



Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT



Orientando: Carlos Alberto O. Costa
Orientador: Dr. João de Deus Mendes da Silva

MODELAGEM MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE IA: UMA ABORDAGEM INOVADORA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

São Luís - MA
2025

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Carlos Alberto O. Costa

MODELAGEM MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DE IA: UMA ABORDAGEM INOVADORA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno Carlos Alberto Oliveira Costa e aprovada pela comissão julgadora.

Dr. João de Deus Mendes da Silva
(Orientador)

São Luís - MA
2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Oliveira Costa, Carlos Alberto.

Modelagem matemática com auxílio de IA : uma abordagem inovadora para o ensino de funções / Carlos Alberto Oliveira Costa. - 2025.

97 f.

Orientador(a): João de Deus Mendes da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2025.

1. Modelagem Matemática. 2. Inteligência Artificial. 3. Funções Afins e Proporcionalidade. I. Mendes da Silva, João de Deus. II. Título.

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Modelagem Matemática

Aprovada em:

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

Orientador

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Junior

Examinador Interno

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Examinadora Externa

Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

São Luís - MA

2025

Dedicatória

Aos meus queridos pais, **Joaquim Alves da Costa** e **Eva de Oliveira Costa**, Dedico este trabalho a vocês, que sempre estiveram ao meu lado em todas as etapas da minha vida. Suas palavras de incentivo, seu amor incondicional e seu exemplo de dedicação e força foram a base que me sustentou nos momentos mais desafiadores.

Vocês são os melhores pais que eu poderia ter, e este é o reflexo de tudo o que me ensinaram: a nunca desistir, a acreditar em meus sonhos e a valorizar a importância do estudo e do esforço. Além disso, sou profundamente grato pela fé que me transmitiram e pelas orações que fizeram por mim. Sei que elas foram essenciais para que eu pudesse alcançar este objetivo.

Com todo o meu amor e gratidão, este trabalho é para vocês.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, Pai Todo-Poderoso, pela oportunidade de concluir este mestrado.

Aos meus pais, **Joaquim Alves da Costa** e **Eva de Oliveira Costa**, pelas orações e pela confiança.

À minha esposa, **Serjana Vale de Andrade Costa**, pelo incentivo e pela compreensão.

Aos meus filhos, **Carlos Vinícius Vale de Andrade Costa** e **Amauri Silva Pinto**, por todo o apoio.

Aos meus irmãos **Carlos Henrique Oliveira Costa**, **Cíntia Oliveira Costa** (in memoriam), **Arnaldo Oliveira Costa** e **Joaquim Alves da Costa Júnior**, às minhas cunhadas, cunhados, sobrinhos, sobrinhas, afilhados e afilhadas, meus sinceros agradecimentos pelo apoio incondicional e pela credibilidade que sempre depositaram em mim.

Aos meus compadres e comadres, em especial à comadre Paula Francinete Marques Silva, pelo cuidado e pela dedicação.

À minha sogra, Ana Vale de Andrade, pela atenção, e ao meu sogro, Sérgio Marques de Andrade (in memoriam), pela inspiração.

A todos os meus parentes, pelo encorajamento e pelas palavras de conforto nos momentos de dificuldade.

Ao Professor Dr. João de Deus Mendes da Silva, por sua orientação e acompanhamento, por ser um modelo intelectual e por sua constante disponibilidade como orientador deste trabalho, sem a qual sua concretização não teria sido possível.

A cada professor do Profmat, pelos ensinamentos que contribuíram para o meu enriquecimento pessoal e profissional, em especial ao Professor Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior.

Ao professor Bruno César Sá da Silva (@Bruno Glasses), pelos ensinamentos e pela dedicação na minha preparação para a prova do ENQ.

Aos professores Cláudio Teodista, Fábio Henrique e Laerte Bemm, pelos vídeos disponibilizados no YouTube, que muito contribuíram para o meu aprendizado.

Aos professores Igor Souza e Michael da Silva, pelo apoio e dedicação nas aulas de reforço, que foram essenciais para minha aprendizagem.

À UFMA, ao IMPA e à SBM, pelo compromisso e pela dedicação conjunta em tornar possível a realização deste trabalho da melhor maneira.

Aos colegas do Profmat Turma 2023 — Alberto, Alice, Nayra, Núbia, Francinilson, Klaus, Leonardo, Marcos, Rodrigo, Rudakoff e, em especial, Napoleão Campos Everton Sobrinho e Reginaldo Azevedo — pelos momentos de aprendizagem e companheirismo.

Aos diretores, professores, supervisoras e alunos do Centro de Ensino General Artur Carvalho e do Centro de Ensino Fernando Perdigão, pelo apoio e pela compreensão da importância deste trabalho para a melhoria da aprendizagem. A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste mestrado.

“A sabedoria é a coisa mais importante; busca-a com diligência. Emprega todos os teus esforços para alcançar o entendimento.”

– Provérbios 4:7

Resumo

Esta dissertação apresenta uma sequência didática para o ensino de funções na Educação Básica, utilizando a modelagem matemática baseada em uma conta de água real. Com o apoio de ferramentas de Inteligência Artificial, foram desenvolvidas atividades que conectam conceitos matemáticos, como funções lineares, por partes, proporcionalidade equações diofantinas, a situações práticas do cotidiano. O trabalho detalha a metodologia aplicada e discute as implicações pedagógicas da integração entre tecnologia e modelagem matemática, destacando sua relevância para um aprendizado mais significativo e para a formação de cidadãos críticos e conscientes, como preconiza a BNCC. A proposta demonstra como a abordagem interdisciplinar pode enriquecer o ensino de matemática e preparar os alunos para os desafios do mundo contemporâneo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Inteligência Artificial, Educação Matemática, Sequência Didática, Proporcionalidade e Funções Afins.

Abstract

This dissertation presents a didactic sequence for teaching functions in Basic Education, using mathematical modeling based on a real water bill. With the support of Artificial Intelligence tools, activities were developed that connect mathematical concepts, such as linear functions, by parts, proportionality, and Diophantine equations, to practical everyday situations. The study details the applied methodology and discusses the pedagogical implications of integrating technology and mathematical modeling, highlighting their relevance for more meaningful learning and the formation of critical and conscious citizens, as advocated by the BNCC. The proposal demonstrates how an interdisciplinary approach can enrich mathematics teaching and prepare students for the challenges of the contemporary world.

Key-words: Mathematical Modeling, Artificial Intelligence, Mathematics Education, Didactic Sequence, Proportionality, and Affine Functions.

Lista de Figuras

1	Gráfico de uma reta passando por P_1 , P_2 e P_3 , que intersecta o eixo OY em $(0, b)$	7
2	Exemplo de gráfico de uma função afim	9
3	Triângulo ABC e os pontos X e Y nos lados AB e AC , respectivamente, e o segmento XY paralelo ao lado BC	11
4	Fluxograma com as etapas da modelagem matemática gerado pelo ChatGPT.	16
5	Representação de Uma Planilha Eletrônica	21
6	Exemplo de modelo de função por partes.	22
7	Conta de água utilizada como base para o estudo de funções.	38
8	Gráfico da função valor da conta d'água.	39
9	Gráfico da função valor da conta d'água.	41
10	Gráfico da função valor da conta d'água.	42
11	Gráfico da Função $V(x) - C(x)$ no intervalo $[0, 50]$	57
12	Gráfico da Função $V(x) - C(x)$ no intervalo $[0, 200]$	58
13	Gráfico da Função $V(x) - B(x)$	59
14	Gráfico da Função $V(x) - D(x)$	60
15	Fotos das Atividades em Sala de Aula	66
16	Fotos das Atividades em Sala de Aula	67
17	Fotos das Atividades em Sala de Aula	67
18	Fotos das Atividades em Sala de Aula	68
19	Fotos das Atividades em Sala de Aula	68
20	Questão 2 extraída na íntegra	71

Lista de Tabelas

1	Elementos do cálculo da tarifa de água	18
2	Faixa de Consumo de Água e Valores	42
3	Elementos do cálculo da tarifa de água CAEMA	49
4	Elementos do cálculo da tarifa de água SAAE	51
5	Elementos do cálculo da tarifa de água EMBASA	54
6	Elementos do cálculo da tarifa de água GUARIROBA	55
7	Dados da Função $V(x) - D(x)$	61
8	Aplicação no Estudo de Contratação	61
9	Análise para Escolha da Companhia	62

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares Matemáticas	3
1.1 O Conjunto dos Números Naturais	3
1.1.1 Propriedades Fundamentais	3
1.1.2 Aplicações no Ensino Fundamental e Médio	4
1.2 Funções	4
1.3 A Função Afim	5
1.4 A geometria da função afim	6
1.4.1 Comentários sobre terminologia	9
1.5 A Função Linear	10
1.6 Características das funções	13
1.7 Progressão Aritmética	14
2 Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino	15
2.1 Modelagem Matemática e o Ensino de Funções	15
2.2 Modelagem Matemática como Ponte entre Teoria e Prática	16
2.3 Pensamento Crítico e Autonomia no Aprendizado	17
2.4 Modelagem Matemática e Interdisciplinaridade	17
2.5 Aplicação Prática: O Modelo Matemático da Conta de Água	17
2.6 Conclusão do Capítulo	19
3 Tecnologias Aplicadas na Educação Básica	20
3.1 Uso de IA Aplicada à Educação	20
3.2 O Uso de Planilhas Eletrônicas no Ensino da Matemática	21
3.3 O Uso de <i>Softwares</i> de Geometria Dinâmica	22
3.4 Conclusão do Capítulo	23
4 Equações Diofantinas Lineares	24
4.1 Exemplos	24
4.2 Generalidades	27
4.3 Condição de Existência de Solução	28
4.4 Soluções da Equação $ax + by = c$	29
4.5 Aplicações	32

5	Sequência Didática	37
5.1	Objetivos	37
5.2	Metodologia	38
5.3	Desenvolvimento da Sequência Didática	38
5.3.1	Etapa 2: Função Proporcional	39
5.3.2	Etapa 3: Construção de Gráficos e Análise de Padrões	40
5.3.3	Etapa 4: Estimativa e Projeções	40
5.4	Funções Lineares, Proporcionalidade e o Consumo de Água	40
5.5	Questões interessantes para abordar em sala de aula	42
5.5.1	Interpretação da Razão $\frac{f(2x)-2f(x)}{2f(x)}$	44
5.5.2	Proporcionalidade Penalizada	46
5.5.3	Implicações Pedagógicas	47
5.6	Considerações Finais	47
6	Estudos de Casos Reais	49
6.1	Conta de Água CAEMA Maranhão	49
6.2	Conta De Água da Prefeitura de Sacramento MG	51
6.3	Conta de Água da EMBASA BA	53
6.4	Conta de Água da Águas Guariroba MS	55
6.5	Gráficos Comparativos de Preços das Empresas Estudadas	56
6.5.1	Comparação entre os modelos de cobrança $V(x)$ da CAEMA e $C(x)$ do SAAE Sacramento MG	56
6.5.2	Comparação entre os modelos de cobrança $V(x)$ da CAEMA e $B(x)$ da EMBASA BA	58
6.5.3	Comparação CAEMA e Águas Guariroba MS	60
6.6	Aplicação no Estudo de Contratação de Uma Empresa de Saneamento	61
6.7	Análise para Escolha da Companhia de Saneamento	62
6.7.1	Comparação dos Custos por Faixa de Consumo	62
	Conclusão	63
	Referências	64
	Apêndices	65
	A Fotos das Atividades em Sala de Aula	66
	B Questões	69
	Anexos	72
	A Diário Oficial do Estado do Maranhão	73
	B Normas de Cobrança de Tarifas da CAEMA	77
	C Faça Sua Leitura - SAAE	84

Introdução

O ensino de matemática na Educação Básica enfrenta o desafio de tornar os conteúdos mais significativos e interligados à realidade dos alunos. Muitas vezes, a matemática é percebida como uma disciplina abstrata e distante do cotidiano, dificultando a compreensão e o engajamento dos estudantes. Nesse cenário, a modelagem matemática emerge como uma metodologia promissora para aproximar conceitos matemáticos de situações práticas, promovendo um aprendizado contextualizado e relevante.

A escolha do tema desta dissertação surgiu a partir de um diálogo com o orientador, que sugeriu a abordagem da modelagem matemática como ferramenta de pesquisa, especialmente com o apoio de tecnologias emergentes, como o *ChatGPT*. A proposta inicial tinha como objetivo explorar não apenas a aplicabilidade prática da modelagem, mas também seu potencial para auxiliar na compreensão de problemas reais e na promoção de soluções voltadas para a sociedade, com ênfase em serviços essenciais, como o abastecimento de água. Com o desenvolvimento do trabalho, a proposta foi ampliada, passando a incluir também uma análise de sensibilidade das tarifas, com vistas à sua aplicação em processos licitatórios, contribuindo para decisões mais embasadas e eficazes no setor público.

O trabalho começou com um levantamento bibliográfico sobre modelagem matemática, com destaque para autores como Rodney Carlos Bassanezi, e uma análise de como essa metodologia poderia ser aplicada em contextos cotidianos. A primeira aplicação prática inspirou-se em um problema de otimização de receita, retirado do livro “Matemática, Ciência e Aplicações” de Gelson Iezzi (Iezzi et al. 2016, p. 105-106), que abordava o cálculo de receita máxima na venda de milho verde. Embora o exercício retrate uma tentativa de modelagem matemática, esta não está tão próximo da realidade da maioria dos brasileiros, figurando mais como uma problema de laboratório e não de um problema verdadeiramente real. A partir disso, surgiu a ideia de explorar um problema mais próximo da realidade dos brasileiros: o cálculo das tarifas de consumo de água.

A ideia foi reforçada por uma experiência desenvolvida em sala de aula, no Colégio Fernando Perdigão e no General Artur Carvalho, onde uma atividade envolvendo a análise de contas de água despertou o interesse e o raciocínio lógico dos alunos. Muitos deles identificaram a relevância prática do problema, já que impactava diretamente suas famílias. Essa experiência motivou a escolha do tema da dissertação e a elaboração de uma proposta que integrasse funções afins, funções por partes, proporcionalidade, funções inversas, e progressões aritméticas, utilizando conjuntos dos números naturais e racionais.

No processo de modelagem e desenvolvimento das atividades vamos utilizar ferramentas de Inteligência Artificial, o que representa mais um diferencial desta proposta. A integração

da tecnologia permitiu a diversificação de estratégias de ensino, ampliando o alcance e a eficiência da abordagem pedagógica. É importante ressaltar que os primeiros resultados foram apresentados no 2º Encontro Mineiro do PROFMAT e a repercussão positiva de outros pesquisadores reforçou a importância e o impacto desse tema.

Esta dissertação apresenta, portanto, uma abordagem inovadora para o ensino de funções na Educação Básica, utilizando a modelagem matemática em situação real - cálculo do valor do consumo de água em residências. Além de discutir a metodologia aplicada, o trabalho aborda as implicações pedagógicas dessa abordagem, destacando sua relevância para o aprendizado matemático e a formação de cidadãos críticos e conscientes. Ao conectar conceitos matemáticos ao cotidiano e integrar tecnologias emergentes, o trabalho propõe uma contribuição significativa para a prática pedagógica e para a compreensão de problemas reais pela perspectiva da matemática.

O trabalho está organizado em capítulos que abordam desde os fundamentos da modelagem matemática e sua aplicação no ensino de funções até a análise detalhada das atividades propostas e suas implicações pedagógicas. Por meio dessa abordagem interdisciplinar e tecnológica, busca-se demonstrar como a matemática pode ser ensinada de forma mais atrativa, relevante e alinhada às demandas da sociedade atual.

No [Capítulo 1](#), introduzimos os fundamentos matemáticos necessários para a compreensão do trabalho. No [Capítulo 2](#), enfatizamos a modelagem matemática como estratégia de ensino. No [Capítulo 3](#), abordamos as tecnologias aplicadas à educação básica. No [Capítulo 4](#), destacamos as equações diofantinas lineares. No [Capítulo 5](#), apresentamos uma proposta de sequência didática para aplicação em sala de aula. Por fim, no [Capítulo 6](#), realizamos estudos de casos reais e concluímos o trabalho.

Preliminares Matemáticas

1.1 O Conjunto dos Números Naturais

O conjunto dos números naturais é um dos conceitos fundamentais da matemática, modelo abstrato, segundo E. L. Lima et al. 1997, “lentamente, à medida que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro,...) que são os números naturais.”, constituindo a base para a construção de diversos outros conjuntos numéricos. No contexto da Educação Básica, a compreensão desse conjunto desempenha um papel essencial no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Os números naturais são geralmente representados pelo conjunto:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

ou

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

A inclusão ou não do zero depende do contexto adotado. No ensino básico, é comum apresentar os naturais incluindo o zero, pois facilita a introdução de conceitos como a contagem e a construção dos números inteiros.

1.1.1 Propriedades Fundamentais

Os números naturais possuem propriedades fundamentais que permitem a estruturação de operações e conceitos matemáticos:

- **Fechamento:** A soma e o produto de dois números naturais resultam sempre em outro número natural;
- **Associatividade:** Para soma e multiplicação, temos $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$;
- **Comutatividade:** As operações de soma e multiplicação são comutativas, ou seja, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$;
- **Elemento neutro:** O zero é elemento neutro para a soma, e o um é elemento neutro para a multiplicação;

- **Distributividade:** A multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

1.1.2 Aplicações no Ensino Fundamental e Médio

O ensino dos números naturais deve ser estruturado de forma progressiva, iniciando-se pela contagem e chegando a conceitos mais avançados, como divisibilidade e progressões. Algumas estratégias didáticas incluem:

- Uso de materiais manipuláveis para introduzir a contagem e a adição.
- Jogos e atividades lúdicas para reforçar propriedades e operações.
- Exploração de problemas contextualizados, incentivando o pensamento crítico e a resolução de problemas.
- Nessa dissertação fica bem evidente a importância do estudo dos conjuntos dos números naturais na análise do domínio e do contradomínio da função estudada através da modelagem matemática do caso da conta de água real da CAEMA.

1.2 Funções

Dados os conjuntos X, Y não vazios, uma função $f : X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contra-domínio da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f , ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Exemplos particularmente simples de funções são a função identidade $f : X \rightarrow X$, dada por $f(x) = x$ para todo $x \in X$, e as funções constantes $f : X \rightarrow Y$, onde se toma um elemento $c \in Y$ e se põe $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

Recomendações

1. **Definição de $f(x)$:** A notação $f(x)$ refere-se ao valor da função f no ponto x , ou seja, a imagem do elemento x pelo mapeamento definido por f . No entanto, é comum que livros antigos e alguns contemporâneos utilizem a expressão “a função $f(x)$ ”, o que pode gerar confusões e não representa rigorosamente o conceito. Apesar de essa linguagem ser prática, ela pode comprometer a clareza do significado.
2. **Uso da Terminologia:**
 - Para funções simples, como $\sin(x)$ ou $\log(x)$, é natural referir-se a elas de forma simplificada como “a função seno” ou “a função logaritmo”, já que são amplamente compreendidas no contexto de números reais.

- No caso de polinômios, é comum dizer “a função $x^2 - 5x + 6$ ” ao invés da forma rigorosa “a função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^2 - 5x + 6$ ”. Essa simplificação é prática e suficiente em muitos contextos.
- De forma análoga, para funções exponenciais, a notação e^x é amplamente utilizada no lugar da expressão formal $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, especialmente devido à familiaridade com a notação compacta.

3. **Elementos de uma Função:** Uma função é composta pelos seguintes elementos:

- O domínio, que representa o conjunto de entrada da função.
- O contra-domínio, que é o conjunto ao qual pertencem as imagens.
- A regra de correspondência $x \mapsto f(x)$, que define como os elementos do domínio são mapeados para o contra-domínio.

Mesmo quando o domínio e o contra-domínio não são explicitados, eles estão implicitamente definidos para que a função seja bem caracterizada. Assim, perguntas como “qual é o domínio da função $f(x) = 1/x$?” só fazem sentido quando especificamos o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a função está bem definida.

Segue-se do que foi dito acima que as funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y'$ são iguais se, e somente se, $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

1.3 A Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo: A função identidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as translações $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as funções lineares, $f(x) = ax$, e as funções constantes $f(x) = b$.

É possível, mediante critérios como os que apresentaremos logo a seguir, saber que uma certa função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Neste caso, obtém-se b como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ às vezes se chama o valor inicial da função f . Quanto ao coeficiente a , ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2 . Com efeito, conhecidos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b,$$

obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número

$$a = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

chama-se a taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x + h$.

Lembremos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se:

- **crescente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- **decrecente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- **monótona não-decrecente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **monótona não-crescente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer dos quatro casos, f diz-se monótona. Nos dois primeiros (f crescente ou f decrecente) diz-se que f é estritamente monótona. Nestes dois casos, f é uma função injetiva.

1.4 A geometria da função afim

O gráfico de uma função é a representação geométrica do conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, onde x pertence ao domínio da função f . No caso de funções reais de variável real, o gráfico é geralmente representado em um sistema cartesiano bidimensional, onde:

- O eixo horizontal (eixo das abscissas) representa os valores de x .
- O eixo vertical (eixo das ordenadas) representa os valores correspondentes de $f(x)$.

Visualmente, o gráfico permite interpretar o comportamento da função, identificando características como crescimento, decrescimento, máximos, mínimos e continuidade.

Para explorar a geometria da função afim, vamos utilizar o seguinte exemplo, o qual é inspirado no livro a matemática do ensino médio, E. L. Lima et al. [2003](#).

Exemplo 1.1 *O valor a pagar em uma conta de água é dado por uma função afim $f(x) = ax + b$, onde x representa o consumo de água em metros cúbicos (m^3), b é a tarifa fixa cobrada pelo serviço, e o coeficiente a representa o valor cobrado por cada metro cúbico de água consumido.*

Vamos mostrar que o gráfico da função afim é uma reta.

O gráfico G de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma linha reta, indicando a relação linear entre o consumo e o valor total da conta. Para ver isto basta mostrar que três pontos quaisquer

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b), \quad P_2 = (x_2, ax_2 + b) \quad \text{e} \quad P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

desse gráfico são colineares. Vamos mostrar que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ é igual à soma dos outros dois. Podemos supor, sem perda de generalidade, que as abscissas x_1, x_2 e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - (ax_1 + b))^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2},$$

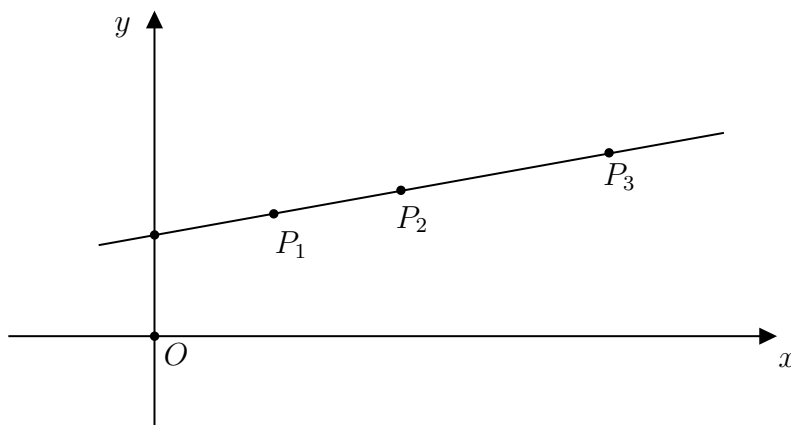
$$d(P_2, P_3) = |x_3 - x_2|\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_1, P_3) = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2}.$$

Daí se segue imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Figura 1: Gráfico de uma reta passando por P_1, P_2 e P_3 , que intersecta o eixo OY em $(0, b)$



Fonte: Adaptado de E. L. Lima et al. 1997, p.89.

Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função f , intersecta o eixo OY .

O número a chama-se a inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a , mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

De acordo com a letra estrita da definição, a fim de conhecer uma função $f : X \rightarrow Y$, deve-se ter uma regra que permita (pelo menos teoricamente) determinar o valor $f(x)$ para todo $x \in X$.

No caso particular de uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como seu gráfico é uma linha reta e como uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos, resulta que basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que a função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assume em dois números $x_1 \neq x_2$ (escolhidos arbitrariamente), para que f fique inteiramente determinada.

Na prática, sabendo que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é afim e que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficientes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto corresponde a resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

no qual as incógnitas são a e b . A solução é imediata:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

O argumento acima provou que: **dados arbitrariamente** $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Evidentemente, o gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical, isto é, não paralela ao eixo OY . Reciprocamente: toda reta não-vertical r é o gráfico de uma função afim.

Para provar esta afirmação, tomemos dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ na reta r . Como r não é vertical, temos necessariamente $x_1 \neq x_2$, logo existe uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 , logo essa reta coincide com r .

Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $y = ax + b$ **é a equação da reta r** . Se a reta r é o gráfico da função afim f , dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r , tem claramente o significado de **taxa de crescimento** de f . A esse número é dado também o nome de **inclinação** ou **coeficiente angular** da reta r , pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo do eixo OX com a reta r .

Estas interpretações nos levam a concluir imediatamente que a equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , não situados na mesma vertical, é:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

(Os segundos membros destas equações são iguais!) A primeira equação nos diz que, se começarmos no ponto (x_1, y_1) e caminharmos sobre a reta, fazendo x variar, a ordenada y começa com o valor y_1 e sofre um incremento igual ao incremento $x - x_1$ dado a x , vezes a taxa de variação

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A segunda equação diz a mesma coisa, só que partindo do ponto (x_2, y_2) .

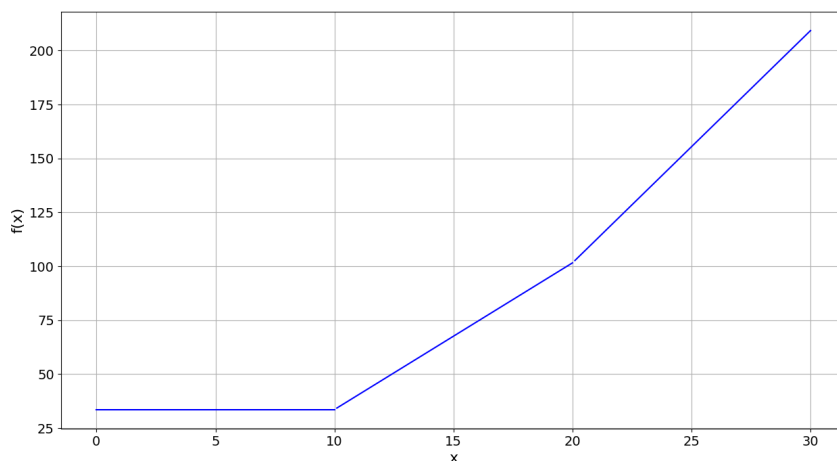
De modo análogo, vemos que a equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem inclinação a é

$$y = y_0 + a(x - x_0).$$

Para ilustrar de forma prática o gráfico de uma função afim, vamos utilizar um exemplo real baseado no modelo de cobrança da conta de água da CAEMA, representado pela seguinte função e ilustrado pela [Figura 2](#):

$$f(x) = \begin{cases} 33,58, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 6,80x - 34,42, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 10,77x - 113,82, & \text{se } 20 < x \leq 30 \end{cases} \quad (1.1)$$

Figura 2: Exemplo de gráfico de uma função afim



Fonte: Elaboração própria.

1.4.1 Comentários sobre terminologia

1. Se a função afim f é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f . O nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar, não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f , o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.
2. A maioria dos nossos textos escolares refere-se à função afim como “função do primeiro grau”. Essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau.) O mesmo defeito de nomenclatura ocorre também com as funções quadráticas. Elas muitas vezes são chamadas, incorretamente, “funções do segundo grau”.
3. A **função linear**, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

1.5 A Função Linear

Para compreendermos como o conceito de proporcionalidade era tratado no Brasil em gerações anteriores, podemos recorrer a um dos compêndios matemáticos mais influentes e amplamente utilizados no país E. L. Lima et al. 1997: Aritmética Progressiva, de Antonio Trajano. O conteúdo desta seção foi extraído dessa referência. Publicado pela primeira vez em 1883, esse livro teve mais de oitenta edições e permaneceu em circulação até a década de 1960, tornando-se uma das referências mais duradouras no ensino da matemática no Brasil. Em sua obra, Trajano define a proporcionalidade da seguinte maneira:

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Essa definição destaca a relação fundamental entre grandezas proporcionais, diferenciando a proporcionalidade direta, em que ambas as grandezas variam na mesma razão, e a proporcionalidade inversa, em que o aumento de uma resulta na diminuição da outra. O conceito, expresso de forma clara e acessível por Trajano, evidencia a importância da proporcionalidade nos estudos matemáticos e sua ampla aplicação em diversas áreas do conhecimento.

Substituindo as grandezas de Trajano por suas medidas, que são números reais, podemos traduzir o que está dito acima para nossa linguagem atual, da seguinte forma:

Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x , tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Nesta nova versão, as grandezas da definição antiga são os números reais x , e a correspondência a que Trajano se refere é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$.

É claro que se $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo c e todo x , então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = ca,$$

ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é uma função linear.

Em suma, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a constante de proporcionalidade) tal que $y = ax$ para todo valor de x .

Quanto à proporcionalidade inversa, ela só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas. Seu modelo matemático é uma função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) tal que $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ para $c, x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer. Usando o mesmo raciocínio anterior, isto quer dizer que, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, tem-se $f(x) = \frac{a}{x}$, onde a constante a é $f(1)$.

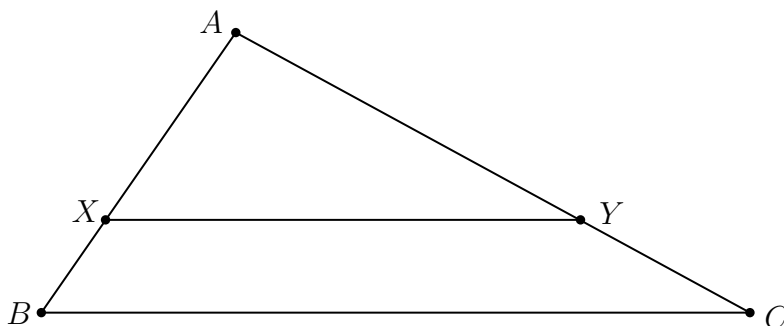
Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de “proporcionalidade”.

Na prática, há situações em que a fórmula $y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade, é dada explicitamente (ou quase). Por exemplo, se um quilo de açúcar custa a reais, então x quilos custam $y = ax$ reais.

Em muitos casos, porém, a constante a de proporcionalidade não está clara e, às vezes, nem mesmo tem relevância alguma para o problema. Um exemplo disso se tem nas aplicações do teorema de Tales.

Naquele teorema, tem-se um triângulo ABC e uma correspondência que a cada ponto X do lado AB associa o ponto Y do lado AC tal que XY é paralelo a BC . O teorema de Tales assegura que o comprimento y do segmento AY é proporcional ao comprimento x de AX . Mas que importância tem a constante de proporcionalidade $a = y/x$? Por acaso, tem-se $a = \sin B / \sin C$, mas este valor não significa muito no caso.

Figura 3: Triângulo ABC e os pontos X e Y nos lados AB e AC , respectivamente, e o segmento XY paralelo ao lado BC



Fonte: Adaptado de E. L. Lima et al. 1997, p.94

Este exemplo chama a atenção para o fato de que nos problemas relativos à proporcionalidade o que importa muitas vezes é saber apenas que se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $y'/x' = y/x$ é constante.

Quando a correspondência $x \mapsto y$, $x' \mapsto y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $y'/x' = y/x$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três. Nisto consiste a tradicional “regra de três”.

Mas há uma questão preliminar que é a seguinte: como vamos ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade? A definição de Trajano exige que se tenha $f(cx) = cf(x)$ para todos os valores reais de c e x . Em particular, **para todo c** . Isto é fácil de verificar quando c é inteiro. E nos outros casos? E se c for irracional?

Felizmente basta que se saiba que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo n inteiro, desde que se suponha que f é monótona (o que é fácil de constatar na prática).

O teorema abaixo é a chave para determinar, em todas as situações, se uma dada função é ou não linear.

Teorema 1.2 Teorema Fundamental da Proporcionalidade: *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Proveremos as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$. A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, provemos inicialmente que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, tem-se

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de modo análogo.) Temos

$$\frac{f(x)}{x} < a.$$

Tomemos um número racional r tal que

$$\frac{f(x)}{x} < r < a.$$

Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente, logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

As implicações $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são óbvias. ■

Em algumas situações, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade precisa ser aplicado a grandezas (como área ou massa, por exemplo) cujas medidas são expressas apenas por números positivos. Então temos uma função crescente $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ é o conjunto dos números positivos. Neste caso, as afirmações do Teorema lêem-se assim:

- $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Neste novo contexto, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade continua válido, isto é, as afirmações (1+), (2+) e (3+) são ainda equivalentes. Isto se mostra introduzindo a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $F(0) = 0$, $F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$. Cada uma das afirmações (1+), (2+), (3+) para f equivale a uma das afirmações (1), (2) e (3) para F .

Deve-se observar que a função f do teorema acima, sendo crescente, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente, vale um resultado análogo, com $a < 0$. A importância deste teorema está no seguinte ponto: se queremos saber se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear basta verificar duas coisas.

Primeira: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f identicamente nula.)

Segunda: $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$.

1.6 Características das funções

Função injetora (ou injetiva)

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **injetora** se elementos distintos do conjunto de partida A possuem imagens distintas no conjunto de chegada B . Em outras palavras, para todos $x_1, x_2 \in A$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

- **Expressão Formal:** Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- **Exemplo:** A função $f(x) = 2x$ é injetora, pois, se $2x_1 = 2x_2$, então $x_1 = x_2$.

Função sobrejetora (sobrejetiva)

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **sobrejetora** se cada elemento do conjunto de chegada B é imagem de pelo menos um elemento do conjunto de partida A . Em outras palavras, o contradomínio de f é igual ao seu conjunto de chegada B .

- **Expressão Formal:** Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se:

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y.$$

- **Exemplo:** A função $g(x) = x^3$ é sobrejetora, pois todo $y \in \mathbb{R}$ tem uma pré-imagem $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$.

Função bijetora (bijetiva)

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **bijetora** se ela é simultaneamente injetora e sobrejetora. Isso implica que a função é uma correspondência biunívoca entre A e B , ou seja, cada elemento de A está associado a um elemento único e distinto de B , e vice-versa.

- **Expressão Formal:** Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora se:

$$f \text{ é injetora e sobrejetora.}$$

- **Exemplo:** A função $h(x) = x + 1$ é bijetora, pois é injetora (cada valor de x gera um valor único para $h(x)$) e sobrejetora (qualquer valor real de y tem um $x = y - 1$ como pré-imagem).

Função inversa

Para que uma função $f : A \rightarrow B$ possua uma **função inversa** $f^{-1} : B \rightarrow A$, ela precisa ser bijetora. A função inversa é aquela que "desfaz" a função f , ou seja, se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

- **Expressão Formal:** Uma função $f : A \rightarrow B$ possui uma função inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ se:

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A.$$

- **Exemplo:** Se $f(x) = x + 1$, então a função inversa é $f^{-1}(y) = y - 1$, pois $f(f^{-1}(y)) = f(y - 1) = y$.

1.7 Progressão Aritmética

Uma **progressão aritmética** (P.A.) é uma sequência $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante r , chamada a **razão** da progressão. Equivalentemente, a sequência (x_n) chama-se uma progressão aritmética de razão r quando $x_{n+1} - x_n = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Na progressão aritmética (x_n) tem-se

$$x_2 = x_1 + r, \quad x_3 = x_2 + r = x_1 + 2r, \quad x_4 = x_1 + 3r, \dots$$

e, em geral, $x_{n+1} = x_1 + nr$, $n \in \mathbb{N}$.

A razão de uma progressão aritmética pode ser um número positivo, negativo ou igual a zero. No primeiro caso, a sequência (x_n) é **crescente**, isto é, $m < n \Rightarrow x_m < x_n$. Quando a razão é negativa, a progressão aritmética é uma sequência **decrecente**, isto é, $m < n \Rightarrow x_m > x_n$. Evidentemente, uma progressão aritmética de razão nula é constante: $x_1, x_1, x_1, \dots$.

Uma **sequência finita** (ou uma **lista**) é uma função cujo domínio tem a forma $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Ela é designada pela notação $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e, neste caso, diz-se que se trata de uma sequência com n termos. Em particular, uma sequência (x_1, x_2) com dois termos é o que se chama um **par ordenado**.

Uma **progressão aritmética finita** (com n termos) é uma sequência finita $(x_1, \dots, x_n)$ tal que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = r$.

Uma progressão aritmética pode ser pensada como uma sequência de pontos sobre uma reta, todos a igual distância dos seus vizinhos imediatos.

Importante destacar que além dos conteúdos matemáticos listados neste capítulo, o capítulo 4 deste trabalho é dedicado às equações diofantinas lineares que constitui parte importante deste trabalho.

Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino

O ensino de matemática, frequentemente criticado por sua abordagem abstrata e descontextualizada, pode se beneficiar de metodologias que conectam os conceitos teóricos à realidade dos alunos (L. M. W. d. Almeida e Brito 2005). A modelagem matemática é uma dessas estratégias, permitindo que os estudantes compreendam e analisem fenômenos do cotidiano por meio de representações matemáticas (L. M. W. d. Almeida e Vertuan 2011).

Neste capítulo, discutiremos a modelagem matemática como ferramenta pedagógica, destacando sua aplicação na educação básica e sua capacidade de estimular o pensamento crítico e a autonomia dos alunos. Também exploraremos sua interdisciplinaridade e os desafios de implementação, culminando na análise de um caso prático baseado no cálculo da conta de água.

2.1 Modelagem Matemática e o Ensino de Funções

A modelagem matemática consiste em um processo no qual situações do mundo real são traduzidas para o contexto matemático, analisadas e, posteriormente, interpretadas de volta para a realidade. De acordo com Bassanezi 2002, a modelagem é uma ponte entre a matemática acadêmica e problemas concretos, contribuindo para uma compreensão mais significativa dos conceitos matemáticos.

No ensino de funções, a modelagem matemática possibilita a introdução de conceitos como proporcionalidade, função afim, função por partes e crescimento exponencial, tornando o aprendizado mais dinâmico e contextualizado. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância de estratégias que favoreçam a autonomia do estudante e a aplicação da matemática em situações do dia a dia, sendo a modelagem uma ferramenta essencial para esse propósito.

2.2 Modelagem Matemática como Ponte entre Teoria e Prática

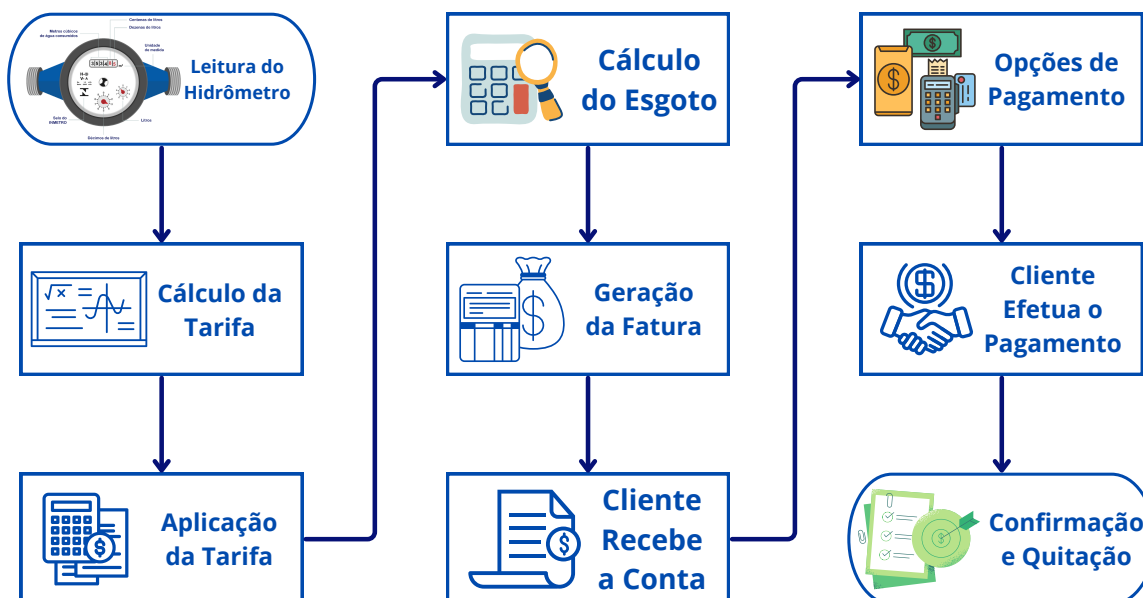
A modelagem matemática favorece a aprendizagem ao transformar conceitos abstratos em situações concretas. Diferentemente da abordagem tradicional, na qual a matemática é apresentada de forma puramente algébrica, a modelagem permite que o aluno explore, analise e formule hipóteses a partir de dados reais.

Ao integrar à Matemática situações e problemas que são familiares para os alunos – como aspectos sociais, econômicos e ambientais –, a Modelagem incrementa a aprendizagem e mostra que o estudo dessa disciplina, além de importante, pode ser provocativo e agradável (L. W. d. Almeida, Silva e Vertuan 2016).

No ensino de funções, esse processo pode ser observado ao analisar, por exemplo, o cálculo da conta de água, onde a tarifação ocorre por meio de funções por partes. Esse modelo matemático reflete diretamente a variação do consumo e o impacto financeiro para os consumidores, permitindo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos matemáticos envolvidos.

A seguir, apresenta-se um fluxograma do processo de modelagem matemática aplicado ao ensino de funções:

Figura 4: Fluxograma com as etapas da modelagem matemática gerado pelo ChatGPT.



Fonte: Elaboração própria.

2.3 Pensamento Crítico e Autonomia no Aprendizado

Um dos principais benefícios da modelagem matemática é o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos alunos. Ao invés de simplesmente aplicar fórmulas pré-definidas, o estudante passa a compreender a matemática como uma ferramenta para a resolução de problemas reais.

A construção de modelos matemáticos incentiva os alunos a:

- Analisar situações do dia a dia e formular perguntas matemáticas sobre elas.
- Experimentar diferentes abordagens e validar suas hipóteses.
- Interpretar os resultados e relacioná-los ao contexto original.

Estudos como os de Lesh e Doerr [2003](#) indicam que alunos que trabalham com modelagem matemática desenvolvem melhores habilidades de raciocínio lógico, argumentação e capacidade de resolver problemas complexos.

2.4 Modelagem Matemática e Interdisciplinaridade

A modelagem matemática não está restrita ao ensino de matemática. Sua aplicação se estende a diversas áreas do conhecimento, permitindo uma abordagem interdisciplinar. Algumas possíveis conexões incluem:

- Economia e Gestão Financeira: O conceito de custo marginal e eficiência econômica pode ser explorado ao analisar tarifas de serviços públicos.
- Ciências Ambientais: O impacto do consumo excessivo de recursos naturais pode ser modelado matematicamente para estimular a conscientização ambiental.
- Física e Engenharia: Funções exponenciais podem ser utilizadas para modelar crescimento populacional, propagação de epidemias ou fenômenos físicos.

Ao integrar diferentes áreas do conhecimento, a modelagem matemática contribui para uma formação mais completa, preparando os alunos para enfrentar problemas complexos com abordagens diversas.

2.5 Aplicação Prática: O Modelo Matemático da Conta de Água

Pesquisas e experiências práticas têm demonstrado os benefícios da modelagem matemática na educação. Estudos revelam que a metodologia aumenta o interesse e o desempenho dos alunos, além de melhorar habilidades como resolução de problemas e trabalho em equipe. Professores que utilizam a modelagem relatam uma superação das barreiras emocionais dos alunos em relação à matemática, favorecendo um relacionamento mais positivo com a disciplina. Além disso, o trabalho colaborativo incentivado pela

modelagem desenvolve habilidades sociais e cognitivas, como argumentação, tomada de decisões e comunicação eficaz, elementos fundamentais para o desenvolvimento acadêmico e pessoal.

A [Tabela 1](#) apresenta as faixas de consumo e os respectivos valores praticados pela CAEMA.

Tabela 1: Elementos do cálculo da tarifa de água

FAIXA DE CONSUMO	VALOR
de 0 a 10	33,58 por mês
de 11 a 20	6,80 por m^3
de 21 a 30	10,77 por m^3
de 31 a 50	13,68 por m^3
acima de 50	21,48 por m^3

Fonte: CAEMA [2024](#).

Além disso, a tarifa de esgoto corresponde a 100% do valor cobrado na conta de água, dobrando assim o custo final do usuário.

A estrutura de cobrança pode ser descrita matematicamente por meio de uma função por partes, construída com base nos dados fornecidos na Tabela 1, que apresenta as faixas de consumo e os respectivos valores cobrados pela concessionária. Essa função, que modela o sistema de tarifação da CAEMA, foi elaborada com o auxílio de inteligência artificial, especificamente o *ChatGPT*, a partir da análise das faixas de consumo e das tarifas progressivas. O modelo resultante define o custo total da conta de água de acordo com o volume consumido, combinando valores fixos e variáveis conforme cada faixa. Esse tipo de representação matemática permite não apenas compreender o impacto do consumo nas tarifas, mas também explorar, de forma didática, conceitos como funções definidas por partes, progressões e até derivadas no ensino médio e superior.

A seguir, apresentamos uma formulação matemática que modela esse sistema tarifário:

$$f(x) = \begin{cases} 33,58, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 6,80x - 34,42, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 10,77x - 113,82, & \text{se } 20 < x \leq 30 \\ 13,68x - 201,12, & \text{se } 30 < x \leq 50 \\ 21,48x - 591,12, & \text{se } x > 50. \end{cases} \quad (2.1)$$

Esse exemplo ilustra como a modelagem matemática pode ser aplicada para compreender um problema real e como sua estrutura pode ser explorada em sala de aula para desenvolver habilidades matemáticas nos estudantes. Ao longo deste capítulo, discutiremos como a modelagem pode ser utilizada como estratégia didática, apresentando exemplos, metodologias e aplicações práticas no ensino da matemática.

Para incluir a tarifa de esgoto no modelo matemático, basta considerar que ela equivale a 100% do valor da conta de água. Assim, a função $V(x)$, que representa o valor total da fatura (água + esgoto), será simplesmente o dobro da função $f(x)$ que modela a conta de água.

A função $V(x)$ pode ser expressa como:

$$V(x) = 2f(x) \quad (2.2)$$

Substituindo os valores da função $f(x)$, temos:

$$V(x) = \begin{cases} 67, 16, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 13, 60x - 68, 84, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 21, 54x - 227, 64, & \text{se } 20 < x \leq 30 \\ 27, 36x - 402, 24, & \text{se } 30 < x \leq 50 \\ 42, 96x - 1.182, 24, & \text{se } x > 50. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.6 Conclusão do Capítulo

Este capítulo destacou a importância da modelagem matemática como estratégia de ensino, enfatizando sua aplicação no ensino de funções e sua capacidade de conectar teoria e prática. A modelagem não apenas facilita o aprendizado matemático, mas também desenvolve o pensamento crítico e promove a autonomia dos estudantes.

