

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DEFIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

**FORMALISMO HAMILTONIANO NO
CONTEXTO DA QUEBRA DE
DIFEOMORFISMOS ESPONTÂNEA**

JOÃO VICTOR VIEIRA DOS SANTOS

SÃO LUÍS - MA

2023

JOÃO VICTOR VIEIRA DOS SANTOS

**FORMALISMO HAMILTONIANO NO
CONTEXTO DA QUEBRA DE
DIFEOMORFISMOS ESPONTÂNEA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito para a obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Área de Concentração: Teoria da Relatividade Geral e Modelo Padrão Estendido.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos com Violação de Simetria de Lorentz.

Orientador: Prof. Dr. Marco Schreck.

SÃO LUÍS - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Vieira dos Santos, João Victor.

Formalismo Hamiltoniano no contexto da quebra de
difeomorfismos espontânea / João Victor Vieira dos Santos.
- 2023.

103 p.

Orientador(a): Marco Schreck.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
2023.

1. Formalismo Hamiltoniano. 2. Decomposição (3+1). 3.
Gravitação Modificada. I. Schreck, Marco. II. Título.

JOÃO VICTOR VIEIRA DOS SANTOS

**FORMALISMO HAMILTONIANO NO CONTEXTO DA QUEBRA DE
DIFEOMORFISMOS ESPONTÂNEA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito para a obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Esta **DISSERTAÇÃO** foi aprovada, em sua forma final, no dia 13 de Outubro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marco Schreck (Orientador)

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Ronaldo Silva Thibes (Externo)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

SÃO LUÍS — MA

2023

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Jocélia, por ser a minha base, quem me ajuda em todos os momentos e me dá todo o suporte necessário para que eu realize os meus sonhos. As minhas conquistas são suas também.

Agradeço à minha irmã, Joyce, que também é minha amiga e está sempre na torcida por mim. Que sejamos sempre unidos e compartilhemos nossas conquistas de vida um com o outro.

Um agradecimento também aos meus amigos do Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos (GFTPC/UFMA), em especial a Alex, Filipe, Francisco (Chico), Lucas, Victor e, não menos importante, à Luana, que um dia fez parte do grupo. Que os nossos momentos de troca de conhecimento e de boa confraternização continuem por muitos anos.

Agradeço aos professores da banca: primeiramente, ao professor Adalto Rodrigues, por ter sido o meu primeiro orientador de PIBIC — mesmo que por pouco tempo — além de professor em diversas disciplinas, contribuindo com minha formação em diversos temas; ao professor Manoel Messias, por também ter feito parte da minha formação, bem como por todo o apoio diante da coordenação do PPGF, além de momentos marcantes de confraternização; ao professor Ronaldo Thibes, por sua disponibilidade em participar deste momento tão importante na minha vida. Agradeço a todos por lerem e contribuírem para a versão final desta dissertação.

Um agradecimento muito especial ao professor orientador Marco Schreck, por ter acreditado em mim enquanto seu aluno de mestrado, por todo o seu apoio, disponibilidade e trocas de conhecimento. Que seja apenas o início de uma grande parceria profissional e pessoal.

Por fim, mas não menos importante, agradeço às agências de fomento financeiro CNPq, CAPES e FAPEMA, por tornarem possível a implementação e a conclusão deste projeto de pesquisa. Agradeço ainda à UFMA e ao GFTPC por proporcionarem um ambiente agradável de estudo.

*“I’m just growin’ up in stages
Livin’ life in phases...”*

Tame Impala

RESUMO

O objetivo deste trabalho é, partindo do fato de que a Relatividade Geral (RG) é uma teoria clássica de vínculos, desenvolver a formulação Hamiltoniana para um modelo efetivo de gravidade modificada que incorpora um campo escalar dinâmico, denotado por $u(x)$, no setor gravitacional mínimo do Modelo Padrão Estendido (MPE). A presença desse campo escalar leva à quebra espontânea da simetria de difeomorfismo, uma simetria fundamental da Relatividade Geral, parametrizada pelo MPE. Considera-se tal procedimento como um dos mais proeminentes sinais de efeitos físicos na escala de Planck, indicando desvios da gravidade padrão. Para construir a Hamiltoniana, utiliza-se a decomposição $(3 + 1)$ desenvolvida por Arnowitt, Deser e Misner, que consiste em folhear o espaço-tempo quadri-dimensional $\mathcal{M}$ em uma família contínua de hipersuperfícies tri-dimensionais Σ_t , cada uma correspondendo a um tempo constante específico. Tal folheação do espaço-tempo é governada pela *função lapso* N e pelas componentes N^i do *vetor deslocamento*, que representam graus de liberdade de calibre associados à escolha de coordenadas. Em cada hipersuperfície, um conjunto de variáveis canônicas é definido, juntamente com seus momentos conjugados. Essas variáveis e momentos permitem a derivação da Hamiltoniana canônica por meio da transformação de Legendre, fornecendo uma descrição do espaço de fase gravitacional. Uma vez obtida a Hamiltoniana, o próximo passo é analisar os vínculos associados à teoria. Vínculos são condições não-dinâmicas que podem refletir as simetrias subjacentes do sistema. Ao estudar esses vínculos, é possível determinar as equações de movimento para o campo escalar de fundo, a métrica induzida na hipersuperfície e seus momentos canônicos correspondentes. Essas equações são essenciais para estudar a dinâmica da teoria. Veremos que, assim como a teoria de Einstein-Hilbert da gravidade, esse modelo de gravidade modificada também propaga dois graus de liberdade, resultado obtido a partir da análise dos vínculos. Essa característica é consistente com a quebra espontânea da invariância de difeomorfismo induzida pela presença do campo escalar. Ao investigar a dinâmica e os vínculos desse modelo de gravidade modificada, este trabalho visa fornecer *insights* sobre o comportamento e as implicações de teorias que vão além da RG, lançando luz sobre os possíveis efeitos da quebra da simetria de difeomorfismo.

Palavras-chave: Formalismo Hamiltoniano; Decomposição $(3+1)$; Gravitação modificada.

ABSTRACT

The aim of this work is, starting from the fact that General Relativity is a classical theory of constraints, to develop the Hamiltonian formulation for an effective model of modified gravity that incorporates a dynamic scalar field, denoted as $u(x)$, contained in the minimal gravitational sector of the Standard Model Extension. The presence of such a scalar field spontaneously breaks one of the fundamental symmetries of General Relativity, namely diffeomorphism symmetry. This, in turn, is considered one of the most prominent signals for physical effects at the Planck scale. To construct the Hamiltonian, we will make use of the $(3 + 1)$ decomposition, developed by Arnowitt-Deser-Misner, which consists of foliating the four-dimensional spacetime into three-dimensional spacelike hypersurfaces of constant time. This foliation is governed by the *lapse functions* N and the *shift vectors* N^i , which represent gauge degrees of freedom. On each hypersurface, a set of canonical variables is defined, to which we associate a set of conjugate momenta, leading to the derivation of the canonical Hamiltonian through the Legendre transformation, which allows for a description of the gravitational phase space. Once the Hamiltonian is obtained, it is necessary to analyze constraints and, consequently, obtain the equations of motion associated with the background scalar field, the induced metric on the hypersurface, and their corresponding canonical moments. These latter equations make it possible to study the dynamics of the theory. We will see that, similar to the Einstein-Hilbert theory, our model leads to the propagation of two degrees of freedom, consistent with spontaneous breaking of diffeomorphism invariance. By investigating the dynamics and constraints of this modified gravity model, this work aims to provide insights into the behavior and implications of theories that go beyond General Relativity, shedding light on the possible effects of diffeomorphism symmetry breaking at the Planck scale.

Keywords: Hamiltonian Formalism; $(3+1)$ Decomposition; Modified Gravity.

Sumário

1	Introdução	11
2	Fundamentação Teórica	15
2.1	Princípio de Hamilton e equação de Lagrange	15
2.1.1	Extensão para campos clássicos	17
2.2	Formulação Hamiltoniana	18
2.2.1	Equações de Hamilton	19
2.3	Sistemas Hamiltonianos vinculados	20
3	Formulação Covariante da TRG	24
3.1	Tensor métrico	25
3.2	Derivada covariante	26
3.3	Símbolo de Christoffel e a métrica	28
3.4	Tensores de Riemann, Ricci e Einstein	29
3.4.1	Tensor de Riemann e identidade de Bianchi	29
3.4.2	Tensor e escalar de Ricci	31
3.4.3	Tensor de Einstein	31
3.5	Difeomorfismos e derivada de Lie	33
4	Formulação Hamiltoniana da TRG	36
4.1	Folheamento da variedade em hipersuperfícies	37
4.2	Vetor normal	37
4.3	Métrica induzida	38
4.4	Campos tensoriais tangentes	39
4.5	Derivada covariante intrínseca	39
4.6	Curvatura extrínseca	41

4.7	Equações de Gauss-Codazzi	44
4.7.1	Forma geral	44
4.7.2	Forma contraída	46
4.7.3	Escalar de Ricci	47
4.8	Decomposição $3 + 1$ (Formalismo ADM)	48
4.9	Hamiltoniana da Relatividade Geral	52
5	Formulação Hamiltoniana para uma Teoria Gravitacional Modificada	57
5.1	Teoria de Brans-Dicke: uma primeira abordagem	58
5.1.1	Momento canônico e Hamiltoniana	61
5.2	Modelo Padrão Estendido	65
5.3	Formulação Hamiltoniana para o setor escalar do MPE mínimo gravitacional	68
5.3.1	Equações de campo de Hamilton e geradores de difeomorfismos . .	72
5.4	Álgebra de vínculos	84
6	Considerações Finais	86
A	Variações da métrica, Tensor de Ricci e Símbolo de Christoffel	88
A.1	Variação da métrica	88
A.2	Variação do Tensor de Ricci	89
A.3	Variação do Símbolo de Christoffel	90
B	Equações de campo para π^{ij} e π_u	92

Capítulo 1

Introdução

A Relatividade Geral (RG), formulada por Einstein [6] no ano de 1915, é uma teoria clássica de campos, caracterizada por vínculos. Sistemas mecânicos sujeitos a vínculos de natureza geométrica ou cinemática ocorrem com frequência na natureza. Em tais situações, o formalismo Newtoniano apresenta-se insatisfatório do ponto de vista matemático. Deste modo, um procedimento alternativo baseado no princípio de Hamilton [1–3] foi desenvolvido, permitindo uma descrição mais simples e completa por meio das chamadas equações de Lagrange. Obtida inicialmente para um sistema de partículas com número finito n de graus de liberdade, se estende de maneira natural para uma descrição de campos. Tais equações constituem um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo. Entretanto, a fim de uma descrição um pouco mais geral, e que se estenda à descrição de sistemas quânticos, por exemplo, faz-se necessária a introdução do formalismo Hamiltoniano, a partir de uma transformação de Legendre. As equações de movimento para este formalismo, chamadas de equações de Hamilton, constituem por sua vez um conjunto de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no tempo.

A passagem do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano se dá através da possibilidade de que as velocidades generalizadas possam ser expressas em termos dos momentos canônicos, definidos a partir das equações de Lagrange. Para que isso ocorra, é necessário que a matriz Hessiana definida em [3] seja não-singular. Entretanto, para a maioria das teorias físicas modernas, se não todas, isso não acontece, gerando o que conhecemos como vínculos. Dessa forma, torna-se conveniente completar o formalismo Hamiltoniano canônico.

Os sistemas Hamiltonianos vinculados foram descritos principalmente por Dirac [4]. Os vínculos dessa natureza são definidos como primários e secundários. Vínculos primários são aqueles que partem diretamente da forma da Lagrangiana do sistema, de modo que os momentos canônicos não podem ser todos resolvidos para as velocidades em função dos momentos, pois não constituem um conjunto completo de equações independentes. Já os vínculos secundários partem diretamente do emprego das equações de movimento, o motivo pelo qual recebe esse nome. Tanto os vínculos primários quanto os secundários podem ser classificados ainda em dois tipos: vínculos de primeira classe e de segunda classe, cuja diferença se dá por condições específicas [4]. Dessa forma, a Hamiltoniana fica expressa agora em função da Hamiltoniana canônica mais termos proporcionais a esses vínculos. Esse novo Hamiltoniano é obtido por meio do Algoritmo de Dirac-Bergmann. A formulação Hamiltoniana da RG leva em consideração tal procedimento.

Para obter o Hamiltoniano associado à RG, é necessário ainda que se adote o procedimento desenvolvido por Arnowitt-Deser-Misner, conhecido como formalismo ADM ou Decomposição (3+1) [15, 16], que consiste na folheação do espaço-tempo quadri-dimensional $\mathcal{M}$ em hipersuperfícies tri-dimensionais tipo-espaço de tempo constante, denotadas por Σ_t . Na hipersuperfície definimos algumas quantidades fundamentais, como o vetor unitário n^μ que aponta na direção normal a Σ_t , uma métrica induzida intrínseca q_{ij} , além do tensor curvatura extrínseca K_{ij} que aparece devido à imersão da hipersuperfície na variedade do espaço-tempo, e seu traço K . As famílias de hipersuperfícies são conectadas através de duas grandezas fundamentais na formulação ADM, denominadas função lapso N e vetor deslocamento $\mathbf{N}$ com componentes N^i , que descrevem como as hipersuperfícies subjacentes evoluem.

Fazendo projeções adequadas dos tensores de Riemann e Ricci - bem como seu escalar - completamente ao longo da hipersuperfície, em direções completamente ortogonais, e parcialmente paralelas e ortogonais a Σ_t , obtém-se a forma adequada para a descrição Hamiltoniana da RG. Considerando inicialmente a ação de Einstein-Hilbert, veremos que a estrutura da densidade Hamiltoniana final se dá em função do vínculo Hamiltoniano (proporcional à função lapso) e de momento (proporcional às componentes do vetor deslocamento), que, como mostrado em [24, 25], corresponde às projeções das equações de Einstein - obtidas a partir do formalismo covariante - nas direções inteiramente normais ao longo de n^μ , e parcialmente a essa direção e à hipersuperfície, respectivamente.

Tal procedimento se estende a teorias gravitacionais modificadas, que surgem como uma necessidade de estudar desvios da RG, bem como o seu comportamento em escalas de comprimento muito menores que as usualmente consideradas em sistemas gravitacionais, como a escala de Planck. Nesse sentido, consideraremos inicialmente um caso particular das chamadas teorias escalar-tensoriais de gravidade [17], a teoria de Brans-Dicke [21, 23]. Em seguida, trabalharemos com uma teoria de campos efetiva, conhecida como Modelo Padrão Estendido (MPE) [44–54], mais especificamente o setor gravitacional mínimo cujo um campo de fundo escalar dinâmico viola uma das simetrias fundamentais do espaço-tempo da RG, a saber, a invariância por difeomorfismo. A fim de confirmação dos resultados, compararemos com uma série de artigos recentes [30, 31] para um campo de fundo não-dinâmico, de modo a complementar o formalismo Hamiltoniano do setor gravitacional do MPE. Veremos que tais cenários com campos de fundo dinâmicos e não-dinâmicos diferem consideravelmente no que diz respeito à estrutura do Hamiltoniano, álgebra dos vínculos, bem como na contagem dos graus de liberdade.

Esse trabalho é organizado como segue. No capítulo 2 é feita uma fundamentação teórica com base em [1–4], que consiste em estabelecer o Formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados, e em seguida a sua extensão para campos clássicos. No capítulo 3, consideramos recapitular a Formulação Covariante da RG [7–10], obtendo os objetos fundamentais que descrevem a geometria do espaço-tempo, bem como a equação de Einstein e suas propriedades, incluindo a descrição da simetria fundamental da RG, a invariância por difeomorfismo. O formalismo principal deste trabalho é estabelecido no capítulo 4, com a descrição da decomposição $(3 + 1)$, a dinâmica das hipersuperfícies, bem como a definição das variáveis fundamentais que parametrizam tal decomposição, de acordo com [11–16]. Uma primeira aplicação é feita, obtendo a densidade Hamiltoniana para a RG. No capítulo 5, aplicamos o formalismo Hamiltoniano em algumas teorias gravitacionais modificadas. Inicialmente faremos isso para a teoria de Brans-Dicke estudada em [23], como forma de consolidar o método de decomposição $(3 + 1)$, obtendo com bastante detalhe os mesmos resultados. Em seguida, seguimos os mesmos passos para estudar o setor escalar mínimo gravitacional do MPE, em particular com base em [30], mas considerando agora um campo de fundo $u(x)$ dinâmico. Obteremos a densidade Hamiltoniana associada, as equações de campo para as variáveis dinâmicas e seus momentos conjugados, em particular resultados novos referentes a $u(x)$ e o seu momento canônico associado, $\pi_u(x)$.

Faremos também a análise de vínculos e contagem dos graus de liberdade, confirmando o resultado da RG. As considerações finais são feitas no capítulo 6, juntamente com perspectivas futuras para este trabalho. Nos apêndices é possível visualizar com bastante detalhe algumas passagens matemáticas importantes.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Com o objetivo de construir o formalismo Hamiltoniano para a Teoria da Relatividade Geral, devido ao fato de ser uma teoria invariante por reparametrizações arbitrárias de coordenadas, surgem naturalmente vínculos entre as variáveis canônicas. Dessa maneira, faz-se necessário estudar o método desenvolvido por Dirac [4], a partir da segunda metade do século XX, para tratar sistemas Hamiltonianos vinculados.

Sistemas mecânicos sujeitos a vínculos de natureza geométrica ou cinemática ocorrem com frequência. Em tais situações, o formalismo Newtoniano da dinâmica revela-se um tanto complexo, pois exige o uso de variáveis redundantes e as forças de vínculo aparecem de forma explícita. Deste modo, para evitar algumas das dificuldades práticas que aparecem nas tentativas de aplicação das equações de Newton para problemas específicos, procedimentos alternativos podem ser desenvolvidos. Tal método está contido no *princípio de Hamilton*, e as equações de movimento que resultam da aplicação deste princípio são as chamadas *equações de Lagrange*, ou ainda, por meio de uma transformação adequada, as *equações de Hamilton*.

2.1 Princípio de Hamilton e equação de Lagrange

Princípios *mínimos* sempre foram temas de grande interesse da comunidade científica, em particular na física. Como uma primeira abordagem de tal conceito, Pierre de Fermat no ano de 1657 desenvolveu o *princípio de Fermat*, no qual dizia que um raio de luz sempre viaja de um ponto a outro em um meio por um caminho que requer o menor tempo, levando a leis fundamentais no campo da óptica geométrica. Nos séculos seguintes, diversos

estudos acerca do cálculo de variações foram feitos, levando a uma primeira abordagem no âmbito da mecânica, por Maupertuis, que afirmou que o movimento dinâmico acontece com *ação mínima*. Esta, por sua vez, foi uma primeira formulação do que mais tarde viria a ser chamado de *princípio de Hamilton*.

De acordo com [2], o princípio de Hamilton pode ser enunciado da seguinte forma:

De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer vínculos), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre as energias cinética e potencial.

Em termos do cálculo variacional, tal princípio pode ser expresso como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (2.1)$$

onde o símbolo δ significa *variação*. Se definirmos a quantidade entre parênteses como

$$L = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t), \quad (2.2)$$

isto é,

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (2.3)$$

em função das coordenadas generalizadas mutuamente independentes q_j , o princípio de Hamilton se torna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0. \quad (2.4)$$

Seja S a *ação* definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt, \quad (2.5)$$

então a sua variação é dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right), \quad (2.6)$$

que integrando por partes fornece

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.7)$$

Como $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ nas fronteiras, por definição, então

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j. \quad (2.8)$$

Considerando agora o princípio de Hamilton, devemos impor $\delta S = 0$, de modo que

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j = 0, \quad (2.9)$$

que de maneira não-trivial será verdade se

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad (2.10)$$

conhecida como *equações de Lagrange*, e a quantidade L é chamada de *Lagrangiana*. Há n dessas equações e, junto com as m equações de vínculos e as condições iniciais que são impostas, elas descrevem completamente a dinâmica do sistema. Além disso, a eq.(2.10) possibilita definir

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.11)$$

como o *momento generalizado* ou *momento canônico*. As equações de movimento de Lagrange ficam então expressas como

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (2.12)$$

Sendo assim, o princípio de Hamilton pode ser novamente enunciado, de uma maneira mais geral [3]:

Dado um sistema mecânico holônomo descrito pela Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, seu movimento no instante t_1 ao instante t_2 é tal que a ação definida em (2.5) seja mínima (ou estacionária) para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória do espaço de configuração.

2.1.1 Extensão para campos clássicos

Todos os resultados obtidos acima para um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade descrito pelas coordenadas generalizadas $q_j(t)$ se estendem para a descrição de campos clássicos de maneira praticamente imediata.

Por simplicidade, consideraremos inicialmente campos em apenas uma dimensão espacial dado por $\phi(x, t)$. Como sabemos, a passagem do discreto para o contínuo se dá através da promoção do somatório sobre todos os graus de liberdade para uma integral. Dessa forma, a ação definida em (2.5) no contexto da teoria de campos unidimensional se torna

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t}, x, t \right), \quad (2.13)$$

onde a Lagrangiana L dá espaço a uma *densidade Lagrangiana* $\mathcal{L}$. Seguindo os mesmos passos acima, partindo do princípio de Hamilton, e usando

$$\delta\dot{\phi} = \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t}, \quad \delta\phi' = \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x}, \quad (2.14)$$

a equação de Lagrange unidimensional para campos clássicos fica igual a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.15)$$

No caso de um sistema de N campos em três dimensões espaciais, representados coletivamente por $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$, as equações de Lagrange ficam expressas por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_j/\partial t)} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi_j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

2.2 Formulação Hamiltoniana

As equações de Lagrange para um sistema com n graus de liberdade constituem um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de *segunda ordem* no tempo para as coordenadas generalizadas $q_1(t), \dots, q_n(t)$, ou n equações diferenciais parciais para os campos $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$. Na formulação Hamiltoniana é diferente: as equações de movimento são $2n$ equações diferenciais de *primeira ordem* no tempo para $2n$ variáveis independentes. De modo geral, as equações de Hamilton não são mais fáceis de resolver do que as equações de Lagrange; no entanto, fornecem um método poderoso, geral e flexível para a investigação de questões estruturais da mecânica, além de servirem de fundamento para a mecânica quântica e mecânica estatística.

Uma vez feita a extensão do discreto para o contínuo no formalismo Lagrangiano, partiremos deste último ponto a fim de introduzir o formalismo Hamiltoniano. De maneira direta, o momento canônico definido em (2.11) se estende a

$$\pi^j(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_j(x)}. \quad (2.17)$$

Para que seja possível fazermos a transição da formulação Lagrangiana para a Hamiltoniana, é necessário que as *velocidades generalizadas* possam ser expressas univocamente em termos dos momentos canônicos. Isso acontece quando a *matriz Hessiana* $\mathbf{W} = (W_{ij})$ com elementos

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\phi}_i(x) \partial \dot{\phi}_j(x)} \quad (2.18)$$

é não-singular, ou seja,

$$\det \mathbf{W} \neq 0. \quad (2.19)$$

Considerando que a condição (2.19) seja satisfeita, tal mudança de descrição se dá através de uma *transformação de Legendre*, que consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos e na introdução da densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}$ definida por [1]

$$\mathcal{H} = \sum_j \pi^j \dot{\phi}_j - \mathcal{L}, \quad (2.20)$$

e a Hamiltoniana

$$H[\phi_j, \pi^j] = \int d^3x \mathcal{H}(\phi_j(x), \nabla \phi_j(x), \pi^j(x), \nabla \pi^j(x)) \quad (2.21)$$

como função dos campos e dos momentos generalizados, e não mais das velocidades.

2.2.1 Equações de Hamilton

Para obter as equações de Hamilton, seguiremos os mesmos passos para a obtenção das equações de Lagrange, partindo do princípio de Hamilton. Para isso, sendo a ação dada por (2.5), e considerando a densidade Lagrangiana na forma (2.20), vamos ter

$$S = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \sum_j \pi^j \dot{\phi}_j - \mathcal{H}(\phi_j, \nabla \phi_j, \pi^j, \nabla \pi^j) \right\}, \quad (2.22)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{\Omega} d^4x \sum_j \left\{ \delta \pi^j \dot{\phi}_j + \pi^j \delta \dot{\phi}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_j} \delta \phi_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_j)} \delta (\nabla \phi_j) \right. \\ \left. - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^j} \delta \pi^j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^j)} \delta (\nabla \pi^j) \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde considerando que $\delta S = 0$, e realizando integrações por partes, vamos ter

$$\int_{\Omega} d^4x \sum_j \left\{ \left(-\dot{\pi}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_j} + \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_j)} \right) \delta \phi_j + \left(\dot{\phi}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^j} + \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^j)} \right) \delta \pi^j \right\} = 0. \quad (2.24)$$

Sendo assim, dada a independência de $\delta \phi_j$ e $\delta \pi^j$, obtemos o seguinte conjunto de equações de movimento:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_j &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^j} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^j)}, \\ \dot{\pi}_j &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_j} + \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_j)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

conhecidas como equações de campo de Hamilton. No caso em que $\mathcal{H}$ não dependa explicitamente do tempo, podemos reescrever as equações acima de maneira que serão usuais, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_j &= \frac{\delta H}{\delta \pi^j}, \\ \dot{\pi}^j &= -\frac{\delta H}{\delta \phi_j},\end{aligned}\tag{2.26}$$

que são as formas compactas das eqs. (2.25).

2.3 Sistemas Hamiltonianos vinculados

Entende-se como *vínculo* limitações de ordem cinemática impostas a um sistema mecânico, e que portanto antecedem a dinâmica, sendo necessário levá-los em conta na formulação das equações de movimento do sistema mecânico [3]. Os vínculos podem ser ainda classificados em duas partes, a saber, *vínculos holônomos* e *vínculos não-holônomos*. Como exemplo simples para elucidar o conceito de vínculo, consideremos uma partícula restrita a uma superfície fixa, digamos uma esfera de raio R centrada na origem. Seja $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor posição da partícula relativo a um sistema cartesiano de eixos em relação ao qual a superfície permanece fixa, então x, y, z não são variáveis independentes mas devem satisfazer

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2, \tag{2.27}$$

onde $f(\mathbf{r}) = 0$ é a equação da superfície. Tal relação funcional exclusivamente entre as coordenadas, podendo envolver o tempo de modo explícito, configura os vínculos holônomos. Em contrapartida, vínculos representáveis envolvendo velocidades, isto é, equações diferenciais da forma

$$g(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = 0, \tag{2.28}$$

que não podem ser reduzidos por uma integração à forma (2.27), são ditos não-holônomos.

Como exposto anteriormente, a transição da formulação Lagrangiana para a Hamiltoniana requer que as velocidades generalizadas possam ser expressas univocamente em termos dos momentos canônicos, ou seja, que a matriz hessiana W seja não singular. Entretanto, todas as teorias físicas modernas de significado fundamental são descritas por Lagrangianas com matriz hessiana *singular*. Nesse sentido, o conceito de vínculos visto anteriormente, que são de natureza cinemática, dá espaço a um novo tipo, proveniente de

uma descrição de sistemas dinâmicos, conhecido também como sistemas Hamiltonianos, desenvolvidos principalmente por Dirac [4].

