Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Vórtices na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs

Alyson Bruno Fonseca Neves

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís, novembro de 2012

Vórtices na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - UFMA

São Luís, novembro de 2012

Neves, Alyson Bruno Fonseca

Vórtices na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs./ Alyson Bruno Fonseca Neves - 2012

92f.

Impresso por computador (fotocópia).

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Pós-Graduação em Física, 2012.

1. Simetria de Lorentz 2. Defeitos Topológicos 3. Vórtices. I Título

CDU 537.8

ALYSON BRUNO FONSECA NEVES

Vórtices na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (*ORIENTADOR*)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Manoel Messias Ferreira Junior
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Laércio Losano
Doutor em Física - Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Edilberto Oliveira Silva (Suplente)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Ao meu filho Luis Filipe

Agradecimentos

À Deus primeiramente, por dar condições de contorno ideais para que eu possa viver tranquilamente. Por equacionar todos os meus problemas e dar soluções estáveis e irreversíveis.

Aos meus pais, Amilson e Terezinha, pelo incentivo, apoio e conforto que sempre me deram.

Aos meus irmãos, Amilson Jr. e Fernanda, que sempre vão estar presentes em minha vida.

Ao meu filho, Luis Filipe, que hoje é minha inspiração.

À minha esposa, Maria de Jesus, por fazer parte da minha vida, pela sinceridade, companheirismo, carinho e por todo amor que me dado.

Aos meus avós, José Lopes e José Ferreira, que sempre acreditaram em meu potencial.

As minhas avós, Nizete e Ana, que hoje está ao lado do Pai e me dando força pra que eu não desista dos meus objetivos.

Ao professor Rodolfo Alván Casana Sifuentes pela orientação, ensinamentos, conselhos e grande amizade.

Ao professor Manoel Messias Ferreira Junior, pela ajuda na conclusão da Dissertação, pelas excelentes aulas, ensinamentos e em especial, amizade.

À todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Física.

À todos os amigos da Pós-Graduação, Fabiano, Genilson, Roemir, Guillermo (gringo), Toinho, Ednilson.

À todos os meus amigos.

À CAPES, pelo financiamento deste trabalho.

À UFMA

A tradição é a personalidade dos imbecis

Albert Einstein

Resumo

Esta dissertação apresenta o estudo de vórtices BPS num modelo obtido pela redução dimensional da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs de (1+3)-dimensões para (1+2)-D. A densidade lagrangiana do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs é definido por

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda} + \left|D_\mu\phi\right|^2 - V\left(|\phi|\right),$$

os dois primeiros termos constituem a eletrodinâmica CPT-ímpar do modelo padrão estendido (SME). O termo $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$ é o chamado termo de Carroll-Field-Jackiw.

A redução dimensional deste modelo é dado pela seguinte densidade lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1+2} \;\;=\;\; & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa} + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_\mu \psi\partial_\nu A_\kappa \\ & -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\nu}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\kappa\partial_\nu\psi + \left|D_\mu\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 - V\left(\left|\phi\right|^2, \psi\right),\end{aligned}$$

observamos que se $\left(k_{AF}\right)_\mu = 0$ se obtém o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH). Desse modo o modelo planar representa um modelo de MCSH modificado por uma interação entre o campo de gauge A_μ e o campo neutro ψ cuja constante de acoplamento é $\left(k_{AF}\right)_\mu$, o campo de fundo vetorial portador dos efeitos da violação de Lorentz. Impondo que a componente $\left(k_{AF}\right)_0$ seja nula é possível estabelecer soluções estáveis tipo vórtices BPS. O estudo mostra que a influencia da violação de Lorentz é manifesta claramente quando o *winding number* do vórtice é maior que 1.

Palavras Chaves: Quebra da simetria de Lorentz, Defeitos topológicos. Vórtices

Abstract

This monograph presents the study of vórtices BPS in a model obtained by dimensional reduction of the (1+3)−D Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs's electrodynamics to (1+2)−D. The Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs model is defined by the following Lagrangian density

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda} + \left|D_\mu\phi\right|^2 - V\left(\left|\phi\right|\right),$$

the first two terms constitute the CPT-odd electrodynamics of the standard model extension (SME). The term $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$ is called the Carroll-Field-Jackiw's term.

The dimensional reduction of this model is given by the following Lagrangian density

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1+2} \quad &= \quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa} + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_\mu \psi\partial_\nu A_\kappa \\ &\quad -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\nu}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\kappa\partial_\nu\psi + \left|D_\mu\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 - V\left(\left|\phi\right|^2,\psi\right),\end{aligned}$$

it is observed that if $\left(k_{AF}\right)_\mu = 0$ we obtain the Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH) model. This way, our planar model is a MCSH model modified by an interaction between the gauge field A_μ and the neutral scalar field ψ whose coupling constant is $\left(k_{AF}\right)_\mu$, the Lorentz-violating vector field background. The existence of stable BPS vórtices implies in a null $\left(k_{AF}\right)_0$ component. The study shows that the influence of the Lorentz violation is clearly manifested when the vortex's winding number is greater than 1.

Keywords: Lorentz symmetry breaking. Topological defects. Vortices.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Simetrias e defeitos topológicos **6**

2.1 Formação de defeitos topológicos na cosmologia 6

2.2 Quebra espontânea de simetria 7

2.3 Obtenção de Defeitos Topológicos 11

2.4 Defeitos em $(1+1)$-dimensões 12

2.4.1 Defeitos topológicos numa teoria ϕ^4 13

2.5 Método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld (BPS) 15

3 Modelo de Maxwell-Higgs **17**

3.1 Equação de movimento 18

3.2 Energia e equações BPS 19

3.3 Configurações de vórtices 20

3.4 Verificação das condições de contorno 21

4 Modelo de Chern-Simons-Higgs **25**

4.1 Energia e equações BPS 27

4.2 Configurações de vórtices 28

4.3 Análise assintótica e soluções numéricas 29

5 Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs **34**

5.1 Equação de movimento 34

5.2 Energia estacionária e equações BPS 35

5.3 Configurações de vórtices 37

5.3.1 Análise assintótica e soluções numéricas 38

6 Vórtices na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs **43**

6.1 Energia e equações BPS 45

6.2 Configurações de Vórtices carregados 46

6.3 Comportamento Assintótico 47

6.4 Soluções numéricas 48

7 Conclusões e observações **54**

A Modelo de Maxwell-Higgs **56**

A.1 Cálculo do potencial 56

A.2 Cálculo da densidade de energia 57

B Modelo de Chern-Simons-Higgs **60**

B.1 Cálculo do potencial 60

C Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs **62**

C.1 Cálculo do potencial 62

C.2 Cálculo da densidade de energia 63

D Modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs Reduzido **67**

D.1 Cálculo do potencial 68

D.2 Cálculo da densidade de energia 70

Referências Bibliográficas **74**

CAPÍTULO 1

Introdução

Em 1834, John Scott Russell fazia a primeira observação de uma onda solitária quando estava cavalgando perto de canal em Glashow, Escócia [1, 2, 3, 4, 5]. Após relatar sua observação, Russell realizou vários experimentos em laboratório onde conseguiu reproduzir a onda solitária. Tal onda permaneceu quase um século sem uma explicação até que em 1885, Korteweg e de Vries, conseguiram sucintamente obter uma expressão matemática para a onda observada por Russell, conhecida como equação KdV [6]. Em 1955, Fermi, Pasta e Ulam, estudavam a propagação de fônons em uma rede não-linear [7], pois na época, acreditava-se que a existência de não-linearidades acarretaria em um fluxo de energia entre os diferentes modos de vibração da rede e consequentemente, a equipartição de energia seria esperada. Contrariando as expectativas, verificaram que, iniciando-se o problema com a energia armazenada num único modo de vibração da rede, o fenômeno da equipartição da energia entre os diferentes modos de vibração não era observado. A partir deste resultado, Zabusky e Kruskal em 1965, [8], estudando o problema numericamente, verificaram que a onda rapidamente adquiria um perfil de quebra na sua crista devido ao termo de não-linearidade. Este termo combinado com o termo de dispersão gerava um perfil de onda que se propagava sem perda de forma e diminuição de energia [2, 3]. Como característica dessa onda é que ela mantém a forma em colisão e isto fez com que

Zabusky e Kruskal sugerissem o nome de sólitons, [8], em analogia a fônons, fótons, prótons, etc. Do ponto de vista matemático, sólitons são soluções de equações diferenciais não-lineares integráveis [1, 2, 6, 18, 19]. Sólitons também fazem parte de uma estrutura chamado defeitos topológicos.

Os defeitos topológicos surgem como soluções clássicas das equações de campo com características assintóticas associadas aos grupos homotópicos. Essas soluções são estáveis, classificadas de acordo com a dimensão e são homotopicamente diferentes recebendo assim o nome de sólitons. No contexto físico, os defeitos topológicos estão ligados as transições de fase originadas das quebras espontânea de simetria de algum sistema físico através do mecanismo de Kibble [9]. Atualmente, o estudo de defeitos topológicos é uma das áreas mais fascinantes devido ao seu formalismo matemático, sendo de grande interesse para a comunidade científica devido a sua extensa aplicação em sistemas de matéria condensada, na cosmologia e na Física de Partículas Elementares. Dentre os tipos de defeitos que se formam durante a quebra de simetria podemos citar as paredes de domínio, monopólos magnéticos, cordas cósmica, instantons, vórtices.

Atualmente, o estudo de vórtices tem um papel extremamente importante, devido a sua extensa aplicação em diversos ramos da Física e Engenharia. Eles são representados matematicamente como o rotacional da velocidade em uma região do espaço. Vórtices são freqüentemente observados na natureza em forma de ciclones, tornados e em problemas aerodinâmicos como estabilidade de vôo, controle de vôo, estrutura da asa, câmaras de combustão, etc. O primeiro estudo sobre vórtices foi feito por Helmholtz em 1958, em um artigo chamado "Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichugen welche den Wirbelbewegungen entsprechen", tendo continuidade com os trabalhos de Lord Kelvin e Prandtl na Göttingen School na primeira metade do século XX, [10]. Eles foram inicialmente estudados dentro do contexto da dinâmica dos fluidos, em que o fluido pode possuir rotação em torno de um eixo e que está relacionado com a vorticidade, definida como a circulação por unidade de área em um dado ponto do fluxo [11, 10]. Este movimento pode ter uma forma circular ou espiral cuja trajetória são linhas fechadas. Tal dinâmica representa um paradigma natural para o estudo de campos com movimento caótico e das modernas teorias.

Na matéria condensada, um dos trabalhos pioneiros relacionados aos vórtices foi feita por H. K. Onnes ao estudar experimentalmente a liquefação de gases para obtenção de baixas temperaturas ou próximas ao zero absoluto, o que levou a descoberta da supercondutividade, [20]. Onnes observou que, ao diminuir a temperatura de um metal (mercúrio - Hg), ele apresentava uma resistência elétrica linear, mas ao chegar à temperatura critica, a resistência elétrica caia bruscamente até zero, ou seja, não apresentava resistência elétrica. Os metais com esse comportamento foram chamados de supercondutores, [21], e classificados em tipo I ou convencionais e tipo II ou supercondutores de alta temperatura crítica [22].

A investigação de configurações de vórtices estáveis tem sido objeto de interesse permanente desde os trabalho pioneiros de Abrikosov [23], descrevendo a supercondutividade tipo II, e de Nielsen-Olesen [17] em teoria de campos. Essas soluções não possuem carga elétrica e são chamados de vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen [24]. Por outro lado, os vórtices carregados somente foram obtidas no início dos anos 90, estudando a eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs [25]. Desde então, é sabido que as soluções tipo vórtices carregados somente são obtidas incluindo o termo de Chern-Simons [26].

As configurações de vórtices de Chern-Simons suportam soluções tipo BPS (Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfeld) e apresentam importantes conexões com a Física de anyons e o efeito Hall quântico fracionário [27]. Uma distinção notável entre os vórtices de ANO e os de Chern-Simons é que estes últimos apresentam vórtices carregados. Os vórtices de Chern-Simons foram estudados com o acoplamento mínimo [28], e permanece sendo um tópico de intensa investigação com os recentes trabalhos [29, 30]. Soluções de vórtices de Chern-Simons generalizados foram recentemente examinadas na presença de um termo cinético não-canônico [31], e termos de $k-$field (termos de derivadas superiores) [32]. As teorias de $k-$field trabalham com funções não-lineares do termo cinético usual a fim de obter novas soluções para sistema não-lineares, com interessantes aplicações em cosmologia e inflação [33], matéria escura [34], matéria taquiônica [35], condensados fantasmas [36] e defeitos topológicos [37]. Considerando defeitos topológicos, termos cinéticos de ordem superiores garantem a formação de k-defeitos (defeitos compactos), estruturas cujos núcleos podem ser muito maiores ou muito menores do que os núcleos de soluções usuais [37, 38, 39]. Quando um $k-$defeito apresenta um suporte compacto, é usualmente conhecido de compacton [40, 41].

Recentemente, tem sido mostrada a existência de soluções tipo vórtice [42, 43] em teorias de campo suportando termos que violam a simetria de Lorentz, pertencendo ao setor CPT-par do modelo padrão estendido (SME) [44].

A violação na simetria de Lorentz tem sido muito investigado nos últimos anos, tendo como trabalho teórico o modelo padrão estendido [44], baseado na idéia de quebra espontânea de simetria numa teoria definida na escala de Planck [45]. O SME incorpora termos que violam Lorentz (LV), gerados como valores esperados do vácuo, em todos os setores de interação. As investigações no contexto do SME preocupam-se principalmente no setor fermiônico [46], extensões envolvendo gravidade [47], e o setor de gauge abeliano [48]-[54]. O setor de gauge abeliano ou setor eletromagnético do SME é composto de uma parte CPT-ímpar ($\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(k_{AF}\right)_{\mu}A_{\nu}F_{\alpha\beta}$, o termo de Carroll-Field-Jackiw [48]) e uma parte CPT-par, que é representado pelo tensor $\left(k_F\right)_{\alpha\nu\rho\varphi}$. A eletrodinâmica modificada pelo termos tem sido investigada desde 2002, com um propósito chave: investigar as novas propriedades físicas induzidas pelos 19 coeficientes que controlam a violação da invariância de Lorentz e impor limites superiores na magnitude destes coeficientes. O tensor CPT-par $\left(k_F\right)_{\alpha\nu\rho\varphi}$ tem as mesmas simetrias do tensor de Riemann, e um duplo traço nulo, $\left(k_F\right)^{\rho\varphi}{}_{\rho\varphi} = 0$. Nas Refs. [52], [53], foi estipulado a existência de dez componentes sensíveis à birrefrigência e nove são denominadas não-birrefringentes. Um amplo e interessante estudo à respeito foi realizado na Ref. [54]. As dez componentes birrefringentes são severamente limitadas ao nível de 1 parte em 10^{32} por medidas espectroscópicas de origens cosmológicas [52], [53]. Os coeficientes não-birrefringentes são limitados por outros testes, envolvendo o estudo da radiação de Cherenkov [49], a ausência de emissão da radiação Cherenkov por raios cósmicos ultra-energéticos [50, 51], e o comportamento birrefrigente dos parâmetros não-birrefringentes [55], são capazes de produzir limites superiores de até 1 parte em 10^{17} nestes coeficientes.

A busca por efeitos da violação de Lorentz, em sistemas físicos de baixas energias, têm sido amplamente estudados nos recentes trabalhos. Por outro lado, o estudo de vórtices sempre despertou a atenção da comunidade científica deste os relevantes trabalhos de Abrikosov sobre os vórtices em supercondutores, trabalho este estendido posteriormente em uma forma relativística por Nielsen e Olesen. E dado que tem sido mostrada a existência de soluções tipo vórtice [42, 43] em teorias de campo suportando termos que violam a simetria de Lorentz, pertencendo ao setor CPT-par do modelo padrão estendido (SME), no presente projeto, focamos nossa atenção na busca de soluções tipo vórtices numa eletrodinâmica com quebra de Lorentz contendo o termo

CPT-ímpar ou de Carroll-Field-Jackiw.

A dissertação está desenvolvida segundo o seguinte roteiro: No capítulo 2, fazemos uma breve revisão sobre defeitos topológicos em modelos envolvendo campos escalares em $(1+1)$-dimensões, dotado de potencial do tipo ϕ^4. Apresentamos o formalismo BPS, para a obtenção de configurações que minimizam a energia do sistema. No capítulo 3, abordamos o modelo de Maxwell-Higgs, dotado do potencial do tipo ϕ^4. Neste capítulo, apresentamos o ansatz para obtenção de vórtices descarregados, utilizamos o formalismo BPS para obtermos as equações BPS do modelo e os comportamentos assintóticos na origem e infinito. No capítulo 4, estudamos as configurações de vórtices carregados no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, descrevendo a necessidade de implementar um campo neutro N, dotado de um potencial do tipo ϕ^4 dependente do campo neutro. Obtemos as equações BPS e o comportamento assintótico. No capítulo 5, apresentamos a redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs de $(1+3)$-dimensões para a versão planar em $(1+2)$-dimensões, adicionado do campo neutro ψ. Partindo da lagrangiana, chegamos às equações de movimento que regem a dinâmica do modelo, onde calculamos as leis de Gauss e Ampère e a equação para o campo de Higgs em regime estacionário. Obtemos o potencial, do tipo ϕ^4 e dependente do campo neutro, e a densidade de energia para este modelo, mostrando a necessidade de anular a componente $(k_{AF})_0$ do background, responsável pela violação de Lorentz, que conduz à uma densidade de energia não definida positiva. Aplicamos o formalismo BPS à energia, onde obtemos as equações BPS do nosso trabalho. Por fim, calculamos os comportamentos assintóticos, analisamos as soluções numéricas obtidas via integração numéricas das equações BPS, onde percebemos a influência da componente $(k_{AF})_\theta$ no comportamento dos campos.

CAPÍTULO 2

Simetrias e defeitos topológicos

2.1 Formação de defeitos topológicos na cosmologia

Em 1924, Edwin Powell Hubble (1889 – 1953), anunciou em seus estudos que as galáxias pareciam estar se afastando da Terra. Para ele o Universo estaria inchando como um balão, concluindo então, que o Universo está em expansão. Reforçando ainda mais sua idéia, imaginou que toda a matéria estaria concentrado em um único ponto, a partir do qual se expandiu por intermédio de alguma força de intensidade inimaginável, [12]. Este início foi denominado de *Big Bang* pelo físico inglês Sir. Fred Hoyle (1915 - 2001) no programa da rádio BBC "*The Nature of Things*". Após o Big Bang, o Universo iniciou a *Era Inflacionária*, período em que ocorreram flutuações que deram origem às estruturas de larga escala.

Visto a partir do momento da criação, o Universo passa por uma sucessão de fases. As primeiras transições de fases ocorreram quando o Universo era dominado por uma gravitação quântica, cujos contornos exatos se desconhecem, mas durante as quais se pensa que as interações estavam unificadas e caracterizadas por um elevado grau de simetria. Essas transições implicam quebras de simetria e podem ter várias aplicações importantes, incluindo a formação de defeitos topológicos como, por exemplo, cordas cósmicas ou dar início a um período de inflação exponencial. Os defeitos topológicos são configurações estáveis de matéria formada durante as transições de fase no Universo primordial. O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria da matéria e pela natureza da transição de fase, ou seja, qual tipo de simetria é quebrada. Dentre os tipo de defeito, podemos citar as paredes de domínio (*domain walls*), cordas cósmicas, vórtices, monopólos e texturas (*skyrmion*). As implicações cosmológicas das quebras de simetria foi feito inicialmente por Kirzhnits em 1972 [14], ao sugerir que quebras espontâneas de simetrias em teorias de campos podem ser restauradas a altas temperaturas assim como ocorre na matéria condensada. Em seguida, Weinberg em 1974 [13], especulou a formação de paredes de domínios nas transições de fase no ínicio do Universo. Everett e Zel'dovich, ao estudar os trabalhos de Weinberg em [15], foram os primeiros a considerar quantitativamente, as fortes implicações das paredes de domínio destacando sua interação com a matéria, os seus efeitos gravitacionais. As paredes de domínios são objetos bidimensionais que se formam quando uma simetria discreta é quebrada durante uma transição de fase. Uma rede de paredes, divide efetivamente o Universo em várias "células". Este tipo de defeito tem algumas propriedades muito peculiares, sendo uma delas que o campo gravitacional de uma parede é repulsivo em vez de atrativo. Os defeitos são de extrema importância para a cosmologia e a razão disso se deve ao fato de tais configurações possuir um energia que leva à uma forca gravitacional atrativa extra, servindo como um mecanismo para a produção de estruturas cósmicas no universo em larga escala [16, 9].

2.2 Quebra espontânea de simetria

Uma das idéias mais poderosa da física teórica moderna é o mecanismo de quebra espontânea de simetria. Ela representa a base das mais recentes proezas que envolve a descrição de transições de fase na mecânica estatística e diversos fenômenos na física do estado sólido. A partir deste mecanismo, foi possível unificar as interações fraca, forte e eletromagnética na física de partículas elementares. A quebra espontânea de simetria ocorre quando a simetria da hamiltoniana que governa a dinâmica do sistema físico, não fornece uma descrição simétrica das propriedades físicas do sistema, ou seja, quando o estado fundamental do sistema não é invariante perante a um grupo de transformações.

Em certos sistemas físicos, encontramos processos que podem envolver: O desaparecimento de alguma fase desordenada, caracterizada por algum tipo de simetria, e o surgimento de uma fase ordenada com um grau de simetria menor. Este fenômeno de ordem-desordem chama-se transição de fase e é caracterizado por uma quantidade chamado parâmetro de ordem ϕ. Um simples exemplo físico que exibe transição de fase são os ferromagnetos e os materiais cristalinos. Nos ferromagnetos, para $T > T_C$ (temperatura de Curie), a fase estável é desordenada com a magnetização $\mathcal{M} = 0$ (parâmetro de ordem); para $T < T_C$, uma magnetização não-nula aparece em diferentes domínios (chamado de domínios de Weiss) e sua direção em cada domínio quebra a simetria rotacional mantida pela fase desordenada a $T > T_C$. Em geral, as transições de fase se encontram associadas com a idéia de quebra de simetria e são causados por fatores externos. Um campo magnético intenso pode produzir magnetização de um ferromagneto mesmo acima da temperatura crítica T_C. Este fenômeno é chamado de quebra de simetria induzida. A quebra espontânea de simetria surge de uma mudança gradual dos parâmetros do próprio campo. Para entendermos melhor, vamos analisar a energia livre do sistema dado pela energia livre de Helmholtz $F = U - TS$. Para sistemas em que ocorrem transições de fase, F deve ser um funcional do parâmetro de ordem ϕ, ou seja, $F[\phi]$. A condição para a existência de um estado em equilíbrio, o funcional $F[\phi]$ deve ter um mínimo em $\phi = 0$ (estados desordenados).