Além disso, discutimos o potencial interdisciplinar da modelagem matemática e sua aplicação prática na análise da conta de água, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos dentro de um contexto real e significativo.

Tecnologias Aplicadas na Educação Básica

A integração de tecnologias no ensino tem desempenhado um papel essencial na modernização da educação básica, tornando a aprendizagem mais interativa e conectada à realidade dos alunos (Mercado 2002; Borba e Penteado 2005). Entre essas tecnologias, destacam-se a inteligência artificial, as planilhas eletrônicas e os *softwares* de geometria dinâmica, que oferecem novas formas de explorar conceitos matemáticos e aplicá-los a situações do cotidiano.

Neste capítulo, será abordado como essas ferramentas podem ser utilizadas para modelar a conta de água da Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão (CAEMA), permitindo que os alunos compreendam melhor os cálculos tarifários e analisem padrões de consumo. A inteligência artificial auxilia na interpretação de dados e na criação de modelos preditivos, enquanto as planilhas eletrônicas facilitam a organização e análise dos valores das faturas. Além disso, o *software GeoGebra* (Oliveira e Cunha 2021) possibilita a construção de gráficos que ilustram a relação entre o consumo de água e os custos correspondentes.

O objetivo deste capítulo é demonstrar como a aplicação dessas tecnologias na educação básica pode tornar o ensino da matemática mais dinâmico, acessível e próximo da realidade dos estudantes, incentivando o pensamento crítico e a resolução de problemas do dia a dia.

3.1 Uso de IA Aplicada à Educação

A inteligência artificial tem sido uma aliada no ensino da matemática, auxiliando na análise de dados e na modelagem de situações reais (D'Ambrosio 1996; Maia 2010). Para os alunos do ensino médio, compreender como os preços das contas de água são calculados pode ser um desafio, especialmente quando há diferentes faixas tarifárias.

Imagine uma situação em que um estudante recebe a conta de água da casa de sua família e percebe que o valor da fatura variou bastante nos últimos meses. Ele decide entender melhor como esse cálculo é feito e busca ferramentas tecnológicas para ajudá-lo. Usando uma planilha eletrônica, ele insere os valores de consumo de água de sua casa nos últimos seis meses e observa que o valor cobrado não aumenta de forma linear, mas segue uma estrutura progressiva, onde o preço por metro cúbico varia conforme o consumo. Para entender essa variação, ele utiliza um chat de inteligência artificial, como o ChatGPT, para fazer perguntas como:

- "Como calcular a conta de água considerando tarifas progressivas?"
- "Qual é a fórmula matemática que representa esse tipo de cobrança?"
- "Existe um modelo matemático para prever quanto minha conta será no próximo mês?"

A IA ajuda o aluno a entender que a conta de água pode ser modelada como uma função matemática definida por partes, onde cada intervalo de consumo corresponde a uma fórmula diferente. Além disso, sugere maneiras de representar essa função em um gráfico usando o *GeoGebra*.

Esse exemplo mostra como a inteligência artificial pode atuar como um facilitador no ensino e aprendizagem, ajudando alunos e docentes a explorar conceitos matemáticos de forma aplicada e a desenvolver um pensamento investigativo com mais facilidade (Lima e Kochhann 2023).

3.2 O Uso de Planilhas Eletrônicas no Ensino da Matemática

A tecnologia tem desempenhado um papel cada vez mais relevante na educação, especialmente no ensino da matemática. Ferramentas computacionais, como planilhas eletrônicas, oferecem recursos que facilitam a organização de dados, a realização de cálculos automatizados e a construção de modelos matemáticos. O uso dessas tecnologias pode tornar a aprendizagem mais dinâmica e interativa, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma visual e aplicada (Demo 1998; Tajra 2001).

Um exemplo prático de aplicação das planilhas eletrônicas no ensino da matemática está na modelagem da estrutura tarifária de contas de água. No estado do Maranhão, a Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão (CAEMA) utiliza um sistema de cobrança baseado em faixas de consumo, onde o valor da conta de água varia conforme a quantidade consumida. A estrutura de preços é apresentada na tabela a seguir:

Figura 5: Representação de Uma Planilha Eletrônica

1ª Faixa	Até 10 m ³ - R\$ 33,58 valor fixo										
2ª Faixa	Acrescentar R\$ 6,80 por cada m ³ se 10 < x ≤ 20										
3ª Faixa	Acrescentar R\$ 10,77 por cada m ³ se 20 < x ≤ 30										
4ª Faixa	Acrescentar R\$ 13,68 por cada m ³ se 30 < x ≤ 50										
5ª Faixa	Acrescentar R\$ 21,48 por cada m ³ se x > 50										

2ª Faixa	m ³	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	6,8(x)-34,42	40,38	47,18	53,98	60,78	67,58	74,38	81,18	88	94,78	101,58

3ª Faixa	m ³	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	10,77(x)-113,82	112,4	123	134	144,66	155,43	166,20	177	188	198,51	209,28

Fonte: Elaboração própria.

Ao utilizar uma planilha eletrônica, é possível organizar os cálculos de forma automatizada, permitindo que os alunos analisem a variação dos valores cobrados e compreendam como a tarifação funciona matematicamente. A tabela acima apresenta os cálculos para diferentes faixas de consumo, aplicando as respectivas fórmulas matemáticas para determinar o valor da conta de água.

Ao organizar essas informações em uma planilha do Excel, os estudantes podem visualizar a evolução do custo da conta de água conforme o consumo aumenta. Além disso, podem modificar os valores de entrada e observar os impactos nas tarifas de forma instantânea, desenvolvendo um pensamento matemático mais investigativo.

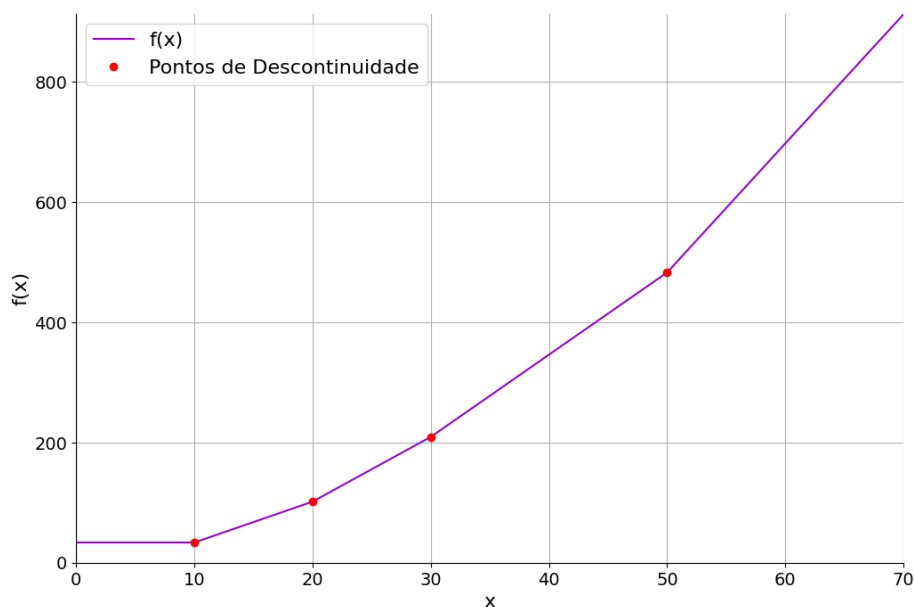
Dessa maneira, o uso de planilhas eletrônicas no ensino da matemática não apenas facilita a compreensão de conceitos como funções, progressões e modelagem matemática, mas também aproxima o aprendizado da realidade cotidiana dos alunos. Ao longo deste capítulo, serão discutidas metodologias para a utilização de planilhas no ensino, exemplos de aplicação e os benefícios dessa abordagem para a construção do conhecimento matemático.

3.3 O Uso de *Softwares* de Geometria Dinâmica

Os *softwares* de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, desempenham um papel essencial na visualização de conceitos matemáticos e no estudo de funções aplicadas a problemas reais. No caso da modelagem da conta de água da CAEMA, o *GeoGebra* pode ser utilizado para construir o gráfico da função que representa a estrutura tarifária adotada.

A tarifa da conta de água geralmente segue um modelo de função por partes, onde diferentes faixas de consumo possuem diferentes coeficientes de cobrança. Para ilustrar isso, pode-se modelar matematicamente a estrutura tarifária e representá-la graficamente no *GeoGebra* (Figura 6).

Figura 6: Exemplo de modelo de função por partes.



Fonte: Elaboração própria.

3.4 Conclusão do Capítulo

A conclusão resume os principais benefícios do uso de tecnologias no ensino básico, ressaltando que ferramentas como ChatGPT, Excel, *GeoGebra* e Cabri Geometria não apenas enriquecem o aprendizado, mas também preparam os alunos para o futuro digital. A incorporação dessas tecnologias contribui para o desenvolvimento de uma série de competências essenciais, como autonomia, pensamento crítico, capacidade analítica, raciocínio espacial e colaboração.

Além disso, as perspectivas futuras para o uso de tecnologias na educação básica são promissoras, especialmente com o avanço de novas ferramentas e o desenvolvimento contínuo da inteligência artificial. Com uma formação docente adequada, as tecnologias podem ser cada vez mais integradas ao currículo escolar, transformando o aprendizado em um processo dinâmico, atrativo e relevante para a vida dos estudantes.

Equações Diofantinas Lineares

Muitos problemas do dia a dia envolvem encontrar soluções inteiras para determinadas condições. Suponha que seja necessário alocar recursos limitados entre dois itens distintos, cada um com um custo fixo. O orçamento total disponível para essa alocação é de um valor específico. A questão central é: **quantas unidades de cada item podem ser adquiridas respeitando esse limite?**

Matematicamente, esse problema pode ser modelado por uma equação da forma:

$$ax + by = c$$

onde x e y representam as quantidades dos dois itens, enquanto a e b são seus respectivos custos unitários, e c é o orçamento total disponível. Como esses itens são indivisíveis, os valores de x e y precisam ser números inteiros não negativos.

Esse tipo de equação, em que buscamos soluções inteiras para uma equação linear com coeficientes inteiros, é chamado de **equação diofantina linear**. Esse conceito tem aplicações importantes na matemática e em diversas áreas, como otimização, programação linear, criptografia e teoria dos números.

4.1 Exemplos

Para tornar o assunto mais palatável ainda vejamos os exemplos seguintes.

Exemplo 4.1 *Uma escola está organizando uma feira e precisa alugar mesas e cadeiras, cujos preços são: Cada mesa custa R\$ 50,00 e cada cadeira custa R\$ 20,00 e o total disponível para o aluguel é de R\$ 300,00.*

- a) *Quantas mesas e quantas cadeiras podem ser alugadas?*
- b) *E se a escola precisasse de 9 móveis no total?*

Matematicamente, esse problema pode ser modelado por uma equação da forma:

$$50x + 20y = 300$$

onde x representa o número de mesas e y representa o número de cadeiras.

A equação inicial é:

$$50x + 20y = 300 \Rightarrow 5x + 2y = 30$$

Vamos encontrar a solução geral. Usamos o método da divisão euclidiana para resolver:

1. Encontramos uma solução particular. Para isso, fazemos $y = 0$, o que resulta:

$$5x = 30 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, uma solução particular é $(x_0, y_0) = (6, 0)$.

2. A solução geral da equação é dada por:

$$x = x_0 + 2t \quad \text{e} \quad y = y_0 - 5t$$

Substituindo a solução particular:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 2t \quad \text{e} \quad y = y_0 - 5t \\ x &= 6 + 2t \quad \text{e} \quad y = 0 - 5t \end{aligned}$$

Agora, precisamos garantir que $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$6 + 2t \geq 0$$

$$2t \geq -6$$

$$\boxed{t \geq -3}$$

e

$$-5t \geq 0$$

$$t \leq 0$$

Portanto, a restrição sobre t é:

$$-3 \leq t \leq 0$$

Montamos a tabela com os valores inteiros de t :

t	-3	-2	-1	0
x	0	2	4	6
y	15	10	5	0

a) Quantas mesas e quantas cadeiras podem ser alugadas?

- a) $(0, 15)$
 $(2, 10)$
 $(4, 5)$
 $(6, 0)$

b) E se a escola precisasse de 9 móveis no total?

- b) $(4, 5)$
 $4+5=9$

Exemplo 4.2 *Uma pessoa recebeu 91 reais em notas de 2 e 5 reais.*

1. Qual o número máximo de notas que ela pode ter recebido? E qual o número mínimo?

Mín 20 $(3, 17)$; **Máx 44** $(43, 1)$

2. O número de notas recebidas de 2 reais pode ter sido igual ao número de notas de 5 reais?

Sim, 13 notas de R\$ 2,00 e 13 notas de R\$ 5,00.

Solução

$$2x + 5y = 91$$

Resolução pelo algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|l|l} & 2 & 2 \\ \hline 5 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & \end{array}$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot (-2) + 5 \cdot (1) = 1 \quad (4.1)$$

Multiplicando por 91:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-182) + 5 \cdot (91) &= 91 \\ x = -182 + 5t, \quad y &= 91 - 2t \end{aligned}$$

Restrições:

$$-182 + 5t \geq 0 \Rightarrow 5t \geq 182 \Rightarrow t \geq \frac{182}{5} = 36.4 \Rightarrow t \geq 37$$

$$91 - 2t \geq 0 \Rightarrow -2t \geq -91 \Rightarrow t \leq \frac{91}{2} = 45.5 \Rightarrow t \leq 45$$

Portanto:

$$37 \leq t \leq 45$$

t	37	38	39	40	41	42	43	44	45
x	3	8	13	18	23	28	33	38	43
y	17	15	13	11	9	7	5	3	1
	20		Igual				44		
	Mínimo						Máximo		

Outra maneira (congruência):

$$2x + 5y \equiv 91 \pmod{2}$$

$$y \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\boxed{y = 1 + 2t}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Substituindo na equação original:

$$2x + 5(1 + 2t) = 91$$

$$2x + 5 + 10t = 91$$

$$2x = 86 - 10t$$

$$x = \frac{86 - 10t}{2}$$

$$\boxed{x = 43 - 5t}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4.2 Generalidades

As equações diofantinas lineares são abordadas no Capítulo 8 de Edgard [1981](#) e o conteúdo presente nesta seção foi extraído de lá. O tipo mais simples de *equação diofantina* é a equação diofantina linear com duas incógnitas x e y :

$$ax + by = c$$

onde a , b e c são inteiros dados, sendo $ab \neq 0$.

Todo par de *inteiros* x_0 , y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$ diz-se uma *solução inteira* ou apenas uma *solução* da equação $ax + by = c$.

Consideremos, p. ex., a equação diofantina linear com duas incógnitas:

$$3x + 6y = 18$$

Temos:

$$3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 18$$

$$3 \cdot (-6) + 6 \cdot 6 = 18$$

$$3 \cdot 10 + 6 \cdot (-2) = 18$$

Logo, os pares de inteiros:

$$4 \text{ e } 1, \quad -6 \text{ e } 6, \quad 10 \text{ e } -2$$

são *soluções* da equação $3x + 6y = 18$.

Existem equações diofantinas lineares com duas incógnitas que *não têm solução*. Assim, p.ex., a equação diofantina linear:

$$2x + 4y = 7$$

não tem solução, porque $2x + 4y$ é um inteiro par quaisquer que sejam os valores inteiros de x e y , enquanto que 7 é um inteiro *ímpar* (observe-se que $2 = \text{mdc}(2, 4) \nmid 7$).

De modo geral, a equação diofantina linear $ax + by = c$ *não tem solução* todas as vezes que $d = \text{mdc}(a, b)$ *não divide* c , como é óbvio.

4.3 Condição de Existência de Solução

Teorema 4.3 *A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se e somente se d divide c , sendo $d = \text{mdc}(a, b)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que a equação $ax + by = c$ tem uma *solução*, isto é, que existe um par de inteiros x_0, y_0 tais que:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Por ser $\text{mdc}(a, b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, e temos:

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0).$$

E como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro, segue-se que d *divide* c ($d \mid c$).

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que d *divide* c ($d \mid c$), isto é, que $c = dt$, onde t é um inteiro.

Por ser $\text{mdc}(a, b) = d$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que:

$$d = ax_0 + by_0,$$

o que implica:

$$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0).$$

Isto é, o par de inteiros:

$$x = tx_0 = \frac{c}{d}x_0, \quad y = ty_0 = \frac{c}{d}y_0$$

é uma *solução* da equação $ax + by = c$. ■

4.4 Soluções da Equação $ax + by = c$

Teorema 4.4 *Se d divide c ($d \mid c$), sendo $d = \text{mdc}(a, b)$, e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções são dadas pelas fórmulas:*

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

Demonstração: Suponhamos que o par de inteiros x_0, y_0 é uma *solução particular* da equação $ax + by = c$, e seja x_1, y_1 uma outra *solução qualquer* desta equação. Então, temos:

$$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1,$$

e, portanto:

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1).$$

Por ser $\text{mdc}(a, b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, com r e s *primos entre si*. Substituindo estes valores de a e b na igualdade anterior e cancelando o fator comum d , obtemos:

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1).$$

Assim sendo, $r \mid s(y_0 - y_1)$, e como o $\text{mdc}(r, s) = 1$, segue-se que $r \mid (y_0 - y_1)$, isto é:

$$y_0 - y_1 = rt \quad \text{e} \quad x_1 - x_0 = st,$$

onde t é um inteiro. Portanto, temos as fórmulas:

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, \quad y_1 = y_0 - rt = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t.$$

Estes valores de x_1 e y_1 satisfazem realmente a equação $ax + by = c$, qualquer que seja o inteiro t , pois, temos:

$$ax_1 + by_1 = a \left[x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t \right] + b \left[y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t \right] = (ax_0 + by_0) + (ab/d - ab/d)t = c + 0 \cdot t = c.$$

■

Como se vê, se $\text{mdc}(a, b) \mid c$, então a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções, uma para cada valor do inteiro arbitrário t .

Corolário 4.5 *Se $\text{mdc}(a, b) = 1$ e se x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:*

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

Nota: Uma *solução particular* da equação diofantina linear se obtém por tentativas ou pelo *algoritmo de Euclides*. E em ambos os casos a *solução geral* se pode obter usando o [Teorema 4.4](#), conforme se vai ver nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.6 *Determinar todas as soluções da equação diofantina linear:*

$$172x + 20y = 1000$$

Determinemos, inicialmente, o $\text{mdc}(172, 20)$ pelo algoritmo de Euclides:

$$172 = 20 \cdot 8 + 12$$

$$20 = 12 \cdot 1 + 8$$

$$12 = 8 \cdot 1 + 4$$

$$8 = 4 \cdot 2.$$

Portanto, o $\text{mdc}(172, 20) = 4$ e como $4 \mid 1000$, segue-se que a equação dada tem solução.

Posto isto, cumpre obter a expressão do inteiro 4 como combinação linear de 172 e 20, para que o que basta eliminar sucessivamente os restos 8 e 12 entre as três primeiras igualdades anteriores do seguinte modo:

$$4 = 12 - 8 = 12 - (20 - 12) = 2 \cdot 12 - 20 = 2(172 - 20 \cdot 8) - 20 = 172 \cdot 2 + 20 \cdot (-17).$$

Isto é:

$$4 = 172 \cdot 2 + 20 \cdot (-17).$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $\frac{1000}{4} = 250$, obtemos:

$$1000 = 172 \cdot 500 + 20 \cdot (-4250).$$

Portanto, o par de inteiros $x_0 = 500$, $y_0 = -4250$ é uma solução particular da equação proposta, e todas as outras soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 500 + \left(\frac{20}{4}\right)t = 500 + 5t, \quad y = -4250 - \left(\frac{172}{4}\right)t = -4250 - 43t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

Exemplo 4.7 *Determinar todas as soluções inteiras e positivas da equação diofantina linear:*

$$18x + 5y = 48$$

Determinemos o $\text{mdc}(18, 5)$ pelo algoritmo de Euclides:

$$18 = 5 \cdot 3 + 3$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2.$$

Portanto, o $\text{mdc}(18, 5) = 1$ e a equação dada tem solução. E para exprimir 1 como combinação linear de 18 e 5 basta eliminar os restos 2 e 3 entre as três primeiras igualdades anteriores do seguinte modo:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2(18 - 5 \cdot 3) - 5 = 18 \cdot 2 + 5 \cdot (-7).$$

Isto é:

$$1 = 18 \cdot 2 + 5 \cdot (-7).$$

e

$$48 = 18 \cdot 96 + 5 \cdot (-336)$$

Logo, o par de inteiros $x_0 = 96$, $y_0 = -336$ é uma solução particular da equação proposta, e todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 96 + 5t, \quad y = -336 - 18t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

As soluções inteiras e positivas se acham escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$96 + 5t > 0, \quad -336 - 18t > 0.$$

Isto é:

$$t < -19\frac{1}{5} \quad e \quad t < -18\frac{2}{3}.$$

O que implica $t = -19$ e, portanto:

$$x = 96 + 5(-19) = 1, \quad y = -336 - 18(-19) = 6.$$

Assim, o par de inteiros $x = 1$, $y = 6$ é a única solução inteira e positiva da equação $18x + 5y = 48$.

Exemplo 4.8 Resolver a equação diofantina linear:

$$39x + 26y = 105.$$

O $\text{mdc}(39, 26) = 13$ e como 13 não divide 105, segue-se que a equação dada não tem solução.

Exemplo 4.9 Resolver a equação diofantina linear:

$$14x + 22y = 50.$$

O $\text{mdc}(14, 22) = 2$ e como $2 \mid 50$, a equação dada tem solução, e por simples inspeção logo se vê que:

$$14 \cdot 2 + 22 \cdot 1 = 50,$$

de modo que o par de inteiros $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ é uma solução particular, e por conseguinte todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 2 + 11t, \quad y = 1 - 7t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

4.5 Aplicações

O uso das equações diofantinas para estudar problemas de modelagem de uma conta de água.

1ª Faixa:

$$f(x) = 33,58 \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 10$$

2ª Faixa:

$$f(x) = 6,80x - 34,42 \quad \text{se} \quad 10 < x \leq 20$$

$$y = 6,80x - 34,42 \quad (\times 100)$$

$$100y = 680x - 3442$$

$$680x - 100y = 3442 \quad (\div 2)$$

$$340x - 50y = 1721$$

	6	1	4
340	50	40	10
40	10	0	

A equação $340x - 50y = 1721$ não tem solução, pois o $\text{mdc}(340, 50) = 10$ e $10 \nmid 1721$.

3ª Faixa:

$$10,77x - 113,82 \quad \text{se} \quad 20 < x \leq 30$$

$$y = 10,77x - 113,82 \quad (\times 100)$$

$$100y = 1077x - 11382$$

$$1077x - 100y = 11382$$

	10	1	3	2	1	7
1077	100	77	23	8	7	1
77	23	8	7	1	0	

$$1077 = 10 \cdot 100 + 77$$

$$100 = 1 \cdot 77 + 23$$

$$77 = 3 \cdot 23 + 8$$

$$23 = 2 \cdot 8 + 7$$

$$8 = 1 \cdot 7 + 1$$

$$1 = 8 - (23 - 2 \cdot 8)$$

$$1 = 8 - 23 + 2 \cdot 8$$

$$1 = -23 + 3 \cdot 8$$

$$1 = -23 + 3 \cdot (77 - 3 \cdot 23)$$

$$1 = -23 + 3 \cdot 77 - 9 \cdot 23$$

$$1 = 3 \cdot 77 - 10 \cdot 23$$

$$1 = 3 \cdot 77 - 10 \cdot (100 - 77)$$

$$1 = 3 \cdot 77 - 10 \cdot 100 + 10 \cdot 77$$

$$1 = 100 \cdot (-10) + 13 \cdot 77$$

$$1 = 100 \cdot (-10) + 13 \cdot (1077 - 10 \cdot 100)$$

$$1 = 100 \cdot (-10) + 13 \cdot 1077 - 130 \cdot 100$$

$$1 = -140 \cdot 100 + 13 \cdot 1077$$

$$1077 \cdot (13) - 100 \cdot (140) = 1 \quad (\text{multiplicado por } 11382)$$

$$1077 \cdot (147966) - 100 \cdot (1.593.480) = 11382$$

$$x_0$$

$$y_0$$

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t$$

$$x = 147966 + 100t$$

$$20 < 147966 + 100t \leq 30$$

$$-147.946 < 100t \leq -147.936$$

$$-1479,46 < t \leq -1479,36$$

$$S = \emptyset$$

Não existe solução inteira na 3ª faixa.

