UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Samuel Vaz Costa

Binômio de Newton e Aplicações no Ensino Médio

São Luís - MA

2022

Samuel Vaz Costa

Binômio de Newton e Aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade da Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Matemática

São Luís - MA

2022

Costa, Samuel Vaz.

Binômio de Newton e Aplicações no Ensino Médio / Samuel Vaz. Costa - 2022

51p.

Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, 2022.

Orientador: Josenildo de Souza Chaves

1. Matemática 2. Conceitos Básicos de Combinatória 3. Binômio de Newton. I.Título.

CDU 51:373.5(041)

Samuel Vaz Costa

Binômio de Newton e Aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07/10/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Matemática

Prof. Antônio José da Silva

Doutor em Matemática

Prof. Adecarlos Costa Carvalho

Doutor em Matemática

A minha família...

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me guiado nessa caminhada e por ter me iluminado nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Josenildo Souza pela singular ajuda e dedicação a meu trabalho.

Ao meu coordenador do PROFMAT José Antônio pela sabedoria e comprometimento.

Ao PROFMAT pela oportunidade de adquirir mais conhecimentos a minha profissão, sendo um programa de importância imensa na qualificação de docentes do nosso País.

Aos mues pais Maridalva vaz Costa e João de Deus Soares Costa por sempre acreditar na minha capacidade de trabalho e nunca me deixar desistir desse sonho.

Aos meus irmão pelo incentivo e força.

A meus colegas de turma que passaram pelas mesmas dificuldades que eu mas seguiram com perseverança em busca dos objetivos.

A minha esposa Fernanda e aos meus filhos Matheus, Davi e Helena, pelo apoio irrestrito e por suportar os momentos de ausência, necessários para conduzir os meus estudos.

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei nos ombros dos gigantes ".

Isaac Newton

RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma proposta sobre o Binômio de Newton e suas Aplicações no Ensino Médio. Aplicaremos algumas definições sobre os conceitos básicos de Análise Combinatória, bem como as do Triângulo de Pascal e suas propriedades. Usaremos estes conceitos para demonstrar o Binômio de Newton e resolver situações problemas no ensino médio, além disso, mostraremos algumas aplicabilidades deste Binômio no contexto da probabilidade, análise combinatória, matemática financeira, dentre outras.

Palavras-chave:Binômio de Newton, Análise Combinatória, Tiângulo de Pascal, Ensino Médio.

ABSTRACT

We present in this work a proposal about Newton's Binomial and its Applications in High School. We will apply some definitions about the basic concepts of Combinatorial Analysis, as well as the Pascal Triangle and its properties. We will use these concepts to demonstrate Newton's Binomial and solve problem situations in high school, in addition we will show some applicability of this Binomial in the context of probability, genetics, informatics, among others.

Keywords: Newton's Binomial, Combinatorial Analysis, Pascal's Tiangle, High School.

SUMÁRIO

1 Introdução

O desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$, também conhecido como Binômio de Newton[1], está entre os primeiros problemas ligados à Análise Combinatória. O caso $n = 2$ já se encontrava nos Elementos de Euclides, em torno do ano 300 a.C. O matemático hindu Báskhara (1114-1185), conhecido geralmente pela"fórmula de Báskhara"para a solução de equação do 2° grau, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos. Mais tarde Michael Stifel (1486-1567), mostrou no ano de 1550, como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. Os coeficientes que aparecem no desenvolvimento de $(1+x)^n$ são chamados de números binomiais e estão associados a um triângulo denominado de Triângulo de Pascal [2] que era conhecido por Chu-Shih-Chieh na China em torno do ano 1300.

O primeiro aparecimento do triângulo de Pascal no Ocidente foi na folha de rosto de um livro de Petrus Apianus (1495-1552). Nicolò Fontana Tartaglia (1499-1559) relacionou os elementos do Triângulo de Pascal com as potências de $(a+b)$. Pascal (1623-1662) publicou um tratado no ano de 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$. James Bernoulli (1654-1705), em seu Ars Conjectandi, de 1713, usou a interpretação de Pascal para demonstrar que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.1}$$

A segunda parte deste livro de James Bernoulli é dedicada a teoria das combinações e permutações. Isaac Newton (1646-1727) mostrou como calcular diretamente $(1+x)^n$ sem antes calcular $(1+x)^{n-1}$. Ele mostrou que cada coeficiente pode ser deter-

[1]Isaac Newton (1642-1727) matemático, físico e astrônomo Inglês.
[2]Blaise Pascal (1623-1662) filósofo, matemático e físico Francês.

minado, usando o anterior, pela fórmula

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}.$$

Mostrou ainda como desenvolver $(x+y)^r$, onde r é um número racional, obtendo neste caso um desenvolvimento em série infinita. Uma outra direção de generalização do Teorema Binomial é considerar as potências da forma $(x + y + ... + z)^n$, o chamado teorema multinomial, que foi descoberto por Leibniz (1646-1716) e demonstrado também por Johann Bernoulli (1667-1748) (LIMA et al., 1997).

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é utilizar o Binômio de Newton e suas aplicações na resolução de problemas como uma proposta para o Ensino Médio. Especificamente, destacamos os seguintes objetivos:

- Apresentar e definir os conceitos básicos de Análise Combinatória.
- Apresentar e definir o Triângulo de Pascal.
- Relacionar o Binômio de Newton em problemas de matemática do Ensino Médio.

1.2 Apresentação dos Capítulos

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 2 inicia com os principais conceitos básicos de Análise Combinatória, Números Binomiais e o Triângulo de Pascal. Algumas propriedades estão demonstradas incluindo alguns exemplos do Tiângulo de Pascal, entre outras. O Capítulo 3 trata do Binômio de Newton. Apresentamos duas demonstrações do Teorema Binomial, determinamos o termo geral e o termo central. Além disso, apresentamos a expansão multinomial. O Capítulo 4, apresenta algumas aplicações do Teorema Binomial. Exemplos de aplicações voltados para o Ensino Médio e Ensino Superior estão destacados. O Capítulo 5 trata das considerações finais.

2 Conceitos Básicos de Análise Combinatória

A análise combinatória desenvolve métodos que permitem contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições. À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos. Isto de fato é verdadeiro, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso de métodos especiais (HAZZAN, 2013).

2.1 Princípio Fundamental de Contagem

O princípio fundamental da contagem, também denominado princípio multiplicativo pode ser definido considerando-se duas etapas, na sua forma mais elementar. Antes de enunciá-lo, vamos considerar dois lemas.

Lema 2.1.1 *Consideremos os conjuntos* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. *Podemos formar* $m \times n$ *pares ordenados* (a_i, b_j) *em que* $a_i \in A$ *e* $b_j \in B$.

Prova 2.1 *Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo, teremos:*

$$\begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n) \rightarrow n \ \textit{pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n) \rightarrow n \ \textit{pares} \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n) \rightarrow n \ \textit{pares} \end{cases}$$

O número de pares é $\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \ vezes} = m \times n$.

Lema 2.1.2 *O número de pares ordenados* (a_i, b_j) *tais que,* $a_i \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, *e* $a_j \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *e* $a_i \neq a_j$ *para* $i \neq j$ *é* $m(m-1)$

Prova 2.2 *Fixemos o primeiro elemento do par, e façamos variar o segundo. Teremos:*

$$\begin{cases} (a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots, (a_1, a_m) \rightarrow (m-1) \ \ pares \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \ldots, (a_2, a_m) \rightarrow (m-1) \ \ pares \\ \ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (a_m, a_1), (a_m, a_2), \ldots, (a_m, a_{m-1}) \rightarrow (m-1) \ \ pares \end{cases}$$

O número de pares ordenados é:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m \ \ vezes} = m(m-1)$$

2.1.1 Princípio Fundamental da Contagem Parte A

Consideremos r conjuntos:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n1}\} \ \ \#A = n_1$$

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n2}\} \ \ \#B = n_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{nr}\} \ \ \#Z = n_r$$

Então, o número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo $(a_i, b_j, \ldots, z_p)$ em que $a_i \in A, b_j \in B \ldots z_p \in Z$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$$

Prova 2.3 *Se $r = 2$, é imediato, pois caímos no lema I.*

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro $(r-1)$e provemos que ela também é válida para o inteiro r.

