



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DENILSON NOBRE DE MATOS JÚNIOR

**Um estudo do modelo Black-Scholes para precificação de opções
europeias**

São Luís - MA

2021

DENILSON NOBRE DE MATOS JÚNIOR

**Um estudo do modelo Black-Scholes para precificação de
opções europeias**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal do Maranhão como requi-
sito parcial para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João De Deus Mendes Da
Silva

São Luís - MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Matos Júnior, Denilson Nobre de.

Um estudo do modelo Black-Scholes para precificação de opções europeias / Denilson Nobre de Matos Júnior. - 2021. 71 f.

Orientador(a): João de Deus Mendes da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2021.

1. Black-Scholes. 2. Movimento Browniano. 3. Opções.
I. Silva, João de Deus Mendes da. II. Título.

DENILSON NOBRE DE MATOS JÚNIOR

Um estudo do modelo Black-Scholes para precificação de opções europeias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de Julho de 2021.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira De Araújo (Examinador Interno)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello (Examinador Externo)
Universidade Federal do Mato Grosso - UFMT

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus por te me concedido o dom da vida e perseverança para transpor todos os obstáculos que surgiram ao longo desta caminhada.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais que sempre estiveram dispostos a ajudar no que for necessário, ao meu pai Denilson Nobre de Matos que sempre buscou me dar condições suficientes para alcançar meus objetivos, a minha mãe Olga Maria Moraes de Matos que sempre esteve do meu lado me incentivando nos bons e maus momentos.

A minha irmã, Anne Karoline que sempre me deu apoio e incentivo para sempre ser melhor a cada dia e por ajudar no estudo dessa dissertação.

Aos professores pelos ensinamentos, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o meu enriquecimento pessoal e profissional, em especial ao meu Orientador João de Deus Mendes da Silva.

Aos meus vizinhos, que tornaram-se família e que conviveram comigo em grande parte da minha vida, Guilherme Silva, Mateus Araújo, Leonardo Santos, Danilo Araújo, Arianne Moraes, Adilene Moraes, João Abel, Rodrigo Vieira, Bruno Araújo, Gabriel Coutinho, Daniel Tadeu e Tiago Coutinho.

A todos meus amigos do ensino fundamental e médio, que até hoje estão presente na minha vida compartilhando momentos de alegrias nos piores momentos, Caio Valois, Laiza Oliveira, Andre Xangai, Mikael Paiva, Fabio Maia, Luciane Medeiros, Emily Hanna, Ananda Brenda, Erica Carvalho, Matheus Sousa, Vinicius Costa, Joaquim Francisco, Leandro Whariston e Estevam Travassos.

A todos os meus amigos do curso de Ciências Exatas, em especial ao grupo do estágio: Adriano Ribeiro, Gabriel Gomes e Ranney Ritchie, pelos momentos descontraídos, e estudos e por estarem sempre estavam dispostos a ajudar uns aos outros.

Enfim, sou grato a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização este trabalho.

”O risco vem de não saber o que está fazendo”

(Warren Buffet)

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo apresentar a fórmula do preço de uma opção de compra europeia pelo modelo de Black-Scholes. Inicialmente aborda-se alguns tópicos do mercado financeiro, com o propósito de trabalhar com mercado de derivativos, mais especificamente na teoria das opções. Com o auxílio de conceitos de probabilidade pode-se modelar o preço de um ativo subjacente, por exemplo, uma ação. Ao analisar as hipóteses expostas ao longo do trabalho, tais como, a volatilidade e taxas de juros constantes, obtém-se a equação de Black-Scholes. Ao resolver a equação, chega-se ao objetivo do trabalho. Por fim, é mostrado que o modelo possui algumas ressalvas em relação à volatilidade e períodos a longo prazo, dessa forma, espera-se que este trabalho ajude a convencer mais pessoas a aderir à teoria das finanças modernas matematicamente.

Palavras-chave: Black-Scholes, Movimento Browniano, Opções.

ABSTRACT

This work aimed to present the price formula for a European call option using the Black-Scholes model. Initially, some topics of the financial market are addressed, with the purpose of working with the derivatives market, more specifically in the theory of options. With the aid of probability concepts, you can model the price of an underlying asset, for example, a stock. When analyzing the hypotheses exposed throughout the work, such as volatility and constant interest rates, the black-scholes equation is obtained. When solving the equation, the objective of the work is reached. Finally, it is shown that the model has some caveats in relation to volatility and long-term periods, so it is hoped that this work will help to convince more people to adhere to the theory of modern finance mathematically.

Keywords: Black-Scholes, Brownian Movement, Options.

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Preliminares	13
1.1 Mercado Financeiro	14
1.2 Tipos de mercados	16
1.2.1 Mercado de Capitais: Derivativos	17
2 Teoria das Opções	19
2.1 Opções	19
2.2 Fatores que afetam o preço das opções	23
2.2.1 Preço da ação e Preço de Exercício	24
2.2.2 Volatilidade	26
2.2.3 Taxa livre de risco	26
2.3 Limites superiores e inferiores	26
2.3.1 Opção de compra	28
2.3.2 Opção de venda	29
2.4 Investidores(<i>Traders</i>): Cobertores de Riscos(<i>Hedgers</i>), Especuladores e Arbitradores	30
2.4.1 Sem Riscos(<i>Hedgers</i>)	32
2.4.2 Especuladores	34
2.4.3 Arbitragem	35
3 Medida e Probabilidade	36
3.1 Espaço com Medida	36

3.1.1	Álgebra e Sigma Álgebra	36
3.2	Espaço de Probabilidade	38
3.2.1	Variável Aleatória	39
3.2.2	Valor esperado e variância	39
3.2.3	Distribuição Normal e LogNormal	40
3.2.4	Processos Estocásticos	42
4	Modelo de Black-Scholes	46
4.1	Precificar o preço de ativos	46
4.2	Modelos Pré-Black-Scholes-Merton	51
4.3	Hipóteses do modelo	53
4.4	Obtendo a equação diferencial de Black-Scholes	54
4.5	A fórmula do preço de uma opção de compra européia	56
4.6	Exemplo usando a fórmula de Black Scholes	65
5	Conclusão	67
	Referências	70

Introdução

Modelagem matemática é um ramo da matemática que estuda forma de modelar fenômenos físicos e naturais do mundo, é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento destes, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia, engenharias entre outras. A modelagem matemática consiste na atividade (ou tentativa) de descrever matematicamente um fenômeno.

Neste trabalho, a modelagem estará relacionada a área de economia, mais especificamente ao mercado de derivativos, em particular opções .

Com o crescimento do mercado de derivativos, estudá-lo tornou-se essencial para um investidor de perfil moderado/agressivo conseguir manter-se num ambiente bastante volátil como é o mercado de renda variável, com o objetivo de obter menos perdas neste mercado, a matemática vem sendo usada na tentativa de prever a movimentação do mercado com algum nível de acerto. Primeiro, surgiram modelos matemáticos com o objeto de prever a movimentação do preço ações, que podem ser visto nos trabalhos de Louis Bachelier ([3]), Black-Scholes-Merton([5]), etc . Após o surgimento do mercado de derivativos, especular no mercado de renda variável trouxe a possibilidade de ganhos altos e várias novas formas de proteção, a partir disso, investidores mais técnicos buscaram formas de modelar esse mercado.

Um dos problemas interessantes do mercado de derivativos é como definir o preço de uma opção, isto é, dada uma ação hoje, no futuro essa ação pode valorizar ou desvalorizar, com o mercado oferecendo um preço de exercício, qual o valor correto da opção de compra da ação?. Esses termos podem ser novos para indivíduos que não estudam economia, como este trabalho está sendo destinado a estudantes de matemática, iremos fazer um capítulo falando sobre conceitos básicos do mercado financeiro, antes de entrar na teoria das opções. Este trabalho tem como base o primeiro capítulo (preliminares) da tese do Everaldo Mello [14], nele a demonstração da fórmula do preço de opção europeia pelo modelo de Black-Scholes de está feita modo resumido.

Nosso trabalho está organizado em 5 capítulos, o primeiro capítulo fazemos uma breve introdução sobre mercado financeiro, para preparar o leitor que não possua familiaridade com os termos utilizados no mercado financeiro.

O segundo capítulo abordamos sobre a teoria das opções, definindo o que é uma opção, os fatores que afetam os preços de uma opção, tais como a volatilidade e o preço de uma ação. Comentar sobre o que é arbitragem e especulação e como usa-los com opções.

O terceiro capítulo dedicamos aos conceitos de medida e probabilidade necessários para o bom entendimento do Lema de Ito(Movimento Browniano), alguns deles são a esperança, variância, processos estocásticos, etc.

O quarto capítulo apresentamos o modelo de Black-Scholes, no qual veremos que se trata de uma derivação da equação de calor, inicialmente será comentado sobre as hipóteses do modelo e por fim, como utilizar a formula de black scholes para criar a formula do preço de uma opção de compra europeia.

O último capítulo é dedicado às considerações finais do trabalho.

1 Preliminares

Este trabalho tem por finalidade estudar o problema da formulação de preços de um opção de compra europeia. O estudo desse modelo está relacionado principalmente volatilidade, pois o mercado de derivativos é um mercado de renda variável, por este motivo é um mercado de difícil previsão e assim, é estudado como um processo estocástico . ”Conforme Sassatani (1999), um dos aspectos fundamentais no estudo de Finanças e que revolucionou a maneira como esta ciência é estudada e compreendida no mundo moderno é a incerteza que está relacionada com o risco, ou seja, quanto maior a volatilidade do mercado, maior é o risco. O papel da incerteza na tomada de decisões é a grande preocupação na teoria das finanças contemporânea. De acordo com Siqueira(1999), pode-se dizer que a teoria de finanças moderna nasceu em virtude da preocupação dos acadêmicos de buscar uma estruturação conceitual e lógica que auxiliasse a tomada de decisões em condições de incerteza e de risco, isto é, a volatilidade está interligada totalmente com o mercado, e conseguir ter uma noção de como o mercado irá oscilar em determinado período é essencial para um investidor.

Antes de surgir o Modelo de Black-Scholes-Merton, houveram outros modelos, tais como o modelo de Bachelier(1900)[3], de Sprenkel e o Boness. Todos esses modelos foram criados na tentativa de resolver o problema da formulação do preço de uma opção europeia. Cada um desses modelos tiveram suas objeções, até chegar por fim ao modelo de Black-Scholes, sendo considerado a partir disso o modelo mais usado na teoria das finanças modernas.

O modelo de Black-scholes é basicamente utilizado para determinar o preço da opção europeia sobre uma ação.

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos elementares que serão necessários no decorrer deste trabalho. Iniciamos abordando o problema da fórmula do preço da opção de compra europeia e alguns fundamentos do mercado financeiro, dando algumas definições que serão úteis ao longo do trabalho.

1.1 Mercado Financeiro

Em economia e finanças, denomina-se como **mercado financeiro** todo o universo que envolve as operações de compra e venda de ativos financeiros, tais como valores mobiliários (ações, obrigações, etc.), mercadorias (pedras preciosas, commodities, etc.) e câmbio. É todo o ambiente em que ocorrem as operações de investimentos financeiros. Abaixo definiremos alguns termos essenciais do mercado financeiro tirados da tese [14].

Um ativo ou bem (*asset*) é algo capaz de produzir fluxo monetário para o proprietário. É qualquer bem com valor comercial ou valor de troca pertencente a uma sociedade, instituição ou pessoa física. Exemplos: imóveis, dinheiro aplicado, ações, jóias, etc.

Valor mobiliário (*security*) é um instrumento que indica participação em uma companhia (ações), relacionamento de um credor com uma empresa ou entidade governamental (obrigações), ou direitos de propriedades representados por instrumentos como opção, direito de subscrição e bônus de subscrição.

Ação (*share*) é o valor mobiliário emitido pelas companhias e representativo de parcela do capital. É o documento que indica ser o seu possuidor o proprietário de certa fração de determinada empresa. As ações representam a menor fração do capital social destas companhias, ou seja, é o resultado da divisão do capital social em partes iguais. Quando emitidas por companhias abertas ou assemelhadas, são negociados em bolsa de valores ou no chamado mercado de balcão. O investidor torna-se, portanto, sócio da empresa da qual adquiriu ações e os poderes a ele atribuídos são limitados pelo tipo de ação que comprou e também pela quantidade de ações que possui.

Mercadorias (*commodities*) são produtos como cereais, metais e alimentos negociados em uma bolsa de mercadorias ou no mercado à vista.

Dividendo (*dividend*) é a parcela do lucro da empresa que é distribuída aos acionistas, de acordo com a quantidade de ações possuídas. Normalmente, é resultado dos lucros obtidos por uma empresa.

Rentabilidade ou retorno (*return*) é a medida de ganho financeiro nominal sobre o total do investimento, expressa em termos percentuais.