4ª Faixa:

$$f(x) = 13,68x - 201,12 \quad \text{se } 30 < x \leq 50$$

$$y = 13,68x - 201,12 \quad (\times 100)$$

$$100y = 1368x - 20112$$

$$1368x - 100y = 20112$$

	13	1	2	8
1368	100	68	32	4
68	32	4	0	

Como o $\text{MDC}(1368, 100) = 4$ e $4 \mid 20112$, a equação *tem solução*.

$$1368 = 13 \cdot 100 + 68$$

$$100 = 1 \cdot 68 + 32$$

$$68 = 2 \cdot 32 + 4$$

$$4 = 68 - 2 \cdot 32$$

$$4 = 68 - 2 \cdot (100 - 68)$$

$$4 = 68 - 2 \cdot 100 + 2 \cdot 68$$

$$4 = -2 \cdot 100 + 3 \cdot 68$$

$$4 = -2 \cdot 100 + 3 \cdot (1368 - 13 \cdot 100)$$

$$4 = -2 \cdot 100 + 3 \cdot 1368 - 39 \cdot 100$$

$$4 = 1368 \cdot 3 - 100 \cdot 41$$

$$1368 \cdot (3) - 100 \cdot (41) = 4 \quad (\times 5028)$$

$$1368 \cdot (15084) - 100 \cdot (206148) = 20112$$

 x_0
 y_0

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t$$

$$x = 15084 + \frac{100}{4}t$$

$$x = 15084 + 25t$$

$$30 < 15084 + 25t \leq 50$$

$$-15054 < 25t \leq -15034$$

$$-602,16 < t \leq -601,36$$

$$t = -602$$

$$x = 15084 + 25 \cdot (-602)$$

$$x = 15084 - 15050$$

$$x = 34 \text{ m}^3$$

$$S = \{34\}$$

O conjunto $S = 34$ representa o valor de consumo, em metros cúbicos, que torna o valor da fatura da conta de água um número inteiro. Isso significa que, ao substituir esse valor na função de custo da CAEMA, o resultado será sempre um valor inteiro, o que evidencia que o modelo tarifário admite uma estrutura discreta e regular em certos pontos de consumo.

5ª Faixa:

$$f(x) = 21,48x - 591,12 \quad \text{se } x > 50$$

$$\begin{aligned} y &= 21,48x - 591,12 \quad (\times 100) \\ 100y &= 2148x - 59112 \\ 2148x - 100y &= 59112 \end{aligned}$$

	21	2	12
2148	100	48	12
48	4	0	

$$\begin{aligned} 2148 &= 21 \cdot 100 + 48 \\ 100 &= 2 \cdot 48 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 100 - 2 \cdot 48 \\ 4 &= 100 - 2 \cdot (2148 - 21 \cdot 100) \\ 4 &= 100 - 2 \cdot 2148 + 42 \cdot 100 \\ 4 &= 2148 \cdot (-2) - 100 \cdot (-43) \\ 2148 \cdot (-29556) - 100 \cdot (-635484) &= 59112 \\ x_0 & \qquad \qquad \qquad y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{d}t \\ x &= -29556 + \frac{100}{4}t \\ x &= -29556 + 25t \\ -29556 + 25t &> 50 \\ 25t &> 50 + 29556 \\ 25t &> 29606 \\ t &> \frac{29606}{25} \\ t &> 1184,24 \\ t &\geq 1185 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -29556 + 25 \cdot (1185) \\ x &= -29556 + 29625 \end{aligned}$$

$$x = 69 \text{ m}^3$$

$$x = 69 + 25t$$

$$S = \{69, 94, \dots, 69 + 25t\}$$

O conjunto S representa uma progressão aritmética (PA) cujos termos correspondem a determinados valores de consumo, em metros cúbicos, que tornam o valor da fatura da conta de água um número inteiro. Isso significa que, ao substituir cada um desses valores na função de custo da CAEMA, o resultado será sempre um valor inteiro, o que evidencia que o modelo tarifário admite uma estrutura discreta e regular em certos pontos de consumo.

Sequência Didática

O ensino de matemática enfrenta o desafio de tornar conceitos complexos mais acessíveis e relevantes para os alunos, especialmente o de funções, que muitas vezes é considerado abstrato por eles. Neste contexto, a modelagem matemática surge como uma ferramenta poderosa, permitindo que estudantes compreendam a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações cotidianas Bassanezi 2002. Além disso, ao associar esses conceitos a situações reais, como o cálculo do valor de uma conta de água, torna-se possível contextualizar o conteúdo de maneira mais significativa. Este artigo propõe uma sequência didática inovadora voltada para o Ensino de funções na Educação Básica, utilizando a modelagem matemática de uma conta de água real CAEMA 2024 que foi usada como base para ensinar funções por partes e proporcionalidade.

A sequência didática foi elaborada com o apoio da ferramenta de Inteligência Artificial *ChatGPT*. O `\textit{ChatGPT}`, foram elaboradas atividades que exploram funções lineares, por partes e a proporcionalidade, promovendo um aprendizado significativo ao interligar a teoria matemática a situações práticas. Ao abordar o consumo de água — um recurso escasso e de vital importância — esta proposta educacional não só enriquece o conhecimento matemático dos alunos, mas também os estimula a refletir sobre a gestão sustentável dos recursos naturais Ministério da Educação 2018. A seguir, serão discutidas as metodologias empregadas e as implicações pedagógicas da proposta, ressaltando a importância de uma abordagem contextualizada no ensino de funções e suas aplicações na vida cotidiana.

5.1 Objetivos

Os principais objetivos desta sequência didática são:

- Introduzir o conceito de função utilizando dados reais de uma conta de água.
- Explorar a função linear e funções por partes.
- Trabalhar o conceito de proporcionalidade.
- Estimular o uso de tecnologia no ensino de matemática.

5.2 Metodologia

A sequência didática foi desenvolvida em quatro etapas:

1. Apresentação da conta de água aos alunos e introdução do problema matemático.
2. Utilização de uma função por partes para calcular o valor da conta de água de acordo com o consumo.
3. Exploração do conceito de proporcionalidade utilizando o valor do esgoto como função proporcional ao valor da água.
4. Construção de gráficos com dados de consumo de meses anteriores para analisar padrões e fazer projeções futuras.

5.3 Desenvolvimento da Sequência Didática

Etapa 1: Apresentação da Conta de Água e Definição do Problema

A primeira etapa consiste em apresentar aos alunos uma conta de água real, como a da [Figura 7](#). Esta conta contém informações como consumo em metros cúbicos (m^3), valor a ser pago, e uma taxa proporcional ao esgoto. A partir dessa conta, os alunos são desafiados a compreender como o valor total da conta é calculado.

Figura 7: Conta de água utilizada como base para o estudo de funções.

cacema		COMPANHIA DE SANEAMENTO AMBIENTAL DO MARANHÃO		SEGUNDA VIA	
R SILVA JARDIM - NÚMERO - 307 - CENTRO SÃO LUIS MA 66220-808		R SILVA JARDIM - NÚMERO - 307 - CENTRO SÃO LUIS MA 66220-808		R SILVA JARDIM - NÚMERO - 307 - CENTRO SÃO LUIS MA 66220-808	
CNPJ: 06.274.757/0001-50 - INSC. ESTADUAL Nº 120505371		CNPJ: 06.274.757/0001-50 - INSC. ESTADUAL Nº 120505371		CNPJ: 06.274.757/0001-50 - INSC. ESTADUAL Nº 120505371	
Informações e/ou reclamações - Ligue 08007010195		Informações e/ou reclamações - Ligue 08007010195		Informações e/ou reclamações - Ligue 08007010195	
Nº Documento: 2024099146512		RESCRITÓRIO VINHAIS		CÓDIGO PARA DÉBITO AUTOMÁTICO 00914651.2	
MATRÍCULA	CLIENTE	CPF/CNPJ:		VENCIMENTO 30/09/2024	
INSCRIÇÃO	ENDEREÇO DO IMÓVEL			FATURA 09/2024	
RESPONSÁVEL	ENDEREÇO PARA ENTREGA	ÁGUA LIGADO		EGOTO LIGADO	
ÚLTIMOS CONSUMOS		LEITURA		CONSUMO	
08/2024 - 15 07/2024 - 15		ANTERIOR ATUAL		(M³) DIAS (M³)	
06/2024 - 15 05/2024 - 15				15	
04/2024 - 15 03/2024 - 15				Nº Hm:	
ECONOMIAS	CONS. POR ECONOMIA	COD. AUXILIAR			
1	15	N 5 15			
DESCRIÇÃO DOS SERVIÇOS E TARIFAS		CONSUMO POR FAIXA		VALOR R\$	
ÁGUA					
RESIDENCIAL 001 UNIDADE					
ATE 10 M3 - R\$ 33,58 (POR UNIDADE)		10 M3		33,58	
11 M3 A 20 M3 - R\$ 6,60 POR M3		5 M3		34,00	
TOTAL ÁGUA				67,58	
TOTAL ESGOTO (100,00 % DO VALOR DA ÁGUA)				67,58	
Valor aproximado dos tributos PIS e COFINS, Lei 12.741 de 2012. R\$					
TOTAL GERAL		R\$		135,16	

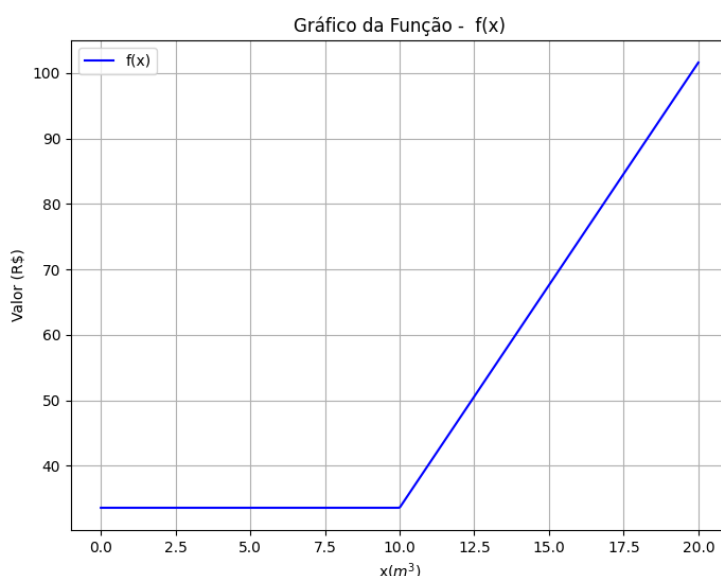
Fonte: Elaboração própria.

Nesta fase, o *ChatGPT* foi utilizado para sugerir uma função que descrevesse o cálculo da conta. O sistema de cobrança é dividido em dois intervalos: um valor fixo até 10 m³ de consumo e um valor adicional por cada m³ consumido além dos 10 m³. Assim, foi proposta a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 3,36x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 33,6 + (x - 10) \times 6,80 & \text{se } 10 < x \leq 20. \end{cases} \quad (5.1)$$

cujo o gráfico pode ser visualizado na [Figura 8](#).

Figura 8: Gráfico da função valor da conta d'água.



Fonte: Elaboração própria.

Embora a resposta esteja parcialmente errada, já foi utilizada como um ponto de partida. O erro cometido foi o fato de que a primeira sentença não trata-se de um valor fixo, mas de um valor proporcional ao consumo, isto é $3,36x$. Ele também observou que o valor do esgoto é calculado a partir do valor da água, isto é o valor da conta, descrito por $V(x) = 2 \times f(x)$

5.3.1 Etapa 2: Função Proporcional

A conta de água também inclui uma taxa de esgoto que corresponde a 100% do valor da água. Esse dado permite trabalhar o conceito de proporcionalidade, sendo o valor do esgoto uma função proporcional ao valor da água:

$$V(x) = 2 \cdot f(x)$$

Esta etapa permite introduzir o conceito de funções proporcionais de maneira prática e visual, além de incentivar os alunos a desenvolver habilidades de cálculo.

5.3.2 Etapa 3: Construção de Gráficos e Análise de Padrões

Usando os dados de consumo dos últimos meses, que são fornecidos na própria conta, os alunos constroem gráficos que representam o consumo ao longo do tempo. A construção de gráficos permite explorar a relação entre as variáveis tempo e consumo, e também a análise de tendências.

5.3.3 Etapa 4: Estimativa e Projeções

Finalmente, os alunos podem ser desafiados a fazer previsões sobre o consumo e o valor da conta de água para o próximo mês. Com base no padrão de consumo dos meses anteriores, eles podem estimar um consumo futuro e, com isso, calcular o valor estimado da conta usando a função proposta.

$$f(x) = 33,6 + (x - 10) \times 6,80. \quad (5.2)$$

Esse tipo de atividade proporciona uma experiência de modelagem real, permitindo aos alunos aplicar seus conhecimentos matemáticos a uma situação prática e do cotidiano.

5.4 Funções Lineares, Proporcionalidade e o Consumo de Água

As funções lineares são uma extensão natural do conceito de proporcionalidade direta, onde o valor de uma variável é proporcional ao valor de outra. Por exemplo, ao afirmar que uma latinha de Guaraná Jesus custa R\$ 3,00, é intuitivo concluir que seis latinhas custarão R\$ 18,00. Isso ocorre porque, ao aumentar a quantidade de 1 para 6, o valor aumenta proporcionalmente de 3 para 18. No caso de uma conta de água, o valor pago também segue a ideia de que quem consome mais paga mais. Contudo, essa proporcionalidade direta só se mantém na primeira faixa de consumo, onde há uma relação linear entre a quantidade de metros cúbicos consumidos e o valor a ser pago. A relação básica de proporcionalidade pode ser representada por uma função do tipo:

$$f(x) = kx. \quad (5.3)$$

Aqui, k é a constante de proporcionalidade, e x é a quantidade consumida. No caso da conta d'água, como pudemos observar $k = 3,36$, constante que representa o custo por metro cúbico consumido, x é o consumo de água em metros cúbicos e $f(x)$ é o valor que deverá ser pago pelo consumo total da água. Lembrando que o valor total da conta é dado por $V(x) = 2 \times f(x)$

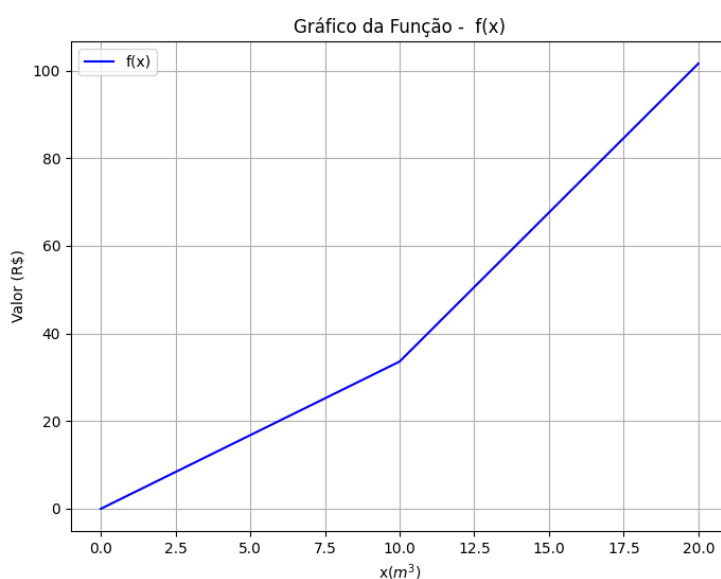
Entretanto, como a água é um recurso escasso e finito, o modelo de cobrança adotado pelas companhias de saneamento introduz uma variação ao conceito de proporcionalidade simples. Em vez de uma função linear pura, onde o preço cresce indefinidamente de forma proporcional ao consumo, o faturamento é baseado em um sistema de faixas de consumo. Essas faixas são organizadas de maneira a penalizar consumidores que excedem certos limites, tornando o valor pago por metro cúbico consumido progressivamente mais caro à medida que o consumo aumenta.

Esse tipo de modelo é caracterizado por uma função por partes, que altera a taxa de crescimento da função em diferentes intervalos. No caso da conta de água que analisamos, a função que descreve o valor da conta é:

$$f(x) = \begin{cases} 3,36x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 33,6 + (x - 10) \times 6,80 & \text{se } 10 < x \leq 20. \end{cases} \quad (5.4)$$

cujo o gráfico pode ser vista na [Figura 9](#).

Figura 9: Gráfico da função valor da conta d'água.



Fonte: Elaboração própria.

Aqui, os primeiros 10 metros cúbicos são cobrados a um valor fixo, e os metros cúbicos adicionais até 20 m³ são cobrados com um preço por metro cúbico adicional. A lógica por trás desse modelo é a de incentivar o consumo consciente de água, de modo que os usuários que excedem o consumo básico (10 m³) pagam uma tarifa mais alta para os metros cúbicos subsequentes.

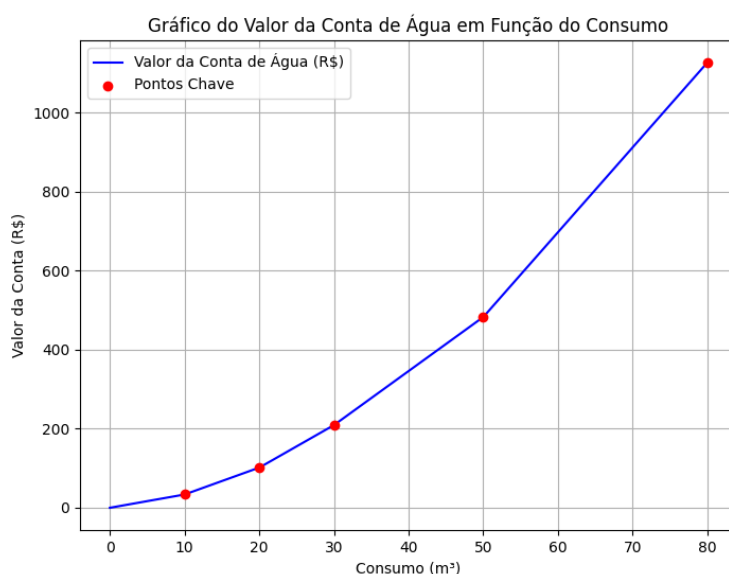
Feito esse primeiro ensaio foi possível aprofundar a questão e explorar o problema de forma mais abrangente, para isso consultamos os dados disponíveis no site da Companhia de Águas e Esgoto do Maranhão - CAEMA, <http://gsan.caema.ma.gov.br:8080/gsan/exibirConsultarEstruturaTarifariaPortalCaemaAction.do>, o qual dispõe tabelas e cobrança para os diversos tipos de consumidores. Quando o fornecimento de água e coleta de esgotos forem usados para fins domésticos residencial os dados são dispostos na [Tabela 2](#)

Podemos definir uma função a qual represente o valor da conta de água em função do consumo em m³ por mês. A função levará em consideração as faixas de consumo e os valores correspondentes a cada faixa. Aqui está a função $V(x)$, onde x é o consumo em metros cúbicos (m³):

Tabela 2: Faixa de Consumo de Água e Valores

Faixa de Consumo (m ³ /Eco/mês)	Valor (R\$)
Até 10 m ³	3,36
Excedente de 10 - 20 m ³	6,80
Excedente de 20 - 30 m ³	10,77
Excedente de 30 - 50 m ³	13,68
Excedente acima de 50 m ³	21,48

Fonte: Elaboração própria.

Figura 10: Gráfico da função valor da conta d'água.

Fonte: Elaboração própria.

Vamos reescrever cada parte da função $V(x)$ na forma $mx + b$, onde m é o coeficiente da inclinação e b é o termo constante correspondente.

Aqui está a versão da função $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} 3,36x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 6,80x - 34,40 & \text{se } 10 < x \leq 20, \\ 10,77x - 113,80 & \text{se } 20 < x \leq 30, \\ 13,68x - 201,10 & \text{se } 30 < x \leq 50, \\ 21,48x - 591,10 & \text{se } x > 50. \end{cases}$$

5.5 Questões interessantes para abordar em sala de aula

Nesta seção, vamos explorar o comportamento da função por partes apresentada anteriormente, por meio de questões que examinam propriedades como proporcionalidade,

linearidade e o comportamento da função nas diferentes faixas de consumo. Iniciamos verificando o que ocorre se dobramos o consumo de água (aumentamos em 100%) o que acontece?

Questão 1: Cálculo de $f(3)$ e $f(6)$

Para $x = 3 \text{ m}^3$, calcule $f(3)$ e, para $x = 6 \text{ m}^3$, calcule $f(6)$. Compare os valores de $f(6)$ e $2f(3)$. O que você observa?

Resolução: - Para $x = 3$, $f(3) = 3,36 \times 3 = 10,08$ (R\$ 10,08). Para $x = 6$, $f(6) = 3,36 \times 6 = 20,16$ (R\$ 20,16). Observamos que $f(6) = 2f(3)$, o que confirma que a função é proporcional nessa faixa. Ou seja, se alguém usa o dobro de água, deverá pagar o dobro do valor.

Questão 2: Cálculo de $f(12)$ e $f(24)$

Calcule $f(12)$ e $f(24)$. Verifique se a relação $f(2x) = 2f(x)$ se mantém para $x = 12$.

Resolução: - Para $x = 12$, $f(12) = 33,60 + (12 - 10) \times 6,80 = 33,60 + 13,60 = \text{R\$ } 47,20$.
- Para $x = 24$, $f(24) = 33,60 + 68,00 + (24 - 20) \times 10,77 = 33,60 + 68,00 + 43,08 = \text{R\$ } 144,68$.
- Observamos que $f(24) \neq 2f(12)$, ou seja, a proporcionalidade não se mantém fora da primeira faixa.

Questão 3: Cálculo de $f(20)$ e $f(40)$

Calcule $f(20)$ e $f(40)$. Compare os valores de $f(40)$ e $2f(20)$. O que você observa?

Resolução: - Para $x = 20$, $f(20) = 33,60 + (20 - 10) \times 6,80 = 33,60 + 68,00 = \text{R\$ } 101,60$.
- Para $x = 40$, $f(40) = 33,60 + 68,00 + 107,70 + (40 - 30) \times 13,68 = 33,60 + 68,00 + 107,70 + 136,80 = \text{R\$ } 346,10$. - Verificamos que $f(40) \neq 2f(20)$, confirmando que a função não é linear em faixas superiores.

Questão 4: Exploração de $f(3x) = 2f(x)$

Verifique se existe x tal que $f(3x) = 2f(x)$ na faixa linear e nas outras faixas.

Resolução: - Na faixa linear ($x \leq 10$): - Para $f(3x) = 2f(x)$, temos $3,36 \times 3x = 2 \times 3,36x$, que resulta em $x = 0$. - Em outras faixas: - Para $x = 12$, $f(3x) = f(36) = 33,60 + 68,00 + 107,70 + (36 - 30) \times 13,68 = 302,18$. - E $2f(12) = 2 \times 47,20 = 94,40$. - Logo, não há valores de x em outras faixas que satisfaçam a condição $f(3x) = 2f(x)$.

