



Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Pós-Graduação em Física

Alexsandro Lucena Mota

SÓLITONS AUTODUAIS: VÓRTICES E SKYRMIONS EM MODELOS COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ

São Luís
2019

Alexsandro Lucena Mota

Sólitons autoduais: vórtices e skyrmions em modelos com quebra da simetria de Lorentz

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor.

Linha de Pesquisa: Teoria de campos com violação da simetria de Lorentz e defeitos topológicos em teoria de campos.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís
2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Mota, Alessandro Lucena.

Sólitons autoduais: vórtices e skyrmions em modelos
com quebra da simetria de Lorentz / Alessandro Lucena
Mota. - 2019.

138 p.

Orientador(a): Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
2019.

1. Simetria de Lorentz - Quebra. 2. Skyrmions. 3.
Sólitons autoduais. 4. Vórtices topológicos.

I. Sifuentes, Rodolfo Alván Casana. II. Título.

Ficha Catalográfica Alexsandro Lucena Mota

Sólitons autoduais: vórtices e skyrmions em modelos com quebra da simetria de Lorentz

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor.

Linha de Pesquisa: Teoria de campos com violação da simetria de Lorentz e defeitos topológicos em teoria de campos.

Aprovado em: 18 de outubro de 2019.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Departamento de Física – UFMA

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior
Departamento de Física – UFMA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva
Departamento de Física – UFMA

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos
Coordenação do Curso de Ciência e Tecnologia - UFMA

São Luís
2019

*À Elisa, Alice e Mel, minhas queridas filhas;
à minha amada Lidianne;
à minha querida mãe;
e a todos os meus irmãos.*

AGRADECIMENTOS

Com imensa gratidão e reconhecimento, gostaria de expressar meu profundo apreço a todas as pessoas que possibilitaram a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, sou eternamente grato ao Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, meu orientador, cuja orientação constante e amizade foram essenciais para a condução desta pesquisa. Seu profundo conhecimento sobre o objeto de estudo e seu comportamento ético em questões científicas foram verdadeiramente inspiradores, enriquecendo meu aprendizado e deixando lembranças inesquecíveis.

Também tenho uma enorme dívida de gratidão com o Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior, cujo incentivo, apoio e envolvimento em discussões sobre física foram de valor inestimável ao longo da minha jornada acadêmica. Sua dedicação e seriedade na construção de uma nova física me motivam a buscar constantemente novos horizontes no conhecimento.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores do Departamento de Física e do Programa de Pós-Graduação em Física da UFMA, cujas aulas foram fundamentais na construção dos conhecimentos basilares necessários ao desenvolvimento deste estudo.

Meu profundo reconhecimento também vai aos amigos do Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos (GFTPC): Poliane Lima de Sousa, Letícia Lisboa, Esdras Barbosa dos Santos, André Cavalcante, Jonas Araújo e Victor Elias Mouchrek. Suas valiosas sugestões e críticas nas primeiras versões deste trabalho contribuíram significativamente para o aprimoramento da redação.

Com profunda emoção, agradeço aos membros mais queridos da minha vida: minha amada esposa, Lidiane Cristina, cujo amor incondicional, confiança, carinho e compreensão foram pilares essenciais em todos os momentos, incentivando-me a persistir nos desafios mais difíceis. Às minhas filhas preciosas, Elisa, Alice e Mel, fontes inesgotáveis de alegria e motivação em minha jornada. À minha mãe, Antônia, por ser exemplo de dedicação e por ter me ensinado valores fundamentais que moldaram meu caráter e me impulsionaram a enfrentar a vida com determinação e respeito ao próximo.

Aos demais membros da minha família: meus irmãos, Anderson e Amanda; primos, tias, tios; e aos meus queridos padrinhos — Ana Lúcia e José Martins, pais da minha amada Lidiane — que me acolheram com carinho como parte da família.

Sei que cada membro da minha família desempenhou um papel essencial nesta conquista, e sou profundamente grato por tudo o que fizeram por mim ao longo dos anos. Cada momento compartilhado, cada palavra de incentivo, cada sorriso e cada abraço me deram forças para seguir em frente e alcançar este objetivo.

A vocês, minha família amada, meu eterno agradecimento. Vocês são meu porto seguro e minha fonte de inspiração. Esta conquista não seria completa sem o amor

e o apoio incondicional que recebi de cada um de vocês. Muito obrigado por estarem sempre ao meu lado, tornando esta jornada ainda mais significativa e especial. Amo todos vocês!

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro que viabilizou a realização desta tese de doutorado. O investimento na educação e na pesquisa científica é essencial para o avanço do conhecimento em nosso país.

A cada um de vocês, minha mais profunda gratidão e reconhecimento. Esta conquista não seria possível sem a contribuição valiosa de cada pessoa mencionada — e de tantas outras que, mesmo não citadas, deixaram sua marca indelével em minha trajetória acadêmica. Muito obrigado a todos!

“I would like to think that the fermion concept was just a good way of talking about the behavior of some semi-classical construction and that it was no more fundamental than renormalization.”

“Gosto de pensar que o conceito de férmion era apenas uma boa maneira de falar sobre o comportamento de alguma construção semiclassicamente inspirada, e que ele não era mais fundamental do que a renormalização.”

Tony Skyrme

RESUMO

Esta pesquisa propõe uma análise da existência de sólitons topológicos por meio da aplicação do formalismo de Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield (BPS) em três modelos efetivos distintos. Os modelos considerados incluem: um modelo Maxwell–Higgs abeliano com derivada covariante não mínima, que quebra a simetria de Lorentz no setor CPT-ímpar; um modelo baby Skyrme generalizado com termo de Chern–Simons; e um modelo Maxwell–baby Skyrme com violação da simetria de Lorentz no setor CPT-par. Em alguns desses modelos, foi necessário ajustar a estrutura da lagrangiana original para garantir a aplicação adequada do formalismo BPS. A análise das soluções autoduais revelou a presença de sólitons com características variadas, incluindo configurações semelhantes aos vórtices de Abrikosov–Nielsen–Olesen, formações do tipo Compacton com decaimento gaussiano e outras que seguem leis de potência.

Palavras Chave: sólitons autoduais; skyrmions; vórtices; quebra da simetria de Lorentz e CPT.

ABSTRACT

This research presents an analysis of the existence of topological solitons through the application of the Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield (BPS) formalism in three distinct effective models. These models include: an Abelian Maxwell–Higgs model with a non-minimal covariant derivative that breaks Lorentz symmetry in the CPT-odd sector; a generalized Chern–Simons baby Skyrme model; and a Maxwell–baby Skyrme model with Lorentz-violating terms in the CPT-even sector. In some of these models, adjustments to the original Lagrangian structure were necessary to ensure the proper application of the BPS formalism. The analysis of self-dual solutions in these models revealed solitons with distinct features, including configurations resembling Abrikosov–Nielsen–Olesen vortices, Compacton-like structures with Gaussian decay, and others exhibiting power-law behavior.

Keywords: self-dual solitons; skyrmions; vortices; Lorentz and CPT symmetry breaking

PUBLICAÇÕES

Resultados diretamente relacionados à tese

À época da redação desta tese (2019), os seguintes trabalhos já haviam sido publicados ou encontravam-se em fase de finalização. Todos apresentam, total ou parcialmente, resultados desenvolvidos durante este doutorado:

- 1 CASANA, Rodolfo; FERREIRA JÚNIOR, Manoel Messias; MOTA, Alexandro Lucena. Topological self-dual configurations in a Maxwell–Higgs model with a CPT-odd and Lorentz-violating nonminimal coupling. **Annals of Physics**, [s. l.], v. 375, p. 179–192, 20 Oct. 2016. DOI: [10.1016/j.aop.2016.09.013](https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.09.013). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491616301981>. Acesso em: 4 out. 2016.
- 2 CASANA, Rodolfo; SANTOS, André C.; FARIAS, Claudio F.; MOTA, Alexandro Lucena. Self-dual solitons in a generalized Chern-Simons baby Skyrme model. **Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, New York, v. 100, n. 4, pt. B, p. 045022-1–045022-14, 14 p., 8 Aug. 2019. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.045022](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.045022). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.045022>. Acesso em: 8 ago. 2019.
- 3 CASANA, Rodolfo; SANTOS, André C.; FARIAS, Claudio F.; MOTA, Alexandro Lucena. Lorentz-violating self-dual gauged baby skyrmions. [São Luís, MA]. Em fase de redação.

Trabalhos em colaboração

No mesmo período, foram também desenvolvidos trabalhos em parceria com outros autores, cujos temas são correlatos, embora não integrem diretamente o corpo da presente tese:

- 1 CASANA, Rodolfo; SANTOS, André C.; FARIAS, Claudio F.; MOTA, Alexandro Lucena. Self-dual solitons in a Maxwell-Chern-Simons baby Skyrme model. **Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, New York, v. 101, n. 4, pt. B, p. 045018-1–045018-12, 12 p., 24 Feb. 2020. DOI: [10.1103/PhysRevD.101.045018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.045018). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.045018>. Acesso em: 24 fev. 2020.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figuras

Figura 1 – O perfil do campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, a linha preta ($\delta = 0$) fornece a solução BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis as soluções para $\delta > 0$	49
Figura 2 – Os perfis do campo de calibre $a(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as pretas ($\delta = 0$) as do Modelo Maxwell-Higgs usual, enquanto que as linhas azuis proveem as soluções para $\delta > 0$	49
Figura 3 – Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas pretas ($\delta = 0$) correspondem a solução para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis são as soluções para $\delta > 0$	50
Figura 4 – Os perfis da densidade de energia BPS, $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$, para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas pretas ($\delta = 0$) correspondem as soluções BPS para o modelo de Maxwell-Higgs e as linhas azuis representam as soluções para $\delta > 0$	51
Figura 5 – Os perfis do campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1, 6, 20$ e $\delta = -0.75, 0, +0.75$. As linhas sólidas, $\delta = 0$, representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs.	51
Figura 6 – Os perfis do campo de calibre $a(\rho)$ para $n = 1, 2, 4$ e $\delta = -0.75, 0, +0.75$. As linhas sólidas, $\delta = 0$, representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs.	52
Figura 7 – Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ para $\delta = -0.75$ (lado esquerdo) e $\delta = +0.75$ (lado direito). Em ambos os casos, $n = 1, 2, 4, 10, 20$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.	53
Figura 8 – Os perfis densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $\delta = -0.75$ (lado esquerdo) e $\delta = +0.75$ (lado direito). Em ambos os casos, $n = 2, 4, 10, 20$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.	53
Figura 9 – Esfera S^2 no espaço interno do campo de Skyrme; a função $f(r)$ faz o papel de um ângulo zenital, enquanto que $N\theta$ é o correspondente ângulo azimutal.	65

Figura 10 – O perfil do campo de Skyrme $h(r)$	71
Figura 11 – O perfil do campo de gauge $a(r)$	71
Figura 12 – O campo magnético $B(r)$	71
Figura 13 – A densidade de energia BPS.	71
Figura 14 – Comportamento das soluções compactons obtidos a partir das equações BPS (4.73). Os pontos azuis, vermelhos e verdes mostram, respectivamente, como o raio do compacton, R , o valor de vácuo do campo de gauge, a_R , e o fluxo magnético, $ \Phi $, mudam com relação a constante de acoplamento g	72
Figura 15 – Comportamento do raio R do compacton (pontos vermelhos) e do valor de vácuo do campo de gauge (linha pontilhada azul) em termos da constante κ	73
Figura 16 – Comportamento do raio R do compacton (pontos verdes) e do valor de vácuo do campo de gauge (linha pontilhada vermelha) em termos da constante λ	73
Figura 17 – Perfis do campo de Skyrme $h(r)$ e do campo de calibre $a(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).	74
Figura 18 – Perfis do campo magnético $B(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).	74
Figura 19 – Perfis da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).	74
Figura 20 – Comportamento do valor de vácuo a_∞ (linha vermelha), do fluxo magnético $ \Phi $ (linha verde) e da quantidade $g^3 a_\infty$ (linha azul) com relação ao parâmetro g das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).	75
Figura 21 – Os perfis $h(r)$ do campo de Skyrme com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).	75
Figura 22 – Os perfis $a(r)$ do campo de calibre com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).	75
Figura 23 – Os perfis $B(r)$ do campo magnético com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).	76
Figura 24 – A densidade de energia BPS $\mathcal{E}(r)$ do com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).	76
Figura 25 – Perfis do campo de Skyrme $h(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	93
Figura 26 – Perfis do potencial vetor $a(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	93
Figura 27 – Perfis do campo magnético $B(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	94

Figura 28 – Perfis da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	94
Figura 29 – Perfis do potencial escalar $A_0(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	94
Figura 30 – Perfis do campo elétrico $E(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	94
Figura 31 – Perfis do campo de Skyrme, $h(r)$, para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	95
Figura 32 – Perfis do potencial vetor $a(r)$ para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	95
Figura 33 – Perfis do módulo do campo magnético $B(r)$ para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	96
Figura 34 – Perfis da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	96
Figura 35 – Perfis do potencial escalar, $A_0(r)$, para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	96
Figura 36 – Perfis do campo elétrico, $E(r)$, para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	96
Figura 37 – Os perfis do campo elétrico, $E(r)$, apresentam inversão para valores pequenos de $\kappa_{0\theta}$	97
Figura 38 – Comportamento do fluxo magnético $ \Phi_B $ para $N = 1, 2$ e 3 com relação ao parâmetro g	98
Figura 39 – Comportamento do fluxo magnético e dos termos de fluxo proporcionais a a_∞ e N com relação ao parâmetro g	98
Figura 40 – Comportamento do valor de vácuo a_∞ (linha vermelha), do fluxo magnético $ \Phi $ (linha verde) e da quantidade ga_∞ (linha azul) com relação ao parâmetro g das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	99
Figura 41 – Comportamento do fluxo magnético $ \Phi_B $ para $N = 1, 2$ e 3 com relação ao parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	99
Figura 42 – Comportamento do fluxo magnético e dos termos de fluxo proporcionais a a_∞ e $N = 1$ com relação ao parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).	99

Figura 43 – Comportamento do valor de vácuo a_∞ (linha vermelha), do fluxo magnético $|\Phi|$ (linha verde) e da quantidade ga_∞ (linha azul) com relação ao parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110). 100

SUMÁRIO

		p.
1	INTRODUÇÃO	23
2	CONCEITOS PRELIMINARES	29
2.1	O formalismo BPS	29
2.2	A quebra das simetrias de Lorentz e CPT	32
2.2.1	A eletrodinâmica de Maxwell-Higgs	33
3	SÓLITONS AUTODUAIS EM UM MH COM UMA DERIVADA COVARIANTE NÃO MÍNIMA COM QSL E CPT	35
3.1	O formalismo BPS do modelo MH abeliano	35
3.1.1	O modelo e as equações de campo	35
3.1.2	A densidade de energia e o formalismo BPS	37
3.1.3	Equivalência entre as equações BPS e as equações de Euler-Lagrange	39
3.2	O modelo Maxwell-Higgs abeliano não mínimo	40
3.3	O formalismo BPS	41
3.4	As soluções autoduais: vórtices BPS	44
3.5	A análise das condições de contorno	46
3.6	Análise numérica	48
3.6.1	Soluções numéricas para $n = 1$ e $-1 \leq \delta \leq +1$	48
3.6.2	Soluções numéricas para $\delta = -0.75, 0, 0 + 0.75$ e $n = 1, 2, 4, 6, 10, 20$	51
4	SÓLITONS AUTODUAIS EM UM CS BABY SKYRME	55
4.1	O modelo Chern-Simons Baby Skyrme restrito	55
4.2	O formalismo BPS: a implementação frustrada.	57
4.3	O modelo modificado	60
4.4	As configurações BPS do modelo modificado	62
4.5	Skyrmions autoduais rotacionalmente simétricos	64
4.6	A análise dos comportamentos nas fronteiras	67
4.6.1	O comportamento na origem	68
4.6.2	O comportamento no vácuo	68
4.6.2.1	O comportamento dos perfis para $1 < \sigma < 2$	69
4.6.2.2	O comportamento dos perfis para $\sigma = 2$	69
4.6.2.3	O comportamento dos perfis para $\sigma > 2$	70
4.7	Soluções numéricas das equações BPS	70
4.7.1	As soluções do tipo compacton	70
4.7.2	As soluções do tipo decaimento exponencial	73

4.7.3	As soluções com decaimento do tipo lei de potência	75
5	SÓLITONS AUTODUAIS NO MODELO MAXWEL BABY SKYRMEL COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ	77
5.1	O modelo Maxwell-Skyrme (1+3)-dimensional	77
5.2	O modelo Maxwell Baby Skyrme com QSL	79
5.3	Aspectos do modelo modificado e suas equações de campo	82
5.3.1	A equivalência entre a lei de Gauss e a equação do campo neutro . . .	86
5.4	Skymions autoduais rotacionalmente simétricos	87
5.5	A análise dos comportamentos assintóticos	90
5.5.1	O comportamento na origem	90
5.5.2	O comportamento nas configurações de vácuo	91
5.6	Soluções numéricas das equações BPS	92
5.6.1	Soluções numéricas para vários valores de g	92
5.6.2	Soluções numéricas para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$	95
5.6.3	Análise das soluções de a_∞ , $ \Phi_B $ e ga_∞ com relação a g e $\kappa_{0\theta}$	98
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
	APÊNDICE A – A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO MAXWELL BABY SKYRME COM QSL PARA SÓLITONS AUTODUAIS	123
	APÊNDICE B – CÁLCULO DE ALGUMAS IDENTIDADES	133

1 INTRODUÇÃO

As [ondas solitárias](#), que são os protótipos dos sólitons, foram observadas pela primeira vez em 1834 pelo engenheiro civil e arquiteto naval escocês, J. S. Russell (1808–1882). Russell estava realizando uma série de experimentos no canal da União, nos arredores de Edimburgo, com o objetivo de determinar o melhor projeto para os barcos que navegariam ali. Durante esses experimentos, ele observou uma elevação de água se erguer na forma de uma onda, após uma súbita parada de um barco que estava sendo puxado por cavalos. Contrariamente ao que Russell esperava, a onda não dissipou, mas manteve sua forma e velocidade por uma longa distância através do canal. Impressionado com o fenômeno, e convencido de que nada semelhante havia sido observado antes, ele realizou uma série de experiências para reproduzir o evento e estudá-lo (1). Russell chamou o fenômeno de ondas de translação (mais tarde conhecidas como ondas solitárias) e as reportou nos encontros anuais de 1842 e 1843 da Associação Britânica para o Avanço da Ciência (British Association for the Advancement of Science), que foram posteriormente publicadas nos anais de 1845 (2).

A descoberta das ondas solitárias por Russell motivou as investigações teóricas realizadas por M. J. de Boussinesq (1842–1929) em 1871(3), J. W. Strutt¹ (1842–1919) em 1879 (4) e por M. B. de Saint-Venant (1797–1886) em 1885(5). No entanto, um artigo seminal mais importante foi o de D. J. Korteweg (1848–1941) e G. de Vries (1866–1934) que, em 1895, derivaram uma [Equação de Korteweg-de Vries \(KdV\)](#), agora conhecida como equação de [KdV](#), que modela a onda solitária que Russell havia observado. Apesar dessas contribuições, a onda solitária foi considerada por bastante tempo uma curiosidade relativamente sem importância no campo das ondas não lineares (6).

O cenário mudou quando, em 1965, N. J. Zabusky (1929–2018) e M. D. Kruskal (1925–2006) perceberam que a equação [KdV](#) poderia ser derivada a partir do limite contínuo de uma [Rede anarmônica](#) unidimensional (7, 8)². Zabusky e Kruskal, ao se valerem das soluções numéricas da equação [KdV](#), simularam a colisão de pulsos de ondas solitárias na rede cristalina (não linear) e observaram que elas preservavam suas formas e velocidades mesmo após colidirem elasticamente, experimentando somente uma mudança de fase. A analogia com a colisão elástica entre partículas foi imediata e eles então cunharam a palavra “[sóliton](#)” para descrever ondas solitárias com esse perfil(7, 10, 8).

A proposta de Zabusky e Kruskal abriu caminho para uma nova abordagem na

¹ Lord Rayleigh

² Em 1955, E. Fermi (1901–1954), J. R. Pasta (1918–1981), S. M. Ulam (1909–1984) e M. Tsingou Menzel (1928–) fizeram investigações acerca da distribuição de energia entre as muitas oscilações possíveis de uma rede cristalina (9).

TQC, na qual os sólitons não deveriam ser interpretados como partículas “elementares”, mas como novas excitações adicionais similares que o sistema possuía em razão de sua natureza não linear (11).³

Nessa nova abordagem, considera-se o caráter topológico das soluções, representado por um único inteiro N , chamado de carga topológica⁴. A topologia das soluções lhes confere a estabilidade necessária para descrever uma partícula. A carga topológica identifica a partícula cuja energia resulta proporcional a $|N|$. Assim, a partícula básica (com carga topológica $N = 1$) é a configuração de campo de energia mínima e classicamente estável, não podendo assim decair em um campo com topológica trivial ou nula. Além disso, a densidade de energia é suave e localizada em alguma região finita do espaço. Configurações de campo assim descritas recebem o nome de sólitons topológicos, em contraposição aqueles topologicamente triviais⁵. Estes sólitons possuem uma simetria de reflexão invertendo o sinal de N , portanto, para cada um deles, há sempre um antissóliton com $N = -1$. Pares sóliton-antissóliton podem se aniquilar ou serem produzidos. Configurações de campo com $N > 1$ são interpretadas como estados de multissóliton, os quais podem se decompor em N sólitons distintos de carga $N = 1$ ou, alternativamente, decaírem em um estado ligado clássico de N sólitons. Alguns exemplos de sólitons topológicos são kinks(20), monopólos magnéticos (21), vórtices (22, 23) e skyrmions (24, 25). Nesta tese, estamos particularmente interessados em estudar vórtices e skyrmions.

Historicamente, o primeiro sóliton topológico descrito como partícula foi o skyrmion (24, 25). O skyrmion surgiu do modelo de Yukawa, uma teoria de campo para núcleons com “spin”-1/2 (prótons e nêutrons) e píons (π^+ , π^- , π^0) de spin-0, na qual os núcleons interagem através da troca de píons (26). T. H. R. Skyrme (1922–1987) acreditava que os núcleons se moviam em um meio piônico clássico e não linear, e que toda a massa nucleônica tinha sua origem nas flutuações do meio. Isso fez com

³ A ideia de partículas como objetos extensos (não pontuais) não era nova, já havia sido considerada anteriormente na literatura, por exemplo, no modelo para vórtices de átomos proposto por Kelvin (12), em modelos sobre a estrutura finita do elétron introduzidos primeiramente por Abraham e Lorentz(13, 14) e posteriormente por Born; Infeld (15), além do modelo do fluido mesônico de Skyrme (16), apenas para citar alguns.

⁴ Com caráter topológico queremos dizer que qualquer solução estática com energia finita é um mapeamento, dado pelas condições de contorno, entre o espaço físico e o espaço interno dos campos. Em particular, se tanto o espaço físico quanto o espaço interno corresponderem a uma hipersfera de dimensão m , então o mapeamento $\Psi : S^m \rightarrow S^m$ corresponde ao m -ésimo grupo de homotopia $\pi_m(S^m)$, o qual, no que lhe concerne, é isomorfo ao grupo dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O isomorfismo ocorre entre dois grupos quando cada elemento de um grupo corresponde a um, e somente um, elemento do outro grupo. Dessa forma, dizemos que o mapeamento é caracterizado por meio da carga topológica, dada por um número inteiro chamado “winding number”, e que descreve o número de vezes em que o espaço interno é coberto à medida que o espaço físico é percorrido. Para uma descrição sucinta sobre topologia e homotopia veja a Ref. (17); para uma descrição mais detalhada veja a Ref. (18).

⁵ Ao contrário dos sólitons topológicos, os sólitons não topológicos possuem as mesmas condições de contorno no infinito para os estados de vácuo. Assim, a exigência de estados de vácuo degenerados não é requerida para os sólitons não topológicos, estando a sua existência condicionada apenas à alguma lei de conservação adicional (19).

que ele reconsiderasse os termos de interação dos píons, sendo conduzido a uma forma particular da densidade lagrangiana em termos de um campo piônico de três componentes, obtendo assim, a partir das equações de campo, soluções topologicamente estáveis. Além destas características interessantes, Skyrme ainda notou que ao quantizar somente a parte bosônica do seu modelo, estados fermiônicos de spin $1/2$ (que podem ser identificados como núcleons) emergiam. Dessa forma, a inclusão de termos nucleônicos independentes e/ou acoplados aos campos piônicos no modelo de Skyrme é algo completamente desnecessário, pois os núcleons emergem naturalmente como os estados solitônicos da teoria (27, 28).⁶

Do ponto de vista geométrico, o skyrmion pode ser compreendido como sendo um mapeamento topologicamente não trivial de uma variedade riemanniana⁷ em outra. Nesse sentido, o funcional de energia do modelo de Skyrme pode ser diretamente derivado a partir de considerações geométricas relacionadas ao mapeamento entre os espaços físico e interno (30). Usando esse esquema, B. Piette e W. Zakrzewski derivaram em 1995 uma versão bidimensional do modelo de Skyrme com o objetivo de estudar a existência de multissólitons e assim descrever suas propriedades.⁸ Eles batizaram o “novo” modelo de “Baby” Skyrme para diferenciá-lo do modelo original. Consequentemente, as soluções de sólitos obtidas foram chamadas de “Baby” skyrmions (33). Tanto a dinâmica quanto a estática de “Baby” skyrmions foram estudadas em detalhes nas Refs. (33–35). O modelo tem aplicações diretas na física da matéria condensada, onde os “Baby” skyrmions fornecem uma descrição eficaz nos sistemas Hall quânticos (36, 37) ou na formação de redes cristalinas (38, 39). Apesar disso, o modelo “Baby” Skyrme é ainda uma teoria de campo não integrável e a maior parte de suas propriedades conhecidas são estabelecidas via simulação numérica de difícil entendimento analítico. A busca por uma simplificação que tornasse possível realizar cálculos analíticos exatos motivou as investigações no chamado modelo “Baby” Skyrme restrito (na ausência do termo sigma)(40–42). Posteriormente, soluções para um modelo “Baby” Skyrme com simetria local $U(1)$, cuja dinâmica do campo de calibre é regida pelo termo de Maxwell, foram também investigadas nas Refs. (43, 44), revelando soluções solitônicas (“Baby” skyrmions) eletricamente neutras. No entanto, “Baby” skyrmions possuidores de carga elétrica também podem ser encontrados (45) por meio da inclusão de um termo CS na densidade lagrangiana do modelo.

⁶ A versão final do modelo de Skyrme emerge como uma teoria de campo não linear com grupo de simetria $SU(2)$ em três dimensões espaciais cujas soluções são sólitos topológicos chamados skyrmions. Cada skyrmion tem uma carga topológica associada que Skyrme identificou como sendo um número bariônico.

⁷ Uma variedade riemanniana é uma superfície multidimensional com curvatura uniforme positiva. Estritamente falando, é um espaço esférico com geometria não euclidiana, cuja propriedade essencial é finitude de seu volume (29).

⁸ É importante frisar que o modelo “Baby” Skyrme, diferentemente do modelo de Skyrme original, requer a inclusão um termo potencial para garantir a estabilidade das soluções. Tal exigência é uma consequência do teorema de Hobart-Derrick (31, 32).

Outro desenvolvimento histórico veio da física da matéria condensada, quando Abrikosov, em 1957, descobriu que a função de energia de GL tem sólitons topológicos (22, 23). Na teoria GL, um campo escalar complexo ϕ é acoplado a um potencial de calibre A_μ . Uma característica básica é que no estado de menor energia o campo ϕ possui módulo constante não nulo e fase arbitrária, $|\phi_0| e^{iN\theta}$, cuja magnitude é determinada pela função de energia GL. A topologia surge do fato de que a variedade (do inglês, *manifold*) de vácuo é um círculo, uma vez que a fase de ϕ_0 é arbitrária. No modelo GL, os sólitons surgem na versão em duas dimensões espaciais e são chamados de vórtices de fluxo magnético. Em três dimensões, como mostrado por Nielsen; Olesen (46), os vórtices se estendem além do plano formando tubos que transportam fluxo magnético através de um supercondutor. Esses vórtices de fluxo magnético persistem na teoria relativística, o modelo MH, e podem ser interpretados como partículas em duas dimensões ou como cordas massivas e relativísticas em três dimensões. Também aqui, vórtices carregados podem ser obtidos pela inclusão de um termo CS na densidade lagrangiana do modelo MH (47–49).

A importante descoberta de que as equações de campo podem ser reduzidas de EDPs de segunda para primeira ordem auxiliou no estudo de sólitons topológicos em muitas teorias de campo. Essas equações de primeira ordem obtidas, via um procedimento de minimização da energia, são chamadas de equações de BPS em homenagem a E. Bogomol'nyi, M. K. Prasad e C. M. Sommerfield (50, 51) que derivaram o método quase que simultaneamente. As equações BPS não envolvem derivadas temporais e suas soluções estáticas podem ser um sóliton ou configurações de multissólitons, denominados sólitons BPS. Nas teorias que suportam equações BPS, a energia é inferiormente limitada pela carga topológica, recaindo na igualdade quando os campos satisfazem essas equações. As soluções BPS também são soluções genuínas das equações de Euler-Lagrange, garantindo que elas sejam pontos estacionários da energia (51).

Particularmente, a redução das equações de Euler-Lagrange do modelo MH em um par de equações BPS acopladas, descrevendo vórtices estáticos e puramente magnéticos, ocorre no valor crítico do acoplamento que separa os regimes supercondutores do Tipo I e do Tipo II (51). Vórtices (e multivórtices) BPS carregados também podem ser obtidos ao acrescentarmos o termo CS tanto no modelo Higgs puro (52–54) quanto no modelo MH (55).

Nos últimos anos, a existência de vórtices BPS em cenários em que a quebra das simetrias de Lorentz e CPT⁹ modifica os modelos do tipo Higgs abeliano acompanhados de campos de calibre tem sido largamente investigada (56–65). O crescente interesse por modelos onde a QSL se manifesta pela presença de algum tipo de acoplamento não mínimo tem se mostrado frutífero, revelando novos efeitos interessantes. Algumas

⁹ Conjugação da carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T).

das contribuições mais recentes estão concentradas no setor de férmions, onde, por exemplo, os acoplamentos não mínimos têm induzido contribuições advindas dos parâmetros da quebra para os momentos de dipolo magnético e elétrico do elétron (66–68), além de contribuições para a energia do hidrogênio mesônico obtidas na Ref. (69); no setor eletrofraco há contribuições advindas a partir dos cálculos das taxas de decaimento para os bósons W e Z , provendo assim “bounds” para os parâmetros da quebra (70, 71); já no setor da interação da forte, os acoplamentos não mínimos têm provido correções para o momento anômalo do múon (72). É uma das propostas desta tese estudar a existência de vórtices BPS em um modelo MH cujo acoplamento não mínimo é composto por um termo CPT-ímpar que quebra a simetria de Lorentz. Esse modelo é descrito em detalhes na seção 3.1 e os resultados ali obtidos foram publicados na Ref. (73)¹⁰.

No que concerne ao modelo Baby Skyrme, um limite BPS foi atingindo somente para um caso aproximado, no qual os campos são descritos sobre uma esfera de raio finito (37). Entretanto, de maneira geral, o modelo Baby Skyrme não satura no limite BPS. Por outro lado, como foi mostrado nas Refs. (42, 74), a versão restrita do modelo Baby Skyrme possui natureza BPS, saturando, portanto, no limite Bogolmo’nyi. Para o caso em que a versão restrita do modelo Baby Skyrme é provida de um campo de calibre com “dinâmica” governada pelo termo de Maxwell, foi mostrado na Ref. (75) que existe um limite BPS na qual as soluções saturam nesse limite desde que o potencial da teoria satisfaça uma dada função superpotencial. A ocorrência de Baby skyrmions que saturam no limite Bogolmo’nyi quando a dinâmica do campo de calibre do modelo restrito é regida pelo termo CS foi apresentada na Ref. (76), porém ali o modelo é provido por um termo de Lifshitz o que implica na quebra da covariância de Lorentz. É um segundo objetivo desta tese obter soluções BPS para um modelo CS Baby Skyrme na qual os campos saturem no limite BPS. Isto é feito em detalhes no capítulo 4 e os resultados obtidos foram publicados na Ref. (77). A possibilidade da existência de soluções BPS em um modelo Maxwell-Chern-Simons Baby Skyrme foi investigada na Ref. (78, 79) e os resultados ainda estão por ser publicados. Além destes temas, a possibilidade da existência de Baby skyrmions em modelo Maxwell Baby Skyrme modificado por termos do setor CPT-par da quebra de simetria de Lorentz é o terceiro objetivo desta tese, sendo esse tema discutido no capítulo 5.

Nesta tese, investigamos a existência de sólitons topológicos a partir da implementação do formalismo BPS em três modelos efetivos específicos, a saber:

- Maxwell-Higgs abeliano com uma derivada covariante não mínima que quebra as simetrias de Lorentz e CPT;
- Chern-Simons Baby Skyrme generalizado, e;

¹⁰No capítulo 3 apresentamos uma introdução para a quebra das simetrias de Lorentz e CPT

- Maxwell Baby Skyrme com termos que quebram a simetria de Lorentz em ambos os setores.

No capítulo 2, fazemos uma breve revisão onde apresentamos o formalismo BPS aplicado a campos de um espaço $(1 + 1)$ -dimensional e um pouco dos aspectos da QSL. No capítulo 3, investigamos o modelo Maxwell-Higgs abeliano com uma derivada covariante não-mínima que inclui um vetor da QSL no setor CPT-ímpar. Implementamos o formalismo BPS e obtivemos equações autoduais descrevendo configurações topológicas eletricamente neutras que possuem energia finita proporcional ao fluxo magnético. Usando o ansatz axialmente simétrico para vórtices, mostramos que os vórtices BPS se comportam como vórtices de ANO.

No capítulo 4, apresentamos o modelo Chern-Simons Baby Skyrme restrito mostrando que a existência de configurações BPS exige que o modelo seja generalizado. Mostramos que o modelo generalizado pode gerar sólitons dos tipos compacton e não compacton.

No capítulo 5, analisamos sólitons BPS em um modelo Maxwell-Skyrme restrito provido com termos CPT-pares em ambos os setores de Maxwell e Skyrme. Obtemos as equações de movimento e a densidade de energia e, em seguida, implementamos o formalismo BPS, escrevendo assim as equações autoduais. Depois disso, utilizamos o ansatz rotacionalmente simétrico adequado as soluções para skyrmions e em seguida apresentamos os perfis numericamente obtidos para campos que decaem com comportamento exponencial com $e^{-\alpha r^2}$ ($\alpha > 0$).

Por fim, no capítulo 6, expomos nossas conclusões e perspectivas.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 O formalismo BPS

Em 1976, [Bogomol'nyi \(51\)](#) apresentou um método para encontrar soluções clássicas estáveis. Esse método consiste em reescrever o funcional de energia a fim de que termos perfeitamente quadráticos surjam explicitamente em sua estrutura matemática. Neste procedimento, a minimização da energia é atingida pela imposição de nulidade sobre os termos quadráticos, conduzindo desta forma a obtenção de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Essas equações, além de serem mais facilmente resolvidas, também recuperam as equações de Euler-Lagrange. Portanto, elas são soluções legítimas para a teoria em consideração. Se todos esses requisitos são atendidos, é dito que os campos saturam no limite Bogomol'nyi.

Outro aspecto interessante deste método, que diz respeito a determinação da energia, é o fato de não ser necessário o conhecimento prévio de qualquer solução explícita para as equações de primeira ordem; basta apenas que se saiba que tais soluções existam. Curiosamente, [Prasad; Sommerfield \(50\)](#), haviam obtido, em 1975, soluções de energia finita para monopolos de 't Hoof e dyon de Julia-Zee pela implementação de um método similar ao de Bogomol'nyi, razão pela qual o método é hoje conhecido como método [BPS](#).

Para fins ilustrativos da aplicabilidade do método, considere um modelo para um conjunto de N campos escalares reais definidos em um espaço-tempo $(1+1)$ -dimensional, regido pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a - V(\varphi^a), \quad (2.1)$$

onde $V(\varphi^a)$ é um potencial de autointeração entre os campos.

