



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Carlos Eduardo Sousa Silva

EQUILÍBRIOS E ESTABILIDADE LINEAR NO PROBLEMA RESTRITO CIRCULAR DE TRÊS CORPOS CARREGADOS

São Luís - MA
2024

Carlos Eduardo Sousa Silva

**EQUILÍBRIOS E ESTABILIDADE LINEAR NO
PROBLEMA RESTRITO CIRCULAR DE TRÊS CORPOS
CARREGADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

São Luís - MA

2024

Carlos Eduardo Sousa Silva

EQUILÍBRIOS E ESTABILIDADE LINEAR NO PROBLEMA RESTRITO CIRCULAR DE TRÊS CORPOS CARREGADOS/ Carlos Eduardo Sousa Silva. – São Luís - MA, 2024-

78 p. : il.(alguma color.); 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

– Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal do Maranhão, 2024.

1. Problema dos dois corpos carregados. 2. Problema restrito dos três corpos carregados. I. Orientador. II. Universidade Federal do Maranhão. III. Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Equilíbrios e Estabilidade Linear no Problema Restrito Circular de Três Corpos Carregados

CDU 02:141:005.7

Carlos Eduardo Sousa Silva

EQUILÍBRIOS E ESTABILIDADE LINEAR NO PROBLEMA RESTRITO CIRCULAR DE TRÊS CORPOS CARREGADOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 24 de Outubro de 2024:

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

Orientador

Universidade Federal do Maranhão

Profa. Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. José Claudio Vidal Diaz

Examinador Externo

Universidade de Bío-Bío - UBB

São Luís - MA

2024

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha mãe, Maria da Graça, e ao meu pai, João Batista, por sempre me darem condições e apoio para que eu pudesse prosseguir com meus estudos.

Agradeço também aos meus irmãos, Joinária, Maíra e Estevam, por sempre estarem presentes em minha vida.

Agradeço à minha namorada Thássia Nayara, por sempre me escutar, me incentivar e nunca me deixar desistir.

Agradeço ao professor José Santana, que, no momento da busca por orientador, me indicou meu orientador, o professor AdeCarlos.

Agradeço ao professor AdeCarlos pela orientação, que me fez melhorar como matemático, e pelas discussões que muito agregaram à minha formação pessoal.

Agradeço sinceramente à professora Renata de Farias Limeira Carvalho e ao professor José Claudio Vidal Diaz pela participação e contribuições valiosas na banca de avaliação da minha dissertação.

Agradeço ao professor Gustavo, ao professor Pedro, ao professor José Santana (novamente), ao professor Marcus, ao professor AdeCarlos (novamente), ao professor Giovane, ao professor Ivaldo, ao professor Marlon, à professora Sandra, ao professor Anselmo e ao professor Jairo, pelo conhecimento adquirido ao longo do curso e pelo exemplo de profissionalismo.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, Larissa, Fábio, Uanderson, Raney e, principalmente, Gustavo e Gabriel, por sempre me ajudarem nessa jornada de um engenheiro no mundo da matemática.

Agradeço aos meus amigos de longa data Almir, Mirian, Mauro, Emersson, Marlyson e Eduardo, cuja trajetória acadêmica me incentivou a estudar e me dedicar ainda mais.

Agradeço a todos os meus professores ao longo das graduações que fiz e, principalmente aos professores de Matemática.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro ao longo do mestrado.

Resumo

São apresentados resultados sobre os sistemas Hamiltonianos, destacando-se que suas propriedades são preservadas por transformações simpléticas e resultados sobre estabilidade. Em seguida, aborda-se a formulação do problema dos n -corpos, com destaque para seus casos clássicos mais conhecidos: o problema dos dois corpos, cuja integrais primeiras são obtidas por meio de uma transformação simplética que descreve o movimento com base no centro de massa do sistema; e a descrição do problema dos três corpos, incluindo o seu caso restrito e restrito planar.

Também é tratado o problema geral dos n -corpos carregados, destacando casos específicos: o problema dos dois corpos carregados, analisando o comportamento para diferentes valores da constante C ; e o problema restrito circular dos três corpos carregados, onde, em função dos parâmetros de massa e carga, derivam-se restrições sobre os parâmetros de carga que permitem a obtenção de soluções de equilíbrio (triangular e colinear) e a análise de sua estabilidade.

Palavras-chave: Problema dos dois corpos carregados, Problema restrito circular dos três corpos carregados, Sistemas Hamiltonianos.

Abstract

Results on Hamiltonian systems are presented, highlighting that their properties are preserved by symplectic transformations and stability results. Next, the formulation of the n -body problem is addressed, with emphasis on its most well-known classical cases: the two-body problem, whose first integrals are obtained through a symplectic transformation that describes the motion based on the system's center of mass; and the description of the three-body problem, including its restricted and planar restricted cases.

The general problem of charged n -bodies is also addressed, highlighting specific cases: the two-body charged problem, analyzing the behavior for different values of the constant C ; and the circular restricted three-body charged problem, where, based on the mass and charge parameters, restrictions on the charge parameters are derived that allow the obtaining of equilibrium solutions (triangular and collinear) and the analysis of their stability.

Keywords: Charged two-body problem, Restricted circular problem of three charged bodies, Hamiltonian systems.

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Sinais possíveis para os coeficientes de $F(\rho_2)$	60
Tabela 2.2 – Sinais possíveis para os coeficientes de $F(\rho_1)$	61

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Visão perpendicular ao plano da órbita dos corpos de massa m_1 e m_2 . . .	33
Figura 2.1 – Região de Hill	41
Figura 2.2 – Retrato de fase do problema de duas cargas, com $k^* > 0$, $C < 0$	43
Figura 2.3 – Comportamento das soluções do problema de duas cargas com $k^* > 0$, $C < 0$	44
Figura 2.4 – O problema restrito circular dos três corpos carregados em um referencial rotativo com unidades convenientes.	48
Figura 2.5 – Região permitida para os valores de β_1 e β_2	49
Figura 2.6 – Região permitida, no espaço de parâmetros $(\delta_1, \delta_2) = (\beta_1^{1/3}, \beta_2^{1/3})$, para a existência de soluções de equilíbrio triangular. A região é delimitada pelas funções $\delta_2 = \delta_1 + 1$, $\delta_2 = \delta_1 - 1$, $\delta_2 = 1 - \delta_1$, $\delta_2^3 = \frac{1}{\delta_1^3 - 1} + 1$	52
Figura 2.7 – Solução de equilíbrio a esquerda de $-\mu$	53
Figura 2.8 – Solução de equilíbrio a direita de $1 - \mu$	53
Figura 2.9 – Solução de equilíbrio entre os corpos.	54
Figura 2.10 – Gráfico da função (2.54) com $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ e $\mu = 0.5$	60
Figura 2.11 – Gráfico de $F(\rho_2, \beta_1, \beta_2)$, com $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ e $\mu = 0.5$	60
Figura 2.12 – Valores permitidos de δ_1 e δ_2 que satisfazem o Teorema 2.8	68
Figura 2.13 – Triângulo formado pelos três corpos.	71
Figura 2.14 – Valores de F como função de (μ, γ)	74

Sumário

	INTRODUÇÃO	10
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
1.1	Sistemas Hamiltonianos	12
1.1.1	Sistemas Hamiltonianos lineares	13
1.2	Transformações simpléticas	16
1.2.1	Matrizes simpléticas	16
1.2.2	Transformações simpléticas	19
1.3	Estabilidade	22
1.4	O problema de n-corpos	24
1.4.1	O problema de dois corpos	25
1.4.2	O problema de Kepler	28
1.4.3	O problema de três corpos	32
1.4.4	O problema restrito de três corpos	34
1.4.5	O problema restrito planar dos três corpos	35
2	O PROBLEMA RESTRITO CIRCULAR PLANAR DOS TRÊS CORPOS CARREGADOS	37
2.1	O problema de dois corpos carregados	38
2.2	O problema restrito de três corpos carregados	45
2.3	Soluções de equilíbrio	50
2.3.1	Soluções de equilíbrio triangulares	51
2.3.2	Soluções de equilíbrio colineares	54
2.4	Estabilidade das soluções de equilíbrio	67
2.4.1	O polinômico característico	68
2.4.2	Condição para estabilidade	72
2.4.3	Região estável no espaço de configuração e no espaço de parâmetros	74
3	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	78

Introdução

Os estudos sobre os corpos celestes se datam desde a antiguidade, existem registros que datam de aproximadamente 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios. Com o avançar dos séculos, várias teorias sobre a dinâmica dos corpos celestes foram sendo criadas, entre as quais podemos citar a de Tales de Mileto (~624-546 a.C.) que introduziu os fundamentos da geometria e da astronomia, Aristóteles (384-322 a.C.) que explicou que as fases da Lua dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra, Ptolomeu (87-150 d.C.) que foi o último astrônomo importante da antiguidade que compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o *Almagesto*, Nicolau Copérnico (1473 - 1543) que apresentou o sistema heliocêntrico, Tycho Brahe (1546 - 1601) que descobriu erros nas Tabelas Alfonsinas e também junto com seus assistentes, Tycho reduziu a imprecisão das medidas, de 10 minutos de arco desde o tempo de Ptolomeu, para um minuto de arco, Johannes Kepler (1571 - 1630) que descobriu as três leis que regem o movimento planetário, Galileo Galilei (1564 - 1642) que por suas afirmações, sobre a centralidade do universo, foi julgado e condenado por heresia em 1633 e depois renega suas conclusões de que a Terra não é o centro do universo e imóvel e, por fim, Isaac Newton (1643 - 1727) que em sua obra fixa as bases da mecânica teórica, resultando na confirmação das leis de Kepler por meio da combinação de suas teorias com a lei de gravitação.

Foi com Newton e sua segunda lei que diz “*força é igual ao produto da massa pela aceleração*” e também sua lei de gravitação universal a qual afirma que “*No universo, duas partículas materiais quaisquer atraem-se com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa*” que os estudos modernos sobre a dinâmica dos corpos celestes iniciara. Igualando tais leis, podemos descrever a dinâmica dos corpos celestes. Assim como dito anteriormente, Newton, a partir de suas leis, reobteve as leis de Kepler, isto para dois corpos, entretanto, quando este considerou três corpos não teve sucesso para solucionar sua dinâmica. Tais problemas são considerados como problema de dois corpos e problema de três corpos, que são casos particulares do problema de n-corpos. Foi somente com Lagrange e depois Euler que se desenvolveram as soluções mais conhecidas para o problema de três corpos, no caso restrito, em que uma é denominada triangular e outra colinear.

Contemporâneo a Euler e Lagrange, Charles Augustin de Coulomb realizou estudos fundamentais sobre eletricidade e magnetismo. Ele formulou a lei que descreve a força de atração (ou repulsão) entre duas cargas pontuais, estabelecendo que “*a força é proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas*”. Esta lei é bastante semelhante à lei da gravitação de Newton. A Lei de Coulomb é válida

para cargas estáticas, mas, para cargas em movimento, a expressão da força se altera. Nesse caso, a força é descrita pela equação $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, onde $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{B}$ é o campo magnético, e $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula. Essa força é conhecida como força de Lorentz.

A partir da década de 1950, vários estudos têm investigado a dinâmica de corpos sob a influência simultânea das forças gravitacional e elétrica, considerando que as velocidades envolvidas não são relativísticas e, portanto, a força elétrica predomina. Esse problema é frequentemente chamado de *fotogravitacional* na literatura, caracterizando-se pela força elétrica ser exclusivamente repulsiva. Exemplos notáveis de estudos sobre esse tema incluem (RADZIEVSKII, 1950), (LUKYANOV, 1984) e (LUKYANOV, 1986). O caso geral, conhecido como o *problema de n -corpos carregados*, além de englobar o problema fotogravitacional, permite que a força elétrica seja neutra ou atrativa, conforme discutido em (BENGOCHEA; VIDAL, 2015).

Como objetivos principais deste trabalho, temos: obter as soluções de equilíbrio triangular (ou não-colinear) e colineares para o problema restrito circular dos três corpos carregados em um plano, analisar a estabilidade das soluções de equilíbrios obtidas.

Dados os objetivos principais deste trabalho, no Capítulo 1 apresentaremos os sistemas Hamiltonianos, resultados sobre estabilidade dos sistemas Hamiltonianos, o problema de dois corpos, em que são apresentadas suas integrais primeiras por meio do problema de Kepler e o problema de três corpos, onde é obtida a descrição restrita e restrita planar para o mesmo a partir do caso geral. No Capítulo 2, abordaremos, conforme (BENGOCHEA; VIDAL, 2015), o problema de dois corpos carregados e sua integrabilidade, e o problema restrito circular planar dos três corpos carregados, apresentando suas soluções de equilíbrio e resultados sobre a estabilidade linear desse equilíbrio.

1 Fundamentação Teórica

As equações diferenciais desempenham um papel central na compreensão de sistemas dinâmicos, especialmente em física e astronomia. Sistemas Hamiltonianos, que surgem naturalmente na mecânica clássica, são descritos por equações diferenciais que preservam certas propriedades fundamentais, como a energia total do sistema.

Neste capítulo serão apresentados resultados introdutório sobre sistemas Hamiltonianos, suas transformações e sua estabilidade. As referências (VIDAL, 2003), (CABRAL; VIDAL, 1999), (MEYER; HALL; OFFIN, 2017) apresentam um estudo mais detalhado do que será apresentado nas próximas seções deste capítulo.

1.1 Sistemas Hamiltonianos

Sistemas Hamiltonianos é uma classe especial de sistemas dinâmicos onde a evolução no tempo é descrita por equações diferenciais que derivam de uma função denominada Hamiltoniana. Nesses sistemas, quando são autônomos, a energia total permanece constante ao longo do tempo. Nesta iremos apresentar alguns conceitos e resultados gerais sobre sistemas Hamiltonianos.

Definição 1.1. *Um sistema Hamiltoniano é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= H_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -H_{\mathbf{q}},\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde a função ou campo $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é chamado Hamiltoniano, é uma função diferenciável a valores reais definida para $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Os vetores $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ são chamados de vetor posição e momento, respectivamente, e t é chamado de tempo. As variáveis $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ são ditas variáveis conjugadas. O inteiro n é o número de graus de liberdade do sistema.

Suponha que a função Hamiltoniana H seja independente do tempo, ou seja, que o sistema (1.1) seja autônomo. Nesse caso, H é uma integral primeira. De fato, ao derivar H em relação a t , obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{dp_n}{dt} \\
&= -\frac{dp_1}{dt} \frac{dq_1}{dt} - \cdots - \frac{dp_n}{dt} \frac{dq_n}{dt} + \frac{dq_1}{dt} \frac{dp_1}{dt} + \cdots + \frac{dq_n}{dt} \frac{dp_n}{dt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo t , como mostrado em (1.1). Portanto, H é uma quantidade conservada ou uma constante de movimento. Nessa situação, dizemos que o sistema (1.1) é conservativo e que H representa a energia do sistema. O conjunto definido por

$$\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \mid H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\} \quad (1.2)$$

para um valor arbitrário de $h \in \mathbb{R}$, é chamado de superfície (ou variedade) de energia.

Ainda no caso autônomo, vemos de (1.1) que uma solução $\bar{\mathbf{z}}$ é de equilíbrio se, e somente se, ela é um ponto crítico de H , isto é, $\nabla H(\bar{\mathbf{z}}) = 0$.

Introduzindo o $2n$ – vetor $\mathbf{z}$ e a matriz anti-simétrica J de $2n \times 2n$ e o gradiente respectivamente por

$$\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T, J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \nabla_{\mathbf{z}} H = \nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_n} \right)^T \quad (1.3)$$

em que $()^T$ significa a matriz transposta, 0 é a matriz nula de $n \times n$ e I é a matriz identidade de $n \times n$. Com esta notação podemos reescrever (1.1) como

$$\dot{\mathbf{z}} = J \nabla H(\mathbf{z}, t). \quad (1.4)$$

1.1.1 Sistemas Hamiltonianos lineares

Um sistema Hamiltoniano linear é um sistema de $2n$ equações ordinárias

$$\dot{\mathbf{z}} = J \nabla_{\mathbf{z}} H(\mathbf{z}, t) = JS(t)\mathbf{z} = A(t)\mathbf{z} \quad (1.5)$$

onde

$$\begin{aligned}
H &= H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S(t) \mathbf{z} \\
S &= S^T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) \\
A(t) &= JS(t).
\end{aligned}$$

Portanto, a função hamiltoniano H é uma forma quadrática em $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ com coeficientes contínuos em $t \in I$. Quando S , e consequentemente H , é independente do tempo, verifica-se que H é uma integral de movimento, ou seja, é uma quantidade conservada no sistema ao longo do tempo, para o sistema descrito por (1.5).

Definição 1.2. Uma matriz $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita *Hamiltoniana* se $A^T J + JA = 0$.

O teorema a seguir nos fornece propriedades importantes sobre matrizes Hamiltonianas.

Proposição 1.3. Seja J definida assim como em (1.3), então temos que $J^T = J^{-1} = -J$.

Demonstração.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^T = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -J = J^{-1}$$

□

Teorema 1.4. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i. A é Hamiltoniana;
- ii. $A = JA^T J$;
- iii. $A = JR$ onde R é simétrica;
- iv. JA é simétrica.

Antes da demonstração do teorema, lembremos antes da definição da matriz J .

Demonstração. Supondo (i), então temos que A é Hamiltoniana, logo $A^T J + JA = 0$,

$$\begin{aligned} JA &= -A^T J \\ \Rightarrow A &= -J^{-1} A^T J \\ &= -(-J) A^T J \\ &= JA^T J. \end{aligned}$$

Supondo (ii), temos então que $A = JA^T J$, tomando $R = A^T J$, temos

$$\begin{aligned} R^T &= (A^T J)^T \\ &= J^T A \\ &= -JA \\ &= -J(JA^T J) \\ &= A^T J \\ &= R \end{aligned}$$

logo $A = JR$, com R simétrica.

Supondo (iii), temos $A = JR$ onde R é simétrica, então $JA = J^2R = -R$ e assim JA é simétrica.

Para concluir a demonstração, ou seja, (iv) implica (i), segue-se do fato que JA é simétrica, assim $JA = (JA)^T = A^T J^T = -A^T J$, logo $A^T J + JA = 0$ então concluímos a demonstração. $\square$

Como consequência desse teorema e da definição de sistemas Hamiltonianos lineares, a matriz, $A(t)$, que representa os coeficientes de um sistema Hamiltoniano linear deve, por sua vez, ser uma matriz Hamiltoniana.

Proposição 1.5. *O polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é uma função par.*

Demonstração. Seja $p(\lambda)$ o polinômio característico da matriz Hamiltoniana A , isto é

$$p(\lambda) = \det(JS - \lambda I_{2n}) \quad (1.6)$$

onde $A = JS$ com S matriz simétrica. Para provar o resultado observamos que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(JS - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(JS - \lambda I_{2n})^T \\ &= \det(S^T J^T - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(-SJ - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(J^2 SJ + \lambda J I_{2n} J) \\ &= \det(J) \det(JS + \lambda I_{2n}) \det(J) \\ &= \det(JS + \lambda I_{2n}) \\ &= p(-\lambda). \end{aligned}$$

$\square$

Assim, a equação (1.6) inclui apenas potências pares de λ . Portanto, se $\lambda = \mu + i\nu$ é uma raiz, então $\lambda = -\mu - i\nu$ também deve ser uma raiz. Além disso, se $\lambda = 0$ for um autovalor, ele terá multiplicidade par. Dado que A é uma matriz com coeficientes reais, o complexo conjugado $\bar{\lambda}$ também será um autovalor de A . Em resumo, se λ é um autovalor de A , então também serão autovalores: $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ e $-\bar{\lambda}$.

Teorema 1.6. *Sejam A e B matrizes Hamiltonianas de mesma ordem. Então A^T , αA ($\alpha \in F$), $A \pm B$ e $[A, B] = AB - BA$ também são Hamiltonianas.*

Demonstração. Como $(A^T)^T J + JA^T = AJ + JA^T = (JA^T J)J + JA^T = -JA^T + JA^T = 0$, conclui-se que A^T é Hamiltoniana.

Para αA , temos:

$$(\alpha A)^T J + J(\alpha A) = \alpha(A^T J + JA) = 0.$$

Agora, para $A \pm B$, temos:

$$(A \pm B)^T J + J(A \pm B) = (A^T J + JA) \pm (B^T J + JB) = 0,$$

portanto, $A \pm B$ é Hamiltoniana.

Por fim, considere o caso do comutador $[A, B] = AB - BA$. Como A e B são Hamiltonianas, temos $A = JR$ e $B = JS$, onde R e S são matrizes simétricas. Então:

$$[A, B] = AB - BA = J(RJS - SJR) = JP,$$

e como $P^T = S^T J^T R^T - R^T J^T S^T = -SJR + RJS = P$, conclui-se que $[A, B]$ é Hamiltoniana. $\square$

Consideremos agora A uma matriz Hamiltoniana 2×2 , ou seja, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, temos então $A^T J + JA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \delta \\ -\alpha - \delta & 0 \end{pmatrix}$, logo uma matriz $A_{2 \times 2}$ é Hamiltoniana, então o seu traço é nulo.