Questão 5: Qual o comportamento de $f(x)$ para $x \rightarrow \infty$?

O que acontece com $f(x)$ conforme $x \rightarrow \infty$? Descreva o comportamento da função quando o consumo aumenta indefinidamente.

Resolução: - A função segue a fórmula $f(x) = 33,60 + 68,00 + 107,70 + 273,60 + (x - 50) \times 21,48$ para $x > 50$. - À medida que $x \rightarrow \infty$, o termo dominante é $21,48 \times x$, o que significa que a função cresce linearmente com coeficiente 21,48 para consumos muito altos. - Portanto, para valores muito grandes de x , o comportamento de $f(x)$ é linear, com uma taxa de crescimento de R\$ 21,48 por m^3 .

Questão 6: Encontre o valor de x m^3 , que torna $f(x) = 500$.

Qual o valor de x tal que $f(x) = R\$ 500$? Resolva esta equação nas faixas adequadas da função.

Resolução: - Sabemos que $f(50) = 482.90$, logo o valor de x para $f(x) = 500$ estará na faixa acima de $50 m^3$. - A fórmula para essa faixa é $f(x) = 33.60 + 68.00 + 107.70 + 273.60 + (x - 50) \times 21.48$. - Sabemos que $f(50) = 482.90$, então:

$$482.90 + (x - 50) \times 21.48 = 500,$$

resolvendo para x :

$$(x - 50) = \frac{500 - 482.90}{21.48} \approx 0.80,$$

logo $x \approx 50.80 m^3$.

Questão 7: Propriedades de linearidade em outras faixas

A função é linear em todas as faixas? Justifique sua resposta com base nos cálculos e comparações feitos.

Resolução: - A função é linear apenas na primeira faixa, onde $f(x) = 3.36 \times x$. Nas outras faixas, há somas constantes e multiplicadores diferentes, o que faz com que a função deixe de ser linear. Isso pode ser verificado pelos cálculos anteriores, onde a proporcionalidade $f(2x) = 2f(x)$ não se mantém fora da faixa inicial.

Ao observarmos que apenas na primeira faixa tem-se $f(2x) = 2f(x)$, e nas outras faixas tivemos diferenças, vamos buscar compreender como, em termos percentuais esses valores diferem.

5.5.1 Interpretação da Razão $\frac{f(2x) - 2f(x)}{2f(x)}$

A razão $(f(2x) - 2f(x))/(2f(x))$ pode ser interpretada como uma medida de quanto $f(2x)$ difere de $2f(x)$ em termos percentuais. Ela nos informa o quanto a função $f(x)$ "se afasta" de ser linear em diferentes faixas, uma vez que, para uma função linear, teríamos $f(2x) = 2f(x)$, o que resultaria em $(f(2x) - 2f(x))/(2f(x)) = 0$.

Quando $f(x)$ é linear, como ocorre na primeira faixa da função apresentada (até $10 m^3$), essa razão será zero, pois $f(2x) = 2f(x)$. Ou seja, não há diferença entre o valor de $f(2x)$ e $2f(x)$ em uma função linear.

Nas faixas onde $f(x)$ não é linear, essa razão nos dá uma ideia de como a função se desvia de uma relação proporcional simples. Quanto maior o valor da razão $(f(2x) - 2f(x))/(2f(x))$, mais a função $f(x)$ está se afastando de ser linear nessa faixa. Essa razão pode ser interpretada como o percentual de diferença entre o crescimento real de $f(2x)$ e o crescimento esperado se $f(x)$ fosse linear. Em outras palavras:

$$\frac{f(2x) - 2f(x)}{2f(x)} \times 100\%$$

Nos informa quantos por cento a função $f(2x)$ "cresce a mais" do que o dobro de $f(x)$. Um valor positivo indica que $f(2x)$ cresce mais rapidamente que $2f(x)$, enquanto um valor negativo indicaria que $f(2x)$ cresce mais lentamente que $2f(x)$.

Podemos generalizar a razão $\frac{f(2x)-2f(x)}{2f(x)}$ para múltiplos de x além de 2. Por exemplo, podemos definir a seguinte razão para qualquer constante k :

$$R_k(x) = \frac{f(kx) - kf(x)}{kf(x)}$$

Essa razão $R_k(x)$ representa a diferença relativa entre $f(kx)$ e $kf(x)$, ou seja, como a função $f(x)$ se comporta ao multiplicarmos o argumento por k , isto é como se comporta a proporcionalidade. A interpretação de $R_k(x)$ será semelhante:

- Para uma função linear, $f(kx) = kf(x)$, e portanto $R_k(x) = 0$ para qualquer k , e reciprocamente (prove!). Um função é linear (para $k \neq 0$) se, somente se, $R_k(x) = 0$. - Para funções não lineares, $R_k(x)$ nos indica em que medida $f(kx)$ difere de $kf(x)$. Valores positivos de $R_k(x)$ indicam que a função cresce mais rapidamente do que o crescimento linear esperado.

Exemplo para $k = 3$

Vamos calcular $R_3(x) = (f(3x) - 3f(x))/(3f(x))$ para diferentes valores de x . Para $x = 10$:

- $f(10) = \text{R\$ } 33.60$.
- $f(30) = \text{R\$ } 209.30$.
- $3f(10) = 3 \times 33.60 = \text{R\$ } 100.80$.

Agora, calculamos $R_3(10)$:

$$R_3(10) = \frac{f(30) - 3f(10)}{3f(10)} = \frac{209.30 - 100.80}{100.80} \approx 1.08, \quad \text{ou seja, } 108\% \text{ de aumento.}$$

Isso significa que $f(30)$ é 108% maior do que $3f(10)$, o que indica um crescimento muito mais rápido da função conforme ela muda de faixa.

Para $x = 15$

- $f(15) = \text{R\$ } 67.60$.
- $f(45) = 346.10 + (45 - 30) \times 13.68 = \text{R\$ } 554.30$.
- $3f(15) = 3 \times 67.60 = \text{R\$ } 202.80$.

Agora, calculamos $R_3(15)$:

$$R_3(15) = \frac{f(45) - 3f(15)}{3f(15)} = \frac{554.30 - 202.80}{202.80} \approx 1.73, \quad \text{ou seja, } 173\% \text{ de aumento.}$$

Neste caso, o crescimento de $f(45)$ é 173% maior do que o esperado se $f(x)$ fosse linear, refletindo uma diferença significativa no comportamento da função nas faixas superiores.

A razão $(f(2x) - 2f(x))/(2f(x))$ pode ser interpretada como uma medida da não linearidade da função em diferentes faixas. Podemos generalizar essa razão para qualquer k como $R_k(x) = \frac{f(kx) - kf(x)}{kf(x)}$, que nos permite comparar o crescimento da função $f(x)$ em diferentes escalas. Essa razão está intimamente ligada à inclinação (derivada) da função, e quanto maior a inclinação em uma faixa, maior será o valor dessa razão.

Observe que cada sentença na função $V(x)$ pode ser escrita como $f(x) = ax + b$, onde a é a inclinação (derivada) e $b \leq 0$. Daí, temos que

$$R_k(x) = \frac{f(kx) - kf(x)}{kf(x)} = \frac{b(1 - k)}{k(mx + b)}$$

ou

$$f(kx) - kf(x) = b(1 - k)$$

. Logo, para valores de $0 < k < 1$ tem-se $b(1 - k) < 0$, pois $(1 - k) > 0$, o que leva a $f(kx) < kf(x)$ e para valores de $k > 1$ tem-se $b(1 - k) > 0$ o que leva a $f(kx) > kf(x)$. Observa-se ainda que o desvio de linearidade da função depende da magnitude de $|b|$, maior será a diferença entre $f(kx)$ e $kf(x)$.

podemos destacar alguns pontos:

1. **Primeira faixa** $0 \leq x \leq 10$: - Aqui $f(x) = 3,36 \cdot x$, ou seja, $b = 0$, e a função é puramente linear. Nesse caso, $f(kx) = kf(x)$ para qualquer k , e a razão $R_k(x) = 0$, indicando que a função segue uma proporcionalidade perfeita.

2. **Segunda faixa** $10 < x \leq 20$: - Aqui $f(x) = 6,80 \cdot x - 34,40$, com $b = -34,40$. O valor negativo de b significa que a função cresce mais lentamente do que a proporcionalidade linear $6,80 \cdot x$ sugeriria. - Esse valor de $b \leq 0$ indica que a função tem um deslocamento para baixo, ou seja, a função inicia com um valor inferior àquela que seria puramente linear. Isso afeta a comparação entre $f(kx)$ e $kf(x)$, pois $f(kx)$ será relativamente menor do que o esperado por $kf(x)$.

3. **Terceira faixa** $20 < x \leq 30$: - Aqui $f(x) = 10,77 \cdot x - 113,80$, com $b = -113,80$. O valor negativo mais acentuado de b aumenta o desvio da proporcionalidade linear, causando uma diferença ainda maior entre $f(kx)$ e $kf(x)$. - O termo $b \leq 0$ significa que, apesar da inclinação $10,77$ ser maior que nas faixas anteriores, o valor inicial da função é significativamente mais baixo, retardando o crescimento relativo da função.

4. **Quarta faixa** $30 < x \leq 50$: - Aqui $f(x) = 13,68 \cdot x - 201,10$, com $b = -201,10$. O termo negativo maior ainda desloca a função para baixo, mantendo o crescimento mais devagar do que seria esperado para $f(kx)$, dado que a inclinação $a = 13,68$ é maior. - Novamente, o valor negativo de b limita a proporcionalidade da função, ampliando o desvio conforme x cresce.

5. **Quinta faixa** $x > 50$: - Aqui $f(x) = 21,48 \cdot x - 591,10$, com $b = -591,10$. O valor significativamente negativo de b implica que, mesmo com a maior inclinação $a = 21,48$, o termo constante negativo impede que $f(kx)$ cresça de maneira diretamente proporcional a $kf(x)$.

5.5.2 Proporcionalidade Penalizada

A cobrança por faixas, portanto, cria uma "proporcionalidade penalizada", onde o aumento no consumo não resulta mais em um crescimento linear do valor pago, mas sim em uma taxa de crescimento mais acentuada para consumidores que ultrapassam

certos limites. Essa abordagem é justificada pelo fato de que a água é um recurso vital, e seu uso excessivo pode gerar impactos ambientais significativos, além de comprometer a disponibilidade do recurso para outros usuários.

Ao aumentar o custo marginal do consumo, o sistema de faixas tarifárias busca promover a conservação de água, penalizando financeiramente aqueles que consomem em excesso. Assim, a função total que descreve o faturamento de uma conta de água se assemelha a uma função linear em cada uma das faixas de consumo, mas sua inclinação varia conforme o consumo excede os limites estipulados. Em outras palavras, a proporcionalidade direta se mantém dentro de uma faixa de consumo, mas a relação valor-consumo se altera quando o limite da faixa é ultrapassado.

5.5.3 Implicações Pedagógicas

Essa discussão permite abordar conceitos matemáticos de maneira interdisciplinar, conectando a matemática ao contexto social e ambiental. Em sala de aula, os alunos podem entender não apenas a teoria das funções e proporcionalidade, mas também refletir sobre as implicações do consumo responsável e da gestão de recursos escassos.

Ao propor atividades baseadas no faturamento de contas de água, os professores podem explorar como a matemática é aplicada na vida real e discutir temas como sustentabilidade, justiça social e gestão ambiental. Essas conexões tornam o aprendizado mais significativo, aproximando a abstração matemática do cotidiano dos alunos, além de incentivá-los a pensar criticamente sobre o uso consciente de recursos.

5.6 Considerações Finais

Este artigo apresentou uma sequência didática para o ensino de funções no contexto da Educação Básica, utilizando uma conta de água real como base para modelagem matemática. Ao longo da sequência, abordamos o conceito de proporcionalidade e sua extensão nas funções lineares, bem como o impacto do consumo de água no cálculo das contas, utilizando uma função por partes para modelar o faturamento.

A relação entre o consumo e o valor pago por uma conta de água reflete, inicialmente, uma proporcionalidade direta: quanto mais se consome, mais se paga. No entanto, devido à escassez da água como recurso natural, o modelo de cobrança penaliza o excesso de consumo, introduzindo uma função que varia conforme o consumo ultrapassa determinados limites. Isso cria uma "proporcionalidade penalizada", onde os custos adicionais são maiores à medida que o consumo excede certas faixas.

Esse modelo de cobrança progressiva não apenas exemplifica o uso de funções matemáticas para resolver problemas práticos, mas também serve como uma ferramenta pedagógica eficaz para discutir temas de sustentabilidade e gestão de recursos. Ao estudar funções lineares e funções por partes, os alunos são incentivados a compreender como a matemática pode ser aplicada em situações reais, aproximando o conteúdo escolar do seu cotidiano.

Além disso, a utilização do *ChatGPT* para a elaboração da sequência didática demonstrou como as ferramentas tecnológicas podem auxiliar os professores na criação de atividades significativas e contextualizadas. O uso de dados reais, como os da conta de

água, juntamente com a interação com a inteligência artificial, promoveu um ensino de matemática mais dinâmico e envolvente.

Por fim, a integração dos conceitos de funções lineares, proporcionalidade e modelagem matemática aplicada a problemas cotidianos, como o consumo de água, proporcionou uma experiência de aprendizado mais rica. A abordagem interdisciplinar possibilitou não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também uma reflexão crítica sobre o uso consciente dos recursos naturais e a necessidade de políticas de conservação. Essa combinação de ensino de matemática com consciência social e ambiental enriquece o processo educativo e oferece aos alunos uma visão mais ampla das implicações do seu aprendizado na vida real.

Estudos de Casos Reais

“Elas têm talentos para a vida, e eles precisam ser explorados.” Zabala [2015](#) defende que o objeto de estudo das disciplinas deveria ser a vida, e não apenas os conceitos.

Para explorar a modelagem matemática com o uso de tecnologias digitais e em especial inteligência artificial, utilizamos o caso real do consumo de água nas residências. Em nosso estudo utilizamos como exemplo a Companhia Saneamento Ambiental do Maranhão (CAEMA) e realizamos um estudo comparativo com outras companhias de saneamento limitando-nos as empresas SAAE de Sacramento-MG, a EMBASA-BA e a ÁGUAS GUARIROBA MS.

Os dados apresentados a seguir, foram obtidos nos sítios eletrônicos das companhias referidas acima. Após o tratamento dos dados, estes foram submetidos à inteligência artificial que por sua vez encontrou os modelos apresentados neste capítulo.

6.1 Conta de Água CAEMA Maranhão

A modelagem da conta de água da CAEMA será realizada com base no sistema de faixas de consumo e tarifas progressivas apresentado na [Tabela 3](#). Cada faixa de consumo corresponde a um intervalo de metros cúbicos (m^3) de água utilizados no mês, com um valor específico aplicado a cada faixa.

Tabela 3: Elementos do cálculo da tarifa de água CAEMA

FAIXA DE CONSUMO	VALOR
de 0 a 10	33,58 por mês
de 11 a 20	6,80 por m^3
de 21 a 30	10,77 por m^3
de 31 a 50	13,68 por m^3
acima de 50	21,48 por m^3

Fonte: CAEMA [2024](#).

Para realizar essa modelagem, o consumo total de água de um consumidor, representado por x (m^3), será dividido entre as faixas estabelecidas:

- Para os primeiros 10 m^3 consumidos, será cobrado um valor fixo de R\$ 33,58, independentemente de o consumo ter sido menor que 10 m^3 .
- O consumo entre 11 e 20 m^3 será tarifado a R\$ 6,80 por m^3 .
- O consumo entre 21 e 30 m^3 será tarifado a R\$ 10,77 por m^3 .
- O consumo entre 31 e 50 m^3 será tarifado a R\$ 13,68 por m^3 .
- Para qualquer consumo acima de 50 m^3 , será aplicado o valor de R\$ 21,48 por m^3 .

O valor total da conta será calculado somando os custos referentes a cada faixa consumida. Além disso, será incluída a tarifa de esgoto, que corresponde a 100% do valor cobrado na tarifa de água, duplicando o valor final.

Essa modelagem permitirá construir uma função ou um algoritmo capaz de calcular automaticamente a conta de água e esgoto, dado um consumo mensal em m^3 .

A tabela apresenta uma tarifa por faixa de consumo, e o objetivo é transformar essas informações em uma função afim por partes, chamada $f(x)$, que calcula o valor da conta de água com base no consumo x em metros cúbicos (m^3). A CAEMA cobra 100% de tarifa de esgoto, ou seja, o valor da conta dobra:

- A função $f(x)$ representa o valor da água.
- A função $V(x)$ representa o valor total da conta (água + esgoto).

Por isso:

$$V(x) = 2f(x) \quad (6.1)$$

O modelo da CAEMA permite usar funções afins reais para estudar gráficos e cálculos matemáticos no ensino. A função $f(x)$ representa a tarifa de água, enquanto $V(x)$ dobra esse valor para incluir o esgoto. Assim, temos um exemplo concreto e educativo de como a matemática está presente nas contas do dia a dia.

- **Consumo de água (x);**
- **Faixas de consumo e preços por faixa;**
- **Tarifa de Esgoto:** 100% do valor cobrado na tarifa de água.

Para ilustrar de forma prática o gráfico de uma função afim, vamos utilizar um exemplo real baseado no modelo de cobrança da conta de água da CAEMA, representado pela seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 33,58, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 6,80x - 34,42, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 10,77x - 113,82, & \text{se } 20 < x \leq 30 \\ 13,68x - 201,12, & \text{se } 30 < x \leq 50 \\ 21,48x - 591,12, & \text{se } x > 50. \end{cases} \quad (6.2)$$

Modelo de cobrança da CAEMA MA:

$$V(x) = \begin{cases} 67, 16, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 13, 60x - 68, 84, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 21, 54x - 227, 64, & \text{se } 20 < x \leq 30 \\ 27, 36x - 402, 24, & \text{se } 30 < x \leq 50 \\ 42, 96x - 1.182, 24, & \text{se } x > 50 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$V(x) = 2f(x) \quad (6.4)$$

6.2 Conta De Água da Prefeitura de Sacramento MG

Como foi encontrado o modelo de cobrança do SAAE Sacramento-MG:

A tabela apresenta o valor por metro cúbico (m^3) de água consumido, dividido por faixas de consumo. O modelo é do tipo tarifa progressiva, ou seja: quanto maior o consumo, maior o valor por m^3 .

A função de cobrança será construída somando os valores pagos em cada faixa utilizada.

Tabela 4: Elementos do cálculo da tarifa de água SAAE

FAIXA DE CONSUMO	VALOR / m^3
de 0 a 5	1,9224
de 6 a 10	1,9321
de 11 a 15	1,9419
de 16 a 20	4,1568
de 21 a 25	4,3536
de 26 a 30	4,9717
de 31 a 40	5,6622
de 41 a 50	6,3525
de 51 a 75	6,9051
de 76 a 100	7,3193
de 101 a 200	8,148
acima de 200	8,4242

Fonte: SAAE [2024](#).

A função $f(x)$ pode ser montada com expressões por partes, cada uma representando uma faixa de consumo.

- Consumo de água (x);
- Faixas de consumo e preços por faixa;
- Tarifa de Esgoto: 50% do valor cobrado na tarifa de água.

- **Coleta de Lixo:** Custo por m^3 baseado em uma taxa por m^3 e um fator de uso (residencial, comercial, etc.).
- **Tarifa Básica Operacional (TBO):** Tarifas fixas (residencial, comercial, industrial).

Função Geral $f(x)$ para o Cálculo da Tarifa de Água

- A tarifa de esgoto é 50% do valor da tarifa de água: $0,5 \cdot f(x)$
- Cálculo da Coleta de Lixo: $0,7691x$
- Tarifa Básica Operacional de Água (TBO Água) = 11,1861
- Tarifa Básica Operacional de Esgoto (TBO Esgoto) = 5,5932
- Função Conta C ,

$$C(x) = f(x) + 0,5 \cdot f(x) + (0,7691x) + \text{TBO Água} + \text{TBO Esgoto}$$

ou

$$C(x) = \frac{3}{2}f(x) + 0,7691x + 16,7793.$$

Função consumo d'água:

$$f(x) = \begin{cases} 1,9224 \cdot x, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 1,9321 \cdot x - 0,0485, & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 1,9419 \cdot x - 0,1465, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 4,1568 \cdot x - 33,37, & \text{se } 15 < x \leq 20 \\ 4,3536 \cdot x - 37,306, & \text{se } 20 < x \leq 25 \\ 4,9717 \cdot x - 52,7585, & \text{se } 25 < x \leq 30 \\ 5,6622 \cdot x - 73,4735, & \text{se } 30 < x \leq 40 \\ 6,3525 \cdot x - 101,0855, & \text{se } 40 < x \leq 50 \\ 6,9051 \cdot x - 128,7155, & \text{se } 50 < x \leq 75 \\ 7,3193 \cdot x - 159,7805, & \text{se } 75 < x \leq 100 \\ 8,148 \cdot x - 242,6505, & \text{se } 100 < x \leq 200 \\ 8,4242 \cdot x - 297,8905, & \text{se } x > 200 \end{cases} \quad (6.5)$$

Exemplo para um Consumo de 43 m^3

- Tarifa de Água: $f(43) = 6,3525 \cdot 43 - 101,0855 = 172,07$
- Tarifa de Esgoto: $0,5 \cdot 172,07 = 86,035$
- Coleta de Lixo: $43 \cdot 0,7691 = 33,0713$
- TBO Água (residencial): 11,19

- **TBO Esgoto (residencial):** 5,59

$$C(43) = 172,07 + 86,035 + 33,0713 + 11,19 + 5,59 = 307,9586$$

- Valor da conta: R\$ 307,96
- $C(75) = 658,21$
- $C(100) = 951,91$

Função Custo do saneamento

$$C(x) = \begin{cases} 3,6527x + 16,7793, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 3,66725x + 16,70655, & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 3,68195x + 16,55955, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 7,0043x - 33,2757, & \text{se } 15 < x \leq 20 \\ 7,2995x - 39,1797, & \text{se } 20 < x \leq 25 \\ 8,22665x - 62,35845, & \text{se } 25 < x \leq 30 \\ 9,2624x - 93,43095, & \text{se } 30 < x \leq 40 \\ 10,29785x - 134,8482, & \text{se } 40 < x \leq 50 \\ 11,12675x - 176,29395, & \text{se } 50 < x \leq 75 \\ 11,74805x - 222,89145, & \text{se } 75 < x \leq 100 \\ 12,9911x - 347,19645, & \text{se } 100 < x \leq 200 \\ 13,4054x - 430,05645, & \text{se } x > 200 \end{cases} \quad (6.6)$$

6.3 Conta de Água da EMBASA BA

A [Tabela 5](#) apresenta os valores cobrados pela EMBASA com base no consumo de água mensal, utilizando um sistema de faixas de consumo. Cada faixa tem um valor específico por metro cúbico (m^3) e é cumulativa, ou seja, os valores são somados conforme o consumo avança pelas faixas.

Como funcionam as faixas:

- De 1 a 6 m^3 : Tarifa fixa de R\$ 41,18 por mês, independentemente de consumir 1 ou 6 m^3 .
- De 7 a 10 m^3 : Cada metro cúbico adicional dentro dessa faixa custa R\$ 1,63/ m^3 .
- De 11 a 15 m^3 : A tarifa passa a R\$ 11,53/ m^3 para os m^3 que ultrapassarem os 10 m^3 .
- As demais faixas seguem o mesmo padrão, com valores por m^3 cada vez mais altos, conforme o consumo aumenta.
- **Consumo de água (x);**

Tabela 5: Elementos do cálculo da tarifa de água EMBASA

FAIXA DE CONSUMO	VALOR
de 1 a 6	41,18 por mês
de 7 a 10	1,63 por m^3
de 11 a 15	11,53 por m^3
de 16 a 20	12,34 por m^3
de 21 a 25	13,87 por m^3
de 26 a 30	15,47 por m^3
de 31 a 40	17,00 por m^3
de 41 a 50	18,65 por m^3
acima de 50	22,44 por m^3

Fonte: EMBASA [2024](#).