A partir da Eq. (2.1), construímos o funcional de energia como sendo dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi^a). \quad (2.2)$$

As N equações de movimento, derivadas a partir do princípio variacional, são expressas como

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^a + \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} = 0. \quad (2.3)$$

Analisando as equações (2.3) observamos que estas fornecem tanto soluções dinâmicas $\varphi^a(x, t)$ quanto estacionárias $\varphi^a(x)$. As soluções dinâmicas podem ser obtidas a partir das soluções estacionárias quando um *boost* de Lorentz, na forma $x \rightarrow \gamma(x - vt)$, com $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2}$, é aplicado as soluções $\varphi^a(x)$. Assim, sem perda de generalidade,

podemos trabalhar somente com as soluções estáticas de modo que o problema central se reduz a resolver a versão estacionária da Eq. (2.3), que agora é escrita sob a forma

$$\frac{d^2\varphi^a}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial\varphi^a}. \quad (2.4)$$

Consequentemente, a densidade de energia também é reescrita na sua versão estacionária, sendo dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left(\frac{d\varphi^a}{dx} \right)^2 + V(\varphi^a). \quad (2.5)$$

Uma solução completa do problema não será possível se não estabelecermos sob quais condições assintóticas $\varphi^a(x)$ deve se comportar. Para tanto, a densidade de energia deve atender alguns critérios que estão conectados com a estabilidade das soluções, tais como: finitude, positividade e ser limitada inferiormente, isto é, deve possuir ao menos um mínimo. Se a densidade de energia satisfaz esses critérios, então, na região de mínima energia, também chamado de vácuo ($|x| \rightarrow \infty$), deve haver alguma solução $\varphi^a(|x| \rightarrow \infty) = \varphi_0^a$ tal que $\mathcal{H}(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Posto isso, conclui-se, a partir de (2.5), que as condições assintóticas que buscamos devem ser válidas para:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{d\varphi^a}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(\varphi^a) = 0. \quad (2.6)$$

Agora, com as condições de contorno já bem estabelecidas, convém escrevermos a energia estacionária do modelo, a qual é dada pela integral da densidade hamiltoniana sobre todo espaço, como segue:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left(\frac{d\varphi^a}{dx} \right)^2 + V(\varphi^a) \right] dx. \quad (2.7)$$

Seguindo o procedimento empregado por Bogomol'nyi na Ref. (51), reescrevemos a energia em uma forma quadrática fechada

$$E = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varphi^a}{dx} \mp w^a \right)^2 dx \pm \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} w^a \frac{d\varphi^a}{dx} dx, \quad (2.8)$$

onde o potencial deve satisfazer a seguinte expressão

$$V(\varphi^a) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N w^a w^a \geq 0, \quad (2.9)$$

e $w^a \equiv w^a(\varphi^a)$.

Neste ponto, notamos que uma escolha apropriada da função w^a permite que a segunda integral na Eq.(2.8) seja facilmente integrado. Dessa forma, escolhemos

$$w^a = \frac{dW}{d\varphi^a}, \quad (2.10)$$

onde $W(\varphi)$ é uma função contínua e diferencial que é por vezes chamada de superpotencial. A escolha (2.10) determinar a seguinte expressão para o potencial

$$V(\varphi^a) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left(\frac{dW}{d\varphi^a} \right)^2 \geq 0. \quad (2.11)$$

Agora, o segundo termo em (2.8) pode ser integrando diretamente

$$\sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} w^a \frac{d\varphi^a}{dx} dx = \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{d\varphi^a} \frac{d\varphi^a}{dx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dW = [W(+\infty) - W(-\infty)], \quad (2.12)$$

permitindo-nos expressar a energia estacionária na seguinte forma

$$E = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varphi^a}{dx} \mp \frac{dW}{d\varphi^a} \right)^2 dx \pm [W(+\infty) - W(-\infty)]. \quad (2.13)$$

As soluções fisicamente aceitáveis são aquelas que minimizam a energia e satisfazem a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\varphi^a}{dx} \mp \frac{dW}{d\varphi^a} = 0, \quad (2.14)$$

sendo tais expressões denominadas equações BPS. Consequentemente, a energia mínima é quantificada pela seguinte expressão

$$E_{\min} = \pm [W(+\infty) - W(-\infty)], \quad (2.15)$$

sendo denominada energia BSP (E_{BPS}).

Note-se que a equação de Euler-Lagrange é recuperada pela Eq.(2.14). A verificação é simples! Primeiro multiplica-se o fator $1/2 \sum_{a=1}^N dW/d\varphi^a$ a todos os termos da Eq. (2.14), resultando assim na seguinte expressão

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \frac{dW}{d\varphi^a} \frac{d\varphi^a}{dx} \mp \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \frac{dW}{d\varphi^a} \frac{dW}{d\varphi^a} = 0. \quad (2.16)$$

No primeiro termo, em (2.16), usamos uma vez mais a Eq. (2.14), enquanto o segundo termo é identificado como sendo a expressão para o potencial dada em (2.11). Com isso, reescrevemos (2.16) tal que a nova expressão resultante é dada por

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left(\frac{d\varphi^a}{dx} \right)^2 - V(\varphi^a) = 0. \quad (2.17)$$

Tomando a derivada desta última expressão com relação a x , obtemos

$$\sum_{a=1}^N \frac{d\varphi^a}{dx} \frac{d^2\varphi^a}{dx^2} - \sum_{a=1}^N \frac{d\varphi^a}{dx} \frac{dV}{d\varphi^a} = 0. \quad (2.18)$$

Fatorando (2.18), encontramos

$$\sum_{a=1}^N \frac{d\varphi^a}{dx} \left(\frac{d^2\varphi^a}{dx^2} - \frac{dV}{d\varphi^a} \right) = 0. \quad (2.19)$$

E é imediato que o termo entre parênteses corresponde a Eq. (2.14), ou seja,

$$\frac{d^2\varphi^a}{dx^2} - \frac{dV}{d\varphi^a} = 0. \quad (2.20)$$

Essas soluções podem ser classificadas segundo suas características topológicas por meio da corrente topológica. Por simplicidade, considere o caso em que a corrente topológica é composta por um único campo escalar

$$j^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi, \quad (2.21)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$ e $\epsilon_{\mu\nu}$ é um tensor de Levi-Civita (1+1)-dimensional, com $\epsilon_{01} = 1$. A corrente topológica é claramente conservada, pois $\partial_\mu j^\mu = 0$. A densidade de carga associada nos conduz a carga topológica

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j^0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2} [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)]. \quad (2.22)$$

Como se nota, a carga topológica possui dependência somente com as propriedades assintóticas do campo. A partir desta observação, podemos especificar os tipos de soluções possíveis. As soluções não topológicas (vácuo trivial), com $Q_T = 0$, conectam um mínimo a ele mesmo, ou seja, $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty)$ e as soluções topológicas, com $Q_T \neq 0$, as quais interligam dois pontos críticos distintos do potencial, ou seja, $\varphi(+\infty) \neq \varphi(-\infty)$.

Para finalizar essa seção, considere a seguinte média para função w definida para um único campo escalar

$$\langle w \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w \frac{d\varphi}{dx} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx} = \frac{E_{\min}}{Q_T}. \quad (2.23)$$

Comando com as expressões (2.12) e (2.22), notamos que as integrais contidas no numerador e no denominador correspondem, respectivamente, a energia mínima e a carga topológica. Logo, é imediato concluir que a energia mínima é proporcional a carga topológica

$$E_{\min} = \langle w \rangle Q_T. \quad (2.24)$$

Essa é uma observação feita por [Bogomol'nyi \(51\)](#) em seu artigo de 1976 e, via de regra, é algo que sempre deve ocorrer em modelos com estados BPS.

2.2 A quebra das simetrias de Lorentz e CPT

A ideia de uma possível quebra da simetria de Lorentz tem sua origem no âmbito da teoria de cordas quando [Kostelecký; Samuel \(80\)](#) investigaram a possibilidade de uma QESL num cenário em que o vácuo perturbativo de uma teoria de cordas bosônicas abertas é instável, gerando assim massas quadradas negativas e, consequentemente,

valores esperados de vácuo não nulos para tensores de Lorentz (80–83). Neste cenário, conforme discutido por [Kostelecký; Potting \(84, 85\)](#), a quebra espontânea da simetria CPT estaria necessariamente associada com a QESL. Mais tarde, porém, [Greenberg \(86\)](#) demonstrou que embora a QSL seja condição necessária para que ocorra a quebra da simetria CPT, esta não se consolida como uma condição suficiente, já que uma TQC interagente, com QSL, pode tanto quebrar quanto preservar a simetria CPT. Por outro lado, se a quebra da simetria CPT ocorre, então necessariamente ocorre a QSL.

A necessidade de uma descrição realística a partir da teoria de cordas que pudesse conectar tanto a QSL quando a quebra da simetria CPT com uma possível detecção experimental, conduziu a construção do arcabouço teórico que é agora conhecido como MPE (87, 88). O MPE engloba o MP e acopla termos da QSL e da quebra de CPT a todos os campos do MP permitindo tratar em seu bojo os efeitos da QSL e da quebra da simetria CPT (85, 87, 88). O MPE pode ser entendido como um limite de baixas energias de uma teoria fundamental cuja dinâmica preserva a covariância de Lorentz e promove a QESL (87–89). As investigações no âmbito do MPE abarcam principalmente os setores de férmions (90–97), eletromagnético (98–105), não abeliano (70–72) e gravitacional (106–111).

2.2.1 A eletrodinâmica de Maxwell-Higgs

A modo de ilustrar a implementação ou inclusão dos termos que quebram as simetrias de Lorentz e CPT usaremos, como exemplo, a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs a qual é descrita pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{MH} = \mathcal{L}_{Gauge} + \mathcal{L}_{Higgs}, \quad (2.25)$$

onde

$$\mathcal{L}_{Gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu\phi)^\dagger (D^\mu\phi) + m^2\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^\dagger\phi)^2, \quad (2.27)$$

em que ϕ é um campo escalar complexo, $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético e m e λ são constantes reais positivas. As contribuições aqui consideradas da QSL são:

$$\mathcal{L}_{Higgs}^{CPT-par} = (K_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu\phi)^\dagger (D_\nu\phi), \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}_{Gauge}^{CPT-odd} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (K_{AF})_\mu A_\nu F_{\rho\sigma}, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{L}_{Gauge}^{CPT-par} = -\frac{1}{4}(K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, \quad (2.30)$$

levando em conta que $(K_{\phi\phi})^{\mu\nu}$, $(K_{AF})_\mu$ e $(K_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ são os campos tensoriais que quebram explicitamente a simetria de Lorentz; o primeiro e o terceiro preservam a simetria CPT (esse tipo de tensor é chamado de CPT-par) e o segundo quebra a simetria CPT (tensor

desse tipo é chamado de CPT-ímpar). O tensor $(K_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ pode ter a parte real simétrica e a imaginária antisimétrica, o segundo $(K_{AF})_\mu$ é um vetor real e sua contribuição (2.29) é chamado de termo de Carroll-Field-Jackiw. O tensor $(K_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ é real e possui as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, a saber:

$$\begin{aligned} (K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} &= -(K_F)^{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} = -(K_F)^{\mu\nu\beta\alpha}, \\ (K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} &= (K_F)^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} + (K_F)^{\mu\alpha\beta\nu} + (K_F)^{\mu\beta\nu\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

além do duplo traço nulo:

$$(K_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.32)$$

resultando num total de 19 componentes independentes, das quais 10 são do setor birrefringente e as 9 componentes restantes pertencem ao não birrefringente. As componentes birrefringentes são assim designadas porque introduzem a birrefringência no modelo, uma propriedade que está associada à rotação do plano de polarização da luz em decorrência de diferentes modos de polarização se propagarem com velocidades de fase distintas.

As propriedades de $(K_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ são exigidas para que a contribuição da QSL não seja trivialmente nula por contração dos índices. Já as condições de simetria para $(K_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ são impostas de antemão para excluir termos supérfluos absorvidos em 4-divergências, enquanto a condição de duplo traço ignora termos que podem ser suprimidos por uma renormalização do termo cinético (2.26).

Nesta tese, investigaremos somente o setor não birrefringente, cujas componentes são parametrizadas pelo tensor $\kappa^{\mu\nu}$ (103):

$$(K_F)^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\alpha} \kappa^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} \kappa^{\mu\beta} + g^{\nu\beta} \kappa^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta} \kappa^{\nu\alpha} \right). \quad (2.33)$$

O tensor $\kappa^{\mu\nu}$ é simétrico, tem o traço nulo e possui todas as componentes não birrefringentes, representadas como:

$$\kappa^{\mu\nu} = (K_F)^{\mu\nu\alpha}{}_\alpha. \quad (2.34)$$

3 SÓLITONS AUTODUAIS NO MODELO MAXWELL-HIGGS ABELIANO COM UMA DERIVADA COVARIANTE NÃO MÍNIMA QUE QUEBRA AS SIMETRIAS DE LORENTZ E CPT

Acoplamentos não mínimos dotados de termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT têm sido, nos últimos anos, tema de extensa investigação em versões estendidas do MP (112–117, 70–72). As implicações da inclusão de acoplamentos não mínimos em campos fermiônicos, por exemplo, têm sido reportadas em espalhamentos ultrarrelativísticos do tipo férmion-férmion (118), na geração de correções radiativas (95, 119–121), indução de correções para os momentos de dipolo magnético e elétrico do elétron (66–68), além de correções na energia do hidrogênio mesônico obtidas na Ref. (69).

Recentemente, a inclusão de acoplamentos não mínimos tanto no setor eletrofraco quanto no setor das interações fortes tem provido “bounds” para os parâmetros da quebra a partir das taxas de decaimento obtidas para os bósons W e Z (70, 71), além de correções para o momento anômalo do múon (72).

Até agora, todas as investigações a respeito da existência de configurações que suportem sólitons em teorias de campo com QSL tem sido feitas ou por meio de modificações nos termos cinéticos dos campos, ou por meio do procedimento de redução dimensional. Nosso objetivo é, portanto, analisar os efeitos de um acoplamento não mínimo que viola as simetrias de Lorentz e CPT, proposto por (122, 123), nas configurações autoduais de um modelo Higgs abelianos $(1+2)$ -dimensional.

3.1 O formalismo BPS do modelo MH abeliano

3.1.1 O modelo e as equações de campo

O modelo que queremos considerar é uma versão $(1+2)$ -dimensional do modelo Maxwell-Higgs abeliano, com simetria local $U(1)$, cuja densidade lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - U(|\phi|). \quad (3.1)$$

Aqui, como usual, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de intensidade do campo eletromagnético, $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$ é a derivada covariante que acopla minimamente o campo de calibre (do inglês *gauge*) $A_\mu(x)$ ao campo escalar $\phi(x)$, e $U(|\phi|)$ é um potencial, ainda a ser determinado, que descreve a interação do campo escalar consigo próprio, ou seja, uma autointeração. Além disso, a métrica do espaço-tempo é cartesiana com assinatura $(+--)$, cujas coordenadas do espaço-tempo são rotuladas por índices gregos que varrem os valores $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$, enquanto que as coordenadas puramente espaciais são rotuladas por índices latinos que varrem os valores $i, j, \dots = 1, 2$. Finalmente, a

análise dimensional mostra que a constante de acoplamento, e , e os campos $A_\mu(x)$ e $\phi(x)$ têm dimensões de $M^{1/2}$, enquanto que o potencial $U(|\phi|)$ (e a própria densidade lagrangiana $\mathcal{L}$) tem dimensão de M^3 .

As equações de movimento associadas ao modelo, advindas da equação de Euler-Lagrange, são dadas por

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu, \quad (3.2)$$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\partial U(|\phi|)}{\partial \phi^*}, \quad (3.3)$$

onde

$$J_\mu = ie [\phi (D_\mu \phi)^* - \phi^* (D_\mu \phi)] = ie [\phi (\partial_\mu \phi)^* - \phi^* (\partial_\mu \phi)] - 2e^2 A_\mu |\phi|^2, \quad (3.4)$$

é a corrente conservada, ou seja,

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

Estamos interessados em soluções estacionárias das equações de movimento, ou seja, em configurações tais que os campos não possuem dependência temporal. Neste cenário, a lei de Gauss, obtida a partir Eq. (3.2), é expressa como

$$\partial_i \partial_i A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (3.5)$$

onde usamos a densidade de carga dada por

$$J_0 = -2e^2 A_0 |\phi|^2. \quad (3.6)$$

Nota-se aqui que a condição $A_0 = 0$ satisfaz identicamente a lei de Gauss sendo, portanto, uma possível solução da mesma, implicando assim em configurações puramente magnéticas. Considerando-se que sejam essas as condições, então, a lei de Ampère, que também advém da Eq. (3.2), apresenta-se na forma

$$\epsilon_{ij} \partial_j B = J_i, \quad (3.7)$$

onde o campo magnético é dada por $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$, enquanto que a componente espacial da densidade de corrente é dada por

$$J_i = ie [\phi (\partial_i \phi)^* - \phi^* (\partial_i \phi)] - 2e^2 A_i |\phi|^2. \quad (3.8)$$

Similarmente, a equação do campo de Higgs é expressa na seguinte forma

$$D_k D_k \phi = \frac{\partial U(|\phi|)}{\partial \phi^*}. \quad (3.9)$$

3.1.2 A densidade de energia e o formalismo BPS

Como será visto adiante, a interação $U(|\phi|)$ pode ser determinada pela minimização da densidade de energia do modelo. Por sua vez, esta última é obtida por meio da densidade hamiltoniana (estacionária), a qual escrevemos como

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}B^2 + |D_k\phi|^2 + U(|\phi|). \quad (3.10)$$

Aqui, usamos $F_{ij} = \epsilon_{ij}B$ e levamos em conta condição de calibre $A_0 = 0$.

A densidade de energia deve ser nula no infinito, o que permite impomos as seguintes condições de contorno (124, p. 76)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} B = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} D_k\phi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(|\phi|) = 0, \quad (3.11)$$

a quais determinarão o valor de vácuo sobre os campos.

Visto que a densidade hamiltoniana do sistema não depende explicitamente das coordenadas do espaço-tempo, a integração desta sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$ resulta completamente equivalente à energia total do modelo, e assim,

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H} d^2x = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[\frac{1}{2}B^2 + |D_k\phi|^2 + U(|\phi|) \right]. \quad (3.12)$$

Agora, tendo em vista a minimização da energia, implementamos o método **BPS**, que consiste em escrevermos a energia como a soma de termos quadráticos. Fazemos isso usando as seguintes identidades¹

$$\frac{1}{2}B^2 + U(|\phi|) = \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm \sqrt{2U}B, \quad (3.13)$$

$$|D_k\phi|^2 = |D_{\pm}\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2e}\epsilon_{ij}\partial_i J_j, \quad (3.14)$$

onde

$$D_{\pm}\phi = D_1\phi \pm iD_2\phi. \quad (3.15)$$

Como consequência, ao substituírmos as expressões (3.13) e (3.14) na Eq. (3.12), a energia é reescrita como

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[\frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm \left(\sqrt{2U} + e|\phi|^2 \right) B \right] \pm \frac{1}{2e} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ji}\partial_j J_i. \quad (3.16)$$

Neste ponto, observamos que sob a segunda das condições (3.11) o último termo do lado direito na Eq. (3.16) resultará nulo, não contribuindo, portanto, para a energia total do modelo.

Finalmente, de modo a completar a implementação do formalismo **BPS**, devemos garantir que a contribuição não quadrática contida na primeira integral da Eq. (3.16)

¹ Na [Seção B.1](#) apresentamos em detalhes os cálculos que conduzem a Eq. (3.14)

seja proporcional a carga topológica. Como tem sido observado por da Hora Santos, na Ref. (125), a corrente topológica para o modelo MH é expressa por

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \quad (3.17)$$

Dessa forma, a carga topológica do modelo MH é dada por

$$Q_T = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x J_T^0 = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ij} \partial_i A_j = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x B = \Phi_B, \quad (3.18)$$

onde Φ_B é o fluxo magnético. A partir desse resultado, fica claro que a contribuição topológica para a energia deve ser proporcional ao fluxo magnético. Portanto, devemos requerer que o termo multiplicando o campo magnético seja uma constante não nula². Com isso, escrevemos

$$\sqrt{2U} + e|\phi|^2 = C. \quad (3.19)$$

Por meio desta expressão, determinamos o potencial como sendo dado por

$$U(|\phi|) = \frac{1}{2} \left(C - e|\phi|^2 \right)^2, \quad (3.20)$$

que, por sua vez, é capaz de prover as soluções BPS para o modelo.

Agora, podemos fazer uso da terceira das condições de contorno que foram expressas na Eq. (3.11), a qual impõe que o potencial seja nulo no vácuo, ou seja, quando $|x| \rightarrow \infty$. Esse procedimento é suficiente para determinarmos a constante C como sendo dada por

$$C = e \left(\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\phi| \right)^2. \quad (3.21)$$

O limite entre parênteses provê a condição de contorno no infinito para o campo de Higgs, a qual, como usual, deve ser configurada como tendo valor finito. Tal valor finito, que aqui rotulamos pela letra latina v , caracteriza o valor esperado de vácuo para o campo de Higgs. Desse forma, escrevemos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\phi| = v, \quad (3.22)$$

e, com isso, a constante em (3.20) fica finalmente escrita como $C = ev^2$. Assim, o potencial (3.20) assume a forma final dada por

$$U(|\phi|) = \frac{e^2}{2} \left(v^2 - |\phi|^2 \right)^2. \quad (3.23)$$

Visto que o campo de Higgs ϕ é complexo, sempre podemos denotá-lo por meio de sua representação polar, $\phi = |\phi| e^{i\theta}$, onde θ é uma fase no espaço interno de ϕ . Assim, de acordo essa prescrição, o valor do campo de Higgs no vácuo é dado por

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi = v e^{i\theta}, \quad (3.24)$$

² Se a constante for nula recairemos em uma configuração de vácuo com topologia trivial e energia mínima não degenerada. Assim, estaríamos descrevendo um objeto não topológico. Os vórtices são necessariamente topológicos.

onde fica claro que o potencial (3.23) possui infinitos vácuos formando um círculo de raio $|\phi| = v$.

Usando (3.23), agora reescrevemos a energia total do modelo, (3.16), na forma

$$E = E_{BPS} + \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp e \left(v^2 - |\phi|^2 \right) \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\}, \quad (3.25)$$

onde o termo E_{BPS} é a energia mínima do modelo, também denominada de energia BPS, sendo esta expressa por

$$E_{BPS} = \pm e v^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2x B = \pm e v^2 \Phi_B. \quad (3.26)$$

É apropriado e oportuno realçar que o sinal (+) está associado ao defeito com $\Phi_B > 0$, enquanto que o sinal (−) ao anti-defeito com $\Phi_B < 0$.

Agora, já estamos em condições de implementar a prescrição de Bogomol'nyi (51), a qual afirma que o mínimo da energia será obtido se os termos quadráticos da segunda integral na Eq. (3.25) forem todos nulos, ou seja, se os campos satisfazem as equações BPS

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (3.27)$$

$$B = \pm e \left(v^2 - |\phi|^2 \right), \quad (3.28)$$

as quais são manifestadamente equações diferenciais de primeira ordem. A seguir, na próxima subseção, veremos que tais equações satisfazem as equações de segunda ordem (Euler-Lagrange) sendo, portanto, soluções legítimas do modelo (3.1).

3.1.3 Equivalência entre as equações BPS e as equações de Euler-Lagrange

As Eqs. (3.27) e (3.28) reproduzem identicamente as equações de segunda ordem (Euler-Lagrange). A fim de verificarmos que este é de fato o caso, aplicamos o operador $D_{\mp}$ sobre a Eq. (3.27) e com isso encontramos

$$0 = D_{\mp} D_{\pm} \phi = D_k D_k \phi \pm i \epsilon_{ij} D_i D_j \phi. \quad (3.29)$$

Agora, podemos fazer uso da identidade $\epsilon_{ji} D_j D_i \phi = -i e B \phi$, Eq. (B.13), para reescrevermos a expressão acima como

$$0 = D_k D_k \phi \pm e B \phi. \quad (3.30)$$

Por fim, usando a Eq. (3.28), recuperamos a equação estacionária do campo de Higgs na forma

$$0 = D_k D_k \phi + e^2 \left(v^2 - |\phi|^2 \right) \phi, \quad (3.31)$$

que é equivalente a Eq. (3.9) quando fazemos

$$\frac{\partial U(|\phi|)}{\partial \phi^*} = -e^2 \left(v^2 - |\phi|^2 \right) \phi. \quad (3.32)$$

Por outro lado, aplicando o operador $\epsilon_{ij}\partial_j$ sobre (3.28) encontramos

$$\epsilon_{ij}\partial_j B = \mp e\epsilon_{ij}\partial_j |\phi|^2, \quad (3.33)$$

onde o lado esquerdo claramente coincide com a lei de Ampère (3.7). O lado direito pode ser obtido ao substituirmos (3.27), a qual escrevemos na forma $D_1\phi \pm iD_2\phi = 0$, diretamente na corrente (3.8). Esse procedimento provê que as componentes da corrente sejam dadas por $J_1 = \mp e\partial_2 |\phi|^2$ e $J_2 = \pm e\partial_1 |\phi|^2$. Essas duas expressões podem ser reescritas na forma de uma única expressão

$$J_i = \mp e\epsilon_{ij}\partial_j |\phi|^2, \quad (3.34)$$

na qual, como se vê, o lado direito corresponde exatamente ao direito da Eq. (3.33), mostrando assim que a lei de Ampère é integralmente recuperada.

Finalmente, podemos utilizar as equações BPS para reescrever a densidade de energia como

$$\mathcal{H} = B^2 + |D_k\phi|^2, \quad (3.35)$$

onde aqui fizemos uso da Eq. (3.28).

Na próxima seção, empregaremos as técnicas aqui demonstradas em uma versão do modelo Maxwell-Higgs abeliano modificado por um acoplamento não mínimo composto de um vetor de fundo CPT-ímpar que viola a simetria de Lorentz.

3.2 O modelo Maxwell-Higgs abeliano não mínimo

O modelo (1+3)-dimensional com violação das simetrias de Lorentz e CPT-ímpar na qual nossa investigação se baseia é definida pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (\mathcal{D}_\mu\phi)^* (\mathcal{D}^\mu\phi) - U(|\phi|, \partial_\mu|\phi|), \quad (3.36)$$

onde $\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi + iF_{\mu\nu}\xi^\nu\phi$ é a derivada covariante não mínima do campo de Higgs abeliano, ξ^μ é um quadrivetor fixo que viola as simetrias de Lorentz e CPT e U é uma apropriada interação definida positiva a ser determinada.

As equações de movimento dos campos de calibre e Higgs são dadas por

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{J}^\mu = e\mathcal{J}^\mu, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi - \partial_\mu \frac{\partial U}{\partial \partial_\mu \phi^*} + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0 \quad (3.38)$$

cuja densidade de corrente,

$$\mathcal{J}_\mu = i(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) - 2eA_\mu|\phi|^2 + 2F_{\mu\nu}\xi^\nu|\phi|^2, \quad (3.39)$$

é conservada, ou seja,

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0.$$

A fim de estudarmos as configurações planares do modelo (3.36), adotamos a seguinte projeção: $\partial_3 \phi = 0$, $A_3 = 0$ e $\partial_3 A_\mu = 0$. Os índices gregos denotam $\mu, \nu = 0, 1, 2$, enquanto que os índices latinos, $j, k = 1, 2$.

No regime estacionário, a Eq. (3.37) provê a seguinte lei de Gauss:

$$\partial_k \partial_k A_0 + \xi_k \partial_k \mathcal{J}_0 = -e \mathcal{J}_0, \quad (3.40)$$

com $\mathcal{J}_0$ sendo dado por

$$\mathcal{J}_0 = -2eA_0 |\phi|^2 + 2\xi_j (\partial_j A_0) |\phi|^2, \quad (3.41)$$

e notamos, tal como ocorre no modelo MH usual, que a condição de calibre $A_0 = 0$ satisfaz identicamente a lei de Gauss, implicando mais uma vez em configurações puramente magnéticas para os campos.

Similarmente, a lei de Ampère estacionária é lida como

$$\epsilon_{kj} \partial_j B - \xi_j \partial_j \mathcal{J}_k = e \mathcal{J}_k, \quad (3.42)$$

onde ϵ_{kj} é o símbolo bidimensional de Levi-Civita ($\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$). Aqui, o campo magnético planar é definido por $B = F_{12}$ e $\mathcal{J}_k$ passa a ser expresso como

$$\mathcal{J}_k = i(\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2eA_k |\phi|^2 + 2\xi_0 |\phi|^2 (\partial_k A_0) - 2\epsilon_{kj} \xi_j B |\phi|^2, \quad (3.43)$$

que após o uso da condição $A_0 = 0$, assume a forma reduzida

$$\mathcal{J}_k = i(\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2eA_k |\phi|^2 - 2\epsilon_{kj} \xi_j B |\phi|^2, \quad (3.44)$$

e aqui, notamos que a dependência do parâmetro de VL, ξ_0 , desapareceu.

A equação estacionária do campo de Higgs é agora lida como

$$\mathcal{D}_k \mathcal{D}_k \phi + \partial_k \frac{\partial U}{\partial \partial_k \phi^*} - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0, \quad (3.45)$$

onde a derivada covariante não mínima é dada por

$$\mathcal{D}_k \phi = \partial_k \phi - ieA_k \phi - i\epsilon_{kj} \xi_j B \phi. \quad (3.46)$$

Finalmente, notamos que além da componente ξ_0 , também a componente ξ_3 não aparecem nas Eqs. (3.42) e (3.45), e, portanto, não participam da formação das configurações com carga total nula do modelo, carregando, como veremos, somente fluxo magnético.

3.3 O formalismo BPS

Antes de considerarmos o caso estacionário, convém fazemos uma rápida inspeção sobre a densidade de energia do modelo (3.36), a qual expressamos na seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (F_{0k})^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + |\mathcal{D}_0 \phi|^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2 + U + \xi_0 F_{0k} \mathcal{J}_k. \quad (3.47)$$

Aqui, notamos que devido à última contribuição do lado direito, a densidade de energia não é, “a priori”, definida positiva. No entanto, vimos que no regime estacionário a lei de Gauss é trivialmente satisfeita pela condição de calibre $A_0 = 0$ provendo assim configurações com carga total nula. Desse modo, F_{0k} é automaticamente nula e o último termo em (3.47) desaparece, garantindo assim a positividade da densidade energia sem que qualquer restrição seja imposta sobre a componente ξ_0 do vetor de fundo. Assim sendo, a densidade de energia estacionária do modelo se torna

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B^2 + |\mathcal{D}_k\phi|^2 + U. \quad (3.48)$$

Como usual, a densidade de energia deve ser nula no infinito, exigência essa que impõem as seguintes condições de contorno

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} B = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{D}_k\phi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} U = 0. \quad (3.49)$$

Com o objetivo de implementar o formalismo BPS, escrevemos agora a energia total do modelo

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left(\frac{1}{2}B^2 + |\mathcal{D}_k\phi|^2 + U \right), \quad (3.50)$$

onde a condição de calibre $A_0 = 0$ foi levada em consideração.

Neste ponto, propormos a seguinte definição

$$\mathcal{D}_\pm\phi = \mathcal{D}_1\phi \pm i\mathcal{D}_2\phi \quad (3.51)$$

por meio da qual é possível estabelecer, após alguma manipulação algébrica, a seguinte identidade³

$$|\mathcal{D}_k\phi|^2 = |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 \pm \left(e|\phi|^2 + \xi_j\partial_j|\phi|^2 \right) B \pm \epsilon_{ik}\partial_i\mathbb{J}_k, \quad (3.52)$$

onde definimos

$$\mathbb{J}_k = \frac{1}{2}\mathcal{J}_k - \epsilon_{jk}\xi_j B |\phi|^2, \quad (3.53)$$

com $\mathcal{D}_k\phi$ sendo dada pela Eq. (3.46). Tal identidade nos permite obter a seguinte expressão para energia

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[\frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2U} + e|\phi|^2 + \xi_j\partial_j|\phi|^2 \right) \right] \pm \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ik}\partial_i\mathbb{J}_k. \quad (3.54)$$

Mais uma vez, sob condições de contorno desejáveis, Eq. (3.49), o último termo do lado direito resulta nulo, não contribuindo, portanto, para energia total do modelo. Além disso, com o objetivo de garantir que a energia seja mínima e proporcional ao fluxo do campo magnético, impomos que

$$\sqrt{2U} + e|\phi|^2 + \xi_j\partial_j|\phi|^2 = ev^2, \quad (3.55)$$

³ Na Seção B.2 apresentamos em detalhes os cálculos que conduzem a Eq. (3.52)

onde, como antes, v é o valor esperado de vácuo para o campo de Higgs. A partir desta condição, determinarmos a interação U como sendo dada por

$$U(|\phi|, \partial_\mu |\phi|) = \frac{1}{2} \left(ev^2 - e|\phi|^2 - \xi_j \partial_j |\phi|^2 \right)^2. \quad (3.56)$$

Vemos assim, que para prover configurações autoduais, a violação de Lorentz induz a presença de uma derivada sobre o campo de Higgs no termo de interação. Este padrão já foi observado em outros modelos Maxwell-Higgs na presença da violação de Lorentz (56, 126).

Usando a condição de contorno imposta sobre o potencial na Eq. (3.49) encontramos que a condição de contorno sobre o campo de Higgs no infinito será

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\phi| = v, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_j |\phi| = 0, \quad (3.57)$$

onde mais uma vez identificamos v como sendo o valor esperado de vácuo para o campo de Higgs. Novamente, o modelo possui infinitos vácuos formando uma círculo de raio $|\phi| = v$.

Retornando a Eq. (3.54), a energia pode ser reescrita como segue

$$E = E_{BPS} + \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[\frac{1}{2} \left[B \mp \left(ev^2 - e|\phi|^2 - \xi_j \partial_j |\phi|^2 \right) \right]^2 + |\mathcal{D}_\pm \phi|^2 \right], \quad (3.58)$$

onde

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2x B = \pm ev^2 \Phi_B \quad (3.59)$$

é o limite inferior da energia (limite BPS), sendo esta proporcional ao fluxo magnético. Este limite é saturado pelos campos que satisfazem as equações autoduais, ou BPS,

$$\mathcal{D}_\pm \phi = 0 \quad \text{e} \quad B = \pm \left(ev^2 - e|\phi|^2 - \xi_j \partial_j |\phi|^2 \right). \quad (3.60)$$

Aqui, observamos que a segunda equação BPS depende do vetor VL de fundo (magnitude e direção). Dependência similar tem sido também reportada por outros modelos com VL e configurações eletricamente carregadas (56, 126, 63). No entanto, há uma diferença entre esses casos: no presente modelo, as soluções dos campos de Higgs e magnético para $-\xi_j$ são diferentes daquelas geradas para ξ_j . Já as soluções eletricamente carregadas dos Refs. (56, 126, 63), quando fixamos o vetor VL de fundo, V_i , e fazemos este mudar para $-V_i$, nenhuma modificação é observada nas soluções dos campos de Higgs e magnético, ao passo que no setor elétrico tal mudança faz com que o potencial escalar A_0 mude para $-A_0$, ou seja, a direção do campo elétrico é invertida.

Finalmente, observamos que as equações diferenciais de primeira ordem reproduzem as de segunda ordem (Euler-Lagrange) dadas nas Eqs. (3.42) e (3.45), com a interação U sendo dada por (3.56).

3.4 As soluções autoduais: vórtices BPS

O propósito da presente seção é estudar as soluções das equações BPS (3.60) que descrevam vórtices. Os vórtices são naturalmente descritos em coordenadas polares, e é usual a escolha do seguinte *ansatz* para o campo de Higgs

$$\phi(r, \theta) = v g(r) e^{in\theta}, \quad (3.61)$$

onde a função real $g(r)$ é bem comportada ao longo de toda a coordenada radial, enquanto n é um número inteiro⁴, não nulo, característico da solução de vórtice, sendo denominado “winding number”, ou ainda, “vorticidade”.

A fim de garantir que o campo de Higgs atinja o seu valor de vácuo, como estabelecido na Eq. (3.57), devemos impor que no infinito $g(r)$ satisfaça a seguinte condição de contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dg}{dr} = 0. \quad (3.62)$$

Por outro lado, também devemos garantir que o campo de Higgs seja unívoco e contínuo na origem, e assim impomos que a condição de contorno na origem seja

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0. \quad (3.63)$$

Agora, usamos as seguintes relações de transformação⁵

$$a_i = \frac{x_i}{r} a_r - \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r} a_\theta \quad \text{e} \quad \partial_i = \frac{x_i}{r} \partial_r - \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} \partial_\theta, \quad (3.64)$$

as quais, juntamente com o *ansatz* (3.61), nos permitem reescrever a primeira das equações BPS, em (3.60), como

$$\frac{dg}{dr} \mp g \left(\frac{n}{r} - e A_\theta + \xi_r B \right) - i g (e A_r + \xi_\theta B) = 0, \quad (3.65)$$

ou, separando as partes real e imaginária,

$$\frac{dg}{dr} \mp g \left(\frac{n}{r} - e A_\theta + \xi_r B \right) = 0, \quad (3.66)$$

$$g (e A_r + \xi_\theta B) = 0, \quad (3.67)$$

onde o campo magnético é dado por

$$B = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta). \quad (3.68)$$

⁴ A exigência de que n seja um número inteiro está conectado com a condição de periodicidade que o campo de Higgs deve atender para que seja univocamente determinado.

