UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Uanderson de Moura Farias

Equações parabólicas do tipo Kirchhoff com fontes de expoentes variáveis

São Luís - MA
2025

Uanderson de Moura Farias

Equações parabólicas do tipo Kirchhoff com fontes de expoentes variáveis

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa

São Luís - MA

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Sobrenome do autor, Nome.
   Título da dissertação ou tese / Nome Sobrenome do autor. - 2023.
   50 f.

   Orientador(a): Nome Sobrenome do orientador.
   Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2023.

   1. Palavra-chave 1. 2. Palavra-chave 2. 3. Palavra-chave 3. I. Sobrenome do orientador, Nome. II. Título.

Uanderson de Moura Farias

Equações parabólicas do tipo Kirchhoff com fontes de expoentes variáveis

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 12 de fevereiro de 2025:

Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa
Orientador
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dr. Gustavo Silvestre do Amaral Costa
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
Examinador Externo
Universidade Federal do ABC

São Luís - MA
2025

A todos que torcem por mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, pela saúde e, por ter me dado sabedoria para concluir mais uma etapa importante da minha trajetória acadêmica e de vida. Que um dia se Deus me permitir, quero proporcionar uma vida melhor para aquelas que estão ao redor.

Agradeço ao meu pai, Arivaldo Farias da Silva que me fez ser quem sou hoje, pelo caráter, honestidade e simplicidade de vida e, a minha mãe Jacilândia de Moura Farias. Também agradeço, as minhas tias (mães) Marili Batista da Silva, Damiana Farias da Silva e Cicera Farias da Silva, Jacirene de Castro Costa e, meus tios José Everal Farias da Silva, Leandro Farias da Silva, Josué Batista da Silva. Não posso deixar de lembrar, do meu falecido avô Manoel Jovelino Pedro de Farias e minha avó Maria Teresinha Farias da Silva, por todo amor que todos têm por minha pessoa, por acreditar no meu empenho, pelas orações feitas, pelas palavras e ações que me motivaram ainda mais a seguir, por um futuro melhor.

Aos meus irmãos, José Iran de Moura Farias, o cara que sempre me ajudou, que sempre acreditou na minha pessoa e, que sempre estava disposto em me ajudar no que fosse preciso, e Edivaldo de Moura Farias um pai admirável da minha "princesinha"e do meu "cabeçudinho", João Vitor Leite da Silva um irmão de outra mãe, o cara que dá mais trabalho, sempre tem que ter um na família, Marllon Emanuel Batista de Farias esse é o famoso "zezim pindoga", Artur Lorenzo Batista de Farias e esse é o "zezim pindoga jr."e Maria Victoria Leite da Silva a "doidinha"de toda família, pela nossa amizade, companheirismo, brincadeiras, por me fazerem bem ao estar com todos vocês, amo todos igualmente meus lindos.

As minhas cunhadas, Maria Luana Alencar, Tainá Macedo Tiburtino, por cuidarem bem dos meus irmãos e dos meus queridos sobrinhos.

Minha namorada, Paula Thyalla, pela confiança, por acreditar na minha capacidade e pelo amor que tem por mim.

Aos sobrinhos, Elysa Emanuele Farias da Silva a "princesinha"do titio, Apolo Farias da Silva o "cabeçudinho"do titio e, aos meus primos, Pedro Antônio Farias da Silva o primeiro "zezim pindoga"o cara nunca esquece, Jonathas Emanoel de Farias da Silva, Gisely Costa da Silva, minha prima lindinha, Gabriel Costa da Silva esse é o primo mais namorador e, Luís Emanuel Batista de Farias é considerado como meu filho, pelo carinho e amor que todos vocês têm por mim.

Aos meus amigos, Douglas, Luciane Bezerra da Silva, Maria José, vocês são uma

família que ganhei em Caxias-MA no decorrer dos quatro anos de graduação.

Aos meus amigos de graduação, Thiago Henrique Vieira Duarte cara mais perigoso da turma o famoso "PNB", a interpretação da sigla fica a cargo de leitor, Jaderson Morais o "safadão"que sempre apronta mas nunca fala nada, e sua família, por todo carinho, humildade e acolhimento, Gabriel Ferreira o famoso "espocador de todas"e nosso futuro policial, Lucas Reis da Rocha nosso 'PRF"e o cara do dinheiro, Douglas Araújo um irmão que tenho para a vida.

As minhas amizades, para a vida toda, que São Luís-MA me proporcionou, Maria Idalina Rodrigues da Silva, Célia Lopes e o seu Benedito, pelas boas conversas que tínhamos, pelas ajudas, por todo carinho e companheirismo que todos vocês tiveram por mim.

Aos meus amigos do mestrado, Fábio Almeida Ribeiro o qual iniciamos e terminamos o curso juntos, um amigo que levo para a vida toda, sempre estava disposto a me ajudar nas minhas falhas, que não são poucas, excelente aluno, quase não estudava e era sempre o que tirava a maior nota, um pouco desumilde, mas já melhorou bastante, Carlos Eduardo Sousa Silva o nosso "carequinha", engenheiro que é mestre em matemática, sempre estava disposto a me ajudar nas minhas dúvidas sobre algum assunto ou questão, muito esforçado a aprender e obter êxito no que fosse preciso, Larissa Santos Chagas um exemplo de mulher, amiga, humilde e que tem um coração gigante, Maria Carla Bulhão de Queirós Andrade Vale uma pessoa amigável a quem pude conhecer durande o curso, Gustavo Henrique Colins Marques nosso futuro doutor, o cara que sempre me ajudou em minhas dúvidas, um futuro excelente profissional.

Ao todo corpo docente da UFMA, em especial os professores que tive o privilégio ter cursado disciplinas, Anselmo Baganha Raposo Júnior um excelente profissional, uma pessoa admirável, um professor que nos faz gostar ainda mais de estudar matemática e me fez perceber que tenho muito a aprender sobre matemática e sobre a vida, um amigo para toda vida, tenho certeza que tendo o senhor como meu professor a vida se tornou mais bela, que um dia possa me tornar uma pessoa em todos os sentidos assim como o senhor, Adecarlos Costa Carvalho um professor incrível que nos faz perceber que a matemática é mais bela em suas aulas, tenha a certeza que me sinto realizado por ter tido o privilégio ter sido seu aluno, Ivaldo Paz Nunes um professor que nos faz enxergar a matemática com outros olhares, sua aulas são sempre um estimo para seguir em frente, Giovane Ferreira Silva nosso grande coordenador que sempre está disposto a resolver nossos problema no curso, tive privilégio de ser seu aluno, um grande profissional, a todos os senhores, gratidão por todos os ensinamentos, tenho a certeza que tive os melhores professores que poderia ter, que um dia eu possa ser como os senhores, tenho orgulho de dizer que os senhores foram os meus mestres.

Ao meu caríssimo orientador da graduação Franjossan Gomes dos Santos que sempre me ajudou e acreditou no meu potencial, saiba que o senhor é uma das minhas

fontes de inspiração, só tenho a agradecer pelo privilégio de ter sido seu aluno, e além disso, seu orientando.

Ao secretário do programa PPGMAT da UFMA, senhor Lenildo por sempre esta disposto a ajudar com o necessário.

A todas as pessoas do serviços gerais e aos vigilantes, porteiros, pela competência e comprometimento, em especial a Dona Jó que sempre manteve nossa sala impecável.

Em especial ao meu caríssimo professor e orientador de mestrado, José Vanterler Costa da Sousa pela confiança na minha capacidade, pelos dias de discussões, pela paciência que teve no decorrer do nosso trabalho, pela disponibilidade de sempre esta disponível para sanar minhas dúvidas, por todo companheirismo que o senhor me forneceu, o senhor me mostrou que nada é fácil, mas com muito esforço e dedicação superamos nossas limitações, que um dia eu possa ser um professor gigante asssim como o senhor, tenho certeza que tive o melhor orientador que poderia ter.

À FAPEMA pela disponibilidade financeira e confiança em pratocinar meu trabalho.

Agradeço a todos os professores do PPGMAT e meus colegas de sala por toda a contribuição, seja direta ou indiretamente.

"Viver é Cristo, morrer é lucro."

(Filipenses 1:21)

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados na existência e não existência de solução fraca global para problemas parabólicos do tipo $p(x)$-Kirchhoff com fonte de expoentes variáveis do tipo

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = |u|^{m(x)-2}u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$, condição inicial $u_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, a função de Kirchhoff $\mathcal{M} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ e as funções $m, p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Utilizamos o método de Galerkin e o método de poço potencial para estudar os principais objetivos deste trabalho.

Palavras-chave : $p(x)$-Kirchhoff, Método de poço potencial, Existência global, Expoente variável.

Abstract

In this work, we are interested in the existence and non-existence of global weak solutions for parabolic problems of the type $p(x)$-Kirchhoff with variable exponent sources of the type

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = |u|^{m(x)-2}u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary $\partial\Omega$, initial condition $u_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, the Kirchhoff function $\mathcal{M} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ and the functions $m, p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. We use the Galerkin method and potential well method to study the main objectives of this work.

Keywords : $p(x)$-Kirchhoff, Potential well method, Global existence, Variable exponent.

Lista de símbolos

Ω Subconjunto limitado e suave do $\mathbb{R}^N$;

$\partial\Omega$ Fronteira do conjunto Ω;

$|\Omega|$ Medida de Lebesgue do subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

$L^\infty_+ = \{u \in L^\infty(\Omega) : \inf \mathrm{ess}(u) \geq 1\}$;

$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável }, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}$ Espaço de Lebesgue com expoente variável, $1 \leq p < +\infty$.

$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \right\}$ Espaço de Sobolev com expoente variável, $1 \leq p < +\infty$.

$\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^*$ Dual topológico do espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$;

$C(\overline{\Omega}) = \left\{ h \in C(\Omega) : \text{possui extensão contínua ao } \overline{\Omega} \right\}$;

$C_0^\infty(\Omega)$ Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω;

$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \overline{\left\{ C_0^\infty(\Omega),\ \|\cdot\|_{p(\cdot)} \right\}}$;

$\overline{C_0^\infty(\Omega)}$ $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$;

$\hookrightarrow$ Imersão contínua;

$\to$ Convergência forte, quando $n \to \infty$;

$\overset{\omega}{\to}$ Convergência fraca, quando $n \to \infty$;

$\xrightarrow{\omega^*}$ Convergência fraca estrela, quando $n \to \infty$;

$$p^*(x) := \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & \text{se } p(x) < N \\ \infty, & \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$ Expoente crítico de Sobolev;

q.t.p. quase todo ponto;

$\mathcal{M}$ Função de Kirchhoff;

$p^{-} = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} p(x)$;

$p^{+} = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} p(x)$;

$\|u\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega}\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$ Norma do tipo Luxemburgo;

$\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(\cdot)}dx\ ,\ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ função modular;

$\|u\|_{1,p(\cdot)} = \|u\|_{p(\cdot)} + \|\nabla u\|_{p(\cdot)}$ Norma no espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$;

$\int_{\Omega} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ j-ésima derivada fraca de u;

$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\right)\nabla u$ $p(x)$-Laplaciano;

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ gradiente da função u.

Sumário

1 Introdução e Motivação

Neste trabalho estamos interessados em estudar a existência e não existência de solução fraca global para uma classe de problemas parabólicos do tipo $p(x)$-Kirchhoff com fonte de expoentes variáveis do tipo

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{M}\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = |u|^{m(x)-2}u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e condição inicial $u_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. A função de Kirchhoff $\mathcal{M} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfaz as seguintes condições:

$(\mathcal{H}_1)$ $\mathcal{M} \not\equiv 0$ é contínua e não-decrescente em $[0,\infty)$;

$(\mathcal{H}_2)$ A aplicação $t \mapsto \dfrac{\mathcal{M}(t)}{t^s}$ é não-crescente em $(0,\infty)$, onde $s \geq 0$ é uma constante.

Os expoentes variáveis $p, m \in C(\overline{\Omega})$ satisfazem as seguintes condições:

$$1 < p^- \leq p^+ \text{ e } \max\left\{2, p^+(1+s)\right\} < m^- \leq m^+ \leq \min\left\{p^-\left(1+\frac{2}{N}\right), p^*(x)\right\}, \tag{1.2}$$

onde $p^- = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} p(x)$, $p^+ = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} p(x)$ e m^-, m^+ são definidos de forma similar, e

$$p^*(x) := \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{se } p(x) < N \\ \infty, & \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$

Além disso, p satisfaz a condição de Zhikov-Fan:

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{\log|x-y|}, \text{ para todo } x, y \in \Omega \text{ com } 0 < |x-y| < \delta, \tag{1.3}$$

onde $A > 0$ e $\delta \in (0,1)$. Por fim, temos que o operador $p(x)$-Laplaciano é dado por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right).$$

Nos últimos anos, Equações Diferenciais Parciais (EDP's) em domínios suaves receberam atenção considerável na literatura de matemática pura e aplicada. Ocorrem em aplicações como na mecânica de nanoestruturas, fluidos em canais finos (modelos de lubrificação, circulação sanguínea), processo de difusão química em membranas ou tiras estreitas (processo catalítico), homogeneização de estruturas reticuladas, como no estudo da estabilidade (ou instabilidade) da dinâmica assintótica de equações parabólicas singularmente perturbadas, veja por exemplo [4, 5, 6, 7, 10, 45, 50].

Kirchhoff [34] em 1883 propôs um modelo dado pela seguinte equação hiperbólica

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1.4}$$

que é uma extensão da conhecida equação da onda de D'Alembert para vibrações de cordas elásticas, onde ρ é a densidade da massa, P_0 é a tensão inicial, h é a área da seção transversal, E é o módulo de Young do material e L é o comprimento da corda. Problemas da forma da Eq.(1.4) são chamados de problemas do tipo Kirchhoff.

Quando $p(x)$ e $m(x)$ são constantes, o problema (1.1) é bem conhecido, chamado de equação parabólica do tipo p-Kirchhoff

$$u_t-\mathcal{M}\left(\|\nabla u\|_p^p\right)\Delta_p u=|u|^{m-2}u. \tag{1.5}$$

O problema (1.5), pode ser usado para descrever o movimento de um fluído ou gás não estacionário em um meio não homogêneo e anisotrópico, e o termo não-local $\mathcal{M}$ pode descrever uma possível mudança no estado global do fluído ou gás, causado por seu movimento no meio condensado [31]. O problema (1.1) também é considerado como uma espécie de EDP's com condições de crescimento fora do padrão que podem ser usados para descrever muitos fenômenos físicos importantes, tais como, fluídos eletro-reológicos [46, 47, 56], fluídos termo-reológicos [3], e processamento de imagens [9, 14, 36]. O que tem-se notado é uma crescente exponencial em problemas que envolvem o operador Laplaciano com expoente variável $p(x)$ ou com expoente constante $p(x)=p$ sobre termos de Kirchhoff, como por exemplo [8, 15, 17, 25, 29, 30, 33, 39, 55]. Por outro lado, também podemos destacar que problemas do tipo (1.5), também é de interesse no aspecto fracionário, dito operadores não locais [1, 12, 18, 21, 24, 51, 52, 53, 54].

Em relação as propriedades de blow-up e existência de solução global das equações de Kirchhoff, recomendamos alguns trabalhos em que os autores estudam os casos não-degenerado e degenerado e sua extensão [2, 22, 31, 32, 37, 38, 43]. A função $\mathcal{M}$ de Kirchhoff é o chamado caso não-degenerado ou degenerado de acordo com a condição de $\mathcal{M}(0)>0$ ou $\mathcal{M}(0)=0$, respectivamente.

Para o caso em que $\mathcal{M}$ é não-degenerado, Han-Li [31] estudou a Eq.(1.5) quando $\mathcal{M}(t)=a+bt$ com $a,b>0$ e $2=p<m/2$ que é o caso especial de $(\mathcal{H}_1)$ e $(\mathcal{H}_2)$. Aplicando o método de poço potencial modificado, os autores obtiveram existência global e blow-up em tempo finito de soluções fracas para a energia inicial arbitrária. Além disso, a taxa de decaimento da norma L^2 para a solução globais também foram investigadas. Veja tambem outros interessantes trabalhos [32, 37, 38].

Para o caso em que $\mathcal{M}$ é degenerado, Pan-Zhang-Cao [43] estudou a seguinte equação parabólica envolvendo o fracionário p-Laplaciano

$$u_t-\mathcal{M}\left([u]_{s,p}^p\right)(-\Delta_p)^s u=|u|^{m-2}u, \tag{1.6}$$

onde $\mathcal{M}(t) = t^s$ com $s > 0$. Combinando o método de Galerkin com a teoria de poço potencial, os autores obtiveram a existência de solução global para o problema (1.6). Veja também outros interessantes trabalhos, por exemplo: Xiang-Radulescu-Zhang [41], Ding-Zhou [22], e Khaldi-Ouaoua-Maouni [33] que envolvem equações parabólicas do tipo Kirchhoff. Além do anterior, recomendamos os trabalhos [31, 32, 37, 38], quando a função de Kirchhoff do tipo $\mathcal{M}(t) = a + b\, t^s$ com $a \geq 0$, $b > 0$ e $s \geq 0$, para o caso não-degenerado com $a, b > 0, s = 1$, e [43] para o caso degenerado com $a = 0, b = 1$ e $s > 0$.

O método de poço potencial foi introduzido por Sattinger e Payne [44, 49] para tratar não apenas o problema (1.1), mas também as EDP's com crescimentos fora do padrão. Na literatura, esse método é uma ferramenta poderosa para estudar a existência e a não existência de soluções globais para EDP's com crescimento padrão. No entanto, tal método era apenas para problemas com expoentes constantes, portanto, seria necessário e útil estender esse método para aplicar em EDP's com expoentes não constantes. Alguns trabalhos interessantes com essa abordagem, poucos ainda, devido a falta de homogeneidade, podem ser consultados em [2, 27].

Em 2022 Guo et al. [27] realizaram um trabalho destacando que não é fácil desenvolver o método de poço potencial para tratar de EDP's com crescimente fora do patrão devido à falta de homogeneidade. A principal dificuldade é mostrar que

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} E(u) = \inf_{u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)/\{0\}} \sup_{\lambda > 0} E(\lambda u), \tag{1.7}$$

onde $E(u)$ é o funcional de energia definido por

$$E(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx$$

e $\mathcal{N}$ é a variedade de Nehari que será apresentada no Capítulo 3.