- **Faixas de consumo e preços por faixa;**
- **Tarifa de Esgoto:** 80% do valor cobrado na tarifa de água.

$$h(x) = \begin{cases} 41,18, & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 1,63x + 31,40, & \text{se } 6 < x \leq 10 \\ 11,53x - 67,60, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 12,34x - 79,75, & \text{se } 15 < x \leq 20 \\ 13,87x - 110,35, & \text{se } 20 < x \leq 25 \\ 15,47x - 150,35, & \text{se } 25 < x \leq 30 \\ 17x - 196,25, & \text{se } 30 < x \leq 40 \\ 18,65x - 262,25, & \text{se } 40 < x \leq 50 \\ 22,44x - 451,75, & \text{se } x > 50 \end{cases} \quad (6.7)$$

$$B(x) = \begin{cases} 74,124, & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 2,934x + 56,52, & \text{se } 6 < x \leq 10 \\ 20,754x - 121,68, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 22,212x - 143,55, & \text{se } 15 < x \leq 20 \\ 24,966x - 198,63, & \text{se } 20 < x \leq 25 \\ 27,846x - 270,63, & \text{se } 25 < x \leq 30 \\ 30,6x - 353,25, & \text{se } 30 < x \leq 40 \\ 33,57x - 472,05, & \text{se } 40 < x \leq 50 \\ 40,392x - 813,15, & \text{se } x > 50 \end{cases} \quad (6.8)$$

$$B(x) = 1,8 \cdot h(x) \quad (6.9)$$

6.4 Conta de Água da Águas Guariroba MS

Se o consumidor for atendido pela rede coletora de esgoto, será cobrado 70% do valor cobrado no abastecimento de água.

Tabela 6: Elementos do cálculo da tarifa de água GUARIROBA

FAIXA DE CONSUMO	VALOR
TAXA FIXA	17,78
de 1 a 10	7,19 por m^3
de 11 a 15	9,20 por m^3
de 16 a 20	9,36 por m^3
de 21 a 25	10,35 por m^3
de 26 a 30	12,73 por m^3
de 31 a 50	15,23 por m^3
acima de 50	16,79 por m^3

Fonte: Águas Guariroba [2024](#).

$$I(x) = \begin{cases} 7,19x & : 1 \leq x \leq 10 \\ 9,2x - 20,1 & : 10 < x \leq 15 \\ 9,36x - 22,5 & : 15 < x \leq 20 \\ 10,35x - 42,3 & : 20 < x \leq 25 \\ 12,73x - 101,8 & : 25 < x \leq 30 \\ 15,23x - 176,8 & : 30 < x \leq 50 \\ 16,79x - 254,8 & : x > 50 \end{cases} \quad (6.10)$$

$$D(x) = \begin{cases} 12,22x + 17,78 & : 1 \leq x \leq 10 \\ 15,64x - 16,34 & : 10 < x \leq 15 \\ 15,91x - 20,47 & : 15 < x \leq 20 \\ 17,6x - 54,13 & : 20 < x \leq 25 \\ 21,64x - 155,28 & : 25 < x \leq 30 \\ 25,89x - 282,78 & : 30 < x \leq 50 \\ 28,54x - 415,38 & : x > 50 \end{cases} \quad (6.11)$$

$$D(x) = 1,7 \cdot I(x) + 17,78 \quad (6.12)$$

6.5 Gráficos Comparativos de Preços das Empresas Estudadas

6.5.1 Comparação entre os modelos de cobrança $V(x)$ da CAEMA e $C(x)$ do SAAE Sacramento MG

Nesta seção, realizamos a comparação dos modelos de cobrança de tarifas de água adotados pelas empresas CAEMA e SAAE Sacramento MG. Para isso, definimos a função

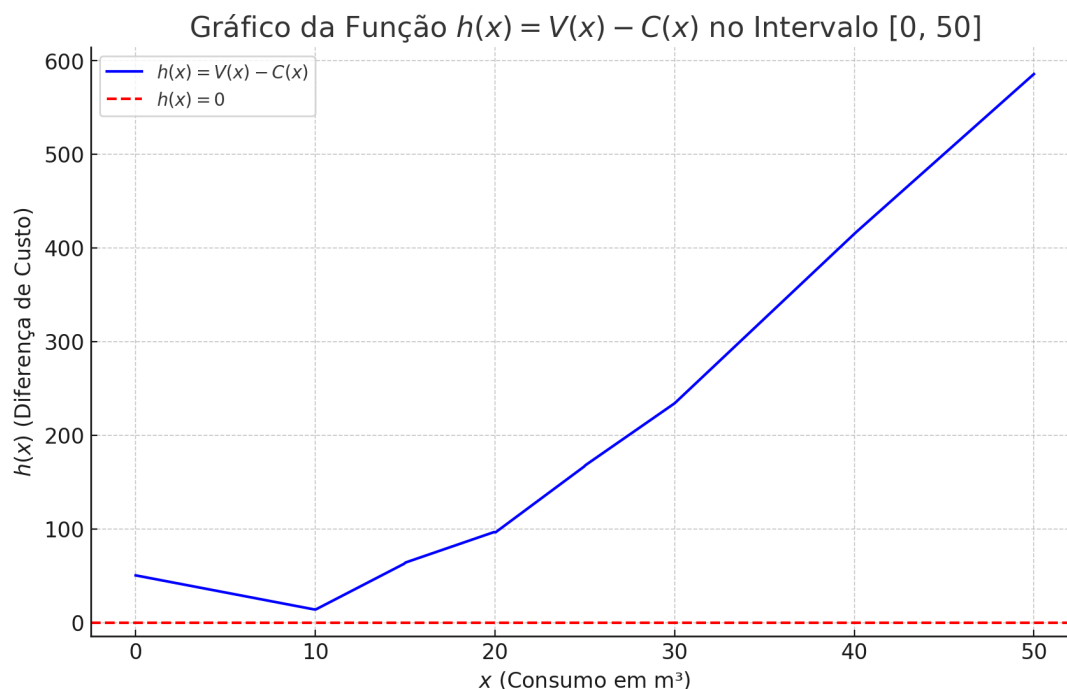
$$h(x) = V(x) - C(x) \quad (6.13)$$

onde $V(x)$ representa o valor cobrado pela CAEMA e $C(x)$ representa o valor cobrado pelo SAAE, ambos em função do consumo de água x em metros cúbicos (m^3).

A função $h(x)$ é definida por partes, cada uma correspondente a um intervalo de consumo específico. Cada expressão descreve a diferença entre as tarifas das duas empresas em cada faixa de consumo. O comportamento da função indica em quais intervalos a CAEMA é mais cara ou mais barata que o SAAE.

Função $h(x) = V(x) - C(x)$ é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} -3,65x + 50,38, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -3,67x + 50,45, & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 9,92x - 85,40, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 6,60x - 35,56, & \text{se } 15 < x \leq 20 \\ 14,24x - 188,46, & \text{se } 20 < x \leq 25 \\ 13,31x - 165,28, & \text{se } 25 < x \leq 30 \\ 18,10x - 308,81, & \text{se } 30 < x \leq 40 \\ 17,06x - 267,40, & \text{se } 40 < x \leq 50 \\ 31,83x - 1005,95, & \text{se } 50 < x \leq 75 \\ 31,21x - 959,35, & \text{se } 75 < x \leq 100 \\ 29,97x - 835,04, & \text{se } 100 < x \leq 200 \\ 29,55x - 752,18, & \text{se } x > 200 \end{cases} \quad (6.14)$$

Figura 11: Gráfico da Função $V(x) - C(x)$ no intervalo $[0, 50]$ 

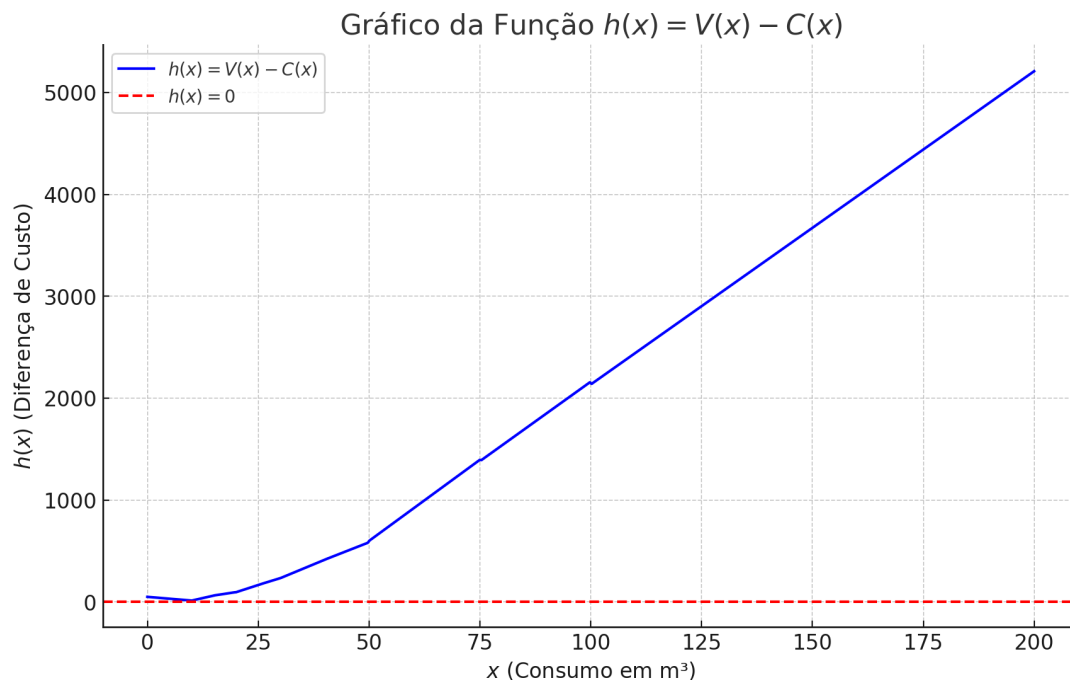
Fonte: Elaboração própria.

O gráfico correspondente (Figura 11) apresenta a variação de $h(x)$ no intervalo de 0 a $50 m^3$, permitindo visualizar de forma clara essas diferenças. Valores positivos de $h(x)$ indicam que a CAEMA cobra mais caro que o SAAE naquele intervalo de consumo, enquanto valores negativos indicam que o SAAE é mais caro.

O gráfico da Figura 12 apresenta a função $h(x) = V(x) - C(x)$, que representa a diferença de custo entre a cobrança da CAEMA $V(x)$ e a do SAAE Sacramento MG $C(x)$ em função do consumo de água x , no intervalo de 0 a $200 m^3$.

Observa-se que, para consumos baixos (próximos de $0 m^3$), a diferença de custo entre as duas empresas é pequena, com $h(x)$ variando em torno de zero. No entanto, à medida que o consumo aumenta, o valor de $h(x)$ cresce de forma contínua e significativa. Isso indica que, para consumos mais elevados, a CAEMA se torna consideravelmente mais cara do que o SAAE Sacramento MG.

A linha vermelha pontilhada representa o valor zero de $h(x)$. Como a curva azul se mantém acima dessa linha em praticamente todo o intervalo analisado, concluímos que a CAEMA apresenta tarifas mais altas que o SAAE na maioria das faixas de consumo estudadas. Essa diferença de preços torna-se ainda mais acentuada a partir de aproximadamente $50 m^3$ de consumo, evidenciando que o modelo tarifário da CAEMA penaliza mais fortemente os consumidores de grandes volumes de água.

Figura 12: Gráfico da Função $V(x) - C(x)$ no intervalo $[0, 200]$ 

Fonte: Elaboração própria.

6.5.2 Comparação entre os modelos de cobrança $V(x)$ da CAEMA e $B(x)$ da EMBASA BA

Para analisar a diferença entre os modelos tarifários da CAEMA e da EMBASA (Bahia), foi definida a função

$$V(x) - B(x), \quad (6.15)$$

onde $V(x)$ representa o valor cobrado pela CAEMA e $B(x)$ representa o valor cobrado pela EMBASA, ambos em função do consumo x , medido em metros cúbicos (m^3).

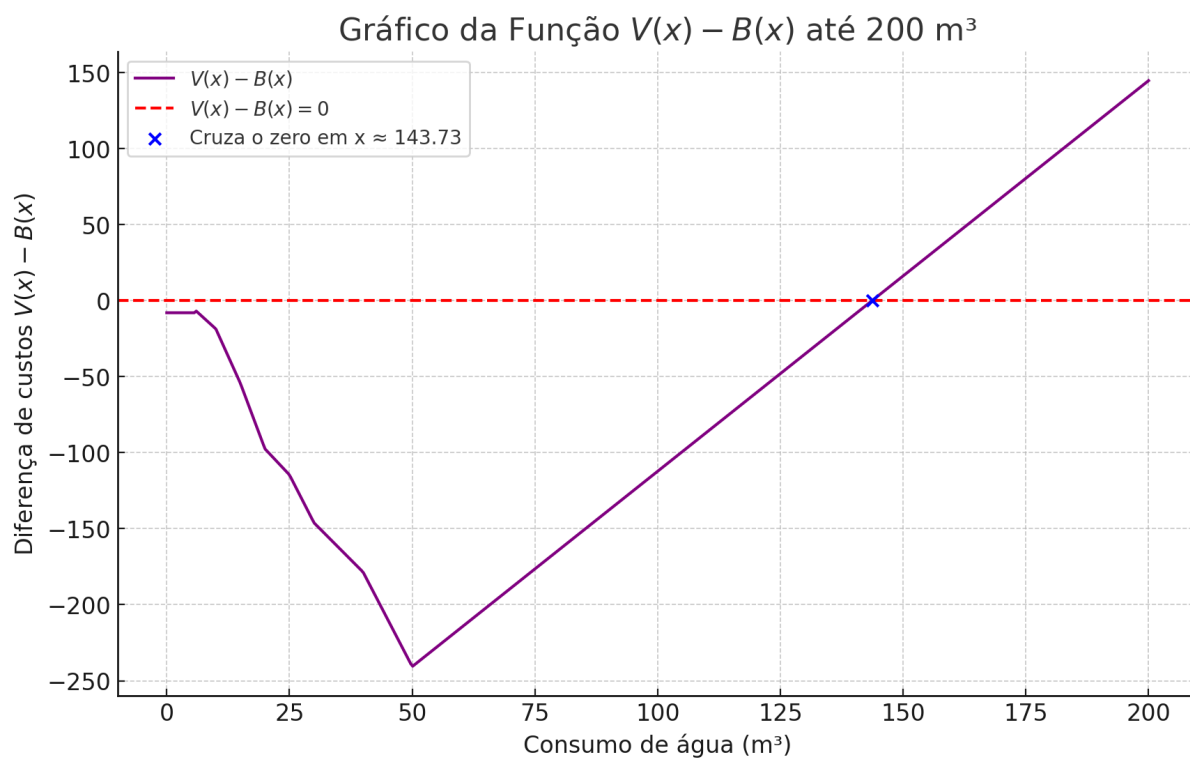
A função é apresentada por partes, com expressões específicas para diferentes faixas de consumo. Isso permite identificar com precisão qual das duas empresas apresenta maior custo em cada intervalo.

- Para consumos de até $50 m^3$, a maior parte das expressões gera valores negativos, indicando que a EMBASA cobra mais caro que a CAEMA nessas faixas.
- A única exceção é para o intervalo final, quando $x > 50$, em que a expressão se torna positiva. Isso significa que, a partir desse ponto, a CAEMA passa a ser mais cara que a EMBASA.

Essa abordagem permite uma comparação detalhada entre os dois modelos tarifários e evidencia que a CAEMA tende a ser mais econômica para consumidores com gasto moderado de água, enquanto se torna mais onerosa para consumos elevados.

$$V(x) - B(x) = \begin{cases} -6,964, & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ -2,934x + 10,64, & \text{se } 6 < x \leq 10 \\ -7,154x + 52,84, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ -8,612x + 74,71, & \text{se } 15 < x \leq 20 \\ -3,426x - 29,01, & \text{se } 20 < x \leq 25 \\ -6,306x + 42,99, & \text{se } 25 < x \leq 30 \\ -3,24x - 48,99, & \text{se } 30 < x \leq 40 \\ -6,21x + 69,81, & \text{se } 40 < x \leq 50 \\ 2,568x - 369,09, & \text{se } x > 50 \end{cases} \quad (6.16)$$

Figura 13: Gráfico da Função $V(x) - B(x)$



Fonte: Elaboração própria.

O gráfico da [Figura 13](#) mostra o comportamento da função $V(x) - B(x)$, que representa a diferença de custo entre a cobrança da CAEMA ($V(x)$) e da EMBASA ($B(x)$), para consumos de água entre 0 e 200 m^3 .

Observamos que, no início (para consumos mais baixos), a função apresenta valores negativos. Isso indica que, até certo ponto, a CAEMA cobra menos do que a EMBASA para a maioria dos consumidores de baixo e médio consumo. O gráfico atinge o valor mais negativo entre 50 e 75 m^3 , revelando que nessa faixa a diferença de custo é ainda mais favorável à CAEMA.

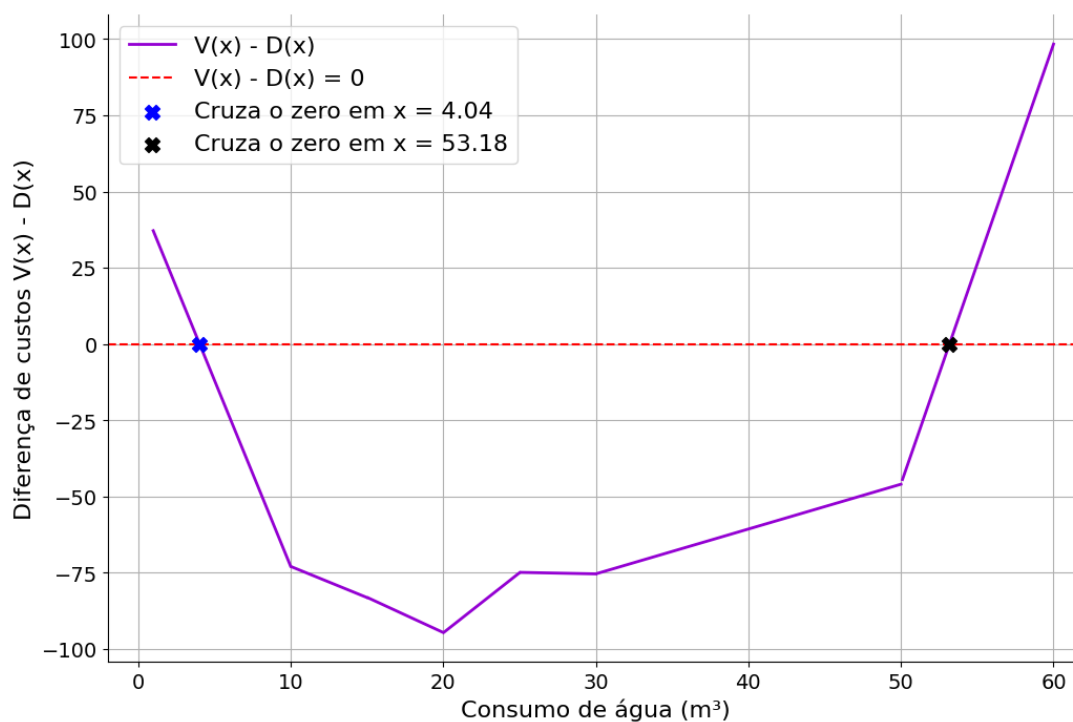
A partir desse ponto, a reta começa a subir, mostrando que a diferença de preço entre as duas empresas diminui. Em torno de $143,73 \text{ m}^3$, a função cruza o eixo horizontal (linha vermelha tracejada), ou seja, o valor da diferença se torna zero. Esse ponto de cruzamento indica que, a partir de aproximadamente $143,73 \text{ m}^3$ de consumo, a CAEMA passa a cobrar mais caro que a EMBASA.

Após esse cruzamento, a reta continua crescendo, confirmando que para grandes volumes de consumo a CAEMA é consideravelmente mais onerosa do que a EMBASA.

6.5.3 Comparação CAEMA e Águas Guariroba MS

$$V(x) - D(x) = h(x) = \begin{cases} 49,38 - 12,22x & : 1 \leq x \leq 10 \\ -2,04x - 52,5 & : 10 < x \leq 15 \\ -2,31x - 48,37 & : 15 < x \leq 20 \\ 3,94x - 173,51 & : 20 < x \leq 25 \\ -0,1x - 72,36 & : 25 < x \leq 30 \\ 1,47x - 119,46 & : 30 < x \leq 50 \\ 14,42x - 766,86 & : x > 50 \end{cases} \quad (6.17)$$

Figura 14: Gráfico da Função $V(x) - D(x)$



Fonte: Elaboração própria.

Tabela 7: Dados da Função $V(x)$ - $D(x)$

Consumo (m^3)	1	5	10	15	20	25	30	40	50
CAEMA	67,16	67,16	67,16	135,16	203,16	310,86	418,56	692,16	965,76
SACRAM.	20,43	35,04	53,37	71,78	106,36	143,31	184,44	277,06	380,05
EMBASA	74,12	74,12	85,86	189,63	300,69	425,52	564,75	870,75	1.206,45
GUARIROBA	30,00	78,90	140,01	218,21	297,77	385,75	493,95	752,86	1.011,77

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 8: Aplicação no Estudo de Contratação

Consumo (m^3)	75	100	120	143	144	145	146	150	200
CAEMA	2.039,76	3.113,76	3.972,96	4.961,04	5.004,00	5.046,96	5.089,92	5.261,76	7.409,76
SACRAM.	658,21	951,91	1.211,74	1.510,53	1.523,52	1.536,51	1.549,50	1.601,47	2.251,02
EMBASA	2.216,25	3.226,05	4.033,89	4.962,91	5.003,29	5.043,69	5.084,08	5.245,65	7.265,25
GUARIROBA	1.725,35	2.438,92	3.009,78	3.666,27	3.694,81	3.723,36	3.751,90	3.866,07	5.293,22

Fonte: Elaboração própria.

6.6 Aplicação no Estudo de Contratação de Uma Empresa de Saneamento

Um dos problemas recorrentes nos municípios pelo Brasil é a contratação de empresas para prestação de serviços de saneamento básico. Para isso é necessário definir, por exemplo, análise do custo médio de consumo, custo total em determinado período, impacto de subsídios governamentais, além de análise de sensibilidade de tarifas.

- **Determinar faixas de consumo onde cada empresa é mais econômica;**
 - Se $h(x) > 0$, então a CAEMA cobra mais;
 - Se $h(x) < 0$, então a SAAE cobra mais;
- **Análise do Custo Médio de Consumo**
 - Defina uma distribuição de consumo para a população;
 - Para cada faixa de consumo, a função $h(x)$ determina a diferença média de custo entre as empresas;
 - Multiplique essa diferença pela proporção de consumidores em cada faixa.
- **Cálculo do Custo Total para um Período de Tempo**
 - Calcule $C(x)$ e $V(x)$ para cada faixa e para a população total (usando uma distribuição de consumo).
 - Some os valores de $V(x)$ e $C(x)$ para todas as faixas e compare o custo total entre as duas empresas.
- **Impacto de Subsídios Governamentais;**

- Governo do Estado do Maranhão oferece um subsídio de s reais por m^3 para a CAEMA. Então a nova função $h(x)$ torna-se:

$$h(x) = (V(x) - s \cdot x) - C(x)$$

- O impacto do subsídio nas diferentes faixas de consumo a CAEMA se torna mais competitiva?;

- **Análise de Sensibilidade de Tarifas**

- Aumente as tarifas da CAEMA em 5% e a tarifa da SAAE em 10% e observe o impacto sobre h ;

Apresentamos a seguir um estudo realizado com auxílio do *ChatGPT* para a escola de uma companhia para atender um determinado município.