Para $(r-1)$, tomemos a sequência de $(r-1)$ elementos $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$.

Por hipótese de indução, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}$ sequências e n_r elementos pertencentes ao conjunto Z.

Cada sequência $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ consiste de uma sequência $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo lema I, o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \cdot n_r$$

Decorre então que o teorema é válido $\forall r \in \mathbb{N}$ e $r \geq 2$

2.1.2 Princípio Fundamental da Contagem Parte B

Consideremos um conjunto A com $m(m \geq 2)$ elementos. Então o número de r-uplas ordenadas (sequências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\underbrace{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(r-1)]}_{r\ fatores}$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, o número de sequência do tipo $\underbrace{(a_j, a_l, \ldots, a_i, \ldots, a_k)}_{r\ elementos}$ com $a_i \in$ A $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $a_i \neq a_p$ para $i \neq p$ é:

$$\underbrace{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(r-1)]}_{r\ fatores}$$

A demonstração é feita por indução finita, de modo análogo à feita na Parte A.

Obs: O principio fundamental de contagem nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto , sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa. Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

2.2 Arranjos Simples

Qualquer reunião de elementos formando um todo é um agrupamento. Os alunos de sua classe constituem um agrupamento de pessoas, a palavra escrita é um agrupamento de letras, uma molécula é um agrupamento de átomos, a representação escrita de um número é um agrupamento de algarismo etc.

Arranjos são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos. Qualquer mudança na ordem de elementos distintos altera o agrupamento. Por exemplo, ao representar números naturais de três algarismos distintos escolhidos entre os algarismos $2, 4, 6$ e 8, estaremos arranjando esses cinco algarismos três a três. Esses números são chamados de arranjos de algarismos porque, mudando a ordem dos algarismos em um desses números, obtemos outro número. Note que $268 \neq 862$ são números completamente diferentes.

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, vamos formar todas as sequências possíveis de três elementos distintos:

$$\begin{array}{cccc}
(a,b,c) & (a,b,d) & (a,c,d) & (b,c,d) \\
(a,c,b) & (a,d,b) & (a,d,c) & (b,d,c) \\
(b,a,c) & (b,a,d) & (c,a,d) & (c,b,d) \\
(b,c,a) & (b,d,a) & (c,d,a) & (c,d,b) \\
(c,a,b) & (d,a,b) & (d,a,c) & (d,c,b) \\
(c,b,a) & (d,b,a) & (d,c,a) & (d,b,c)
\end{array}$$

Essas sequências são chamadas de arranjos simples dos quatro elementos do conjunto tomado três a três. Isto é, um arranjo simples de três elementos de I, é qualquer sequência formada por três elementos distintos de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos que os compõem:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$, pois diferem pela ordem dos elementos;
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$, pois diferem pela natureza dos elelmentos (elementos diferentes).

Contando as sequências acima, que o número de arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três é 24. Indicaremos esse fato por $A_{4,3} = 24$. Esse número pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

1º elemento	2º elemento	3º elemento
4	3	2

Logo: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Lemos $A_{4,3}$ "como número de arranjos simples de quatro elementos tomados três a três".

Definimos:

Dados os n elementos distintos dos conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se arranjo simples de p elementos de I toda sequência formada por p elementos distintos de I com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$.

Sendo $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e p um número natural não nulo tal que $p \leqslant n$, o número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p (que indicaremos por $A_{n,p}$) pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

1º elemento	2º elemento	3º elemento	...	p° elementos
n	n-1	n-2	...	n-(p-1)

Assim:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]$$

Ou ainda:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-p+1)]$$

Aplicando o conceito de fatorial, podemos apresentar essa fórmula de maneira mais simples. Para entender a transformação que será feita, vejamos antes uma caso particular.

Na igualdade $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$, multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o 2º membro por 4!, obtemos:

$$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7!}{4!}$$

Note, portanto que, o número $A_{7,3}$ pode ser expresso com fatoriais por $\dfrac{7!}{(7-3)!}$

Generalizando:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-p+1)]$$

multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o 2º membro por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!}$$

Portanto, podemos escrever:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)}! \tag{2.1}$$

Daqui em diante, podemos aplicar essa fórmula para o cálculo de $A_{n,p}$. Na maioria das situações, porém é preferível aplicar o princípio fundamental da contagem, em vez da fórmula (PAIVA, 2015).

Estende-se a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ para $n = 0$ ou $p = 0$. Por exemplo:

- $A_{6,0} = \dfrac{6!}{(6-0)!} = \dfrac{6!}{6!} = 1,$
- $A_{0,0} = \dfrac{0!}{(0-0)!} = \dfrac{0!}{0!} = 1.$

2.2.1 Arranjos com Repetições

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos *arranjo com repetição dos* m *elementos, tomados* r *a* r toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

Pelo princípio fundamental de contagem (parte A), o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ será:

$$(AR)_{m,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{r \ \ vezes} = m^r$$

Observemos que, se $r = 1$, $(AR)_{m,1} = m$ e a fórmula acima continua válida $\forall r \in \mathbb{N}^*$

2.2.2 Permutação

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Indiquemos por P_m o número de permutações dos m elementos de M.

Temos: $P_m = A_{m,m}$

Logo:

$P = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(m-1)]$

$P = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Obs: Afim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, bem como outras que iremos estudar, vamos definir o símbolo fatorial.

Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos fatorial de m (e indicamos por $m!$) por meio da relação:

$m! = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $m \geq 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

Prova:

Podemos representar o fatorial de um número por: $m! = \dfrac{(m+1)!}{m+1}$, então,

$1! = \dfrac{(1+1)!}{1+1} = \dfrac{2!}{2} = 1$

$0! = \dfrac{(0+1)!}{0+1} = \dfrac{1!}{1} = 1$

O cálculo de $m!$, diretamente , torna-se trabalhoso à medida que aumenta. Entretanto, muitos cálculos podem ser simplificados se notarmos que

$$(m+1)! = (m+1) \cdot \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{m!} = (m+1) \cdot m!$$

2.2.3 Permutação com Repetição

1° caso:

Consideremos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1.

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calculemos esse número.

Cada permutação dos n elementos é uma ênupla ordenda de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos

$\underbrace{\_,\_,\_,\ldots,\_}_{n\ elementos}$.

Façamos o seguinte raciocínio: das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n-n_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1.

Existem $\binom{n}{n-n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n-n_1)$ posições, existem $(n-n_1)!$ modos em que os $(n-n_1)$ elementos podem ser permutados.

Logo, existem ao todo $\binom{n}{n-n_1}(n-n_1)! = \dfrac{n!}{n_1!}$ formas de dispormos os elementos distintos de a_1, na permutação.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

Logo, existem $\dfrac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1. Isto é:

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}.$$

2º Caso:

Consideremos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 : $\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}$; a_2 : $\underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2}$ e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 e a_2. Indiquemos por $P_n^{n_1 n_2}$ o número de permutações, nessas condições .

Cada permutação dos n elementos é uma ênupla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os $n-n_1-n_2$ elementos restantes.

Façamos o seguinte raciocínio: das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n-n_2$ lugares para colocar todos os elementos , com exceção dos iguais a a_2 .

Existem $\binom{n}{n-n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas, existirão $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $n-n_2$ elementos podem ser permutados (lembremos que, dos elementos a serem permutados agora, existem n_1) iguais a a_1). Ao todo existirão

$\binom{n}{n-n_2}P_{n-n_2}^{n_1} = \dfrac{n!}{(n-n_2)!n_2!}\dfrac{(n-n_2)!}{n_1!} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!}$ formas de arranjar na permutação todos os elementos, com exceção de a_2.

Uma vez arranjados esses elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinadas (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo, existirão $\dfrac{n!}{n_1!n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2.