O passo fundamental para obter a Eq.(1.7) é calcular $\lambda_* = \lambda_*(u)$ tal que $E(\lambda_* u) = \sup_{\lambda > 0} E(\lambda u)$. Não é difícil para o caso de expoentes constantes em que λ_* satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = (\lambda_*)^{m-p} \int_\Omega |u|^m dx.$$

No entanto, é obviamente falso para o caso de expoentes não constantes pela falta de homogeneidade. Para superar essa dificuldade, uma saída, é usar técnicas mais sofisticadas, como veremos no Capítulo 3, por exemplo, o Lema 3.2. No caso, como $p(x)$ e $m(x)$ são funções, não é possível resolver λ_* explicitamente, mas pode-se mostrar que para cada $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)/\{0\}$ existe um único $\lambda_* = \lambda_*(u) > 0$ satisfazendo $E(\lambda_* u) = \sup_{\lambda > 0} E(\lambda u)$ tal que obtemos a Eq.(1.7). Além do anterior, também destacamos que devido à presença da função de Kirchhoff, ela causa mais problemas técnicos. Um deles é que devemos restringir aos casos subcríticos $E(u_0) < d_*$, onde d_* é menor que a profundidade de poço potencial d.

O propósito desta dissertação é utilizar o método de Galerkin e o Teorema de Peano para discutir a existência e unicidade de solução fraca local para o problema (1.1). Por outro lado, também temos interesse em discutir a existência e não existência de solução fraca global via o método do poço potencial. Para a elaboração deste trabalho, utilizamos como principal referência o artigo de Chuong et al. [16]. A fim de facilitar o desenvolvimento e entendimento do presente trabalho, acreditamos que fica melhor descrito da seguinte forma:

No Capítulo 2, estamos interessados em apresentar uma estrutura variacional, ou seja, apresentamos os conceitos de espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis, algumas propriedades que envolvem algumas das principais desigualdades, como de: Poincaré, Gagliardo-Nirenberg, Young dentre outras. Nesse sentido, apresentamos alguns resultados importantes como os Lemas de Lions, Aubin-Lions-Simon e também um lema que permite obter uma estimativa através de uma função F não-crescente conforme apresentada no capítulo.

O Capítulo 3, é destinado a discutir alguns resultados técnicos, em outras palavras, no primeiro momento vamos apresentar um resultado através do Lema 3.1, cujo objetivo é apresentar algumas estimativas para a função de Kirchhoff, tais estimativas são de grande relevância para os principais resultados a serem discutidos no trabalho. Por outro lado, apresentamos os conceitos de funcional energia e funcional de Nehari, em particular, a ideia de variedade de Nehari. Nesse sentido, finalizamos o capítulo, com a discussão de alguns resultados que envolvem os funcionais energia e de Nehari, de modo especial, os resultados que garanten que o poço potencial

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} E(u).$$

Para finalizar, no Capítulo 4 apresentaremos os principais objetivos do presente trabalho, que será dividido em duas etapas. Na primeira etapa, vamos discutir a existência e unicidade de solução fraca local para o problema (1.1), por meio do método de Galerkin e através do uso do teorema de Peano, garantindo a existência de solução fraca local e, a unicidade de solução fraca limitada é garantida pela desigualdade de Gronwall. Em outras palavras, estamos interessados na prova do seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Então existe* $T > 0$ *tal que o problema* (1.1) *tem uma solução fraca. Além disso, a solução é única se for limitada.*

Na segunda etapa, estamos interessados na solução do problema (1.1), quando a energia inicial é subcrítica. Para tanto é usado o método do poço potencial para expoentes variáveis e uma classe de função do tipo Kirchhoff $\mathcal{M}$ satisfazendo as condições $(\mathcal{H}_1)$ e $(\mathcal{H}_2)$ sobre a existência não-global e global de soluções fracas para o problema (1.1). Em outras palavras, mais precisamente, vamos provar os seguintes teoremas a seguir:

Teorema 1.2. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Se* $E(u_0) < d_*$ *e* $I(u_0) < 0$*, então* $T_{\max} < \infty$*. Além disso, encontramos um limite superior para o tempo máximo de existência, dado por*

$$T_{\max} \leq \frac{4(m^- - 1)\|u_0\|_2^2}{m^-(m^- - 2)^2(d_* - E(u_0))}.$$

Teorema 1.3. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Se* $E(u_0) < d_*$ *e* $I(u_0) \geq 0$*, então* $T_{\max} = \infty$*. Além disso, o funcional energia da solução fraca do problema* (1.1) *contém as seguintes estimativas de decaimento:*

$$E(u(t)) \leq \begin{cases} E(u_0)\left(\frac{p^+(1+s)}{2+(p^+(1+s)-2)\alpha t}\right)^{\frac{p^+(1+s)}{p^+(1+s)-2}} & , \text{ se } p^+ > \dfrac{2}{1+s} \\ \\ E(u_0)e^{1-\beta t} & , \text{ se } p^+ \leq \dfrac{2}{1+s}, \end{cases}$$

onde α *e* β *são constantes positivas dadas posteriormente, dependendo apenas de* p*,* m*,* s*,* M *e* u_0*.*

Encerramos o trabalho, com comentários sobre o problema (1.1) destacando os principais objetivos realizados no trabalho e, quais são os próximos passos da pesquisa.

2 Preliminares

No presente capítulo, estamos interessados em apresentar algumas definições e, resultados básicos sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis (veja [20, 23] e suas referências). O espaço de Lebesgue será útil para definirmos o espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e, em seguida $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

2.1 Espaço de Lesbesgue com expoente variável

Seja $p : \Omega \to [1, \infty)$ uma função mensurável, onde Ω é domínio do $\mathbb{R}^N$. O espaço de Lebesgue com expoente variável $p(x)$ é definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável tal que } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\},$$

com norma do tipo Luxemburgo dada por

$$\|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Dizemos que $L^{p(x)}(\Omega)$ é o espaço generalizado de Lebesgue. O espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Considere a função modular $\rho : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \ , \ u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

A seguir vamos apresentar alguns resultados auxiliares e suas respectivas provas, que são de suma importância no decorrer do presente trabalho.

Lema 2.1. *Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ fixado, consideremos o conjunto*

$$I_u = \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u(x)}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

temos:

(i) Se $u = 0$, então $I_0 = (0, +\infty)$.

(ii) Se $u \neq 0$, então existe $a \in I_u$, com $a > 0$, tal que $I_u = [a, +\infty)$.

Demonstração. (i) Se $u = 0$, então $\rho\left(\frac{u(x)}{\lambda} \right) = \rho(0) \leq 1$, para todo $\lambda > 0$. Assim, $I_0 = (0, \infty)$.

(ii) Se $u \neq 0$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então $|u(x)|^{p(x)} > 0$ q.t.p. em Ω. Nesse sentido, temos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx > 0.$$

Considerando

$$\varphi(x) := \rho(u)^{\frac{1}{p(x)}} > 0, \tag{2.1}$$

então

$$\begin{aligned}
\rho(u) &= \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\varphi(x)}\right|^{p(x)} dx = \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\rho(u)^{\frac{1}{p(x)}}}\right|^{p(x)} dx \\
&= \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\left|\rho(u)^{\frac{1}{p(x)}}\right|^{p(x)}} dx = \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\left(\rho(u)^{\frac{1}{p(x)}}\right)^{p(x)}} dx \\
&= \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\rho(u)} dx = \frac{1}{\rho(u)} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

assim, $\rho(u)^{\frac{1}{p(x)}} \in I_u$. Desse modo, $I_u \neq 0$. Assim, se $a \in I_u$ e $\lambda > a$, então considere a função contínua e não-descrecente $f_u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_u(\lambda) = \rho(u)$$

(veja [48] Proposição 2.1.1 item (vii), p. 16).

Neste caso

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{a} \Rightarrow f_u\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) = f_u\left(\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Assim, $\lambda \in I_u$.

Considere a função $\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(\lambda) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = f_u\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

onde ψ é não-crescente, contínua e convexa (veja [48] Proposição 2.1.2, p. 19). Nesse sentido, obtemos

$$I_u = \{\lambda > 0 : \psi(\lambda) \leq 1\} = \psi^{-1}((0, 1]).$$

Tomando $a = \psi^{-1}(\{1\})$, concluímos que $I_u = [a, +\infty)$. □

Proposição 2.2. *Seja $u \in L^{p(x)}$. Então:*

(i) Se $u \neq 0$, $\|u\|_{p(x)} = \lambda$ se, e somente se, $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$.

(ii) Se $\|u\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$.

(iii) Se $\|u\|_{p(x)} > 1$, *então* $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$.

(iv) Se $\|u\|_{p(x)} < 1$, *então* $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.

Demonstração. (i) Seja $\|u\|_{p(x)} = \lambda$, com $u \neq 0$. Como $I_u = [\lambda, +\infty)$ é um intervalo fechado, então $\|u\|_{p(x)} = \inf I_u = \lambda$. Logo, $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1$. Suponha que $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1$ e, seja $\varphi(t) = \rho\left(\frac{u}{t}\right)$ para $t > 0$, defindo como Eq.(2.1). Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\left(\frac{u}{t}\right) < 1, \forall t \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta).$$

Logo, $\lambda - \frac{\delta}{2} \in I_u$. Assim, chegamos no absurdo, pois, contradiz a minimalidade de $\lambda = \inf I_u$. Portanto, $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$.

Reciprocamente, seja $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$. Então, $\lambda \in I_u$. Daí, $\|u\|_{p(x)} = \inf I_u \leq \lambda$. Suponhamos que $\|u\|_{p(x)} < \lambda$, então existe $a \in \left(\|u\|_{p(x)}, \lambda\right)$. Pela continuidade de ρ e por f_u não ser decrescente e, sendo $a < \lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{a}$, temos

$$f_u\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \left(\frac{1}{a}\right) = f_u\left(\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Isso é claramente um absurdo. Portanto, $\|u\|_{p(x)} = \lambda$.

(ii) Segue do item (i) que

$$\|u\|_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1.$$

Para $\|u\|_{p(x)} = \lambda < 1$, temos $1 < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow u < \frac{u}{\lambda}$. Então, pelo item (i) temos

$$\rho(u) < \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1.$$

Reciprocamente, se $\rho(u) < 1$, então $1 \in I_u$. Logo, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda < 1$, ou seja, $\|u\|_{p(x)} = \lambda < 1$.

Para $\|u\|_{p(x)} = \lambda > 1$, temos $\frac{1}{\lambda} < 1$ implica que $\frac{u}{\lambda} < u$. Então, novamente pelo item (i) segue que

$$1 = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \rho(u).$$

Reciprocamente, se $\rho(u) > 1$, então $1 \in I_u$. Logo, existe $\lambda > 1$ de modo que $\|u\|_{p(x)} = \lambda > 1$.

(iii) Se $\|u\|_{p(x)} = \lambda > 1$. Então, pelo item (i), temos $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$. Como

$$p^- \leq p(x) \leq p^+ \text{ e } \lambda^{p^-} \leq \lambda^{p(x)} \leq \lambda^{p^+},$$

e sendo $\frac{1}{\lambda} < 1$, temos

$$\frac{1}{\lambda^{p^+}} \leq \frac{1}{\lambda^{p(x)}} \leq \frac{1}{\lambda^{p^-}}. \tag{2.2}$$

Multiplicando por $|u(x)|^{p(x)} > 0$ em ambos os lados da desigualdade (2.2), obtemos

$$\frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}} \leq \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} \leq \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}}.$$

Integrando sobre o conjunto Ω e como λ é positivo, temos

$$\frac{1}{\lambda^{p^+}} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{\lambda^{p^-}} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx. \tag{2.3}$$

Assim, como $\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$, concluímos que

$$\frac{\rho(u)}{\lambda^{p^+}} \leq \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq \frac{\rho(u)}{\lambda^{p^-}}, \tag{2.4}$$

donde $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$.

Usando as desigualdades (2.3) e (2.4), temos

$$\frac{\rho(u)}{\lambda^{p^+}} \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx.$$

Como

$$\frac{\rho(u)}{\lambda^{p^+}} \leq \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1,$$

então $\rho(u) \leq \lambda^{p^+}$. No entanto, como $\|u\|_{p(x)} = \lambda$, implica que $\rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$.

Por outro lado, temos

$$\int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq \frac{\rho(u)}{\lambda^{p^-}}.$$

Note que

$$1 = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq \frac{\rho(u)}{\lambda^{p^-}},$$

assim $\lambda^{p^-} \leq \rho(u)$. Como $\|u\|_{p(x)} = \lambda$, então temos $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u)$.

Portanto,

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

(iv) Se $\|u\|_{p(x)} = \lambda < 1$. Então, pelo item (i) temos que $\rho\left(\dfrac{u}{\lambda}\right) = 1$. Além disso, como

$$p^- \leq p(x) \leq p^+ \text{ e } \lambda^{p^+} \leq \lambda^{p(x)} \leq \lambda^{p^-}$$

e $1 < \dfrac{1}{\lambda}$, obtemos

$$\frac{1}{\lambda^{p^-}} \leq \frac{1}{\lambda^{p(x)}} \leq \frac{1}{\lambda^{p^+}}. \tag{2.5}$$

Multiplicando por $|u(x)|^{p(x)} > 0$ em ambos os lados de (2.5), segue que

$$\frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}} \leq \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} \leq \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}}. \tag{2.6}$$

Integrando (2.6) sobre o conjunto Ω, temos

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}} dx \leq \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \leq \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}} dx. \tag{2.7}$$

Como λ é positivo, obtemos

$$\frac{1}{\lambda^{p^-}} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{\lambda^{p^+}} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Assim, como $\rho(u) = \displaystyle\int_\Omega |u(x)|\, dx$, concluímos que

$$\frac{\rho(u)}{\lambda^{p^-}} \leq \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq \frac{\rho(u)}{\lambda^{p^+}}, \tag{2.8}$$

donde $\rho\left(\dfrac{u}{\lambda}\right) = 1$.

Note que das desigualdades (2.7) e (2.8), temos

$$\frac{\rho(u)}{\lambda^{p^-}} \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx.$$

Mas

$$\frac{\rho(u)}{\lambda^{p^-}} \leq \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1,$$

daí $\rho(u) \leq \lambda^{p^-}$. Como $\|u\|_{p(x)} = \lambda$ segue que $\rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.

Por outro lado, temos

$$\int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq \frac{\rho(u)}{\lambda^{p^+}}.$$

Como

$$1 = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq \frac{\rho(u)}{\lambda^{p^+}},$$

então $\lambda^{p^+} \leq \rho(u)$. Como $\|u\|_{p(x)} = \lambda$, temos então que $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u)$.

Portanto, concluímos que

$$\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}.$$

□

Proposição 2.3. *Para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, temos a seguinte desigualdade*

$$\min\left\{\|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+}\right\} \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq \max\left\{\|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+}\right\}.$$

Demonstração. De fato, para todo $u \in L^{p(x)}$, segue da Proposição 2.2 itens (iii) e (iv), que

$$\min\left\{\|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+}\right\} \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx.$$

Analogamente, temos

$$\int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq \max\left\{\|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+}\right\},$$

e o resultado segue. □

Proposição 2.4. *Sejam $p, m \in L_+^\infty(\Omega)$, com $p(x) \leq m(x)$* q.t.p. *em Ω e $u \in L^{m(x)}(\Omega)$. Então,*

$$|u|^{p(x)} \in L^{\frac{m(x)}{p(x)}}(\Omega)$$

e

$$\left\||u|^{p(x)}\right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \||u|\|_{m(x)}^{p^-} + \||u|\|_{m(x)}^{p^+},$$

ou ainda

$$\left\||u|^{p(x)}\right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \max\left\{\||u|\|_{m(x)}^{p^-}, \||u|\|_{m(x)}^{p^+}\right\}.$$

Demonstração. Suponha que $\|u\|_{m(x)} \geq 1$. Então, desde que $p^+ \geq p(x), \forall x \in \Omega$, temos

$$p^+ \geq p(x) \Rightarrow p^+\frac{m(x)}{p(x)} \geq p(x)\frac{m(x)}{p(x)}.$$

Logo, $\dfrac{p^+}{p(x)}m(x) \geq m(x)$. Nesse sentido, segue que

$$\|u\|_{m(x)}^{\frac{p^+ m(x)}{p(x)}} \geq \|u\|_{m(x)}^{m(x)}.$$

Usando a Proposição 2.2 item (i), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{p^+}}\right|^{\frac{m(x)}{p(x)}} dx &= \int_\Omega \frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{\frac{p^+ m(x)}{p(x)}}} dx \leq \int_\Omega \frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{m(x)}} dx \\
&= \int_\Omega \left|\frac{|u|}{\|u\|_{m(x)}}\right|^{m(x)} dx = \rho\left(\frac{|u|}{\|u\|_{m(x)}}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como

$$1 \leq \|u\|_{m(x)} \leq \|u\|_{m(x)}^{p^+},$$

temos

$$\int_\Omega \left| \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{p^+}} \right|^{\frac{m(x)}{p(x)}} dx \leq \|u\|_{m(x)}^{p^+}.$$

Pela propriedade do ínfimo, obtemos

$$\inf \left\{ \|u\|_{m(x)}^{p^+} > 0 : \int_\Omega \left| \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{p^+}} \right|^{\frac{m(x)}{p(x)}} dx \right\} \leq \|u\|_{m(x)}^{p^+}.$$

Consequentemente,

$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \|u\|_{m(x)}^{p^+}. \tag{2.9}$$

Agora, seja $\|u\|_{m(x)} \leq 1$. Desde que $p^- \leq p(x), \forall x \in \Omega$, temos

$$p^- \leq p(x) \Rightarrow p^- \frac{m(x)}{p(x)} \leq p(x) \frac{m(x)}{p(x)} \Rightarrow \frac{p^-}{p(x)} m(x) \leq m(x).$$

Daí,

$$\|u\|_{m(x)}^{\frac{p^- m(x)}{p(x)}} \geq \|u\|_{m(x)}^{m(x)}.$$

Usando a Proposição 2.2 item (i), segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{p^-}} \right|^{\frac{m(x)}{p(x)}} dx &= \int_\Omega \frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|^{\frac{p^- m(x)}{p(x)}}} dx \leq \int_\Omega \frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{m(x)}} dx \\
&= \int_\Omega \left| \frac{|u|}{\|u\|_{m(x)}} \right|^{m(x)} dx = \rho \left(\frac{|u|}{\|u\|_{m(x)}} \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Então

$$\int_\Omega \left| \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{p^-}} \right|^{\frac{m(x)}{p(x)}} dx \leq \|u\|_{m(x)}^{\frac{p^- m(x)}{p(x)}} \leq \|u\|_{m(x)}^{p^-}.$$

Pela propriedade do ínfimo, obtemos

$$\inf \left\{ \|u\|_{m(x)}^{p^-} > 0 : \int_\Omega \left| \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{m(x)}^{p^-}} \right|^{\frac{m(x)}{p(x)}} dx \right\} \leq \|u\|_{m(x)}^{p^-}.$$

Consequentemente,
$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \|u\|_{m(x)}^{p^-} . \tag{2.10}$$

Logo,
$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \begin{cases} \|u\|_{m(x)}^{p^+}, & \text{se } \|u\|_{m(x)}^{m(x)} \geq 1 \\ \|u\|_{m(x)}^{p^-}, & \text{se } \|u\|_{m(x)}^{m(x)} < 1. \end{cases}$$

Assim, $|u|^{p(x)} \in L^{\frac{m(x)}{p(x)}}$. Por fim, por meio das Eq.(2.9) e Eq.(2.10), obtemos
$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \||u|\|_{m(x)}^{p^-} + \||u|\|_{m(x)}^{p^+} .$$

Além disso
$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{\frac{m(x)}{p(x)}} \leq \max\left\{ \||u|\|_{m(x)}^{p^-}, \||u|\|_{m(x)}^{p^+} \right\} .$$

□

Proposição 2.5. *Sejam $p, m : \Omega \to [1, +\infty)$ funções musuráveis. Se Ω é limitado e $p(x) \leq m(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, então $L^{m(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}$ a imersão é contínua.*

Demonstração. Veja [20]. □

2.2 Espaço de Sobolev com expoente variável

Definimos os espaços de expoente variável de Sobolev $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ do seguinte modo
$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \right\}, \tag{2.11}$$
com sua respectiva norma dada por
$$\|u\|_{1,p(\cdot)} = \|u\|_{p(\cdot)} + \|\nabla u\|_{p(\cdot)} .$$

O espaço $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Vejamos agora, alguns resultados importantes sobre o espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. O espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é dado por
$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(\cdot)}, j = 1, 2, ..., N \right\},$$
onde, para cada $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja
$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim, podemos munir $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_{1,p(\cdot)} = \|u\|_{p(\cdot)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(\cdot)}, \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Agora, para cada $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, definimos o gradiente por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Sendo, assim, podemos escrever $W^{1,p(x)}(\Omega)$ como a Eq.(2.11).