Para o caso de A ser uma matriz $2n \times 2n$, escrevendo-a em forma de blocos, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos $A^T + JA = \begin{pmatrix} c - c^T & a^T + d \\ -a^T - d & b^T - b \end{pmatrix}$. Logo concluímos que:

Proposição 1.7. *A matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é Hamiltoniana se, e somente se, $-a^T - d = 0$ e b e c são simétricas.*

1.2 Transformações simpléticas

As transformações simpléticas são mudanças de coordenadas que preservam a estrutura dos sistemas Hamiltonianos, como veremos a seguir, mantendo inalterada a forma diferencial das equações. Elas garantem que as propriedades fundamentais do sistema, como a conservação da energia e a dinâmica, sejam preservadas. Essenciais para simplificar e analisar sistemas complexos, essas transformações ajudam a entender melhor a estabilidade dos sistemas Hamiltonianos.

1.2.1 Matrizes simpléticas

Para iniciar os estudos das transformações simpléticas, comecemos a estudá-las pelas matrizes simpléticas.

Definição 1.8. Uma matriz $T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é chamada *simplética* com multiplicador μ , ou μ -*simplética* se

$$T^T J T = \mu J$$

onde μ é uma constante diferente de zero. Se $\mu = 1$, T é chamada *simplética*.

Segue da definição que se J é simplética, então $\det(T^2) = 1$

Teorema 1.9. Se T é simplética com multiplicador μ então T é não singular e $T^{-1} = -\mu^{-1} J T^T J$. Se T e R são μ e ν simpléticas, respectivamente, então T^T , T^{-1} e TR são simpléticas com multiplicador μ , μ^{-1} e $\mu\nu$, respectivamente .

Demonstração. Como J é não singular segue que T também o é. Pela definição segue que

$$\begin{aligned}\mu J &= T^T J T \\ \mu J T^{-1} &= T^T J \\ \mu T^{-1} &= J^{-1} T^T J \\ T^{-1} &= \mu^{-1} J^{-1} T^T J = -\mu^{-1} J T^T J.\end{aligned}$$

Para mostrar que a transposta de T é simplética notemos primeiro que da definição temos $T^T = \mu J T^{-1} J^{-1} = -\mu J T^{-1} J$

$$(T^T)^T J T^T = T J T^T = -\mu T J J T^{-1} J = \mu T T^{-1} J = \mu J.$$

Agora para a inversa de T temos

$$\begin{aligned}(T^{-1})^T J T^{-1} &= (-\mu^{-1} J T^T J)^T J (-\mu^{-1} J T^T J) \\ &= \mu^{-2} J^T T J^T J J T^T J \\ &= -\mu^{-2} J^T T J^T T^T J \\ &= \mu^{-2} J^T (T J T^T) J \\ &= \mu^{-2} J^T (\mu J) J \\ &= \mu^{-1} J^T J J \\ &= -\mu^{-1} J^T \\ &= \mu^{-1} J.\end{aligned}$$

Para TR temos

$$(TR)^T J TR = R^T (T^T J T) R = R^T (\mu J) R = \mu R^T J R = \mu\nu J.$$

□

Consideremos o Hamiltoniano linear dado por (1.5), isto é, $A(t)$ é uma matriz Hamiltoniana. Então consideremos a mudança de coordenadas induzida pela matriz μ -simplética T , da forma $\zeta = Tz$, então

$$\zeta = TAT^{-1}\zeta.$$

Seja $B = TAT^{-1}$ então temos que B também é Hamiltoniana. De fato

$$\begin{aligned} B^T J + JB &= (TAT^{-1})^T J + JTAT^{-1} \\ &= (T^{-1})^T A^T T^T J + JTAT^{-1} \\ &= -\mu^{-1}(JT^T J)^T A^T T^T J - \mu^{-1}JTAT^T J \\ &= -\mu^{-1}JTJA^T T^T J - \mu^{-1}JTAT^T J \\ &= -\mu^{-1}JT(JA^T + AJ)T^T J \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo

Teorema 1.10. *Uma mudança de coordenadas induzida por uma matriz μ -simplética transforma sistemas Hamiltonianos lineares em outros sistemas Hamiltonianos lineares.*

Definição 1.11. *Uma matriz $Z(t, t_0)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base do espaço de soluções de (1.5) chama-se matriz fundamental de (1.5).*

Um resultado importante que caracteriza a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear é:

Teorema 1.12. *A matriz solução fundamental $Z(t, t_0)$ do sistema Hamiltoniano linear (1.5) é simplética para todo $t, t_0 \in I$. Reciprocamente, se $Z(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então Z é a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração. Seja $U(t) = Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0)$. Como $Z(t, t_0) = I$ quando $t = t_0$, segue-se que $U(t_0) = J$. Por outro lado, temos:

$$\dot{U}(t) = \dot{Z}JZ + Z^T J \dot{Z} = Z^T (A^T J + JA)Z = 0.$$

Assim, $U(t) = J$ para todo $t \in I$. Reciprocamente $Z^T J Z = J$ para todo $t \in I$, então:

$$\dot{Z}JZ + Z^T J \dot{Z} = 0,$$

o que implica que:

$$(\dot{Z}Z^{-1})^T J + J(\dot{Z}Z^{-1}) = 0.$$

Isso demonstra que $A = \dot{Z}Z^{-1}$ é Hamiltoniana e, portanto, $\dot{Z} = AZ$. □

Corolário 1.13. *A matriz constante A é Hamiltoniana se, e somente se, e^{tA} é simplética para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Proposição 1.14. *Seja T uma matriz simplética. Se λ é um autovalor de T , então $\frac{1}{\lambda}$ é também um autovalor de T com a mesma multiplicidade algébrica.*

Demonstração. Desde que T é simplética, temos $T^T = -JT^{-1}J$, e se λ é autovalor de T , tem se

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(T - \lambda I) \\
 &= \det(T^T - \lambda I) \\
 &= \det(-JT^{-1}J + \lambda IJJ) \\
 &= \det J \det(-T^{-1} + \lambda I) \det J \\
 &= \det[\lambda T^{-1}(T - \frac{1}{\lambda}I)] \\
 &= \lambda^{2n} \det T^{-1} \det(T - \frac{1}{\lambda}I) \\
 &= \pm \lambda^{2n} p(\frac{1}{\lambda})
 \end{aligned}$$

□

Observação 1.15. *Da proposição acima segue-se que: se conhecemos um autovalor da matriz real simplética, então conhecemos mais três autovalores, a saber, $\frac{1}{\lambda}$, $-\lambda$ e $-\frac{1}{\lambda}$.*

Em particular, se 1 e -1 são autovalores, então eles têm multiplicidade par. Além disso, se λ é um autovalor, então $\frac{1}{\lambda}$ também é um autovalor com a mesma multiplicidade. Assim, segue-se que:

Proposição 1.16. *O determinante de uma matriz simplética é 1.*

1.2.2 Transformações simpléticas

Como discutido anteriormente, matrizes simpléticas preservam a estrutura dos sistemas Hamiltonianos, o que não é garantido por mudanças de variáveis arbitrárias. A seguir, apresentaremos algumas noções básicas sobre essa teoria. Para uma abordagem mais completa, consulte (VIDAL, 2003) e (MEYER; HALL; OFFIN, 2017).

Seja $E : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (\mathbf{z}, t) \rightarrow \zeta = E(\mathbf{z}, t)$ uma aplicação suave onde $U \times I$ é algum conjunto aberto em $\mathbb{R}^{2n+1}$; E é denominada *transformação simplética* se o Jacobiano de E com respeito a $\mathbf{z}$, $D_1 E(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}$, é uma matriz simplética em todo ponto de $(\mathbf{z}, t) \in U \times I$. Consideramos o Jacobiano $D_1 E$ como uma aplicação de $U \times I$ no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ dos

operadores lineares de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, com $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}$ como a matriz

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial E}{\partial z_{2n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial E}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}$$

Então, do que foi visto para matrizes simpléticas, E é simplética se, e somente se

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} J \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}^T = J, \quad (1.7)$$

como a transposta de uma matriz simplética também é simplética, logo temos

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}^T J \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = J \quad (1.8)$$

e os outros resultados, para matrizes simpléticas, seguem de imediato do Teorema 1.9.

Se considerarmos a transformação $z \rightarrow \zeta = E(\mathbf{z}, t)$ uma mudança de variáveis, então chamamos ζ de coordenadas *simpléticas* ou *canônicas*. Considerando o sistema Hamiltoniano não linear

$$\dot{z} = J \nabla_z H(\mathbf{z}, t), \quad (1.9)$$

com H definida e suave e algum conjunto aberto $U \times I \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Tome a mudança de variáveis simpléticas de z para ζ dada por

$$\zeta = E(\mathbf{z}, t) \quad (1.10)$$

com inversa dada por

$$z = Z(\zeta, t)$$

então

$$\begin{aligned} \zeta &= E(Z(\zeta, t), t) \\ z &= Z(E(\mathbf{z}, t), t). \end{aligned}$$

Seja $\mathbb{U} \times \mathbb{I} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ sendo a imagem de $U \times I$ sobre esta transformação. Então o Hamiltoniano $H(\mathbf{z}, t)$ é transformado para a função

$$\tilde{H}(\zeta, t) = H(Z(\zeta, t), t). \quad (1.11)$$

Aplicando a mudança de coordenadas à equação (1.9) temos:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \dot{z} \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + J \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta} \right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \Big|_{z=Z(\zeta, t)} + J \nabla_{\zeta} \tilde{H}(\zeta, t)
\end{aligned}$$

Se a mudança de coordenadas, E , é independente de t , então o termo $\frac{\partial E}{\partial t}$ está ausente em $\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T$, então, a equação nas novas coordenadas é simplesmente $\dot{\zeta} = J \nabla_{\zeta} \tilde{H}$, um sistema Hamiltoniano com Hamiltoniano $\tilde{H}$. Nesse caso, basta substituir a mudança de variáveis no Hamiltoniano H para obter o novo Hamiltoniano $\tilde{H}$. Logo, segue o teorema:

Teorema 1.17. *A transformação de coordenadas simpléticas $E(z, t) = \zeta$ que não depende de t transforma o sistema Hamiltoniano (1.1) em um novo sistema Hamiltoniano dado por*

$$\dot{\zeta} = J \nabla_{\zeta} \tilde{H}(\zeta, t), \quad (1.12)$$

cuja nova função Hamiltoniana é dada por (1.11).

O caráter Hamiltoniano das equações é preservado. Na verdade, o sistema $\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T$ ainda é Hamiltoniano mesmo se E depender de t , desde que $\mathbb{U} \times \mathbb{I}$ seja um conjunto adequado, como mostraremos.

Veremos agora o caso no qual a transformação simplética (1.10) depende de t , queremos algo semelhante ao descrito no Teorema 1.17. Seja o conjunto

$$\mathbb{U}_t = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} : (\zeta, t) \in \mathbb{U} \times \mathbb{I}\} \quad (1.13)$$

sendo a bola em $\mathbb{R}^{2n}$. Mostraremos que existe uma função suave $R : \mathbb{U} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^1$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \Big|_{z=Z(\zeta, t)} = J \nabla_{\zeta} R(\zeta, t) \quad (1.14)$$

R é denominada *função resto*.

Teorema 1.18. *Suponha que a transformação de coordenada $E(\mathbf{z}, t) = (\zeta, t)$ é simplética e além disso o contra-domínio $\mathbb{U} \times \mathbb{I} = E(U \times I)$ satisfaz a condição (1.13), então ela transforma o sistema Hamiltoniano (1.1) em um novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é definida por*

$$\tilde{H}(\zeta, t) + R(\zeta, t). \quad (1.15)$$

Demonstração. Demonstraremos que a função diferenciável R é o gradiente de uma função diferenciável a valores reais, para isto é suficiente demonstrar que a seguinte função

$$\Gamma(\zeta, t) = J \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \Big|_{z=Z(\zeta, t)} \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t)$$

é simétrica, isto é, $\Gamma = \Gamma^T$. Derivando a expressão $\frac{\partial E^T}{\partial \mathbf{z}} J \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = J$ com respeito a t temos

$$\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}} J \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial E^T}{\partial \mathbf{z}} J \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}} = 0$$

onde segue

$$\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}} J + J \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}} \frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}} = 0 \quad (1.16)$$

Substituindo $z = Z(\zeta, t)$ em (1.16) e lembrando que $\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(Z(\zeta, t), t) = \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\zeta, t)$, então temos que

$$-\Gamma^T + \Gamma = 0$$

como queríamos. □

Teorema 1.19 (Teorema de Floquet-Liapunov). *Seja $Z(t)$ a matriz fundamental da equação (1.5). Existem matrizes $n \times n$ B e $Q(t)$, com B Hamiltoniana constante e $Q(t)$ T -periódica e simplética, tais que*

$$Z(t) = Q(t)e^{tB} \quad (1.17)$$

Demonstração. A matriz $Z(t+T)$ também é uma matriz fundamental da equação (1.5). Portanto, suas colunas são linearmente independentes e, dado que $Z(t+T) = Z(t)Z(T)$, a matriz $Z(T)$ é inversível. Como toda matriz $n \times n$ inversível possui um logaritmo, existe uma matriz B tal que $Z(T) = e^{TB}$. Como $Z(t)$ é Hamiltoniana, a matriz B também é Hamiltoniana.

Agora, considere a matriz $Q(t) = Z(t)e^{-tB}$. Então, temos que $Z(t) = Q(t)e^{tB}$ e $Q(t+T) = Q(t)$. Pelo Corolário 1.13, a matriz $Q(t)$ é simplética para cada t , como desejávamos demonstrar. □

1.3 Estabilidade

Nesta seção serão apresentados alguns resultados clássicos da teoria de estabilidade para equações diferenciais ordinárias em particular para os sistemas Hamiltonianos, uma leitura mais aprofundada pode ser feita em (SOTOMAYOR, 1979), (MEYER; HALL; OFFIN, 2017) e (VIDAL, 2003).

Consideremos o sistema

$$\dot{z} = f(z, t) \quad (1.18)$$

em que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto.

Definição 1.20. *Seja $\phi(t)$ uma órbita de (1.18) definida para $t \geq 0$. Diz-se que $\phi(t)$ é estável (no sentido de Liapunov) se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de (1.18) e $|\psi(0) - \phi(0)| < \delta$, então $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $|\psi(t) - \phi(t)| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$. Se além disso existir $\tilde{\delta}$ tal que $|\psi(0) - \phi(0)| < \tilde{\delta}$ implica $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \phi(t)| = 0$, então diz-se que $\phi(t)$ é assintoticamente estável.*

Corolário 1.21. *Seja z_0 um ponto singular de*

$$\dot{z} = f(z), \quad f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1, \quad \Delta \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto}, \quad (1.19)$$

e suponhamos que $Df(z_0)$ tem todos os autovalores com parte real < 0 . Então existe uma vizinhança U de z_0 e constantes $K > 0$ e $\nu > 0$ tais que para todo $z \in U$ a solução $\phi(t)$ de (1.19) tal que $\phi(0) = z$ está definida em U , para todo $t \geq 0$, e $|\phi(t) - z_0| \leq Ke^{-\nu t}|z - z_0|$, para todo $t \geq 0$. Em particular, z_0 é assintoticamente estável.

No que segue os resultados sobre estabilidade apresentados serão para Sistemas Hamiltonianos. Da observação (1.15) podemos concluir para a solução de equilíbrio $\mathbf{0}$ que:

Teorema 1.22. *1. A solução de equilíbrio $\mathbf{0}$ de (1.5) nunca pode ser assintoticamente estável.*

2. Se existe algum autovalor $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, então a solução de equilíbrio $\mathbf{0}$ de (1.5) é instável.

3. Se todos os autovalores λ de A são imaginários puros e A é diagonalizável então a solução de equilíbrio $\mathbf{0}$ de (1.5) é estável.

4. No caso degenerado, isto é, A possui autovalores nulos temos o seguinte: sejam $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ e o resto dos autovalores são imaginários puros. Então se a matriz A for diagonalizável tem-se que a solução de equilíbrio $\mathbf{0}$ de (1.5) é estável. Caso contrário é instável.

Teorema 1.23. *Dada uma matriz $n \times n$ T -periódica, $A(t)$, existe uma matriz T -periódica $Q(t)$, inversível, tal que a mudança de coordenadas $Z = Q(t)y$ transforma a equação (1.5) na equação*

$$\dot{y} = By, \quad (1.20)$$

com B constante.

Demonstração. Seja $Z(t)$ uma matriz fundamental de (1.5) e seja $Z(t) = Q(t)e^{tB}$ a decomposição de $Z(t)$ dada pelo Teorema de Floquet 1.19. Consideremos a mudança linear de coordenadas $z = Q(t)y$. Então, para uma solução $z(t) = Z(t)v$ de $\dot{z} = A(t)z$, temos $y(t) = Q^{-1}(t)z(t) = Q^{-1}(t)Z(t)v = e^{tB}v$, logo, $y(t)$ é solução de

$$\dot{y} = By \quad (1.21)$$

com B constante. $\square$

Definição 1.24. A matriz $C = e^{TB} = Z(T)$ é chamada matriz de monodromia da equação (1.5). Os autovalores λ de C são chamados de multiplicadores característicos. Cada número complexo μ tal que $\lambda = e^{\mu T}$ é chamado expoente característico.

Do exposto anteriormente temos

Teorema 1.25. Para a solução nula do sistema (1.5), temos que:

- ela nunca pode ser assintoticamente estável.
- é estável se, e somente se, a matriz de monodromia possui todos os seus autovalores com módulo 1 e é diagonalizável.
- é instável se, e somente se, existe algum expoente característico com parte real positiva (isto é, o módulo de algum autovalor é maior que 1).

1.4 O problema de n -corpos

Nesta seção, abordaremos o problema de n -corpos e seu Hamiltoniano associado. Exploraremos casos particulares deste problema, incluindo o problema de dois corpos e o problema de três corpos, bem como o problema restrito de três corpos.

No problema clássico dos n -corpos, sabemos que o Hamiltoniano pode ser obtido a partir das equações de movimento de cada corpo, que são derivadas da segunda lei de Newton e da Lei da Gravitação Universal, ou seja, ao relacionar essas forças, obtemos:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}, \quad (1.22)$$

onde $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ representa o vetor de posições dos n corpos, e $(\cdot)$ denota a derivada em relação ao tempo t . O potencial gravitacional U é dado por

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|},$$

onde G é a constante da gravitação universal, e M é a matriz de massas, dada por

$$M = \begin{pmatrix} m_1 I_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 I_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n I_3 \end{pmatrix},$$

onde I_3 é a matriz identidade 3×3 .

O Hamiltoniano para o sistema descrito em (1.22) é, portanto,

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - U,$$

onde $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ representa o momento linear do corpo i .

1.4.1 O problema de dois corpos

O problema de dois corpos consiste em estudar a dinâmica de dois corpos que se atraem mutuamente por suas forças gravitacionais. Consideremos m_1 e m_2 como os dois corpos no espaço, com vetores posição dados por $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente, onde $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$).

Para o problema de dois corpos a equação que descreve a dinâmica entre os dois corpos é dada por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\ m_1 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \end{aligned} \tag{1.23}$$

em que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor posição, portanto $\dot{\mathbf{r}}$ é o vetor velocidade, e $\ddot{\mathbf{r}}$ é o vetor aceleração da partícula. Somando as expressões em (1.23), obtemos

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_1 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0,$$

integrando, obtemos

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_1 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{A},$$

e integrando novamente encontramos

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_1 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \tag{1.24}$$

em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são vetores constantes que dependem das condições iniciais do problema.

Seja $M = m_1 + m_2$, dividindo (1.24) por M obtemos

$$\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_1 \mathbf{r}_2}{M} = \frac{\mathbf{A}}{M}t + \frac{\mathbf{B}}{M}, \tag{1.25}$$

note que o lado esquerdo de (1.25) descreve o vetor centro de massa entre m_1 e m_2 , logo, segue a proposição

Proposição 1.26. *Seja a equação dada por*

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{A}}{M}t + \frac{\mathbf{B}}{M}, \quad (1.26)$$

então o centro de massa das partículas materiais move-se uniformemente sobre uma reta no espaço.