Um exemplo que representa a quebra de simetria é um lápis posicionado verticalmente sobre uma superfície plana. Nesta posição, o sistema é simétrico perante uma rotação em torno do próprio eixo e está em uma posição de equilíbrio estável com vários mínimos degenerados relacionados com as rotações. Aplicando uma força F sobre o lápis, o mesmo cai tombando sobre uma superfície plana e orientado em qualquer direção. A simetria de rotação que existia em torno do eixo do lápis deixa de existir e, além disso, o ponto onde a ponta estava apoiada separa todas as possíveis posições do lápis tombado. Neste momento, o sistema passa de uma configuração simétrica para assimétrica e esta escolha de direção representa uma quebra espontânea de simetria. Nesta situação, o estado fundamental é degenerado e o parâmetro de ordem assume um valor crítico onde o sistema passa a ser instável.

Nas modernas teorias de campos, a quebra de simetria é descrita por meios de campos escalares que denotaremos por ϕ (corresponde ao parâmetro de ordem), também chamados de campos de Higgs. Faremos uma breve discussão, partindo da lagrangiana do campo de Klein-Gordon, em $(1+1)$-dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V\left(\phi\right), \tag{2.1}$$

onde o potencial é uma interação do tipo $\lambda\phi^4$

$$V\left(\phi\right) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{2.2}$$

Esta lagrangiana é invariante perante a transformação de simetria Z_2, $\phi \to -\phi$. A simetria da lagrangiana desempenha um papel importante, pois caracteriza os estados de vácuo do modelo A energia para este modelo tem a forma

$$E = \int dx\,\left[\frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right], \tag{2.3}$$

Antes de analisarmos o comportamento do potencial, devemos impor algumas condições para as constantes λ e μ^2. Para a energia possuir um mínimo, devemos considerar $\lambda > 0$. Os estados de vácuo do modelo ou as configurações de campo com mínima energia são obtidos a partir do processo de minimização do potencial, que consiste em

$$\frac{dV}{d\phi} = 0, \tag{2.4}$$

onde obtemos as seguintes raízes

$$\phi = 0\ ,\ \text{se } \mu^2 > 0 \tag{2.5}$$

$$\phi = \pm v\ ,\ \ \text{se}\ \ \mu^2 < 0, \tag{2.6}$$

onde v, o valor esperado no vácuo, é

$$v = \sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}}$$

A seguir vamos apresentar esses dois casos por separado:

1. Para $\mu^2 > 0$, o único estado de vácuo do potencial é em $\phi = 0$ (vide Fig. 2.1). Este estado é invariante sob a transformação de Z_2. O estado de vácuo não quebra a simetria do modelo. Pertubações em torno do estado de vácuo são descritos pelo próprio campo ϕ, ou seja, são descritos pela própria lagrangiana (2.1).

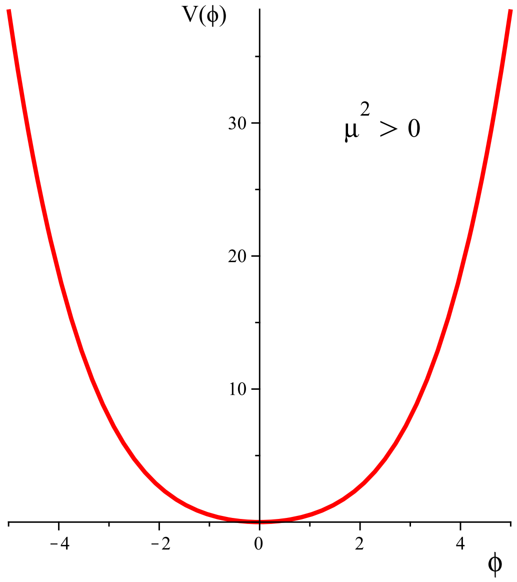


Figura 2.1: O ponto $\phi = 0$ representa um ponto de mínimo ou ponto de equilíbrio estável.

2. Para $\mu^2 < 0$ (vide Fig. 2.2), o valor $\phi = 0$ corresponde ao máximo do potencial correspondendo a um ponto de instabilidade. Por outro lado os valores

$$\phi = \pm v. \tag{2.7}$$

corespondem a os mínimos do potencial ou estados de vácuo.

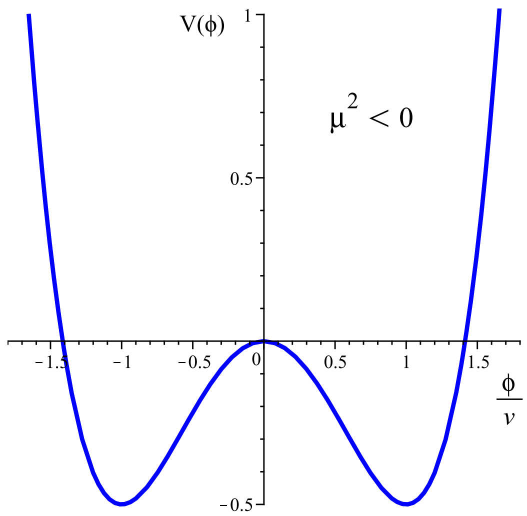


Figura 2.2: Os mínimos estão em $\phi = \pm v$. O valor $\phi = 0$ é um ponto de instabilidade.

Vemos que o estado de vácuo é degenerado e não invariante sob a transformação de simetria Z_2. Dizemos então que a simetria é quebrada espontaneamente.

2.3 Obtenção de Defeitos Topológicos

Vamos apresentar, em um contexto mais geral, a ferramenta utilizada para a obtenção de defeitos em teorias de campo, e para isso, consideramos um sistema com um ou mais campos escalares $\phi_i\left(x^\mu\right)$, onde $x^\mu = \left(x^0, x^1, ..., x^D\right)$, definido em um espaço $\mathbb{R}^{1,D}$, onde D é o número de dimensões espaciais. A ação para este sistema é dado por

$$S = \int d^{D+1}x\, \mathcal{L}\left(\phi_i\left(x^\mu\right), \partial_\mu \phi_i\left(x^\mu\right)\right), \tag{2.8}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana ou simplesmente lagrangiana responsável pela dinâmica, possuindo a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - V\left(\phi_i\right), \tag{2.9}$$

Através da minimização da ação, $\delta S = 0$, podemos obter a equação de movimento por meio da equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} = 0, \tag{2.10}$$

onde obtemos

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi_i - \frac{dV}{d\phi_i} = 0. \tag{2.11}$$

A energia E do sistema é calculado a partir da integração por todo o espaço da densidade de energia T^{00}, obtido através do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ definido como

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\partial^\nu\phi_i - g_{\mu\nu}\left\{\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi_i\partial^\alpha\phi_i - V\left(\phi_i\right)\right\}, \tag{2.12}$$

onde simplesmente, obtemos

$$E = \int_0^\infty d^D x\, T^{00}. \tag{2.13}$$

A existência de soluções tipo defeito é garantida se as soluções das equações de movimento satisfazem as seguintes condições:

- A energia das soluções devem ser finitas e positivas;
- A densidade de energia deve ser bem definida e localizada em uma região do espaço; isto impõe que as soluções sejam independentes do tempo, ou seja, estáticas.
- O potencial deve ser definido positivo e ter um discreto (não necessariamente finito) número de mínimos degenerados;

2.4 Defeitos em $(1+1)$-dimensões

O defeito topológico mais elementar ocorre em um sistema com um campo escalar em $(1+1)$-dimensões definida pela seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi)\,, \tag{2.14}$$

onde $V(\phi)$ definido positivo e possuindo dois ou mais mínimos degenerados. A equação de movimento para o campo escalar é dada por

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \tag{2.15}$$

e para um regime estático, a equação de movimento simplifica para a seguinte expressão

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \tag{2.16}$$

O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é definido como

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\,\partial^\alpha\phi - V(\phi)\right), \tag{2.17}$$

e com isso, podemos escrever a energia estacionária do sistema como

$$E = \int dx\,\mathcal{H}, \tag{2.18}$$

onde $\mathcal{H} = T^{00}$. Logo, teremos a seguinte expressão para a energia

$$E = \int dx\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi)\right]. \tag{2.19}$$

As configurações de campo com energia finita é garantida pelas seguintes condições de contorno impostas sobre as soluções estáticas

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{d\phi}{dx} \to 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\phi(x) \to \phi_\pm, \tag{2.20}$$

onde $\phi_\pm$ representam os setores topológicos e corresponde as diferentes possibilidades para os comportamentos assintóticos dos campos em regiões distintas do espaço. Estes setores topológicos são representados pela carga topológica Q e por uma densidade de corrente topológica associada em $(1+1)$-dimensões

$$j^\mu = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu(x,t)\,, \tag{2.21}$$

com isso, a carga topológica correspondente é definida como

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, j^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi\,(x \to \infty) - \phi\,(x \to -\infty)\,. \tag{2.22}$$

As soluções que interpolam entre setores diferentes, $\phi_+ \neq \phi_-$, são chamadas de soluções topológicas ou tipo *kink*. As soluções que interpolam entre os mesmos setores, $\phi_+ = \phi_-$, são chamados de soluções não-topológicas ou tipo *lump*. Esses setores são topologicamente desconectados e, eles não podem se conectar sem violar a condição de finitude da energia do sistema. Esta é a razão fundamental pela estabilidade das soluções tipo kink.

2.4.1 Defeitos topológicos numa teoria ϕ^4

Como ilustração do método apresentado na seção anterior, vamos considerar o potencial

$$V\,(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}\left(\phi^2 - v^2\right)^2,$$

com dois mínimos dados por $\phi = \pm v$, como mostra a figura 2.3.

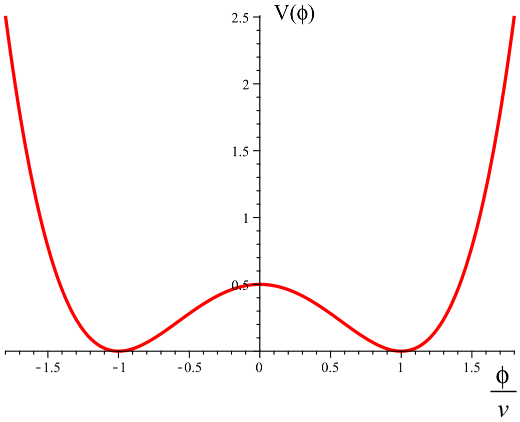


Figura 2.3: Potencial $\lambda\phi^4$

A condição de contorno para o modelo é

$$\lim_{x \to \pm\infty} \phi\,(x,t) \to \pm v, \tag{2.23}$$

A lagrangiana é definida como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{\lambda^2}{2}\left(\phi^2 - v^2\right)^2. \tag{2.24}$$

A equação de movimento estacionária advinda da equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\lambda^2\phi\left(\phi^2 - v^2\right), \tag{2.25}$$

cuja solução é

$$\phi\left(x\right) = \pm v \tanh\left[\lambda v\left(x - x_0\right)\right]. \tag{2.26}$$

Observamos que as soluções $\phi\left(x\right) = \pm v$ são soluções assintóticas (no regime estático) da equação de movimento, ambas com energia zero, e identificam o estado de vácuo ou estado fundamental degenerado do modelo ϕ^4.

As soluções (2.26) são duas configurações de campo distintas de energia mínima. O sinal $+$ identifica o "*kink*" enquanto o sinal $-$ designa o "*anti-kink*", ambos centrados na origem $x = 0$ (ver figura abaixo).

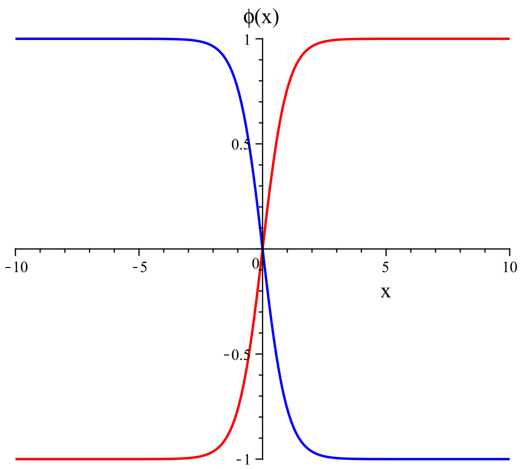


Figura 2.4: Kink (linha vermelha) e anti-kink (linha azul)

A densidade de energia correspondente é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V\left(\phi\right), \tag{2.27}$$

e a energia desta solução é obtida integrando esta densidade de energia:

$$E = \lambda^2 v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4\left[\lambda v\left(x - x_0\right)\right]\, dx, \tag{2.28}$$

$$E = \frac{4}{3}\lambda v^3. \tag{2.29}$$

De posse da solução estática, (2.26), obteremos agora a carga topológica associada a partir do comportamento assintótico da solução quando $x \to \infty$, o que temos $\phi = 1$ e para $x \to \infty$, obtemos $\phi = -1$. Então a carga topológica é

$$Q = \pm 1. \tag{2.30}$$

Este caso mostra que a solução é uma solução topológica ou *kink*, para o qual $\phi\,(x \to \infty) \neq \phi\,(x \to -\infty)$, e está de acordo com o gráfico da Figura 2.4.

O modelo $\lambda\phi^4$ é um exemplo para potenciais com apenas dois mínimos degenerados. Um exemplo mais geral utilizado na obtenção de defeitos é o modelo de sine-Gordon, cujo potencial tem a seguinte forma

$$V\,(\phi) = 1 - \cos\phi, \tag{2.31}$$

possuindo infinitos mínimos degenerados rotulados por $\phi_n = 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

2.5 Método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld (BPS)

No contexto da mecânica quântica, existem vários métodos utilizado para o tratamento da equação de Schrödinger, dentre eles o formalismo da Supersimetria que surgiu no contexto das teorias de campos e, que devido a sua simplicidade, impulsionou Bogomol'nyi a criar um método para a procura defeitos topológicos em campos escalares. Tal método consiste em encontrar soluções para equação de segunda ordem através das equações de primeira ordem que surgem no processo de minimização da energia. Como ilustração deste método, vamos tomar como ponto de partida a energia estática obtido para o sistema em $(1+1)$-dimensões,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V\,(\phi)\right]. \tag{2.32}$$

Reescrevendo a expressão em termos quadráticos obtemos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V\,(\phi)}\right)^2 \pm \sqrt{2V\,(\phi)}\,\frac{d\phi}{dx}\right]. \tag{2.33}$$

Para o campo ter a menor energia possível, o primeiro integrando deve ser zero e isso corresponde a impor

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V\,(\phi)}. \tag{2.34}$$

Assim, as soluções de mínima energia satisfazem a equação diferencial de 1ª ordem (2.34) e tem a energia dada pela simples expressão

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \sqrt{2V(\phi)} \, \frac{d\phi}{dx}. \tag{2.35}$$

Desse modo, no estudo de defeitos topológicos com potenciais não-negativos, $V(\phi) \geqslant 0$, consideramos

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \tag{2.36}$$

onde $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$ e $W = W(\phi)$ é uma função do campo. Então, a energia (2.35) associada ao defeito topológico $\phi(x)$ é

$$E_{BPS}^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, W_\phi \, \frac{d\phi}{dx}, \tag{2.37}$$

e a configuração de campo obedece a equação *BPS*

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \tag{2.38}$$

cujas soluções são chamadas de estados *BPS* (*BPS states*). Nessas condições a energia do defeito topológico é

$$E_{BPS}^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{dW}{dx} = W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]. \tag{2.39}$$

Então, a lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} W_\phi^2, \tag{2.40}$$

com sua equação de movimento estacionária dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \tag{2.41}$$

Até aqui, fizemos uma introdução ao estudo de defeitos topológicos com modelos de campos escalares em $(1+1)$-dimensões, com o potencial de interação apresentando quebra de simetria. Nos capítulos seguintes, apresentaremos outro tipo de defeito topológico chamado vórtices, que surgem a partir de teorias apresentando quebra espontânea da simetria de gauge.

CAPÍTULO 3

Modelo de Maxwell-Higgs

Neste capítulo, iniciaremos nosso estudo sobre configurações de vórtices em teorias de gauge planares. Tais modelos apresentam diversas propriedades interessantes tanto a nível teórico quanto experimental. Em 1973, Nielsen e Olesen propuseram um modelo de teoria de campos [17], que apresenta configurações de vórtices (ou uma estrutura semelhante às cordas), com propriedades semelhantes às obtidas por Nambu [59]. Os vórtices podem ser considerados como um objeto infinitamente longo em três dimensões espaciais ou objeto pontual em duas dimensões. O modelo considerado por Nielsen-Olesen foi a teoria abeliana acoplada com o campo de Higgs, chamado modelo de Maxwell-Higgs. A relevância deste modelo se deve ao fato de ser considerado como uma generalização relativística da teoria de Ginzburg-Landau na descrição da supercondutividade [21]. Existe uma vasta conexão do modelo de MH com outros ramos da física, tal qual a física de partículas, a física do estado sólido e a cosmologia, onde provê uma base teórica para o estudo das estruturas chamadas de cordas cósmicas.

Nosso ponto de partida para a descrição de configurações de vórtices em teorias de gauge será o modelo de Higgs abeliano em $1+2$ dimensões. Tal modelo é baseada no grupo de simetria $U(1)$ e descreve a interação entre o campo eletromagnético A_μ e um campo escalar carregado ϕ, definido em uma métrica $g_{\mu\nu} = (+ - -)$. A interação ocorre através do acoplamento mínimo,

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \tag{3.1}$$

onde D_μ é a derivada covariante e e representa a constante de acoplamento. A densidade de lagrangiana que descreve o modelo possui a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \tag{3.2}$$

onde $V(|\phi|)$ representa o potencial de Higgs. O perfil do potencial deve satisfazer as condições de contorno de modo a garantir a existência de soluções BPS com energia finita. Então, para o modelo de MH, o potencial é definido como

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}\left(ev^2 - e|\phi|^2\right)^2. \tag{3.3}$$

Os mínimos deste potencial de Higgs estão localizados sobre um círculo $|\phi| = v$ no plano complexo. Esta lagrangiana é invariante perante as transformações

$$\phi(x) \to \phi(x)e^{i\Lambda(x)}, \; A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \tag{3.4}$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função do espaço-tempo.

3.1 Equação de movimento

As equações de movimento para o campo de gauge A_μ e para o campo de Higgs ϕ, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, são

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{3.5}$$

$$D_\mu D^\mu\phi - \phi\left(ev^2 - e|\phi|^2\right) = 0, \tag{3.6}$$

onde J^β representa a densidade de corrente definida como

$$J^\beta = ie\left(\overline{\phi}D^\beta\phi - \phi\overline{D^\beta\phi}\right), \tag{3.7}$$

ao longo do texto a notação "—"representa a operação de conjugação complexa.

No regime estacionário, a lei de Gauss é

$$\partial_i \partial_i A_0 = 2e^2 A_0 \left|\phi\right|^2 , \tag{3.8}$$

satisfeita trivialmente pela configuração $A_0 = 0$ (gauge temporal) isso implica a existência de apenas configurações de vórtices sem carga elétrica.

A lei de Ampère estacionária é

$$\epsilon_{ij} \partial_j B = J_i, \tag{3.9}$$

onde definimos $F_{ij} = \epsilon_{ij} B$, sendo B o campo magnético, agora uma grandeza escalar.

Da Eq. (3.6), obtemos a equação de movimento, em regime estacionário, para o campo de Higgs

$$\partial_k \partial_k \phi - 2ieA_k \partial_k \phi - e^2 \left(A_k\right)^2 \phi + e\phi \left(ev^2 - e\left|\phi\right|^2\right) = 0. \tag{3.10}$$

3.2 Energia e equações BPS

A densidade de energia do modelo de Maxwell-Higgs, em regime estacionário ($\mathcal{E} = -\mathcal{L}$) e no gauge temporal é

$$\mathcal{E} = \frac{B^2}{2} + \left|D_i \phi\right|^2 + V\left(\left|\phi\right|\right), \tag{3.11}$$

cuja integração proporciona a é obtida a energia total do modelo

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left[\frac{B^2}{2} + \left|D_i \phi\right|^2 + V\left(\left|\phi\right|\right)\right]. \tag{3.12}$$

Inserindo a identidade

$$\left|D_i \phi\right|^2 = \left|D_\pm \phi\right|^2 \pm eB\left|\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j \,, \tag{3.13}$$

na Eq. (3.12), obtém-se

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left[\frac{B^2}{2} + \left|D_\pm \phi\right|^2 \pm eB\left|\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j + V\left(\left|\phi\right|\right)\right]. \tag{3.14}$$

Neste ponto, o formalismo BPS sugere que expressemos a densidade de energia como a soma de termos quadráticos com o intuito de minimizar-la. Tal procedimento fornece

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left[\frac{1}{2}\left(B \mp \sqrt{2V}\right)^2 + \left|D_\pm \phi\right|^2 \pm B\left(\sqrt{2V} + e\left|\phi\right|^2\right) \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j\right], \tag{3.15}$$

agora substituimos o potencial dado pela Eq. (3.3) para obtermos

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp e \left(v^2 - |\phi|^2 \right) \right]^2 + |D_\pm \phi|^2 \pm e v^2 B \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j \right\}. \tag{3.16}$$

Para que a energia seja minimizada, é necessário que os termos quadráticos sejam nulos, o que conduz às equações de primeira ordem chamadas de equações BPS,

$$D_\pm \phi = 0, \tag{3.17}$$

$$B = \pm e \left(v^2 - |\phi|^2 \right) 0. \tag{3.18}$$

Com tal imposição, a energia BPS do sistema é

$$E_{BPS} = \int d^2\mathbf{r}\, \mathcal{E}_{BPS}, \tag{3.19}$$

onde $\mathcal{E}_{BPS}$ representa a densidade de energia BPS,

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm e v^2 B \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j. \tag{3.20}$$

A integração dela sob condições de contorno apropriadas satisfeitas pelos campos, a derivada total não contribuirá para a energia BPS do sistema, assim, ela resulta ser proporcional ao fluxo magnético,

$$E = \pm e v^2 \int d^2\mathbf{r}\, B = \pm e v^2 \Phi, \tag{3.21}$$

onde $\Phi = \int d^2\mathbf{r}\, B$ representa o fluxo magnético.

3.3 Configurações de vórtices

Para obtermos soluções de vórtices, utilizaremos o seguinte ansatz:

$$\phi = v g(r) e^{in\theta} \ , \ A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er}. \tag{3.22}$$

A Eq. (3.22) define um mapeamento de um círculo de raio R no espaço em um círculo de raio v no plano complexo ϕ. Este mapeamento é caracterizado por um número inteiro n chamado “winding number” e assume os seguintes valores: $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Cada número n caracteriza uma configuração de campo com energia finita. Neste ansatz, o campo magnético é dado pela expressão

$$B = -\frac{a'}{er}, \tag{3.23}$$

enquanto, as equações BPS, (3.17) e (3.18), são expressas como

$$g' = \pm \frac{ag}{r}. \tag{3.24}$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2 \left(1 - g^2\right), \tag{3.25}$$

o sinal superior (inferior) representa as soluções para $n > 0$ ($n < 0$). As condições de contorno que garantem uma densidade de energia bem localizada são

$$\lim_{r \to 0} a(r) = n, \qquad \lim_{r \to 0} g(r) = 0, \tag{3.26}$$

$$\lim_{r \to \infty} a(r) = 0, \qquad \lim_{r \to \infty} g(r) = 1. \tag{3.27}$$

Em coordenadas polares, com essas condições de contorno e o campo magnético (3.23), a energia BPS (3.21) é facilmente calculada,

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2\mathbf{r} \left(-\frac{a'}{er}\right) = 2\pi v^2 |n| > 0. \tag{3.28}$$

No ansatz adotado, a densidade de energia BPS (3.20) é escrita como:

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2}. \tag{3.29}$$

Vamos reescrever as equações BPS em uma forma adimensional através da seguinte variável adimensional, $t \to evr$, e das seguinte definições

$$a(r) \to \bar{a}(t), \; g(r) \to \bar{g}(t), \; B(r) \to ev^2 \bar{B}(t), \;\; \mathcal{E}_{BPS}(r) \to v^2 \bar{\mathcal{E}}_{BPS}(t), \tag{3.30}$$

com as quais as equações BPS são escritas na seguinte forma

$$\bar{g}' = \pm \frac{\bar{g}\bar{a}}{t}. \tag{3.31}$$

$$\bar{B} = -\frac{\bar{a}'}{t} = \pm \left(1 - \bar{g}^2\right), \tag{3.32}$$

3.4 Verificação das condições de contorno

Analisaremos o comportamentos dos campos $\bar{a}(t)$ e $\bar{g}(t)$ quando $t \to \infty$ e $t \to 0$. Para isso, faremos uso de algumas expansões que servirão para analisar o perfil dos campos em cada limite.