6.7 Análise para Escolha da Companhia de Saneamento

Este relatório visa avaliar as melhores opções de empresas de saneamento para um município onde o consumo médio de água da população é de até $10 m^3$. Foram consideradas as tarifas das companhias CAEMA, SAAE de Sacramento (MG), EMBASA (BA) e ÁGUAS GUARIROBA MS para consumos de 1, 5 e $10 m^3$, com base na tabela de custos fornecida.

6.7.1 Comparação dos Custos por Faixa de Consumo

Abaixo estão os valores cobrados por cada empresa para consumos de 1, 5 e $10 m^3$:

Tabela 9: Análise para Escolha da Companhia

CONSUMO (m^3)	CAEMA MA	SACRAMENTO MG	EMBASA BA	GUARIROBA MS
1	67,16	20,43	74,12	30
5	67,16	35,04	74,12	78,9
10	67,16	53,37	85,86	140,01

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 9 apresenta a comparação dos custos cobrados pelas empresas CAEMA (MA), SAAE Sacramento (MG), EMBASA (BA) e Guariroba (MS) para consumos de 1, 5 e $10 m^3$. Analisando os dados, observamos que: A CAEMA mantém o mesmo valor de cobrança (R\$ 67,16) independentemente do consumo, indicando uma tarifa mínima fixa. O SAAE de Sacramento apresenta os menores valores em todas as faixas de consumo, sendo a opção mais econômica entre as empresas comparadas. A EMBASA e a Guariroba apresentam valores significativamente mais elevados, especialmente para consumos de $10 m^3$, onde a Guariroba atinge R\$ 140,01, o maior valor da tabela.

Portanto, concluímos que, para consumidores de baixo consumo (até $10 m^3$), o SAAE Sacramento MG oferece a tarifa mais vantajosa, enquanto a Guariroba MS apresenta a maior onerosidade. A CAEMA mantém um custo fixo que pode ser pouco vantajoso para quem consome muito pouco, mas competitivo para quem consome em torno de $10 m^3$.

Conclusão

O presente estudo demonstrou que a modelagem matemática, quando aliada ao uso de Inteligência Artificial, pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de funções na educação básica. A proposta didática apresentada, baseada na análise de contas de água reais, permitiu a contextualização dos conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo e próximo da realidade dos alunos.

A aplicação dessa metodologia evidenciou que o uso de IA pode contribuir não apenas para a formulação e validação de modelos matemáticos, mas também para a personalização do ensino, permitindo que os alunos explorem conceitos de maneira mais dinâmica e interativa. Além disso, a modelagem matemática demonstrou-se uma abordagem interdisciplinar, conectando conteúdos matemáticos a questões ambientais, econômicas e sociais, o que está alinhado com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Apesar dos benefícios evidenciados, o estudo também apontou desafios na implementação dessa abordagem. A necessidade de capacitação dos professores para o uso de ferramentas tecnológicas, bem como a limitação de acesso a recursos digitais em algumas escolas, são fatores que precisam ser considerados para a disseminação dessa prática. Além disso, a dificuldade em encontrar referências específicas sobre a aplicação de IA na modelagem matemática mostra a necessidade de mais estudos nessa área.

Como perspectivas futuras, sugere-se a ampliação do estudo para outras áreas da matemática, explorando o impacto da modelagem matemática em conteúdos como estatística e cálculo. Além disso, investigações futuras podem considerar a análise do desempenho dos alunos ao longo do tempo, avaliando como a abordagem proposta influencia a retenção e aplicação dos conceitos matemáticos.

Conclui-se, portanto, que a integração entre modelagem matemática e inteligência artificial representa uma inovação promissora para o ensino de funções, promovendo um aprendizado mais contextualizado, interativo e significativo. Espera-se que este estudo contribua para a reflexão sobre novas metodologias para o ensino da matemática e incentive futuras pesquisas nessa direção.

Referências

- Águas Guaruroba (2024). *Legislação e Tarifas*. Online. Acessado em 27/09/2024, <https://www.aguasguaruroba.com.br/legislacao-e-tarifas/>.
- Almeida, Lourdes Maria Werle de e Dirceu dos Santos Brito (2005). “Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir?” Em: *Ciência e Educação* 11.3, pp. 483–498.
- Almeida, Lourdes Maria Werle de e Rodolfo Eduardo Vertuan (2011). “Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula”. Em: *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Ed. por Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1ª ed. Londrina: Eduep, pp. 19–43.
- Almeida, Lourdes Werle de, Karina Pessoa da Silva e Rodolfo Eduardo Vertuan (2016). *Modelagem matemática na educação básica*. 1. ed., 2ª reimpressão. São Paulo: Editora Contexto. ISBN: 978-85-7244-697-6.
- Bassanezi, Rodney Carlos (2002). *Modelagem Matemática: Conceitos, Experiências e Aplicações*. 2a. ed. São Paulo: Editora Contexto.
- Borba, Marcelo de Carvalho e Miriam de Godoy Penteado (2005). *Informática e Educação Matemática*. 3ª ed., 1ª reimp. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.
- CAEMA, Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão (2024). *Tabela de tarifas de água tem novo valor após três anos sem reajuste*. Online. Acessado em 27/09/2024, <https://www.caema.ma.gov.br/index.php/noticias/4468-tabela-de-tarifas-de-agua-tem-novo-valor-apos-tres-anos-sem-reajuste>.
- D’Ambrosio, Ubiratan (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus.
- Demo, Pedro (1998). *Desafios Modernos da Educação*. 7ª ed. Petrópolis: Vozes.
- Edgard, Alencar Filho de (1981). *Teoria elementar dos números*. Inclui bibliografia. São Paulo.
- EMBASA, Empresa Baiana de Águas e Saneamento S.A (2024). *Tarifas 2024*. Online. Acessado em 27/09/2024, <https://www.embasa.ba.gov.br/w/tarifas-2024>.
- Iezzi, Gelson et al. (2016). *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1*. 9ª ed. Suplementado pelo manual do professor. Bibliografia incluída. São Paulo: Saraiva. ISBN: 978-85-472-0536-2 (professor).
- Lesh, Richard A. e Helen M. Doerr, ed. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Routledge. ISBN: 978-0805838220.
- Lima, Elon Lages et al. (1997). *A matemática do ensino médio*. Vol. 1. SBM Rio de Janeiro.
- Lima, Elon Lages et al. (2003). *Temas e Problemas*. Capa: Rodolfo Capeto. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática. ISBN: 85-85818-16-6.
- Lima e Kochhann (2023). “A Inteligência Artificial na educação: as implicações no futuro do trabalho docente”. Em: *Contribuciones a las ciencias sociales* 16.9. Acesso em: 14 fev. 2024, pp. 17307–17318. URL: <https://ojs.revistacontribuciones.com/ojs/index.php/clcs/article/view/2228>.
- Maia, Marta de Campos (jan. de 2010). “Entendendo a necessidade de renovação no processo de ensino e aprendizagem”. Em: *RAE eletrônica* 9.1. Acesso em: 14 fev. 2024. URL: <https://www.scielo.br/j/raeel/a/CX9sSNZgzh5PcdjM87TtLjM/#>.
- Mercado, Luis Paulo Leopoldo (2002). *Novas Tecnologias na Educação: Reflexões Sobre a Prática*. UFAL.
- Ministério da Educação (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>, Acesso em: 2024.
- Oliveira, Edvaldo Ramalho de e Douglas da Silva Cunha (set. de 2021). “O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau”. Em: *Revista Educação Pública* 21.36. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribucoes-do-software-geogebra-no-ensino-da-funcao-do-1-grau>.
- SAAE, Serviço Autônomo de Água e Esgoto de Sacramento (2024). *Cálculo da Conta*. Online. Acessado em 27/09/2024, <https://www.saaesac.mg.gov.br/calconta>.
- Tajra, Sammya (2001). *Internet na educação/o professor na Era Digital*. 1. ed. São Paulo: Érica.
- Zabala, Antoni (2015). *A prática educativa: como ensinar*. Penso Editora.

Apêndices

Apêndice A

Fotos das Atividades em Sala de Aula

Figura 15: Fotos das Atividades em Sala de Aula

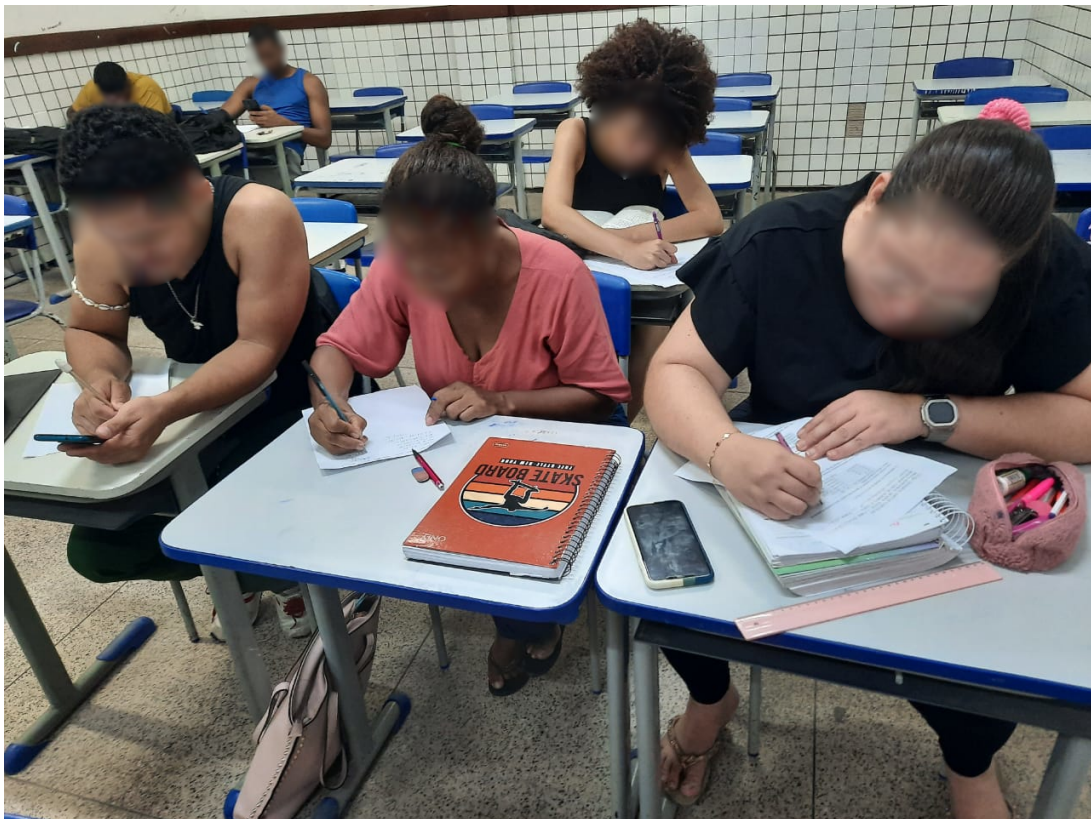


Figura 16: Fotos das Atividades em Sala de Aula



Figura 17: Fotos das Atividades em Sala de Aula



Figura 18: Fotos das Atividades em Sala de Aula

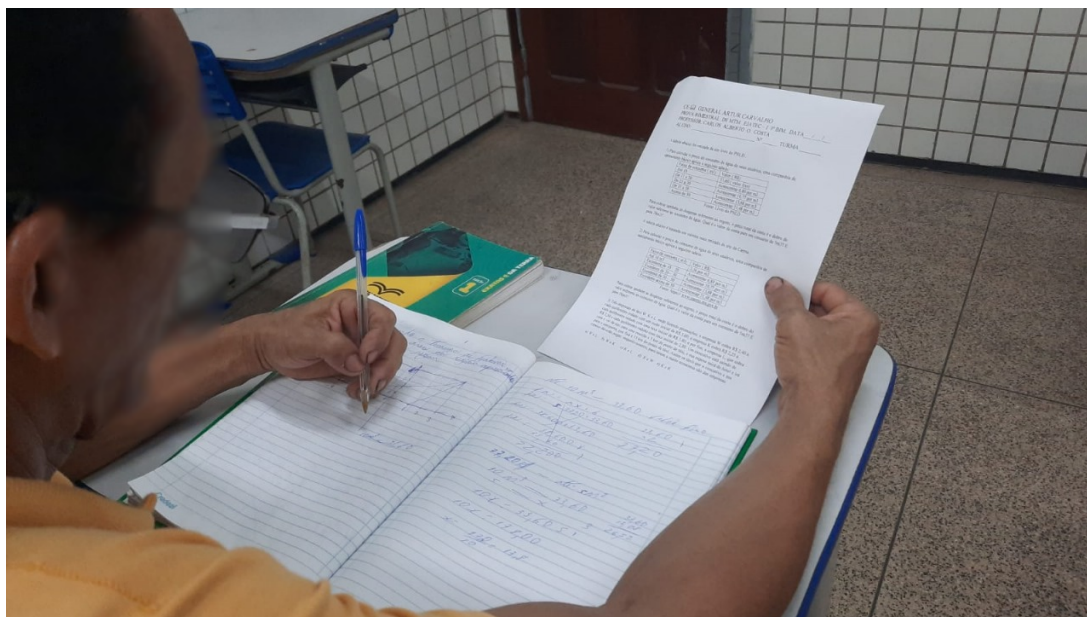


Figura 19: Fotos das Atividades em Sala de Aula



Apêndice B

Questões

A escolha das seguintes questões despertou meu interesse pela modelagem matemática por sua conexão com problemas práticos e aplicáveis ao cotidiano. A questão da receita máxima do milho verde introduziu conceitos fundamentais, mas o da conta de água da Caema se destacou por ser um problema real, próximo da realidade dos alunos, permitindo uma abordagem mais concreta e significativa no ensino.

Questão 1

Para calcular o preço do consumo de água de seus usuários, uma companhia de saneamento básico considera o número inteiro de metros cúbicos de água consumidos e aplica o seguinte quadro:

Faixa de consumo (m^3)	Valor (R\$)
Até 10	15,10 (valor fixo)
De 11 a 20	Acrescentar 2,35 por m^3
De 21 a 50	Acrescentar 5,50 por m^3
Acima de 50	Acrescentar 6,10 por m^3



Disponível em: <https://www.saaesac.mg.gov.br/facaleitura>

Para cobrar também as despesas referentes ao esgoto, o preço total da conta é o dobro do valor referente ao consumo de água.

Por exemplo, o cálculo do consumo de 22 m^3 é feito da seguinte maneira:

$$22 \text{ m}^3 = 10 \text{ m}^3 + 10 \text{ m}^3 + 2 \text{ m}^3$$

Então, o consumo é dado por:

$$2 \cdot (15,10 + 10 \cdot 2,35 + 2 \cdot 5,50) = 99,20 \text{ R\$}$$

Agora, responda às questões:

- (a) Quem consome 9 m^3 de água em um mês paga mais do que quem consome 7 m^3 mensalmente?
- (b) Qual é o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3 ? E de 27 m^3 ?
- (c) No mês em que houve um vazamento de água na casa de Beatriz, ela recebeu uma conta de R\$ 748,80. Qual foi o consumo de água na casa dela?

Questão 2

Figura 20: Questão 2 extraída na íntegra

TROQUE IDEIAS

A receita máxima

Ana vende milho verde em uma praia do litoral brasileiro. Durante o primeiro mês de uma temporada de verão, Ana observou que, quando o preço da espiga de milho é fixado em R\$ 3,50, são vendidas 40 unidades por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da espiga que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de espigas vendidas, ela pôde verificar que, para cada R\$ 0,10 de desconto, o número de espigas vendidas por dia aumentava em duas unidades, como mostra o gráfico ao lado (o desconto máximo praticado foi de R\$ 1,50 e podem ser oferecidos descontos segundo múltiplos de R\$ 0,05).

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Considerando linear a relação entre o preço (y) e o número (x) de espigas de milho vendidas, encontre a lei da função representada pelo gráfico.

b) Copie no caderno e complete a tabela seguinte, que relaciona o preço da espiga de milho, o número de unidades vendidas por dia e a receita (arrecadação) gerada.

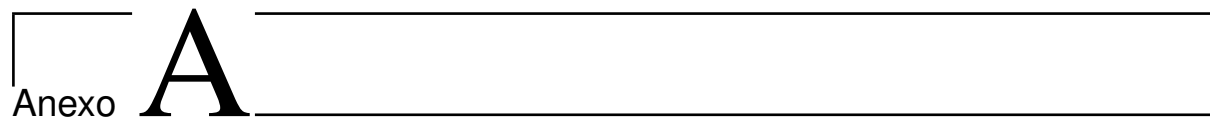
Preço da espiga (R\$)	Número de espigas vendidas por dia	Receita diária (R\$)
3,50		
3,40		
3,30		
3,00		
2,90		
2,80		
2,50		

c) Ao analisar a tabela, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela espiga que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Use seus conhecimentos para resolver esse problema. Ao final, você deverá determinar:

- i) o preço a ser cobrado pela unidade de espiga;
- ii) a quantidade de espigas vendidas por esse preço;
- iii) a receita gerada nessas condições.

Fonte: Iezzi et al. 2016, p. 105-106.

Anexos



Diário Oficial do Estado do Maranhão

Fonte: <https://www.diariooficial.ma.gov.br/index.php?page=busca&termo=&tipo=&dti=2023-12-05&dtf=2023-12-05>



ESTADO DO MARANHÃO

DIÁRIO OFICIAL



PODER EXECUTIVO

ANO CXVII Nº 223 SÃO LUÍS, TERÇA - FEIRA, 05 DE DEZEMBRO DE 2023 EDIÇÃO DE HOJE: 40 PÁGINAS

SUMÁRIO

Poder Executivo	01
Casa Civil.....	26
Secretaria de Estado da Saúde.....	27
Secretaria de Estado da Comunicação Social	29
Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Inovação	29
Secretaria de Estado do Meio Ambiente e Recursos Naturais ..	31
Secretaria de Estado da Agricultura Familiar	32
Secretaria de Estado da Educação	32
Secretaria de Estado da Segurança Pública	34
Secretaria de Estado de Administração Penitenciária	36

Assinado de forma digital por
TEREZA RAQUEL BRITO BEZERRA
FIALHO COELHO

PODER EXECUTIVO

DECRETO Nº 38.754 DE 05 DE DEZEMBRO DE 2023.

Abre ao Orçamento do Estado, em favor de Diversas Unidades Orçamentárias, crédito suplementar no valor de R\$ 50.966.351,00 (cinquenta milhões, novecentos e sessenta e seis mil, trezentos e cinquenta e um reais), para reforço de dotações constantes da Lei Orçamentária vigente.

O GOVERNADOR DO ESTADO DO MARANHÃO,
no uso de suas atribuições legais e tendo em vista a autorização contida no inciso III, § 1º do art. 43 da Lei Federal nº 4.320 de 17.03.1964; no art. 42 da Lei Estadual nº 11.796 de 02.08.2022: nos incisos: III

do art. 5º e V do art. 9º da Lei Estadual nº 11.871 de 29.12.2022; no art. 19 do Decreto Estadual nº 38.079 de 11.01.2023; e, nas alíneas b, c, u do parágrafo único do art. 3º do Decreto Estadual nº 38.696 de 16.11.2023 que alterou o Decreto Estadual nº 38.633 de 31.10.2023,

DECRETA

Art. 1º. Fica aberto ao Orçamento do Estado, em favor de Diversas Unidades Orçamentárias, crédito suplementar no valor de R\$ 50.966.351,00 (cinquenta milhões, novecentos e sessenta e seis mil, trezentos e cinquenta e um reais), para atender a programação constante do Anexo II.

Art. 2º. Os recursos necessários à abertura do crédito de que trata o art. 1º decorrem de anulação parcial de dotações orçamentárias no valor de R\$ 50.966.351,00 (cinquenta milhões, novecentos e sessenta e seis mil, trezentos e cinquenta e um reais), conforme indicado no Anexo I.

Art. 3º. Este Decreto entra em vigor na data de sua publicação.

PALÁCIO DO GOVERNO DO ESTADO DO MARANHÃO, EM SÃO LUÍS, 05 DE DEZEMBRO DE 2023, 202º DA INDEPENDÊNCIA E 135º DA REPÚBLICA.

CARLOS BRANDÃO
Governador do Estado do Maranhão

SEBASTIÃO TORRES MADEIRA
Secretário-Chefe da Casa Civil

VINICIUS CÉSAR FERRO CASTRO
Secretário de Estado do Planejamento e Orçamento

Anexo I - Redução

Ato Normativo		Decreto nº 38.754							
Órgão		11121	Secretaria de Estado da Comunicação Social						
Unidade Orçamentária		11121	Secretaria de Estado da Comunicação Social						
Código	Especificação		Esfera	IRP	Natureza	Fonte	Valor		
04.131.0348.4547	Realização e Promoção de Eventos Governamentais		F	2	33.90.99	1.5.00			
0001	No Estado do Maranhão						205.000,00		
04.131.0348.4871	Gestão da Rádio Timbira		F	2	44.90.99	1.5.00			
0001	No Estado do Maranhão						973.000,00		
Subtotal							1.178.000,00		
Órgão		14000	Secretaria de Estado da Cultura						
Unidade Orçamentária		14201	Fundação da Memória Republicana Brasileira						
Código	Especificação		Esfera	IRP	Natureza	Fonte	Valor		
13.392.0571.4902	Estudos e Pesquisas Socioculturais e Educacionais		F	2	33.90.99	1.5.00			
0001	No Estado do Maranhão						32.800,00		
Subtotal							32.800,00		

CASA CIVIL

Agência Estadual de Mobilidade Urbana e Serviços Públicos - MOB

RESOLUÇÃO MOB Nº 09/2023, DE 22 DE NOVEMBRO DE 2023

Dispõe sobre homologação do reajuste tarifário no período de outubro de 2023 a setembro de 2024, firmado pela Companhia Maranhense de Gás (GASMAR) e UTE PARNAIBA II GERAÇÃO DE ENERGIA S.A. – UTE III.

O PRESIDENTE DA AGÊNCIA ESTADUAL DE MOBILIDADE URBANA E SERVIÇOS PÚBLICOS (MOB), no uso de suas atribuições legais, de acordo com a Lei nº 11.662 de 31 de março de 2022, e ainda:

- Considerando o que determina a Lei Federal nº 14.134 de 8 de abril de 2021, que dispõe sobre as atividades relativas ao transporte de gás natural, de que trata o art. 177 da Constituição Federal, e sobre as atividades de escoamento, tratamento, processamento, estocagem subterrânea, acondicionamento, liquefação, regaseificação e comercialização de gás natural;

- Considerando o que determinam as Leis Estaduais nº 9.102/2009 e 11.662/2022, que dispõem sobre normas estaduais da prestação de serviços de movimentação de gás canalizado para consumidor livre, autoprodutor e autoimportador;

- Considerando os Contratos de Operação e Manutenção e Termo Aditivos a este firmados entre a Companhia Maranhense de Gás – GASMAR e as empresas Parnaíba Geração de Energia S.A., Parnaíba II Geração de Energia S.A., Parnaíba III Geração de Energia S.A. e Parnaíba IV Geração de Energia S.A.