O sistema formado pelas equações em (1.23) se trata de um sistema mecânico cuja função Hamiltoniana para dado sistema é dada por

$$H = H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}_2\|^2}{2m_2} - \frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}, \quad (1.27)$$

com $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, note que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_1} = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1}, \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_2} = \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}, \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (1.28)$$

De modo a tornar o Hamiltoniano (1.27) mais simples, podemos fazer uma mudança de coordenadas que descreva o movimento de ambas as partículas em relação ao centro de massa dos corpos de massas m_1 e m_2 , com isso poderemos tratá-lo como o problema de Kepler, para isso utilizamos as coordenadas de Jacobi $(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{p}, \mathbf{P})$, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{p} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

As letras maiúsculas correspondem ao centro de massa do sistema, enquanto as letras minúsculas descrevem o movimento relativo ao centro de massa do sistema, de (1.29) segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

e também que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{P} - \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{P} - \mathbf{p}_1, \end{aligned} \quad (1.31)$$

de onde substituindo a primeira expressão de (1.30) na terceira de (1.29), e depois repetindo o processo para a segunda expressão de (1.30) e em seguida repetido o mesmo processo para as expressões em (1.31) para a quarta em (1.29) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R}, \\
\mathbf{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R}, \\
\mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{P}, \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{P}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Nosso objetivo agora é reescrever o Hamiltoniano (1.27) nas novas coordenadas, primeiro reescrevendo $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| &= \left\| -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} \right\| \\
&= \left\| -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \right\| \\
&= \left\| -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \right\| \\
&= \|\mathbf{r}\|,
\end{aligned}$$

agora reescrevendo $\|\mathbf{p}_1\|^2$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_1\|^2 &= \left\| -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{P} \right\|^2 \\
&= \left\langle -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{P}, -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{P} \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\mathbf{P}\|^2,
\end{aligned}$$

e para $\|\mathbf{p}_2\|^2$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_2\|^2 &= \left\| \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{P} \right\|^2 \\
&= \left\langle \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{P}, \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{P} \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\mathbf{P}\|^2,
\end{aligned}$$

por fim, nas novas coordenadas o Hamiltoniano (1.27) é dado por

$$H = H(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2\nu} + \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{2M} - \frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|}, \tag{1.33}$$

em que $\nu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Nas novas coordenadas as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\nu}, \\ \dot{\mathbf{R}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}} = 0,\end{aligned}\tag{1.34}$$

com isso temos que $\mathbf{P}$ é uma integral primeira para o sistema, e tomando como condição inicial $\mathbf{P} = \mathbf{R} = 0$, o problema é reduzido a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}.\tag{1.35}$$

Isso se refere ao problema de força central ou ao problema de Kepler. Na próxima seção trataremos do problema de Kepler com mais detalhes.

1.4.2 O problema de Kepler

Considerando o problema de dois corpos, em que $m_1 \gg m_2$ cuja partícula de massa m_1 , com $m_1 = m$, é fixa, ou seja, está posicionada na origem do sistema, neste caso a equação que descreve o movimento da partícula de massa m_2 , com $m_2 = 1$, é dada por

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3},\tag{1.36}$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ é o vetor posição da outra partícula e μ é a constante Gm , em que G é a constante da gravitação universal. Reduzindo (1.36) a um sistema de equações tomando $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}\end{aligned}\tag{1.37}$$

em que o Hamiltoniano para esse sistema é dado por

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}.\tag{1.38}$$

Definição 1.27. Uma função diferenciável $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $M \subset (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3$, é uma integral primeira para o movimento para o sistema (1.36) se esta função é constante ao longo do movimento, isto é, $\frac{dF}{dt}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}) = 0$ para todo t onde a solução $\mathbf{q}(t)$ de (1.36) está definida.

Teorema 1.28. A equação (1.36) admite as seguintes integrais primeiras:

1. $\frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|} = h$, (energia).
2. $\mathbf{C} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, (momento angular).

Demonstração. Derivando (1.38) em relação ao tempo e usando (1.37) temos

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|} \right) \\
 &= \frac{\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}} \\
 &= \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}} \rangle + \frac{\mu \langle \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle}{\|\mathbf{q}\|^3} \\
 &= \left\langle \dot{\mathbf{q}}, -\frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \right\rangle + \frac{\mu \langle \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle}{\|\mathbf{q}\|^3} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Definindo $\mathbf{C} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ e derivando em relação ao tempo

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{C}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \\
 &= \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{p}} \\
 &= \mathbf{p} \times \mathbf{p} - \mathbf{q} \times \frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Apresentaremos um teorema que será importante para o entendimento dos resultados do Teorema 1.30.

Teorema 1.29. *Uma curva plana, não circular, é uma seção cônica se, e somente se, seus pontos P são caracterizados pela seguinte equação envolvendo distâncias*

$$\text{dist}(P, F) = \epsilon \text{dist}(P, L) \quad (1.39)$$

em que ϵ é um número positivo, F é um ponto e L é uma reta, ambos no plano da curva.

Teorema 1.30. *Existe uma integral adicional dada pelo vetor de Laplace e definido pela equação*

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C}. \quad (1.40)$$

Demonstração. Ao derivar em relação ao tempo a expressão $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{(\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \quad (1.41)$$

multiplicando (1.41) por μ obtemos

$$\begin{aligned}\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) &= \frac{\mathbf{C} \times \mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \\ &= -\mathbf{C} \times \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C})\end{aligned}$$

integrando segue o desejado. $\square$

Corolário 1.31. *Do Teorema 1.30 seguem os seguintes resultados:*

1. Se $\mathbf{C} = 0$, o movimento é retilíneo.
2. Se $\mathbf{C} \neq 0$, o movimento ocorre num plano ortogonal a $\mathbf{C}$ que passa pelo centro de atração S e o vetor $\mathbf{e}$ está contido nesse plano.
3. Se $\mathbf{e} = 0$, o movimento é circular e uniforme.
4. Se $\mathbf{e} \neq 0$, o movimento descreve uma cônica com foco em S , eixo $\mathbf{e}$ e excentricidade $\epsilon = \|\mathbf{e}\|$.

Demonstração. Segue do Teorema 1.30 que se $\mathbf{C} = 0$ temos

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{q} = -\|\mathbf{q}\| \mathbf{e}$$

logo o movimento é retilíneo. Se $\mathbf{C} \neq 0$ temos por definição que $\mathbf{C}$ é ortogonal à $\mathbf{q}$, logo $\mathbf{q}$ pertence ao plano determinado por $\mathbf{C}$ e que passa pela origem. Por outro lado, da equação (1.40) temos

$$\begin{aligned}\mu \mathbf{e} &= \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \\ \Rightarrow \langle \mu \mathbf{e}, \mathbf{C} \rangle &= \left\langle \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}, \mathbf{C} \right\rangle = 0\end{aligned}$$

logo temos que o vetor $\mathbf{e}$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{C}$, agora tomando o produto escalar da equação (1.40) pelo vetor $\mathbf{q}$ temos

$$\begin{aligned}\left\langle \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right), \mathbf{q} \right\rangle &= \mu (\langle \mathbf{q}, \mathbf{e} \rangle + \|\mathbf{q}\|) \\ &= \langle \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C}, \mathbf{q} \rangle \\ &= \langle \mathbf{C}, \mathbf{C} \rangle \\ &= \|\mathbf{C}\|^2\end{aligned}$$

se $\mathbf{e} = 0$ temos

$$\|\mathbf{q}\| = \frac{\|\mathbf{C}\|^2}{\mu},$$

portanto o movimento é circular.

Se $\mathbf{e} \neq 0$. Denotemos por (q, θ) as coordenadas polares no plano do movimento com a origem e eixo polar $\mathbf{e}$. Pelo que já vimos anteriormente, temos

$$\mu(\langle \mathbf{q}, \mathbf{e} \rangle + \|\mathbf{q}\|) = \|\mathbf{C}\|^2 \quad (1.42)$$

ou,

$$\mu(\|\mathbf{q}\|\epsilon \cos(\theta) + \|\mathbf{q}\|) = \|\mathbf{C}\|^2 \quad (1.43)$$

ou,

$$\|\mathbf{q}\| = \epsilon \left(\frac{\|\mathbf{C}\|}{\mu\epsilon} - \|\mathbf{q}\| \cos(\theta) \right). \quad (1.44)$$

Pela relação definida no Teorema 1.29, segue-se de (1.44), que a distância de $\mathbf{P}$ ao centro de atração S é proporcional à distância de $\mathbf{P}$ à reta ortogonal ao vetor $\mathbf{e}$ cuja distância a S é igual a $\frac{\|\mathbf{C}\|^2}{\mu\epsilon}$. Portanto, $\mathbf{P}$ descreve uma cônica de excentricidade ϵ eixo $\mathbf{e}$. $\square$

Teorema 1.32. *As constantes h , $\mathbf{C}$ e $\mathbf{e}$ satisfazem a seguinte relação*

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = h\|\mathbf{C}\|^2. \quad (1.45)$$

Consequentemente, a órbita da partícula é elíptica, parabólica ou hiperbólica conforme o valor de h seja positivo, negativo ou nulo.

Demonstração. Note que se a denota o semi-eixo maior da elipse, temos

$$2a = \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} \iff a(1-\epsilon^2) = \frac{\|\mathbf{C}\|}{\mu},$$

logo

$$a = \frac{1}{(1-\epsilon^2)} \frac{\|\mathbf{C}\|}{\mu}, \quad (1.46)$$

tomando o produto escalar da expressão definida em (1.40) por si próprio temos

$$\begin{aligned} \left\langle \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right), \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) \right\rangle &= \mu^2 \left(\|\mathbf{e}\| + 2 \frac{\langle \mathbf{e}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{q}\|} + 1 \right) \\ &= \langle \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C}, \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C} \rangle \\ &= \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{C}\|^2, \end{aligned}$$

agora, tomando o produto escalar de (1.40) por $\mathbf{q}$ temos

$$\left\langle \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right), \mathbf{q} \right\rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{e} \rangle + \|\mathbf{q}\| = \langle \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{C}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{C}\|^2, \quad (1.47)$$

a partir das expressões dadas em (1.38), (1.47) e (1.46) obtemos

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = h\|\mathbf{C}\|^2. \quad (1.48)$$

$\square$

O teorema mostra que o vetor de Laplace não é uma integral independente de h e C . Segue de (1.46) e (1.48) o seguinte teorema e corolário.

Teorema 1.33. *No caso elíptico e no caso hiperbólico, o semi-eixo maior da órbita depende apenas de h e é dado pela expressão $a = \frac{\mu}{2|h|}$.*

Corolário 1.34. 1. *No caso elíptico ($h < 0$), $v^2 = \mu \left(\frac{2}{\|q\|} - \frac{1}{a} \right)$.*

2. *No caso parabólico ($h = 0$), $v^2 = \frac{2\mu}{\|q\|}$.*

3. *No caso hiperbólico ($h > 0$), $v^2 = \mu \left(\frac{2}{\|q\|} + \frac{1}{a} \right)$.*

4. *No caso circular, ($h < 0$ e $e = 0$), $v^2 = \frac{\mu}{a}$.*

Definição 1.35. *A linha dos nodos é a reta de interseção do plano da órbita com o plano referência, se este não coincide com aquele.*

Consideremos o referencial ortonormal $(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\})$, onde $(\mathbf{e}_1)$ é paralelo à linha dos nodos, $(\mathbf{e}_3 = \frac{C}{\|C\|})$ e $(\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)$. Neste sistema, (Figura 1.1) temos

$$\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|(\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2), \quad (1.49)$$

onde ϕ é o ângulo que o vetor posição $\mathbf{r}$ faz com a linha dos nodos. Como

$$\dot{\mathbf{r}} = \|\dot{\mathbf{r}}\|(\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) + \|\mathbf{r}\|\dot{\phi}(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2),$$

obtemos

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \|\mathbf{r}\|^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_3,$$

que é a conservação do momento angular.

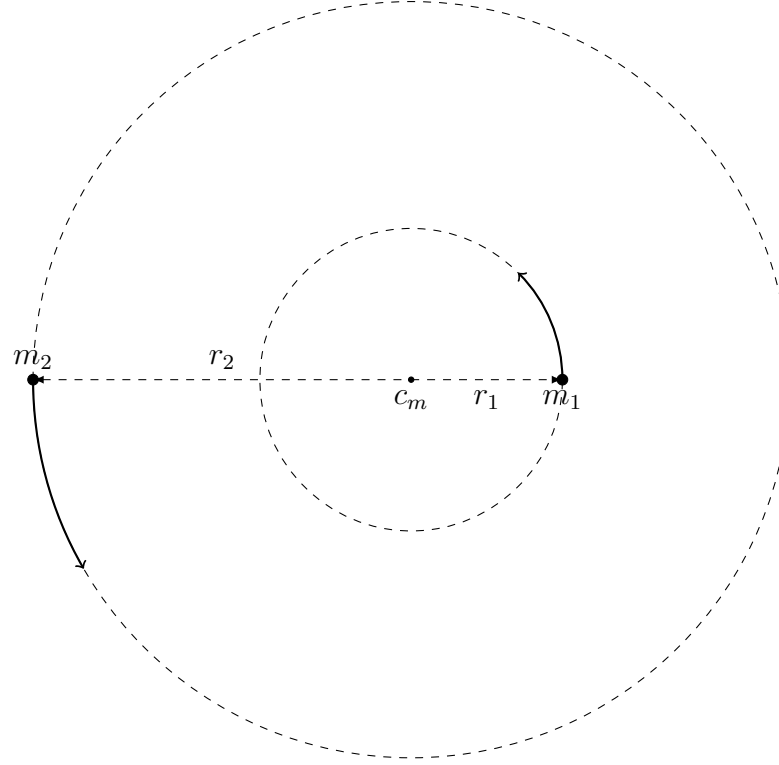
1.4.3 O problema de três corpos

O problema de três corpos consiste em estudar a dinâmica de três corpos atraídos mutuamente entre si por suas forças gravitacionais. Consideremos m_1 , m_2 e m_3 os três corpos no espaço e com vetores posição dados por $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$, respectivamente, com $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$).

Para o problema de três corpos, a equação que descreve a dinâmica entre os três corpos é dada por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{Gm_3m_2}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_3m_2}{r_{23}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Figura 1.1 – Visão perpendicular ao plano da órbita dos corpos de massa m_1 e m_2 .



Fonte: Autor

em que $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ e G a constante da Gravitação Universal.

O potencial Newtoniano para o problema de três corpos é dado por

$$U = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}. \quad (1.51)$$

O sistema definido pelas equações em (1.50) pode ser reescrito como

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} U, i = 1, 2, 3. \quad (1.52)$$

em que $\nabla_{\mathbf{r}_i} U$ é o gradiente do potencial U .

O Hamiltoniano para o sistema de equações em (1.50) é definido por

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (1.53)$$

O centro de massa do sistema é definido por

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{M} \quad (1.54)$$

em que $M = m_1 + m_2 + m_3$. De forma semelhante ao que fizemos no problema de dois corpos podemos concluir que:

Teorema 1.36. *Ao longo de cada solução do sistema definido pelas equações em (1.50) ou (1.52), existem vetores constantes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tais que*

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$$

isto é, o centro de massa desloca-se em linha reta com velocidade constante.

Novamente, como no problema de dois corpos existem duas quantidades que se conservam ao longo das soluções, a energia e o momento angular, logo podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.37. *Ao longo de cada solução do sistema definido pelas equações em (1.50) ou (1.52) a energia total e o momento angular permanecem constantes*

$$E = h, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}, \quad (1.56)$$

em que $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$ é o momento angular.

1.4.4 O problema restrito de três corpos

O problema restrito de três corpos é obtido quando a massa de um dos corpos, digamos a de massa m_3 , tende a zero. Assim, o corpo de massa m_3 não influencia a dinâmica dos outros dois corpos, de massas m_1 e m_2 , mas é afetado pela dinâmica destes. Para definir a equação de movimento do corpo de massa m_3 reescrevemos a terceira equação em (1.50), como

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (1.57)$$

e o movimento dos outros corpos é descrito pelo problema de dois corpos. E subtraindo a segunda expressão em (1.50) obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_3)}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + Gm_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) - \frac{1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \right) \quad (1.58)$$

Denotando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, (1.58) é reescrita como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_3)}{r^3}\mathbf{r} + Gm_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) - \frac{1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \right) \quad (1.59)$$

em que $r = \|\mathbf{r}\|$. E portanto quando $m_3 = 0$ obtemos, da equação anterior, o seguinte resultado

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_3)}{r^3}\mathbf{r}, \quad (1.60)$$

que corresponde ao problema de Kepler, que foi resolvido na seção anterior. Então seja r a distância entre eles logo temos

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

em que $p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{c^2}{G(m_1 + m_2)}$, é a excentricidade da cônica definida pelos corpos m_1 e m_2 , e θ é a anomalia verdadeira.

1.4.5 O problema restrito planar dos três corpos

Nesta seção, apresentaremos resultados sobre o problema restrito planar dos três corpos. Esse caso difere do problema restrito descrito na seção anterior, pois, no problema planar, os três corpos permanecem restritos a um plano fixo ao longo de todo o movimento.

Nos resultados apresentados a seguir, μ é o parâmetro de massa, a distância entre os dois corpos é dada em um referencial tal que esta é unitária.

Sejam dois corpos, chamados primários, tendo massa $\mu > 0$ (corpo 1) e $1 - \mu > 0$ (corpo 2) e movimento assim como descrito na seção passada. Seja $\mathbf{q}$ a coordenada do terceiro corpo de massa infinitesimal e $\mathbf{p}$ seu momento conjugado. As coordenadas rotatórias dos dois corpos primários são escolhidas tais que a posição do corpo 1 é dada por $(1 - \mu, 0)$ e do corpo 2 é dada por $(-\mu, 0)$.

O Hamiltoniano para a dinâmica deste movimento é dado por

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \mathbf{q}^T J \mathbf{p} - V \quad (1.61)$$

em que $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ com $\mathbf{q} = (x, y)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, o Hamiltoniano anterior pode ser reescrito como

$$H = \frac{p_x^2 - p_y^2}{2} + yp_x - xp_y - V$$

com V dado por

$$V = \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}$$

em que ρ_i $i = 1, 2$ descreve a distância entre os corpos primários e o corpo de massa infinitesimal em que são dados por

$$\rho_1 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2} \quad \rho_2 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}.$$

Para o Hamiltoniano dado por (1.61) as equações de movimento são dadas por

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p} + J \mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = J \mathbf{p} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.62)$$

Observação 1.38. *Existem dois tipos de soluções de equilíbrio para o problema restrito circular dos três corpos, em que estas são obtidas igualando para os pontos críticos de (1.62), ou seja, igualando a zero. O primeiro tipo é a solução colinear, que se encontra na reta que passa pelos corpos 1 e 2. Essas soluções são denominadas L_1 , L_2 e L_3 . O segundo tipo é a solução triangular, que se encontra fora dessa reta e é representada pelos pontos L_4 e L_5 , sendo que L_4 é simetricamente oposto a L_5 . Os pontos L_1 , L_2 e L_3 são chamados de pontos de libração colineares, enquanto L_4 e L_5 são chamados de pontos de libração triangulares. (Ver (MEYER; HALL; OFFIN, 2017)).*

Para o caso planar problema restrito de três corpos temos:

Teorema 1.39. *As soluções de equilíbrio colinear no problema restrito planar circular dos três corpos são linearmente instáveis.*

Demonstração. Ver (VIDAL, 2003). □

Teorema 1.40. *Nos pontos de equilíbrio triangulares temos:*

- *para os valores de μ no intervalo $0 < \mu < \mu_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}\right)$ os equilíbrios L_4 e L_5 são linearmente estáveis.*
- *Para $\mu = \mu_1$ os equilíbrios L_4 e L_5 são linearmente instáveis.*
- *Para $\mu_1 < \mu < \frac{1}{2}$, os equilíbrios L_4 e L_5 são linearmente instáveis.*

Demonstração. Ver (VIDAL, 2003). □

2 O problema restrito circular planar dos três corpos carregados

Neste capítulo, serão discutidos o problema de dois corpos carregados e o problema restrito de três corpos carregados, no seu caso planar, conforme abordado em (BENGOCHEA; VIDAL, 2015). Na Seção 2.1, serão apresentadas as soluções para o problema de dois corpos carregados, considerando os possíveis valores de (2.4). Em seguida, na Seção 2.2, será introduzido o problema geral dos três corpos carregados, a partir do qual será derivado o problema restrito e seu respectivo Hamiltoniano. Na Seção 2.3, serão obtidas as soluções de equilíbrio triangular e colinear para o caso restrito dos três corpos carregados. Finalmente, na Seção 2.4, será analisada a estabilidade das soluções de equilíbrio obtidas na seção anterior.

Como discutido no capítulo anterior, o problema clássico dos n -corpos considera que a única força atuando no sistema é a força gravitacional. No problema de n -corpos carregados, levamos em conta que os corpos possuem carga elétrica e, além da força gravitacional, também consideramos a força elétrica, que obedece à Lei de Coulomb. Diferentemente das massas dos corpos que são sempre positivas, as cargas podem assumir valores positivos e negativos.

Descreveremos, agora, o caso geral do problema, ou seja, o problema de n -corpos carregados. Lembrando que, de acordo com a Lei de Coulomb, a força elétrica é obtida por:

$$\mathbf{F}_E = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}},$$

em que $V = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{kq_i q_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}$ é o potencial elétrico. Portanto, para corpos com massa e carga, as equações de movimento são escritas na forma:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}},$$

denotando $W = U - V$, obtemos:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}},$$

e portanto o Hamiltoniano para o problema de n -corpos carregados é dado por:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - W.$$

2.1 O problema de dois corpos carregados

No capítulo anterior, foi visto o problema clássico dos dois corpos, em que foi somente considerado que os corpos possuíam massa. Veremos a seguir um caso especial deste problema em que, além de ser considerado a massa dos corpos, consideraremos também que estes possuam cargas em sua estrutura. Neste caso, além da força de atração gravitacional entre os corpos, haverá também atração (ou repulsão) elétrica, assim como descrito na Lei de Coulomb.