Para $t \to \infty$, utilizaremos as seguintes expansões para os campos $\bar{a}(t)$ e $\bar{g}(t)$

$$\bar{g}(t) = 1 - \delta\bar{g} \quad , \quad \bar{a}(t) = \delta\bar{a}. \tag{3.33}$$

Substituindo nas Eqs. (3.32) e (3.31), obtemos duas equações diferenciais acopladas de primeira ordem

$$\frac{(\delta\bar{a})'}{t} = -2\delta\bar{g} \ , \quad (\delta\bar{g})' = -\frac{(\delta a)}{t}. \tag{3.34}$$

Podemos desacoplá-las por meio de uma manipulação, chegando às seguintes equações diferenciais de segunda ordem,

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{t} - 2(\delta a) = 0, \tag{3.35}$$

$$(\delta g)'' + \frac{(\delta g)'}{t} - 2(\delta g) = 0, \tag{3.36}$$

que, mediante as condições de contorno, fornecem as respectivas soluções com uma aproximação em 1ª ordem:

$$(\delta a) \sim K_0\left(\sqrt{2}t\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{2}t}, \tag{3.37}$$

$$(\delta g) \sim tK_1\left(\sqrt{2}t\right) \sim \frac{\sqrt{t}}{2}e^{-\sqrt{2}t}. \tag{3.38}$$

Para $t \to 0$, utilizaremos o método da série de potência como solução das equações BPS. Para este caso, escolhemos as seguintes expansões

$$\bar{a} = n - \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \ \bar{g} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j t^j, \tag{3.39}$$

cujas soluções para $n > 0$ são

$$\bar{g} = Gt^n - \frac{G}{4}t^{n+2} + \frac{1}{32}G\left(2G^2 + 1\right)t^{n+4} + ..., \tag{3.40}$$

$$\bar{a} = n - \frac{t^2}{2} + \frac{G^2}{2(n+1)}t^{2n+2} + ..., \tag{3.41}$$

onde G é uma constante determinada pelo comportamento no infinito.

Vamos apresentar alguns perfis gerados por integração numérica das equações BPS, Eqs. (3.32) e (3.31), para vários valores de n, obtidos via Maple.

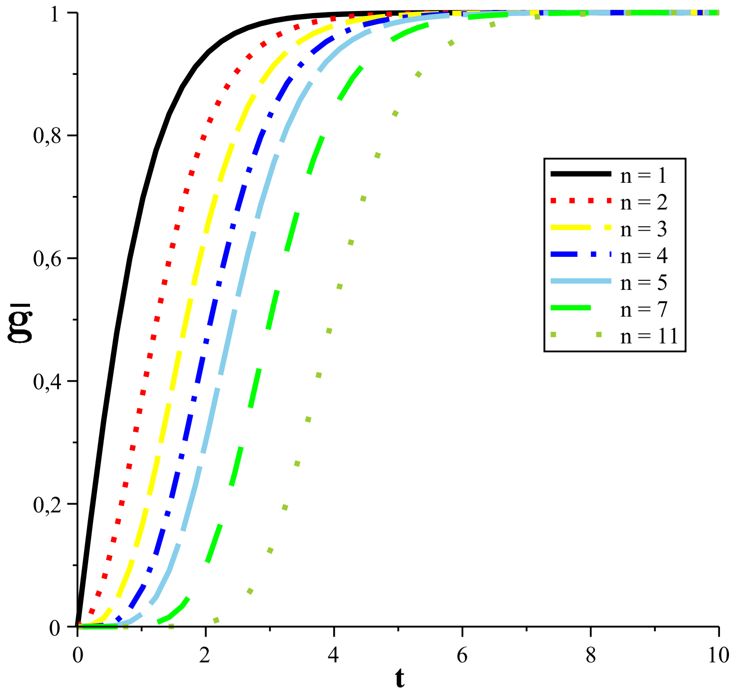


Figura 3.1: Campo de Higgs $\bar{g}(t)$.

Para $n = 1$, o campo cresce, tendendo rapidamente ao valor assintótico no infinito. Para $n > 1$ fixo, o defeito vai se alargando conforme o valor de n aumenta, tendendo mais lentamente ao valor assintótico.

O comportamento do campo vetorial $a(r)$ está de acordo com as condições de contorno. Na origem, o campo $a(r)$ tende para cada valor de n. No infinito, o campo $a(r)$ tende a zero.

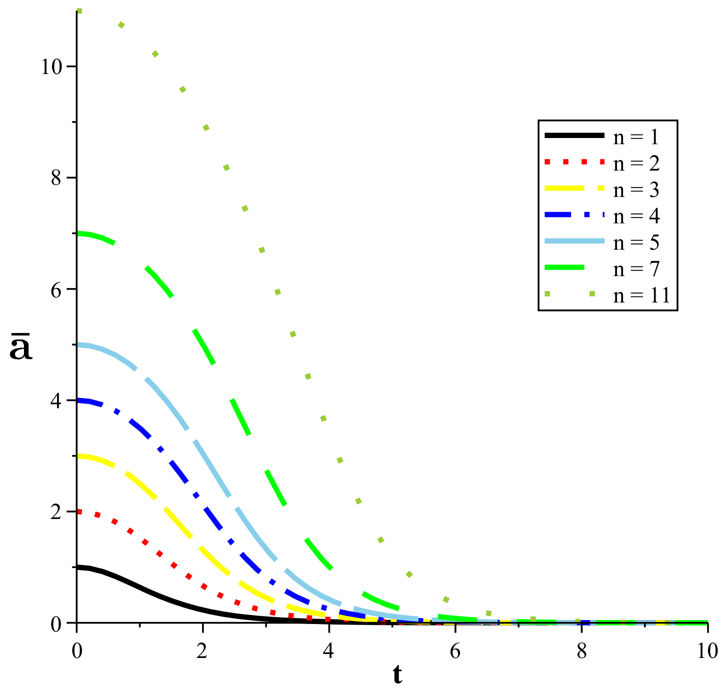


Figura 3.2: Campo vetorial $\bar{a}(t)$.

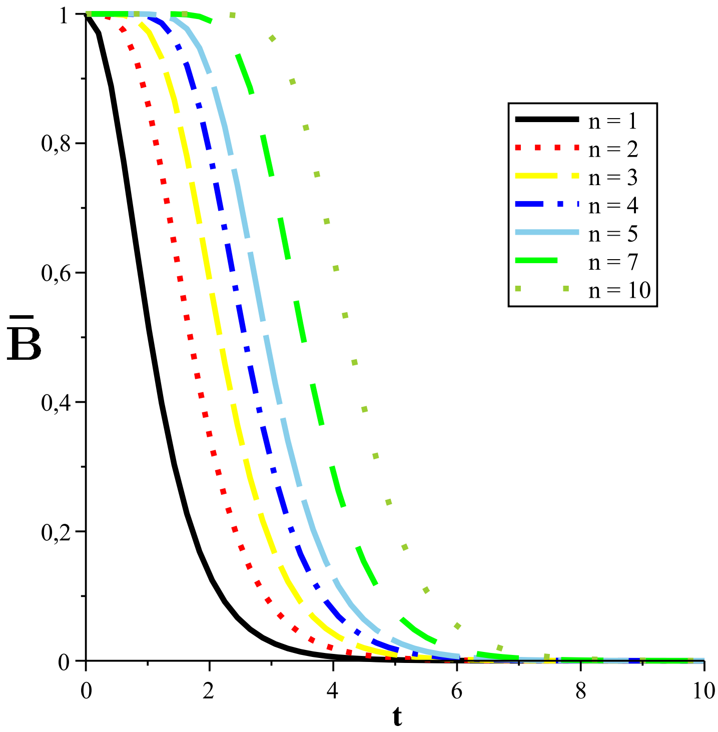


Figura 3.3: Campo magnético $\bar{B}(t)$.

Na origem, o campo magnético possui um valor máximo para cada valor de n, $\bar{B} = 1$. Para $n = 1$, o perfil do campo magnético possui um perfil tipo lump centrado na origem, decaindo rapidamente a zero. Para $n > 1$, ocorre alargamento do perfil, correspondendo a um lump mais espesso.

Para $n = 1$, a densidade de energia possui um perfil de lump estreito centrado na origem, decaindo rapidamente a zero. Para $n > 1$, a densidade de energia parte do valor unitário na origem, crescendo até atingir um valor máximo, a partir do qual decai a zero. Tal decaimento é tão mais lento quanto maior é n. A densidade de energia torna-se menos localizada (mais espalhada) à medida que n cresce, distribuindo-se em anéis concêntricos, cujos raios crescem com o valor de n.

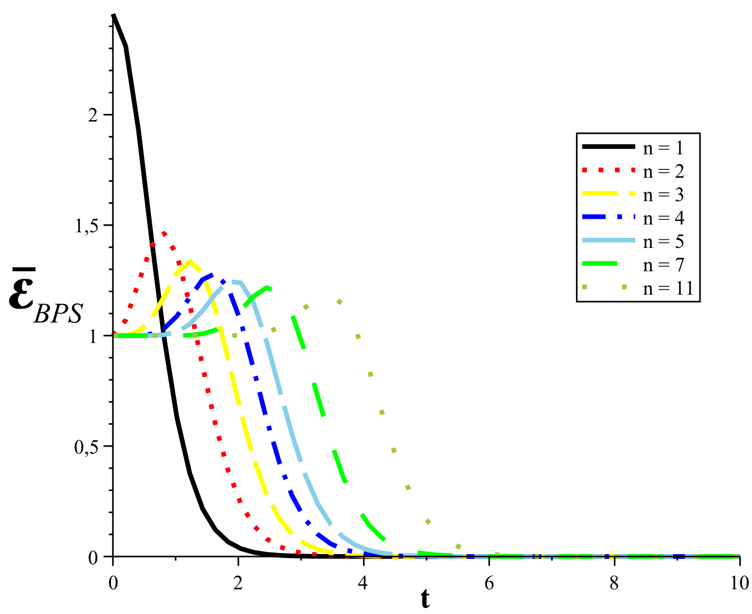


Figura 3.4: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(t)$.

CAPÍTULO 4

Modelo de Chern-Simons-Higgs

O estudo das configurações de vórtices em teorias de gauge planares foi intensamente desenvolvido no modelo de Maxwell-Higgs, apresentando soluções de vórtices eletricamente neutras. Apresentaremos neste capítulo o modelo de Chern-Simons-Higgs, que representa uma nova categoria de teoria de gauge em (1+2)-dimensões e tem sido objeto de intensa investigação teórica nos últimos anos, devido à sua aplicabilidade em vários sistemas físicos. Uma das características dos sistemas bidimensionais é a possibilidade da existência de estados com estatística contínua e generalizada (anyons). A teoria de Chern-Simons desempenha um papel extremamente importante neste marco teórico, uma vez que é o termo de Chern-Simons que induz uma mudança na estatística das partículas carregadas. O mecanismo desta transmutação da estatística via a lagrangiana de Chern-Simons é o ingrediente principal das teorias de campos para descrever muitos sistemas da matéria condensada, tal como gás de elétron bidimensional e o efeito Hall quântico.

O termo de Chern-Simons é representado por $\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa}$, onde κ é o parâmetro de Chern-Simons, sendo uma constante adimensional que mede a intensidade do termo de Chern-Simons. A presença deste termo conduz à soluções de vórtices eletricamente carregados. Uma outra propriedade importante do termo de Chern-Simons é a concessão de massa para o campo de gauge, mantendo a invariância de gauge. Ele também viola as simetrias discretas da paridade e inversão temporal, mas preservando a simetria PT.

Neste capítulo, apresentaremos uma teoria proposta por Jackiw-Weinberg e Hong-Kim-Pac, em que a eletrodinâmica é governada pelo termo de Chern-Simons, onde o campo de gauge esta acoplado ao campo de Higgs. A dinâmica do modelo de Chern-Simons-Higgs é descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa} A_\mu F_{\nu\kappa} + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|), \tag{4.1}$$

onde $V(|\phi|)$ representa o potencial a ser adotado, de modo a satisfazer as condições para se obter soluções BPS. O potencial proposto é

$$V(|\phi|) = \frac{e^2|\phi|^2}{\kappa^2}\left(ev^2 - e|\phi|^2\right)^2. \tag{4.2}$$

As equações de movimento, associadas ao campo de gauge A_μ e o campo de Higgs ϕ, são

$$\kappa\epsilon^{\beta\alpha\mu}\partial_\alpha A_\mu = J^\beta, \tag{4.3}$$

$$D_\beta D^\beta \phi + \frac{dV}{d\phi^*} = 0, \tag{4.4}$$

Da Eq. (4.3), obtemos a lei de Gauss do modelo de Chern-Simons-Higgs

$$\kappa B = J^0 = \rho. \tag{4.5}$$

Podemos estabelecer a relação entre os setores elétricos e magnéticos a partir da lei de Gauss via integração, onde obtemos

$$\kappa\Phi = Q, \tag{4.6}$$

mostrando que as soluções de vórtices carregam fluxo magnético e campo elétrico. Da lei de Gauss, obtemos a expressão que relaciona o potencial escalar A_0 em termos do campo magnético B

$$A_0 = \frac{\kappa B}{2e^2|\phi|^2}. \tag{4.7}$$

A lei de Ampère estacionária é

$$\kappa\epsilon_{ij}\partial_j A_0 = -J_i. \tag{4.8}$$

Em regime estacionário, a equação de movimento para o campo de Higgs é escrita como torna-se

$$\partial_j\partial_j\phi - 2ieA_j\partial_j\phi - e^2(A_j)^2\phi + e^2A_0^2\phi - \frac{dV}{d\phi^*} = 0, \tag{4.9}$$

4.1 Energia e equações BPS

A densidade de energia é obtida a partir da densidade hamiltoniana, que regime estacionário é definida por

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}. \tag{4.10}$$

Expandindo os termos da Lagrangiana, (4.1), obtemos

$$\kappa\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa} = \kappa A_0 B + \kappa\epsilon_{ij}A_i\partial_j A_0, \tag{4.11}$$

e assim, a lagrangiana é reescrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\kappa A_0 B - \frac{1}{2}\kappa\epsilon_{ij}A_i\partial_j A_0 + |D_0\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - V\left(|\phi|\right). \tag{4.12}$$

Inserindo a derivada total

$$\kappa\epsilon_{ij}\partial_j\left(A_i A_0\right) = \kappa\epsilon_{ij}A_i\partial_j A_0 + \kappa\epsilon_{ij}A_0\partial_j A_i, \tag{4.13}$$

chegamos à expressão

$$\mathcal{L} = -\kappa A_0 B + |D_0\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - V\left(|\phi|\right). \tag{4.14}$$

Multiplicando a lei de Gauss por A_0, obtém-se

$$\kappa A_0 B = 2\left|D_0\phi\right|^2, \tag{4.15}$$

e a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\left|D_0\phi\right|^2 - |D_i\phi|^2 - V\left(|\phi|\right). \tag{4.16}$$

Portanto, da Eq. (4.10), a densidade de energia resulta ser

$$\mathcal{E} = |D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{e^2\left|\phi\right|^2}{\kappa^2}\left(ev^2 - e\left|\phi\right|^2\right)^2, \tag{4.17}$$

cuja integraçao permite obter a energia do sistema

$$E = \int d^2\mathbf{r}\left[|D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{e^2\left|\phi\right|^2}{\kappa^2}\left(ev^2 - e\left|\phi\right|^2\right)^2\right]. \tag{4.18}$$

Vamos agora obter as condições que minimizam a energia. Para isso, aplicaremos o formalismo BPS à densidade de energia, reescrevendo-a em termos quadráticos através da técnica de completar quadrado.

$$\mathcal{E} = \left[|D_0\phi| \mp \sqrt{V}\right]^2 \pm 2\left|D_0\phi\right|\sqrt{V} + |D_i\phi|^2. \tag{4.19}$$

Substituindo o potencial na expressão, teremos

$$\mathcal{E} = \left[|D_0\phi| \mp \frac{e\,|\phi|}{\kappa} \left(ev^2 - e\,|\phi|^2 \right) \right]^2 \pm 2\,|D_0\phi|\, \frac{e^2v^2\,|\phi|}{\kappa} \mp 2\,|D_0\phi|\, \frac{e^2\,|\phi|^3}{\kappa} + |D_i\phi|^2 .$$

Inserindo a identidade $|D_i\phi\,|^2 \; = |D_\pm\phi\,|^2 \pm eB\,|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j$, a energia será dada por

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left[\left[\frac{\kappa B}{2e\,|\phi|} \mp \frac{e\,|\phi|}{\kappa} \left(ev^2 - e\,|\phi|^2 \right) \right]^2 \pm Bev^2 + |D_\pm\phi\,|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j \right]. \tag{4.20}$$

As configurações de campo com a menor energia possível são satisfeitas impondo que os termos quadráticos sejam nulos, ou seja,

$$D_\pm\phi = 0, \tag{4.21}$$

$$B = \pm\frac{2e^2\,|\phi|^2}{\kappa^2} \left(ev^2 - e\,|\phi|^2 \right). \tag{4.22}$$

Estas são as equações BPS ou de primeira ordem que minimizam a energia do sistema, e fornecem a seguinte expressão para à energia

$$E = \int d^2\mathbf{r} \left[\pm ev^2 B \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j \right]. \tag{4.23}$$

O termo de divergência anular-se-á devido às condições de contorno apropriadas a ser impostas sobre os campos, que implicarão à uma energia finita e localizada. Sob tal consideração, a energia será proporcional ao fluxo magnetico,

$$E = \pm ev^2 \int d^2\mathbf{r}\; B = \pm ev^2\Phi, \tag{4.24}$$

tal como acontece no caso do modelo de Maxwell-Higgs.

4.2 Configurações de vórtices

As configurações de vórtices serão obtidas via implementação do seguinte ansatz

$$\phi = vg(r)e^{in\theta} \;\; , \;\; A_\theta = -\frac{a\,(r) - n}{er} \;\; , \;\; A_0 = \omega(r). \tag{4.25}$$

Neste ansatz, o campo magnético é dado pela expressão

$$B = -\frac{a'}{er}, \tag{4.26}$$

enquanto, as equações BPS do modelo de CSH são expressas como

$$g' = \pm\frac{ag}{r}. \tag{4.27}$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm\frac{2e^3v^4g^2}{\kappa^2}\left(1-g^2\right), \tag{4.28}$$

As condições de contorno que garantem uma densidade de energia bem localizada são

$$\lim_{r\to\infty} a(r) = 0^{\pm}, \qquad \lim_{r\to\infty} g(r) = 1, \tag{4.29}$$

$$\lim_{r\to 0} a(r) = n\ , \qquad \lim_{r\to 0} g(r) = 0, \tag{4.30}$$

onde n representa a vorticidade da solução. Então, da expressão (4.26), obtemos que a energia BPS do modelo de CSH é

$$E_{BPS} = \pm 2\pi v^2 n. \tag{4.31}$$

Vamos reescrever as equações BPS em uma forma adimensional através da seguinte variável adimensional, $t \to evr$, e das seguinte definições

$$a(r) \to \bar{a}(t)\,,\ g(r) \to \bar{g}(t)\,,\ B(r) \to ev^2\bar{B}(t)\,,\ \kappa \to ev\bar{\kappa},\ \omega(r) \to v\bar{\omega}(t)\,, \tag{4.32}$$

com as quais as equações BPS são escritas na seguinte forma

$$\bar{g}' = \pm\frac{\bar{g}\bar{a}}{t}. \tag{4.33}$$

$$\bar{B} = -\frac{\bar{a}'}{t} = \frac{2\bar{g}^2}{\bar{\kappa}^2}\left(1-\bar{g}^2\right), \tag{4.34}$$

O potencial escalar e o campo elétrico são calculados usando as seguintes formulas

$$\bar{\omega} = \pm\frac{1}{\bar{\kappa}}\left(1-\bar{g}^2\right), \quad \bar{\omega}' = -\frac{2}{\bar{\kappa}}\frac{ag^2}{t} \tag{4.35}$$

4.3 Análise assintótica e soluções numéricas

Faremos primeiramente o comportamento assintótico no infinito. Utilizaremos as seguintes expansões $\bar{g}(t) = 1 - \delta\bar{g}$, $\bar{a}(t) = \delta\bar{a}$, que substituídas nas equações BPS, Eqs. (4.33) - (4.34), proporcionam duas equações de primeira ordem acopladas para $\delta\bar{g}$ e $\delta\bar{a}$. O desacoplamento delas proporciona as seguintes equações diferenciais

$$(\delta\bar{a})'' - \frac{(\delta\bar{a})'}{t} - \frac{4}{\bar{\kappa}^2}(\delta\bar{a}) = 0, \tag{4.36}$$

$$(\delta\bar{g})'' + \frac{(\delta\bar{g})'}{t} - \frac{4}{\bar{\kappa}^2}(\delta\bar{g}) = 0. \tag{4.37}$$

As soluções destas equações diferenciais são

$$\delta\bar{g} \sim K_0\left(\frac{2t}{\bar{\kappa}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{2}{\bar{\kappa}}t\right), \tag{4.38}$$

$$\delta\bar{a} \sim tK_1\left(\frac{2t}{\bar{\kappa}}\right) \sim \sqrt{t}\exp\left(-\frac{2}{\bar{\kappa}}t\right). \tag{4.39}$$

Para o comportamento na origem, utilizaremos o método da série de potência

$$\bar{a} = n - \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j,\ \bar{g} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j t^j, \tag{4.40}$$

cuja solução, para $n > 0$ é

$$\bar{g} = Gt^n - \frac{G^3 t^{3n+2}}{2\,(n+1)^2} + \frac{G^5 t^{3n+2}}{2\,(n+1)^2} + \ldots, \tag{4.41}$$

$$\bar{a} = n - \frac{G^2 t^{2n+2}}{(n+1)^2} + \frac{G^4 t^{4n+2}}{(2n+1)^2} + \ldots \tag{4.42}$$

Agora, apresentaremos os perfis gerados via integração numérica das equações BPS. O valor escolhido para o parâmetro de Chern-Simons foi $\bar{\kappa} = 1$.