Risco (*risky*) é o grau de incerteza da rentabilidade de um investimento. Exem-

plo: afirmar que um investimento é de alto risco significa que temos pouca chance de prever, com precisão, a rentabilidade deste investimento. Em contrapartida, esse investimento oferece possibilidade de retorno superior a um investimento conservador. No jargão financeiro, a palavra “risco” está sempre associada à probabilidade de ganhos ou perdas acima ou abaixo da média de mercado. O investidor deve estar atento a essa diferença, porque na linguagem cotidiana a palavra “risco” muitas vezes é usada para indicar a possibilidade de perda (diminuição) ou manutenção do estado atual, excluindo a possibilidade de ganho (retorno ou crescimento).

Obrigações ou títulos (*bonds*) é o reconhecimento formal, por escrito, de uma dívida, pelo qual uma das partes promete pagar certa importância, em determinada data futura, e mais juros, em datas pré-fixadas, até o vencimento.

Ativo financeiro (*financial asset*) é qualquer título representativo de parte patrimonial ou dívida. Exemplos: títulos da dívida pública, contratos derivativos, ações, etc.

Tendência (*drift*), que representamos pela letra μ , é a taxa de retorno esperada para um ativo com relação a uma medida de probabilidade.

Volatilidade (*volatility*), que representamos pela letra σ , é um indicador que mede o risco de um determinado investimento. Quanto maior a volatilidade, maior o risco para o investidor, comparativamente aos demais fundos do segmento em questão. O cálculo deste indicador considera a dispersão para cima ou para baixo da rentabilidade diária em relação à média da rentabilidade em determinado período (desvio padrão). Mede, também, o grau médio de variação das cotações de um título ou fundo de investimento em um determinado período de tempo. Alta volatilidade significa que o valor da cotação apresenta forte variação.

Banco ideal é o banco onde as taxas de juros de depósito e empréstimo são iguais e não há taxas de serviço e de transação. As taxas de juros também independem do montante do principal.

Mercado perfeito é um mercado sem custos de transação e leilões; nele todos os acordos são cumpridos; há possibilidade de comprar/vender qualquer montante de cada valor mobiliário; as transações ocorrem continuamente e há a possibilidade da venda a descoberto ilimitada; há ausência de impostos; a liquidação é instantânea, a transação

ocorre à vista (sem parcelamento) e existe um banco ideal constante. No caso das ações, não se considera o dividendo, e dos bonds, o cupom.

Carteira ou Portfólio é um conjunto de títulos e valores mantido por um fundo mútuo ou por um investidor. É uma carteira de títulos, isto é, um conjunto de títulos de rendas fixa e variável, de propriedade de pessoas físicas ou jurídicas.

1.2 Tipos de mercados

O mercado financeiro pode ser dividido em quatro grandes mercados:

- **Mercado de capitais:** é um meio de distribuição de valores mobiliários, que tem o objetivo de gerar liquidez aos títulos emitidos pelas empresas e viabilizar o seu processo de capitalização. Isto quer dizer que o objetivo é direcionar os recursos financeiros da sociedade para o comércio, a indústria e outras atividades econômicas, assim remunerando melhor o investidor. Fazem parte desta área a compra e a venda de ações, debêntures, etc.;

- **Mercado de crédito:** atuam neste segmento diversas instituições financeiras e não financeiras prestando serviços de intermediação de recursos de curto, médio e longo prazo para agentes deficitários que necessitam de recursos para consumo ou capital de giro. É o segmento onde ocorrem operações de empréstimo, arrendamento, financiamento, etc.;

- **Mercado de câmbio:** é onde são negociadas as trocas de moedas estrangeiras (dólar, euro, yuan, etc.)

- **Mercado monetário:** é o mercado onde se concentram as operações para controle da oferta de moeda e das taxas de juros de curto e curtíssimo prazo com vistas a garantir a liquidez da economia. Abrange toda a rede de entidades ou órgãos financeiros que negociam títulos ou valores, concedendo empréstimos a empresas ou particulares a curto prazo, em troca do pagamento de juros.

Neste trabalho o foco será dado ao mercado de capitais com o objetivo de trabalhar com os derivativos.

1.2.1 Mercado de Capitais: Derivativos

Nos últimos anos o mercado de derivativos tornaram-se cada vez mais importantes no mercado financeiro, pois os mesmos podem ser usados para proteção, especulação ou arbitragem(esses conceitos serão falados mais abaixo), trazendo consigo uma leque de opções para um investidor organizar sua carteira financeira.

Definição 1.1. Um **derivativo** pode ser definido como um instrumento financeiro cujo valor depende(ou deriva) dos valores de outras variáveis subjacentes mais básicas. Muitas vezes, as variáveis por trás dos derivativos são os preços de ativos negociados. Uma opção sobre ações, por exemplo, é um derivativo cujo valor depende do preço de uma ação.

As negociações envolvendo derivativos podem ocorrer tanto no mercado de balcão quando na bolsa.

- **Mercado de Balcão:** Os mercados de balcão (OTC, over-the-counter) são mercados nos quais as empresas realizam transações de derivativos sem envolver uma bolsa. Tradicionalmente, o risco de crédito caracteriza os mercados de derivativos de balcão. Pense em duas empresas, A e B, que realizaram diversas transações de derivativos. Se A inadimpe quando o valor líquido das transações em circulação com B é positivo, B provavelmente sofrerá uma perda. Da mesma forma, se B inadimpe quando o valor líquido das transações em circulação com A é positivo, a empresa A provavelmente sofrerá uma perda. Na tentativa de reduzir o risco de crédito, o mercado de balcão tomou emprestadas algumas ideias dos mercados de bolsa. Em suma, o OTC, possui inexistência de um espaço físico de negociação, flexibilidade quanto aos registros das transações, possibilidade de negociação de ativos que não estão habilitados para negociação em Bolsa.

- **Mercado da Bolsa:** Diferente do mercado de OTC, o mercado da bolsa é mais organizado e não corre risco de crédito, possui estruturação de uma área de relação com as pessoas que investem, adoção de práticas de governança corporativa, apresentação de demonstrações financeiras auditadas etc.

Tipos de derivativos:

- **Contrato a termo:** é um contrato para comprar ou vender um ativo em uma determinada data futura por um preço específico. Ele pode ser diferenciado de um

contrato à vista (ou à vista), que é um contrato para comprar ou vender um ativo quase imediatamente. Um contrato a termo é negociado no mercado de balcão, geralmente entre duas instituições financeiras ou entre uma instituição financeira e um de seus clientes.

Uma das partes de um contrato a termo assume a posição **comprada** (*long*) e concorda em comprar o ativo subjacente em uma data futura específica por determinado preço. A outra parte assume a posição **vendida** (*short*) e concorda em vender o ativo na mesma data pelo mesmo preço.

O resultado de uma posição comprada é:

$$S_T - K$$

em que:

S_T é o preço à vista do ativo no vencimento

K é o preço de entrega

Exemplos 1.2.1. Considere um contrato a termo que obriga a empresa a comprar R\$10.000 por R\$12.000 em 6 meses. Suponha que ao afinal desses 6 meses, o real tenha valorizado e a taxa de câmbio tenha aumentado, digamos para R\$13.000, temos:

$$S_T = 13.000$$

$$K = 12.000$$

$$S_T - K = 1.000$$

Agora, se a taxa de câmbio tivesse caído para R\$11.000, teríamos

$$11.000 - 12.000 = -1.000$$

- **Contrato Futuro:** um contrato futuro é um acordo entre duas partes de comprar ou vender um ativo em uma determinada data no futuro por um preço específico. Ao contrário dos contratos a termo, os contratos futuros normalmente são negociados em uma bolsa e seus contratos são ajustados diariamente. Para possibilitar a negociação, a bolsa especifica certas características padronizadas do contrato. Como as duas partes do contrato não se conhecem necessariamente, a bolsa também oferece um mecanismo que dá a ambas uma garantia de que o contrato será honrado.

No capítulo seguinte vamos definir um dos principais conceitos que utilizaremos no trabalho, o conceito de opção, que também é um tipo de derivativo.

2 Teoria das Opções

Neste capítulo será abordado a definição de opções, seus tipos, fatores que afetam o preços das opções e exemplos de tipos de investidores de opções.

2.1 Opções

As opções são derivativos, isto é, são instrumentos financeiros negociáveis no mercado (em bolsas de valores ou mercado de balcão), cujos valores dependem, ou derivam de outros ativos. Existem dois tipos de opção: Opção de compra/ Opção de Venda

Definição 2.1. Uma **opção de compra** (*call*) dá ao titular o direito de comprar o ativo subjacente até uma determinada data por um preço específico.

Definição 2.2. Uma **opção de venda** (*put*) dá ao titular o direito de vender o ativo subjacente até uma determinada data por um preço específico.

Um **comprador** de uma opção, de call ou put é chamado de **titular**. O **vendedor** de uma opção, de compra ou venda é chamado de **lançador**. O ativo o qual a opção está sendo negociada é chamada de **ativo subjacente**. O preço pelo qual a opção é negociada entre as partes é chamado de **prêmio** da opção.

Definição 2.3. Chamamos K de **preço de exercício** ou *strike price* o preço pré-determinado da opção; a data que a opção expira é chamada de **data de vencimento** ou **maturidade**.

Existem dois tipos de opções, as americanas e as europeias, mas ambas podem ser operadas num mesmo mercado (por exemplo, ambas podem ser encontradas na bolsa de valores).

Definição 2.4. Chamamos de **opções americanas** aquelas na qual o titular de uma opção pode exercer-la a qualquer momento até sua data de vencimento

Definição 2.5. Chamamos de **opções europeias** aquelas na qual seu titular só pode exercer-la na data de vencimento.

Observação 2.1.1. É preciso enfatizar que uma opção dá ao titular o direito de fazer algo, mas ele não precisa exercer esse direito. É isso que diferencia as opções dos contratos futuros e a termo, nos quais o titular é obrigado a comprar ou vender o ativo subjacente. Ao firmar um contrato a termo ou futuro o investidor não tem nenhum custo, diferente de adquirir uma opção em que a custo para quem está na posição de comprador e um prêmio para quem está na posição de vendedor.

Uma curiosidade é que a maioria das opções negociadas em bolsas são americanas e um contrato geralmente se refere à compra ou venda de 100 ações. Em geral, as opções europeias são mais fáceis de analisar do que as americanas; algumas propriedades de uma opção americana frequentemente são deduzidas a partir daquelas de sua contraparte europeia.

Definição 2.6. O preço das opções se divide em duas partes: o **valor intrínstico**(v_i) e o **valor extrínstico**(v_e)

$$c = v_{ic} + v_{ec}$$

$$p = v_{ip} + v_{ep}$$

em que:

c = opção de compra europeia

p = opção de venda europeia

Definição 2.7. (Valor Intrínstico) Para uma call, o valor intrínstico é a diferença entre o preço do ativo subjacente e do strike. Para o put, o valor intrínstico é a diferença strike e o preço do ativo subjacente

$$v_{ic} = \max(S_t - e^{-r(T-t)}K, 0) \quad (2.1)$$

$$v_{ip} = \max(e^{-r(T-t)}K - S_t, 0) \quad (2.2)$$

em que :

S_t é o preço do ativo subjacente no tempo t

Definição 2.8. (Valor Extrínseco) O valor extrínseco é calculado subtraindo o preço atual da opção pelo valor intrínseco.

$$v_{ec} = c - v_{ic}$$

$$v_{ep} = p - v_{ip}$$

Definição 2.9. Dinheiro(*Moneyness*) O dinheiro de uma opção se refere à relação entre o preço do ativo e o preço de exercício em um dado tempo. Se o preço do ativo estiver na vizinhança do preço de exercício, a opção está no dinheiro (at-the-money, ou ATM); se o preço do ativo estiver relativamente maior (menor) do que o preço de exercício, a opção de compra (de venda) está dentro do dinheiro (in-the-money, ou ITM); se o preço do ativo estiver relativamente menor (maior) do que o preço de exercício, a opção de compra (de venda) está fora do dinheiro (out fo the money)

Opção de compra(*Call*):

Seja S_T o preço da ação no tempo T

1. Então, se $S_T > K$, a opção é dita estar dentro do preço (in the money)
2. Se, por outro lado, $S_T < K$ é dita estar fora do preço (out of money).
3. Se $S_T = K$, a opção é dita estar no preço (at the money).

Quando a opção é dita dentro do preço, o valor dessa opção tende a ser mais cara, pois a chance de acontecer é mais fácil, ao contrário do fora do dinheiro, essa opção costume ser mais barata, contudo raramente acontece.

Nas figuras (2.1) e (2.2) podemos ver opções da petrobras dentro e fora do dinheiro, respectivamente.

Opção de venda(*Put*):

1. Se $S_T < K$. Nesse caso, a opção está dentro do dinheiro.
2. Se $S_T > K$ dessa forma temos que opção está fora do dinheiro
3. Se $S_T = K$, a opção é dita estar no preço (at the money).