Então, considerando dois corpos de massas m_1 , m_2 e cargas q_1 e q_2 , respectivamente. O Hamiltoniano, assim como descrito em (BENGOCHEA; VIDAL, 2015), associado ao corpos de massa m_1 e m_2 , com interação gravitacional e coulombiana é definido por

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}_2\|^2}{2m_2} + \frac{kq_1q_2 - Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \quad (2.1)$$

onde $k > 0$ é a constante de Coulomb, $G > 0$ é a constante da gravitação universal, e $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, são a posição e momento dos corpos com o mesmo índice, respectivamente.

Dado o Hamiltoniano (2.1), podemos obter as equações de movimento a partir deste, ou seja, $\dot{\mathbf{r}}_i = H_{\mathbf{p}_i}$, $\dot{\mathbf{p}}_i = -H_{\mathbf{r}_i}$, portanto, tais equações, que correspondem ao sistema de equações de segunda ordem, são dadas por:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -(Gm_1m_2 - kq_1q_2) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \quad (2.2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -(Gm_1m_2 - kq_1q_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \quad (2.3)$$

onde “ $\ddot{}$ ” denotam derivadas com respeito ao tempo t .

Podemos classificar as soluções para esses sistema de equações em três tipos, definindo $C = Gm_1m_2 - kq_1q_2$, os três casos são identificados quando

$$C > 0, C = 0, C < 0. \quad (2.4)$$

O primeiro equivale ao problema de Kepler cuja dinâmica está resolvida na Seção 1.4.2. Essa condição é satisfeita quando as cargas tiverem sinais diferentes e, no caso de cargas iguais, quando $kq_1q_2 < Gm_1m_2$.

No segundo caso em que $C = 0$ o Hamiltoniano (2.1) se torna

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}_2\|^2}{2m_2} \quad (2.5)$$

que fornece as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\mathbf{p}_1}{m_1}, & \dot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}, \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= 0, & \dot{\mathbf{p}}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

logo temos que $\mathbf{p}_i = k_i$, em que $\mathbf{k}_i$, constante, não depende do tempo e portanto $\mathbf{r}_i = \frac{k_i}{m_i}t$, então concluímos que correspondem a duas partículas livres.

Para o terceiro caso, ou seja, $C < 0$, em que este é o caso central a ser trabalhado do problema de dois corpos carregados, podemos resolver de maneira similar ao problema de Kepler, para isso fazemos seguinte transformação simplética de coordenadas, que alteram os vetores $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ para

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{p} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Os dois primeiros vetores correspondem ao centro de massa do sistema, enquanto os dois últimos descrevem o movimento relativo ao centro de massa do sistema, da primeira de (2.7) segue que

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r},\tag{2.8}$$

e da última de (2.7) segue que

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{P} - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 = \mathbf{P} - \mathbf{p}_1,\tag{2.9}$$

de onde substituindo a primeira expressão de (2.8) na terceira de (2.7) e repetindo o processo para a segunda, e depois fazendo o mesmo processo para as expressões em (2.9) para a segunda expressão de (2.7) obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} & \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{P} \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} & \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{P}\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é reescrever o Hamiltoniano (2.1) nas novas coordenadas, primeiro reescrevendo $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| &= \left\| -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R} \right\| \\ &= \left\| -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \right\| \\ &= \left\| -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \right\| \\ &= \|\mathbf{r}\|,\end{aligned}$$

agora reescrevendo $\|\mathbf{p}_1\|^2$ temos

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = \left\| -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{P} \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{P}, -\mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{P} \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\mathbf{P}\|^2
\end{aligned}$$

e para $\|\mathbf{p}_2\|^2$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_2\|^2 &= \left\| \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{P} \right\|^2 \\
&= \left\langle \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{P}, \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{P} \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\mathbf{P}\|^2
\end{aligned}$$

Substituindo os termos para $\|\mathbf{p}_1\|^2$, $\|\mathbf{p}_2\|^2$ e $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ em (2.1) temos

$$\begin{aligned}
H^*(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) &= \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\mathbf{P}\|^2}{2m_1} + \\
&+ \frac{\|\mathbf{p}\|^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\mathbf{P}\|^2}{2m_2} + \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|} \\
&= \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m_2} - \frac{2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle + \frac{2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{P} \rangle \\
&+ \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} \|\mathbf{P}\|^2 + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} \|\mathbf{P}\|^2 + \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|} \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} \|\mathbf{p}\|^2 + \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|}
\end{aligned}$$

logo temos que

$$H^*(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2\mu} + \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{2M} + \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|}, \quad (2.10)$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ é a massa reduzida, e $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema, do Hamiltoniano (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu}, & \dot{\mathbf{R}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \\
\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{C}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}, & \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}} = 0,
\end{aligned}$$

logo temos que o sistema é separável, logo o Hamiltoniano também o é.

Para o movimento relativo ao centro de massa, ou seja, considerando somente os vetores relativos ao centro de massa $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$, temos

$$H_{rel}^*(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2\mu} + \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|}. \quad (2.11)$$

A projeção do conjunto invariante $\Sigma_{h_{rel}^*} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}^n \mid H_{rel}^*(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = h_{rel}^*\}$, em que S é o conjunto das singularidades, sobre o espaço de configurações define a chamada *região de Hill*, que corresponde aos pontos $\mathbf{r}$ que satisfazem a condição $H_{rel}^*(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \leq h_{rel}^*$. Se $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ for uma solução do sistema Hamiltoniano associado a H_{rel}^* em $\Sigma_{h_{rel}^*}$, então a trajetória $\mathbf{r}(t)$ deve permanecer dentro da região de Hill correspondente ao longo do tempo.

A região de Hill para (2.11), ou seja, a região no espaço que $h_{rel}^* - \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|} \geq 0$, consiste em todos os pontos $\mathbf{r}$ no espaço de configuração tais que

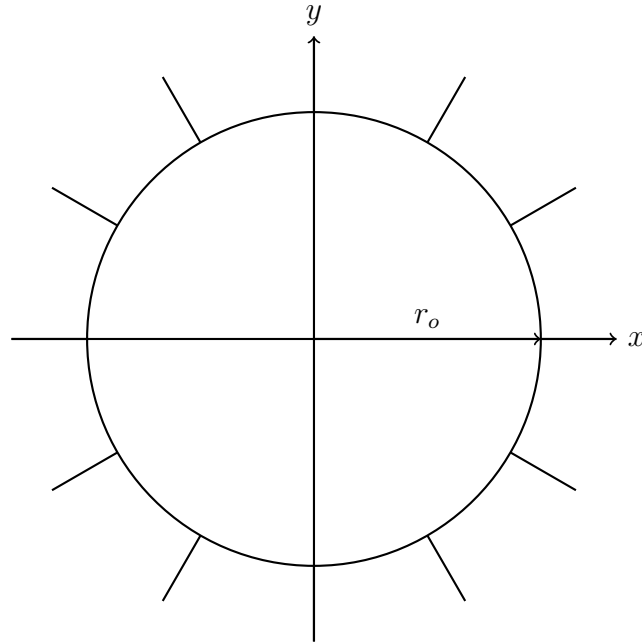
$$h_{rel}^* \geq \frac{|C|}{\|\mathbf{r}\|},$$

onde $h_{rel}^* > 0$ é a constante de movimento associada a (2.11). Por isso, os pontos que definem essa região (Figura 2.1) devem satisfazer

$$\|\mathbf{r}\| \geq r_0,$$

com $r_0 = \frac{|C|}{h_{rel}^*}$.

Figura 2.1 – Região de Hill



Fonte: Autor

Agora introduzimos coordenadas polares usando a função geradora $S_2(p_x, p_y, \rho, \theta) = p_x \rho \cos(\theta) + p_y \rho \sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial S_2}{\partial p_x} = \rho \cos(\theta) & p_r &= \frac{\partial S_2}{\partial \rho} = p_x \cos(\theta) + p_y \sin(\theta) \\ y &= \frac{\partial S_2}{\partial p_y} = \rho \sin(\theta) & p_\theta &= \frac{\partial S_2}{\partial \theta} = -p_x \rho \sin(\theta) + p_y \rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

note que

$$\begin{aligned}
x^2 &= \rho^2 \cos^2(\theta) \\
y^2 &= \rho^2 \sin^2(\theta) \\
p_r^2 &= p_x^2 \cos^2(\theta) + p_x p_y \cos(\theta) \sin(\theta) + p_y^2 \sin^2(\theta) \\
\frac{p_\theta^2}{\rho^2} &= p_x^2 \sin^2(\theta) - p_x p_y \sin(\theta) \cos(\theta) + p_y^2 \cos^2(\theta)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

somando as duas últimas expressões de (2.12) obtemos

$$p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} = p_x^2 + p_y^2 \tag{2.13}$$

com essas transformações obtemos o novo Hamiltoniano

$$K(\rho, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} \right) + \frac{|C|}{\rho} \tag{2.14}$$

que fornece as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{\partial K}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, & \dot{p}_r &= -\frac{\partial K}{\partial \rho} = \frac{p_\theta^2}{\mu \rho^3} + \frac{|C|}{\rho^2}, \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial K}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu \rho^2}, & \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Denominando p_θ como momento canônico, temos do sistema de equações descrito em (2.15) que p_θ é constante, ou seja, o momento angular é conservado. Tomando $p_\theta = l$ e considerando a energia reduzida k^* , obtemos

$$k^* = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{l^2}{2\mu \rho^2} + \frac{|C|}{\rho}, \tag{2.16}$$

onde $\frac{l^2}{2\mu \rho^2} + \frac{|C|}{\rho}$ é definido como um potencial efetivo $V_{eff}(\rho)$. De (2.16) obtemos

$$\frac{p_r^2}{2\mu} = k^* - \left(\frac{l^2}{2\mu \rho^2} + \frac{|C|}{\rho} \right) \Rightarrow p_r = \pm \sqrt{2\mu \left(k^* - \left(\frac{l^2}{2\mu \rho^2} + \frac{|C|}{\rho} \right) \right)}.$$

Quando ρ toma o valor $\rho_0 = \frac{|C|}{2k^*} (1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2 k^*}{C^2 \mu}})$ o momento canônico p_r é zero. Então, como k^* cresce ρ_* tende para zero, e se $\rho \rightarrow \infty$ então $p_r \rightarrow \pm \sqrt{2\mu k^*}$ (Figura 2.2).

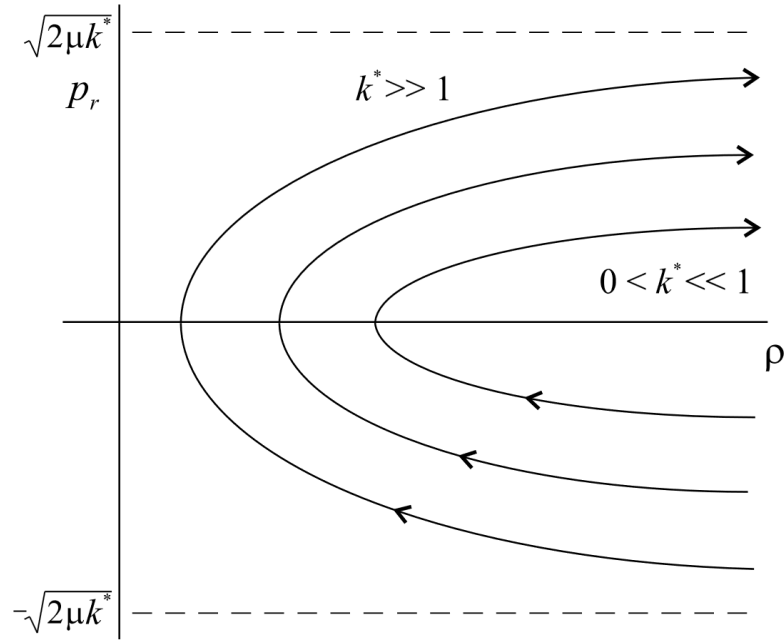
A fim de obter a solução para as equações diferenciais ordinárias obtidas a partir do hamiltoniano (2.16) tomemos, a seguinte mudança de variáveis $x = \rho^{-1}$, e usando ambas as constantes de movimento k^* e l , temos

$$x = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}}$$

da expressão para $\dot{\theta}$ temos,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu} \frac{1}{\rho^2} = -\frac{l}{\mu} \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}} = -\frac{l}{\mu} \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{p_r}{\mu}} = -\frac{l}{p_r} \frac{dx}{dt},$$

Figura 2.2 – Retrato de fase do problema de duas cargas, com $k^* > 0$, $C < 0$.



Fonte: (BENGOCHEA; VIDAL, 2015)

do Hamiltoniano (2.16) obtemos a expressão para p_r que é dada por

$$p_r = \sqrt{\frac{2\mu k^*}{l^2} - \frac{2\mu|C|u}{l^2} - x^2},$$

logo temos

$$d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{\frac{2\mu k^*}{l^2} - \frac{2\mu|C|x}{l^2} - x^2}}, \quad (2.17)$$

podemos escrever (2.17) como

$$\begin{aligned} d\theta &= -\frac{dx}{\sqrt{\frac{2\mu k^*}{l^2} + \frac{\mu^2|C|^2}{l^4} - \left(x + \frac{\mu|C|}{l^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{dy}{\sqrt{a - y^2}} \end{aligned}$$

em que $y = x + \frac{\mu|C|}{l^2}$ e $a = \frac{2\mu k^*}{l^2} + \frac{\mu^2|C|^2}{l^4}$, isolando a obtemos

$$d\theta = -\frac{dy}{\sqrt{a \left(1 - \left(\frac{y}{\sqrt{a}}\right)^2\right)}}$$

fazendo $z = \frac{y}{\sqrt{a}}$, integrando e retornando a variável x obtemos

$$\theta - \theta' = -\arccos \left(\frac{\frac{2\mu|C|}{l^2} + 2x}{\sqrt{\frac{4\mu^2 C^2}{l^4} + \frac{8\mu k^*}{l^2}}} \right) \quad (2.18)$$

onde θ' é a constante de integração. Da expressão (2.18) obtemos

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta - \theta') &= \frac{\frac{2\mu|C|}{l^2} + 2x}{\sqrt{\frac{4\mu^2 C^2}{l^4} + \frac{8\mu k^*}{l^2}}} \\
 \Leftrightarrow \frac{2\mu|C|}{l^2} + 2x &= \cos(\theta - \theta') \sqrt{\frac{4\mu^2 C^2}{l^4} + \frac{8\mu k^*}{l^2}} \\
 \Leftrightarrow 2x &= \cos(\theta - \theta') \sqrt{\frac{4\mu^2 C^2}{l^4} + \frac{8\mu k^*}{l^2}} - \frac{2\mu|C|}{l^2} \\
 \Leftrightarrow x &= \cos(\theta - \theta') \sqrt{\frac{\mu^2 C^2}{l^4} + \frac{2\mu k^*}{l^2}} - \frac{\mu|C|}{l^2}
 \end{aligned}$$

Portanto, ρ e θ são relacionada através da expressão

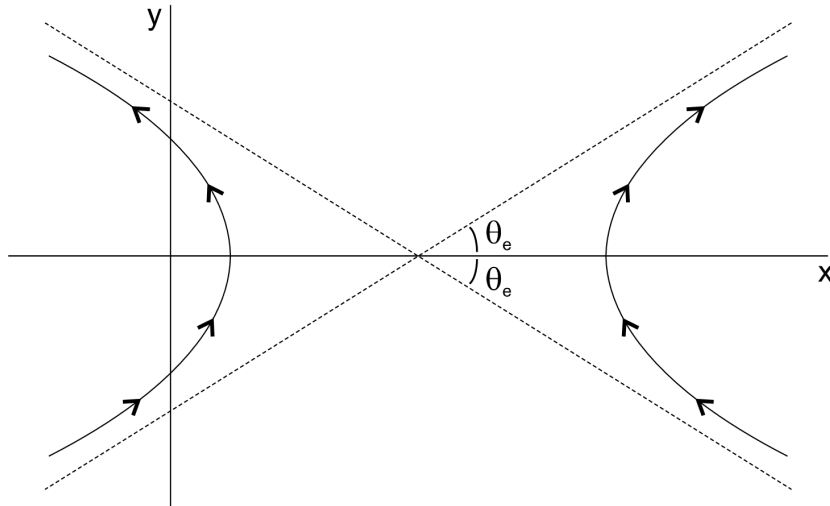
$$\frac{1}{\rho} = c[-1 + e \cos(\theta - \theta')], \quad (2.19)$$

onde

$$c = \frac{\mu|C|}{l^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2l^2 k^*}{\mu C^2}}$$

Notemos que pelo Teorema 1.29 a equação (2.19) define uma hipérbole de excentricidade e , cujo foco está localizado na origem, escolhendo $\theta' = 0$. Como $e > 1$, temos que $1 > \frac{1}{e} = \cos(\theta_e) > 0$, para algum $\theta_e \in (0, \frac{\pi}{2})$. Assim, as assíntotas da hipérbole estão associadas aos ângulos $\theta_e, 2\pi - \theta_e$ (Figura 2.3).

Figura 2.3 – Comportamento das soluções do problema de duas cargas com $k^* > 0, C < 0$.



Fonte: (BENGOCHEA; VIDAL, 2015)

2.2 O problema restrito de três corpos carregados

Será apresentado nesta seção o problema restrito de três corpos carregados. Assim como visto no capítulo anterior, este consiste em fazer a massa de um dos corpos tender a zero. Tomemos como o corpo de massa m_1 como o primeiro corpo e assim sucessivamente.

O Hamiltoniano correspondente ao problema de três corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 e de carga q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente, que interagem entre si sob atração da força gravitacional, descrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton, e atração (ou repulsão) da força elétrica, descrita pela Lei de Coulomb, é dado por

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{\lambda_{ij}}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}, \quad (2.20)$$

onde

$$\lambda_{ij} = Gm_i m_j - kq_i q_j \quad (2.21)$$

Assim como antes, k é a constante de Coulomb, G é a constante da gravitação universal, e $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ são as posições e o momento dos corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente.

Do Hamiltoniano (2.20) segue que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\lambda_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{\lambda_{13}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{m_1 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|^3}, \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\lambda_{21}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_2 \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} - \frac{\lambda_{23}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{m_2 \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^3}, \\ \dot{\mathbf{p}}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_3} = -\frac{\lambda_{13}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{m_3 \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} - \frac{\lambda_{23}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{m_3 \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3}. \end{aligned}$$

ou equivalente

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{\lambda_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{\lambda_{13}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{m_1 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{\lambda_{21}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_2 \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} - \frac{\lambda_{23}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{m_2 \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -\frac{\lambda_{13}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{m_3 \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} - \frac{\lambda_{23}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{m_3 \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Definindo os parâmetros α_i e C_{ij} através de

$$q_i = \alpha_i m_i, \quad C_{ij} = G - k\alpha_i \alpha_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

com a restrição $\alpha_3 \neq 0$ de modo a garantir a existência de carga no terceiro corpo.

Fazendo $m_3 \rightarrow 0$, logo temos que $q_3 \rightarrow 0$, então $\lambda_{13} \rightarrow 0$ e $\lambda_{23} \rightarrow 0$, portanto, por (2.22), as equações que descrevem a dinâmica dos dois primeiros corpos se tornam

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{C_{12}m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{C_{12}m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3},\end{aligned}\tag{2.23}$$

e portanto, a dinâmica entre estes é descrita pelo problema de dois corpos, assim como visto no capítulo anterior. Para o terceiro corpo sua equação de movimento é descrita por

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{C_{13}m_1(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^3} - \frac{C_{23}m_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3}.\tag{2.24}$$

em que seu movimento depende da dinâmica dos outros corpos e dos parâmetros $C_{13} = G - k\alpha_1\alpha_3$ e $C_{23} = G - k\alpha_2\alpha_3$.

