 0, \quad A_\theta = -\frac{1}{er} [a(r) - n]. \quad (2.14)$$

Esse ansatz satisfaz automaticamente o gauge de Coulomb, $\partial_i A_i = 0$, sendo similar ao proposto por Abrikosov na obtenção dos vórtices nos supercondutores de alta T_c .

Como estamos restritos ao plano, faz-se necessário o uso das seguintes relações,

$$A_1 = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta, \quad A_2 = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta, \quad (2.15)$$

$$\partial_1 = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta, \quad \partial_2 = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta. \quad (2.16)$$

A implementação do ansatz dado em (2.13) e (2.14) nas Eqs.(2.11) e (2.12), nos conduz a equações diferenciais ordinárias acopladas para os campos $g(r)$ e $a(r)$,

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} = 2e^2 v^2 g^2 a, \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2}{r^2} g = \lambda^2 v^2 (g^2 - 1). \quad (2.18)$$

Este ansatz ainda nos proporciona a seguinte expressão para o campo magnético em termos da função $a(r)$.

$$B(r) = -\frac{a'}{er}. \quad (2.19)$$

2.1.1 Energia estacionária do sistema

A densidade de energia do sistema físico em questão é dada pela relação

$$\mathcal{H} = \pi^\rho \dot{A}_\rho + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}, \quad (2.20)$$

onde os momentos canônicos π^ρ , π e π^* estão dados por

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\rho}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*}. \quad (2.21)$$

Como estamos lidando apenas com configurações estáticas de campos ($\dot{A}_\rho = \dot{\phi} = \dot{\phi}^* = 0$), então a densidade de energia do sistema torna-se simplesmente $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, sendo escrita como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D_\mu \phi|^2 + \frac{\lambda^2}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (2.22)$$

Para expressar a densidade \mathcal{H} em termos do campo magnético e do campo ϕ , usamos:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2B^2, \quad |D_\mu\phi|^2 = -|D_i\phi|^2, \quad (2.23)$$

onde também foi utilizado a condição de gauge, $A_0 = 0$. Com isso, resulta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}B^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{\lambda^2}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (2.24)$$

Calculamos agora o termo $|D_i\phi|^2$,

$$|D_i\phi|^2 = \partial_i\phi^*\partial_i\phi + ie\phi^*A_k\partial_k\phi - ie\phi A_k\partial_k\phi^* + e^2A_k^2|\phi|^2. \quad (2.25)$$

A substituição do ansatz (2.13) e (2.14) em cada um dos termos da densidade (2.24), e fazendo uso da Eq. (2.19), leva às seguintes expressões

$$|D_i\phi|^2 = v^2g'^2 + v^2\frac{a^2g^2}{r^2}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\lambda^2}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2 = \frac{\lambda^2}{2}v^4 (g^2 - 1)^2, \quad (2.27)$$

as quais nos conduzem à seguinte densidade de energia:

$$\mathcal{H} = \frac{a'^2}{2e^2r^2} + v^2g'^2 + v^2\frac{a^2g^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{2}v^4 (g^2 - 1)^2. \quad (2.28)$$

A energia do sistema é dada como a integral de \mathcal{H} sobre o espaço, ou seja,

$$E = \int d^2r \left[\frac{a'^2}{2e^2r^2} + v^2 \left(g'^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda^2v^4}{2} (g^2 - 1)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Aplicaremos agora o método de Bogomol'nyi sobre a energia dada pela eq. (2.29), método este que consiste em escrever a energia como uma soma de termos quadráticos. Sendo assim, fazemos

$$\frac{a'^2}{2e^2r^2} + \frac{\lambda^2v^4}{2} (g^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp \lambda v^2 (g^2 - 1) \right]^2 \pm \lambda v^2 \frac{a'}{er} g^2 \mp \lambda v^2 \frac{a'}{er}, \quad (2.30)$$

e

$$g'^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} = \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm \frac{a(g^2)'}{r}. \quad (2.31)$$

Substituindo as relações acima na Eq. (2.29), temos

$$E = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp \lambda v^2 (g^2 - 1) \right]^2 + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm v^2 \frac{a(g^2)'}{r} \pm \lambda v^2 \frac{a'}{er} g^2 \mp \lambda v^2 \frac{a'}{er} \right\}. \quad (2.32)$$

Notamos que, para que possamos expressar a energia E numa forma quadrática fechada, é necessário impor a seguinte condição entre as constantes de acoplamento:

$$e = \lambda. \quad (2.33)$$

Com isto, vale

$$v^2 \frac{a(g^2)'}{r} + \lambda v^2 \frac{a'}{er} g^2 = v^2 \frac{(ag^2)'}{r}, \quad (2.34)$$

levando a energia (2.32) à forma,

$$E = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right]^2 + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} \mp v^2 \frac{a'}{r} \right\}. \quad (2.35)$$

Neste estágio convém estudar as condições de contorno válidas para os campos, usando-as ao nosso favor. É fato que as soluções do sistema devem ter energia total finita, o que exige que a densidade de energia seja localizada (tem que ser nula para $r \rightarrow \infty$). Para que isto seja verdade, cada termo quadrático da densidade de energia (2.28) deve tender a zero no infinito. As condições que garantem isto são:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0^\pm, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1. \quad (2.36)$$

Na origem os campos $a(r)$ e $g(r)$ devem satisfazer condições que sejam consistentes com o ansatz dado pelas Eqs. (2.13) e (2.14), ou seja, na origem o campo de Higgs $\phi(r)$ deve ser unívoco e a componente angular do campo potencial vetor $\mathbf{A}(r)$ não deve divergir. Baseado nessas exigências, impomos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad (2.37)$$

onde n é a vorticidade¹ da configuração. Devemos lembrar que o sinal (+) na Eq. (2.36) corresponde a $n > 0$, enquanto o sinal (−) corresponde a $n < 0$.

As condições obtidas em (2.36) e (2.37) eliminam o termo de divergência total da energia (2.32), resultando em

$$E = \mp v^2 \int d^2r \frac{a'}{r} + \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right]^2 + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\}. \quad (2.38)$$

Calculando a integral do último termo da energia

$$\int d^2r \frac{a'}{r} = 2\pi [a(\infty) - a(0)] = -2\pi n, \quad (2.39)$$

¹ n é uma propriedade topológica que representa o número de linhas de vórtices que circulam o centro do vórtice.

e usando as condições impostas sobre $a(r)$, temos

$$E = \pm 2\pi n v^2 + \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right]^2 + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\}. \quad (2.40)$$

Considerando a positividade da energia, para que a expressão (2.40) seja mínima, devemos impor que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$\frac{a'}{r} = \pm e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (2.41)$$

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.42)$$

que conduzem simplesmente a

$$E_{BPS} = 2\pi |n| v^2, \quad (2.43)$$

sendo E_{BPS} a energia mínima do sistema.

As Eqs. (2.41) e (2.42) são as chamadas equações BPS do sistema, equações diferenciais de primeira ordem, que regem a dinâmica dos vórtices no modelo Maxwell-Higgs abeliano, e cuja energia é dada pela equação (2.43). Um ponto interessante a ser observado aqui é que o campo magnético do sistema é dado por (2.19), de modo que podemos escrever a energia mínima do sistema como o próprio fluxo magnético

$$E = \pm ev^2 \Phi_B, \quad (2.44)$$

onde

$$\Phi_B = \int d^2r B. \quad (2.45)$$

Podemos ainda reescrever a Eq. (2.41) em termos do campo magnético

$$B = \pm ev^2 (1 - g^2), \quad (2.46)$$

da qual podemos concluir que na origem, onde $g(0) = 0$, o campo magnético B atinge seu valor máximo ($B = ev^2$).

Para poder fazer as análises assintóticas e a solução numérica dos vórtices BPS do modelo MH, rescrevemos as equações BPS (2.41)–(2.42) usando a variável adimensional $t = evr$, assim, temos que

$$g(r) \rightarrow \bar{g}(t), \quad a(r) \rightarrow \bar{a}(t), \quad B(r) \rightarrow ev^2 \bar{B}(t),$$

$$\frac{\bar{a}'}{t} = \mp (1 - \bar{g}^2), \quad (2.47)$$

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{a}\bar{g}}{t}, \quad (2.48)$$

2.1.2 Comportamento assintótico dos campos

Neste parte, focaremos no comportamento dos campos, quando $t \rightarrow +\infty$ e quando $t \rightarrow 0$. Isso é feito conhecendo-se a forma funcional dos campos nestes limites. O procedimento é realizado da seguinte maneira: introduzimos funções que representam o comportamento funcional dos campos nos limites considerados como sendo pequenas variações em torno dos valores limítrofes dos campos. Sendo assim, podemos escrever as seguintes relações quando $t \rightarrow \infty$:

$$\bar{a} = \pm \delta a_1, \quad \bar{g} = 1 - \delta g_1, \quad (2.49)$$

relações estas que quando levadas às Eqs. (2.47) e (2.48) resultam

$$\frac{(\delta a_1)'}{t} = -2(\delta g_1), \quad (2.50)$$

$$(\delta g_1)' = -\frac{(\delta a_1)}{t}. \quad (2.51)$$

Estas equações podem ainda ser desacopladas, através da substituição de uma em outra

$$(\delta g_1)'' + \frac{1}{t}(\delta g_1)' - 2(\delta g_1) = 0, \quad (2.52)$$

$$(\delta a_1)'' - \frac{1}{t}(\delta a_1)' - 2(\delta a_1) = 0, \quad (2.53)$$

cujas soluções adequadas com as condições no infinito são

$$\delta g_1(t) \sim K_0(\sqrt{2}t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\sqrt{2}t), \quad (2.54)$$

$$\delta a_1(t) \sim \sqrt{2}t K_1(\sqrt{2}t) \sim \sqrt{t} \exp(-\sqrt{2}t) \quad (2.55)$$

onde K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel de segunda classe de ordem zero e um, respectivamente. A escala de massa do modelo é obtida a partir dos argumentos das funções de Bessel ou das exponenciais, de modo que temos

$$m_{MH} = \sqrt{2}ev. \quad (2.56)$$

Quando $t \rightarrow 0$, resolvemos as equações BPS, (2.47) e (2.48), pelo método de série de potências, ou seja,

$$\bar{a} = n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad \bar{g} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k t^k, \quad (2.57)$$

que originam as seguintes equações:

$$\bar{g} = Gt^{|n|} - \frac{G}{4}t^{|n|+2} + \mathcal{O}(t^{|n|+4}), \quad (2.58)$$

$$\bar{a} = n - \frac{t^2}{2} + \frac{G^2}{2(|n|+1)}t^{2|n|+2} + \mathcal{O}(t^{2|n|+4}). \quad (2.59)$$

O valor da constante G não pode ser determinado pelo comportamento assintótico dos campos perto da origem, mas pode vir a ser fixado pelo comportamento no infinito. Uma situação similar é encontrada no trabalho da ref. [24]. Da Eq. (2.59) podemos inferir o valor do campo magnético na origem:

$$B(0) = ev^2. \quad (2.60)$$

2.1.3 Soluções numéricas do modelo de Maxwell-Higgs abeliano

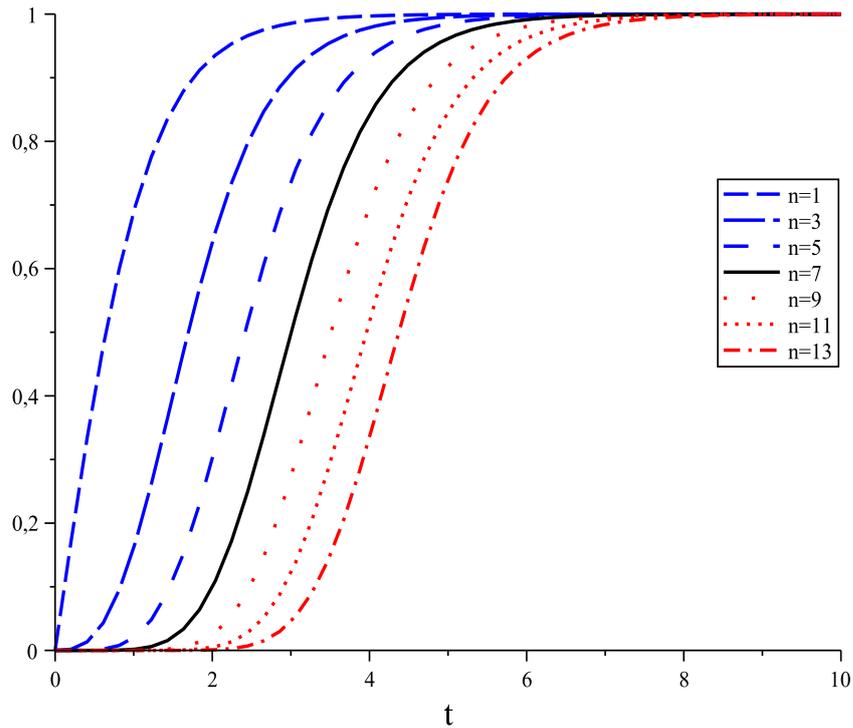


Figura 2.1: Campo de Higgs $\bar{g}(t)$ para vários valores de n .

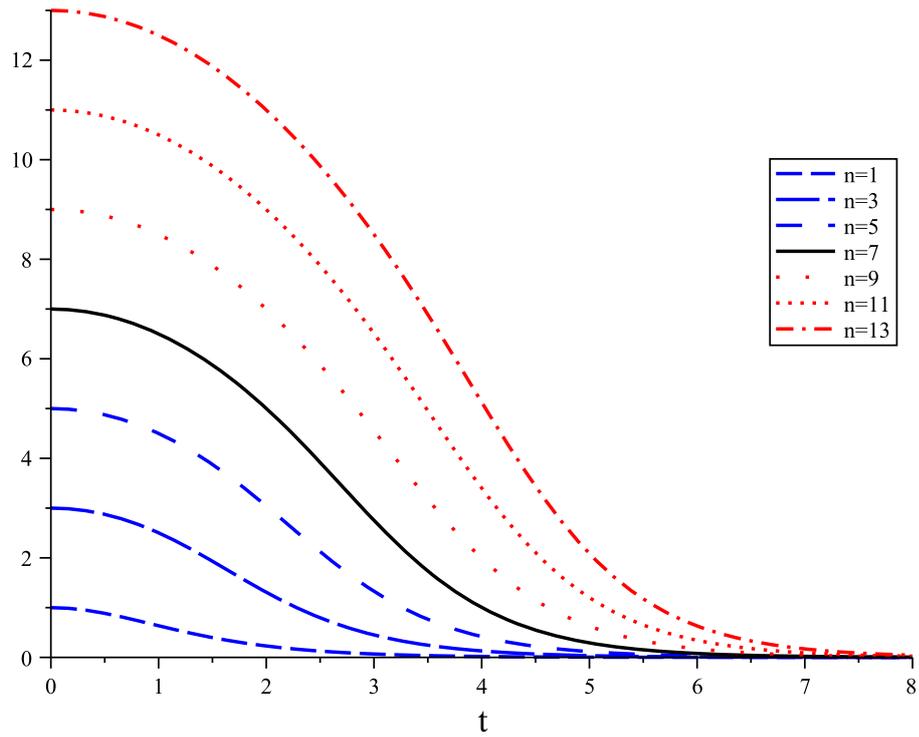


Figura 2.2: Potencial vetor $\bar{a}(t)$ para vários valores de n .

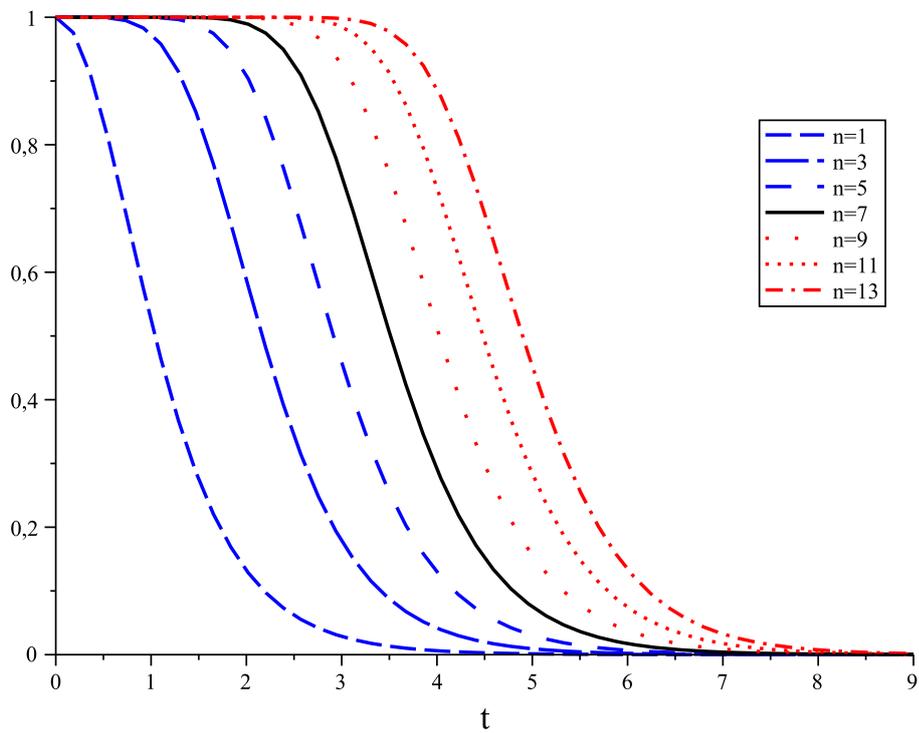


Figura 2.3: Campo magnético $\bar{B}(t)$ para vários valores de n .

O potencial $V(|\phi|)$ fornece informações acerca do mínimo absoluto da teoria, ou seja, o estado de vácuo do modelo. Se usarmos a solução trivial para o mínimo de $V(|\phi|)$ chegamos a um

valor constante igual a zero. Em vez disto, estamos interessados em soluções de mínimos não triviais, ou seja, $|\phi_{\min}| \neq 0$. A quebra espontânea de simetria em potenciais tipo $|\phi|^4$, por exemplo, fornece o que precisamos: $|\phi_{\min}| = v$. A partir das Eqs. (2.58), (2.59), (2.54) e (2.55), concluímos que as soluções são vórtices localizados no sentido de que os campos tendem exponencialmente para seus valores assintóticos, com comprimento característico que depende da escala de massa da teoria [21]:

$$m_s = m_g = m_{MH} = \sqrt{2}ve. \quad (2.61)$$

Isso acontece quando temos $e = \lambda$, condição onde as equações BPS são satisfeitas. Numericamente, tem sido mostrado que dois vórtices (ou dois anti-vórtices) repelem-se se $m_s > m_g$, e atraem-se quando $m_s < m_g$. Quando as massas são iguais, $m_s = m_g$, as forças entre os vórtices desaparecem, sendo possível encontrar configurações multi-vórtices estáticas. Esse ponto crítico, $m_s = m_g$, no modelo de Landau-Ginzburg para a supercondutividade corresponde à fronteira entre supercondutividade tipo-I e tipo-II.

2.2 Vórtices no modelo de Chern-Simons-Higgs abeliano

O termo de Chern-Simons surge naturalmente de (1+2)-dimensões e, especificamente, numa da teoria de campos descrevendo o efeito Hall quântico. A existência de soluções de vórtices BPS e carregados foram mostradas no âmbito da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs no trabalho seminal de R. Jackiw e E. J. Weinberg [24]. Além disso, existem conexões matemáticas interessantes com modelos inspirados em sistemas integráveis. O modelo mais familiar para descrever a supercondutividade é dado pelo modelo de Ginzburg-Landau, formulado dentro da eletrodinâmica de Maxwell convencional. Entretanto, esta teoria somente pode suportar configurações de vórtices eletricamente neutros, como visto anteriormente, sendo assim incapaz de descrever a classe de vórtices eletricamente e magneticamente carregados. Uma possível solução teórica para abordar tais possibilidades consiste em modificar a eletrodinâmica de Maxwell adicionando um termo de Chern-Simons, que então passa a suportar configurações de vórtices eletricamente e magneticamente carregados.