Se a matriz hessiana é singular, isto é,

$$\det \mathbf{W} = 0, \quad (2.29)$$

então aparecerão relações funcionais entre os campos e momentos do tipo

$$\Pi(\phi, \pi) \approx 0. \quad (2.30)$$

Tais relações expressam o fato de que os momentos canônicos não podem ser todos resolvidos para as velocidades em função dos momentos, porque não constituem um conjunto de equações independentes. Além disso, decorrem unicamente da forma da Lagrangiana, e por isso recebe o nome de *vínculo primário*, devido a Bergmann [4]. O símbolo " $\approx$ " significa que tais relações são *fracamente* nulas sobre a hipersuperfície do espaço de fase, ou seja, que são restritas a valer zero, mas que tal constatação só pode ser feita após uma análise de consistência que veremos mais adiante.

Como vimos anteriormente, os vínculos devem ser levados em conta na construção das equações de movimento. Na presença destes, o Hamiltoniano não pode ser determinado univocamente a partir da forma usual, ou seja, por uma transformação de Legendre. Em vez disso, definimos um Hamiltoniano total como sendo uma extensão do Hamiltoniano canônico definido em (2.21), da forma

$$H_T = H + \xi \Pi, \quad (2.31)$$

sendo $\xi \equiv \xi(\phi, \pi)$ os chamados *multiplicadores de Lagrange*.

Dessa forma, devemos obter as equações de movimento a partir do novo Hamiltoniano. Novamente, partindo do princípio de Hamilton, considerando a ação dada por (2.22) e o Hamiltoniano por (2.31), as equações serão análogas a (2.26) com a contribuição adicional dos vínculos na forma

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\delta H}{\delta \pi} + \xi \frac{\delta \Pi}{\delta \pi}, \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi} - \xi \frac{\delta \Pi}{\delta \phi}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

É importante deixar claro que, caso haja vínculos adicionais da forma (2.30), estes devem ser implementados em (2.31) com seus respectivos multiplicadores de Lagrange como

forma de tornar o formalismo consistente. Podemos ainda escrever as relações (2.32) de uma forma mais compacta, através da definição de parênteses de Poisson. O parêntese de Poisson de duas variáveis dinâmicas é definido por

$$\{F, G\} = \int d^3y \left[\frac{\delta F}{\delta X_i(y)} \frac{\delta G}{\delta \Pi^i(y)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi^i(y)} \frac{\delta G}{\delta X_i(y)} \right], \quad (2.33)$$

onde X_i e Π^i são os conjuntos de variáveis canônicas e momentos canônicos, respectivamente, o que leva, para qualquer função $F(\phi, \pi)$ que não dependa explicitamente do tempo, a uma equação de movimento da forma

$$\dot{F} = \{F, H\} + \xi \{F, \Pi\} \approx \{F, H_T\}, \quad (2.34)$$

uma vez que cada termo $\{\xi, F\}\Pi$ é fracamente nulo.

Os parênteses de Poisson possuem certas propriedades que seguem diretamente de sua definição, a saber:

1. Anti-simetria: $\{A, B\} = -\{B, A\}$, onde $\{A, A\} = 0$;
2. Linearidade: $\{A + \alpha B, C\} = \{A, C\} + \alpha \{B, C\}$, α independente de (X_i, Π^i) ;
3. Produto: $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$;
4. Identidade de Jacobi: $\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$,

além de fornecer as relações fundamentais a seguir:

$$\begin{aligned} \{\phi_\alpha(x), \pi^\beta(y)\} &= \delta_\alpha^\beta \delta(x - y), \\ \{\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)\} &= 0, \\ \{\pi^\alpha(x), \pi^\beta(y)\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dessa forma, se tomarmos F em (2.34) como o conjunto dos Π , devemos ter $\dot{\Pi} \approx 0$ por consistência, ou seja, devem ser preservados no tempo para que não seja alterada a estrutura de vínculos. Logo, a condição de consistência é dada por

$$\{\Pi, H\} + \xi \{\Pi, \Pi'\} \approx 0. \quad (2.36)$$

Por conta dessa condição, somos levados a três casos distintos, de acordo com [3]:

- *Caso (i)*: As condições de consistência são identicamente satisfeitas. Neste caso, os únicos vínculos da teoria são os vínculos primários e os multiplicadores de Lagrange são arbitrários, de modo que a dinâmica contém funções arbitrárias do tempo;

- *Caso (ii)*: As condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange, caso a matriz $||\{\Pi, \Pi'\}||$ seja não singular;
- *Caso (iii)*: As condições de consistência geram vínculos secundários do tipo

$$\chi(\phi, \pi) \approx 0. \quad (2.37)$$

Os vínculos (2.37) recebem esse nome pois partem diretamente do emprego das equações de campo, e veremos que será o caso de interesse para o presente trabalho.

Da mesma forma que foi necessário calcular a preservação dos vínculos primários no tempo, para os vínculos secundários vamos ter

$$\dot{\chi} \approx \{\chi, H\} + \lambda\{\chi, \Pi'\} \approx 0. \quad (2.38)$$

Se recairmos nos casos (i) ou (ii) o processo é finalizado. Caso isso não ocorra, aparecendo outros vínculos secundários, repete-se o processo, conhecido como *algoritmo de Dirac-Bergmann* [4], até que não haja mais vínculos. Finalizado todos os estágios, a Hamiltoniana total fica expressa como

$$H_T \rightarrow \tilde{H}_T = H + \xi\Pi + \lambda\frac{d\Pi}{dt}. \quad (2.39)$$

Percebemos aqui o porquê de não considerarmos a *igualdade fortemente nula* anteriormente para os vínculos primários, pois teríamos apenas resultados triviais para a derivada temporal do vínculo, e todo o procedimento anterior (que é consistente) não faria sentido.

Uma classificação importante a se fazer com relação aos vínculos (2.30) e (2.37) é a que distingue vínculos de *primeira classe* de vínculos de *segunda classe*. De maneira geral, uma função $F(\phi, \pi)$ é dita de primeira classe se o seu parêntese de Poisson com qualquer um dos vínculos (seja ele primário ou secundário) é fracamente nulo:

$$\{F, \Pi^i\} \approx 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.40)$$

e de segunda classe se o seu parêntese de Poisson com pelo menos um dos vínculos não é fracamente nulo, ou seja, $\{F, \Pi^i\} \not\approx 0$ [3, 4, 38]. A Hamiltoniana total (2.39) é de primeira classe porque é a soma de H de primeira classe com uma combinação linear com coeficientes arbitrários de vínculos de primeira classe Π . Tal classificação será de grande interesse quando formos contar a quantidade de graus de liberdade para a RG modificada, no capítulo 5.

Capítulo 3

Formulação Covariante da TRG

A fim de comparação com resultados posteriores, é de total importância que façamos uma breve descrição acerca do formalismo covariante da Teoria da Relatividade Geral (TRG)[7–10]. A TRG foi estabelecida no ano de 1915 por Einstein em seu artigo [6] como complemento da sua Teoria da Relatividade Especial (TRE)[5] sem gravitação, postulada no ano de 1905.

A formulação covariante da TRG se baseia no conceito de *manifold* ou *variedade*. Uma variedade nada mais é do que um espaço contínuo que se parece localmente com o espaço euclidiano. Globalmente, ele pode se deformar, curvar, etc., contanto que seja contínuo, ou seja, que na vizinhança de cada ponto deste espaço seja possível definir um mapa suave para o espaço euclidiano que preserve derivadas de funções escalares naquele ponto. A suposição de continuidade, e portanto, diferenciabilidade, significa imediatamente que podemos definir formas e vetores.

Uma variedade diferenciável na qual um campo tensorial simétrico covariante de ordem 2, digamos $\mathbf{g}$, seja escolhido para atuar como a métrica em cada ponto é chamada de *manifold Riemanniano*, isso se a métrica for definida positivamente, ou seja, $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{A}) > 0$ para todo $\vec{A} \neq 0$. No caso da Relatividade Especial e Relatividade Geral, em que tem-se métricas indefinidas, estas são chamadas de *pseudo-riemannianas*.

Resumidamente, o espaço-tempo da Relatividade Geral é descrito por uma variedade pseudo-riemanniana dotada de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que fornece a distância no espaço-tempo entre dois pontos vizinhos separados por variações dx^μ das coordenadas através do chamado *intervalo de comprimento* (ds) dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

onde se convencionou a soma de Einstein em μ, ν .

Ao se comparar dois vetores na geometria, deve-se, inicialmente, fazer um transporte paralelo em um deles para que ambos se encontrem na mesma posição. O resultado desse transporte paralelo depende do caminho utilizado e irá incorporar os efeitos da geometria ao longo desse percurso. Para tanto, introduziremos o formalismo matemático adequado para espaços curvos.

3.1 Tensor métrico

Da relatividade especial, um tensor métrico, ou simplesmente métrica, é uma função bilinear que associa dois vetores a um número real. Esta grandeza é um importante objeto para o espaço curvo, representado pelas componentes $g_{\mu\nu}$, definido de tal forma que seja um tensor simétrico covariante de segunda ordem.

Uma característica útil da métrica é obtida colocando-a na sua forma canônica, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0) , \quad (3.2)$$

para um espaço-tempo de dimensão arbitrária, onde “diag” significa a matriz diagonal representada pelos seus autovalores. Se qualquer autovalor for zero, a métrica é dita “degenerada”, e sua inversa não existe. Se todos os sinais forem positivos, a métrica é dita *Euclidiana* ou *Riemanniana*, enquanto que se houver pelo menos um negativo, é chamada de *Lorentziana* ou *pseudo-Riemanniana*, que é de interesse de estudo da TRG. Além disso, ela também é contínua e não-degenerada, o que implica em

$$\det(g_{\mu\nu}) < 0 , \quad (3.3)$$

ou seja, para cada geometria tem-se uma métrica distinta.

Um resultado importante, mostrado em [7], é a relação entre o tensor métrico na vizinhança de um ponto P e a métrica de Minkowski, dada por

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} , \quad (3.4)$$

que implica na possibilidade de definir um espaço localmente plano ou inercial. Uma consequência direta desse resultado é fato de que a primeira derivada do tensor métrico sob tais condições deve ser nula, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(P) = 0 , \quad (3.5)$$

ao passo que a derivada segunda é diferente de zero. Grandezas tensoriais, como $g_{\mu\nu}$, têm a propriedade de que se todas as suas componentes forem nulas em um sistema de coordenadas, elas serão nulas em qualquer outro sistema. Um tensor é definido como tal se obedecer a seguinte lei de transformação de coordenadas de um referencial $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ [8]:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}, \quad (3.6)$$

se a transformação segue outra lei, não é tensor. Um fato interessante a se notar em (3.6) são índices sobrescritos e subscritos no tensor em questão. Os índices superiores recebem o nome de *contravariantes* (pois se transformarão de forma oposta ao vetor de base associado), enquanto os índices inferiores são ditos *covariantes*. Os tensores contravariantes são comumente representados da forma $(M, 0)$, sendo M a sua *ordem*, ou seja, a quantidade de índices superiores. Já os covariantes são da forma $(0, N)$. Além disso, para tensores *mistos*, ou seja, aqueles que possuem índices superiores e inferiores, podemos representar por (M, N) . A métrica $g_{\mu\nu}$ é um exemplo típico de tensor covariante $(0, 2)$, que tem ainda a função de mudar a ordem dos índices de tensores arbitrários, bastando aplicar a lei de transformação (3.6). Para o abaixamento de índice fazemos

$$g_{\mu\nu} T^\nu = T_\mu, \quad (3.7)$$

enquanto para o levantamento o procedimento é inverso,

$$g^{\mu\nu} T_\nu = T^\mu, \quad (3.8)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é definido como sendo a inversa da métrica.

3.2 Derivada covariante

Quando consideramos um sistema curvilíneo, os vetores de base deixam de ser constantes e passam a variar com a posição. Dessa forma, seja um 4-vetor $\vec{V}$ decomposto em termos dos vetores base $\vec{e}_\alpha$, a sua derivada com respeito a um 4-vetor x^β será dada por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \vec{e}_\alpha, \quad (3.9)$$

onde o símbolo $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ é chamado de *conexão*, e suas componentes são os *símbolos de Christoffel*. Este símbolo tem uma importante interpretação geométrica, pois traz consigo

informações sobre os efeitos de curvatura. Além disso, ele recebe esse nome pelo fato de ser usado para transportar vetores de um espaço tangente para outro [8]. Definimos o termo entre parênteses em (3.9) como a *derivada covariante* das componentes de um 4-vetor contravariante, expressa como

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha, \quad (3.10)$$

onde identificamos $\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \partial_\beta$, e portanto reescrevemos (3.9) da forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \nabla_\beta V^\alpha \vec{e}_\alpha. \quad (3.11)$$

O nome derivada covariante está relacionado ao fato de a expressão (3.11) ter a mesma forma tensorial em qualquer sistema de coordenadas, válida em todos eles, sendo essa uma de suas vantagens para o estudo matemático da TRG.

Em coordenadas Cartesianas, os vetores de base são constantes e, portanto, temos que a derivada covariante de um vetor nesta geometria é a própria derivada parcial de suas componentes, ou seja, de (3.10) temos que

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha. \quad (3.12)$$

Para um 4-vetor covariante, temos de forma direta que sua derivada covariante será dada por

$$\nabla_\mu B_\alpha = \partial_\mu B_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu B_\nu, \quad (3.13)$$

com o sinal de menos $(-)$ antes da conexão, o que diferencia as duas definições.

Uma vez que os eventos na TRG ocorrem num espaço-tempo descrito por uma variedade pseudo-riemanniana dotada de um tensor métrico do tipo $(0, 2)$, torna-se necessário obter a derivada covariante para essa classe de tensores. Generalizando os resultados anteriores, vamos ter que, para um tensor contravariante de ordem 2,

$$\nabla_\alpha A^{\mu\nu} = \partial_\alpha A^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu A^{\lambda\nu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu A^{\mu\lambda}, \quad (3.14)$$

enquanto que para um tensor covariante

$$\nabla_\alpha A_{\mu\nu} = \partial_\alpha A_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda A_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda A_{\mu\lambda}. \quad (3.15)$$

Para um tensor genérico de ordem (M, N) , com aplicações sucessivas do raciocínio anterior, temos que, de [8]:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N} = & \partial_\alpha (T^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}) + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu_M} T^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_N} \\ & - \Gamma_{\alpha\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_N}_{\lambda \dots \nu_N} - \Gamma_{\alpha\nu_N}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_N}_{\nu_1 \dots \lambda}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 Símbolo de Christoffel e a métrica

Considerando a propriedade da métrica de levantamento e abaixamento de índices de quadri-vetores ou tensores, vamos ter que para um vetor covariante V_α , sua derivada covariante pode ser expressa como

$$\nabla_\beta V_\alpha = g_{\alpha\mu} \nabla_\beta V^\mu. \quad (3.17)$$

Expandindo a derivada do lado esquerdo da igualdade,

$$\nabla_\beta V_\alpha = \nabla_\beta (g_{\alpha\mu} V^\mu) = \nabla_\beta g_{\alpha\mu} V^\mu + g_{\alpha\mu} \nabla_\beta V^\mu, \quad (3.18)$$

que deve ser igual a (3.17) se, e somente se,

$$\nabla_\beta g_{\alpha\mu} = 0, \quad (3.19)$$

uma vez que o vetor $\vec{V}$ é arbitrário. Este é um resultado muito importante para o formalismo da TRG, válido para todos os sistemas de coordenadas. Em coordenadas cartesianas vamos ter uma identidade trivial, uma vez que os símbolos de Christoffel são nulos, e portanto

$$\nabla_\beta g_{\alpha\mu} = \partial_\beta g_{\alpha\mu} = \partial_\beta \eta_{\alpha\mu} = 0. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) nos permite obter a derivada ordinária da métrica em função dos símbolos de Christoffel, uma vez que $\nabla_\beta g_{\alpha\mu} = 0$. De forma intuitiva, podemos pensar que o inverso também deva ser verdade, e de fato é. Para isso, devemos partir da seguinte propriedade, dada por [9]:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}, \quad (3.21)$$

que é uma consequência de termos um espaço com *torção nula*, ou seja,

$$S^\alpha_{\mu\nu} := \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = 0, \quad (3.22)$$

válido para qualquer sistema de coordenadas. Este resultado (3.21), juntamente com (3.19), nos garante que as geometrias a serem estudadas na TRG são as chamadas *geometrias Riemannianas*.

Aplicando a definição da derivada covariante no tensor métrico, e realizando permutações adequadas nos índices, vamos obter de forma direta a seguinte relação:

$$\Gamma^\nu_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\mu\beta}), \quad (3.23)$$

conhecido como *símbolo de Christoffel de 2º tipo*.

3.4 Tensores de Riemann, Ricci e Einstein

3.4.1 Tensor de Riemann e identidade de Bianchi

A derivada covariante, diferentemente da derivada parcial, em geral não é comutativa. Isso implica que para qualquer tensor $T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l}$, vamos ter uma relação do tipo

$$\nabla_\mu \nabla_\nu T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} \neq \nabla_\nu \nabla_\mu T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l}. \quad (3.24)$$

Dada as componentes de um campo vetorial $\vec{V}$, vamos analisar a dupla derivada covariante sob elas, como mostra a eq. (3.24):

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu &= \partial_\alpha (\nabla_\beta V^\mu) + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \nabla_\beta V^\sigma - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \nabla_\sigma V^\mu \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta V^\mu + (\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\mu_{\beta\sigma} \partial_\alpha V^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \partial_\beta V^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\rho\beta} V^\rho \\ &\quad - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \partial_\sigma V^\mu - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \Gamma^\mu_{\sigma\rho} V^\rho. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Permutando α com β , teremos

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu &= \partial_\beta \partial_\alpha V^\mu + (\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \partial_\beta V^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \partial_\alpha V^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\rho\alpha} V^\rho \\ &\quad - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma V^\mu - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\sigma\rho} V^\rho, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e, portanto,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = (\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\sigma}) V^\sigma, \quad (3.27)$$

onde, ao subtrair as igualdades (3.25) e (3.26), considerou-se as simetrias nos índices covariantes das conexões e a comutatividade do produto entre elas, além da comutatividade das derivadas parciais, e a mudança de índice mudo, o que simplificou consideravelmente nossa expressão final. Podemos reescrever a última equação acima como:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma, \quad (3.28)$$

onde

$$R^\mu_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \quad (3.29)$$

é o chamado *tensor de Riemann* ou *tensor de curvatura* na sua forma geral, válido em qualquer sistema de coordenadas. O tensor de Riemann descreve a mudança nas componentes de um vetor quando este é transportado paralelamente em um caminho fechado numa dada geometria. Caso esta geometria seja plana, vamos ter:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0. \quad (3.30)$$

Para obter a expressão (3.29) em termos da métrica, tomemos a derivada da conexão (3.23):

$$\partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (\partial_\beta \partial_\sigma g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\sigma g_{\nu\beta}) . \quad (3.31)$$

Uma vez que a segunda derivada de $g_{\mu\nu}$ não desaparece em um ponto P da variedade, ao contrário da primeira, vamos ter, substituindo (3.31) em (3.29), no referencial inercial:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma \partial_\alpha g_{\nu\beta}) - \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (\partial_\alpha \partial_\beta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma \partial_\beta g_{\nu\alpha,\sigma\beta}) . \quad (3.32)$$

Usando o fato da métrica $g_{\mu\nu}$ ser simétrica, e suas derivadas parciais sempre comutarem, ou seja,

$$\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} = \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} , \quad (3.33)$$

nós encontramos no ponto P

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma \partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\sigma \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\sigma\alpha}) , \quad (3.34)$$

que é o tensor de Riemann geral em função da métrica inversa e derivadas parciais da métrica. Uma vez que (3.34) é uma equação tensorial, esta é válida para qualquer sistema de coordenadas. Dado que a métrica tem a função de abaixamento e levantamento dos índices dos tensores, faremos isso para o tensor de Riemann, a obter:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^\lambda_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\beta}) . \quad (3.35)$$

Permutando seus índices em cada par e entre eles,

$$R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (3.36)$$

$$R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (3.37)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (3.38)$$

percebemos que são *antissimétricos* na troca dos índices de cada par, e *simétricos* na troca dos pares. Sendo assim, é fácil verificar que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0 , \quad (3.39)$$

conhecida como *primeira identidade de Bianchi*, que pode ser reescrita de maneira mais compacta como *

$$R_{\mu[\nu\alpha\beta]} = 0 . \quad (3.40)$$

*A notação dos índices entre colchetes indica uma permutação antissimétrica.

Essas relações de simetria nos permitem que, de 256 componentes de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, tenhamos apenas 20 independentes. Em adição a essas identidades algébricas, a (3.39) obedece a uma identidade diferencial, que restringe seus valores relativos em diferentes pontos, conhecida como *segunda identidade de Bianchi*, expressa por

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = 0. \quad (3.41)$$

3.4.2 Tensor e escalar de Ricci

O tensor de Ricci nada mais é do que uma contração do primeiro com o terceiro índice do tensor de Riemann. Fazendo isso com a equação (3.35),

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = R^\alpha{}_{\nu\alpha\beta}. \quad (3.42)$$

De forma explícita,

$$R_{\nu\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma \partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\sigma \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\sigma\alpha}). \quad (3.43)$$

Contraindo agora os dois índices do tensor de Ricci, vamos obter o *escalar de Ricci*, dado por:

$$R = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} = R^\nu{}_\nu. \quad (3.44)$$

3.4.3 Tensor de Einstein

Como motivação para a definição deste tensor, devemos fazer uso da identidade de Bianchi (3.41). Aplicando a contração de Ricci a essa expressão, obtemos

$$g^{\mu\alpha} [\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda}] = 0, \quad (3.45)$$

e, portanto,

$$\nabla_\lambda R_{\nu\beta} - \nabla_\beta R_{\nu\lambda} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\nu\beta\lambda} = 0, \quad (3.46)$$

que é uma expressão conhecida como *identidade de Bianchi contraída*. Para obter este resultado, fez-se uso da propriedade de levantamento de índice pela métrica e antissimetria nos pares de índices do tensor de Riemann. Realizando uma nova contração, agora em (3.46) por $g^{\nu\beta}$, vamos ter

$$\nabla_\lambda R - \nabla_\beta R^\beta{}_\lambda - \nabla_\alpha R^\alpha{}_\lambda = 0. \quad (3.47)$$

Fazendo $\beta \rightarrow \alpha$ na equação acima, teremos:

$$\nabla_\lambda R - 2\nabla_\alpha R^\alpha_\lambda = 0, \quad (3.48)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha 2R^\alpha_\lambda - \delta^\alpha_\lambda \nabla_\alpha R &= 0, \\ \nabla_\alpha R^\alpha_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\lambda \nabla_\alpha R &= 0, \\ \nabla_\alpha \left(R^\alpha_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\lambda R \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde iremos denotar o termo entre parênteses por:

$$G^\alpha_\lambda = R^\alpha_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\lambda R. \quad (3.50)$$

Contraindo os dois lados da igualdade acima pela métrica, ela irá abaixar o índice α , da seguinte forma

$$g_{\alpha\nu} G^\alpha_\lambda = g_{\alpha\nu} R^\alpha_\lambda - \frac{1}{2}g_{\alpha\nu} \delta^\alpha_\lambda R, \quad (3.51)$$

e portanto,

$$G_{\nu\lambda} = R_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda} R, \quad (3.52)$$

que é o conhecido *tensor de Einstein* na sua forma usual.

A equação (3.49) é equivalente a ter

$$\nabla_\mu G^\mu_\lambda = 0, \quad (3.53)$$

que corresponde à quadri-divergência da equação de campo de Einstein no vácuo, conforme veremos a seguir. Se consideramos ainda a equação de Einstein geral, ou seja, na presença de matéria

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.54)$$

onde $\kappa = 8\pi G$ é uma constante de proporcionalidade, e G a constante gravitacional de Newton, obtemos uma outra identidade fundamental da RG, a saber

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad (3.55)$$

que representa a conservação local do momento e energia, de acordo com [7].

As equações de campo de Einstein (3.54) descrevem como a geometria do espaço-tempo é influenciada pela distribuição de massa e energia. Estas, por sua vez, representam um

conjunto de dez equações independentes não-lineares para o tensor métrico. No entanto, a identidade (3.53) representa um conjunto de quatro vínculos para a métrica, de modo que apenas seis equações são de fato independentes em (3.54).

Uma propriedade fundamental da RG que está intrinsicamente conectada a (3.54) é a invariância por difeomorfismo. Devido à sua estrutura tensorial descrita pelo tensor métrico e a conexão de Levi-Civita, as equações de campo de Einstein são invariantes sob mapeamentos da variedade a si mesma. Ou seja, um difeomorfismo não altera as propriedades físicas observáveis das soluções das equações de campo de Einstein.

Matematicamente, podemos expressar um difeomorfismo da forma [52]

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta), \quad (3.56)$$

que, em contextos específicos, são interpretadas como *transformação de calibre*, onde $|\xi^a(x^\beta)| \ll 1$ é um vetor cuja suas componentes são funções da posição. Assumindo também $|\partial_\beta \xi^a| \ll 1$, as matrizes de transformações ficam

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (3.58)$$

onde considera-se apenas derivadas de primeira ordem em ξ^a . Uma consequência direta é que a métrica se transformará como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \\ &= (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \xi^\rho) (\delta_\nu^\sigma - \partial_\nu \xi^\sigma) g_{\rho\sigma} \\ &= g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\mu \xi_\nu, \end{aligned} \quad (3.59)$$

o que continua representando o mesmo espaço-tempo fisicamente. Em termos da derivada de Lie, que será explicada adiante, podemos reescrever a expressão acima da forma

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x). \quad (3.60)$$

3.5 Difeomorfismos e derivada de Lie

Como mostrado na seção (3.2), a noção de derivada de um campo vetorial, ou de uma maneira mais geral, um campo tensorial numa variedade $\mathcal{M}$ requer a introdução

de alguma estrutura extra em $\mathcal{M}$. Essa estrutura é definida como a conexão afim, o símbolo de Christoffel. Outra possibilidade de estrutura extra é um campo vetorial de “referência”, com respeito do qual uma derivada é definida. Este é o conceito da *derivada de Lie* que discutiremos aqui.

De maneira geral, se definirmos um mapa $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que ϕ seja inversível (e ϕ e ϕ^{-1} sejam suaves, ou seja, infinitamente diferenciáveis e contínuas), então definimos um difeomorfismo da variedade $\mathcal{M}$ para si mesma $\mathcal{M}$, pares de pontos na mesma variedade. O conceito de difeomorfismo permite então mover tensores arbitrários para frente (*push-forward*) e para trás (*pullback*) na variedade. Especificamente, para um campo tensorial (k, l) da forma $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ em $\mathcal{M}$, nós definimos o seu pushforward como [8]

$$(\phi_* T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}, \quad (3.61)$$

e o pullback da mesma maneira, uma vez que o pullback (ϕ^*) é o mesmo pushforward via o mapeamento inverso $[\phi^{-1}]_*$.

Por conta disso, podemos calcular a diferença entre o valor de $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x)$ em algum ponto $p \in \mathcal{M}$ e $\phi^*[T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi(p))]$, seu valor em $\phi(p) \in \mathcal{M}$ movido para p , como mostra a figura (3.1). Isso sugere que nós podemos definir um outro tipo de operador diferencial de campos tensoriais, tal que categorize a razão da mudança de um tensor sob o fluxo de difeomorfismo. Para tanto, definimos uma família de parâmetros de difeomorfismo, denotada por ϕ_t , que pode ser pensada como um mapa suave $\mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ nós temos um difeomorfismo ϕ_t .