Dos resultados obtidos na Seção 2.1 para a dinâmica dos dois corpos carregados, é necessário que $C_{12} = G - k\alpha_1\alpha_2 > 0$. Considerando uma solução circular para os corpos de massa m_1 e m_2 , a trajetória do corpo de massa m_1 é descrita por $\mathbf{r}_1(t) = c_1(-\cos\omega t, -\sin\omega t)^T$, enquanto a trajetória do corpo de massa m_2 é dada por $\mathbf{r}_2(t) = c_2(\cos\omega t, \sin\omega t)^T$. Aqui, c_1 e c_2 são constantes positivas que satisfazem a condição $m_1c_1 = m_2c_2$, a qual garante que a origem do sistema esteja no centro de massa dos corpos de massas m_1 e m_2 . Considerando um sistema de rotação com frequência ω , as posições dos corpos, em um referencial inercial, estão relacionadas por meio da matriz de rotação definida por

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},\tag{2.25}$$

através de

$$\mathbf{r}_1 = R(t)\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2 = R(t)\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_3 = R(t)\mathbf{r}.\tag{2.26}$$

Note que

$$R^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

logo

$$\mathbf{s}_1 = R^{-1}(t)\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_2 = R^{-1}(t)\mathbf{r}_2.\tag{2.27}$$

portanto temos que $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ estão no eixo horizontal, ou seja, $\mathbf{s}_1 = c_1(-1, 0)^T$, $\mathbf{s}_2 = c_2(1, 0)^T$. Das expressões em (2.26) temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\| &= \|R(t)(\mathbf{r} - \mathbf{s}_1)\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\| \\ \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\| &= \|R(t)(\mathbf{r} - \mathbf{s}_2)\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\| \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 &= R(t)(\mathbf{r} - \mathbf{s}_1) \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 &= R(t)(\mathbf{r} - \mathbf{s}_2)\end{aligned}$$

e para as derivadas de $\mathbf{r}_3$ temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_3 &= -\omega R(t)J\mathbf{r} + R(t)\dot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -\omega^2 R(t)J\mathbf{r} - 2\omega R(t)J\dot{\mathbf{r}} + R(t)\ddot{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

logo a equação que descreve o movimento do terceiro corpo no referencial sinódico é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \omega^2 \mathbf{r} + 2\omega J\dot{\mathbf{r}} - \frac{C_{13}m_1(\mathbf{r} - \mathbf{s}_1)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|^3} - \frac{C_{23}m_2(\mathbf{r} - \mathbf{s}_2)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|^3} \quad (2.28)$$

Fazendo a substituição $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ na equação diferencial de segunda ordem (2.28), esta pode ser reescrita como um sistema de equações diferenciais vetoriais de primeira ordem, isto é:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= 2\omega J\mathbf{v} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}},\end{aligned} \quad (2.29)$$

onde a função Ω é dada por

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega^2 \mathbf{r}^2 + \frac{C_{13}m_1}{\rho_1} + \frac{C_{23}m_2}{\rho_2} \quad (2.30)$$

com $\rho_1 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|$ e $\rho_2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|$.

Introduzindo os parâmetros, que estão associados à massa,

$$\mu_1 = Gm_1, \mu_2 = Gm_2, \tilde{\alpha}_j = \alpha_j \sqrt{\frac{k}{G}}, j = 1, 2, 3, \quad (2.31)$$

e também os parâmetros, que estão associados à carga,

$$\delta = \text{sign}(\tilde{\alpha}_3), \beta_j = 1 - \tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_3, j = 1, 2. \quad (2.32)$$

Consideremos a frequência ω e a distância entre os corpos de massas m_1 e m_2 como sendo unitárias, e as unidades de carga e massa tais que

$$|\tilde{\alpha}_3| = 1, \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

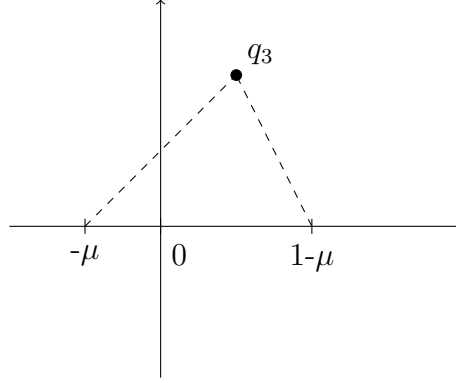
De acordo com a escolha das unidades de massa e com a simetria do problema, é suficiente considerar apenas um parâmetro de massa no intervalo $(0, 1/2]$. Para isso, utilizamos o parâmetro μ , onde $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, definindo $\mu_2 = \mu$ e $\mu_1 = 1 - \mu$. A partir destas escolhas, obtemos que

$$\begin{aligned}C_{13}m_1 &= (1 - \mu)(1 - \tilde{\alpha}_1 \delta) = (1 - \mu)\beta_1, \\ C_{23}m_2 &= \mu(1 - \tilde{\alpha}_2 \delta) = \mu\beta_2.\end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando a relação do centro de massa $(1 - \mu)c_1 = \mu c_2$, a relação da distância $c_1 + c_2 = 1$, e as relações para as unidades de massa $Gm_1 = 1 - \mu$, $Gm_2 = \mu$, obtém-se que

$$(1 - \mu)c_1 = \mu c_2 = \mu(1 - c_1) \Rightarrow c_1 = \mu$$

Figura 2.4 – O problema restrito circular dos três corpos carregados em um referencial rotativo com unidades convenientes.



Fonte: Autor

$$\mu c_2 = (1 - \mu)c_1 = (1 - \mu)(1 - c_2) = 1 - c_2 - \mu + \mu c_2 \Rightarrow c_2 = 1 - \mu$$

e portanto $\mathbf{s}_1 = (-\mu, 0)^T$ e $\mathbf{s}_2 = (1 - \mu, 0)^T$ (Figura 2.4).

Para as novas unidades, a condição $C_{12} > 0$ fornece

$$C_{12} = G - k\alpha_1\alpha_2 > 0 \Rightarrow G - k\frac{G}{k}\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 > 0 \Rightarrow 1 - \tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 > 0,$$

ou equivalente $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 < 1$, e usando esta expressão junto com o segundo item de (2.32) obtemos

$$(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 1. \quad (2.34)$$

A condição obtida em (2.34) define a região admissível para os valores de β_1 e β_2 . Assim, todos os resultados apresentados irão satisfazer essa desigualdade. Considerando a igualdade em (2.34) e expressando β_2 em função de β_1 , obtemos:

$$\beta_2 = \frac{1}{\beta_1 - 1} + 1.$$

Essa expressão nos permite delimitar a região permitida para os valores de β_1 e β_2 , que estão entre o gráfico da função, conforme ilustrado na Figura 2.5.

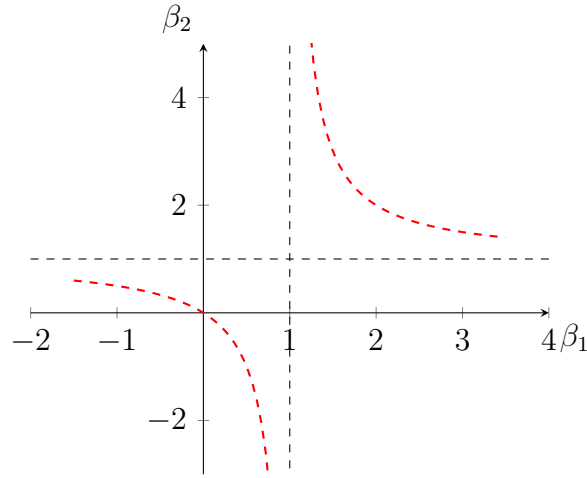
A partir da expressão para β_i , que é dada por

$$\beta_i = 1 - \frac{k}{G}\alpha_i\alpha_3,$$

ou

$$\beta_i = 1 - \frac{k}{G} \frac{q_i}{m_i} \frac{q_3}{m_3},$$

podemos determinar a relação entre as forças que os corpos de massa m_1 e m_2 exercem sobre a terceira partícula, com base nos valores de β_i . Assim, obtemos:

Figura 2.5 – Região permitida para os valores de β_1 e β_2 

Fonte: Autor

- $\beta_i < 0 \Rightarrow Gm_i m_3 < kq_i q_3$. A força de Coulomb é repulsiva e predomina sobre o gravitacional.
- $\beta_i = 0 \Rightarrow Gm_i m_3 = kq_i q_3$. As forças gravitacional e de Coulomb têm valores iguais magnitude, sendo a segunda repulsiva.
- $0 < \beta_i < 1 \Rightarrow 0 < kq_1 q_3 < Gm_i m_3$. A força de Coulomb é repulsiva e a gravitacional predomina a força.
- $\beta_i = 1 \Rightarrow kq_i q_3 = 0$. A força de Coulomb é nula.
- $1 < \beta_i \Rightarrow Gm_i m_3 < -kq_i q_3$. A força de Coulomb é atrativa.

Denotando o vetor $\mathbf{r}$ por $(x, y)^T$, tomando $\omega = 1$ e utilizando (2.33), temos que (2.28) é reescrita como

$$(\ddot{x}, \ddot{y})^T = (x, y)^T + 2(y, -x) - \frac{\beta_1(1 - \mu)(x + \mu, y)^T}{\|(x + \mu, y)\|^3} - \frac{\beta_2\mu(x + \mu - 1, y)^T}{\|(x + \mu - 1, y)\|^3} \quad (2.35)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde

$$V = \frac{\beta_1(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{\beta_2\mu}{\rho_2} \quad (2.37)$$

com

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Considerando as coordenadas

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} - y, \\ p_y &= \dot{y} + x, \end{aligned}$$

nós obtemos que o sistema formado pelas equações em (2.36) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} = y + p_x &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{p}_x &= \frac{\partial V}{\partial x} + p_y = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} = -x + p_y &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= \frac{\partial V}{\partial y} - p_x = -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

cuja função hamiltoniana é

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (yp_x - xp_y) - V. \quad (2.40)$$

A função Hamiltoniana (2.40), a função potencial (2.37) e a restrição (2.34) definem o problema restrito de três corpos carregados em um plano. A restrição (2.34) garante que as soluções de equilíbrio permanecem confinadas em uma região específica do espaço de configuração.

2.3 Soluções de equilíbrio

As soluções de equilíbrio do problema restrito de três corpos carregados em um plano são dadas quando $\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$, ou seja, são pontos críticos do Hamiltoniano (2.40), logo

$$\begin{aligned} \dot{x} = y + p_x &= 0, & \dot{y} = -x + p_y &= 0, \\ \dot{p}_x &= \frac{\partial V}{\partial x} + p_y = 0, & \dot{p}_y &= \frac{\partial V}{\partial y} - p_x = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

destas expressões obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} + x = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial y} + y = 0. \quad (2.42)$$

De (2.37) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3}(x+\mu) - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3}(x+\mu-1) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3}y - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3}y \end{aligned} \quad (2.43)$$

logo de (2.42) junto com (2.43), obtemos

$$\begin{aligned} x \left(1 - \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} \right) - \mu(1-\mu) \left(\frac{\beta_1}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2}{\rho_2^3} \right) &= 0 \\ y \left(1 - \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Podemos separar as soluções em dois tipos, uma não-colinear ou triangular, ou seja, $y \neq 0$, e outra colinear com $y = 0$.

2.3.1 Soluções de equilíbrio triangulares

Primeiramente considerando o caso não-colinear ou triangular logo de (2.44) temos necessariamente que

$$1 - \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} = 0 \quad (2.45)$$

logo

$$\frac{\beta_1}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2}{\rho_2^3} = 0. \quad (2.46)$$

Da equação (2.46) temos que $\frac{\beta_1}{\rho_1^3} = \frac{\beta_2}{\rho_2^3}$, como $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$, temos que para (2.45) ter solução β_i , $i = 1, 2$, tem que ser positivo, com isso, substituindo (2.46) em (2.45) obtemos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_1\mu}{\rho_1^3} &= 1 - \frac{\beta_1}{\rho_1^3} + \frac{\beta_1\mu}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} \\ &= 1 - \frac{\beta_1}{\rho_1^3} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\beta_1}{\rho_1^3} = 1 \\ &\Rightarrow \rho_1^3 = \beta_1 \end{aligned}$$

logo obtemos que $\rho_1 = \beta_1^{\frac{1}{3}}$, de modo análogo obtemos que $\rho_2 = \beta_2^{\frac{1}{3}}$. Portanto, temos que os parâmetros têm que satisfazer a desigualdade triangular, ou seja, $\rho_1 + 1 > \rho_2$, $\rho_2 + 1 > \rho_1$ e $\rho_1 + \rho_2 > 1$. Por simplicidade, tomaremos $(\delta_1, \delta_2) = (\beta_1^{\frac{1}{3}}, \beta_2^{\frac{1}{3}})$ e utilizaremos estas sem distinção a partir daqui.

Das expressões de ρ_1 e ρ_2 dadas em (2.38), respectivamente, obtemos

$$\beta_1^{\frac{2}{3}} = (x + \mu)^2 + y^2 = x^2 + 2x\mu + \mu^2 + y^2, \quad (2.47)$$

$$\beta_2^{\frac{2}{3}} = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 = x^2 + 2x\mu - 2x - 2\mu + 1 + \mu^2 + y^2 \quad (2.48)$$

subtraindo (2.48) de (2.47) obtemos

$$x_L = \frac{1}{2}(\beta_1^{\frac{2}{3}} - \beta_2^{\frac{2}{3}} + 1) - \mu \quad (2.49)$$

agora somando as expressões (2.48), (2.47) e utilizando o resultado encontrado para x_L obtemos

$$y_L = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2(\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}}) - (\beta_1^{\frac{2}{3}} - \beta_2^{\frac{2}{3}})^2 - 1}. \quad (2.50)$$

Reescrevendo y_L como

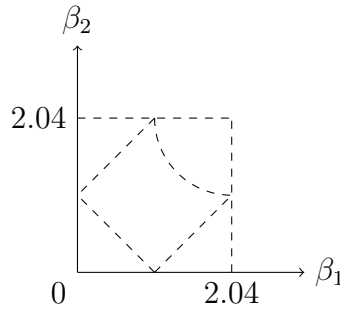
$$y_L = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2) - (\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 - 1},$$

e igualando o termo dentro da raiz a zero, obtemos as soluções a seguir, que delimitam a região admissível, interior da região de contorno tracejado da Figura 2.12, para os valores

de δ_1 e δ_2 correspondentes às soluções de equilíbrio triangular, dadas por

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \delta_1 + 1, & \delta_2 &= \delta_1 - 1, \\ \delta_2 &= 1 - \delta_1, & \delta_2^3 &= \frac{1}{\delta_1^3} + 1.\end{aligned}$$

Figura 2.6 – Região permitida, no espaço de parâmetros $(\delta_1, \delta_2) = (\beta_1^{1/3}, \beta_2^{1/3})$, para a existência de soluções de equilíbrio triangular. A região é delimitada pelas funções $\delta_2 = \delta_1 + 1$, $\delta_2 = \delta_1 - 1$, $\delta_2 = 1 - \delta_1$, $\delta_2^3 = \frac{1}{\delta_1^3} + 1$.



Fonte: Autor

A partir das informações discutidas anteriormente, podemos agora enunciar o teorema.

Teorema 2.1. *Existem duas soluções triangulares de equilíbrio no problema restrito de três corpos carregados em um plano, sempre que β_1 e β_2 pertencerem à região mostrada na Figura 2.12. Elas são dadas por:*

$$L_4 = (x_L, y_L), \quad L_5 = (x_L, -y_L).$$

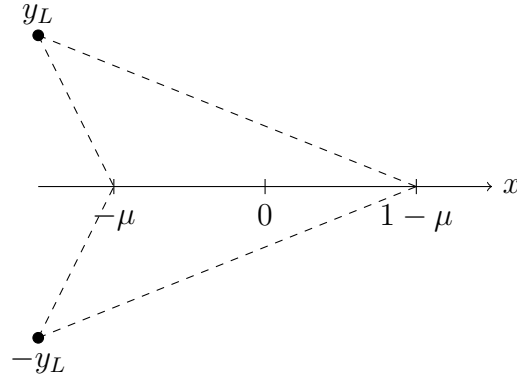
A partir do Teorema 2.1, determinaremos as posições das soluções de equilíbrio, analisando o sinal da expressão (2.49). Considerando que $(\delta_1, \delta_2) = (\beta_1^{1/3}, \beta_2^{1/3})$, a expressão para x_L pode ser escrita como:

$$x_L = -\mu + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1) \quad (2.51)$$

logo fazendo o estudo para $x_L = -\mu$ temos

$$\begin{aligned}x_L - (-\mu) &= \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1) \\ \Rightarrow \delta_1^2 - \delta_2^2 + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \delta_2^2 &= \delta_1^2 + 1 \\ \Rightarrow \delta_2 &= \pm \sqrt{\delta_1^2 + 1} = \pm \sqrt{\beta_1^{2/3} + 1}\end{aligned}$$

portanto, como $\beta_2 > 0$ implica que $\delta_2 > 0$ e consequentemente $\delta_2 = \sqrt{\delta_1^2 + 1} = \sqrt{\beta_1^{2/3} + 1}$. Uma vez que o sinal para δ_2 é negativo, logo temos que sua concavidade é para baixo, e

Figura 2.7 – Solução de equilíbrio a esquerda de $-\mu$ 

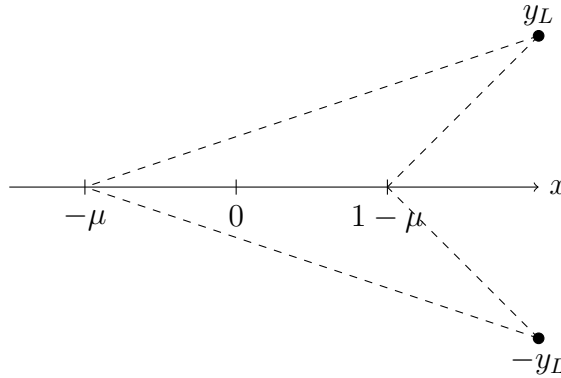
Fonte: Autor

portanto para $\beta_2^{\frac{1}{3}} = \delta_2 > \sqrt{\delta_1^2 + 1} = \sqrt{\beta_1^{\frac{2}{3}} + 1}$ a solução de equilíbrio está a esquerda de $-\mu$ e para a igualdade a solução está acima ou abaixo de $-\mu$.

Agora fazendo o estudo do sinal para $x_l = 1 - \mu$ obtemos

$$\begin{aligned} x_L - (1 - \mu) &= -\mu + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1) - (1 - \mu) = \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2 - 1) \\ \Rightarrow \delta_1^2 - \delta_2^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \delta_1^2 &= \delta_2^2 + 1 \\ \Rightarrow \delta_1 &= \pm \sqrt{\delta_2^2 + 1} = \pm \sqrt{\beta_2^{\frac{2}{3}} + 1} \end{aligned}$$

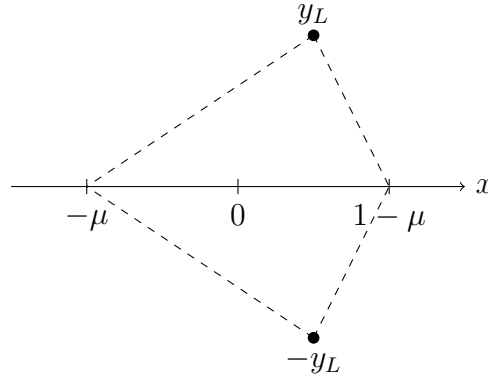
como β_1 tem o mesmo sinal de β_2 , logo temos que δ_1 é positivo e portanto $\delta_1 = \sqrt{\delta_2^2 + 1} = \sqrt{\beta_2^{\frac{2}{3}} + 1}$. Uma vez que o sinal para δ_1 é positivo, logo temos que sua concavidade é para cima e, portanto, para $\beta_1^{\frac{1}{3}} = \delta_1 > \sqrt{\delta_2^2 + 1} = \sqrt{\beta_2^{\frac{2}{3}} + 1}$ a solução de equilíbrio está à direita de $1 - \mu$ e para a igualdade temos que a solução se encontra acima ou abaixo de $1 - \mu$.

Figura 2.8 – Solução de equilíbrio a direita de $1 - \mu$.

Fonte: Autor

Segue que se $\beta_2^{\frac{1}{3}} = \delta_2 < \sqrt{\delta_1^2 + 1} = \sqrt{\beta_1^{\frac{2}{3}} + 1}$ e $\beta_1^{\frac{1}{3}} = \delta_1 < \sqrt{\delta_2^2 + 1} = \sqrt{\beta_2^{\frac{2}{3}} + 1}$ a solução de equilíbrio está entre $-\mu$ e $1 - \mu$.

Figura 2.9 – Solução de equilíbrio entre os corpos.



Fonte: Autor

Logo, segue a proposição:

Proposição 2.2. *Os parâmetros β_1 e β_2 definem a localização das soluções triangulares de equilíbrio da seguinte maneira:*

- $\beta_2^{\frac{1}{3}} > \sqrt{1 + \beta_1^{\frac{2}{3}}}$. A solução de equilíbrio está localizada à esquerda do corpo 1 (Figura 2.7).
- $\beta_2^{\frac{1}{3}} = \sqrt{1 + \beta_1^{\frac{2}{3}}}$. A solução de equilíbrio está acima ou abaixo do corpo 1.
- $\beta_1^{\frac{1}{3}} < \sqrt{1 + \beta_2^{\frac{2}{3}}}$ e $\beta_2^{\frac{1}{3}} < \sqrt{1 + \beta_1^{\frac{2}{3}}}$. A solução de equilíbrio está localizada entre os corpos 1 e 2 (Figura 2.9).
- $\beta_1^{\frac{1}{3}} = \sqrt{1 + \beta_2^{\frac{2}{3}}}$. A solução de equilíbrio está acima ou abaixo do corpo 2.
- $\beta_1^{\frac{1}{3}} > \sqrt{1 + \beta_2^{\frac{2}{3}}}$. A solução de equilíbrio está localizada à direita do corpo 2 (Figura 2.8).