Nesta seção, focamos primeiramente no estudo do modelo abeliano de Chern-Simons-Higgs descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\kappa e^2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|), \quad (2.62)$$

onde $V(|\phi|)$ é o potencial do modelo, κ é o parâmetro adimensional de Chern-Simons. Como já visto anteriormente, o potencial que gera soluções tipo vórtice deve apresentar quebra espontânea de simetria, ter mais de um mínimo, além de ser limitado inferiormente. Um potencial que satisfaz estas exigências tem a forma

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.63)$$

onde λ é adimensional. É fácil verificar que a teoria tem dois estados de vácuos, cujos valores esperados no vácuo são: $|\phi| = 0$ e $|\phi| = v$, simétrico e assimétrico, respectivamente. Quando $|\phi| = 0$, as massas são $m_A = 0$ e $m_H = \lambda v^2/\kappa$ e, para $|\phi| = v$, as massas são $m_A = \sqrt{2}ev$ e $m_H = \sqrt{2}\lambda v^2/\kappa$. Como consequência, o modelo suporta dois tipos distintos de configurações de vórtices: os vórtices “topológicos” associados ao vácuo assimétrico, e os vórtices “não-topológicos” associados ao vácuo simétrico. Um outro detalhe que deve ser mencionado é que a estrutura do modelo, com o potencial dado acima, para $\lambda = 1$, que permite vórtices BPS carregados implica na igualdade das massas do campo de gauge com o campo de Higgs: $m_A = m_H = \sqrt{2}\frac{v^2}{\kappa}$, isto é, quando a carga elétrica alcança o valor $e = v/\kappa$. Tal feito acaba gerando as equações auto-duais, como será mostrado nesta seção.

As equações de movimento para estes campos, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, via princípio de minimização da ação, são:

$$\frac{1}{2}\kappa e \epsilon^{\mu\beta\gamma} F_{\beta\gamma} + J^\mu = 0, \quad (2.64)$$

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.65)$$

onde J^μ é a densidade de corrente dada pela Eq. (2.6). Nota-se que o campo eletromagnético é não-dinâmico, uma vez que, não há a presença do termo de Maxwell que confere dinâmica ao campo.

A lei da Gauss, obtida a partir da Eq. (2.64), é escrita em termos do campo magnético na forma

$$\kappa e B = -J_0, \quad (2.66)$$

estabelecendo uma relação entre os setores elétrico e magnético do campo de calibre. Ainda, podemos expressá-la em termos da carga e do fluxo magnético via integração direta,

$$\kappa e \Phi_B = -Q. \quad (2.67)$$

Esta relação mostra que os vórtices eletricamente carregados também carregam consigo fluxo magnético.

A lei de Ampère, também obtida a partir da Eq. (2.64), é

$$\kappa \epsilon_{ij} E_j = J_i. \quad (2.68)$$

Quando $\phi = 0$, o campo escalar descreve uma partícula carregada com massa $m = \frac{v^2}{\kappa}$. O termo de Chern-Simons tem o efeito de mudar o spin destas partículas. Uma vez que as mesmas têm carga 1, a lei de Gauss implica que tenham fluxo magnético $(e\kappa)^{-1}$. A fase de Aharonov-Bohm concede-lhes um spin “efetivo” igual a $(4\pi\kappa)^{-1}$. Na fase de Higgs $\phi = v$, existe uma partícula escalar neutra de massa $m = \sqrt{2} \frac{v^2}{\kappa}$. Devido ao fato do campo de gauge ser massivo, não há efeito de transmutação de spin.

A Eq. (2.65), assume a forma

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \phi - 2ieA_0 \partial_t \phi - ie\phi \partial_t A_0 - e^2 A_0^2 \phi - \partial_i^2 \phi + 2ieA_i \partial_i \phi + ie\phi \partial_i A_i + e^2 A_i^2 \phi \\ & + \frac{2}{\kappa^2} \phi |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Em regime estacionário, a lei de Gauss (2.66) é escrita como

$$\kappa B = 2A_0 |\phi|^2, \quad (2.70)$$

que permite expressar o setor elétrico em termos do setor magnético:

$$A_0 = \frac{\kappa}{2} \frac{B}{|\phi|^2}, \quad (2.71)$$

uma relação que será de grande utilidade posteriormente.

No regime estacionário, e em termos dos campos de gauge e de Higgs, as equações de movimento (2.66), (2.68) e (2.70) são expressas como

$$\kappa \epsilon_{ij} \partial_i A_j = 2A_0 |\phi|^2, \quad (2.72)$$

$$\kappa \epsilon_{ij} \partial_j A_0 = J_i, \quad (2.73)$$

$$\partial_i^2 \phi - 2ieA_i \partial_i \phi - ie\phi \partial_i A_i - e^2 A_i^2 \phi + e^2 A_0^2 \phi - \frac{1}{\kappa^2} \phi (|\phi|^2 - v^2)^2 - \frac{2}{\kappa^2} \phi |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2). \quad (2.74)$$

Notemos que, diferentemente do caso Maxwell-Higgs, não podemos escolher $A_0 = 0$, pois a Eq. (2.72) não se anula identicamente. Assim o setor elétrico é mantido na teoria e possibilita a ocorrência das soluções de vórtices carregados.

Vamos agora utilizar novamente o ansatz de solução de vórtice, dado pelas Eqs. (2.13) e (2.14), junto com a substituição $A_0 = \omega(r)$ nas equações estacionárias (2.72)–(2.74), e usando as transformações escritas nas Eqs. (2.15) e (2.16), o que resulta em:

$$\kappa \frac{a'}{er} = -2v^2 g^2 \omega, \quad (2.75)$$

$$\kappa e \omega' = -2v^2 \frac{g^2 a}{r}, \quad (2.76)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + e^2 g \omega^2 - \frac{a^2}{r^2} g = \frac{1}{\kappa^2} v^4 g (g^2 - 1)^2 + \frac{2}{\kappa^2} v^4 g^3 (g^2 - 1). \quad (2.77)$$

2.2.1 Energia estacionária do sistema e equações BPS

Escrevemos inicialmente o tensor de energia-momento simetrizado do modelo,

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \phi (D_\nu \phi)^* + (D_\mu \phi)^* D_\nu \phi - g_{\mu\nu} [|D_\lambda \phi|^2 - V(|\phi|)]. \quad (2.78)$$

A energia do sistema é dada como a integral de T_{00} sobre o espaço, ou seja,

$$E = \int d^2 r [|D_0 \phi|^2 + |D_i \phi|^2 + V(|\phi|)]. \quad (2.79)$$

Expressando $|D_0 \phi|^2$ em termos do campo magnético, obtemos

$$|D_0 \phi|^2 = e^2 A_0^2 |\phi|^2 = \frac{\kappa^2 e^2 B^2}{4 |\phi|^2}, \quad (2.80)$$

que permite reescrever a energia na Eq. (2.79) na forma

$$E = \int d^2 r \left[\frac{\kappa^2 e^2 B^2}{4 |\phi|^2} + |D_i \phi|^2 + V(|\phi|) \right]. \quad (2.81)$$

O termo $\kappa^2 4e^2 B^2 / |\phi|^2$ que aparece na Eq. (2.81) é muito importante, pois mostra que o campo magnético deve ir à zero mais rápido que $|\phi|$ quando $\phi \rightarrow 0$, a fim de garantir a finitude da energia. Dessa forma, o campo magnético estará mais concentrado ainda (localizado) na região entre os dois vácuos.

Expressando os termos da densidade de energia (2.81) em termos do ansatz, obtemos

$$|D_0 \phi|^2 = \frac{\kappa^2 a'^2}{4v^2 g^2 r^2}. \quad (2.82)$$

A expressão para o termo $|D_i \phi|^2$ é dada pela eq. (2.26)

$$|D_i \phi|^2 = v^2 g'^2 + v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2}. \quad (2.83)$$

O potencial dado pela Eq. (2.63) também pode ser escrito na forma

$$V(g) = \frac{1}{\kappa^2} v^6 g^2 (g^2 - 1)^2. \quad (2.84)$$

Dessa forma, a energia E da Eq. (2.81) é lida como

$$E = \int d^2r \left[\frac{\kappa^2 a'^2}{4v^2 g^2 r^2} + v^2 g'^2 + v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2} + \frac{1}{\kappa^2} v^6 g^2 (g^2 - 1)^2 \right]. \quad (2.85)$$

Aplicaremos, agora, o método de Bogomol'nyi, cujo mote já foi explanado na seção anterior, sobre a energia da Eq. (2.85), para escrever a energia como uma soma de termos quadráticos. Sendo assim, temos

$$g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} = \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm \frac{a(g^2)'}{r}. \quad (2.86)$$

$$\frac{\kappa^2 a'^2}{4v^2 g^2 r^2} + \frac{1}{\kappa^2} v^6 g^2 (g^2 - 1)^2 = \left[\frac{\kappa a'}{2vgr} \mp \frac{1}{\kappa} v^3 g (g^2 - 1) \right]^2 \pm v^2 \frac{a'}{r} g^2 \mp v^2 \frac{a'}{r}, \quad (2.87)$$

A energia (2.85) é então escrita como

$$E = \int d^2r \left\{ \left[\frac{\kappa a'}{2vgr} \mp \frac{1}{\kappa} v^3 g (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm v^2 \frac{(g^2 a)'}{r} \mp v^2 \frac{a'}{r} \right\}. \quad (2.88)$$

Aqui, usamos novamente as condições de contorno impostas sobre as funções $a(r)$ e $g(r)$ no estudo do modelo Maxwell-Higgs abeliano, dadas pelas Eqs. (2.36) e (2.37). Assim, escrevemos

$$E = \int d^2r \left\{ \left[\frac{\kappa a'}{2vgr} \mp \frac{1}{\kappa} v^3 g (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} \mp v^2 \int d^2r \frac{a'}{r}. \quad (2.89)$$

De forma similar ao que foi feito na seção anterior, usamos a condição de contorno sobre a função $a(r)$, e escrevemos a Eq. (2.89) como

$$E = \int d^2r \left\{ \left[\frac{\kappa a'}{2vgr} \mp \frac{1}{\kappa} v^3 g (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} \pm 2\pi n v^2. \quad (2.90)$$

A minimização da energia é obtida quando certas condições são satisfeitas. No caso da Eq. (2.90), a energia mínima é atingida quando são satisfeitas as seguintes condições:

$$\frac{a'}{r} = \pm 2 \frac{1}{\kappa^2} v^4 g^2 (g^2 - 1), \quad (2.91)$$

$$g' = \pm \frac{ag}{r}. \quad (2.92)$$

Aqui, as soluções para n e $-n$ estão relacionadas às seguintes transformações $g \rightarrow g$, $a \rightarrow -a$. As Eqs. (2.91) e (2.92) são as equações BPS do modelo, equações diferenciais de primeira ordem que governam a dinâmica das soluções de vórtices no modelo Chern-Simons-Higgs abeliano, e que apresentam energia mínima igual a

$$E = \pm 2\pi n v^2. \quad (2.93)$$

Vale notar que a energia mínima (2.93) é exatamente igual à energia mínima BPS do modelo Maxwell-Higgs abeliano, dada pela Eq. (2.43). Para compreendermos melhor onde o campo magnético atinge valores máximos e mínimos, escrevemos a Eq. (2.91) como sendo

$$B = \pm \frac{2}{e\kappa^2} v^4 g^2 (1 - g^2). \quad (2.94)$$

Agora avaliamos a derivada de B em relação ao campo g ,

$$\frac{dB}{dg} = \mp 4gv^4 \frac{2g^2 - 1}{e\kappa^2} = 0, \quad (2.95)$$

e identificamos o ponto crítico,

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.96)$$

Observe que se $n > 0$, correspondente ao sinal superior, então o ponto crítico é um máximo de B ; se $n < 0$, correspondente ao sinal inferior, é ponto de mínimo de B .

Dessa forma, concluímos que, diferentemente do modelo de Maxwell-Higgs, o campo magnético apresenta seu máximo quando $g^2 = 1/2$, ou seja, $|\phi|^2 = v^2/2$. É fato conhecido [25], que no limite de n grande, os vórtices de Chern-Simons puro ($\kappa \rightarrow \infty$) comportam-se como se fossem um anel de raio $R_V = \frac{\kappa n}{v^2}$. O anel separa a fase simétrica da fase assimétrica (fase de Higgs).

Para facilitar tanto análise do comportamento assintótico dos campos como as simulações numéricas, reescrevemos as equações BPS num formato adimensional introduzindo a variável $t = v^2 r$, tal que temos

$$a(r) \rightarrow \bar{a}(t) \quad , \quad g(r) \rightarrow \bar{g}(t) \quad , \quad B(r) \rightarrow \frac{v^4}{e} \bar{B}(t) \quad , \quad \omega(r) \rightarrow \frac{v^2}{e} \bar{\omega}(t). \quad (2.97)$$

Então, sob a parametrização acima, as equações BPS (2.91) e (2.92), são expressas como

$$\frac{\bar{a}'}{t} = \pm \frac{2}{\kappa^2} \bar{g}^2 (\bar{g}^2 - 1), \quad (2.98)$$

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{a}\bar{g}}{t}. \quad (2.99)$$

2.2.2 Comportamento assintótico dos campos

Para estudarmos os comportamentos assintóticos dos campos procedemos da mesma forma como foi feito no caso do modelo Maxwell-Higgs abeliano, ou seja, usamos funções que descrevem o comportamento funcional dos campos nos limites considerados. Então, para $t \rightarrow \infty$:

$$\bar{a} = \pm \delta a_1, \quad \bar{g} = 1 - \delta g_1, \quad (2.100)$$

relações estas que substituídas nas Eqs. (2.98) e (2.99), resultam em

$$\frac{(\delta a_1)'}{r} = -\frac{4}{\kappa^2} (\delta g_1), \quad (2.101)$$

$$(\delta g_1)' = -\frac{(\delta a_1)}{t}. \quad (2.102)$$

Essas duas equações podem ser facilmente desacopladas resultando em

$$(\delta g_1)'' + \frac{(\delta g_1)'}{t} - \frac{4}{\kappa^2} (\delta g_1) = 0, \quad (2.103)$$

$$(\delta a_1)'' - \frac{(\delta a_1)'}{t} - \frac{4}{\kappa^2} (\delta a_1) = 0. \quad (2.104)$$

cujas respectivas soluções são:

$$\delta g_1 \sim K_0\left(\frac{2}{\kappa}t\right) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{2}{\kappa}t\right], \quad (2.105)$$

$$\delta a_1 \sim rK_1\left(\frac{2}{\kappa}t\right) \sim \sqrt{t} \exp\left[-\frac{2}{\kappa}t\right], \quad (2.106)$$

onde o coeficiente $2/\kappa$ define a escala de massa do modelo CSH

$$m_{CS} = \frac{2v^2}{\kappa}, \quad (2.107)$$

assim, quanto menor o valor do parâmetro κ , que define a magnitude do termo de Chern-Simons, maior a massa m_{CS} . Sob esse efeito, a partir das Eqs. (2.105) e (2.106) concluímos que o campo de Higgs atingirá mais rapidamente o estado de vácuo definido no infinito. Do mesmo modo, os outros campos alcançarão mais rapidamente seus valores limites ou de saturação definidos no infinito.

Quando $t \rightarrow 0$, as Eqs. (2.98) e (2.99) apresentam como soluções

$$\bar{a} = n - \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j t^j, \quad (2.108)$$

Para $n > 0$:

$$\bar{g} = Gt^n - \frac{G^3 t^{3n+2}}{2(n+1)^2 \kappa^2} + \frac{G^5 t^{5n+2}}{2(2n+1)^2 \kappa^2} + \dots \quad (2.109)$$

$$\bar{a} = n - \frac{G^2 t^{2n+2}}{(n+1) \kappa^2} + \frac{G^4 t^{4n+2}}{(2n+1) \kappa^2} + \dots \quad (2.110)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\kappa} - \frac{G^2 t^{2n}}{\kappa} + \frac{G^4 t^{4n+2}}{(n+1)^2 \kappa^3} + \dots \quad (2.111)$$

É importante salientar duas diferenças básicas entre os vórtices no modelo Maxwell-Higgs e os vórtices no modelo Chern-Simons-Higgs. A primeira é que, enquanto a Eq. (2.92) se mantém igual em ambos modelos, a Eq. (2.91) do modelo de Chern-Simons é substituída pela Eq. (2.41) do modelo de Maxwell-Higgs, uma equação do tipo $B \sim v^2(1 - g^2)$, que representa um campo magnético está mais concentrado na origem do vórtice. Neste sentido, nos vórtices carregados de Chern-Simons o campo magnético está mais concentrado em um anel que circunda o centro do vórtice, com seu máximo ocorrendo quando $|\phi|^2 = v^2/2$. A segunda é que, no modelo de Chern-Simons, a igualdade das massas é uma condição necessária, mas não suficiente, para obter um sistema auto-dual.

2.2.3 Soluções numéricas para os vórtices BPS do modelo CSH abeliano

Nas Figs. 2.4– 2.8, apresentamos alguns perfis para o campo de Higgs, potencial vetor, potencial escalar, campo magnético e campo elétrico, dos vórtices BPS gerados por métodos numéricos aplicados às equações diferenciais ordinárias (2.98) e (2.99). As condições de contorno imposta para o potencial escalar na origem é

$$\bar{\omega}'(0) = 0, \quad (2.112)$$

Os diferentes perfis em cada figura representam diferentes valores do parâmetro $\bar{\kappa}$.

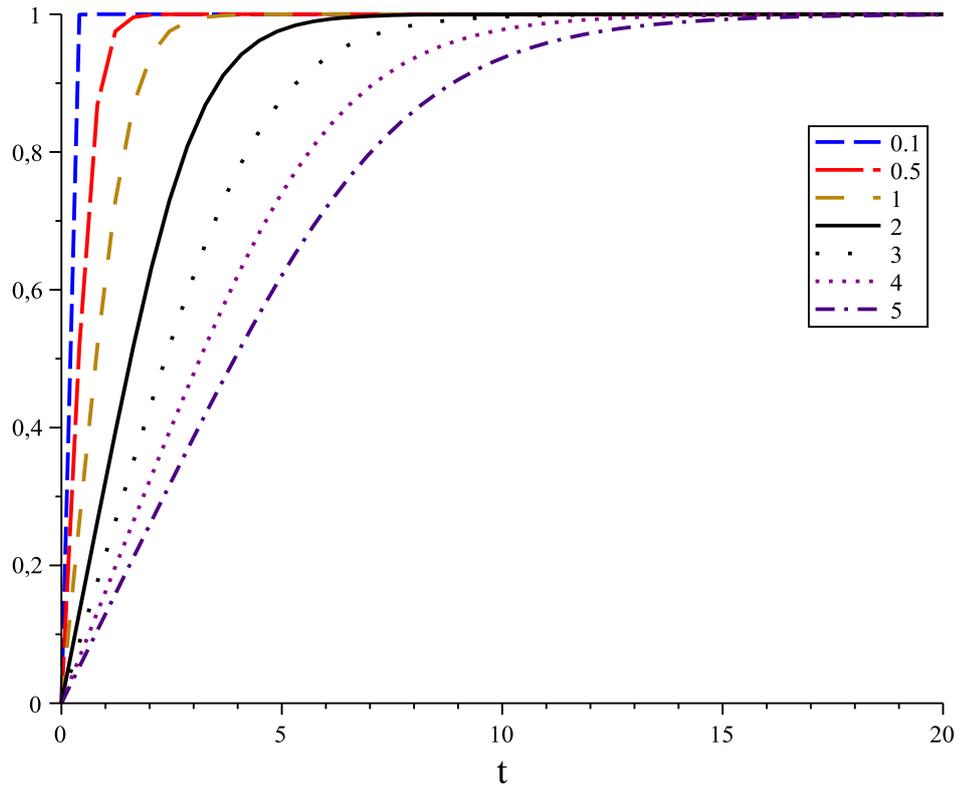


Figura 2.4: Campo escalar $\bar{g}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de κ .