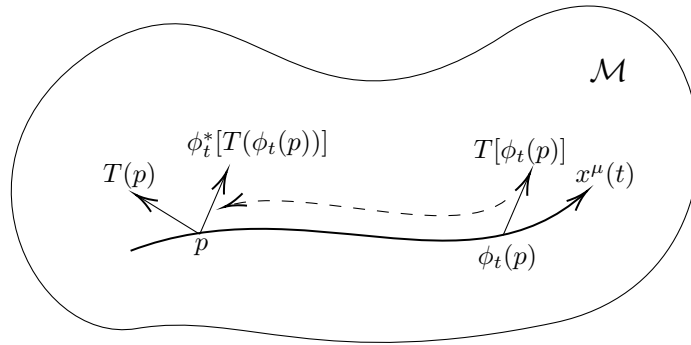


Figura 3.1 – Representação geométrica de um difeomorfismo ϕ_t .

A família de parâmetros pode ser pensada como surgindo de campos vetoriais e vice-

versa, de modo que $\phi_t(p)$ descreva uma curva em $\mathcal{M}$. Se definirmos então um campo vetorial $V^\mu = dx^\mu/dt$ para ser o conjunto de vetores tangentes a cada uma dessas curvas a cada ponto, então a diferença que estamos procurando é dada por

$$\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(p) = \phi_t^*[T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi(p))] - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(p), \quad (3.62)$$

o que permite definir a derivada de Lie de um tensor ao longo do campo vetorial como

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}}{t} \right). \quad (3.63)$$

A derivada de Lie é, de fato, uma noção mais primitiva do que a derivada covariante, uma vez que esta não requer a especificação de uma conexão. De maneira geral, podemos escrever a derivada de Lie de um campo tensorial arbitrário da forma [8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= V^\sigma \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \dots \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} \\ &\quad + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} + \dots, \end{aligned} \quad (3.64)$$

que também pode ser dada em função de uma derivada covariante. Em particular, para uma função escalar

$$\mathcal{L}_V f = V(f) = V^\mu \partial_\mu f. \quad (3.65)$$

Uma expressão particular bastante usual é a derivada de Lie da métrica, como pode ser visto em (3.60). Aplicando a definição (3.64), vamos ter que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V g_{\mu\nu} &= V^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda) g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu, \end{aligned} \quad (3.66)$$

ou

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)}, \quad (3.67)$$

onde ∇_μ é a derivada covariante definida anteriormente. Portanto, dizer que a RG é invariante por difeomorfismo significa dizer que a teoria é livre de “geometria privilegiada” [8], uma vez que se o universo é representado por uma variedade $\mathcal{M}$ com uma métrica $g_{\mu\nu}$, então o conjunto $(\mathcal{M}, \phi^* g_{\mu\nu})$ transformado por ϕ representa a mesma situação física.

Capítulo 4

Formulação Hamiltoniana da TRG

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo central para o desenvolvimento deste trabalho. A formulação Hamiltoniana da RG é a base para muitos protótipos de gravidade quântica [34], uma teoria ainda não conhecida que busca a descrição quântica do campo gravitacional, bem como de teorias de campos acopladas à gravidade (ver [35] para um exemplo envolvendo a teoria de Schrödinger) e teorias da gravidade modificadas, em particular [36, 37]. Tais esforços são feitos em virtude da já sucedida eletrodinâmica quântica (QED), que fornece a descrição quântica do eletromagnetismo. Na verdade, a busca por uma teoria que sintetize todas as ideias da física fundamental tem sido fortemente almejada há algum tempo, desde o advento da física moderna. O formalismo ADM fornece um conjunto de variáveis canônicas adequadas e um meio de obter o Hamiltoniano da RG. Para se construir este formalismo foi necessário desenvolver uma teoria para sistemas hamiltonianos vinculados, trabalho este feito por Dirac [13, 14] e também bastante detalhado em [38], uma vez que a RG é uma teoria invariante por reparametrização de coordenadas. Para abordar o formalismo canônico (Hamiltoniano) devemos assumir que o espaço-tempo quadri-dimensional $\mathcal{M}$ tem uma topologia especial $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma_t$, onde $\mathbb{R}$ é um espaço unidimensional, indicado pela direção normal a Σ_t em cada ponto, e Σ_t uma família contínua de hipersuperfícies arbitrárias tipo-espaço tridimensionais imersas em $\mathcal{M}$, de acordo com Arnowitt, Deser e Misner [15, 16].

4.1 Folheamento da variedade em hipersuperfícies

Para a obtenção do Hamiltoniano da TRG, consideramos folhear o espaço-tempo quadri-dimensional em uma família contínua de hipersuperfícies tipo-espaço. Dessa forma, devemos fazer um estudo preliminar de hipersuperfícies.

Em uma variedade de espaço-tempo quadri-dimensional, uma hipersuperfície é uma sub-variedade tridimensional que pode ser do tipo-tempo, tipo-espaço, ou nula. Uma hipersuperfície Σ particular é selecionada colocando uma restrição nas coordenadas

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \quad (4.1)$$

ou dando equações paramétricas da forma

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \quad (4.2)$$

onde y^a ($a = 1, 2, 3$) são coordenadas intrínsecas à hipersuperfície. Por exemplo, uma 2-esfera em um espaço plano tridimensional pode ser descrita por $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, onde R é o raio da esfera, ou por $x = R \sin \theta \cos \phi$, $y = R \sin \theta \sin \phi$ e $z = R \cos \theta$, onde os ângulos θ e ϕ são coordenadas intrínsecas. A relação $x^\alpha(y^a)$ descreve curvas inteiramente contidas em Σ .

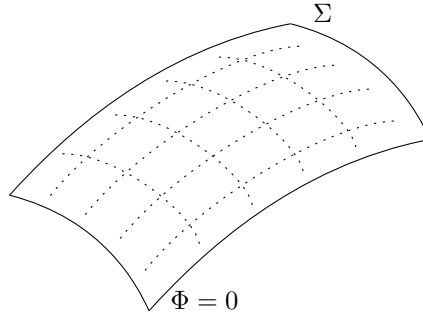


Figura 4.1 – Hipersuperfície tridimensional no espaço-tempo.

4.2 Vetor normal

O vetor $\partial_\alpha \Phi$ é normal à hipersuperfície, porque o valor Φ muda apenas na direção ortogonal a Σ . Um normal unitário n_α pode ser introduzido se a hipersuperfície é não nula. Isso é definido de modo que

$$n^\alpha n_\alpha = \epsilon, \quad (4.3)$$

onde $\epsilon = -1$ se Σ é do tipo-espaço, e $\epsilon = +1$ se Σ é tipo-tempo. Demandamos que n^α aponte na direção crescente de Φ : $n^\alpha \partial_\alpha \Phi > 0$. Com isso, podemos ver que n^α é dado por

$$n_\alpha = \frac{\epsilon \partial_\alpha \Phi}{|g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi|^{\frac{1}{2}}} \quad (4.4)$$

se a hipersuperfície for tipo-espaço ou tipo-tempo.

4.3 Métrica induzida

A métrica intrínseca à hipersuperfície Σ é obtida restringindo o elemento de linha aos deslocamentos confinados à hipersuperfície. Relembrando as equações paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$, temos que os vetores

$$q_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad (4.5)$$

são definidos como projetores, e são tangentes às curvas contidas em Σ . Isto implica que $q_a^\alpha n_\alpha = 0$ no caso de uma hipersuperfície tipo-espaço. Agora, para deslocamentos em Σ , nós temos

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= g_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta dy^a dy^b \\ &= q_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde definimos

$$q_{ab} = g_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta \quad (4.7)$$

como a *métrica induzida*, ou primeira forma fundamental da hipersuperfície. A quantidade q_{ab} é um escalar com respeito a transformações $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ das coordenadas do espaço-tempo, mas se comporta como um tensor sob transformações $y^a \rightarrow y^{a'}$ das coordenadas da hipersuperfície. Nos referimos a tal objeto como um *tri-tensor*.

É interessante, ainda, explicitarmos a relação para o inverso da métrica, dada por [11]

$$g^{\alpha\beta} = \epsilon n^\alpha n^\beta + q^{ab} q_a^\alpha q_b^\beta, \quad (4.8)$$

denominada *relação de completeza*, onde q^{ab} é o inverso da métrica induzida definida em (4.7).

4.4 Campos tensoriais tangentes

Uma vez que somos apresentados a uma hipersuperfície Σ , é comum a situação de termos campos tensoriais $A^{\alpha\beta\dots}$ que são definidos apenas em Σ e que são puramente tangentes à hipersuperfície. Tais tensores admitem a decomposição

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} q_a^\alpha q_b^\beta \dots, \quad (4.9)$$

onde as quantidades q_a^α podem ser interpretados como vetores de base em Σ . A equação acima implica que $A^{\alpha\beta\dots} n_\alpha = A^{\alpha\beta\dots} n_\beta = \dots = 0$, o que confirma que $A^{\alpha\beta}$ é tangente à hipersuperfície.

Nota-se que um tensor arbitrário $T^{\alpha\beta}$ pode sempre ser projetado para a hipersuperfície, de modo que apenas suas componentes tangenciais sobrevivem. A quantidade que efetua essa projeção é $q^{\alpha\beta} = q^{ab} q_a^\alpha q_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \epsilon n^\alpha n^\beta$, e $q_\mu^\alpha q_\nu^\beta \dots T^{\mu\nu}$ é evidentemente tangente à hipersuperfície.

As projeções

$$A_{\alpha\beta\dots} q_a^\alpha q_b^\beta \dots = A_{ab\dots} \equiv q_{am} q_{bn} \dots A^{mn} \quad (4.10)$$

dão o tri-vetor $A^{ab\dots}$ associado com $A^{\alpha\beta\dots}$. Dessa forma, vemos a equivalência entre um campo tensorial tangente $A^{\alpha\beta\dots}$ e um tri-vetor $A^{ab\dots}$. Enfatizamos ainda que enquanto $A^{ab\dots}$ se comporta como um tensor sob a transformação $y^a \rightarrow y^{a'}$ das coordenadas intrínsecas a Σ , ele é um escalar sob a transformação $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ das coordenadas do espaço-tempo.

4.5 Derivada covariante intrínseca

Queremos agora examinar como os campos tensoriais tangentes são diferenciáveis. Nosso objetivo é relacionar a derivada covariante de $A^{\alpha\beta\dots}$ (com respeito à conexão que é compatível com a métrica do espaço-tempo $g_{\alpha\beta}$) à derivada covariante de $A^{ab\dots}$, definida em termos de uma conexão que é compatível com a métrica induzida q_{ab} . Por simplicidade nós devemos restringir nossa atenção ao caso do campo vetorial tangente A^α , de tal modo que

$$A^\alpha = A^a q_a^\alpha, \quad A^\alpha n_\alpha = 0, \quad A_a = A_\alpha q_a^\alpha. \quad (4.11)$$

Definimos a *derivada covariante intrínseca* de um tri-vetor A_a como sendo a projeção de $\nabla_\beta A_\alpha$ na hipersuperfície, da forma:

$$D_b A_a = (\nabla_\beta A_\alpha) q_a^\alpha q_b^\beta. \quad (4.12)$$

Para calcularmos $D_b A_a$ em função da conexão compatível com q_{ab} , examinaremos inicialmente o lado direito da equação acima:

$$\begin{aligned}
(\nabla_\beta A_\alpha) q_a^\alpha q_b^\beta &= \nabla_\beta (A_\alpha q_a^\alpha) q_b^\beta - A_\alpha (\nabla_\beta q_a^\alpha) q_b^\beta \\
&= (\partial_\beta A_\alpha) q_a^\alpha - (\nabla_\beta q_{a\gamma}) q_b^\beta A^\gamma_c q_c^\gamma \\
&= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - (\nabla_\beta q_{a\gamma}) q_b^\beta q_c^\gamma A^c \\
&= \partial_b A_a - \Gamma_{cab} A^c,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde utilizou-se a definição de integração por partes * para reescrever os termos da primeira linha da igualdade acima, e definimos

$$\Gamma_{cab} = (\nabla_\beta q_{a\gamma}) q_b^\beta q_c^\gamma, \tag{4.16}$$

de modo que

$$D_b A_a = \partial_b A_a - \Gamma_{ab}^c A_c, \tag{4.17}$$

que é uma expressão familiar para a derivada covariante no espaço-tempo.

A expressão para a conexão pode ficar explícita em termos da métrica induzida. Para tanto, considera-se que a derivada covariante intrínseca da métrica induzida seja nula, ou seja,

$$D_c q_{ab} = \nabla_\gamma (q_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma) = 0, \tag{4.18}$$

da mesma forma que $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ no espaço-tempo. De fato, trabalhando com o lado direito da equação acima, vamos ter

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma (q_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma) &= \nabla_\gamma [(g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta) q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma] \\
&= -\epsilon (n_\beta \nabla_\gamma n_\alpha + n_\alpha \nabla_\gamma n_\beta) q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

*O termo $(\nabla_\beta A_\alpha) q_a^\alpha q_b^\beta = \nabla_\beta (A_\alpha q_a^\alpha) q_b^\beta - q_a^\alpha A_\alpha (\nabla_\beta q_b^\beta) - q_b^\beta A_\alpha (\nabla_\beta q_a^\alpha)$, que após uma integração por partes elimina o termo de derivada total. Em seguida, consideramos reescrever o segundo termo do lado direito da igualdade

$$-q_a^\alpha A_\alpha (\nabla_\beta q_b^\beta) = -\nabla_\beta (A_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta) + q_b^\beta \nabla_\beta (q_a^\alpha A_\alpha), \tag{4.14}$$

de modo que novamente após uma integração por partes, elimina-se o termo de derivada total, e ficamos com

$$(\nabla_\beta A_\alpha) q_a^\alpha q_b^\beta = q_b^\beta \nabla_\beta (q_a^\alpha A_\alpha) - q_b^\beta A_\alpha (\nabla_\beta q_a^\alpha). \tag{4.15}$$

uma vez que $n_\alpha q_a^\alpha = 0$. Sendo assim, da expressão (4.17) para a derivada covariante intrínseca de um campo tensorial na hipersuperfície, temos que (4.18) pode ser reescrita como:

$$D_c q_{ab} = \partial_c q_{ab} - \Gamma_{ac}^d q_{bd} - \Gamma_{bc}^d q_{ad} = 0, \quad (4.20)$$

e portanto,

$$\partial_c q_{ab} = \Gamma_{ac}^d q_{bd} + \Gamma_{bc}^d q_{ad}. \quad (4.21)$$

Permutando os índices da métrica, obtemos

$$\partial_b q_{ac} = \Gamma_{ab}^d q_{cd} + \Gamma_{cb}^d q_{ad}, \quad (4.22)$$

$$-\partial_a q_{cb} = -\Gamma_{ca}^d q_{bd} - \Gamma_{ba}^d q_{cd}, \quad (4.23)$$

de forma que, somando as três últimas equações acima, obtemos a expressão para a conexão em termos da métrica induzida, dada por

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\partial_c q_{ab} + \partial_b q_{ac} - \partial_a q_{cb}), \quad (4.24)$$

que é análoga a (3.23) obtida a partir do formalismo covariante da TRG.

4.6 Curvatura extrínseca

As quantidades $D_b A_a = \nabla_\beta A_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta$ são as componentes tangenciais do vetor $\nabla_\beta A^\alpha q_b^\beta$. A questão que queremos investigar agora é se este vetor possui também uma componente normal.

Para responder isso, nós reescrevemos $\nabla_\beta A^\alpha q_b^\beta$ como $g_\mu^\alpha \nabla_\beta A^\mu q_b^\beta$ e decompomos a métrica nas partes normal e tangencial, conforme relações anteriores. Isso dá

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A^\alpha q_b^\beta &= (\epsilon n^\alpha n_\mu + q^{am} q_a^\alpha q_{m\mu}) \nabla_\beta A^\mu q_b^\beta \\ &= \epsilon (n_\mu \nabla_\beta A^\mu q_b^\beta) n^\alpha + q^{am} (\nabla_\beta A_\mu q_m^\mu q_b^\beta) q_a^\alpha. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Vemos que, enquanto o segundo termo é tangente à hipersuperfície, o primeiro termo é normal à ela. Utilizando então a expressão (4.17) para a derivada covariante intrínseca, e o fato de A^μ ser ortogonal a n^μ :

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A^\alpha q_b^\beta &= -\epsilon (\nabla_\beta n_\mu A^\mu q_b^\beta) n^\alpha + q^{am} D_b A_m q_a^\alpha \\ &= D_b A^a q_a^\alpha - \epsilon A^a (\nabla_\beta n_\mu q_a^\mu q_b^\beta) n^\alpha. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Neste ponto, introduzimos o tri-tensor

$$K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta, \quad (4.27)$$

chamado de *curvatura extrínseca*, ou segunda forma fundamental da hipersuperfície Σ . Em termos deste, escrevemos

$$\nabla_\beta A^\alpha q_b^\beta = D_b A^\alpha q_a^\alpha - \epsilon A^\alpha K_{ab} n^\alpha, \quad (4.28)$$

e vemos que $D_b A^\alpha$ dá a parte puramente tangencial do campo vetorial, enquanto $-\epsilon A^\alpha K_{ab}$ representa a componente normal. Com isso, podemos ainda concluir que a componente normal desaparece se e somente se a curvatura extrínseca desaparecer.

A curvatura extrínseca é uma quantidade muito importante. Podemos provar que ela é um tensor simétrico. Para isso, da equação (4.27), temos

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \nabla_\beta (n_\alpha q_a^\alpha) - n_\alpha \nabla_\beta q_a^\alpha q_b^\beta = -n_\alpha \nabla_\beta q_a^\alpha q_b^\beta = -n_\alpha \nabla_\beta q_b^\alpha q_a^\beta = \nabla_\beta n_\alpha q_b^\alpha q_a^\beta \\ &= K_{ba}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde considerou-se $n_\alpha q_a^\alpha = 0$. Essa propriedade de simetria da curvatura extrínseca dá origem às relações

$$K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}) q_a^\alpha q_b^\beta, \quad (4.30)$$

em que

$$\mathcal{L}_n g_{\alpha\beta} = n^\mu \nabla_\mu g_{\alpha\beta} + (\nabla_\alpha n^\mu) g_{\mu\beta} + (\nabla_\beta n^\mu) g_{\mu\alpha} = \nabla_\alpha n_\beta + \nabla_\beta n_\alpha = 2\nabla_{(\alpha} n_{\beta)}, \quad (4.31)$$

é a derivada de Lie do tensor métrico ao longo de n^μ , de acordo com a definição (3.63), o que mostra que K_{ab} está intimamente relacionado à derivada normal do tensor métrico. Também notamos a relação

$$K = q^{ab} K_{ab} = q^{\alpha\beta} \nabla_\beta n_\alpha = \nabla_\alpha n^\alpha, \quad (4.32)$$

o qual mostra que o traço K pode ser definido como a expansão de uma congruência de geodésicas (ou seja, um conjunto de curvas integrais de um campo vetorial) que cruza a hipersuperfície ortogonalmente (para que seus vetores tangentes sejam iguais a n^α na hipersuperfície).

Desses resultados, concluimos que a hipersuperfície é convexa se $K > 0$ (a congruência é divergente), ou concava se $K < 0$ (a congruência é convergente). Veremos que enquanto

q_{ab} está preocupada com aspectos puramente intrínsecos da geometria de uma hipersuperfície, K_{ab} está preocupado com aspectos extrínsecos — da maneira pela qual a hipersuperfície está inserida na variedade do espaço-tempo. Juntos, esses tensores fornecem uma caracterização virtualmente completa da hipersuperfície.

Para ilustrar melhor as definições acima, consideremos algumas hipersuperfícies de um espaço que temos mais familiaridade, a saber, o espaço $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.6.1. *Um plano Σ como uma hipersuperfície do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$:*

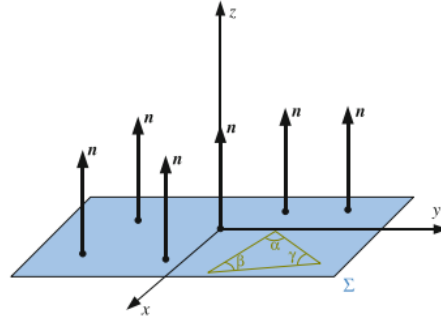


Figura 4.2 – Plano Σ como uma hipersuperfície do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Fonte: [12].

Nesse caso, notemos que o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ permanece constante ao longo de Σ . Isso implica que a curvatura extrínseca de Σ é identicamente nula. Além disso, a soma dos ângulos de um triângulo definido em Σ é $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, o que mostra que a curvatura intrínseca também é nula.

Exemplo 4.6.2. *Cilindro Σ como uma hipersuperfície do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$:*

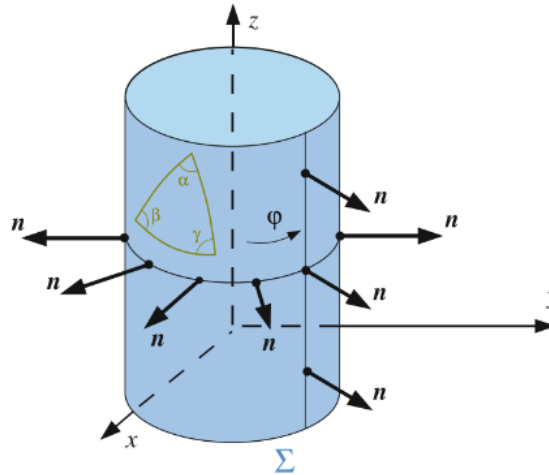


Figura 4.3 – Cilindro Σ como uma hipersuperfície do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Fonte: [12].

Nesse caso, o vetor unitário $\mathbf{n}$ permanece constante quando z varia a um φ fixo, enquanto sua direção muda para um φ variando a um z fixo. Consequentemente, a curvatura extrínseca é nula na direção z , mas não na direção φ . Além disso, assim como no exemplo anterior, a curvatura intrínseca continua identicamente nula.

No entanto, se considerarmos como exemplo uma esfera Σ como hipersuperfície em $\mathbb{R}^3$, como feito em [12], veremos que tanto a curvatura extrínseca como a intrínseca são não-nulas em todas as direções.

4.7 Equações de Gauss-Codazzi

4.7.1 Forma geral

Após definirmos a métrica induzida q_{ab} , associando a ela uma derivada covariante intrínseca compatível, podemos pensar em definir um tensor de curvatura puramente intrínseco da forma

$$D_a D_b A^c - D_b D_a A^c = -R_{dab}^c A^d, \quad (4.33)$$

de forma totalmente análogo à definição para o caso de uma geometria Riemanniana (3.28). De maneira direta, podemos escrever este tensor como

$$R_{dab}^c = \partial_a \Gamma_{db}^c - \partial_b \Gamma_{da}^c + \Gamma_{ma}^c \Gamma_{db}^m - \Gamma_{mb}^c \Gamma_{da}^m, \quad (4.34)$$

sendo agora as componentes dos símbolos de Christoffel dadas por (4.24). A questão que queremos examinar agora é se este tensor, denominado tensor de Riemann tri-dimensional, pode ser expresso em termos de $R_{\delta\alpha\beta}^\gamma$ — a versão quadri-dimensional — restrito a Σ .

Para responder isso, iniciamos com a identidade

$$\nabla_\gamma (\nabla_\beta q_a^\alpha q_b^\beta) q_c^\gamma = \nabla_\gamma (\Gamma_{ab}^d q_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha) q_c^\gamma, \quad (4.35)$$

que segue imediatamente da relação

$$\nabla_\beta A^\alpha q_b^\beta = D_b A^\alpha q_a^\alpha - \epsilon A^\alpha K_{ab} n^\alpha, \quad (4.36)$$

trocando A^α por q_a^α , e utilizando a definição

$$D_b A_a = \partial_b A_a - \Gamma_{ab}^c A_c. \quad (4.37)$$

Desenvolvendo inicialmente o lado esquerdo de (4.35),

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma(\nabla_\beta q_a^\alpha q_b^\beta)q_c^\gamma &= (\nabla_\gamma \nabla_\beta q_a^\alpha)q_b^\beta q_c^\gamma + \nabla_\beta q_a^\alpha \nabla_\gamma q_b^\beta q_c^\gamma \\
&= (\nabla_\gamma \nabla_\beta q_a^\alpha)q_b^\beta q_c^\gamma + \nabla_\beta q_a^\alpha (\Gamma_{bc}^d q_d^\beta - \epsilon K_{bc} n^\beta) \\
&= (\nabla_\gamma \nabla_\beta q_a^\alpha)q_b^\beta q_c^\gamma + \nabla_\beta q_a^\alpha q_d^\beta \Gamma_{bc}^d - \nabla_\beta q_a^\alpha \epsilon K_{bc} n^\beta \\
&= (\nabla_\gamma \nabla_\beta q_a^\alpha)q_b^\beta q_c^\gamma + \Gamma_{bc}^d (\Gamma_{ad}^e q_e^\alpha - \epsilon K_{ad} n^\alpha) - \epsilon K_{bc} \nabla_\beta q_a^\alpha n^\beta.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Em seguida, o lado direito

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma(\Gamma_{ab}^d q_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha)q_c^\gamma &= \nabla_\gamma(\Gamma_{ab}^d q_d^\alpha)q_c^\gamma - \nabla_\gamma(\epsilon K_{ab} n^\alpha)q_c^\gamma \\
&= \nabla_\gamma \Gamma_{ab}^d q_c^\gamma q_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d \nabla_\gamma q_d^\alpha q_c^\gamma - (\epsilon \nabla_\gamma K_{ab} q_c^\gamma n^\alpha + \epsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\alpha q_c^\gamma) \\
&= \partial_c \Gamma_{ab}^d q_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{dc}^e q_e^\alpha - \epsilon K_{dc} n^\alpha) - \epsilon \partial_c K_{ab} n^\alpha - \epsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\alpha q_c^\gamma.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Igualando agora (4.38) e (4.39), isolando $\nabla_\gamma \nabla_\beta q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma$ no lado esquerdo, vamos ter:

$$\begin{aligned}
(\nabla_\gamma \nabla_\beta q_a^\alpha)q_b^\beta q_c^\gamma &= \partial_c \Gamma_{ab}^d q_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{dc}^e q_e^\alpha - \epsilon K_{dc} n^\alpha) - \epsilon \partial_c K_{ab} n^\alpha \\
&\quad - \epsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\alpha q_c^\gamma - \Gamma_{bc}^d (\Gamma_{ad}^e q_e^\alpha - \epsilon K_{ad} n^\alpha) + \epsilon K_{bc} \nabla_\beta q_a^\alpha n^\beta.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Subtraindo-a de uma expressão similar $(\nabla_\beta \nabla_\gamma q_a^\alpha)q_c^\gamma q_b^\beta$, obtemos a quantidade desejada, após alguns passos algébricos:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma = R_{abc}^\mu q_m^\mu + \epsilon(D_c K_{ab} - D_b K_{ac})n^\mu + \epsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\mu q_c^\gamma - \epsilon K_{ac} \nabla_\beta n^\mu q_b^\beta. \tag{4.41}$$

Projetando este resultado ao longo de $q_{d\mu}$, temos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma q_d^\delta = R_{abcd} + \epsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\mu q_c^\gamma q_{d\mu} - \epsilon K_{ac} \nabla_\beta n^\mu q_b^\beta q_{d\mu}, \tag{4.42}$$

onde considerou-se $n^\mu q_{d\mu} = 0$. Da relação para a curvatura extrínseca

$$K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta, \tag{4.43}$$

vamos ter, no último termo do lado direito de (4.42)

$$\nabla_\beta n^\mu q_b^\beta q_{d\mu} = \nabla_\beta n^\mu q_b^\beta q_d^\delta q_{\delta\mu} = \nabla_\beta n_\delta q_d^\delta q_b^\beta = K_{ab} = K_{bd}. \tag{4.44}$$

Dessa forma, obtemos, após realizar passos similares ao anterior no segundo termo do lado direito de (4.42),

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma q_d^\delta = R_{abcd} + \epsilon(K_{ab} K_{bc} - K_{ac} K_{bd}), \tag{4.45}$$

que é a relação desejada entre R_{abcd} e o tensor de Riemann do espaço-tempo ($\mathcal{M}$). Ou seja, a projeção de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ na hipersuperfície induz um tensor curvatura nesta mais termos de correções que envolvem a curvatura extrínseca devido à imersão de Σ em $\mathcal{M}$. Assumindo $\epsilon = -1$, uma vez que consideraremos hipersuperfícies tipo-espaço,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma q_d^\delta = R_{abcd} - (K_{ab}K_{bc} - K_{ac}K_{bd}). \quad (4.46)$$

Projetando agora (4.42) em n_μ , temos

$$R_{\mu\alpha\beta\delta}n^\mu q_a^\alpha q_b^\beta q_c^\gamma = D_c K_{ab} - D_b K_{ac}, \quad (4.47)$$

que é a projeção parcial do tensor curvatura de Riemann na hipersuperfície Σ . As equações (4.46) e (4.47) são conhecidas como equações de *Gauss-Codazzi*. Esta última recebe ainda um nome particular, chamada relação de *Codazzi-Mainardi*.