2.3.2 Soluções de equilíbrio colineares

Para o caso colinear, ou seja, $y = 0$, segue que

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2} = |x + \mu|, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2} = |x - 1 + \mu|\end{aligned}$$

e a segunda expressão de (2.44) zera, logo para obtermos as soluções de equilíbrio no caso colinear temos que obter as raízes de

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x \left(1 - \frac{\beta_1(1 - \mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} \right) - \mu(1 - \mu) \left(\frac{\beta_1}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2}{\rho_2^3} \right), \quad (2.52)$$

reescrevendo (2.52), obtemos

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x - \frac{\beta_1(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu(x+\mu-1)}{\rho_2^3}, \quad (2.53)$$

com isso, podemos separar o domínio em três intervalos, dados por:

$$I_1 = (-\infty, -\mu), I_2 = (-\mu, 1-\mu), I_3 = (1-\mu, \infty).$$

Portanto para $x \in I_1$, temos:

$$\begin{aligned} x + \mu < 0 &\Rightarrow \rho_1 = -(x + \mu) \\ x + \mu - 1 < 0 &\Rightarrow \rho_2 = -(x + \mu - 1) \end{aligned}$$

e portanto

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x + \frac{\beta_1(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\beta_2\mu(x+\mu-1)}{\rho_2^3},$$

logo

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x + \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^2} + \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^2}. \quad (2.54)$$

Para $x \in I_2$, temos:

$$\begin{aligned} x + \mu > 0 &\Rightarrow \rho_1 = x + \mu \\ x + \mu - 1 < 0 &\Rightarrow \rho_2 = -(x + \mu - 1) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x - \frac{\beta_1(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\beta_2\mu(x+\mu-1)}{\rho_2^3},$$

logo

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x - \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^2} + \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^2}. \quad (2.55)$$

Por fim, para $x \in I_3$, temos:

$$\begin{aligned} x + \mu > 0 &\Rightarrow \rho_1 = x + \mu \\ x + \mu - 1 > 0 &\Rightarrow \rho_2 = x + \mu - 1 \end{aligned}$$

e portanto

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x - \frac{\beta_1(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu(x+\mu-1)}{\rho_2^3},$$

logo

$$F(x, \beta_1, \beta_2) = x - \frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^2} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^2}. \quad (2.56)$$

Utilizando as expressões para ρ_1 e ρ_2 em (2.53) e derivando com respeito a x obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(F(x, \beta_1, \beta_2)) &= \frac{d}{dx} \left(x - \frac{\beta_1(1-\mu)(x+\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{\beta_2\mu(x+\mu-1)}{(x+\mu-1)^3} \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left(x - \frac{\beta_1(1-\mu)}{(x+\mu)^2} - \frac{\beta_2\mu}{(x+\mu-1)^2} \right) \\
&= 1 + \frac{2\beta_1(1-\mu)(x+\mu)}{(x+\mu)^4} + \frac{2\beta_2\mu(x+\mu-1)}{(x+\mu-1)^4} \\
&= 1 + \frac{2\beta_1(1-\mu)}{(x+\mu)^3} + \frac{2\beta_2\mu}{(x+\mu-1)^3} \\
&= 1 + \frac{2\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{2\beta_2\mu}{\rho_2^3}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{d}{dx}(F(x, \beta_1, \beta_2)) = 1 + \frac{2\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{2\beta_2\mu}{\rho_2^3}, \quad (2.57)$$

que é satisfeita em todos os intervalos. Agora dividindo o plano (β_1, β_2) em quatro quadrantes e duas linhas retas, isto é

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 > 0, \beta_2 > 0\}, \\
R_2 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 < 0, \beta_2 > 0\}, \\
R_3 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 < 0, \beta_2 < 0\}, \\
R_4 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 > 0, \beta_2 < 0\}, \\
R_5 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 = 0\}, \\
R_6 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_2 = 0\},
\end{aligned}$$

e definindo as *S-regiões* por meio de

$$\begin{aligned}
S_{1,1} &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \beta_1 \leq 1, \beta_2 > 0\}, \\
S_{1,2} &= \left\{ (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 > 1, 0 < \beta_2 < \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \right\}, \\
S_2 &= \left\{ (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 < 0, \beta_2 > \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \right\}, \\
S_{4,1} &= \left\{ (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \beta_1 < 1, \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} < \beta_2 < 0 \right\}, \\
S_{4,2} &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 \geq 1, \beta_2 < 0\}, \\
S_5 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}, \\
S_6 &= \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 > 0, \beta_2 = 0\}.
\end{aligned}$$

Com isso, introduzimos os conjuntos R'_i , $i = 1, \dots, 6$ que correspondem, respectivamente, a R_i , $i = 1, \dots, 6$, restritos a $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 1$. Assim, temos

$$R'_1 = S_{1,1} \cup S_{1,2},$$

$$\begin{aligned}
R'_2 &= S_2, \\
R'_3 &= \emptyset, \\
R'_4 &= S_{4,1} \cup S_{4,2}, \\
R'_5 &= S_5, \\
R'_6 &= S_6.
\end{aligned}$$

Dada a restrição definida por (2.34), os conjuntos resultantes determinam as regiões permitidas para os pares (β_1, β_2) , exceto na região R'_3 . Para cada uma dessas regiões, podemos encontrar, em cada intervalo, nenhuma, uma ou duas soluções de equilíbrio colinear.

Observação 2.3. *As soluções de equilíbrio colineares são determinadas pelas raízes da função definida em (2.53). Portanto, verificaremos se as restrições impostas pelas Regiões R'_i , com $i = 1, \dots, 6$ (exceto para $i = 3$), fornecem condições para a existência de raízes nos intervalos I_i , $1 \leq i \leq 3$.*

Os teoremas a seguir são de caráter técnico e serão fundamentais para a demonstração de resultados que visam estabelecer a existência de equilíbrios colineares. O próximo teorema, em particular, explora as diferentes regiões dos parâmetros β , identificando os intervalos em que existem soluções de equilíbrio colinear.

Teorema 2.4. *Suponha que existem soluções de equilíbrio colinear para (β_1, β_2) definidas pelas desigualdades*

$$\begin{aligned}
f_1(x_*, \mu) &\leq \beta_1 \leq f_2(x_*, \mu) \\
g_1(x_*, \mu) &\leq \beta_2 \leq g_2(x_*, \mu) \\
h_1(\mu) &\leq x_* \leq h_2(\mu)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

isso é, para cada par (β_1, β_2) , existe um x tal que a função em (2.53) zera, ou seja, $F(x, \beta_1, \beta_2) = 0$. Então, existem soluções de equilíbrio colineares para aqueles (β_1, β_2) que satisfazem

$$\begin{aligned}
g_1(-x_*, 1 - \mu) &\leq \beta_1 \leq g_2(-x_*, 1 - \mu) \\
f_1(-x_*, 1 - \mu) &\leq \beta_2 \leq f_2(-x_*, 1 - \mu) \\
-h_2(1 - \mu) &\leq x_* \leq h_1(1 - \mu)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Demonstração. Nosso objetivo é encontrar outra raiz para $F(x, \beta_1, \beta_2)$ para novos parâmetros β , para isso vamos considerar a seguinte mudança de variáveis $x = \tilde{x}$, $x_* = -\tilde{x}_*$, $\mu = 1 - \tilde{\mu}$, $\beta_1 = \tilde{\beta}_2$ e $\beta_2 = \tilde{\beta}_1$. Com esta mudança, temos que para as novas variáveis as expressões em (2.58) são reescritas como

$$\begin{aligned}
f_1(-\tilde{x}_*, 1 - \tilde{\mu}) &\leq \tilde{\beta}_2 \leq f_2(-\tilde{x}_*, 1 - \tilde{\mu}) \\
g_1(-\tilde{x}_*, 1 - \tilde{\mu}) &\leq \tilde{\beta}_1 \leq g_2(-\tilde{x}_*, 1 - \tilde{\mu}) \\
h_1(1 - \tilde{\mu}) &\leq -\tilde{x}_* \leq h_2(1 - \tilde{\mu})
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Agora verificaremos como as mudanças de variáveis alteram as distâncias relativas (2.38), logo segue:

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= (x + \mu)^2 = (-\tilde{x} + 1 - \tilde{\mu})^2 = ((-1)(\tilde{x} - 1 + \tilde{\mu}))^2 = \tilde{\rho}_2^2 \\ \rho_2^2 &= (-\tilde{x} - 1 + 1 - \tilde{\mu})^2 = (-\tilde{x} - \tilde{\mu})^2 = ((-1)(\tilde{x} + \tilde{\mu}))^2 = \tilde{\rho}_1^2\end{aligned}$$

e portanto $F(x, \beta_1, \beta_2) = 0$ pode ser reescrita como $F(\tilde{x}, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1) = 0$, logo o sistema definido em (2.60) descreve outro conjunto de β -parâmetros no qual existe uma solução de equilíbrio. Note que as expressões em (2.60) são as mesmas em (2.59) só que com o “~”, e portanto removendo-o o resultado segue. $\square$

O teorema a seguir, conhecido como *regra dos sinais de Descartes*, fornece uma estimativa para o número de raízes positivas de um polinômio de grau n . No caso clássico, ele é utilizado para indicar a existência de soluções de equilíbrio em um intervalo dado.

Teorema 2.5 (Regras dos sinais de Descartes.). *O número de raízes reais positivas de uma equação com coeficientes reais,*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

nunca é maior do que o número de variações na sequência de seus coeficientes

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

e, se for menor, então sempre por um número par.

Demonstração. Ver demonstração em (USPENSKY, 1948). $\square$

Dado o exposto na Observação 2.3, dividiremos nossa análise em dois casos. O primeiro ocorre quando existe uma raiz simples de (2.53) nos intervalos I_1 , I_2 ou I_3 para cada Região R'_i , $i = 1, \dots, 6$, ou seja, há exatamente uma raiz no intervalo, com multiplicidade igual a um. O segundo caso ocorre quando não há raiz no intervalo, há mais de uma raiz, ou existe uma raiz com multiplicidade maior que um.

Teorema 2.6. 1. *Região R'_1 . Existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_1, I_2, I_3$.*

2. *Região R'_2 . Existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_3$.*

3. *Região R'_4 . Existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_1$.*

4. *Região R'_5 . Existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_3$. Por outro lado, se $\beta_2 > 1$, então existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_1$. Da mesma forma, se $0 < \beta_2 < 1$ é satisfeito, então existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_2$.*

5. Região R'_6 . Existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_1$. Por outro lado, se $\beta_1 > 1$, então existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_3$. Da mesma forma, se $0 < \beta_1 < 1$ é satisfeito, então existe exatamente uma solução de equilíbrio colinear para $x \in I_2$.

Demonstração. Região R'_1 :

Temos que $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$, e portanto de (2.57) temos que $\frac{d}{dx}(F(x, \beta_1, \beta_2)) > 0$ onde temos que F é crescente em x .

Para $x \in I_1$, em que F é dado por (2.54), fazendo $x \rightarrow -\infty$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$, agora tomando $x \rightarrow -\mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$, como F é crescente então existe um, e somente um, x_1 tal que $F(x_1, \beta_1, \beta_2) = 0$.

Para $x \in I_2$, logo F é dado por (2.55), de modo análogo, agora fazendo $x \rightarrow -\mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$ e para $x \rightarrow 1 - \mu$ temos que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$ e portanto existe x_2 tal que $F(x_2, \beta_1, \beta_2) = 0$.

E por fim, se $x \in I_3$ temos que F é dada por (2.56) e portanto tomando $x \rightarrow 1 - \mu$ temos que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$ e para $x \rightarrow \infty$ temos que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$ e portanto, como F é crescente, temos que existe x_3 tal que $F(x_3, \beta_1, \beta_2) = 0$.

Região R'_2 :

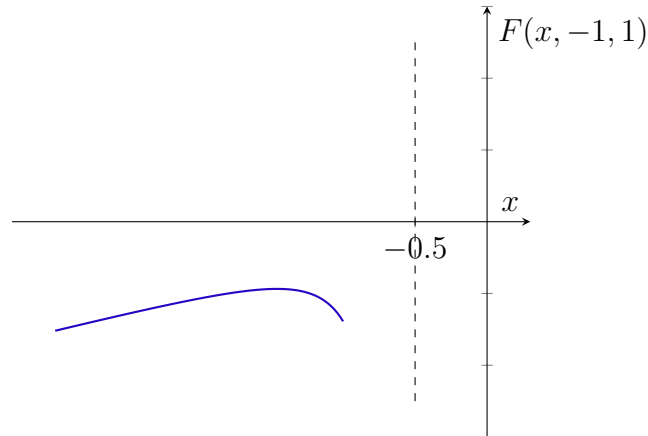
Temos que $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 > 0$, para $x \in I_1$ temos que $x \rightarrow -\infty$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$ e para $x \rightarrow -\mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$. Para $x \rightarrow -\infty$ implica que $\frac{d}{dx}(F(x, \beta_1, \beta_2)) > 0$ e para $x \rightarrow -\mu$ implica que $\frac{d}{dx}(F(x, \beta_1, \beta_2)) < 0$, logo $F(x, \beta_1, \beta_2)$ é côncava, então para β_2 suficientemente grande temos que esta toca o eixo em mais de um ponto (Figura 2.10). De modo análogo obtemos que para o intervalo I_2 que $F(x, \beta_1, \beta_2)$ é convexa e tomando β_1 suficientemente grande obtemos mais de uma raiz para o intervalo. Note que, dependendo dos β -parâmetros, podem existir nenhuma, uma, de multiplicidade maior que um, ou duas raízes.

Para $x \in I_3$, $\rho_2 = x + \mu - 1$, para $\rho_2 \in (0, \infty)$ e $\rho_1 = x + \mu$, implicando que $\rho_1 = \rho_2 + 1$ e $x = \rho_2 - \mu + 1$ reescrevendo (2.56) em termos de ρ_2 obtemos

$$\begin{aligned} F(x, \beta_1, \beta_2) &= \rho_2 - \mu + 1 - \frac{\beta_1(1 - \mu)}{(\rho_2 + 1)^2} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^2} \\ &= \frac{\rho_2^5 + (3 - \mu)\rho_2^4 + (3 - \mu)\rho_2^3 + ((1 - \mu)(1 - \beta_1) - \beta_2\mu)\rho_2^2 - 2\beta_2\mu\rho_2 - \beta_2\mu}{(\rho_2 + 1)^2\rho_2^2}, \end{aligned}$$

e portanto, as soluções de equilíbrio são determinadas pelas raízes do numerador da expressão anterior. Observe que os coeficientes dos termos de quinta, quarta e terceira potências são positivos, enquanto o coeficiente do termo de primeira potência e do termo constante é negativo. O sinal do coeficiente do termo de segunda potência, por sua vez, depende dos valores de β_1 e β_2 . Denotamos por α_n o coeficiente de ρ_2^n , resultando nas duas situações possíveis apresentadas na Tabela 2.1:

Figura 2.10 – Gráfico da função (2.54) com $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ e $\mu = 0.5$.



Fonte: Autor

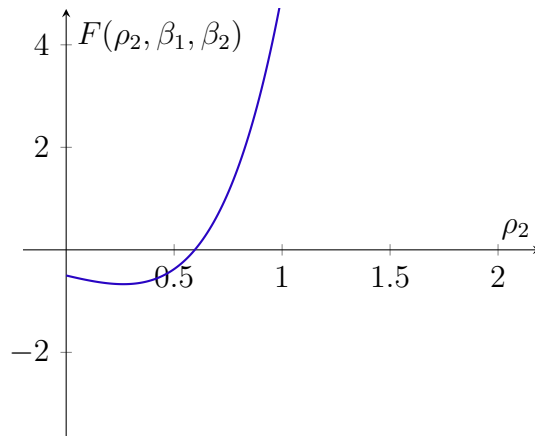
Tabela 2.1 – Sinais possíveis para os coeficientes de $F(\rho_2)$

α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
+	+	+	+	-	-
+	+	+	-	-	-

Fonte: Autor

Dessa forma, podemos concluir que o polinômio admite apenas uma variação de sinal. Com base no Teorema 2.5, temos que o polinômio possui apenas uma raiz positiva, conforme ilustrado na Figura 2.11.

Figura 2.11 – Gráfico de $F(\rho_2, \beta_1, \beta_2)$, com $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ e $\mu = 0.5$.



Fonte: Autor

Região R'_4 :

Nota-se que $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 < 0$, então de modo análogo à região R'_2 , tomemos $\rho_1 = -(x + \mu)$, logo $\rho_1 \in (0, \infty)$. De $\rho_2 = -(x + \mu - 1)$ obtemos que $\rho_2 = \rho_1 + 1$ e também $x = -(\rho_1 + \mu)$.

Portanto, (2.54) é dada em termos de ρ_1 por

$$\begin{aligned} F(x, \beta_1, \beta_2) &= -(\rho_1 + \mu) + \frac{\beta_1(1 - \mu)}{\rho_1^2} + \frac{\beta_2\mu}{\rho_1 + 1} \\ &= [-\rho_1^5 - (2 + \mu)\rho_1^4 - (1 + 2\mu)\rho_1^3 + (\beta_1(1 - \mu) - \mu(1 - \beta_2))\rho_1^2 \\ &\quad + 2\beta_1(1 - \mu)\rho_1 + \beta_1(1 - \mu)]/(\rho_1^2(\rho_1 + 1)^2). \end{aligned}$$

As possibilidades para os coeficientes do polinômio de quinto grau de $F(x, \beta_1, \beta_2)$ são dadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Sinais possíveis para os coeficientes de $F(\rho_1)$

α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
-	-	-	-	+	+
-	-	-	+	+	+

Fonte: Autor

Portanto, temos somente uma solução de equilíbrio para o intervalo I_1 , e para os intervalos I_2 e I_3 temos resultados análogos aos dos intervalos I_1 e I_2 para a região R'_2 .

Região R'_5 :

Observamos que que $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 > 0$, para $x \in I_1$ temos que $x \rightarrow -\infty$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$, e $x \rightarrow -\mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \mu(\beta_2 - 1)$. Note que, para $\beta_2 > 1$, $F(x, \beta_1, \beta_2)$ é positivo.

Para a derivada no mesmo intervalo, verificamos que $x \rightarrow -\infty$ implica $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow 1$ e $x \rightarrow -\mu$ implica $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow 1 + \beta_2\mu$. Observe que, para a derivada ser positiva em I_1 , é necessário que $-\frac{1}{\mu} < \beta_2$. Escolhendo $\beta_2 > 1$, conclui-se que existe apenas uma raiz.

Para o intervalo I_2 temos que $x \rightarrow -\mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \mu(\beta_2 - 1)$ e para $x \rightarrow 1 - \mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$, observe que para $0 < \beta_2 < 1$ temos que $F(-\mu, \beta_1, \beta_2) < 0$. Temos para $x \rightarrow -\mu$ implica que $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow 1 + \beta_2\mu$ e para $x \rightarrow 1 - \mu$ temos que $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2)$ tende para mais infinito, logo para $0 < \beta_2 < 1$ temos que $F(x, \beta_1, \beta_2)$ admite somente uma raiz para o intervalo.

Agora para o intervalo I_3 temos que $x \rightarrow 1 - \mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$ e para $x \rightarrow +\infty$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$, note que a derivada é positiva para o intervalo, logo segue que existe somente uma raiz.

Região R'_6 :

Sabemos que $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 = 0$, para o intervalo I_1 , temos que $x \rightarrow -\mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$, e $x \rightarrow -\infty$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow -\infty$. Como a derivada é positiva nesse intervalo, segue-se que existe apenas uma raiz.

Da Região R'_5 para o intervalo I_2 podemos assumir que $f_1 = f_2 = 0$. Então dado $x_0 \in I_2$, existe um valor mínimo e um valor máximo para β_2 , denotados por $\beta_2^m(x_0)$

e $\beta_2^M(x_0)$, respectivamente. Assim, temos que $\beta_2^m(x_0) \leq \beta_2 \leq \beta_2^M(x_0)$, uma vez que $-\mu < x_0 < 1 - \mu$, logo pelo Teorema 2.4, segue que existe uma solução de equilíbrio para o intervalo I_1 na Região R'_4 .

Para $x \in I_3$, temos que $x \rightarrow 1 - \mu$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow (1 - \mu)(1 - \beta_1)$, e $x \rightarrow \infty$ implica que $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \infty$. Note que, para $\beta_1 > 1$, $F(x, \beta_1, \beta_2)$ é negativa. No mesmo intervalo, ao considerar a derivada, obtemos que $x \rightarrow 1 - \mu$ implica que $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow 1 + 2\beta_1(1 - \mu)$, e $x \rightarrow \infty$ implica que $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow 1$. Note que, para $\beta_1 > 1$, temos $F(x, \beta_1, \beta_2) \rightarrow (1 - \mu)(1 - \beta_1) < 0$, e como a derivada é positiva, existe apenas uma solução de equilíbrio para esse intervalo. $\square$

Foi verificado anteriormente no Teorema 2.6 que para alguns intervalos as raízes de $F(x, \beta_1, \beta_2)$ dependiam dos valores dos β -parâmetros, podendo haver nenhuma, uma ou duas raízes. Agora, estabeleceremos as condições necessárias para a existência dessas raízes.