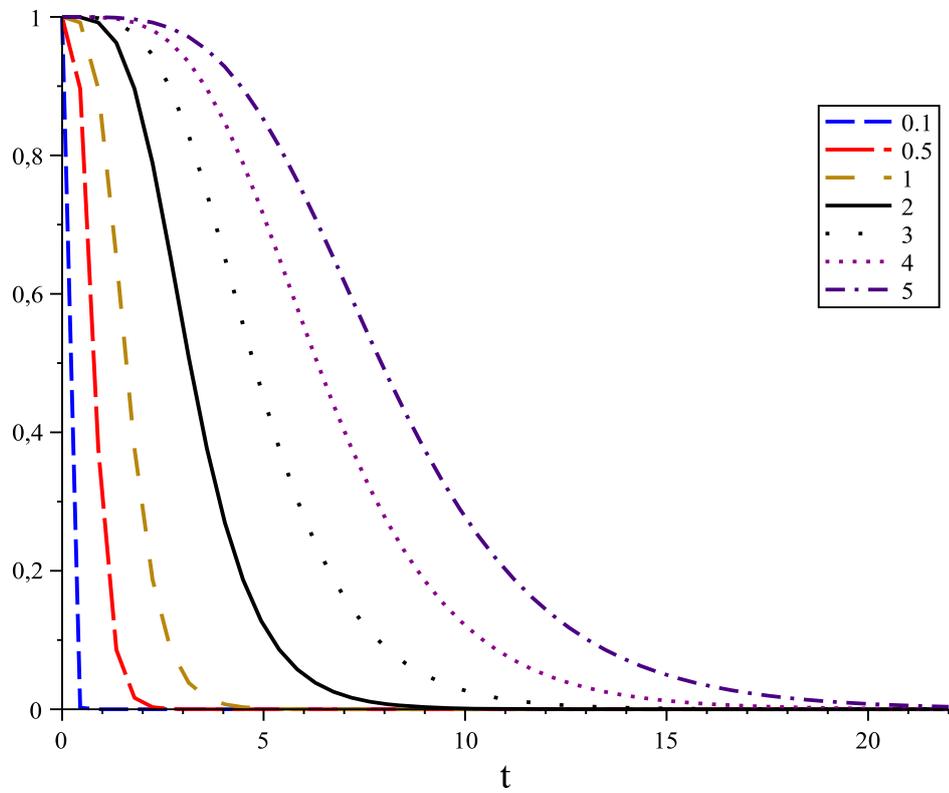


Figura 2.5: Campo vetorial $\bar{a}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de κ .

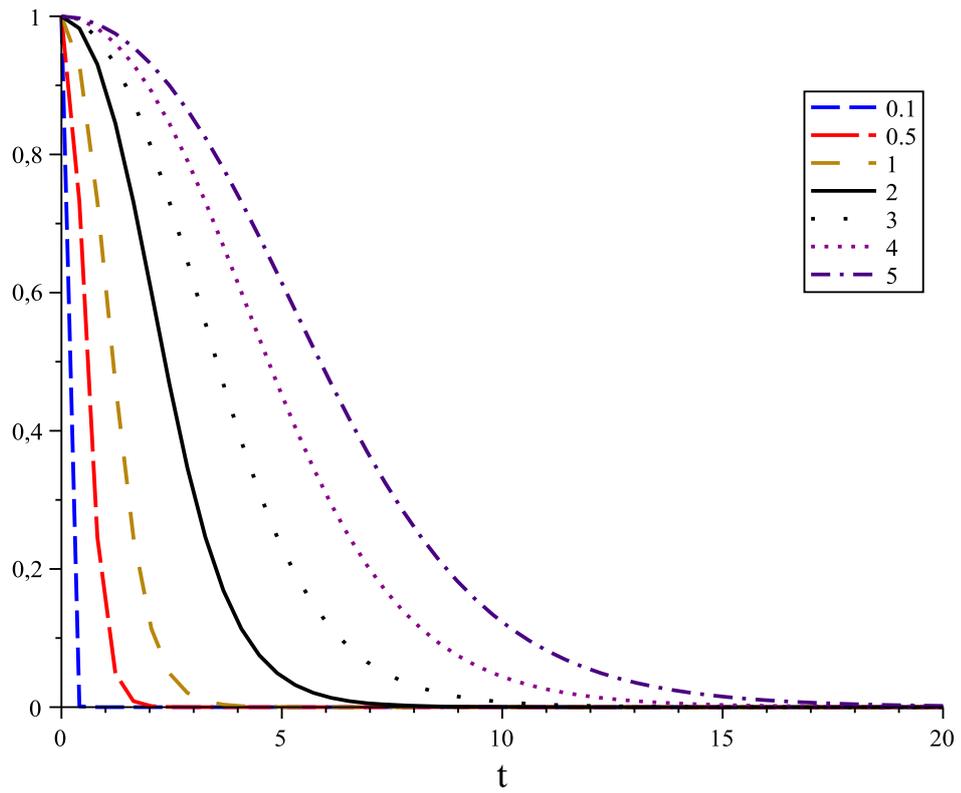


Figura 2.6: Potencial escalar $\kappa\bar{\omega}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de κ .

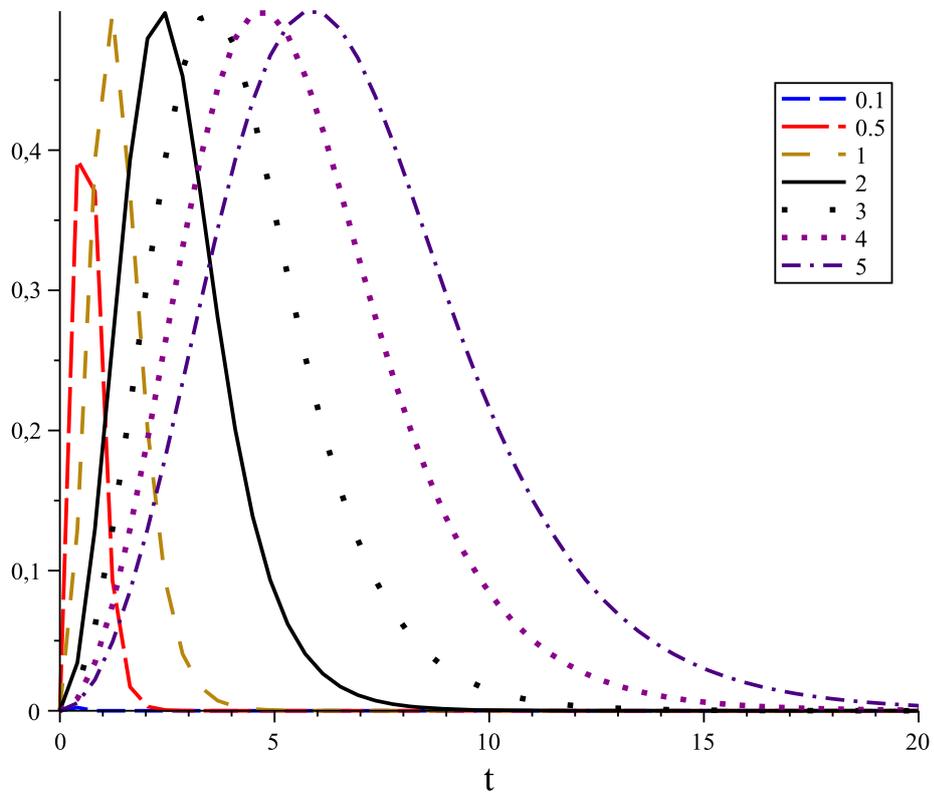


Figura 2.7: Campo magnético $\kappa^2\bar{B}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de κ .

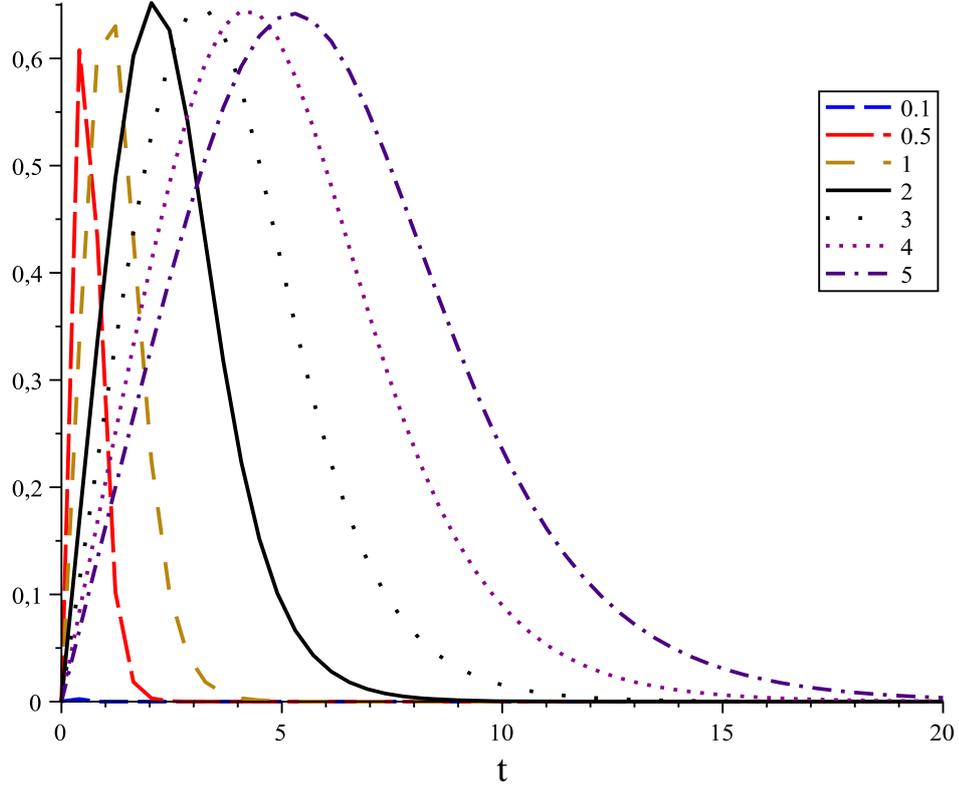


Figura 2.8: Campo elétrico $-\kappa\bar{\omega}'(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de κ .

2.3 Vórtices no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs abeliano

Estudamos até agora os modelo de Maxwell-Higgs abeliano e Chern-Simons-Higgs abeliano, em $(1 + 2)$ -dimensões. Agora, analisaremos as soluções de vórtices tipo BPS em um modelo mais amplo, contendo o termo de Maxwell, o termo de Chern-Simons, e o setor de Higgs. Para a existência de vórtices BPS neste modelo, é necessária a introdução de um campo escalar neutro adicional que denominamos de N [26, 27].

Iniciamos este estudo definindo a densidade lagrangiana do modelo abeliano de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha}F_{\beta\gamma} + |D_{\mu}\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}N)^2 - U(|\phi|, N), \quad (2.113)$$

onde usamos novamente a definição, $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$, e o potencial $U(|\phi|, N)$ é tal que proporciona soluções BPS para o modelo. A densidade lagrangiana dada pela Eq. (2.113) descreve um sistema com um campo de gauge abeliano dinâmico na presença do termo de Chern-Simons

acoplado a um campo de Higgs dinâmico, e na presença de um campo neutro, ambos submetidos a um potencial de acoplamento $U(|\phi|, N)$. O potencial de acoplamento que utilizamos com o intuito de obter uma teoria auto-dual tem a forma

$$U(|\phi|, N) = \frac{1}{2} [e|\phi|^2 + \kappa N - ev^2]^2 + e^2 N^2 |\phi|^2, \quad (2.114)$$

revelando que a teoria possui dois vácuos degenerados: um vácuo simétrico em $\phi = 0$ e $N = \frac{ev^2}{\kappa}$, e outro assimétrico em $|\phi| = v$ e $N = 0$. Os chamados sólitons topológicos existem na fase assimétrica, enquanto os não-topológicos surgem na fase simétrica. A partir da densidade lagrangiana, podemos extrair as equações de movimento do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs abeliano (MCSH)

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon^{\mu\beta\gamma} F_{\beta\gamma} = eJ^\mu, \quad (2.115)$$

$$D^\mu D_\mu \phi = -e\phi [e|\phi|^2 + \kappa N - ev^2] - e^2 N^2 \phi, \quad (2.116)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu N = -\kappa [e|\phi|^2 + \kappa N - ev^2] - 2e^2 N |\phi|^2, \quad (2.117)$$

onde $J^\mu = i[\phi(D^\mu \phi)^* - \phi^* D^\mu \phi]$ é a densidade de corrente do modelo (MCSH).

Da Eq. (2.115), para $\mu = 0$, calculamos explicitamente a lei de Gauss do modelo,

$$\partial_i E^i + \kappa B = e\rho. \quad (2.118)$$

Fazemos agora $\mu = i$ na Eq. (2.64) a fim de obter a lei de Ampère,

$$\partial_0^2 A^i + \partial_0 \partial_i A^0 - \partial_j^2 A^i + \partial_i (\partial_j A^i) + \kappa \varepsilon^{0ij} \partial_j A^0 + \kappa \varepsilon^{0ij} \partial_0 A^j = eJ^i, \quad (2.119)$$

A Eq. (2.116) é escrita como

$$\partial_t^2 \phi - 2ieA_0 \partial_t \phi - ie\phi \partial_t A_0 - e^2 A_0^2 \phi - \partial_i^2 \phi + 2ieA_i \partial_i \phi \quad (2.120)$$

$$+ ie\phi \partial_i A_i + e^2 A_i^2 \phi = -e\phi [e|\phi|^2 + \kappa N - ev^2] - e^2 N^2 \phi.$$

ao passo que a Eq. (2.117) é expressa como

$$\partial_t^2 N - \partial_i^2 N = -\kappa [e|\phi|^2 + \kappa N - ev^2] - 2e^2 N |\phi|^2. \quad (2.121)$$

Devido à estabilidade topológica podemos trabalhar no regime estacionário do modelo, notemos também que a escolha de gauge $A_0 = 0$, não pode ser usada, o que conduz à soluções de vórtices carregando carga elétrica, ou seja, o setor elétrico da teoria (MCSH) deve ser mantido. Com isto, implementamos o ansatz para os vórtices, Eqs. (2.13), (2.14) e a relação $A_0 = \omega(r)$, reescrevemos as equações estacionárias (2.118)–(2.121) do seguinte modo:

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} + \kappa \frac{a'}{er} = 2e^2 v^2 g^2 \omega, \quad (2.122)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} + e\kappa r\omega' = 2e^2v^2g^2a, \quad (2.123)$$

$$g'' + \frac{g'}{r} + e^2\omega^2g - \frac{a^2}{r^2}g = eg [ev^2g^2 + \kappa N - ev^2] + e^2N^2g, \quad (2.124)$$

$$N'' + \frac{N'}{r} = \kappa [ev^2g^2 + \kappa N - ev^2] + 2e^2v^2Ng^2. \quad (2.125)$$

2.3.1 Energia estacionária do sistema e equações BPS

Iniciamos escrevendo o tensor de energia-momento simetrizado deste modelo

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_{\rho}{}^{\nu} + (D^{\mu}\phi)(D^{\nu}\phi)^* + (D^{\mu}\phi)^*(D^{\nu}\phi) + \partial^{\mu}N\partial^{\nu}N - g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\lambda}\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\lambda}N)^2 - U(|\phi|, N) \right]. \quad (2.126)$$

que conduz à expressão seguinte para a densidade T_{00} :

$$T_{00} = \frac{1}{2}F_{i0}^2 + \frac{1}{2}B^2 + |D_0\phi|^2 + \frac{1}{2}\partial_0^2N + |D_i\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_iN)^2 + U(|\phi|, N). \quad (2.127)$$

A energia E é a integral sobre todo o espaço da densidade T_{00} , ou seja,

$$E = \int d^2r \left[\frac{1}{2}F_{i0}^2 + \frac{1}{2}B^2 + |D_0\phi|^2 + \frac{1}{2}\partial_0^2N + |D_i\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_iN)^2 + U(|\phi|, N) \right]. \quad (2.128)$$

Em regime estacionário, usando as transformações polares (2.15) e (2.16), avaliamos os termos da energia (2.128), utilizando novamente o ansatz, (2.13), (2.14), com uso da condição auxiliar $A_0 = \omega(r)$, obtendo:

$$F_{i0}^2 = \omega'^2, \quad (2.129)$$

$$B = -\frac{a'}{er}, \quad (2.130)$$

$$|D_0\phi|^2 = e^2v^2g^2\omega^2, \quad (2.131)$$

$$(\partial_iN)^2 = N'^2. \quad (2.132)$$

Usamos novamente a Eq. (2.26) para reescrever o termo $|D_i\phi|^2$ como

$$|D_i\phi|^2 = v^2g'^2 + v^2\frac{a^2g^2}{r^2}. \quad (2.133)$$

Assim, podemos escrever a energia na seguinte forma:

$$E = \int d^2r \left[\frac{1}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}\frac{a'^2}{e^2r^2} + e^2v^2g^2\omega^2 + v^2g'^2 + v^2\frac{a^2g^2}{r^2} + \frac{1}{2}N'^2 + U(g, N) \right]. \quad (2.134)$$

O potencial $U(g, N)$ é obtido da Eq. (2.114), sendo reescrito como

$$U(g, N) = \frac{1}{2} [ev^2g^2 + \kappa N - ev^2]^2 + e^2N^2v^2g^2. \quad (2.135)$$

A energia (2.134) adquire então a forma

$$E = \int d^2r \left[\frac{1}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}\frac{a'^2}{e^2r^2} + e^2v^2g^2\omega^2 + nv^2g'^2 + v^2\frac{a^2g^2}{r^2} + \frac{1}{2}N'^2 \right] \\ + \int d^2r \left[\frac{1}{2} [ev^2g^2 + \kappa N - ev^2]^2 + e^2N^2v^2g^2 \right]. \quad (2.136)$$

Nessa etapa, aplicaremos o método de Bogomol'nyi sobre a energia da Eq. (2.136), que como visto anteriormente, consiste em reescrever a energia como uma soma de termos quadráticos

$$\frac{1}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}N'^2 = \frac{1}{2} [\omega' \pm N']^2 \mp (\omega'N)' \pm \omega''N, \quad (2.137)$$

$$\frac{1}{2}\frac{a'^2}{e^2r^2} + \frac{1}{2} [ev^2g^2 + \kappa N - ev^2]^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a'}{er} \mp [ev^2g^2 + \kappa N - ev^2] \right\}^2 \\ \pm v^2\frac{a'}{r}g^2 \pm \kappa\frac{a'}{er}N \mp v^2\frac{a'}{r}, \quad (2.138)$$

$$e^2v^2g^2\omega^2 + e^2v^2g^2N^2 = e^2v^2g^2 [\omega \pm N]^2 \mp 2e^2v^2g^2\omega N, \quad (2.139)$$

$$g'^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} = \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm \frac{a(g^2)'}{r}. \quad (2.140)$$

A substituição das expressões acima na energia (2.136) resulta em

$$E = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} [\omega' \pm N']^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp (ev^2g^2 + \kappa N - ev^2) \right]^2 + e^2v^2g^2 [\omega \pm N]^2 \right\} \\ + \int d^2r \left\{ + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm N \left[\omega'' + \kappa\frac{a'}{er} - 2e^2v^2g^2\omega \right] \pm v^2\frac{(ag^2)'}{r} \mp (\omega'N)' \mp v^2\frac{a'}{r} \right\}. \quad (2.141)$$

Usando a lei de Gauss na expressão acima, obtemos

$$E = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} [\omega' \pm N']^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp (ev^2g^2 + \kappa N - ev^2) \right]^2 + e^2v^2g^2 [\omega \pm N]^2 \right\} \\ \pm \int d^2r \left\{ \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 + v^2\frac{(ag^2)'}{r} - \frac{1}{r} (r\omega'N)' - v^2\frac{a'}{r} \right\}. \quad (2.142)$$

Portanto, se podermos negligenciar os termos de divergências totais na Eq. (2.142), a energia mínima do modelo é saturada pelas soluções das equações de primeira ordem. De resultados anteriores, sabemos que vale

$$E = \pm 2\pi n v^2 + \int d^2 r \left\{ \frac{1}{2} [\omega' \pm N']^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{a'}{er} \mp (ev^2 g^2 + \kappa N - ev^2) \right]^2 \right\} \quad (2.143)$$

$$+ \int d^2 r \left\{ e^2 v^2 g^2 [\omega \pm N]^2 + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\}.$$

Minimizando a energia (fazendo nulos os quadrados perfeitos), obtemos as equações BPS deste modelo:

$$\omega' \pm N' = 0, \quad (2.144)$$

$$\frac{a'}{er} = \pm [ev^2 (g^2 - 1) + \kappa N], \quad (2.145)$$

$$\omega \pm N = 0, \quad (2.146)$$

$$g' = \pm \frac{ag}{r}. \quad (2.147)$$

Notamos que, a partir das Eqs. (2.144) e (2.146) extraímos uma importante condição: as equações BPS no modelo (MCSH) só existem quando o potencial escalar $A_0 = \omega$ e o campo neutro N estão relacionados como

$$\omega = \mp N. \quad (2.148)$$

Neste estágio, apresentamos as condições que os campos devem satisfazer para que seja possível a minimização da energia. As condições para $a(r)$ e $g(r)$ são as mesmas apresentadas anteriormente quando estudamos o modelo Maxwell-Higgs abeliano, (2.36) e (2.37). Resta agora impor condições sobre $\omega(r)$, como segue:

$$\omega(0) = \mp \frac{ev^2}{\kappa} = \text{finito}, \quad \omega(\infty) = 0, \quad (2.149)$$

Analisando a Eq. (2.143) notamos que a energia foi escrita numa forma quadrática, e sua minimização ocorre quando as equações BPS são satisfeitas, cujas soluções apresentam energia mínima dada por $E_{\min} = \pm 2\pi n v^2$. Notamos aqui novamente que a energia mínima satisfeita pelas equações BPS do modelo (MCSH) é exatamente igual à energia mínima encontrada nos modelos Maxwell-Higgs abeliano e Chern-Simons-Higgs abeliano. Mais uma vez, podemos expressar a energia mínima do modelo em termos do fluxo magnético, uma vez que o campo magnético é dado pela Eq. (2.130)

$$E_{\min} = \pm 2\pi n v^2 = \pm ev^2 \Phi_B, \quad (2.150)$$

onde $\Phi_B = \int d^2r B(r)$.