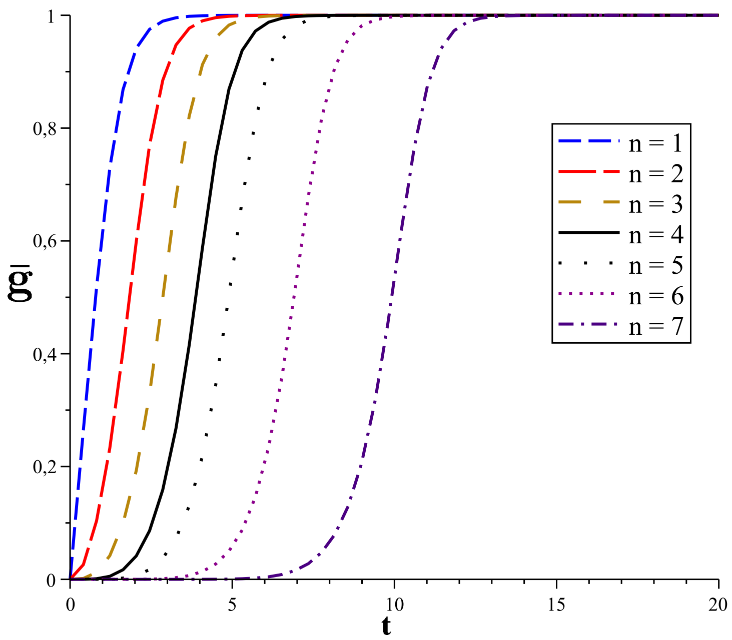


Figura 4.1: Campo de Higgs $\bar{g}(t)$.

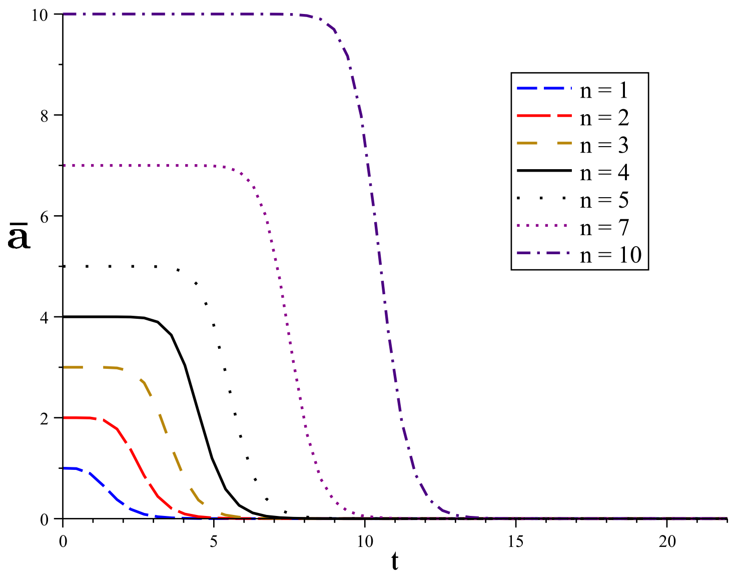


Figura 4.2: Campo vetorial $\bar{a}(t)$.

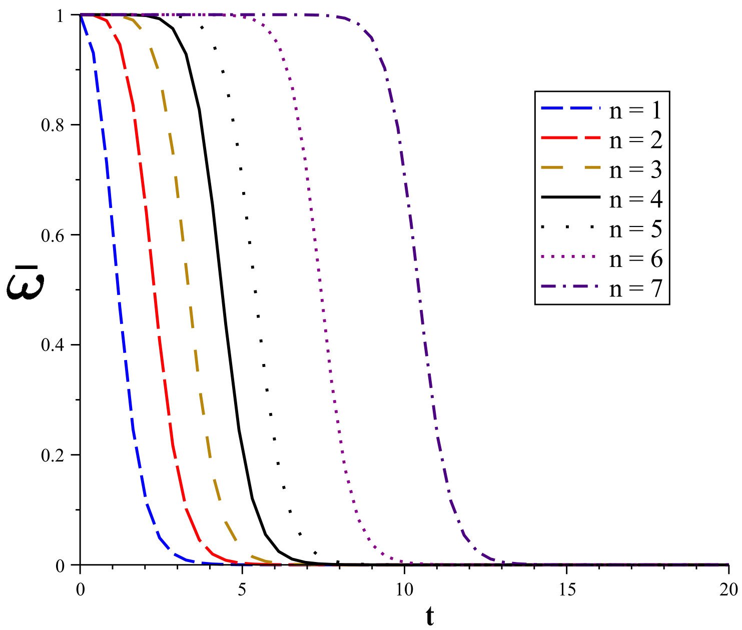


Figura 4.3: Potencial escalar $-\bar{\omega}(t)$.

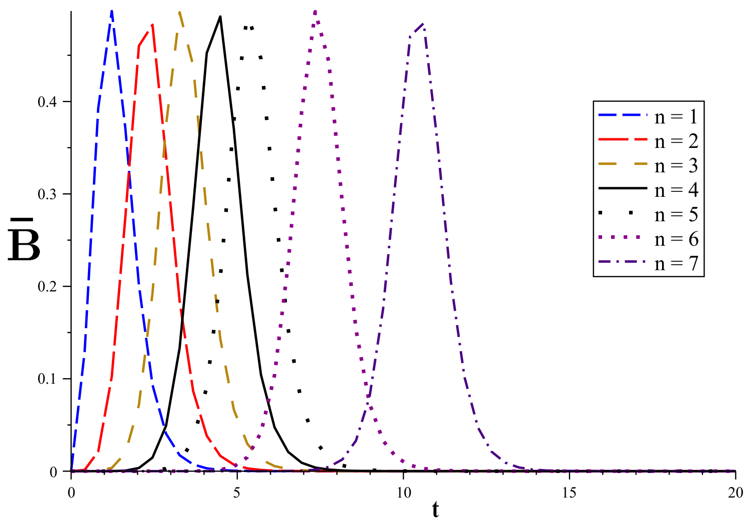


Figura 4.4: Campo magnético $\bar{B}(t)$.

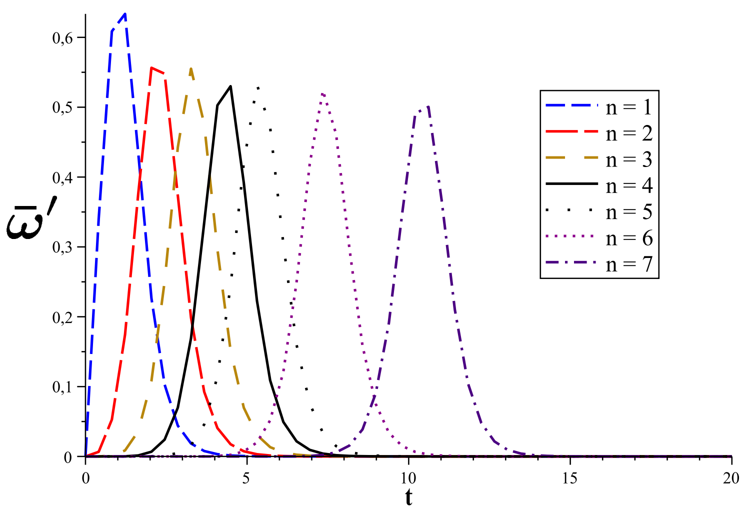


Figura 4.5: Campo elétrico $\bar{\omega}'(t)$.

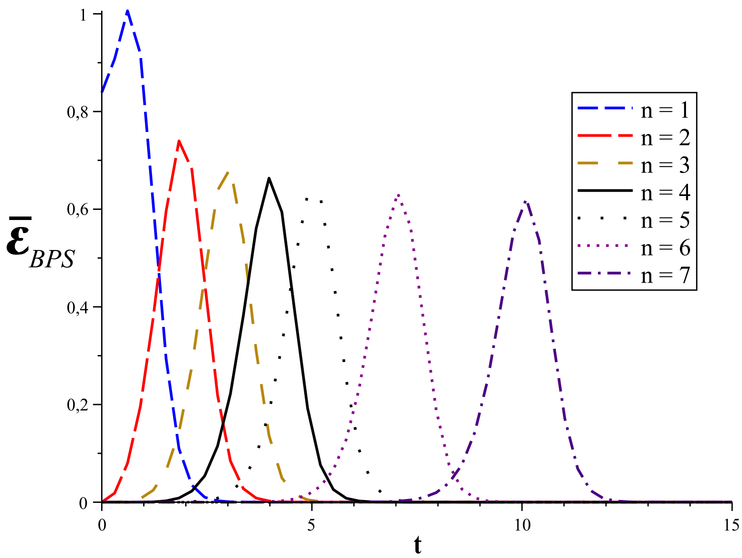


Figura 4.6: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(t)$

CAPÍTULO 5

Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Nos capítulos anteriores, apresentamos os modelos de Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs, duas teorias planares que suportam configurações de vórtices eletricamente neutro e carregado, respectivamente. Neste capítulo, daremos uma introdução ao modelo de Higgs abeliano acoplado ao termo de Chern-Simons.

5.1 Equação de movimento

A densidade lagrangiana para este modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_{\mu}F_{\nu\kappa} + \left|D_{\mu}\phi\right|^2 + \frac{1}{2}\partial_{\mu}N\,\partial^{\mu}N - V\left(\left|\phi\right|, N\right), \tag{5.1}$$

onde N representa um campo neutro para garantir uma teoria estável e invariante de gauge, e $V\left(\left|\phi\right|, N\right)$ é o potencial de interação que depende tanto da campo de Higgs quanto do campo neutro. Especificamente, utilizamos o seguinte potencial

$$V\left(\left|\phi\right|, N\right) = \frac{1}{2}\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right]^2 + e^2N^2\left|\phi\right|^2. \tag{5.2}$$

As equações de movimento do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs[1] são

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \kappa\epsilon^{\beta\alpha\mu}\partial_\alpha A_\mu = -J^\beta, \tag{5.3}$$

$$D_\alpha D^\alpha \phi - e\phi\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right] + e^2 N^2 \phi = 0, \tag{5.4}$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha N - \kappa\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right] + 2e^2 N\left|\phi\right|^2 = 0, \tag{5.5}$$

onde $J^\beta = ie\left(\bar{\phi}D^\beta\phi - \phi\overline{D^\beta\phi}\right)$ é a densidade de corrente do modelo de MCSH.

A lei de Gauss estacionaria do modelo é

$$\partial_i\partial_i A_0 - \kappa B = 2e^2 A_0\left|\phi\right|^2. \tag{5.6}$$

Vemos da lei da Gauss, que o termo de Chern-Simons acopla o setor elétrico ao setor magnético, onde agora $A_0 = 0$ não constitui mais uma solução da Eq.(5.6), confirmando a existência de vórtices eletricamente carregados.

A lei de Ampère estacionária para este modelo é

$$\partial_j F_{ji} + \kappa\epsilon_{ij}\partial_j A_0 = J_i. \tag{5.7}$$

A equação de movimento estacionária para o campo de Higgs é também escrita na seguinte forma:

$$\partial_k\partial_k\phi - 2ieA_k\partial_k\phi - e^2\left(A_k\right)^2\phi + e^2\left(A_0\right)^2\phi + e\phi\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right] - e^2N^2\phi = 0, \tag{5.8}$$

enquanto a equação de movimento estacionária para o campo neutro N é expressa por

$$\partial_j\partial_j N = \kappa\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right] - 2e^2 N\left|\phi\right|^2. \tag{5.9}$$

5.2 Energia estacionária e equações BPS

A densidade energia em regime estacionário é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 + \frac{B^2}{2} + e^2\left(A_0\right)^2\left|\phi\right|^2 + \left|D_i\phi\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_i N\right)^2 + V\left(\left|\phi\right|, N\right). \tag{5.10}$$

[1]MCSH = Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Inserimos o potencial, Eq. (5.2), na expressão anterior, e aplicamos o método de Bogomol'nyi, de modo a reescrevê-la em termos quadráticos. Neste desenvolvimento, usamos as seguintes identidades:

$$\frac{1}{2}B^2 \pm \frac{1}{2}\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right]^2 = \frac{1}{2}\left[B \pm \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right]\right]^2 \mp B\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right], \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 \pm \frac{1}{2}\left(\partial_i N\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \pm \partial_i N\right]^2 \mp \left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i N\right), \quad (5.12)$$

$$e^2\left(A_0\right)^2\left|\phi\right|^2 \pm e^2 N^2\left|\phi\right|^2 = e^2\left|\phi\right|^2\left[A_0 \pm N\right]^2 \mp 2e^2\left|\phi\right|^2 A_0 N. \quad (5.13)$$

Substituindo-as na Eq. (5.10), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right]\right]^2 \pm B\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right] + \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \pm \partial_i N\right]^2 \\ &\quad \mp \left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i N\right) + \left|D_i\phi\right|^2 + e^2\left|\phi\right|^2\left[A_0 \pm N\right]^2 \mp 2e^2\left|\phi\right|^2 A_0 N, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Usando agora a identidade

$$\left|D_i\phi\right|^2 = \left|D_\pm\phi\right|^2 \pm eB\left|\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j, \quad (5.15)$$

na Eq. (5.14), resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right]\right]^2 \mp \kappa B N \pm ev^2 B + \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \pm \partial_i N\right]^2 \mp \left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i N\right) \\ &\quad + \left|D_\pm\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + e^2\left|\phi\right|^2\left[A_0 \pm N\right]^2 \mp 2e^2\left|\phi\right|^2 A_0 N, \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para que a energia seja minimizada, devemos impor que os termos quadráticos sejam nulos, ou seja,

$$B \mp \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right] = 0, \quad (5.17)$$

$$D_\pm\phi = 0, \quad (5.18)$$

$$\partial_i A_0 \pm \partial_i N = 0, \quad (5.19)$$

$$A_0 \pm N = 0. \quad (5.20)$$

Estas são as equações BPS que descrevem a dinâmica dos vórtices do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs, e somente existirão se o campo neutro N estiver relacionado com o potencial escalar A_0 de acordo com a Eq. (5.20),

$$N = \mp A_0. \quad (5.21)$$

Com isso, teremos as seguintes equações BPS,

$$|D_{\pm}\phi|^2 = 0. \tag{5.22}$$

$$B = \pm\left[ev^2 - e|\phi|^2\right] + \kappa A_0, \tag{5.23}$$

Essas considerações conduzem à seguinte expressão para a densidade de energia BPS,

$$\mathcal{E} = \pm\, ev^2 B \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + \partial_i A_0 \partial_i A_0 + \kappa A_0 B + 2e^2 |\phi|^2 (A_0)^2, \tag{5.24}$$

os dois últimos termos podem se simplificado via a lei de Gauss,

$$\kappa A_0 B + 2e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 = A_0 \partial_i \partial_i A_0 \tag{5.25}$$

obtemos

$$\mathcal{E} = \pm\, ev^2 B + \partial_i \mathcal{J}_i, \tag{5.26}$$

onde

$$\partial_i \mathcal{J}_i = \pm\frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + \partial_i (A_0 \partial_i A_0), \tag{5.27}$$

representa uma divergência total, que anula-se devido as mesmas condições de contorno impostas sobre os campos, dadas nas Eqs. (5.33) e (5.34). Portanto, a energia BPS do modelo será dado por

$$E = \pm ev^2 \int d^2r\, B = \pm 2\pi v^2 n. \tag{5.28}$$

5.3 Configurações de vórtices

Para obtermos configurações de vórtices no modelo de MCSH, faremos uso do seguinte ansatz

$$\phi = vg(r)e^{in\theta}\ , \quad A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er}\ , \quad A_0 = \omega(r). \tag{5.29}$$

Usando o ansatz nas equações BPS e na lei de Gauss estacionária teremos

$$g' = \pm\frac{ag}{r}. \tag{5.30}$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2\left(1 - g^2\right) + \kappa\omega, \tag{5.31}$$

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} - \kappa B = 2e^2 v^2 \omega g^2, \tag{5.32}$$

As funções escalares $a(r)$, $g(r)$ e $\omega(r)$ são regulares em $r=0$ e $r=\infty$, satisfazendo as seguintes condições de contorno

$$a(0)=n,\ g(0)=0,\ \omega'(0)=0, \tag{5.33}$$

$$a(\infty)=0,\ g(\infty)=1,\ \omega(\infty)=0, \tag{5.34}$$

onde n representa a vorticidade da solução.

Introduzindo a seguinte variável adimensional $t\rightarrow evr$, em seguida, realizando as seguintes transformações nos campos,

$$g(r)\rightarrow\bar{g}(t)\ \ ,\ \ a(r)\rightarrow\bar{a}(t)\ \ ,\ \ \omega(r)\rightarrow v\bar{\omega}(t)\ \ ,\ \ B(r)\rightarrow ev^2\bar{B}(t)\ \ ,\ \ \kappa\rightarrow ev\bar{\kappa}, \tag{5.35}$$

chegamos às equações BPS escritas na forma adimensional

$$\bar{g}'=\pm\frac{\bar{a}\bar{g}}{t}, \tag{5.36}$$

$$\bar{B}=-\frac{\bar{a}'}{t}=\pm\left(1-\bar{g}^2\right)+\bar{\kappa}\bar{\omega}, \tag{5.37}$$

$$\bar{\omega}''+\frac{\bar{\omega}'}{t}+\bar{\kappa}\frac{\bar{a}'}{t}=2\bar{g}^2\bar{\omega}. \tag{5.38}$$

Fazendo a escolha $\bar{\kappa}\rightarrow-\bar{\kappa}$, as soluções comportam-se $\bar{g}\rightarrow\bar{g},\ \bar{a}\rightarrow\bar{a},\ \bar{\omega}\rightarrow-\bar{\omega}$.

5.3.1 Análise assintótica e soluções numéricas

Faremos primeiramente o comportamento assintótico para $t\rightarrow\infty$. Neste limite, usaremos as seguintes expansões

$$\bar{a}=\delta\bar{a}\ ,\ \ \bar{g}=1-\delta\bar{g}\ ,\ \ \bar{\omega}=\delta\bar{\omega}.$$

Então, substituindo nas Eqs. (5.36),(5.37) e (5.38), obtemos as seguintes equações

$$\frac{(\delta\bar{a})'}{t}=-2\delta\bar{g}+\kappa\delta\bar{\omega}, \tag{5.39}$$

$$-(\delta\bar{g})'=\frac{(\delta\bar{a})}{t}, \tag{5.40}$$

$$(\delta\bar{\omega})''+\frac{(\delta\bar{\omega})'}{t}-\kappa\frac{(\delta a)'}{t}-2(\delta\bar{\omega})=0, \tag{5.41}$$

cujas soluções são

$$\delta\bar{g} \propto K_0(t\beta) \simeq t^{-1/2}e^{-\beta t}\ , \tag{5.42}$$

$$\delta\bar{a} \propto tK_1(t\beta) \simeq t^{1/2}e^{-\beta t}\ , \tag{5.43}$$

$$\delta\bar{\omega} \propto K_0(t\beta) \simeq t^{1/2}e^{-\beta t} \tag{5.44}$$

onde o parâmetro β é

$$\beta = \frac{\sqrt{\bar{\kappa}^2+8}-\bar{\kappa}}{2}, \tag{5.45}$$

e quando $\bar{\kappa} \to \infty$, os vórtices se comportam como aqueles do modelo de Chern-Simons-Higgs

$$\beta \simeq \frac{2}{\bar{\kappa}} \tag{5.46}$$

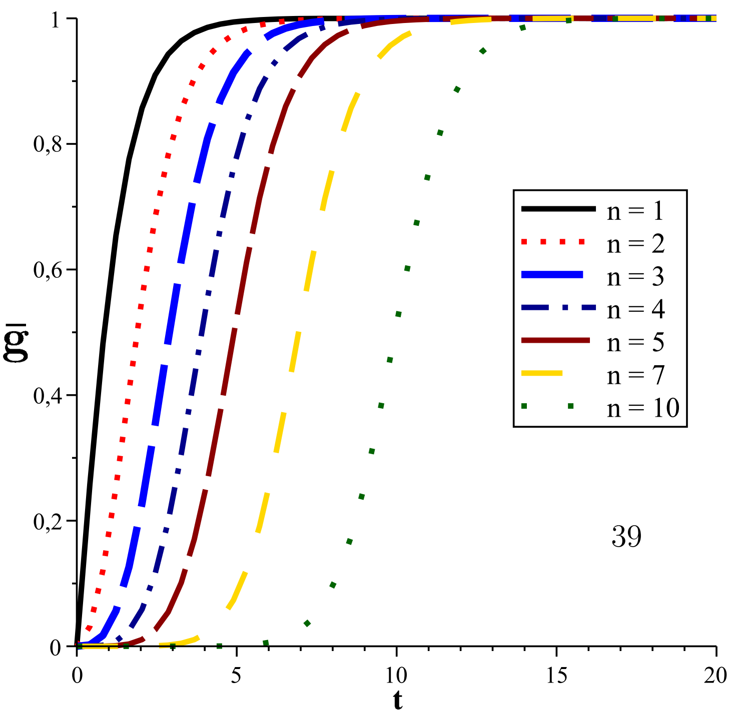
Para $t \to 0$, utilizamos o método da série de potência nas Eqs. (5.36),(5.37) e (5.38), obtemos as seguintes soluções

$$\bar{g} = G_n t^n + ..., \tag{5.47}$$

$$\bar{a} = 1 - \frac{1}{2}(1+\bar{\kappa}\omega_0)\, t^2 + ..., \tag{5.48}$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{\bar{\kappa}(1+\bar{\kappa}\omega_0)}{4} t^2 + ... \tag{5.49}$$

Apresentaremos alguns perfis gerados pela integração numérica das equações BPS, Eqs. (5.36)-(5.38). Todos os plots foram obtidos mantendo fixo o parâmetro de Chern-Simons, $\bar{\kappa} = 1$, e variando a vorticidade n.



Na origem, o campo $\bar{g}(t)$ é nulo para cada valor n. Para $n = 1$, o campo cresce rapidamente tendendo ao valor assintótico no infinito. Para $n > 1$, o perfil do campo alarga-se, tendendo mais lentamente ao valor assintótico no infinito.

Em torno da origem, o campo $\bar{a}(t)$ tende para cada valor de n. No infinito, o campo $\bar{a}(t)$ tende a zero, decaindo mais suavemente quanto maior o valor de n.

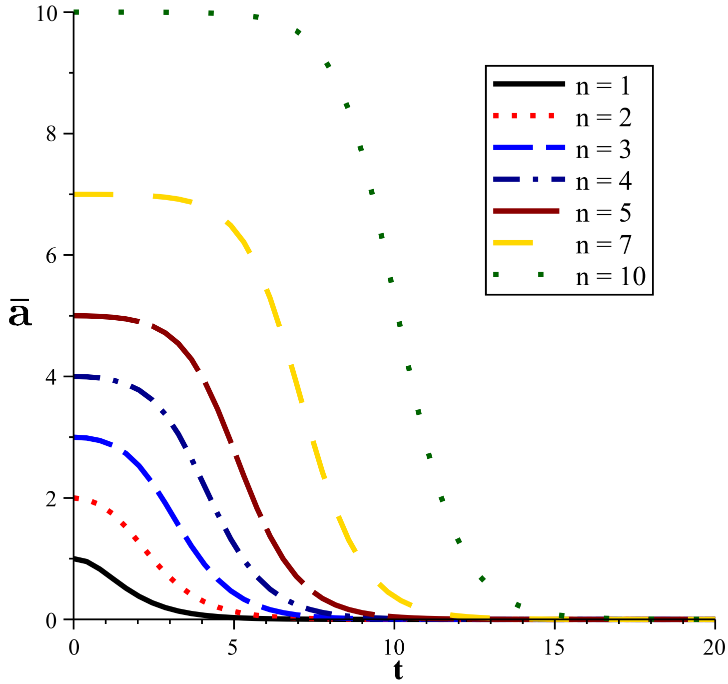


Figura 5.2: Campo vetorial $\bar{a}(t)$.