Teorema 2.7. *1. Região R'_2 . Existem no máximo duas soluções de equilíbrio colineares em cada um dos intervalos I_1, I_2 . Uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções colineares de equilíbrio com $x \in I_1$ é $-\beta_1^0(x_0) \leq \beta_1 < 0$, $\beta_2^0(x_0) \leq \beta_2$, $x_0 < -\mu$. Por outro lado, a condição necessária e suficiente para $x \in I_2$ é $\beta_1^0(x_0) \leq \beta_1 < 0$, $\frac{\beta_1^0(x_0)}{\beta_2^0(x_0)-1} < \beta_2 \leq \beta_2^0(x_0)$, $-\mu < x_0 < x_{r1}(\mu)$.*

2. Região R'_4 . Existem no máximo duas soluções de equilíbrio colineares em cada um dos intervalos I_3, I_2 . Uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções colineares de equilíbrio com $x \in I_3$ é $-\beta_2^0(x_0) \leq \beta_2 < 0$, $\beta_1^0(x_0) \leq \beta_1$, $x_0 > 1 - \mu$. Por outro lado, a condição necessária e suficiente para $x \in I_2$ é $\beta_2^0(x_0) \leq \beta_2 < 0$, $\frac{\beta_2^0(x_0)}{\beta_1^0(x_0)-1} < \beta_1 \leq \beta_1^0(x_0)$, $x_{r2}(\mu) < x_0 < 1 - \mu$.

Demonstração. Para a existência de raízes para o intervalo I_1 na Região R'_2 necessariamente teremos que $F(x_0, \beta_1, \beta_2) \geq 0$ e $\frac{d}{dx}F(x_0, \beta_1, \beta_2) = 0$, logo dado μ deveremos determinar valores para β_1 e β_2 para que estas condições sejam satisfeitas. Para isso, assim como feito em (LUKYANOV, 1984), introduziremos a seguinte mudança de coordenadas

$$\beta_1 \rightarrow x_0$$

$$\beta_2 \rightarrow k$$

em que x_0 é uma raiz de $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2)$. Levando em conta a condição $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 1$ na qual $(\beta_1, \beta_2) \in R'_2$. Seja $x_0 < -\mu$ a raiz de $\frac{d}{dx}F(x, \beta_1, \beta_2)$, então introduzindo a mudança de variáveis dadas por

$$\beta_1 = \frac{1+k}{2(1-\mu)}(x_0 + \mu)^3,$$

$$\beta_2 = \frac{k}{2\mu}(1 - x_0 - \mu)^3,$$

em que substituindo em (2.57) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(F(x_0, \beta_1, \beta_2)) &= 1 + \frac{2\beta_1(1-\mu)}{(x_0+\mu)^3} + \frac{2\beta_2\mu}{(x_0+\mu-1)^3} \\
&= 1 + \frac{1+k}{2(1-\mu)}(x_0+\mu)^3 \frac{2(1-\mu)}{(x_0+\mu)^3} + \frac{k}{2\mu}(1-x_0-\mu)^3 \frac{2\mu}{(x_0+\mu-1)^3} \\
&= 1 - 1 - k + k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para que tenhamos $F(x_0) \geq 0$ podemos encontrar a seguinte relação

$$\begin{aligned}
F(x_0, \beta_1, \beta_2) &= x + \frac{\beta_1(1-\mu)}{(x_0+\mu)^2} + \frac{\beta_2\mu}{(x_0+\mu-1)^2} \\
&= x_0 + \frac{1+k}{2(1-\mu)}(x_0+\mu)^3 \frac{(1-\mu)}{(x_0+\mu)^2} + \frac{k}{2\mu}(1-x_0-\mu)^3 \frac{\mu}{(x_0+\mu-1)^2} \\
&= x_0 + \frac{(1+k)(x_0+\mu)}{2} - \frac{k(-1+x_0+\mu)}{2} \\
&= \frac{3x_0+\mu+k}{2} \geq 0,
\end{aligned}$$

e portanto teremos a seguinte condição $k \geq -(3x_0+\mu)$, que na igualdade define um limite inferior para β_1 e β_2 e portanto existem $-\beta_1^0(x_0)$ e $\beta_2^0(x_0)$ tais que $-\beta_1^0(x_0) \leq \beta_1 < 0$, $\beta_2^0(x_0) \leq \beta_2$ e $x_0 < -\mu$. Uma vez que $x_0 < -\mu$ temos

$$\beta_2 = \frac{k}{2\mu}(1-x_0-\mu)^3 > \frac{k}{2\mu}(1-(-\mu)-\mu)^3 > \frac{-(-3\mu+\mu)}{2\mu} > 1$$

e dado que $\beta_1 < 0$ obtemos que $(\beta_1-1)(\beta_2-1) < 1$ é satisfeita e portanto temos que $(\beta_1, \beta_2) \in R'_2$.

Note que, tomando $f_1 = -\beta_1^0(x_0)$, $f_2 = 0$, $g_1 = \beta_2^0(x_0)$, $g_2 = \sup\{\beta_2 \in R'_2\}$, $h_1 = \inf\{x \in I_1\}$ e $h_2 = -\mu$ então pelo Teorema 2.4 garantimos para a Região R'_4 com $x \in I_3$ as seguintes condições para existência de solução $-\beta_2^0(x_0) \leq \beta_2 < 0$, $\beta_1^0(x_0) \leq \beta_1$ e $x_0 < -\mu$.

Agora para o intervalo I_2 , então seja $x_0 \in (-\mu, 1-\mu)$ a raiz de $\frac{d}{dx}F$, então fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{1+k}{2(1-\mu)}(x_0+\mu)^3 \\
\beta_2 &= \frac{k}{2\mu}(1-x_0-\mu)^3
\end{aligned}$$

obtemos

$$F(x_0, \beta_1, \beta_2) = x_0 - \frac{\beta_1(1-\mu)}{(x_0+\mu)^2} + \frac{\beta_2\mu}{(x_0+\mu-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= x_0 - \frac{1+k}{2(1-\mu)}(x_0 + \mu)^3 \frac{(1-\mu)}{(x_0 + \mu)^2} + \frac{k}{2\mu}(1 - x_0 - \mu)^3 \frac{\mu}{(x_0 + \mu - 1)^2} \\
&= x_0 - \frac{(1+k)(x_0 + \mu)}{2} - \frac{k(-1 + x_0 + \mu)}{2} \\
&= \frac{3x_0 + \mu + k}{2} \leq 0
\end{aligned}$$

donde obtemos que $k \leq -(3x_0 + \mu)$. Uma vez que $(\beta_1, \beta_2) \in R'_2 \subset R_2$ é necessário que $k > 0$ onde segue

$$\begin{aligned}
0 &< -(3x_0 + \mu) \\
&\Rightarrow 0 > 3x_0 + \mu \\
&\Rightarrow -\frac{\mu}{3} > x_0.
\end{aligned}$$

Uma vez que para obtermos uma raiz para F no intervalo considerado temos necessariamente que $F \leq 0$ logo concluimos que β_1 deve ser maior ou igual a um valor mínimo e β_2 deve ser menor ou igual a um máximo, sejam então $\beta_1^0(x_0)$ e $\beta_2^0(x_0)$ estes valores. Uma vez que $(\beta_1, \beta_2) \in R_2$ temos que $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 > 0$ e portanto obtemos que $\beta_1^0(x_0) \leq \beta_1 < 0$ e $0 < \beta_2 \leq \beta_2^0(x_0)$ para $-\mu < x_0 < -\frac{\mu}{3}$. Da desigualdade $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 1$ obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
\beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2 &< 0 \\
(\beta_2 - 1) &> \frac{1}{\beta_1 - 1}
\end{aligned}$$

da primeira obtemos

$$\beta_2 > \beta_1\beta_2 - \beta_1 = \beta_1(\beta_2 - 1)$$

e substituindo na segunda encontramos

$$\beta_2 > \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$$

donde concluimos do valor mínimo de β_1 a seguinte desigualdade

$$\beta_2 > \frac{\beta_1^0(x_0)}{\beta_1^0(x_0) - 1}$$

e portanto obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\beta_1^0(x_0) &\leq \beta_1 < 0, \\
\frac{\beta_1^0(x_0)}{\beta_1^0(x_0) - 1} &< \beta_2 \leq \beta_2^0(x_0), \\
-\mu &< x_0 < -\frac{\mu}{3}.
\end{aligned}$$

Procederemos agora como em (LUKYANOV, 1984) e (BENGOCHEA; VIDAL, 2015). Primeiro notemos que na fronteira da região de existência de solução colinear com respeito

aos β -parâmetros, ou seja, quando $k = -(3x_0 + \mu)$ da mudança de variáveis para β_1 e β_2 temos

$$\begin{aligned}\beta_1^0(x_0, \mu) &= \frac{3x_0 + \mu - 1}{2(1 - \mu)}(x_0 + \mu)^3 \\ \beta_2^0(x_0, \mu) &= \frac{3x_0 + \mu}{2\mu}(x_0 + \mu - 1)^3\end{aligned}$$

definindo

$$G(x_0, \mu) = \beta_1^0(x_0, \mu)\beta_2^0(x_0, \mu) - \beta_1^0(x_0, \mu) - \beta_2^0(x_0, \mu)$$

e $x_{r1}(\mu)$, $x_{r2}(\mu)$, tais que para μ fixo, as funções $x_{r1}(\mu)$, $x_{r2}(\mu)$ são as raízes de $G(x_0, \mu)$ em que a segunda raiz é definida em termos da primeira na forma $x_{r1}(\mu) = x_{r1}(1 - \mu)$ onde estas satisfazem $-\mu < x_{r1}(\mu) < -\frac{\mu}{3}$ e $\frac{1}{3}(1 - \mu) < x_{r2}(\mu) < 1 - \mu$. Agora definindo $x_{r1}(\mu) = x_0$ e portanto temos que $G(x_{r1}(\mu), \mu) = 0$ onde obtemos que $x_0 \in (-\mu, x_{r1}(\mu))$ como limite superior.

Note que

$$\begin{aligned}\beta_1^0(-x_0, 1 - \mu) &= \frac{-3x_0 - \mu}{2\mu}(-x_0 + 1 - \mu)^3 = \beta_2^0(x_0, \mu) \\ \beta_2^0(-x_0, 1 - \mu) &= \frac{-3x_0 + 1 - \mu}{2(1 - \mu)}(-x_0 - \mu)^3 = \beta_1^0(x_0, \mu)\end{aligned}$$

onde obtemos que $G(x_0, \mu) = G(-x_0, 1 - \mu) = 0$ e portanto do Teorema 2.4 concluímos que para $x \in I_2$ é $\beta_2^0(x_0) \leq \beta_2 < 0$, $\frac{\beta_2^0(x_0)}{\beta_2^0(x_0) - 1} < \beta_1 \leq \beta_1^0(x_0)$, $x_{r2}(\mu) < x_0 < 1 - \mu$. $\square$

É possível determinarmos a posição exata de alguns equilíbrios colineares a partir do caso triangular fazendo $y_L \rightarrow 0$, neste caso, como este tipo de solução é um caso limite do caso triangular, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.8. *Assumindo que $(\beta_1, \beta_2) \in R'_1$, temos o seguinte:*

1. $(-\mu - \beta_1^{1/3}, 0)$ é uma solução de equilíbrio colinear no intervalo I_1 , sempre que $\beta_2^{1/3} - \beta_1^{1/3} = 1$.
2. $(-\mu + \beta_1^{1/3}, 0)$ é uma solução de equilíbrio colinear no intervalo I_2 , sempre que $\beta_1^{1/3} + \beta_2^{1/3} = 1$.
3. $(-\mu + \beta_1^{1/3}, 0)$ é uma solução de equilíbrio colinear no intervalo I_3 , sempre que $\beta_1^{1/3} - \beta_2^{1/3} = 1$.

Demonstração. Do fato de ser um caso limite das soluções triangulares, temos que $\rho_1 = \beta_1^{\frac{1}{3}}$ e $\rho_2 = \beta_2^{\frac{1}{3}}$, portanto de (2.50), temos

$$y_L = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2(\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}}) - (\beta_1^{\frac{2}{3}} - \beta_2^{\frac{2}{3}})^2 - 1} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (\beta_1^{\frac{2}{3}} - \beta_2^{\frac{2}{3}})^2 - 2(\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}}) + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}})^2 - 2(\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}}) + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}})^2 - 2(\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}}) + 1 - 2(\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}}) + 2(\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}} - 1)^2 - 2(\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}}) + 2(\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}}) = 0
\end{aligned}$$

onde obtemos

$$(\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}} - 1)^2 = 4\beta_1^{\frac{2}{3}}$$

logo

$$\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}} - 1 = \pm 2\beta_1^{\frac{1}{3}}$$

para a raiz negativa de $\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}} - 1$ temos que a solução de equilíbrio pertence a I_1 e, portanto, temos que $x = -\mu - \beta_1^{\frac{1}{3}}$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\mu - \beta_1^{\frac{1}{3}} + \beta_1^{\frac{1}{3}}(1 - \mu) + \beta_2^{\frac{1}{3}}\mu \\
&= -\mu - \beta_1^{\frac{1}{3}}\mu + \beta_2^{\frac{1}{3}}\mu \\
&= \mu(-1 - \beta_1^{\frac{1}{3}} + \beta_2^{\frac{1}{3}}) = 0 \\
&\Rightarrow \beta_2^{\frac{1}{3}} - \beta_1^{\frac{1}{3}} = 1.
\end{aligned}$$

Para a raiz positiva de $\beta_2^{\frac{2}{3}} - \beta_1^{\frac{2}{3}} - 1$ temos dois casos, ou ela pertence a I_2 ou a I_3 , considerando o primeiro caso temos

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\mu + \beta_1^{\frac{1}{3}} - \beta_1^{\frac{1}{3}}(1 - \mu) + \beta_2^{\frac{1}{3}}\mu \\
&= -\mu + \beta_1^{\frac{1}{3}}\mu + \beta_2^{\frac{1}{3}}\mu \\
&= \mu(-1 + \beta_1^{\frac{1}{3}} + \beta_2^{\frac{1}{3}}) = 0 \\
&\Rightarrow \beta_1^{\frac{1}{3}} + \beta_2^{\frac{1}{3}} = 1
\end{aligned}$$

e para o segundo caso, temos

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\mu + \beta_1^{\frac{1}{3}} - \beta_1^{\frac{1}{3}}(1 - \mu) - \beta_2^{\frac{1}{3}}\mu \\
&= -\mu + \beta_1^{\frac{1}{3}}\mu - \beta_2^{\frac{1}{3}}\mu \\
&= \mu(-1 + \beta_1^{\frac{1}{3}} - \beta_2^{\frac{1}{3}}) = 0 \\
&\Rightarrow \beta_1^{\frac{1}{3}} - \beta_2^{\frac{1}{3}} = 1.
\end{aligned}$$

□

Observe que o Teorema 2.8 fornece soluções únicas para os equilíbrios colineares no caso limite das soluções triangulares.

Podemos reescrever o Teorema 2.8 em termos de δ_1 e δ_2 , como segue:

1. Para $\delta_2 - \delta_1 = 1$, o ponto $(-\mu - \delta_1, 0)$ é uma solução de equilíbrio colinear no intervalo I_1 .
2. Para $\delta_1 + \delta_2 = 1$, o ponto $(-\mu + \delta_1, 0)$ é uma solução de equilíbrio colinear no intervalo I_2 .
3. Para $\delta_1 - \delta_2 = 1$, o ponto $(-\mu + \delta_1, 0)$ é uma solução de equilíbrio colinear no intervalo I_3 .

Dessa forma, encontramos os valores de δ_1 e δ_2 que satisfazem o Teorema 2.8 para cada caso:

- No primeiro caso, $\delta_1 = \frac{1}{3}$ e $\delta_2 = \frac{4}{3}$, o que implica $\beta_1 = \frac{1}{27}$ e $\beta_2 = \frac{64}{27}$.
- No segundo caso, $\delta_1 = \frac{1}{2}$ e $\delta_2 = \frac{1}{2}$, resultando em $\beta_1 = \frac{1}{8}$ e $\beta_2 = \frac{1}{8}$.
- No terceiro caso, $\delta_1 = \frac{4}{3}$ e $\delta_2 = \frac{1}{3}$, o que implica $\beta_1 = \frac{64}{27}$ e $\beta_2 = \frac{1}{27}$.

Reescrevendo as condições para cada item, obtemos

$$\begin{aligned}\delta_2 &= 1 + \delta_1, \\ \delta_2 &= 1 - \delta_1, \\ \delta_2 &= \delta_1 - 1,\end{aligned}$$

assim, os valores possíveis para $\delta_1, \delta_2 > 0$ são apresentados na Figura 2.12.

Observação 2.9. *O Teorema 2.8 permite uma análise detalhada da estabilidade linear dos equilíbrios colineares no caso limite das soluções triangulares, considerando as restrições impostas aos parâmetros β na Região R'_1 .*

2.4 Estabilidade das soluções de equilíbrio

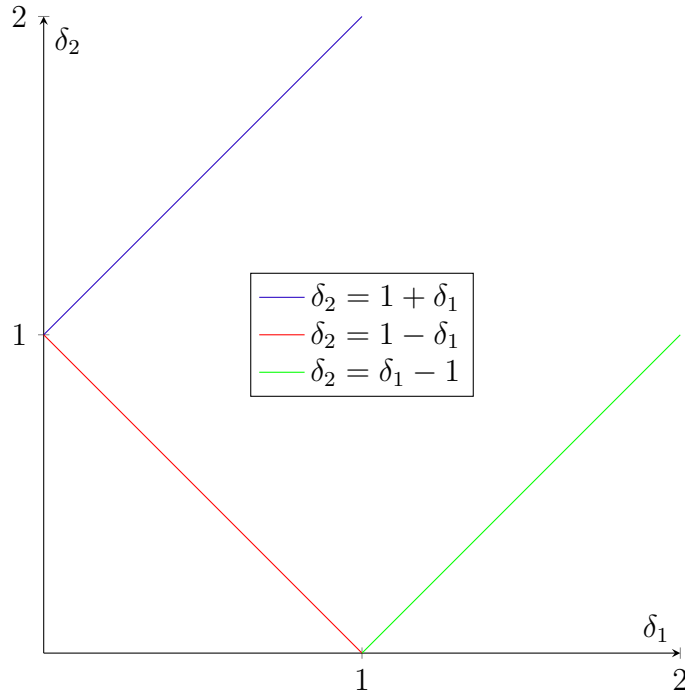
Para o estudo da estabilidade linear das soluções de equilíbrio do problema restrito de três corpos carregados em um plano, devemos analisar os autovalores da matriz dada por

$$A = JHessH(x^*, y^*, p_x^*, p_y^*) \quad (2.61)$$

em que (x^*, y^*, p_x^*, p_y^*) determinam as soluções de equilíbrio do sistema dado em (2.39). A matriz Hessiana do Hamiltoniano H , em que este é definido em (2.40), é dado por

$$HessH = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_y \partial x} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_y \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_x} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Figura 2.12 – Valores permitidos de δ_1 e δ_2 que satisfazem o Teorema 2.8



Fonte: Autor

e portanto a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

com as derivadas de ordem dois do potencial definido em (2.37) dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} + 3\beta_1(1-\mu)\frac{(x+\mu)^2}{\rho_1^5} + 3\beta_2\mu\frac{(x+\mu-1)^2}{\rho_2^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 3\beta_1(1-\mu)\frac{(x+\mu)y}{\rho_1^5} + 3\beta_2\mu\frac{(x+\mu-1)y}{\rho_2^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{\beta_1(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\beta_2\mu}{\rho_2^3} + 3\beta_1(1-\mu)\frac{y^2}{\rho_1^5} + 3\beta_2\mu\frac{y^2}{\rho_2^5}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.4.1 O polinômico característico

Usando as relações $\rho_1 = \beta_1^{\frac{1}{3}}$, $\rho_2 = \beta_2^{\frac{1}{3}}$, nas quais são satisfeitas tanto para as soluções de equilíbrio colineares, dadas pelo Teorema 2.8, quanto para as soluções de

equilíbrio triangulares, o sistema (2.63) é reescrito como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -1 + \frac{3(1-\mu)(x+\mu)^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\mu(x+\mu-1)^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{3(1-\mu)(x+\mu)y}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\mu(x+\mu-1)y}{\beta_2^{\frac{2}{3}}}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -1 + \frac{3(1-\mu)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\mu y^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

O polinômio característico da matriz (2.62) é dado por

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left(2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 + 1 = 0, \quad (2.64)$$

definindo $\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V$ podemos reescrever (2.64) como

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left(4 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0. \quad (2.65)$$

Proposição 2.10. *Para o polinômio característico definido em (2.65) o valor do coeficiente do termo ao quadrado é igual a um.*