As equações BPS (2.145), (2.147) e a lei de Gauss (2.122) podem ser escritas numa estrutura adimensional via a introdução da variável adimensional, $t = evr$, tal que

$$g \rightarrow \bar{g}, \quad a \rightarrow \bar{a}, \quad \kappa \rightarrow \bar{\kappa}ev, \quad \omega \rightarrow \bar{\omega}v, \quad (2.151)$$

Dessa forma, as equações que resolvem o sistema são escritas como sendo

$$\frac{1}{t} \frac{d\bar{a}}{dt} = \pm (\bar{g}^2 - 1) - \bar{\kappa}\bar{\omega}, \quad (2.152)$$

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \pm \frac{\bar{a}\bar{g}}{t}, \quad (2.153)$$

$$\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\kappa} \frac{1}{t} \frac{d\bar{a}}{dt} = 2\bar{g}^2\bar{\omega}. \quad (2.154)$$

As condições de contorno são reescritas como

$$\begin{aligned} \bar{g}(0) &= 0, \quad \bar{a}(0) = n, \quad \bar{\omega}(0) = \mp \frac{1}{\bar{\kappa}} \\ \bar{g}(\infty) &= 1, \quad \bar{a}(\infty) = 0^\pm, \quad \bar{\omega}(\infty) = 0^\mp \end{aligned}$$

Se $\bar{\kappa} \rightarrow -\bar{\kappa}$ então $\bar{g} \rightarrow \bar{g}$, $\bar{a} \rightarrow \bar{a}$, $\bar{\omega} \rightarrow -\bar{\omega}$.

Tais equações constituem o ponto de partida para realização de procedimentos numéricos que irão revelar o perfil das soluções.

2.3.2 Comportamento assintótico dos campos

Para estudarmos os comportamentos assintóticos dos campos no modelo (MCSH), fazemos uso as equações (2.152)–(2.154). Primeiro, analisamos o comportamento funcional dos campos quando $t \rightarrow \infty$, neste limite vale

$$\bar{a} = \pm \delta a_1, \quad \bar{g} = (1 - \delta g_1), \quad \bar{\omega} = \mp \delta \omega_1. \quad (2.155)$$

Implementando estas aproximações nas Eqs. (2.152)–(2.154), escrevemos

$$\frac{1}{t} (\delta a_1)' = -2(\delta g_1) + \bar{\kappa}(\delta \omega_1), \quad (2.156)$$

$$(\delta g_1)' = -\frac{(\delta a_1)}{t}, \quad (2.157)$$

$$(\delta \omega_1)'' + \frac{1}{t} (\delta \omega_1)' - \bar{\kappa} \frac{1}{t} (\delta a_1)' = 2(\delta \omega_1). \quad (2.158)$$

cujas soluções são

$$(\delta g_1) = B \frac{\sqrt{\bar{\kappa}^2 + 8} + \bar{\kappa}}{4} K_0 \left(t \frac{\sqrt{\bar{\kappa}^2 + 8} - \bar{\kappa}}{2} \right) \quad (2.159)$$

$$(\delta a_1) = BtK_1 \left(t \frac{\sqrt{\bar{\kappa}^2 + 8} - \bar{\kappa}}{2} \right) \quad (2.160)$$

$$(\delta \omega_1) = BK_0 \left(t \frac{\sqrt{\bar{\kappa}^2 + 8} - \bar{\kappa}}{2} \right) \quad (2.161)$$

Observamos que o modelo admite uma escala de massa

$$m = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 8(ev)^2} - \kappa^2}{2} \quad (2.162)$$

Para avaliarmos os comportamentos dos campos quando $t \rightarrow 0$ usamos o método de serie de potências,

$$\bar{g} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j t^j, \quad \bar{a} = n \pm \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t^j. \quad (2.163)$$

Implementando estas relações nas Eqs. (2.152)–(2.154), encontramos para $n = 1$,

$$\bar{g}(t) = Gt - \frac{G(1 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa})}{4} t^3 \quad (2.164)$$

$$+ \frac{G[2 + 4G^2 - \bar{\kappa}^2(1 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa}) + 2\bar{\omega}_0 \bar{\kappa}(2 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa})]}{64} t^5 + \mathcal{O}(t^6)$$

$$\bar{a}(t) = 1 - \frac{(1 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa})}{2} t^2 + \frac{\bar{\kappa}^2(1 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa}) - 4G^2}{16} t^4 + \mathcal{O}(t^5) \quad (2.165)$$

$$\bar{\omega}(t) = \bar{\omega}_0 + \frac{\bar{\kappa}(1 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa})}{4} t^2 + \frac{4G^2(\bar{\kappa} - 2\bar{\omega}_0) - \bar{\kappa}^3(1 + \bar{\omega}_0 \bar{\kappa})}{64} t^4 + \mathcal{O}(t^5) \quad (2.166)$$

2.3.3 Soluções numéricas para os vórtices BPS carregados

Nas Figs. 2.9– 2.14, apresentamos alguns perfis para o campo de Higgs, potencial vetor, potencial escalar, campo magnético e campo elétrico, dos vórtices BPS gerados por métodos numéricos aplicados às equações diferenciais (2.152)–(2.154). As condições de contorno imposta para o potencial escalar na origem é

$$\bar{\omega}'(0) = 0, \quad (2.167)$$

Os diferentes perfis em cada figura representam diferentes valores do parâmetro $\bar{\kappa}$.

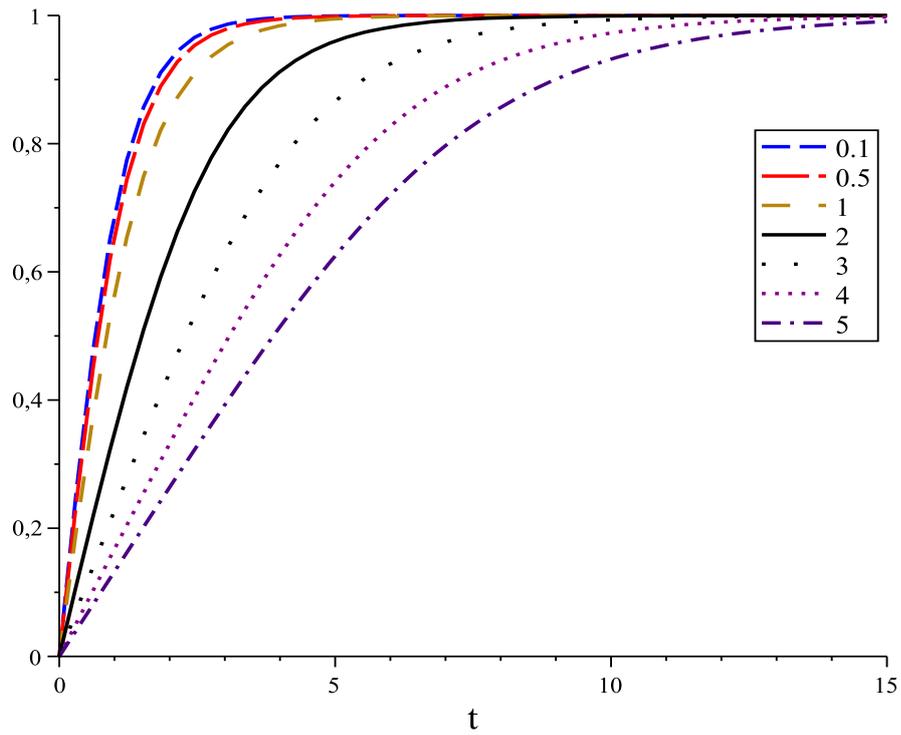


Figura 2.9: Campo escalar $\bar{g}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de $\bar{\kappa}$.

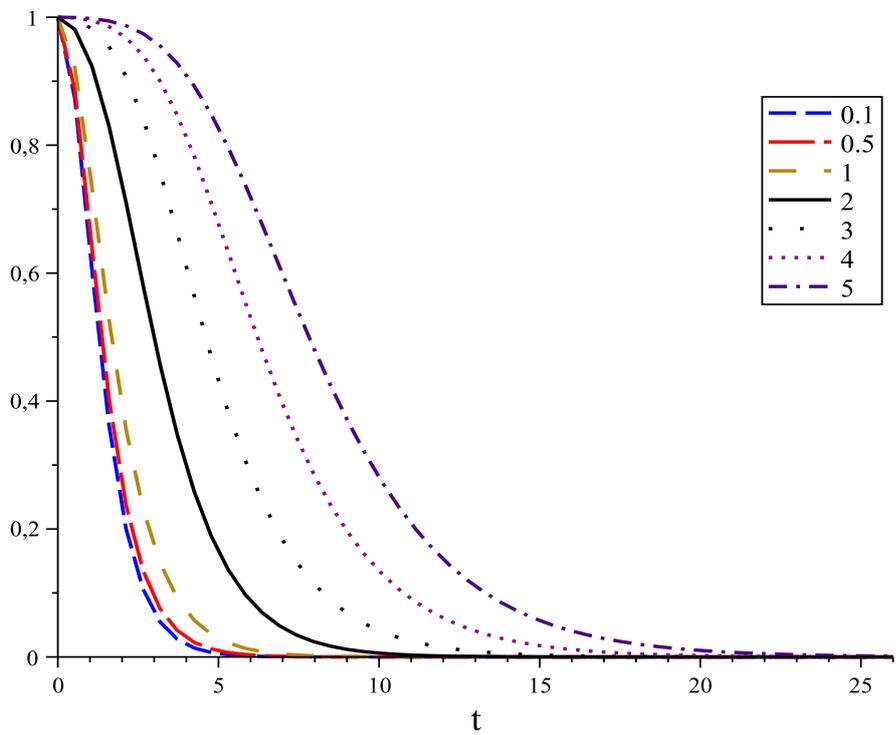


Figura 2.10: Campo vetorial $\bar{a}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de $\bar{\kappa}$.

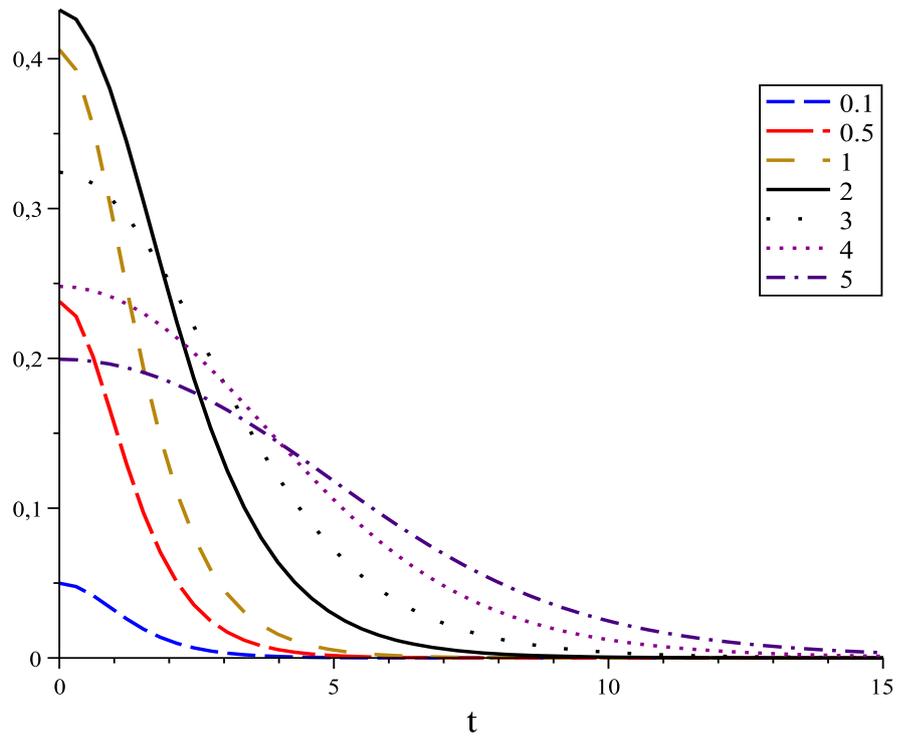


Figura 2.11: Potencial escalar $-\bar{\omega}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de $\bar{\kappa}$.

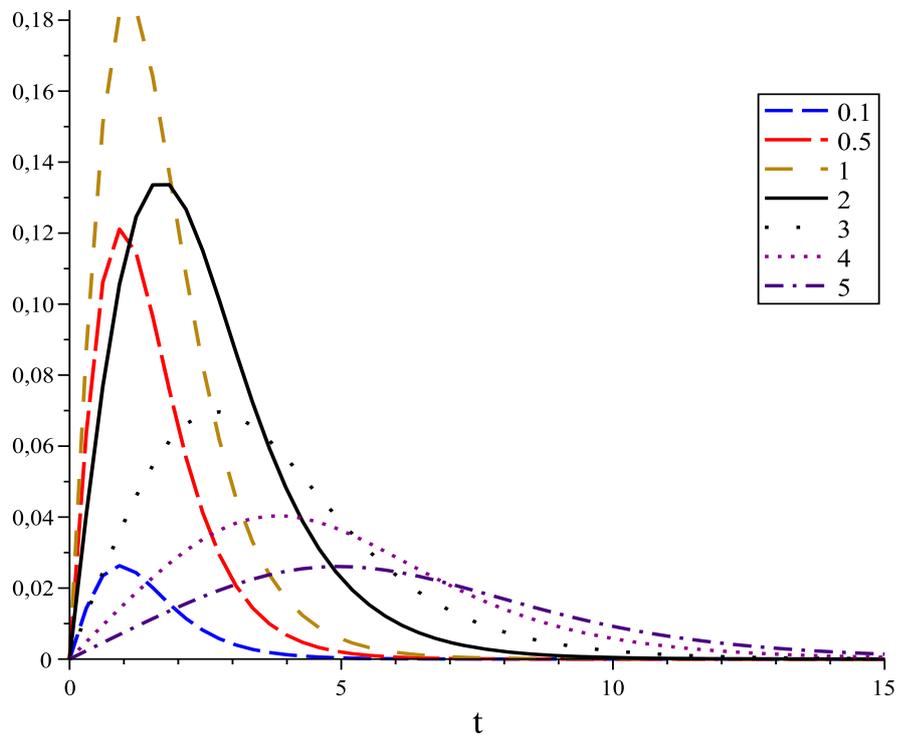


Figura 2.12: Campo elétrico $\bar{\omega}'(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de $\bar{\kappa}$.

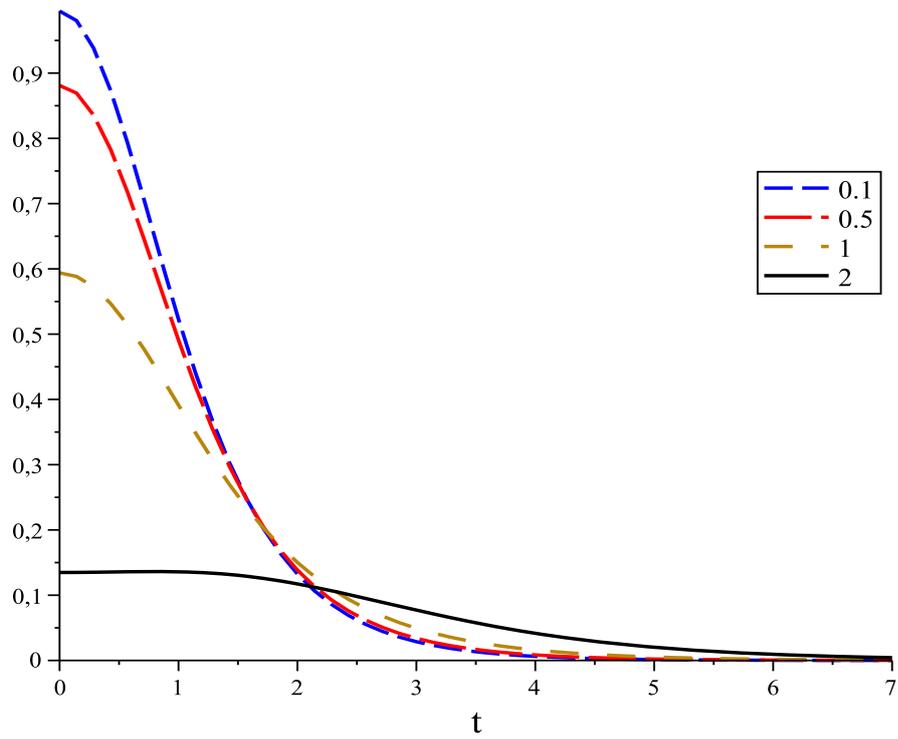


Figura 2.13: Campo magnético $\bar{B}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de $\bar{\kappa}$.