Proposição 2.6. *O espaço normado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [23]. □

Proposição 2.7. *O espaço normado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

Demonstração. Veja [23]. □

Lema 2.8. *Seja Γ uma família de funções reais definidas em Ω. Se houver uma função crescente*

$$\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \tag{2.12}$$

que satisfaz

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = \infty$$

e, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |f_\alpha(x)| \, \Phi(|f_\alpha(x)|) \, dx \leq L, \forall f_\alpha \in \Gamma,$$

então cada Γ é Lebesgue integrável, e as funções que a família Γ possui são integrais absolutamente equicontinuas em Ω.

Demonstração. Veja [23]. □

Proposição 2.9. *Sejam $p, m : \Omega \to [1, +\infty)$ funções mensuráveis. Se $p \in C(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$\operatorname{ess\,inf}(p^*(x) - m(x)) \geq 0,$$

então a imersão de Sobolev $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(\cdot)}(\Omega)$ é contínua e compacta.

Demonstração. Veja [23]. □

Corolário 2.10. [27, 30] *Pela* Proposição 2.9 *podemos concluir que o espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tem norma equivalente ao espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Proposição 2.11. (Desigualdade de Young) *Sejam a e b dois números reais não-negativos e $1 \leq p \leq q \leq \infty$ conjugados de Lebesgue. Então*

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Demonstração. Veja [11]. □

Proposição 2.12. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \forall x \in \Omega. \tag{2.13}$$

Se $u \in L^{p(x)}$ e $v \in L^{q(x)}$, então

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) \|u(x)\|_{p(x)} \|v(x)\|_{q(x)}.$$

Demonstração. Veja [48]. □

Proposição 2.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tal que*

$$\int_\Omega uvdu = 0, \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Veja [26, 42]. □

Proposição 2.14. (Desigualdade de Poincaré) *Se Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, então existe uma constante C que depende apenas de p, Ω, tal que*

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq C \|\nabla u\|_{p(\cdot)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Veja [26, 42]. □

Proposição 2.15. (Gagliardo-Nirenberg) *Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $j, m \in \mathbb{N}$, $j < m$ e também*

$$\begin{cases} r = 1 \\ \dfrac{j}{m} \leq \theta \leq 1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} 1 < r < \infty \\ m - j - \dfrac{n}{r} = 0, 1, 2, ... \\ \dfrac{j}{m} \leq \theta < 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

Se definirmos

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante C independente de u tal que

$$\left\|\nabla^j u\right\|_{p(\cdot)} \leq C \|\nabla^m u\|^\theta_{r(\cdot)} \|u\|^{1-\theta}_{q(\cdot)},$$

para todo $u \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{m,r}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [26, 42].

□

Proposição 2.16. (Gronwall-Bellman-Bihari) *Seja $u(t)$ uma função não-negativa e diferenciável em $[0,T]$, que satisfaz:*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t),$$

onde $f(t), g(t)$ são não-negativas e integráveis em $[0,T]$. Então

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)\, d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s)\, ds \right], \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Veja [19]. □

Teorema 2.17. (Vainberg) *Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que:*

(i) $f_{n_j}(x) \to f_n(x)$, *q.t.p em* Ω.

(ii) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ para $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja [13]. □

Lema 2.18. (Lions) *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ e u^k e u funções de $L^q(\Omega)$, com $1 < q < \infty$ tal que*

$$\left\| u^k \right\|_{L^q} \leq C \text{ e } \ u^k \to u \ q.t.p. \text{ em } \Omega \times (0, T_0).$$

Então

$$u^k \rightharpoonup u \text{ em } L^q(\Omega).$$

Demonstração. Veja [40]. □

Lema 2.19. (Aubin–Lions–Simon) *Seja F limitado em $L^\infty(0,T; W_0^{1,p(x)})$ e $\partial F/\partial t$ é limitado em $L^{r(x)}(0,T; L^2(\Omega))$, com $r(x) \geq 2$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T; L^{r(\cdot)}(\Omega))$.*

Demonstração. Veja [40]. □

Lema 2.20. *Assumindo que $J : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (-\infty, +\infty)$ é convexo e converge fortemente. Então J é convergente na topologia fraca $\sigma\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^*\right)$.*

Demonstração. Veja [40]. □

A seguir estamos interessados em discutir dois resultados auxiliares através de dois lemas, no qual apresentaremos a prova de apenas um deles.

Lema 2.21. *Suponhamos que $0 < T \leq +\infty$ e que a função não-negativa $F(t) \in C^2[0, T)$ satisfazendo*

$$F^{''}(t)F(t) - (1-\theta)(F'(t))^2 \geq 0,$$

para alguma constante $\theta > 0$. Se $F(0) > 0$ e $F'(0) > 0$, então

$$T \leq \frac{F(0)}{\theta F'(0)} < +\infty$$

e $F(t) \to +\infty$ quando $t \to T$.

Demonstração. Veja [35].

□

Lema 2.22. *Seja $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função não-crescente. Suponhamos que existem constantes $\sigma \geq 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\int_t^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq \frac{1}{C} F^{\sigma}(0)F(t), \forall t \geq 0. \tag{2.15}$$

Então, F tem as seguinte propriedades de decaimento:

(i) Se $\sigma = 0$, então $F(t) \leq F(0)e^{1-Ct}, \forall t \geq 0$;

(ii) Se $\sigma > 0$, então $F(t) \leq F(0)\left(\dfrac{1+\sigma}{1+\sigma Ct}\right), \forall t \geq 0$.

Demonstração. (i) Seja $\sigma = 0$. Considere a função f dada por

$$f(x) := e^{Cx} \int_x^{+\infty} F(\tau)\ d\tau, \forall x \in [0, +\infty).$$

Neste caso, f é localmente absolutamente contínua e não-crescente, então diferenciando f e usando Eq.(2.15) obtemos

$$f'(x) = Ce^{Cx} \int_x^{+\infty} F(\tau)\ d\tau \leq \frac{1}{C} F(0), \forall x \in [0, +\infty).$$

Novamente pela Eq.(2.15) temos

$$f(x) = e^{Cx} \int_x^{+\infty} F(\tau)\ d\tau \leq \int_0^{+\infty} F(\tau)\ d\tau = f(0).$$

Assim, obtemos

$$f(x) \leq \frac{1}{C} F(0), \forall x \in [0, +\infty).$$

Segue que

$$\int_x^{+\infty} F(\tau)\ d\tau \leq \frac{e^{-Cx}}{C} F(0), \forall x \in [0, +\infty). \tag{2.16}$$

Como F é não-negativa e não-crescente, segue que

$$\int_x^{+\infty} F(\tau)\ d\tau \geq \int_x^{1+\frac{1}{C}} F(\tau)\ d\tau \geq \frac{1}{C} F\left(x + \frac{1}{C}\right), \forall x \in [0, +\infty).$$

Usando a Eq.(2.16) temos

$$F\left(x + \frac{1}{C}\right) \leq e^{-Cx} F(0), \forall x \in [0, +\infty).$$

Escolhendo $t = x + \dfrac{1}{C}$, obtemos

$$F(t) \leq e^{1-Ct} F(0), \forall x \in [0, +\infty).$$

(ii) Se $F(0) = 0$, então $F \equiv 0$ e nada temos para demonstrar. Por outro lado, trocando a função F pela função $F/F(0)$ e assumindo que $F(0) = 1$, devemos provar então a seguinte estimativa:

$$F(t) \leq \left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma C t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \forall t \in [0, +\infty). \tag{2.17}$$

Seja $\sigma > 0$ e, considere a função g dada por

$$g(x) := \int_x^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau.$$

Neste caso, g é localmente absolutamente contínua e não-crescente. Segue então da desigualdade (2.15) que

$$\int_x^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq \frac{1}{C} F(x), \forall x \in [0, +\infty),$$

pois $F(0) = 1$. Assim temos

$$g(x) \leq \frac{1}{C} F(x), \forall x \in [0, +\infty). \tag{2.18}$$

Aplicando a derivada em g, segue que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau - \int_x^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau - \int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau) d\tau - \int_x^{x+h} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau. \end{aligned}$$

Note que, como $F^{1+\sigma}$ é não-crescente:

• Para $h > 0$, temos

$$F^{1+\sigma}(\tau + h)[x + h - x] \leq \int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq F^{1+\sigma}(\tau)[x + h - x],$$

isto é,

$$F^{1+\sigma}(\tau + h)h \leq \int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq F^{1+\sigma}(\tau)h.$$

Dividindo por h, obtemos

$$F^{1+\sigma}(\tau + h) \leq \frac{1}{h}\int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq F^{1+\sigma}(\tau).$$

Fazendo $h \to 0$, concluímos que

$$\frac{1}{h}\int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \to F^{1+\sigma}(\tau)\ q.s.$$

• Para $h < 0$, temos

$$F^{1+\sigma}(\tau)[x + h - x] \leq \int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq F^{1+\sigma}(\tau + h)[x + h - x],$$

isto é,

$$F^{1+\sigma}(\tau)h \leq \int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq F^{1+\sigma}(\tau + h)h.$$

Dividindo por h, obtemos

$$F^{1+\sigma}(\tau) \leq \frac{1}{h}\int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \leq F^{1+\sigma}(\tau + h).$$

Fazendo $h \to 0$, temos

$$\frac{1}{h}\int_{x+h}^{\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\ d\tau \to F^{1+\sigma}(\tau)\ q.s.$$

Neste caso, $F^{1+\sigma}$ é integrável, exceto no conjunto dos pontos de domínio que tem medida nula. Isso nos permite concluir que

$$g'(x) = -F^{1+\sigma}(x) \text{ q.t.p.} \tag{2.19}$$

Elevando $1 + \sigma$ em ambos os lados da Eq.(2.18), temos

$$\begin{aligned} g^{1+\sigma}(x) &\leq \left(\frac{1}{C}F(x)\right)^{1+\sigma} \\ &= \left(\frac{1}{C}\right)^{1+\sigma} F^{1+\sigma}(x), \forall x \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Disso, segue que

$$C^{1+\sigma}g^{1+\sigma}(x) \leq F^{1+\sigma}(x), \forall x \in [0, +\infty). \tag{2.20}$$

Combinando a Eq.(2.19) e a desigualdade (2.20), obtemos

$$C^{1+\sigma} g^{1+\sigma}(x) \leq -g'(x) \text{ q.t.p..}$$

Consequentemente

$$C^{1+\sigma} \leq -g^{-1-\sigma}(x) g'(x) \text{ q.t.p.} \tag{2.21}$$

Multiplicando σ em ambos os lados da desigualdade (2.21), obtemos

$$\sigma C^{1+\sigma} \leq -\sigma g^{-1-\sigma}(x) g'(x) \text{ q.t.p..}$$

Como

$$-\sigma g^{-1-\sigma}(x) g'(x) = \left(g^{-\sigma}(x)\right)',$$

assim segue que

$$\sigma C^{1+\sigma} \leq \left(g^{-\sigma}(x)\right)' \text{ q.t.p. em } (0, B) \tag{2.22}$$

donde $g^{-\sigma}(x)$ está definido para $x < B$, tal que

$$B := \sup \{x : F(x) > 0\}.$$

Integrando em ambos os lados da desigualdade (2.22) com respeito ao intervalo $[0, s]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^s \sigma C^{1+\sigma} \, dx &\leq \int_0^s \left(g^{-\sigma}(x)\right)' \, dx \\ &= g^{-\sigma}(s) - g^{-\sigma}(0), \forall s \in [0, B), \end{aligned}$$

Assim

$$g^{-\sigma}(0) + \sigma s C^{1+\sigma} \leq g^{-\sigma}(s), \forall s \in [0, B).$$

Elevando a expressão acima por $-\dfrac{1}{\sigma}$, temos

$$g(s) \leq \left(g^{-\sigma}(0) + \sigma s C^{1+\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}, \forall s \in [0, B).$$

Se $s \geq B$, então

$$g(s) = 0, \forall s \in [0, +\infty).$$

Segue da Eq.(2.18) que

$$g(0) \leq \frac{1}{C} F(0)^{1+\sigma} = \frac{1}{C}.$$

Assim

$$g(s) \leq \left(C^{\sigma} + \sigma s C^{1+\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}, \forall s \in [0, B). \tag{2.23}$$

Pelo lado direto de (2.23), temos

$$\begin{aligned}
\left(C^{\sigma}+\sigma s C^{1+\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} &= \frac{1}{(C^{\sigma}+\sigma s C^{1+\sigma})^{\frac{1}{\sigma}}}\\
&= \left(\frac{1}{C^{\sigma}(1+\sigma s C)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&= \left(\frac{1}{C^{1+\sigma}\left(\frac{1+\sigma s C}{C}\right)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&= \left(\frac{1}{C^{1+\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{1}{C^{-1}+\sigma s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&= C^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1}{\sigma}}. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Como F é não-negativa e não-crescente, então pelo lado esquerdo de (2.23) temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
g(s) &= \int_s^{+\infty} F^{1+\sigma}(\tau)\, d\tau\\
&\geq \int_s^{+\frac{1}{C}(1+\sigma)s} F^{1+\sigma}(\tau)\, d\tau\\
&\geq F^{1+\sigma}\left(\frac{1}{C}+(1+\sigma)s\right)\left[\frac{1}{C}+(1+\sigma)s-s\right]\\
&= F^{1+\sigma}\left(\frac{1}{C}+(1+\sigma)s\right)\left[\frac{1}{C}+\sigma s\right]. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Combinando a Eq.(2.24) e a desigualdade (2.25), obtemos

$$F^{1+\sigma}\left(C^{-1}+(1+\sigma)s\right) \leq C^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-1}. \qquad (2.26)$$

Elevando por $\dfrac{1}{1+\sigma}$ em ambos os lados da desigualdade (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}
F\left(C^{-1}+(1+\sigma)s\right) &\leq C^{-\frac{1}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1}{\sigma(1+\sigma)}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1}{1+\sigma}}\\
&= C^{-\frac{1}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1}{\sigma(1+\sigma)}-\frac{1}{(1+\sigma)}}\\
&= C^{-\frac{1}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1+\sigma}{\sigma(1+\sigma)}}\\
&= C^{-\frac{1}{\sigma}}\left(C^{-1}+\sigma s\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\\
&= C^{-\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{1+\sigma s C}{C}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\\
&= C^{-\frac{1}{\sigma}}\frac{(1+\sigma s C)^{-\frac{1}{\sigma}}}{C^{-\frac{1}{\sigma}}}\\
&= C^{-\frac{1}{\sigma}}C^{\frac{1}{\sigma}}\left(1+\sigma s C\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\\
&= (1+\sigma s C)^{-\frac{1}{\sigma}}. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Tomando $t = C^{-1} + (1+\sigma)s$, temos

$$s = \frac{t - C^{-1}}{1+\sigma} = \frac{Ct - 1}{C(1+\sigma)}. \tag{2.28}$$

Combinando as Eq.(2.27) e Eq.(2.28), segue que

$$\begin{aligned}
F(t) &\leq \left(1 + \frac{Ct-1}{C(1+\sigma)\sigma C}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \\
&= \left(\frac{C(1+\sigma) + \sigma C^2 t - \sigma C}{C(1+\sigma)}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \\
&= \left(\frac{1+\sigma+\sigma Ct - \sigma}{1+\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \\
&= \left(\frac{1+\sigma Ct}{1+\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \\
&= \frac{(1+\sigma Ct)^{-\frac{1}{\sigma}}}{(1+\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}}} \\
&= \frac{(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}{(1+\sigma Ct)^{\frac{1}{\sigma}}} \\
&= \left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma Ct}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos assim na Eq.(2.17). Com isso, concluímos a prova. □

3 Resultados Técnicos

No presente capítulo, estamos interessados em discutir alguns resultados técnicos que são de suma importância para os principais resultados do presente trabalho, que serão apresentados no Capítulo 4. Além do anterior, algumas definições relacionadas ao problema (1.1), também são discutidas.

A seguir, através do Lema 3.1, temos algumas propriedades da função de Kirchhoff. Resultado de grande importância, sendo o principal resultado preliminar, para o estudo dos principais objetivos deste trabalho.

Lema 3.1. *Sendo as condições* $(\mathcal{H}_1)$ *e* $(\mathcal{H}_2)$ *satisfeitas,* $\widehat{\mathcal{M}}(t) = \int_0^t \mathcal{M}(\tau)\, d\tau$*. Então temos*

(i) $\mathcal{M}(\lambda t) \geq \lambda^s \mathcal{M}(t)$*, para todo* $0 \leq \lambda \leq 1$, $t \geq 0$.

(ii) $\mathcal{M}(\lambda t) \leq \lambda^s \mathcal{M}(t)$*, para todo* $\lambda \geq 1$, $t \geq 0$.

(iii) $\dfrac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \min\{\lambda^s, t^s\} \leq \mathcal{M}(t) \leq \dfrac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \max\{\lambda^s, t^s\}$*, para todo* $\lambda > 0, t \geq 0$.

(iv) $\mathcal{M}(t) > 0$*, para todo* $t > 0$.

(v) $\dfrac{1}{1+s} t\, \mathcal{M}(t) \leq \widehat{\mathcal{M}}(t) \leq t\, \mathcal{M}(t)$*, para todo* $t \geq 0$.

(vi) $\widehat{\mathcal{M}}(\lambda t) \geq \lambda^{1+s} \widehat{\mathcal{M}}(t)$*, para todo* $0 \leq \lambda \leq 1$, $t \geq 0$.

(vii) $\widehat{\mathcal{M}}(\lambda t) \leq \lambda^{1+s} \widehat{\mathcal{M}}(t)$*, para todo* $\lambda \geq 1, t \geq 0$.