⁵ Além destas, também usamos

$$\partial_r x_i = \frac{x_i}{r} \quad \text{e} \quad \partial_\theta x_i = -\epsilon_{ij} x_j.$$

Inspecionando a Eq. (3.67), notamos que o termo entre parênteses deve ser nulo para todo r , uma vez que, em geral, $g(r)$ é não nulo. Além disso, sabemos que, no limite em que o parâmetro de quebra resulta nulo, o modelo Maxwell-Higgs usual, para o qual $A_r = 0$ em todos os lugares, é recuperado. Visto que desejamos comparar nossos resultados com o modelo Maxwell-Higgs usual, é automático impor $\xi_\theta = 0$, já que, em geral, B é também não nulo. Desse modo, ξ_r é o único parâmetro de VL relevante no modelo. Finalmente, adotamos a seguinte parametrização para A_θ :

$$A_\theta = -\frac{1}{er} [a(r) - n], \quad (3.69)$$

onde $a(r)$ é uma função regular ao longo de todo o intervalo radial.

Note que a parametrização (3.69) aparentemente possui uma singularidade (divergência) na origem ($r \rightarrow 0$), o que a princípio conduz à $A_\theta \rightarrow \infty$. Contudo, desejamos garantir que A_θ seja finito na origem, o que será possível se o termo entre colchetes decai mais rapidamente a zero que $1/r \rightarrow \infty$. A condição de contorno sobre $a(r)$ que cumpre essa exigência é dada por

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n. \quad (3.70)$$

Por outro lado, a partir da Eq. (3.49), notamos que $\mathcal{D}_\theta \phi \rightarrow 0$ ⁶ quando $r \rightarrow \infty$ e isso impõe que a condição de contorno para $a(r)$ no infinito seja dada por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0. \quad (3.71)$$

Estabelecidas as condições de contorno, podemos agora fazer uso da Eq. (3.69) para reescrevermos o campo magnético (3.68) e dessa forma expressá-lo como

$$B = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \quad (3.72)$$

Consequentemente o fluxo magnético pode facilmente ser calculado como segue

$$\Phi_B = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\theta B = -\frac{2\pi}{e} \int_0^\infty da = -\frac{2\pi}{e} [a(\infty) - a(0)] = \frac{2\pi}{e} n. \quad (3.73)$$

Com isso, a energia BPS total (3.59) resulta em

$$E_{BPS} = \pm 2\pi v^2 n, \quad (3.74)$$

⁶ O uso da Eq. (3.64) permite que possamos escrever

$$\mathcal{D}_k \phi = \frac{x_k}{r} \mathcal{D}_r \phi - \epsilon_{kj} \frac{x_j}{r} (\mathcal{D}_\theta \phi),$$

onde

$$\mathcal{D}_r \phi = \partial_r \phi - ie A_r - i \xi_\theta B \phi \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_\theta \phi = \frac{1}{r} \partial_\theta \phi - ie A_\theta \phi + i \xi_r B \phi,$$

cujas inversas são dadas por

$$\mathcal{D}_r \phi = \frac{x_k}{r} \mathcal{D}_k \phi, \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_\theta \phi = -\epsilon_{ki} \frac{x_i}{r} \mathcal{D}_k \phi.$$

onde convencionamos os sinais (+) para $n > 0$ e (-) para $n < 0$. Vê-se assim que tanto o fluxo magnético quanto a energia BPS total são quantizados, sendo, portanto, proporcionais a vorticidade n .

Quanto a conservação da corrente estacionária, $\mathcal{J}_k$, expressa em (3.44), observamos que após o uso do *ansatz* (3.61) e da parametrização (3.69), a divergência de $\mathcal{J}_k$ se torna

$$\partial_k \mathcal{J}_k = -2v^2 \xi_\theta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r g^2 B). \quad (3.75)$$

Porém, como visto acima, é uma exigência do modelo que $\xi_\theta = 0$, e segue então que $\partial_k \mathcal{J}_k = 0$, garantindo assim que $\mathcal{J}_k$ seja conservada.

Retornando a Eq. (3.66), vemos que essa passa a ser expressa como

$$\frac{dg}{dr} = \pm g \left(\frac{1}{r} a - \xi_r \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right), \quad (3.76)$$

enquanto que a segunda das equações (3.60) se torna

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm \left[-ev^2 (1 - g^2) + 2v^2 \xi_r g \frac{dg}{dr} \right]. \quad (3.77)$$

Neste ponto, convém salientar que as soluções $g(r)$ e $a(r)$ serão diferentes para ξ_r e $-\xi_r$. Contudo, a conexão entre as soluções $n > 0$ e $n < 0$ é mantida, pois $g^<(r) = g^>(r)$ e $a^>(r) = -a^<(r)$, independentemente do sinal de ξ_r .

Finalmente, a densidade de energia BPS (3.48) é reescrita como

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 g^2 \left(\frac{a}{r} + \xi_r B \right)^2, \quad (3.78)$$

sendo, portanto, definida positiva para todos os valores do parâmetro VL, ξ_r .

3.5 A análise das condições de contorno

Nesta seção, verificaremos se as condições de contorno (3.62), (3.63), (3.70) e (3.71) são compatíveis com as equações BPS (3.76) e (3.77). Para avaliarmos o comportamento das soluções próximas à origem ($r \rightarrow 0$) assumimos que os campos possuam configurações tais que

$$g(r) \approx G_0(r), \quad a(r) \approx n + \Lambda_0(r), \quad (3.79)$$

onde as funções $G_0(r)$ e $\Lambda_0(r)$ correspondem a aproximações perturbativas que assumem valores nulos na origem. Dessa forma, ao utilizarmos (3.79) nas Eqs. (3.76) e (3.77) encontramos o seguinte par de equações diferenciais lineares

$$\frac{dG_0}{dr} = \pm \frac{n}{r} G_0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{d\Lambda_0}{dr} = \mp 2e^2 v^2, \quad (3.80)$$

onde somente as contribuições a primeira ordem foram consideradas. Resolvendo ambas as equações, encontramos

$$G_0 = C_0 r^{\pm n}, \quad \Lambda_0 = \mp e^2 v^2 r^2. \quad (3.81)$$

Portanto, os perfis para o campo de Higgs e para o potencial vetor possuem, respectivamente, os seguintes comportamentos na origem

$$g(r) \approx C_0 r^{\pm n}, \quad (3.82)$$

$$a(r) \approx n \mp e^2 v^2 r^2. \quad (3.83)$$

Essas expansões confirmam as condições de contorno impostas em (3.63) e (3.70).

Similarmente, para $r \rightarrow \infty$, propomos que os perfis $a(r)$ e $g(r)$ assumam configurações aproximadas em torno das condições de contorno (3.62) e (3.71) de tal modo que

$$g(r) \approx 1 - G_\infty(r) \quad \text{e} \quad a(r) \approx \Lambda_\infty(r), \quad (3.84)$$

onde $G_\infty(r)$ e $\Lambda_\infty(r)$ são funções perturbativas, bem comportadas, que assumem valores nulos no infinito. Com isso, considerando somente as contribuições de primeira ordem, as equações BPS (3.76) e (3.77) são reescritas da seguinte forma

$$\frac{dG_\infty}{dr} = \mp \frac{\Lambda_\infty}{r} \pm \xi_r \frac{1}{er} \frac{d\Lambda_\infty}{dr} \quad \text{e} \quad \frac{1}{er} \frac{d\Lambda_\infty}{dr} = \mp 2ev^2 G_\infty \mp 2v^2 \xi_r \frac{dG_\infty}{dr}. \quad (3.85)$$

Combinando essas equações, obtemos o seguinte par de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 G_\infty}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_\infty}{dr} - \beta^2 G_\infty = 0, \quad \frac{d^2 \Lambda_\infty}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Lambda_\infty}{dr} - \beta^2 \Lambda_\infty = 0, \quad (3.86)$$

onde temos desprezado o termo ξ_r/er devido a sua irrelevância para as contribuições assintóticas diante dos demais termos. Resolvendo as Eqs. (3.86), encontramos

$$G_\infty(r) \approx C_1 K_0(\beta r) \approx C_\infty \frac{e^{-\beta r}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (3.87)$$

$$\Lambda_\infty(r) \approx C_2 r K_1(\beta r) \approx C_\infty \frac{e\beta}{e + \xi\beta} \sqrt{r} e^{-\beta r} + \dots, \quad (3.88)$$

onde as funções do tipo $K(0, r\beta)$ e $K(1, r\beta)$ acima são funções Bessel do primeiro e segundo tipos. O parâmetro $\beta > 0$ corresponde a massa bosônica dos campos e é dada por

$$\beta = \frac{\sqrt{2}ev}{\sqrt{1 + 2v^2(\xi_r)^2}}. \quad (3.89)$$

Desta forma, para $r \rightarrow \infty$, as soluções se comportam como

$$g(r) \approx 1 - C_\infty \frac{e^{-\beta r}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (3.90)$$

$$a(r) \approx C_\infty \frac{e\beta}{e + \xi\beta} \sqrt{r} e^{-\beta r} + \dots. \quad (3.91)$$

Finalmente, observamos: (1) os comportamentos dados em (3.87) e (3.88) são similares aos de ANO e (2) a escala de Maxwell-Higgs é recuperada quando o parâmetro ξ_r assume valor nulo.

3.6 Análise numérica

Para fins de obtenção das soluções numéricas para as Eqs. (3.76) e (3.77), reescalamos as equações por meio das seguintes mudanças: $r \rightarrow \rho/ev$ e $\xi_r \rightarrow \delta/v$. O objetivo é construir versões completamente adimensionais das equações BPS e da densidade de energia BPS que sejam livres das constantes e e v . Tal procedimento é alcançado quando se implementam as seguintes redefinições

$$\begin{aligned} g(r) &\rightarrow g(\rho), & B(r) &\rightarrow ev^2 B(\rho), \\ a(r) &\rightarrow a(\rho), & \mathcal{E}_{BPS}(r) &\rightarrow e^2 v^4 \mathcal{E}_{BPS}(\rho). \end{aligned}$$

Desse modo, as equações BPS (3.76) e (3.77) se tornam

$$\frac{dg}{d\rho} = \pm g \left(\frac{a}{\rho} - \delta \frac{da}{d\rho} \right), \quad \text{e} \quad B(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{da}{d\rho} = \pm \left[(1 - g^2) - 2\delta g \frac{dg}{d\rho} \right]. \quad (3.92)$$

Deste ponto em diante, o parâmetro δ representa as contribuições da violação de Lorentz. Além das equações BPS, também reescrevemos a densidade de energia BPS em termos dos novos parâmetros de escala ρ e δ

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = B^2 + 2g^2 \left(\frac{a}{\rho} + \delta B \right)^2. \quad (3.93)$$

A seguir, apresentamos a análise numérica obtida para as soluções das equações BPS (3.92) em duas situações: na primeira fixamos $n = 1$ e fazemos δ assumir vários valores dentro do intervalo $[-1, +1]$; no segundo caso, comparamos os perfis obtidos para $\delta = -0.75, 0, +0.75$ e vários valores da vorticidade n . Em cada caso, descrevemos e destacamos as modificações introduzidas pelo parâmetro de violação de Lorentz ($\delta \neq 0$) quando comparada com o modelo Maxwell-Higgs usual ($\delta = 0$).

3.6.1 Soluções numéricas para $n = 1$ e $-1 \leq \delta \leq +1$

A figura 1 apresenta o comportamento dos perfis do campo de Higgs para $n = 1$ e alguns valores de δ . Quando comparados com o perfil do modelo Maxwell-Higgs usual ($\delta = 0$), notamos que eles são mais estreitos quanto mais negativo for o valor de δ e mais largos para valores mais positivos de δ . Em ambos os casos, quanto mais nos afastamos da origem e quanto maior for $|\delta|$, mais lentamente os perfis convergem para o valor de vácuo em relação ao perfil do modelo Maxwell-Higgs, em conformidade com a escala de massa definida em (3.89).

O lado esquerdo da figura 2 mostra os perfis do campo de calibre $a(\rho)$ para $n = 1$ e $\delta < 0$, enquanto que o lado direito apresenta os perfis para $\delta > 0$. Analisando os perfis próximo à origem, observamos que estes, quando comparados com o perfil do modelo Maxwell-Higgs usual ($\delta = 0$), apresentam curvas ligeiramente mais estreitas para $\delta < 0$ (lado esquerdo), ao passo que para $\delta > 0$ (lado direito) as mesmas quase

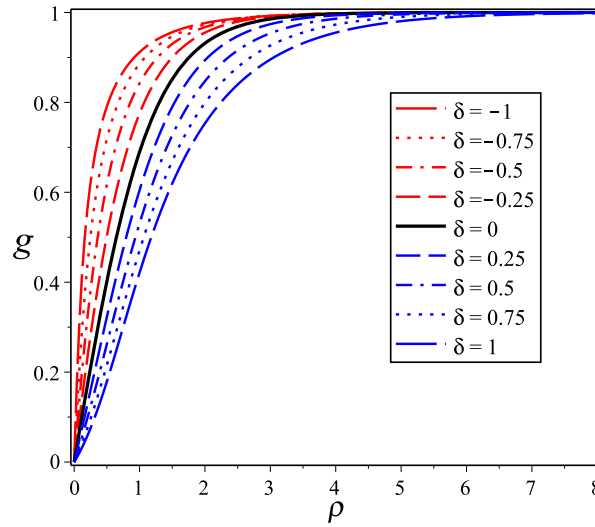


Figura 1: O perfil do campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, a linha preta ($\delta = 0$) fornece a solução BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis as soluções para $\delta > 0$.

que se sobrepõem a do modelo usual. Também notamos que para $\delta \neq 0$, à alguma distância a partir da origem, os perfis se tornam mais largos em comparação com o modelo Maxwell-Higgs usual. Este efeito é menor para $\delta < 0$ e maior para $\delta > 0$. Tal desvio aumenta a medida que o valor de $|\delta|$ também aumenta.

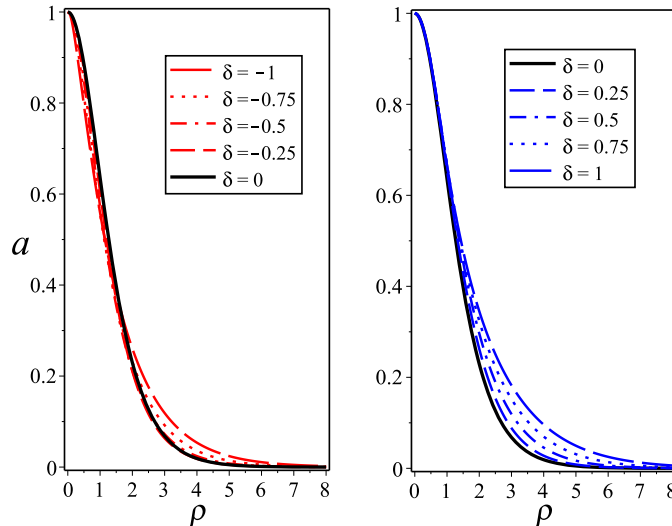


Figura 2: Os perfis do campo de calibre $a(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as pretas ($\delta = 0$) as do Modelo Maxwell-Higgs usual, enquanto que as linhas azuis proveem as soluções para $\delta > 0$.

A figura 3 apresenta os perfis para o campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$ e vários valores de δ . O lado esquerdo corresponde às soluções para $\delta < 0$, enquanto que o lado direito as soluções para $\delta > 0$. Próximo da origem, quando $\delta < 0$ (lado esquerdo), o parâmetro VL exerce grande influência, produzindo uma amplitude máxima, um pico,

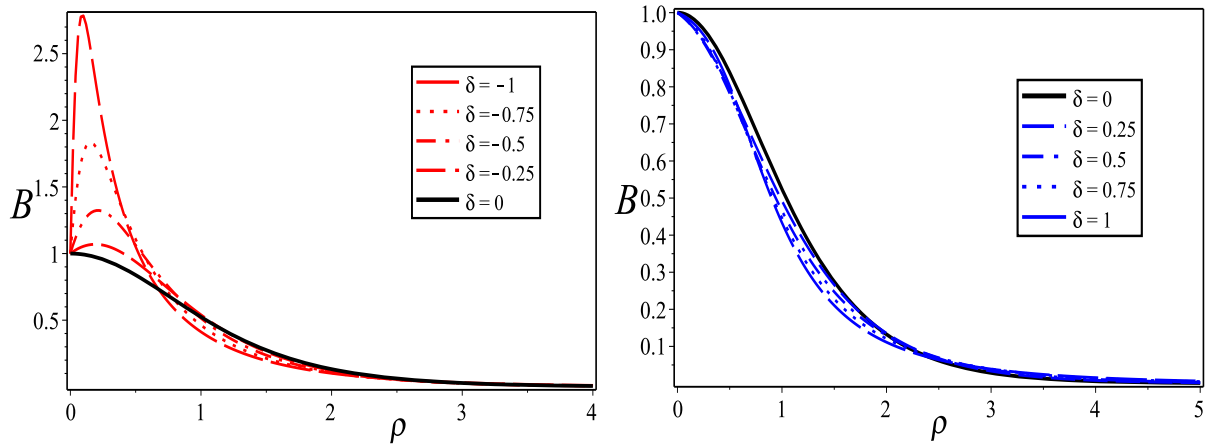


Figura 3: Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas pretas ($\delta = 0$) correspondem a solução para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis são as soluções para $\delta > 0$.

que forma uma estrutura tipo anel. Quanto mais negativos os valores de δ , ou seja, quanto maior é o valor de $|\delta|$, mais alto e mais localizado é o pico. Por outro lado, quanto menor for o valor de $|\delta|$, mais baixo e mais largo é este pico. A partir da origem o campo magnético decai tal como ocorre com as soluções do modelo Maxwell-Higgs usual. Este comportamento tipo anel, obtido para $n = 1$, difere dramaticamente do comportamento tipo caroço (lumps em inglês) apresentado pelo modelo Maxwell-Higgs e se assemelha aos perfis do modelo Chern-Simons-Higgs. No lado direito da figura, os perfis observados são muito similares aos caroços (lumps) do modelo Maxwell-Higgs. A medida em nos afastamos da origem, a amplitude de $B(\rho)$ se torna ligeiramente menor do que o perfil do modelo Maxwell-Higgs, produzindo um pequeno, porém mais localizado, defeito. Em ambos os casos, $\delta < 0$ e $\delta > 0$, o campo magnético apresenta um valor finito, $e v^2$, na origem, tal como modelo Maxwell-Higgs usual.

A figura 4 mostra os perfis para a densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}$ para $n = 1$. Para $\delta < 0$ (lado esquerdo), observamos que os perfis para $\mathcal{E}_{BPS}$ apresentam uma forma de caroço (lumps) similar ao perfil do modelo Maxwell-Higgs usual, com um pico mais pronunciado e localizado na origem. A amplitude e localização do pico é incrementada quando δ se torna mais negativo. Por outro lado, para $\delta > 0$ (lado direito), os perfis mantêm uma forma do tipo caroço com a amplitude do pico se tornando menor e menos localizado do que o perfil usual do modelo Maxwell-Higgs. Além disso, observamos ainda que o pico se afasta da origem a medida que os valores de δ se tornam cada vez maiores. Numericamente, observamos que para valores de δ cada vez maiores, a amplitude da densidade de energia BPS na origem possui um limite inferior que vale $e^2 v^4$.

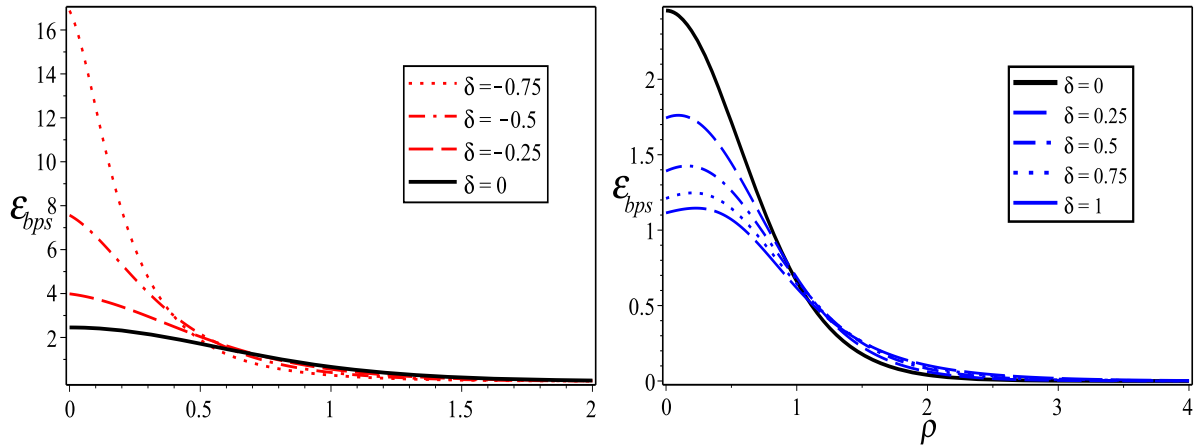


Figura 4: Os perfis da densidade de energia BPS, $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$, para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas pretas ($\delta = 0$) correspondem as soluções BPS para o modelo de Maxwell-Higgs e as linhas azuis representam as soluções para $\delta > 0$.

3.6.2 Soluções numéricas para $\delta = -0.75, 0, 0 + 0.75$ e $n = 1, 2, 4, 6, 10, 20$

As figuras 5 e 6 apresentam os comportamentos para os perfis dos campos de Higgs e calibre para vários valores de n para δ negativo, nulo e positivo. Em ambos os casos, os perfis se tornam mais largos a medida que os valores de n aumentam. No entanto, para $n = 1$, o comportamento é similar ao que foram exibidos nas figuras 1 e 2, respectivamente.

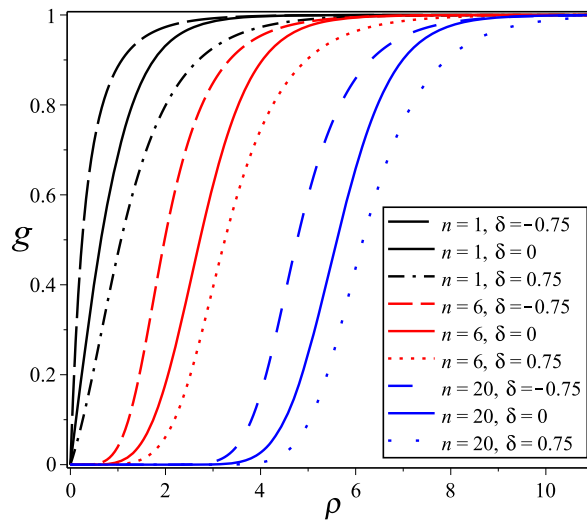


Figura 5: Os perfis do campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1, 6, 20$ e $\delta = -0.75, 0, +0.75$. As linhas sólidas, $\delta = 0$, representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs.

A figura 7 retrata os perfis do campo magnético para alguns valores de n e δ . No lado esquerdo da figura são apresentados os perfis para valores negativos de δ ($\delta = -0.75$). Observamos a presença de picos, correspondendo a um comportamento

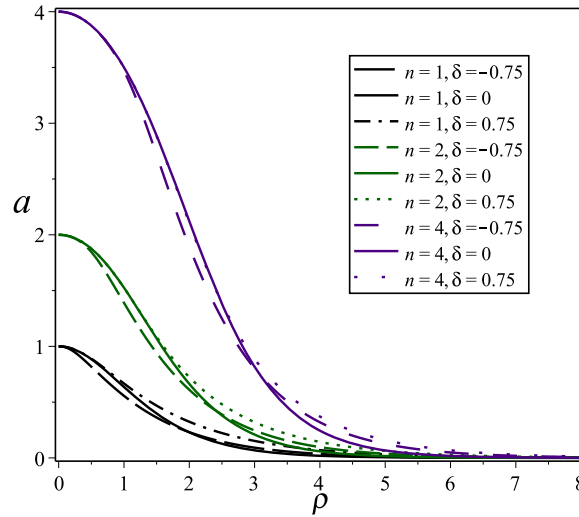


Figura 6: Os perfis do campo de calibre $a(\rho)$ para $n = 1, 2, 4$ e $\delta = -0.75, 0, +0.75$. As linhas sólidas, $\delta = 0$, representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs.

tipo anel, os quais são mais acentuados e mais próximos da origem para pequenos valores da vorticidade. Para valores maiores de n , as estruturas do tipo anel possuem amplitudes máximas que são progressivamente menores e localizadas em distâncias crescentes a partir da origem. Este comportamento contrasta com os observados para o modelo Maxwell-Higgs usual, no qual os perfis do campo magnético apresentam um comportamento tipo platô (plateau, em inglês) cujo comprimento aumenta para maiores valores de n . Assim, o acoplamento não mínimo induz um comportamento tipo anel para os vórtices Higgs abeliano quando o parâmetro VL (δ) assume valores negativos. O lado direito da figura apresenta os perfis do campo magnético para valores positivos de δ ($\delta = +0.75$). Observamos que, para todos os valores de n , os perfis seguem sendo similares e próximos do comportamento do campo magnético do modelo Maxwell-Higgs usual, apresentando somente um minúsculo desvio.

Finalmente, a figura 8 reporta os perfis da densidade energia BPS na presença do parâmetro VL os perfis também mostram um comportamento tipo anel tais como os do modelo Maxwell-Higgs usual. No lado esquerdo da figura, são apresentados os perfis da densidade de energia BPS para os quais $\delta < 0$ ($\delta = -0.75$). Nestes, observamos que o valor negativo do parâmetro VL tem elevado a amplitude dos picos dos perfis com formato de anel, os quais se tornam progressivamente mais baixos para valores maiores da vorticidade n . Por outro lado, no lado direito da figura, onde são apresentados os perfis para os quais $\delta > 0$ ($\delta = +0.75$), notamos que os valores positivos do parâmetro VL desempenha um efeito oposto sobre as soluções, fazendo com que os picos dos perfis sejam muito menores do aqueles observados para o modelo Maxwell-Higgs usual. Consequentemente, para valores suficientemente maiores de n , a violação de Lorentz faz com que as estrutura do tipo anel desapareça, reduzindo-a a forma de um platô cujo comprimento é maior a medida que o valor de n aumenta.

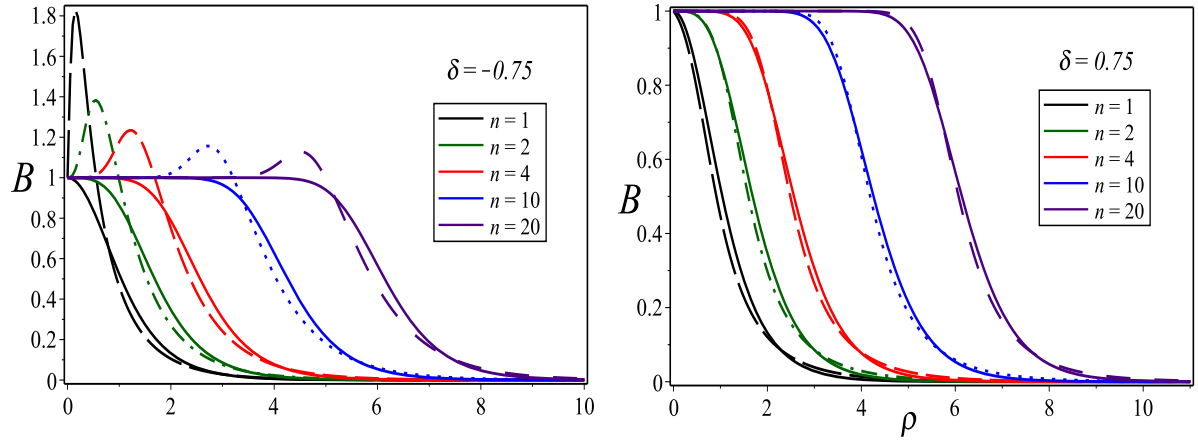


Figura 7: Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ para $\delta = -0.75$ (lado esquerdo) e $\delta = +0.75$ (lado direito). Em ambos os casos, $n = 1, 2, 4, 10, 20$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.

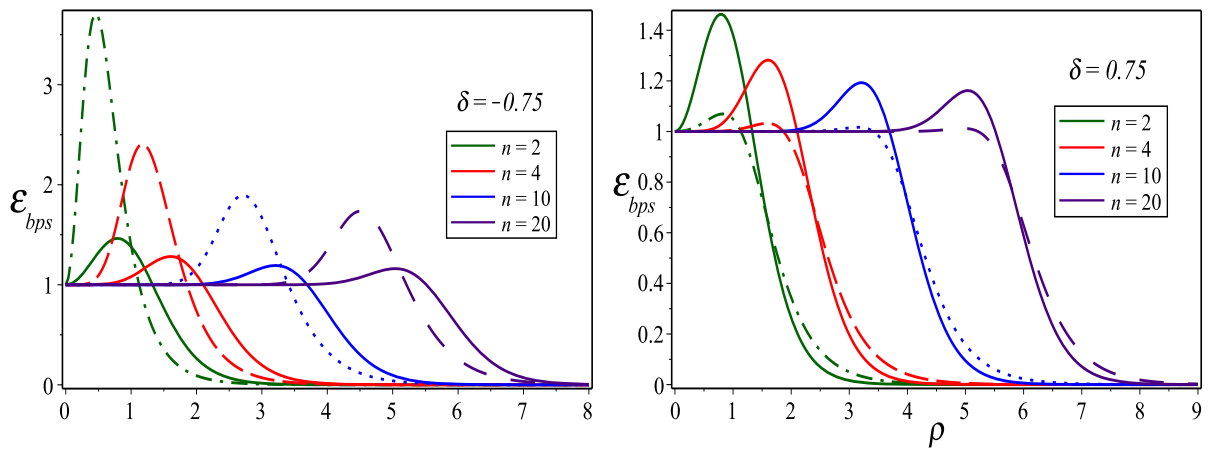


Figura 8: Os perfis densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $\delta = -0.75$ (lado esquerdo) e $\delta = +0.75$ (lado direito). Em ambos os casos, $n = 2, 4, 10, 20$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.

4 SÓLITONS AUTODUAIS EM UM MODELO CHERN-SIMONS BABY SKYRME GENERALIZADO

Neste capítulo, investigaremos a existência de sólitons autoduais em um modelo Chern-Simons Baby Skyrme restrito, via a implementação do formalismo BPS. Como veremos, as equações de primeira ordem encontradas não reproduzem às equações de Euler-Lagrange. Tal insucesso está ligado ao fato de que agora o “potencial” também possui dependência funcional com a derivada do campo de Skyrme, contrariando assim a hipótese inicial que prevê que $V \equiv V(\hat{n} \cdot \phi)$, como nos casos usuais. Apesar disso, o novo “potencial” indica as diretrizes que nos permitirão modificar a teoria, fornecendo assim um modelo Chern-Simons Baby Skyrme generalizado capaz de comportar sólitons autoduais.

4.1 O modelo Chern-Simons Baby Skyrme restrito

O modelo Baby Skyrme (33, 34, 40) é uma teoria de campo não linear, definida em $(1+2)$ -dimensões que suporta sólitons topológicos. Sua dinâmica é descrita pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{v^2}{2} \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi - \frac{\lambda^2}{4} (\partial_\mu \phi \times \partial_\nu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi \times \partial^\nu \phi) - V(\hat{n} \cdot \phi), \quad (4.1)$$

Em (4.1), o campo de Skyrme ϕ define um tripleto de campos escalares reais $\phi = (\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3)$ com norma fixa, $\phi \cdot \phi = 1$, descrevendo uma superfície esférica de raio unitário. Ainda em (4.1), a primeira contribuição corresponde ao modelo sigma não linear, a segunda ao termo quártico de Skyrme e a terceira é um potencial de autointeração necessário para garantir a estabilidade das soluções. Em princípio, o potencial é uma função que depende apenas da quantidade $\hat{n} \cdot \phi = \phi_n$. No espaço interno do campo de Skyrme, $\hat{n}$ é um vetor unitário que provê uma direção privilegiada.

Tanto o termo sigma não linear quanto o termo quártico de Skyrme são invariantes por simetria global do grupo $SO(3)$ de isorotações. Contrariamente, o termo potencial quebra parcialmente essa simetria sem que, no entanto, a simetria do subgrupo $U(1)$ do espaço interno seja quebrada. O fato de tal simetria ser preservada provê um caminho natural para a implementação de uma simetria de calibre local por meio da introdução de um campo de calibre $U(1)$ cuja dinâmica, em $(1+2)$ -dimensões, pode ser governada pela ação de Maxwell (127, 43, 128, 75, 129, 130, 44, 131)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{v^2}{2} D_\mu \phi \cdot D^\mu \phi - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \phi \times D_\nu \phi) \cdot (D^\mu \phi \times D^\nu \phi) - V(\hat{n} \cdot \phi), \quad (4.2)$$

ou pela ação de CS (127, 132)

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\sigma\mu\nu} A_\sigma F_{\mu\nu} + \frac{v^2}{2} D_\mu \phi \cdot D^\mu \phi - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \phi \times D_\nu \phi) \cdot (D^\mu \phi \times D^\nu \phi) - V(\hat{n} \cdot \phi), \quad (4.3)$$

ou até mesmo por ambas (133, 45). Como usual, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de intensidade do campo de calibre abeliano A_μ , enquanto que

$$D_\mu \boldsymbol{\phi} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + g A_\mu (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \quad (4.4)$$

é a derivada covariante do campo de Skyrme $\boldsymbol{\phi}$.

Como já mencionado na introdução, o modelo Baby Skyrme é uma teoria de campo não integrável e a maior parte de suas soluções foram estabelecidas via simulação numérica. A busca por uma simplificação que tornasse possível realizar cálculos analíticos exatos conduziu a investigações no chamado modelo Baby Skyrme restrito, isto é, na ausência do termo sigma não linear (40–42). Posteriormente, versões de calibre de tal modelo foram investigadas tanto na presença da ação de Maxwell (75, 129, 130, 134, 135) quanto da ação de CS (132).

Nesta seção estamos interessados em obter sólitons autoduais, aqui denominados Baby skyrmions, no modelo Chern-Simons Baby Skyrme restrito, cuja densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\sigma\mu\nu} A_\sigma F_{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) - V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}). \quad (4.5)$$

Neste ponto, convém definirmos as dimensões dos campos. O campo de calibre, ou gauge, possui dimensão de massa 1, $[A_\mu] = M$, enquanto que o campo de Skyrme é adimensional, $[\boldsymbol{\phi}] = 1$. Consequentemente, as constante de acoplamento do termo Chern-Simons, κ , e do setor eletromagnético, g , também são adimensionais, $[\kappa] = [g] = 1$, enquanto que a constante de acoplamento do termo de Skyrme, λ , tem dimensão de massa $-1/2$, $[\lambda] = M^{-1/2}$.

A equação de movimento para o campo A_μ , obtida a partir da densidade lagrangiana (4.5), é expressa por

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = J^\mu, \quad (4.6)$$

onde

$$J^\mu = g \lambda^2 [\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi})] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi}). \quad (4.7)$$

é a densidade de corrente conservada, cuja a equação de continuidade é diretamente derivada a partir da Eq. (4.6).

Similarmente, a equação de movimento do campo de Skyrme é dada por

$$\lambda^2 D_\mu \{ [\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi})] D_\nu \boldsymbol{\phi} \} + (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} = 0. \quad (4.8)$$

Estamos interessados em soluções do modelo que sejam independentes do tempo. Assim, a lei de Gauss estacionária, obtida a partir da Eq. (4.6), é dada por

$$\kappa B = J_0 = \lambda^2 g^2 A_0 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2, \quad (4.9)$$

onde $B = F_{12} = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$ define o campo magnético, enquanto J_0 é a densidade carga elétrica. Aqui, observamos que a lei de Gauss estabelece um vínculo entre o potencial escalar, A_0 , e o campo magnético, B , tal como é esperado em teorias do tipo Chern-Simons. Esse vínculo, permite-nos expressar a carga elétrica total, $\mathcal{Q}_{em}$, como sendo proporcional ao fluxo magnético, Φ_B , ou seja,

$$\mathcal{Q}_{em} = \int d^2x J_0 = \kappa \int d^2x B = \kappa \Phi_B. \quad (4.10)$$

Além da lei de Gauss, a equação de campo (4.6) também fornece uma expressão para a lei de Ampère cuja equação estacionário, após o uso do vínculo imposto pela lei de Gauss, é dada por

$$\frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \partial_j \left(\frac{B}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2} \right) = -\epsilon_{ij} J_i = \lambda^2 g (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Q. \quad (4.11)$$

Nesta, a quantidade Q é definida como

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} [\phi \cdot (D_i \phi \times D_j \phi)], \quad (4.12)$$

enquanto que a quantidade J_i correspondente a densidade de corrente elétrica.