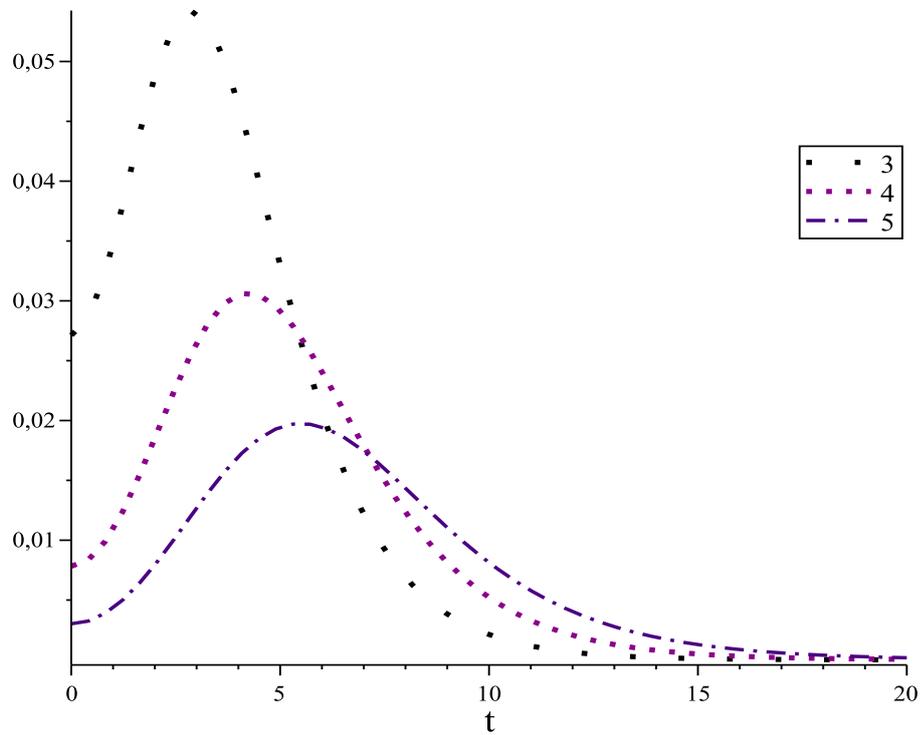


Figura 2.14: Campo magnético $\bar{B}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores de $\bar{\kappa}$.

Capítulo 3

Modelo abeliano de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz: Vórtices sem carga elétrica

Os efeitos da violação na simetria de Lorentz tem sido muito investigada nos últimos anos, tendo como arcabouço teórico o Modelo Padrão Estendido (MPE) [28], baseado na idéia de quebra espontânea de simetria numa teoria definida na escala de Planck [29], ou seja, os termos que quebram tanto a invariância de Lorentz como a simetria CPT são valores esperados no vácuo de diferentes operadores de campo gerando interações que complementam aquelas presentes no Modelo Padrão (MP) das partículas fundamentais, isto é, a quebra de Lorentz e CPT permeia todos os setores de interação do MP.

A forma mais geral de uma eletrodinâmica renormalizável, contendo termos que quebram tanto a simetria de Lorentz como a simetria-CPT, contida no Modelo Padrão Estendido é expressa pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\varphi}(k_{AF})_{\alpha}A_{\beta}F_{\rho\varphi} - \frac{1}{4}(k_F)^{\alpha\beta\rho\varphi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\varphi}, \quad (3.1)$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de antisimétrico de Levi-Civita ($\epsilon^{0123} = 1$), $F_{\mu\nu}$ é o tensor campo eletromagnético, A^{μ} é o vetor potencial, $(k_{AF})_{\mu}$ um background vetorial possuindo dimensão de massa e descreve um acoplamento super-renormalizável de dimensão 3, $(k_F)^{\alpha\beta\rho\varphi}$ um background tensorial adimensional descrevendo um acoplamento renormalizável de dimensão 4.

O termo $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa\lambda}$ corresponde ao setor *CPT*-ímpar e foi primeiramente introduzido por Carroll, Field and Jackiw (CFJ) [22], quando estudaram as modificações produzidas por este termo na eletrodinâmica clássica de Maxwell.

O tensor $(k_F)^{\alpha\beta\rho\varphi}$ tem as mesmas simetrias do tensor de Riemann:

$$(k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} = -(k_F)_{\beta\alpha\rho\varphi}, \quad (k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} = -(k_F)_{\alpha\beta\varphi\rho}, \quad (k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} = (k_F)_{\rho\varphi\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

$$(k_F)_{\alpha\beta\rho\varphi} + (k_F)_{\alpha\rho\varphi\beta} + (k_F)_{\alpha\varphi\beta\rho} = 0, \quad (3.3)$$

e um duplo traço nulo $(k_F)^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = 0$, o que permite ele ter apenas 19 componentes independentes das quais 10 produzem birrefringência e os outros 9 são não birrefringentes.

Alternativamente, essas nove componentes não-birrefringentes do tensor CPT-par são parametrizados em termos de um tensor simétrico e com traço nulo, $\kappa^{\mu\alpha}$, definido como contração, $\kappa^{\mu\alpha} = (k_F)^{\mu\nu\alpha}{}_{\nu}$. Tais tensores satisfazem a seguinte relação [31]:

$$(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\mu\alpha}\kappa^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}\kappa^{\mu\beta} + g^{\nu\beta}\kappa^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta}\kappa^{\nu\alpha}), \quad (3.4)$$

desse modo o terceiro termo em (3.1) resulta ser

$$-\frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\varphi} (k_{AF})_{\alpha}{}_{\beta} A_{\rho} F_{\varphi} = -\frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha} F_{\rho\sigma} F_{\alpha}{}^{\sigma}. \quad (3.5)$$

Com esse termo escrevemos a densidade lagrangiana descrevendo o campo eletromagnético do setor CPT-par e não birrefringente do MPE

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma}, \quad (3.6)$$

cujas soluções clássicas e propriedades foram amplamente estudadas em [30].

Neste capítulo, iniciamos a apresentação das contribuições originais desta dissertação. Aqui, propomos uma modificação do ambiente teórico usual onde as configurações de vórtices são estudadas. A finalidade do estudo é investigarmos a formação de vórtices estáveis num modelo em que o campo de Higgs (submetido à um potencial $\lambda\phi^4$) interage com o campo eletromagnético pertencente ao setor não birrefringente e CPT-par do MPE, especificamente, a densidade de lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 - U(|\phi|), \quad (3.7)$$

onde definimos a derivada covariante $D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi - ieA_{\mu}\phi$ e $U(|\phi|)$ como o potencial de auto-interação do tipo $\lambda|\phi|^4$ da seguinte forma

$$U(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} (v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (3.8)$$

onde v desempenha o papel do valor esperado do vácuo do campo escalar ϕ , como visto antes. A partir do potencial notamos que este modelo apresenta um estado de vácuo não simétrico

para $|\phi| = v$ e outro simétrico em $\phi = 0$. De uma análise detalhada das perturbações em torno do estado de vácuo, escrevemos as massas do campo de gauge e do campo escalar como sendo, $m_A = \sqrt{2}ev$ e $m_H = \lambda v$.

As equações de movimento para os campos no modelo de Maxwell-Higgs com LIV (MHLIV) são escritas como

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \kappa^{\mu\alpha} \partial_\nu F^\nu_\alpha - \kappa^{\nu\alpha} \partial_\nu F^\mu_\alpha = eJ^\mu, \quad (3.9)$$

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0, \quad (3.10)$$

onde a corrente de matéria J^μ , que tem como origem o campo escalar, é dada por

$$J^\mu = i(\phi (D^\mu \phi)^* - \phi^* D^\mu \phi). \quad (3.11)$$

A lei de Gauss do modelo é obtida fazendo-se $\mu = 0$ na Eq. (3.9), assim temos

$$\partial_i \partial_t A_i - \partial_i \partial_i A^0 + \kappa^{0\alpha} \partial_t F^\alpha_0 + \kappa^{0\alpha} \partial_i F^i_\alpha - \kappa^{0j} \partial_t F^0_j - \kappa^{ij} \partial_i F^0_j = eJ^0. \quad (3.12)$$

Em regime estacionário, a Eq. (3.12) pode ser reduzida nas formas seguintes

$$\partial_i \partial_i A^0 + \kappa_{00} \partial_i \partial_i A^0 - \kappa^{0j} \partial_i \partial_i A^j + \kappa^{0j} \partial_j \partial_i A^i - \kappa_{ij} \partial_i \partial_j A^0 = -eJ^0. \quad (3.13)$$

Esta relação, quando expressa em termos do campo magnético fica

$$(1 + k_{00}) \nabla^2 A^0 + \kappa^{0j} (\nabla \times \mathbf{B})_j - \kappa^{ij} \partial_i \partial_j A^0 = 2e^2 A^0 |\phi|^2. \quad (3.14)$$

Como ocorre no caso MCSH, a lei de Gauss acopla o campo elétrico com o campo magnético, revelando profundas diferenças entre esse modelo com o modelo Maxwell-Higgs.

A lei de Ampère do modelo é obtida fazendo-se $\mu = i$ na Eq. (3.9), a qual resulta em

$$\partial_t F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \kappa^{ij} \partial_t F^0_j + \kappa^{i\alpha} \partial_l F^l_\alpha - \kappa^{0\alpha} \partial_t F^i_\alpha - \kappa^{l\alpha} \partial_l F^i_\alpha = eJ^i, \quad (3.15)$$

que no regime estacionário pode ser escrita como

$$(\varepsilon_{ilm} - \kappa_{ij} \varepsilon_{jlm} - \kappa_{lj} \varepsilon_{ijm}) \partial_l B_m - (\kappa_{i0} \nabla^2 - \kappa_{l0} \partial_l \partial_i) A_0 = eJ_i. \quad (3.16)$$

A lei de Ampère do modelo também exhibe uma acoplamento entre o campo elétrico e o campo magnético.

Por fim, a expressão para o campo de Higgs, dado pela Eq. (3.10), usando o potencial (3.8), pode ser escrita na forma

$$D_0 D_0 \phi - D_i D_i \phi + \frac{\lambda^2}{2} (v^2 - |\phi|^2) \phi = 0. \quad (3.17)$$

Agora, escrevemos a Eq. (3.17) em regime estacionário como sendo

$$-e^2 A_0^2 \phi - \partial_i^2 \phi + 2ieA_i \partial_i \phi + ie\phi \partial_i A_i + e^2 A_i^2 \phi = \frac{\lambda^2}{2} (v^2 - |\phi|^2) \phi. \quad (3.18)$$

A fim de obter configurações de vórtices estáticas, trabalhamos em coordenadas polares (r, θ) e usamos o ansatz usual para configurações de vórtices axialmente simétricos, em que os campos são parametrizados como,

$$\phi = vg(r) \exp(in\theta), \quad A_0 = \omega(r) \quad (3.19)$$

$$A_r = 0, \quad A_\theta = -\frac{1}{er} [a(r) - n]; \quad A_z = 0, \quad (3.20)$$

onde $a(r)$, $g(r)$ e $\omega(r)$ são funções escalares regulares satisfazendo condições de contorno apropriadas na origem.

Nesta escolha o campo magnético alinha-se com o eixo-z, $\mathbf{B} = B(r) \hat{z}$, apenas com dependência radial. Dessa forma, o campo magnético toma a forma

$$B(r) = -\frac{a'}{er}, \quad (3.21)$$

onde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\tan \theta = y/x$. Note-se que, nesta configuração, o gauge de Coulomb é automaticamente satisfeito, $\partial_i A_i = 0$. Assim, podemos reescrever as equações de movimento dada pelas Eqs. (3.14), (3.16) e (3.18) em coordenadas polares considerando o ansatz (3.19) e (3.20), a qual nos conduz ao seguinte sistemas de equações:

$$(1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}) \omega'' + (1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}) \frac{\omega'}{r} - \kappa_{0\theta} \frac{(tB)'}{t} - 2e^2 v^2 g^2 \omega = 0, \quad (3.22)$$

$$(1 - \kappa_{rr} - \kappa_{\theta\theta}) B' + \kappa_{0\theta} \omega'' + 2ev^2 \frac{ag^2}{r} = 0, \quad (3.23)$$

$$\kappa_{0r} \frac{\omega'}{r} = 0, \quad (3.24)$$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{1}{r^2} a^2 g + e^2 \omega^2 g + \frac{1}{2} \lambda^2 v^2 g (1 - g^2) = 0, \quad (3.25)$$

suplementada pela Eq. (3.21). Da Eq. (3.24) é fácil notar que, para encontrar soluções não-triviais para ω , nós devemos impor que $\kappa_{0r} = 0$. É importante notar ainda que, com o ansatz (3.16) e (3.18), as equações resultantes dependem somente de r .

3.1 Energia estacionária do sistema

Neste estágio, vamos obter a energia do modelo em termos das funções $a(r)$, $g(r)$ e $\omega(r)$, que será utilizado quando aplicarmos o método de Bogolmol'nyi. Inicialmente escrevemos a densidade de energia do modelo para configurações de vórtices estacionários, $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, como sendo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma} - |D_{\mu}\phi|^2 + U(|\phi|). \quad (3.26)$$

Podemos definir uma densidade Hamiltoniana para o setor eletromagnético \mathcal{H}_{EM} e para o setor de Higgs \mathcal{H}_H , como sendo

$$\mathcal{H}_{EM} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma}, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{H}_H = |D_{\mu}\phi|^2 - U(|\phi|). \quad (3.28)$$

Cada termo da Eq. (3.27) pode ser expandido como segue

$$\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2, \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma} = -\frac{1}{2}\kappa_{00}(\partial_j A_0)^2 - \kappa_{0j}\epsilon_{jkk}B_k(\partial_b A_0) \quad (3.30)$$

$$+\frac{1}{2}\kappa_{jb}(\partial_j A_0)(\partial_b A_0) - \frac{1}{2}\kappa_{ii}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2}\kappa_{jb}B_j B_b.$$

Assim, a densidade de energia para o setor eletromagnético \mathcal{H}_{EM} , adquire a forma

$$\mathcal{H}_{EM} = \frac{1}{2}A_0[(1 + \kappa_{00})\delta_{jb} - \kappa_{jb}]\partial_b\partial_j A_0 + \frac{1}{2}[(1 - \kappa_{ii})\delta_{jb} + \kappa_{jb}]B_j B_b + \kappa_{0j}\epsilon_{jkk}A_0\partial_b B_k. \quad (3.31)$$

Usando a lei de Gauss dada pela Eq. (3.22) na expressão acima, obtemos

$$\mathcal{H}_{EM} = -\frac{1}{2}A_0[(1 + \kappa_{00})\delta_{ab} - \kappa_{ab}]\partial_a\partial_b A_0 + \frac{1}{2}[(1 - \kappa_{ii})\delta_{jb} + \kappa_{jb}]B_j B_b + 2e^2(A_0)^2\phi^*\phi. \quad (3.32)$$

A densidade de energia do setor de Higgs (3.28) é escrita como

$$\mathcal{H}_H = e^2 A_0^2 |\phi|^2 - |D_i \phi|^2 - U(|\phi|). \quad (3.33)$$

Usando as Eqs. (3.32) e (3.33), a densidade de energia do modelo (3.26) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2}A_0[(1 + \kappa_{00})\delta_{ab} - \kappa_{ab}]\partial_a\partial_b A_0 + \frac{1}{2}[(1 - \kappa_{ii})\delta_{jb} + \kappa_{jb}]B_j B_b \\ & + e^2(A_0)^2\phi^*\phi + |D_i \phi|^2 + U(|\phi|). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por fim, a energia total do sistema sobre todo o espaço é escrita como

$$\begin{aligned} E = & \int d^2\mathbf{r} \left\{ -\frac{1}{2}A_0[(1 + \kappa_{00})\delta_{ab} - \kappa_{ab}]\partial_a\partial_b A_0 + \frac{1}{2}[(1 - \kappa_{ii})\delta_{jb} + \kappa_{jb}]B_j B_b \right\} \\ & + \int d^2\mathbf{r} \{ e^2(A_0)^2|\phi|^2 + |D_i \phi|^2 + U(|\phi|) \}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.2 Vórtices BPS descarregados

A fim de obter soluções tipo vórtices BPS (Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfeld), devemos buscar por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que descrevam a dinâmica do sistema. Estas equações de primeira ordem são encontradas escrevendo a energia do sistema como uma soma de termos quadráticos, como vimos nos capítulos precedentes, e exigindo sua minimização. As configurações de vórtices sem carga estão associadas com a ausência do setor elétrico no modelo, $A_0 = 0$, ou equivalentemente, $\omega = 0$. Esta condição de gauge só será compatível com as equações de movimento (3.22)–(3.25) e com um campo magnético não-trivial quando tivermos $\kappa_{0\theta} = 0$, desse, modo o conjunto de Eqs. (3.22)–(3.25) são reduzidas a somente duas equações diferenciais acopladas

$$(1 - s) B' + 2ev^2 \frac{ag^2}{r} = 0, \quad (3.36)$$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{1}{r^2} a^2 g + e^2 \omega^2 g + \frac{1}{2} \lambda^2 v^2 g (1 - g^2) = 0, \quad (3.37)$$

que devem ser consideradas com a equação para o campo magnético dada em (3.21) para originar soluções consistentes. Observe que na Eq. (3.36) definimos o parâmetro portador dos efeitos da violação da covariância de Lorentz como s :

$$s = \kappa_{rr} + \kappa_{\theta\theta}. \quad (3.38)$$

Com essas condições, a energia do sistema (3.35) é escrita como

$$E = \int d^2 \mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + |D_i \phi|^2 + U(|\phi|) \right\}. \quad (3.39)$$

Usando as Eqs. (2.26), (3.21), a energia é escrita como

$$E = \int d^2 \mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (1 - s) \frac{a'^2}{e^2 r^2} + v^2 (g')^2 + v^2 \frac{g^2 a^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{4} v^4 (1 - g^2)^2 \right\}. \quad (3.40)$$

A partir da Eq. (3.40), podemos extrair condições de contorno apropriadas compatíveis com soluções de vórtices topológicas possuindo energia total finita, como segue

$$g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1, \quad a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0^\pm. \quad (3.41)$$

Próximo a origem, as condições de contorno devem ser tais que os campos não sejam singulares da forma

$$g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad a(r \rightarrow 0) \rightarrow n, \quad (3.42)$$

o sinal + corresponde à $n > 0$ e o sinal - à $n < 0$, com n sendo o número de “enrolamento” da solução topológica.

Aplicando agora o método de Bogolmon’yi à energia (3.40), escrevemos

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (1-s) \left[\frac{a'}{er} \pm \frac{\lambda v^2}{[2(1-s)]^{1/2}} (1-g^2) \right]^2 \mp (1-s) \frac{a'}{er} \frac{\lambda v^2}{[2(1-s)]^{1/2}} (1-g^2) \right\} + \int d^2\mathbf{r} \left\{ v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm v^2 a \frac{(g^2)'}{r} \right\}. \quad (3.43)$$

A fim de expressar a energia (3.43) numa forma quadrática fechada, escolhemos a seguinte relação entre as constante de acoplamento

$$\lambda = e \left(\frac{2}{1-s} \right)^{1/2}, \quad (3.44)$$

de onde resulta que

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (1-s) \left[\frac{a'}{er} \pm \frac{ev^2}{1-s} (1-g^2) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \mp v^2 \frac{a'}{r} \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} \right\}. \quad (3.45)$$

Note-se que para termos uma energia definida positiva, é necessário que $s < 1$. Usando as condições de contorno (3.41) e (3.42), a energia total da configuração **pode ser** escrita como

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (1-s) \left[\frac{a'}{er} \pm \frac{ev^2}{1-s} (1-g^2) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} + H_{\min}, \quad (3.46)$$

onde E_{\min} , a energia mínima é

$$E_{\min} = \pm (2\pi v^2) n = ev^2 |\Phi_B|, \quad (3.47)$$

com o fluxo magnético Φ_B associado ao vórtice

$$\Phi_B = \int B(r) d^2\mathbf{r} = \frac{2\pi}{e} |n|. \quad (3.48)$$

As equações BPS são aquelas que garantem a minimização da energia do sistema, assim tais equações são dadas por

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.49)$$

$$\frac{a'}{er} = \mp \frac{ev^2}{1-s} (1-g^2). \quad (3.50)$$

Este procedimento nos permite expressar o campo magnético (3.21) numa simples forma algébrica e ele representa densidade de energia quando as equações BPS são satisfeitas

$$B = \pm \frac{ev^2}{1-s} (1-g^2). \quad (3.51)$$

A primeira observação é que o coeficiente de violação de Lorentz não modifica a energia mínima do sistema, dada por (3.47). Sob as condições BPS, o campo magnético é um termo relevante para definir o perfil da densidade de energia mínima. É interessante notar ainda que, as equações BPS, (3.49) e (3.50) tem a mesma estrutura que as equações BPS encontradas no modelo Maxwell-Higgs abeliano. A principal diferença é a presença do parâmetro de violação de Lorentz, s , em (3.50), enquanto que a primeira equação BPS (3.49) permanece inalterada. Como será observado adiante, este parâmetro age como um elemento capaz de controlar tanto a extensão radial como a amplitude do defeito. As equações BPS podem ser escritas numa forma adimensional através da definição da variável adimensional, $t = evr$, e implementando as mudanças

$$g(t) \rightarrow \bar{g}(r), \quad a(t) \rightarrow \bar{a}(r), \quad \frac{B(r)}{ev^2} \rightarrow \bar{B}(t), \quad (3.52)$$

que implica em

$$\frac{\bar{a}'}{t} = \mp \frac{1}{1-s} (1-\bar{g}^2), \quad (3.53)$$

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{a}}{t} \bar{g}. \quad (3.54)$$

Da mesma forma, a (3.21) torna-se simplesmente

$$\bar{B} = -\frac{\bar{a}'}{t} = \pm \frac{1}{1-s} (1-\bar{g}^2). \quad (3.55)$$

As equações acima serão usadas para estudar o comportamento assintótico dos campos e para a obtenção das soluções numéricas.