Isto é:

$$P_n^{n_1 n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$

Caso geral: Consideremos n elementos, dos quais:

n_1 são iguais a a_1

n_2 são iguais a a_2

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

n_r são iguais a a_r

Usando o raciocínio análogo ao do 1° e do 2° caso, poderemos calcular o número de permutações nessas condições indicado por $P_n^{n_1 n_2,\ldots,n_r}$, através:

$$P_n^{n_1 n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

É fácil ver que no caso particular de $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 1$ obteremos: $P_n^{1,1,\ldots 1} = n!$ que é o número de permutações de n elementos distintos.

2.3 Combinação Simples

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.

Dados $M = \{a, b, c, d\}$. As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos $\{\{a, b\}; \{b, c\}; \{c, d\}; \{a, c\}; \{b, d\}; \{a, d\}\}$.

Notemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$ pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto não depende da ordem dos elementos. É importante notar a diferença entre uma combinação(conjunto) e uma sequência, pois numa combinação não importa a ordem dos elementos, ao passo que numa sequência importa a ordem dos elementos.

A própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuramos elementos.

Cálculo do número de combinações

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos m elementos tomados r a r.

Tomemos uma combinação, $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_r\}$. Se permutarmos os elementos de E_1, obteremos $r!$ arranjos.

Se tomarmos outra combinação, $E_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}\}$, permutando os elementos de E_2, obteremos outros $r!$ arranjos.

Chamemos de x o número de combinações, isto é, $x = C_{m,r}$ e suponhamos formadas todas as combinações dos m elementos tomados r a r. São elas: $E_1, E_2, E_3, \ldots E_x$.

Cada combinação E_i dá origem a $r!$ arranjos. Chamemos de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i.

Temos então a seguinte correspondência:

$E_1 \to F_1$

$E_2 \to F_2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$E_x \to F_x$

Verifiquemos que:

(1) $F_i \cap F_j = \varnothing$ para $i \neq j$

(2) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos m elementos de M tomados r a r.

Temos:

(1) Se $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ para $(i \neq j)$, então existiria um arranjo que pertenceria a F_i e F_j simultaneamente.

Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com E_i e E_j e, portanto, $E_i = E_2$. Isto é absurdo, pois, quando construímos todas as combinações:

$E_i \neq E_j$ (para $i \neq j$).

Logo $F_i \cap F_j \neq \varnothing$.

(2) Para provarmos que $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, provemos que:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x \subset F \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x \end{cases}$$

a) Seja a um arranjo tal que:

$a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x$

Então $a \in F_1$ (para algum $i \in \{1, 2, 3, \ldots x\}$) e, evidentemente, $a \in F$; logo:

$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$

b) Seja agora a um arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo a, obteremos uma das combinações, digamos E_i. Ora, como E_i gera um conjuntos dos arranjos F_i, então $a \in F_i$ e, portanto:

$a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_i \cup \ldots \cup F_x$

Então:

$F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x$

De (a) a (b) resulta que:

$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$

Sabemos ainda que, se x conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos de união deles é soma do número de elementos de cada um.

Isto é:

$\#(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x) = \#F \Rightarrow \#F_1 + \#F_2 + \ldots + \#F_x = \#F$

$r! + r! + \ldots + r! = \dfrac{m!}{(m-r)!} \Rightarrow x \cdot r! = \dfrac{m!}{(m-r)!}$

Logo:

$$x = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Como x indica $C_{m,r}$ ou $\dbinom{m}{r}$, temos a fórmula do número de combinações:

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!} \quad \forall m, r \in \mathbb{N}^*, r < m \tag{2.2}$$

Casos Particulares

1° Caso:

$C_{m,m} = 1$; $m, r \in \mathbb{N}^*$ e $r = m$

$$C_{m,m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = \frac{m!}{m!0!} = \frac{m!}{m!} = 1$$

2° Caso:

$C_{m,0} = 1$; $m \in \mathbb{N}^*$ e $r = 0$

$$C_{m,0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{0!m!} = \frac{m!}{m!} = 1$$

3° Caso:

$C_{0,0} = 1$; $m = r = 0$

$$C_{0,0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{0!}{0!} = 1$$

Em virtude da análise dos casos particulares, concluímos que a fórmula

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

é válida $\forall m, r \in \mathbb{N}$, com $r \leqslant m$.

2.4 Números Binomiais

Vimos na seção anterior que o número de combinações simples de m elementos tomados r a r pode ser indicado por $C_{m,r}$ ou pelo símbolo $\binom{m}{r}$. Isto é,sendo $\{m, r\} \subset \mathbb{N}$ e $r \leqslant m$, tem -se:

$$\binom{m}{r} = C_{m,r}$$

e, portanto,

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{r!}.$$

Propriedades

- Todo número binomial de denominador zero é igual a 1.

$\binom{m}{0} = 1; m \in \mathbb{N}$

- Todo número binomial de numerador igual ao denominador é igual a 1.

  $\binom{m}{m} = 1; m \in \mathbb{N}$

- *Relação de Stifel*:

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} = \binom{m+1}{r+1}, \tag{2.3}$$

sendo que, $\{m, r\} \subset \mathbb{N}$ e $r + 1 \leqslant m$.

Prova 2.4 Prova da equação (2.3).

$$\begin{aligned}
\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} &= \frac{m!}{m!(m-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!(m-r-1)!} \\
&= \frac{m!}{r!(m-r)(m-r-1)!} + \frac{m!}{(r+1)r!(m-r-1)!} \\
&= \frac{(r+1)m! + (m-r)m!}{r!(m-r-1)!(m-r)(r+1)} \\
&= \frac{n!(r+1+m-r)}{m!(m-r-1)!(m-r)(r+1)} \\
&= \frac{(m+1)m!}{(r+1)r!(m-r)(m-r-1)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(r+1)!(m-r)!} = \binom{m+1}{r+1}.
\end{aligned}$$

2.5 O Triângulo de Pascal

Também conhecido como triângulo de Pascal, triângulo de Tartaglia ou triângulo de Yang-Hui, o triângulo aritmético já era conhecido dos matemáticos há muito tempo. Referências ao o triângulo aritmético ou seus coeficientes podem ser encontrados rudimentamente em obras indianas e chinesas de épocas anteriores a Cristo.

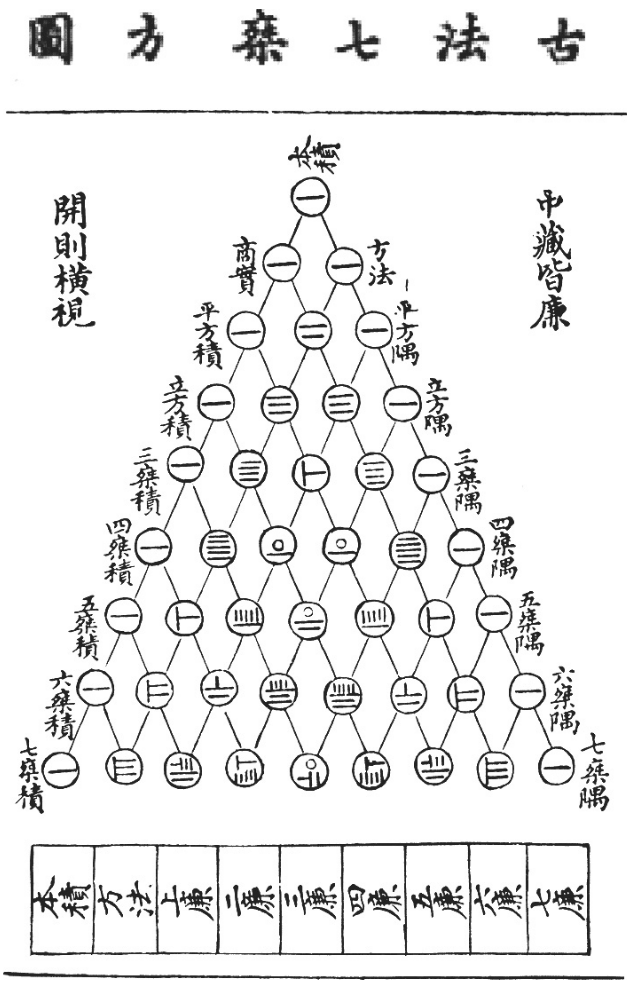

Figura 2.1: Triângulo de Chu Shih-Chieh. Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Tri.