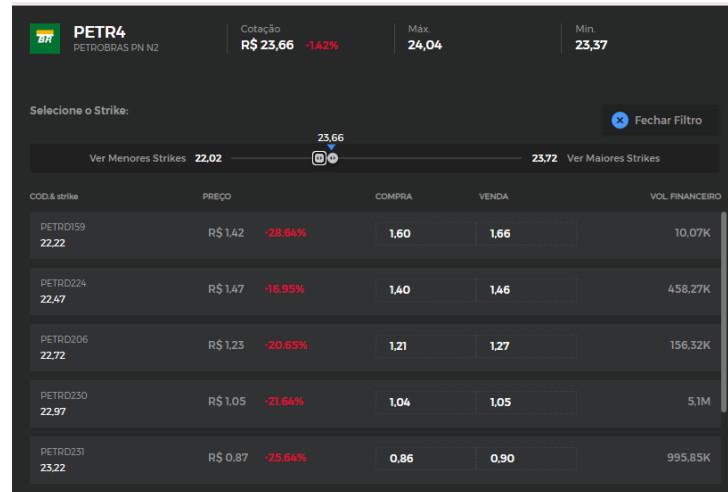


Figura 2.1: Opção de compra dentro do dinheiro

Claramente contrário ao caso das call.

Observação 2.1.2. Enquanto os compradores de Call ou Put possuem o direito mas não a obrigação de exercer a opção, os Vendedores de Call/Put tem a obrigação de vender, caso os compradores quiserem exercer seu direito. Os que estão na posição de compradores, pagam uma taxa para possuírem o direito mas não a obrigação de exercer a opção, já os na posição de vendedores, recebem uma taxa por ter a obrigação de exercer a opção.

Neste momento, observamos que existem quatro tipos de participantes nos mercados de opções:

1. Compradores de Call
2. Compradores de Put
3. Vendedores de Call
4. Vendedores de Put

Muitas vezes, é útil caracterizar uma opção europeia em termos de seu resultado para o comprador da opção. Assim, o custo inicial da opção não é incluído no cálculo. Se K é o preço de exercício e S_T é o preço final do ativo subjacente, o resultado de uma **posição comprada** em uma opção de compra é:

$$\max(S_T - K, 0)$$

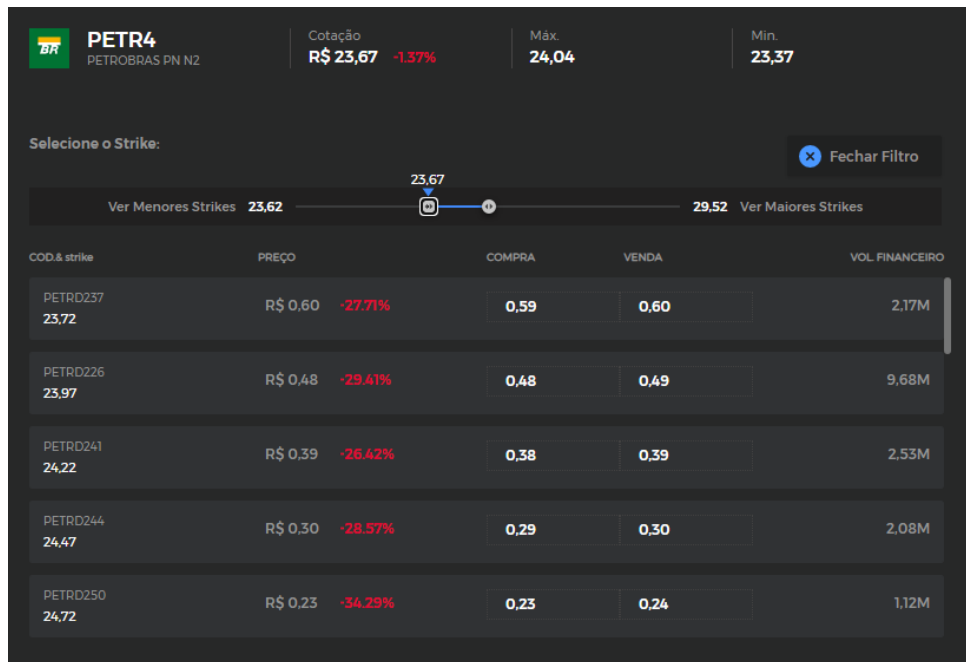


Figura 2.2: Opção de compra fora do dinheiro

	Call	Put
$S_T > K$	Dentro do Dinheiro	Fora do Dinheiro
$S_T = K$	No Dinheiro	No Dinheiro
$S_T < K$	Fora do Dinheiro	Dentro do Dinheiro

Figura 2.3: Moneyness

Isso reflete ao fato de que a opção será exercida se $S_T > K$ e não será exercida se $S_T \leq K$. O resultado para o titular da **posição vendida** na opção de compra europeia:

$$\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

O resultado para o titular de uma **posição comprada** em uma opção de venda é:

$$\max(K - S_T, 0)$$

o resultado de uma **posição vendida** em uma opção de venda é:

$$\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

2.2 Fatores que afetam o preço das opções

Seis fatores afetam o preço de uma opção sobre ações:

	Call	Put
Comprador	Direito	Direito
Vendedor	Obriga��o	Obriga��o

Figura 2.4: Posi  o dos Participantes do Mercado

1. O preço atual da a  o, S_0
2. O preço de exercício, K
3. O tempo até a expira  o, T
4. A volatilidade do preço da a  o σ
5. A taxa livre de juros de riscos, r
6. Os dividendos pagos esperados.

2.2.1 Preço da a  o e Preço de Exercício

Se uma op  o de compra for exercida em algum tempo futuro, o resultado será a diferença entre o preço da a  o pelo preço de exercício. Portanto, as op  es de compra tornam-se mais valiosas    medida que o preço de a  o aumenta e menos valiosas    medida que o preço de exercício aumenta. No caso da op  o de venda o comportamento    contrário, o resultado final é a diferença entre o preço de exercício pelo preço das a  es.

Abaixo será mostrado uma figuras com essas respectivas explica  es.

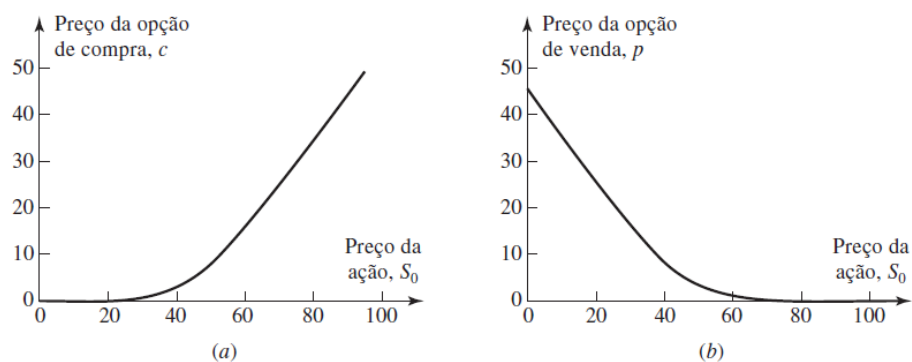


Figura 2.5: Op  o x A  o

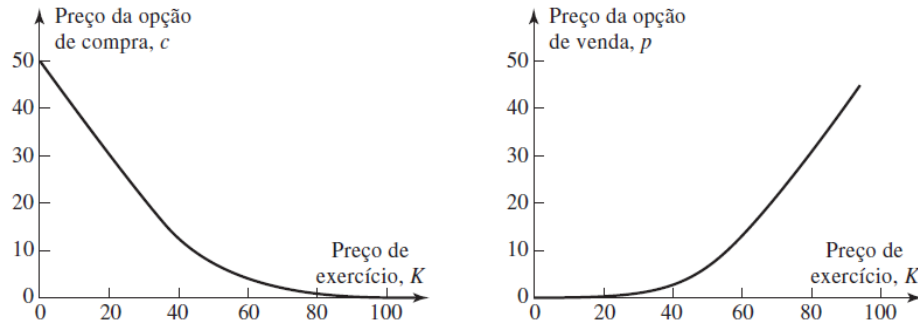


Figura 2.6: Ação x Strike

Proposição 2.1. (Preços de Exercícios) Há três restrições de arbitragem referentes ao preço de exercício de uma opção de compra ou venda:

- i) O valor de uma call (put) não pode ser menor do que o valor de outra call(put), idêntica, mas com o preço de exercício maior(menor) do que a primeira, isto é:

$$c(K_1) \geq c(K_2) \text{ se, e somente se, } K_2 \geq K_1$$

$$p(K_2) \geq p(K_1) \text{ se, e somente se, } K_2 \geq K_1$$

- ii) A diferença do valor entre duas opções idênticas, porém com strikes diferentes, jamais será maior do que a diferença entre seus respectivos strikes, isto é:

$$K_2 - K_1 \geq c(K_1) - c(K_2) \text{ se } K_2 > K_1$$

$$K_2 - K_1 \geq p(K_2) - p(K_1) \text{ se } K_2 > K_1$$

- iii) De três opções idênticas com strikes iguais a $K_3 > K_2 > K_1$, o valor da opção intermediária não poderá ser maior que a média ponderada das outras duas opções, isto é:

$$c(K_2) \geq \left(\frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \right) c(K_1) + \left(\frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} \right) c(K_3)$$

$$p(K_2) \geq \left(\frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \right) p(K_1) + \left(\frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} \right) p(K_3)$$

Demonstração. Cox e Rubinstein (1985) [7]

□

2.2.2 Volatilidade

As opções são instrumentos que envolvem o tempo, portanto as variáveis que a compõem devem ser trazidas a valor presente ou levadas a valor futuro por uma taxa (por exemplo a taxa de juros de livre risco). Por apresentar volatilidade (a volatilidade da opção é chamada de **volatilidade implícita**), possuem risco. A volatilidade de um preço de ação é uma medida da incerteza sobre os movimentos futuros desse preço. À medida que a volatilidade aumenta, a chance da ação ter desempenho muito bom ou muito ruim aumenta.

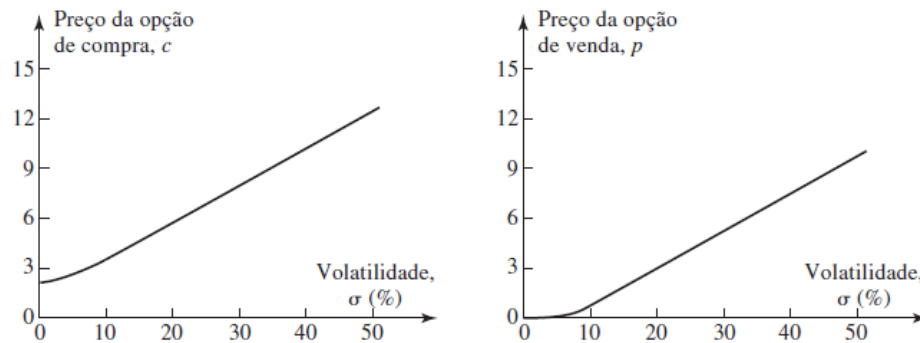


Figura 2.7: Opção x Volatilidade

2.2.3 Taxa livre de risco

À medida que as taxas de juros na economia aumentam, o retorno esperado exigido pelos investidores de uma ação tende a aumentar, pois os investidores em renda fixa, por ter menos risco, somente irão para renda variável se o prêmio aumentar, e a entrada de mais investidores na renda variável aumenta a liquidez.

2.3 Limites superiores e inferiores

Proposição 2.2. (Limites) O valor de uma opção respeitará os seguintes limites

$$\max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq c \leq S_t$$

$$\max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq p \leq S_t$$

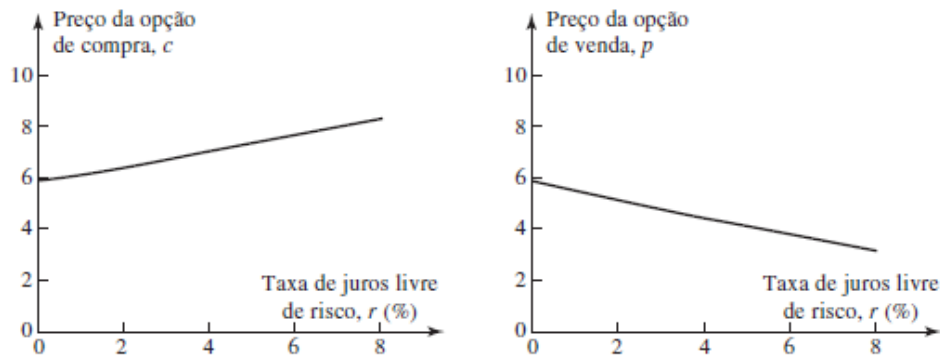


Figura 2.8: Opção x taxa de juros livre

Uma call americana ou europeia dá ao titular o direito de comprar uma ação de uma empresa por um determinado preço. Independentemente do que acontecer, a opção nunca poderá valer mais que a ação. Assim, o preço da ação é um limite superior para o preço da opção:

$$c \leq S_t \quad (2.3)$$

$$C \leq S_t$$

Se essas relações não fossem verdadeiras, um arbitrador poderia facilmente obter um lucro sem risco comprando a ação e vendendo a opção de compra.