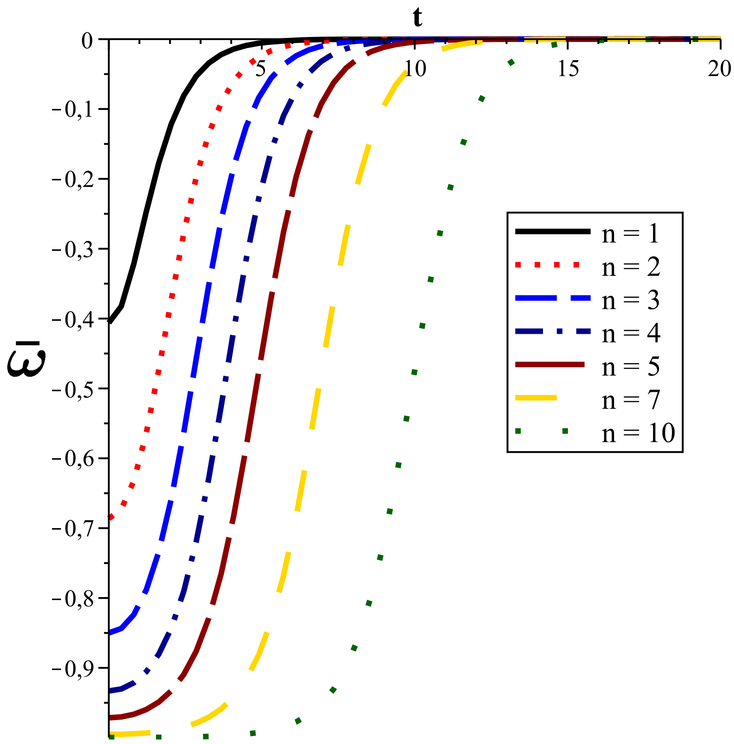


Figura 5.3: Potencial escalar $\bar{\omega}(t)$.

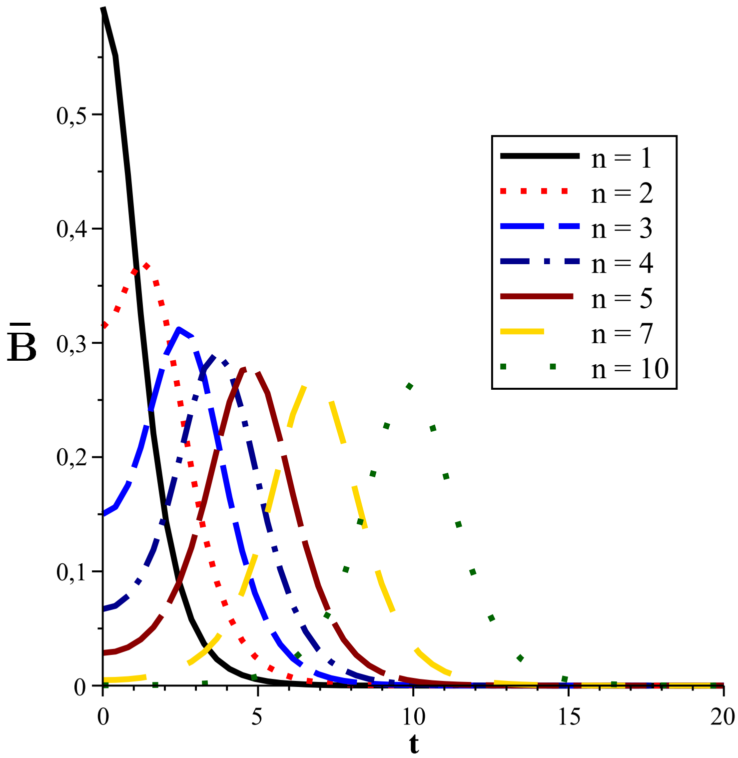


Figura 5.4: Campo magnético $\bar{B}(t)$.

Para $n = 1$, o campo magnético tem seu valor máximo, decaindo a zero em forma de *lump*. Para $n > 1$, o campo decai formando um anel com raio proporcional a n.

Para cada valor de n, o campo elétrico decai a zero em forma de anel centrados longe da origem quanto maior o valor de n.

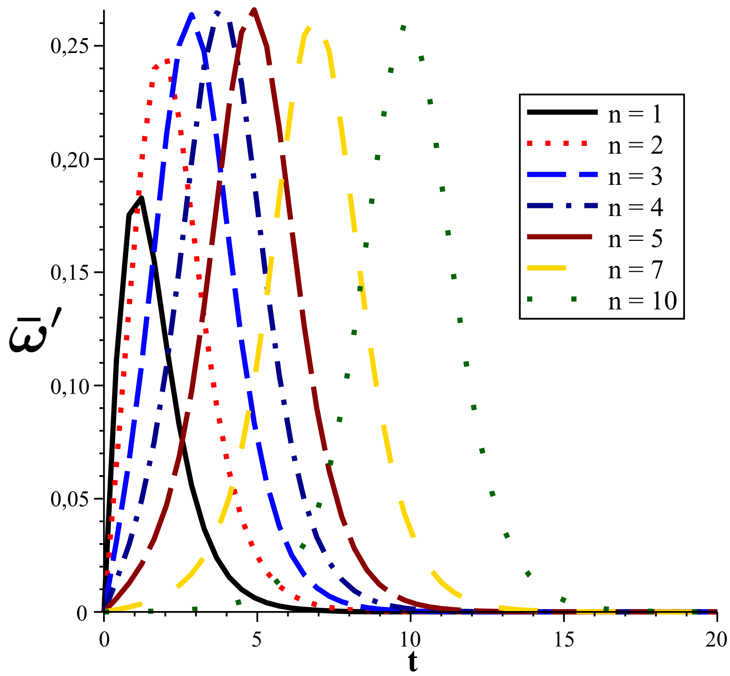


Figura 5.5: Campo elétrico $\bar{\omega}'(t)$.

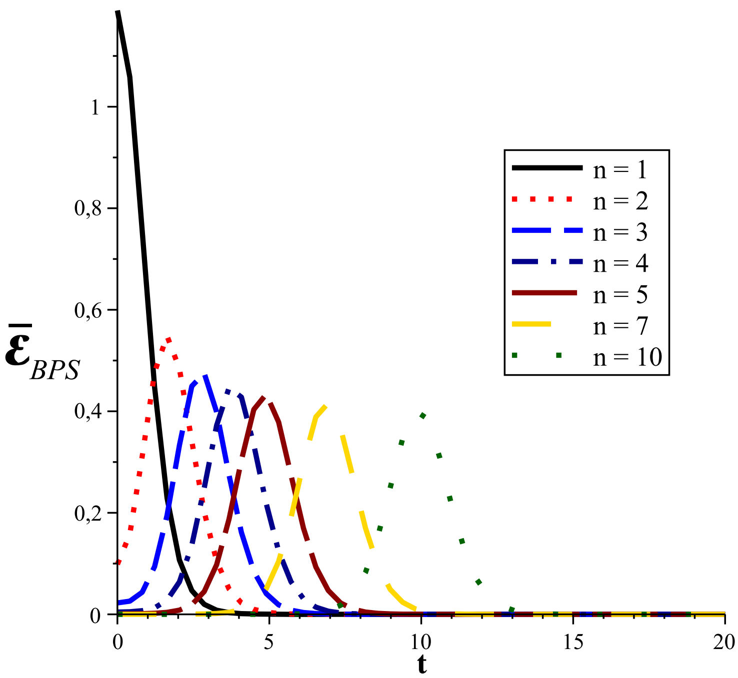


Figura 5.6: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(t)$.

Para $n = 1$, a densidade de energia possui um perfil tipo *lump* centrado na origem. Para $n > 1$, a densidade de energia decai formando anéis cujos raios são proporcionais ao valor de n.

CAPÍTULO 6

Vórtices na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs

Neste capítulo, dedicaremos nossa atenção ao estudo de configurações de vórtices em teorias abelianas com termos que violam a simetria de Lorentz. A simetria de Lorentz é a base da Relatividade Restrita e junto com a Mecânica Quântica correspondem à base da Teoria Quântica de Campos (QFT), que descreve partículas como uma excitação em um espaço imerso no espaço-tempo. O desenvolvimento destas duas teorias, proporcionou o surgimento do Modelo Padrão (SM), como um modelo para descrever todas as interações conhecidas no universo (eletromagnética, nuclear forte e fraca) exceto a gravidade. A violação simetria de Lorentz tem sido um tema de profundo interesse nos últimos anos, dentro de um contexto do modelo padrão de extensão (SME). O SME incorpora termos da violação da invariância de Lorentz (LIV) em todos os setores de interação e tem sido estudada em muitos aspectos. As investigações no contexto do SME ocorrem principalmente nos setores fermiônico, de gauge, e que envolvem extensões da gravidade. O sector de gauge do SME é composto de um termo CPT-par e outro termos CPT-ímpar. O termo CPT-ímpar é representado pelo termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ).

Nosso estudo sobre vórtices em modelos com (LIV) consiste na redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs definido em $(1+3)$-dimensões, definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}-\frac{1}{4}\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}\left(k_{AF}\right)_{\bar{\mu}}A_{\bar{\nu}}F_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}}+\left|D_{\bar{\mu}}\phi\right|^{2}-V\left(|\phi|\right), \tag{6.1}$$

onde o índice grego $\bar{\mu}$ varia de 0 a 3, $D_{\bar{\mu}}=\partial_{\bar{\mu}}-ieA_{\bar{\mu}}$ representando a derivada covariante $\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$ é o símbolo de Levi-Civita em (1+3)- dimensões

A redução dimensional deste modelo é dado pela densidade lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1+2} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{s}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_{\mu}F_{\nu\kappa}+\left|D_{\mu}\phi\right|^{2}+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\psi\partial^{\mu}\psi-e^{2}\psi^{2}\left|\phi\right|^{2}-V\left(\left|\phi\right|,\psi\right)\\ &\quad -\frac{\psi}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_{\mu}\partial_{\nu}A_{\kappa}-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\nu}\left(k_{AF}\right)_{\mu}A_{\kappa}\partial_{\nu}\psi,\end{aligned} \tag{6.2}$$

o segundo somando é o termo de Chern-Simons e o coeficiente da VL $s=\left(k_{AF}\right)_{\bar{3}}$ faz o papel do parâmetro de Chern-Simons, $\psi=A_{\bar{3}}$ é um campo escalar neutro, o vetor $\left(k_{AF}\right)_{\mu}$ é a versão (1+2)-dimensional do campo de fundo de Carroll-Field-Jackiw acoplando o campo de gauge e o campo neutro. Finalmente, $V\left(\left|\phi\right|,\psi\right)$ representa o potencial de interação

$$V\left(\left|\phi\right|,\psi\right)=\frac{1}{2}\left(ev^{2}-e\left|\phi\right|^{2}-s\psi\right)^{2}. \tag{6.3}$$

Neste trabalho, consideraremos $\left(k_{AF}\right)_{0}=0$ com o propósito d ter uma densidade de energia definida positiva (vide apêndice D.2).

As equações de movimento associadas a lagrangiana (6.2) são

$$\partial_{\alpha}F^{\alpha\beta}+s\epsilon^{\beta\alpha\mu}\partial_{\alpha}A_{\mu}-\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\left[\psi\epsilon^{\beta\alpha\mu}\left(k_{AF}\right)_{\mu}\right]+\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\mu\nu}\left(k_{AF}\right)_{\mu}\partial_{\nu}\psi=-J^{\beta}, \tag{6.4}$$

$$D_{\mu}D^{\mu}\phi+e^{2}\psi^{2}\phi-e\phi\left[ev^{2}-e\left|\phi\right|^{2}-s\psi\right]=0, \tag{6.5}$$

$$\Box\psi+\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\left[\epsilon^{i\alpha\rho}\left(k_{AF}\right)_{i}A_{\rho}\right]+\frac{1}{2}\epsilon^{i\nu\rho}\left(k_{AF}\right)_{i}\partial_{\nu}A_{\rho}+2e^{2}\psi\left|\phi\right|^{2}-s\left[ev^{2}-e\left|\phi\right|^{2}-s\psi\right]=0. \tag{6.6}$$

A lei de Gauss estacionaria é

$$\partial_{i}\partial_{i}A_{0}-sB-\epsilon_{ij}\left(k_{AF}\right)_{i}\partial_{j}\psi=2e^{2}A_{0}\left|\phi\right|^{2}. \tag{6.7}$$

A lei de Ampère estacionária é

$$\partial_{j}F^{ji}+s\epsilon^{0ij}\partial_{j}A_{0}=J_{i}, \tag{6.8}$$

A equação estacionaria para o campo neutro ψ é

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{2}\partial_j\left[\epsilon^{ij\rho}\left(k_{AF}\right)_i A_\rho\right] + \frac{1}{2}\epsilon^{ij\rho}\left(k_{AF}\right)_i \partial_j A_\rho + 2e^2\psi\left|\phi\right|^2 - s\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - s\psi\right], \tag{6.9}$$

e a equação de movimento estacionária para o campo de Higgs é

$$\nabla^2\phi - 2ie\mathbf{A}\cdot\nabla\phi - e^2\mathbf{A}^2\phi + e^2A_0^2\phi - e^2\psi^2\phi + e\phi\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - s\psi\right] = 0. \tag{6.10}$$

6.1 Energia e equações BPS

A energia estacionária (vide apêndice D.2) é dada pela expressão

$$E = \int d^2\mathbf{r}\left[\frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 + \frac{1}{2}B^2 + e^2\left(A_0\right)^2\left|\phi\right|^2 + \frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi + \left|D_i\phi\right|^2 + e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 + V\left(\left|\phi\right|,\psi\right)\right]. \tag{6.11}$$

Aplicaremos o método de Bogomol'nyi na expressão da energia, escrevendo-a em termos quadráticos

$$\begin{aligned} E &= \int d^2\mathbf{r}\left[\frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - s\psi\right]\right]^2 \pm \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - s\psi\right] + \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \pm \partial_i\psi\right]^2\right. \qquad (6.12) \\ &\qquad \left. \mp\left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i\psi\right) + \left|D_\pm\phi\right|^2 \pm eB\left|\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + e^2\left|\phi\right|^2\left[A_0 \pm \psi\right]^2 \mp 2e^2\left|\phi\right|^2 A_0\psi\right], \end{aligned}$$

onde inserimos a identidade

$$\left|D_i\phi\right|^2 = \left|D_\pm\phi\right|^2 \pm eB\left|\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j. \tag{6.13}$$

Obtemos então, a seguinte expressão para à energia

$$\begin{aligned} E &= \int d^2\mathbf{r}\,\frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - s\psi\right]\right]^2 \pm ev^2B \mp s\psi B + \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \pm \partial_i\psi\right]^2 \mp \left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i\psi\right) \\ &\quad + \left|D_\pm\phi\right|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + e^2\left|\phi\right|^2\left[A_0 \pm \psi\right]^2 \mp 2e^2\left|\phi\right|^2 A_0\psi. \end{aligned} \tag{6.14}$$

A condição de energia mínima é obtida quando os termos quadráticos se anulam, nos fornecendo assim, as equações BPS do modelo

$$D_\pm\phi = 0, \tag{6.15}$$

$$B \mp \left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - s\psi\right] = 0, \tag{6.16}$$

$$\partial_i A_0 \pm \partial_i\psi = 0, \tag{6.17}$$

$$A_0 \pm \psi = 0. \tag{6.18}$$

As duas ultimas equações saturam se

$$\psi = \mp A_0, \tag{6.19}$$

com isso, as equações BPS restantes são

$$D_{\pm}\phi = 0. \tag{6.20a}$$

$$B = \pm e\left(v^2 - |\phi|^2\right) + sA_0, \tag{6.21}$$

e a energia BPS resulta

$$E_{BPS} = \int d^2\mathbf{r}\,\left[\pm ev^2 B + sA_0 B + \partial_i A_0 \partial_i A_0 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + 2e^2\,|\phi|^2\,A_0^2\right], \tag{6.22}$$

e usando a lei de Gauss no ultimo termo,

$$2e^2 A_0^2\,|\phi|^2 = A_0\partial_i\partial_i A_0 - sA_0 B \pm \epsilon_{ij}\,(k_{AF})_i\,A_0\partial_j A_0, \tag{6.23}$$

e substituindo na integral acima obtemos

$$E_{BPS} = \int d^2\mathbf{r}\,\left[\pm ev^2 B + \partial_i \mathcal{J}_i\right], \tag{6.24}$$

onde

$$\mathcal{J}_i = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{ij}J_j + A_0\partial_i A_0 \mp \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\,(k_{AF})_j\,A_0^2. \tag{6.25}$$

O termo de divergência total anula-se devido as condições de contorno impostas sobre os campos. Com isso, a energia BPS é dada por

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2r\, B = 2\pi v^2\,|n|\,, \tag{6.26}$$

onde usamos as condições de contorno para os campos estabelecidas em (6.35) e (6.38).

6.2 Configurações de Vórtices carregados

Para obtermos soluções tipo-vórtices, consideraremos o ansatz

$$\phi = vg\,(r)\,e^{in\theta}\ ,\quad A_\theta = -\frac{a\,(r) - n}{er}\ ,\quad A_0 = \omega\,(r) \tag{6.27}$$

o que nos permite escrever o campo magnético como

$$B = -\frac{a'}{er}. \tag{6.28}$$

As funções escalares $a(r)$, $g(r)$ e $\omega(r)$ são regulares em $r = 0$ e $r = \infty$, satisfazendo condições de contorno garantido a finitude da energia.

As equações BPS e a lei de Gauss são expressas da seguinte maneira

$$g' = \pm\frac{ag}{r}, \tag{6.29}$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2\left(1 - g^2\right) + s\omega, \tag{6.30}$$

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} - sB \mp (k_{AF})_\theta\left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right) - 2e^2v^2g^2\omega = 0\,, \tag{6.31}$$

o sinal superior (inferior) corresponde a $n > 0$ ($n < 0$). Conhecendo a solução para $n > 0$ podemos obter a correspondente solução para $n < 0$ fazendo a seguinte mudança $g \to g$, $a \to -a$, $\omega \to -\omega$ e $(k_{AF})_\theta \to -(k_{AF})_\theta$. Também observamos que sob a mudança $s \to -s$, as soluções mudam do seguinte modo $g \to g$, $a \to a$, $\omega \to -\omega$.

O conjunto de equações (6.29)-(6.31) para $(k_{AF})_\theta = 0$ é similar ao do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs se o coeficiente s da VL faz o papel do parâmetro de Chern-Simons.

6.3 Comportamento Assintótico

Para $r \to 0$, obtemos as soluções das Eqs. (6.29-6.31) usando o método de séries de potências,

$$g(r) \simeq G_n r^n - \frac{G_n\left(e^2v^2 + e\omega_0 s\right)}{4}r^{n+2} \mp \frac{G_n e\omega_0 s(k_{AF})_\theta}{18}r^{n+3} + \ldots \tag{6.32}$$

$$a(r) \simeq n - \frac{\left(e^2v^2 + e\omega_0 s\right)}{2}r^2 \mp \frac{e\omega_0 s(k_{AF})_\theta}{6}r^3 + \ldots \tag{6.33}$$

$$\omega(r) \simeq \omega_0 \pm \frac{\omega_0\left(k_{AF}\right)_\theta}{2}r + \frac{4s\left(ev^2 + \omega_0 s\right) + 3\left[(k_{AF})_\theta\right]^2\omega_0}{16}r^2 + \ldots \tag{6.34}$$

Com isso impomos as seguintes condições de contorno na origem

$$g(0) = 0,\ a(0) = n,\ \omega'(0) = \pm\frac{\omega_0\left(k_{AF}\right)_\theta}{2}. \tag{6.35}$$

Por outro lado, o comportamento assintótico quando $r \to +\infty$, é calculando fazendo a substituição $g = 1 - \delta g$, $a = \delta a$, $\omega = \delta\omega$, onde δg, δa, $\delta\omega$ são funções infinitesimais a serem calculadas. Após substituir essas expressões nas Eqs. (6.29-6.31), obtemos

$$\delta g \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} \ , \ \delta a \sim r^{1/2} e^{-\beta r} \ , \ \ \delta\omega \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} \ , \tag{6.36}$$

onde β um parâmetro real e positivo dado pela seguinte equação

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 8e^2v^2} - \frac{\kappa}{2} \ , \quad \kappa = \sqrt{s^2 + \frac{\left[(k_{AF})_\theta\right]^2}{4}} \pm \frac{(k_{AF})_\theta}{2}. \tag{6.37}$$

Lembrando que o sinal superior (inferior) se refere a $n > 0$ $(n < 0)$. Se $(k_{AF})_\theta = 0$, recuperamos o comportamento assintótico dos vórtices carregados do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Para um s fixo e $n > 0$ a análise do parâmetro β como uma função de $(k_{AF})_\theta$ mostra que os perfis com $(k_{AF})_\theta < 0$ convergem ao valor de saturação mais rapidamente que os perfis com $(k_{AF})_\theta = 0$ (modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs) e estes alcançam os valores assintóticos mais rápido que os perfis com $(k_{AF})_\theta > 0$.

Assim, a equação (6.36) permite estabelecer as seguintes condições de contorno em $r \to \infty$,

$$g(\infty) = 1, \ a(\infty) = 0, \ \omega(\infty) = 0. \tag{6.38}$$

6.4 Soluções numéricas

Agora introduzimos a variável adimensional $\rho = evr$ e implementamos as seguintes mudanças

$$\begin{gathered} g(r) \to \bar{g}(r), \ a(r) \to \bar{a}(\rho), \ \omega(r) \to v\bar{\omega}(\rho), \ B \to ev^2\bar{B}(\rho), \\ (k_{AF})_\theta \to ev\lambda, \ s \to ev\kappa \ , \quad \mathcal{E}_{BPS} \to v^2\bar{\mathcal{E}}_{BPS}. \end{gathered} \tag{6.39}$$

Nas seções seguintes nos referimos a λ como o parâmetro de CFJ e a κ como o parâmetro tipo Chern-Simons.