3.2.1 Comportamento assintótico dos vórtices BPS descarregados

Antes de computarmos as soluções numéricas das equações BPS, vamos analisar o comportamento assintótico das soluções de vórtices BPS quando $t \rightarrow 0$ e $t \rightarrow \infty$.

Primeiro, estudamos o comportamento quando $t \rightarrow +\infty$, fazendo $\bar{g} = 1 - \delta g_1$ e $\bar{a} = \pm \delta a_1$, depois substituindo nas Eqs. (3.53) e (3.54) obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias linearizadas satisfeitas por δg_1 e δa_1

$$(\delta g_1)' = -\frac{\delta a_1}{t}, \quad \frac{(\delta a_1)'}{t} = -\frac{2(\delta g_1)}{1-s}, \quad (3.56)$$

cujas soluções satisfazendo o comportamento apropriado no infinito são

$$\delta g_1 \sim (\gamma_s)^{-1} K_0(t\gamma_s) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \exp[-\gamma_s t], \quad (3.57)$$

$$\delta a_1 \sim \gamma_s t K_1(t\gamma_s) \sim \sqrt{t} \exp[-\gamma_s t], \quad (3.58)$$

onde $\gamma_s = \sqrt{\frac{2}{1-s}}$. Observamos que a escala de massa do modelo é modificada pelo parâmetro que rege os efeitos da LIV

$$m_{LIV} = \sqrt{\frac{2}{1-s}} ev. \quad (3.59)$$

O campo magnético comporta-se como

$$\bar{B}(t) = \pm \gamma_s K_0(t\gamma_s). \quad (3.60)$$

Para $t \rightarrow 0$, usamos o método de serie de potências,

$$\bar{g} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j t^j, \quad \bar{a} = n \pm \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \quad \bar{\omega} = \mp \frac{1}{\bar{\kappa}} \mp \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t^j. \quad (3.61)$$

nas Eqs. (3.53), (3.54), resultando nas soluções

$$\bar{g} = G t^{|n|} - \frac{G(\gamma_s)^2}{8} t^{|n|+2} + \mathcal{O}(t^{|n|+4}), \quad (3.62)$$

$$\bar{a} = \pm \left[|n| - \frac{(\gamma_s)^2}{4} t^2 + \frac{(G\gamma_s)^2}{4(|n|+1)} t^{2|n|+2} + \mathcal{O}(t^{2|n|+4}) \right]. \quad (3.63)$$

Com boa aproximação, o campo magnético para $t \rightarrow 0$ comporta-se como

$$\bar{B}(t) = \pm \frac{1}{1-s}. \quad (3.64)$$

Tais comportamentos serão corroborados pelas soluções numéricas.

3.2.2 Soluções numéricas para os vórtices BPS descarregados

Nas Figs. 3.1–3.4, apresentamos alguns perfis para o campo de Higgs, campo de gauge e campo magnético dos vórtices BPS gerados por métodos numéricos aplicados às equações diferenciais ordinárias (3.53) e (3.54). Em todas as figuras, $s = 0$, linha sólida preta, representa a solução BPS na ausência do termo de LIV. Este conjunto de gráficos revelam o papel desempenhado pelo parâmetro de violação de Lorentz, s , sob as soluções de vórtices.

A Fig. 3.1 mostra que quanto maior for o parâmetro de violação de Lorentz, mais rapidamente o campo escalar atinge a região de saturação ($\bar{g} \sim 1$), sendo este comportamento mais

pronunciado quando o parâmetro tende ao seu valor máximo ($s \rightarrow 1$). Para $s < 0$ o campo de Higgs tende mais lentamente para a região de saturação, saturando mais rapidamente quanto mais negativo for s .

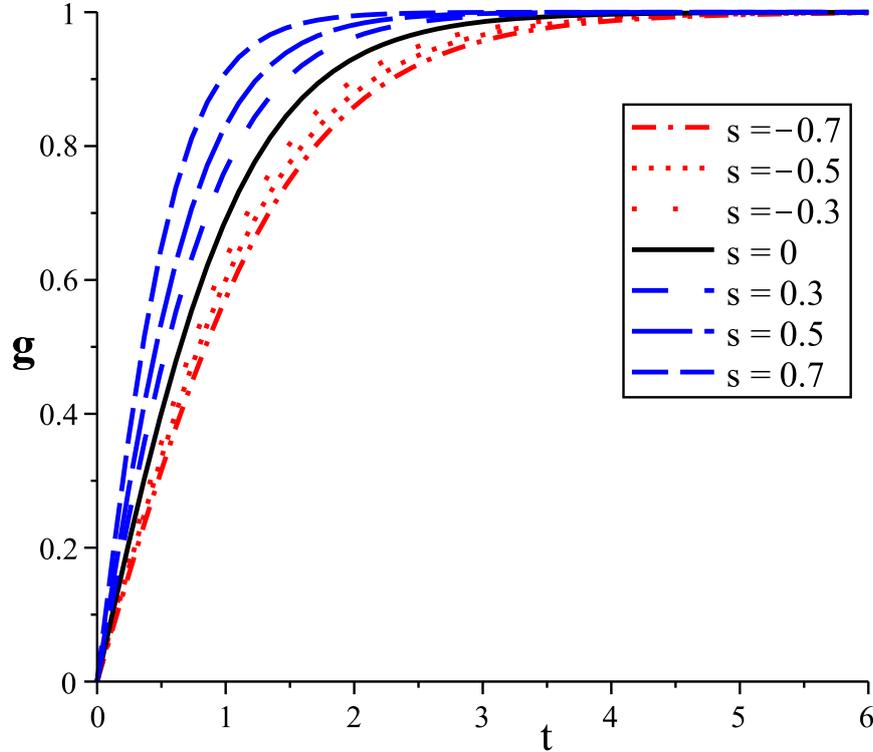


Figura 3.1: Campo escalar $\bar{g}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores s .

A Fig. 3.2 mostra o perfil do campo vetorial: ele anula-se mais rapidamente quanto maior o valor de s e torna-se mais estreito quando $s \rightarrow 1$. Para $s < 0$, o perfil torna-se mais amplo quando o parâmetro s torna-se mais negativo.

A Fig. 3.3 descreve o comportamento do campo magnético. Sendo sua amplitude proporcional à $(1 - s)^{-1}$, nota-se que valores maiores e perfis mais estreitos são obtidos para $s \rightarrow 1$. Para $s < 0$ e valores crescentes de $|s|$ o perfil do campo magnético torna-se mais amplo, enquanto que sua intensidade diminui continuamente.

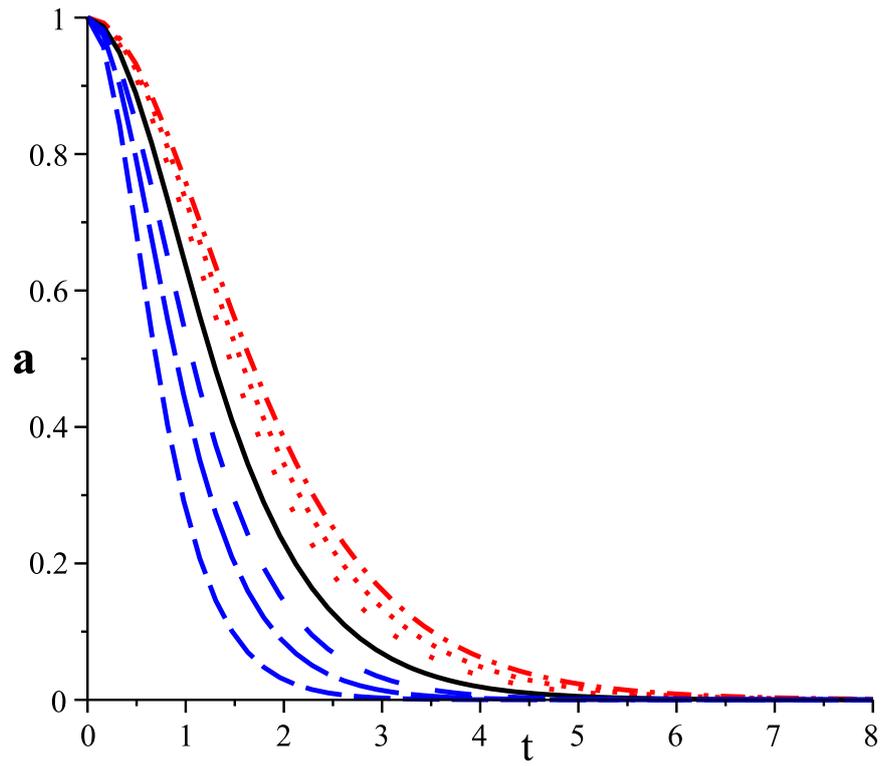


Figura 3.2: Potencial vetor $\bar{a}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores s .

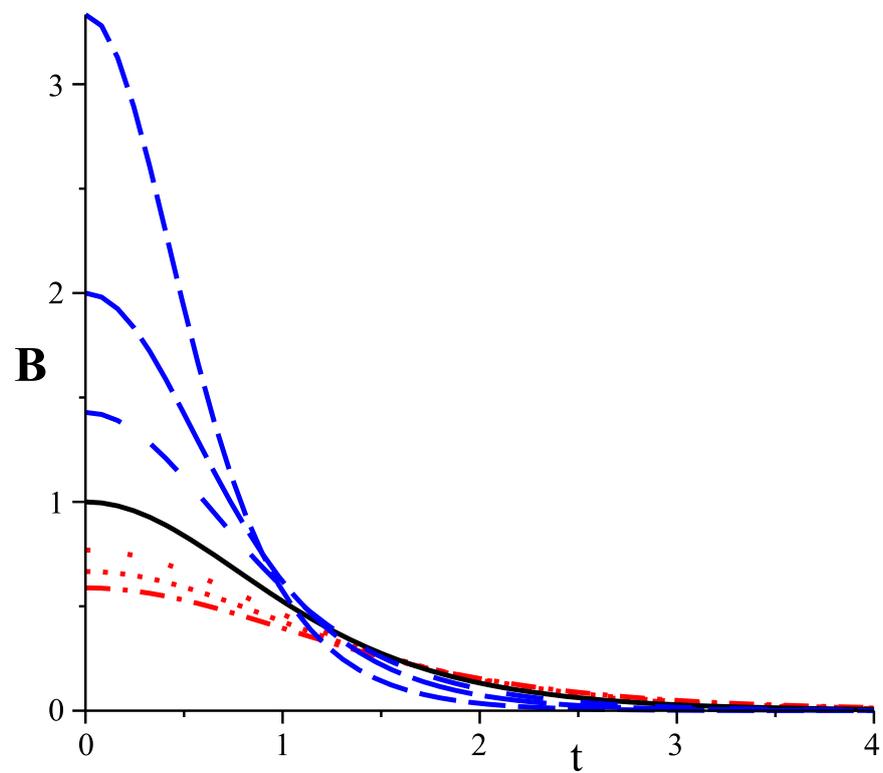


Figura 3.3: Campo magnético $\bar{B}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores s .

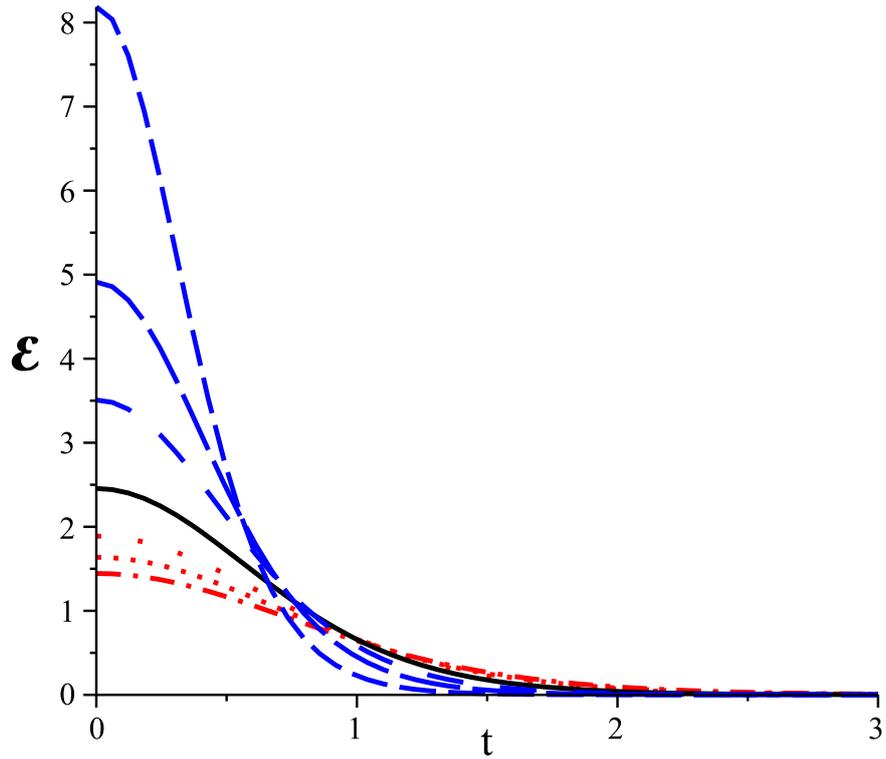


Figura 3.4: Densidade de energia $\bar{\mathcal{E}}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores s .

Como antecipado no cálculo da energia mínima (3.47), a densidade de energia é proporcional ao campo magnético, então, o perfil da densidade de energia torna-se muito similar ao perfil da intensidade do campo magnético. Ambos perfis são úteis para estimar a extensão do defeito na direção radial. Notamos que o defeito encolhe (torna-se uma estrutura tipo-compacton) enquanto o parâmetro aumenta de valores negativos para 1. Ele indica que o parâmetro de LIV age como um elemento capaz de tornar os defeitos mais ou menos amplos. Este comportamento é similar ao observado nas soluções tipo-compacton estudadas na Ref. [33].

Capítulo 4

Modelo abeliano de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz: Vórtices carregados

Partimos agora para a obtenção dos vórtices BPS carregados no modelo Maxwell-Higgs abeliano com LIV (MHLIV). O uso da densidade Lagrangiana (3.7) não permite que formemos uma estrutura fechada na energia como estabelece o método de Bogomol'nyi, mas podemos contornar esse problema adicionando um campo escalar neutro dinâmico ao sistema, $\Psi = \Psi(r)$, que torna essa situação similar ao caso MCSH abeliano. Dessa forma, a densidade Lagrangiana em (1+3)-dimensões desse novo modelo é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma} + \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\Psi\partial^{\alpha}\Psi + |D_{\mu}\phi|^2 - e^2\Psi^2|\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi), \quad (4.1)$$

onde $D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi - ieA_{\mu}\phi$ é a derivada covariante e $U(|\phi|, \Psi)$ é um potencial de auto-interação dado como

$$U(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2} [ev^2 - e|\phi|^2 - \varepsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j\Psi]^2, \quad (4.2)$$

onde v exerce o papel do valor esperado do vácuo do campo escalar. O potencial acima explicitamente não respeita a covariância de Lorentz possuindo dois mínimos, o primeiro $|\phi| = 0$ e $\varepsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j\Psi = ev^2$ é um vácuo simétrico, o segundo $\Psi = 0$ e $|\phi| = v$ é o assimétrico.

As equações de movimento do modelo, obtidas por meio de (4.1), podem ser escritas como

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\alpha}\partial_{\nu}F_{\alpha}{}^{\nu} - \kappa^{\nu\alpha}\partial_{\nu}F_{\alpha}{}^{\mu} = eJ^{\mu}, \quad (4.3)$$

$$D^{\mu}D_{\mu}\phi + e^2\Psi^2\phi - e\phi [ev^2 - e|\phi|^2 - \varepsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j\Psi] = 0, \quad (4.4)$$

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - \varepsilon^{ij}\kappa_{0i}\delta_j^{\mu}\partial_{\mu} [ev^2 - e|\phi|^2 - \varepsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j\Psi] + 2e^2\Psi|\phi|^2 = 0, \quad (4.5)$$

onde a densidade de corrente é escrita como

$$J^\mu = i(\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*D^\mu\phi). \quad (4.6)$$

Nota-se que, apesar da inserção do campo neutro Ψ no modelo, a Eq. (4.3) é exatamente a mesma do modelo Maxwell-Higgs abeliano sem LIV (3.9) e a Eq. (4.4) tem a mesma estrutura da Eq. (3.10).