Já no caso de uma put americana o titular tem o direito de vender uma ação de uma empresa por K . Independentemente de quanto o preço caia, a opção nunca valerá mais que K . Assim:

$$P \leq K$$

Nas europeias, sabemos que na maturidade a opção não pode valer mais que K . Logo, sabemos que ela não pode valer mais que o valor presente de K hoje:

$$p \leq Ke^{r-(T-t)} \quad (2.4)$$

Se isso não fosse verdade, um arbitrador poderia obter um lucro sem risco lançando a opção e investindo o resultado da venda à taxa de juros livre de risco

2.3.1 Opção de compra

Limites inferiores para opções de compra sobre ações que não pagam dividendo

Um limite inferior para o preço de uma opção de compra europeia sobre uma ação que não paga dividendos é:

$$S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Suponha duas carteiras de investimento

1. Carteira A : Uma opção de compra europeia mais um bônus de cupom zero que oferece um resultado de K no tempo T .
2. Carteira B: Uma ação da empresa

Na carteira A, o bônus zero vale K no tempo T . Se $S_T > K$, a opção de compra é exercida na maturidade e a carteira A vale S_T . Se $S_T < K$, a opção de compra expira sem valor e a carteira vale K . Assim, no tempo T , a carteira A vale:

$$\max(S_T, K)$$

No caso da carteira B ela sempre valerá S_T no tempo T . Portanto, a carteira A sempre vale tanto a carteira B e pode valer muito mais do que isso, na maturidade da opção. Logo, na ausência de oportunidades de arbitragem, isso também deve ser válido.

O bônus de cupom zero vale $Ke^{-r(T-t)}$ hoje. Logo

$$c + Ke^{-r(T-t)} \geq S_t$$

ou

$$c \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

O pior que pode-se acontecer com a opção de compra é ela expirar sem valer nada, assim seu valor não pode torna-se negativo. Isso significa que $c \geq 0$ e, logo:

$$c \geq \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0) \quad (2.5)$$

Daí pelas desigualdades (2.3) e (2.5) temos que o preço de uma call está entre

$$\max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq c \leq S_t \quad (2.6)$$

Com dividendos

Usando D como o valor presente dos dividendos durante a vida da opção, vamos supor a seguinte condição as mesmas carteiras A e B acima

Carteira A: uma opção de compra europeia mais uma quantia em caixa igual a $D + Ke^{-r(T-t)}$

Carteira B: Uma ação

Com um argumento semelhante, temos

$$c \geq \max(S_t - D - Ke^{-r(T-t)}, 0)$$

2.3.2 Opção de venda

limites inferiores para opções de venda sobre ações que não pagam dividendos

Para uma opção de venda europeia sobre uma ação que não paga dividendos, um limite inferior para o preço é:

$$Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

Vamos mostrar o porquê a seguir:

Suponha duas carteiras tais que

1. Carteira C: com uma put europeia mais uma ação
2. Carteira D: com um bônus de cupom zero com resultado K no tempo T

Se $S_T < K$ então a opção da carteira C é exercida na maturidade da opção e a carteira passa a valer K . Se $S_T > K$, então a opção de venda expira sem ter o valor e a carteira vale S_T nessa data. Assim, a carteira C valerá no tempo T .

$$\max(S_T, K)$$

Já a carteira D vale K no tempo T . Assim, a carteira C vale tanto quanto a carteira D, e as vezes mais que isso, no tempo T . Logo na ausência de arbitragem, a carteira C deve

valer pelo menos tanto quanto a carteira D hoje, logo:

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

ou

$$p \geq Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

Como o pior que pode acontecer com uma opção de venda é que ela expire sem valer nada, seu valor não pode ser negativo. Isso significa que:

$$p \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0) \quad (2.7)$$

Daí pelas desigualdades (2.4) e (2.7) temos que o preço de uma put está entre

$$\max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq p \leq K \quad (2.8)$$

Com dividendos

Também podemos definir C e D da seguinte maneira

1. Carteira C: uma opção de venda europeia mais uma ação
2. Carteira D: uma quantidade de caixa igual a $D + Ke^{-r(T-t)}$

Assim

$$p \geq \max(D + Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0)$$

Após entender esses princípios o individuo poderá usar as opções para torna-se um dos possíveis tipo de trader abaixo.

Definição 2.10. Traders: É um comerciante/negociador que realiza transições de compra e venda no mercado financeiro, mas especificamente no bolsas de valores.

2.4 Investidores(*Traders*): Cobertores de Riscos(*Hedgers*), Especuladores e Arbitradores

Definição 2.11. Cobertura de riscos(*Hedgers*) é uma estratégia cujo objetivo é proteger um investimento ou ativo contra possíveis perdas. Sua principal função é assegurar o valor de uma dívida que será paga no futuro

Definição 2.12. Arbitragem: Uma operação de arbitragem é aquela na qual os agentes podem auferir lucros ou vantagens financeiras sem correr riscos (Lima et al, 2007). A arbitragem geralmente ocorre quando dois ou mais ativos são precificados incorretamente uns em relação aos outros (Hull, 2008).

Em relação a arbitragem, existe uma relação importante entre calls e puts, com o mesmo preço de exercício, data de vencimento e ativo subjacente. Essa relação é conhecida como paridade put-call, e ela é baseada na relação de não-arbitragem. A seguir vamos definir essa relação.

Definição 2.13. (Paridade Put-Call) Considere uma estratégia de investimento em que ocorre a compra de uma call e a venda de uma put, ambas com mesmo preço de exercício, data de vencimento e ativo subjacente. A estratégia é expressa formalmente por $c - p = a$, em que a é uma constante real. De acordo com a definição (valor de uma opção) $c = v_e c + v_i c$ e $p = v_e p + v_i p$. Se o valor intrínseco da call for positivo, pela definição (valor intrínseco), o valor intrínseco da put será zero, pois $e^{-r(T-t)}K - S_t < 0$. Se, pelo contrário o valor intrínseco da put for positivo, pela mesma definição, o valor intrínseco da call será zero, pois $S_t - e^{-r(T-t)}K < 0$. Portanto: Pela definição (preço das opções): $v_i c + v_e c - v_i p + v_e p = a$

$$\text{Se } S_t > e^{-r(T-t)}K : v_e c - v_e p = a - v_i c = a - S_t - e^{-r(T-t)}K$$

$$\text{Se } S_t < e^{-r(T-t)}K : v_e c - v_e p = a - v_i p = a + e^{-r(T-t)}K - S_t$$

$$\text{Logo: } v_i c = v_i p \text{ e } a = S_t - e^{-r(T-t)}K$$

Com base no resultado acima, a paridade put-call é definida como:

$$c - p = S_t - e^{-r(T-t)}K \quad (2.9)$$

A paridade put-call significa que, o preço de uma call, r , t e S_t forem conhecidos, o preço de uma put similar é determinado pela equação (2.9) e vice-versa. O valor extrínseco da call e put serão iguais.

1-Caso :Se o lado direito da equação for positivo, somente a call será exercida, o que implica em comprar o ativo por K ;

2-Caso: Se for negativo, somente a put será exercida, que implica comprar o ativo K para ser exercido pela put.

Em ambos os casos a compra do ativo pelo preço de exercício estipulado é líquida e certa. Não há risco envolvido nessa estratégia.

Observação 2.4.1. Se a paridade for desrespeitada será sempre possível arbitrar vendendo a opção precificada a maior ou comprando a opção precificada a menor. A seguir temos um exemplo para ilustrar a situação

Exemplo 1. Suponha duas opções, uma de compra e outra de venda, com preços de exercícios iguais a 40 e data de vencimento daqui a 4 meses ($T - t = 1/3$). A taxa de juros livre de risco anualizada é de 5%*a.a* e o preço do ativo subjacente às opções é de 40. A call é negociada no mercado por 3. Pela paridade put-call, a put deve valer $p = e^{-r(T-t)}K - S_t + c$:

$$p = e^{-0,10 \cdot (1/3)} 40 - 40 + 3$$

$$p = 39,34 - 40 + 3$$

$$p = 2,34$$

Se a opção de venda for negociada, por exemplo, a um preço de 2,00, haverá um lucro sem risco de 0,34 por cada put comprada no mercado.

Definição 2.14. Especulação: é uma prática de buscar lucros altos em um curto período de tempo através de suposições

De acordo com Hull, existem 3 tipos de traders, os hedgers, os arbitradores e os especuladores

2.4.1 Sem Riscos(*Hedgers*)

Os hedgers usam derivativos para reduzir o risco que enfrentam devido a possíveis movimentações futuras em uma variável de mercado.

Estratégia de cobertura de riscos usando opções

Exemplo 2. Suponha que um investidor tenha em maio de determinado ano, possui 1.000 ações da Petrobras . O preço da ação é R\$ 25 por ação. O investidor está preocupado com uma possível queda do preço da ação nos próximos dois meses e quer se proteger disso.

O investidor poderia comprar dez contratos de opção de venda de julho sobre as ações da Petrobras com um preço de exercício de $R\$ 23$. Isso daria a ele o direito de vender um total de 1.000 ações por um preço de $R\$ 23$. Se o preço da opção cotado é de $R\$ 1$, cada contrato de opção custaria $100 \times R\$ 1 = R\$ 100$ e o custo total da estratégia de hedge seria $10 \times R\$ 100 = R\$ 1.000$.

A estratégia custa $R\$ 1.000$, mas garante que cada ação poderá ser vendida por pelo menos $R\$ 23$ durante a vida da opção. Se o preço de mercado da ação cair abaixo de $R\$ 23$, as opções serão exercidas, de modo que $R\$ 23.000$ são realizados para toda a posição. Quando o custo das opções é levado em conta, o montante realizado é de $R\$ 22.000$. Se o preço de mercado permanece acima de $R\$ 23.000$, as opções não são exercidas e expiram, tendo perdido seu valor. Contudo, nesse caso, o valor da posição sempre fica acima de $R\$ 23.000$ (ou acima de $R\$ 22.000$ quando levamos em conta o custo das opções). Resumidamente:

$$S_0 = 25,00$$

$$K = 23,00$$

$$p = 1 \cdot 100 \cdot 10 = 1000$$

$$\text{e seja } S_T = 22,00$$

Multiplicando S, K pela quantidade de ações e p pela quantidade de contratos tem-se:

$$\text{Se } S_T < K \text{ então}$$

$$\Pi = K - S_t - p$$

$$\Pi = 23.000 - 1.000 = 22,00$$

$$\text{Se } S_t > K \text{ então}$$

$$\Pi = S_t - p$$

$$\Pi > 23.000 - 1.000$$

2.4.2 Especuladores

Agora vamos considerar como os mercados futuros e opções podem ser usados pelos especuladores. Enquanto os hedgers querem evitar exposição a movimentos adversos no preço de um ativo, os especuladores desejam assumir uma posição no mercado. Eles estão apostando que o preço do ativo irá subir ou então que irá cair.

Especulação usando opções

Exemplo 3. Suponha que é outubro e um especulador considera que uma ação provavelmente aumentará de valor durante os próximos dois meses. O preço atual da ação é R\$ 10 e uma opção de compra de dois meses com preço de exercício de R\$ 12,00 é vendida por R\$ 1.

Uma alternativa é comprar 100 ações; a outra envolve comprar 2.000 opções de compra (ou seja, 20 contratos de opção de compra). Imagine que o palpite do especulador está correto e o preço da ação sobe para R\$ 15 até dezembro. A primeira alternativa, a de comprar a ação, rende um lucro de:

$$100 \times R\$ 15 - R\$ 10 = R\$ 500$$

A segunda alternativa, contudo, é muito mais lucrativa. A opção de compra sobre a ação com preço de exercício de \$ 12,00 dá um resultado de R\$ 3,00, pois permite que algo que vale R\$ 15 seja comprado por R\$12,00. O resultado total das 2.000 opções compradas sob a segunda alternativa é: $2.000 \times R\$ 3,00 = R\$ 6.000$

Subtraindo o custo original das opções, temos um lucro líquido de: $R\$ 6.000 - R\$ 2.000 = R\$ 4.000$ Logo, a estratégia de opções é dez vezes mais lucrativa do que a compra direta das ações. As opções também dão origem a uma perda potencial maior. Imagine que o preço da ação cai para R\$ 5 até dezembro. A primeira alternativa, a compra da ação, rende uma perda de: $100 \times (R\$ 10 - R\$ 5) = R\$ 500$ Como as opções de compra expiram sem ser exercidas, a estratégia de opções levaria a uma perda de R\$ 2.000, o montante original pago pelas opções.