Consequentemente, a equações (6.29)-(6.31) expressas em forma adimensional resultam ser

$$\bar{g}' = \pm\frac{\bar{a}\bar{g}}{\rho} \, , \tag{6.40}$$

$$\bar{B} = -\frac{\bar{a}'}{\rho} = \pm\left(1 - g^2\right) + \kappa\bar{\omega} \, , \tag{6.41}$$

$$\bar{\omega}'' + \frac{\bar{\omega}'}{\rho} - \kappa\bar{B} \mp \lambda\bar{\omega}' \mp \frac{\lambda}{2}\frac{\bar{\omega}}{\rho} - 2\bar{g}^2\bar{\omega} = 0 \, . \tag{6.42}$$

E a densidade de energia BPS é dada como

$$\bar{\mathcal{E}}_{BPS} = \bar{B}^2 + 2\frac{\bar{a}^2\bar{g}^2}{\rho^2} + 2\bar{g}^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}')^2\,, \tag{6.43}$$

e se mostra positiva-definida para todos os valores de κ e λ.

Os perfis dos vórtices BPS carregados são apresentados nas figuras 6.1 a 6.6. E representam as soluções topológicas para $n = 1, 6, 15$, o parâmetro de CFJ assume os valores $\lambda = -1, 0, +1$, o outro coeficiente da VL (o similar ao parâmetro de Chern-Simons) é fixado em $\kappa = 1$. Para valor $\lambda = 0$ as soluções são exatamente as soluções do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs [29], e são representadas por linhas de cor verde-escuro. As linhas de cor azul representam as soluções para $\lambda = -1$ e as de cor vermelha a soluções com $\lambda = +1$.

A carga topológica ou vorticidade é representada da seguinte maneira: linhas pontilhadas representam $n = 1$, linhas tracejadas para $n = 6$ e linhas sólidas no caso de $n = 15$. De qualquer modo, todas as legendas estão resumidas na Fig. 6.1.

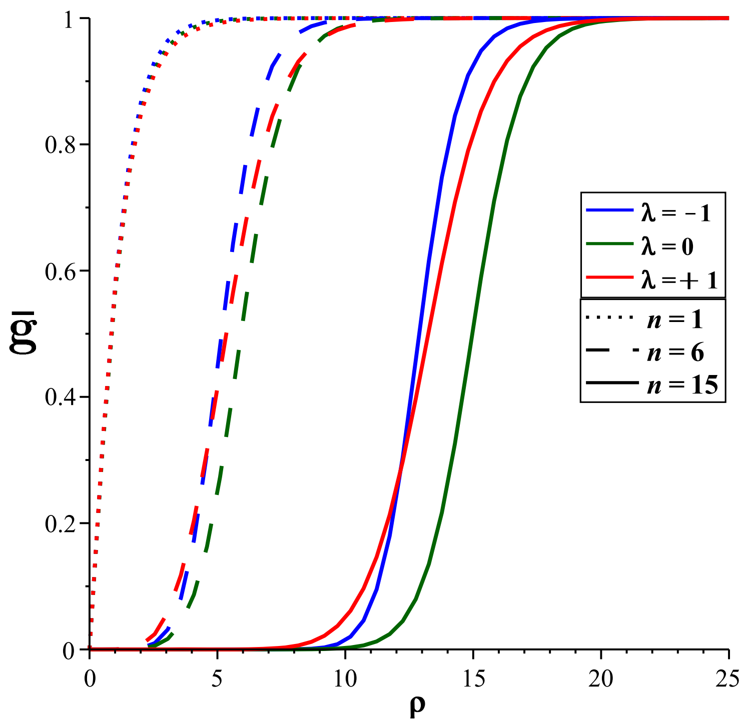


Figura 6.1: Campo de Higgs $\bar{g}(\rho)$.

Para $n = 1$ os gráficos representando o campo $\bar{g}$ são muito similares ao dos correspondentes ao modelo de MCSH. Contudo, as diferenças chegam a ser mais notáveis quando o valor da carga topológica é muito maior que 1. Em geral, os perfis para valores negativos de λ saturam mais rapidamente que aqueles com valores positivos do parâmetro de CFJ de acordo com o estabelecido pela Eq. (6.37).

Os perfis do potencial vetor para $n = 1$ são muito próximos ao do modelo de MCSH ($\lambda = 0$). Mas, as diferenças são mais evidentes para grandes valores de n. Em geral, os perfis para $\lambda < 0$ desenvolvem um anel próximo da origem, isso, indica que o campo magnético apresenta inversão de sinal e, consequentemente, uma inversão localizada do fluxo magnético, como é mostrado explicitamente na Fig. 6.3.

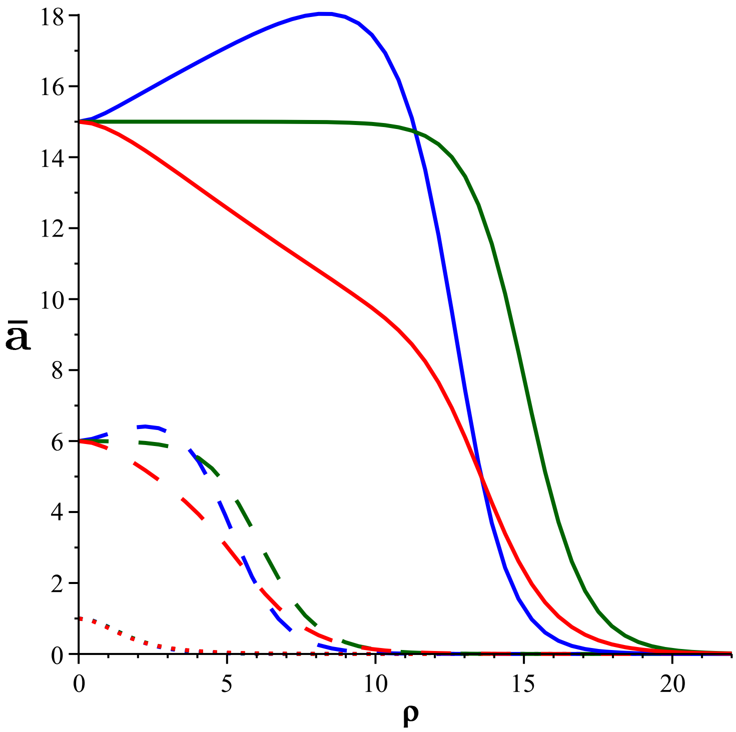


Figura 6.2: Campo vetorial $\bar{a}(\rho)$.

Os perfis do campo magnético para $n = 1$ são semelhantes longe da origem. Na origem, a amplitude é maior para $\lambda > 0$ e a amplitude para $\lambda = 0$ é maior que para $\lambda < 0$. Para $n > 0$ e qualquer valor $\lambda > 0$ os perfis nunca se tornam negativos e formam duas estruturas, a primeira é um fluxo cônico centrado na origem cuja amplitude, em $\rho = 0$ para $n \gg 1$, satura no valor $0,553$; a segunda estrutura é formada longe da origem e forma um anel. Do mesmo modo, para $\lambda < 0$ e, neste caso, $n > 2$, o campo magnético tem va-

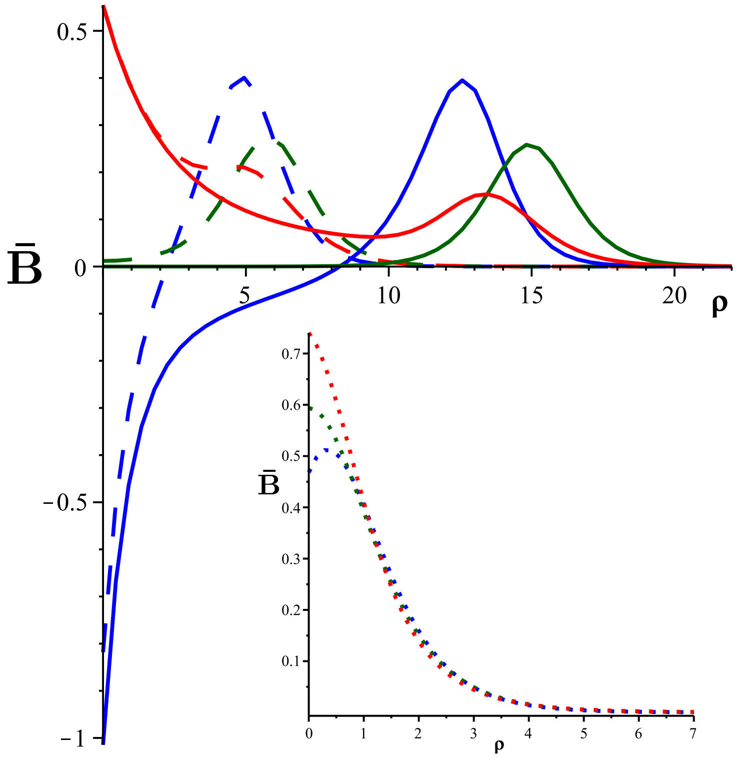


Figura 6.3: Campo magnético $\bar{B}(\rho)$.

lores negativos perto da origem tal que o fluxo magnético forma uma estrutura cônica invertida centrada em $\rho = 0$ cuja amplitude para $n \gg 1$ satura no valor $-1,017$. Contudo, longe da origem, o campo magnético atinge o valor zero, e muda de sinal, isto é, o campo magnético se torna positivo e se anula quando $\rho \to \infty$ formando, também, um anel centrado na origem. Assim, no caso de $\lambda < 0$ e valores de $n \gg 1$, existem dois domínios de fluxo magnético bem definidos, o primeiro é uma região na vizinhança da origem com fluxo negativo e uma segunda região longe da origem com fluxo magnético positivo formando uma estrutura em anel. No entanto, independentemente disso, para $n > 0$, o fluxo magnético total é positivo e proporcional a n.

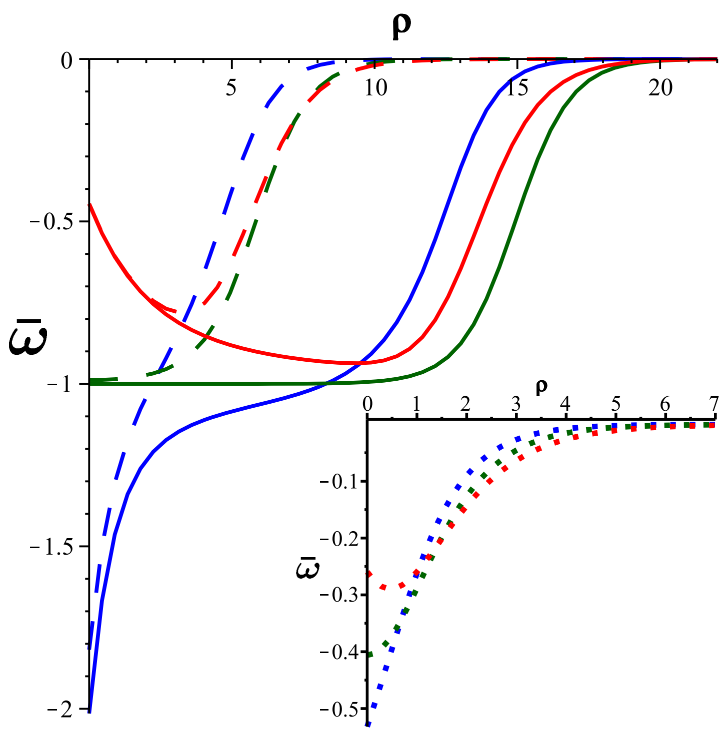


Figura 6.4: Potencial escalar $\bar{\omega}(\rho)$.

O potencial escalar toma valores negativos para qualquer valor de λ e $n > 0$. Para $\lambda < 0$ os perfis perto da origem possuem forma cônica invertida cuja amplitude em $\rho = 0$ satura no valor $-2,017$ quando $n \gg 1$. Por outro lado, os perfis para $\lambda > 0$ perto da origem tem forma cônica cuja amplitude em $r = 0$ satura no valor $-0,446$ quando $n >> 1$. Os perfis para o modelo de MCSH ($\lambda = 0$) saturam sua amplitude em $\rho = 0$ no valor -1 quando $n \gg 1$ e geram para este valor um platô que se afasta da origem até aproximadamente $\rho \sim n-5$. Para $\rho \gg 0$ e $n \gg 1$ os perfis de $\lambda \neq 0$ acompanham o perfil de $\lambda = 0$ mas vão para zero mais rápido tal que o perfil com $\lambda < 0$ decai mais rápido que aquele com $\lambda > 0$.

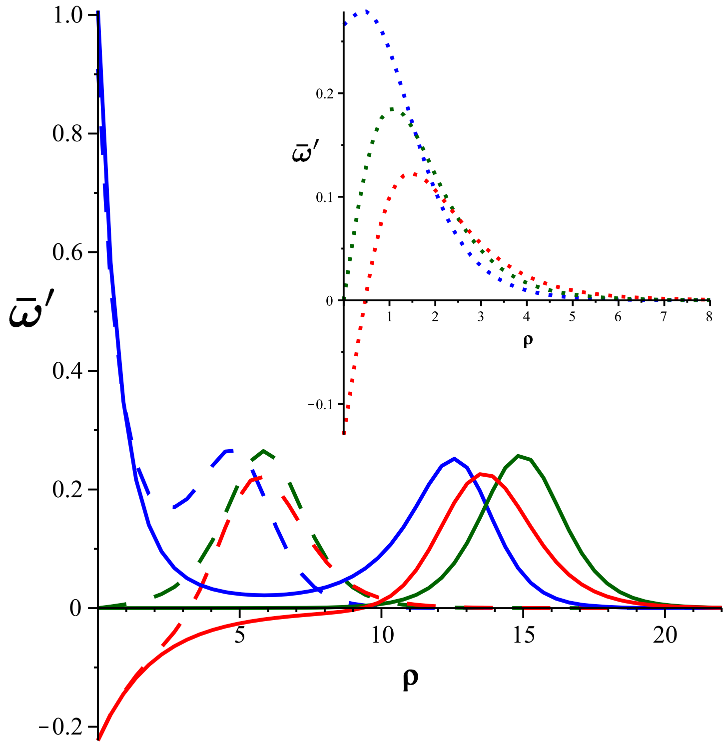


Figura 6.5: Campo elétrico $\bar{\omega}'(\rho)$.

Para $n = 1$ os perfis do campo elétrico são bem diferentes na região perto da origem, em $\rho = 0$ ele é positivo para $\lambda < 0$, nulo para $\lambda = 0$ e negativo para $\lambda > 0$. Para $n > 1$ e $\lambda < 0$ o campo elétrico sempre é positivo e forma uma estrutura cônica estreita centrada na origem cuja amplitude, em $\rho = 0$ para $n \gg 1$, satura no valor 1.008, já longe da origem forma um anel. Do mesmo modo, para $\lambda > 0$, o campo elétrico apresenta valores negativos perto da origem tal que forma uma estrutura cônica invertida centrada em $\rho = 0$ cuja amplitude para $n \gg 1$ satura no valor -0.223. Contudo, longe da origem, o campo elétrico atinge o valor zero, e muda de sinal, isto é, o campo elétrico se torna positivo e se anula quando $\rho \to \infty$ formando, também, um anel centrado na origem. Assim, no caso de $\lambda < 0$ e valores de $n > 1$, existem dois domínios de campo elétrico bem definidos, o primeiro é uma região na vizinhança da origem com campo negativo e uma segunda região longe da origem com campo positivo formando uma estrutura em anel.

A Fig. 6.6 mostra os perfis da densidade de energia BPS. Para $n = 1$ os perfis são "lumps" centrados na origem e com diferentes amplitudes, porém longe da origem os perfis se sobrepõem. Para $n \gg 1$ e $\lambda \neq 0$ o perfil da densidade de energia BPS se localiza em duas regiões bem diferenciadas: a primeira é uma estrutura cônica centrada na origem cuja amplitude para $\lambda > 0$ satura no valor $0,356$ e para $\lambda < 0$ satura no valor $2,052$. Essa forma cônica na origem não esta presente no modelo de MCSH ($\lambda = 0$). A segunda região está localizada longe da origem e forma um anel cujo raio cresce proporcionalmente com n tal como acontece no modelo de MCSH ($\lambda = 0$). Os raios satisfazem a seguinte desigualdade $\rho_{\lambda<0} \lesssim \rho_{\lambda>0} \lesssim \rho_{\lambda=0}$.

Podemos concluir que os vórtices de MCSH na presença de termos que representam a quebra espontânea da simetria de Lorentz apresentam duas regiões onde o campo magnético, o campo elétrico e a densidade de energia se localizam. A primeira é uma região na vizinhança da origem de forma cônica e uma segunda região longe da origem formando um anel centrado na origem.

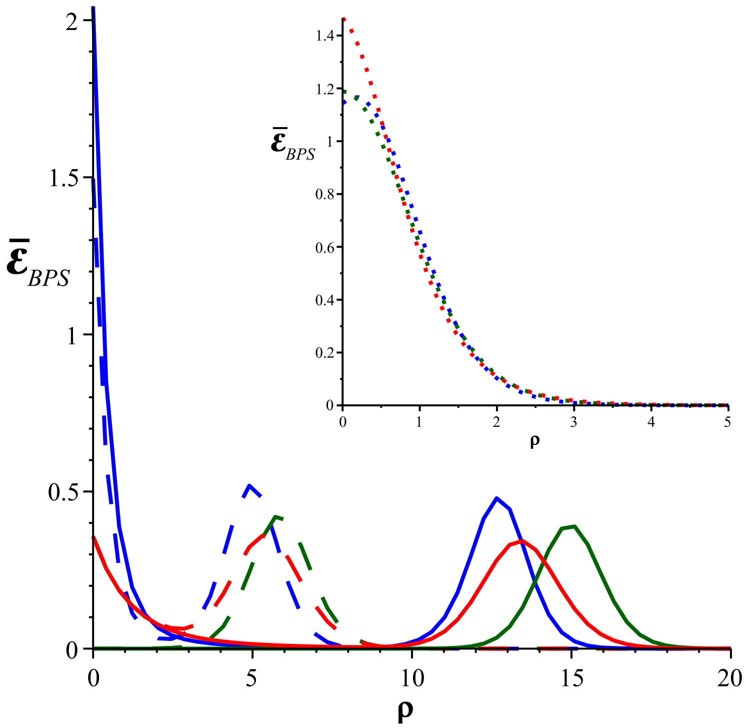


Figura 6.6: Densidade de energia BPS $\bar{\mathcal{E}}_{BPS}(\rho)$.

CAPÍTULO 7

Conclusões e observações

A dissertação estuda a existência de vórtices topológicos na redução dimensional da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs. Percebemos que este novo modelo é uma versão modificada do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH), com o coeficiente da violação de Lorentz $s = (k_{AF})_{\hat{3}}$ fazendo o papel do parâmetro de Chern-Simons. A modificação é representada por uma nova interação, entre o campo escalar neutro $\psi = A_{\hat{3}}$ e o campo de calibre A_μ, controlada pelo campo de fundo $(k_{AF})_\mu$, sendo este a versão (1+2)-dimensional do campo de fundo de Carroll-Field-Jackiw. Devido à presença de um termo tipo Chern-Simons este modelo suporta configurações de vórtices portadores de carga elétrica.

Aplicando o formalismo BPS à energia estacionaria do modelo, mostramos que as equações BPS são as mesmas que as do modelo de MCSH, a diferença aparece na lei de Gauss dos modelos. A lei de Gauss de nosso modelo é aquela de MCSH modificada por termos contendo campo de fundo $(k_{AF})_\mu$. Desse modo, fazendo $(k_{AF})_\mu = 0$ obtemos completamente o conjunto de equações satisfeitas pelos vórtices do modelo de MCSH.

A analise do comportamento na origem mostra que os vórtices apresentam campo elétrico não nulo na origem, dependendo explicitamente no parâmetro de CFJ $(k_{AF})_\theta$ [vide Eq. (6.35)], o que contrasta como o modelo de MCSH [vide Eq. (5.33)]. Por outro lado, no infinito as soluções mostram o decaimento exponencial (próprio dos vórtices de Abrikosov) similar àquelas do modelo de MCSH, com parâmetro de Chern-Simons dependendo dos coeficientes da quebra de Lorentz, s e $(k_{AF})_\theta$ [vide Eq. (6.37)].

A influencia do coeficiente de Carroll-Field-Jackiw, ($(k_{AF})_\theta$ ou λ na versão adimensional, nos perfis dos vórtices é notória nos campos magnético e elétrico e na densidade de energia BPS. Devido à influencia da quebra espontânea da simetria de Lorentz, as soluções topológicas apresentam duas regiões onde o campo magnético, o campo elétrico e a densidade de energia se localizam. A primeira é uma região na vizinhança da origem de forma cônica e uma segunda região longe da origem formando um anel centrado na origem que corresponde a um comportamento tipo daqueles do modelo de MCSH. Em detalhe, se as magnitudes dos coeficientes ($(k_{AF})_\theta$ e s são da mesma ordem de grandeza, podemos dizer, que para $n \gg 1$, o primeiro controla o comportamento dos vórtices na vizinhança do origem de coordenadas e, o segundo predomina no comportamento das soluções topológicas quando $r \gg 0$.

Entre as perspectivas futuras podemos citar a possibilidade de estudar os efeitos da violação de Lorentz em defeitos topológicos no contexto de teorias de campo não abelianas.

APÊNDICE A

Modelo de Maxwell-Higgs

A.1 Cálculo do potencial

A obtenção do potencial para o modelo MH é feito a partir da relação de auto-dualidade

$$D_{\pm}\phi = 0, \tag{A.1}$$

onde essa condição nos fornece a seguinte equação

$$g' = \pm\frac{ag}{r}. \tag{A.2}$$

Derivando, obtemos

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = \pm\frac{a' g}{r}, \tag{A.3}$$

e igualando com a equação para o campo de Higgs $g\left(r\right)$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = \frac{1}{2v^2}\frac{\partial V}{\partial g}, \tag{A.4}$$

obtemos

$$\frac{a' g}{r} = \pm\frac{1}{2v^2}\frac{\partial V}{\partial g}. \tag{A.5}$$

Da Lei de Ampère, temos que

$$\left(\frac{a'}{r}\right)' = \pm e^2 v^2 \left(g^2\right)', \tag{A.6}$$

e resolvendo para r, chegamos a

$$\frac{a'g}{r} = \pm e^2 v^2 g^3 + C_1 g. \tag{A.7}$$

Em seguida, igualamos a Eq.(A.5) com a Eq.(A.7), nos fornecendo a seguinte expressão

$$V(g) = \frac{1}{2} e^2 v^4 g^4 \pm v^2 C_1 g^2 + C_2. \tag{A.8}$$

Para escrevermos o potencial em termos quadráticos, faremos as seguintes escolhas para as constantes

$$C_1 = \mp e^2 v^2, \; C_2 = \frac{e^2 v^4}{2}, \tag{A.9}$$

assim, o potencial será dado por

$$V(g) = \frac{1}{2} e^2 v^4 \left(1 - g^2\right)^2.$$

Em termos do campo de Higgs, o potencial tem a seguinte forma

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}\left(ev^2 - e|\phi|^2\right)^2. \tag{A.10}$$

A.2 Cálculo da densidade de energia

A densidade de energia estacionária do modelo de Maxwell-Higgs abeliano é obtida a partir da relação

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}, \tag{A.11}$$

onde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|). \tag{A.12}$$

Agora, calculamos cada componente da lagrangiana

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + 2B^2. \tag{A.13}$$

Com isso, nossa lagrangiana expressa em termos das expansões, é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + |D_0 \phi|^2 - |D_i \phi|^2 - V(|\phi|). \tag{A.14}$$

Considerando soluções estáticas e lembrando que este modelo suporta configurações de vórtices descarregados, o que implica na seguinte condição de gauge $A_0 = 0$, teremos portanto $D_0\phi = 0$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}B^2 - |D_i\phi|^2 - V(|\phi|),$$

assim, obtemos para a densidade de energia

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{B^2}{2} + |D_i\phi|^2 + V(|\phi|). \tag{A.15}$$

O próximo passo é substituir o potencial obtido na seção anterior na densidade de energia

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}\left[ev^2 - e|\phi|^2\right]^2, \tag{A.16}$$

onde obtemos a seguinte expressão

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{B^2}{2} + |D_i\phi|^2 + \frac{1}{2}\left[ev^2 - e|\phi|^2\right]^2. \tag{A.17}$$

Para obtermos as equações BPS, devemos escrever a densidade de energia em termos quadráticos

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{1}{2}\left[B \mp \sqrt{2V}\right]^2 \pm B\left(\sqrt{2V} + e|\phi|^2\right) + |D_\pm\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j, \tag{A.18}$$

onde

$$|D_i\phi|^2 = |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j. \tag{A.19}$$

Feito as substituições na Eq. (A.18), obtemos

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e|\phi|^2\right]\right]^2 \pm Bev^2 + |D_\pm\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j. \tag{A.20}$$

Impondo as condições BPS, teremos

$$B \mp \left[ev^2 - e|\phi|^2\right] = 0, \;\; D_\pm\phi = 0, \tag{A.21}$$

dessa forma teremos

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm ev^2 B + \partial_i \mathcal{J}_j, \tag{A.22}$$

onde

$$\partial_i \mathcal{J}_j = \pm\frac{1}{2}\epsilon^{ij}J_j = \pm v^2\frac{(ag^2)'}{r}. \tag{A.23}$$

Com isso, a densidade de energia é dada por

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm ev^2 B \pm v^2\frac{(ag^2)'}{r}. \tag{A.24}$$

Substituindo a expressão do campo magnético e a condição de autodualidade na Eq. (A.23), obtemos

$$\pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} = \pm v^2 \frac{a'}{r} g^2 \pm v^2 \frac{2agg'}{r} = \mp e v^2 B g^2 + 2v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2}, \tag{A.25}$$

e portanto, chegamos à expressão para a densidade de energia para o modelo de Maxwell-Higgs abeliano

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2}, \tag{A.26}$$

que é definida-positiva.