A respectiva equação de movimento para o campo de Skyrme, já tendo computado o vínculo imposto pela lei de Gauss, é dada por

$$\lambda^2 \epsilon_{ij} D_i (Q D_j \phi) + \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{n} \times \phi) \partial_i \left(\frac{B^2}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^3} \right) + (\hat{n} \times \phi) \frac{\partial V}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)} = 0. \quad (4.13)$$

4.2 O formalismo BPS: a implementação frustrada.

No regime estacionário, a densidade de energia correspondente ao modelo (4.5) é dada por

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\lambda^2}{2} g^2 (A_0)^2 (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + V, \quad (4.14)$$

onde o termo quártico de Skyrme foi reescrito por meio da seguinte identificação¹

$$(D_i \phi \times D_j \phi) \cdot (D_i \phi \times D_j \phi) = 2Q^2. \quad (4.15)$$

Como já mencionado, a lei de Gauss (4.9) permite expressar o potencial escalar A_0 em termos do campo magnético, B . Desse modo, a densidade de energia pode então ser transcrita da seguinte forma

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{B^2}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2} + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + V. \quad (4.16)$$

¹ Para uma verificação desta identidade veja a seção B.3

Tal densidade de energia deve ser nula quando $|x| \rightarrow \infty$, e segue a partir daí que as seguintes condições de contorno devem ser impostas:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} B = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} Q = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(\hat{n} \cdot \phi) = 0. \quad (4.17)$$

Essas condições não apenas garantem a condição nulidade da densidade de energia no infinito, como também determinam as configurações de vácuo dos campos.

A partir da análise da condição de contorno $\lim_{|x| \rightarrow \infty} Q = 0$, podemos estabelecer condições de contorno para os campos ϕ e A_i . Para isso, consideramos a forma explícita da Eq. (4.12), ou seja,

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) + g \epsilon_{ij} A_i (\hat{n} \cdot \partial_j \phi). \quad (4.18)$$

Note-se, portanto, que a condição $\lim_{|x| \rightarrow \infty} Q = 0$ só ficará bem estabelecida se impusermos as seguintes condições:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} A_i (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) = 0. \quad (4.19)$$

Ambas as equações são satisfeitas se impomos a seguinte condição de contorno sobre a derivada do campo de Skyrme

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial_i \phi = 0. \quad (4.20)$$

Agora, é imediato concluir que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) = 0. \quad (4.21)$$

Como consequência, a condição $\lim_{|x| \rightarrow \infty} A_i$ corresponde, em princípio, à alguma constante finita.

Usamos as condições de contorno acima na derivada covariante, a qual deve ser nula no infinito, ou seja,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} D_i \phi = \lim_{|x| \rightarrow \infty} [\partial_i \phi + g A_i (\hat{n} \times \phi)] = 0. \quad (4.22)$$

Essa condição será cumprida se o campo de Skyrme satisfaz

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi = \hat{n}. \quad (4.23)$$

A condição sobre o potencial, imposta em (4.17), pode ser expressa então como

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(\hat{n} \cdot \phi) = \lim_{\phi \rightarrow \hat{n}} V(\hat{n} \cdot \phi) = 0, \quad (4.24)$$

que chamaremos de condição de vácuo para o potencial.

Estabelecidas as condições de contorno essenciais, a busca por soluções auto-duais passa pela implementação do formalismo BPS, o qual sabemos, consiste em

reescrever a energia de tal forma que termos quadráticos perfeitos devam surgir. Para tanto, introduzimos em (4.16) duas funções, $W(\hat{n} \cdot \phi)$ e $Z(\hat{n} \cdot \phi)$. Essas funções, com formas ainda desconhecidas, são combinadas aos campos B e Q , respectivamente, tal que as seguintes identidades são construídas

$$Q^2 = (Q \mp Z)^2 \pm 2QZ - Z^2, \quad (4.25)$$

$$\frac{B^2}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2} = \frac{\left[B \pm (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 W \right]^2}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2} \mp 2WB - (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 W^2. \quad (4.26)$$

Substituindo essas expressões em (4.16), a densidade de energia é agora escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{\left[B \pm (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 W \right]^2}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2} + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp Z)^2 \\ & \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} BW \pm \lambda^2 QZ + V - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 W^2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

Este procedimento, amplamente utilizado na literatura, tem por objetivo a implementação bem sucedida do formalismo BPS, tendo já sido utilizado nas Refs. (75, 132) e em versões generalizadas do modelo Maxwell-Higgs (63, 56–65).

Na sequência, substituímos a Eq. (4.18), juntamente com o campo magnético $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$, em (4.27). Assim, a densidade de energia se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{\left[B \pm (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 W \right]^2}{(\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2} + \frac{\lambda^2}{2} (Q \mp Z)^2 \pm \frac{\lambda^2}{2} \epsilon_{ij} [\phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi)] Z \\ & \pm \left[\frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\epsilon_{ij} \partial_j A_i) W + \lambda^2 g \epsilon_{ij} A_i (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Z \right] + \left[V - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi)^2 W^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

O termo $\epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) / 2$ está relacionado com a carga topológica do campo de Skyrme, a qual expressamos por

$$\deg[\phi] = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi). \quad (4.29)$$

A implementação do formalismo BPS será completada se, primeiro, o termo entre colchetes puder ser escrito na forma de uma derivada total e, segundo, se definirmos o segundo termo entre colchetes como sendo uma quantidade nula. O primeiro objetivo é atingindo ao estabelecermos a seguinte relação

$$\frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \partial_j W = \lambda^2 g (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Z, \quad (4.30)$$

a qual nos permite determinar a função Z em termos da função W , ou seja,

$$Z = \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)}. \quad (4.31)$$

O segundo objetivo provê o “potencial”

$$V = \frac{1}{2} \frac{\kappa^4}{\lambda^4 g^6} \left[\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W^2, \quad (4.32)$$

onde vemos que a função $W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ desempenha o papel de um “superpotencial” tal como tem sido ressaltado na literatura nas Refs. (75, 132). Observamos ainda que a condição de contorno, Eq. (4.24), imposta sobre o “potencial”, Eq. (4.32), impõe a seguinte condição sobre o superpotencial

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} = 0. \quad (4.33)$$

Ao se implementar as Eqs. (4.30), (4.31) e (4.32) na densidade de energia (4.28), encontramos em fim a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{\left[B \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi})^2 W \right]^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left[Q \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right]^2 \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^3} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \pm \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W). \end{aligned} \quad (4.34)$$

A implementação do formalismo BPS foi supostamente bem-sucedida porque os termos dentro dos colchetes poderiam conduzir às equações BPS corretas (como será mostrado na próxima seção). Contudo, o procedimento revela uma contradição com a hipótese introduzida no modelo (4.5), pois agora o “potencial” (4.32) não é somente uma função do campo de Skyrme, mas também de sua derivada. Consequentemente, as equações de Euler-Lagrange (4.9), (4.11) e (4.13) para os campos de calibre e de Skyrme, respectivamente, não são recuperadas a partir de tais equações BPS.

Apesar do insucesso de nossa primeira tentativa, o potencial (4.32) indica um caminho para se introduzir novos termos na densidade lagrangiana (4.5) com o objetivo de torná-lo capaz de gerar configurações BPS. O modelo modificado com tais propriedades é introduzido na próxima seção.

4.3 O modelo modificado

Em um procedimento anterior, sugerimos que a existência de configurações BPS pode ser bem estabelecida em uma versão modificada do modelo (4.5). Tal modificação não é arbitrária e tem por objetivo implementar o procedimento BPS para prover um potencial análogo ao (4.32), porém sem o termo que contém a derivada do campo de Skyrme.

O termo com a derivada do campo $\boldsymbol{\phi}$ na Eqs. (4.13) nos indica que um termo proporcional à $(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 W^2$ necessita ser introduzido na densidade lagrangiana (4.5)

e, desse modo, o novo modelo (capaz de gerar configurações BPS) é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\sigma\mu\nu} A_\sigma F_{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 W^2 - \mathcal{V}, \quad (4.35)$$

onde tanto a função W quanto o potencial $\mathcal{V}$ são adimensionais e dependentes somente da variável $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}$. O terceiro termo modifica a dinâmica da componente ao longo da direção $\hat{\mathbf{n}}$ do campo de Skyrme. Assim, os dois últimos termo quebram parcialmente a simetria $SO(3)$ preservando o subgrupo desta simetria.

Neste ponto, convém chamamos a atenção para o fato de que o termo $(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2$ em (4.35) pode ser expresso por meio da seguinte identidade

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 = D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi} - (\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi}), \quad (4.36)$$

que permite expressar a densidade lagrangiana (4.35) em uma forma completamente equivalente, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\sigma\mu\nu} A_\sigma F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} W^2 (D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi}) \\ & - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi}) - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi}) W^2 - \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nós então observamos que o novo modelo é provido de um termo sigma não linear, constituindo assim um tipo de “generalização” do modelo Chern-Simons Baby Skyrme, modificado pelo termo proporcional à $(\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 W^2$ com W assumindo o papel de uma função generalizadora.

A equação do campo de gauge, proveniente da densidade lagrangiana (4.35), é exatamente a mesma dada na Eq. (4.6), ou seja, a introdução da função $W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ não modifica a equação de movimento do campo de gauge, que continua sendo

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = J^\mu.$$

A equação de movimento do campo de Skyrme, obtida a partir da densidade lagrangiana (4.35), é, contudo, modificada, sendo expressa por

$$\begin{aligned} \lambda^2 D_\kappa ([\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\kappa \boldsymbol{\phi} \times D^\mu \boldsymbol{\phi})] D_\mu \boldsymbol{\phi}) = \\ - (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \left\{ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 \frac{\partial W^2}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} + \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \partial_\kappa [(\hat{\mathbf{n}} \cdot D^\kappa \boldsymbol{\phi}) W^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

cujas versão estacionário é dada por

$$\begin{aligned} \lambda^2 \epsilon_{ij} D_i (Q D_j \boldsymbol{\phi}) = - (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \left\{ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} + \lambda^2 g^2 \partial_i [(A_0)^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})] \right. \\ \left. - \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \partial_i [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) W^2] + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 \frac{\partial W^2}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Na próxima seção, mostraremos como construir o formalismo **BPS** determinando o potencial autointeragente $\mathcal{V}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ que permite obter não apenas um limite inferior para a energia, mas também as correspondentes equações autoduais que satisfazem as configurações de sólitons que saturam o limite **BPS**.

4.4 As configurações BPS do modelo modificado

No regime estacionário, a densidade de energia é dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^2}{2} g^2 (A_0)^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W^2 + \mathcal{V}, \quad (4.40)$$

que, após usarmos a lei de Gauss (4.9), torna-se

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{B^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W^2 + \mathcal{V}. \quad (4.41)$$

Mais uma vez, a densidade de energia deve se anular no infinito, o que permite impomos as seguintes condições de contorno

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} B = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} Q = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{V} = 0. \quad (4.42)$$

A partir da discussão realizada na seção 4.2, concluímos que:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi} = \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.43)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi} = 0. \quad (4.44)$$

Assim, tanto A_i quanto W permanecem, em princípio, com seus valores de vácuo arbitrários.

Como usual, para implementar o formalismo **BPS**, devemos rearranjar os termos da densidade de energia na forma de termos quadráticos perfeitos. Com essa finalidade, combinamos os termos da seguinte forma: o campo B com a função W e o campo Q com o potencial $\mathcal{V}$. Dessa forma, construímos as seguintes identidades:

$$\frac{B^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W^2 = \frac{[B \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W]^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} \mp BW, \quad (4.45)$$

$$\frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \mathcal{V} = \frac{\lambda^2}{2} \left(Q \mp \frac{\sqrt{2\mathcal{V}}}{\lambda} \right)^2 \pm \lambda \sqrt{2\mathcal{V}} Q. \quad (4.46)$$

Em conjunto com a definição do campo magnético, $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$, e da Eq. (4.18), essas equações são substituídas na Eq. (4.41), provendo assim a seguinte expressão para a densidade de energia

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{[B \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W]^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left(Q \mp \frac{\sqrt{2\mathcal{V}}}{\lambda} \right)^2 \pm \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) \sqrt{2\mathcal{V}} \\ & \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \epsilon_{ij} \left[(\partial_i A_j) W + \frac{\lambda^3 g^3}{\kappa^2} A_j (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) \sqrt{2\mathcal{V}} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

O último termo da primeira linha está relacionado com a carga topológica do campo de Skyrme e, como veremos abaixo, provê o limite Bogomol'nyi para a energia total. Neste ponto, a implementação do formalismo BPS será completada se transformamos o termo entre colchete na segunda linha da Eq. (4.47) em uma derivada total. Isto é alcançado ao se requerer que a função $W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ satisfaça o seguinte vínculo

$$\partial_i W = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} = \frac{\lambda^3 g^3}{\kappa^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) \sqrt{2\mathcal{V}}, \quad (4.48)$$

que, por sua vez, nos permite determinar o potencial autointeragente que é capaz de gerar as configurações autoduais

$$\mathcal{V}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} \frac{\kappa^4}{\lambda^6 g^6} \left[\frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right]^2. \quad (4.49)$$

Essa última expressão mostra claramente que a função $W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ desempenha o papel de um superpotencial dentro do modelo (4.35).

Como visto em (4.42), o superpotencial $W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ necessita ser construído tal que o potencial satisfaça a condição de contorno no vácuo, ou seja, $\mathcal{V} \rightarrow 0$, quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Desse modo, consideramos que o “superpotencial” satisfaz a seguinte condição de contorno

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} = 0. \quad (4.50)$$

As Eqs. (4.48) e (4.49) permitem reescrevemos a densidade de energia (4.47) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{[B \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W]^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left(Q \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right)^2 \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^3} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \epsilon_{ij} \partial_i (A_j W), \end{aligned} \quad (4.51)$$

e segue a partir desta, que a energia total é dada por

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \mathcal{E} = E_{BPS} + \check{E} \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \epsilon_{ij} \partial_i (A_j W), \quad (4.52)$$

onde E_{BPS} define um limite inferior para energia (o limite Bogomol'nyi), sendo expressa por

$$E_{BPS} = \pm \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \quad (4.53)$$

enquanto $\check{E}$ é a parte da energia expressa pelos termos quadráticos, ou seja,

$$\check{E} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \left\{ \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} \frac{[B \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2 W]^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\lambda^2}{2} \left(Q \mp \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right)^2 \right\}. \quad (4.54)$$

A minimização da energia também requer que a contribuição devido a derivada total, $\epsilon_{ij}\partial_i(A_j W)$, presente na Eq. (4.52), seja nula, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ij}\partial_i(A_j W) = 0. \quad (4.55)$$

Essa exigência impõe uma segunda condição sobre o superpotencial, para o qual o mesmo deve assumir valor nulo no vácuo, ou seja, devemos ter

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(\hat{n} \cdot \phi) = 0. \quad (4.56)$$

Finalmente, o limite inferior da energia é saturado quando $\check{E} = 0$, ou seja, quando os campos satisfazem as equações autoduais, dadas por

$$Q = \pm \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{\partial W}{\partial(\hat{n} \cdot \phi)} \quad \text{e} \quad B = \mp (\hat{n} \cdot \partial_i \phi)^2 W. \quad (4.57)$$

Após um longo trabalho algébrico pode ser mostrado que as equações de Euler-Lagrange estacionárias, obtidas a partir da densidade lagrangiana (4.35), dadas pela lei de Gauss (4.9), lei de Ampère (4.11) e equação do campo de Skyrme (4.39), podem ser recuperadas a partir das equações BPS (4.57).

4.5 Skyrmions autoduais rotacionalmente simétricos

Tendo em vista que o campo de Skyrme é invariante sob o grupo $SO(3)$ de isorotações do espaço interno, adotamos o seguinte ansatz que provê soluções rotacionalmente simétricas

$$\phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos N\theta \\ \sin f(r) \sin N\theta \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

onde $f(r)$ e $N\theta$ fazem os papéis, respectivamente, dos ângulos zenital e azimutal de uma esfera S^2 definida no espaço interno do campo de Skyrme (vide Fig. 9). A função $f(r)$ é contínua e adimensional, tanto no espaço interno quanto no espaço físico (ao longo do eixo r), sendo, portanto, limitada no intervalo $[0, \pi]$. Por outro lado, θ é um parâmetro polar no espaço físico limitado no intervalo $[0, 2\pi]$, enquanto que o “winding number” N é um número inteiro não nulo que está associado com a carga topológica do modelo de Skyrme.

No que se seguirá, configuraremos o vetor fixo e unitário $\hat{n}$ na direção do eixo-3 do espaço interno, isto é, assumimos que $\hat{n} \equiv \hat{n}_3 \equiv (0, 0, 1)$. Assim, as configurações de vácuo para o campo de Skyrme e sua primeira derivada são reeditadas como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \hat{n}_3, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d\phi_3}{dr} = 0, \quad (4.59)$$

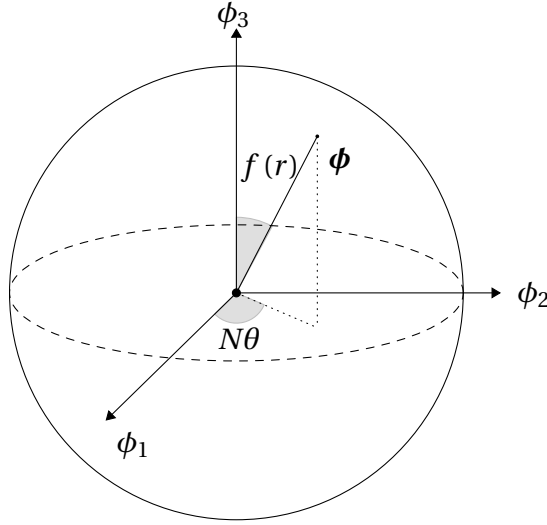


Figura 9: Esfera S^2 no espaço interno do campo de Skyrme; a função $f(r)$ faz o papel de um ângulo zenital, enquanto que $N\theta$ é o correspondente ângulo azimutal.

onde usamos para o gradiente $\hat{n} \cdot \partial_i \phi = \partial_i \phi_3$ as relações de transformação (3.64),

$$a_i = \frac{x_i}{r} a_r - \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r} a_\theta, \quad \partial_i = \frac{x_i}{r} \partial_r - \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} \partial_\theta.$$

Além disso, desde que r e θ são verdadeiramente as coordenadas polares do espaço físico, encontramos que $|\mathbf{x}| \equiv r$.

Visto que o campo de Skyrme pode ser decomposto em componentes,

$$\phi \equiv \hat{n}_1 \phi_1 + \hat{n}_2 \phi_2 + \hat{n}_3 \phi_3, \quad (4.60)$$

a primeira condição em (4.59) implica que a função $f(r)$ deve satisfazer a seguinte condição

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0. \quad (4.61)$$

Ademais, tendo em vista que $f(r)$ deve percorrer toda a esfera (espaço interno) no intervalo $[0, \pi]$, enquanto r corre todo o espaço físico ($0 < r < \infty$), configuramos que a condição sobre $f(r)$ na origem como sendo dada por

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \pi. \quad (4.62)$$

Essa última condição, implica que o campo de Skyrme, no espaço de configuração também obedece a seguinte condição na origem

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \phi \equiv -\hat{n}_3. \quad (4.63)$$

De modo a executar nossa análise, introduziremos a seguinte redefinição de campo:

$$h = \frac{1}{2} (1 + \phi_3) = \frac{1}{2} (1 + \cos f), \quad (4.64)$$

com $h(r)$ satisfazendo, por extensão a (4.61) e (4.62), as condições

$$\lim_{r \rightarrow 0} h = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} h = 1. \quad (4.65)$$

Estamos agora em condições de determinar a carga topológica. Usando o ansatz (4.58), juntamente com (4.64), observamos que o integrando em (4.29) pode ser reescrito como

$$\epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) = -4 \frac{N}{r} \frac{dh}{dr}, \quad (4.66)$$

de modo que agora a carga topológica, (4.29), pode ser determinada pela integração direta

$$\deg[\boldsymbol{\phi}] = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\theta \left(-4 \frac{N}{r} \frac{dh}{dr} \right) = N[h(\infty) - h(0)] = N, \quad (4.67)$$

deixando claro o papel do “winding number” N nas configurações topológicas do modelo.

Por meio do ansatz (4.58) e da redefinição (4.64), as equações BPS são reescritas em coordenadas polares como

$$\left(\frac{1}{r} N + g A_\theta \right) \frac{dh}{dr} = \mp \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{dW}{dh} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) = \mp 4 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 W(h), \quad (4.68)$$

onde, como pode ser notado, A_r não participa das configurações de energia finita². Neste ponto, adotamos a seguinte parametrização para o campo de calibre

$$A_\theta = \frac{1}{gr} [a(r) - N], \quad (4.69)$$

onde a função $a(r)$ é bem comportada ao longo de todo o eixo radial. Por razões semelhantes àsquelas já argumentadas em (3.70), e a fim de garantir que A_θ seja regular na origem, estabelecemos a seguinte condição de contorno na origem

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = N. \quad (4.70)$$

Por outro lado, nas configurações de vácuo, desejamos que ela assuma algum valor finito e por isso, escolhemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a_\infty. \quad (4.71)$$

Usando a parametrização (4.69), reescrevemos o campo magnético como

$$B = \frac{1}{gr} \frac{da}{dr}, \quad (4.72)$$

enquanto as equações BPS (4.68) são reescritas como

$$\frac{a}{r} \frac{dh}{dr} = \mp \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda^4 g^3} \frac{dW}{dh} \quad \text{e} \quad \frac{1}{gr} \frac{da}{dr} = \mp 4 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 W(h). \quad (4.73)$$

² De fato, nenhuma condição é imposta sobre a componente $A_r(r)$ do potencial vetor e, apesar disso, ela não aparece explicitamente em qualquer equação, mesmo nas equações de segunda ordem. Desse modo, $A_r(r)$ permanece arbitrária e sem influência nas soluções BPS do modelo.

Com isso, as condições de contorno que são satisfeitas pelo superpotencial na origem são

$$\lim_{r \rightarrow 0} W(h) = W_0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dW}{dh} = \text{cte}, \quad (4.74)$$

com W_0 sendo uma quantidade finita. Nas configurações de vácuo, ou seja, quando $r \rightarrow \infty$, as Eqs. (4.50) e (4.56) implicam que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dW}{dh} = 0. \quad (4.75)$$

A última condição em (4.75) garante que o superpotencial é capaz de gerar um potencial satisfazendo a condição de vácuo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{V}(r) \equiv \lim_{h \rightarrow 1} \mathcal{V}(h) = 0. \quad (4.76)$$

Usando os ansatzs (4.58) e (4.69), bem como a redefinição de campo (4.64), podemos ainda reescrever a densidade de energia BPS como:

$$\mathcal{E}_{BPS} = 4 \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^2} W^2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\kappa^4}{\lambda^6 g^6} \left(\frac{dW}{dh} \right)^2. \quad (4.77)$$

Além do mais, a energia BPS, Eq. (4.53), torna-se

$$E_{BPS} = \pm 2\pi N \frac{\kappa^2}{\lambda^2 g^3} W(0). \quad (4.78)$$

Usando a definição do campo magnético, (4.72), e as condições de contorno (4.70) e (4.71), podemos determinar o fluxo magnético total Φ como sendo dado por

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty r dr B = \frac{2\pi}{g} (a_\infty - N), \quad (4.79)$$

que, em geral, é uma quantidade não quantizada.

Visto que a carga elétrica total é proporcional ao fluxo magnético, tal como apresentado na Eq. (4.10), é imediato ela seja expressa por

$$\mathcal{Q}_{em} = 2\pi \frac{\kappa}{g} (a_\infty - N). \quad (4.80)$$

Na seção 4.7, apresentaremos a análise numérica das equações BPS. As soluções ali obtidas têm mostrado que para valores de g suficientemente grandes o fluxo magnético se torna um observável topologicamente quantizado. Este efeito de quantização implica que a carga elétrica é também quantizada.

4.6 A análise dos comportamentos nas fronteiras

Nesta seção, analisamos o comportamento das soluções na origem e no vácuo via procedimento de linearização. Tal como apresentado na análise dos comportamentos

para vórtices do capítulo anterior, o procedimento consiste em considerar aproximações perturbativas tanto em torno da origem quanto no vácuo. Como antes, consideram-se somente as aproximações a primeira ordem, quando possível, produzindo equações diferenciais lineares. As soluções dessas equações conduzem aos comportamentos aproximados dos perfis dos campos tanto na origem quanto no vácuo. Esses comportamentos são apresentados a seguir.

4.6.1 O comportamento na origem

Na origem, as equações BPS, (4.73), são linearizadas e resolvidas considerando as seguintes condições de contorno

$$h(0) = 0, \quad a(0) = N \quad \text{e} \quad W(0) = W_0. \quad (4.81)$$

O superpotencial $W(h)$ é considerado como sendo uma função bem comportada tal que os comportamentos dos perfis dos campos $h(r)$ e $a(r)$ resultam em

$$h(r) = -\frac{\kappa^2(W_h)_{h=0}}{8N\lambda^4g^3}r^2 + \frac{\kappa^4(W_h)_{h=0}(W_{hh})_{h=0}}{128N^2\lambda^8g^6}r^4 + \dots, \quad (4.82)$$

$$a(r) = N - \frac{\kappa^4W_0(W_h)_{h=0}^2}{16N^2\lambda^8g^5}r^4 + \frac{\kappa^6W_0(W_h)_{h=0}^2(W_{hh})_{h=0}}{96N^3\lambda^{12}g^8}r^6 + \dots, \quad (4.83)$$

onde W_h e W_{hh} representam a primeira e a segunda derivada de $W(h)$ com relação a h , respectivamente.

A partir de (4.82) e (4.83), observamos que o comportamento para o campo magnético próximo a origem é dado por

$$|B(r)| = \frac{\kappa^4W_0(W_h)_{h=0}^2}{4N^2\lambda^8g^6}r^2 - \frac{\kappa^6W_0(W_h)_{h=0}^2(W_{hh})_{h=0}}{16N^3\lambda^{12}g^9}r^4 + \dots, \quad (4.84)$$

enquanto que a densidade de energia BPS se comporta como

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{\kappa^4(W_h)_{h=0}^2}{4\lambda^6g^6} + \frac{\kappa^6(W_0)^2(W_h)_{h=0}^2}{4N^2\lambda^{10}g^9} \left[g - \frac{N(W_{hh})_{h=0}}{4(W_0)^2} \right] r^2 + \dots. \quad (4.85)$$

Para pequenos valores de g , a densidade de energia BPS tem amplitudes muito grandes.

4.6.2 O comportamento no vácuo

A análise para valores suficientemente grandes de r em torno do vácuo é executada considerando as seguintes condições de contorno

$$h(R) = 1, \quad a(R) = a_R, \quad \text{e} \quad W(R) = 0, \quad (4.86)$$

onde $R > 0$ e a_R é um número real. Se R é finito, então, ele define o tamanho máximo do raio do sóliton topológico que chamamos de compacton³. Por outro lado, se $R \rightarrow \infty$,

³ Compactons podem ser definidos como sóliton com comprimento de onda finito, ou seja, livres de caudas exponenciais. Diferentemente dos sólitons, a largura do compacton é independente de sua amplitude (136).

temos um sóliton cujo o decaimento segue, ou uma lei exponencial, ou uma lei de potência.

Para $r \rightarrow R$, consideramos que o comportamento do superpotencial $W(h)$ é dado por

$$W(h) \approx (1-h)^\sigma, \quad (4.87)$$

onde $\sigma > 1$. Encontramos três tipos de soluções para sólitons:

- i. Para $1 < \sigma < 2$, há soluções para compactons;
- ii. Para $\sigma = 2$, há soluções cujo decaimento segue um lei exponencial do tipo $e^{-\alpha r^2}$, com $\alpha > 0$, e
- iii. Para $\sigma > 2$, os sólitons possuem um decaimento seguindo uma lei de potência do tipo $r^{-\beta}$, com $\beta > 0$.

4.6.2.1 O comportamento dos perfis para $1 < \sigma < 2$

Para a análise dos comportamentos, rotulamos o raio máximo dos compactons por R . Consideramos que o comportamento do superpotencial, em $r = R$, como sendo dado por

$$W(h) \approx W_R (1-h)^\sigma. \quad (4.88)$$

As soluções das equações BPS linearizadas, para aproximações em torno de $r = R$, mostram que os perfis possuem os seguintes comportamentos:

$$h(r) = 1 - \left[\frac{\sigma(2-\sigma)\kappa^2 R W_R}{4\lambda^4 g^3 a_R} \right]^{1/(2-\sigma)} (R-r)^{1/(2-\sigma)} + \dots, \quad (4.89)$$

$$a(r) = a_R + \frac{2g R W_R}{\sigma(2-\sigma)} \left[\frac{\sigma(2-\sigma)\kappa^2 R W_R}{4\lambda^4 g^3 a_R} \right]^{(2+\sigma)/(2-\sigma)} (R-r)^{2\sigma/(2-\sigma)} + \dots. \quad (4.90)$$

4.6.2.2 O comportamento dos perfis para $\sigma = 2$

Como já mencionado, os sólitons aqui obtidos apresentam decaimento tipo exponencial atingindo as configurações de vácuo para $r \rightarrow \infty$. Aqui, o comportamento do superpotencial é dado por

$$W(h) \approx W_\infty^{(2)} (1-h)^2, \quad (4.91)$$

enquanto que o comportamento dos perfis das funções são expressas como

$$h(r) = 1 - C e^{-M^2 r^2} + \dots, \quad (4.92)$$

$$a(r) = a_\infty + 2g W_\infty^{(2)} C^4 M^2 r^2 e^{-4M^2 r^2} + \dots, \quad (4.93)$$

onde a quantidade M , dada por

$$M^2 = \frac{\kappa^2 W_\infty^{(2)}}{4\lambda^4 g^3 a_\infty}, \quad (4.94)$$

é responsável por controlar a largura dos perfis.

4.6.2.3 O comportamento dos perfis para $\sigma > 2$

Assim como no caso $\sigma = 2$, as configurações de vácuo são atingida em $r \rightarrow \infty$. Contudo, a forma como as soluções decaem, como já mencionado, obedecem uma lei de potência. Aqui, o superpotencial é assumido como tendo o seguinte comportamento

$$W(h) \approx W_\infty (1-h)^\sigma. \quad (4.95)$$

Já os perfis das funções apresentaram os seguintes comportamentos

$$h(r) = 1 - \left(\frac{C^{(\infty)}}{r^2} \right)^{1/(\sigma-2)} + \dots, \quad (4.96)$$

$$a(r) = a_\infty + \frac{8gW_\infty}{(\sigma^2-4)} \left(\frac{C^{(\infty)}}{r^2} \right)^{(2+\sigma)/(\sigma-2)} + \dots, \quad (4.97)$$

onde

$$C^{(\infty)} = \frac{8\lambda^4 g^3 a_\infty}{\kappa^2 W_\infty \sigma (\sigma-2)}. \quad (4.98)$$

4.7 Soluções numéricas das equações BPS

4.7.1 As soluções do tipo compacton

Resolvemos as equações BPS (4.73) para o seguinte superpotencial

$$W(h) = W_0 (1-h)^{3/2}, \quad (4.99)$$

que provê o seguinte potencial

$$\mathcal{V}(h) = \frac{9}{32} \frac{\kappa^4}{\lambda^6 g^6} W_0^2 (1-h). \quad (4.100)$$

Este potencial é o equivalente ao bem conhecido “potencial old Baby Skyrme” (75).

Em nossa análise resolvemos as equações BPS (4.73) para vários valores da constante de acoplamento eletromagnética e fixamos os demais parâmetros em: $N = 1$, $\kappa = 1$, $W_0 = 1$ e $\lambda = 2.5$. As soluções para os compactons estão descritas nas figuras 10, 11, 12 e 13.

O perfil do campo de Skyrme é descrito na figura 10 para vários valores g . As linhas sólidas coloridas representam os perfis de $h(r)$ no intervalo $0 \leq r \leq R$ e as respectivas linhas pontilhadas coloridas representam o valor de vácuo, $h = 1$, no intervalo $R \leq r < \infty$. Os vários valores do raio R do compacton, obtidos para os vários valores de g , respectivamente, são mostrados na figura 14.

A figura 11 descreve o campo de calibre $a(r)$. Similar a descrição dada na figura 10, as linhas sólidas representam os perfis do $a(r)$ no intervalo $0 \leq r \leq R$ e as respectivas linhas pontilhadas representam o valor de vácuo, $a(R) = a_R$, no intervalo $R \leq r < \infty$. Os perfis mostram o valor $a(R) = a_R$, diminuindo quando g cresce.

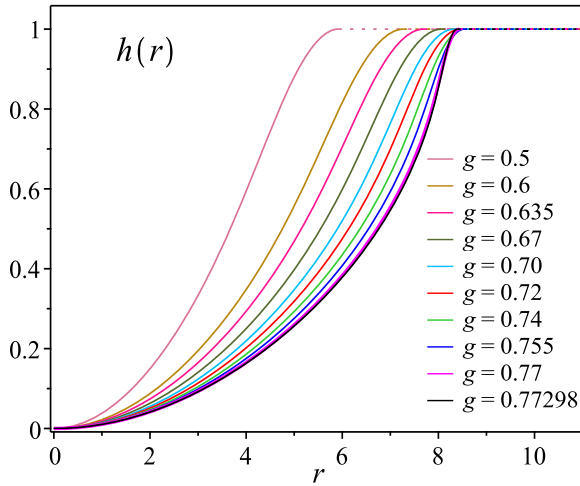


Figura 10: O perfil do campo de Skyrme $h(r)$.

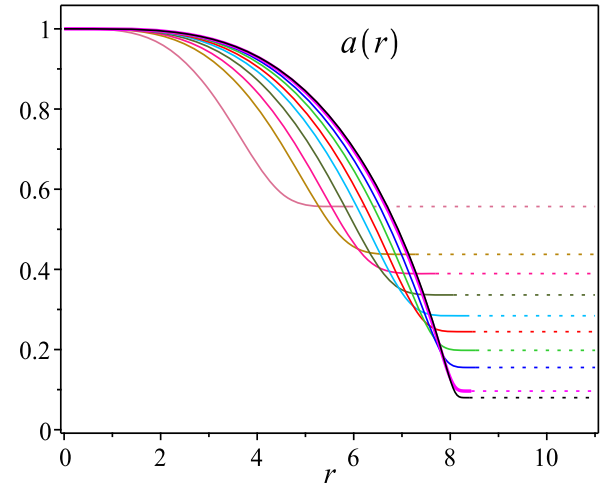


Figura 11: O perfil do campo de gauge $a(r)$.

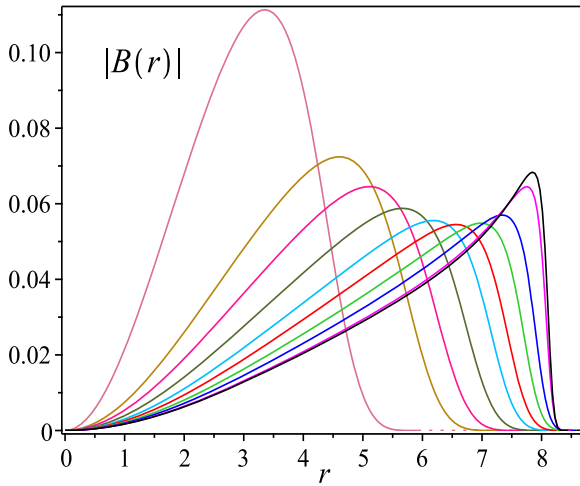


Figura 12: O campo magnético $B(r)$.

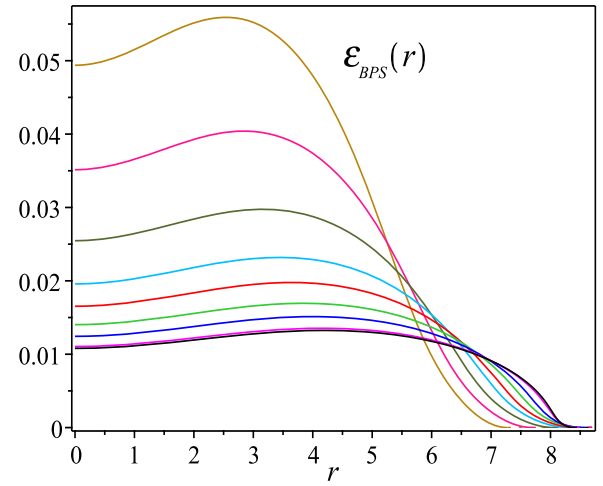


Figura 13: A densidade de energia BPS.

Os perfis do campo magnético são apresentados na figura 12. Eles são estruturas do tipo anel cujos valores máximos estão localizados mais próximos da origem quando g assume valores pequenos que, para nosso caso, corresponde ao intervalo $0 < g < 0.5$. Embora não seja mostrado na figura, as amplitudes desses máximos são maiores à medida que g se torna cada vez menor. Tal asserção torna-se bastante clara quando se analisa o comportamento dado pela Eq. (4.84). Além do mais, quando g assume valores suficientemente grandes, tais máximos movem sua posição para uma região cada vez mais próxima da fronteira do compacton.