Demonstração. (i) Se $\lambda = 0$ ou $t = 0$ o resultado segue. Usando a condição $(\mathcal{H}_2)$, temos que

$$t \mapsto \frac{\mathcal{M}(t)}{t^s} \tag{3.1}$$

é não-crescente e $s \geq 0$, então para todo $\lambda \in (0, 1]$ e $t > 0$, segue que

$$\lambda t \mapsto \frac{\mathcal{M}(\lambda t)}{(\lambda t)^s}. \tag{3.2}$$

Por meio das Eq.(3.1) e Eq.(3.2), obtemos

$$\mathcal{M}(\lambda t) \geq \lambda^s \mathcal{M}(t).$$

(ii) Se $t = 0$ o resultado segue. Então, seguindo os mesmo passo da demonstração anterior, para todo $\lambda \geq 1$ e $t > 0$, temos

$$\frac{\mathcal{M}(\lambda t)}{\lambda^s t^s} \leq \frac{\mathcal{M}(t)}{t^s}$$

e, consequentemente,

$$\mathcal{M}(\lambda t) \leq \lambda^s \mathcal{M}(t).$$

(iii) Se $t = 0$ nada a fazer. Assim, segue das condições $(\mathcal{H}_1)$ e $(\mathcal{H}_2)$.

Por um lado, usando o item (i) para todo $\lambda \in (0, 1]$ e $t > 0$ temos

$$\frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \lambda^s \leq \frac{\mathcal{M}(t)}{t^s}. \tag{3.3}$$

Multiplicando por t^s em ambos os lados da desigualdade Eq.(3.3), obtemos

$$\frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \lambda^s t^s \leq \mathcal{M}(t),$$

consequentemente,

$$\frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \min \{\lambda^s, t^s\} \leq \mathcal{M}(t). \tag{3.4}$$

Por outro lado, usando o item (ii) para todo $\lambda \geq 1$ e $t > 0$ temos

$$\frac{\mathcal{M}(t)}{t^s} \leq \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \lambda^s. \tag{3.5}$$

Multiplicando por t^s em ambos os lados da desigualdade Eq.(3.5), obtemos

$$\mathcal{M}(t) \leq \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \lambda^s t^s,$$

consequentemente,

$$\mathcal{M}(t) \leq \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \max \{\lambda^s, t^s\}. \tag{3.6}$$

Usando as Eq.(3.4) e Eq.(3.6), concluímos que

$$\frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \min \{\lambda^s, t^s\} \leq \mathcal{M}(t) \leq \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\lambda^s} \max \{\lambda^s, t^s\}.$$

(iv) Usando a condição $(\mathcal{H}_1)$ e o item (iii), temos

$$\mathcal{M}(t) > 0, \ \ t > 0.$$

(v) Se $t = 0$ nada a fazer. Usando a condição $(\mathcal{H}_1)$, segue que M é não-decrescente. Para $\tau \in [0, t]$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}(t) &= \int_0^t \mathcal{M}(\tau) d\tau \\ &\leq \int_0^t \mathcal{M}(t) d\tau \\ &= \mathcal{M}(t) \int_0^t d\tau \\ &= \mathcal{M}(t) t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado, segue da condição $(\mathcal{H}_2)$ que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}(t) &= \int_0^t \frac{\mathcal{M}(\tau)}{\tau^s}\tau^s d\tau \\ &\geq \int_0^t \frac{\mathcal{M}(t)}{t^s}\tau^s d\tau \\ &= \frac{\mathcal{M}(t)}{t^s}\int_0^t \tau^s d\tau \\ &= \frac{\mathcal{M}(t)}{t^s}\frac{t^{1+s}}{1+s} \\ &= \frac{1}{1+s}t\mathcal{M}(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Combinando (3.7) e (3.8), obtemos

$$\frac{1}{1+s}t\mathcal{M}(t) \leq \widehat{\mathcal{M}}(t) \leq t\mathcal{M}(t).$$

(vi) Usando o item (i) (para todo $\lambda \in [0,1]$ e $t \geq 0$) e fazendo a seguinte mudança de variável $\tau = \lambda x$, temos

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}(\lambda t) &= \int_0^{\lambda t} \mathcal{M}(\tau)d\tau \\ &= \lambda\int_0^t \mathcal{M}(\lambda x)\,dx \\ &\geq \lambda\int_0^t \lambda^s\mathcal{M}(x)dx \\ &= \lambda^{1+s}\int_0^t \mathcal{M}(x)dx \\ &= \lambda^{1+s}\widehat{\mathcal{M}}(t).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{\mathcal{M}}(\lambda t) \geq \lambda^{1+s}\widehat{\mathcal{M}}(t).$$

(vii) Usando o item (ii) (para todo $\lambda \geq 1$ e $t \geq 0$) e fazendo a seguinte a mudança de variável $\tau = \lambda x$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}(\lambda t) &= \int_0^{\lambda t} \mathcal{M}(\tau)d\tau \\ &= \lambda\int_0^t \mathcal{M}(\lambda x)\,dx \\ &\leq \lambda\int_0^t \lambda^s\mathcal{M}(x)dx \\ &= \lambda^{1+s}\int_0^t \mathcal{M}(x)dx \\ &= \lambda^{1+s}\widehat{\mathcal{M}}(t).\end{aligned}$$

Assim,

$$\widehat{\mathcal{M}}(\lambda t) \leq \lambda^{1+s}\widehat{\mathcal{M}}(t).$$

Portanto, concluímos a demonstração. □

Finalizado o resultado anterior que envolve apenas a função de Kirchhoff, a partir de agora, vamos apresentar alguns resultados de grande relevância envolvendo os funcionais energia (denotado por E) e de Nehari (denotado por I). Então, primeiramente considere os funcional energia E e o funcional de Nehari I dados por

$$E(u) = \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx \tag{3.9}$$

e

$$I(u) = \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{m(x)}dx, \tag{3.10}$$

respectivamente. Segue da Eq.(1.2) que os funcionais E e I são bem definidos e continuos no espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Considere a variedade de Nehari dada por

$$\mathcal{N} = \left\{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)/\{0\} : I(u) = 0\right\}.$$

Lema 3.2. *Sejam* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *satisfeitas e* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)/\{0\}$. *Então os seguintes resultados são válidos:*

(i) Existe um único $\lambda_* > 0$ *dependendo de* u *tal que* $I(\lambda u) > 0$ *para* $0 < \lambda < \lambda_*$, $I(\lambda_* u) = 0$ *e* $I(\lambda u) < 0$ *para* $\lambda > \lambda_*$.

(ii) A aplicação fibração $\lambda \mapsto E(\lambda u)$ *é estritamente crescente sobre* $(0, \lambda_*)$, *estritamente decrescente sobre* $(\lambda_*, +\infty)$ *e atinge o máximo em* $\lambda = \lambda_*$. *Além disso temos*

$$\lim_{\lambda\to\ 0^+} E(\lambda u) = 0 \text{ e } \lim_{\lambda\to\infty} E(\lambda u) = -\infty.$$

Demonstração. (i) Usando o Lema 3.1 item (ii) e a Eq.(3.10), para todo $\lambda > 1$ temos

$$\begin{aligned}
I(\lambda u) &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla \lambda u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |\lambda u|^{m(x)} \\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{m(x)}|u|^{m(x)} \\
&\leq \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda^{p^+}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda^{p^+}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{m^-}|u|^{m(x)} \\
&\leq \lambda^{p^+s}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\lambda^{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \lambda^{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Aplicando o limite com $\lambda \to \infty$ em ambos os lados da desigualdade (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda u) &\leq \lim_{\lambda\to\infty}\left(\lambda^{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx\right)\\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx.\end{aligned}$$

Desde que $p^+(1+s) < m^-$ e $\int_\Omega |u|^{m(x)}dx > 0$, temos

$$\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda u) = -\infty. \tag{3.12}$$

Analogamente, pelo Lema (3.1) item (i), para todo $\lambda \in (0,1)$ segue que

$$\begin{aligned}I(\lambda u) &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla \lambda u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |\lambda u|^{m(x)}\\ &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{m(x)}|u|^{m(x)}\\ &\geq \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda^{p^+}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda^{p^+}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{m^-}|u|^{m(x)}\\ &\geq \lambda^{p^+ s}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\lambda^{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx\\ &= \lambda^{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Como $\lambda \in (0,1)$ e, sendo $p^+(1+s) < m^-$, temos

$$\lambda^{m^-} < \lambda^{p^+(1+s)}.$$

Com isso, concluímos que

$$I(\lambda u) > 0 \ \ com \ \ \lambda > 0. \tag{3.14}$$

Usando o teorema do valor intermediário e a Eq.(3.12), temos que existe $\lambda_* > 0$ tal que $I(\lambda_* u) = 0$.

Para qualquer $\lambda > \lambda_*$, temos $\dfrac{\lambda}{\lambda_*} > 1$. Nesse sentido, segue que

$$\begin{aligned}
I(\lambda u) &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla \lambda u| dx - \int_\Omega |\lambda u|^{m(x)}dx \\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{\left|\frac{\lambda\lambda_*}{\lambda_*}\nabla u\right|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \left|\frac{\lambda\lambda_*}{\lambda_*}\nabla u\right|^{p(x)} - \int_\Omega \left|\frac{\lambda\lambda_*}{\lambda_*}u\right|^{m(x)}dx \\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p(x)} \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p(x)} |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m(x)} |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&\leq \mathcal{M}\left(\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+} \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+} |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-} |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&\leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+ s} \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+} \int_\Omega |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-} \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&+ \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&- \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-} \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} \left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx\right] \\
&+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\right] \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} I(\lambda_* u) + \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\right] \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\right] \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}\, dx \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Assim, $I(\lambda u) < 0$.

Por outro lado, para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$, temos $\dfrac{\lambda}{\lambda_*} < 1$. Nesse sentido, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(\lambda u) &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla \lambda u| dx - \int_\Omega |\lambda u|^{m(x)}dx \\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{\left|\frac{\lambda\lambda_*}{\lambda_*}\nabla u\right|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \left|\frac{\lambda\lambda_*}{\lambda_*}\nabla u\right|^{p(x)} - \int_\Omega \left|\frac{\lambda\lambda_*}{\lambda_*}u\right|^{m(x)}dx \\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p(x)} \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p(x)} |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m(x)} |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&\geq \mathcal{M}\left(\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+} \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+} |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-} |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&\geq \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+ s} \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+}\int_\Omega |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx \\
&+ \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)}\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&- \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)}\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)}\left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_*\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\lambda_*\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx\right] \\
&+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\right]\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} I(\lambda_* u) + \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\right]\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{p^+(1+s)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{m^-}\right]\int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Nesse caso, obtemos $I(\lambda u) > 0$.

(ii) Pela definição de E, temos

$$E(\lambda u) = \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \lambda^{m(x)}\frac{|u|^{m(x)}}{m(x)}dx. \tag{3.15}$$

Aplicando a derivada com relação a λ em ambos os lados da Eq.(3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}E(\lambda u) &= \frac{d}{d\lambda}\left[\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\right]\\
&= \frac{d}{d\lambda}\left[\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\right] - \frac{d}{d\lambda}\left[\int_\Omega \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\right]\\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda^{p(x)-1}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{m(x)-1}|u|^{m(x)}dx\\
&= \frac{1}{\lambda}\left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{m(x)}|u|^{m(x)}dx\right]\\
&= \frac{1}{\lambda}\left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla \lambda u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |\lambda u|^{m(x)}dx\right]\\
&= \frac{1}{\lambda}I(\lambda u).
\end{aligned}$$

Daí, usando o item (i) temos que a aplicação

$$u \mapsto E(\lambda u),$$

é estritamente decrescente para $\lambda \in (\lambda_*, \infty)$, estritamente crescente para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e atinge o máximo quando $\lambda = \lambda_*$.

Usando o Lema 3.1 item (vi), para todo $\lambda \in [0,1]$ temos que: se $\lambda = 0$ nada a fazer. Se $\lambda \in (0,1]$, temos

$$\begin{aligned}
E(\lambda u) &= \left[\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|\lambda u|^{m(x)}dx\right]\\
&= \left[\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\right]\\
&= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\
&\geq \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p^+}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m^-}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\
&\geq \lambda^{p^+s}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\
&\geq \lambda^{p^+(1+s)}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Aplicando o limite com $\lambda \to 0^+$ em ambos os lados da desigualdade (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\ 0^+} E(\lambda u) &\geq \lim_{\lambda\to\ 0^+}\left[\lambda^{p^+(1+s)}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\right]\\ &\geq \lim_{\lambda\to\ 0^+}\lambda^{p^+(1+s)}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lim_{\lambda\to\ 0^+}\lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx.\end{aligned}$$

Como $\lambda \in (0,1)$ e, sendo $p^+(1+s) < m^-$, temos que $\lambda^{m^-} < \lambda^{p^+(1+s)}$, o que nos permite concluir que

$$\lim_{\lambda\to\ 0^+} E(\lambda u) = 0.$$

Por outro lado, usando o Lema 3.1 item (vii) com $\lambda > 1$, temos

$$\begin{aligned}E(\lambda u) &= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|\lambda u|^{m(x)}dx\\ &= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\ &= \ \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\ &\leq \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \lambda^{p^+}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{\lambda^{m^-}}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\ &\leq \lambda^{p^+s}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\\ &\leq \lambda^{p^+(1+s)}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \to \infty$ em ambos os lados da desigualdade (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} E(\lambda u) &\leq \lim_{\lambda\to\infty}\left[\lambda^{p^+(1+s)}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx\right]\\ &\leq \lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{p^+(1+s)}\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{m^-}\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx.\end{aligned}$$

Como $\lambda \in (0,1)$ e, sendo $p^+(1+s) < m^-$, temos que

$$\lambda^{p^+(1+s)} < \lambda^{m^-}.$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} E(\lambda u) = -\infty.$$

□

Observação 3.3. *Note que pelo* Lema 3.2, *temos*

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} E(u) = \inf_{u\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)/\{0\}}\ \sup_{\lambda>0} E(\lambda u). \qquad (3.18)$$

Aqui d é chamado de profundidade poço potencial e $d > 0$ devido ao Lema 3.6. *Além disso, também definimos o chamado conjunto estável $\mathcal{W}$ e conjunto instável $\mathcal{U}$ (veja Sattinger* [49], *Payne e Sattinger* [44]*) dados por*

$$\mathcal{W} = \left\{u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) : E(u) < d, I(u) > 0\right\} \cup \{0\},$$

e

$$\mathcal{U} = \left\{u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) : E(u) < d, I(u) < 0\right\}.$$

Lema 3.4. *Assume que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Para qualquer $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, temos*

$$E(u) - \frac{1}{m^-}I(u) \le \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx,$$

e

$$E(u) - \frac{1}{m^-}I(u) \ge \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx.$$

Demonstração. Primeiramente, note que $\frac{1}{p^+} \le \frac{1}{p^-}$ e $\frac{1}{m^+} \le \frac{1}{m^-}$. Pela definição dos funcionais E, I e usando o Lema 3.1 item (v), segue que

$$\begin{aligned}
E(u) &= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx \\
&\le \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx \\
&\le \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p^-}dx - \int_\Omega \frac{1}{m^+}|u|^{m(x)}dx \\
&= \frac{1}{p^-}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{1}{m^+}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \frac{1}{p^-}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{1}{m^+}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \frac{1}{m^+}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{1}{m^+}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \left[\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right]\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&+ \frac{1}{m^+}\left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{m(x)}dx\right] \\
&= \left[\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right]\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{1}{m^+}I(u) \\
&\le \left[\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right]\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{1}{m^-}I(u).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$E(u) - \frac{1}{m^-}I(u) \leq \left[\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right] \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx.$$

Analogamente, segue do Lema 3.1 item (v) que

$$\begin{aligned}
E(u) &= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{1+s}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u|^{m(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{1+s}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p^+}dx\right)\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p^+}dx - \int_\Omega \frac{1}{m^-}|u|^{m(x)}dx \\
&= \frac{1}{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{1}{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \frac{1}{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{1}{m^-}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&- \frac{1}{m^-}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{1}{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \left[\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-}\right]\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&+ \frac{1}{m^-}\left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{m(x)}dx\right] \\
&= \left[\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-}\right]\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{1}{m^-}I(u).
\end{aligned}$$

Nesse caso, concluímos que

$$E(u) - \frac{1}{m^-}I(u) \geq \left[\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-}\right] \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx.$$

Assim, concluímos a prova.

□

Lema 3.5. *Assume que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Para qualquer* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)/\{0\}$, *então os seguintes resultados são verdadeiros:*

(i) Se $I(u) < 0$, *então*

$$E(u) - \frac{1}{m^-}I(u) > d_*.$$

(ii) Se $I(u) \geq 0$, *então*

$$E(u) - \frac{1}{m^-}I(u) > d_*\lambda^{-p^+(1+s)},$$

e

$$I(u) \geq \left(1 - \lambda_*^{p^+(1+s)-m^-}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx$$

onde λ_* *é dada como no* Lema 3.2 *e* d_* *é uma constante positiva dada por*

$$d_* = \frac{\frac{1}{p^+(s+1)} - \frac{1}{m^-}}{\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}} d \leq d.$$

Demonstração. (i) Seja $I(u) < 0$. Usando o Lema 3.2, existe $\lambda_* \in (0,1)$ tal que

$$I(\lambda_* u) = 0.$$

Segue da definição de d (veja Eq.(3.18)) e, dos Lema 3.4 e Lema 3.1 item (ii) que

$$\begin{aligned}
d &\leq E(\lambda_* u) = E(\lambda_* u) - \frac{1}{m^-} I(\lambda_* u) \\
&\leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\lambda_* \nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\lambda_* \nabla u|^{p(x)} dx \\
&= \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda_*^{p(x)} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega \lambda_*^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\
&< \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \\
&\leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \Bigg[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \\
&- \int_\Omega \frac{1}{m^-} |u|^{m(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx\Bigg] \\
&\leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \Bigg[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \\
&- \int_\Omega \frac{1}{m^-} |u|^{m(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right)\Bigg] \\
&= \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[E(u) - \frac{1}{m^-} I(u)\right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Pela Eq.(1.2) segue que

$$p^+(1+s) < m^- \Rightarrow \frac{1}{m^-} < \frac{1}{p^+(1+s)} \Rightarrow 0 < \frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-}. \tag{3.20}$$

Combinando as Eq.(3.19) e Eq.(3.20), temos

$$d < \frac{\dfrac{1}{p^-} - \dfrac{1}{m^+}}{\dfrac{1}{p^+(1+s)} - \dfrac{1}{m^-}} \left[E(u) - \frac{1}{m^-} I(u)\right].$$

Isso nos permite concluir que

$$E(u) - \frac{1}{m^-} I(u) > \frac{\dfrac{1}{p^+(1+s)} - \dfrac{1}{m^-}}{\dfrac{1}{p^-} - \dfrac{1}{m^+}} d = d_*.$$

(ii) Seja $I(u) \geq 0$. Então, pelo Lema 3.2, existe $\lambda_* > 1$ tal que $I(\lambda_* u) = 0$.