Na China, o Manual de Matemática de Jia Xian, escrito por volta do ano de 1050, já traz o triângulo. O mais famoso matemático chinês assiciado ao triângulo aritmético foi Yang-Hui, que estudou e aplicou o triângulo aritmético por volta do ano 1250. Outra importante referência chinesa ao triângulo aritmético é o livro Precioso espelho dos quatro elementos, escrito em 1303 por Chu Shih-Chieh. Esse livro traz figuras de triângulos com até nove linhas; entretanto, a denominação chinesa mais comum para o triângulo aritmético é triângulo Yang-Hui.

O poeta, astrônomo e matemático persa Omar Khayyam (1048-1122)descreveu o triângulo aritmético em alguns trabalhos por volta de 1100. Um arranjo semelhante dos coeficientes era conhecido dos árabes na mesma época e, em 1265, o árabe Nasir al-Tusi (1201-1274) faz uma clara referência ao triângulo aritmético em uma de suas obras.

Na Europa, um século antes de Pascal, muitos matemáticos trabalharam com o triângulo aritmético. Um dos mais antigos foi o matemàtico Alemão Apianus (Petrus Apianus, 1495-1552), que em 1527 publicou um livro cuja capa trazia um desenho do triângulo aritmético. Mas o Alemão que mais divulgou o triângulo foi Stifel (Michael Stifel, 1478?-1567), principalmente através da sua importante e influente obra Arithmetica Integra, de 1544.

Após os alemães, alguns matemáticos italianos redescobriram o triângulo. O principal deles foi Tartaglia (Niccolo Fontana Tartaglia, 1499-1559), que dedicou a esse assunto muitas páginas de seu extenso livro General Tratato di numeriet misure, de 1556. Tartaglia reivindicou a criação do triângulo aritmético para ele, e em alguns países o triângulo aritmético é atualmente chamado de triângulo de Tartaglia.

O francês Pascal(Balise Pascal, 1623-1662) chegou ao triângulo aritmético motivado pela resolução de um problema que envolvia a probabilidade de se obter um duplo seis jogando-se dois dados. Escreveu uma monografia de 60 páginas sobre o triângulo aritmético, Traité du triangle arithmétique, publicado postumamente em 1665. Pascal propôs o triângulo em nova forma e estudou suas propriedades mais a fundo do que seus antecessores, provando várias delas. A consagração da denominação atual triângulo de pascal ocorreu pelo fato de, em 1739, De Moivre (Abraham de Moivre, 1667-1754) ter publicado um trabalho de grande repercussão na época, em que usou a denominação triângulum arithimeticum pascalianum para o triângulo aritmético.(DANTE, 2009)

No triângulo apresentado a seguir, cada número binomial $\binom{n}{p}$ está localizado na linha n e na coluna p:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \;\ldots & c_n \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{linha } 0 & \binom{0}{0} & & & & & \\
\text{linha } 1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\text{linha } 2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\text{linha } 3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\text{linha } 4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lllllll} \vdots & \vdots & & & & & \\ \text{linha } n & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} \cdots & \binom{n}{n} \end{array}$$

Observe que:

- Consideram -se como filas iniciais dessa tabela a linha 0 e a coluna 0;
- O primeiro número binomial de cada linha é igual a 1, pois todo binomial de denominador zero é igual a 1;
- O último número binomial de cada linha é igual a 1, pois todo binomial de numerador igual ao denominador é igual a 1;
- Pela relação de Stiffel, a soma de dois números binomiais consecutivos de uma linha é igual ao binomial localizado na linha seguinte, embaixo do segundo binomial somado. Por exemplo, $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$

  Com essas observações, podemos construir o triângulo de Pascal com os valores dos binomiais já calculados:

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{linha } 0 \rightarrow & 1 & & & & & & & & \\ \text{linha } 1 \rightarrow & 1 & 1 & & & & & & & \\ \text{linha } 2 \rightarrow & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ \text{linha } 3 \rightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & \\ \text{linha } 4 \rightarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & \\ \text{linha } 5 \rightarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\ \text{linha } 6 \rightarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\ \text{linha } 7 \rightarrow & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Propriedades do triângulo de Pascal

- *A soma dos elementos que formam a linha n do triângulo de Pascal é 2^n, isto é:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

linha 0$\rightarrow$	1									$\Rightarrow$ soma: $2^0=1$
linha 1$\rightarrow$	1	1								$\Rightarrow$ soma: $2^1=2$
linha 2$\rightarrow$	1	2	1							$\Rightarrow$ soma: $2^2=4$
linha 3$\rightarrow$	1	3	3	1						$\Rightarrow$ soma: $2^3=8$
linha 4$\rightarrow$	1	4	6	4	1					$\Rightarrow$ soma: $2^4=16$
linha 5$\rightarrow$	1	5	10	10	5	1				$\Rightarrow$ soma: $2^2=32$
linha 6$\rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1			$\Rightarrow$ soma: $2^6=64$
linha 7$\rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1		$\Rightarrow$ soma: $2^7=128$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

Prova 2.5 *A soma $S=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$ não se altera se multiplicarmos cada parcela $\binom{n}{p}$ por $1^p\cdot 1^{n-p}$, com $p\in\mathbb{N}$ e $p\leqslant n$:*

$$S=\binom{n}{0}\cdot 1^0\cdot 1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 1^2\cdot 1^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot 1^n\cdot 1^0$$

Daí concluímos que:

$$S=\binom{n}{0}\cdot 1^0\cdot 1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 1^2\cdot 1^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot 1^n\cdot 1^0=(1+1)^n=2^n$$

Exemplos:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=2^5=32$$

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6=64$$

- *A soma dos elementos da coluna p, desde o primeiro até o elemento da linha n, é igual ao elemento localizado na coluna da direita e na linha abaixo, isto é:*

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\ldots+\binom{p+n}{p}=\binom{p+n+1}{p+1}$$

Prova 2.6 *Indicando a propriedadepor por $P(n)$, vamos aplicar o princípio da indução matemática.*

I- Provaremos inicialmente que $P(0)$ e $P(1)$ são ambas verdadeiras.

Para $n = 0$ segue que: $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ *logo, $P(0)$ é verdadeira.*

Para $n = 1$ segue que: $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} = \binom{p+2}{p+1}$.

Aplicando a rela ção de Stiffel, podemos representar $\binom{p+2}{p+1}$ *pela soma* $\binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1}$ *e, portanto, a igualdade anterior é equivalente a :*

$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} = \binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1}$.

Como $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, *deduzimos que $P(1)$ é verdadeira.*

II- Por hipótese de indução, admitiremos a validade da propriedade para $n = k$, isto é:

$$\underbrace{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}}_{HI}$$

Assim, provaremos a validade da implicação:

$P(k)$ é verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ é verdadeira, para todo $k \in \mathbb{N}$

Ou seja:

$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+k}{p} + \binom{p+k+1}{p} = \binom{p+k+2}{p+1}$

Daí:

$\Rightarrow \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+k}{p} + \binom{p+k+1}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} + \binom{p+k+1}{p} = \binom{p+k+2}{p+1}$

Logo, vale a implicação citada em II.

Como $P(n)$ satisfaz I e II, concluímos pelo princípio da indução matemática que $P(n)$ é verdadeira para qualquer valor natural de n.

Exemplos:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=\binom{7}{3}$$
$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{4}+\binom{9}{4}+\binom{10}{4}+\binom{11}{4}=\binom{12}{5}$$

- *A soma dos elementos da transversal n, desde o primeiro até o elemento da coluna p, é igual ao número localizado na linha abaixo do último elemento somado e na mesma coluna deste, isto é:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

Prova 2.7 *Faremos a demonstração por indução matemática sobre p*

I- A propriedade é verdadeira para $p=0$, pois para essa proposição se reduz a:

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

II- Por hipótese de indução, admitimos a validade da propriedade para $p=k$, isto é:

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}}_{HI}$$

E, provaremos a implicação:

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}}_{HI}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}$$

Temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+1}{k}+$$
$$+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}$$

Logo, vale a implicação citada em (II). Como a propriedade satisfaz (I) e (II), concluímos pelo princípio da indução matemática que a proposição é verdadeira para qualquer valor natural de p.