APÊNDICE B

Modelo de Chern-Simons-Higgs

B.1 Cálculo do potencial

Partimos da equação de autodualidade

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \tag{B.1}$$

após derivar uma vez obtemos

$$g'' = \pm \frac{a'g}{r} \pm \frac{ag'}{r} \mp \frac{ag}{r^2} = \pm \frac{a'g}{r} + \frac{a^2 g}{r^2} - \frac{g'}{r} \tag{B.2}$$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = \pm \frac{a'g}{r}. \tag{B.3}$$

Lembrando a equação de movimento para o campo de Higgs,

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2}{r^2} g = \frac{1}{2v^2} \frac{\partial V}{\partial g} - e^2 \omega^2 g, \tag{B.4}$$

ela pode ser reescrita usando a Eq. (B.3) de tal modo que fornece uma equação diferencial para o potencial V

$$\frac{1}{2v^2} \frac{\partial V}{\partial g} = \pm \frac{a'g}{r} + e^2 \omega^2 g. \tag{B.5}$$

Agora, usamos a autodualidade (B.1) na Lei de Ampère, obtemos

$$\kappa\omega' = -\frac{2aev^2g^2}{r}, \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned} \kappa\omega' &= \mp 2ev^2 g g', \\ \kappa\omega' &= \mp ev^2 \left(g^2\right)', \end{aligned} \tag{B.7}$$

cuja integração fornece ω em termos de g :

$$\omega = \mp\frac{ev^2g^2}{\kappa} + \frac{C_1}{\kappa}. \tag{B.8}$$

A substituição de ω na lei de Gauss fornece a importante relação

$$\frac{a'}{r} = \pm\frac{2e^4v^4g^4}{\kappa^2} - \frac{2e^3v^2g^2C_1}{\kappa^2}, \tag{B.9}$$

com a qual obtemos

$$\frac{a'g}{r} = \pm\frac{2e^4v^4g^5}{\kappa^2} - \frac{2e^3v^2g^3C_1}{\kappa^2}. \tag{B.10}$$

Esta última equação é substituida em (B.5)

$$\frac{1}{2v^2}\frac{\partial V}{\partial g} = \frac{2e^4v^4g^5}{\kappa^2} \mp \frac{2e^3v^2g^3C_1}{\kappa^2} + \frac{e^4v^4g^5}{\kappa^2} \mp \frac{2e^3v^2g^3C_1}{\kappa^2} + \frac{e^2\left(C_1\right)^2g}{\kappa^2}, \tag{B.11}$$

cuja integração proporciona o potencial BPS do modelo

$$\frac{1}{2v^2}V = \frac{e^4v^4g^6}{2\kappa^2} \mp \frac{e^3v^2g^4C_1}{\kappa^2} + \frac{e^2\left(C_1\right)^2g^2}{2\kappa^2} + C_2, \tag{B.12}$$

ou

$$V = \frac{e^4v^6}{\kappa^2}g^2\left(\pm\frac{C_1}{ev^2} - g^2\right)^2 + C_2. \tag{B.13}$$

As constantes são fixada segundo a escolha

$$C_1 = \pm ev^2, C_2 = 0, \tag{B.14}$$

desse modo, o potencial BPS é

$$V\left(g\right) = \frac{e^4v^6g^2}{\kappa^2}\left(1 - g^2\right)^2, \tag{B.15}$$

ou em termos do campo ϕ,

$$V\left(|\phi|\right) = \frac{e^2\left|\phi\right|^2}{\kappa^2}\left(ev^2 - e\left|\phi\right|^2\right)^2. \tag{B.16}$$

APÊNDICE C

Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

C.1 Cálculo do potencial

O potencial que nos permitirá obter configurações de vórtices no modelo MCSH, será calculado a partir da relação de auto-dualidade

$$g' = \pm \frac{ag}{r}. \tag{C.1}$$

Derivando a equação anterior, obtemos a seguinte equação

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = \pm \frac{a' g}{r}. \tag{C.2}$$

Igualando (C.2) com a equação para o campo $g\,(r)$,

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2}{r^2} g = \frac{1}{2v^2} \frac{dV}{dg} - e^2 \omega^2 g, \tag{C.3}$$

chegamos a seguinte equação

$$\frac{a' g}{r} = \pm \frac{1}{2v^2} \frac{\partial V}{\partial g} \mp e^2 \omega^2 g. \tag{C.4}$$

Substituindo a Eq. (C.1) na lei de Ampère obtemos

$$\frac{a' g}{r} = \pm e^2 v^2 g^3 - \kappa e g \omega + C_1 g. \tag{C.5}$$

Igualando os termos das Eqs. (C.4) e (C.5), chegamos a seguinte expressão

$$V = \frac{1}{2}e^2v^4g^4 \mp v^2\kappa e\omega g^2 + v^2e^2\omega^2g^2 \pm v^2C_1g^2 + C_2. \tag{C.6}$$

As constantes de integração devem ser escolhidas de forma a escrever o potencial como um quadrado perfeito, e para isso, escolhemos para a constante C_1

$$C_1 = \mp e^2v^2, \tag{C.7}$$

onde obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}e^2v^4\left(1-g^2\right)^2 \pm ev^2\left(1-g^2\right)\kappa\omega + \frac{1}{2}\left(\kappa\omega\right)^2 + v^2e^2\omega^2g^2 + C_2 \\ &\quad -\frac{e^2v^4}{2} \mp ev^2\kappa\omega - \frac{1}{2}\left(\kappa\omega\right)^2. \end{aligned} \tag{C.8}$$

Com isso, podemos fazer a seguinte escolha para a constante C_2

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[ev^2 \pm \kappa\omega\right]^2, \tag{C.9}$$

e o potencial é reduzido à seguinte forma

$$V = \frac{1}{2}\left[ev^2\left(1-g^2\right) \pm \kappa\omega\right]^2 + e^2v^2\omega^2g^2. \tag{C.10}$$

Da condição entre o campo neutro N e o campo escalar ω, obtida a partir das equações BPS,

$$N = \mp\omega, \tag{C.11}$$

chegamos a expressão para o potencial do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs

$$V = \frac{1}{2}\left[ev^2 - e\left|\phi\right|^2 - \kappa N\right]^2 + e^2N^2\left|\phi\right|^2. \tag{C.12}$$

C.2 Cálculo da densidade de energia

A densidade de energia estacionária para o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs será obtido a partir da relação

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}. \tag{C.13}$$

Primeiro, vamos explicitar os termos da lagrangiana em regime estacionário, onde obtemos

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\left(\partial_iA_0\right)^2 + 2B^2, \tag{C.14}$$

$$\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_{\mu}F_{\nu\kappa}=\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_iA_j+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_jA_0, \tag{C.15}$$

$$|D_{\mu}\phi|^2=e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2+|D_i\phi|^2, \tag{C.16}$$

$$\frac{1}{2}\partial_{\mu}N\,\partial^{\mu}N=\frac{1}{2}\partial_iN\,\partial^iN, \tag{C.17}$$

e com isso, reescrevemos a lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_iA_0\right)^2-\frac{1}{2}B^2+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_iA_j+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_jA_0+e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2 \\ &-|D_i\phi|^2-\frac{1}{2}\partial_iN\,\partial_iN-V\left(|\phi|,N\right).\end{aligned} \tag{C.18}$$

Em seguida, inserimos a lei de Gauss na expressão

$$-\frac{1}{2}A_0\partial_i\partial_iA_0+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_iA_j=-e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2, \tag{C.19}$$

obtendo a equação

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_iA_0\right)^2-\frac{1}{2}B^2+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_jA_0+\frac{1}{2}A_0\partial_i\partial_iA_0 \\ &-|D_i\phi|^2-\frac{1}{2}\partial_iN\,\partial_iN-V\left(|\phi|,N\right).\end{aligned} \tag{C.20}$$

Reescrevemos o termo abaixo como uma derivada total

$$\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_jA_0=\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_iA_0\right)+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_iA_j, \tag{C.21}$$

assim, a lagrangiana fica expressa como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_iA_0\right)^2-\frac{1}{2}B^2+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_iA_0\right)+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_iA_j+\frac{1}{2}A_0\partial_i\partial_iA_0-|D_i\phi|^2 \\ &-\frac{1}{2}\partial_iN\,\partial_iN-V\left(|\phi|,N\right).\end{aligned} \tag{C.22}$$

Novamente, substituindo a lei de Gauss na equação, chegamos à expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_iA_0\right)^2-\frac{1}{2}B^2+\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_iA_0\right)-e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2+A_0\partial_i\partial_iA_0-|D_i\phi|^2 \\ &-\frac{1}{2}\partial_iN\,\partial_iN-V\left(|\phi|,N\right),\end{aligned} \tag{C.23}$$

e com a derivada total

$$A_0\partial_i\partial_iA_0=\partial_i\left(A_0\partial_iA_0\right)-\partial_iA_0\partial_iA_0, \tag{C.24}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\kappa\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_i A_0\right) - e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2 + \partial_i\left(A_0\partial_i A_0\right) - |D_i\phi|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_i N\,\partial_i N - V\left(|\phi|, N\right). \qquad \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

Os termos de derivada total se anulam, e com isso, chegamos a expressão para a densidade de energia

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 + \frac{B^2}{2} + e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2 + D_i\phi\,\overline{D_i\phi} + \frac{1}{2}\left(\partial_i N\right)^2 + V\left(|\phi|, N\right). \qquad \text{(C.26)}$$

Inserindo o potencial na expressão anterior, podemos reescrevê-la em termos quadráticos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa N\right]\right]^2 \pm B\left[ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa N\right] + \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \mp \partial_i N\right]^2 \\
&\quad \pm\left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i N\right) + |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + e^2|\phi|^2\left[A_0 \mp N\right]^2 \pm 2e^2|\phi|^2 A_0 N, \qquad \text{(C.27)}
\end{aligned}$$

onde obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e|\phi|^2 + \kappa N\right]\right]^2 \pm Bev^2 \pm \kappa BN + \frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \mp \partial_i N\right]^2 \\
&\quad \pm\left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i N\right) + |D_\pm\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + e^2|\phi|^2\left[A_0 \mp N\right]^2 \pm 2e^2|\phi|^2 A_0 N. \qquad \text{(C.28)}
\end{aligned}$$

Impondo as condições BPS, teremos

$$B \mp \left[ev^2 - e|\phi|^2 + \kappa N\right] = 0,$$

$$D_\pm\phi = 0, \qquad \text{(C.29)}$$

$$\partial_i A_0 \mp \partial_i N = 0, \qquad \text{(C.30)}$$

$$A_0 \mp N = 0. \qquad \text{(C.31)}$$

A última equação representa a condição entre o campo neutro e o potencial escalar, que garante a existência das equações BPS. Dessa forma, substituindo na Eq. (C.28), obtemos

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm Bev^2 + \kappa BA_0 + \partial_i A_0\partial_i A_0 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j + 2e^2|\phi|^2 A_0^2. \qquad \text{(C.32)}$$

Inserindo a lei de Gauss na expressão anterior, obtém-se

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm ev^2 B + \partial_i\mathcal{J}_i, \qquad \text{(C.33)}$$

onde

$$\mathcal{J}_i = \pm\frac{1}{2}\epsilon^{ij}J_j + A_0\partial_i A_0.$$

Expressamos a densidade de energia BPS em termos do ansatz

$$\partial_i \mathcal{J}_j = \pm v^2\frac{\left(ag^2\right)'}{r} + \frac{\left(r\omega\omega'\right)'}{r}, \tag{C.34}$$

e portanto,

$$\mathcal{H} = \pm ev^2 B\left(1-g^2\right) + 2v^2\frac{a^2g^2}{r^2} + \frac{\left(r\omega\omega'\right)'}{r}. \tag{C.35}$$

Pela lei de Gauss, o segundo termo pode ser expresso como

$$\frac{\left(r\omega\omega'\right)'}{r} = \frac{\omega\omega'}{r} + \omega\omega'' + \left(\omega'\right)^2 = \kappa\omega B + 2e^2v^2g^2\omega^2 + \left(\omega'\right)^2. \tag{C.36}$$

Assim,

$$\mathcal{H} = \pm ev^2 B\left(1-g^2\right) + \kappa B\omega + 2v^2\frac{a^2g^2}{r^2} + 2e^2v^2g^2\omega^2 + \left(\omega'\right)^2, \tag{C.37}$$

finalmente, a densidade de energia do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é expresso pela equação

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2\left(\frac{ag}{r}\right)^2 + 2e^2v^2g^2\omega^2 + \left(\omega'\right)^2, \tag{C.38}$$

que resulta definida-positiva.

APÊNDICE D

Modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs Reduzido

Nosso estudo envolvendo vórtices no modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs, consiste na redução dimensional do modelo definido pela lagrangiana em $(1+3)$-dimensões

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{4}\epsilon_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}\left(k_{AF}\right)_{\bar{\mu}}A_{\bar{\nu}}F_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}} + \left|D_{\bar{\mu}}\phi\right|^2 - V\left(|\phi|\right), \tag{D.1}$$

onde o índice grego $\bar{\mu}$ varia de 0 a 3, $D_{\bar{\mu}} = \partial_{\bar{\mu}} - ieA_{\bar{\mu}}$ representando a derivada covariante $\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$ é o símbolo de Levi-Civita em 4 dimensões. Este procedimento consiste efetivamente em adotar a seguinte regra: mantém-se inalterados as componentes temporal e as duas primeiras componentes espaciais; congela-se a terceira componente espacial dando-lhe um caracter escalar, separando-o do novo vetor definido em $(1+2)$-D do novo sistema χ, exigindo que o novo sistema não dependa da terceira componente, ou seja,

$$\partial_3\chi \to 0. \tag{D.2}$$

Aplicamos estas regras, no campo de gauge definido em $(1+3)$-dimensões, nos conduz a

$$A^{\bar{\mu}} = \left(A^{\mu}, \psi\right), \tag{D.3}$$

onde $A^{\bar{3}} = \psi$ agora é um escalar e o novo índice μ varia de 0 a 2. O mesmo procedimento para o campo de fundo de CFJ, responsável pela violação de Lorentz, obtemos

$$\left(k_{AF}\right)^{\bar{\mu}} = \left(\left(k_{AF}\right)^{\mu}, s\right), \tag{D.4}$$

onde $(k_{AF})^{\bar{3}} = s$. O próximo passo é realizar a redução dimensional da lagrangiana (D.1), iniciando pelo termo cinético $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$:

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi,$$

onde $F_{\mu\bar{3}} = -\partial_\mu\psi$ e $F^{\mu\bar{3}} = \partial^\mu\psi$. Em seguida, repetimos para o termo $\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}V_{\bar{\mu}}A_{\bar{\nu}}F_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}}$:

$$\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}\left(k_{AF}\right)_{\bar{\mu}}A_{\bar{\nu}}F_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = -2\epsilon^{3\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa 3} - \epsilon^{3\mu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\mu}A_{3}F_{\kappa\lambda} + \epsilon^{\bar{3}\nu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\bar{3}}A_{\nu}F_{\kappa\lambda},$$

onde eliminamos o termo $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}V_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$ pelo fato de $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ possuir índices repetidos. Substituindo as prescrições definidas para $A^{\bar{\mu}}$ e $V^{\bar{\mu}}$, obtemos

$$\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\kappa}\bar{\lambda}}\left(k_{AF}\right)_{\bar{\mu}}A_{\bar{\nu}}F_{\bar{\kappa}\bar{\lambda}} = 2\epsilon^{\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_{\mu}A_{\nu}\partial_\kappa\psi + \psi\epsilon^{\mu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\mu}F_{\kappa\lambda} - s\epsilon^{\nu\kappa\lambda}A_\nu F_{\kappa\lambda}. \tag{D.5}$$

Por último, aplicamos o procedimento para o setor de Higgs,

$$\left|D_{\bar{\mu}}\phi\right|^2 = \left|D_\mu\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2. \tag{D.6}$$

Então, a lagrangiana do modelo reduzido de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs definido em $(1+2)$-dimensões é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}s\epsilon^{\nu\kappa\lambda}A_\nu F_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}\psi\epsilon^{\mu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_\mu\partial_\kappa A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\nu}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\nu\partial_\kappa\psi \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \left|D_\mu\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 - V\left(\left|\phi\right|\right).\end{aligned} \tag{D.7}$$

D.1 Cálculo do potencial

Para calcularmos o potencial que nos permitirá obter configurações de vórtices no modelo abeliano Higgs com violação de Lorentz, partiremos, primeiramente, da relação de autodualidade

$$g' = \pm\frac{ag}{r}. \tag{D.8}$$

Do mesmo modo que feito para o modelo MCSH, chegamos a seguinte expressão

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2g}{r^2} = \pm\frac{a'g}{r}. \tag{D.9}$$

Igualando a expressão com a expressão para o campo de Higgs $g\left(r\right)$

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2}{r^2}g = \frac{1}{2v^2}\frac{\partial V}{\partial g} + e^2\psi^2 g - e^2\omega^2 g \tag{D.10}$$

obtemos

$$\frac{a'g}{r}=\pm\frac{1}{2v^2}\frac{\partial V}{\partial g}\pm e^2\psi^2 g\mp e^2\omega^2 g. \tag{D.11}$$

Em seguida, substituindo a relação (D.8) na lei de Ampère,

$$\left(\frac{a'}{r}\right)'=\pm e^2v^2\left(g^2\right)'+e\left(k_{AF}\right)_0\frac{d\psi}{dr}-se\omega', \tag{D.12}$$

e resolvendo para r, obtemos

$$\frac{a'}{r}=\pm e^2v^2g^2+e\left(k_{AF}\right)_0\psi-se\omega+C_1. \tag{D.13}$$

Igualando (D.11) com (D.13) e resolvendo novamente para r , teremos

$$V=\frac{1}{2}e^2v^4g^4\pm v^2e\left(k_{AF}\right)_0\psi g^2\mp v^2se\omega g^2+v^2e^2\omega^2g^2-v^2e^2\psi^2g^2\pm v^2C_1g^2+C_2. \tag{D.14}$$

As constantes serão escolhidas de modo a escrever o potencial em termos quadráticos. A primeira escolha fixa C_1,

$$C_1=\mp e^2v^2, \tag{D.15}$$

cuja substituição no potencial (D.14) permite escrever

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\left\{ev^2\left(1-g^2\right)\pm\left[s\omega-\left(k_{AF}\right)_0\psi\right]\right\}^2+e^2v^2\omega^2g^2-e^2v^2\psi^2g^2 \\ &\quad +C_2-\frac{1}{2}\left\{ev^2\pm\left[s\omega-\left(k_{AF}\right)_0\psi\right]\right\}^2. \end{aligned} \tag{D.16}$$

A constante C_2 é fixada

$$C_2=\frac{1}{2}\left[ev^2\pm\left[s\omega-\left(k_{AF}\right)_0\psi\right]\right]^2, \tag{D.17}$$

desse modo, o potencial (D.16) resulta ser

$$V=\frac{1}{2}\left[ev^2\left(1-g^2\right)\pm\left[s\omega-\left(k_{AF}\right)_0\psi\right]\right]^2+e^2v^2\omega^2g^2-e^2v^2\psi^2g^2. \tag{D.18}$$

Ou em termos dos campos originais

$$V=\frac{1}{2}\left[e\left(v^2-|\phi|^2\right)\pm\left[sA_0-\left(k_{AF}\right)_0\psi\right]\right]^2+e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2-e^2\psi^2|\phi|^2, \tag{D.19}$$

A escolha da condição BPS

$$A_0=\mp\psi, \tag{D.20}$$

estabelece a forma do potencial do modelo

$$V=\frac{1}{2}\left[ev^2-e|\phi|^2-\left[s\pm\left(k_{AF}\right)_0\right]\psi\right]^2.$$

D.2 Cálculo da densidade de energia

A densidade de energia estacionária para o modelo de MCFJH é obtido a partir da expressão

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}. \tag{D.21}$$

Iniciaremos explicitando cada termo da lagrangiana,

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -2\left(\partial_i A_0\right)^2 + 2B^2, \tag{D.22}$$

$$\left|D_\mu \phi\right|^2 = e^2\left(A_0\right)^2\left|\phi\right|^2 - \left|D_i\phi\right|^2, \tag{D.23}$$

$$\frac{s}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu A_\kappa = \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_i A_j + \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_j A_0, \tag{D.24}$$

$$\psi\epsilon^{\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_\mu\partial_\nu A_\kappa = \psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0\partial_i A_j + \psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j A_0, \tag{D.25}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\kappa}\left(k_{AF}\right)_\mu A_\kappa\partial_\nu\psi = \epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_j\partial_i\psi + \epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i A_0\partial_j\psi, \tag{D.26}$$

em seguida, inserindo os termos obtidos na lagrangiana,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_i A_j + \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_j A_0 - \frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0\partial_i A_j \\ & -\frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j A_0 + \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_j\partial_i\psi + \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i A_0\partial_j\psi \\ & -\frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi + e^2\left(A_0\right)^2\left|\phi\right|^2 - \left|D_i\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 - V(\left|\phi\right|^2, \psi).\end{aligned} \tag{D.27}$$