Demonstração. Vamos analisar as expressões dos coeficientes do termo quadrático. Para isso, reescreveremos as derivadas segundas $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, utilizando as expressões para ρ_1^2 e ρ_2^2 . Lembrando que temos $\rho_1 = \beta_1^{\frac{1}{3}}$ e $\rho_2 = \beta_2^{\frac{1}{3}}$, podemos então expressar o resultado como segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -1 + \frac{3(1-\mu)(\beta_1^{\frac{2}{3}} - y^2)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\mu(\beta_2^{\frac{2}{3}} - y^2)^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \\ &= -1 + 3(1-\mu) - \frac{3(1-\mu)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + 3\mu - \frac{3\mu y^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \\ &= 2 - 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -1 + \frac{3(1-\mu)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\mu y^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \\ &= -1 + 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)\end{aligned}$$

e portanto

$$4 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 4 - \left(1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - \left(1 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\
&= 2 - \left(2 - 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) - \left(-1 + 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.11. *O termo constante do polinômio característico dado por (2.65) é dado por $9(1-\mu)\mu \sin^2 \gamma$, ou seja,*

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)^2 = 9(1-\mu)\mu \sin^2 \gamma.$$

Demonstração. Para o termo $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= \left(1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \left(1 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\
&= 1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\
&= 1 + \left(2 - 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) + \left(-1 + 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) + \\
&\quad + \left(2 - 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) \left(-1 + 3y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) \\
&= 2 - 2 + 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) - 9y^4 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \\
&= 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) - 9y^4 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Agora para $\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)^2$

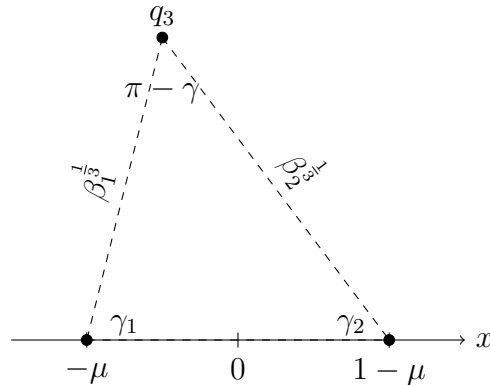
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 = \left(\frac{3(1-\mu)(x+\mu)y}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{3\mu(x+\mu-1)y}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \\
&= \frac{9(1-\mu)^2(x+\mu)^2y^2}{\beta_1^{\frac{4}{3}}} + \frac{18(1-\mu)\mu(x+\mu)(x+\mu-1)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} + \frac{9\mu^2(x+\mu-1)^2y^2}{\beta_2^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{9(1-\mu)^2(\beta_1^{\frac{2}{3}} - y^2)y^2}{\beta_1^{\frac{4}{3}}} + \frac{18(1-\mu)\mu(x+\mu)^2y^2 - 18(1-\mu)\mu(x+\mu)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} + \\
&\quad + \frac{9\mu^2(\beta_1^{\frac{2}{3}} - y^2)y^2}{\beta_2^{\frac{4}{3}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9(1-\mu)^2 y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{9(1-\mu)^2 y^4}{\beta_1^{\frac{4}{3}}} + \frac{18(1-\mu)\mu(\beta_1^{\frac{2}{3}} - y^2)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \\
&- \frac{18(1-\mu)\mu(x+\mu)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} + \frac{9\mu^2 y^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{9\mu^2 y^4}{\beta_2^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{9(1-\mu)^2 y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{9(1-\mu)^2 y^4}{\beta_1^{\frac{4}{3}}} + \frac{18(1-\mu)\mu y^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{18(1-\mu)\mu y^4}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \\
&- \frac{18(1-\mu)\mu(x+\mu)y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} + \frac{9\mu^2 y^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{9\mu^2 y^4}{\beta_2^{\frac{4}{3}}} \\
&= -9y^4 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 + 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) + 18(1-\mu)\mu y^2 \left(\frac{1}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \\
&= -9y^4 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 + 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) + 18(1-\mu)\mu y^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}} - 1}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \\
&= -9y^4 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 + 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu^2}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} + (1-\mu)\mu \frac{\beta_1^{\frac{2}{3}} + \beta_2^{\frac{2}{3}} - 1}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \\
&= -9y^4 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 + 9y^2 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{(1-\mu)\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right),
\end{aligned}$$

onde o termo constante do polinômio característico pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)^2 &= 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) - 9y^4 \left(\frac{(1-\mu)}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 - \\
&- \left(-9y^4 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right)^2 + 9y^2 \left(\frac{1-\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mu}{\beta_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{(1-\mu)\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right) \right) \\
&= 9y^2 \left(\frac{(1-\mu)\mu}{\beta_1^{\frac{2}{3}}\beta_2^{\frac{2}{3}}} \right). \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Figura 2.13 – Triângulo formado pelos três corpos.



Fonte: Autor

Usando a lei dos senos para o triângulo descrito na Figura 2.13, em que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, obtemos

$$\frac{1}{\sin \pi - \gamma} = \frac{\beta_1^{\frac{1}{3}}}{\sin \gamma_2} = \frac{\beta_2^{\frac{1}{3}}}{\sin \gamma_1},$$

onde obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \pi - \gamma = \frac{1}{\beta_1^{\frac{1}{3}}} \sin \gamma_2, \\ \sin \gamma &= \sin \pi - \gamma = \frac{1}{\beta_2^{\frac{1}{3}}} \sin \gamma_1, \end{aligned}$$

e lembrando que

$$\begin{aligned} \sin \gamma_1 &= \frac{y}{\beta_1^{\frac{1}{3}}}, \\ \sin \gamma_2 &= \frac{y}{\beta_2^{\frac{1}{3}}}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{\beta_1^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\beta_2^{\frac{1}{3}}} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \frac{y^2}{\beta_1^{\frac{2}{3}} \beta_2^{\frac{2}{3}}}. \quad (2.67)$$

Substituindo (2.67) em (2.66) obtemos que

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)^2 = 9(1 - \mu) \mu \sin^2 \gamma.$$

□

Pelas Proposições 2.10 e 2.11 o polinômio característico é reescrito como

$$\lambda^4 + \lambda^2 + 9(1 - \mu) \mu \sin^2 \gamma = 0, \quad (2.68)$$

2.4.2 Condição para estabilidade

Verificaremos as condições para a estabilidade do sistema Hamiltoniano dado por (2.40). Do polinômio característico dado na expressão (2.68), ao fazer $s = \lambda^2$ obtemos que

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{F(\mu, \gamma)}}{2}}, \quad (2.69)$$

em que $F(\mu, \gamma) = 1 - 36(1 - \mu) \mu \sin^2 \gamma$, logo podemos analisar a estabilidade das soluções de equilíbrio.

Observe que para $F(\mu, \gamma) > 1$, teremos duas raízes reais puras e outras duas imaginárias, neste caso segue a solução de equilíbrio é instável devido ao Teorema 1.22. Então supondo que $F(\mu, \gamma) < 0$, então podemos reescrever (2.69) como

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm i\sqrt{|F(\mu, \gamma)|}}{2}},$$

e, portanto, da fórmula de Moivre concluímos que λ tem parte real diferente de zero e, portanto, a solução de equilíbrio é instável no sentido Lyapunov.

Supondo agora que $F(\mu, \gamma) = 0$, então (2.69) se torna

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}},$$

logo cada raiz tem multiplicidade 2, e portanto temos dois pares de autovetores iguais, e portanto A não é diagonalizável, logo a instabilidade segue do Teorema 1.22.

Supondo que $0 < F(\mu, \gamma) < 1$, então temos

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{F(\mu, \gamma)}}{2}},$$

que fornece 4 autovalores imaginários puros distintos, logo a estabilidade segue do Teorema 1.22.

Por fim, supondo $F(\mu, \gamma) = 1$, teremos duas raízes iguais a zero e duas raízes reais, logo a instabilidade segue.

Pelo exposto segue o teorema:

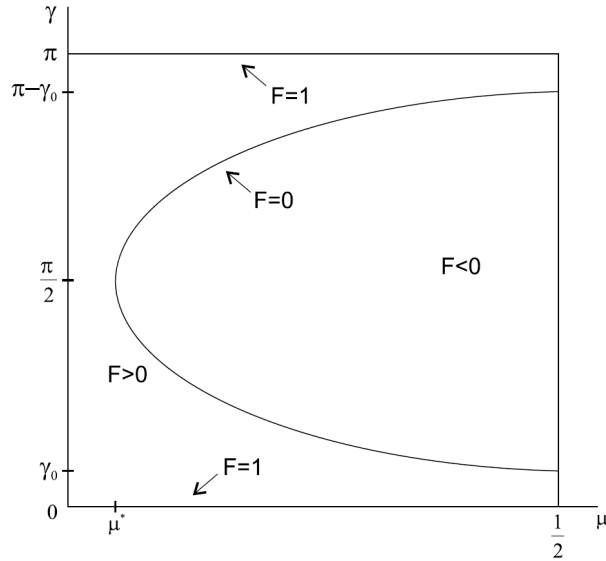
Teorema 2.12. *As soluções de equilíbrio triangulares, bem como as soluções limite das triangulares, do problema restrito de três corpos carregados em um plano, satisfazem:*

1. *Para os valores de $F(\mu, \gamma) < 0$, as soluções de equilíbrio são instáveis no sentido de Lyapunov.*
2. *Para os valores de $F(\mu, \gamma) = 0$, as soluções de equilíbrio são linearmente instáveis.*
3. *Para os valores de (μ, γ) tais que $0 < F(\mu, \gamma) < 1$, as soluções de equilíbrio são linearmente estáveis.*
4. *Para os valores de $F(\mu, \gamma) = 1$, as soluções de equilíbrio são linearmente instáveis.*

Observação 2.13. *O quarto item do Teorema 2.12 assegura que as soluções colineares, que são o limite das soluções triangulares, são linearmente instáveis. Para verificar isso, basta substituir a expressão para $\sin^2 \gamma$ dada em (2.67). Ao fazer isso, obtemos que $y = 0$.*

Observação 2.14. *No problema clássico, as soluções de equilíbrio colineares são instáveis, conforme apresentado no Teorema 1.39. Esse comportamento também se observa no caso colinear limite das soluções triangulares. Para as soluções de equilíbrio triangulares, a estabilidade é garantida pela condição estabelecida no item 3 do Teorema 2.12, assim como a restrição sobre o valor de μ no caso clássico, conforme o primeiro item do Teorema 1.40.*

Figura 2.14 – Valores de F como função de (μ, γ) .



Fonte: (BENGOCHEA; VIDAL, 2015)

2.4.3 Região estável no espaço de configuração e no espaço de parâmetros

A fim de analisar os pontos no espaço de configuração, vamos obter este a partir dos pares (x, y) que satisfazem as seguintes restrições $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$, $\rho_1 + 1 \geq \rho_2$, $\rho_2 + 1 \geq \rho_1$, $\rho_1 + \rho_2 \neq 1$ e $(\rho_1^3 - 1)(\rho_2^3 - 1) < 1$ garantem que os corpos não irão colidir.

Para mostrar a evolução da região, definida pelos pontos mencionados, com o crescimento do parâmetro μ , podemos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo definido na Figura 2.13, lembrando que $\rho_i = \beta_i^{\frac{1}{3}}$, $i = 1, 2$, logo obtemos

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \pi - \gamma = 1,$$

para o ângulo γ a expressão anterior é reescrita como

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos \gamma = 1,$$

de onde obtemos

$$1 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} \cos \gamma$$

$$1 = (x + \mu)^2 + y^2 + (x + \mu - 1)^2 + y^2 + 2\rho_1\rho_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}
0 &= 2(x + \mu)^2 - 2(x + \mu) + 2y^2 + 2\rho_1\rho_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} \cos \gamma \\
0 &= (x + \mu)^2 - (x + \mu) + y^2 + \rho_1\rho_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} \cos \gamma \\
0 &= (x + \mu - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 + \rho_1\rho_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_2} \cos \gamma
\end{aligned}$$

usando a lei dos senos e a expressão para y obtido da Figura 2.13, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (x + \mu - \frac{1}{2})^2 + y^2 + y \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} - \frac{1}{4} \\
0 &= (x + \mu - \frac{1}{2})^2 + y^2 + y \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} - \frac{\sin^2 \gamma}{4 \sin^2 \gamma} \\
0 &= (x + \mu - \frac{1}{2})^2 + y^2 + y \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma - 1}{4 \sin^2 \gamma} \\
0 &= (x + \mu - \frac{1}{2})^2 + y^2 + y \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{4 \sin^2 \gamma} - \frac{1}{4 \sin^2 \gamma} \\
\frac{1}{4 \sin^2 \gamma} &= (x + \mu - \frac{1}{2})^2 + y^2 + y \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{4 \sin^2 \gamma}
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\left(x + \mu - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{\cos \gamma}{2 \sin \gamma}\right)^2 = \frac{1}{4 \sin^2 \gamma},$$

logo podemos definir dois arcos, sendo um superior e um inferior de acordo com o sinal admitido na expressão anterior.

Fixando μ e igualando $F(\mu, \gamma)$ a zero obtemos

$$1 - 36(1 - \mu)\mu \sin^2 \gamma = 0 \Rightarrow 36(1 - \mu)\mu \sin^2 \gamma = 1 \Rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{6\sqrt{(1 - \mu)\mu}},$$

e, portanto, obtemos que $\gamma = \arcsin \frac{1}{6\sqrt{(1 - \mu)\mu}}$ e resolvendo a equação de segundo grau para μ e avaliando nos valores máximos e mínimos de $\sin^2 \gamma$ obtemos que $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$. Tomando $\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$, como o menor valor que μ assume, para $\mu \in (\mu^*, \frac{1}{2}]$, podemos obter um ângulo $\gamma = \gamma_\mu$ em que $\gamma_\mu = \arcsin \frac{1}{6\sqrt{\mu(1 - \mu)}}$ tal que $F(\mu, \gamma_\mu) = 0$.

Pelo Teorema 2.12 podemos definir as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de configurações de acordo com os valores de μ e γ , então se $\mu \in (0, \mu^*)$ então a região estável é determinada por $\gamma \in (0, \pi)$, se $\mu = \mu^*$ a região instável é delimitada para $\gamma = \frac{\pi}{2}$ e logo a região estável é definida para $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Agora se $\mu \in (\mu^*, \frac{1}{2})$ a região estável é definida para os valores de γ definidos em $(0, \gamma_\mu) \cup (\pi - \gamma_\mu, \pi)$.

Para analisar a evolução da região estável no espaço dos parâmetros, podemos estudar os parâmetros $(\delta_1, \delta_2) = (\beta_1^{\frac{1}{3}}, \beta_2^{\frac{1}{3}})$. Analogamente ao que foi feito no espaço de configuração, impomos as seguintes restrições para garantir que os corpos não colidam $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$, $\delta_1 + 1 \geq \delta_2$, $\delta_2 + 1 \geq \delta_1$, $\delta_1 + \delta_2 \neq 1$ e $(\delta_1^3 - 1)(\delta_2^3 - 1) < 1$. A partir da equação

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + 2 \cos \gamma \delta_1 \delta_2 = 1,$$

notamos que a elipse está rotacionada, devido a presença do termo $\delta_1\delta_2$, então rotacionando a elipse em relação ao eixo horizontal $\pm\frac{\pi}{4}$ eliminamos a presença desse termo e logo podemos obter os semi-eixos menor e maior dados por

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \gamma}},$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \gamma}}.$$

As elipses definidas para um valor γ e para o valor complementar $\pi - \gamma$ estão relacionadas por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Isso significa que, se uma elipse é orientada de uma certa maneira para γ , então ela será orientada perpendicularmente para $\pi - \gamma$.

Para diferentes intervalos de valores do parâmetro μ , a região estável no espaço dos parâmetros (δ_1, δ_2) varia:

- $0 < \mu < \mu^*$: Neste intervalo, todas as soluções de equilíbrio triangulares são estáveis, exceto nos pontos onde $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$. Ou seja, as soluções de equilíbrio estão dentro da elipse, exceto nas direções dos eixos coordenados.
- $\mu = \mu^*$: Aqui, a região instável é formada pelos pontos onde $\gamma = 0, \pi$ ou $\frac{\pi}{2}$. Isso indica que a elipse se ajusta para que essas direções específicas se tornem instáveis, incluindo as direções perpendiculares ao eixo principal.
- $\mu^* < \mu \leq \frac{1}{2}$: Neste intervalo, a região estável é constituída pelos pontos onde γ está em $(0, \gamma_\mu)$ ou $(\pi - \gamma_\mu, \pi)$, com $\gamma_\mu = \arcsin\left(\frac{1}{6\sqrt{\mu(1-\mu)}}\right)$. Isso mostra que a estabilidade depende de μ , sugerindo que a área da elipse que define a região estável diminui conforme μ aumenta.

3 Conclusão

Os resultados discutidos no Capítulo 1 fornecem uma compreensão dos sistemas Hamiltonianos e das transformações simpléticas que preservam a estrutura Hamiltoniana. A análise incluiu dois casos clássicos específicos: o problema de dois corpos e o problema de três corpos. Para o problema de dois corpos clássico, foi possível encontrar a solução em um referencial que descreve o movimento dos corpos em relação ao centro de massa. No caso do problema de três corpos, foi descrito o caso restrito, no qual a massa do terceiro corpo tende a zero, do qual foram obtidas as equações que descrevem a dinâmica do problema. Além disso, foram abordados teoremas de estabilidade para sistemas Hamiltonianos.

No Capítulo 2, foi abordado o problema de dois corpos carregados e o problema restrito circular dos três corpos carregados. Para o caso dos dois corpos carregados verificou-se na Seção 2.1 o comportamento dos dois corpos para os três cenários distintos: $C > 0$, $C = 0$ e $C < 0$. No primeiro caso, o comportamento segue o padrão do problema clássico, enquanto no segundo caso os corpos se comportam como partículas livres, já no terceiro caso os corpos descrevem trajetórias hiperbólicas.

Para o problema restrito planar dos três corpos carregados, verificou-se que a condição necessária para a existência das soluções triangulares e colineares é que $C_{12} > 0$, garantindo que os corpos de massas m_1 e m_2 sigam trajetórias circulares no plano. Com essa condição e a restrição $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 1$, que delimita a região de valores admissíveis para os parâmetros β_1 e β_2 , foram determinadas as soluções colineares e triangulares. Observou-se que as soluções colineares, do Teorema 2.8, são linearmente instáveis. Enquanto isso, as soluções de equilíbrio triangular são linearmente estáveis quando a condição $0 < F(\mu, \gamma) < 1$ é satisfeita, análoga à condição $0 < \mu < \mu_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}\right)$ no caso clássico. É importante ressaltar que os resultados sobre a estabilidade linear não fornecem informações sobre a estabilidade não-linear, e a análise não-linear é essencial para uma compreensão completa da estabilidade desses equilíbrios.

A estabilidade não linear de alguns casos de equilíbrio colineares e triangulares foi analisada em (VIDAL; VIDARTE, 2016). Foi provado que os equilíbrios colineares dado pelo Teorema 2.8 e os equilíbrios triangulares isósceles são estáveis para algumas regiões do espaço dos parâmetros (μ, β) e instáveis em outras.

Em conclusão, este estudo aprofundou a análise dos sistemas Hamiltonianos e dos problemas de dois e três corpos, no caso restrito, tanto em configurações clássicas quanto carregadas. Esses resultados não só reforçam a teoria existente, mas também oferecem novas perspectivas para a compreensão e aplicação de sistemas dinâmicos complexos, abrindo caminho para futuras pesquisas nesta área.

Referências

BENGOCHEA, A.; VIDAL, C. On a planar circular restricted charged three-body problem. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 358, p. 1–15, 2015.

CABRAL, H.; VIDAL, C. **Introdução à Mecânica Celeste**. Recife: DMAT-UFPE, 1999. (Notas de aula dos professores Cabral e Vidal).

LUKYANOV, L. Lagrangian solutions in the photogravitational restricted circular three-body problem. **Soviet Astronomy**, vol. 28, May-June 1984, p. 329-333. **Translation Astronomicheskii Zhurnal**, vol. 61, May-June 1984, p. 564-570, v. 28, p. 329–333, 1984.

LUKYANOV, L. Stability of lagrangian points in the restricted photogravitational three-body problem. **Soviet Astronomy**, Vol. 30, NO. 6: NOV/DEC, P. 720, 1986, v. 30, p. 720, 1986.

MEYER, K. R.; HALL, G. R.; OFFIN, D. **Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2017. v. 90. (Applied Mathematical Sciences, v. 90).

RADZIEVSKII, V. The restricted problem of three bodies taking account of light pressure. **Astronomicheskii Zhurnal**, v. 27, p. 250, 1950.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11.

USPENSKY, J. **Theory of Equations**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1948.

VIDAL, C. **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos**. Recife: DMAT-UFPE, 2003. (Notas de aula do professor Vidal).

VIDAL, C.; VIDARTE, J. Stability of the equilibrium solutions in a charged restricted circular three-body problem. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 260, n. 6, p. 5128–5173, 2016.