Exemplos:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}$$
$$\binom{6}{0}+\binom{7}{1}+\binom{8}{2}+\binom{9}{3}+\binom{10}{4}+\binom{11}{5}=\binom{12}{5}$$

3 O Binômio de Newton

Isaac Newton, considerado um dos maiores matemáticos da História, nasceu em Woolsthorpe, Inglaterra, em 1642, no mesmo ano da morte de Galileu. Primeiro cientista inglês de renome internacional, que além de químico, foi um excelente físico, mecânico e matemático, onde se consagrou em cálculo infinitesimal. Por volta de 1664 quando a universidade (Trinity College) foi fechada por causa da peste bubônica, Newton volta à sua cidade natal. Foi neste ano de retiro que construiu quatro de suas principais descobertas: o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação e a natureza das cores. Em 1687 publica Princípios matemáticos da filosofia natural, a sua obra principal.

3.1 Um problema fundamental de escolhas

Cinco casais participam de um programa de televisão. O animador do programa sorteia uma pessoa de cada casal.

- Quantas comissões distintas com 3 homens e 2 mulheres podemos formar no grupo das 5 pessoas sorteadas?
- Quantas comissões distintas com 4 homens e 1 mulher podemos formar no grupo das 5 pessoas sorteadas?
- Quantas comissões distintas com 5 homens podemos formar no grupo das 5 pessoas sorteadas?

O raciocínio aplicado na resoluçõ dos três itens é o mesmo. Observe:

Note que, escolhidos 3 homens, as mulheres estarão automaticamente escolhidas, pois serão aquelas dos casais restantes. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de 3 homens, ou seja, $C_{5,3} = 10$.

Podemos raciocinar também do seguinte modo: escolhidas 2 mulheres os homens estarão automaticamente escolhidos, pois serão aqueles dos casais restantes. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de 2 mulheres, ou seja, $C_{5,3} = 10$.

Escolhidos 4 homens, a mulher estará automaticamente escolhida, pois será aquela do casal do restante. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de 4 homens, ou seja, $C_{5,4} = 5$.

Outra forma de raciocínio é: escolhida 1 mulher, os homens estarão automaticamente escolhidos, pois serão aqueles dos casais restantes. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de 1 mulher, ou seja, $C_{5,1} = 5$.

No último caso do nosso problema, há uma única combinação dos 5 homens tomados 5 a 5, isto é, $C_{5,5} = 1$. Outra forma de raciocínio é: há uma única combinação possível das 5 mulheres tomados 0 a 0, isto é, $C_{5,0} = 1$. Logo, há uma única formação possível com nenhuma mulher.

O raciocínio aplicado neste problema fundamental da Análise combinatória pode ser extrapolado para o desenvolvimento de potências da forma $(x+a)^n$, com $\{x, a\} \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, conforme veremos a seguir.

3.2 Desenvolvimento da potência $(x+a)^n$

Certos problemas de Matemática exigem o desenvolvimento de potências da forma $(x+a)^n$, com $\{x, a\} \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Algumas dessas potências são:

$(x+a)^0 = 1$

$(x+a)^1 = x + a$

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x+a)^3 = x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + a^3$

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, aplicando o raciocínio usado no problema anterior, podemos deduzir uma expressão, relativamente simples, para desenvolver essas potências.

Como por exemplo, consideremos a potência $(x+a)^5$. Para desenvolvê-la, devemos efetuar as multiplicações:

$$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$$

Aplicando a propriedade distributiva, vamos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, cinco fatores, x ou a, escolhendo cada um deles em uma das expressões entre parênteses, $(x+a)$, da multiplicação acima. Uma das possibilidades é:

$$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a) \Rightarrow x \cdot x \cdot x \cdot a \cdot a \Rightarrow x^3a^2$$

Por meio dessa possibilidade, Obtivemos o termo x^3a^2. Existem, porém, outras possibilidades de multiplicações que resultam no termo x^3a^2.

Quantos termos iguais a x^3a^2 serão obitidos se efetuar todas as multiplicaçóes possiveis?

Para responder a essa pergunta, recorremos ao problema anterior, pensando em cada expressão $(x+a)$ como se fosse um casal daquele problema. Devemos calcular o número de modos diferentes de escolher x em 3 dos casais $(x+a)$ a nos 2 casais restantes. Note que, escolhido x em 3 casais, a escolha de a fica automaticamente determinada nos casais restantes. Assim, basta calcular o número de maneiras diferentes de escolher x em 3 dos 5 casais. Esse número é $C_{5,3}$.

Portanto, depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis, o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,3}$ vezes.

Raciocinando de maneira análoga:

- o termo x^5a^0 aparecerá $C_{5,5}$ vezes
- o termo x^4a^1 aparecerá $C_{5,4}$ vezes
- o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,3}$ vezes
- o termo x^2a^3 aparecerá $C_{5,2}$ vezes
- o termo x^1a^4 aparecerá $C_{5,1}$ vezes
- o termo x^0a^5 aparecerá $C_{5,0}$ vezes

Concluindo, podemos escrever:

$$(x+a)^5 = C_{5,5}x^5a^0 + C_{5,4}x^4a^1 + C_{5,3}x^3a^2 + C_{5,2}x^2a^3 + C_{5,1}x^1a^4 + C_{5,0}x^0a^5$$

Como $C_{5,5} = 1, C_{5,4} = 5, C_{5,3} = 10, C_{5,2} = 10, C_{5,1} = 5, C_{5,0} = 1$, temos:

$(x+a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$

Seguindo esse raciocínio Newton demonstrou o seguinte teorema.

Teorema 3.1 Teorema Binomial: *Sejam a e b números reais e seja n um inteiro positivo. Então,*

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p. \tag{3.1}$$

Prova 3.1 *Por indução finita*

Queremos demonstrar por indução finita que o Binômio de Newton é uma propriedade do número n válida para qualquer $n \geq 1$.

Considere

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p, \quad n \geq p \in \mathbb{N}.$$

Para $n = 1$ temos;

$$(x+a)^1 = \binom{1}{0} x^{1-0} a^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} a^1 = (x+a)$$

Notemos que a expressão é válida para $n = 1$

Denotemos $P(k) : (x+a)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} a^p$

$$P(k+1) : (x+a)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} x^{k-p+1} a^p.$$

E queremos mostrar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Partindo da hipótese $P(k)$, multiplicamos ambos os lados da igualdade por $(x+a)$.

$$(x+a)^{k+1} = (x+a) \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} a^p.$$

Utilizando a propriedade distributiva para todos os termos do somatório temos

$$= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} a^{p+1}$$

Calculando e retirando o 0-ésimo termo do primeiro somatório, podemos reescrevê-lo como

$$= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p = \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p$$

Calculando e retirando o k-ésimo termo do segundo somatório, e depois redefinindo a variável p como $(p = p - 1)$. Temos,

$$\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p}a^{p+1} = a^{k+1} + \sum_{p=0}^{k-1}\binom{k}{p}x^{k-p}a^{p+1} = \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p-1}x^{k-p-1}a^{p}.$$

Para que o somatório continue com a mesma quantidade de parcelas (e, continue com o mesmo) após a redefinição da variável p acrescenta-se uma parcela na soma, portanto o somatório deve calcular k termos ao invés de $k - 1$.

Assim temos:

$$(x+a)^{k+1} = x^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}x^{k+1-p}a^{p} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p-1}x^{k-p-1}a^{p}$$

Colocando em evidência o termo $x^{k+1-p}a^{p}$:

$$(x+a)^{k+1} = x^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\left[\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1}\right]x^{k+1-p}a^{p}.$$

Mas $\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p}$, *então;*

$$(x+a)^{k+1} = x^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k+1}{p}x^{k+1-p}a^{p}.$$

Como o $(k+1)$-ésimo termo do somatório é igual a a^{k+1} e o 0-ésimo termo é igual a x^{k+1} odemos incorporá-lo ao somatório modificando o índice $p = 1$ para $p = 0$ e k para $k + 1$, assim :

$$(x+a)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}x^{k+1-p}a^{p}$$

Portanto, a propriedade $P(k + 1)$ é válida e a propriedade $P(n)$ verdadeira para todo número inteiro $n \geq 1$.