No regime estacionário, a lei de Gauss, a lei de Ampère e a equação para o campo de Higgs são dadas por

$$(1 + \kappa_{00})\partial_i\partial_i A^0 + \kappa_{0j}\varepsilon_{jik}\partial_i B_k - \kappa_{ij}\partial_i\partial_j A^0 = 2e^2 A^0 |\phi|^2, \quad (4.7)$$

$$(\varepsilon_{ilm} - \kappa_{ij}\varepsilon_{jlm} - \kappa_{lj}\varepsilon_{ijm})\partial_l B_m - (\kappa_{i0}\partial_i^2 - \kappa_{l0}\partial_l\partial_i)A_0 = eJ_i, \quad (4.8)$$

$$-e^2 A_0^2 \phi - \partial_i^2 \phi + 2ieA_i\partial_i\phi + ie\phi\partial_i A_i + e^2 A_i^2 \phi = e\phi(ev^2 - e|\phi|^2 + \kappa_{0\theta}\Psi') - e^2\Psi^2\phi \quad (4.9)$$

A equação de movimento estacionária para o campo neutro $\Psi = \Psi(r)$ é dada por

$$\partial_i^2\Psi + \varepsilon_{il}\kappa_{0i}\partial_l(ev^2 - e|\phi|^2 - \varepsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j\Psi) = 2e^2\Psi|\phi|^2. \quad (4.10)$$

A fim de obter soluções de vórtices carregados, anulamos o setor paridade-par do modelo e mantemos o setor paridade-ímpar. Assim, para configurações de vórtices estacionárias, usamos mais uma vez, o ansatz dado pelas Eqs. (3.19) e (3.20) suplementadas com as transformações (2.15) e (2.16), que resultam

$$\omega'' + \frac{1}{r}\omega' - \kappa_{0\theta}\frac{(rB)'}{r} = 2e^2v^2g^2\omega, \quad (4.11)$$

$$B' + \kappa_{0\theta}\omega'' + 2ev^2\frac{ag^2}{r} = 0, \quad (4.12)$$

$$g'' + \frac{1}{r}g' + e^2\omega^2g - \frac{a^2}{r}g = eg(ev^2g^2 - \kappa_{0\theta}\Psi' - ev^2) + e^2\Psi^2g, \quad (4.13)$$

$$\Psi'' + \frac{1}{r}\Psi' - \kappa_{0\theta}\frac{(r(ev^2g^2 - \kappa_{0\theta}\Psi' - ev^2))'}{r} = 2e^2v^2g^2\Psi^2. \quad (4.14)$$

Agora, como nosso intuito é aplicar o método de Bogomol'nyi na energia do sistema, escrevemos inicialmente o seu tensor de energia-momento canônico $\Theta^{\mu\nu}$, que pode ser da forma

$$\Theta^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \kappa^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\rho F_\rho{}^\nu + \kappa^{\alpha\rho}F_\alpha{}^\mu F_\rho{}^\nu \quad (4.15)$$

$$+ (D^\mu\phi)(D^\nu\phi)^* + (D^\mu\phi)^*(D^\nu\phi) + \partial^\mu\Psi\partial^\nu\Psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

A densidade de energia do modelo é obtida calculando o $\Theta^{00} = \mathcal{E}$ a partir da Eq. (4.15) como segue

$$\mathcal{E} = F^{0i}F_i{}^0 + \kappa^{0\alpha}F_\alpha{}^\rho F_\rho{}^0 + \kappa^{\alpha\rho}F_\alpha{}^0 F_\rho{}^0 + 2(D_0\phi)(D_0\phi)^* + (\partial_0\Psi)^2 - \mathcal{L}. \quad (4.16)$$

Podemos ainda escrever a densidade Lagrangiana \mathcal{L} da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(F^{0i})^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\kappa_{00}F_{0j}F_{0j} - \kappa_{0i}F_{0j}F_{ij} - \frac{1}{2}\kappa_{ij}F_{i0}F_{j0} - \frac{1}{2}\kappa_{ij}F_{ik}F_{jk} \\ & + \frac{1}{2}(\partial_0\Psi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\Psi)^2 + |D_0\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - e^2\Psi^2|\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nesta situação investigamos os vórtices carregados considerando o setor paridade par nulo ($\kappa_{ii} = \kappa_{ij} = 0$) e o setor paridade ímpar não-nulo ($\kappa_{0i} \neq 0$). Assim, substituímos a Eq. (4.17) na densidade de energia dada em (4.16), resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2}(F^{0i})^2 + \frac{B^2}{2} + |D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0\Psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\Psi)^2 \\ & + e^2\Psi^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}[ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j\Psi]^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como o defeito mantém sua forma devido à sua natureza topológica, vamos tomar configurações de campos estáticos. Dessa forma podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{B^2}{2} + \frac{1}{2}(\partial_i A_0)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + |D_i\phi|^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_i\Psi)^2 + e^2\Psi^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}[ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j\Psi]^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Afim de obter as equações diferenciais de primeira ordem, nós impomos inicialmente a seguinte condição para o campo neutro Ψ , $\Psi = \mp A_0$, ou seja, a dinâmica que rege um campo é exatamente igual a dinâmica que rege outro, que é similar àquela usada nas configurações de vórtices de MCSH. Usando tal condição, podemos escrever

$$\mathcal{E} = \frac{B^2}{2} + \frac{1}{2}[ev^2 - e|\phi|^2 \pm \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j A_0]^2 + (\partial_i A_0)^2 + 2e^2 A_0^2 |\phi|^2 + |D_i\phi|^2. \quad (4.20)$$

Para prosseguirmos, vamos agora usar a seguinte relação

$$|D_i\phi|^2 = |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\partial_a J_b. \quad (4.21)$$

Quadrando os dois primeiros termos da densidade de energia do modelo, dada em (4.20) e usando (4.21) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2}[B \mp (ev^2 - e|\phi|^2 \pm \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j A_0)]^2 \pm ev^2 B \mp eB|\phi|^2 + \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j A_0 B \\ & + (\partial_i A_0)^2 + 2e^2 A_0^2 |\phi|^2 + |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\partial_a J_b \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora usamos a lei de Gauss do modelo (4.7), levando em conta as condições impostas até aqui, na expressão acima. A qual resulta

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[B \mp (ev^2 - e|\phi|^2 \pm \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j A_0) \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm ev^2 B + \partial_a \mathcal{J}_a,$$

onde

$$\mathcal{J}_a = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ab} J_b + A_0 \partial_a A_0 + \epsilon_{ba} \kappa_{0b} A_0 B. \quad (4.23)$$

A densidade de energia é minimizada exigindo que os termos quadráticos sejam nulos, estabelecendo duas condições BPS para o modelo em questão, que seguem:

$$B = \pm (ev^2 - e|\phi|^2) + \kappa_{0i}\epsilon_{ij}\partial_j A_0 \quad (4.24)$$

$$|D_{\pm}\phi| = 0 \quad (4.25)$$

Sob tais condições BPS, nós obtemos a importante expressão para a densidade de energia minimizada é

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm ev^2 B + \partial_a \mathcal{J}_a,$$

que implica na energia total dada como

$$E_{BPS} = \int d^2r \mathcal{E}_{BPS} = ev^2 |\Phi_B|,$$

que é proporcional ao fluxo magnético como visto antes. Vale a pena ressaltar que o termo de divergência total é não contribui na energia BPS, uma vez que, os campos tendem a zero no infinito.

Usando o ansatz para os vórtices rotacionalmente simétrico, dada pelas Eqs. (2.13) e (2.13) e a condição extra $A_0 = \omega$, as equações BPS tornam-se

$$B(r) = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) - \kappa_{0\theta}\omega', \quad (4.26)$$

$$g' = \pm \frac{ga}{r}. \quad (4.27)$$

Notamos que para realizar os plots das soluções de vórtices é necessário fazer uso de uma equação suplementar. Usamos, para isto, a lei de Gauss dada em (4.11) resultando na seguinte equação suplementar:

$$\frac{1}{r} (r\omega)' - \kappa_{0\theta} \frac{(rB)'}{r} = 2e^2 v^2 g^2 \omega. \quad (4.28)$$

As equações BPS, (4.26) e (4.27), e a Eq. (4.28), podem ser escritas numa forma adimensional através da introdução da variável adimensional, $t = evr$ e implementando as seguintes mudanças

$$g(r) \rightarrow \bar{g}(t), \quad a(r) \rightarrow \bar{a}(t), \quad \frac{\omega(r)}{v} \rightarrow \bar{\omega}(t), \quad \frac{B(r)}{ev^2} \rightarrow \bar{B}(t), \quad (4.29)$$

as quais resultam nas equações seguintes

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \pm \frac{\bar{g}\bar{a}}{t}, \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{t} \frac{d\bar{a}}{dt} = \mp (1 - \bar{g}^2) + \kappa \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{t} (t\bar{\omega})' - \kappa \frac{(t\bar{B})'}{t} = 2\bar{g}^2\bar{\omega}, \quad (4.32)$$

onde denominamos $\kappa = \kappa_{0\theta}$. Observamos que as soluções para $\kappa \rightarrow -\kappa$ correspondem a $\bar{g} \rightarrow \bar{g}$, $\bar{a} \rightarrow \bar{a}$, $\bar{\omega} \rightarrow -\bar{\omega}$.

4.1 Comportamento assintótico dos vórtices carregados no marco da LIV

A partir de agora avaliamos os comportamentos assintóticos dos vórtices usando as equações BPS (4.26), (4.27), juntamente com a condição $\omega = \mp\Psi$ e a lei de Gauss do modelo (4.11). Seguindo o mesmo procedimento usados nos modelo anteriores, analisamos o comportamento funcional dos campos quando $r \rightarrow \infty$, para este fim, escrevemos

$$\bar{a} = \pm\delta a_1, \quad \bar{g} = 1 - \delta g_1, \quad \bar{\omega} = \pm\delta\omega_1, \quad (4.33)$$

com δa_1 , δg_1 , $\delta\omega_1$ sendo pequenas correções a serem computadas.

Após a implementação de (4.33) nas equações (4.30)–(4.32) e resolvendo o conjunto de equações diferenciais linearizadas, obtemos

$$\delta g_1 \sim t^{-1/2} e^{-\beta t} \sim \delta\omega_1, \quad \delta a_1 \sim t^{-1/2} e^{-\beta t}, \quad (4.34)$$

onde

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{\kappa^2 + 1} + 1}{1 + \kappa^2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{\kappa^2 + 1} - 1}{1 + \kappa^2}} \quad (4.35)$$

Notemos que o parâmetro β é um número complexo com parte real positiva, que implica em um comportamento senoidal modulado por um fator de decaimento exponencial.

Para $t \rightarrow 0$, usamos o método de série de potências, assim neste limite, escrevemos

$$\bar{g} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j t^j, \quad \bar{a} = n - \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j t^j, \quad (4.36)$$

que quando substituídas nas Eqs. (4.30)–(4.32) permite calcular o comportamento perto da origem. Desse modo, as soluções são

$$\bar{g}(t) = Gt^n + \dots, \quad (4.37)$$

$$\bar{a} = n - \frac{1}{2 + \kappa^2}t^2 + \dots, \quad (4.38)$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \frac{\kappa}{1 + \kappa^2}t + \dots \quad (4.39)$$

Da equação (4.38) podemos extrair o campo magnético como sendo

$$\bar{B}_0 = \frac{1}{1 + \kappa^2}, \quad (4.40)$$

enquanto que a equação (4.39) produz o campo elétrico $\bar{\omega}'$ em $t = 0$,

$$\bar{\omega}'(0) = \frac{\kappa}{1 + \kappa^2}, \quad (4.41)$$

que estabelece a segunda condição de contorno para o campo $\bar{\omega}(t)$. Os campos físicos são muito bem definidos na origem.

Uma observação importante deve ser feita nesta etapa. Note-se que a diferença entre as equações BPS do modelo Maxwell-Higgs abeliano com LIV ((MHLIV) e o modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs abeliano (MCSH) reside essencialmente no campo neutro Ψ , onde nas equações BPS do modelo com LIV aparecem derivadas do campo Ψ diferentemente das equações BPS do modelo MCSH. Contudo, comportamentos assintóticos na origem são muito similares como pode ser visto fazendo uma analogia entre os parâmetros de Chern-Simons $\bar{\kappa}$ e nosso parâmetro de quebra κ . Já os comportamentos no infinito diferem, pois em nosso modelo é tipo-senoidal modulado por um decaimento exponencial e no MCSH é somente um decaimento exponencial.

4.1.1 Soluções numéricas para os vórtices carregados

Agora, prosseguimos e apresentamos alguns perfis para os vórtices carregados gerados por métodos numéricos aplicados às Eqs. (4.30)–(4.32). Nas Figs. 4.1–4.6, mostramos os perfis dos campos para $n = 1$ para vários valores do parâmetro de quebra κ . A condição de contorno adequada para o potencial escalar na origem é

$$\bar{\omega}'(0) = \frac{\kappa}{1 + \kappa^2}, \quad (4.42)$$

ou seja, impomos que o campo elétrico na origem seja nulo.

A Fig. 4.1, mostra que quanto maior o parâmetro de violação de Lorentz, mais lentamente o perfil do campo escalar atinge a região de saturação ($\bar{g} \sim 1$), sendo este comportamento mais pronunciado quando o parâmetro tende à ($\kappa \rightarrow 0$). Como esperado o perfil apresenta um comportamento senoidal amortecido em torno do valor da saturação.

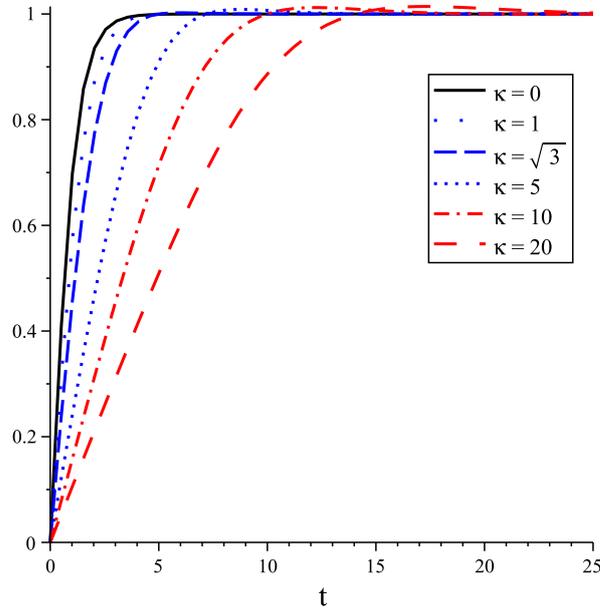


Figura 4.1: Campo escalar $\bar{g}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores κ .

A Fig. 4.2 o perfil do potencial vetor: ele desaparece mais lentamente à medida que κ aumenta, tendendo à um perfil mais amplo para $\kappa \gg 1$. Também, para $\kappa > 1$ o comportamento senoidal amortecido mostra claramente a inversão do campo magnético, ou seja, é uma inversão de fluxo produzido pelo modelo LIV.

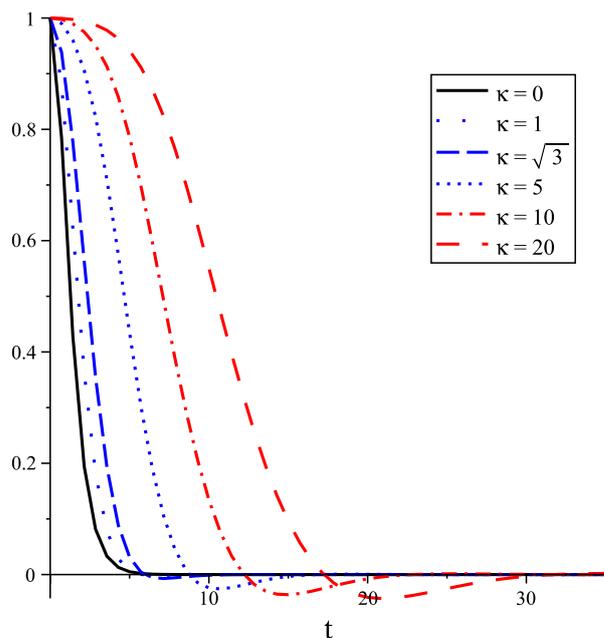


Figura 4.2: Potencial vetor $\bar{a}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores κ .

A Fig. 4.3 mostram os perfis do campo magnético. Para $\kappa \ll 1$ os perfis são mais estreitos e centrados na origem com amplitude $(1 + \kappa^2)^{-1}$, mas quando $\kappa \gg 1$, o centro do perfil é deslocado para a direita da origem como ocorre no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

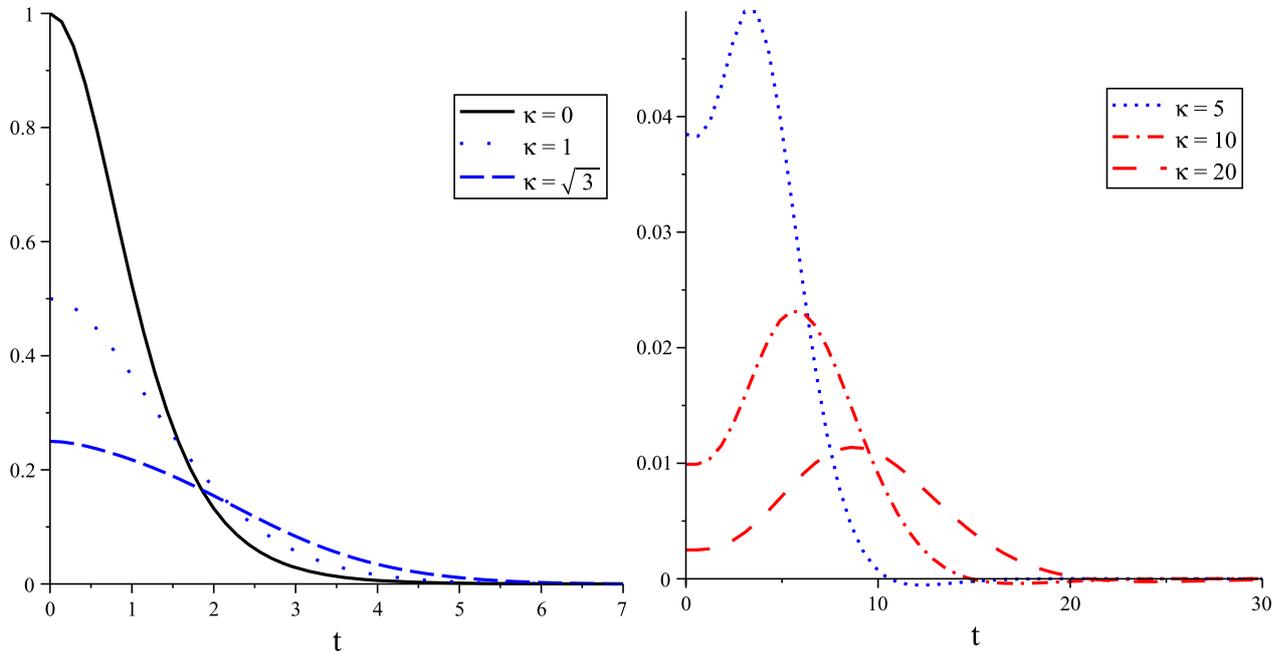


Figura 4.3: Campo magnético $\bar{B}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores κ .

A Fig. 4.4 mostra o perfil do campo escalar que desaparece mais lentamente quando κ aumenta, tendendo à perfis mais amplos quando $\kappa \geq 1$. Ele mostra que o potencial elétrico

muda de positivo para negativo seguindo um comportamento senoidal amortecido assintótico.

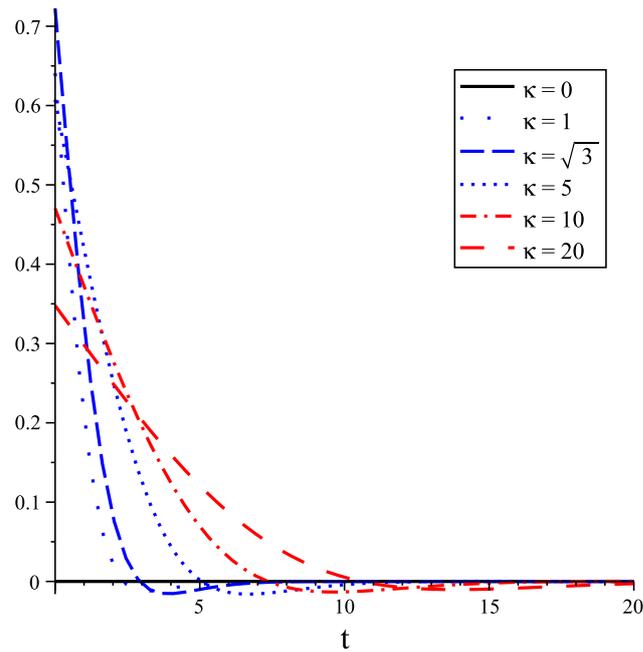


Figura 4.4: Potencial escalar $-\bar{\omega}(t)$ para $n = 1$ e diferentes valores κ .

A Fig. 4.5 mostra o perfil do campo elétrico, eles estão centrados na origem com amplitude $\frac{\kappa}{1 + \kappa^2}$ atingindo seu máximo em $\kappa = 1$. Para $\kappa < 1$ o perfil torna-se mais estreito mas para $\kappa > 1$ os perfis são mais amplos. Ele também mostra que os vórtices apresentam inversão do fluxo elétrico devido ao caráter senoidal amortecido da solução.

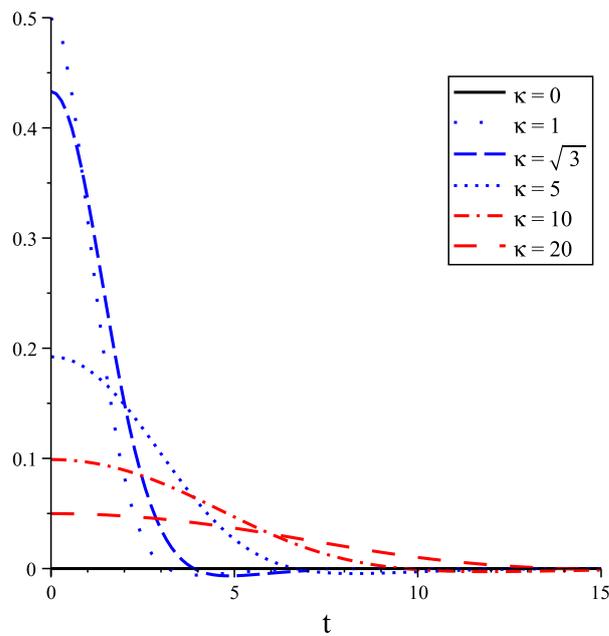


Figura 4.5: Campo elétrico $\bar{\omega}'$ para $n = 1$ e diferentes valores κ .