2.4.3 Arbitragem

O uso da arbitragem no day trade poderá alavancar os ganhos, pois buscam variações de preços entre os ativos nos intervalos de um dia na Bolsa de Valores. Perceba esta hipotética situação, que trata-se de um exemplo bem simples para melhor compreensão sobre o que é a arbitragem.

Estratégia usando arbitragem

Exemplo 4. Um investidor encontra uma variação de preços nas ações de Petrobras. No mercado à vista, a PETR4 é cotada a R\$ 20,00, enquanto no mercado futuro está cotada em R\$ 24,00. Para se aproveitar dessa distorção de preços, o arbitrador compra o ativo à vista e vende o futuro, travando assim um lucro de R\$ 4,00 por ativo na operação.

Encontrar situações desse tipo é improvável no mercado financeiro, porém, se acontecer, durará por um curto tempo, pois os traders estarão ali para efetuar essas operações e o mercado ficará balanceado novamente.

A partir de agora, afim de descobrir o preço correto de uma opção, vamos trazer conceitos matemáticos que estão inclusos implicitamente no mesmo, como a opção depende de um ativo subjacente em relação ao tempo, primeiro será explanado os conceitos relacionados ao ativo e por fim descobrir uma formula para calcular o preço de uma opção. Primeiramente serão necessários conceitos básicos de probabilidade para definirmos o processo de itô, eles serão comentados no capítulo seguinte.

3 Medida e Probabilidade

Neste capítulo será apresentado os conceitos básicos de medida e probabilidade, tais como espaço de probabilidade, variável aleatória, valor esperado, variância, distribuição normal, lognormal e processos estocástico.

3.1 Espaço com Medida

Uma medida num conjunto X de uma função que atribui um número real não-negativo para subconjuntos de X . Pode ser interpretada como contagem, área, tamanho, massa, volume, capacidade térmica ou qualquer propriedade aditiva, i.e., uma propriedade tal que a medida da união de dois conjuntos disjuntos é igual a soma de suas medidas. Um exemplo importante é a medida de Lebesgue no espaço euclidiano, que atribui comprimento, área e volume, respectivamente, a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com $n = 1, 2, 3$

Podemos enxergar a origem do conceito de medida no conceito de contagem, que pode ser generalizada de dois modos:

- (a) como cardinalidade (número de elementos), ou
- (b) como medida (comprimento, área, volume, etc.).

3.1.1 Álgebra e Sigma Álgebra

Definição 3.1. Uma σ -álgebra de subconjuntos de X é uma família Σ de subconjuntos de X , isto é $\Sigma \subset P(X)$, tal que:

- (a) $\emptyset \in \Sigma$
- (b) Para todo $E \in \Sigma$ seu complementar $E^c = X \setminus E \in \Sigma$
- (c) Para toda sequência $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ , sua união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$

Elementos de Σ são chamados de **conjuntos mensuráveis**. Se Σ satisfaz (a) e (b) e, ao invés de (c) satisfaz (c') abaixo dizemos que é uma **álgebra**.

(c') Dados $E, F \in \Sigma$, sua união $E \cup F \in \Sigma$.

Exemplo 5. Existem duas σ -álgebra de subconjuntos de X que são canônicas:

(a) $\Sigma = \{\emptyset, X\}$, a menor σ -álgebra de X ; (b) $\mathcal{P}(X)$, a maior σ -álgebra de X .

Exemplo 6. O conjunto $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c, \mathbb{R}\}$ uma σ -álgebra de $\mathbb{R}$.

Propriedade 3.1.1. (*Propriedades Elementares de uma σ -álgebra*) Se Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X , então para todo $E, F \in \Sigma$:

(a) $E \cup F \in \Sigma$; (b) $E \cap F \in \Sigma$; (c) $E \setminus F \in \Sigma$;

(d) $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ , então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$

Definição 3.2. A σ -álgebra gerada pela família de abertos de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$) é conhecida como **σ -álgebra de Borel**. Seus elementos são os **conjuntos de Borel** ou **borelianos**

Definição 3.3. (σ -Álgebra com funções) Considere uma função $f : X \rightarrow Y$. Dada σ -álgebra:

(a) Σ_Y em Y , definimos a σ -álgebra $\Sigma_{f,X} = \{f^{-1}(A) \subset X \mid A \in \Sigma_Y\}$ em X .

(b) Σ_X em X , definimos a σ -álgebra $\Sigma_{f,Y} = \{f^{-1}(A) \subset Y \mid A \in \Sigma_X\}$ em Y .

Definição 3.4. (Função Mensurável) Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **$\mathcal{F}$ -mensurável**, ou simplesmente mensurável, se satisfaz:

$$\{f < a\} = \{x \in X \mid f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F} \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

Se $\mathcal{F}$ é a σ -álgebra de:

(a) Borel, então f é dita **Borel-Mensurável**

(a) Lebesgue, então f é dita **Lebesgue-Mensurável**

Observação 3.1. Observe a conveniência da notação $\{f < a\}$, utilizada em Probabilidade.

Exemplo 7. (a) Qualquer função constante é mensurável.

- (b) Se $\mathcal{F} = P(X)$, então toda função é mensurável.
- (c) Toda função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Borel-mensurável
- (d) Toda função monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Borel-mensurável

Teorema 3.1. (Propriedades de Função Mensuráveis) Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções $\mathcal{F}$ - mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. São $\mathcal{F}$ - mensuráveis:

$$(a) cf; \quad (b) f + g; \quad (c) f^2; \quad (d) fg; \quad (e) |f|.$$

3.2 Espaço de Probabilidade

Definição 3.5. Um espaço de medida é uma tripla (X, Σ, μ) onde:

- (a) X é um conjunto;
- (b) $\Sigma \subset P(X)$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X ;
- (c) $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ é uma função tal que:
- (c1) $\mu(\emptyset) = 0$
- (c2) Se $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em Σ , então $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

Definição 3.6. Dado um espaço de medida (Ω, Σ, μ) , dizemos que é um **espaço de probabilidade** se $\mu(\Omega) = 1$. Neste caso denotamos a medida μ por P e dizemos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um **espaço de probabilidade**.

1. Ω é o **espaço amostral**
2. Os elementos da σ - álgebra $\mathcal{F}$ são os **eventos**
3. A cada evento $A \in \mathcal{F}$ associamos sua **probabilidade** $P(A)$

O espaço de eventos ser uma σ - álgebra significa, em linguagem coloquial, que dados eventos A e B, são eventos também:

1. a não ocorrência de A, isto é, A^c ;

2. a ocorrência de A **ou** B, isto é, $A \cup B$;
3. a ocorrência de A **e** B, isto é, $A \cap B$.

O conceito de independência, que será definido a seguir, será bastante necessário para o longo do trabalho, pois particulariza a teoria da probabilidade como um ramo distinto da teoria geral da medida.

Definição 3.7. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Diremos que os eventos A e $B \in \mathcal{F}$ são **independentes** se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

3.2.1 Variável Aleatória

Definição 3.8. Uma função mensurável $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **variável aleatória(va)**

Definição 3.9. Seja X uma variável aleatória contínua. A **função de densidade de probabilidade** de X é uma função $f_X(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
3. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ temos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$

3.2.2 Valor esperado e variância

Definição 3.10. Definimos a **média** ou **valor esperado** de X por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Propriedade 3.2.1. *Sejam X, Y variáveis aleatórias e a, b, c constantes*

1. $E(a) = a$
2. $E(a + X) = a + E(X)$
3. $E(bX) = bE(X)$

$$4. E(a + bX) = a + bE(X)$$

$$5. E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Em casos gerais, $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, a igualdade só será verdade se X e Y forem variáveis independentes.

Definição 3.11. Definimos a **variância** de X por:

$$var(X) = (X - E(X))^2$$

Propriedade 3.2.2. Se a, b forem constantes reais e X uma v.a

$$1. VAR(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$2. VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

3.2.3 Distribuição Normal e LogNormal

Definição 3.12. Uma variável aleatória contínua X é dita ter **distribuição normal**, com parâmetros μ e σ^2 , se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor esperado de X é dado por $E(X) = \mu$ e a variância $var(X) = \sigma^2$.

Neste caso, escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (Lê-se : X possui distribuição normal com média μ e desvio padrão σ^2).

Vamos provar que de fato, o valor esperado e o variância são daquela forma;

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \end{aligned}$$

Fazendo $z = (x - \mu)/\sigma$ e observando que $dx = \sigma dz$, obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \sigma dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) e^{(-\frac{z^2}{2})} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{(-\frac{z^2}{2})} dz + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{z^2}{2})} dz \end{aligned}$$

A primeira integral é zero, pois seu integrando é uma função ímpar. A segunda integral representa a área total sob a fdp normal e por isso é igual a unidade, logo

$$E(X) = \mu$$

Considere agora

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

Novamente aplicando $z = (x - \mu)/\sigma$, obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu)^2 e^{(-z^2/2)} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 e^{(-z^2/2)} dz + 2\mu\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{(-z^2/2)} dz + \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-z^2/2)} dz \end{aligned}$$

A segunda integral também é igual a zero usando o mesmo argumento acima, a última integral, sem o fator μ^2 é igual a unidade. Para calcular a primeira integral, devemos usar integral por partes.

Fazendo $ze^{(-z^2/2)} = dv$ e $z = u$, temos que $v = -e^{-z^2/2} dz$ e $dz = du$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{(-z^2/2)} dz &= \frac{z^2 e^{(-z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-z^2/2)} dz = dz \\ &0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

e portanto,

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$$

□

Definição 3.13. Uma variável aleatória X tem **distribuição Log-Normal** se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Com valor esperado e variância:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$$

3.2.4 Processos Estocásticos

O modelo de Black Scholes é um processo estocástico em tempo contínuo definido para a variável do preço do ativo subjacente à opção, portanto precisamos definir primeiramente o que é um processo estocástico:

Definição 3.14. Uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{R}}$ de variáveis aleatórias é chamada de **processo estocástico discreto**.

Definição 3.15. Uma família $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de variáveis aleatórias é chamada de **processo estocástico contínuo**

Exemplo 8. O valor S_t de uma ação a cada instante de tempo é um exemplo de processo estocástico contínuo. As probabilidades dos eventos $\{S_t < a\}$ para qualquer $a, t \in \mathbb{R}$ é um problema básico em finanças matemática.

Exemplo 9. Processos estocásticos incluem flutuações nos mercados de ações e nas taxas de câmbio, dados médicos como temperatura, pressão sanguínea e variações nos potenciais elétricos do cérebro registrados em um eletroencefalograma, fluxo turbulento de um líquido ou gás, variações no campo magnético da Terra, mudanças aleatórias no nível de sinais de rádio sintonizados na presença de distúrbios meteorológicos, flutuação da corrente em um circuito elétrico na presença de ruído térmico, movimentos aleatórios como o movimento Browniano ou passeios aleatórios, entre outros

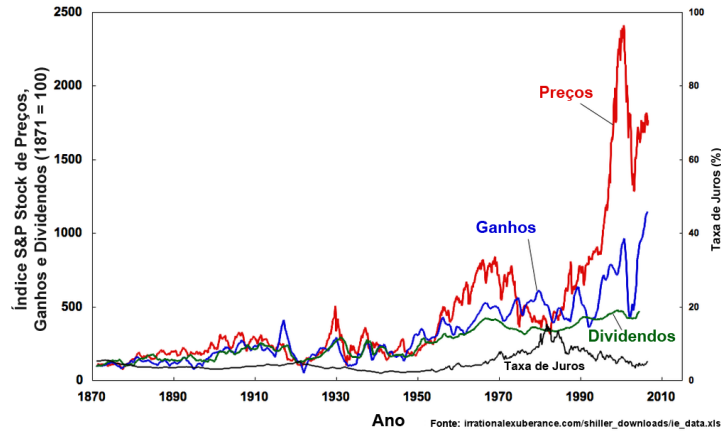


Figura 3.1: Processo Estocástico

Definição 3.16. Um **Processo de Markov** X_t é um processo estocástico com a propriedade de que, dado o valor de X_t os valores de X_s , para $t > s$ não são influenciados pelos valores de X_u para $u < t$. Ou seja, a probabilidade de qualquer comportamento futuro do processo, quando o seu estado atual é conhecida exatamente, não é alterada pela conhecimento adicional sobre seu comportamento passado.