4.7.2 Forma contraída

As equações de *Gauss-Codazzi* podem ainda ser escritas numa forma contraída, em termos do tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$. O tensor de Ricci no espaço-tempo é dado por

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= (\epsilon n^\mu n^\nu + q^{mn} q_m^\mu q_n^\nu) R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= \epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + q^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} q_m^\mu q_n^\nu, \end{aligned} \quad (4.48)$$

e o escalar de Ricci é

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &= (\epsilon n^\alpha n^\beta + q^{ab} q_a^\alpha q_b^\beta) (\epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + q^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} q_m^\mu q_n^\nu) \\ &= \epsilon q^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} q_m^\mu q_n^\nu n^\alpha n^\beta + \epsilon q^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu q_a^\alpha q_b^\beta + q^{ab} q^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} q_a^\alpha q_b^\beta q_m^\mu q_n^\nu \\ &= 2\epsilon q^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu q_a^\alpha n^\nu q_b^\beta + q^{ab} q^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} q_m^\mu q_a^\alpha q_n^\nu q_b^\beta. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Reescrevendo o tensor de Einstein em função das expressões obtidas para o tensor e escalar de Ricci, e utilizando algumas relações obtidas anteriormente, vamos ter

$$2G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = R - (K^{ab} K_{ab} - K^2), \quad (4.50)$$

e

$$G_{ab} q_a^\alpha n^\beta = D_b K_a^b - \partial_a K, \quad (4.51)$$

onde agora o R presente em (4.50) é o escalar de Ricci tri-dimensional, definido em Σ .

4.7.3 Escalar de Ricci

Partindo da relação (4.49)

$$R = 2\epsilon q^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu q_a^\alpha n^\nu q_b^\beta + q^{ab} q^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} q_m^\mu q_a^\alpha q_n^\nu q_b^\beta, \quad (4.52)$$

o primeiro termo é simplificado usando a relação de completeza

$$g^{\alpha\beta} = \epsilon n^\alpha n^\beta + q^{ab} q_a^\alpha q_b^\beta, \quad (4.53)$$

e o fato que $R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta = 0$. Isso dá

$$\begin{aligned} 2\epsilon q^{ab} q_a^\alpha q_b^\beta R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu &= 2\epsilon (g^{\alpha\beta} - \epsilon n^\alpha n^\beta) R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu \\ &= 2\epsilon g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu - 2\epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta \\ &= 2\epsilon R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \\ &= 2\epsilon R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Usando a definição do tensor de Riemann (4.33), reescrevemos a relação acima como

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta &= -\nabla_\alpha \nabla_\beta n^\alpha n^\beta + \nabla_\beta \nabla_\alpha n^\alpha n^\beta \\ &= -\nabla_\beta (\nabla_\alpha n^\alpha n^\beta) + \nabla_\alpha n^\alpha \nabla_\beta n^\beta + \nabla_\alpha (\nabla_\beta n^\alpha n^\beta) - \nabla_\beta n^\alpha \nabla_\alpha n^\beta. \end{aligned} \quad (4.55)$$

No segundo termo da última expressão identificamos K^2 , onde temos $K = \nabla_\alpha n^\alpha$ como sendo o traço do tensor curvatura extrínseca. O quarto termo, por outro lado, pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \nabla_\beta n^\alpha \nabla_\alpha n^\beta &= g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} \nabla_\beta n_\alpha \nabla_\nu n_\mu \\ &= (\epsilon n^\beta n^\mu + q^{bm} q_b^\beta q_m^\mu) (\epsilon n^\alpha n^\nu + q^{an} q_a^\alpha q_n^\nu) \nabla_\beta n_\alpha \nabla_\nu n_\mu, \end{aligned} \quad (4.56)$$

mas como $q^{bm} q_b^\beta q_m^\mu = q^{\beta\mu}$, vamos ter que

$$\nabla_\beta n^\alpha \nabla_\alpha n^\beta = (\epsilon n^\beta n^\mu + q^{\beta\mu}) (\epsilon n^\alpha n^\nu + q^{\alpha\nu}) \nabla_\beta n_\alpha \nabla_\nu n_\mu. \quad (4.57)$$

Entretanto, pelo fato de $n^\alpha \nabla_\beta n_\alpha = \frac{1}{2} \nabla_\beta (n^\alpha n_\alpha) = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla_\beta n^\alpha \nabla_\alpha n^\beta &= q^{\beta\mu} q^{\alpha\nu} \nabla_\beta n_\alpha \nabla_\nu n_\mu \\ &= q^{bm} q^{an} \nabla_\beta n_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta \nabla_\nu n_\mu q_m^\mu q_n^\nu, \end{aligned} \quad (4.58)$$

que, da definição de curvatura extrínseca, nos dá

$$\nabla_\beta n^\alpha \nabla_\alpha n^\beta = q^{bm} q^{an} K_{ab} K_{mn} = K_{ab} K^{ba} = K^{ab} K_{ab}. \quad (4.59)$$

Portanto, temos que

$$R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = -\nabla_\beta(\nabla_\alpha n^\alpha n^\beta) + K^2 + \nabla_\alpha(\nabla_\beta n^\alpha n^\beta) - K^{ab}K_{ab}. \quad (4.60)$$

O segundo termo de (4.52) é simplificado utilizando a primeira relação de Gauss-Codazzi (4.45), de modo que

$$\begin{aligned} q^{ab}q^{mn}R_{\mu\alpha\nu\beta}q_m^\mu q_a^\alpha q_n^\nu q_b^\beta &= q^{ab}q^{mn} [R_{manb} + \epsilon(K_{mb}K_{an} - K_{mn}K_{ab})] \\ &= R + \epsilon(K^{ab}K_{ab} - K^2). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dessa forma, substituindo (4.60) e (4.61) em (4.52), obtemos

$${}^{(4)}R = R - (K^2 - K^{ab}K_{ab}) - 2\nabla_\alpha(\nabla_\beta n^\alpha n^\beta - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta), \quad (4.62)$$

que é o escalar de Ricci quadri-dimensional (denotado pelo índice ${}^{(4)}$) expresso em termos do escalar de Ricci na hipersuperfície Σ e dos termos de correções proporcionais à curvatura extrínseca e ao vetor normal.

4.8 Decomposição 3 + 1 (Formalismo ADM)

A formulação Hamiltoniana de uma teoria de campos assume uma Hamiltoniana $H[\phi, \pi]$, em que a função ϕ é a configuração de campo, e π , o momento canônico, numa hipersuperfície Σ tipo-espaço. Para expressar a ação em termos da Hamiltoniana, é necessário folhear X^μ com uma família contínua de hipersuperfícies tipo-espaço, uma para cada instante de tempo. Esta é a proposta da decomposição 3 + 1, também conhecida como formalismo ADM.

Para efetuar esta decomposição nós introduzimos um campo escalar $t(x^\alpha)$ de tal modo que $t = \text{const.}$ descreva uma família de hipersuperfícies tipo-espaço sem interseção Σ_t . Esta “função tempo” é completamente arbitrária; o único requerimento é que t seja uma função de valor único de x^α , e que $n_\alpha \propto \partial_\alpha t$, o normal unitário à hipersuperfície, seja um campo vetorial tipo-tempo na direção futuro. Tal decomposição é ilustrada abaixo:

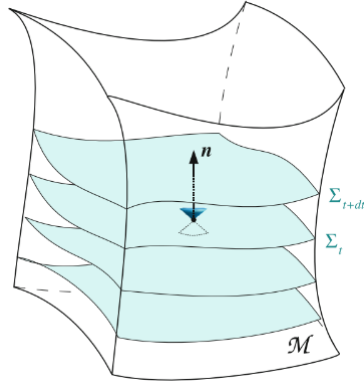


Figura 4.4 – Folheação do espaço-tempo em uma família de Hipersuperfícies Σ_t . Fonte: E.ourgoulhon [12].

Em cada uma das hipersuperfícies Σ_t nós instalamos coordenadas y^a . A priori, as coordenadas em uma hipersuperfície não precisam estar relacionadas a coordenadas de outra hipersuperfície. Porém, é conveniente introduzir uma relação. Considere uma congruência de curvas γ cruzando as hipersuperfícies Σ_t , como na figura (4.5). Não assumimos que essas curvas são geodésicas, nem que cruzam as hipersuperfícies ortogonalmente.

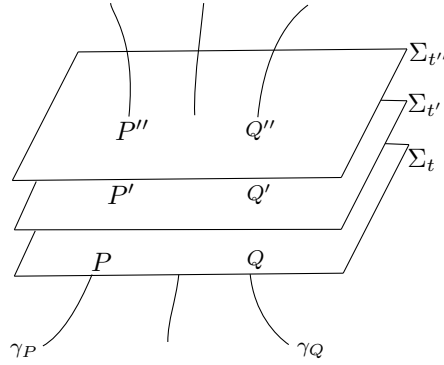


Figura 4.5 – Congruência de curvas cruzando as Hipersuperfícies Σ_t .

Usamos t como um parâmetro nas curvas, e o vetor t^α é tangente às congruências. Tem-se a relação

$$t^\alpha \partial_\alpha t = 1. \quad (4.63)$$

Uma curva particular γ_p da congruência define um mapeamento de um ponto P em Σ_t a um ponto P' em $\Sigma_{t'}$, e então a um ponto P'' em $\Sigma_{t''}$. Para fixar as coordenadas de P' e P'' , dado $y^a(P)$ em Σ_t , nós simplesmente impomos $y^a(P'') = y^a(P') = y^a(P)$. Portanto, y^a é mantido constante em cada membro da congruência.

Esta construção define um sistema de coordenadas (t, y^a) em X^μ . Existe uma transformação entre este e o sistema x^α originalmente em uso, a saber: $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$. Temos

$$t^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a}, \quad (4.64)$$

e definimos

$$q_a^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t, \quad (4.65)$$

como vetores tangentes em Σ_t . Essas relações implicam que nas coordenadas (t, y^a) , $t^\alpha \doteq \delta_t^\alpha$ e $q_a^\alpha \doteq \delta_a^\alpha$. Também temos

$$\mathcal{L}_t q_a^\alpha = 0, \quad (4.66)$$

que se mantém em qualquer sistema de coordenadas.

Introduzimos um unitário normal à hipersuperfície:

$$n_\alpha = -N \partial_\alpha t, \quad (4.67)$$

em que

$$n_\alpha q_a^\alpha = 0, \quad (4.68)$$

onde a função escalar N , chamada de *lapso*, garante que n_α é apropriadamente normalizada. Pelo fato das curvas γ não cruzarem Σ_t ortogonalmente, t^α não é paralelo a n^α . Devemos decompor nas bases fornecidas pelos vetores normal e tangente da forma

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a q_a^\alpha, \quad (4.69)$$

que é uma relação compatível com o fato de $t^\alpha \partial_\alpha t = 1$. O tri-vetor N^a é chamado de *shift(deslocamento)*. Estas quantidades são mostradas na figura (4.6).

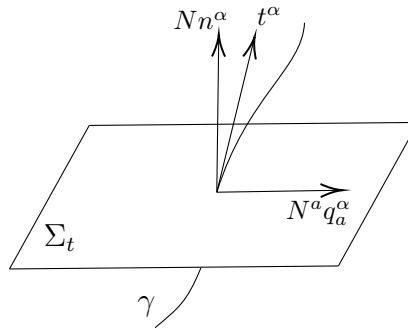


Figura 4.6 – Decomposição de t^α nas funções lapso e deslocamento.

Podemos ainda usar a transformação de coordenadas $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$ para expressar a métrica nas coordenadas (t, y^a) . Tomando a derivada total de x^α , teremos

$$dx^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a} dt + \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t dy^a = t^\alpha dt + q_a^\alpha dy^a, \quad (4.70)$$

onde considerou-se as relações (4.64) e (4.65) para os vetores t^α e q_a^α , respectivamente. Considerando agora (4.69), a equação anterior fica:

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= (Nn^\alpha + N^a q_a^\alpha) dt + q_a^\alpha dy^a \\ &= Nn^\alpha dt + (N^a dt + dy^a) q_a^\alpha \\ &= (Ndt)n^\alpha + (dy^a + N^a dt) q_a^\alpha. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Uma vez que o elemento de linha é dado por $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} [(Ndt)n^\alpha + (dy^a + N^a dt)q_a^\alpha] [(Ndt)n^\beta + (dy^b + N^b dt)q_b^\beta] \\ &= -N^2 dt^2 + g_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta (dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt) \\ &= -N^2 dt^2 + q_{ab} (dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt), \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde $q_{ab} = g_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta$ é a métrica induzida em Σ_t , como mostrado anteriormente. Abrindo alguns termos da última expressão acima, vamos ter

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + q_{ab} dy^a dy^b + q_{ab} N^b dt dy^a + q_{ab} N^a dt dy^b + q_{ab} N^a dt N^b dt \\ &= (N^a N_a - N^2) dt^2 + q_{ij} dy^i dy^j + 2N_i dt dy^i, \end{aligned} \quad (4.73)$$

o que nos permite identificar a métrica como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^a N_a - N^2 & N_j \\ N_i & q_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Sua inversa pode ser escrita considerando a relação $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$, e portanto

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^j/N^2 \\ N^i/N^2 & q^{ij} - N^i N^j/N^2 \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Devemos agora expressar o determinante da métrica, $g := \det(g_{\mu\nu})$, em termos de $q := \det(q_{ab})$ e da função lapso, lembrando que $g^{tt} = \text{cofator}(g_{tt})/g = q/g$, como segue de (4.72). Considerando a relação (4.67), vamos ter

$$g^{tt} = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha t \partial_\beta t = N^{-2} g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = -N^{-2}. \quad (4.76)$$

Sendo assim,

$$\frac{q}{g} = -N^{-2}, \quad (4.77)$$

e portanto,

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{q}. \quad (4.78)$$

Os resultados (4.72) e (4.78), juntamente com (4.69), são fundamentais para a decomposição (3 + 1).

4.9 Hamiltoniana da Relatividade Geral

Como um primeiro passo rumo à construção do Hamiltoniano gravitacional, o que leva a uma descrição do seu espaço de fase, definimos a ação respectiva a este setor da forma:

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} {}^{(4)}R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} \epsilon K \sqrt{q} d^3y, \quad (4.79)$$

onde reconhecemos o primeiro termo como sendo a ação de Einstein-Hilbert (S_H)

$$S_H = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} {}^{(4)}R \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.80)$$

e o segundo como a contribuição de contorno, conhecido também como termo de Gibbons-Hawking-York (GHY) [30, 32]

$$S_{GHY} = \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} \epsilon K \sqrt{q} d^3y, \quad (4.81)$$

responsável por cancelar as derivadas de primeira ordem da métrica no contorno, tornando o princípio de Hamilton bem definido. Aqui, $\partial\mathcal{M}$ é a hipersuperfície fechada contornando a região quadri-dimensional $\mathcal{M}$, y^a são as coordenadas em $\partial\mathcal{M}$, q_{ab} a métrica induzida em $\partial\mathcal{M}$, K o traço da curvatura extrínseca, e $\epsilon = n^\alpha n_\alpha$, onde n^α é o vetor normal apontando para fora de $\mathcal{M}$, na direção futuro. Desconsiderando as contribuições de contorno, por enquanto, podemos fazer a decomposição (3 + 1) da ação S_H dada em (4.80). Para isso, devemos considerar ${}^{(4)}R$ dado por (4.62), e $\sqrt{-g}$ por (4.78), o que leva a:

$$S_H = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2\kappa} [R - K^2 + K^{ab} K_{ab} - 2\nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta)] N \sqrt{q} d^4x, \quad (4.82)$$

ou ainda,

$$S_H = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2\kappa} [R - K^2 + K^{ab} K_{ab} + 2\nabla_\alpha (n^\alpha K - a^\alpha)] N \sqrt{q} d^4x, \quad (4.83)$$

onde utilizou-se a definição do traço da curvatura extrínseca, $K = \nabla_\beta n^\beta$, e definiu-se

$$a_\alpha \equiv n^\beta \nabla_\beta n_\alpha, \quad (4.84)$$

como sendo a quadri-aceleração associada com a folheação da hipersuperfície, ou seja, mede a rapidez com que a curvatura muda de uma hipersuperfície para outra. A quantidade a_α é tangente à hipersuperfície, de modo que

$$n \cdot a = 0. \quad (4.85)$$

Para construir o Hamiltoniano associado à ação (4.83), devemos expressar o mesmo em termos de

$$\dot{q}_{ab} = \mathcal{L}_t q_{ab}, \quad (4.86)$$

onde t^α é o vetor tipo-tempo definido em (4.64). Sendo assim,

$$\dot{q}_{ab} = \mathcal{L}_t (g_{\alpha\beta} q_a^\alpha q_b^\beta) = (\mathcal{L}_t g_{\alpha\beta}) q_a^\alpha q_b^\beta, \quad (4.87)$$

onde utilizou-se o fato de $\mathcal{L}_t q_a^\alpha = 0$, uma vez que $t^\alpha \perp q_a^\alpha$. Portanto,

$$\mathcal{L}_t g_{\alpha\beta} = t^\mu \nabla_\mu g_{\alpha\beta} + (\nabla_\alpha t^\mu) g_{\mu\beta} + (\nabla_\beta t^\mu) g_{\alpha\mu}, \quad (4.88)$$

definida como a derivada de Lie de um campo tensorial covariante. Uma vez que $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$,

$$\mathcal{L}_t g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha t_\beta + \nabla_\beta t_\alpha. \quad (4.89)$$

Considerando a decomposição (4.69) para o vetor t_α , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t g_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha (N n_\beta + N_\beta) + \nabla_\beta (N n_\alpha + N_\alpha) \\ &= n_\alpha \partial_\beta N + \partial_\alpha N n_\beta + N (\nabla_\beta n_\alpha + \nabla_\alpha n_\beta) + \nabla_\beta N_\alpha + \nabla_\alpha N_\beta. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Projetando agora em $q_a^\alpha q_b^\beta$,

$$\dot{q}_{ab} = n_\alpha q_a^\alpha \partial_\beta N q_b^\beta + \partial_\alpha N n_\beta q_b^\beta q_a^\alpha + N (\nabla_\beta n_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta + \nabla_\alpha n_\beta q_b^\beta q_a^\alpha) + \nabla_\beta N_\alpha q_a^\alpha q_b^\beta + \nabla_\alpha N_\beta q_b^\beta q_a^\alpha, \quad (4.91)$$

onde, dado que $n_\alpha q_a^\alpha = 0$, e considerando as definições de curvatura extrínseca (4.27) e derivada covariante intrínseca (4.17), teremos

$$\dot{q}_{ab} = 2N K_{ab} + D_b N_a + D_a N_b. \quad (4.92)$$

Dessa forma, podemos reescrever o tensor K_{ab} como

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{q}_{ab} - D_b N_a - D_a N_b). \quad (4.93)$$

Portanto, a ação gravitacional depende de $\dot{q}_{ab}$ através da curvatura extrínseca. Note que a ação não envolve $\dot{N}$ nem $\dot{N}^a$, de modo que o momento conjugado para estas grandezas serão fracamente nulos, como veremos adiante. Isso significa que diferente de q_{ab} , as funções lapso e deslocamento não são variáveis dinâmicas. Era esperado: N e N^a servem apenas para especificar a folheação de X^μ nas hipersuperfícies Σ_t ; pelo fato da folheação ser arbitrária, somos completamente livres nas escolhas das funções lapso e deslocamento. Em outras palavras, tais funções podem ser interpretadas como graus de liberdade de calibre.

O momento conjugado associado a q_{ab} é, portanto,

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}}, \quad (4.94)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} N \sqrt{q} (R + K^{ab} K_{ab} - K^2), \quad (4.95)$$

extraído a partir do fato de a ação ser expressa como

$$S_H = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3x \mathcal{L} \sqrt{-g}, \quad (4.96)$$

e do termo de derivada total em (4.83) ser cancelado com os termos de superfície. Sendo assim, a relação (4.94) fornece

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{1}{2\kappa} N \sqrt{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}} (R + K^{ab} K_{ab} - K^2) \\ &= \frac{1}{2\kappa} N \sqrt{q} \left(2K^{ab} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{q}_{ij}} - 2K \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_{ij}} \right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde

$$K^{ab} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{q}_{ij}} = K^{ab} \frac{\partial (\delta_a^i \delta_b^j K_{ij})}{\partial \dot{q}_{ij}} = K^{ab} \delta_a^i \delta_b^j \frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{q}_{ij}} = K^{ij} \frac{1}{2N}, \quad (4.98)$$

e

$$K \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_{ij}} = K \frac{q^{ab} \partial K_{ab}}{\partial \dot{q}_{ij}} = K q^{ab} \delta_a^i \delta_b^j \frac{\partial K^{ij}}{\partial \dot{q}_{ij}} = q^{ij} K \frac{1}{2N}, \quad (4.99)$$

de forma que

$$\pi^{ab} = \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} (K^{ab} - q^{ab} K). \quad (4.100)$$

Considerando a transformação de Legendre definida em (2.20)

$$\mathcal{H} = \pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{L}, \quad (4.101)$$

obtemos, a partir de (4.100), (4.92) e (4.95), respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\sqrt{q}}{2k} (K^{ab} - q^{ab} K) (2N K_{ab} + D_b N_a + D_a N_b) - N \frac{\sqrt{q}}{2k} (R + K^{ab} K_{ab} - K^2) \\ &= \frac{\sqrt{q}}{2k} [2N K^{ab} K_{ab} + K^{ab} (D_b N_a + D_a N_b) - 2N K^2 - 2K D_a N^a] \\ &\quad - N \frac{\sqrt{q}}{2k} (R + K^{ab} K_{ab} - K^2) \\ &= \frac{\sqrt{q}}{2k} [-N (R + K^2 - K^{ab} K_{ab}) + 2 (K^{ab} D_a N_b - K D_a N^a)], \end{aligned} \quad (4.102)$$

o que leva à forma preliminar da densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -\frac{\sqrt{q}}{2\kappa} [N(R + K^2 - K_{ab} K^{ab}) + 2(K D_a N^a - K^{ab} D_a N_b)]. \quad (4.103)$$

Uma integração sob a hipersuperfície espacial Σ_t fornece a Hamiltoniana associada

$$H = \int_{\Sigma_t} d^3x \mathcal{H} = - \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} (N \mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i), \quad (4.104)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= R + K^2 - K_{ij} K^{ij}, \\ \mathcal{H}_i &= 2 (D_j K_i^j - D_i K), \end{aligned} \quad (4.105)$$

onde considerou-se uma integração por partes [†] para obter o segundo termo acima. Notemos que a contribuição na Eq. (4.104) proporcional à função lapso N envolve a parte espacial do escalar de Ricci, bem como a curvatura extrínseca. Já a parte proporcional ao vetor de deslocamento N^i não depende da geometria interna da hipersuperfície espacial, mas apenas da forma como ela está inserida na variedade quadri-dimensional.

Para realizar a análise canônica da densidade Hamiltoniana (4.104), devemos expressar a curvatura extrínseca em termos das variáveis do espaço de fase, em particular, o

[†]Utilizaremos diversas vezes esse argumento em cálculos futuros. De maneira geral, uma integral por partes tem a forma [8]

$$\int A^\mu (\nabla_\mu B) \sqrt{-g} d^n x = - \int (\nabla_\mu A^\mu) B \sqrt{-g} d^n x + \text{termos de contorno}, \quad (4.106)$$

onde os termos de contorno tendem a zero no infinito, ou são absorvidos por termos adicionais, como no caso do termo de GHY.

momento canônico π^{ij} . Fazendo isso, de (4.100) vamos ter:

$$K^{ij} = \frac{2\kappa}{\sqrt{q}}\pi^{ij} + q^{ij}K = \frac{2\kappa}{\sqrt{q}}\left(\pi^{ij} - \frac{\pi}{2}q^{ij}\right), \quad (4.107)$$

uma vez que

$$K = -\frac{\kappa}{\sqrt{q}}\pi, \quad (4.108)$$

onde $\pi = q_{ij}\pi^{ij}$ é entendido como o traço do momento canônico. Sendo assim, a densidade Hamiltoniana fica expressa como

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i, \quad (4.109)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{2\kappa}{\sqrt{q}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{q}}{2\kappa}R, \\ \mathcal{H}_i &= -2D_j\pi_i^j, \end{aligned} \quad (4.110)$$

são os vínculos Hamiltoniano e de momento, respectivamente, como mostrado em [30]. Tais vínculos representam, na verdade, as projeções da equação de campo de Einstein em função das variáveis da decomposição $(3+1)$ [24, 25], conhecidas como as *equações de Gauss-Codazzi contraídas*. A densidade $\mathcal{H}_0$ é uma equação escalar independente que corresponde à projeção temporal ao longo de n^μ (4.50), enquanto a densidade $\mathcal{H}_i$ é um conjunto de 3 equações vetoriais independentes correspondendo à projeção parcial ao longo de Σ_t (4.51). Juntamente com a projeção inteiramente ao longo de Σ_t dada pela equação de campo associada a π^{ij} , somam-se mais um conjunto de 6 equações independentes, resultando em um conjunto de 10 equações independentes, estando de acordo com a contagem feita através do formalismo covariante. Tais discussões se estendem ainda para teorias de gravitação modificada [31].