Substituindo a lei de Gauss na equação obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_j A_0 - \frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0\partial_i A_j \\ & -\frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j A_0 - \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_j\partial_i\psi - \frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi \\ & +\frac{1}{2}A_0\partial_i\partial_i A_0 - \left|D_i\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 - V\left(\left|\phi\right|^2, \psi\right).\end{aligned} \tag{D.28}$$

Reescrevemos os seguintes termos como uma derivada total

$$\frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_i\partial_j A_0 \;=\; \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_i A_0\right) - \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_j A_i, \tag{D.29}$$

$$\frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j A_0 \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j\left(\psi A_0\right) - \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i A_0\partial_j\psi, \tag{D.30}$$

e inserindo na Eq. (D.28), ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_i A_0\right) + \frac{s}{2}\epsilon^{0ji}A_0\partial_j A_i - \frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0\partial_i A_j \\ & -\frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j\left(\psi A_0\right) + \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i A_0\partial_j\psi - \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_i\partial_j\psi \\ & -\frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi + \frac{1}{2}A_0\partial_i\partial_i A_0 - \left|D_i\phi\right|^2 - e^2\psi^2\left|\phi\right|^2 - V\left(\left|\phi\right|^2, \psi\right).\end{aligned} \tag{D.31}$$

Da lei de Gauss, temos que

$$\frac{s}{2}\epsilon^{0ij}A_0\partial_i A_j + \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}A_0\left(k_{AF}\right)_i\partial_j\psi = -e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}A_0\partial_i\partial_i A_0, \tag{D.32}$$

e assim, a Eq. (D.31) fica expressa como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{s}{2}\epsilon^{0ij}\partial_j\left(A_i A_0\right) - e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}\psi\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0\partial_i A_j \\ & -\frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_i\partial_j\left(\psi A_0\right) - \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_i\partial_j\psi \\ & -\frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi + A_0\partial_i\partial_i A_0 - |D_i\phi|^2 - e^2\psi^2|\phi|^2 - V\left(|\phi|^2,\psi\right).\end{aligned} \tag{D.33}$$

Na equação anterior, os termos de derivada total se cancelam e, da relação (D.21), chegamos a expressão para à densidade de energia

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \;=\;& \frac{1}{2}\left(\partial_i A_0\right)^2 + \frac{1}{2}B^2 + e^2\left(A_0\right)^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}\psi\left(k_{AF}\right)_0 B \\ & +\frac{1}{2}\epsilon^{ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_i\partial_j\psi + \frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi + |D_i\phi|^2 + e^2\psi^2|\phi|^2 + V\left(|\phi|^2,\psi\right).\end{aligned} \tag{D.34}$$

O próximo passo é implementar o formalismo BPS para obter as equações de primeira ordem que minimizam a energia total. Para isso, devemos reescrever a Eq. (D.34) em termos quadráticos

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \;=\;& \frac{1}{2}\left[B \mp \left[ev^2 - e|\phi|^2 - \left[s \pm \left(k_{AF}\right)_0\right]\psi\right]\right]^2 \pm B\left[ev^2 - e|\phi|^2 - s\psi \mp \left(k_{AF}\right)_0\psi\right] \\ & +\frac{1}{2}\left[\partial_i A_0 \pm \partial_i\psi\right]^2 \mp \left(\partial_i A_0\right)\left(\partial_i\psi\right) + |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j \\ & +e^2|\phi|^2\left[\psi \pm A_0\right]^2 \mp 2e^2|\phi|^2 A_0\psi + \frac{1}{2}\left(k_{AF}\right)_0\psi B + \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\left(k_{AF}\right)_0 A_i\partial_j\psi.\end{aligned} \tag{D.35}$$

A condição de mínima energia será obtido quando os termos quadráticos se anularem, ou seja,

$$B = \pm\left[ev^2 - e|\phi|^2 - \left[s \pm \left(k_{AF}\right)_0\right]\psi\right], \tag{D.36}$$

$$\partial_i\psi \pm \partial_i A_0 = 0, \tag{D.37}$$

$$\psi \pm A_0 = 0, \tag{D.38}$$

$$D_\pm\phi = 0. \tag{D.39}$$

A segunda e a terceira equação acima são saturadas se impormos

$$\psi = \mp A_0.$$

As equações BPS são reescritas

$$D_{\pm}\phi = 0, \tag{D.40}$$

$$B = \pm e\left(v^2 - |\phi|^2\right) + \left[s \pm (k_{AF})_0\right] A_0, \tag{D.41}$$

e a densidade de energia BPS adquire a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{BPS} &= \pm e v^2 B + \left[s \pm (k_{AF})_0\right] B A_0 + (\partial_i A_0)(\partial_i A_0) \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j \\ &\quad + 2e^2 |\phi|^2 (A_0)^2 \mp \frac{1}{2} A_0 (k_{AF})_0 B \mp \frac{1}{2}\epsilon^{ij} (k_{AF})_0 A_i \partial_j A_0. \end{aligned} \tag{D.42}$$

$$\frac{1}{2}\epsilon^{ij} (k_{AF})_0 A_i \partial_j A_0 = \frac{1}{2}\epsilon^{ij} (k_{AF})_0 \partial_j (A_i A_0) + \frac{1}{2} A_0 (k_{AF})_0 B$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{BPS} &= \pm e v^2 B + \left[s \pm (k_{AF})_0\right] B A_0 + (\partial_i A_0)(\partial_i A_0) \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j \\ &\quad + 2e^2 |\phi|^2 (A_0)^2 \mp (k_{AF})_0 A_0 B \mp \frac{1}{2}\epsilon^{ij} (k_{AF})_0 \partial_j (A_i A_0). \end{aligned} \tag{D.43}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{BPS} &= \pm e v^2 B + s B A_0 + 2e^2 |\phi|^2 (A_0)^2 + (\partial_i A_0)(\partial_i A_0) \\ &\quad \pm \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i J_j \mp \frac{1}{2}\epsilon^{ij} (k_{AF})_0 \partial_j (A_i A_0). \end{aligned} \tag{D.44}$$

O uso da lei de Gauss permite escrever a soma do segundo e terceiro termo como

$$s A_0 B + 2e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 = A_0 \partial_i \partial_i A_0 \pm \epsilon_{ij} (k_{AF})_i A_0 \partial_j A_0. \tag{D.45}$$

assim, a Eq. (D.44) resulta em

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm e v^2 B + \partial_i \mathcal{J}_i, \tag{D.46}$$

onde

$$\mathcal{J}_i = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{ij} J_j + A_0 \partial_i A_0 \mp \frac{1}{2}\epsilon_{ij} (k_{AF})_j (A_0)^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij} (k_{AF})_0 A_j A_0. \tag{D.47}$$

Sob condições de contorno apropriadas, a Eq. (D.46) diz que a energia BPS total é proporcional ao fluxo magnético.

As equações BPS e a lei de Gauss, expressas em coordenadas polares, em termos do ansatz

$$g' = \pm\frac{a g}{r}, \tag{D.48}$$

$$B = -\frac{a'}{e r} = \pm e v^2 \left(1 - g^2\right) + \left[s \pm (k_{AF})_0\right] \omega, \tag{D.49}$$

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} - sB \mp (k_{AF})_\theta \left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right) = 2e^2 v^2 \omega g^2. \tag{D.50}$$

A densidade de energia BPS (D.46)

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm e v^2 B + \partial_i \mathcal{J}_i,$$

$$\mathcal{J}_i = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{ij} J_j + A_0 \partial_i A_0 \mp \frac{1}{2}\epsilon_{ij} (k_{AF})_j (A_0)^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ij} (k_{AF})_0 A_j A_0. \tag{D.51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i J_j &= v^2 \frac{(ag^2)'}{r} \\
\partial_i (A_0 \partial_i A_0) &= \frac{(r\omega\omega')'}{r} = \omega\left(\omega'' + \frac{\omega'}{r}\right) + (\omega')^2 \\
\frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i \left[(k_{AF})_j (A_0)^2\right] &= \frac{1}{2}(k_{AF})_\theta \frac{(r\omega^2)'}{r} = (k_{AF})_\theta\, \omega \left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right) \\
\frac{1}{2}(k_{AF})_0 \epsilon_{ij}\partial_i (A_j A_0) &= \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \frac{(r\omega A_\theta)'}{r} = \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \left[\frac{\omega A_\theta}{r} + (\omega A_\theta)'\right] \\
&= -\frac{\omega(a-n)}{er^2} - \omega' \frac{a-n}{er} - \omega \frac{a'}{er} + \frac{\omega(a-n)}{er^2} \\
&= -\frac{1}{2}(k_{AF})_0 \omega' \frac{a-n}{er} + \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \omega B
\end{aligned}$$

Com isso, a densidade de energia será expressa por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{BPS} &= \pm e v^2 B \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + \omega\left(\omega'' + \frac{\omega'}{r}\right) + (\omega')^2 \\
&\quad \mp (k_{AF})_\theta \left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right)\omega \pm \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \frac{(r\omega A_\theta)'}{r}, \\
&= \pm e v^2 B \pm v^2 \frac{(ag^2)'}{r} + \omega\left[\omega'' + \frac{\omega'}{r} \mp (k_{AF})_\theta \left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right)\right] \\
&\quad + (\omega')^2 \pm \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \frac{(r\omega A_\theta)'}{r}
\end{aligned}$$

Usando a lei de Gauss (D.50) no colchete, obtemos

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} \mp (k_{AF})_\theta \left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right) = sB + 2e^2 v^2 \omega g^2. \tag{D.52}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{BPS} &= \pm e v^2 B \mp e v^2 B g^2 + 2v^2 (g')^2 + \omega s B + 2e^2 v^2 (\omega g)^2 + (\omega')^2 \\
&\quad \mp \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \omega' \frac{a-n}{er} \pm \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \omega B \\
&= B\left[\pm e v^2 \left(1 - g^2\right) + \left[s \pm (k_{AF})_0\right]\omega\right] + 2v^2 (g')^2 + 2e^2 v^2 (\omega g)^2 + (\omega')^2 \\
&\quad \mp \frac{1}{2}(k_{AF})_0 \left(\omega' \frac{a-n}{er} - \omega \frac{a'}{er}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a densidade de energia BPS para o modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Higgs é dado pela seguinte equação

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(g'\right)^2 + 2e^2v^2 \left(\omega g\right)^2 + \left(\omega'\right)^2 \mp \frac{1}{2} \left(k_{AF}\right)_0 \left(\omega' \frac{a-n}{er} - \omega \frac{a'}{er}\right). \tag{D.53}$$

A presença do parâmetro $\left(k_{AF}\right)_0$ evita obtermos uma densidade de energia definida positiva, sendo assim, podemos fixar $\left(k_{AF}\right)_0 = 0$ para garantir a positividade da densidade de energia BPS. Com isso, as equações BPS e a lei de Gauss são expressas como

$$g' = \pm \frac{ag}{r}. \tag{D.54}$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2 \left(1 - g^2\right) + s\omega, \tag{D.55}$$

$$\omega'' + \frac{\omega'}{r} - sB \mp \left(k_{AF}\right)_\theta \left(\omega' + \frac{\omega}{2r}\right) = 2e^2v^2\omega g^2. \tag{D.56}$$

A densidade de energia BPS

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(g'\right)^2 + 2e^2v^2 \left(\omega g\right)^2 + \left(\omega'\right)^2 \tag{D.57}$$

resulta definida positiva para qualquer valor dos coeficientes da VL: s e $\left(k_{AF}\right)_\theta$.

Referências Bibliográficas

[1] J. Scott Russel, "Report on Waves,"Proe of the Britsh Association for the Advancement of Science, London, 311 (1945).

[2] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, 1989.

[3] T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, 2006.

[4] E. M. de Jager, *On the origin of the Korteweg-de Vries equation*, arXiv:math/0602661.

[5] Galléas, W., Ymai, L. H., Natti, P.L., Takano Natti, E.R., *Ondas do tipo Sólitons em Guias dielétricos*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 25, no. 3, Setembro, 2003.

[6] D. J. Korteweg and G. de Vries, "*On the change of form of long waves advancing in a retangular canal, and on a new type of long stationary waves*,"Phil. Mag. 39 (1895), 422.

[7] Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S., *Studies of Nonlinear Problems*. Document LA-1940, 1955.

[8] Zabusky, N.J. , Kruskal,M. D., *Interaction of "Solitons"in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*, Phys. Rev. Lett.15, 240-243 (1965).

[9] Kibble, T. W. B., J. Phys. A: Math. Gen., 9, 1387, 1976.

[10] Saffman, P.G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, 1992.

[11] Wu, J.-Z., Ma, H.-Y., Zhou, M.-D., *Vorticity and Vortex Dynamics*, Springer, 2006.

[12] Hubble, E., *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae.*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Volume 15, March 15, 1929: Issue 3, pp. 168-173, communicated January 17, 1929.

[13] Weinberg, S., Phys. Rev. **D9**, 3357. 1974.

[14] Kirzhnits, D. A., Linde, A. D., Phys. Lett. **42 B**, 471, 1972.

[15] Zeldovich, Ya. B., Kobzarev, Yu., and Okun, L. B., 1975, Zh. Eksp. Teor. Fiz, 67, 3.

[16] Kibble, T. W. B., Phys. Rep., 67, 183, 1980.

[17] H. B. Nielsen and P. Olesen, " *Vortex-line Models for Dual Strings*,"Nucl. Phys. B 61 (1973) **45**.

[18] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons,* (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[19] José, J.V., Saletan, E.J., *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, 1998.

[20] Onnes, H.K., *The resistance of pure mercury at helium temperatures.* Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden 12: 120, 1911.

[21] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, "*On the Theory of superconductivity,*" Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1950) 1064.

[22] Abrikosov, A.A., *type II Superconductors and the Vortex Lattice.* Nobel Lecture, 8 December 2003.

[23] A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **32**, 1442 (1957);

[24] A. A. Abrikosov, "On the Magnetic properties of superconductors of the second group," Sov. Phys. JETP 5 (1957) 1174 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 32 (1957) 1442].

[25] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) 140, 372 (1982); Gerald V. Dunne, arXiv:hep-th/9902115.

[26] R. Jackiw and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990); R. Jackiw, K. Lee, and E.J. Weinberg, Phys. Rev. **D 42**, 3488 (1990); J. Hong, Y. Kim, and P.Y. Pac, Phys. Rev. Lett. 64, 2230 (1990); G.V. Dunne, Self-Dual Chern-Simons Theories (Springer, Heidelberg, 1995);

[27] Z.F. Ezawa, Quantum Hall Effects, World Scientific (2000).

[28] P.K. Ghosh, Phys. Rev. **D 49**, 5458 (1994); T. Lee and H. Ming, Phys. Rev. **D 50**, 7738 (1994).

[29] N. Sakai and D. Tong, J. High Energy Phys. 03 (2005) 019; G. S. Lozano, D. Marques, E. F. Moreno, and F. A. Schaposnik, Phys. Lett. B 654, 27 (2007).

[30] S. Bolognesi and S.B. Gudnason, Nucl. Phys. **B 805**, 104 (2008).

[31] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, and R. Menezes, Phys. Rev. **D 81**, 125014 (2010).

[32] C. dos Santos, Phys. Rev. **D 82**, 125009 (2010).

[33] C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).

[34] C. Armendariz-Picon and E. A. Lim, JCAP 0508, 007 (2005).

[35] A. Sen, JHEP 0207, 065 (2002).

[36] N. Arkani-Hamed, H.C. Cheng, M. A. Luty, S. Mukohyama, JHEP 0405, 074 (2004); N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama, M. Zaldarriaga, JCAP 0404, 001 (2004); S. Dubovsky, JCAP 0407, 009 (2004); D. Krotov, C. Rebbi, V. Rubakov, V. Zakharov, Phys.Rev. D **71**, 045014 (2005); A. Anisimov, A. Vikman, JCAP 0504, 009 (2005).

[37] E. Babichev, Phys. Rev. D **74**, 085004 (2006); Phys. Rev. D **77**, 065021 (2008).

[38] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira, and C. dos Santos, Phys. Rev. **D 81**, 125016 (2010).

[39] C. dos Santos and E. da Hora, Eur. Phys. J. C **70**, 1145 (2010); Eur. Phys. J. C **71**, 1519 (2011).

[40] P. Rosenau and J.M. Hyman, Phys. Rev. Lett. **70**, 564 (1993); P. Rosenau and E. Kashdan, Phys. Rev. Lett. **104**, 034101(2010).

[41] C. Adam, P. Klimas, J. Sánchez-Guillén, and A. Wereszczyński, J. Math. Phys. **50**, 102303 (2009); C. Adam, N. Grandi, J. Sanchez-Guillen and A. Wereszczynski, J. Phys. A: Math. Theor. 41, 212004 (2008); C. Adam, P Klimas, J Sánchez-Guillén and A. Wereszczynski, J. Phys. A: Math. Theor. 42, 135401 (2009).

[42] C. Miller, R. Casana, M.M. Ferreira Jr, E. da Hora, *Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the CPT-even sector of the Standard Model Extension,* Phys.Rev. D **86,** 065011 (2012).

[43] C. Miller, R. Casana, M.M. Ferreira Jr, E. da Hora, *Magnetic flux inversion in Charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell-Higgs framework,* arXiv:1208.3908, a ser publicado na revista Physics Letters B.

[44] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* D **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* D **59**, 116008 (1999); S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev.* D **59**, 116008 (1999).

[45] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev.* D **39**, 683 (1989); *Phys. Rev.* D **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys.* B **359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev.* D **51**, 3923 (1995).

[46] B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004); G. M. Shore, Nucl. Phys. B **717**, 86 (2005); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Lett. B **511**, 209 (2001); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, J. Math. Phys. **48**, 092302 (2007); R. Lehnert, Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003); V.A. Kostelecky and C. D. Lane, J. Math. Phys. **40**, 6245 (1999); R. Lehnert, J. Math. Phys. **45**, 3399 (2004); V. A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D **63,** 065008 (2001)**;** W. F. Chen and G. Kunstatter, Phys. Rev. D **62**, 105029 (2000); B. Goncalves, Y. N. Obukhov, I. L. Shapiro, Phys.Rev.D **80**, 125034 (2009).

[47] V. Alan Kostelecky, Phys.Rev.D **69**, 105009 (2004); V. A. Kostelecky, Neil Russell, and J. D. Tasson, Phys. Rev. Lett. **100**, 111102 (2008); V. A. Kostelecky and J. D. Tasson, Phys. Rev. Lett. **102**, 010402 (2009); Q. G. Bailey, V.A. Kostelecky, Phys.Rev. D **74**, 045001 (2006); Q. G. Bailey, Phys.Rev. D **80**, 044004 (2009); V.A. Kostelecky and R. Potting, Phys.Rev. D **79**, 065018 (2009); Q. G. Bailey, Phys. Rev. D **82**, 065012 (2010); V.B. Bezerra, C.N. Ferreira, J.A. Helayel-Neto, Phys.Rev. D **71**, 044018 (2005); J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, L.M. de Moraes, C.A.G. Sasaki, V.J. V. Otoya, Phys. Lett. B **689**, 112 (2010).

[48] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[49] B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).

[50] F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901 (2008).

[51] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).

[52] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).

[53] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).

[54] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).

[55] Q. Exirifard, Phys. Lett. B **699**, 1 (2011).

[56] W.P.Su, J.R.Schrieffer, and A.J.Heeger, "Solitons in Polyacetylene", Phys.Rev.Lett.42, 1698 (1979).

[57] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, "Solitons excitations in Polyacetylene", Phys. Rev. D 42, 2099 (1980).

[58] P. Weiss, "L'hypoth'ese du champ mol´eculaire et la propri´et´e ferromagn´etique," J.Phys., 6 (1907) 401.

[59] Y. Nambu, Lectures at the Copenhagen Symposium, 1970.

[60] G. 't Hooft, "A Two-Dimensional Model For Mesons," Nucl. Phys. B 75 (1974) 461.

[61] A. M. Polyakov, "Particle spectrum in quantum field theory," JETP Lett. 20 (1974) 194 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1974) 430].

[62] S. Coleman, "*Aspects of Symetry*"(Cambridge, Cambridge, 1985).

[63] M. A. Lohe, Phys. Rev. D20, 3120 (1979); M. Peyrard and K. Campbell, Physica9D, 33 (1983), North-Holland.

[64] E. B. Bogomolny: *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).

[65] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).

[66] C. Rebbi, G. Soliani, "*Solitons and Particles*" (World Scientific, Singapore, 1984).

[67] V. Rubakov, Classical Theory of Gauge Fields, Princeton Univ. Press (2002).

[68] G.V. Dunne, *Aspects of Chern–Simons theory*, hep-th/9902115.

[69] R. Jackiw, E.J. Weinberg, Selfdual Chern–Simons vortices, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 2234.

[70] R. Jackiw, K.M. Lee, E.J. Weinberg, Selfdual Chern–Simons solitons, Phys. Rev. D 42 (1990) 3488.

[71] C.k. Lee, K.M. Lee, H. Min, Selfdual Maxwell Chern–Simons solitons, Phys. Lett. B 252 (1990) 79;

[72] B.H. Lee, C.k. Lee, H. Min, Supersymmetric Chern–Simons vortex systems and fermion zero modes, Phys. Rev. D 45 (1992) 4588.

[73] S. Bolognesi, S.B. Gudnason, A note on Chern–Simons solitons - A type III vortex from the wall vortex Nuclear Physics B 805 (2008).

[74] R. Casana, M.M. Ferreira, and C.E.H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 105014 (2008); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P.R. D. Pinheiro, Eur. Phys. J. C **62**, 573 (2009).

[75] B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, F.E. P. dos Santos, Phys. Rev. D **82**, 125006 (2010).

[76] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira, and C. dos Santos, Phys. Rev. **D 81**, 125016 (2010).

[77] T. Vachaspati, *Formation of Topological Defects*, In Trieste 1997, High energy physics and cosmology, 446-479; arXiv:hep-ph/9710292.

[78] D. Bazeia, *Defect Structures in Field Theory*, arXiv:hep-th/0507188.

[79] D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson, *Deformed Defects*, Phys. Rev. **D 66**, 101701 (2002).

[80] D. Bazeia, L. Losano, A. Das, A. Silva, *A simple and direct method for generating travelling wave solutions for nonlinear equations*, Annals of Physics **323**, 1150 (2008).

[81] F. Cooper, A. Khare, U. Sujhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2001.

[82] G. R. P. Borges, E. Drigo Filho, *Supersimetria em Mecânica Quântica II*, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 1 (1999).

[83] E. Drigo Filho, *Supersimetria em Mecânica Quântica*, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 1 (1999).

[84] Y. Yang, *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, 2001.

[85] Felsager, B., *Geometry, Particles, and Fields*, Springer, 1998.

[86] Lemos, N.A., *Mecânica Analítica*, 2da Edição, Livraria da Física, 2007.

[87] Ryder, L., *Quantum Field Theory*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2001.

[88] Manton,N., Sutcliffe,P., *Toplogical Solitons*, Cambridge University Press, 2004.