RESOLVE:

Homologar o reajuste da tarifa acordada entre GASMAR e UTE III, o qual deve vigorar nos próximos 12 (doze) meses, a contar de outubro de 2023, nos termos do contrato, no valor de R\$ 0,83 (oitenta e três centavos de real) por MMBTU, obtido com aplicação do índice de inflação (IPCA), referente ao período outubro de 2022 a setembro de 2023.

JOSÉ ADRIANO CORDEIRO SARNEY
Presidente / MOB

RESOLUÇÃO MOB/MANº 10/2023, DE 30 DE NOVEMBRO DE 2023.

Dispõe sobre a recomposição tarifária dos serviços de abastecimento de água e esgotamento sanitário prestados pela Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão - CAEMA.

A AGÊNCIA ESTADUAL DE MOBILIDADE URBANA E SERVIÇOS PÚBLICOS - MOB, autarquia estadual, inscrita no CNPJ sob o nº 08.578.592/0001-53, com sede nesta capital, Rua Chapadinha, nº 03, Quadra 41, Edifício Caracas, Quintas do Calhau, no uso de suas atribuições legais e regimentais, e nos termos do art. 2º-A da Lei Estadual nº 10.225/2015;

Considerando o disposto no inciso IV, do art. 22, da Lei Federal nº 11.445, de 05 de janeiro de 2007, que trata da definição das tarifas, enquadrando-as como um dos objetivos da regulação;

Considerando o disposto no art. 29 da Lei Federal nº 11.445/07, que vincula os serviços de saneamento básico a critérios de sustentabilidade econômico-financeira, assegurada por meio de remuneração pela cobrança dos serviços e, quando necessário, por outras formas adicionais, como subsídios ou subvenções, vedada a cobrança em duplicidade de custos administrativos ou gerenciais a serem pagos pelos usuários;

Considerando o disposto no art. 37 da Lei Federal nº 11.445/07, que prevê o procedimento de reajuste de tarifas de serviços públicos de saneamento básico, em intervalo de 12 (doze) meses;

Considerando que o último reajuste tarifário dos serviços de saneamento básico prestados pela Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão - CAEMA foi realizado em 04 de janeiro de 2019, não sofrendo qualquer reajuste desde então;

Considerando que a recomposição inflacionária da tarifa constitui importante elemento de reequilíbrio econômico-financeiro dos serviços, permitindo ampliação da capacidade de investimentos e de alcance de maior qualidade da prestação dos serviços;

Considerando o encaminhamento de proposta de recomposição tarifária pelo Conselho de Administração da Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão - CAEMA, indicando a necessidade de reajuste por meio de índice geral de preços, com base na Nota Técnica Conjunta nº 01/2023, que trata do estudo de reajuste da tarifa de água e esgoto da Companhia, que passa a fazer parte integrante deste ato;

Considerando os estudos realizados pela Diretoria de Saneamento e Gás desta Agência (processo administrativo nº 0186934/2023), que atestam a defasagem tarifária indicada pela Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão - CAEMA;

RESOLVE:

Art. 1º. Homologar a recomposição da tarifa dos serviços públicos de saneamento básico prestados pela Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão - CAEMA, por meio da aplicação do índice geral de preços - INPC sobre o acumulado do mês de fevereiro de 2019 a agosto de 2023, incidindo no percentual de 31,69% (trinta e um vírgula sessenta e nove por cento).

§1º. Com a aplicação da recomposição tarifária, a CAEMA passará a aplicar a estrutura tarifária na forma do anexo único desta Resolução.

§2º A CAEMA deverá disponibilizar em seu sítio eletrônico e postos de atendimento, para consulta dos interessados, a tabela de que trata o anexo único desta Resolução.

Art. 2º. A recomposição deverá ser aplicada 30 (trinta) dias após a publicação da presente Resolução, conforme preceitua o art. 39 da Lei nº 11.445, de 05 de janeiro de 2007.

Art. 3º. Esta Resolução entra em vigor na data de sua publicação.

JOSÉ ADRIANO CORDEIRO SARNEY
Presidente

Agência Estadual de Mobilidade Urbana e Serviços Públicos - MOB

RESOLUÇÃO MOB/MA Nº 10/2023, DE 29 DE NOVEMBRO DE 2023.**ANEXO ÚNICO****ESTRUTURA TARIFÁRIA**

Categorias de Usuários	Faixas de Consumo	TARIFA	INPC
	m3/Economias/Mês		
Residencial	Até 10	R\$ 25,49	R\$ 33,58
	De 11 - 20	R\$ 5,16	R\$ 6,80
	De 21 - 30	R\$ 8,18	R\$ 10,77
	De 31 - 50	R\$ 10,39	R\$ 13,68
	Excedente de 50	R\$ 16,31	R\$ 21,48

Residencial Popular	Até 10	R\$ 19,33	R\$ 25,42
	De 11 - 20	R\$ 3,90	R\$ 5,14
	De 21 - 30	R\$ 8,18	R\$ 10,77
	De 31 - 50	R\$ 9,97	R\$ 13,13
	Excedente de 50	R\$ 15,71	R\$ 20,69
Entidades Filantrópicas	Até 10	R\$ 19,33	R\$ 25,42
	Excedente de 10	R\$ 1,93	R\$ 2,54
Comercial	Até 15	R\$ 132,45	R\$ 174,42
	De 16 - 100	R\$ 11,78	R\$ 15,51
	Excedente de 100	R\$ 10,23	R\$ 13,47
Comercial Pequenos Negócios	Até 15	R\$ 79,31	R\$ 104,50
	De 16 - 100	R\$ 11,36	R\$ 14,96
	Excedente de 100	R\$ 10,23	R\$ 13,47
Industrial	Até 15	R\$ 135,77	R\$ 178,77
	De 16 - 100	R\$ 11,93	R\$ 15,71
	Excedente de 100	R\$ 10,23	R\$ 13,47
Pública	Até 15	R\$ 136,04	R\$ 179,16
	Excedente de 15	R\$ 14,85	R\$ 19,56

SECRETARIA DE ESTADO DA SAÚDE**PORTARIA/SES/MA Nº. 1244 DE 29 DE NOVEMBRO DE 2023**

Estabelece a transferência de recursos financeiros ao Fundo Municipal de Saúde de **São Raimundo das Mangabeiras – MA**, destinados ao custeio.

O SECRETÁRIO DE ESTADO DA SAÚDE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 69, inciso II, da Constituição Estadual e,

Considerando a Lei nº. 9.634, de 19 de junho de 2012, que dispõe sobre a instituição do Sistema de Transferência de Recursos Financeiros do Fundo Estadual de Saúde para os Fundos Municipais de Saúde;

Considerando o Termo de Adesão nº. 07/2014/SES ao Sistema de Transferência de Recursos Financeiros Fundo a Fundo pactuado com o Município de **São Raimundo das Mangabeiras – MA**;

Considerando a Resolução CMS nº 10, de 16 de agosto de 2023, do Conselho Municipal de Saúde de **São Raimundo das Mangabeiras – MA**.

Considerando a Portaria/SES/MA nº 74, de 25 de janeiro de 2018, que dispõe sobre o controle interno dos repasses oriundos do Sistema de Transferência de Recursos Financeiros do Fundo Estadual de Saúde para os Fundos Municipais de Saúde previstos na Lei nº 9.634 de, de 19 de junho de 2012;

Considerando a necessidade de Custeio para ação de Assistência à Saúde da Unidade Mista São Raimundo Nonato (CNES: 2646617).

R E S O L V E

Art. 1º Estabelecer transferências de recursos financeiros no valor de R\$ 50.000,00 (cinquenta mil reais), destinados ao custeio. Tais recursos serão incorporados ao Fundo Municipal de Saúde de **São Raimundo das Mangabeiras – MA**, nos termos da Resolução CMS nº. 10, de 16 de agosto de 2023, do Conselho Municipal de Saúde de São Raimundo das Mangabeiras, através da conta bancária cuja Conta Corrente: 27.716-9, Agência 3626-9, Banco do Brasil S/A, vinculada ao CNPJ do Fundo Municipal de Saúde.

Art. 2º Determinar que o Fundo Estadual de Saúde adote as medidas necessárias para a transferência do valor estabelecido no art. 1º desta Portaria ao Fundo Municipal de Saúde de **São Raimundo das Mangabeiras – MA**.

Art. 3º Determinar que os recursos orçamentários, objeto desta Portaria, correrão por conta do orçamento do Fundo Estadual de Saúde, devendo onerar a Ação: 4908; Fonte: 1.500.121000; Subação: 23094 (DEMANDA GOVERNAMENTAL DE DRA. VIVIANE PARA O MUNICÍPIO DE SÃO RAIMUNDO DAS MANGABEIRAS); Natureza Despesa: 33.41.41.02; Unidade Orçamentária: 21901, conforme Processo Administrativo nº. 198232/2023/SES.

Art. 4º O ente municipal deve apresentar relatório parcial e/ou final junto à Secretaria de Estado da Saúde – SES em até 60 (sessenta) dias, a contar da liberação do recurso, devendo o referido relatório ser instruído nos termos do disposto no inciso I do art. 2º da Portaria/SES/MA nº 74, de 25 de janeiro de 2018.

Art. 5º Será instaurada Tomada de Contas Especial em desfavor do Gestor Municipal em caso da não aprovação da execução das ações pelo Conselho Municipal de Saúde ou da não apresentação e/ou não aprovação do Relatório Parcial e/ou Final, nos termos do disposto no §2º do art. 3º da Portaria/SES/MA nº 74, de 25 de janeiro de 2018.

Art. 6º Esta Portaria entra em vigor na data de sua publicação, tendo prazo máximo de 12 (doze) meses.

Tiago José Mendes Fernandes
Secretário de Estado da Saúde

PORTARIA/SES/MA Nº 1240 DE 29 DE NOVEMBRO DE 2023.

Alterar a Portaria 1345, de 06 de dezembro de 2022, que designa servidores para as funções de Gestor, Suplente de Gestor, Fiscal e Suplente de Fiscal do Contrato nº **365/2022/SES**, firmado entre o Estado do Maranhão, através da Secretaria de Estado da Saúde, e a empresa ALLM S.A.

O SECRETÁRIO DE ESTADO DA SAÚDE, no uso de suas atribuições que lhe confere o inciso II, artigo 69 da Constituição Estadual,

Anexo **B**

Normas de Cobrança de Tarifas da CAEMA

Fonte: <http://10.39.192.6/intranetcaema/>

	COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO MARANHÃO	DOCUMENTO NORMATIVO	FOLHA: 010/26
ASSUNTO: NORMA DE COBRANÇA DE TARIFAS			CÓDIGO: NOR:

9.4 - Categoria Pública

Além do previsto no item 8 alínea “d” desta Norma, enquadram-se ainda nesta sub - categoria, quartéis, delegacias de polícias, praças, fundações, estabelecimentos público de ensino, hospitais e clínicas mantidas pelo governo.

10 – CONSUMO MÉDIO

O Consumo Médio é utilizado nos casos a seguir:

- a) - Servir de parâmetro para análises de consumos posteriores;
- b) - Ser faturado em meses subseqüentes, quando da impossibilidade na determinação do consumo real da ligação, por diversos motivos.
- c) - Servir de parâmetro para determinação de consumo esperado.

11 – CONSUMO MÍNIMO

É a partir do consumo mínimo que é determinado o consumo excedente para fins de aplicação da “Tabela de Tarifa de Águas e Esgotos”.

O consumo mínimo tem tratamento diferenciado de acordo com a categoria de uso, assim vejamos. Este tratamento é extensivo às respectivas sub-categorias de cada categoria, considerando o que determina a Tabela de Tarifas de Água e Esgotos em vigor.

CATEGORIA	CONSUMO MÍNIMO
Residencial	10m ³ /economia
Comercial	15m ³ /ligação
Industrial	15m ³ /ligação
Publica	15m ³ /ligação

12 - COBRANÇA DE TARIFAS

A CAEMA adotará os seguintes procedimentos para cobrança das tarifas de água e esgoto previstos no anexo 03 desta Norma.

	COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO MARANHÃO	DOCUMENTO NORMATIVO	FOLHA: 011/26
ASSUNTO: NORMA DE COBRANÇA DE TARIFAS			CÓDIGO: NOR:

12.1 - Tarifa de Água

- a) - a tarifa de água estabelecida pela CAEMA é cobrada ao cliente em função do m³ (metro cúbico) consumido por um período de 30 (trinta) dias com variação de mais ou menos 10%.
- b) - a conta mensal correspondente ao consumo de água, fornecida pela CAEMA, compreende um valor relativo ao consumo mínimo e outro ao consumo excedente, calculado de acordo com a “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos” (Anexo 01) em vigor, amparada pelo Decreto Estadual n.º 11.060/89.
- c) - o cliente pagará somente o valor mínimo mensal, estabelecido para cada categoria, sempre que o consumo medido ou estimado for igual ou inferior ao volume (m³) correspondente ao consumo mínimo da categoria de acordo com a “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos”.
- d) - nos imóveis que não possuem hidrômetro o consumo será estimado pela área coberta do imóvel usando a “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos” que converte a área em m² para volume em m³.
- e) - quando não for possível medir o volume consumido, por avaria do hidrômetro ou por outros motivos que impossibilitem sua leitura, a cobrança será feita com base no consumo médio, devendo a Unidade providenciar correção da avaria no prazo máximo de 60 (sessenta) dias. Os códigos de impedimentos de leitura estão descritos no anexo 04.

12.2 - Tarifa de Esgoto

- a) - para a cobrança dos serviços de esgotos, o volume esgotado será considerado igual ao volume de água consumido, e a sua tarifa, para qualquer categoria, será igual a 100% da tarifa de água correspondente;
- b) - para as fábricas de gelo, Categoria Industrial, a tarifa de esgotos sanitários será igual a 20% do valor correspondente à tarifa de água;

	COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO MARANHÃO	DOCUMENTO NORMATIVO	FOLHA: 012/26
ASSUNTO: NORMA DE COBRANÇA DE TARIFAS			CÓDIGO: NOR:

- c) - para as fábricas de bebidas, Categoria Industrial, a tarifa de esgotos sanitários será igual a 30% do valor correspondente à tarifa de água, quando estas usarem água como matéria-prima;
- d) - nos casos em que haja abastecimento próprio de água, o volume de esgotos ou de despejos industriais será calculado à razão de 10m³ para cada 40m² de área coberta ou fração, da sua respectiva categoria ou através do equivalente ao volume de água medido pela CAEMA, com instrumento apropriado, instalado pelo usuário em sua fonte de abastecimento. Nos casos em que envolverem mais de duas economias o consumo tratado acima deverá ser rateado pelas economias quando se tratar de economias residenciais.
- e) - nos prédios que têm abastecimento de água, tanto pela rede pública quanto abastecimento de fonte própria, a tarifa de esgoto será cobrada conforme o que determina o item anterior.

12.3 - As despesas decorrentes de tarifas, prestação de serviços, multas e outras, são vinculadas ao prédio, independentemente do usuário ser, ou não, proprietário do mesmo. As despesas decorrentes de tarifas, prestação de serviços, multas e outras, são vinculadas ao prédio, independentemente do usuário ser, ou não, proprietário do mesmo.

12.4 - Cálculo do Valor da Conta Mensal de Água e Esgoto

- a) - valor da conta/fatura de serviço de água e esgotos é calculado, a partir da informação do consumo de água apurada pela leitura mensal do hidrômetro ou através de estimativa pela área coberta do imóvel conforme “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos”;
- b) - com valor de consumo definido, identifica-se a categoria do cliente e aplica-se a tarifa correspondente, de forma progressiva em relação às faixas de consumo conforme “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos”;
- c) - o valor da fatura de serviços de abastecimento de água é calculado por economia, exclusivamente para a Categoria Residencial, o consumo medido ou estimado é rateado pelo número de economias e ao valor de consumo por economia,

	COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO MARANHÃO	DOCUMENTO NORMATIVO	FOLHA: 013/26
ASSUNTO: NORMA DE COBRANÇA DE TARIFAS			CÓDIGO: NOR:

encontrado aplica-se a Tabela de Tarifas de Água e Esgotos e o resultado obtido e multiplicado pelo número de economias corresponderá ao valor que deve ser pago pelo serviço de água, veja exemplo abaixo:

12.4.1 - Cálculo do Valor do Consumo de Água

- a) - Verifica-se a categoria que compõe o imóvel e o número de economias ;
- b) - Identifica-se na Tabela de Tarifas de Água e Esgotos, em vigor no período, o consumo mínimo de cada categoria, suas respectivas taxas mínimas e o valor do m³ (metro cúbico) excedente para cada faixa de consumo da respectiva categoria.

12.4.1.1 - Consumo Mínimo para Categoria Residencial e respectivas subcategorias

Para imóvel da categoria residencial e respectivas sub-categorias é obtido pela multiplicação do número de economias da categoria ou sub-categoria respectiva pelo consumo mínimo correspondente contido na “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos”:

Exemplo:

Imóvel com 6 (seis) economias da Categoria Residencial

Consumo Mínimo do imóvel = 6 (número de economias) x 10 (Consumo Mínimo da Categoria Residencial) = 60m³.

12.4.1.2 - Consumo Mínimo para as Demais Categorias.

Para imóvel das categorias distintas da Categoria Residencial e sub-categorias o consumo mínimo corresponde ao contido na “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos” para a categoria em questão independente do número de economias

Exemplo:

Categoria Comercial = 15m³

Categoria Comercial Pequenos Negócios = 15m³

Categoria Industrial = 15m³

	COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO MARANHÃO	DOCUMENTO NORMATIVO	FOLHA: 014/26
ASSUNTO: NORMA DE COBRANÇA DE TARIFAS			CÓDIGO: NOR:

Categoria Pública = 15m^3

Exemplo:

Imóvel com 10 (dez) economias comerciais

Consumo mínimo do Imóvel = 15m^3

Exemplo de Economias de Categorias Mistas

Considerando um imóvel com 12 (doze) economias com a seguinte distribuição por categoria: 5(cinco) categorias residenciais, 3 (três) comerciais e 4(quatro) públicas. Neste imóvel que possui apenas uma ligação que apresentou consumo mensal de 434m^3 , temos o que segue:

- 5 (cinco) categorias residenciais;
- 3 (três) comerciais; e
- 4(quatro) públicas

Consumo Mínimo por Economia

Para Categoria Residencial = 10m^3

Para Categoria Comercial = 15m^3

Para Categoria Pública = 15m^3

Cálculo do Consumo Mínimo do Imóvel

Categoria Residencial (5)	$5 \times 10\text{ m}^3 = 50\text{m}^3$
Categoria Comercial (3)	$1 \times 15\text{ m}^3 = 15\text{m}^3$
Categoria Pública (4)	$1 \times 15\text{ m}^3 = 15\text{m}^3$
Total = 80m^3	

Consumo Mínimo do Imóvel = 80m^3

	COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO MARANHÃO	DOCUMENTO NORMATIVO	FOLHA: 015/26
ASSUNTO: NORMA DE COBRANÇA DE TARIFAS			CÓDIGO: NOR:

12.4.1.3 - Valor do Consumo Mínimo para a Categoria Residencial

Corresponde ao consumo mínimo da “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos” aplicado a tarifa correspondente e o resultado multiplicado pelo número de economias.

Exemplo:

Imóvel com 6 (seis) economias da Categoria Residencial e consumo no mês de 90m³.

Valor do Consumo Mínimo por Economia = R\$ 6,80

Valor do Consumo Mínimo do Imóvel = R\$ 6,80 x 6 (número de economias) = R\$ 40,80

12.4.1.4 - Valor do Consumo Mínimo para as Demais Categorias

Corresponde ao consumo mínimo em m³ (metro cúbico) da “Tabela de Tarifas de Água e Esgotos” aplicada a tarifa correspondente.

Categoria Comercial = R\$ 31,80

Categoria Comercial Pequenos Negócios = R\$ 19,05

Categoria Industrial = R\$ 33,75

Categoria Pública = R\$ 33,75

Categoria Residencial Popular = R\$ 4,80

Categoria Entidades Filantrópicas = A tarifação desta categoria não é cascata o valor do m³ de R\$ 0,48 é aplicado em qualquer valor de consumo.

Exemplo de Economias Mistas:

Considerando um imóvel com 12 (doze) economias com a seguinte distribuição por categoria: 5 (cinco) categorias residenciais, 3 (três) comerciais e 4 (quatro) públicas. Neste imóvel que possui apenas uma ligação que apresentou consumo mensal de 434m³, temos o que segue:

- 5 (cinco) categorias residenciais;
- 3 (três) comerciais; e
- 4 (quatro) públicas.

Faça Sua Leitura - SAAE

Aprenda a fazer a leitura no hidrômetro¹

Acompanhe a evolução dos números e fique ligado em seu consumo!

A leitura do hidrômetro é simples. O aparelho se parece com um velocímetro. Tem números pretos e vermelhos. Para acompanhar a leitura e o consumo do imóvel apenas os números pretos devem ser levados em consideração. Isto porque a medição é feita em m³. Cada m³ corresponde a 1000 litros de água.



Fonte: DMAE.

¹Este apêndice contém a transcrição do conteúdo disponível em <https://www.saaesac.mg.gov.br/facaleitura>.

Veja o exemplo:

Você recebeu sua conta no dia 10. Nela estava registrado que a LEITURA ATUAL medida na data da leitura era 1997. No dia 20 você foi conferir a leitura e por consequência o consumo do período. Ao verificar o hidrômetro notou que os números pretos marcavam 2006. Para saber o consumo do período você deve fazer a seguinte conta:

última leitura efetuada (feita no dia 20) - leitura efetuada anteriormente (feita dia 10)

$$2006 - 1997$$

$$9$$

Isto indica que no período entre o dia 10 e o dia 20 foram consumidos 9m^3 de água. Este consumo corresponde a 9000 litros de água que é a multiplicação de 9m^3 por 1000.

Você considera esse consumo excessivo para a quantidade de pessoas que utilizam o imóvel? A média nacional de consumo de água no Brasil, segundo estudos do Instituto Socioambiental (ISA), é de 150 litros/dia por pessoa. O volume recomendado pela Organização das Nações Unidas (ONU) é de 110 litros/dia por pessoa (fonte: <http://www.socioambiental.org/pt-br/blog/blog-do-isa/agua-nas-metropoles-o-risco-da-escassez>) e o volume recomendado pela Organização Mundial de Saúde (OMS) é de 50 litros/dia por pessoa (fonte: <http://planetasustentavel.abril.com.br/download/stand2-painel5-agua-por-pessoa2.pdf>). Faça as contas e verifique se o seu consumo está dentro da média recomendada. A água, além de ser consumida para as necessidades diárias dos usuários pode ser desperdiçada nas seguintes situações:

- uso inadequado
- vazamento nas tubulações internas do imóvel
- canos com problemas
- torneiras e descargas desreguladas
- entre outros

Dessa forma fique atento ao seu consumo e à sua leitura, para que possa identificar de forma mais rápida possíveis vazamentos e consumo elevado de água.

Você pode informar ao SAAE sua leitura

Se o hidrômetro instalado no seu imóvel fica fechado ou em local que impede a leitura pelo funcionário do SAAE, você pode informar a leitura usando o que você aprendeu.

Ligue para 0800 283 1425 (de telefone fixo) ou 3351 1422 e informe seu endereço, a leitura e a data que a leitura foi feita.

Verifique na sua conta em DATA DA LEITURA ATUAL, o dia em que o funcionário passou em sua residência. É sempre no mesmo dia ou com até dois dias de diferença que o funcionário irá passar no próximo mês. Informe leitura com 5 (cinco) dias de antecedência, todos os meses.

Assim não há acúmulo de consumo e nem cobrança indevida.