Segue da definição de d (veja Eq.(3.18)) e dos Lema 3.4 e Lema 3.1 item (ii) que

$$\begin{aligned}
d &\leq E(\lambda_* u) = E(\lambda_* u) - \frac{1}{m^-} I(\lambda_* u) \\
&\leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda_* u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla \lambda_* u|^{p(x)} dx \\
&= \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda_*^{p(x)} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega \lambda_*^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right. \\
&\left. + \lambda_*^{p^+(1+s)} \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \lambda_*^{p^+(1+s)} \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx\right] \\
&\leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[\lambda_*^{p^+ s} \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \lambda_*^{p^+} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx\right. \\
&\left. + \lambda_*^{p^+(1+s)} \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \lambda_*^{p^+(1+s)} \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx\right] \\
&= \lambda_*^{p^+(1+s)} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx\right. \\
&\left. + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx\right] \\
&\leq \lambda_*^{p^+(1+s)} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx\right. \\
&\left. + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \frac{1}{m^-} \int_\Omega |u|^{m(x)} dx\right] \\
&\leq \lambda_*^{p^+(1+s)} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx\right. \\
&\left. + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \frac{1}{m^-} \int_\Omega |u|^{m(x)} dx + \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right)\right] \\
&= \lambda_*^{p^+(1+s)} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{m^+}\right) \left[E(u) - \frac{1}{m^-} I(u)\right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Usando novamente as desigualdades (3.20) e (3.21), obtemos

$$d \leq \lambda_*^{p^+(1+s)} \frac{\dfrac{1}{p^-} - \dfrac{1}{m^+}}{\dfrac{1}{p^+(1+s)} - \dfrac{1}{m^-}} \left[E(u) - \frac{1}{m^-} I(u)\right].$$

Como isso, concluímos que

$$E(u) - \frac{1}{m^-} I(u) \geq \frac{\dfrac{1}{p^+(1+s)} - \dfrac{1}{m^-}}{\dfrac{1}{p^-} - \dfrac{1}{m^+}} d \lambda_*^{-p^+(1+s)} = d_* \lambda_*^{-p^+(1+s)}.$$

Novamente para $\lambda_* > 1$, segue do Lema 3.1 item (ii) que

$$
\begin{aligned}
0 = I(\lambda_* u) &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \lambda_* u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla \lambda_* u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |\lambda_* u|^{m(x)}dx \\
&= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda_*^{p(x)}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \lambda_*^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda_*^{m(x)}|u|^{m(x)}dx \\
&\leq \mathcal{M}\left(\int_\Omega \lambda_*^{p^+}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\lambda_*^{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda_*^{m^-}|u|^{m(x)}dx \\
&\leq \lambda_*^{p^+ s}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\lambda_*^{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda_*^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \lambda_*^{p^+(1+s)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda_*^{m^-}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&= \left(\lambda_*^{p^+(1+s)} - \lambda_*^{m^-}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&+ \lambda_*^{m^-}\left(\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{m(x)}dx\right) \\
&= \left(\lambda_*^{p^+(1+s)} - \lambda_*^{m^-}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \lambda_*^{m^-} I(u).
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$
\lambda_*^{m^-} I(u) \geq \left(\lambda_*^{m^-} - \lambda_*^{p^+(1+s)}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx.
$$

Com isso concluímos que

$$
I(u) \geq \left(1 - \lambda_*^{p^+(1+s)-m^-}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx.
$$

□

Lema 3.6. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Então a profundidade do potencial d é positiva.*

Demonstração. Para qualquer $u \in \mathcal{N}$, temos

$$
I(u) = \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{m(x)}dx = 0.
$$

Assim, usando a Proposição 2.9, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx &= \int_\Omega |u|^{m(x)}dx \\
&\leq \max\left\{\|u\|_{m(x)}^{m^-}, \|u\|_{m(x)}^{m^+}\right\} \\
&\leq \max\left\{C_{m(x)}^{m^-}\|\nabla u\|_{p(x)}^{m^-}, C_{m(x)}^{m^+}\|\nabla u\|_{p(x)}^{m^+}\right\} \\
&\leq \max\left\{C_{m(x)}^{m^-}, C_{m(x)}^{m^+}\right\}\max\left\{\|\nabla u\|_{p(x)}^{m^-}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{m^+}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Aqui, $C_{m(x)}$ é uma constante de imersão $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(\cdot)}(\Omega)$, isto é,

$$C_{m(x)} = \sup_{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|_{m(x)}}{\|\nabla u\|_{p(x)}}.$$

Por outro lado, usando o Lema 3.1 itens (i) e (iii) e pela Proposição 2.3 segue que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&\geq \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p^+}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{(p^+)^s}\mathcal{M}\left(1\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{(p^+)^s}\frac{\mathcal{M}(1)}{1^s}\min\left\{1^s, \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^s\right\}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
&= \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx, \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{(1+s)}\right\} \\
&\geq \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\min\left\{\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-(1+s)}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+(1+s)}\right\}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Se $\|\nabla u\|_{p(x)} < 1$, combinando as desigualdades (3.22) e (3.23), temos

$$\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+(1+s)} \leq \max\left\{C_{m(x)}^{m^-}, C_{m(x)}^{m^+}\right\}\|\nabla u\|_{p(x)}^{m^-}. \qquad (3.24)$$

Segue da Eq.(3.24) que

$$\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+(1+s)-m^-} \leq \max\left\{C_{m(x)}^{m^-}, C_{m(x)}^{m^+}\right\}. \qquad (3.25)$$

A Eq.(3.25) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \geq \left[\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s \max\left\{C_{m(x)}^{m^-}, C_{m(x)}^{m^+}\right\}}\right]^{\frac{1}{m^- - p^+(1+s)}}.$$

Como $\|\nabla u\|_{p(x)} > 0$ e pela Eq.(1.2) sabemos que $p^+(1+s) < m^-$, então para todo $u \in \mathcal{N}$, temos

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \geq \min\left\{1, \left[\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s \max\left\{C_{m(x)}^{m^-}, C_{m(x)}^{m^+}\right\}}\right]^{\frac{1}{m^- - p^+(1+s)}}\right\} := \xi \in (0,1]. \qquad (3.26)$$

Usando o Lema 3.4 e a desigualdade (3.26), para todo $u \in \mathcal{N}$ obtemos

$$\begin{aligned}
E(u) &= E(u) - \frac{1}{m^-} I(u) \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \mathcal{M} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} \min \left\{ \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-(1+s)}, \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+(1+s)} \right\} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+(1+s)} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} \xi^{p^+(1+s)}. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo em ambos os lados da desigualdade (3.27), para todo $u \in \mathcal{N}$ e usando a definição de d (veja Eq.(3.18)), temos

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} E(u) \geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} \xi^{p^+(1+s)} > 0.$$

Portanto, concluímos a demonstração. $\square$

4 Existência de Soluções Fracas

Neste capítulo, estamos interessados em discutir a existência e unicidade de soluções locais para equações parabólicas do tipo Kirchhoff com fontes de expoentes variáveis (veja Eq.(1.1)) por do método de Galerkin e algumas desigualdades do tipo: Gagliardo-Nirenberg, Sobolev, Young e Gronwall. Nesse sentido, concluímos o capítulo com a abordagem de energia subcrítica inicial no casos de solução não global e solução global.

Primeiramente, apresentaremos o conceito de solução fraca para o problema (1.1).

Definição 4.1. *Seja $T > 0$. Uma função $u = u(x,t) \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)$ com $u_t \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ é dita solução fraca para o problema (1.1) em $\Omega \times [0,T)$, se $u(x,0) = u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e satisfaz*

$$\langle u_t, v\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla v\right\rangle = \left\langle |u|^{m(x)-2}u, v\right\rangle, \tag{4.1}$$

para todo $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, e para todo $t \in (0,T)$. Além disso,

$$\int_0^t \|u_\tau(\tau)\|_2^2\, d\tau + E(u(t)) \le E(u_0),\ \ t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Definição 4.2. *Seja $u(t)$ uma solução fraca para o problema (1.1). Definimos o tempo máximo de existência $T_{\max}$ de $u(t)$ da seguinte forma:*

(i) Se $u(t)$ existe para $0 \le t < \infty$, então $T_{\max} = \infty$.

(ii) Se existe $t_0 > 0$ tal que $u(t)$ existe para $0 \le t < t_0$, mas não existe em t_0, então $T_{\max} = t_0$.

Antes de discutir o primeiro principal resultado deste presente trabalho, isto é, a existência e unicidade de solução local, estabelecemos algumas condições sobre o método da monotonia e definições importantes.

Considere o funcional

$$\begin{aligned} T : W_0^{1,p(x)}(\Omega) &\to \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^* \\ u \mapsto T(u) &= \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^*$ é o espaço dual de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Seja T um funcional conforme a Eq.(4.3), então T transforma os limites de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ em $\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^*$, e tem a seguinte propriedade (veja [40] p. 157)

$$\lambda \mapsto (T(u+\lambda v), w), \forall u, v, w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{4.4}$$

isto é, T contínuo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Nesse sentido, temos a seguinte definição.

Definição 4.3. [40] *Todo funcional T que satisfaz a* Eq.(4.4) *é chamado de hemicontínuo.*

Note que o funcional T verifica a seguinte desigualdade

$$(T(u) - T(v), u - v) \geq 0, \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{4.5}$$

Definição 4.4. [40] *Todo funcional T que satisfaz a* Eq.(4.5) *é chamado de monótono.*

Vejamos que podemos anexar as propriedades da Eq.(4.4) e Eq.(4.5) de T a um operador mais geral. Para tanto, consideremos o funcional

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p(x)}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u \mapsto J(u) &= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Antes de discutir o primeiro principal resultado deste presente trabalho, isto é, a existência e unicidade de solução local, precisamos da seguinte proposição, como segue.

Proposição 4.5. *O funcional $J(u) = \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right)$ é de classe C^1 em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. A prova deste resultado, será discutido em duas etapas.

Etapa 1: J é diferenciável.

Considere a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(s) = |\nabla u + st\,\nabla v|^{p(x)}$, onde $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Dado $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, existe $\xi(x,t) = \xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{G(1) - G(0)}{1} = G'(\xi).$$

Nesse sentido, temos que

$$\frac{|\nabla u + t\,\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{t\,\nabla v} = p(x)\,|\nabla u + \xi t\,\nabla v|^{p(x)-1}.$$

O que implica em

$$\frac{|\nabla u + t\,\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \xi t\,\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \xi t\,\nabla v)\,\nabla v.$$

Note que

$$\phi = |\nabla u + \xi t\,\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \xi t\,\nabla v)\,\nabla v \to |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\,\nabla v \ \text{ q.s. em } \Omega \tag{4.7}$$

quando $t \to 0$. Além do anterior, temos

$$\phi \leq |\nabla u \, + \, \xi t \, \nabla v|^{p(x)-1} |\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} |\nabla v| \, . \tag{4.8}$$

Usando o fato que

$$|\nabla u| \, , |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega).$$

segue que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Por fim, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} |\nabla v| \in L^1(\Omega). \tag{4.9}$$

Usando as Eq.(4.7)-Eq.(4.9) e aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla (u + tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x) t} \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \, \nabla v \, dx.$$

Agora, pela regra da cadeia, segue que

$$(J)' \, (u) v = \left[\widehat{\mathcal{M}} \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \right) \right]' \lim_{t \to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla (u + tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x) t} \, dx.$$

Portanto,

$$(J)' \, (u) v = \mathcal{M} \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \, \nabla v \, dx, \tag{4.10}$$

e daí J é Gâteaux-diferenciável.

Etapa 2: $(J)' \, (u)$ é contínuo em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Considere a sequência $\{u_j\}_{j=1}^\infty \in W_0^{1,p(x)}$ tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}$ e $\nu \in W_0^{1,p(x)}$ com $\|\nu\| \leq 1$. Assim

$$\nabla u_j \to \nabla u \;\; \text{em} \;\; \left(L^{p(x)}(\Omega) \right)^N .$$

Usando o Teorema de Vainberg (veja o Teorema 2.17), a menos de subsequência

$$\nabla u_j(x) \to \nabla u(x) \;\; \text{q.s. em} \quad \Omega \tag{4.11}$$

e

$$|\nabla u_j(x)| \leq g(x) \;\; \text{q.s. em} \quad \Omega, \tag{4.12}$$

onde $g(x) \in L^{p(x)}(\Omega)$. Usando a Eq.(4.11), segue que

$$|\nabla u_j(x)| \to |\nabla u(x)| \quad \text{q.s. em} \quad \Omega. \tag{4.13}$$

A fim de facilitar o desenvolvimento das contas, considere a seguinte notação $\Theta(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx$. Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned} |\langle \Theta'(u_j) - \Theta'(u), \nu\rangle| &= \left| \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) \nabla \nu \, dx \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right| |\nabla \nu| \, dx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por outro lado, escolhendo

$$f_j = \left| |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right|, \ j \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$f_j \leq |\nabla u_j|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega). \tag{4.15}$$

Assim, temos que $f_j \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder na desigualdade (4.14), obtemos

$$|\langle \Theta'(u_j) - \Theta'(u), \nu\rangle| \leq C|f_j|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |\nabla \nu| \leq C|f_j|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \|\nu\|.$$

Portanto,

$$\|\Theta'(u_j) - \Theta'(u)\| \leq C|f_j|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}.$$

Por (4.11) e (4.13), segue que

$$f_j \to 0 \ \text{ q.s. em } \quad \Omega. \tag{4.16}$$

Usando as desigualdades (4.12) e (4.15), obtemos

$$f_j \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \quad \text{q.s. em} \quad \Omega.$$

Assim, temos

$$f_j(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+} \left(g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)} \right) \quad \text{q.s. em} \quad \Omega, \tag{4.17}$$

onde $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$. Usando a Eq.(4.16), a desigualdade (4.17) e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega f_j^{q(x)}(x)\, dx \to 0 \ \text{ quando } \ j \to \infty.$$

Logo, pelo Lema 2.2 temos que $|f_j|_{q(x)} \to 0$ quando $j \to \infty$. Portanto,

$$\|\Theta'(u_j) - \Theta'(u)\| \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Sendo assim, concluímos que a derivada de Gâteaux Θ' é contínua, o que implica que $J(\cdot)$ é de classe $C^1\left(W_0^{1,p(x)}, \mathbb{R}\right)$. □

Como o funcional $J(u)$ é Gâteaux-diferenciável, então temos um funcional contínuo

$$\begin{aligned} J' : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) &\to \left(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\right)^* \\ u &\mapsto J'(u) : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & \qquad v \mapsto J'(u)v = \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u v \end{aligned}$$

tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} (J(u + \lambda v) - J(u)) = J'(u)v.$$

Assim, concluímos que $J'(u) = T(u)$. Daí, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Se J é Gateaux-diferenciável em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e convexo, então J' é monótono e hemicontínuo.*

Demonstração. Veja [40]. □

Uma observação importante é que a recíproca da Proposição 4.6 também é verdadeira, isto é, se J é Gâteaux-diferenciável em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e se J' é monótono e hemicontínuo, então J é convexo [40].

4.1 Existência local e unicidade de solução

Teorema 4.7. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Então existe $T > 0$ tal que o problema* (1.1) *tem uma solução fraca. Além disso, a solução é única se for limitada.*

Demonstração. Para melhor entendimento a demonstração será dividida em cinco casos.

4.1.1 Caso 1: Aproximação de Galerkin

Como $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço separável, o mesmo possui uma base de Galerkin, isto é, existem subespaços vetoriais $X_n \subset W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo, $X_n = span\{w_1, \cdots, w_n\}$ e $dim\, X_n = n$, $X_n \subset X_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\overline{\bigcup_{n=1}^\infty X_n} = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Construímos a solução aproximada $u^k(x,t)$ do problema (1.1) da seguinte forma

$$u^k(x,t) = \sum_{j=1}^{k} g_j^k(t) w_j(x), \ \ k = 1, 2, ...,$$

onde os coeficientes $g_j^k(t)$ satisfaz o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left\langle u_t^k, w_j \right\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2} \nabla u^k, \nabla w_j \right\rangle = \left\langle |u^k|^{m(x)-2} u^k, w_j \right\rangle, \quad (4.18)$$

$$u^k(0) = \sum_{j=1}^{k} g_j^k(0) w_j(x) \to u_0 \text{ em } W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \text{ quando } k \to \infty \quad (4.19)$$

para $j = 1, ..., k$. A existência de uma solução local do sistema acima é garantido pelo teorema de Peano (veja [28]).

4.1.2 **Caso 2**: A estimativa a Priori

Como consequência imediata da Proposição 2.3 podemos considerar

$$\begin{cases} \|u\|_{p(x)}^{p^-} - 1 = \min\left\{ \|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+} \right\} \\ \|u\|_{p(x)}^{p^+} + 1 = \max\left\{ \|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+} \right\} \end{cases}, \forall u \in L^{p(\cdot)}(\Omega),$$

assim obtemos

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} - 1 \leq \int_\Omega |u^k|^{p(x)} dx \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+} + 1, \forall u \in L^{p(\cdot)}(\Omega). \quad (4.20)$$

Considere os parâmetros $j = 0, r = p^-, n = N, m = 1, q = 2$ e $p = m^+$ na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (veja Proposição 2.15), temos

$$\frac{1}{m^+} = \theta\left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{m^+} = \theta\left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2};$$

isto é

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{m^+} = \theta\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p^-} + \frac{1}{2} \right).$$

Logo

$$\theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m^+} \right)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p^-} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \in (0,1)$$

e $\gamma = \dfrac{p^- m^+(1-\theta)}{2(p^- - \theta m^+)} > 1$ devido ao fato que $m^+ < p^-\left(1 + \dfrac{2}{N}\right)$.