Capítulo 5

Formulação Hamiltoniana para uma Teoria Gravitacional Modificada

A descrição covariante da RG vem fornecendo ao longo dos anos uma descrição de fenômenos gravitacionais que funciona surpreendentemente bem, de acordo com uma série de experimentos que têm como objetivo testar tal teoria, como por exemplo os fenômenos de avanço do periélio de Mercúrio, deflexão da luz e *redshift* gravitacional. Apesar do vasto apoio experimental, bem como da beleza da teoria da gravidade de Einstein, mesmo que se tenha o ponto de vista de que a gravidade permanece clássica em todas as escalas de comprimento, a RG exibe pelo menos algumas propriedades insatisfatórias. A presença de singularidade do espaço-tempo para soluções do tipo buraco-negro, além da impossibilidade atual da descrição da energia escura pelo modelo cosmológico padrão, o Λ CDM, são exemplos mais conhecidos.

Por conta disso, surge a possibilidade de modificarmos a RG proposta por Einstein, no sentido de abranger tais inconsistências, seja em escalas microscópicas ou cosmológicas. Na verdade, um grande número de teorias gravitacionais modificadas já foram propostas (ver, por exemplo, [39–42]). Entretanto, para o objetivo que cerne este trabalho, iremos inicialmente considerar um modelo de gravidade modificada no contexto da *teoria escalar-tensorial de gravidade* [8, 17, 21, 23], e em seguida faremos a extensão para uma teoria de gravitação modificada contida no arcabouço geral do Modelo Padrão Estendido (MPE), extensivamente estudado em [44–54], lançando mão de uma das características fundamentais da RG, a invariância por difeomorfismo.

Para esse último, consideraremos o setor escalar gravitacional mínimo, mediado pelo

campo de fundo escalar dinâmico $u(x)$, o qual iremos calcular as equações de campo correspondentes, de modo a compreender a sua dinâmica, bem como a estrutura de vínculos da teoria.

5.1 Teoria de Brans-Dicke: uma primeira abordagem

A RG tem passado por uma ampla variedade de testes experimentais. No entanto, é sempre possível que novos testes experimentais revelem desvios da formulação original de Einstein. Dessa forma, é razoável considerar caminhos nos quais a RG possa ser modificada. Uma motivação inicial para modificar a RG de Einstein é incorporar o princípio de Mach [21] (uma ideia que sugere que a massa de um objeto é influenciada pelas massas do restante do universo [22]) nos modelos de *teoria escalar-tensorial de gravidade* [8], onde um campo escalar, digamos ϕ , se acopla ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ da RG através do escalar de curvatura, o tensor de Ricci. Um caso especial é dado através da ação da teoria escalar-tensorial [17] com o termo de contorno GHY [18–20], chamada de *Jordan frame* [23], que podemos representar por

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{-g} \left(f(\phi)^{(4)} R - \frac{1}{2} \lambda(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right) + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1} x \sqrt{h} f(\phi) K, \quad (5.1)$$

onde $f(\phi)$ é uma função genérica de ϕ bem como $\lambda(\phi)$, e K é o traço da curvatura extrínseca.

Um caso particular de (5.1) é conhecido como *teoria de Brans-Dicke* (BD) [21] quando $f(\phi) = \phi$ e $\lambda(\phi) = \frac{\omega}{\phi}$, expressa da forma [23]

$$S_{\text{BD}} = \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} \left(\phi^{(4)} R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right) + 2 \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3 x \sqrt{q} \phi K, \quad (5.2)$$

onde ω é uma constante de acoplamento adimensional. A modificação proposta por BD considera promover o inverso da constante gravitacional a um campo dinâmico com uma dependência explícita das coordenadas do espaço-tempo.

Dessa forma, implementando a decomposição ADM nos elementos da ação (5.2) vamos ter, para o primeiro termo:

$$\phi^{(4)} R = \phi (R + K^2 + K_{ij} K^{ij}) + \frac{2}{N} \phi \mathcal{L}_m K - \frac{2}{N} \phi D_i D^i N, \quad (5.3)$$

onde considerou-se novamente as relações (4.78) para $\sqrt{-g}$ e (4.62) para o escalar de Ricci. Mas, temos que

$$\frac{1}{N} \phi \mathcal{L}_m K = \phi n^\mu (\nabla_\mu K) = \nabla_\mu (n^\mu K \phi) - K^2 \phi - \frac{1}{N} K \mathcal{L}_m \phi, \quad (5.4)$$

onde, somado um termo de contorno adequado de (5.2), a derivada total é eliminada, e portanto,

$$\frac{1}{N}\phi\mathcal{L}_m K = -K^2\phi - \frac{1}{N}K\mathcal{L}_m\phi. \quad (5.5)$$

Dessa forma, substituindo em (5.3):

$$\begin{aligned} \phi^{(4)}R &= \phi(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}) + 2(-K^2\phi - \frac{1}{N}K\mathcal{L}_m\phi) - \frac{2}{N}\phi D_i D^i N \\ &= \phi(R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) - \frac{2}{N}(K\mathcal{L}_m\phi + \phi D_i D^i N), \end{aligned} \quad (5.6)$$

o que completa a decomposição do primeiro termo de (5.2).

Partindo agora para o segundo termo de (5.2), utilizamos inicialmente a relação de completeza para o inverso da métrica no formalismo ADM, dada por [4]

$$g^{\mu\nu} = q^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu, \quad (5.7)$$

e o fato de a derivada covariante de um escalar ser igual à sua derivada ordinária, de modo a termos

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = (q^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu)\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi = q^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - n^\mu n^\nu\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi. \quad (5.8)$$

Estudando separadamente os dois termos da equação acima, vamos considerar para o primeiro a relação entre a derivada covariante no espaço-tempo ($\mathcal{M}$) dada pelo operador ∇ e a derivada covariante na hipersuperfície (Σ_t) dada por D . Essa relação é tal que [12]

$$D_\rho T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} = q^{\alpha_1}_{\mu_1}\cdots q^{\alpha_p}_{\mu_q} q^{\nu_1}_{\beta_1}\cdots q^{\nu_q}_{\beta_q} q^\sigma_\rho \nabla_\sigma T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}. \quad (5.9)$$

Para utilizá-la, devemos reescrever o termo como

$$q^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi = q^\mu_i q^\nu_j q^{ij}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \quad (5.10)$$

que, de (5.9), se torna

$$q^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi = q^{ij}D_i\phi D_j\phi, \quad (5.11)$$

a decomposição desejada. Para o segundo termo $n^\mu n^\nu\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$, consideremos a relação

$$n^\mu\nabla_\mu\phi = \frac{1}{N}\mathcal{L}_m\phi, \quad (5.12)$$

onde

$$\mathcal{L}_m\phi = \dot{\phi} - \mathcal{L}_N\phi, \quad (5.13)$$

e

$$\mathcal{L}_N \phi = N^i D_i \phi, \quad (5.14)$$

de modo que

$$n^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{1}{N} \left(\dot{\phi} - N^i D_i \phi \right). \quad (5.15)$$

Levando em conta os mesmos passos acima para o termo $n^\nu \nabla_\nu \phi$, vamos ter que

$$\begin{aligned} n^\mu n^\nu \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi &= \frac{1}{N^2} \left(\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi} N^i D_i \phi + N^i N^j D_i \phi D_j \phi \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \left(\dot{\phi} - N^i D_i \phi \right)^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Portanto, considerando (5.11) e (5.16), o segundo termo de (5.2) fica decomposto como

$$\frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \frac{\omega}{\phi} \left(q^{ij} D_i \phi D_j \phi - \frac{1}{N^2} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2 \right). \quad (5.17)$$

Sendo assim, podemos escrever a densidade Lagrangiana da teoria de BD em (5.2) na decomposição $(3+1)$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(3+1)} &= \sqrt{q} [N\phi (R - K^2 + K_{ij} K^{ij}) - 2(K\mathcal{L}_m \phi + \phi D_i D^i N) \\ &\quad - \frac{\omega}{N\phi} (N^2 q^{ij} D_i \phi D_j \phi - (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2) - NU(\phi)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Considerando novamente a relação (5.13) para o quarto termo da primeira linha da equação acima, e a seguinte relação para o quinto termo

$$D_i (\phi D^i N) = D_i \phi D^i N + \phi D_i D^i N, \quad (5.19)$$

vamos ter, considerando termos de contorno adequados na fronteira $\partial\Sigma_t$ de modo a eliminar a derivada total acima:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(3+1)} &= \sqrt{q} [N\phi (R - K^2 + K_{ij} K^{ij}) - \frac{\omega}{N\phi} (N^2 q^{ij} D_i \phi D_j \phi - (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2) \\ &\quad - 2K(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) - NU(\phi) + 2q^{ij} D_i N D_j \phi]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Comparando este resultado com o obtido em [23]*,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ADM} &= \sqrt{q} [N\phi (R - K^2 + K_{ij} K^{ij}) - \frac{\omega}{N\phi} (N^2 q^{ij} D_i \phi D_j \phi - (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2) \\ &\quad + 2K(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) - NU(\phi) + 2q^{ij} D_i N D_j \phi], \end{aligned} \quad (5.21)$$

vamos notar que há uma diferença de sinal no termo linear em K . Isso se dá por conta da definição global diferente de curvatura extrínseca adotada em ambos os trabalhos. Para o que segue, continuaremos com a definição adotada neste trabalho, a saber, eq. (4.93).

*Aqui foi preservada a notação utilizada em [23] para denotar a densidade Lagrangiana na decomposição ADM.

5.1.1 Momento canônico e Hamiltoniana

Nos é conveniente, agora, calcular os momentos conjugados $(\pi_N, \pi_i, \pi^{ij}, \pi_\phi)$ associados a (N, N^i, q_{ij}, ϕ) . Para tanto, devemos notar de (5.20) que esta não depende de $\dot{N}$ e $\dot{N}^i$, de modo que os momentos π_N e π_i associados às funções *lapso* N e *deslocamento* N^i , respectivamente, são fracamente nulos, uma vez que essas quantidades são não-dinâmicas. Temos, então

$$\pi_N := \frac{\partial \mathcal{L}_\phi^{(3+1)}}{\partial \dot{N}} \approx 0, \quad (5.22)$$

$$\pi_i := \frac{\partial \mathcal{L}_\phi^{(3+1)}}{\partial \dot{N}^i} \approx 0, \quad (5.23)$$

que são os chamados vínculos primários, de acordo [4]. Os demais momentos conjugados, por sua vez, são:

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &:= \frac{\partial \mathcal{L}_\phi^{(3+1)}}{\partial \dot{q}_{ij}} = \sqrt{q} \left[N\phi \left(-2K \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_{ij}} + 2K^{ab} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{q}_{ij}} \right) - 2 \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_{ij}} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right] \\ &= \sqrt{q} \left[\phi (K^{ij} - K q^{ij}) - \frac{q^{ij}}{N} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde consideramos os resultados (4.98) e (4.99) obtidos na seção anterior, e

$$\begin{aligned} \pi_\phi &:= \frac{\partial \mathcal{L}_\phi^{(3+1)}}{\partial \dot{\phi}} = \sqrt{q} \left[-\frac{\omega}{N\phi} (-2\dot{\phi} + 2N^i D_i \phi) - 2K \right] \\ &= \sqrt{q} \left[\frac{2\omega}{N\phi} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi) - 2K \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Podemos ainda exprimir $\dot{\phi}$ em termos de π_ϕ , a saber:

$$\dot{\phi} = \frac{N\phi}{2\omega} \left(\frac{\pi_\phi}{\sqrt{q}} + 2K \right) + N^i D_i \phi. \quad (5.26)$$

Em posse desses resultados, podemos calcular a densidade Hamiltoniana associada a (5.20), que é obtida considerando a seguinte transformação de Legendre:

$$\mathcal{H}_\phi^{(3+1)} = \pi^{ij} \dot{q}_{ij} + \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}_\phi^{(3+1)}. \quad (5.27)$$

No entanto, antes de prosseguirmos é conveniente expressarmos o tensor curvatura extrínseca e seu traço em função do momento conjugado π^{ij} . De (5.24), obtemos

$$K^{ij} = \frac{1}{\phi} \left[\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{q}} + \phi K q^{ij} + \frac{q^{ij}}{N} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right], \quad (5.28)$$

que ainda não está totalmente completo. Para isso, devemos tomar o seu traço, o que resulta em

$$\begin{aligned} K &= q_{ij}K^{ij} = \frac{1}{\phi} \left[-\frac{\pi}{\sqrt{q}} + 3K\phi - \frac{3}{N}(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right] \\ &= -\frac{1}{2\phi} \left[\frac{\pi}{\sqrt{q}} + \frac{3}{N}(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right], \end{aligned} \quad (5.29)$$

e portanto, podemos reescrever o tensor curvatura extrínseca como

$$K^{ij} = \frac{1}{\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ij} - \frac{\pi q^{ij}}{2} \right) - \frac{q^{ij}}{2N}(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right], \quad (5.30)$$

onde $\pi := q_{ij}\pi^{ij}$ é o traço do momento conjugado associado. Com base nos resultados acima, podemos também reescrever os momentos conjugados π^{ij} e π_ϕ . O primeiro é trivial, de modo que substituindo (5.29) e (5.30) em (5.24), obtemos o próprio π^{ij} . Para o segundo, precisamos substituir (5.29) em (5.25), obtendo

$$\pi_\phi = \sqrt{q} \left[\frac{\pi}{\sqrt{q}\phi} + \frac{(3+2\omega)}{N\phi}(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) \right], \quad (5.31)$$

o que permite, ainda, reescrever a derivada temporal da variável canônica ϕ (5.26) em função deste,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{N}{(3+2\omega)} (\phi\pi_\phi - \pi) + N^i D_i \phi. \quad (5.32)$$

É conveniente, ainda, expressar $\dot{q}_{ij}$ em função do momento conjugado. Para isso, devemos substituir (5.30) em (4.92), o que dá:

$$\dot{q}_{ij} = \frac{2N}{\phi\sqrt{q}} \left(\pi_{ij} - \frac{\pi q_{ij}}{2} \right) - \frac{q_{ij}}{\phi} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi) + D_j N_i + D_i N_j. \quad (5.33)$$

Por fim, antes de calcular a densidade Hamiltoniana em função dessas novas quantidades, devemos também reescrever a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_\phi^{(3+1)}$. Para isso, devemos calcular explicitamente as contribuições do tensor curvatura extrínseca em função dos momentos conjugados. Sendo assim, a partir de (5.29) e (5.30), obtemos

$$K^2 = \frac{1}{4\phi^2} \left[\frac{\pi^2}{q} + \frac{6\pi}{N\sqrt{q}}(\dot{\phi} - N^i D_i \phi) + \frac{9}{N^2}(\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2 \right], \quad (5.34)$$

e

$$K_{ij}K^{ij} = \frac{1}{\phi^2 q} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{(\dot{\phi} - N^i D_i \phi)}{N\sqrt{q}\phi^2} + \frac{3}{4} \frac{(\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2}{N^2\phi^2}. \quad (5.35)$$

Portanto, substituindo (5.29), (5.34) e (5.35) em (5.20) obtemos, após alguns passos meramente algébricos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(3+1)} &= \sqrt{q} \left\{ N \left[\phi R + \frac{1}{\phi q} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] + \frac{3}{2N\phi} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{N\phi} \left(N^2 q^{ij} D_i \phi D_j \phi - (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2 \right) - NU(\phi) + 2q^{ij} D_i N D_j \phi \right\}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(3+1)} = & \sqrt{q} \left\{ N \left[\phi R + \frac{1}{\phi q} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] + \frac{(3+2\omega)}{2N\phi} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2 \right. \\ & \left. - \frac{N\omega}{\phi} D_i \phi D^i \phi - NU(\phi) - 2ND^i D_i \phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Entretanto, notemos que a expressão acima ainda depende da velocidade generalizada $\dot{\phi}$. Devemos então substituir este valor por (5.32), de modo que reescrevemos o termo associado a esta quantidade na equação acima como

$$\frac{(3+2\omega)}{2N\phi} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi)^2 = \frac{(3+2\omega)}{2N\phi} \left[\frac{N^2 (\phi \pi_\phi - \pi)^2}{q(3+2\omega)^2} \right] = \frac{1}{2\phi q} \left(\frac{N}{3+2\omega} \right) (\phi \pi_\phi - \pi)^2, \quad (5.38)$$

o que completa a nossa decomposição, que fica expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(3+1)} = & \sqrt{q} \left\{ N \left[\phi R + \frac{1}{\phi q} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{2\phi q} \left(\frac{N}{3+2\omega} \right) (\phi \pi_\phi - \pi)^2 \right. \\ & \left. - \frac{N\omega}{\phi} D_i \phi D^i \phi - NU(\phi) - 2ND^i D_i \phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Sendo assim, tendo obtido a densidade Lagrangiana associada, devemos por fim calcular os produtos entre os momentos canônicos e velocidades generalizadas de acordo com a transformação de Legendre (5.27). Fazendo isso,

$$\begin{aligned} \pi^{ij} \dot{q}_{ij} = & \frac{2N}{\phi \sqrt{q}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{\pi}{\phi} (\dot{\phi} - N^i D_i \phi) + \pi^{ij} (D_j N_i + D_i N_j) \\ = & \frac{2N}{\phi \sqrt{q}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{\pi}{\phi \sqrt{q}} \frac{N}{(3+2\omega)} (\phi \pi_\phi - \pi) + \pi^{ij} (D_j N_i + D_i N_j) \\ = & \frac{2N}{\phi \sqrt{q}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{N}{(3+2\omega)} \frac{\pi \pi_\phi}{\sqrt{q}} + \frac{N}{(3+2\omega)} \frac{\pi^2}{\phi \sqrt{q}} + \pi^{ij} (D_j N_i + D_i N_j), \end{aligned} \quad (5.40)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_\phi \dot{\phi} = & \frac{\pi_\phi}{\sqrt{q}} \frac{N}{(3+2\omega)} (\phi \pi_\phi - \pi) + \pi_\phi N^i D_i \phi \\ = & \frac{N}{(3+2\omega)} \frac{\phi \pi_\phi^2}{\sqrt{q}} - \frac{N}{(3+2\omega)} \frac{\pi \pi_\phi}{\sqrt{q}} + \pi_\phi N^i D_i \phi, \end{aligned} \quad (5.41)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\pi^{ij}\dot{q}_{ij} + \pi_\phi\dot{\phi} &= \frac{2N}{\phi\sqrt{q}} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{2N}{(3+2\omega)} \frac{\pi\pi_\phi}{\sqrt{q}} + \frac{N}{(3+2\omega)} \frac{\pi^2}{\phi\sqrt{q}} + \frac{N}{(3+2\omega)} \frac{\phi\pi_\phi^2}{\sqrt{q}} \\
&\quad + \pi^{ij}(D_j N_i + D_i N_j) + \pi_\phi N^i D_i \phi \\
&= \frac{2N}{\phi\sqrt{q}} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{1}{\phi\sqrt{q}} \left(\frac{N}{(3+2\omega)} \right) (\pi - \phi\pi_\phi)^2 \\
&\quad + \pi^{ij}(D_j N_i + D_i N_j) + \pi_\phi N^i D_i \phi,
\end{aligned} \tag{5.42}$$

e portanto, de (5.27), vamos ter

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\phi^{(3+1)} &= \frac{2N}{\phi\sqrt{q}} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{1}{\phi\sqrt{q}} \left(\frac{N}{(3+2\omega)} \right) (\pi - \phi\pi_\phi)^2 \\
&\quad + \pi^{ij}(D_j N_i + D_i N_j) + \pi_\phi N^i D_i \phi - \mathcal{L}_\phi^{(3+1)},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

que após substituir $\mathcal{L}_\phi^{(3+1)}$ por (5.39), fornece a densidade Hamiltoniana na decomposição ADM:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\phi^{(3+1)} &= \sqrt{q} \left[N \left(-\phi R + \frac{1}{\phi q} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right) + \frac{N\omega}{\phi} D_i \phi D^i \phi + N 2 D^i D_i \phi + N V(\phi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\phi q} \left(\frac{N}{3+2\omega} \right) (\pi - \phi\pi_\phi)^2 \right] + \pi^{ij}(D_j N^i + D_i N^j) + N^i D_i \phi \pi_\phi.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Considerando o fato de π^{ij} ser uma grandeza simétrica, para que o penúltimo termo da equação acima seja diferente de zero devemos impor que a quantidade entre parênteses seja simétrica. Fazendo isso,

$$\pi^{ij}(D_j N^i + D_i N^j) = 2\pi^{ij} D_j N^i = -2N^i D_j \pi^{ij} = -2N^i D_j \pi^j_i. \tag{5.45}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\phi^{(3+1)} &= \sqrt{q} \left[N \left(-\phi R + \frac{1}{\phi q} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right) + \frac{N\omega}{\phi} D_i \phi D^i \phi + N 2 D^i D_i \phi + N V(\phi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\phi q} \left(\frac{N}{3+2\omega} \right) (\pi - \phi\pi_\phi)^2 \right] - 2N^i D_j \pi^j_i + N^i D_i \phi \pi_\phi,
\end{aligned} \tag{5.46}$$

que completa o cálculo da densidade Hamiltoniana para a ação de BD (5.2) em função das variáveis canônicas da decomposição $(3+1)$ na hipersuperfície Σ_t , como desejado. A partir deste resultado, podemos calcular a Hamiltoniana total realizando uma integração em Σ_t , e em seguida calcular as equações de campo associadas. Entretanto, para os fins que se fizeram necessários nesta seção, não realizaremos esse passo, que pode ser visto com bastante detalhe em [23].

Um resultado interessante a se observar a partir de (5.46) é que, no limite em que $\phi = \frac{1}{2\kappa}$ (ou seja, da RG), e portanto $\pi_\phi = 2\kappa\pi$, a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}_\phi^{(3+1)}$ reproduz os resultados dados em (4.104), com os vínculos Hamiltoniano e de momento dados por (4.110).

5.2 Modelo Padrão Estendido

Geralmente, espera-se que a Relatividade Geral e o Modelo Padrão (MP) da física de partículas não sejam as descrições definitivas da Natureza, mas sim teorias de campos efetivas de baixa energia que descrevem com precisão a física nas escalas de energia disponíveis para nós. Este ponto de vista é motivado pela expectativa de que exista uma única teoria unificada abrangendo todas as interações fundamentais conhecidas. Nesse sentido, uma vez que o MP é uma teoria efetiva que descreve efeitos físicos em escalas de energia na ordem de GeV, se considerarmos a sua validade na escala de Planck $\sim 10^{19}$ GeV, uma descrição da RG nessa escala deve fornecer uma nova física. Dessa forma, deve-se propor desvios de princípios fundamentais da RG.

A invariância local de Lorentz é uma das simetrias fundamentais da relatividade, bem como do MP. Esta simetria fundamental implica que as medições realizadas em dois experimentos idênticos movendo-se uniformemente um em relação ao outro devem fornecer resultados iguais baseados nas mesmas leis da natureza conectadas por uma transformação de Lorentz. Assim, a forma das leis da natureza não depende do estado de movimento uniforme. Uma propriedade análoga existe para medições feitas com um aparelho e um idêntico rotacionado. Este último ponto de vista é chamado de invariância de Lorentz da partícula.

No contexto da dinâmica do espaço-tempo, dizemos ainda que a RG é uma teoria cujas leis são invariantes por difeomorfismos, ou seja, estabelecendo relações entre diferentes pontos, curvas, etc. em uma variedade sem mudança de coordenadas. Em particular, difeomorfismos são representados por mapeamentos suaves de uma variedade indo em si mesma, ou seja, $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

Considerar desvios das simetrias fundamentais da RG foi então um caminho alternativo para propor possíveis modificações da RG em um nível efetivo. Tais desvios podem ser parametrizados pelo MPE, uma teoria de campos efetiva que permite testar e comparar os

diferentes resultados experimentais. De uma maneira mais geral, o MPE descreve o MP acoplado com a RG e inclui termos adicionais contendo informações acerca da violação de Lorentz e difeomorfismo hipoteticamente causadas na escala de Planck.

A incorporação da violação de Lorentz no MPE ocorre através de campos de fundo que surgem como valores esperados de vácuo não-nulos de campos tensoriais. Estes últimos implicam direções privilegiadas do espaço-tempo e envolvem coeficientes de controle que descrevem a intensidade da violação de Lorentz. Contrações adequadas de campos de fundo com operadores de campo do MP resultam em expressões invariantes sob transformações de coordenadas (transformações de Lorentz do observador). Em princípio, o MPE contém um número arbitrário de termos, mas é frequentemente truncado em ordem inferior na dimensão de massa dos operadores de campo utilizados. Um truncamento muito estudado é chamado de MPE *mínimo* e contém operadores de dimensão de massa 3 ou 4. O setor *não-mínimo*, por sua vez, contém operadores de campo com dimensão de massa ≥ 5 [52].

Um mecanismo genérico e atrativo é a *violação de Lorentz espontânea*, estudada em teoria de cordas e teoria de campos com gravidade, bem como teoria de campos não-comutativa, gravitação quântica, dentre outras, como mostrado em [44]. Este mecanismo incorpora, por sua vez, um *campo de fundo dinâmico* na descrição do MPE, possuindo flutuações em torno do valor esperado de vácuo. Um modelo simples e completo que descreve bem este mecanismo é o modelo de *Bumblebee* [55].

A densidade Lagrangiana do MPE gravitacional mínimo é uma modificação da Lagrangiana de Einstein-Hilbert (EH) que é invariante em relação às transformações gerais de coordenadas, escrita da forma geral como

$$\mathcal{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left({}^{(4)}R - 2\Lambda + (k_R)_{\mu\nu\rho\sigma} {}^{(4)}R^{\mu\nu\rho\sigma} \right) + \mathcal{L}', \quad (5.47)$$

onde a ação associada se dá pela integração

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}_g. \quad (5.48)$$

Na expressão (5.47), o termo proporcional à $({}^{(4)}R - 2\Lambda)$ se refere a EH, sendo Λ a constante cosmológica que comumente consideramos igual a zero, $(k_R)_{\mu\nu\rho\sigma}$ representa os coeficientes de campo de fundo do MPE que se transformam como um quadri-tensor sob transformações gerais de coordenadas, ${}^{(4)}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ o tensor de curvatura de Riemann definido no espaço-tempo $\mathcal{M}$, e $\kappa = 8\pi G$, onde G é a constante gravitacional. O termo $\mathcal{L}'$ aparece

no caso em que os coeficientes surgem dinamicamente, como na quebra espontânea da simetria de Lorentz, que consideraremos adiante.

Neste cenário de quebra espontânea, os coeficientes de $(k_R)_{\mu\nu\rho\sigma}$ descritos na densidade Lagrangiana (5.47) preservam a simetria local de Lorentz da partícula e de difeomorfismo, em contraste com uma quebra explícita de simetria. No entanto, deve existir uma função potencial definida em $\mathcal{L}'$ que ao assumir valores esperados de vácuo não nulos numa escala mínima de energia, quebra tais simetrias espontaneamente, como mostrado na figura (5.1).

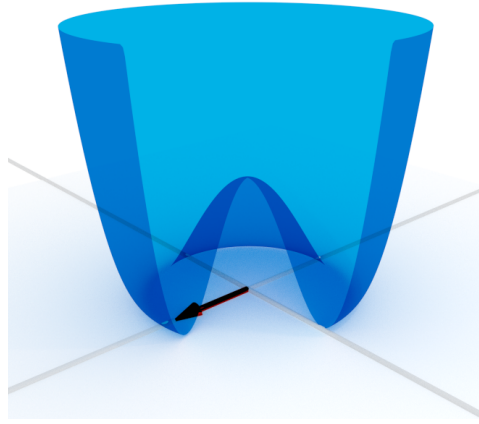


Figura 5.1 – Quebra espontânea de simetria. Fonte: [43].