Os perfis da densidade de energia BPS (4.77) são apresentados na figura 13. O comportamento na origem é dado por (veja Eq. (4.85))

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{2.304 \times 10^{-3}}{g^6} + \frac{5.89824 \times 10^{-5}}{g^9} (g - 0.1875) r^2 + \dots \quad (4.101)$$

Para pequenos valores de g (em nosso caso $0 < g < 0.1875$) os perfis se parecem

com protuberâncias (em inglês, *lumps*) centradas na origem. Tais perfis possuem amplitudes muito maiores do que aqueles apresentados na figura 13 e por essa razão não são mostrados ali. Os perfis apresentados na figura 13 correspondem a valores de g suficientemente grandes ($g > 0.6$) e adquirem uma forma tipo anel.

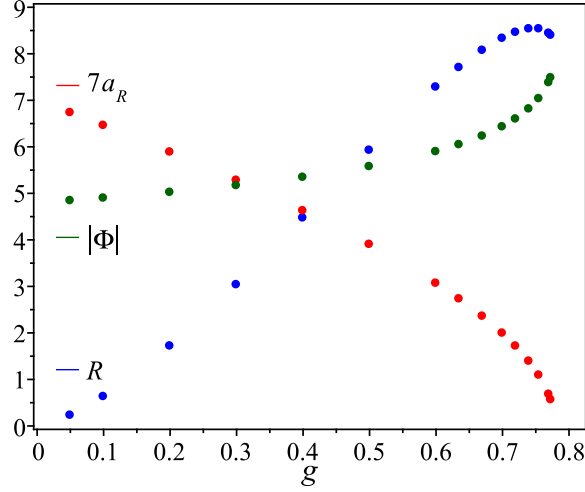


Figura 14: Comportamento das soluções compactons obtidos a partir das equações BPS (4.73). Os pontos azuis, vermelhos e verdes mostram, respectivamente, como o raio do compacton, R , o valor de vácuo do campo de gauge, a_R , e o fluxo magnético, $|\Phi|$, mudam com relação a constante de acoplamento g .

As dependências do raio do compacton R , do valor de vácuo do campo de gauge a_R e do fluxo magnético total $|\Phi|$ em relação a g (pela fixação de todos os parâmetros) são mostrados na figura 14 para $N = 1$, $\kappa = 1$, $W_0 = 1$ e $\lambda = 2.5$. Observamos que o valor de vácuo $a(R) = a_R$ diminui quando g cresce, ou seja, $a_R \rightarrow 0$ para valores de g suficientemente grandes. Consequentemente,

$$\Phi \rightarrow -\frac{2\pi}{g}N, \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_{em} \rightarrow -2\pi\frac{\kappa}{g}N, \quad (4.102)$$

sendo, portanto, quantidades topologicamente quantizadas.

A partir das figuras 11 e 14, onde consideramos a constante de acoplamento eletromagnético g como sendo o único parâmetro livre (e todos os outros fixos), observamos que o raio R do compacton claramente possui um valor máximo.

Similarmente, analisamos a dependência tanto do raio R do compacton, quanto do valor do campo de gauge no vácuo, com relação a κ (mantendo os demais valores fixos). A análise numérica tem mostrado que o raio é inversamente proporcional a κ ($R \propto \kappa^{-1}$), enquanto que o valor do campo de gauge no vácuo permanece constante.

A figura 15 mostra a mudança no valor do R em termos da constante κ para $N = 1$, $g = 0.77$, $W_0 = 1$ e $\lambda = 2.5$. Aqui, o valor de vácuo do campo de calibre para vários valores de κ é dado por $a_R = 0.0964097741$.

Nossa terceira análise examinou a dependência do raio do compacton R e do valor de vácuo do campo de gauge com relação a λ (mantendo todos os outros parâmetros

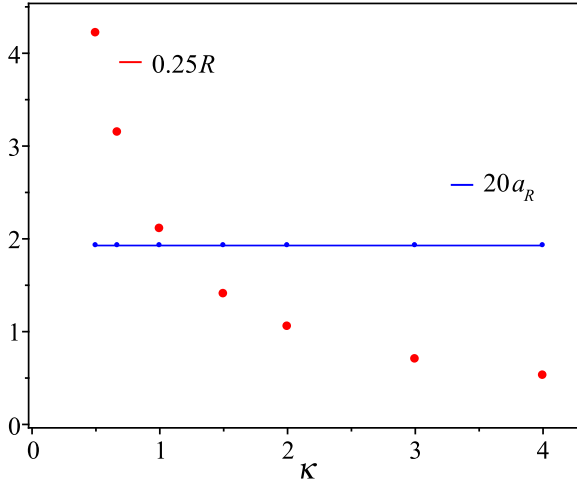


Figura 15: Comportamento do raio R do compacton (pontos vermelhos) e do valor de vácuo do campo de gauge (linha pontilhada azul) em termos da constante κ .

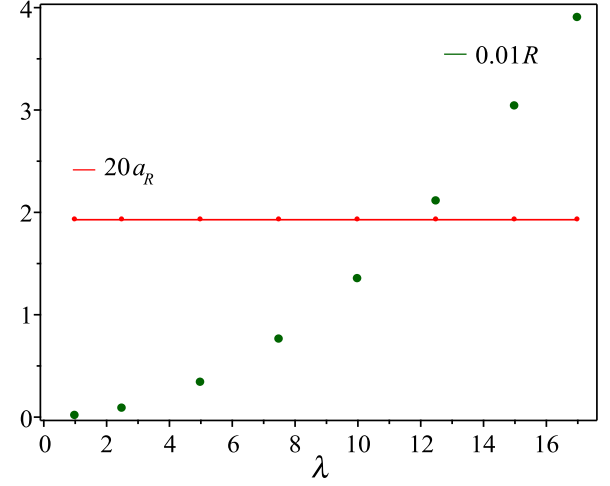


Figura 16: Comportamento do raio R do compacton (pontos verdes) e do valor de vácuo do campo de gauge (linha pontilhada vermelha) em termos da constante λ .

fixos). A análise numérica tem mostrado que o raio depende quadraticamente do parâmetro λ ($R \propto \lambda^2$), enquanto que o valor de vácuo do campo de calibre a_R permanece constante. Tal dependência é representada na figura 16 para $N = 1$, $g = 0.77$, $W_0 = 1$ e $\kappa = 1$, enquanto que o valor de vácuo do campo de calibre permanece aproximadamente constante, $a_R = 0.0964097741$, para todos os valores de λ .

Até agora, nossa análise dos sólitons compactons permite concluir que o valor de vácuo do campo de calibre, a_R , depende apenas da constante de acoplamento eletromagnético g . Consequentemente, o fluxo magnético total é independente dos valores de κ e λ , tornado-se quantizado para valores de g suficientemente grande.

4.7.2 As soluções do tipo decaimento exponencial

Resolvemos as equações BPS (4.73) para o seguinte superpotencial

$$W(h) = W_0(1 - h)^2, \quad (4.103)$$

o qual provê o potencial

$$\mathcal{V}(h) = \frac{1}{2} \frac{\kappa^4}{\lambda^6 g^6} W_0^2 (1 - h)^2. \quad (4.104)$$

Tal potencial é similar ao que foi usado na Ref. (75).

A análise para resolução das equações BPS (4.73) considerou vários valores de g , mantendo os demais parâmetros fixos em $N = 1$, $\kappa = 1$, $W_0 = 0.5$ e $\lambda = 1$. As figuras 17, 18 e 19 apresentam os perfis dos campos de Skyrme e de gauge, do campo magnético e da densidade de energia BPS, respectivamente, para valores crescentes

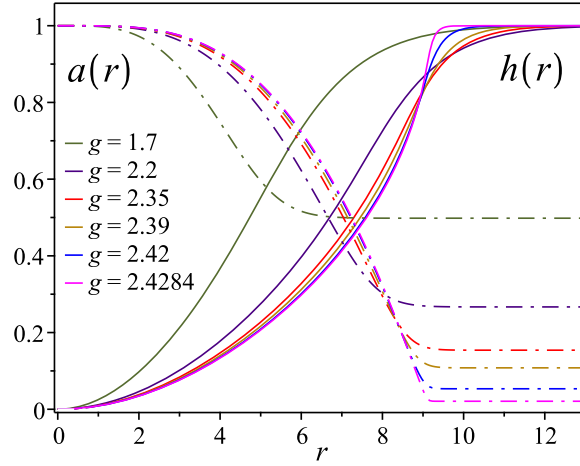


Figura 17: Perfis do campo de Skyrme $h(r)$ e do campo de calibre $a(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).

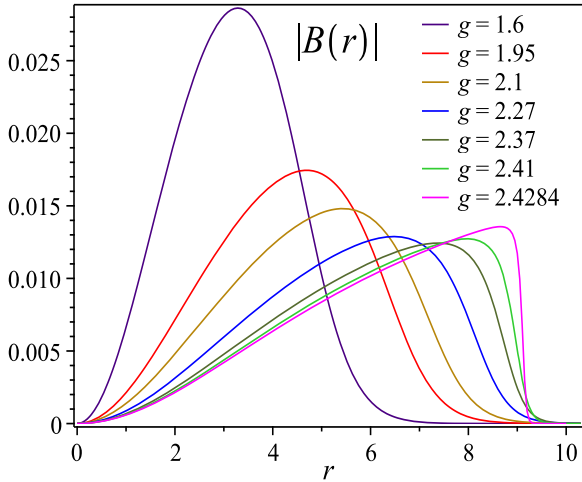


Figura 18: Perfis do campo magnético $B(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).

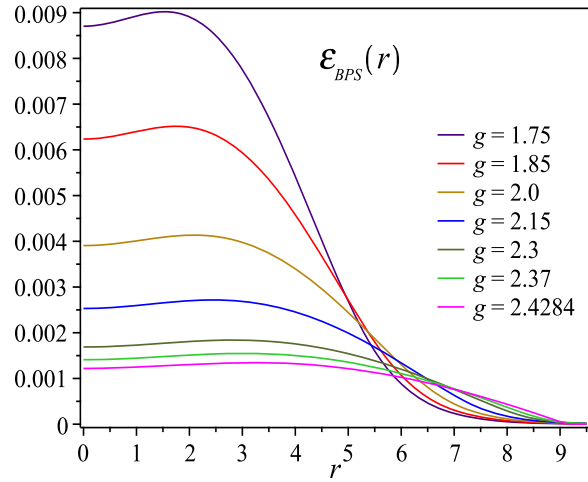


Figura 19: Perfis da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).

de g . Observamos que para valores de g suficientemente grandes os perfis adquirem estrutura semelhante a dos compactons.

Os comportamentos dos valores de vácuo do campo de calibre a_∞ (linha vermelha) e do fluxo magnético (linha verde) em termos de g são apresentados na figura 20, demonstrando estrutura similar com àquelas observadas para o caso compacton. Similarmente, mostramos o comportamento da quantidade $g^3 a_\infty$ em termos de g (linha azul) que controla a largura (4.94) das soluções para valores de r suficientemente grandes.

A análise numérica mostra que o valor de vácuo do campo de calibre a_∞ somente depende dos valores da constante de acoplamento eletromagnética g tal como ocorre no caso do compacton.

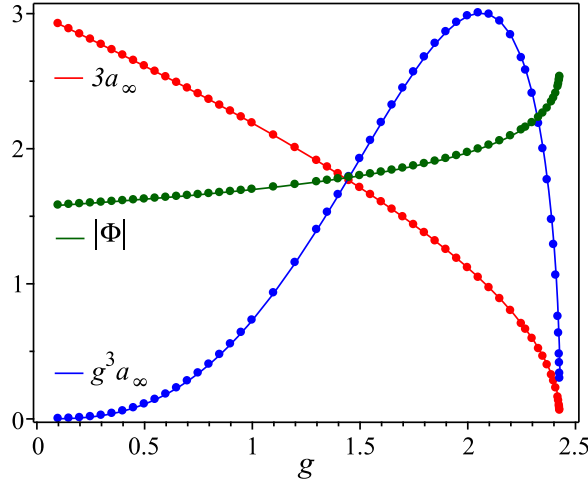


Figura 20: Comportamento do valor de vácuo a_∞ (linha vermelha), do fluxo magnético $|\Phi|$ (linha verde) e da quantidade $g^3 a_\infty$ (linha azul) com relação ao parâmetro g das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (4.103).

4.7.3 As soluções com decaimento do tipo lei de potência

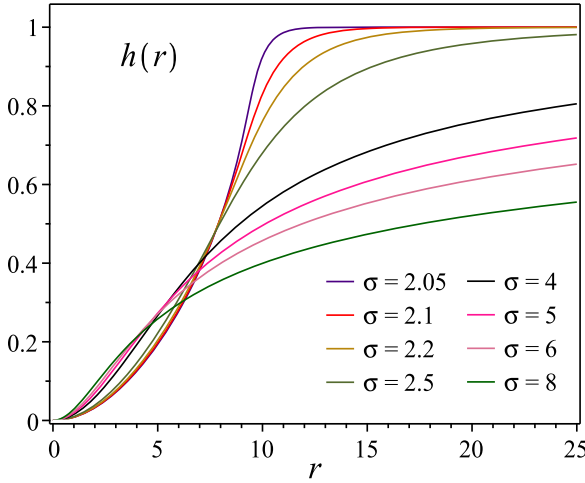


Figura 21: Os perfis $h(r)$ do campo de Skyrme com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).

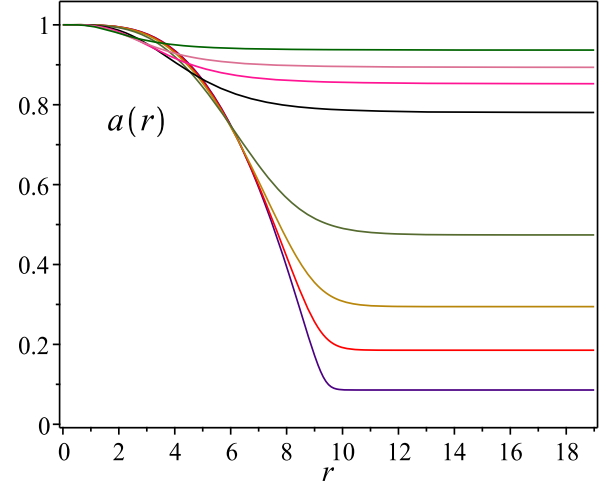


Figura 22: Os perfis $a(r)$ do campo de calibre com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).

Para obter os sólitons **BPS** decaindo por meio de uma lei de potência, consideramos o seguinte superpotencial

$$W(h) = W_0 (1 - h)^\sigma, \quad (4.105)$$

com $\sigma > 2$, provendo o potencial

$$\mathcal{V}(h) = \frac{1}{8} \frac{\kappa^4}{\lambda^6 g^6} W_0^2 \sigma^2 (1 - h)^{2(\sigma-1)}. \quad (4.106)$$

Para este caso, nossa análise consistiu em resolver as equações **BPS** (4.73) para vários valores do parâmetro σ . Os demais parâmetros foram fixados para $N = 1$, $\kappa = 1$,

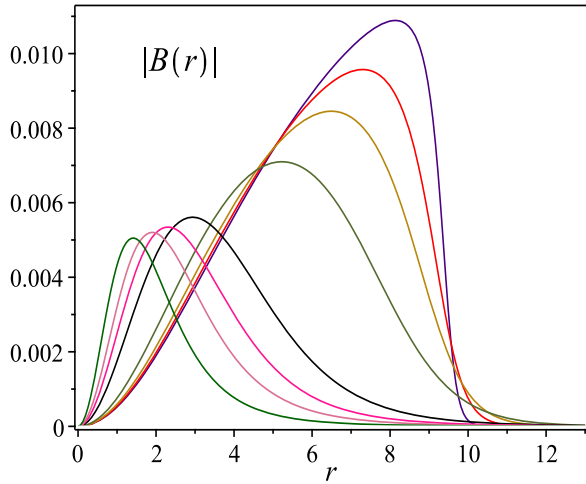


Figura 23: Os perfis $B(r)$ do campo magnético com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).

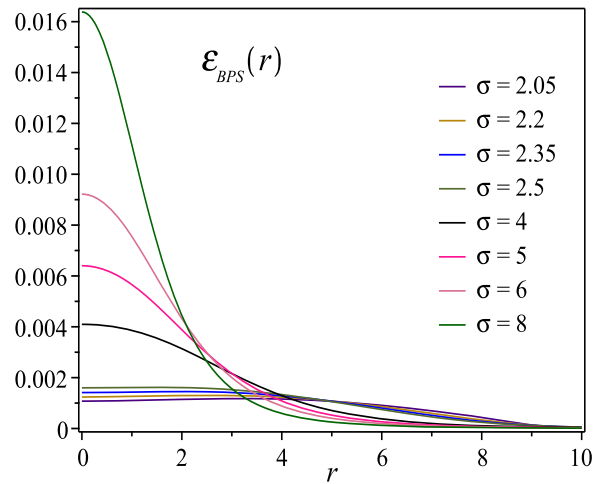


Figura 24: A densidade de energia BPS $\mathcal{E}(r)$ do com decaimento seguindo uma lei de potência gerada pelo superpotencial Eq. (4.103).

$W_0 = 0.5$, $\lambda = 1$ e $g = 2.5$. As figuras 21, 22, 23 e 24 retratam os perfis do campo de Skyrme $h(r)$, do campo de calibre $a(r)$, do campo magnético $B(r)$ e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$, respectivamente. Os comportamentos dos perfis são similares aos dos compactons quando o parâmetro $\sigma \rightarrow 2$.

Similarmente, tal como ocorreu nos dois casos anteriores, análise numérica mostrou mais uma vez que, para valores fixos de $\sigma > 2$, o valor de vácuo do campo de calibre a_∞ somente depende dos valores da constante de acoplamento g . A partir da figura 22, para valores fixo de g , observamos que o valor de vácuo do campo de calibre tende ao valor unitário, ou seja, $a_\infty \rightarrow 1$ para $\sigma \gg 2$, implicando que o fluxo magnético total tende ao valor nulo, $\Phi \rightarrow 0$.

5 SÓLITONS AUTODUAIS NO MODELO MAXWEL BABY SKYRMEL COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ

5.1 O modelo Maxwell-Skyrme (1+3)-dimensional

O modelo de Skyrme é uma teoria de campo não linear que foi originalmente construída para descrever bárions como sólitons topológicos, posteriormente chamados de skyrmions (24, 25). Desde que 't Hooft (137, 138), e depois Witten (139, 140), observaram que bárions poderiam se comportar como sólitons em uma teoria de campo efetiva para mésons, no limite em que o número de cor, N_c , é muito grande ($N_c \rightarrow \infty$), o modelo de Skyrme é considerado como uma teoria efetiva para a CDQ (141).

A densidade lagrangiana que rege o modelo é dada por

$$\mathcal{L}_{Sk}^{(1+3)} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} \left(\partial_{\hat{\mu}} \mathbb{U} \partial^{\hat{\mu}} \mathbb{U}^\dagger \right) + \frac{1}{32a^2} \text{Tr} \left(\left[(\partial_{\hat{\mu}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^\dagger, (\partial_{\hat{\nu}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^\dagger \right]^2 \right), \quad (5.1)$$

onde $\mathbb{U}(x) \equiv U(x, t)$ é um campo quiral, invariante por transformações do grupo $SU(2)$, o qual, para qualquer instante fixo ($t = \text{cte}$), mapeia o espaço físico $\mathbb{R}^3$ em uma esfera $\mathbb{S}^3$ no espaço interno ($U(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$). As constantes F_π e a são parâmetros livres do modelo cujos valores são fixados quando comparados com dados experimentais. O modelo (5.1) é construído no espaço de Minkowski com assinatura $(+---)$ e os índices gregos circunflexados ($\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\rho}, \dots$) correm de 0 até 3.

O campo quiral $SU(2)$ é configurado para ser unitário, $\mathbb{U}^\dagger \mathbb{U} = \mathbb{U} \mathbb{U}^\dagger = \mathbb{1}$, sendo parametrizado como

$$\mathbb{U}(x) = \mathbb{1} \phi_0(x) + i \tau \cdot \boldsymbol{\phi}(x), \quad (5.2)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 , ϕ_0 e $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ são campos escalares mesônicos e $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ são matrizes de Pauli. A exigência de $\mathbb{U}$ como unitário conduz imediatamente ao vínculo

$$\phi_0^2 + \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1 \quad (5.3)$$

entre os campos mesônicos. Uma vez que os skyrmions são soluções topologicamente estáveis, estes possuem uma quantidade conservada denominada corrente topológica, também conhecida por corrente bariônica, que é expressa por

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \text{Tr} \left[\left(\mathbb{U}^\dagger \partial_{\hat{\nu}} \mathbb{U} \right) \left(\mathbb{U}^\dagger \partial_{\hat{\rho}} \mathbb{U} \right) \left(\mathbb{U}^\dagger \partial_{\hat{\sigma}} \mathbb{U} \right) \right]. \quad (5.4)$$

Versões de calibre com simetria $U(1)$ do modelo de Skyrme foram consideradas no estudo de decaimento de núcleons nas vizinhanças de um monopólio (142) e acoplados a termos da interação fraca (143, 144). Soluções estáticas e axialmente simétricas dos núcleons também foram analisadas e previamente construídas nas Refs. (145, 146).

Seguindo a prescrição da Ref. (142), o modelo (5.1) é generalizado para ser um invariante de calibre $U(1)$ por meio das seguintes transformações

$$\mathbb{U}(x) \rightarrow \mathbb{U}'(x) = \mathbb{U}(x) + i g \Lambda(x) [\mathbb{Q}, \mathbb{U}(x)], \quad A_{\hat{\mu}}(x) \rightarrow A'_{\hat{\mu}}(x) = A_{\hat{\mu}}(x) + \partial_{\hat{\mu}} \Lambda(x), \quad (5.5)$$

onde

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \mathbb{1} + \tau^3 \right), \quad (5.6)$$

é usualmente a matriz de carga dos quarks e g é a constante de acoplamento do campo eletromagnético $A_{\hat{\mu}}$. Sob tais condições, conseguimos construir uma derivada covariante que expressamos como

$$D_{\hat{\mu}} \mathbb{U} = \partial_{\hat{\mu}} \mathbb{U} - i g A_{\hat{\mu}} [\mathbb{Q}, \mathbb{U}]. \quad (5.7)$$

Assim, todas as derivadas $\partial_{\hat{\mu}} \mathbb{U}$, em (5.1), são substituídas por $D_{\hat{\mu}} \mathbb{U}$ de tal forma que a densidade lagrangiana invariante de calibre é agora dada por

$$\mathcal{L}_{MSk}^{(1+3)} = -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{F_{\pi}^2}{16} \text{Tr} \left[(D_{\hat{\mu}} \mathbb{U}) (D^{\hat{\mu}} \mathbb{U})^{\dagger} \right] + \frac{1}{32 a^2} \text{Tr} \left[\left[(D_{\hat{\mu}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^{\dagger}, (D_{\hat{\nu}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^{\dagger} \right]^2 \right], \quad (5.8)$$

enquanto que a corrente topológica conservada se torna

$$B^{\mu} = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \text{Tr} \left[\left(\mathbb{U}^{\dagger} \partial_{\hat{\nu}} \mathbb{U} \right) \left(\mathbb{U}^{\dagger} \partial_{\hat{\rho}} \mathbb{U} \right) \left(\mathbb{U}^{\dagger} \partial_{\hat{\sigma}} \mathbb{U} \right) \right] + \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \partial_{\hat{\nu}} \left[3i g A_{\hat{\rho}} \text{Tr} \left(\mathbb{Q} \left[\mathbb{U}^{\dagger} (\partial_{\hat{\sigma}} \mathbb{U}) + (\partial_{\hat{\sigma}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^{\dagger} \right] \right) \right]. \quad (5.9)$$

É útil, e muitas vezes conveniente, reescrevemos a densidade lagrangiana (5.8) em termos dos campo mesônicos ϕ_0 e $\boldsymbol{\phi}$. Para tal finalidade, fazemos uso da parametrização (5.2) e das propriedades das matrizes de Pauli

$$\tau^a \tau^b = \delta^{ab} \mathbb{1} + i \epsilon^{abc} \tau^c, \quad \text{Tr}(\tau^a) = 0. \quad (5.10)$$

Para nossos propósitos, generalizamos a matriz de carga na seguinte forma

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \mathbb{1} + \tau \cdot \hat{\mathbf{n}} \right). \quad (5.11)$$

Desse modo, encontramos

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(D_{\hat{\mu}} \mathbb{U}) (D^{\hat{\mu}} \mathbb{U})^{\dagger} \right] = \partial_{\hat{\mu}} \phi_0 \partial^{\hat{\mu}} \phi_0 + (D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi}) \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{32} \text{Tr} \left[\left[(D_{\hat{\mu}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^{\dagger}, (D_{\hat{\nu}} \mathbb{U}) \mathbb{U}^{\dagger} \right]^2 \right] &= \frac{1}{2} \partial_{\hat{\mu}} \phi_0 \partial_{\hat{\nu}} \phi_0 (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \cdot D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) - \frac{1}{2} (\partial_{\hat{\mu}} \phi_0) (\partial^{\hat{\mu}} \phi_0) (D_{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi} \cdot D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \\ &\quad - \frac{1}{4} (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde

$$D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} = \partial_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} + g A_{\hat{\mu}} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \quad (5.14)$$

é a derivada covariante que atua sobre os campo $\boldsymbol{\phi}$. Com isso, a densidade lagrangiana do modelo Skyrme-Maxwell fica reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SkM}^{(1+3)} &= -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{v^2}{2} \left[\partial_{\hat{\mu}} \phi_0 \partial^{\hat{\mu}} \phi_0 + (D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi}) \right] + \frac{\lambda^2}{2} \partial_{\hat{\mu}} \phi_0 \partial_{\hat{\nu}} \phi_0 (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \cdot D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2} (\partial_{\hat{\mu}} \phi_0) (\partial^{\hat{\mu}} \phi_0) (D_{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi} \cdot D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) - \frac{\lambda^2}{4} (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde escolhemos as constantes como sendo dadas por

$$v^2 = \frac{F_{\pi}^2}{4}, \quad \lambda^2 = \frac{1}{a^2}. \quad (5.16)$$

5.2 O modelo Maxwell Baby Skyrme com quebra de simetria de Lorentz

O presente capítulo tem por objetivo investigar as consequências da inclusão de termos CPT-par da violação de simetria de Lorentz nos setores dos campos de calibre e de isospin do modelo Maxwell-Skyrme. Particularmente, estamos interessados em soluções autoduais, topológicas e de energia finita, capazes de gerar configurações BPS. Soluções desta natureza foram obtidas para uma versão planar do modelo Maxwell-Skyrme na Ref. (75), onde os autores consideraram somente o termo quártico de Skyrme, isto é, sem a presença do termo sigma $O(3)$.

Similarmente, propormos uma versão modificada do modelo (5.15), consistindo apenas do termo quártico de Skyrme ($\nu = 0$) acrescido de termos do setor CPT-par da violação de simetria de Lorentz. Buscaremos soluções planares e estáticas a partir da projeção planar dos campos (plano- xy). Além disso, é usual em sistemas skyrmions planares que a dinâmica seja descrita somente pelo tripleto vetorial $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Dessa forma, configuraremos o campo ϕ_0 como sendo nulo de modo que agora o campo $\boldsymbol{\phi}$ é o responsável pela dinâmica do setor de Skyrme. Assim, o campo $\boldsymbol{\phi}$ é de fato um mapeamento entre o espaço físico e a esfera $\mathbb{S}^2$ no espaço interno.

Com isso, a versão modificada do modelo (5.15) que iremos estudar é governada pela seguinte densidade lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4} (K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F_{\hat{\rho}\hat{\sigma}} - \frac{\lambda^2}{4} (D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \\ & - \frac{\lambda^2}{4} (K_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} (D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}} \boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\hat{\rho}} \boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\sigma}} \boldsymbol{\phi}) - V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde, como usual, $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\mu}}$ é o tensor de intensidade do campo eletromagnético,

$$D_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} = \partial_{\hat{\mu}} \boldsymbol{\phi} + g A_{\hat{\mu}} \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}, \quad (5.18)$$

é a derivada covariante, $(K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ e $(K_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ são tensores fixos que quebram a simetria de Lorentz no setor CPT-par e $V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ uma interação apropriada ainda a ser determinada. Ambos os tensores $(K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ e $(K_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ possuem as mesmas simetrias do tensor de Riemann e duplo traço nulo, ou seja, $(K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ e $(K_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$. Por essa razão, escolhemos parametrizá-los na mesma forma padrão, dada por

$$(K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} \left[g^{\hat{\mu}\hat{\rho}} \kappa^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - g^{\hat{\nu}\hat{\rho}} \kappa^{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + g^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} \kappa^{\hat{\mu}\hat{\rho}} - g^{\hat{\mu}\hat{\sigma}} \kappa^{\hat{\nu}\hat{\rho}} \right], \quad (5.19)$$

$$(K_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} \left[g^{\hat{\mu}\hat{\rho}} (k_{\phi\phi})^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - g^{\hat{\nu}\hat{\rho}} (k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + g^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} (k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\rho}} - g^{\hat{\mu}\hat{\sigma}} (k_{\phi\phi})^{\hat{\nu}\hat{\rho}} \right], \quad (5.20)$$

onde ambos, $\kappa^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} = (K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}}_{\hat{\mu}}^{\hat{\sigma}}$ e $(k_{\phi\phi})^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} = (K_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}}_{\hat{\mu}}^{\hat{\sigma}}$, são reais, simétricos e possuem traços nulos, ou seja, $\kappa^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}} = 0$ e $(k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}} = 0$.

Usando (5.19) e (5.20) em (5.17), conseguimos reescrever a densidade lagrangiana na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}\kappa^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F_{\hat{\mu}\hat{\rho}}F_{\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} - \frac{\lambda^2}{4}(D_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) \\ & - \frac{\lambda^2}{2}(k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}}(D_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi}) - V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) - \frac{1}{2}\delta(1 - \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde adicionamos o último termo com a finalidade de se levar conta o vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$. Desse modo, o parâmetro δ é de fato um multiplicador de Lagrange. Como consequência, a equação de movimento para o campo de Skyrme resultante é expressa como

$$\begin{aligned} 0 = & -\lambda^2 D_{\hat{\nu}} \left[(D^{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi}) \times D_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \right] - \lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\hat{\rho}\hat{\nu}} D_{\hat{\rho}} \left[(D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi}) \times D_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \right] \\ & - \lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}} D_{\hat{\rho}} \left[(D^{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) \times D_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \right] - \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} + \delta \boldsymbol{\phi}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Contudo, a fim de eliminar o multiplicador de Lagrange δ e obtermos a equação de campo correta, aplicamos em ambos os lados da Eq. (5.22) o produto $\times \boldsymbol{\phi}$. Tal procedimento nos conduz a seguinte expressão

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda^2 D_{\hat{\mu}} \left\{ \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) \right] D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \right\} + \lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}} D_{\hat{\mu}} \left\{ \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi}) \right] D_{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi} \right\} \\ & + \lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\hat{\nu}\hat{\rho}} D_{\hat{\mu}} \left\{ \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \times D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) \right] D_{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi} \right\} + \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por outro lado, a equação de movimento associada ao campo de calibre é obtida da forma usual sem nenhuma exigência adicional, sendo expressa como

$$\partial_{\hat{\nu}} F^{\hat{\nu}\hat{\mu}} + \kappa^{\hat{\rho}\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} F_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} - \kappa^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} F_{\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} = \mathcal{J}^{\hat{\mu}}, \quad (5.24)$$

onde $\mathcal{J}^{\hat{\mu}}$ é a densidade de corrente conservada

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\hat{\mu}} = & g\lambda^2 \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) \right] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi}) + g\lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi}) \right] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi}) \\ & - g\lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\hat{\rho}\hat{\nu}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_{\hat{\rho}}\boldsymbol{\phi}) \cdot \left[\boldsymbol{\phi} \cdot (D_{\hat{\nu}}\boldsymbol{\phi} \times D^{\hat{\mu}}\boldsymbol{\phi}) \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como dito acima, nosso objetivo é estudar as configurações planares do modelo e por essa razão configuramos os campos como sendo independentes da coordenada x^3 , tal que $\partial_3 A_\mu = 0$ e $\partial_3 \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$. Adicionalmente, também configuramos as componentes de índice 3 como sendo nulas, ou seja, $A_3 = 0$. Desse modo, os índices gregos (não circunflexados) correm os valores 0, 1, 2, enquanto os índices latinos correspondem somente aos valores 1, 2. Como consequência, as equações de movimento dos campos de Skyrme (5.23) e de calibre (5.24) tem sua forma preservada, mas as componentes dos tensores de violação de Lorentz tem suas componentes limitadas por $\kappa_{3\nu} = 0$ e $(k_{\phi\phi})_{3\nu} = 0$ ($\nu = 0, 1, 2$), enquanto as componentes κ_{33} e $(k_{\phi\phi})_{33}$ permanecem arbitrárias sem que, no entanto, participem explicitamente das equações de campo remanescentes.

Vale lembrar que o duplo traço nulo dos tensores $\kappa^{\hat{\rho}\hat{\nu}}$ e $(k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ainda transportam as componentes κ_{33} e $(k_{\phi\phi})_{33}$, pois

$$\kappa^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}} = 0 \rightarrow \kappa_{00} - \kappa_{ii} - \kappa_{33} = 0, \quad (5.26)$$

$$(k_{\phi\phi})^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}} = 0 \rightarrow (k_{\phi\phi})_{00} - (k_{\phi\phi})_{ii} - (k_{\phi\phi})_{33} = 0, \quad (5.27)$$

onde $\kappa_{ii} = \kappa_{11} + \kappa_{22}$ e $(k_{\phi\phi})_{ii} = (k_{\phi\phi})_{11} + (k_{\phi\phi})_{22}$.

Nós estamos interessados em soluções estacionárias das equações de movimento, ou seja, aquelas para nas quais os campos independem da coordenadas temporal. Nesta configuração a lei de Gauss, obtida a partir de (5.24) resulta em

$$L_{ij}\partial_j\partial_i A_0 + \epsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j B = g^2\lambda^2 M_{ij}A_0(\hat{n}\cdot\partial_i\phi)(\hat{n}\cdot\partial_j\phi) - g\lambda^2\epsilon_{ij}(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{n}\cdot\partial_j\phi)Q, \quad (5.28)$$

onde L_{ij} e M_{ij} são matrizes simétricas dadas por

$$L_{ij} = (1 + \kappa_{00})\delta_{ij} - \kappa_{ij}, \quad M_{ij} = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}]\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}. \quad (5.29)$$

Assim como no caso Chern-Simons Baby Skyrme, a quantidade Q é definida como

$$Q = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\phi\cdot(D_i\phi\times D_j\phi) = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\phi\cdot(\partial_i\phi\times\partial_j\phi) + g\epsilon_{ij}A_i(\hat{n}\cdot\partial_j\phi). \quad (5.30)$$

Aqui, ressaltamos que o lado direito da Eq. (5.28) provê a densidade de carga estacionária

$$\mathcal{J}_0 = -g^2\lambda^2 M_{ij}A_0(\hat{n}\cdot\partial_j\phi)(\hat{n}\cdot\partial_i\phi) + g\lambda^2\epsilon_{ij}(k_{\phi\phi})_{0i}Q(\hat{n}\cdot\partial_j\phi). \quad (5.31)$$

Similarmente, a lei de Ampère estacionária é dada por

$$(1 - \kappa_{aa})\partial_k B - \epsilon_{ij}\kappa_{i0}\partial_j\partial_k A_0 = -g\lambda^2[1 - (k_{\phi\phi})_{aa}](\hat{n}\cdot\partial_k\phi)Q - g^2\lambda^2\epsilon_{ij}(k_{\phi\phi})_{i0}(\hat{n}\cdot\partial_j\phi)(\hat{n}\cdot\partial_k\phi)A_0, \quad (5.32)$$

onde o lado direito está relacionado com a densidade de corrente

$$\mathcal{J}_i = -g\lambda^2\epsilon_{ij}[1 - (k_{\phi\phi})_{aa}](\hat{n}\cdot\partial_j\phi)Q - g^2\lambda^2\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}(k_{\phi\phi})_{k0}(\hat{n}\cdot\partial_j\phi)(\hat{n}\cdot\partial_l\phi)A_0. \quad (5.33)$$

Finalmente, a equação estacionária para o campo de Skyrme é escrita como

$$\lambda^2\epsilon_{ij}D_i\{[[1 - (k_{\phi\phi})_{aa}]Q + g\epsilon_{mn}(k_{\phi\phi})_{m0}A_0(\hat{n}\cdot\partial_n\phi)]D_j\phi\} + g\lambda^2\partial_i\left[gM_{ij}(A_0)^2(\hat{n}\cdot\partial_j\phi) + \epsilon_{ij}(k_{\phi\phi})_{0j}(A_0Q)\right](\hat{n}\times\phi) + (\hat{n}\times\phi)\frac{\partial V}{\partial(\hat{n}\cdot\phi)} = 0. \quad (5.34)$$

Até aqui, observamos que os coeficiente de paridade ímpar κ_{0i} e $(k_{\phi\phi})_{0i}$, são os responsáveis pelo acoplamento entre os setores elétrico e magnético. Com isso, sabemos a priori, que as configurações autoduais a serem obtidas para este modelo possuirão tanto campo elétrico quanto campo magnético.