3.3 Termo Geral

Observe o desenvolvimento:

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n a^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}a^1}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}a^2}_{T_3} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}x^n a^n}_{T_{n+1}}$$

1° termo $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0}x^n a^0$

2° termo $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1} x^{n-1} a^1$

3° termo $T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2} x^{n-2} a^2$

$\vdots \qquad \vdots$

(p+1)ésimo termo $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$.

Portanto, um termo qualquer de ordem (p + 1) é dado por

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p. \tag{3.2}$$

3.4 Termo Central

na expansão de $(x + a)^n$ quando n é par, haverá um número ímpar de termos e portanto hverá um termo central.

Seja $n = 2m$, para algum inteiro positivo m. Então quando a expansão de $(x + a)^n$ é organizado com termos em ordem decrescente ou crescente, o termo médio é:

$$\binom{2m}{m} x^m a^m$$

Quando n é ímpar, haverá dois termos centrais em $(x + a)^n$.

Seja $n = 2m+1$, para algum inteiro positivo m. Então os termos do meio são:

$$\binom{2m+1}{m} x^{m+1} a^m$$

ou

$$\binom{2m+1}{m+1} x^m a^{m+1}$$

Obs: Quando n é par, podemos mostrar que o maior coeficiente de $(1 + a)^n$ é o coeficiente do termo médio $\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Quando n é ímpar, existem dois maiores coeficientes, que são os coeficientes dos dois termos médios $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ e $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$.

3.5 Expansão Multinomial

Já vimos como é possível obter o desenvolvimento de um binômio $(x + a)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vamos agora, com raciocínio semelhante, obter o desenvolvimento de expressões do tipo $(x+y+z)^n, \ldots, (x+y+z+t)^n.(n \in \mathbb{N})$, em que a base da potência do expoente n é um polinômio.

Considere a expressão:

$$(x+y+z)^5 = \underbrace{(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)}_{5\ fatores}$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação, devemos tomar um termo de cada fator(esolhidos entre x, y, z) e, em seguida, multiplicá-los. Feitas todas as escolhas possíveis e multiplicados os termos, a soma desses produtos será o desenvolvimento de $(x+y+z)^5$. Os tipos de produtos que podemos obter são da forma $x^?i \cdot y^j \cdot z^k$ em que, $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$.

Para cada i, j, k fixados, o coeficiente do termo $x^i y^j z^k$ será o número de sequências de cinco letras, com i letras x, j letras y e k letras z, isto é:

$$P_5^{i,j,k} = \frac{5!}{i!j!k!}$$

Portanto, o coeficiente de $x^i y^j z^k$ é $\dfrac{5!}{i!j!k!}$.

Tomando todos os termos do tipo $x^i y^j z^k$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$ e calculando os seus coeficientes, a soma deles, precedidos pelos respectivos coeficientes, dará a expansão de $(x+y+z)^5$.

Em particular, o coeficiente do termo x^2y^2z será:

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30.$$

Portanto, o termo em x^2y^2z será $30x^2y^2z$.

De um modo geral, a expansão do polinômio, $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r)^n$, com $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ será:

$$\sum \left(\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} \right),$$

sendo que, a soma é estendida para $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ e $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ (HAZZAN, 2013).

4 Aplicações do Binômio de Newton

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações do Teorema Binomial de muito interesse. As aplicações estão voltadas para o Ensino Médio na Seção 4.1 e para alguns cursos do Ensino Superior na Seção 4.2. A Seção 4.3 trata de uma breve introdução a distribuição de probabilidade Binomial que recebe muito destaque nas disciplinas de Estatística e Probabilidade.

4.1 Exemplos Explorados no Ensino Médio

Exemplo 4.1 Determinar a soma dos coeficientes do termo x^2 na expressão $(1+x)^3(2-x^2)^4$.

O termo geral de $(1+x)^3 = \binom{3}{p}1^{3-p}x^p = \binom{3}{p}x^p$

O termo geral de $(2-x^2)^4 = \binom{4}{k}2^{4-k}(-x^2)^k = \binom{4}{k}2^{4-k}(-1)^k x^{2k}$

Multiplicando as expressões temos:

$$\binom{3}{p}x^p \times \binom{4}{k}2^{4-k}(-1)^k x^{2k} = \binom{3}{p}\binom{4}{k}2^{4-k}(-1)^k x^{p+2k}.$$

Queremos encontrar os coeficientes de x^2. Logo, $p+2k=2$. Fazendo $k=0$ e $p=2$, o coeficiente de x^2 é dado por

$$\binom{3}{2}\binom{4}{0}2^{4-0}(-1)^0 = 48.$$

Fazendo $k=1$ e $p=0$, o coeficiente de x^2 é dado por

$$\binom{3}{0}\binom{4}{1}2^{4-1}(-1)^1 x^2 = -32.$$

Portanto, a soma dos coeficientes de x^2 é $48+(-32)=16$.

Exemplo 4.2 Determinar o termo máximo do desenvolvimento $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{65}$.

O termo genérico do desenvolvimento é:

$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$ então,

$T_{p+1} = \binom{65}{p} 1^{65-p} \left(\frac{1}{3}\right)^p$

$T_{p+1} = \binom{65}{p} \left(\frac{1}{3^p}\right)$

$T_{p+1} > T_p$ (ou seja, cada termo é maior que o anterior se)

$\binom{65}{p} \frac{1}{3^p} > \binom{65}{p-1} \frac{1}{3^{p-1}}$ isto é,

$\frac{65!}{p!(65-p)!} \times \frac{1}{3^p} > \frac{65!}{(p-1)!(66-p)!} \times \frac{1}{3^{p-1}}$ Assim,

$\frac{(66-p)!}{(65-p)!} > \frac{p!}{(p-1)!} \times \frac{3^p}{3^{p-1}}$

$\frac{(66-p)(65-p)!}{(65-p)!} > \frac{p(p-1)!}{(p-1)!} \times 3^{p-p+1}$

$66 - p > 3p \; p < 16,5$

Logo, $T_{p+1} > T_p$ para $p \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ e analogamente $T_{p+1} < T_p$ para $p \in \{17, 18, \ldots, 65\}$.

Segue então que o termo máximo é $T_{16+1} \Rightarrow T_{17} = \binom{65}{16} \frac{1}{3^{16}}$.

Exemplo 4.3 Um capital é aplicado por 12 anos à juros compostos de meio por cento ao mês. Ao final desse período, o rendimento acumulado será igual, inferior ou superior a 100%?

Sabemos que 12 anos = 144 meses e 0,5% = 0,005. Pela fórmula do juros compostos temos que

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^t \\ &= C(1+0,005)^{144} \\ &= C(1,005)^{144}. \end{aligned}$$

Precisamos verificar se $(1,005)^{144}$ é maior que 2 , igual a 2 ou menor que 2.

Aplicando o teorema binomial podemmos escrever $(1,005)^{144}$ na forma

$$(1,005)^{144} = (1+0,005)^{144} = \left(1 + \frac{1}{200}\right)^{144}.$$

Expandindo o binômio,

$$\left(1+\frac{1}{200}\right)^{144} = \binom{144}{0}1^{144}\left(\frac{1}{200}\right)^{0} + \binom{144}{1}1^{143}\left(\frac{1}{200}\right)^{1} + \ldots + \binom{144}{144}1^{0}\left(\frac{1}{200}\right)^{144}.$$

Calculando os três primeiros termos, segue-se que

$$1 \times 1 \times 1 + 144 \times 1 \times \left(\frac{1}{200}\right) + 10296 \times 1 \times \left(\frac{1}{40000}\right) \simeq 1,9774.$$

Portanto, ao final de 144 meses o rendimento será menor que 100%.

Exemplo 4.4 Mostre que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}$.

À princípio temos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^k}{1\cdot 2\cdots k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k = nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1} \\
&= nx\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}x + \cdots + \binom{n-1}{n-1}x^{n-1}\right] \\
&= nx(1+x)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.5 Utilizando desenvolvimento do Binômio de Newton, mostre que $7^n - 1$ é divisível por 6, para todo número natural.