Os coeficientes deste tensor podem ser decompostos como

$$(k_R)_{\mu\nu\rho\sigma} {}^{(4)}R^{\mu\nu\rho\sigma} = -u {}^{(4)}R + s_{\mu\nu} ({}^{(4)}R^T)^{\mu\nu} + t_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (5.49)$$

onde $({}^{(4)}R^T)^{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci com traço nulo, e $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de curvatura de Weyl. Os coeficientes u , $s_{\mu\nu}$ e $t_{\mu\nu\rho\sigma}$ são um escalar e tensores reais adimensionais, respectivamente, carregando informações acerca da violação de Lorentz e difeomorfismo.

5.3 Formulação Hamiltoniana para o setor escalar do MPE mínimo gravitacional

Como visto anteriormente, desvios das simetrias de Lorentz e difeomorfismo são considerados como uma das alternativas para se estudar em um nível efetivo o comportamento da gravitação em escalas de comprimento muito pequenas. A densidade Lagrangiana dada em (5.47) é uma possibilidade para tal descrição no contexto de uma quebra espontânea de simetria. Sendo assim, fazendo a identificação $\phi \rightarrow \frac{1}{2\kappa}(1-u)$ na ação de Brans-Dicke (5.2), sendo $u = u(x)$ um campo de fundo escalar dinâmico, vamos ter a ação associada da forma

$$S_u = \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left((1-u)^{(4)}R - \frac{\omega}{1-u} g^{\mu\nu} \partial_\mu u \partial_\nu u - V(u) \right) + \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{q} (1-u) K, \quad (5.50)$$

onde os termos proporcionais à derivada do campo e o potencial $V(u)$ dão a dinâmica da teoria.

Fazendo a decomposição ADM de cada termo separadamente vamos obter, com base em (5.6),

$$(1-u)^{(4)}R = \left[(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}) + \frac{2}{N} (\mathcal{L}_m K - D_i D^i N) \right] - \left[u (R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) - \frac{2}{N} (K \mathcal{L}_m u + u D_i D^i N) \right], \quad (5.51)$$

onde consideramos novamente a relação

$$\frac{1}{N} u \mathcal{L}_m K = -K^2 u - \frac{1}{N} K \mathcal{L}_m u, \quad (5.52)$$

para rearranjar os termos desejados. Considerando agora (5.17), vamos ter

$$\frac{\omega}{1-u} g^{\mu\nu} \partial_\mu u \partial_\nu u = \frac{\omega}{1-u} \left(q^{ij} D_i u D_j u - \frac{1}{N^2} (\dot{u} - N^i D_i u)^2 \right), \quad (5.53)$$

de forma totalmente análoga, fazendo apenas $\phi \rightarrow 1-u$.

Sendo assim, considerando a relação (4.96) para a ação, podemos expressar a densidade Lagrangiana associada a (5.50) como:

$$\mathcal{L}_u^{(3+1)} = \mathcal{L}^{(0,u)} + \mathcal{L}^{(\omega)} + \mathcal{L}_V, \quad (5.54)$$

onde

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{N\sqrt{q}}{2\kappa} \left[(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}) + \frac{2}{N} (\mathcal{L}_m K - D_i D^i N) \right], \quad (5.55)$$

é a decomposição ADM da densidade Lagrangiana de Einstein-Hilbert (EH), e

$$\mathcal{L}^{(u)} = \frac{-N\sqrt{q}}{2\kappa} \left[u(R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) - \frac{2}{N} (K\mathcal{L}_m u + uD_i D^i N) \right], \quad (5.56)$$

$$\mathcal{L}^{(\omega)} = \frac{-N\sqrt{q}}{2\kappa} \left[\frac{\omega}{1-u} \left(q^{ij} D_i u D_j u - \frac{1}{N^2} (\dot{u} - N^i D_i u)^2 \right) \right], \quad (5.57)$$

$$\mathcal{L}_V = \frac{-N\sqrt{q}}{2\kappa} V(u), \quad (5.58)$$

as suas modificações.

De modo geral,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u^{(3+1)} = & \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left\{ N(1-u) (R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) + 2K(\dot{u} - N^i D_i u) - 2(1-u) D_i D^i N \right. \\ & \left. - \frac{\omega}{N(1-u)} (N^2 q^{ij} D_i u D_j u - (\dot{u} - N^i D_i u)^2) - NV(u) \right\}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde considerou-se a relação

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K = n^\mu \nabla_\mu K = \nabla_\mu (n^\mu K) - K^2 \quad (5.60)$$

em (5.55) mais o termo de contorno adequado. A partir de (5.59), podemos calcular os momentos canônicos associados. Fazendo isso, obtemos

$$\pi^{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}_u^{(3+1)}}{\partial \dot{q}_{ij}} = \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left[(1-u)(K^{ij} - Kq^{ij}) + \frac{q^{ji}}{N} (\dot{u} - N^i D_i u) \right], \quad (5.61)$$

e

$$\pi_u := \frac{\partial \mathcal{L}_u^{(3+1)}}{\partial \dot{u}} = \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left[\frac{2\omega}{N(1-u)} (\dot{u} - N^i D_i u) + 2K \right]. \quad (5.62)$$

Assim como feito anteriormente, é conveniente expressar o tensor K^{ij} e seu traço em função do momento π^{ij} e seu traço. Sendo assim, do resultado (5.61), obtemos

$$K^{ij} = \frac{1}{(1-u)} \left[2\kappa \frac{\pi^{ij}}{\sqrt{q}} - \frac{q^{ij}}{N} (\dot{u} - N^i D_i u) \right] + Kq^{ij}, \quad (5.63)$$

onde, tomando o seu traço,

$$K = -\frac{1}{2(1-u)} \left[2\kappa \frac{\pi}{\sqrt{q}} - \frac{3}{N} (\dot{u} - N^i D_i u) \right], \quad (5.64)$$

e portanto,

$$K^{ij} = \frac{1}{(1-u)} \left[\frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ij} - \frac{\pi q^{ij}}{2} \right) + \frac{q^{ij}}{2N} (\dot{u} - N^i D_i u) \right]. \quad (5.65)$$

Uma vez que devemos expressar todos os nossos resultados em função apenas dos momentos conjugados, substituiremos as quantidades acima onde for necessário. Inicialmente, substituímos (5.64) em (5.62), o que dá

$$\pi_u = \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left[-2\kappa \frac{\pi}{\sqrt{q}(1-u)} + \frac{3+2\omega}{N(1-u)} (\dot{u} - N^i D_i u) \right], \quad (5.66)$$

e nos permite expressar a velocidade generalizada $\dot{u}$ como

$$\dot{u} = \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \frac{N}{(3+2\omega)} \left[(1-u)\pi_u + \pi \right] + N^i D_i u. \quad (5.67)$$

Considerando reescrever a densidade $\mathcal{L}_u^{(3+1)}$, devemos ainda obter K^2 e $K^{ij}K_{ij}$. Fazendo isso, obtemos, após alguns passos algébricos:

$$K^2 = \frac{1}{4(1-u)^2} \left[\frac{4\kappa^2}{q} \pi^2 - \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \frac{6\pi}{N} (\dot{u} - N^i D_i u) + \frac{9}{N^2} (\dot{u} - N^i D_i u)^2 \right], \quad (5.68)$$

e

$$K^{ij}K_{ij} = \frac{1}{(1-u)^2} \left[\frac{4\kappa^2}{q} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{4} \right) - \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \frac{\pi}{2N} (\dot{u} - N^i D_i u) + \frac{3}{4N^2} (\dot{u} - N^i D_i u)^2 \right]. \quad (5.69)$$

Portanto, substituindo essas duas últimas equações, além de (5.64) e (5.67) na densidade Lagrangiana (5.59), vamos conseguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u^{(3+1)} = & \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left\{ N \left[(1-u)R + \frac{1}{(1-u)q} \left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{2(1-u)q} \left(\frac{N}{(3+2\omega)} \right) \right. \\ & \times \left. \left[(1-u)\pi_u + \pi \right]^2 - \frac{N\omega}{(1-u)} D_i u D^i u - NV(u) - 2(1-u)D_i D^i N \right\}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

A fim de calcular a densidade Hamiltoniana associada, devemos utilizar a transformação de Legendre

$$\mathcal{H}_u^{(3+1)} = \pi^{ij}\dot{q}_{ij} + \pi_u \dot{u} - \mathcal{L}_u^{(3+1)}. \quad (5.71)$$

Para isso, precisamos obter a única quantidade restante ($\dot{q}_{ij}$). Sendo assim, substituímos (5.65) em (4.92), de modo a ter

$$\dot{q}_{ij} = \frac{2N}{(1-u)} \left[\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\pi_{ij} - \frac{\pi q_{ij}}{2} \right) \right] + \frac{q_{ij}}{(1-u)} (\dot{u} - N^i D_i u) + D_j N_i + D_i N_j, \quad (5.72)$$

ou ainda,

$$\dot{q}_{ij} = \frac{2N}{(1-u)} \left[\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\pi_{ij} - \frac{\pi q_{ij}}{2} \right) \right] + \frac{q_{ij}}{(1-u)\sqrt{q}} \frac{N}{(3+2\omega)} [(1-u)\pi_u + \pi] + D_j N_i + D_i N_j, \quad (5.73)$$

após substituir $\dot{u}$ por (5.67).

Portanto, multiplicando (5.67) por π_u , (5.73) por π^{ij} , e subtraindo o resultado de

(5.70), chegamos ao resultado esperado, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_u^{(3+1)} = & \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left\{ N \left[- (1-u)R + \frac{4\kappa^2}{(1-u)q} \left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right. \right. \\
& + \frac{2\kappa^2}{(1-u)q} \frac{1}{3+2\omega} [\pi + (1-u)\pi_u]^2 \\
& + \frac{\omega}{1-u} D_a u D^a u + V(u) \Big] \\
& \left. + 2(1-u) D^a D_a N \right\} \\
& + 2\pi_a{}^b D_b N^a + \pi_u N^a D_a u,
\end{aligned} \tag{5.74}$$

que também pode ser expressa da forma a seguir, de maneira mais conveniente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_u^{(3+1)} = & \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left\{ N \left[- (1-u)R + \frac{4\kappa^2}{(1-u)q} \left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right. \right. \\
& + \frac{2\kappa^2}{(1-u)q} \frac{1}{3+2\omega} [\pi + (1-u)\pi_u]^2 \\
& + \frac{\omega}{1-u} D_a u D^a u - 2D^a D_a u + V(u) \Big] \Big\} \\
& + N^a \left[- 2D_b \pi_a{}^b + D_a u \pi_u \right],
\end{aligned} \tag{5.75}$$

que pode ser identificada como

$$\mathcal{H}_u^{(3+1)} = N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i, \tag{5.76}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left[- (1-u)R + \frac{4\kappa^2}{(1-u)q} \left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right. \\
& + \frac{2\kappa^2}{(1-u)q} \frac{1}{3+2\omega} [\pi + (1-u)\pi_u]^2 \\
& \left. + \frac{\omega}{1-u} D_i u D^i u - 2D^i D_i u + V(u) \right],
\end{aligned} \tag{5.77}$$

como sendo o *vínculo Hamiltoniano*, e

$$\mathcal{H}_i = -2D_j \pi_i{}^j + D_i u \pi_u, \tag{5.78}$$

como *vínculo do momento*. O Hamiltoniano é dado pela integração na hipersuperfície da densidade Hamiltoniana associada, da forma

$$H_u^{(3+1)} = \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}_u^{(3+1)}. \tag{5.79}$$

Podemos notar ainda que no limite em que $u = 0$, $\omega = 0$ e $V(u) = 0$, ou ainda ($\phi = 1$), a densidade Hamiltoniana (5.75) se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u^{(3+1)} = & \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left\{ N \left[-R + \frac{4\kappa^2}{q} \left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right. \right. \\ & + \frac{2\kappa^2}{q} \frac{1}{3+2\omega} [\pi + \pi_u]^2 \\ & \left. \left. - 2N^a D_b \pi_a^b \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde, considerando que neste limite temos $\pi_u = -\pi$, reproduz-se o resultado obtido para a ação de Einstein-Hilbert (4.104), como era de se esperar, da mesma forma que em (5.46). Podemos deduzir então que esse limite confirma completamente o mapeamento $\phi \rightarrow \frac{1}{2\kappa}(1-u)$ em (5.46).

5.3.1 Equações de campo de Hamilton e geradores de difeomorfismos

Dado que a RG é uma teoria de campo sujeita a vínculos, é conveniente fazer uso da formulação Hamiltoniana para a análise de tais vínculos, bem como das equações de movimento correspondentes. Para isso, consideraremos o formalismo desenvolvido na seção (2.3) para uma teoria de campos.

Das equações (5.22) e (5.23) notamos o primeiro conjunto de vínculos da nossa teoria, relacionados às funções *lapso* e *deslocamento*, respectivamente. De acordo com [4], tais vínculos são chamados de *primários*, devido a Bergmann, pois seguem diretamente do fato de a densidade Lagrangiana ser independente de $\dot{N}$ e $\dot{N}^i$.

Portanto, no contexto da RG, o conjunto dos momentos conjugados Π é dado por π_N e π_i , o que leva ao seguinte conjunto de vínculos secundários:

$$\{\pi_N, H_u\} = -\mathcal{H} \approx 0, \quad (5.81)$$

$$\{\pi_i, H_u\} = -\mathcal{H}_i \approx 0, \quad (5.82)$$

calculados a partir da definição (2.33), sendo H_u dado por (5.79), o que mostra o porquê $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_i$ são de fato considerados vínculos. O parêntese de Poisson de tais vínculos com as variáveis dinâmicas da teoria em estudo fornecem as equações de campo correspondentes, e conseqüentemente a descrição do espaço de fase gravitacional. Veremos que tais vínculos são ainda reconhecidos como os geradores de difeomorfismos da teoria.

No que segue, iremos calcular parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas $q_{ij}(x)$, $u(x)$ e dos momentos canônicos $\pi^{ij}(x)$, $\pi_u(x)$ com os vínculos Hamiltoniano e de momento, de acordo com a definição (2.33). Sendo assim, considerando inicialmente o vínculo de momento da eq. (5.78):

$$\begin{aligned}
\left\{ q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \mathcal{H}_i(y) \right\} &= -2 \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{q} N^i(y) D_j \left(\frac{\pi_i^j(y)}{\sqrt{q}} \right) \\
&= 2 \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \pi_i^j D_j N^i(y) \\
&= 2 \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y q_{il}(y) \pi^{lj}(y) D_j N^i \\
&= \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \left(q_{lc}(y) \pi^{ml}(y) D_m N^c + q_{mc}(y) \pi^{mk}(y) D_k N^c \right)
\end{aligned} \tag{5.83}$$

onde usamos o fato de que $q_{ij}(x)$ e $\pi^{ij}(x)$ são variáveis independentes. Considerando a seguinte propriedade da derivada funcional

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int d^n y \dots = \int d^n y \frac{\delta}{\delta f(x)} \dots, \tag{5.84}$$

vamos ter

$$\left\{ q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \mathcal{H}_i(y) \right\} = \int_{\Sigma_t} d^3y \left(q_{lc}(y) \frac{\delta \pi^{ml}(y)}{\delta \pi^{ij}(x)} D_m N^c + q_{mc}(y) \frac{\delta \pi^{mk}(y)}{\delta \pi^{ij}(x)} D_k N^c \right). \tag{5.85}$$

Considerando agora os funcionais genéricos

$$X_x[\psi_\alpha] = \psi_\alpha(x, t) = \int d^3x' \delta(x - x') \psi_\alpha(x', t), \tag{5.86}$$

e

$$Y_x[\pi^\beta] = \pi^\beta(x, t) = \int d^3x' \delta(x - x') \pi^\beta(x', t), \tag{5.87}$$

obtemos as relações

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \psi_\alpha(x, t)}{\delta \psi_\gamma(x', t)} &= \delta_\alpha^\gamma \delta(x - x'), \\
\frac{\delta \pi^\beta(x, t)}{\delta \pi^\gamma(x', t)} &= \delta_\gamma^\beta \delta(x - x'),
\end{aligned} \tag{5.88}$$

de modo que reescrevemos (5.85) como

$$\begin{aligned}
\left\{ q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \mathcal{H}_i(y) \right\} &= \int_{\Sigma_t} d^3y \left(q_{lc}(y) \delta_i^m \delta_j^l \delta(x-y) D_m N^c \right. \\
&\quad \left. + q_{mc}(y) \delta_i^m \delta_j^k \delta(x-y) D_k N^c \right) \\
&= \int_{\Sigma_t} d^3y \left(q_{jc}(y) \delta(x-y) D_i N^c + q_{ic}(y) \delta(x-y) D_j N^c \right) \\
&= q_{jc}(x) D_i N^c + q_{ic}(x) D_j N^c \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{N}} q_{ij}(x), \tag{5.89}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}_{\mathbf{N}} q_{ij}(x)$ é a derivada de Lie ao longo do campo vetorial tri-dimensional $\mathbf{N}$ definido pelas componentes da função deslocamento N^i . Se compararmos o resultado acima com a equação de campo de Hamilton

$$\dot{q}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} = D_i N_j + D_j N_i + 2N K_{ij}, \tag{5.90}$$

notamos que tais equações são iguais a menos do termo $2N K_{ij}$, que está associado ao parêntese de Poisson de $q_{ij}(x)$ com o vínculo Hamiltoniano $\mathcal{H}$. Veremos mais à frente, de forma explícita, que tal sentença é verdadeira.

Calculando agora o parêntese de Poisson da variável dinâmica $u(x)$ com o vínculo de momento, vamos ter

$$\begin{aligned}
\left\{ u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \mathcal{H}_i(y) \right\} &= \frac{\delta}{\delta \pi_u(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \pi_u(y) D_i u(y) \\
&= \int_{\Sigma_t} d^3y \frac{\delta \pi_u(y)}{\delta \pi_u(x)} N^i(y) D_i u(y) \\
&= \int_{\Sigma_t} d^3y \delta(x-y) N^i(y) D_i u(y) \\
&= N^i(x) D_i u(x) = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} u(x), \tag{5.91}
\end{aligned}$$

e notamos novamente que o resultado será uma derivada de Lie ao longo das componentes N^i do vetor deslocamento. Tal padrão não é uma surpresa, e veremos mais a frente o que isso significa.

Após trabalhar com as variáveis canônicas, consideremos agora seguir os passos acima para os momentos canônicos associados. Sendo assim, para $\pi^{ij}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \mathcal{H}_i(y) \right\} &= 2 \frac{\delta}{\delta q_{ij}(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{q} N^i(y) D_j \left(\frac{\pi_i^j(y)}{\sqrt{q}} \right) \\
&= -2 \frac{\delta}{\delta q_{ij}(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l. \tag{5.92}
\end{aligned}$$

É conveniente aqui considerar a variação do integrando de maneira explícita. Fazendo isso,

$$\begin{aligned} \delta \left(-2 \int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l \right) \\ = -2 \int_{\Sigma_t} d^3y \left(\delta q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l + q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) \delta D_m N^l \right). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Considerando a definição de derivada covariante em Σ_t

$$D_i N^j = \frac{\partial N^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{i\lambda} N^\lambda, \quad (5.94)$$

reescrevemos a equação acima como

$$\begin{aligned} \delta \left(-2 \int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l \right) \\ = -2 \int_{\Sigma_t} d^3y \left(\delta q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l + q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) \delta \Gamma^l_{m\lambda} N^\lambda \right). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Considerando agora a definição da variação do símbolo de Christoffel (A.21) vamos ter, para o segundo termo do lado direito da equação acima,

$$\delta \Gamma^l_{m\lambda} = \frac{1}{2} q^{lk} (D_m \delta q_{k\lambda} + D_\lambda \delta q_{mk} - D_k \delta q_{m\lambda}), \quad (5.96)$$

de modo que

$$\begin{aligned} q_{nl} \pi^{mn} \delta \Gamma^l_{m\lambda} N^\lambda &= \frac{1}{2} q_{nl} \pi^{mn} q^{lk} (D_m \delta q_{k\lambda} + D_\lambda \delta q_{mk} - D_k \delta q_{m\lambda}) N^\lambda \\ &= \frac{1}{2} \delta_n^k \pi^{mn} (D_m \delta q_{k\lambda} + D_\lambda \delta q_{mk} - D_k \delta q_{m\lambda}) N^\lambda \\ &= \frac{1}{2} \pi^{mk} (D_m \delta q_{k\lambda} + D_\lambda \delta q_{mk} - D_k \delta q_{m\lambda}) N^\lambda. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Na última linha da equação acima podemos notar uma antissimetria nos índices (m, k) do primeiro e terceiro termos entre parênteses. Dado que π^{mk} é um tensor simétrico, vamos ter então que

$$q_{nl} \pi^{mn} \delta \Gamma^l_{m\lambda} N^\lambda = \frac{1}{2} \pi^{mk} N^\lambda D_\lambda \delta q_{mk}, \quad (5.98)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \delta \left(-2 \int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l \right) &= -2 \int_{\Sigma_t} d^3y \left(\delta q_{nl}(y) \pi^{mn}(y) D_m N^l(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \pi^{m\sigma}(y) N^l(y) D_l \delta q_{\sigma m}(y) \right). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Para o primeiro termo do lado direito da igualdade acima, consideremos a definição de um tensor simétrico para reescrevê-lo como

$$2\delta q_{nl}(y)\pi^{mn}(y)D_m N^l(y) = \delta q_{nc}(y)\pi^{kn}(y)D_k N^c(y) + \delta q_{lc}(y)\pi^{lk}(y)D_k N^c(y), \quad (5.100)$$

enquanto que para o segundo termo, utilizaremos a definição de derivada total, de modo que

$$\begin{aligned} \pi^{m\sigma}(y)N^l(y)D_l\delta q_{\sigma m}(y) = & D_l(\pi^{m\sigma}(y)N^l(y)\delta q_{\sigma m}(y)) \\ & - \delta q_{\sigma m}(y)\pi^{m\sigma}(y)D_l N^l(y) - \delta q_{\sigma m}(y)N^l(y)D_l\pi^{m\sigma}(y), \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde o termo de derivada total é eliminado sob integração. Sendo assim, rearranjando todos os termos acima, vamos ter:

$$\begin{aligned} \delta\left(-2\int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y)\pi^{mn}(y)D_m N^l\right) = & \int_{\Sigma_t} d^3y \left(-\delta q_{nc}(y)\pi^{kn}(y)D_k N^c(y) \right. \\ & \left.- \delta q_{lc}(y)\pi^{lk}(y)D_k N^c(y) + \delta q_{\sigma m}(y)\pi^{m\sigma}(y)D_l N^l(y) + \delta q_{\sigma m}(y)N^l(y)D_l\pi^{m\sigma}(y)\right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Por fim, devemos considerar a equação acima com respeito à variação $\delta q_{ij}(x)$, o que leva a:

$$\begin{aligned} \delta\left(-2\int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y)\pi^{mn}(y)D_m N^l\right) = & \int_{\Sigma_t} d^3y \left(-\delta_n^i \delta_c^j \delta(x-y)\pi^{kn}(y)D_k N^c(y) \right. \\ & - \delta_c^i \delta_l^j \delta(x-y)\pi^{lk}(y)D_k N^c(y) + \delta_\sigma^i \delta_m^j \delta(x-y)\pi^{m\sigma}(y)D_l N^l(y) \\ & \left.+ \delta_\sigma^i \delta_m^j \delta(x-y)N^l(y)D_l\pi^{m\sigma}(y)\right), \end{aligned} \quad (5.103)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} d^3y \left(-\delta(x-y)\pi^{ik}(y)D_k N^j(y) - \delta(x-y)\pi^{jk}(y)D_k N^i(y) \right. \\ \left.+ \delta(x-y)\pi^{ij}(y)D_k N^k(y) + N^k(y)D_k\pi^{ij}(y)\right). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Realizando as integrações,

$$\begin{aligned} \delta\left(-2\int_{\Sigma_t} d^3y q_{nl}(y)\pi^{mn}(y)D_m N^l\right) = & N^k(x)D_k\pi^{ij}(x) + \pi^{ij}(x)D_k N^k(x) \\ & - \pi^{ik}(x)D_k N^j(x) - \pi^{jk}(x)D_k N^i(x), \end{aligned} \quad (5.105)$$

de modo que, substituindo em (5.92), vamos ter

$$\left\{\pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y)\mathcal{H}_i(y)\right\} = \mathcal{L}_N \pi^{ij}(x) \quad , \quad (5.106)$$

onde identificamos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}}\pi^{ij}(x) = N^k(x)D_k\pi^{ij}(x) + \pi^{ij}(x)D_kN^k(x) - \pi^{ik}(x)D_kN^j(x) - \pi^{jk}(x)D_kN^i(x) \quad (5.107)$$

como a derivada de Lie de $\pi^{ij}(x)$ ao longo de $\mathbf{N}$. Se compararmos a equação acima com $\mathcal{L}_{\mathbf{N}}q_{ij}(x)$ (5.89), notamos a presença de dois termos a mais. O primeiro se dá pela conservação da derivada covariante de q_{ij} . O segundo é explicado levando-se em conta que π^{ij} não é um mero quadritensor de segunda ordem, mas uma densidade tensorial[†]. Assim, uma contribuição adicional surge para a derivada de Lie por causa do fator $\sqrt{q}$, que está implicitamente contido em π^{ij} [29].