O passo seguinte na busca por soluções autoduais é a implementação do formalismo BPS. Contudo, como apresentado no apêndice A, embora seja possível obter um

par de equações autoduais para o modelo (5.21), tais expressões falham em recuperar as equações de Euler-Lagrange, em especial a Eq. (5.34). A pesar disso, tal como ocorreu no modelo Chern-Simons Baby Skyrme (capítulo 4), a existência de estados BPS requer que o modelo (5.21) seja modificado pela inclusão de novos termos dotados de um campo escalar neutro que interage com o campo de Skyrme apenas. Os aspectos e detalhes desse modelo modificado é o que apresentamos na próxima seção.

5.3 Aspectos do modelo modificado e suas equações de campo

O modelo Maxwell Baby Skyrme modificado (A.71) capaz de gerar configurações BPS (vide apêndice A) é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{2}(1+\kappa_{00})\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi + \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}\partial_{\mu}\Psi\partial_{\nu}\Psi \\ & - \frac{\lambda^2}{4}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D_{\nu}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D^{\nu}\boldsymbol{\phi}) - \frac{\lambda^2}{2}(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D_{\rho}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\nu}\boldsymbol{\phi} \times D^{\rho}\boldsymbol{\phi}) \\ & + \frac{1}{2}g^2\lambda^2[1+(k_{\phi\phi})_{00}](\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\mu}\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D^{\mu}\boldsymbol{\phi})\Psi^2 + \frac{1}{2}g^2\lambda^2(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\mu}\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\nu}\boldsymbol{\phi})\Psi^2 - \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j\Psi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{1-(k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - g\epsilon_{ij}(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})\Psi \right]^2 \quad (5.36)$$

é denominada interação potencial possui dependência não apenas com $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}$ e Ψ , mas também com suas primeiras derivadas. A pesar disso, dizemos que a interação potencial $\mathcal{U}$ contém o potencial, pois se o termos quadráticos forem escritos explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & U - \epsilon_{ij} \frac{\kappa_{0i}\partial_j\Psi W}{1-\kappa_{ii}} - \frac{(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})\Psi}{1-(k_{\phi\phi})_{ii}} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \\ & + \frac{\det(\kappa_{0i}\partial_j\Psi)}{1-\kappa_{ii}} + \frac{g^2\lambda^2}{1-(k_{\phi\phi})_{ii}} \det[(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})] \Psi^2, \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde

$$\det(\kappa_{0i}\partial_j\Psi) = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}(\kappa_{0i}\partial_j\Psi)(\kappa_{0k}\partial_l\Psi), \quad (5.38)$$

$$\det[(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})] = \frac{1}{2}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}[(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})][(k_{\phi\phi})_{0k}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_l\boldsymbol{\phi})], \quad (5.39)$$

e

$$U(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} \frac{W^2}{1-\kappa_{ii}} + \frac{1}{2} \frac{1}{g^2\lambda^2} \frac{1}{1-(k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right]^2, \quad (5.40)$$

é verdadeiramente o potencial do modelo. A partir de (5.40) fica claro que W desempenha o papel de um superpotencial. Note-se ainda que no caso especial em que $\kappa_{0i} = 0$ e $(k_{\phi\phi})_{0i} = 0$ a interação $\mathcal{U}$ coincide exatamente com o potencial U , isto é, tem-se $\mathcal{U} \equiv U$.

Por simplicidade, omitimos o termo contendo o multiplicado de Lagrange o qual leva em conta o vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$. Os dois termos da terceira linha em (5.35) modificam a dinâmica da componente ao longo da direção $\hat{\mathbf{n}}$ do campo Skyrme. Desta forma, os três últimos termos quebram parcialmente a simetria do grupo $SO(3)$, mas preservam o subgrupo $U(1)$ dessa simetria.

Também aqui, a exemplo do modelo Chern-Simons-Skyrme, seção 4.3, Eq. (4.36), ressaltamos que o termo $(\hat{\mathbf{n}} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi})^2$ pode ser escrito como

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 = D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} - (\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times D^\mu \boldsymbol{\phi}), \quad (5.41)$$

onde o segundo termo, em (5.41), é um sigma $O(3)$. Em outras palavras, o novo modelo (5.35) é uma modelo Maxwell Baby Skyrme CPT completo modificado pela presença dos termos proporcionais a $(\hat{\mathbf{n}} \times D_\mu \boldsymbol{\phi})^2 \Psi^2$ e também pelos termos proveem a dinâmica do campo escalar neutro Ψ .

A equação de movimento para o campo de calibre, obtida da lagrangiana (5.35), é a mesma dada pela equação (5.24),

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \kappa^{\rho\nu} \partial_\nu F_\rho{}^\mu - \kappa^{\rho\mu} \partial_\nu F_\rho{}^\nu = \mathcal{J}^\mu, \quad (5.42)$$

com a corrente $\mathcal{J}^\mu$ sendo dada por (5.25). Por outro lado, a equação para o campo de Skyrme é agora dotada de novos termos sendo agora escrita como

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda^2 D_\mu \{ [\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D^\nu \boldsymbol{\phi})] D_\nu \boldsymbol{\phi} \} + \lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} D_\mu \{ [\boldsymbol{\phi} \cdot (D_\nu \boldsymbol{\phi} \times D^\rho \boldsymbol{\phi})] D_\rho \boldsymbol{\phi} \} \\ & + \lambda^2 (k_{\phi\phi})^{\nu\rho} D_\mu \{ [\boldsymbol{\phi} \cdot (D^\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi})] D_\rho \boldsymbol{\phi} \} + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi})} \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \\ & + g^2 \lambda^2 \{ [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] g^{\mu\nu} + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} \} \partial_\mu [(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi}) \Psi^2] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Além disso, a introdução do campo escalar neutro Ψ provê uma nova equação de campo responsável pela dinâmica do mesmo

$$\begin{aligned} [(1 + \kappa_{00}) g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}] \partial_\mu \partial_\nu \Psi = & - \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \partial_\nu \Psi} \right) \\ & + g^2 \lambda^2 \{ [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] g^{\mu\nu} + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} \} (\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\nu \boldsymbol{\phi}) \Psi. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Como antes, as configurações autoduais e topológicas decorrentes da projeção dos campos no plano- $x^1 x^2$ são alcançadas ao configurarmos os campos como sendo independentes da terceira coordenada espacial x^3 de tal modo que as derivadas com relação a x^3 sejam todas nulas, ou seja, devemos ter $\partial_3 A_\mu = 0$, $\partial_3 \Psi = 0$, $\partial_3 \boldsymbol{\phi} = 0$, $\partial_3 U_{\partial_3 \Psi} = 0$ e $\partial_3 U_{\partial_3 \phi_n} = 0$. Além disso, todas as componentes de índice 3 também são configuradas como sendo nulas, como por exemplo, $A_3 = 0$.

Desta forma, a partir da equação de movimento (5.42), vemos que a lei de Gauss estacionária continua a ser expressa como em (5.28),

$$L_{ij} \partial_j \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B = g^2 \lambda^2 M_{ij} A_0 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) - g \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) Q, \quad (5.45)$$

onde, como já apresentado anteriormente, L_{ij} e M_{ij} são matrizes simétricas dadas por

$$L_{ij} = (1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij}, \quad M_{ij} = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}, \quad (5.46)$$

e

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) + g \epsilon_{ij} A_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}). \quad (5.47)$$

Também, a partir da equação de movimento (5.42), notamos que a respectiva lei de Ampère estacionário ainda é apresentada como em (5.32)

$$0 = (1 - \kappa_{ii}) \partial_k B - \epsilon_{ij} \kappa_{i0} \partial_j \partial_k A_0 + g \lambda^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi}) Q + g^2 \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{i0} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi}) A_0. \quad (5.48)$$

Visto que a equação do campo de Skyrme é dotada de novos termos, sua versão estacionária também assume nova forma, agora dada por

$$0 = \lambda^2 \epsilon_{ij} D_i [\{ [1 - (k_{\phi\phi})_{kk}] Q + g \epsilon_{kl} (k_{\phi\phi})_{k0} A_0 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_l \boldsymbol{\phi}) \} D_j \boldsymbol{\phi}] + g \lambda^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \partial_i \{ g M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) [(A_0)^2 - \Psi^2] + \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{j0} A_0 Q \} + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi})} \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}). \quad (5.49)$$

Finalmente, a equação estacionária do campo neutro é escrita como

$$L_{ij} \partial_i \partial_j \Psi = g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \partial_i \Psi}. \quad (5.50)$$

Como apresentado em (A.54) a densidade de energia é agora escrita como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i A_0 \partial_j A_0 + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (A_0)^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q^2 + \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi^2 + \mathcal{U}, \quad (5.51)$$

sendo definida positiva para as matrizes L_{ij} e M_{ij} positivas e $\kappa_{ii} < 1$ e $(k_{\phi\phi})_{ii} < 1$. Nas configurações de vácuo ($\mathcal{E} \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) os campos satisfazem as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi} &= \hat{\mathbf{n}}, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi} &= 0, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Psi &= \text{cte}, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_i \Psi &= 0, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_0 &= \text{cte}, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_i A_0 &= 0, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_i &= \text{cte}, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B &= 0, \\ & & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} W &= 0, & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} &= 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

A implementação do formalismo retorna a seguinte expressão para a energia total (Eq. (A.28))

$$E = \check{E} + E_{BPS} \pm \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \partial_j (L_{ij} \Psi \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B + \epsilon_{ij} A_i W), \quad (5.53)$$

onde contribuição dos termos quadráticos é expressa como

$$\begin{aligned} \check{E} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \mp \partial_j \Psi) + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) (A_0 \mp \Psi)^2 \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \left\{ Q \mp \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)} - g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \right] \right\}^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \left[B \pm \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi) \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

enquanto que a contribuição topológica é dada por

$$E_{BPS} = \pm \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) \frac{\partial W}{(\hat{n} \cdot \phi)}. \quad (5.55)$$

Sob as condições de contorno acima estabelecidas a contribuição

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \partial_j (L_{ij} \Psi \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B + \epsilon_{ij} A_i W)$$

resulta nula e a densidade de energia satura no limite **BPS** quando $\check{E} = 0$, satisfazendo assim as seguintes equações autoduais

$$A_0 = \pm \Psi, \quad (5.56)$$

$$\partial_i A_0 = \pm \partial_i \Psi, \quad (5.57)$$

$$B = \mp \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi), \quad (5.58)$$

$$Q = \pm \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)} - g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \right]. \quad (5.59)$$

Visto que a condição $\Psi = \pm A_0$ satisfaz simultaneamente as Eqs. (5.56) e (5.57), reescrevemos as equações **BPS** remanescentes, (5.58) e (5.59), na forma

$$(1 - \kappa_{ii}) B - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0 = \mp W, \quad (5.60)$$

$$[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q + g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) A_0 = \pm \frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{(\hat{n} \cdot \phi)}, \quad (5.61)$$

as quais reproduzem as equações de segunda ordem (5.48) e (5.49), tal como já foi apresentado na seção A.2.

Essas duas equações, juntamente com a lei de Gauss, (5.45),

$$L_{ij} \partial_j \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B = g^2 \lambda^2 M_{ij} A_0 (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) - g\lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Q,$$

que no limite **BPS** resulta completamente equivalente a equação do campo neutro, (5.50),

$$L_{ij} \partial_i \partial_j \Psi = g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi + \frac{\partial U}{\partial \Psi} - \partial_i \frac{\partial U}{\partial \partial_i \Psi},$$

proveem as soluções autoduais (**BPS**) do modelo¹.

¹ A equivalência entre a lei de Gauss e a equação do campo neutro será apresentada na próxima seção.

Por fim, usando as quatro equações BPS, reescrevemos a densidade energia (5.51) na forma

$$\mathcal{E}_{BPS} = L_{ij} \partial_i A_0 \partial_j A_0 + (1 - \kappa_{ii}) B^2 + g^2 \lambda^2 M_{ij} (A_0)^2 (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) + \lambda^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q^2,$$

ou ainda, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{BPS} = & L_{ij} \partial_i A_0 \partial_j A_0 + g^2 \lambda^2 M_{ij} (A_0)^2 (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \\ & + \frac{(W \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0)^2}{1 - \kappa_{ii}} + \frac{\lambda^2}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)} \mp g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) A_0 \right]^2. \end{aligned} \quad (5.62)$$

5.3.1 A equivalência entre a lei de Gauss e a equação do campo neutro

Nesta seção, verificaremos que no limite BPS a lei de Gauss e a equação do campo neutro são completamente equivalentes. Para tanto, primeiro determinamos as derivadas da interação potencial $\mathcal{U}$ como relação a Ψ e $\partial_k \Psi$, as quais escrevemos como

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi} = - \frac{g \lambda^2 \epsilon_{lm} (k_{\phi\phi})_{0l} (\hat{n} \cdot \partial_m \phi)}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)} - g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \right], \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \partial_k \Psi} = - \frac{\epsilon_{lk} \kappa_{0l}}{1 - \kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi). \quad (5.64)$$

Nós agora podemos fazer uso das Eqs. (5.60) e (5.61) para reescrevemos as equações acima na forma

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi} = \mp g \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Q, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \partial_i \Psi} = \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0j} B. \quad (5.65)$$

Substituímos (5.65) na equação do campo neutro, encontramos

$$L_{ij} \partial_i \partial_j \Psi = g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \mp g \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Q \pm \epsilon_{ij} \kappa_{0j} \partial_i B. \quad (5.66)$$

Por fim, usamos a condição $\Psi = \pm A_0$ para reescrevemos (5.66) como

$$\pm L_{ij} \partial_i \partial_j A_0 = \pm g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) A_0 \mp g \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Q \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B,$$

ou ainda

$$L_{ij} \partial_j \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B = g^2 \lambda^2 M_{ij} A_0 (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) - g \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) Q,$$

que tão somente a lei de Gauss (5.45).

Assim, fica comprovando que a lei de Gauss e a equação do campo neutro são completamente equivalentes no limite BPS. Tal equivalência, aliada ao fato de que as primeiras equações BPS, (5.56) e (5.57), são simultaneamente satisfeitas pela condição $\Psi = \pm A_0$, nos diz que uma solução completa do modelo é provida pelas Eqs. (5.60) e (5.61),

$$\begin{aligned} (1 - \kappa_{ii}) B - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0 &= \mp W, \\ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q + g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) A_0 &= \pm \frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{n} \cdot \phi)}, \end{aligned}$$

respectivamente, juntamente com a lei de Gauss, (5.45),

$$L_{ij}\partial_j\partial_i A_0 + \epsilon_{ij}\kappa_{0i}\partial_j B = g^2\lambda^2 M_{ij}A_0(\hat{n}\cdot\partial_i\phi)(\hat{n}\cdot\partial_j\phi) - g\lambda^2\epsilon_{ij}(k_{\phi\phi})_{0i}(\hat{n}\cdot\partial_j\phi)Q.$$

5.4 Skyrmions autoduais rotacionalmente simétricos

Com o propósito de obter soluções rotacionalmente simétricas introduzimos o *Ansatz* estático padrão, já utilizados no modelo Chern-Simons-Skyrme, seção 4.5, para os campos de Skyrme e de calibre

$$\phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos N\theta \\ \sin f(r) \sin N\theta \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \frac{1}{gr} [a(r) - N], \quad A_0 = A_0(r), \quad (5.67)$$

juntamente com as seguintes relações de transformação, já expressas em (3.64),

$$a_i = \frac{x_i}{r} a_r - \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r} a_\theta, \quad \partial_i = \frac{x_i}{r} \partial_r - \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} \partial_\theta,$$

que permitem reescrevermos todas as principais equações em coordenadas polares. Assim como no caso Chern-Simons-Skyrme, N é o número de enrolamento (winding number) do campo de Skyrme, enquanto que $f(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$ são funções bem comportadas ao longo da coordenada radial do espaço físico. Além disto, $f(r)$ faz o papel de ângulo zimutal no espaço interno, sendo, portanto, limitada no intervalo $[0, \pi]$.

No que se seguirá, configuramos, sem perda de generalidade, $\hat{n} \equiv \hat{n}_3 \equiv (0, 0, 1)$. Assim, nas configurações de vácuo, o campo de Skyrme, bem como sua primeira derivada, são reeditadas como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \hat{n}_3, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d\phi_3}{dr} = 0, \quad (5.68)$$

onde agora fazemos $|x| \equiv r$.

A fim de garantirmos que os campos atinjam os seus valores de vácuo, impomos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a_\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dA_0(r)}{dr} = 0, \quad (5.69)$$

onde a primeira e terceiras condições são consistentes com (5.68) e (5.52), respectivamente, enquanto a_∞ é uma constante arbitrária. Por outro lado, também devemos assegurar que os campos sejam regulares na origem, o que é alcançado quando

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \pi, \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = N, \quad \lim_{r \rightarrow 0} A_0(r) = \omega_0. \quad (5.70)$$

Visto que $f(r)$ é limitada no intervalo $[0, \pi]$, segue, de uma forma muito natural, que a primeira condição em (5.70) implica em

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \phi \equiv -\hat{n}_3. \quad (5.71)$$

A fim de executar nossa análise, tal como foi feito na seção 4.5, introduziremos a seguinte redefinição de campo

$$h = \frac{1}{2} (1 + \phi_3) = \frac{1}{2} (1 + \cos f), \quad (5.72)$$

onde $h(r)$ satisfaz as seguintes condições

$$\lim_{r \rightarrow 0} h = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} h = 1, \quad (5.73)$$

as quais seguem imediatamente a partir das condições (5.69) e (5.70).

Adicionalmente, observamos que o gradiente da componente ϕ_3 do campo de Skyrme é expressa como

$$\partial_i \phi_3 = \frac{x_i}{r} \frac{d\phi_3}{dr} = 2 \frac{x_i}{r} \frac{dh}{dr}, \quad (5.74)$$

onde a quantidade $x_i/r = (\cos\theta, \sin\theta)$ é limitada no intervalo $[-1, 1]$. Assim, a condição $\lim_{r \rightarrow \infty} \partial_r \phi_3 = 0$ em (5.68) implica em

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dh}{dr} = 0. \quad (5.75)$$

Em contrapartida, a condição na origem sobre a derivada de h permanece arbitrária e na melhor das hipóteses devemos requerer que ela possua ao menos um valor finito, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dh}{dr} = \text{cte}. \quad (5.76)$$

O carga topológico ainda resulta identicamente igual ao número de enrolamento (winding number)

$$\deg[\phi] = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\theta \left(-4 \frac{N}{r} \frac{dh}{dr} \right) = N[h(\infty) - h(0)] = N, \quad (5.77)$$

e o campo magnético continua sendo dado por

$$B = \frac{1}{gr} \frac{da}{dr}. \quad (5.78)$$

As equações BPS (5.60) e (5.61) são agora reescritas como

$$(1 - \kappa_{ii}) \frac{1}{gr} \frac{da}{dr} + \kappa_{0\theta} \frac{dA_0}{dr} = \mp W, \quad (5.79)$$

$$[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \frac{a}{r} \frac{dh}{dr} + g(k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 \frac{dh}{dr} = \mp \frac{1}{4} \frac{1}{g\lambda^2} \frac{dW}{dh}, \quad (5.80)$$

onde $\kappa_{ii} = \kappa_{rr} + \kappa_{\theta\theta}$ e $(k_{\phi\phi})_{ii} = (k_{\phi\phi})_{rr} + (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}$ e o superpotencial W deve satisfazer as seguintes condições de contorno na origem

$$\lim_{r \rightarrow 0} W(h) = W_0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dW}{dh} = (W_h)_0, \quad (5.81)$$

com W_0 sendo uma quantidade finita, enquanto que nas configurações de vácuo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dW}{dh} = 0, \quad (5.82)$$

em concordância com (5.52). A última condição em (5.82) garante que o superpotencial é capaz de gerar um termo de interação potencial satisfazendo a seguinte condição de vácuo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{U}(r) \equiv \lim_{h \rightarrow 1} \mathcal{U}(h) = 0. \quad (5.83)$$

A lei de Gauss, Eq. (5.45), agora é lida como

$$\frac{L_{rr}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_0}{dr} \right) - \frac{\kappa_{0\theta}}{gr} \frac{d^2 a}{dr^2} = \left[4g^2 \lambda^2 M_{rr} A_0 - 4g \lambda^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} \frac{a}{r} \right] \left(\frac{dh}{dr} \right)^2, \quad (5.84)$$

onde

$$L_{rr} = 1 + \kappa_{00} - \kappa_{rr}, \quad M_{rr} = 1 + (k_{\phi\phi})_{00} - (k_{\phi\phi})_{rr}. \quad (5.85)$$

Similarmente, a densidade de energia BPS é lida como

$$\mathcal{E}_{BPS} = L_{rr} \left(\frac{dA_0}{dr} \right)^2 + 4g^2 \lambda^2 M_{rr} \left(A_0 \frac{dh}{dr} \right)^2 + (1 - \kappa_{ii}) B^2 + 4\lambda^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \left(\frac{a}{r} \frac{dh}{dr} \right)^2, \quad (5.86)$$

ou ainda, em termos do superpotencial, como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{BPS} = & L_{rr} \left(\frac{dA_0}{dr} \right)^2 + 4g^2 \lambda^2 M_{rr} \left(A_0 \frac{dh}{dr} \right)^2 \\ & + \frac{\left(W \pm \kappa_{0\theta} \frac{dA_0}{dr} \right)^2}{1 - \kappa_{ii}} + \frac{\lambda^2}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{g \lambda^2} \frac{dW}{dh} \pm 2g (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 \frac{dh}{dr} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.87)$$

enquanto que a energia BPS, Eq. (5.55), torna-se

$$E_{BPS} = \mp \frac{2\pi N}{g} \int_0^\infty dW = \mp \frac{2\pi N}{g} [W(\infty) - W(0)] = \pm \frac{2\pi N W_0}{g}. \quad (5.88)$$

Usando a definição do campo magnético (5.78) e as condições de contorno (5.69) e (5.70) podemos determinar o fluxo magnético total Φ como sendo dado por

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty r dr B = \frac{2\pi}{g} [a(\infty) - a(0)] = \frac{2\pi}{g} [a_\infty - N], \quad (5.89)$$

que, em geral, é uma quantidade não quantizada.

A partir das Eqs. (5.79) e (5.80) é possível inferirmos qual a dependência do valor de vácuo do potencial vetor a_∞ . Manipulando (5.79) e (5.80), e em seguida dividido a primeira pela segunda, e integrando, conseguimos escrever

$$a_\infty = N \exp \left[4g^2 \lambda^2 \frac{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}}{1 - \kappa_{ii}} \right] \exp \left[\int_0^\infty \frac{W \pm \kappa_{0\theta} \frac{dA_0}{dr}}{\frac{dW}{dh} \pm 4g^2 \lambda^2 (k_{\phi\phi})_{0\theta} A_0 \frac{dh}{dr}} dh \right], \quad (5.90)$$

cujas soluções analíticas somente são possíveis se as formas de W e A_0 forem conhecidas. Contudo, a Eq. (5.90) nos permite inferir que o valor de vácuo a_∞ possui dependência não apenas com os parâmetros N , λ e g , mas também com os coeficientes da violação de Lorentz.

Na seção 5.6, apresentaremos a análise numérica das equações BPS, juntamente com a lei de Gauss.

5.5 A análise dos comportamentos assintóticos

Até aqui, observamos que os parâmetros de violação $\kappa_{0\theta}$ e $(k_{\phi\phi})_{0\theta}$ são os responsáveis por misturar os elétrico e magnético tanto nas equações de segunda ordem quanto nas equações BPS. Um dos objetivos deste capítulo é compreender como as soluções são modificadas quando esses parâmetros são considerados nas equações. Sendo assim, podemos dividir nossa investigação em quatro casos possíveis:

- | | | | | | | | |
|------|------------------------|---|------------------------------------|-----|---------------------------|---|------------------------------------|
| i. | $\kappa_{0\theta} = 0$ | e | $(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0,$ | ii. | $\kappa_{0\theta} \neq 0$ | e | $(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0,$ |
| iii. | $\kappa_{0\theta} = 0$ | e | $(k_{\phi\phi})_{0\theta} \neq 0,$ | iv. | $\kappa_{0\theta} \neq 0$ | e | $(k_{\phi\phi})_{0\theta} \neq 0.$ |

Nesta tese, estaremos interessados em investigar o caso (ii), deixando os demais casos para investigações futuras. Dessa forma, os comportamentos que apresentaremos nesta seção levam em conta somente o caso $(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0$.

5.5.1 O comportamento na origem

O comportamento das equações BPS (5.79) e (5.80) e da lei de Gauss em torno da origem, $r = 0$, são estudadas assumindo que os campos possam ser escritos como

$$h(r) \approx H_0(r), \quad a(r) \approx N - G_0(r), \quad \text{e} \quad A_0(0) \approx \omega_0 + \Omega_0(r), \quad (5.91)$$

onde $H_0(r)$, $\alpha_0(r)$ e $\Omega_0(r)$ são funções perturbativas e bem comportadas que se anulam na origem. Por essa razão, consideramos somente as contribuições lineares de tal forma que as equações BPS e a lei de Gauss se tornam

$$(1 - \kappa_{ii}) \frac{1}{gr} \frac{dG_0}{dr} - \kappa_{0\theta} \frac{d\Omega_0}{dr} = \pm [W_0 + (W_h)_{h=0} H_0], \quad (5.92)$$

$$[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \frac{N}{r} \frac{dH_0}{dr} = \mp \frac{1}{4} \frac{1}{g\lambda^2} [(W_h)_{h=0} + (W_{hh})_{h=0} H_0], \quad (5.93)$$

$$\frac{L_{rr}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Omega_0}{dr} \right) + \frac{\kappa_{0\theta}}{gr} \frac{d^2 G_0}{dr^2} = 0, \quad (5.94)$$

onde fazemos a expansão de Taylor do superpotencial

$$W(H_0) = W_0 + (W_h)_{h=0} H_0 + \frac{1}{2} (W_{hh})_{h=0} H_0^2 + \dots, \quad (5.95)$$

com W_h e W_{hh} representando a primeira e a segunda derivada de $W(h)$ com relação a h , respectivamente.

A solução desse sistema de equações conduz aos seguintes comportamentos para os perfis do campos $h(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$

$$h(r) = -\frac{(W_h)_{h=0}}{8g\lambda^2 N [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}]} r^2 - \frac{(W_h)_{h=0} (W_{hh})_{h=0}}{128g^2 \lambda^4 N^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}]^2} r^4 + \dots, \quad (5.96)$$

$$a(r) = N - \frac{gL_{rr}W_0}{2[(1 - \kappa_{ii})L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2]} r^2 + \frac{L_{rr}(W_h)_{h=0}^2}{32\lambda^2 N [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] [(1 - \kappa_{ii})L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2]} r^4 + \dots, \quad (5.97)$$

$$A_0(r) = \omega_0 - \frac{\kappa_{0\theta}W_0}{(1 - \kappa_{ii})L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2} r + \frac{\kappa_{0\theta}(W_h)_{h=0}^2}{24g\lambda^2 N [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] [(1 - \kappa_{ii})L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2]} r^3 + \dots, \quad (5.98)$$

O comportamento para o campo magnético próximo a origem é

$$B(r) = -\frac{gL_{rr}W_0}{(1 - \kappa_{ii})L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2} + \frac{L_{rr}(W_h)_{h=0}^2}{8\lambda^2 N [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] [(1 - \kappa_{ii})L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2]} r^2 + \dots. \quad (5.99)$$

Com isso, verificamos que as condições de contorno em $r \rightarrow 0$ produzem soluções bem comportadas para os campos.

5.5.2 O comportamento nas configurações de vácuo

Nós restringiremos nossas análises ao caso em que o comportamento do superpotencial é dado por

$$W(h) \approx W_\infty^{(2)} (1 - h)^2, \quad (5.100)$$

enquanto que o comportamento das funções perfis são lidas a partir das seguintes perturbações

$$h(r) \approx 1 - H_\infty(r), \quad a(r) \approx a_\infty - G_\infty(r), \quad \text{e} \quad A_0(0) \approx \omega_\infty + \Omega_\infty(r). \quad (5.101)$$

Sob essas relações as equações [BPS](#) e a lei de Gauss são reescritas como

$$(1 - \kappa_{ii}) \frac{1}{gr} \frac{dG_\infty}{dr} - \kappa_{0\theta} \frac{d\Omega_\infty}{dr} = \pm W_\infty^{(2)} (1 - h)^2, \quad (5.102)$$

$$[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \frac{a_\infty}{r} \frac{dH_\infty}{dr} = \mp \frac{1}{2} \frac{W_\infty^{(2)}}{g\lambda^2} (1 - h), \quad (5.103)$$

$$\frac{L_{rr}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Omega_\infty}{dr} \right) + \frac{\kappa_{0\theta}}{gr} \frac{d^2 G_\infty}{dr^2} = 0, \quad (5.104)$$

onde somente consideramos as aproximações lineares.

As soluções aproximadas destas equações conduzem aos seguintes comportamentos para os campos nas configurações de vácuo ($r \rightarrow \infty$)

$$h(r) = 1 - C e^{-M^2 r^2} + \dots, \quad (5.105)$$

$$a(r) = a_\infty + \frac{g L_{rr}^2 C^2 W_\infty^{(2)}}{4 M^2 [(1 - \kappa_{ii}) L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2]} e^{-2 M^2 r^2} + \dots, \quad (5.106)$$

$$A_0(r) = \omega_\infty + \frac{\kappa_{0\theta} C^2 W_\infty^{(2)}}{4 M^2 [(1 - \kappa_{ii}) L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2]} \frac{e^{-2 M^2 r^2}}{r} - \dots, \quad (5.107)$$

onde a quantidade M é escrita como segue

$$M^2 = \frac{W_\infty^{(2)}}{4 g \lambda^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] a_\infty}. \quad (5.108)$$

O comportamento para o campo magnético próximo as configurações de vácuo é

$$B(r) = - \frac{g L_{rr} C^2 W_\infty^{(2)}}{(1 - \kappa_{ii}) L_{rr} + \kappa_{0\theta}^2} e^{-2 M^2 r^2} + \dots. \quad (5.109)$$

Com isso, também verificamos que as condições de contorno em $r \rightarrow \infty$ também produzem soluções bem comportadas para os campos.

5.6 Soluções numéricas das equações BPS

Para fins de obtenção das soluções numéricas para as Eqs. (5.79), (5.80) e (5.84), consideramos o seguinte superpotencial

$$W(h) = W_0 (1 - h)^2, \quad (5.110)$$

sendo este similar aquele considerado na Ref. (75).

Para nossa análise consideramos duas situações: na primeira obtemos soluções numéricas para vários valores de g mantendo os demais parâmetros fixos em $N = 1$, $\lambda = 1$, $W_0 = 0.5$, $\kappa_{ii} = 0.2$, $(k_{\phi\phi})_{ii} = 0.2$, $L_{rr} = 0.8$, $M_{rr} = 0.8$, $\kappa_{0\theta} = 0.2$ e $(k_{\phi\phi})_{0\theta} = 0$; no segundo caso fazemos variar o parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e fixado $g = 2.1042$, mantendo para os demais parâmetros os mesmos valores do primeiro caso. Uma terceira análise é apresentada comparando os resultados numéricos do valor de vácuo do potencial vetor, a_∞ , do fluxo magnético, $|\Phi_B|$ e da quantidade $g a_\infty$ com relação aos vários valores de g e $\kappa_{0\theta}$. A seguir, apresentamos as soluções obtidas em cada caso, destacando as modificações introduzidas pelos parâmetros de violação de Lorentz.

5.6.1 Soluções numéricas para vários valores de g

Os perfis do campo de Skyrme são apresentados na figura 25. Os perfis são tipicamente parecidos com o caso sem violação de Lorentz. Porém aqui, para parâmetros de violação

não nulos, os perfis são mais largos apresentando valores pequenos em distância um pouco maiores com relação à origem, “demorando” assim a alcançarem valores maiores até decaírem, mais lentamente, nas configurações de vácuo. A medida que g aumenta esse comportamento é acentuado até valores próximos de $g = 1.0290$ e, a partir daí, para valores de g cada vez maiores, os perfis continuam a serem mais largos em distâncias um pouco maiores em relação a origem, porém decaem mais rapidamente nas configurações de vácuo. Para $g = 2.1042$ e $g = 2.4714$ os perfis se assemelham ao comportamento do caso compacton.

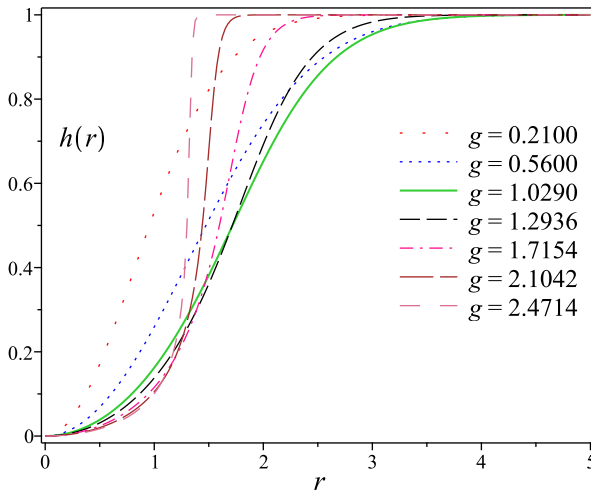


Figura 25: Perfis do campo de Skyrme $h(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

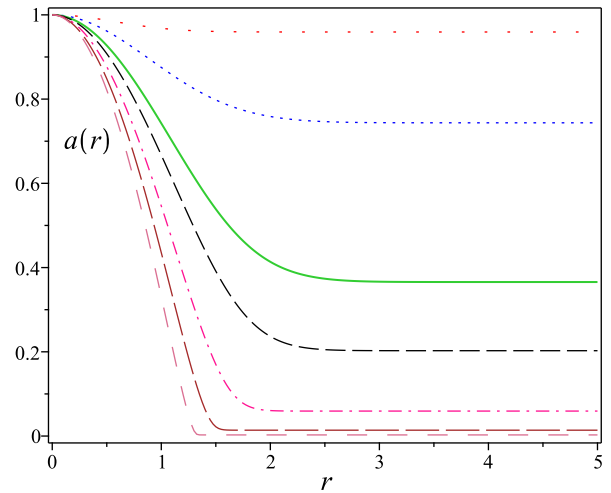


Figura 26: Perfis do potencial vetor $a(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

Na figura 26 é apresentado os perfis do potencial vetor $a(r)$. Aqui, assim como no perfil do campo de Skyrme, as curvas apresentam comportamento típico. Contudo, para parâmetros de violação não nulos os perfis são mais largos e decaem mais lentamente nas configurações de vácuo. A medida que os valores de g aumentam o valor de vácuo, a_∞ , se torna cada vez menor, aproximando-se bastante do valor nulo. Novamente, para $g = 2.1042$ e $g = 2.4714$, os perfis se assemelham bastante com as formas compactons.

Na figura 27 apresentamos as soluções para os perfis do modulo do campo magnético. Nós observamos que para valores pequenos de g os perfis decaem mais rapidamente a partir da origem atingindo os valores de vácuo em distâncias cada vez maiores. Esse comportamento é mantido até $g = 1.0290$. Para valores maiores que $g = 1.0290$ os perfis continuam a decair mais lentamente até uma certa distância $1 < r_c < 2$ e, após, decaem muito rapidamente aos valores vácuo, os quais são atingidos à distâncias cada vez mais próximas de r_c . Novamente, salientamos que para $g = 2.1042$ e $g = 2.4714$ os comportamentos são semelhantes a compactons.

Os perfis da densidade de energia são apresentados na figura 28. Os perfis demonstram que o pico da densidade de energia se posiciona na origem para valores pequenos de g decaindo “vagarosamente” nas configurações de vácuo. A medida em

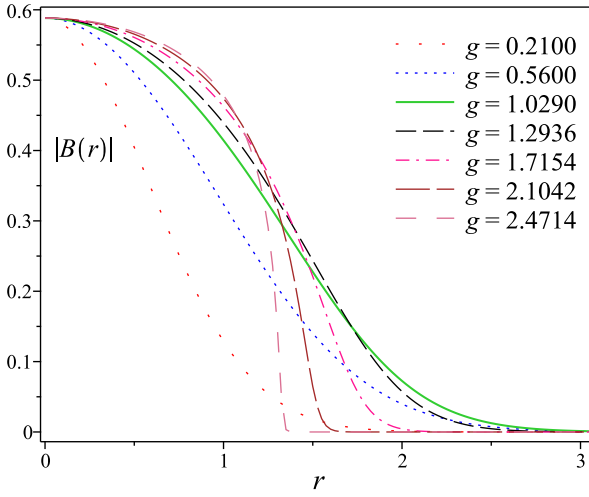


Figura 27: Perfis do campo magnético $B(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

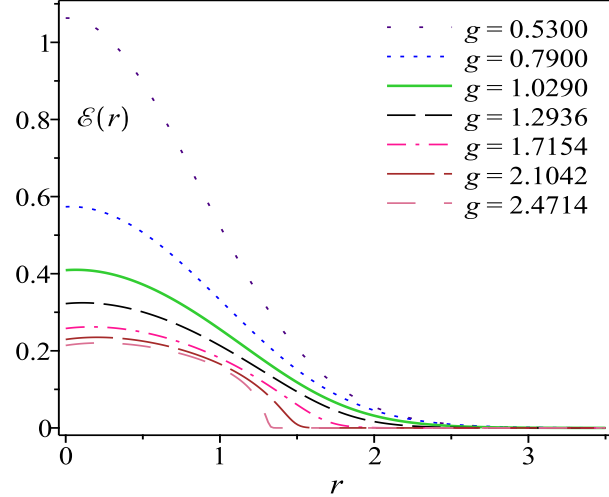


Figura 28: Perfis da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

que g aumenta, o pico da energia tem menor intensidade e se desloca em relação a origem formando estruturas tipo anel. O decaimento nas configurações de vácuo ocorre a menores distâncias, assumindo uma forma cada vez mais compacta para valores maiores de g .