Considerando o exposto acima e pela desigualdade de Young (veja Proposição 2.11), podemos estimar $\int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx$ da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx &\leq \left\|u^k\right\|_{m(x)}^{m^+} + 1 \\
&\leq C_1 \left\|u^k\right\|_{m^+}^{m^+} + 1 \\
&\leq C_2 \left\|\nabla u^k\right\|_{p^-}^{\theta m^+} \left\|u^k\right\|_2^{(1-\theta)m^+} + 1 \\
&\leq C_3 \left\|\nabla u^k\right\|_{p(x)}^{\theta m^+} \left\|u^k\right\|_2^{(1-\theta)m^+} + 1 \\
&\leq \epsilon \left\|\nabla u^k\right\|_{p(x)}^{\theta m^+} + C_3\mathbf{C}(\epsilon) \left\|u^k\right\|^{2(1-\theta)m^+} + 1 \\
&\leq \epsilon \left\|\nabla u^k\right\|_{p(x)}^{p^-} + C_4 \left\|u^k\right\|^{2(1-\theta)m^+} + 1 \\
&\leq \epsilon \left\|\nabla u^k\right\|_{p(x)}^{p^-} + C_4 \left\|u^k\right\|^{2(p^- -\theta)m^+} + 1 \\
&\leq \epsilon \left\|\nabla u^k\right\|_{p(x)}^{p^-} + C_4 \left\|u^k\right\|^{\frac{p^- m^+(1-\theta)}{2(p^- -\theta m^+)}} + 1 \\
&\leq \epsilon \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx + C_4 \left\|u^k\right\|_2^{\gamma} + 1 + \epsilon \\
&\leq \epsilon \left(1 + \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx\right) + C_4 \left\|u^k\right\|_2^{\gamma} + 1 + \epsilon \\
&\leq \epsilon \left(1 + \min\left\{\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx, \left(\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx\right)^{1+s}\right\}\right) + C_4 \left\|u^k\right\|_2^{\gamma} + 1 + \epsilon \\
&\leq \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx + C_4 \left\|u^k\right\|_2^{\gamma} + 1 + 2\epsilon, \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

onde $C_4 > 0$ é uma constante que depende de $C_1, C_2, C_3, \mathcal{C}(\epsilon), p, m, u^k$ e Ω.

Por outro lado, multiplicando a Eq.(4.18) por $g_j^k(t)$ e somando sobre j de 1 a k, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left\langle u_t^k, \sum_{j=1}^k g_j^k w_j \right\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) \left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla \sum_{j=1}^k g_j^k w_j \right\rangle \\
&= \left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, \sum_{j=1}^k g_j^k w_j \right\rangle,
\end{aligned}
$$

o que nos fornece

$$
\left\langle u_t^k, u^k \right\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) \left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla u^k \right\rangle = \left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, u^k \right\rangle. \qquad (4.22)
$$

Segue então da Eq.(4.22) que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k\right\|_2 dx + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)-2}(\nabla u^k)^2 dx = \int_\Omega |u^k|^{m(x)-2}(u^k)^2.
$$

Nesse sentido, temos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k\right\|_2^2 + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx = \int_\Omega |u^k|^{m(x)}. \qquad (4.23)
$$

Combinando as Eq.(4.21) e Eq.(4.23), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k\right\|_2^2 &= -\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u^k|^{m(x)} \\
&\leq -\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&+ \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&+ C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma + 1 + 2\epsilon \\
&= \left(\frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)} - 1\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&+ C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma + 1 + 2\epsilon.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Tomando $\epsilon < \dfrac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}$, segue da desigualdade (4.24) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k\right\|_2^2 &\leq \left(\frac{\mathcal{M}(1)(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)(p^+)^s} - 1\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&+ C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma + 1 + 2\epsilon \\
&= C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma + 1 + 2\epsilon.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Integrando a desigualdade (4.25) sobre $[0,t]$ e usando o teorema fundamental do cálculo temos

$$\left\|u^k\right\|_2^2 - \left\|u^k(0)\right\|_2^2 \leq 2\int_0^t C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma d\tau + 2(1+2\epsilon)t.$$

Logo, pela Eq.(4.19) existe uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left\|u^k\right\|_2^2 &\leq \left\|u^k(0)\right\|_2^2 + 2\int_0^t C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma d\tau + 2(1+2\epsilon)t \\
&\leq C_5 + 2\int_0^t C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma d\tau + 2(1+2\epsilon)t.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Usando a desigualdade de Gronwall-Bellman-Bihari, segue da desigualdade (4.26) que existe uma constante $T_0 > 0$, com $t \in [0, T_0]$, tal que

$$\begin{aligned}
\left\|u^k\right\|_2^2 &\leq (C_5 + 2(1+2\epsilon)t)e^{2\int_0^t C_4 d\tau} \\
&= (C_5 + 2(1+2\epsilon)t)e^{2C_4 t} \\
&\leq (C_5 + 2(1+2\epsilon)T_0)e^{2C_4 T_0}.
\end{aligned}$$

Tomando $C_6(T_0) = (C_5 + 2(1+2\epsilon)T_0)e^{2C_4T_0}$, temos

$$\left\|u^k\right\|_2^2 \leq C_6(T_0), \forall t \in [0, T_0].$$

Multiplicando por $\dfrac{d}{dt}g_j^k(t)$ em ambos os lados da Eq.(4.18) temos

$$\begin{aligned}&\left\langle u_t^k, \frac{d}{dt}g_j^k(t)w_j\right\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla \frac{d}{dt}g_j^k(t)w_j\right\rangle \\ = \ &\left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, \frac{d}{dt}g_j^k(t)w_j\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Agora, somando a Eq.(4.27) sobre j de 1 a k, obtemos

$$\begin{aligned}&\left\langle u_t^k, \sum_{j=1}^k \frac{d}{dt}g_j^k(t)w_j\right\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla \sum_{j=1}^k \frac{d}{dt}g_j^k(t)w_j\right\rangle \\ &= \left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, \sum_{j=1}^k \frac{d}{dt}g_j^k(t)w_j\right\rangle. \end{aligned}$$

Nesse sentido, segue que

$$\left\langle u_t^k, u_t^k\right\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla u_t^k\right\rangle = \left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, u_t^k\right\rangle. \tag{4.28}$$

Note que $\left\langle u_t^k, u_t^k\right\rangle = \left\|u_\tau^k(\tau)\right\|_2^2$ e

$$\frac{d}{dt}E(u^k) = \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla u_t^k\right\rangle - \left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, u_t^k\right\rangle. \tag{4.29}$$

isto é,

$$\left\|u_t^k\right\|_2^2 + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k \nabla u_t^k - \int_\Omega |u^k|^{m(x)-2}u^k u_t^k = 0.$$

Assim, das Eq.(4.28) e Eq.(4.29) podemos escrever

$$\left\|u_t^k\right\|_2^2 + \frac{d}{dt}E(u^k) = 0. \tag{4.30}$$

Integrando a Eq.(4.30) sobre $[0, t]$, obtemos

$$\int_0^t \left\|u_\tau^k(\tau)\right\|_2^2 d\tau + \int_0^t \frac{d}{dt}E(u^k)d\tau = 0.$$

Usando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^t \left\|u_\tau^k(\tau)\right\|_2^2 d\tau + E(u^k) = E(u^k(0)). \tag{4.31}$$

Note que a partir da Eq.(4.31), concluímos que

$$\int_0^t \left\|u_\tau^k(\tau)\right\|_2^2 d\tau + E(u^k) = E(u^k(0)) \Rightarrow E(u^k) \le E(u^k(0)).$$

Nesse caso, usando os Lema 3.4, Lema 3.6 e, as Eq.(4.21) e Eq.(4.23), obtemos

$$\begin{aligned}
E(u^k(0)) &\geq E(u^k) \\
&= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u^k|^{m(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{p^+(1+s)}M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx - \frac{1}{m^-}\int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx \\
&\geq \frac{1}{p^+(1+s)}M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx - \frac{1}{m^-}\int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx \\
&+ \frac{1}{m^-}\int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&- \frac{C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \\
&= \frac{1}{p^+(1+s)}M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&- \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx - \frac{C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \\
&= \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&- \frac{C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\min\left\{\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx, \left(\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx\right)^{(1+s)}\right\} \\
&- \frac{C_4\left\|u^k\right\|_2^\gamma}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\min\left\{\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx, \left(\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx\right)^{(1+s)}\right\} \\
&- \frac{C_4C_6^{\frac{\gamma}{2}}}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\left(\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx - 1\right) \\
&- \frac{C_4C_6^{\frac{\gamma}{2}}}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \qquad (4.32)\\
&= \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx \\
&- \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} - \frac{C_4C_6^{\frac{\gamma}{2}}}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-} \\
&\geq -\left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{\epsilon(p^+)^s}{\mathcal{M}(1)m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} - \frac{C_4C_6^{\frac{\gamma}{2}}}{m^-} - \frac{1+2\epsilon}{m^-}, \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Por outro lado, da Eq.(4.19), se

$$u^k(0) \to u_0, \text{ quando } k \to \infty,$$

então, da continuidade de E segue que

$$E(u^k(0)) \to E(u_0), \text{ quando } k \to \infty. \tag{4.34}$$

Como toda sequência convergente é limitada, temos que existe uma constante $C_7 > 0$ tal que

$$E(u^k(0)) \leq C_7. \tag{4.35}$$

Segue das Eq.(4.32) e Eq.(4.35) que existe uma constante C_8 tal que

$$\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)} dx \leq C_8. \tag{4.36}$$

Agora, usando as Eq.(4.31), Eq.(4.33) e Eq.(4.35), existe uma constante $C_9 > 0$ de modo que

$$\int_0^t \left\| u_\tau^k(\tau) \right\|_2^2 d\tau \leq C_9. \tag{4.37}$$

Como a função $\mathcal{M}$ é não-decrescente (veja $(\mathcal{H}_1)$) e usando a Eq.(4.36) segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) |\nabla u^k|^{p(x)-2} \nabla u^k \right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx \\
&= \int_\Omega \left\{ \left[\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \right]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \left[|\nabla u^k|^{p(x)-2} |\nabla u^k| \right]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \right\} dx \\
&= \int_\Omega \left\{ \mathcal{M}^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) |\nabla u^k|^{p(x)} \right\} dx \\
&\leq \int_\Omega \left\{ \mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p^-} dx \right) |\nabla u^k|^{p(x)} \right\} dx \\
&= \int_\Omega \left\{ \mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\frac{1}{p^-} \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)} dx \right) |\nabla u^k|^{p(x)} \right\} dx \\
&\leq \int_\Omega \left\{ \mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\frac{C_8}{p^-} \right) |\nabla u^k|^{p(x)} \right\} dx \\
&\leq \int_\Omega \left\{ \mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\frac{C_8}{p^-} \right) |\nabla u^k|^{p(x)} + |\nabla u^k|^{p(x)} \right\} dx \\
&= \mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\frac{C_8}{p^-} \right) \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)} dx + \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)} \, dx \\
&= \left(\mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\frac{C_8}{p^-} \right) + 1 \right) \int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)} \, dx \\
&\leq \left(\mathcal{M}^{\frac{p^-}{p^--1}} \left(\frac{C_8}{p^-} \right) + 1 \right) C_8.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Usando as Eq.(4.20) e Eq.(4.30) e a desigualdade de imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left||u^k|^{m(x)-2}u^k\right|^{\frac{m^+}{m^+-1}} &\leq \int_\Omega \left[\left||u^k|^{m(x)-2}u^k\right|^{\frac{m(x)}{m(x)-1}}+1\right]dx\\
&= \int_\Omega \left[\left(|u^k|^{m(x)-2}|u^k|\right)^{\frac{m(x)}{m(x)-1}}+1\right]dx\\
&= \int_\Omega \left[\left(|u^k|^{m(x)-1}\right)^{\frac{m(x)}{m(x)-1}}+1\right]dx\\
&= \int_\Omega \left[|u^k|^{m(x)}+1\right]dx\\
&= \int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx+\int_\Omega 1dx\\
&= \int_\Omega |u^k|^{m(x)}dx+|\Omega|\\
&\leq \left\|u^k\right\|_{m(x)}^{m^+}+1+|\Omega|\\
&\leq C_{10}\left\|\nabla u^k\right\|_{p(x)}^{m^+}+1+|\Omega|\\
&\leq C_{10}\left(\int_\Omega |\nabla u^k|^{p(x)}dx+1\right)^{\frac{m^+}{p^-}}+1+|\Omega|\\
&\leq C_{10}\left(C_8+1\right)^{\frac{m^+}{p^-}}+1+|\Omega|, \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω.

4.1.3 **Caso 3**: Passando para o Limite

Segue das desigualdades (4.36)-(4.38) que existe uma função $u \in L^\infty\left(0,T_0;W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)$ e uma subsequência de $\left\{u^k\right\}_{k=1}^\infty$, que por um abuso de notação denotamos por $\left\{u^k\right\}_{k=1}^\infty$, tal que

$$u^k \xrightarrow{\omega^*} u \text{ em } L^\infty\left(0,T_0;W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right), \qquad (4.40)$$

$$u_t^k \xrightarrow{\omega} u_t \text{ em } L^2\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right), \qquad (4.41)$$

e

$$\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)|\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k \xrightarrow{\omega^*} \chi \text{ em } L^\infty\left(0,T_0;L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\right). \qquad (4.42)$$

Então, usando o Lema 2.19 (Lema de Aubin-Lions-Simon) e, as Eq.(4.40) e Eq.(4.41), temos

$$u^k \to u \text{ em } C\left([0,T_0];L^{r(x)}(\Omega)\right), 2 \leq r(x) \leq m^+, \forall x \in \Omega.$$

Nesse caso

$$u^k \to u \ q.t.p. \text{ em } \Omega \times (0,T_0),$$

e, como $|u^k|^{m(x)-2} \geq 0$, segue que

$$|u^k|^{m(x)-2}u^k \to |u|^{m(x)-2}u \ q.t.p. \text{ em } \Omega \times (0,T_0).$$

Então, usando o Lema de Lion 2.18 e a Eq.(4.39) obtemos

$$|u^k|^{m(x)-2}u^k \xrightarrow{\omega} |u|^{m(x)-2}u \text{ em } L^{\frac{m^+}{m^+-1}}\left(\Omega \times (0,T_0)\right). \tag{4.43}$$

Combinando as Eq.(4.40)-Eq.(4.43), e fazendo $k \to \infty$ em Eq.(4.18), obtemos a condição inicial

$$u(0) = u_0.$$

Além disso, note que

$$\left\langle u_t^k, w\right\rangle + \left\langle \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)|\nabla u^k|^{p(x)-2}\nabla u^k, \nabla w\right\rangle = \left\langle |u^k|^{m(x)-2}u^k, w\right\rangle,$$

e, fazendo $k \to \infty$ obtemos

$$\langle u_t, w\rangle + \langle \chi, \nabla w\rangle = \left\langle |u|^{m(x)-2}u, w\right\rangle, \tag{4.44}$$

para todo $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, e para $t \in (0,T_0)$ $q.t.p.$.

Para provar que u é uma solução do problema (1.1), resta-nos mostrar que

$$\chi = \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.$$

Para isso, considere o funcional convexo defindo em Eq.(4.6) dado por

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u \mapsto J(u) &= \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right). \end{aligned}$$

Note que $J(u)$ é de Gateaux-diferenciável pela Proposição 4.5.

Sendo $\mathcal{M}$ não-decrescente e positivo, então pela Proporição 4.6 temos que

$$u \mapsto J'(u) = \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u,$$

é monótona e hemicontínua.

Pela monotocidade de J', temos para todo $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ que

$$\int_0^{T_0}\left\langle J'(u^k) - J'(v), \nabla u^k - \nabla v\right\rangle dt \geq 0.$$

Usando as propriedades de integral e do produto interno, temos

$$\int_0^{T_0} \left\langle J'(u^k), \nabla u^k \right\rangle dt \geq \int_0^{T_0} \left\langle J'(u^k), \nabla v \right\rangle dt - \int_0^{T_0} \left\langle J'(v), \nabla u^k - \nabla v \right\rangle dt. \tag{4.45}$$

Agora integrando a Eq.(4.23) sobre $(0, T_0)$ e usando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\int_0^{T_0} \left\langle J'(u^k), \nabla u^k \right\rangle dt = \frac{1}{2} \left\| u^k(0) \right\|_2^2 - \frac{1}{2} \left\| u^k(T_0) \right\|_2^2 + \int_0^{T_0} \int_\Omega |u^k|^{m(x)} dx\ dt. \tag{4.46}$$

Por outro lado, integrando sobre $(0, T_0)$ em ambos os lados da Eq.(4.44) e tomando $w = u$, obtemos

$$\int_0^{T_0} \langle u_t, u \rangle\, dt + \int_0^{T_0} \langle \chi, \nabla u \rangle\, dt = \int_0^{T_0} \left[\left\langle |u|^{m(x)-2} u, u \right\rangle \right] dt.$$

Nesse caso, temos

$$\int_0^{T_0} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2\, dt + \int_0^{T_0} \langle \chi, \nabla u \rangle\, dt = \int_0^{T_0} \int_\Omega |u|^{m(x)} dx\ dt.$$

Usando o teorema fundamental do cálculo obtemos

$$\int_0^{T_0} \langle \chi, \nabla u \rangle\, dt = \frac{1}{2} \|u(0)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(T_0)\|_2^2 + \int_0^{T_0} \int_\Omega |u|^{m(x)} dx\ dt. \tag{4.47}$$

Combinando as Eq.(4.45)-Eq.(4.47), fazendo $k \to \infty$ segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \left\langle J'(u^k), \nabla u^k \right\rangle dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \left\| u^k(0) \right\|_2^2 - \frac{1}{2} \left\| u^k(T_0) \right\|_2^2 + \int_0^{T_0} \int_\Omega |u^k|^{m(x)} dx\ dt \\
&= \frac{1}{2} \|u(0)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(T_0)\|_2^2 + \int_0^{T_0} \int_\Omega |u|^{m(x)} dx\ dt \\
&= \int_0^{T_0} \langle \chi, \nabla u \rangle\, dt \\
&\geq \int_0^{T_0} \langle \chi, \nabla v \rangle\, dt - \int_0^{T_0} \langle J'(v), \nabla u - \nabla v \rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Então

$$\int_0^{T_0} \langle \chi, \nabla u - \nabla v \rangle\, dt + \int_0^{T_0} \langle J'(v), \nabla u - \nabla v \rangle\, dt \geq 0.$$

Nesse sentido, temos

$$\int_0^{T_0} \langle \chi - J'(v), \nabla u - \nabla v \rangle\, dt \geq 0. \tag{4.48}$$

Para qualquer $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e, qualquer número real λ, seja $v = u - \lambda w$, segue então da Eq.(4.48) que

$$\lambda \int_0^{T_0} \langle \chi - J'(u - \lambda w), \nabla w \rangle\, dt \geq 0. \tag{4.49}$$

Nesse caso, segue pelo fato de J' ser um operador hemicontínuo que, fazendo $\lambda \to 0^+$ na Eq.(4.49), temos

$$\int_0^{T_0} \langle \chi - J'(u), \nabla w \rangle \, dt \geq 0. \tag{4.50}$$

Agora, aplicando $\lambda \to 0^-$, obtemos

$$\int_0^{T_0} \langle \chi - J'(u), \nabla w \rangle \, dt \leq 0. \tag{4.51}$$

Portanto, concluímos das Eq.(4.50) e Eq.(4.51) que

$$\int_0^{T_0} \langle \chi - J'(u), \nabla w \rangle \, dt = 0,$$

desde que $\chi = J'(u)$.

Assim u é solução para o problema (1.1).