Se a distribuição de probabilidade condicional de X_{t+1} nos estados passados é uma função apenas de X_n , então:

$$P(X_{n+1} = x | X_0, X_1, X_2, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = x | X_n)$$

Exemplo 10. Suponha que o preço de ações seguem um processo de markov. Seja o preço de uma ação R\$100,00 hoje. Se esse preço segue um processo de markov, nossas futuras previsões não devem ser afetadas pelos valores passados e sim pelo preço de hoje correspondente a R\$100,00

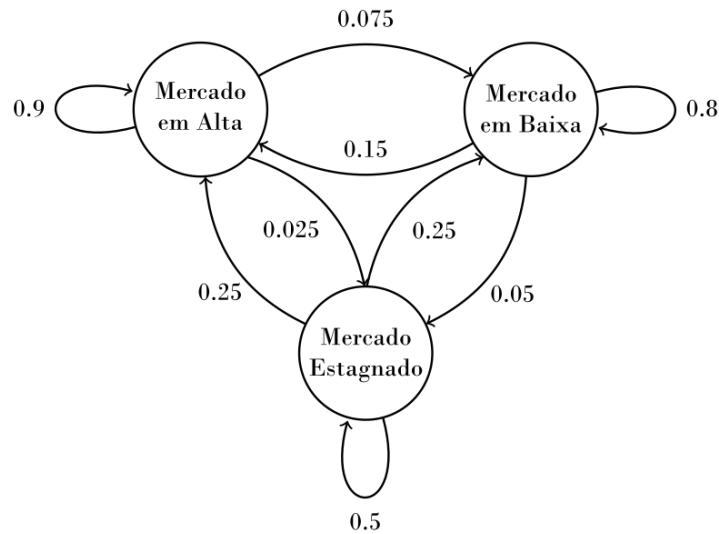


Figura 3.2: Cadeia de Markov

Em 1828, o botânico Robert Brown observou um movimento irregular de poléns na água. Hoje, este movimento é chamado de movimento browniano ou processo de Wiener. No início do século 20, aplicações importantes do movimento browniano foram descobertas. A primeira deu-se na teoria de preços de ações flutuantes por L. Bachelier (1900) [3]. A segunda deu-se na investigação de propriedades da densidade de partículas em certa posição e tempo por A. Einstein [8]. Detalhes sobre a teoria de movimento browniano pode ser encontrado em [4], [9], [11] e [12]. A definição formal do movimento browniano é apresentada a seguir.

Definição 3.17. (Processo de Wiener)

Seja Z_t , com $t \in T$, um processo contínuo definido no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. O processo z_t é um **Processo de Wiener** se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $Z_0 = 0$ e Z_t é contínua para todo $t \in T$;
2. $E(Z_t) = 0$
3. Z_t possui uma distribuição normal não degenerada para cada t ;
4. Os incrementos de Z_t são independentes, isto é, $[z_{t_2} - z_{t_1}]$ e $[z_{t_4} - z_{t_3}]$ são independentes para cada intervalo sequencial (t_1, t_2) e (t_3, t_4)

Sem perda de generalidade, assume-se que $t \in [0, 1]$. Se $z_t \sim N(0, t)$, o processo z_t é também pode ser chamado de **Movimento Browniano Padrão**

Definição 3.18. (Processo de Wiener Generalizado) Se x é um Processo de Wiener Generalizado, então:

$$dx = adt + bdz$$

em que a, b são constantes e z é um Processo de Wiener.

A taxa de mudança na média por unidade de tempo, ou *drift*, é denotada por a .

A taxa de mudança na variância é denotada por b^2 .

4 Modelo de Black-Scholes

Neste capítulo será definido o processo itô, movimento browniano padrão e geométrico. Será comentado sobre os modelos pré-modelo Black-Scholes, hipóteses sobre do modelo black-scholes e por fim será demonstrado a obtenção da equação diferencial de Black-Scholes e o objetivo do trabalho que é a fórmula do preço de opção de compra europeia.

4.1 Precificar o preço de ativos

O preço de um derivativo é uma função que depende do preço do ativo subjacente e do tempo, ou seja, o derivativo de opção é um processo estocástico.

Em geral, dizemos que a função preço de qualquer derivativo é uma função que depende do preço do derivativo adjacente e do tempo. Um resultado importante nesta área foi descoberto pelo matemático K. Itô, em 1951, conhecido como o Lema de Itô. Antes de enunciar este resultado, vamos definir o processo de Itô.

Lembrando das definições do capítulo 3, vamos definir o Processo de Itô.

Definição 4.1. Sejam a e b funções que dependem das variáveis x e t , isto é, $a = a(x, t)$ e $b = b(x, t)$. Um **Processo de Itô** é representado por

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (4.1)$$

em que:

1. $a(x, t)$ é o drift ou tendência instantânea do processo de itô
2. $b^2(x, t)$ é a taxa de variância instantânea do processo;
3. dz é o incremento de wiener, isto é, $dz = \epsilon\sqrt{dt}$ em que ϵ é uma variável aleatória que obedece uma distribuição normal $N(0, 1)$

O processo de itô possui as seguintes propriedades estatísticas:

a) $E(dx) = a(x, t)dt$

b) $var(dx) = b^2(x, t)dz$

Vamos provar que é verdade as duas propriedades acima.

Demonstração. De fato,

a)

$$E(dx) = E(a(x, t)dt + b^2(x, t)dz) = E(a(x, t)dt) + E(b^2(x, t)dz) = a(x, t)E(dt) + b(x, t)E(dz) =$$

Como dz obedece uma distribuição normal $N(0, 1)$ temos que $E(dz) = 0$, então

$$E(dx) = a(x, t)dt$$

b)

$$\begin{aligned} var(dx) &= E((X - E(X))^2) = E(dx - E(dx))^2 \\ &= E(dx - a(x, t)dt)^2 = E(a(x, t)dt + b(x, t)dz - a(x, t)dt)^2 \\ &= E(b(x, t)^2 dz^2) = b(x, t)^2 E(\epsilon^2 dt) = b(x, t)^2 dt E(\epsilon^2) = b(x, t)^2 dt \end{aligned}$$

□

O processo Wiener, ou Movimento Browniano Padrão, é um caso particular do Processo de Itô quando $a(x, t) = 0$ e $b(x, t) = 1$. Da mesma forma, o Processo Wiener Generalizado é um caso particular do processo de Itô quando $a(x, t) = a$ e $b(x, t) = b$.

Lema 4.1. *Suponhamos que a variável x siga um processo de Itô,*

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \tag{4.2}$$

Seja f uma função que depende do processo x e do tempo, isto é, $f = f(x, t)$. Assumamos que f é uma função de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Então f segue um processo de Itô que satisfaz a seguinte equação estocástica

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b dz$$

em que dz é o mesmo processo de Wiener da equação (4.1)

Na hipótese do Lema de Itô, a taxa de drift e a taxa de variância do processo f são dadas por: $\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 b^2$

Demonstração. Por hipótese, f é uma função de classe C^2 , logo f'' existe e é contínua, daí, pela Fórmula de Taylor, temos

$$df = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}dt$$

agora aplicando dx dada por hipótese na equação acima, temos:

$$df = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}(a(x, t)dt + b(x, t)dz) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}dt$$

$$df = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}a(x, t)dt + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}b(x, t)dz + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}dt$$

$$df = \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}a(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \right)dt + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}b(x, t)dz$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz$$

Agora podemos calcular o valor da variância de df

$$E(df) = E\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz \right)$$

$$E(df) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right)\mathbb{E}(dt) + \frac{\partial f}{\partial x}b\mathbb{E}(dz) \right)$$

$$E(df) = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2$$

Já a variância

$$var(df) = E\left(\left(df - \frac{\partial f}{\partial x}a - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right)^2 \right)$$

$$var(df) = E\left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz - \frac{\partial f}{\partial x}a - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right)^2 \right)$$

$$var(df) = E\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}adt + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz - \frac{\partial f}{\partial x}a - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)^2\right)$$

Como f é uma função contínua, alguns termos de primeira e segunda ordem se cancelarão, logo

$$var(df) = E\left(\frac{\partial f}{\partial x}bdz\right)^2$$

$$var(df) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 b^2 E(dz^2)$$

$$var(df) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 b^2$$

□

Uma dos principais problemas em prever o preços de ações está relacionado o retorno do percentual esperado, por isso, após diversas situações discutidas ao longo dos anos a seguinte situação foi definida

Seja uma ação S o preço da ação no tempo t então a variação do preço de uma ação deve ser

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

em que μ é o retorno esperado da ação

Aplicando o limite , com $\Delta t \rightarrow 0$, temos:

$$dS = \mu S dt$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Integrando entre o tempo 0 e o tempo T , obtemos:

$$\int_0^T \frac{1}{S} dS = \int_0^T \mu dt$$

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) = \mu T$$

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = uT$$

$$\frac{S_T}{S_0} = e^{uT}$$

$$S_T = S_0 e^{uT}$$

em que:

S_0 é o preço da ação no tempo 0

S_T é o preço da ação no tempo t

contudo este modelo de precificação de ações só serve para um mercado sem incertezas, o que é praticamente impossível no nosso mercado atual, logo o modelo mais razoável e usado amplamente é:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ou:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

A equação acima é o modelo mais usado do comportamento do preço das ações.

em que:

μ : é a taxa de retorno esperado da ação

σ : é a volatilidade do preço da ação

σ^2 : taxa de variância

O modelo na equação acima representa o processo do preço da ação no mundo real. Em um mundo risk-neutral(sem risco), μ é igual a taxa de juros livre de risco r

A partir do que vimos acima, vamos definir o MVBG

Definição 4.2. (Movimento Browniano Geométrico) Seja S_t , $t \in T$, uma variável contínua representando o preço do ativo subjacente à opção. Se o processo wiener generalizado x_t for igualado a S_t então S_t será o movimento browniano geométrico se satisfazer:

$$dS = \mu S_t dt + \sigma S_t dz$$

O movimento browniano geométrico possui taxa de crescimento da média de μS_t e taxa de crescimento da variância igual a $\sigma^2 S_t^2$.

Proposição 4.1. O preço do ativo subjacente S , segue uma distribuição lognormal

Demonstração. Seja $G(S, t)$ uma função tal que $G_t = \log S_t$. O log-retorno do ativo é $dG_t = \log S_t - \log S_{t-1}$. Então :

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_t}{\partial S_t} &= \frac{1}{S_t} \\ \frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2} &= -\frac{1}{S_t^2} \\ \frac{\partial G_t}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

aplicando o lema (4.1)

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (4.3)$$

Calculando a média e a variância da equação (4.3) temos :

$$\log \frac{S_t}{S_0} \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right] \quad (4.4)$$

Rearranjando os termos:

$$\log S_t \sim N \left[\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right] \quad (4.5)$$

Uma variável cujo logaritmo é normalmente distribuído, segue uma distribuição lognormal. Logo, se $(\log S_t)$ é normalmente distribuída, o preço do ativo, S_t , deve seguir uma distribuição lognormal. $\square$

Observação 4.1.1. As variáveis log-normais assumem apenas valores positivos, portanto são úteis para modelar preços de ações e cotações no geral.

Antes de começar a demonstrar o modelo de black-scholes, vamos falar um pouco sobre os modelos pré black-scholes

4.2 Modelos Pré-Black-Scholes-Merton

Antes de surgir o modelo de Black-Scholes-Merton, houve modelos anteriores, eles são: Modelo de Bachelier(1900), Modelo de Sprenkle(1961) e Modelo de Boness(1964)

De acordo com Yang(1997, p.8) o modelo de formação de preço da opção mais antigo de que se tem conhecimento é o de Louis Bachelier de 1900. Neste modelo é

adotado o movimento browniano com $\mu = 0$ (drift) e a variância a termo (σ^2) constante para o processo do preço da ação, ele obteve a seguinte fórmula para determinar o valor esperado da opção de compra europeia :

$$c = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \sigma\sqrt{\tau}\phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

em que Φ é a função de distribuição normal padronizada e ϕ é a função densidade de probabilidade normal padronizada

As seguintes objeções foram feitas sobre o modelo:

1. O valor esperado da opção não foi trazido para o valor presente

2. A hipótese do movimento browniano aritmético, como descritor do movimento do preço da ação, permite que haja uma probabilidade de ocorrerem preços negativos e preços de opções maiores que seus respectivos preços de ações.

3. A hipótese de que a variação esperada do valor da ação é zero sugere taxa de juros nulas, portanto ignora o valor positivo do dinheiro no tempo e aversão a incerteza.

Já o Modelo de Sprenkel assume a distribuição lognormal para o preço da ação com média e variância constantes. Portanto as duas últimas objeções ao modelo de Bachelier são eliminadas. O valor esperado da opção de compra europeia neste modelo é:

$$c = S_0 \exp(\alpha\tau) \Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] - K(1 - \pi) \Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

em que α é a taxa de retorno esperada da ação e π é um ajuste ao preço de alavancagem do mercado. Novamente o valor da opção não foi levada ao valor presente.

O Modelo Boness também assume a distribuição lognormal como sendo a distribuição do preço da ação e que a taxa de desconto esperada para opção de compra pode ser aproximada pela taxa de desconto esperada da ação (essa taxa de desconto é subjetiva).

A fórmula do preço é:

$$c = S_0 \exp(\alpha\tau) \Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] - K \exp(-\alpha\tau) \Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

Ao acrescentar a estratégia da carteira replicante (Hedging perfeito dinâmico) às

hipóteses do modelo de Boness, temos a fórmula de Black-Scholes-Merton, abaixo vamos definir o **Hedging Perfeito** e uma **Carteira sem risco**.