Finalmente, consideremos o parêntese de Poisson do momento canônico π_u com o vínculo de momento. De forma direta, seguindo alguns passos da operação anterior:

$$\begin{aligned} \left\{ \pi_u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^i(y) \mathcal{H}_i(y) \right\} &= - \frac{\delta}{\delta u(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \pi_u(y) D_i u(y) N^i(y) \\ &= - \frac{\delta}{\delta u(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \left(D_i(u(y) N^i(y) \pi_u(y)) - u(y) D_i \pi_u(y) N^i(y) \right. \\ &\quad \left. - u(y) \pi_u(y) D_i N^i(y) \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta u(x)} \int_{\Sigma_t} d^3y \left(u(y) D_i \pi_u(y) N^i(y) + u(y) \pi_u(y) D_i N^i(y) \right) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3y \delta(x-y) \left(D_i \pi_u(y) N^i(y) + \pi_u(y) D_i N^i(y) \right) \\ &= \pi_u(x) D_i N^i(x) + N^i(x) D_i \pi_u(x) = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \pi_u(x), \end{aligned} \quad (5.110)$$

onde identificamos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}}\pi_u(x) = \pi_u(x) D_i N^i(x) + N^i(x) D_i \pi_u(x). \quad (5.111)$$

Dessa forma, notamos a partir das equações (5.89), (5.91), (5.106) e (5.110) que $\int d^3y N^l \mathcal{H}_l$ é o *gerador de difeomorfismos espaciais* em Σ_t das variáveis dinâmicas $(q_{ij}, u, \pi^{ij}, \pi_u)$, e

[†]Para um dado tensor de ordem (k, l) , a correspondente densidade tensorial é definida como [24]:

$$\mathcal{T}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} = \sqrt{|g|}^W T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} \quad (5.108)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e $W \in \mathbb{R}$ é o peso da densidade tensorial. Com essa definição, a derivada covariante de uma densidade tensorial é uma generalização direta (usando $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$, então $\nabla_\mu g = 0$):

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} = \sqrt{|g|}^W \nabla_\mu \left[\frac{\mathcal{T}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l}}{\sqrt{|g|}^W} \right] = \sqrt{|g|}^W \nabla_\mu T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} \quad (5.109)$$

de qualquer função $F(q_{ij}, u, \pi^{ij}, \pi_u)$ destas, em particular as densidades funcionais $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_i$ [26, 27]. Em outras palavras, qualquer variação do tipo $\tilde{F} \rightarrow F + \delta F$ ao longo de Σ_t é dada pelo parêntese de Poisson entre essas funções e $\int d^3y N^l \mathcal{H}_l$. No caso das densidades $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_i$ vamos ter, a partir de [27]:

$$\left\{ \mathcal{H}_i(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^l(y) \mathcal{H}_l(y) \right\} = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \mathcal{H}_i(x), \quad (5.112)$$

onde identificamos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}} \mathcal{H}_i(x) = N^l \partial_l \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_l \partial_i N^l + \mathcal{H}_i \partial_l N^l, \quad (5.113)$$

e

$$\left\{ \mathcal{H}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N^l(y) \mathcal{H}_l(y) \right\} = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \mathcal{H}(x), \quad (5.114)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}} \mathcal{H}(x) = N^l \partial_l \mathcal{H} + \mathcal{H} \partial_l N^l. \quad (5.115)$$

Da mesma forma que na mecânica clássica o momento é o gerador de translações, difeomorfismos espaciais nesse caso estão relacionados a deformações espaciais em Σ_t que são tangentes à hipersuperfície e são descritas pelo campo vetorial espacial $\mathbf{N}$ através da derivada direcional (derivada de Lie) $\mathcal{L}_{\mathbf{N}} \phi(x)$, como mostrado na seção (3.5).

Para confirmar o primeiro conjunto de equações de campo de Hamilton, a saber, associada à variável dinâmica $q_{ij}(x)$, devemos calcular o seguinte parêntese de poisson:

$$\left\{ q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y) \right\}, \quad (5.116)$$

sendo $\mathcal{H}(y)$ o vínculo Hamiltoniano dado por (5.77). Dado que q_{ij} é independente de π^{ij} , vamos ter

$$\left\{ q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y) \right\} = \int_{\Sigma_t} d^3y \left(\frac{\delta q_{ij}(x)}{\delta q_{ij}(x)} \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \pi^{ij}(x)} N(y) \right) = \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \pi^{ij}(x)}. \quad (5.117)$$

Considerando a variação de $\mathcal{H}$ separadamente vamos ter, para o primeiro termo de (5.77), a variação do escalar de Ricci. Reescrevendo este termo como

$$R = q^{ab} R_{ab}, \quad (5.118)$$

sendo R_{ab} o tensor de Ricci, vamos ter

$$\delta R = \delta q^{ab} R_{ab} + q^{ab} \delta R_{ab}, \quad (5.119)$$

onde, de acordo com (A.2) e (A.10)

$$\delta q^{ab} = -q^{am}\delta q_{mn}q^{nb}, \quad (5.120)$$

$$\delta R_{ab} = D_l \delta \Gamma_{ab}^l - D_a \delta \Gamma_{lb}^l, \quad (5.121)$$

sendo $\delta \Gamma_{ab}^l$ dado por (A.21) novamente. Portanto, uma vez que todos esses termos são independentes de π^{ij} ,

$$\frac{\delta R}{\delta \pi^{ij}} = 0. \quad (5.122)$$

Para o segundo termo de $\mathcal{H}$, consideremos a relação $\pi_{ab} = \pi^{cd}q_{ac}q_{db}$, de modo que

$$\frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} (\pi^{cd} \pi^{ab} q_{ac} q_{db}) - \frac{1}{2} \frac{\delta \pi^2}{\delta \pi^{ij}}. \quad (5.123)$$

Calculando separadamente cada um dos termos acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} (\pi^{cd} \pi^{ab} q_{ac} q_{db}) &= \left(\frac{\delta \pi^{ab}}{\delta \pi^{ij}} \pi^{cd} + \frac{\delta \pi^{cd}}{\delta \pi^{ij}} \pi^{ab} \right) q_{ac} q_{db} \\ &= 2\pi^{cd} q_{ac} q_{bd} \frac{\delta \pi^{ab}}{\delta \pi^{ij}} \\ &= 2\pi_{ab} \delta_i^a \delta_j^b \delta(x-y) \\ &= 2\pi_{ij}(y) \delta(x-y), \end{aligned} \quad (5.124)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\delta \pi^2}{\delta \pi^{ij}} &= \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} (\pi^{ab} q_{ab} \pi^{cd} q_{cd}) = \frac{\pi^{ab}}{\delta \pi^{ij}} q_{ab} \pi + q_{cd} \pi \frac{\delta \pi^{cd}}{\delta \pi^{ij}} \\ &= \left(\delta_i^a \delta_j^b q_{ab} \pi + \delta_i^c \delta_j^d q_{cd} \pi \right) \delta(x-y) \\ &= 2\pi(y) q_{ij}(y) \delta(x-y), \end{aligned} \quad (5.125)$$

de modo que

$$\frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) = (2\pi_{ij}(y) - \pi(y) q_{ij}(y)) \delta(x-y). \quad (5.126)$$

Por fim, o próximo termo não trivial de $\mathcal{H}$ é o terceiro, onde temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} (\pi + (1-u)\pi_u)^2 &= \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} (\pi^2 + 2(1-u)\pi\pi_u + (1-u)^2\pi_u^2) \\ &= \frac{\delta \pi^2}{\delta \pi^{ij}} + 2(1-u)\pi_u \frac{\delta \pi}{\delta \pi^{ij}}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Note que o primeiro termo já foi calculado em (5.125). Para o segundo, seguimos os mesmos passos, considerando $\pi = \pi^{ab} q_{ab}$, obtendo

$$\frac{\delta \pi}{\delta \pi^{ij}} = \frac{\delta (\pi^{ab} q_{ab})}{\delta \pi^{ij}} = q_{ab} \frac{\delta \pi^{ab}}{\delta \pi^{ij}} = q_{ij}(y) \delta(x-y). \quad (5.128)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\pi^{ij}}(\pi + (1-u)\pi_u)^2 &= (2\pi(y)q_{ij}(y) + 2q_{ij}(y)(1-u)\pi_u(y))\delta(x-y) \\ &= 2q_{ij}(y)(\pi(y) + (1-u)\pi_u(y))\delta(x-y).\end{aligned}\quad (5.129)$$

Portanto, substituindo (5.122), (5.126) e (5.129) em (5.117), obtemos

$$\begin{aligned}\left\{q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y)\right\} &= \int_{\Sigma_t} d^3y \delta(x-y) \frac{N(y)\sqrt{q}}{2\kappa} \left[\frac{4\kappa^2}{(1-u)q} 2\left(\pi_{ij}(y) - \frac{\pi(y)}{2} q_{ij}(y)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\kappa^2}{(1-u)q} \frac{1}{(3+2\omega)} 2q_{ij}(y)(\pi(y) + (1-u)\pi_u(y)) \right],\end{aligned}\quad (5.130)$$

que, após realizar a integração, resulta em

$$\begin{aligned}\left\{q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y)\right\} &= \frac{2\kappa N(x)}{\sqrt{q}(1-u)} \left[2\left(\pi_{ij}(x) - \frac{\pi(x)}{2} q_{ij}(x)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_{ij}(x)}{(3+2\omega)} ((1-u)\pi_u(x) + \pi(x)) \right] \\ &= 2N(x)K_{ij}(x) \\ &= \mathcal{L}_m q_{ij}(x).\end{aligned}\quad (5.131)$$

O conjunto de equações (5.131) juntamente com (5.89) corrobora com (5.73). Isso confirma a validade do primeiro conjunto de equações de campo de Hamilton:

$$\dot{q}_{ij}(x) = \left\{q_{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}_u(y)\right\}, \quad (5.132)$$

com $\mathcal{H}_u$ dado por (5.79). Tais equações são interpretadas como identidades geométricas e não devem ser modificadas desde que a geometria Riemanniana seja tomada como fundamento da teoria de gravidade modificada [30]. A equação (5.131) fornece ainda uma relação fundamental no contexto do formalismo ADM, dada por

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \mathcal{L}_m q_{ab}, \quad (5.133)$$

ou seja, a curvatura extrínseca nos permite dar uma medida da variação da métrica tridimensional em relação ao tempo introduzido pela folheação, quer dizer, K_{ab} contém essencialmente a informação sobre a “derivada temporal” de q_{ab} .

Calcularemos agora a equação de campo associada ao campo $u(x)$. De forma direta,

$$\left\{u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y)\right\} = \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \pi_u}. \quad (5.134)$$

Dado que o único termo dependente de π_u em (5.77) é o terceiro, temos que

$$\frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \pi_u} = 2(1-u)(\pi + (1-u)\pi_u)\delta(x-y), \quad (5.135)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \left\{ u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y) \right\} &= \frac{\sqrt{q} N}{2\kappa} \left[\frac{2\kappa^2}{(1-u)q} \frac{1}{(3+2\omega)} 2(1-u)(\pi + (1-u)\pi_u) \right] \\ &= \frac{2\kappa N(x)}{\sqrt{q}} \frac{1}{(3+2\omega)} \left[\pi(x) + (1-u(x))\pi_u(x) \right] \\ &= \mathcal{L}_m u(x). \end{aligned} \quad (5.136)$$

Tal resultado, juntamente com (5.91), complementa o segundo conjunto de equações de campo de Hamilton para u , dada por

$$\begin{aligned} \dot{u}(x) &= \left\{ u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}_u(y) \right\} \\ &= \frac{2\kappa N(x)}{\sqrt{q}} \frac{1}{(3+2\omega)} \left[\pi(x) + (1-u(x))\pi_u(x) \right] + N^i(x) D_i u(x). \end{aligned} \quad (5.137)$$

Este resultado, assim como $\dot{q}_{ij}(x)$, representa uma identidade geométrica satisfeita por $u(x)$ nas hipersuperfícies, e não envolve qualquer informação dinâmica acerca do campo de fundo.

Podemos notar de (5.131) e (5.136) que a quantidade $\int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}(y) N(y)$, proporcional ao vínculo Hamiltoniano, atua como o *gerador de difeomorfismos na direção normal a Σ_t* conectado ao quadri-vetor m^μ . Para ilustrar melhor o significado da derivada de Lie ao longo de m^μ , consideremos um campo vetorial $\vec{v}$ tangente a uma hipersuperfície Σ_t definido entre os pontos p e q . Ao transportarmos este pelas linhas de campo de $\mathbf{m}$ por um difeomorfismo $\Phi_{\delta t}$ para uma hipersuperfície vizinha $\Sigma_{t+\delta t}$, a derivada de Lie de $\vec{v}$ ao longo de $\mathbf{m}$ é então definida pela diferença entre o valor do campo vetorial $\vec{v}$ no ponto $\phi_{\delta t}(p)$, i.e. $\vec{v}(t+\delta t)$, e o vetor transportado de Σ_t ao longo das linhas de campo de $\mathbf{m}$, i.e. $\phi_{\delta t}\vec{v}(t)$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \vec{v}(t+\delta t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(t+\delta t) - \phi_{\delta t} \vec{v}(t)}{\delta t} \right], \quad (5.138)$$

representada pela figura (5.2),

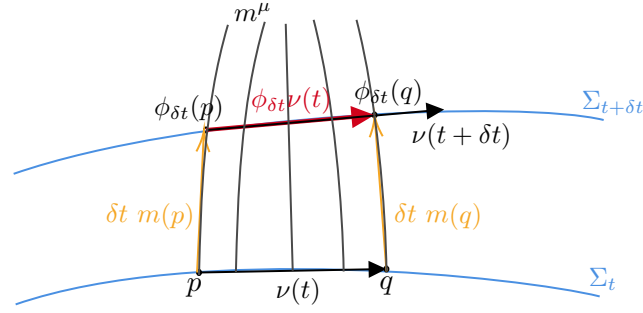


Figura 5.2 – Construção geométrica da derivada de Lie ao longo de m^μ .

Note que a definição (5.138) é análoga a (3.63) para uma derivada de Lie ao longo de uma única variedade do espaço-tempo (que se aplica diretamente para hipersuperfícies).

Continuando com o cálculo das equações de Hamilton, busquemos agora complementar o conjunto de equações dinâmicas do nosso sistema. Calculemos agora o parêntese de Poisson do momento canônico $\pi^{ij}(x)$ com o vínculo Hamiltoniano de modo a obter o conjunto de equações de campo associado a esta variável dinâmica. Devido à extensão dos cálculos, o passo a passo pode ser consultado no apêndice (B). Considerando apenas o resultado final, vamos ter:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} = & -\frac{1}{2\kappa} \left\{ \sqrt{q} \left[(1-u) N G^{ij} + D^a D_a [(1-u) N] q^{ij} \right. \right. \\
 & \left. \left. - D^i D^j [(1-u) N] \right] \right. \\
 & + \frac{4\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \left[2 \left(\pi^{ic} \pi_c^j - \frac{\pi \pi^{ij}}{2} \right) - \frac{q^{ij}}{2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] \\
 & + \frac{2\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \frac{1}{3+2\omega} \left[2\pi^{ij} (\pi + (1-u)\pi_u) - \frac{q^{ij}}{2} (\pi + (1-u)\pi_u)^2 \right] \\
 & + \sqrt{q} \left[\frac{N\omega}{1-u} \left(\frac{q^{ij}}{2} D_a u D^a u - D^i u D^j u \right) \right. \\
 & \left. + \left(q^{ij} D^a N D_a u - 2D^i N D^j u \right) + \frac{q^{ij}}{2} N V(u) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.139}$$

onde tem-se uma dependência implícita em (x) . Este resultado, juntamente com (5.106) dá o conjunto de equações de campo de Hamilton para $\pi^{ij}(x)$,

$$\dot{\pi}^{ij}(x) = \left\{ \pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}_u(y) \right\}. \tag{5.140}$$

Tal conjunto de equações dá informações acerca da dinâmica do espaço de fase em questão modificado pela presença do campo escalar $u(x)$, e corresponde à projeção puramente

especial das equações de Einstein modificadas ${}^{(4)}G^{ij} = \kappa^{(4)}T^{ij}$ na hipersuperfície Σ_t [25]. Como citado no último parágrafo da seção (4.9), onde obtivemos a Hamiltoniana da RG, a eq. (5.140) representa um conjunto de 6 equações independentes, que juntamente com (5.77) e (5.78) completam as projeções das equações de Einstein modificadas ao longo de direções distintas à hipersuperfície.

Devemos notar ainda que no limite em que $u = 0$, $\omega = 0$, onde $\pi_u = -\pi$, as equações de campo para $\pi^{ij}(x)$ no contexto da RG na decomposição $(3+1)$ devem ser recuperadas. Portanto, fazendo isso em (5.139), e somando com o resultado dado por (5.106), vamos obter:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij}(x) = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \sqrt{q} \left[-NG^{ij} - q^{ij}D^aD_aN + D^iD^jN \right] \right. \\ \left. - \frac{4\kappa^2N}{\sqrt{q}} \left[2 \left(\pi^{ic}\pi_c^j - \frac{\pi\pi^{ij}}{2} \right) - \frac{q^{ij}}{2} \left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] \right\} \\ + N^k D_k \pi^{ij} + \pi^{ij} D_k N^k - 2D_k N^{(i} \pi^{j)k}, \end{aligned} \quad (5.141)$$

que está de acordo com o resultado previsto, como pode ser observado em [25], por exemplo.

Por fim, consideremos agora confirmar o conjunto de equações de campo para o momento canônico associado ao campo de fundo $u(x)$. De maneira direta,

$$\left\{ \pi_u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} = - \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta u(x)}, \quad (5.142)$$

que após alguns cálculos que podem ser consultados no apêndice (B), vamos ter como resultado final:

$$\begin{aligned} \left\{ \pi_u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} = - \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left[NR + \frac{4\kappa^2N}{q(1-u)^2} \left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{2\kappa^2N}{q(3+2\omega)} \left(\frac{\pi^2}{(1-u)^2} - \pi_u^2 \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{N\omega D_i u D^i u}{(1-u)^2} + \frac{2\omega}{(1-u)} (D_i N D^i u + N D_i D^i u) \right) - 2D_i D^i N + N \frac{dV(u)}{du} \right], \end{aligned} \quad (5.143)$$

onde novamente considera-se uma dependência implícita em (x) , que juntamente com (5.110) dá a equação de campo para a variável $\pi_u(x)$,

$$\dot{\pi}_u(x) = \left\{ \pi_u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}_u(y) \right\}, \quad (5.144)$$

que descreve a dinâmica do campo de fundo $u(x)$ no espaço-tempo. Essas últimas são uma implicação da quebra de difeomorfismos espontânea e não ocorrem no caso de uma quebra de simetria explícita.

5.4 Álgebra de vínculos

Para podermos fazer uma contagem precisa sobre o número de graus de liberdade físicos em uma teoria da gravidade modificada, precisamos entender a evolução temporal de todos os vínculos. Uma aplicação do algoritmo de Dirac-Bergmann [38] fornecerá o número total de vínculos, e também nos dirá se surgem vínculos adicionais além daqueles da RG.

Obtemos em (5.81) e (5.82) um conjunto de vínculos secundários, a saber $\mathcal{H} \approx 0$ e $\mathcal{H}_i \approx 0$. Agora, os vínculos secundários devem ser sujeitos à evolução temporal. Para isso, é necessário calcular o parêntese de Poisson destes com o Hamiltoniano total (5.75).

Uma demonstração detalhada e elegante desses cálculos pode ser consultada em [33]. Os resultados são expressos da forma:

$$\left\{ \mathcal{H}_i(x'), \mathcal{H}_j(x'') \right\} = \mathcal{H}_i(x') \partial_j \delta(x' - x'') - \mathcal{H}_j(x'') \partial_i \delta(x'' - x'), \quad (5.145)$$

$$\left\{ \mathcal{H}(x'), \mathcal{H}(x'') \right\} = \mathcal{H}_c(x') \partial^c \delta(x' - x'') - \mathcal{H}_c(x'') \partial^c \delta(x'' - x'), \quad (5.146)$$

$$\left\{ \mathcal{H}_i(x'), \mathcal{H}(x'') \right\} = \mathcal{H}(x'') \partial_i \delta(x' - x''), \quad (5.147)$$

que é a representação canônica da álgebra de vínculos (ou difeomorfismos) entre os vínculos de momento e Hamiltoniano, na hipersuperfície. Tal álgebra é uma consequência para que a dinâmica do campo se desenvolva de forma consistente com a cinemática das deformações das hipersuperfícies, de acordo com [28].

De forma alternativa, se definimos

$$H[N] := \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y), \quad (5.148a)$$

$$P[\mathbf{N}] := \int_{\Sigma_t} d^3y N^c(y) \mathcal{H}_c(y), \quad (5.148b)$$

podemos representar a álgebra de difeomorfismos como:

$$\{P[\mathbf{N}], P[\mathbf{N}']\} = P[(\mathbf{N} \cdot \mathbf{D})\mathbf{N}' - (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{D})\mathbf{N}], \quad (5.149a)$$

$$\{P[\mathbf{N}], H[N]\} = H[(\mathbf{N} \cdot \mathbf{D})N], \quad (5.149b)$$

$$\{H[N], H[N']\} = P[N\mathbf{D}N' - N'\mathbf{D}N], \quad (5.149c)$$

de acordo com [33], sendo N a função lapso e $\mathbf{N}$ o vetor deslocamento. Tal estrutura de álgebra é típica de *vínculos de primeira classe*, o que implica que a evolução temporal dos

vínculos secundários não geram novos vínculos adicionais. Além disso, possui a mesma estrutura da RG, o que é surpreendente. Ou seja, mesmo para uma teoria modificada por um campo de fundo escalar dinâmico, a álgebra preserva sua forma da RG. Podemos ainda representá-la de forma geométrica, de acordo com a figura abaixo:

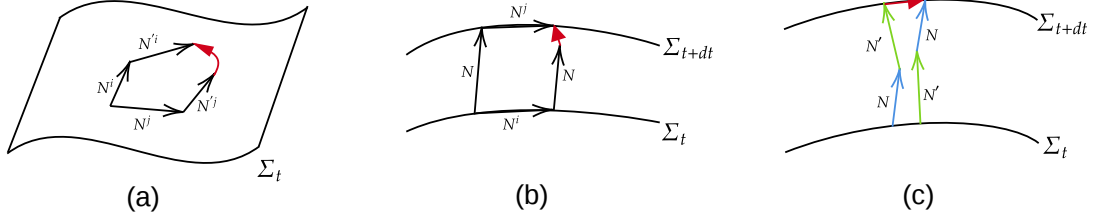


Figura 5.3 – Representação algébrica da álgebra de difeomorfismos. A Eq. (5.149a) significa que se calcularmos dois difeomorfismos espaciais em uma direção, e então dois em outra direção na mesma hipersuperfície, seremos levados a pontos diferentes, então precisamos de mais um difeomorfismo espacial para conectar esses dois pontos, dado em (a). Da mesma forma, para a Eq. (5.149b), o resultado de um difeomorfismo espaço-temporal seguido por um difeomorfismo espacial para uma direção, e então para outra, precisa de um difeomorfismo espaço-temporal para conectar os pontos (b). Para finalizar, o resultado de dois difeomorfismos espaço-temporais diferentes em direções diferentes precisa de um difeomorfismo espacial para conectá-los, Eq. (5.149c)-(c).

Sendo assim, estamos aptos para calcular a quantidade de graus de liberdade da nossa teoria. Para isso, consideramos [38]:

$$N_{dof} = \frac{1}{2} (N - 2N_1 - N_2) , \quad (5.150)$$

onde “dof” vem do inglês “degrees of freedom” que significa “graus de liberdade”. N representa o número de variáveis do espaço de fase e $N_1(N_2)$ o número de vínculos de primeira classe (segunda classe). Dado que possuímos apenas vínculos de primeira classe e não de segunda, totalizando $N_1 = 8$ extraídos a partir das equações (5.22), (5.23), (5.81) e (5.82), sendo $N = 20$ (correspondendo às 10 componentes da métrica e aos 10 momentos canônicos associados), obtemos $N_{dof} = 2$, o que está de acordo com a RG, como esperado. Essa é uma consequência direta de considerarmos uma teoria com quebra de simetria espontânea, o que não se estende para o caso de uma quebra explícita [30].

Capítulo 6

Considerações Finais

Partindo do ponto central de que a Teoria da Relatividade Geral é uma teoria de campos sujeita a vínculos, consideramos aplicar o formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados desenvolvido por Dirac [4], e estudado por tantos outros, como por exemplo [25, 34, 38]. Tal formulação surgiu como uma maneira natural de estudar sistemas muito complexos do ponto de vista da mecânica Newtoniana. Para aplicar este formalismo no contexto da RG, foi preciso utilizar o método desenvolvido por Arnowitt-Deser-Misner [15], a decomposição (3+1), que consiste na folheação do espaço-tempo em uma família contínua de hipersuperfícies tri-dimensionais tipo-espaço de tempo constante. Definindo um conjunto de variáveis fundamentais nessas hipersuperfícies, foi possível aplicar a decomposição (3 + 1) a todos os objetos matemáticos da RG que descrevem as equações de Einstein. Aplicando inicialmente à ação de Einstein-Hilbert, foi obtido o Hamiltoniano, cuja forma é proporcional ao produto função lapso N por uma densidade escalar $\mathcal{H}$, mais o produto do vetor descolamento N^i por uma densidade vetorial $\mathcal{H}_i$. Tais densidades foram identificadas como vínculos secundários, Hamiltoniano e de momento, que correspondem às projeções ortogonais, e parcialmente ortogonal e paralela das equações de Einstein nas hipersuperfícies, respectivamente [25].

Na tentativa de obter uma descrição gravitacional em escalas de comprimento muito menores das usuais da RG, consideramos estender os resultados anteriores para uma teoria gravitacional modificada. Tal teoria é descrita pelo MPE, onde um campo de fundo escalar dinâmico assume um valor esperado de vácuo não-nulo, violando uma das simetrias fundamentais da RG, a invariância por difeomorfismos. Obtivemos a Hamiltoniana associada, cuja estrutura é exatamente a mesma do caso da RG, com as densidades modificadas pela

presença do campo de fundo escalar u . Em seguida, calculou-se as equações de campo de Hamilton. As equações de campo fornecem identidades geométricas para a métrica intrínseca q_{ij} e para o campo escalar u , bem como a dinâmica da gravitação modificada nas hipersuperfícies, representada pelas equações associadas aos momentos canônicos associados. Em particular, a equação para o momento π^{ij} representa a projeção puramente espacial na hipersuperfície das equações de Einstein modificadas.

Após o cálculo das equações de campo por meio do formalismo Hamiltoniano, notamos que as quantidades proporcionais aos vínculos de Hamilton e de momento, respectivamente, agem como geradores de difeomorfismos nas hipersuperfícies. Tais geradores respeitam uma álgebra específica, a álgebra de difeomorfismos, correspondendo à mesma estrutura da álgebra da RG usual, o que é uma consequência de considerarmos um campo de fundo dinâmico. Com base nisso, através de uma contagem específica, foi possível mostrar que a teoria de gravidade modificada proposta no presente trabalho propaga apenas 2 graus de liberdade físicos, estando de acordo com a RG de Einstein.

Como perspectivas, desejamos estender nosso formalismo para o setor tensorial dado pelo campo de fundo $s^{\mu\nu}$ da densidade Lagrangiana do MPE definida em (5.47), de modo a generalizar os resultados obtidos em [33] para o setor puramente escalar, e por [30] para um campo de fundo não-dinâmico.

Apêndice A

Variações da métrica, Tensor de Ricci e Símbolo de Christoffel

No contexto do formalismo Hamiltoniano da RG, as variações das quantidades fundamentais obtidas a partir do formalismo covariante se apresentam de maneira natural. Sendo assim, utilizaremos este apêndice para deduzir tais relações.

A.1 Variação da métrica

A validade da expressão (5.119) pode ser mostrada considerando a relação $g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa} = \delta_{\mu}^{\kappa}$, onde, ao tomar sua variação, obtém-se

$$\begin{aligned}\delta(g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa}) &= 0 \\ g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\kappa} + \delta g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa} &= 0 \\ g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\kappa} &= -\delta g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa},\end{aligned}\tag{A.1}$$

ou simplesmente, mudando os índices,

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}.\tag{A.2}$$

De modo análogo,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}.\tag{A.3}$$

Para a métrica induzida em Σ vamos ter, de maneira natural,

$$\delta q_{\mu\nu} = -q_{\mu\alpha}q_{\nu\beta}\delta q^{\alpha\beta}.\tag{A.4}$$

A.2 Variação do Tensor de Ricci

Para calcular a variação do tensor de Ricci, devemos fazer uso de sua própria definição e da definição do tensor de Riemann da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \delta (\Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \delta (\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}) \\ &= \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \delta \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu}.\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

Como mostrado em [9], a quantidade $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$ não é um tensor, mas a diferença de duas conexões Levi-Civita dessa forma resulta em um. Assim, é possível reescrever o lado direito da relação acima em termos de derivadas covariantes. Uma vez que já definimos a derivada covariante para um tensor contravariante (3.10) e um tensor covariante (3.13), temos:

$$\nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) = \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda}, \quad (\text{A.6})$$

e também

$$\nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}) = \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho_{\rho\lambda}. \quad (\text{A.7})$$

Fazendo a subtração, obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}) &= \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \\ &\quad - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho_{\rho\lambda},\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

e considerando as simetrias da conexão,

$$\nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}) = \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho_{\rho\lambda}, \quad (\text{A.9})$$

que, como podemos observar, é igual ao lado direito da equação (A.5). Sendo assim, podemos reescrevê-la como:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}), \quad (\text{A.10})$$

conhecida como a *equação de Palatini*.