4.1.3.1 **Caso 4** : Desigualdade de Energia

Primeiramente, fixemos $t \in [0, T_0]$. Pela Eq.(4.41) temos

$$\int_\Omega \|u_\tau(\tau)\|_2^2 \, d\tau \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega \left\| u_\tau^k(\tau) \right\|_2^2 d\tau. \tag{4.52}$$

Usando a Eq.(4.40) e a imersão compacta $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$ obtemos

$$u^k(t) \xrightarrow{\omega} u(t) \text{ em } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{4.53}$$

e

$$u^k(t) \to u(t) \text{ em } L^{m(x)}(\Omega). \tag{4.54}$$

Então, como J é conexo e fortemente contínuo, do Lema 2.20 temos que o funcional é semicontínuo inferior com relação a topologia fraca de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e, portanto da Eq.(4.53) segue que

$$\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \leq \lim_{k\to\infty} \inf \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx\right). \tag{4.55}$$

Por outro outro lado, segue da Eq.(4.54) que

$$\int_\Omega \frac{|u(t)|^{m(x)}}{m(x)} dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{|u^k(t)|^{m(x)}}{m(x)} dx. \tag{4.56}$$

Subtraindo de ambos os lados da desigualdade (4.55) a Eq.(4.56), obtemos

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u(t)|^{m(x)} dx \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \inf \widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega \frac{|u^k(t)|^{m(x)}}{m(x)} dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \inf \left[\widehat{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u^k(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u^k(t)|^{m(x)} dx\right].
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que

$$E(u(t)) \leq \lim_{k\to\infty} \inf E(u^k(t)) \tag{4.57}$$

Portanto, usando as Eq.(4.31), Eq.(4.34), Eq.(4.52) e Eq.(4.57), temos

$$\int_\Omega \|u_\tau\|_2^2 \, d\tau + E(u(t)) \leq E(u_0), \forall t \in [0, T_0].$$

4.1.4 Caso 5 : Unicidade de Solução Limitada

Assumimos que o problema (1.1) admite duas soluções fracas limitadas u_1, u_2, então

$$\langle u_{1t}, v\rangle + \langle J'(u_1), \nabla v\rangle = \left\langle |u_1|^{m(x)-2} u_1, v \right\rangle, \tag{4.58}$$

e

$$\langle u_{2t}, v\rangle + \langle J'(u_2), \nabla v\rangle = \left\langle |u_2|^{m(x)-2} u_2, v \right\rangle, \tag{4.59}$$

para qualquer $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Seja $w = u_1 - u_2$ e tomando $v = w$, então subtraindo de ambos os lados da Eq.(4.58) a Eq.(4.59), obtemos

$$\langle u_{1t} - u_{2t}, v\rangle + \langle J'(u_1) - J'(u_2), \nabla v\rangle = \left\langle |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2, v \right\rangle.$$

Então,

$$\langle w_t, w\rangle + \langle J'(u_1) - J'(u_2), \nabla u_1 - \nabla u_2\rangle = \left\langle |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2, w \right\rangle.$$

Pela monotocidade de J', temos

$$\langle J'(u_1) - J'(u_2), \nabla u_1 - \nabla u_2\rangle \geq 0.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 &= \langle w_t, w\rangle \\
&\leq \left\langle |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2, w \right\rangle \\
&\leq \left| \left\langle |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2, w \right\rangle \right| \\
&\leq \left\| |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2 \right\|_2 \|w\|_2 \\
&\leq \left\| |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2 \right\|_2^2 \|w\|_2^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo $C_{11} = \left\| |u_1|^{m(x)-2} u_1 - |u_2|^{m(x)-2} u_2 \right\|_2^2 > 0$ uma constante que depende apenas de $m(x)$ e do limite de u_1 e u_2, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 \leq C_{11}\|w\|_2^2. \tag{4.60}$$

Aplicando a integral 0 a t em ambos os lados da desigualdade (4.60) e usando o teorema fundamental do cálculo, segue que

$$\|w(t)\|_2^2 - \|w(0)\|_2^2 \leq 2C_{11} \int_0^t \|w(\tau)\|_2^2 \, d\tau.$$

Como $w(0) = 0$, concluímos que

$$\|w(t)\|_2^2 \leq 2C_{11} \int_0^t \|w(\tau)\|_2^2 \, d\tau. \tag{4.61}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall na desigualdade (4.61) obtemos

$$\|w(t)\|_2^2 \leq 0.$$

Como $\|w(t)\|_2^2 \geq 0$, concluímos que $w = 0$. Portanto, temos o resultado de unicidade e, assim finalizamos a prova. □

4.2 Energia Inicial Subcrítica

4.2.1 Solução não Global

Teorema 4.8. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Se* $E(u_0) < d_*$ *e* $I(u_0) < 0$, *então* $T_{\max} < \infty$. *Além disso, encontramos um limite superior para o tempo máximo de existência, dado por*

$$T_{\max} \leq \frac{4(m^- - 1)\,\|u_0\|_2^2}{m^-(m^- - 2)^2(d_* - E(u_0))}.$$

Demonstração. A demonstração desse resultado, será dividida em dois casos.

Caso 1: Vamos provar que $I(u(t)) < 0$, para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Para fins de contradição, suponhamos que exista $t_0 \in (0, T_{\max})$ tal que $I(u(t)) < 0$, para todo $t \in [0, t_0)$ e $I(u(t_0)) = 0$.

Tomando $v = u$ na Eq.(4.1), temos

$$\langle u_t, v\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u\right\rangle = \left\langle |u|^{m(x)-2}u, u\right\rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 &= -\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u)^2 dx + \int_\Omega |u|^{m(x)-2}u^2 dx \\
&= -\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)-2}}{|\nabla u|^2}(\nabla u)^2 dx + \int_\Omega \frac{|u|^{m(x)-2}}{|u|^2}u^2 dx \\
&= -\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_\Omega |u|^{m(x)} dx \\
&= -I(u(t)).
\end{aligned}$$

Nesse caso, temos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = 2\langle u_t, u\rangle = -2I(u(t)) > 0, \forall t \in [0, t_0), \tag{4.62}$$

o que mostra que a funcão u é estritamente crescente em $[0, t_0]$.

Portanto, $\|u(t)\|_2^2 > 0$, então $\|u(t)\|_2 > 0$. Nesse caso, $u(t_0) \in \mathcal{N}$. Segue da definição de d que

$$d = \inf_{u(t_0)\in\mathcal{N}} E(u(t_0)) \leq E(u(t_0)),$$

por conseguinte

$$d \leq E(u(t_0)).$$

Por outro lado, segue da Eq.(4.2) que

$$E(u(t_0)) \leq E(u_0) < d_* \leq d,$$

o que é claramente uma contradição. Concluímos então temos que $I(u(t)) < 0$ para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Caso 2 : Encontrando uma limitação superior para $T_{\max}$.

Primeiramente, vamos fixar um $T \in (0, T_{\max})$ e considerar a função K dada por

$$K(t) := \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2 \, d\tau + (T - t)\|u_0\|_2^2 + (at + b)^2, \tag{4.63}$$

para $t \in [0, T]$, onde a, b são constantes dadas mais adiante.

Derivando Eq.(4.63) em relação t, obtemos

$$\begin{aligned} K'(t) &= \|u(t)\|_2^2 - \|u_0\|_2^2 + 2(at+b)a \\ &= 2\left(\int_0^t \langle u_t(\tau), u(\tau)\rangle \, d\tau + a(at+b)\right) > 0. \end{aligned}$$

Agora, derivando K' em relação a t, temos

$$K''(t) = 2\left(\langle u_t(t), u(t)\rangle + a^2\right).$$

Usando Eq.(4.62), concluímos que

$$\begin{aligned} K''(t) &= 2\left(\langle u_t(t), u(t)\rangle + a^2\right) \\ &= 2\left(-I(u(t)) + a^2\right) > 0. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz encontramos uma estimativa para K' da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
(K')^2 &= \left[\left(2\int_0^t \langle u_t, u\rangle\, d\tau + a(at+b)\right)\right]^2\\
&= 4\left[\int_0^t \langle u_t, u\rangle\, d\tau + a(at+b)\right]^2\\
&\leq 4\left[\int_0^t |\langle u_t, u\rangle| d\tau + a(at+b)\right]^2\\
&\leq 4\left[\int_0^t \sqrt{\|u_t(\tau)\|_2^2\, \|u(\tau)\|_2^2} d\tau + a(at+b)\right]^2\\
&\leq 4\left[\sqrt{\int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau}\sqrt{\int_0^t \|u(\tau)\|_2^2\, d\tau} + a(at+b)\right]^2\\
&= 4\left[\int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2\, d\tau + 2a(at+b)\times\right.\\
&\left.\times \int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2\, d\tau + a^2(at+b)^2\right]\\
&\leq 4\left[\int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2\, d\tau + (at+b)^2\int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau\right.\\
&\left.+\, a^2\int_0^t \|u(\tau)\|_2^2\, d\tau + a^2(at+b)^2\right]\\
&= 4\left(\int_0^t \|u(\tau)\|_2^2\, d\tau + (at+b)^2\right)\left(\int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau + a^2\right)\\
&\leq 4K(t)\left(\int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau + a^2\right).
\end{aligned} \tag{4.64}
$$

Por outro lado, usando o Lema 3.5 item (i), temos

$$
-I(u(t)) > m^-(d_* - E(u(t)). \tag{4.65}
$$

Assim, por meio das Eq.(4.2), Eq.(4.64) e Eq.(4.65) segue que

$$
\begin{aligned}
K''(t) &= 2\left(-I(u(t)) + a^2\right)\\
&> 2\left(m^-(d_* - E(u(t))) + a^2\right)\\
&\geq 2\left(m^-(d_* + \int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau - E(u_0)) + a^2\right)\\
&= 2\left(m^- \int_0^t \|u_t(\tau)\|_2^2\, d\tau + m^-(d_* - E(u_0)) + a^2\right)\\
&\geq 2\left(\left(m^- \frac{(K'(t))^2}{4K(t)} - a^2\right) + m^-(d_* - E(u_0)) + a^2\right).
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

Multiplicando a Eq.(4.66) por $K(t)$ temos que

$$\begin{aligned} K''(t)K(t) &\geq 2K(t)\left(\left(m^- \frac{(K'(t))^2}{4K(t)} - a^2\right) + m^-(d_* - E(u_0)) + a^2\right) \\ &= 2K(t)\left(m^- \frac{(K'(t))^2}{4K(t)} - m^- a^2 + m^-(d_* - E(u_0)) + a^2\right) \\ &= m^- \frac{(K'(t))^2}{2K(t)} + 2K(t)\left(m^-(d_* - E(u_0)) - (m^- - 1)a^2\right). \end{aligned}$$

O que permite escrever

$$K''(t)K(t) - m^- \frac{(K'(t))^2}{2K(t)} \geq 2K(t)\left(m^-(d_* - E(u_0)) - (m^- - 1)a^2\right). \tag{4.67}$$

Nesse caso, segue da desigualdade (4.67) e tomando $a \leq \sqrt{\dfrac{m^-(d_* - E(u_0))}{m^- - 1}}$, podemos concluir que

$$K''(t)K(t) - m^- \frac{(K'(t))^2}{2K(t)} \geq 0.$$

Notemos que $K(0) > 0, K'(0) > 0$ e $m^- > 2$, então pelo Lema 2.21 inferimos que

$$T \leq \frac{K(0)}{\left(\frac{m^-}{2} - 1\right) K'(0)} = \frac{T\left\|u_0\right\|_2^2 + b^2}{\left(\frac{m^- - 2}{2}\right) 2ab} = \frac{T\left\|u_0\right\|_2^2 + b^2}{(m^- - 2)ab}.$$

Nesse sentido, segue que

$$T - \frac{T\left\|u_0\right\|_2^2}{(m^- - 2)ab} \leq \frac{b^2}{(m^- - 2)ab}. \tag{4.68}$$

Da desigualdade (4.68), temos

$$T \leq \frac{b^2}{(m^- - 2)ab - \left\|u_0\right\|_2^2}. \tag{4.69}$$

Consideremos agora uma função ζ definida por

$$\zeta(b) := \frac{b^2}{(m^- - 2)ab - \left\|u_0\right\|_2^2}, \forall b \in \left(\frac{\left\|u_0\right\|_2^2}{(m^- - 2)a}, \infty\right). \tag{4.70}$$

Minimizando $\zeta(b)$ para $b \in \left(\dfrac{\left\|u_0\right\|_2^2}{(m^- - 2)a}, \infty\right)$, segue da Eq.(4.70) que

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{b^2}{(m^- - 2)ab - \left\|u_0\right\|_2^2} \\ &= \frac{\dfrac{2^2\left\|u_0\right\|_2^4}{(m^- - 2)^2 a^2}}{(m^- - 2)a \dfrac{2\left\|u_0\right\|_2^2}{(m^- - 2)a} - \left\|u_0\right\|_2^2} \\ &= \frac{4\left\|u_0\right\|_2^2}{(m^- - 2)^2 a^2}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Consideremos agora outra função η dada por

$$\eta(a) := \frac{4\|u_0\|_2^2}{(m^- - 2)^2 a^2}, \forall a \in \left(0, \sqrt{\frac{m^-(d_* - E(u_0))}{m^- - 1}}\right].$$

Minimizando $\eta(a)$ para $a \in \left(0, \sqrt{\frac{m^-(d_* - E(u_0))}{m^- - 1}}\right]$, obtemos da Eq.(4.71) que

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{4\|u_0\|_2^2}{(m^- - 2)^2 \dfrac{m^-(d_* - E(u_0))}{m^- - 1}} \\ &= \frac{4(m^- - 1)\|u_0\|_2^2}{m^-(m^- - 2)^2(d_* - E(u_0))}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Fazendo $T \to T_{\max}^-$ na Eq.(4.72), concluímos que

$$T_{max} \leq \frac{4(m^- - 1)\|u_0\|_2^2}{m^-(m^- - 2)^2(d_* - E(u_0))}.$$

Isso completa a demonstração.

$\square$

4.2.2 Solução Global

Teorema 4.9. *Suponha que as* Eq.(1.2) *e* Eq.(1.3) *sejam satisfeitas. Se* $E(u_0) < d_*$ *e* $I(u_0) \geq 0$, *então* $T_{\max} = \infty$. *Além disso, o funcional energia da solução fraca do problema* (1.1) *contém as seguintes estimativas de decaimento:*

$$E(u(t)) \leq \begin{cases} E(u_0)\left(\frac{p^+(1+s)}{2+(p^+(1+s)-2)\alpha t}\right)^{\frac{p^+(1+s)}{p^+(1+s)-2}} & , \ se\ p^+ > \dfrac{2}{1+s} \\ \\ E(u_0)e^{1-\beta t} & , \ se\ p^+ \leq \dfrac{2}{1+s}, \end{cases}$$

onde α *e* β *são constantes positivas dadas posteriormente, dependendo apenas de* p, m, s, M *e* u_0.

Demonstração. A demonstração será dividida em quatro casos.

Caso 1 : Vejamos que $I(u(t)) \geq 0$, para todo $t \in [0, T_{\max})$. Como $E(u_0) < d_* \leq d$ e $I(u_0) > 0$, temos que $u_0 \in \mathcal{W}$. Então $u(t) \in \mathcal{W}$, para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Para fins de contradição, suponhamos que exista $t_0 \in [0, T_{\max})$ tal que $u(t_0) \in \partial\mathcal{W}$, onde $\partial\mathcal{W}$ é a fronteira do conjunto $\mathcal{W}$. Notemos que 0 é ponto interior de $\mathcal{W}$, então $E(u(t_0)) = d$ ou $I(u(t_0)) = 0$, para $(u(t_0)) \neq 0$. Segue da Eq.(4.2) que $E(u(t)) \leq E(u_0) < d$

e, assim $I(u(t_0)) = 0$, para $u(t_0) \neq 0$, isto é, $u(t_0) \in \mathcal{N}$. Então pela definição de d (veja Eq.(3.18)) temos

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} E(u(t_0)) \leq E(u(t_0)),$$

o que é uma contradição, devido ao fato de $E(u(t_0)) < d$. Então, temos que $u(t) \in \mathcal{W}$, isso implica que $I(u(t)) \geq 0$, para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Caso 2 : Vejamos agora que $T_{\max} = \infty$.

Usando os Lema 3.4, Lema 3.6 e pelo **Caso 1**, onde $I(u(t)) \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
d_* > E(u_0) &\geq E(u(t)) \\
&\geq E(u(t)) - \frac{1}{m^-} I(u(t)) \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \mathcal{M} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} \times \\
&\times \min \left\{ \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-}, \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+}, \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-(1+s)}, \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+(1+s)} \right\} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-} \right) \frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s} \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Notemos que, se $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} < 1$ então

$$\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \leq \max \left\{ \left(\frac{d_* (p^+)^{1+s} (1+s) m^-}{(m^- - p^+(1+s)) \mathcal{M}(1)} \right)^{\frac{1}{p^-}}, 1 \right\}.$$

Escolhendo

$$\mathcal{C}_1 := \max \left\{ \left(\frac{d_* (p^+)^{1+s} (1+s) m^-}{(m^- - p^+(1+s)) \mathcal{M}(1)} \right)^{\frac{1}{p^-}}, 1 \right\}, \tag{4.74}$$

temos que $1 \leq \mathcal{C}_1$.

Em outras palavras, $u(t)$ é uniformemente limitado em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Então segue da Definição 4.2 item (i) que $T_{\max} = \infty$.

Caso 3 : Vamos mostrar que $E(u(t)) \lesssim I(u(t))$.

Note que, por meio do Lema 3.5 item (ii) segue que

$$E(u(t)) - \frac{1}{m^-} I(u(t)) \geq d_* \lambda_*^{-p^+(1+s)}. \tag{4.75}$$

Por outro lado, temos pela Eq.(4.2) que

$$E(u(t)) - \frac{1}{m^-} I(u(t)) \leq E(u(t)) \leq E(u_0). \tag{4.76}$$

Usando as Eq.(4.75) e (4.76), obtemos

$$\lambda_* \geq \left(\frac{d_*}{E(u_0)}\right)^{\frac{1}{p^+(1+s)}} > 1.$$

Novamente usando o Lema 3.5 item (ii), temos

$$\begin{aligned} I(u(t)) &\geq \left(1-\lambda_*^{p^+(1+s)-m^-}\right) M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)}dx \\ &\geq \left(1-\left(\frac{d_*}{E(u_0)}\right)^{\frac{p^+(1+s)-m^-}{p^+(1+s)}}\right) M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)}dx. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\left(1-\left(\frac{d_*}{E(u_0)}\right)^{\frac{p^+(1+s)-m^-}{p^+(1+s)}}\right)^{-1} I(u(t)) \leq M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)}dx. \tag{4.77}$$

Segue então do Lema 3.4 e da desigualdade (4.77) que

$$\begin{aligned} E(u(t)) - \frac{1}{m^-}I(u(t)) &\leq \left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{m^+}\right)\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)}dx \\ &\leq \left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{m^+}\right)\left(1-\left(\frac{d_*}{E(u_0)}\right)^{\frac{p^+(1+s)-m^-}{p^+(1+s)}}\right)^{-1} I(u(t)). \end{aligned}$$

Nesse sentido, temos

$$E(u(t)) \leq \left[\frac{1}{m^-}+\left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{m^+}\right)\left(1-\left(\frac{d_*}{E(u_0)}\right)^{\frac{p^+(1+s)-m^-}{p^+(1+s)}}\right)^{-1}\right] I(u(t)).$$

Considerando uma constante $\mathcal{C}_2 > 0$ tal que

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{m^-}+\left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{m^+}\right)\left(1-\left(\frac{d_*}{E(u_0)}\right)^{\frac{p^+(1+s)-m^-}{p^+(1+s)}}\right)^{-1},$$

então

$$E(u(t)) \leq \mathcal{C}_2 I(u(t)). \tag{4.78}$$

Caso 4 : Estimativa de decaimento para o funcional $E(u(t))$.