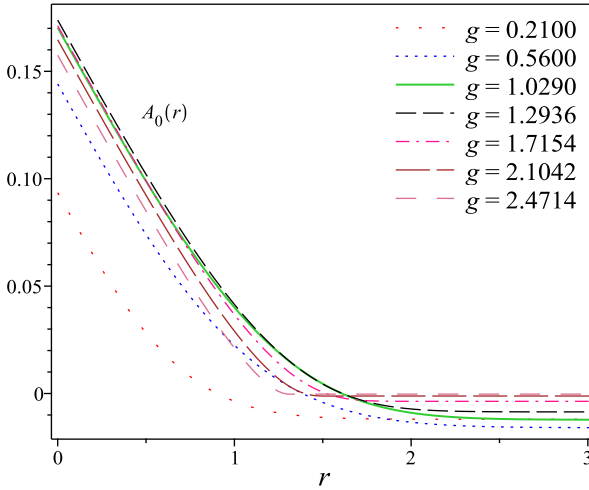


Figura 29: Perfis do potencial escalar $A_0(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

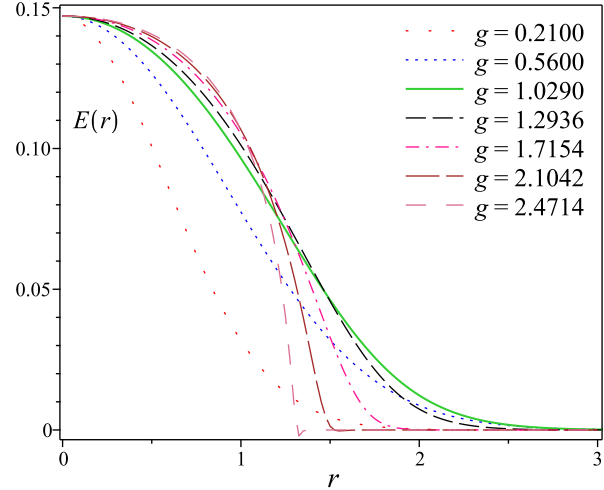


Figura 30: Perfis do campo elétrico $E(r)$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

Os perfis do potencial escalar e do campo elétrico são apresentados nas figuras 29 e 30. A existência de valores não nulos para os parâmetros de violação de Lorentz faz com que os perfis do potencial escalar assumam valores não nulos na origem, os quais crescem para $0 < g < 1.2936$; para $g > 1.2936$ os valores de A_0 decrescem até um valor finito perto de 0.16. Fora da origem os perfis permanecem mais largos para $0 < g < 1.2936$ e se tornam mais estreitos para $g > 1.2936$ e mais compactos. Nas

configurações de vácuo, os perfis decaem mais lentamente e são mais negativos para $0 < g < 0.5600$; para $0.5600 < g < 1.2936$ os perfis continuam a decair mais lentamente, porém as intensidades do potencial diminuem em valor absoluto sendo cada vez menos negativos; para $g > 1.2936$ os perfis começam a estreitar, ou seja, passam decair mais “rapidamente” e as intensidade continuam a diminuir em valor absoluto, sendo cada vez menos negativas, até aproximarem do valor nulo. Nesta faixa de valores, onde $g = 2.1042$ e $g = 2.4714$, nota-se que há a formação de um pequeno vale para $1 < r_c < 1.5$. A formação deste vale se manifesta no campo elétrico na forma de inversão, tal como é mostrado na figura 30. O campo elétrico possui um perfil muito semelhante ao módulo do campo magnético, porém possui intensidade muito menor na origem; para $0 < g < 1.0290$ os perfis são mais largos e decaem mais vagarosamente as configurações de vácuo a medida que g cresce; para $g > 1.0290$ os perfis são mais largos até uma certa distância $1 < r_c < 2$ e mais estreitos e compactos para $r > r_c$.

5.6.2 Soluções numéricas para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$

A figura 31 apresenta os perfis para o campo de Skyrme. As soluções tem mostrados que para pequenos valores de $\kappa_{0\theta}$ os perfis são mais estreitos e compactos decaindo mais “rapidamente” nos valores de vácuo. Por outro lado, a medida que $\kappa_{0\theta}$ cresce, os perfis são mais largos e atingem os valores de vácuo a distâncias cada vez maiores em relação a origem.

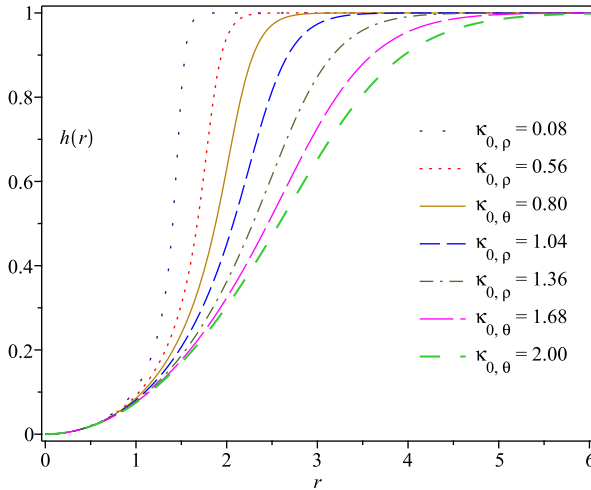


Figura 31: Perfis do campo de Skyrme, $h(r)$, para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

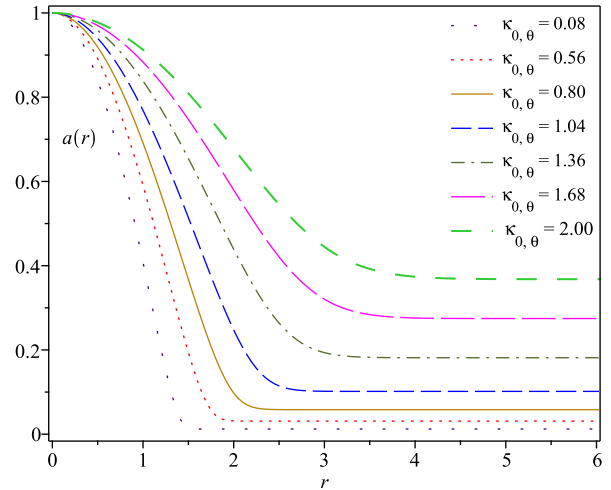


Figura 32: Perfis do potencial vetor $a(r)$ para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

A figura 32 apresenta os perfis para o potencial vetor, $a(r)$. As soluções mostram que para valores pequenos de $\kappa_{0\theta}$ os perfis são mais estreitos atingindo os valores de vácuo em distâncias mais curtas e com valor quase nulo. A medida que o valor de $\kappa_{0\theta}$ aumenta os perfis se tornam mais largos e os valores de vácuo se tornam maiores,

sendo atingidos em distâncias maiores em relação a origem. Os comportamentos apresentados tanto em $h(r)$ sugerem um certo relaxamento na compactação soluções. Isso significa que o efeito de compactação ocorre em valores ainda maiores de g .

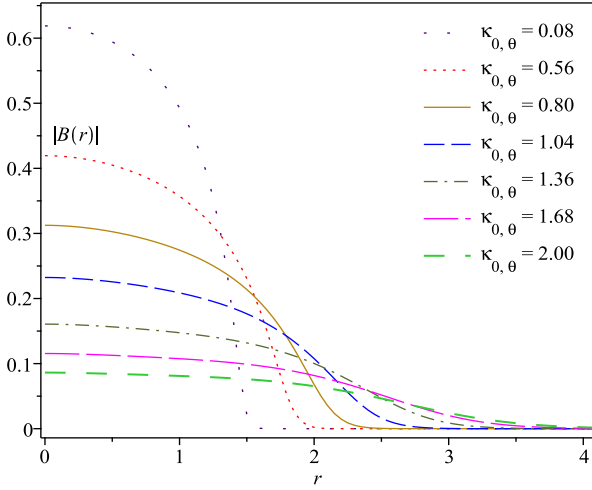


Figura 33: Perfis do módulo do campo magnético $B(r)$ para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

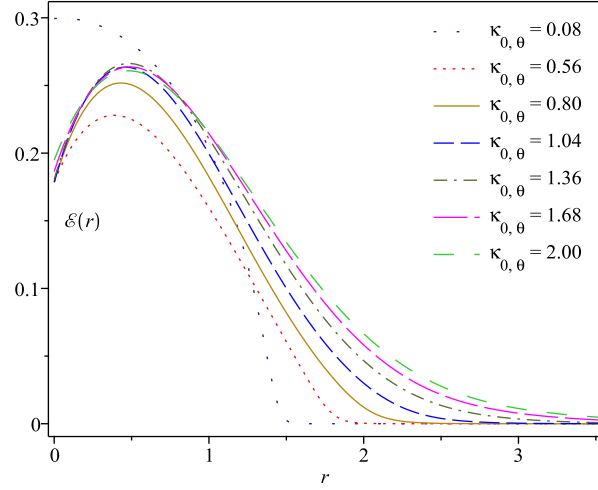


Figura 34: Perfis da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(r)$ para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

Os perfis do campo magnético são apresentados na figura 33. Os perfis são mais compactos para pequenos valores de $\kappa_{0\theta}$ com maior intensidade na origem decaindo nos valores de vácuo em distâncias mais curtas em relação a origem. A medida que os valores de $\kappa_{0\theta}$ aumentam os perfis ficam mais largos com intensidades menores a partir da origem decaindo nos valores de vácuo a distâncias maiores em relação a origem.

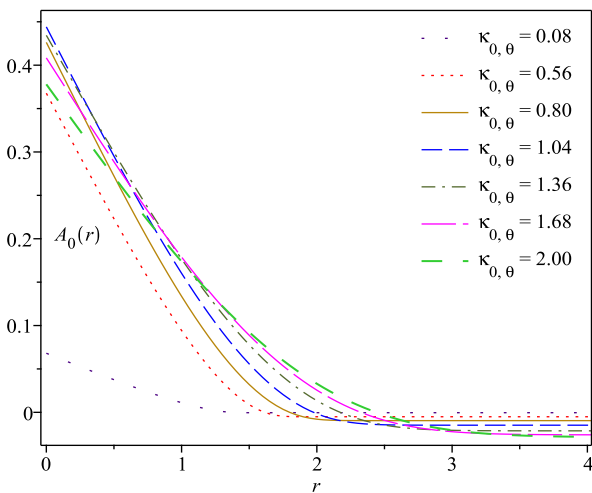


Figura 35: Perfis do potencial escalar, $A_0(r)$, para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

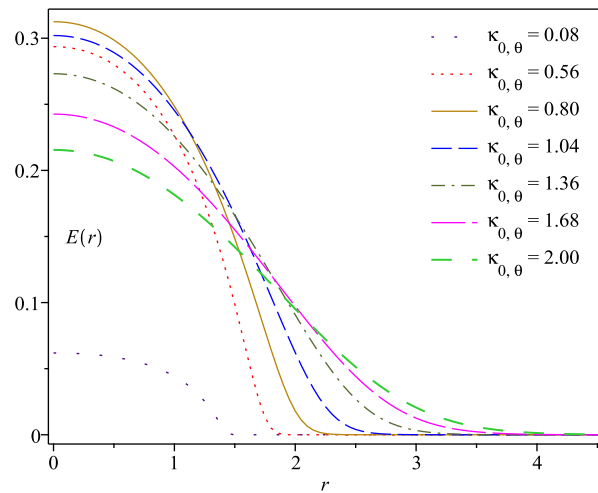


Figura 36: Perfis do campo elétrico, $E(r)$, para vários valores de $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

Os perfis da densidade de energia ($\mathcal{E}_{BPS}$) são apresentados na figura 34. Para

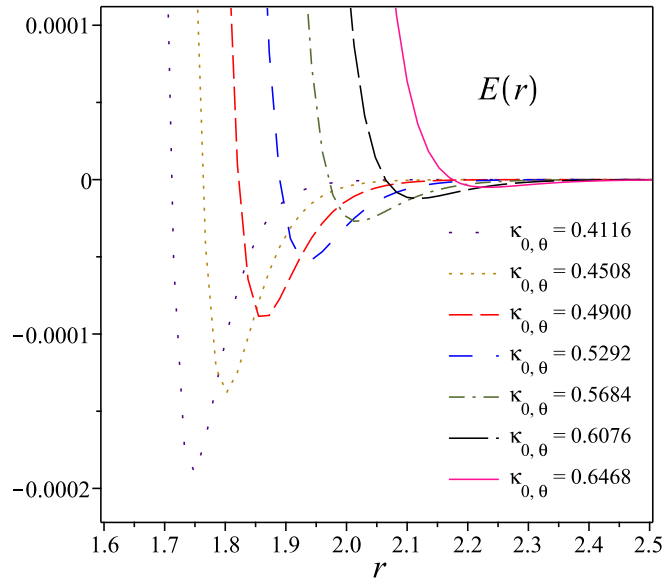


Figura 37: Os perfis do campo elétrico, $E(r)$, apresentam inversão para valores pequenos de $\kappa_{0\theta}$.

$0 < \kappa_{0\theta} < 0.08$ os perfis apresentam comportamento típico, com pico na origem, sendo mais estreitos e decaindo a distâncias mais curtas em relação a origem. Na medida em que os valores de $\kappa_{0\theta}$ aumentam, comportamentos distintos são observados para determinados intervalos; para $0.8 < \kappa_{0\theta} < 0.4116$ os picos são menores e tendem a se deslocar em relação a origem, formando assim estruturas tipo anel com pouca mudança na forma como decaem nos valores de vácuo; para $\kappa_{0\theta} > 0.4116$ os picos ganham em intensidade e se deslocam para distância mais longas em relação a origem, mantendo a estrutura tipo anel e com perfis mais largos, compactando para valores cada vez maiores de $\kappa_{0\theta}$.

Na figura 35 é apresentado os perfis para o potencial escalar A_0 . Para $\kappa_{0\theta} = 0.2352$ o perfil é mais estreito e possui valor não nulo na origem decaindo nos valores de a distâncias mais curtas em relação a origem. Para $0 < \kappa_{0\theta} < 1.04$ cresce os perfis assumem formas mais largas e valores maiores na origem. Os valores de vácuo são alcançados a distâncias mais longas em relação a origem assumido valores mais negativos; quando $\kappa_{0\theta} > 1.04$ os valores na origem começam a decrescer, mantendo perfis mais largos e valores de vácuo ainda mais negativos.

Na figura 36 são apresentados os perfis para o campo elétrico. Para $\kappa_{0\theta}$ o campo elétrico tem pouca intensidade na origem decaindo a distâncias mais curtas em relação a origem. Na medida em que aumenta até o valores próximos de 0.8 os perfis se tornam mais largos com picos maiores na origem. A partir daí, os picos voltam a diminuir, porém com perfis ainda mais largos atingindo valores de vácuo a distâncias maiores em relação a origem. Ressalta-se ainda que para valores do parâmetro de violação menores que 0.6468 os perfis apresentam vales na região onde os valores de vácuo são atingidos.

A intensidade do campo nesta região relativamente pequena. Esse comportamento é apresentado na figura 37.

5.6.3 Análise das soluções de a_∞ , $|\Phi_B|$ e ga_∞ com relação a g e $\kappa_{0\theta}$

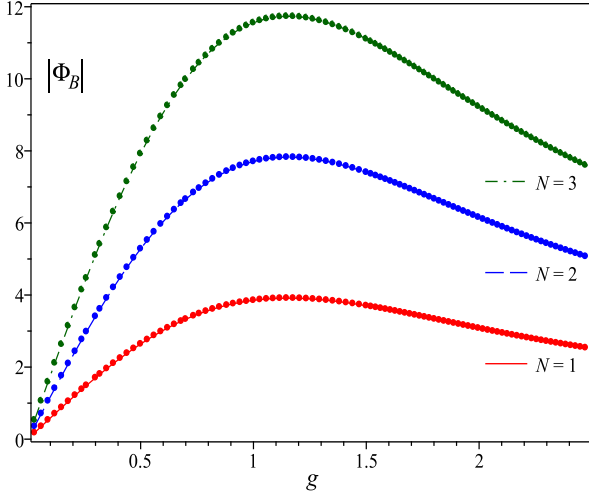


Figura 38: Comportamento do fluxo magnético $|\Phi_B|$ para $N = 1, 2$ e 3 com relação ao parâmetro g .

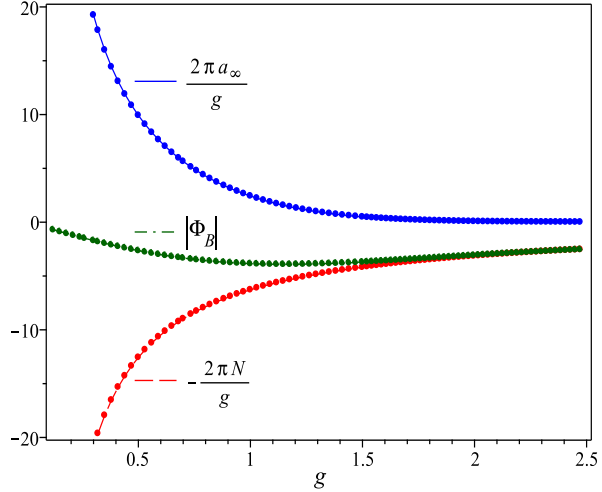


Figura 39: Comportamento do fluxo magnético e dos termos de fluxo proporcionais a a_∞ e N com relação ao parâmetro g .

Na figuras 38 é apresentado o comportamento do módulo do fluxo magnético para $N = 1, 2$ e 3 em relação ao parâmetro g . O comportamento mostra que para valores de g muito pequenos o fluxo é em geral não quantizado. A medida que g cresce os comportamentos passam diferir proporcionalmente ao valor do número de enrolamento N mantendo assim um padrão fixo, sugerido dessa forma que o fluxo seja quantizado para grandes valores de g .

A figura 39 compara o comportamento do fluxo com os termos de fluxo proporcionais ao valor de vácuo, a_∞ , e ao número de enrolamento N , tal como especificado na Eq. (5.89). Os comportamentos mostram que para maiores valores de g a curva do fluxo magnético, $|\Phi_B|$, e do termo de fluxo proporcional a N coincidem, mostrando dessa forma que de fato o fluxo é quantizado para valores de g grande e não quantizada para valores de g pequeno.

Na figura 40 apresenta um comparativo dos comportamentos do valor de vácuo do potencial vetor, a_∞ , do fluxo magnético, $|\Phi_B|$, e da quantidade ga_∞ com relação ao parâmetro g . As soluções numéricas aqui apresentadas mostram que a_∞ decai a medida que g cresce tendendo a zero quando g assume valores suficientemente grandes. Consequentemente, a partir da Eq. (5.89), é imediato concluir que

$$\Phi \rightarrow -\frac{2\pi}{g}N, \quad (5.111)$$

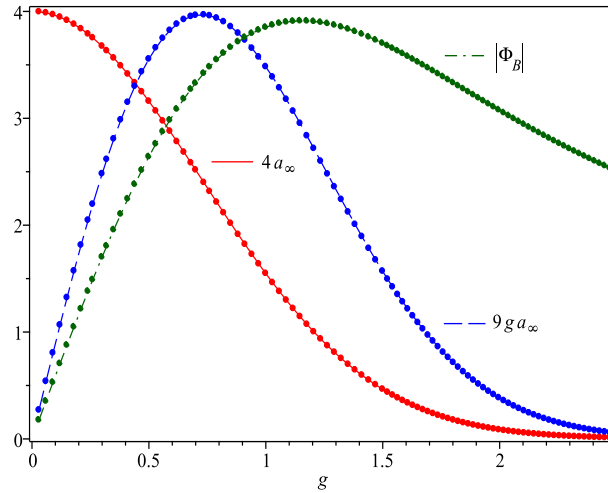


Figura 40: Comportamento do valor de vácuo a_∞ (linha vermelha), do fluxo magnético $|\Phi|$ (linha verde) e da quantidade ga_∞ (linha azul) com relação ao parâmetro g das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

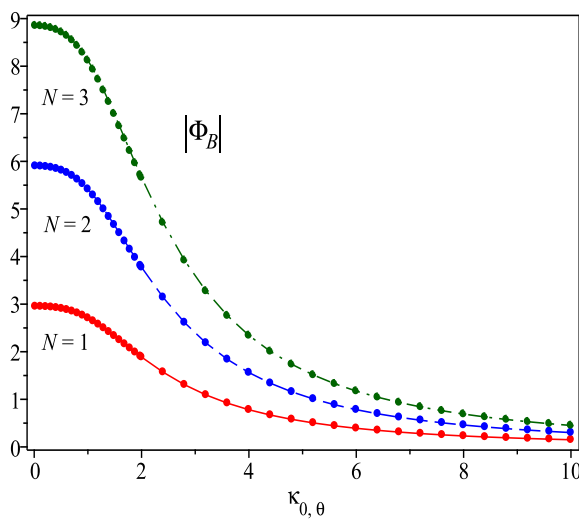


Figura 41: Comportamento do fluxo magnético $|\Phi_B|$ para $N = 1, 2$ e 3 com relação ao parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

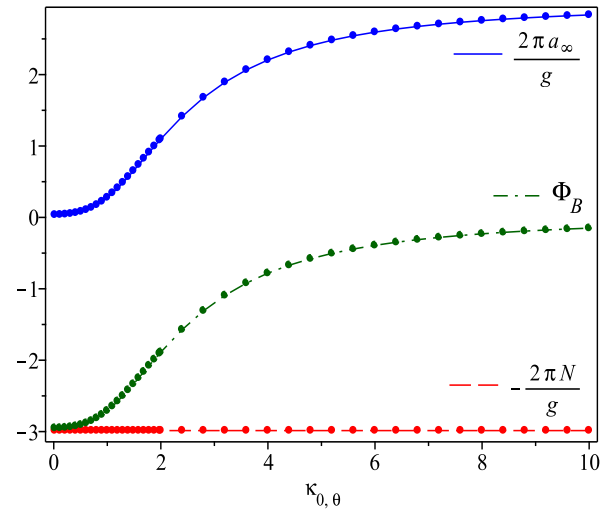


Figura 42: Comportamento do fluxo magnético e dos termos de fluxo proporcionais a a_∞ e $N = 1$ com relação ao parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

resultado este que concorda como os dados apresentados na figura 40. Por outro lado, o perfil da quantidade ga_∞ , responsável por controlar a largura das soluções quando $r \rightarrow \infty$ (Eq. (5.108)), cresce para $0 < g < g_c$ e decresce para $g_c < g < 2.4714$; devido ao comportamento gaussiano para r grande as soluções tendem a serem mais largas nos valores de vácuo quando g possui valor próximo a g_c e mais estreitas e compactas para g com valores muito pequenos ou muito grandes.

A figura 41 mostra como o fluxo magnético se comporta em relação a diversos

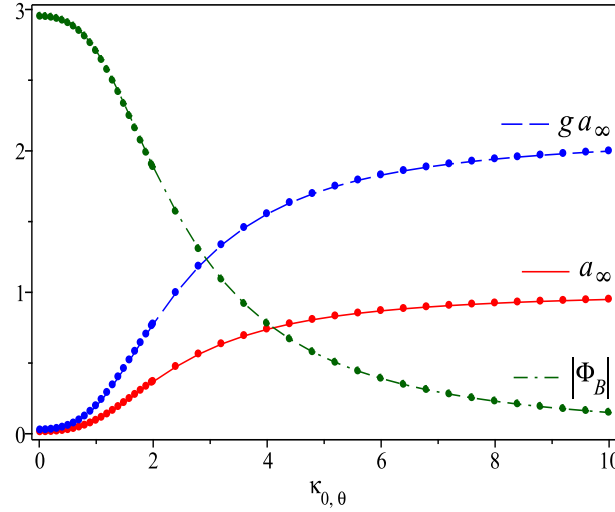


Figura 43: Comportamento do valor de vácuo a_∞ (linha vermelha), do fluxo magnético $|\Phi|$ (linha verde) e da quantidade ga_∞ (linha azul) com relação ao parâmetro $\kappa_{0\theta}$ e $g = 2.1042$ das soluções com decaimento exponencial gerado pelo superpotencial da Eq. (5.110).

valores de $\kappa_{0\theta}$. Os perfis mostram que para $g = 2.1042$ (g grande) o fluxo magnético, $|\Phi_B|$, é quantizado para valores de $\kappa_{0\theta}$ quase nulos. A medida que $\kappa_{0\theta}$ as intensidades do fluxo para vários valores de N diminuem e tem ao valor nulo para $\kappa_{0\theta} \rightarrow 0$. Assim, para $\kappa_{0\theta}$ muito grande o $|\Phi_B|$ deixa de ser quantizado. Esse comportamento é confirmando pelos resultados apresentados na figura 42, na qual se nota que os valores de vácuo do potencial vetor são responsáveis pela “quebra” da quantização do fluxo, visto que seu comportamento depende dos valores que o parâmetro $\kappa_{0\theta}$ assume. Dessa forma, ao contrário do que ocorre no model Chern-Simons-Skyrme, o valor de vácuo do potencial vetor, a_∞ , bem como o fluxo magnético, $|\Phi_B|$, não depende apenas da constante de acoplamento g , mas também do parâmetro de violação de Lorentz $\kappa_{0\theta}$.

Por fim, a figura 43 apresenta um comparativo entre o valor de vácuo do potencial vetor, a_∞ , o fluxo magnético, $|\Phi_B|$, e quantidade ga_∞ . A figura mostra que a medida que a_∞ com $\kappa_{0\theta}$ o valor absoluto do fluxo $|\Phi_B|$ decresce. Por outro lado, a quantidade ga_∞ cresce a uma escala um pouco maior que a_∞ mostrando que para maiores valores de $\kappa_{0\theta}$ os perfis do campos tendem a ser mais largos quando atingem os seus repetitivos valores de vácuo.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A presente tese estuda a existência de sólitons autoduais em três modelos distintos a saber: O Maxwell-Higgs abeliano com uma derivada covariante não mínima que quebra as simetrias de Lorentz e CPT, Chern-Simons Baby Skyrme generalizado e Maxwell Baby Skyrme com termos que quebram a simetria de Lorentz em ambos os setores. As equações autoduais e a energia das respectivas configurações autoduais são obtidas via a implementação do formalismo BPS. A correta implementação do formalismo BPS permite definir os potenciais e/ou as interações necessárias para o modelo suportar configurações autoduais. Em alguns casos, essas interações necessárias podem modificar a estrutura do modelo original, tal como ocorre nos modelos de Chern-Simons Baby Skyrme generalizado e do modelo Maxwell Baby Skyrme com QSL. Logo, em cada modelo, com o objetivo de estudar as soluções das equações autoduais, utilizamos um ansatz que descreve configurações rotacionalmente simétricas.

O capítulo 3, após uma breve revisão da implementação do formalismo BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, apresenta o desenvolvimento do método BPS em um modelo de Maxwell-Higgs abeliano cuja derivada covariante não mínima quebra as simetrias de Lorentz e CPT. Observamos que a energia BPS é a mesma do modelo usual, ou seja, proporcional ao fluxo magnético. Porém, as equações que descrevem as configurações autoduais são modificadas pela presença do vetor ξ_i , portador da QSL, quando comparadas às equações BPS do modelo de Maxwell-Higgs. A mudança acontece, pois, a QSL muda a parte cinética do campo de Higgs e introduz uma autointeração derivativa cuja constante de acoplamento é o próprio vetor ξ_i . Assim, as soluções para ξ_i e $-\xi_i$ são totalmente diferentes. Além disso, as configurações autoduais são eletricamente neutras o que contrasta com aquelas obtidas em outros modelos que incluem campos de fundo tipo CPT-ímpar (126, 60, 147). Dessa forma, a consideração de uma direção privilegiada no espaço-tempo, através de um acoplamento não mínimo, enriquece a descrição de estruturas tipo vórtice.

O capítulo 4 mostra a existência de sólitons autoduais em um modelo de Chern-Simons Baby Skyrme generalizado. A introdução de uma função chamada de superpotencial $W(\hat{n} \cdot \phi)$ conduz a implementação bem-sucedida do formalismo BPS. Assim, obtemos o limite inferior de energia (limite BPS) e as equações autoduais que descrevem as soluções possuindo tal energia mínima. A energia mínima é proporcional a carga topológica do campo de Skyrme, enquanto, o fluxo magnético e a carga elétrica total são proporcionais entre si. O superpotencial deve ser uma função bem-comportada em todo o espaço interno dos campos, pois, a sua escolha define o tipo de configurações que são soluções das equações BPS.

O estudo mostra a existência de duas classes de soluções autoduais para su-

perpotenciais cujo comportamento é do tipo $W(r) \approx (1 - h(r))^\sigma$ ($\sigma > 1$) para valores suficientemente grandes do raio r :

- a) A primeira classe descreve sólitons chamados de *compactons* e surgem quando se considera $1 < \sigma < 2$. O compacton está localizado numa extensão finita do eixo radial, $0 \leq r \leq R$, onde R define a fronteira que limita o sóliton.
- b) A segunda classe surge para $\sigma \geq 2$ e descreve estruturas estendidas ou não compactas, ou seja, elas são funções regulares em todo o intervalo radial, $0 \leq r \leq \infty$. Nesta classe existem dois tipos estruturas que se diferenciam pelo comportamento de suas caudas no limite $r \rightarrow \infty$. Assim,
 - i) O primeiro tipo é gerado se $\sigma = 2$. Neste caso, os sólitons possuem uma cauda que decai seguindo uma lei exponencial do tipo $e^{-\alpha r^2}$ ($\alpha > 0$).
 - ii) O segundo tipo surge para $\sigma > 2$ e descreve sólitons cuja cauda decai seguindo uma lei de potência $r^{-\beta}$ com $\beta = \beta(\sigma) > 0$.

Essas soluções exibem um comportamento similar ao do compacton para valores suficientemente grandes da constante de acoplamento eletromagnética g .

A energia **BPS** é proporcional a carga topológica N do campo de Skyrme, assim, ela é quantizada. Por outro lado, o fluxo magnético total e a carga elétrica total também são proporcionais a N , porém, a dependência no valor de vácuo a_∞ (que em geral não é um número inteiro) evita que ambas quantidades sejam quantizadas. Contudo, para valores suficientemente grandes de g ambos se tornam quantizados, pois, $a_\infty \rightarrow 0$.

O capítulo 5 estuda a existência de sólitons autoduais em um modelo Maxwell Baby Skyrme restrito¹ na presença da QSL² em ambos os setores e é representada por dois tensores do tipo CPT-par. A implementação do formalismo BPS mostra que o modelo original precisa ser modificado para suportar configurações autoduais. Tal modificação é dada pela introdução de um campo escalar que interage somente com o campo de Skyrme (ou seja, não modifica as equações de movimento do campo de calibre) e que no limite BPS satisfaz a lei de Gauss. Assim, o formalismo fornece a energia BPS (que continua proporcional à carga topológica do campo de Skyrme) e as equações autoduais cujas soluções são estados de energia mínima. A diferença do modelo Chern-Simons Baby Skyrme, as configurações somente carregam fluxo magnético, pois, a pesar de possuir elétrico, a carga total é nula.

As equações BPS dependem explicitamente dos parâmetros que controlam a quebra de Lorentz. Tais parâmetros são: κ_{ii} e κ_{0i} pertencentes ao setor de calibre e, $(k_{\phi\phi})_{ii}$ e $(k_{\phi\phi})_{0i}$ pertencentes ao setor do campo de Skyrme. Esse conjunto de parâmetros permite dividir o estudo das soluções autoduais nos seguintes casos:

$$\begin{aligned} & \text{(i) } \kappa_{0i} = 0, (k_{\phi\phi})_{0i} = 0; \quad \text{(ii) } \kappa_{0i} \neq 0, (k_{\phi\phi})_{0i} = 0; \\ & \text{(iii) } \kappa_{0i} = 0, (k_{\phi\phi})_{0i} \neq 0; \quad \text{(iv) } \kappa_{0i} \neq 0, (k_{\phi\phi})_{0i} \neq 0. \end{aligned}$$

Por agora, nesta tese, para a solução das equações autoduais somente consideramos o caso (ii), mencionado acima. Assim, como no modelo Chern-Simons Baby Skyrme, o superpotencial deve ser uma função bem comportada e para realizar o estudo do comportamento das configurações, quando $r \rightarrow \infty$, escolhemos o superpotencial que se comporta como $W(h) \approx (1 - h)^2$. Para esse tipo de superpotenciais, as soluções possuem uma cauda que decai seguindo uma lei exponencial do tipo $e^{-\alpha r^2}$ com $\alpha > 0$.

A solução numérica das equações autoduais é realizada considerando o superpotencial $W(h) = W_0 (1 - h)^2$ e são realizadas dois tipos de análise:

- A primeira análise considera todos os parâmetros fixos exceto a constante de acoplamento eletromagnético g . Para este caso é observado que os perfis das soluções adquirem o formato tipo compacton para valores suficientemente grandes de g , assim, como o valor no vácuo do potencial vetor $a_\infty \rightarrow 0$. Nesse limite o fluxo magnético se torna quantizado.
- A segunda análise considera todos os parâmetros fixos exceto $\kappa_{0\theta}$, o parâmetro da QSL pertencente ao setor eletromagnético. Na medida que $\kappa_{0\theta}$ cresce, os perfis dos campos atingem seus respectivos valores de vácuo cada vez mais longe da

¹ O modelo Baby Skyrme restrito leva em conta somente o termo quártico nas derivadas.

² A QSL é introduzida em $(1+3)$ -dimensões e o modelo em estudo é obtido via uma projeção para $(1+2)$ -dimensões.

origem. Esse efeito afeta o fluxo magnético, pois, ele diminui com o crescimento de $\kappa_{0\theta}$ visto que nesse caso o valor de vácuo do potencial vetor $a_\infty \rightarrow 1$.

Assim, percebemos que os parâmetros g e $\kappa_{0\theta}$ mudam o formato das soluções da seguinte maneira: o incremento de g favorece a forma tipo compacton, enquanto que, o aumento de $\kappa_{0\theta}$ o desfavorece. Também, eles aumentam ou diminuem o valor do fluxo magnético, pois, ambos afetam diretamente os valores de vácuo a_∞ .

Está em andamento, para o caso (ii), a análise dos efeitos dos demais parâmetros da QSL nas soluções, assim, como investigar a existência de compactons e sólitons cuja cauda decai seguindo uma lei de potência.

Finalmente, pretendemos estudar as soluções para os casos (i), (iii) e (iv). A principal expectativa é ver qual o jogo de valores dos parâmetros da QSL que permitem que o campo de calibre adquira um comportamento tipo e^{-Mr} , com $M > 0$, similar ao apresentado nos modelos abelianos de Higgs que descrevem vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen.