Tais resultados se estendem à hipersuperfície Σ fazendo a identificação $\nabla \rightarrow D$ para denotar a derivada covariante em Σ , da forma

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) - D_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}). \quad (\text{A.11})$$

A.3 Variação do Símbolo de Christoffel

Para determinar $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, devemos partir de sua definição em termos da métrica, dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) , \quad (\text{A.12})$$

e portanto,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\delta g^{\rho\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\rho\beta}[\delta(\partial_\mu g_{\nu\beta}) + \delta(\partial_\nu g_{\mu\beta}) - \delta(\partial_\beta g_{\mu\nu})] . \quad (\text{A.13})$$

Substituindo a relação (A.2) para a variação do inverso da métrica no primeiro termo de $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}(-g^{\lambda\rho}g^{\sigma\beta}\delta g_{\lambda\sigma})(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \\ + \frac{1}{2}g^{\rho\beta}[\partial_\mu(\delta g_{\nu\beta}) + \partial_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \partial_\beta(\delta g_{\mu\nu})] , \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -g^{\lambda\rho}\left[\frac{1}{2}g^{\sigma\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})\right]\delta g_{\lambda\sigma} \\ + \frac{1}{2}g^{\rho\beta}\left[\partial_\mu(\delta g_{\nu\beta}) + \partial_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \partial_\beta(\delta g_{\mu\nu})\right] , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde o primeiro termo entre colchetes é bem conhecido e igual a

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) , \quad (\text{A.16})$$

de modo que

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -g^{\beta\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\delta g_{\beta\sigma} + \frac{1}{2}g^{\rho\beta}[\partial_\mu(\delta g_{\nu\beta}) + \partial_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \partial_\beta(\delta g_{\mu\nu})] , \quad (\text{A.17})$$

ou ainda,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\beta}[\partial_\mu(\delta g_{\nu\beta}) + \partial_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \partial_\beta(\delta g_{\mu\nu}) - 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\delta g_{\beta\sigma}] . \quad (\text{A.18})$$

Podemos ainda organizar os termos acima de modo a obtê-los em função da derivada covariante, bastando fazer

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\beta}\{[\partial_\mu(\delta g_{\nu\beta}) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\delta g_{\beta\alpha}] + [\partial_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\delta g_{\beta\alpha}] - \partial_\beta(\delta g_{\mu\nu})\} . \quad (\text{A.19})$$

Perceba que para completar a derivada covariante no primeiro e segundo termos, falta apenas um termo de Γ , enquanto que no terceiro faltam dois. Completando a equação,

somando e subtraindo termos iguais, vamos ter:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = & \frac{1}{2}g^{\rho\beta} [\partial_{\mu} (\delta g_{\nu\beta}) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g_{\nu\alpha}] + \frac{1}{2}g^{\rho\beta} [\partial_{\nu} (\delta g_{\mu\beta}) \\ & - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\delta g_{\mu\alpha}] - \frac{1}{2}g^{\rho\beta} [\partial_{\beta} (\delta g_{\mu\nu}) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\delta g_{\mu\alpha}] , \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

que é igual a

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\beta} (\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\beta} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\beta} - \nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu}) . \quad (\text{A.21})$$

Além disso,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\beta\mu}\nabla_{\nu}\delta g_{\beta\mu} . \quad (\text{A.22})$$

Novamente, estendendo tais resultados para a hipersuperfície, teremos:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}q^{\rho\beta} (D_{\mu}\delta q_{\nu\beta} + D_{\nu}\delta q_{\mu\beta} - D_{\beta}\delta q_{\mu\nu}) , \quad (\text{A.23})$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}q^{\beta\mu}D_{\nu}\delta q_{\beta\mu} . \quad (\text{A.24})$$

Apêndice B

Equações de campo para π^{ij} e π_u

Para obter o conjunto de equações de campo associado a $\pi^{ij}(x)$, devemos calcular o parêntese de Poisson desta variável com o vínculo Hamiltoniano e somar com o resultado (5.106), que consiste no parêntese de poisson com o vínculo de momento. Sendo assim, partimos de

$$\left\{ \pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} = - \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta q_{ij}(x)}. \quad (\text{B.1})$$

Considerando termo a termo de (5.77) da forma

$$\begin{aligned} N\mathcal{H} = \frac{1}{2\kappa} & \left[\underbrace{-N(1-u)\sqrt{q}R}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{4\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right)}_{\text{II}} \right. \\ & + \underbrace{\frac{2\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \frac{1}{3+2\omega} [\pi + (1-u)\pi_u]^2}_{\text{III}} \\ & \left. + \underbrace{N\sqrt{q} \left(\frac{\omega}{1-u} D_i u D^i u - 2D^i D_i u + V(u) \right)}_{\text{IV}} \right], \quad (\text{B.2a}) \end{aligned}$$

vamos ter que a variação de I é dada por

$$\delta(-N(1-u)\sqrt{q}R) = -N(1-u) \left[\underbrace{R\delta\sqrt{q}}_{\text{I}'} + \underbrace{\sqrt{q}\delta R}_{\text{II}'} \right], \quad (\text{B.3})$$

onde que, para o termo I'

$$R\delta\sqrt{q} = R \frac{\delta q}{2\sqrt{q}} = R \frac{q q^{ab} \delta q_{ab}}{2\sqrt{q}} = \sqrt{q} \frac{R}{2} q^{ab} \delta q_{ab}, \quad (\text{B.4})$$

de modo que

$$R \frac{\delta\sqrt{q}}{\delta q^{ij}} = \sqrt{q} \frac{R}{2} q^{ij}, \quad (\text{B.5})$$

enquanto que para o segundo Π' levamos em conta a definição do escalar de Ricci em termos da métrica e do tensor de Ricci,

$$\sqrt{q}\delta(q^{ab}R_{ab}) = \sqrt{q}(R_{ab}\delta q^{ab} + q^{ab}\delta R_{ab}). \quad (\text{B.6})$$

Dada a relação $\delta q^{ab} = -q^{ac}q^{bd}\delta q_{cd}$ para a variação do inverso da métrica obtemos, para o primeiro termo da equação anterior,

$$\sqrt{q}R_{ab}\frac{\delta q^{ab}}{\delta q^{ij}} = -\sqrt{q}R_{ab}q^{ac}q^{bd}\frac{\delta q_{cd}}{\delta q^{ij}} = -\sqrt{q}R^{ij}, \quad (\text{B.7})$$

enquanto que para o outro devemos considerar a forma explícita para o tensor de Ricci em função da definição da variação do símbolo de christoffel, além do fato de que $D_\lambda q_{ab} = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} \sqrt{q}q^{ab}\delta R_{ab} &= \sqrt{q}D_k(q^{ab}\delta\Gamma_{ab}^k) - \sqrt{q}D_a(q^{ab}\delta\Gamma_{kb}^k) \\ &= \sqrt{q}D_k(q^{ab}\delta\Gamma_{ab}^k - q^{ak}\delta\Gamma_{ba}^k). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Portanto, das definições (A.23) e (A.24) vamos ter

$$\begin{aligned} \sqrt{q}q^{ab}\delta R_{ab} &= \sqrt{q}ND_k\left[\frac{1}{2}q^{ab}q^{kc}(D_a\delta q_{bc} + D_b\delta q_{ac} - D_c\delta q_{ab}) - \frac{1}{2}q^{ak}q^{cb}D_a\delta q_{cb}\right] \\ &= \sqrt{q}ND_k\left[\frac{1}{2}q^{ab}q^{kc}(2D_a\delta q_{bc} - \frac{1}{2}q^{cb}q^{ka}(2D_a\delta q_{cb}))\right] \\ &= \sqrt{q}ND_k\left(q^{ab}q^{kc} - q^{cb}q^{ka}\right)D_a\delta q_{cb} \\ &= \sqrt{q}N\left(q^{ab}q^{kc}D_kD_a\delta q_{cb} - q^{cb}q^{ka}D_kD_a\delta q_{cb}\right) \\ &= \sqrt{q}\left(-q^{ab}q^{kc}D_kND_a\delta q_{cb} + q^{cb}q^{ka}D_kND_a\delta q_{cb}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde tomamos a liberdade de incorporar a função *lapso* N a fim de tornar o procedimento mais geral. Após uma integração por partes, eliminando os termos de contorno,

$$\sqrt{q}q^{ab}\delta R_{ab} = \sqrt{q}\left[(D^cD^bN)\delta q_{cb} - q^{cb}(D^aD_aN)\delta q_{cb}\right], \quad (\text{B.10})$$

e portanto,

$$-(1-u)\frac{\delta(N\sqrt{q}R)}{\delta q_{ij}} = (1-u)\sqrt{q}\left[-N\left(\frac{R}{2}q^{ij} - R^{ij}\right) + \left(q^{ij}(D^aD_aN) - (D^iD^jN)\right)\right]. \quad (\text{B.11})$$

Agora, para o segundo termo Π , consideremos dividir em duas partes novamente para facilitar os cálculos:

$$\delta\left(\frac{4\kappa^2N}{(1-u)\sqrt{q}}\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right)\right) = \frac{4\kappa^2N}{(1-u)}\left[\underbrace{\delta\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right)}_{\Pi'} + \frac{1}{\sqrt{q}}\underbrace{\delta\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right)}_{\Pi''}\right]. \quad (\text{B.12})$$

Para II',

$$\delta\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right) = -\frac{1}{2q^{3/2}}\delta q = -\frac{1}{2q^{3/2}}qq^{ab}\delta q_{ab} = -\frac{1}{2\sqrt{q}}q^{ab}\delta q_{ab}. \quad (\text{B.13})$$

Para II'', consideremos reescrever $\pi_{ab} = \pi^{cd}q_{ac}q_{bd}$, de modo que

$$\delta(\pi_{ab}\pi^{ab}) = 2\pi^{ab}\pi^{cd}q_{bd}\delta q_{ac} = 2\pi^{ac}\pi_c^b\delta q_{ab}, \quad (\text{B.14})$$

e

$$\delta\pi^2 = 2\pi\pi^{ab}\delta q_{ab}. \quad (\text{B.15})$$

Logo,

$$\frac{\delta}{\delta q_{ij}}\left(\frac{4\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}}\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right)\right) = \frac{4\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}}\left[-\frac{1}{2}q^{ij}\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) + 2\left(\pi^{ic}\pi_c^j - \frac{\pi\pi^{ij}}{2}\right)\right]. \quad (\text{B.16})$$

Para o termo III,

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{2\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}}\frac{1}{3+2\omega}(\pi + (1-u)\pi_u)^2\right) &= \frac{2\kappa^2 N}{(1-u)}\frac{1}{3+2\omega}\left[\underbrace{\delta(1/\sqrt{q})}_{\text{III}'}(\pi + (1-u)\pi_u)^2\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{\sqrt{q}}\underbrace{\delta(\pi + (1-u)\pi_u)^2}_{\text{III}''}\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Notamos que o termo III' é o mesmo II', e portanto o resultado é o mesmo. Para o termo III'' vamos ter:

$$\begin{aligned} \delta(\pi + (1-u)\pi_u)^2 &= \delta\pi^2 + 2(1-u)\pi_u\delta\pi \\ &= 2\pi\pi^{ab}\delta q_{ab} + 2(1-u)\pi_u\pi^{ab}\delta q_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta q^{ij}}\left(\frac{2\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}}\frac{1}{3+2\omega}(\pi + (1-u)\pi_u)^2\right) &= \frac{2\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}}\frac{1}{3+2\omega}\left[-\frac{q^{ij}}{2}(\pi + (1-u)\pi_u)^2\right. \\ &\quad \left.+ 2\pi^{ij}(\pi + (1-u)\pi_u)\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Por fim, para o termo IV vamos ter:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta\sqrt{q}}{\delta q^{ij}} N \left(\frac{\omega}{1-u} D_a u D^a u - 2D^a D_a u + V(u) \right) + \sqrt{q} \left(\frac{N\omega}{1-u} \frac{\delta}{\delta q^{ij}} D_a u D^a u - \frac{\delta}{\delta q^{ij}} 2N D^a D_a u \right) \\
&= \sqrt{q} \left(\frac{N\omega}{1-u} \frac{q^{ij}}{2} D_a u D^a u - q^{ij} N D^a D_a u + \frac{q^{ij}}{2} N V(u) \right) \\
&\quad - \sqrt{q} \left(\frac{N\omega}{1-u} D^i u D^j u - 2 \frac{\delta}{\delta q^{ij}} q^{ab} D_b N D_a u \right) \\
&= \sqrt{q} \left[\frac{N\omega}{1-u} \left(\frac{q^{ij}}{2} D_a u D^a u - D^i u D^j u \right) + \left(q^{ij} D^a N D_a u - 2D^i N D^j u \right) + \frac{q^{ij}}{2} N V(u) \right].
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Logo, somando todos os termos correspondentes, obtemos a forma geral do colchete de Poisson de $\pi^{ij}(x)$ com o vínculo Hamiltoniano (B.1), dado por

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3 y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} &= -\frac{1}{2\kappa} \left\{ \sqrt{q}(1-u) \left[N G^{ij} - \left((D^a D_a N) q^{ij} - (D^i D^j N) \right) \right] \right. \\
&\quad + \frac{4\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \left[2 \left(\pi^{ic} \pi_c^j - \frac{\pi \pi^{ij}}{2} \right) - \frac{q^{ij}}{2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \frac{1}{3+2\omega} \left[2\pi^{ij} (\pi + (1-u)\pi_u) - \frac{q^{ij}}{2} (\pi + (1-u)\pi_u)^2 \right] \\
&\quad + \sqrt{q} \left[\frac{N\omega}{1-u} \left(\frac{q^{ij}}{2} D_a u D^a u - D^i u D^j u \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(q^{ij} D^a N D_a u - 2D^i N D^j u \right) + \frac{q^{ij}}{2} N V(u) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Podemos ainda reescrever a equação acima, levando em consideração o termo $(1-u)$ na integração dos termos dois e três da primeira linha da igualdade, de modo que

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi^{ij}(x), \int_{\Sigma_t} d^3 y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} &= -\frac{1}{2\kappa} \left\{ \sqrt{q} \left[(1-u) N G^{ij} + D^a D_a [(1-u)N] q^{ij} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - D^i D^j [(1-u)N] \right] \right. \\
&\quad + \frac{4\kappa^2 N}{(1-u)\sqrt{q}} \left[2 \left(\pi^{ic} \pi_c^j - \frac{\pi \pi^{ij}}{2} \right) - \frac{q^{ij}}{2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2\kappa^2}{(1-u)\sqrt{q}} \frac{1}{3+2\omega} \left[2\pi^{ij} (\pi + (1-u)\pi_u) - \frac{q^{ij}}{2} (\pi + (1-u)\pi_u)^2 \right] \\
&\quad + \sqrt{q} \left[\frac{N\omega}{1-u} \left(\frac{q^{ij}}{2} D_a u D^a u - D^i u D^j u \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(q^{ij} D^a N D_a u - 2D^i N D^j u \right) + \frac{q^{ij}}{2} N V(u) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Para confirmar agora o conjunto de equações de campo associado a $\pi_u(x)$, devemos seguir os mesmos passos acima. Sendo assim, consideramos

$$\left\{ \pi_u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} = - \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta u(x)}, \quad (\text{B.23})$$

com $\mathcal{H}(y)$ dado por (5.77). Portanto, calculando termo a termo separadamente, vamos obter:

$$\text{I. } \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \frac{\delta u(y)}{\delta u(x)} R = N \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} R, \quad (\text{B.24})$$

$$\text{II. } \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \frac{2\kappa}{\sqrt{q}} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \frac{\delta}{\delta u(x)} \left(\frac{1}{1-u(y)} \right) = \frac{2\kappa N}{\sqrt{q}(1-u)^2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right), \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \int_{\Sigma_t} d^3y \frac{N(y)\kappa}{(3+2\omega)\sqrt{q}} & \left[(\pi + (1-u)\pi_u)^2 \frac{\delta}{\delta u(x)} \left(\frac{1}{1-u(y)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1-u)} \frac{\delta}{\delta u(x)} \left((\pi + (1-u)\pi_u)^2 \right) \right] \\ & = \frac{N\kappa}{(3+2\omega)\sqrt{q}} \left[\frac{1}{(1-u)^2} (\pi + (1-u)\pi_u)^2 - \frac{2\pi_u}{(1-u)} (\pi + (1-u)\pi_u) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \int_{\Sigma_t} d^3y \frac{\sqrt{q}\omega}{2\kappa} \frac{\delta}{\delta u(x)} \left(\frac{N(y) D_i u(y) D^i u(y)}{1-u(y)} \right) & = \left[\frac{\delta}{\delta u(x)} \left(\frac{1}{(1-u(y))} \right) N(y) D_i u(y) D^i u(y) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1-u(y))} \frac{\delta}{\delta u(x)} (N D_i u(y) D^i u(y)) \right] \\ & = \frac{\sqrt{q}\omega}{2\kappa} \left[\frac{1}{(1-u)^2} N D_i u D^i u + \frac{1}{(1-u)} \left(N \underbrace{\frac{\delta}{\delta u}(D_i u)}_{\delta(D_i u)=D_i(\delta u)} D^i u + N D_i u \underbrace{\frac{\delta}{\delta u}(D^i u)}_{\delta(D^i u)=D^i(\delta u)} \right) \right] \\ & = \frac{\sqrt{q}\omega}{2\kappa} \left[\frac{1}{(1-u)^2} N D_i u D^i u - \frac{2}{(1-u)^2} N D_i u D^i u - \frac{2}{(1-u)} (D_i N D^i u + N D_i D^i u) \right] \\ & = -\frac{\sqrt{q}\omega}{2\kappa} \left[\frac{1}{(1-u)^2} N D_i u D^i u + \frac{2}{(1-u)} (D_i N D^i u + N D_i D^i u) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\text{V. } \int_{\Sigma_t} d^3y \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \frac{\delta u(y)}{\delta u(x)} (-2D_i D^i N(y)) = -\frac{\sqrt{q}}{2\kappa} 2D_i D^i N. \quad (\text{B.28})$$

Somando todos os termos, fornece

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi_u(x), \int_{\Sigma_t} d^3y N(y) \mathcal{H}(y) \right\} = & -\frac{\sqrt{q}}{2\kappa} \left[NR + \frac{4\kappa^2 N}{q(1-u)^2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right. \\
& + \frac{2\kappa^2 N}{(1-u)q} \frac{(\pi + (1-u)\pi_u)}{3+2\omega} \left(\frac{(\pi + (1-u)\pi_u)}{(1-u)} - 2\pi_u \right) \\
& - \left(\frac{N\omega D_i u D^i u}{(1-u)^2} + \frac{2\omega}{(1-u)} (D_i N D^i u + N D_i D^i u) \right) - 2D_i D^i N \Big] \\
& - \int_{\Sigma_t} \frac{\sqrt{q}}{2\kappa} N(y) \frac{\delta V(u(y))}{\delta u(x)} d^3y,
\end{aligned} \tag{B.29}$$

que corresponde exatamente a (5.143).

Referências Bibliográficas

- [1] GOLDSTEIN, H; Classical Mechanics. **Addison-Wesley, Reading, MA**, 1980.
- [2] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas. **Cengage Learning**, São Paulo, 2016.
- [3] LEMOS, N. A; Mecânica Analítica. **Livraria da Física**, São Paulo, 2007.
- [4] DIRAC, P. A. M. Lectures On Quantum Mechanics. **Dover Publications**, 2001.
- [5] EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik, Methuen and Company, Ltd., London**, v. 17, n. 819, p. 50, 1905.
- [6] EINSTEIN, A; Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. **Math. Phys.**, v. 1915, p. 844, 1915.
- [7] SCHUTZ, B; A first course in general relativity. **Cambridge University Press**, 2009.
- [8] CAROLL, S. M; Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity. **Addison Wesley**, 2003.
- [9] D'INVERNO, R; Introducing Einstein's Relativity. **Oxford University Press**, USA, 1992.
- [10] WALD, R.M.; General Relativity. **Chicago University Press**, Chicago, USA, 1984.
- [11] POISSON, E; A Relativist's Toolkit - The Mathematics of Black-Hole Mechanics. **Cambridge University Press**, 2004.
- [12] GOURGOULHON, E.; 3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity. **Springer-Verlag**, Berlin, 2012.

- [13] DIRAC, P.A.M; The theory of gravitation in Hamiltonian form. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 246, p. 333, 1958.
- [14] DIRAC, P.A.M; Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation. **Phys. Rev.**, v. 114, n. 3, p. 924, 1959.
- [15] ARNOWITT, R; DESER, S; MISNER, C.W. Gravitation: an introduction to current research, WITTEN, L. (ed.). **Wiley**, New York, p. 227, 1962.
- [16] ARNOWITT, R; DESER, S; MISNER, C.W. Republication of: The dynamics of general relativity. **Gen. Relativ. Gravit.**, v. 40, p. 1997, 2008.
- [17] DYER, E.; HINTERBICHLER, K. Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity. **Phys. Rev. D**, v. 79, p. 024028, 2009.
- [18] GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. **Phys. Rev. D**, v. 15, p. 2752, 1977.
- [19] YORK Jr, J. W. Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation. **Phys. Rev. Lett.**, v. 28, p. 1082, 1972.
- [20] YORK Jr, J. W. Boundary terms in the action principles of general relativity. **Found. Phys.**, v. 16, p. 249, 1986.
- [21] BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation **Phys. Rev. D**, v. 124, p. 925, 1961.
- [22] BARBOUR, J.B; PFISTER, H. Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity. **Physics Reports**, v. 349, ed. 1-2, p. 1, 1995.
- [23] GIONTI, Gabriele S. J.; Canonical analysis of Brans-Dicke theory addresses Hamiltonian inequivalence between the Jordan and Einstein frames. **Phys. Rev. D**, v. 103, p. 024022, 2021.
- [24] RISHABH, J; Introduction to Hamiltonian Formulation of General Relativity and Homogeneous Cosmologies. **Institute for Theoretical Physics, Georg-August-Universität Göttingen**, 2022.

- [25] BERTSCHINGER, E.; Hamiltonian Formulation of General Relativity. Notas de aula (MIT), 2005.
- [26] GAMBINI, R.; PULLIN, J.; ASHTEKAR, A. Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity. **Cambridge University Press**, 1996.
- [27] MENOTTI, P.; Lectures on gravitation. **arxiv:1703.05155**, 2017.
- [28] KUSHAR, K.; Geometrodynamics regained: A Lagrangian approach. **J. Math. Phys.**, v. 15, p. 708, 1974.
- [29] YANO, K.; Lie derivatives and its applications. **Dover Publications**, USA, 2020.
- [30] REYES, C. M.; SCHRECK, M. Hamiltonian formulation of an effective modified gravity with nondynamical background fields. **Phys. Rev. D**, v. 104, p. 124042, 2021.
- [31] REYES, C. M.; SCHRECK, M. Modified-gravity theories with nondynamical background fields. **Phys. Rev. D**, v. 106, p. 044050, 2022.
- [32] REYES, C. M.; SCHRECK, M. The boundary of the gravitational Standard-Model Extension. **arXiv:2305.07060**, 2023.
- [33] SANTOS, J. V. V.; SCHRECK, M. Hamiltonian formulation for scalar model of spontaneous spacetime symmetry violation in gravity. **arXiv:2407.20688**, 2024.
- [34] THIEMANN, T; Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity. **arXiv:gr-qc/0110034**, 2001.
- [35] MUKHERJEE, P; SATTAR, A. Hamiltonian analysis of the Schroedinger field coupled with dynamic non-relativistic gravity. **arXiv:2105.06153**, 2021.
- [36] M. BLAGOJEVIĆ, M.; NESTER, J.M. Local symmetries and physical degrees of freedom in $f(\mathbb{T})$ gravity: A Dirac-Hamiltonian constraint analysis. **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 064025, 2020.
- [37] IYONAGA, A.; KOBAYASHI, T. Distinguishing modified gravity with just two tensorial degrees of freedom from general relativity: Black holes, cosmology, and matter coupling. **Phys. Rev. D**, v. 104, 2021.

- [38] HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. Quantization of Gauge Systems. **Princeton University Press**, 1992.
- [39] HEISENBERG, L.; A systematic approach to generalisations of general relativity and their cosmological implications. **Physics Reports**, v.796, p. 1, 2019.
- [40] TASSON, J.D.; The Standard-Model Extension and Gravitational Tests. **Symmetry**, 2016.
- [41] PETROV, A. Yu.; Introduction to Modified Gravity. **Springer**, Switzerland, 2020.
- [42] SHANKARANARAYANAN, S.; JOHNSON, J.P. Modified theories of gravity: Why, how and what?. **General Relativity and Gravitation**, v. 54, 2022.
- [43] SCHRECK, M. Apresentação: Modelo Padrão Estendido. **UFMA**, 2023.
- [44] KOSTELECKÝ, V.A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 69, 2004.
- [45] BAILEY, Q.G.; KOSTELECKÝ, V.A. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity. **Phys. Rev. D**, v. 74, 2006.
- [46] BAILEY, Q.G.; Time delay and Doppler tests of the Lorentz symmetry of gravity. **Phys. Rev. D**, v. 80, 2009.
- [47] TSO, R.; BAILEY, Q.G. Light-bending tests of Lorentz invariance. **Phys. Rev. D**, v. 84, 2011.
- [48] BAILEY, Q.G.; EVERETT, R.D.; OVERDUIN, J.M. Limits on violations of Lorentz symmetry from Gravity Probe B. **Phys. Rev. D**, v. 88, 2013.
- [49] BAILEY, Q.G.; KOSTELECKÝ, V.A.; XU, R. Short-range gravity and Lorentz violation. **Phys. Rev. D**, v. 91, 2015.
- [50] BONDER, Y.; Lorentz violation in the gravity sector: The t puzzle. **Phys. Rev. D, American Physical Society**, v. 91, 2015.
- [51] KOSTELECKÝ, V.A.; MEWES, M. Testing local Lorentz invariance with short-range gravity. **Physics Letters B**, v. 766, p. 137, 2017.

- [52] KOSTELECKÝ, V.A.; LI, Z. Backgrounds in gravitational effective field theory. **Phys. Rev. D**, v. 103, 2021.
- [53] KOSTELECKÝ, V.A.; LI, Z. Searches for beyond-Riemann gravity. **Phys. Rev. D**, v. 104, 2021.
- [54] BONDER, Y.; PETERSON, C. Spontaneous Lorentz violation and asymptotic flatness. **Phys. Rev. D**, v. 103, 2021.
- [55] CASANA, R.; CAVALCANTE, A.; POULIS, F.P.; SANTOS, E.B. Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. **Phys. Rev. D**, v. 97, p. 104001, 2018.