Sabendo que $7^n = (6+1)^n = \binom{n}{0}6^n1^0 + \binom{n}{1}6^{n-1}1^1 + \cdots + \binom{n}{n}6^01^n$.

Os primeiros termos do desenvolvimento do binômio são múltiplos de 6. Então,

$7^n = 6k + \binom{n}{n}6^01^n$, com $k \in \mathbb{N}$,

$7^n = 6k + 1$,

$7^n - 1 = 6k$.

Portanto, podemos concluir que $7^n - 1$ é divisível por 6.

Exemplo 4.6 Prove que $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Sejam $x = 101^{50}$ e $y = 99^{50} + 100^{50}$, temos

$$x = (100+1)^{50} = \binom{50}{0}100^{50} + \binom{50}{1}100^{49}1^{1} + \ldots + \binom{50}{49}100^{1}1^{49} + \binom{50}{50}100^{0}1^{100}$$

e,

$$y = 100^{50}+(100-1)^{50} = \binom{50}{0}100^{50} - \binom{50}{1}100^{49}1^{1} + \ldots - \binom{50}{49}100^{1}1^{49} + \binom{50}{50}100^{0}1^{100} + 100^{50}.$$

$$\begin{aligned} x - y &= 2\binom{50}{1}100^{49}1^{1} + 2\binom{50}{3}100^{47}1^{3} + \ldots + 2\binom{50}{49}100^{1}1^{49} - 100^{50} \\ &= 2\binom{50}{1}100^{49} + \binom{50}{3}100^{47} + \ldots + 2\binom{50}{47}100^{3} + 2\binom{50}{49}100 > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $x > y$, ou seja, $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Exemplo 4.7 Calcular o termo independente de x no desenvolvimento $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$.

O termo geral do binômio é dado por

$T_{p+1} = \dbinom{n}{p} x^{n-p}a^{p}$.

Então, para $n = 10$,

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}(x^3)^{10-p}(-x^{-2})^{p} = \binom{10}{p}x^{30-5p}(-1)^{p}. \qquad (4.1)$$

Queremos encontrar o termo independente de x. Para isso, a potência de x deve ser nula. Logo, $30 - 5p = 0 \Rightarrow p = 6$.

Substituindo $p = 6$ na equação (4.1), temos

$$T_{6+1} = \binom{10}{6}x^{30-5\times 6}(-1)^{6}$$

$$T_7 = \binom{10}{6}x^{0} \times 1 = 210.$$

Portanto, o termo independente de x no desenvolvimento $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ é 210.

Exemplo 4.8 Ao examinar o Triângulo de Pascal, Fibonacci percebeu que a sequência (de Fibonacci) poderia ser observada, como está mostrado a seguir. O aparecimento se dava através da soma de vários números binomiais localizados (em diagonal) acima e ao lado direito do número anterior.

Antes de mostrar como a sequência de Fibonacci aparece no Triângulo de

Pascal, iremos definí-la.

Seja F(n) a soma

$$F(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots$$

Continuamos somando até que o número inferior exceda o superior. Então

$$F(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots$$

Somando o primeiro termo da linha 1 com o segundo da linha 2 e assim por diante, obtemos

$$F(n+1) + F(n) = \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \cdots$$

Usando a identidade de Pascal, obtemos

$$F(n+1) + F(n) = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \cdots = F(n+2).$$

Como $F(0) = F(1) = 1$, mostramos que $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $\ldots$é a sequência de Fibonacci.

Este resultado pode ser demonstrado em termos do triângulo de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	**1**				
1	4	**6**	4	1			
1	**5**	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Logo, podemos concluir que **F(6)=1+5+6+1=13**.

Exemplo 4.9 Outros resultados provenientes da aplicação do Teorema Binomial a $(1+x)^n$. Cada uma das seguintes expansões, têm três coeficientes em progressão aritmética:

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$$

$$(1+x)^{14} = 1 + 14x + 91x^2 + 364x^3 + 1001x^4 + 2002x^5 + 3003x^6 + 3432x^7 + \dots$$

$$(1+x)^{23} = \dots + 490314x^8 + 817190x^9 + 1144066x^{10} + \dots$$

Na primeira expansão, onde $n = 7$, a progressão aritmética é 7, 21, 35. Na segunda expansão, onde $n = 14$, a progressão é $1001, 2002, 3003$.

Para a expansão de $(1+x)^n$ onde $n > 2$, prove que se os coeficientes de três potências consecutivas estão em progressão aritmética, então $n+2$ é um quadrado perfeito. Dica. Considere três coeficientes $\binom{n}{r-1}, \binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}$.

Suponha que os coeficientes de três potências consecutivas de $(1+x)^n$, estão em progressão aritmética. Sejam os três coeficientes:

$$\binom{n}{r-1}, \binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}.$$

Então,

$$\binom{n}{r} - \binom{n}{r-1} = \binom{n}{r+1} - \binom{n}{r}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} - \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!} - \frac{n!}{(n-r)!(r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n-r+1}\right) = \frac{n!}{(n-r-1)!r!}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{n-r}\right)$$

$$\frac{n-2r+1}{n-r+1} = \frac{n-2r-1}{r+1}$$

$$(n-2r)^2 = n+2.$$

Para que isso seja possível, $n+2$ é um quadrado perfeito.

4.2 Exemplos Explorados no Ensino Superior

Exemplo 4.10 Este exemplo explora a definição do número e.

Considere $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Pelo Teorema Binomial, temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.2}$$

Utilizando o lado direito da expressão (4.2), segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}.$$

Portanto,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots.$$

Exemplo 4.11 (EVANS, 2013). Provar que a primeira derivada de x^n é igual a nx^{n-1}.

A derivada de x^n em relação a x é dada por

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Usando o Teorema Binomial, temos que

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k - x^n\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^{k-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \lim\nolimits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Exemplo 4.12 Desigualdade de Bernoulli. Seja $1 + x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.3}$$

Demonstração: Prova por indução finita. Caso Base: Para $n = 1$, $1 + x = 1 + x$, a desigualdede é verdadeira.

Hipótese de indução: Para qualquer intero $k \geq 1$, $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.

Desejamos mostrar que $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Pelo passo indutivo:

$$\begin{aligned}
(1+x)^k &\geq 1+kx, \\
(1+x)(1+x)^k &\geq (1+x)(1+kx), \\
(1+x)^{k+1} &\geq 1+(k+1)x+kx^2, \\
1+(k+1)x+kx^2 &\geq 1+(k+1)x.
\end{aligned}$$

Portanto, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Com isto, concluímos a prova da expressão (4.3). $\square$

Obviamente, quando $x \geq 0$, o Teorema Binomial pode ser aplicado para provar a validade da expressão (4.3). Note que,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}1^n x^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}x^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0 x^n. \tag{4.4}$$

A soma dos dois primeiros termos do lado direito da equação (4.4) é igual a $1+nx$ e a soma do terceiro até o termo de ordem n é maior ou igual a zero. Isto estabelece a validade de (4.3).

4.3 Distribuição de Probabilidade Binomial

Nesta Seção a distribuição de probabilidade Binomial surge naturalmente como uma aplicação direta do Teorema Binomial.

Consideremos uma sequência com n repetições independentes de um experimento em que há somente dois resultados possíveis em cada repetição, $A = \{sucesso\}$ com $P(A) = p$ ou $A^c = \{fracasso\}$ com $P(A^c) = 1-p$. Cada repetição do experimento, geralmente é chamada de prova Bernoulli.

Suponha que há o interesse em calcular a probabilidade p_k da ocorrência de exatamente k sucessos, em n provas de Bernoulli. Note que, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

O evento "ocorrem exatamente k sucessos nas n repetições" é formado por todas as ênuplas em alguma ordenação em que existem k sucessos e $(n-k)$ fracassos. O número de ênuplas nessas condições é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Cada uma dessas ênuplas em alguma ordenação representa a interseção de k eventos do tipo A_i e $(n-k)$ eventos do tipo A_i^c, e, como esses eventos são independentes, a probabilidade de interseção dos mesmos é o produto das probabilidades de cada um, isto é, $p^k(1-p)^{n-k}$.