Usando as Eq.(4.73) e Eq.(4.74) temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} E(u(t)) &\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)}-\frac{1}{m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\times \\ &\times \min\left\{\|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-}, \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+}, \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-(1+s)}, \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+(1+s)}\right\} \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)}-\frac{1}{m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+(1+s)} \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+(1+s)}-\frac{1}{m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\mathcal{C}_1^{p^- - p^+(1+s)}\|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+(1+s)}. \end{aligned}$$

Considerando a $\mathcal{C}_3 > 0$ (uma constante) tal que

$$\mathcal{C}_3 := \left(\frac{1}{p^+(1+s)} - \frac{1}{m^-}\right)\frac{\mathcal{M}(1)}{(p^+)^s}\mathcal{C}_1^{p^- - p^+(1+s)} > 0,$$

então

$$E(u(t)) \geq \mathcal{C}_3 \left\|\nabla u(t)\right\|_{p(x)}^{p^+(1+s)}. \tag{4.79}$$

Por outro lado, usando imersão $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue que existe uma constante $\mathcal{C}_4 > 0$ tal que

$$\left\|u(t)\right\|_2 \leq \mathcal{C}_4 \left\|\nabla u(t)\right\|_{p(x)}. \tag{4.80}$$

Nesse sentido, combinando as Eq.(4.79) e Eq.(4.80) temos

$$\left\|u(t)\right\|_2^2 \leq \mathcal{C}_4^2 \left\|\nabla u(t)\right\|_{p(x)}^2 \leq \mathcal{C}_4^2 \mathcal{C}_3^{-\frac{2}{p^+(1+s)}} E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t)).$$

Agora, considerando uma constante $\mathcal{C}_5 > 0$ tal que

$$\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_4^2 \mathcal{C}_3^{-\frac{2}{p^+(1+s)}},$$

obtemos

$$\left\|u(t)\right\|_2^2 \leq \mathcal{C}_5 E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t)). \tag{4.81}$$

Usando o teorema fundamental do cálculo, para qualquer $h \geq t$, segue das Eq.(4.62), Eq.(4.80) e Eq.(4.81) que

$$\begin{aligned}
\int_t^h E(u(\tau))d\tau &\leq \mathcal{C}_2 \int_t^h I(u(\tau))d\tau \\
&\leq -\frac{\mathcal{C}_2}{2}\int_t^h \frac{d}{d\tau}\left\|u(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\
&= \frac{\mathcal{C}_2}{2}\left(\left\|u(t)\right\|_2^2 - \left\|u(h)\right\|_2^2\right) \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_5}{2}\left\|u(t)\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_5}{2} E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t)).
\end{aligned}$$

Fazendo $h \to \infty$, e tomando $\mathcal{C}_6 = \dfrac{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_5}{2}$, obtemos

$$\int_t^\infty E(u(\tau))d\tau \leq \mathcal{C}_6 E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t)). \tag{4.82}$$

Por aproximação, sem perda de generalidade, podemos supor que u seja uma solução suficientemente suave para o problema (1.1). Considere $v = u_t$ na Definição 4.1, então temos

$$\langle u_t, u_t\rangle + \mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\left\langle |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u_t\right\rangle = \left\langle |u|^{p(x)-2}u, u_t\right\rangle. \tag{4.83}$$

Assim da Eq.(4.83), segue que

$$\mathcal{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla u_t\ dt - \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uu_t\ dt = -\left\|u_t(t)\right\|_2^2.$$

Logo, temos

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\left\|u_t(t)\right\|_2^2 \leq 0.$$

Portanto, concluímos que $E(u(t))$ é não-crescente com relação a t.

Temos então dois casos a serem analisados.

Caso 1 : $p^+ > \dfrac{2}{1+s}$.

Considere a função $H(t) := E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t))$. Então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que a Eq.(4.82) pode ser escrita da seguinte forma

$$\int_t^\infty H^{\frac{p^+(1+s)}{2}}(u(t))d\tau \leq \frac{1}{\alpha}H^{\frac{p^+(1+s)}{2}-1}(0)H(t),$$

onde

$$\alpha = \frac{E^{1-\frac{2}{p^+(1+s)}}}{\mathcal{C}_6}.$$

Considere $F(t) = H(t)$ e uma constante $\sigma > 0$ dada por

$$\sigma = \frac{p^+(1+s)}{2} - 1.$$

Note que estamos diante do Lema 2.22 item (ii), ou seja, temos que

$$H(t) \leq H(0)\left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma\alpha t}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

então

$$E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t)) \leq E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u_0)\left(\frac{1+\frac{p^+(1+s)}{2}-1}{1+\left(\frac{p^+(1+s)}{2}-1\right)\alpha t}\right)^{\frac{1}{\frac{p^+(1+s)-1}{2}}}. \tag{4.84}$$

Usando a Eq.(4.84) podemos concluir que

$$E(u(t)) \leq E(u_0)\left(\frac{p^+(1+s)}{2+(p^+(1+s)-2)\alpha t}\right)^{\frac{p^+(1+s)}{p^+(1+s)-2}}.$$

Caso 2 : $p^+ \leq \dfrac{2}{1+s}$.

Sendo $E(u(t)) \leq E(u_0)$, então existe uma constante $\beta > 0$ tal que pela Eq.(4.82) temos

$$\begin{aligned}\int_t^\infty E(u(\tau))d\tau &\leq \mathcal{C}_6 E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u(t)) \\ &\leq \mathcal{C}_6 E^{\frac{2}{p^+(1+s)}}(u_0)E^{-1}(u_0)E(u(t)) \\ &= \mathcal{C}_6 E^{\frac{2}{p^+(1+s)}-1}(u_0)E(u(t)) \\ &= \frac{1}{\beta}E(u(t)),\end{aligned}$$

onde

$$\beta = \mathcal{C}_6^{-1}E^{1-\frac{2}{p^+(1+s)}}(u_0).$$

Considemos agora $F(t) = E(u(t))$ e uma constante $\sigma = 0$.

Note que aqui, estamos diante do Lema 2.22 item (i) isso nos permite concluir que

$$E(u(t)) \leq E(u_0)^{e-\beta t}.$$

Assim, concluímos a prova □

5 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho fizemos um estudo sobre o uma classe de equações parabólicas do tipo Kircchoff com expoentes variáveis no espaço de Sobolev $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Este resultado foi publicado recentemente em [16]. No primeiro momento, discutimos algumas estimativas para a função de Kirchhoff, resultados de suma importância no decorrer do trabalho. Nesse sentido, também estávamos interessados em algumas propriedades envolvendo os funcionais energia e Nehari. Este trabalho baseia-se em três teoremas importantes: o primeiro diz a respeito da existência e unicidade de solução fraca local, descrito no Teorema 4.7. Para a discussão de tais resultados, utilizamos o método de Galerkin, especial o teorema de Peano para obter a existência e, a desigualdade de Gronwall para obter a unicidade. Também destacamos outras desigualdades de suma importância, a saber: Gagliardo-Niremberg, Sobolev e Young. No segundo momento, estamos interessados na discussão do problema para o caso em que a energia inicial é subcrítica. O segundo teorema (Teorema 4.8) assegura a existência maximal de solução não global. O terceiro teorema (Teorema 4.9) garante a existência de solução fraca global que admite um decaimento envolvendo o funcional energia. Para isso, utilizamos o método de poço potencial para discutir ambos os resultados.

Como uma próxima etapa da pesquisa, podemos considerar uma nova classe de problemas parabólicos do tipo $p(x)$-Kirchhoff dado por

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{M}\left(\widehat{\mathcal{A}}(u)\right)\Delta_{p(x)}u = |u|^{m(x)-2}u + \lambda f(x,u), & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e condição inicial $u_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e $\lambda > 0$. O operador $\widehat{\mathcal{A}} : X \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\widehat{\mathcal{A}}(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} A\left(|\nabla u|^{p(x)}\right) dx$$

onde X é um espaço de Banach e

$$A(t) = \int_0^t a(k)dx$$

sendo $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função é de classe C^1. Além disso, a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz algumas condições apropriadas. Certamente outros problemas motivados pela Eq.(5.1), serão discutidos, de modo especial, envolvendo o Laplaciano fracionário generalizado [12].

Bibliografia

[1] A. Aberqi et al. “Blow-up and global existence for a new class of parabolic $p(x,\cdot)$-Kirchhoff equation involving double phase operator”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 542.2 (2025), p. 128807.

[2] R. Aboulaich, D. Meskine e A. Souissi. “New diffusion models in image processing”. Em: *Comput. Math. Appl.* 56.4 (2008), pp. 874–882.

[3] S. N. Antontsev e J. Rodrigues. “On stationary thermo-rheological viscous flows”. Em: *Ann. Uni. Ferrara, Sez. 7* 52.1 (2006), p. 19.

[4] L. Arnold et al. *Dynamics of partial differential equations on thin domains.* Springer, 1995.

[5] J. M. Arrieta e M. C. Pereira. “Homogenization in a thin domain with an oscillatory boundary”. Em: *J. Math. Pures Appl.* 96.1 (2011), pp. 29–57.

[6] J. M. Arrieta e M. C. Pereira. “The Neumann problem in thin domains with very highly oscillatory boundaries”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 404.1 (2013), pp. 86–104.

[7] J. M. Arrieta et al. “Semilinear parabolic problems in thin domains with a highly oscillatory boundary”. Em: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 74.15 (2011), pp. 5111–5132.

[8] G. Autuori e P. Pucci. “Asymptotic stability for Kirchhoff systems in variable exponent Sobolev spaces”. Em: *Complex Var. Elliptic Equ.* 56.7-9 (2011), pp. 715–753.

[9] E. M. Bollt et al. “Graduated adaptive image denoising: local compromise between total variation and isotropic diffusion”. Em: *Adv. in Comput. Math.* 31 (2009), pp. 61–85.

[10] M. Boukrouche e I. Ciuperca. “Asymptotic behaviour of solutions of lubrication problem in a thin domain with a rough boundary and Tresca fluid-solid interface law”. Em: *Quarterly Appl. Math.* 64.3 (2006), pp. 561–591.

[11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* 2011.

[12] J. Cen, J. Vanterler da C. Sousa e S. Zeng. “Some new results on the truncation in fractional μ-Sobolev-Slobodetskii space $\mathcal{H}_{\mu}^{\alpha/2}(\xi)(\Lambda)$”. Em: *Georgian Math. J.* 0 (2025).

[13] J. H. Chabrowski. *Variational methods for potential operator equations: with applications to nonlinear elliptic equations.* Vol. 24. Walter de Gruyter, 2011.

[14] Y. Chen, S. Levine e M. Rao. “Variable exponent, linear growth functionals in image restoration”. Em: *SIAM J. Appl. Math.* 66.4 (2006), pp. 1383–1406.

[15] N. T. Chung. “On a class of $p(x)$-Kirhhoff type problems with robin boundary conditions and indefinite weights”. Em: *TWMS J. Appl. Eng. Math.* 10.2 (2020).

[16] Q. V. Chuong, L. C. Nhan e L. X. Truong. “Asymptotic behavior of solutions for a new general class of parabolic Kirchhoff type equation with variable exponent sources”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 527.2 (2023), p. 127446.

[17] G. Dai e R. Hao. “Existence of solutions for a $p(x)$-Kirchhoff-type equation”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 359.1 (2009), pp. 275–284.

[18] X. Dai et al. “Anomalous pseudo-parabolic Kirchhoff-type dynamical model”. Em: *Adv. Nonlinear Anal.* 11.1 (2021), pp. 503–534.

[19] F. M. Dannan. “Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 108.1 (1985), pp. 151–164.

[20] L. Diening et al. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.* Springer, 2011.

[21] H. Ding e J. Zhou. “Global existence and blow-up for a parabolic problem of Kirchhoff type with logarithmic nonlinearity”. Em: *Appl. Math. Optim.* 83 (2021), pp. 1651–1707.

[22] H. Ding e J. Zhou. “Global existence and blow-up of solutions to a nonlocal Kirchhoff diffusion problem”. Em: *Nonlinearity* 33.11 (2020), p. 6099.

[23] X. Fan, J. Shen e D. Zhao. “Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 262.2 (2001), pp. 749–760.

[24] E. F. S. Feitosa et al. “Existence and multiplicity for fractional differential equations with $m(\xi)$-Kirchhoff type-equation”. Em: *Comput. Appl. Math.* 44.1 (2025), p. 19.

[25] Y. Fu e M. Xiang. “Existence of solutions for parabolic equations of Kirchhoff type involving variable exponent”. Em: *Appl. Anal.* 95.3 (2016), pp. 524–544.

[26] E. Gagliardo. “Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili”. Em: *Ricerche Mat.* 8 (1959), pp. 24–51.

[27] B. Guo et al. “Classification of blow-up and global existence of solutions to an initial Neumann problem”. Em: *J. Differ. Equ.* 340 (2022), pp. 45–82.

[28] P. Hájek e M. Johanis. “On Peano’s theorem in Banach spaces”. Em: *J. Differ. Equ.* 249.12 (2010), pp. 3342–3351.

[29] M. K. Hamdani, N. T. Chung e D. D. Repovš. “New class of sixth-order nonhomogeneous $p(x)$-Kirchhoff problems with sign-changing weight functions”. Em: *Adv. Nonlinear Anal.* 10.1 (2021), pp. 1117–1131.

[30] X. Han e G. Dai. “On the sub-supersolution method for $p(x)$-Kirchhoff type equations”. Em: *J. Inequal. Appl.* 2012 (2012), pp. 1–11.

[31] Y. Han e Q. Li. “Threshold results for the existence of global and blow-up solutions to Kirchhoff equations with arbitrary initial energy”. Em: *Comput. Math. Appl.* 75.9 (2018), pp. 3283–3297.

[32] Y. Han et al. “Upper and lower bounds of blow-up time to a parabolic type Kirchhoff equation with arbitrary initial energy”. Em: *Comput. Math. Appl.* 76.10 (2018), pp. 2477–2483.

[33] A. Khaldi, A. Ouaoua e M. Maouni. “Global existence and stability of solution for a nonlinear Kirchhoff type reaction-diffusion equation with variable exponents”. Em: *Math. Bohem.* 147.4 (2022), pp. 471–484.

[34] G. Kirchhoff. “Mechanik, teubner, leipzig”. Em: *Kirchhoff G* (1883).

[35] Howard A Levine. “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + Fu$”. Em: *Trans. Am. Math. Soc.* 192 (1974), pp. 1–21.

[36] F. Li, Z. Li e L. Pi. “Variable exponent functionals in image restoration”. Em: *Appl. Math. Comput.* 216.3 (2010), pp. 870–882.

[37] H. Li. “Blow-up of Solutions to a p-Kirchhoff-Type Parabolic Equation with General Nonlinearity”. Em: *J. Dyn. Control Syst.* 26 (2020), pp. 383–392.

[38] J. Li e Y. Han. “Global existence and finite time blow-up of solutions to a nonlocal p-Laplace equation”. Em: *Math. Model. Anal.* 24.2 (2019), pp. 195–217.

[39] M. Liao, B. Guo e X. Zhu. “Bounds for blow-up time to a viscoelastic hyperbolic equation of Kirchhoff type with variable sources”. Em: *Acta Appl. Math.* 170.1 (2020), pp. 755–772.

[40] J.L. Lions. “Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires”. Em: *Dunford/Gauthier-Villars* (1969).

[41] X. Mingqi, V. D. Rădulescu e B. Zhang. “Nonlocal Kirchhoff diffusion problems: local existence and blow-up of solutions”. Em: *Nonlinearity* 31.7 (2018), p. 3228.

[42] L. Nirenberg. “On elliptic partial differential equations”. Em: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche* 13.2 (1959), pp. 115–162.

[43] N. Pan, B. Zhang e J. Cao. “Degenerate Kirchhoff-type diffusion problems involving the fractional p-Laplacian”. Em: *Nonlinear Anal., Real World Appl.* 37 (2017), pp. 56–70.

[44] L. E. Payne e D. H. Sattinger. “Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations”. Em: *Isr. J. Math.* 22.3 (1975), pp. 273–303.

[45] I. Pažanin e F. J. Suárez-Grau. “Effects of rough boundary on the heat transfer in a thin-film flow”. Em: *Comptes Rendus Mécanique* 341.8 (2013), pp. 646–652.

[46] K. R. Rajagopal e M. Ruzivcka. “Mathematical modeling of electrorheological materials”. Em: *Contin. Mech. Thermodyn.* 13.1 (2001), pp. 59–78.

[47] Michael Ruzicka. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory.* Springer, 2007.

[48] M. Luiz C. Salatti et al. “Uma classe de problemas de Dirichlet do tipo p (x)-laplaciano”. Em: (2019).

[49] David H Sattinger. “On global solution of nonlinear hyperbolic equations”. Em: *Arch. Ration. Mech. Anal.* 30 (1968), pp. 148–172.

[50] R. P. Silva. “A note on resolvent convergence on a thin domain”. Em: *Bull. Australian Math. Soc.* 89.1 (2014), pp. 141–148.

[51] J. Vanterler da C. Sousa. “On the fractional pseudo-parabolic $p(\xi)$-Laplacian equation”. Em: *Bull. Sci. Math.* 197 (2024), p. 103519.

[52] J. Vanterler da C. Sousa, El-H. Hamza e A. Elhoussain. “A singular generalized Kirchhoff-double-phase problem with p-Laplacian operator”. Em: *J. Fixed Point Theory Appl.* 27.1 (2025), p. 2.

[53] J. Vanterler da C. Sousa, K. D. Kucche e J. J. Nieto. “Existence and Multiplicity of Solutions for Fractional $\kappa(\xi)$-Kirchhoff-Type Equation”. Em: *Qual. Theory Dyn. Sys.* 23.1 (2024), p. 27.

[54] J. Vanterler da C. Sousa, L. Mbarki e H. Jafari. “Results for double phase problem with fractional differential equations”. Em: *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 140 (2025), p. 108393.

[55] C. Vetro. “Variable exponent $p(x)$-Kirchhoff type problem with convection”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 506.2 (2022), p. 125721.

[56] A. S. Wineman e K. R. Rajagopal. “On constitutive equations for electrorheological materials”. Em: *Contin. Mech. Thermodyn.* 7 (1995), pp. 1–22.