Definição 4.3. (Hedging perfeito dinâmico) ou delta hedging é uma carteira que iguala uma opção financeira a uma fração do ativo subjacente, o delta, em cada instante do tempo. Formalmente:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Definição 4.4. Seja Π uma carteira sem risco. Essa carteira deve ser corrigida no tempo pela taxa de juros de livre risco, r . Formalmente:

$$\Pi = r \Pi \Delta t$$

em que Π é a variação no intervalo de tempo $t + dt$

quando $t \rightarrow 0$ temos

$$\Pi = r \Pi dt$$

4.3 Hipóteses do modelo

Para a criação do modelo, Fischer Black e Myron Scholes admitiram as seguintes hipóteses:

H1) o preço da ação, S , segue um processo estocástico em tempo contínuo

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

em que z é um movimento browniano e o μ e a volatilidade σ são constantes (S é um movimento browniano geométrico);

H2) a taxa de juros de curto prazo livre de risco r é conhecida e constante no tempo;

H3) a ação não paga dividendos;

H4) o mercado é perfeito

H5) é possível vender a ação a descoberto(short-selling);

H6) não existem oportunidades de arbitragem sem risco.

O objetivo desse conjunto de hipóteses consiste em fazer com que o valor da opção dependa apenas de duas variáveis: do preço do ativo subjacente e do tempo. Os demais parâmetros (volatilidade, juros e preço de exercício) são dadas como constantes (Black e Scholes, 1973) [5]

4.4 Obtendo a equação diferencial de Black-Scholes

Seja $f(S, t)$ uma função que designa o preço de uma opção europeia no tempo t para um certo valor de um ativo adjacente S . A fim de obtermos um modelo ausente de arbitragem, uma construção para a equação de black-scholes é feita a partir de uma carteira contendo uma **opção** e uma certa quantidade $\frac{\partial f}{\partial S}$ de ações (Delta Hedging).

-1 : opção

$\frac{\partial f}{\partial S}$: ações

Daí, o valor da carteira será dada por:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (4.6)$$

A variação da carteira entre o os instante t e $t + dt$ é dada por :

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (4.7)$$

Como por hipótese H1), S satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (4.8)$$

Pelo lema de Itô, temos

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (4.9)$$

As versões discretas das equações (4.8) e (4.9) são

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (4.10)$$

e

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (4.11)$$

Substituindo as equações (4.10) e (4.11) na equação (4.7), temos

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S} [\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z]$$

fazendo os possíveis cancelamentos, temos

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (4.12)$$

Como a equação (4.12) não possui o termo Δz , a carteira é sem risco durante o intervalo de tempo Δt . Desse modo, a carteira é isenta de risco nas condições do modelo. Então, pelo princípio da não-arbitragem, o valor da carteira deve ser, instantaneamente, o mesmo valor da carteira multiplicado pela taxa de juros de livre risco r isto é,

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

Substituindo (4.12) e (4.6) respectivamente na equação acima, teremos

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

Cancelado Δt de ambos lados, temos como resultado

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \quad (4.13)$$

A equação (4.13) é equação diferencial parcial de Black-Scholes. Ela possui várias soluções dependendo do tipo de derivativo que pode ser definido, com S como variável adjacente. o derivativo particular que é obtido quando a equação é resolvida depende das condições de fronteira que são usadas.

No caso da opções européia , já foi visto que as condições de retorno são

$$f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}$$

para uma call e

$$f(S_T, T) = \max\{K - S_T, 0\}$$

para uma put

em que:

T é maturidade

K é o preço de exercício

S_T preço da ação na maturidade

Além dessas condições, quando $S = 0$, o valor do contrato se torna $f(0, t) = 0$ para todo $t \in]0, T[$ e $\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{f(S, t)}{S} = 1$ para todo $t \in]0, T[$

4.5 A fórmula do preço de uma opção de compra europeia

Teorema 4.1. O valor de uma opção de compra europeia (**call**) $f(S, t)$, modelada pela equação de Black-Scholes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rf = 0$$

Com

condição final: $f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}$

condição de fronteira: $f(S_t, t) \geq 0$ e $f(0, t) = 0$

condição assintótica: $f(S, t) \sim S$ quando $S \rightarrow +\infty$

é dada por:

$$f(S, t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2)$$

em que:

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demonstração. Conforme observa Ait Sahalia (1998. p. 56), qualquer derivativo cujo ativo subjacente siga um processo estocástico de Itô, conforme descrito pelo modelo de movimento browniano geométrico, deve satisfazer essa equação, não somente opções. Essa equação é definida como uma equação diferencial parcial parabólica, que pode ser reduzida por transformação à forma da equação de difusão do calor, que é uma equação bem conhecida na Física.

Vamos transformar inicialmente a equação de black-scholes em uma equação de difusão de calor, que pode ser resolvida usando métodos usuais. Para isso, façamos a seguinte mudança de variável

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$$

e

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$$

Esse primeiro passo é necessário converter a equação com coeficientes variáveis em uma equação com coeficientes constantes, eliminando os multiplicadores $\frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2}$ e $\frac{\partial f(S, t)}{\partial S}$ para isso, escrevamos

$$f(S, t) = f\left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) := Kv(x, \tau) \quad (4.14)$$

como $t \in (0, T)$ e $S \in (0, \infty)$, então $\tau \in \left(0, \frac{1}{\sigma^2 T}\right)$ e $x \in (-\infty, +\infty)$.

Sendo:

$$x = \ln S - \ln K$$

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}$$

$$t = T - \frac{\tau}{(1/2)\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}$$

Os termos da equação (4.14) tornam-se:

$$\frac{\partial f(S, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(S, t)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -K \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial f(S, t)}{\partial S} = \frac{\partial f(S, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{K}{S} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \right) = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2}$$

Substituindo os termos na equação (4.14) de Black-Scholes, obtemos:

$$-K \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} - Sr \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \right) - S^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \left(-\frac{K}{S^2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - rv(x, \tau) = 0$$

$$-K \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} - \mathcal{S}r \left(\frac{K}{\mathcal{S}} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \right) - \mathcal{S}^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \left(-\frac{K}{\mathcal{S}^2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{K}{\mathcal{S}^2} \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - rv(x, \tau) = 0$$

Multiplicando tudo por $\frac{2}{\sigma^2 K}$ temos:

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2} \right) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} v(x, \tau) = 0 \quad (4.15)$$

Definindo $A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$, temos

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + \left(1 - A_1 \right) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + A_1 v(x, \tau) = 0$$

Isto é,

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + (A_1 - 1) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} - A_1 v(x, \tau) \quad (4.16)$$

Agora, para transformados a equação (4.16) para o formato de uma equação de difusão de calor devemos eliminar os termos $\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x}$ e $v(x, \tau)$. Isto pode ser obtido por meio de uma substituição de variável, multiplicando todos os termos da equação por uma exponencial diferente de zero, sem alterar informalmente o conteúdo da equação. A substituição necessária é:

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (4.17)$$

como α e β são constantes arbitrárias, podemos defini-las com qualquer valor, sem alterar o conteúdo da equação. Logo, definindo α e β convenientemente para eliminar os termos citados, temos: $\alpha = -\frac{1}{2}(A_1 - 1)$ e $\beta = -\frac{1}{4}(A_1 + 1)^2$, então obtemos a equação

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}$$

De fato, de (4.17) temos:

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right)$$

$$A_1 v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) A_1$$

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \right).$$

Agora, substituindo os itens acima na equação (4.16) temos:

$$\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \alpha^2 u(x, \tau) - (A_1 - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (A_1 - 1) \alpha u(x, \tau) + (A_1 - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - A_1 u(x, \tau)$$

Aplicando os valores de α e β

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{4}(A_1 - 1)^2 u(x, \tau) + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(A_1 - 1)^2 u(x, \tau) - A_1 u(x, \tau) + \frac{1}{4}(A_1 + 1)^2 u(x, \tau) \\ &= \frac{(A_1 - 1)^2 u(x, \tau) + 4 \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} - 2(A_1 - 1)^2 u(x, \tau) - 4A_1 u(x, \tau) + (A_1 + 1)^2 u(x, \tau)}{4} \\ &= - \frac{(A_1 - 1)^2 u(x, \tau) + 4 \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} - 4A_1 u(x, \tau) + (A_1 + 1)^2 u(x, \tau)}{4} \\ &= \frac{u(x, \tau) \left[-A_1^2 + 2A_1 - 1 - 4A_1 + A_1^2 + 2A_1 + 1 \right] + 4 \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}}{4} \\ &= \frac{4 \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}}{4}. \text{ Daí, temos a equação de calor.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (4.18)$$

cujas condições de fronteira são:

- i) $u(x, 0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, 0\}$
- ii) $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(A_1+1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau\right) u(x, \tau) = 0$
- iii) $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{u(x, \tau)}{\exp\left(\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau\right)} = 1$

Note em particular que a condição ii) implica que $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0$

Note, também, que

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Agora, sabemos que existe várias formas de solucionar a equação de difusão de calor (4.18). Vamos resolvê-la utilizando a transformada de Fourier, antes disso, vamos definir a transformada de Fourier.

Definição 4.5. A **Transformada de Fourier** de uma função $u(x, \tau)$ em relação a x é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) e^{-iwx} dx \quad (4.19)$$

Definição 4.6. A **Transformada Inversa de Fourier** da transformada de uma função $u(x, \tau)$ em relação a x , que recupera a função original $u(x, \tau)$ é definida da seguinte forma:

$$u(x, \tau) = \mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\} e^{iwx} dw \quad (4.20)$$

Aplicando a transformada de Fourier (4.19) em relação a x aos membros da equação (4.18)

$$\mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}\right\} = \mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}\right\} \quad (4.21)$$

Propriedade 4.5.1. De diferenciação da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}\right\} = -w^2 \mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{F}_x\left\{\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial \mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\}}{\partial \tau} \quad (4.23)$$

Aplicando as propriedades (4.22) e (4.23) em (4.21), temos:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\}}{\partial \tau} = -w^2 \mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\} \quad (4.24)$$

Podemos observar que $\mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\}$ é uma função somente de τ , portanto a equação (4.24) torna-se uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes em $\mathcal{F}_x$, isto é, uma equação diferencial da forma $\frac{dy}{dt} - a^2 y = 0$

A solução geral da equação $\frac{dy}{dt} - a^2 y = 0$ é da forma $y = Ce^{-a^2 t}$

Utilizando a solução da equação diferencial em (4.24) tem-se

$$\mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\} = Ce^{-w^2 \tau} \quad (4.25)$$

Logo de (4.25), $\mathcal{F}_x\{u(x, 0)\} = C$, daí temos que

$$\mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\} = \mathcal{F}_x\{u(x, 0)\} e^{-w^2 \tau} \quad (4.26)$$

Aplicando a transformada inversa de fourier ao termo $e^{-w^2\tau}$ em (4.25), obtém-se $g(x, \tau) = \mathcal{F}_x^{-1}\{e^{-w^2\tau}\}$

Daí, calculando $g(x, \tau)$, tem-se

$$g(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2\tau} e^{iwx} dw = \sqrt{\frac{1}{4\pi\tau}} e^{\frac{x^2}{4\tau}} \quad (4.27)$$

Aplicando a transformada de inversa em (4.26) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{F}_x\{u(x, \tau)\}\} &= \mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{F}_x\{u(x, 0)\}e^{-w^2\tau}\} \\ u(x, \tau) &= \mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{F}_x\{u(x, 0)\}\mathcal{F}_x\{g(x, \tau)\}\} \end{aligned}$$

Pela propriedade de convolução da transformada de fourier, sendo $*$ o operador convolução, a equação acima pode ser convertida para a forma:

$$u(x, \tau) = \mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{F}_x\{u(x, 0)\}\mathcal{F}_x\{g(x, \tau)\}\} = u(x, 0) * g(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s, 0)g(x - s, \tau)ds \quad (4.28)$$

Substituindo (4.27) em (4.28) temos:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi\tau}} u_0(s) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\tau}\right) ds,$$

Está equação acima é a solução da equação de difusão de calor

Agora, fazendo a mudança de variável $s = x + y\sqrt{2\tau}$, temos $ds = \sqrt{2\tau}dy$ e podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi\tau}} u_0(s) \exp\left(-\frac{(y)^2 2\tau}{4\tau}\right) \sqrt{2\tau} dy$$

e por fim:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + y\sqrt{2\tau}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \quad (4.29)$$

em que

$$\text{se } s \rightarrow 0 \text{ então } y = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}$$

$$u_0(x + y\sqrt{2\tau}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})} & \text{se } y \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, \\ 0 & \text{se } y < -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} \end{cases}$$

substituindo essa expressão em (4.29), obtemos

$$u(x, \tau) = I_1(x, \tau) - I_2(x, \tau)$$

em que

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

e

$$I_2(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Analisando estas expressões separadamente, temos