Por exemplo, a ênupla $(\underbrace{A, A, A, \ldots, A}_{k}, \underbrace{A^c, A^c, A^c, \ldots, A^c}_{n-k})$ é igual a interseção $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c$ cuja probabilidade é $p^k(1-p)^{n-k}$.

Logo, se cada ênupla em alguma ordenação com exatamente k sucessos tem probabilidade $p^k(1-p)^{n-k}$ e existem $\binom{n}{k}$ ênuplas desse tipo, a probablidade p_k de exatamente k sucessos nas n provas de Bernoulli é dada por

$$p_k = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{4.5}$$

Para mostrar que $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$, basta observar que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1^n = 1,$$

pela aplicação direta do Teorema Binomial. A expressão (4.5) recebe o nome de distribuição de probabilidade Binomial e quando $n = 1$ a distribuição de probabilidade correspondente é chamada de distribuição de Bernoulli.

Nas disciplinas de Estatística e Probabilidade há sempre o interesse em estudar características de uma variável aleatória (v.a.) X representando o número de sucessos em n provas de Bernoulli. Entre essas características as mais frequentes são a função de probabilidade $p(x) = P(X = x)$, a função acumulada $F(x) = P(X \leq x)$, a média $\mu = E(X)$ e a variância $\sigma^2 = Var(X)$. Obviamente, a função de probabilidade $p(x)$ é obtida pela expressão (4.5), bastando substituir p_k por $p(x)$ e k por x. A notação $X \sim B(n, p)$ é frequentemente utilizada para indicar que a v.a X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p. Cálculos de probabilidade e gráficos das funções de probabilidade e acumulada podem ser obtidos usando o GeoGebra e outros softwares. As Figuras (4.1) e (4.2) foram construídas usando a calculadora de probabilidade do GeoGebra Classic 6.

Figura 4.1: Função de probabilidade de uma v.a. Binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 1/4$.

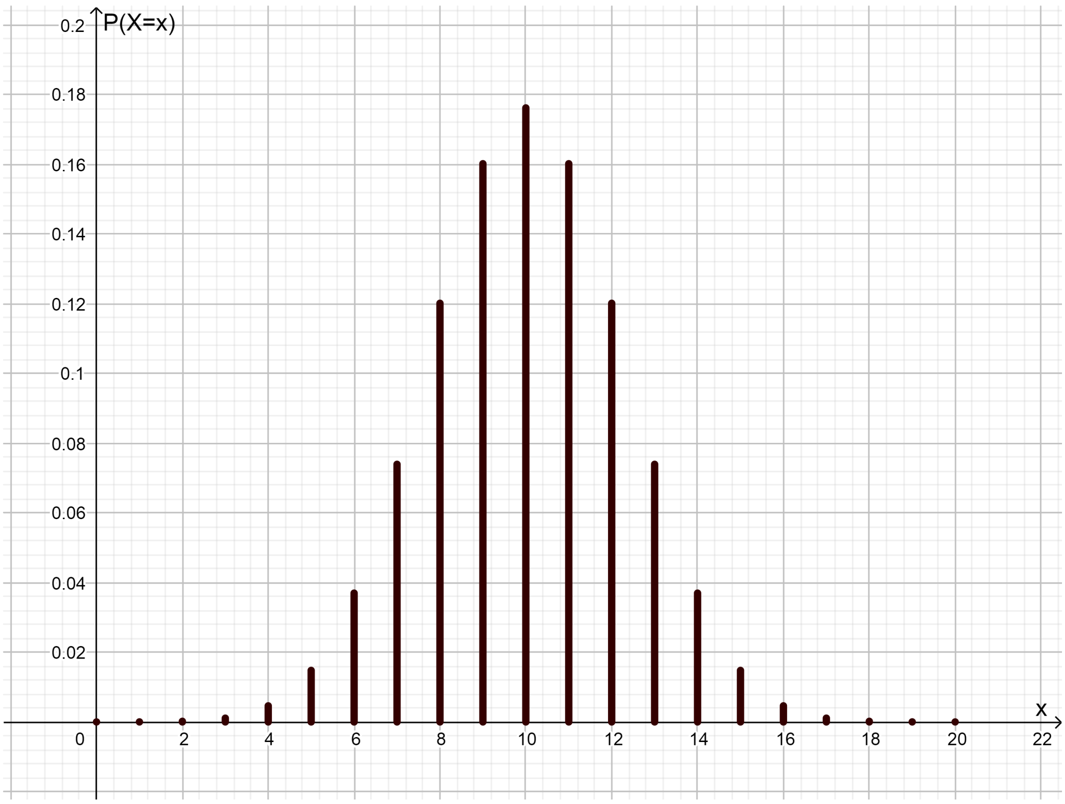

Figura 4.2: Função de probabilidade de uma v.a. Binomial com parâmetros $n = 20$ e $p = 1/2$.

4.3.1 Média e Variância de uma Distribuição de Probabilidade Binomial

Teorema 4.1 *A média ou valor esperado de uma v.a. X com distribuição Binomial com parâmetros n e p é dada por*

$$E(X) = np. \tag{4.6}$$

Prova 4.1 Pela definição de média ou valor esperado de uma v.a. discreta, $E(X) = \sum_x xp(x)$. Então,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} && (4.7)\\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}. && (4.8) \end{aligned}$$

Note que a expressão (4.7) vale zero quando $x = 0$. Em seguida, basta fazer $k = x - 1$ na expressão (4.8). Assim, k assume valores no conjunto formado pelos inteiros de 0 a $(n-1)$, $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Substituindo x, por $(k+1)$, obteremos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}\\ &= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Agora, basta observar que o somatório na última expressão corresponde a soma das probabilidades de uma distribuição Binomial com $(n-1)$ provas de Bernoulli para estabelecer a expressão (4.6). $\square$

Teorema 4.2 *A variância de uma v.a. X com distribuição Binomial com parâmetros n e p é dada por*

$$Var(X) = np(1-p), \tag{4.9}$$

Prova 4.2 Determinando primeiro $E(X^2)$. Observe que,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}\\ &= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!}p^xq^{n-x} \end{aligned}$$

Fazendo-se $k = x - 2$ na soma anterior, k assume valores desde *zero* até $(n-2)$. Substituindo x, em todos os termos, por $(k+2)$, obtemos

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)\binom{n-2}{k} p^{k+2} q^{n-k-2} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{n-2-k}. \end{aligned}$$

A soma na última expressão, tem resultado análogo ao da média. Portanto,

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2.$$

Segue-se da definição de variância que

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + E(X).$$

Então,

$$\begin{aligned} Var(X) &= n(n-1)p^2 + E(X) - (E(X))^2 \\ &= (n^2 - n)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= -np^2 + np = np(1-p). \qquad \square \end{aligned}$$

5 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos o Binômio de Newton ou Teorema Binomial como uma ferramenta relacionada a problemas do Ensino Médio, considerado de muita importância na vida acadêmica do aluno. Isso pode ser especificamente observado com os exemplos de aplicações do Capítulo 4.

Para o acompanhamento dos exemplos de aplicações apresentados fica claramente estabelecida a necessidade do conhecimento prévio de alguns conceitos de análise combinatória como, propriedades dos coeficientes binomiais e do Triângulo de Pascal.

Outras aplicações do Teorema Binomial podem ser estendidas em problemas de introdução a probabilidade e tópicos mais gerais envolvendo a variável aleatória binomial. Em determinadas situações é sempre necessário o apoio computacional que pode ser obtido com o uso de software livres tais como o Geogebra e a linguagem R.

Referências Bibliográficas

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Editora Ática, 2009. Único.

EVANS, M. The binomial theorem – a guide for teachers (years 11–12). Education Services Austrália, Austrália, 2013.

HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória Probabilidade*. São Paulo: Editora Atual, 2013. v. 5.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 6.

PAIVA, M. *2 ano ensino médio*. São Paulo: Editora Moderna, 2015. v. 1.