Fig. 4.6 mostra o perfil da densidade de energia revelando que são similares ao campo magnético, só que, mais localizados. Por outro lado, para $\kappa \gg 1$, a amplitude máxima para o lump também desloca-se para a direita do t -axis significando mais proximidade à origem quando comparado com o campo magnético.

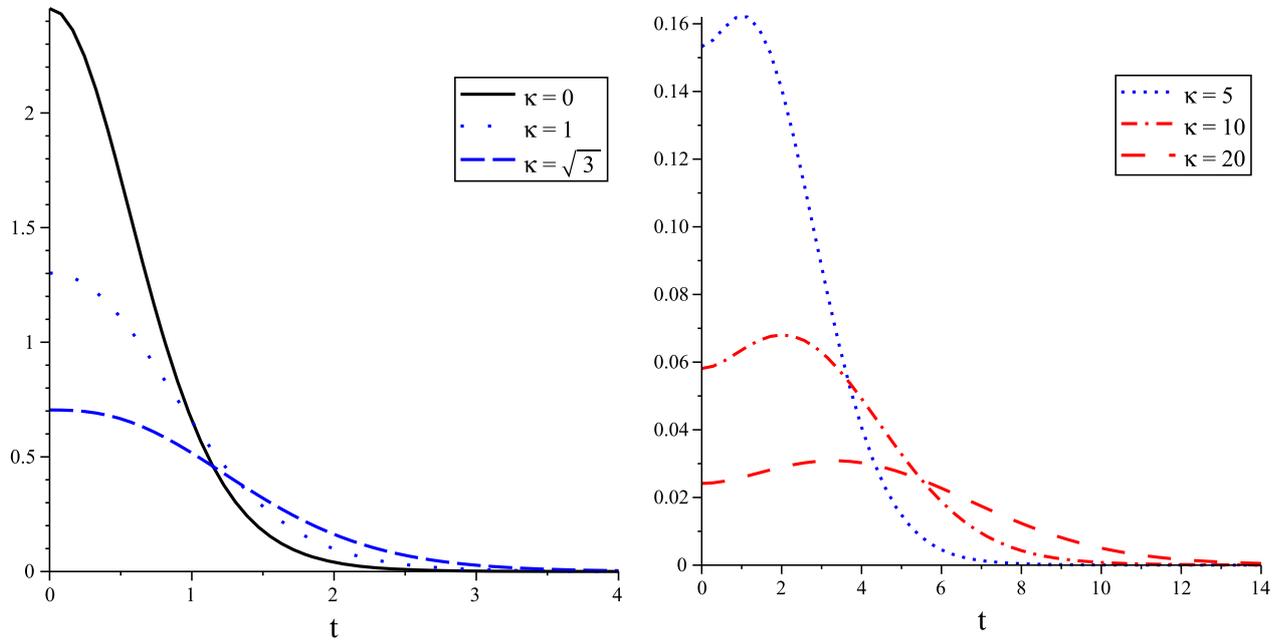


Figura 4.6: densidade de energia $\bar{\mathcal{E}}(t)$ para $n = 1$. $\kappa = 0$ (linha sólida preta) é a solução BPS na ausência de LIV. of the LIV background.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nesta Dissertação estudamos as soluções de vórtices tipo BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld) no modelo de Maxwell-Higgs cujo setor eletromagnético carrega termos de quebra de Lorentz oriundos do setor eletromagnético CPT-par do modelo padrão estendido. A relevância deste trabalho reside no fato de que é o primeiro a investigar soluções de vórtices no modelo Maxwell-Higgs Abelianizado suplementado pelo termo CPT-par tanto no setor paridade-par como no setor paridade-ímpar. O objetivo foi verificar como as quebras das simetrias de Lorentz e CPT influenciam no comportamento das soluções de vórtices.

O primeiro capítulo do trabalho, apresenta uma revisão detalhada sobre os defeitos topológicos em teorias de campos escalares em 1+1-dimensões. A revisão tem por finalidade apresentar conceitos fundamentais sobre estas estruturas, bem como o método de Bogomol'nyi, muito útil para obter as famosas equações BPS, equações de primeira ordem que resolvem as equações de movimento de segunda ordem. Também destacamos a importância das condições de contorno na formação de defeitos, que tem uma implicância física fundamental, a finitude da energia. Nesta oportunidade, usamos o conceito de carga topológica para caracterizar o defeito como topológico e não topológico. Finalizamos este capítulo apresentando a solução de kink, para um modelo sujeito à potencial tipo $-\lambda\phi^4$, tal solução conecta dois estados de vácuo diferentes.

No segundo capítulo, à modo de treino, fazemos uma detalhada revisão sobre os defeitos topológicos em sistemas em 1+2-dimensões, neste caso mostramos a necessidade de se introduzir campos vetoriais, devido a configuração obter energia finita, tal configuração origina naturalmente um sistema girante, daí sua denominação de vórtices. Neste capítulo, tratamos dos vórtices, do tipo BPS, em diferentes modelos, tais como : Modelo de Maxwell-Higgs (MH), Chern-Simons-Higgs (CSH) e Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH). No modelo MH, estuda-

mos os vórtices BPS para um conhecido potencial denominado de $\lambda|\phi|^4$. Foi mostrado que os vórtices que surgem no modelo MH suportam soluções cujo setor elétrico é nulo, ou seja, tais soluções não apresentam carga elétrica. Aplicando o método de Bogomol’nyi, notamos que as equações BPS só são atingidas quando a condição entre as constantes de acoplamento do modelo, $\lambda = e$, for satisfeita. Essa condição está intimamente ligada à igualdade das massas do campo de gauge e do campo de Higgs $m_A = m_H = \sqrt{2}ev$. As condições de contorno sobre os campos, úteis para a formação do defeito surgem da exigência de uma configuração de vórtice com energia finita. A partir disto, nossos resultados confirmaram que o campo magnético atinge seu valor máximo quando $|\phi| = 0$. Também avaliamos os comportamentos assintóticos dos campos e próximos à origem e notamos que no infinito os campos tendem exponencialmente a seus valores de vácuo com comprimento característico que depende da escala de massa da teoria, já próximo à origem os campos comportam-se como potências de r . Em seguida, estudamos os vórtices BPS no modelo CSH cujo potencial é tipo $\lambda|\phi|^6$, pois permite a existência de soluções BPS. Mostramos que este modelo suporta apenas vórtices carregados, devido ao parâmetro de CSH. Por isso, diferentemente do caso MH, o campo magnético atinge seu máximo quando campo de Higgs é $|\phi|^2 = v^2/2$. O terceiro caso revisado é o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH), mas uma vez o modelo apenas pode suportar soluções carregadas, além disso a obtenção dos vórtices BPS carregados, somente é alcançada quando introduzimos um campo neutro dinâmico N e submetemos o sistema à um potencial modificado dependendo do campo neutro. Dessa forma, as equações BPS do modelo são satisfeitas quando $\omega = \mp N$, revelando que o potencial escalar tem a mesma dinâmica que o campo neutro. As soluções de vórtice dos modelos MH e CSH são mapeadas nos limites em que $\kappa \rightarrow 0$ e $\kappa \rightarrow \infty$, respectivamente. É importante ressaltar que a energia dos vórtices BPS, tanto carregados como os sem carga, é proporcional ao fluxo magnético o qual carrega a informação da topologia do defeito caracterizada pelo “winding number”.

No terceiro capítulo, investigamos a existência de configurações estáveis de vórtices BPS descarregados no modelo Maxwell-Higgs Abelian suplementado com os termos CPT-par que violam a simetria de Lorentz pertencendo aos setores de gauge e Higgs do modelo padrão estendido. Encontramos as equações de movimento implementando o ansatz usual para soluções de vórtices rotacionalmente simétricos. Por aplicação do método de Bogomol’nyi para a densidade de energia, as equações BPS foram obtidas, exibindo uma estrutura similar à do modelo Maxwell-Higgs Abelian que, como vimos, suporta os vórtices ANO. Embora as equações BPS apresentem a mesma estrutura, o parâmetro LIV, s , aparece como um elemento chave que permite controlar a extensão radial do defeito e sua amplitude na origem. A intensidade do campo

magnético na origem aumenta com s , tendendo ao seu máximo quando $s \rightarrow 1$, um limite em que o comprimento do defeito e o alcance da interação tendem à zero. Tal resultado oferece a possibilidade de controlar a extensão do defeito sem modificar o setor cinético ou o potencial do modelo. Apesar do perfil encolhido observado aqui, análogo ao verificado em defeitos compactlike k -field [33], deve ser pontuado algumas vantagens das soluções compactlike com violação de Lorentz: o caráter BPS, a preservação do setor cinético usual da teoria de Maxwell-Higgs, e a correspondência direta entre o tamanho do defeitos e a amplitude da interação. Além disso, este resultado abre uma nova janela: a chance de empregar modelos com violação de Lorentz como uma teoria efetiva para endereçar algumas situações onde modelos k -field tem sido aplicados, com atenção especial para defeitos topológicos. Mais especificamente, a possibilidade de controlar a amplitude de interação e o tamanho do defeito pode permitir interessantes aplicações para a investigação de configurações de vórtices em algumas áreas da matéria condensada, onde o comprimento de penetração depende das propriedades do sistema. Deve ser observado que as soluções de vórtices fornecidos pelas Eqs. (3.49) e (3.50) não exibem anisotropia espacial, embora os coeficientes paridade-par usualmente produzem soluções estacionárias anisotrópicas. Isto indica que o ansatz de vórtice seleciona somente soluções paridade-par que não estão ligadas com a anisotropia espacial. Lembramos ainda que, as configurações de vórtices obtidas neste modelo com LIV são equivalentes aquelas produzidas pela eletrodinâmica Maxwell-Higgs efetiva, que descreve as configurações de vórtices em meios contínuos. Note que nesta situação não faz sentido considerar limites superiores para os coeficientes de violação de Lorentz, uma vez que o papel do coeficiente de violação é acusar a presença do meio dielétrico. Esta interpretação torna sensível a análise dos perfis realizado neste trabalho para a amplitude $-1 < s < 1$, que obviamente envolve magnitudes muito maior do que os limites superiores frequentemente usados, por exemplo, em uma eletrodinâmica no vácuo. Os resultados deste terceiro capítulo foram publicados na revista Physical Review D [Phys.Rev. D86, 065011 (2012)].

Para finalizar, no quarto capítulo investigamos a existência de configurações estáveis de vórtices BPS carregados na presença de LIV. Através da análise das equações de movimento, concluímos que tal existência é possível apenas quando o setor de paridade-ímpar do modelo é não-nulo. O setor paridade-par do modelo foi considerado nulo, simplesmente com o intuito de facilitar nossas contas. Além disso, neste modelo carregado, implementamos um campo escalar neutro Ψ e usamos um potencial com dependência explícita na derivada espacial desse campo. A aplicação do método de Bogomol'nyi nos conduz as configurações do tipo BPS, cuja estrutura é similar a do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs anteriormente estudado. A partir da análise numérica, notamos que o parâmetro de violação tem o papel de controlar a extensão do

defeito, tal como ocorre no caso dos vórtices descarregados com LIV com o setor paridade-par. A intensidade do campo magnético na origem do vórtice diminui à medida que o parâmetro κ aumenta, mas também foi observado que para certos valores de κ o campo magnético na origem é máximo e para outros valores maiores de κ não é máximo na origem, mas em outra posição do vórtice afastando-se mais da origem à medida que κ aumenta. Além de controlar a amplitude máxima do defeito, o parâmetro também nos capacita controlar a extensão radial do defeito permitindo obter defeitos compactlike como no caso dos vórtices sem carga. Neste capítulo, também estamos considerando o modelo como sendo uma eletrodinâmica efetiva, sujeita ao ansatz de vórtice usual, fornecendo soluções de vórtices em um meio dielétrico contínuo. Estas configurações de vórtices são providas de diversas características interessantes, tais como localização espacial (decaimento exponencialmente), quantização do fluxo magnético inteiro, inversão do fluxo magnético e o fluxo elétrico. Especificamente, a inversão do fluxo magnético localizado é um fenômeno interessante, com aplicações à sistemas da matéria condensada. Recentemente, a inversão do fluxo magnético foi reportado no contexto de vórtices fracionários em supercondutores descritos pelo modelo de Ginzburg-Landau (TCGL). Nele, o fluxo magnético é quantizado de forma fracionária, apresentando um decaimento de $\frac{1}{r^4}$, uma reversão bem sutil. Tal cenário, entretanto, difere do nosso modelo teórico, que fornece um fluxo magnético localizado de extensão controlável, exibindo inversão do fluxo apenas para parâmetros que produzem perfis (compactlike) mais estreitos. Os resultados mais detalhados envolvendo inversão do fluxo magnético considerando também o setor paridade par do modelo, podem ser vistos no artigo que resultou desta dissertação, publicado na revista indexada, Physics Letters B [Phys.Lett. B718, 620 (2012)].

Apêndice A

Notações e Convenções

O tensor métrico é assumido da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

Derivadas com respeito a coordenadas covariantes (x_μ) e contravariantes (x^μ) são abreviadas sem forma explícita

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad , \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.2})$$

O produto escalar com a métrica definida acima é

$$\begin{aligned} V \cdot A &= V_\mu A^\mu = V^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} V^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} V_\mu A_\nu \\ &= V_0 A_0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = V_0 A_0 + V_i A_i. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O operador D'Alembertiano é

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2. \quad (\text{A.4})$$

O tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ com $\epsilon^{012} = 1$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{\mu, \nu, \rho\} \text{ é uma permutação par} \\ -1 & \text{se é uma permutação ímpar} \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Publicações

B.1 Artigo publicado no Physical Review D

A publicação mostra os resultados obtidos no capítulo 3.

PHYSICAL REVIEW D **86**, 065011 (2012)

Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the *CPT*-even sector of the standard model extension

C. Miller,¹ R. Casana,¹ M. M. Ferreira, Jr.,¹ and E. da Hora²

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65085-580, São Luís, Maranhão, Brazil*

²*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900, João Pessoa, Paraíba, Brazil*
(Received 5 March 2012; revised manuscript received 9 August 2012; published 10 September 2012)

We have investigated and verified the existence of stable uncharged Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS) vortices in the framework of an Abelian Maxwell-Higgs model supplemented with *CPT*-even and Lorentz-violating (LV) terms belonging to the gauge and Higgs sectors of the standard model extension. The analysis is performed in two situations: first, by considering the Lorentz violation only in the gauge sector, and then in both gauge and Higgs sectors. In the first case, it is observed that the model supports vortices somehow equivalent to the ones appearing in a dielectric medium. The Lorentz violation controls the radial extension (core of the solution) and the magnetic field amplitude of the Abrikosov-Nielsen-Olesen vortices, yielding compactlike defects in an alternative and simpler way than that of *k*-field models. At the end, we consider the Lorentz-violating terms in the gauge and Higgs sectors. It is shown that the full model also supports compactlike uncharged BPS vortices in a modified vacuum, but this time there are two LV parameters controlling the defect structure. Moreover, an interesting novelty is introduced by the LV-Higgs sector: fractional vortex solutions.

DOI: [10.1103/PhysRevD.86.065011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.065011)

PACS numbers: 11.10.Lm, 11.27.+d, 12.60.-i

B.2 Artigo publicado no Physics Letters B

A publicação mostra os resultados obtidos no capítulo 4.

Physics Letters B 718 (2012) 620–624



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Physics Letters B

www.elsevier.com/locate/physletb



Magnetic flux inversion in charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell–Higgs framework

R. Casana^{a,*}, M.M. Ferreira Jr.^a, E. da Hora^{a,c}, C. Miller^{a,b}

^a Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65085-580, São Luís, Maranhão, Brazil

^b Instituto de Física Teórica, UNESP – Universidade Estadual Paulista, R. Dr. Bento T. Ferraz 271 – Bl. II, 01140-070, São Paulo, SP, Brazil

^c Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900, João Pessoa, Paraíba, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 6 July 2012

Received in revised form 12 September 2012

Accepted 5 October 2012

Available online 24 October 2012

Editor: M. Cvetič

ABSTRACT

We demonstrate for the first time the existence of electrically charged BPS vortices in a Maxwell–Higgs model supplemented with a parity-odd Lorentz-violating (LV) structure belonging to the CPT-even gauge sector of the standard model extension and a fourth order potential (in the absence of the Chern–Simons term). The modified first order BPS equations provide charged vortex configurations endowed with some interesting features: localized and controllable spatial thickness, integer flux quantization, electric field inversion and localized magnetic flux reversion. This model could possibly be applied on condensed matter systems which support charged vortices carrying integer quantized magnetic flux, endowed with localized flipping of the magnetic flux.

© 2012 Elsevier B.V. All rights reserved.

Referências Bibliográficas

- [1] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, *Solitons in polyacetylene*, Phys. Rev. Lett. 42, 1698 (1979).
- [2] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, *Solitons excitations in polyacetylene*, Phys. Rev. D 42, 2099 (1980).
- [3] P. Weiss, *L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique*, J. Phys. 6, 401 (1907).
- [4] C. A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, *New results for deformed defects*, Phys. Rev. D 69, 067702 (2004).
- [5] J. Scott Russel, *Report on waves*, Proe of the British Association for the Advancement of Science, London, 311 (1945).
- [6] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. 39, 422 (1895).
- [7] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Soliton - an introduction*, Cambridge University Press (1989).
- [8] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
- [9] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B 61, 45 (1973).
- [10] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064 (1950).
- [11] G. 't Hooft, *A two-dimensional model for mesons*, Nucl. Phys. B 75, 461 (1974).

- [12] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. 20 (1974) 194 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1974) 430].
- [13] M. Gomes, *Teoria Quântica de Campos*, Edusp, São Paulo, 2002.
- [14] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge, Cambridge, 1985.
- [15] M. A. Lohe, Phys. Rev. D20, 3120 (1979); M. Peyrard and K. Campbell, Physica D9, 33 (1983).
- [16] E. B. Bogomolny: *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).
- [17] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [18] R. Rajaraman, *Solitons and instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [19] C. Rebbi, G. Soliani, *Solitons and particles*, World Scientific, Singapore, 1984.
- [20] A. A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP 5 (1957) 1174 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 32 (1957) 1442].
- [21] V. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*, Princeton Univ. Press (2002).
- [22] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [23] G.V. Dunne, *Aspects of Chern–Simons theory*, hep-th/9902115.
- [24] R. Jackiw, E.J. Weinberg, *Selfdual Chern–Simons vortices*, Phys. Rev. Lett. 64, 2234 (1990).
- [25] R. Jackiw, K.M. Lee, E.J. Weinberg, *Selfdual Chern–Simons solitons*, Phys. Rev. D 42, 3488 (1990).
- [26] C.k. Lee, K.M. Lee, H. Min, *Selfdual Maxwell Chern–Simons solitons*, Phys. Lett. B 252, 79 (1990); B.H. Lee, C.k. Lee, H. Min, *Supersymmetric Chern–Simons vortex systems and fermion zero modes*, Phys. Rev. D 45, 4588 (1992).
- [27] S. Bolognesi, S.B. Gudnason, *A note on Chern–Simons solitons - A type III vortex from the wall vortex*, Nuclear Physics B 805, 104 (2008).
- [28] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999); S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999).

- [29] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989); *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [30] R. Casana, M.M. Ferreira, and C.E.H. Santos, *Phys. Rev. D* **78**, 105014 (2008); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P.R. D. Pinheiro, *Eur. Phys. J. C* **62**, 573 (2009).
- [31] B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, F.E. P. dos Santos, *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010).
- [32] B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, F.E. P. dos Santos, *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010).
- [33] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira, and C. dos Santos, *Phys. Rev. D* **81**, 125016 (2010).