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[(A_1+1)y\sqrt{2\tau} - \frac{y^2}{2}]} dy$$

completando agora os quadrados no expoentes da equação acima, somando e subtraindo $\frac{\tau}{2}(A_1+1)^2$ nas exponenciais internas às integrais, temos

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[(A_1+1)y\sqrt{2\tau} - \frac{y^2}{2}] + \frac{\tau}{2}(A_1+1)^2 - \frac{\tau}{2}(A_1+1)^2} dy$$

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[(A_1+1)y\sqrt{2\tau} - \frac{y^2}{2} + \tau(A_1+1)^2 - \tau(A_1+1)^2]} dy$$

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[-(-y + \frac{(A+1)\sqrt{2\tau}}{2})^2 + \frac{\tau(A_1+1)^2}{2}]} dy$$

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} e^{\frac{1}{2}\frac{\tau(A_1+1)^2}{2}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}[-(-y + \frac{(A+1)\sqrt{2\tau}}{2})^2]} dy$$

Fazendo

$$q_1 = -y + \frac{1}{2}(A+1)\sqrt{2\tau} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A+1)\sqrt{2\tau} \text{ e } dq_1 = -dy$$

Se $y \in \left[-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, \infty\right)$ então $q_1 \in \left[\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A+1)\sqrt{2\tau}, \infty\right)$ logo, organizando os termos, temos

$$I_1(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}q_1^2} dq_1$$

Analogamente para $I_2(x, \tau)$ e fazendo $q_2 = -y + \frac{1}{2}(A-1)\sqrt{2\tau} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A-1)\sqrt{2\tau}$, obtemos

$$I_2(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x + \frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A-1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}q_2^2} dq_2$$

Dai, podemos reescrever I_1 e I_2 da seguinte forma

$$I_1(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} N(q_1)$$

e

$$I_2(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x + \frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau} N(q_2)$$

em que N é a função gaussiana dada por

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

Portanto,

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} N(q_1) - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x + \frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau} N(q_2) \quad (4.30)$$

é a solução da equação de calor em função dos termos do problema.

Agora é necessário reverter as substituições para retornar às equações originais.

Lembrando que

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} u(x, \tau) \quad (4.31)$$

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$$

$$A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$$

e

$$f(S, t) = Kv(x, \tau)$$

obtemos, substituindo (4.31) na equação acima

$$f(S, t) = K \left[e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} u(x, \tau) \right]$$

$$f(S, t) = K \left\{ e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} \left[I_1(x, \tau) - I_2(x, \tau) \right] \right\}$$

$$f(S, t) = K \left\{ e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} \left[e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} N(q_1) - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x + \frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau} N(q_2) \right] \right\}$$

$$f(S, t) = KeN(q_1) - Ke^{-A_1r}N(q_2)$$

$$f(S, t) = KeN(q_1) - Ke^{-\frac{2r}{\sigma^2}r}N(q_2)$$

$$f(S, t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2)$$

com

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

$$\text{e } q_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1 + 1)\sqrt{2\tau}, \quad q_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1 - 1)\sqrt{2\tau}$$

Aplicando os valores de x e A_1 , temos

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)2\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)2\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

Agora, substituindo o valor de τ nas equações, obtemos

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

e

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$\therefore$

$$f(S, t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2)$$

em que

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

□

4.6 Exemplo usando a fórmula de Black Scholes

Seja o preço da ação da Petrobras hoje $R\$23,77$ e o preço de exercício $R\$22,50$ e a data de vencimento 21 de Maio, com a volatilidade da ação de 49,07% a.a e a taxa de juros básicas 2,75% a.a, qual o preço da opção de compra da ação?

Aplicando todos esses termos em uma calculadora (4.1) que já possui a equação de black-scholes, tem-se o seguinte resultado:

Calculadora Black-Scholes

Escolha uma forma de iniciar o cálculo

☐ Código da opção

☒ Simular livremente

☒ CALL ☐ PUT

Strike: 22,50

Vencimento: 21/05/2021

Taxa de juros: 2,75

☒ Data referência: 08/04/2021

☐ Dias úteis para venc.

Selecione o item a calcular e informe os demais

☐ Preço da ação: 23,74

☐ Volatilidade impl.: 49,07

☒ Prêmio da opção: 2,30

Calcular

Figura 4.1: Calculadora da fórmula de black-scholes

ou seja, o preço ideal para uma opção de compra de acordo com black-scholes seria $R\$2,30$, se analisarmos a tabela (4.2) de opções da petrobras hoje podemos ver o seguinte preço de opção:

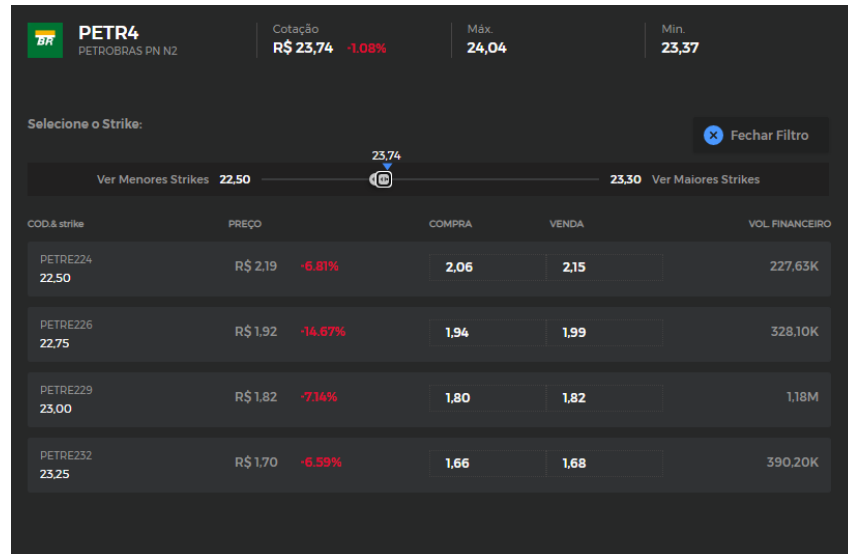


Figura 4.2: Opções da Petrobras

Vê-se que o preço da opção está próximo ao valor ideal dado pela fórmula de black-scholes, a pequena diferença é ocasionada pelas faltas de informações externas da petrobras na fórmula.

5 Conclusão

A Modelagem Matemática é uma área que foi essencial para o desenvolvimento das áreas de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Matemática computacional, entre outros.

Neste trabalho discute-se um problema da economia. Estuda-se o básico do mercado financeiro com auxílio do livro de Hull(2008)[10], com o objetivo de entender seu funcionamento, a diferença de mercados, o que é um derivativo e seus tipos.

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica que buscou principalmente estudar os resultados apresentados no artigo [14], utilizando, para essa finalidade, livros, trabalhos de conclusão de curso, notas de aula e artigos.

Buscando resolver matematicamente o problema da formulação de preços de uma opção europeia, apresentamos a teoria de opção, indicamos o funcionamento de um ativo subjacente com auxílio de conceitos da probabilidade, tais como processos estocásticos, esperança e variância.

Ao estudar o mercado de renda variável, observa-se que as ações movimentam-se aleatoriamente, por este fator, a movimentação das ações relacionadas a um tempo contínuo é um processo estocástico, por esse motivo é um ativo com alta dificuldade de previsão e como a opção deriva de um ativo, sua previsão também possui alto nível de dificuldade. Dessa forma foi desenvolvido os fatores que afetam as opções com o intuito de aumentar o nível de acerto nas previsões e criar uma modelagem mais assertiva.

Ao analisar as hipóteses do modelo de black-scholes pode-se perceber que elas foram criadas de modo a deixar a fórmula da opção de ativos relacionada à apenas duas variáveis. A principal hipótese a ser comentada é a H1), em que μ e σ são constantes. Essa hipótese não condiz com a realidade dos mercados financeiros (Engle, 1982), pois o mercado possui diversas oscilações visíveis até por quem não estuda o mercado.

Na a fórmula do preço de uma opção europeia , pode-se observar alguns problemas, tais como, não ser possível inserir o preço de mercado da opção, a taxa de juros,

o prazo até o vencimento, o preço de exercício da opção e o preço do ativo subjacente para encontrar a volatilidade implícita da opção. O parâmetro σ não pode ser isolado nas fórmulas de precificação de Black e Scholes, por conta disso é necessário calculá-lo por meio de métodos numéricos. As opções são derivativos, por isso seus prêmios e suas volatilidades são funções dos ativos aos quais se baseiam. Logo, tampouco a volatilidade de uma opção (conhecida como volatilidade implícita) poderia ser considerada uma constante.

As taxas de juros constante é impossível no mercado atual, pois as taxas de juros de diversos países são mudadas de acordo com a economia do país através de conferência, por exemplo, no caso do Brasil, existe a Copom (Comitê de Política Monetária), que a cada 45 realizam uma reunião para definir a taxa básica de juros (a selic).

O mercado de renda variável sobre mudanças com algumas simples informações externas, por exemplo, a mudança de presidente de uma empresa, uma nova descoberta, uma pandemia, etc, ou seja, informações que são imprevisíveis, por conta dessa imprevisibilidade o mercado tende a variar bastante, portanto considerar a volatilidade constante é irreal, e isto é uma das grandes falhas do modelo. Ao considerar que volatilidade é constante, a fórmula perde a variação de preço a longo prazo, trazendo diferenças enormes entre o resultado da fórmula e preço de mercado.

A equação de Black-Scholes surgiu após aplicar a estratégia da carteira replicante no modelo de Boness, evitando qualquer tipo de arbitragem. O modelo funciona razoavelmente bem para preços de opções europeias sobre ações, contudo apresenta vários problemas para formar preço de opção sobre a taxas de juros. A equação encontrada é uma EDP, por esse motivo consegue-se resolvê-la através da equação de calor. Existem outras formas de resolver essa equação que não foram comentadas no trabalho.

Em suma, A fórmula do preço de uma opção de compra europeia por Black-Scholes contribuiu bastante com a modelagem do mercado de renda variável, sendo considerado um dos modelos mais utilizados na teoria de finanças modernas, a partir dele, surgiram outros modelos mais aperfeiçoados, tais como o modelo ad hoc Black-Scholes e o modelo HN-GARCH, esses dois novos modelos consideram a volatilidade como uma variável. Esta fórmula é bem eficiente para calcular opções dentro do dinheiro e de curto prazo (data de vencimento mais próxima), pois a volatilidade e taxas de juros básicas tendem a não modificarem-se bastante em um curto prazo, contudo não é boa para calcular opções fora

do dinheiro, pois são opções que estão mais sujeitas a volatilidade, que é tratada como constante no modelo causando grandes diferenças de preços.

A modelagem matemática continua a contribuir com muitos trabalhos, espera-se que os temas apresentados hoje, possam convencer mais pessoas a estudar a teoria de finanças modernas matematicamente.

Referências

- [1] AÏT-SAHALIA, Y.(**Financial engeneering: mathematical models of option pricing and their estimation**. Chigaco: University of Chicago, 1998, 348 p.
- [2] ASSAF NETO, A. **Finanças corporativas e valor**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- [3] BACHELIER, L. **Théorie de la spéculation**, Ann. Sci. École Norm. Sup., 1900, 17, 21-86.
- [4] BAXTER, M,; RENNIE, A.**Financial Calculus: an introduction to derivative pricing**, Cambridge University Press, 1998.
- [5] BLACK, F; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, 1973, p.637-654.
- [6] BLACK, F. Studies of Stock Price Volatility Changes. **Proceedings of the Meeting of the Business and Economics Statistics Section**, American Statistical Association, 1976, .pp. 177-181.
- [7] COX, J.; RUBINSTEIN, M.**Options Markets**, Prentice-Hall, New Jersey, 1985.
- [8] EINSTEIN, A. **Investigations on the Theory of the Brownian movement**, Dover, New York, 1959
- [9] ETHERIDGE, A. **A course in Financial Calculus**, Cambridge University Press, 2002.
- [10] HULL, J. **Options,Futures, and Other Derivatives** , 7 ed. Ed. Pearson Prentice-Hall, 2008.
- [11] KARATZAS, I,; SHREVE S.E. **Brownian motion and stochastic calculus**, Graduate text in Mathematics, Springer-Verlag , 1991, 113.
- [12] LAMBERTON, D,; LAPEYRE,B. **Introduction to stochastic calculus applied to finance**, Chapman & Hall/CRC, 2000.

- [13] LIMA, E. **Curso de análise**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1976.
- [14] MELLO, E. **A equação de Black-Scholes com ação impulsiva**, 2008. 101f.Tese (Doutorado em Ciências-Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. p 7-26.
- [15] MEYER, P. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1982.
- [16] SIQUEIRA,J. de O.; SASSANATI,R. **Formação do preço da opção baseada no valor da informação: uma abordagem bayesiana**, Anais do IV Seminários em Administração(Doutorado em Ciências-Matemática) - Departamento da Faculdade de Economia,Administração e Contabilidade da USP, 1999.