Por outro lado, também, estamos interessados no estudo dos diferentes modelos na presença de campos gerando estrutura interna ou mesmo na presença de impurezas magnéticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ALLEN, J. E. The Early History of Solitons (Solitary Waves). **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 57, n. 3, p. 436–441, 1998. DOI: [10.1088/0031-8949/57/3/016](https://doi.org/10.1088/0031-8949/57/3/016).
- 2 RUSSEL, J. S. On waves. *In*: REPORT OF THE 14TH OF THE BRITISH ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE. London: [s. n.], 1844. p. 311–389. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/47344>. Acesso em: 20 set. 2019. Citado na p. 23.
- 3 DE BOUSSINESQ, M. J. Hydrodynamique: Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *In*: COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. Paris: [s. n.], 1871. v. 72, p. 755–759. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/24455>. Citado na p. 23.
- 4 RAYLEIGH, Lord. On waves. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 1, n. 4, p. 257–279, 1876. DOI: [10.1080/14786447608639037](https://doi.org/10.1080/14786447608639037). Acesso em: 20 set. 2019. Citado na p. 23.
- 5 DE SAINT-VENANT, M. B. Hydrodynamique: Mouvements des molécules de l'onde dite solitaire. *In*: COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. Paris: [s. n.], 1885. v. 101, p. 1101–1105. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/23718>. Acesso em: 23 set. 2019. Citado na p. 23.
- 6 HEREMAN, Willy. Shallow Water Waves and Solitary Waves. *In*: **Mathematics of Complexity and Dynamical Systems**. Edição: Robert A. Meyers. New York, NY: Springer New York, 2011. p. 1520–1532. DOI: [10.1007/978-1-4614-1806-1_96](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_96). Citado na p. 23.
- 7 ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 15, n. 6, p. 240–243, 1965. DOI: [10.1103/PhysRevLett.15.240](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.15.240). Acesso em: 20 set. 2019. Citado na p. 23.
- 8 ZABUSKY, Norman J. A Synergetic Approach to Problems of Nonlinear Dispersive Wave Propagation and Interaction. *In*: AMES, W. F. (ed.). **Nonlinear Partial Differential Equations**. [S. l.]: Academic Press, 1967. p. 223–258. DOI: [10.1016/B978-1-4831-9647-3.50019-4](https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9647-3.50019-4). Citado na p. 23.
- 9 FERMI, E.; PASTA, P.; ULAM, S.; TSIGOU, M. **Studies of the Nonlinear Problems**. English. [S. l.], 1955. DOI: [10.2172/4376203](https://doi.org/10.2172/4376203). Acesso em: 23 set. 2019. Citado na p. 23.
- 10 GARDNER, Clifford S.; GREENE, John M.; KRUSKAL, Martin D.; MIURA, Robert M. Method for Solving the Korteweg-deVries Equation. **Physical Review Letters**,

- American Physical Society, v. 19, n. 19, p. 1095–1097, 1967. DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1095](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095). Acesso em: 23 set. 2019. Citado na p. 23.
- 11 REBBI, Claudio; SOLIANI, Giulio. **Solitons and Particles**. [S. l.]: World Scientific, 1984. ISBN 9971966425. DOI: [10.1142/0046](https://doi.org/10.1142/0046). Citado na p. 23.
 - 12 THOMSON, William. On Vortex Atoms. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 6, p. 94–105, 1869. DOI: [10.1017/S0370164600045430](https://doi.org/10.1017/S0370164600045430). Acesso em: 22 jan. 2019. Citado na p. 23.
 - 13 ABRAHAM, Max. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. **Annalen der Physik**, v. 315, n. 1, p. 105–179, 1902. DOI: [10.1002/andp.19023150105](https://doi.org/10.1002/andp.19023150105). Citado na p. 23.
 - 14 LORENTZ, H. A. **The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat**. [S. l.]: Dover Publications, 2003. ISBN 9780486495583. Citado na p. 23.
 - 15 BORN, Max; INFELD, L. Foundations of the new field theory. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934. DOI: [10.1098/rspa.1934.0059](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059). Citado na p. 23.
 - 16 SKYRME, Tony Hilton Royle. A new model for nuclear matter. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 226, n. 1167, p. 521–530, 1954. DOI: [10.1098/rspa.1954.0272](https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0272). Acesso em: 22 jan. 2019. Citado na p. 23.
 - 17 DIAS, Marcos Lima. **Monopolos e dyons em teorias de calibre não abelianas com quebra de simetria de Lorentz: O caso do grupo $SO(3)$** . 2017. 124 f. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís. Disponível em: <http://ppgf.ufma.br/uploads/files/DISSERTACAO%20MARCOS%2010042017.pdf>. Acesso em: 24 set. 2019. Citado na p. 24.
 - 18 NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics, Second Edition**. [S. l.]: CRC Press, 2003. (Graduate student series in physics). Citado na p. 24.
 - 19 LEE, T. D.; PANG, Y. Nontopological solitons. **Physics Reports**, v. 221, n. 5, p. 251–350, 1992. DOI: [10.1016/0370-1573\(92\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(92)90064-7). Acesso em: 24 set. 2019. Citado na p. 24.
 - 20 FINKELSTEIN, David. Kinks. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 7, n. 7, p. 1218–1225, 1966. DOI: [10.1063/1.1705025](https://doi.org/10.1063/1.1705025). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 24.
 - 21 HOOFT, G.'t. Magnetic monopoles in unified gauge theories. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 79, n. 2, p. 276–284, 1974. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90486-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90486-6). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 24.

- 22 ABRIKOSOV, A. A. The magnetic properties of superconducting alloys. **Journal of Physics and Chemistry of Solids**, v. 2, n. 3, p. 199–208, 1957. ISSN 0022-3697. DOI: [10.1016/0022-3697\(57\)90083-5](https://doi.org/10.1016/0022-3697(57)90083-5). Citado nas pp. 24, 25.
- 23 ABRIKOSOV, A. A. On the magnetic properties of superconducting of the second group. **Soviet Physics JETP**, v. 5, n. 6, p. 1174–1182, 1957. Acesso em: 21 set. 2019. Citado nas pp. 24, 25.
- 24 SKYRME, Tony Hilton Royle. A non-linear field theory. **Proceedings of the Royal Society of London**, London, v. 260, n. 1300, p. 127–138, 1961. DOI: [10.1098/rspa.1961.0018](https://doi.org/10.1098/rspa.1961.0018). Acesso em: 26 maio 2012. Citado nas pp. 24, 77.
- 25 SKYRME, Tony Hilton Royle. A unified field theory of mesons and baryons. **Nuclear Physics**, Amsterdam, v. 31, p. 556–569, 1962. DOI: [10.1016/0029-5582\(62\)90775-7](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90775-7). Acesso em: 22 nov. 2018. Citado nas pp. 24, 77.
- 26 SKYRME, Tony Hilton Royle. Meson theory and nuclear matter. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 230, n. 1181, p. 277–286, 1955. DOI: [10.1098/rspa.1955.0130](https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0130). Acesso em: 25 jan. 2019. Citado na p. 24.
- 27 DALITZ, R. H. An outline of the life and work of Tony Hilton Royle Skyrme (1922–1987). **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 03, n. 12, p. 2719–2744, 1988. DOI: [10.1142/s0217751x88001144](https://doi.org/10.1142/s0217751x88001144). Acesso em: 16 jan. 2019. Citado na p. 25.
- 28 SKYRME, Tony Hilton Royle. The oringins of Skyrmons. English. **International Journal of Modern Physics**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 3, n. 12, p. 2745–2751, 1988. DOI: [10.1142/s0217751x88001156](https://doi.org/10.1142/s0217751x88001156). Acesso em: 20 jun. 2014. Citado na p. 25.
- 29 NACIONAL, Observatório. A geometria dos espaccos curvos ou geometria não euclidiana. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf. Acesso em: 25 set. 2019. Citado na p. 25.
- 30 MANTON, N. S. Geometry of Skyrmons. **Communications in Mathematical Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 111, n. 3, p. 469–478, 1987. DOI: [10.1007/bf01238909](https://doi.org/10.1007/bf01238909). Acesso em: 25 set. 2019. Citado na p. 25.
- 31 HOBART, R. H. On the Instability of a Class of Unitary Field Models. **Proceedings of the Physical Society**, IOP Publishing, v. 82, n. 2, p. 201–203, 1963. DOI: [10.1088/0370-1328/82/2/306](https://doi.org/10.1088/0370-1328/82/2/306). Acesso em: 25 set. 2019. Citado na p. 25.
- 32 DERRICK, G. H. Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 5, n. 9, p. 1252–1254, 1964. DOI: [10.1063/1.1704233](https://doi.org/10.1063/1.1704233). Acesso em: 25 set. 2019. Citado na p. 25.

- 33 PIETTE, B. M. A. G.; SCHROERS, B. J.; ZAKRZEWSKI, W. J. Multisolitons in a two-dimensional Skyrme model. **Zeitschrift für Physik**, v. 65, n. 1, p. 165–174, 1995. DOI: [10.1007/BF01571317](https://doi.org/10.1007/BF01571317). Acesso em: 25 set. 2019. Citado nas pp. 25, 55.
- 34 PIETTE, B. M. A. G.; SCHROERS, B. J.; ZAKRZEWSKI, W. J. Dynamics of baby Skyrmions. **Nuclear Physics**, v. 439, n. 1, p. 205–235, 1995. DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00011-G](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00011-G). Acesso em: 25 set. 2019. Citado nas pp. 25, 55.
- 35 KUDRYAVTSEV, A.; PIETTE, B. M. A. G.; ZAKRZEWSKI, W. J. Mesons, baryons and waves in the baby Skyrme model. **The European Physical Journal C**, v. 1, n. 1, p. 333–341, 1998. DOI: [10.1007/BF01245822](https://doi.org/10.1007/BF01245822). Acesso em: 20 jan. 2019. Citado na p. 25.
- 36 MACDONALD, A. H. Incompressibilis Ergo Sum: Skyrmions and Edge States in the Quantum Hall Effect. In: QUANTUM Transport in Semiconductor Submicron Structures. [S. l.]: Springer Netherlands, 1996. p. 63–91. DOI: [10.1007/978-94-009-1760-6_3](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1760-6_3). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 25.
- 37 SCHWINDT, O.; WALET, N. R. Towards a phase diagram of the 2D Skyrme model. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 55, n. 5, p. 633–639, 2001. DOI: [10.1209/epl/i2001-00463-3](https://doi.org/10.1209/epl/i2001-00463-3). Acesso em: 21 jan. 2019. Citado nas pp. 25, 27.
- 38 MUHLBAUER, S. *et al.* Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 323, n. 5916, p. 915–919, 2009. DOI: [10.1126/science.1166767](https://doi.org/10.1126/science.1166767). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 25.
- 39 YU, X. Z. *et al.* Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal. **Nature**, Springer Nature, v. 465, n. 7300, p. 901–904, 2010. DOI: [10.1038/nature09124](https://doi.org/10.1038/nature09124). Acesso em: 21 jan. 2019. Citado na p. 25.
- 40 GISIGER, T.; PARANJAPÉ, M. B. Baby Skyrmion strings. **Physics Letters B**, v. 384, n. 1, p. 207–212, 1996. DOI: [10.1016/0370-2693\(96\)00805-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00805-2). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 25, 55, 56.
- 41 GISIGER, T.; PARANJAPÉ, M. B. Solitons in a baby-Skyrme model with invariance under area-preserving diffeomorphisms. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 55, n. 12, p. 7731–7738, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevD.55.7731](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.7731). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 25, 56.
- 42 ADAM, C.; ROMÁNCZUKIEWICZ, T.; SÁNCHEZ-GUILLÉN, J.; WERESZCZYŃSKI, A. Investigation of restricted baby Skyrme models. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 81, n. 8, p. 085007, 2010. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.085007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.085007). Acesso em: 31 jan. 2019. Citado nas pp. 25, 27, 56.
- 43 GLADIKOWSKI, J.; PIETTE, B. M. A. G.; SCHROERS, B. J. Skyrme-Maxwell solitons in 2+1 dimensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 53, n. 2,

- p. 844–851, 1996. DOI: [10.1103/PhysRevD.53.844](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.844). Acesso em: 21 jan. 2019. Citado nas pp. 25, 55.
- 44 SAMOILENKA, A.; SHNIR, Ya. Gauged multisoliton baby Skyrme model. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 6, p. 065018, 2016. DOI: [10.1103/physrevd.93.065018](https://doi.org/10.1103/physrevd.93.065018). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 25, 55.
- 45 SAMOILENKA, A.; SHNIR, Ya. Gauged baby Skyrme model with a Chern-Simons term. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 95, n. 4, p. 045002, 2017. DOI: [10.1103/physrevd.95.045002](https://doi.org/10.1103/physrevd.95.045002). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 25, 56.
- 46 NIELSEN, H. B.; OLESEN, P. Vortex-line models for dual strings. **Nuclear Physics B**, v. 61, p. 45–61, 1973. DOI: [10.1016/0550-3213\(73\)90350-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 47 DE VEGA, H. J.; SCHAPOSNIK, F. A. Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 56, n. 24, p. 2564–2566, 1986. DOI: [10.1103/physrevlett.56.2564](https://doi.org/10.1103/physrevlett.56.2564). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 48 PAUL, Samir K.; KHARE, Avinash. Charged vortices in an abelian Higgs model with Chern-Simons term. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 174, n. 4, p. 420–422, 1986. DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)91028-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)91028-2). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 49 KHARE, Avinash. Charged vortices and Q-balls in an abelian Higgs model exhibiting a first order phase transition. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 255, n. 3, p. 393–397, 1991. DOI: [10.1016/0370-2693\(91\)90784-n](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90784-n). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 50 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, Charles M. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 35, n. 12, p. 760–762, 1975. DOI: [10.1103/PhysRevLett.35.760](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.35.760). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 26, 29.
- 51 BOGOMOL'NYI, E. B. The stability of classical solution. **Sov. J. Nucl. Phys.**, American Institute of Physics, v. 24, n. 4, p. 449, 1976. Acesso em: 7 maio 2019. Citado nas pp. 26, 29, 30, 32, 39.
- 52 HONG, Jooyoo; KIM, Yoonbai; PAC, Pong Youl. Multivortex solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs theory. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 19, p. 2230–2233, 1990. DOI: [10.1103/physrevlett.64.2230](https://doi.org/10.1103/physrevlett.64.2230). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 53 JACKIW, R.; LEE, Kimyeong; WEINBERG, Erick J. Self-dual Chern-Simons solitons. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 42, n. 10, p. 3488–3499,

1990. DOI: [10.1103/physrevd.42.3488](https://doi.org/10.1103/physrevd.42.3488). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 54 JACKIW, R.; WEINBERG, Erick J. Self-dual Chern-Simons vortices. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 19, p. 2234–2237, 1990. DOI: [10.1103/physrevlett.64.2234](https://doi.org/10.1103/physrevlett.64.2234). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 55 HYUN, Seungjoon; SHIN, Junsoo; YEE, Jae Hyung; LEE, Hyuk-jae. Vortex solutions of a Maxwell-Chern-Simons field coupled to four-fermion theory. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 55, n. 6, p. 3900–3902, 1997. DOI: [10.1103/physrevd.55.3900](https://doi.org/10.1103/physrevd.55.3900). Acesso em: 26 set. 2019. Citado na p. 26.
- 56 CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; DA HORA, E.; MILLER, C. Magnetic flux inversion in charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell-Higgs framework. **Physics Letters B**, v. 718, n. 2, p. 620–624, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.10.053>. Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 43, 59.
- 57 MILLER, C.; CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; DA HORA, E. Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the *CPT*-even sector of the standard model extension. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 86, n. 6, p. 065011, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.86.065011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.065011). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59.
- 58 BAZEIA, D.; CASANA, R.; DA HORA, E.; MENEZES, R. Generalized self-dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, n. 12, p. 125028, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.125028](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.125028). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59.
- 59 CASANA, Rodolfo; SOURROUILLE, Lucas. Self-dual Maxwell–Chern–Simons solitons from a Lorentz-violating model. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 726, n. 1-3, p. 488–492, 2013. DOI: [10.1016/j.physletb.2013.08.051](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.08.051). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59.
- 60 CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; DA HORA, E.; NEVES, A. B. F. Maxwell–Chern–Simons vortices in a CPT-odd Lorentz-violating Higgs electrodynamics. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 9, 5315649, p. 3064, 2014. DOI: [10.1140/epjc/s10052-014-3064-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3064-3). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59, 101.
- 61 CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; DA HORA, E.; DOS SANTOS, C. Analytical BPS Maxwell-Higgs Vortices. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi Limited, v. 2014, p. 1–9, 2014. DOI: [10.1155/2014/210929](https://doi.org/10.1155/2014/210929). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59.
- 62 CASANA, R.; LAZAR, G. Topological charged BPS vortices in Lorentz-violating Maxwell-Higgs electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90,

- n. 6, p. 065007, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.065007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.065007). Citado nas pp. 26, 59.
- 63 CASANA, R.; HORA, E. da; RUBIERA-GARCIA, D.; SANTOS, C. dos. Topological vortices in generalized Born–Infeld–Higgs electrodynamics. **The European Physical Journal C**, Springer Science e Business Media LLC, v. 75, n. 8, p. 380, 2015. ISSN 1434-6052. DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3596-1](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3596-1). Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3596-1>. Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 43, 59.
- 64 CASANA, R.; CAVALCANTE, A.; DA HORA, E. Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k-generalized gauge field dynamics. **Journal of High Energy Physics**, Springer Nature, v. 2016, n. 12, p. 051, 2016. DOI: [10.1007/jhep12\(2016\)051](https://doi.org/10.1007/jhep12(2016)051). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59.
- 65 CASANA, Rodolfo; SOURROUILLE, Lucas. Self-Dual Configurations in a Generalized Abelian Chern-Simons-Higgs Model with Explicit Breaking of the Lorentz Covariance. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi Limited, v. 2016, p. 1–8, 2016. DOI: [10.1155/2016/5315649](https://doi.org/10.1155/2016/5315649). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 59.
- 66 CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; PASSOS, E.; DOS SANTOS, F. E. P.; SILVA, E. O. New *CPT*-even and Lorentz-violating nonminimal coupling in the Dirac equation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, n. 4, p. 047701, 2013. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.047701](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.047701). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 35.
- 67 ARAUJO, Jonas B.; CASANA, Rodolfo; FERREIRA, Manoel M. Constraining *CPT*-even and Lorentz-violating nonminimal couplings with the electron magnetic and electric dipole moments. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, n. 2, p. 025049, 2015. DOI: [10.1103/PhysRevD.92.025049](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.025049). Acesso em: 26 set. 2019. Citado nas pp. 26, 35.
- 68 ARAUJO, Jonas B.; CASANA, Rodolfo; FERREIRA, Manoel M. General *CPT*-even dimension-five nonminimal couplings between fermions and photons yielding EDM and MDM. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 760, p. 302–308, 2016. DOI: [10.1016/j.physletb.2016.06.070](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.06.070). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 35.
- 69 CASANA, R.; RODRIGUES, J. S.; DOS SANTOS, F. E. P. Lorentz-violating nonminimal coupling contributions in mesonic hydrogen atoms. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 790, p. 354–360, 2019. DOI: [10.1016/j.physletb.2019.01.019](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.01.019). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 26, 35.
- 70 MOUCHREK-SANTOS, V. E.; FERREIRA, Manoel M. Constraining *CPT*-odd non-minimal interactions in the electroweak sector. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 95, p. 071701, 7 2017. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.071701](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.071701). Citado nas pp. 27, 33, 35.

- 71 MOUCHREK-SANTOS, Victor E.; FERREIRA, Manoel M. Repercussions of dimension five nonminimal couplings in the electroweak model. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 952, p. 012019, 2018. DOI: [10.1088/1742-6596/952/1/012019](https://doi.org/10.1088/1742-6596/952/1/012019). Acesso em: 27 set. 2019. Citado nas pp. 27, 33, 35.
- 72 MOUCHREK-SANTOS, V. E.; FERREIRA, Manoel M.; MILLER, Carlisson. A dimension five Lorentz-violating nonminimal coupling for mesons in the KLZ model. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 945, p. 114677, 2019. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2019.114677](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.114677). Citado nas pp. 27, 33, 35.
- 73 CASANA, Rodolfo; FERREIRA, Manoel M.; MOTA, Alexsandro Lucena. Topological self-dual configurations in a Maxwell–Higgs model with a CPT-odd and Lorentz-violating nonminimal coupling. **Annals of Physics**, Elsevier BV, v. 375, p. 179–192, 2016. DOI: [10.1016/j.aop.2016.09.013](https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.09.013). Acesso em: 27 set. 2019. Citado na p. 27.
- 74 SPEIGHT, J. M. Compactons and semi-compactons in the extreme baby Skyrme model. **Journal de Physique**, IOP Publishing, A43, n. 40, p. 405201, 2010. DOI: [10.1088/1751-8113/43/40/405201](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/40/405201). arXiv: [1006.3754 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1006.3754). Acesso em: 27 set. 2019. Citado na p. 27.
- 75 ADAM, C.; NAYA, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. Gauged BPS baby Skyrme model. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 86, n. 4, p. 045010, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.86.045010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.045010). Acesso em: 31 jan. 2019. Citado nas pp. 27, 55, 56, 59, 60, 70, 73, 79, 92.
- 76 ADAM, C.; NAYA, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. Lifshitz field theories with SDiff symmetries. **Journal of High Energy Physics**, Springer Nature, v. 2013, n. 3, p. 12, 2013. DOI: [10.1007/jhep03\(2013\)012](https://doi.org/10.1007/jhep03(2013)012). Acesso em: 27 set. 2019. Citado na p. 27.
- 77 CASANA, Rodolfo; SANTOS, André C.; FARIAS, Claudio F.; MOTA, Alexsandro L. Self-dual solitons in a generalized Chern-Simons baby Skyrme model, 2019. arXiv: [1901.00655 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1901.00655). Citado na p. 27.
- 78 SANTOS, André Cavalcante. **Defeitos topológicos e uma solução tipo-Schwarzschild em uma teoria de campo além do modelo padrão**. 2018. 96 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís. Acesso em: 27 set. 2019. Citado na p. 27.
- 79 CASANA, R.; CAVALCANTE, A.; FARIAS, C. F.; MOTA, Alexsandro L. Self-dual solitons in a Maxwell-Chern-Simons baby Skyrme Model. Unpublished. São Luís, 2019. Acesso em: 27 set. 2019. Citado na p. 27.
- 80 KOSTELECKÝ, V. Alan; SAMUEL, Stuart. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 39, n. 2, p. 683–685, 1989. DOI: [10.1103/PhysRevD.39.683](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.39.683). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.683>. Citado nas pp. 32, 33.

-
- 81 KOSTELECKÝ, V. Alan; SAMUEL, Stuart. Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 63, n. 3, p. 224–227, 1989. DOI: [10.1103/PhysRevLett.63.224](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.63.224). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.63.224>. Citado na p. 33.
- 82 KOSTELECKÝ, V. Alan; SAMUEL, Stuart. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 40, n. 6, p. 1886–1903, 1989. DOI: [10.1103/PhysRevD.40.1886](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.40.1886). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.1886>. Citado na p. 33.
- 83 KOSTELECKÝ, V. Alan; SAMUEL, Stuart. Collective physics in the closed bosonic string. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 42, n. 4, p. 1289–1292, 1990. DOI: [10.1103/PhysRevD.42.1289](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.1289). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.1289>. Acesso em: 16 set. 2019. Citado na p. 33.
- 84 KOSTELECKÝ, V. Alan; POTTING, Robertus. CPT and strings. **Nuclear Physics B**, v. 359, n. 2, p. 545–70, 1991. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(91\)90071-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90071-5). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391900715>. Acesso em: 16 set. 2019. Citado na p. 33.
- 85 KOSTELECKÝ, V. Alan; POTTING, Robertus. CPT, strings, and meson factories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 51, n. 7, p. 3923–3935, 1995. DOI: [10.1103/PhysRevD.51.3923](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.3923). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.3923>. Citado na p. 33.
- 86 GREENBERG, O. W. CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 89, n. 23, p. 231602, 2002. DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.231602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.231602). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.231602>. Citado na p. 33.
- 87 COLLADAY, Don; KOSTELECKÝ, V. Alan. CPT violation and the standard model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 55, n. 11, p. 6760–6774, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevD.55.6760](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.6760). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.6760>. Citado na p. 33.
- 88 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. Alan. Lorentz-violating extension of the standard model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998. DOI: [10.1103/PhysRevD.58.116002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.116002). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.116002>. Citado na p. 33.
- 89 COLEMAN, Sidney; GLASHOW, Sheldon L. High-energy tests of Lorentz invariance. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 59, n. 11, p. 116008, 1999. DOI: [10.1103/PhysRevD.59.116008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.116008). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.116008>. Citado na p. 33.

- 90 COLLADAY, Don; KOSTELECKÝ, V. Alan. Cross sections and Lorentz violation. **Physics Letters B**, v. 511, n. 2, p. 209–217, 2001. DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)00649-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00649-9). Citado na p. 33.
- 91 ALTSCHUL, B. Compton scattering in the presence of Lorentz and *CPT* violation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 70, n. 5, p. 056005, 2004. DOI: [10.1103/PhysRevD.70.056005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.056005). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.056005>. Citado na p. 33.
- 92 SHORE, Graham M. Strong equivalence, Lorentz and CPT violation, anti-hydrogen spectroscopy and gamma-ray burst polarimetry. **Nuclear Physics B**, v. 717, n. 1, p. 86–118, 2005. ISSN 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.03.040>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321305002828>. Citado na p. 33.
- 93 GOMES, M.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Yu.; DA SILVA, A. J. Aetherlike Lorentz-breaking actions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, n. 4, p. 045018, 2010. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.045018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.045018). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.045018>. Citado na p. 33.
- 94 BAKKE, K.; BELICH, H.; SILVA, E. O. Relativistic Landau-Aharonov-Casher quantization based on the Lorentz symmetry violation background. **Journal of Mathematical Physics**, v. 52, n. 6, p. 063505, 2011. DOI: [10.1063/1.3597230](https://doi.org/10.1063/1.3597230). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.3597230>. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.3597230>. Citado na p. 33.
- 95 MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Yu. Perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, n. 12, p. 125003, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.125003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.125003). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.125003>. Citado nas pp. 33, 35.
- 96 BAKKE, K.; SILVA, E. O.; BELICH, H. He-McKellar-Wilkens effect and scalar Aharonov-Bohm effect for a neutral particle based on the Lorentz symmetry violation. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 5, p. 055004, 2012. DOI: [10.1088/0954-3899/39/5/055004](https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/5/055004). Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/5/055004>. Citado na p. 33.
- 97 BAKKE, K.; BELICH, H. Abelian geometric phase for a Dirac neutral particle in a Lorentz symmetry violation environment. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 8, p. 085001, 2012. DOI: [10.1088/0954-3899/39/8/085001](https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/8/085001). Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/8/085001>. Citado na p. 33.
- 98 CARROLL, Sean M.; FIELD, George B.; JACKIW, Roman. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 41, n. 4, p. 1231–1240, 1990. DOI: [10.1103/PhysRevD.41.1231](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.41.1231).

- Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.41.1231>. Citado na p. 33.
- 99 KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 87, n. 25, p. 251304, 2001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.251304](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.251304). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.251304>. Citado na p. 33.
 - 100 KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Signals for Lorentz violation in electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 66, n. 5, p. 056005, 2002. DOI: [10.1103/PhysRevD.66.056005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.056005). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.056005>. Citado na p. 33.
 - 101 KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 97, n. 14, p. 140401, 2006. DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.140401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.140401). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.140401>. Citado na p. 33.
 - 102 KAUFHOLD, C.; KLINKHAMER, F. R. Vacuum Čerenkov radiation in spacelike Maxwell-Chern-Simons theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 76, n. 2, p. 025024, 2007. DOI: [10.1103/PhysRevD.76.025024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.025024). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.025024>. Citado na p. 33.
 - 103 ALTSCHUL, Brett. Vacuum Čerenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 98, n. 4, p. 041603, 2007. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.041603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.041603). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.041603>. Citado nas pp. 33, 34.
 - 104 ALTSCHUL, Brett. Finite duration and energy effects in Lorentz-violating vacuum Čerenkov radiation. **Nuclear Physics B**, v. 796, n. 1, p. 262–273, 2008. ISSN 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2007.12.012>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321307009509>. Citado na p. 33.
 - 105 KLINKHAMER, F. R.; RISSE, M. Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified Maxwell theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 77, n. 1, p. 016002, 2008. DOI: [10.1103/PhysRevD.77.016002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.016002). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.016002>. Citado na p. 33.
 - 106 KOSTELECKÝ, V. Alan. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 69, n. 10, p. 105009, 2004. DOI: [10.1103/PhysRevD.69.105009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.105009). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.105009>. Citado na p. 33.

- 107 KOSTELECKÝ, V. Alan; RUSSELL, Neil; TASSON, Jay D. Constraints on Torsion from Bounds on Lorentz Violation. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 100, n. 11, p. 111102, 2008. DOI: [10.1103/PhysRevLett.100.111102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.111102). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.111102>. Citado na p. 33.
- 108 BOLDO, J. L.; HELAYËL-NETO, J. A.; DE MORAES, L. M.; SASAKI, C. A. G.; OTOYA, V. J. Vásquez. Graviton excitations and Lorentz-Violating gravity with cosmological constant. **Physics Letters B**, v. 689, n. 2, p. 112–115, 2010. ISSN 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.04.059>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310005356>. Citado na p. 33.
- 109 KOSTELECKÝ, V. Alan; TASSON, Jay D. Matter-gravity couplings and Lorentz violation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, n. 1, p. 016013, 2011. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.016013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.016013). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.016013>. Citado na p. 33.
- 110 MALUF, R. V.; SANTOS, Victor; CRUZ, W. T.; ALMEIDA, C. A. S. Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous Lorentz violation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 88, p. 025005, 2 2013. DOI: [10.1103/PhysRevD.88.025005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.025005). Acesso em: 30 set. 2019. Citado na p. 33.
- 111 CASANA, R.; CAVALCANTE, A.; POULIS, F. P.; SANTOS, E. B. Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.104001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.104001). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.104001>. Citado na p. 33.
- 112 KOSTELECKÝ, V. Alan; MEWES, Matthew. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, n. 1, p. 015020, 2009. DOI: [10.1103/PhysRevD.80.015020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.015020). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.015020>. Citado na p. 35.
- 113 CAMBIASO, Mauro; LEHNERT, Ralf; POTTING, Robertus. Massive photons and Lorentz violation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, n. 8, p. 085023, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.085023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.085023). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.085023>. Citado na p. 35.
- 114 AGOSTINI, B.; BARONE, F. A.; BARONE, F. E.; GAETE, Patricio; HELAYËL-NETO, J. A. Consequences of vacuum polarization on electromagnetic waves in a Lorentz-symmetry breaking scenario. **Physics Letters B**, v. 708, n. 1, p. 212–215, 2012. ISSN 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.01.050>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312000780>. Citado na p. 35.

-
- 115 SCHRECK, M. Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, n. 10, p. 105019, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevD.89.105019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.105019). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.105019>. Citado na p. 35.
- 116 BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; SOTO, D. E. Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90, n. 8, p. 085012, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.085012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.085012). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.085012>. Citado na p. 35.
- 117 BELICH, H.; COSTA-SOARES, T.; FERREIRA JR., M. M.; HELAYËL-NETO, J. A. Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications. **The European Physical Journal C - Particles and Fields**, v. 41, n. 3, p. 421–426, 2005. ISSN 1434-6052. DOI: [10.1140/epjc/s2005-02240-y](https://doi.org/10.1140/epjc/s2005-02240-y). Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2005-02240-y>. Citado na p. 35.
- 118 CHARNESKI, B.; GOMES, M.; MALUF, R. V.; DA SILVA, A. J. Lorentz violation bounds on Bhabha scattering. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 86, n. 4, p. 045003, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.86.045003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.045003). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.045003>. Citado na p. 35.
- 119 GAZZOLA, G.; FARGNOLI, H. G.; SCARPELLI, A. P. Baêta; SAMPAIO, Marcos; NEMES, M. C. QED with minimal and nonminimal couplings: on the quantum generation of Lorentz-violating terms in the pure photon sector. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 3, p. 035002, 2012. DOI: [10.1088/0954-3899/39/3/035002](https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/3/035002). Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/3/035002>. Citado na p. 35.
- 120 SCARPELLI, A. P. B. QED with chiral nonminimal coupling: aspects of the Lorentz-violating quantum corrections. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 12, p. 125001, 2012. DOI: [10.1088/0954-3899/39/12/125001](https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/12/125001). Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/12/125001>. Citado na p. 35.
- 121 BRITO, L. C. T.; FARGNOLI, H. G.; SCARPELLI, A. P. B. Aspects of quantum corrections in a Lorentz-violating extension of the Abelian Higgs model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, n. 12, p. 125023, 2013. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.125023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.125023). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.125023>. Citado na p. 35.
- 122 BORGES, L. H. C.; DIAS, A. G.; FERRARI, A. F.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Yu. Generation of axionlike couplings via quantum corrections in a Lorentz-violating background. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, n. 4, p. 045005, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevD.89.045005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.045005). Disponível em:

- <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.045005>. Citado na p. 35.
- 123 BORGES, L. H. C.; DIAS, A. G.; FERRARI, A. F.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Yu. Generation of higher derivatives operators and electromagnetic wave propagation in a Lorentz-violation scenario. **Physics Letters B**, v. 756, p. 332–336, 2016. ISSN 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.03.042>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316300132>. Citado na p. 35.
- 124 NICHOLAS MANTON, Paul Sutcliffe. **Topological Solitons**. Edição: P. V. Landshoff. Edição: D. R. Nelson. Edição: S. Weinberg. [S. l.]: Cambridge University Press, 2004. 493 p. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780511617034. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511617034>. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/books/topological-solitons/0A9670253EB1C8254BDACA4EE30C3AA3>. Acesso em: 22 ago. 2018. Citado na p. 37.
- 125 DA HORA SANTOS, Carlos Eduardo. **Vórtices em teorias k -generalizadas**. 2012. 80 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/5716>. Acesso em: 7 maio 2019. Citado na p. 38.
- 126 CASANA, R.; LAZAR, G. Topological charged BPS vortices in Lorentz-violating Maxwell-Higgs electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90, n. 6, p. 065007, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.065007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.065007). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.065007>. Citado nas pp. 43, 101.
- 127 TCHRAKIAN, D. H.; ARTHUR, Kieran. Solitons in gauged Sigma models: 2 dimensions. **Physics Letters B**, v. 352, n. 3, p. 327–336, 1995. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)00448-T](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00448-T). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026939500448T>. Acesso em: 31 jan. 2019. Citado na p. 55.
- 128 DELSATE, Terence; HAYASAKA, Masahiro; SAWADO, Nobuyuki. Non-axisymmetric baby-skyrmion branes. v. 86, p. 125009, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.86.125009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.125009). arXiv: [1208.6341 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1208.6341). Citado na p. 55.
- 129 ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A.; ZAKRZEWSKI, W. J. Topological duality between vortices and planar Skyrmions in BPS theories with area-preserving diffeomorphism symmetries. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 87, n. 2, p. 027703, 2013. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.027703](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.027703). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.027703>. Acesso em: 31 jan. 2019. Citado nas pp. 55, 56.
- 130 ADAM, C.; NAYA, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. A gauged baby Skyrme model and a novel BPS bound. **Journal of Physics: Conference**

- Series**, IOP Publishing, v. 410, p. 012055, 2013. DOI: [10.1088/1742-6596/410/1/012055](https://doi.org/10.1088/1742-6596/410/1/012055). Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/410/1/012055>. Acesso em: 31 jan. 2019. Citado nas pp. 55, 56.
- 131 ADAM, C.; WERESZCZYNSKI, A. Gauged BPS baby Skyrmions with quantized magnetic flux. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 95, n. 11, p. 116006, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.116006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.116006). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.116006>. Acesso em: 31 jan. 2019. Citado na p. 55.
- 132 ADAM, C.; NAYA, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. Lifshitz field theories with SDiff symmetries. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 3, p. 12, 2013. ISSN 1029-8479. DOI: [10.1007/JHEP03\(2013\)012](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)012). Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2013\)012](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)012). Acesso em: 31 jan. 2019. Citado nas pp. 55, 56, 59, 60.
- 133 LOGINOV, A. Yu. Rotating skyrmions of the $(2 + 1)$ -dimensional Skyrme gauge model with a Chern-Simons term. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 118, n. 2, p. 217–226, 2014. DOI: [10.1134/S1063776114020150](https://doi.org/10.1134/S1063776114020150). Disponível em: <https://doi.org/10.1134/S1063776114020150>. Citado na p. 56.
- 134 ADAM, C.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. Magnetothermodynamics of BPS baby skyrmions. **Journal of High Energy Physics**, v. 2014, n. 11, p. 95, 2014. ISSN 1029-8479. DOI: [10.1007/JHEP11\(2014\)095](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2014)095). Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2014\)095](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2014)095). Acesso em: 31 jan. 2019. Citado na p. 56.
- 135 ADAM, C.; NAYA, C.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. Topological phase transitions in the gauged BPS baby Skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2015, n. 5, p. 155, 2015. ISSN 1029-8479. DOI: [10.1007/JHEP05\(2015\)155](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2015)155). Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2015\)155](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2015)155). Acesso em: 31 jan. 2019. Citado na p. 56.
- 136 WAZWAZ, Abdul-Majid. **Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory**. [S. l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. DOI: [10.1007/978-3-642-00251-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00251-9). Citado na p. 68.
- 137 'T HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 72, n. 3, p. 461–473, 1974. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90154-0](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374901540). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374901540>. Acesso em: 8 jan. 2019. Citado na p. 77.
- 138 'T HOOFT, G. A two-dimensional model for mesons. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 75, n. 3, p. 461–470, 1974. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90088-1](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374900881). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374900881>. Acesso em: 8 jan. 2019. Citado na p. 77.

- 139 WITTEN, Edward. Baryons in the expansion. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 160, n. 1, p. 57–115, 1979. DOI: [10.1016/0550-3213\(79\)90232-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90232-3). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379902323>. Acesso em: 19 dez. 2018. Citado na p. 77.
- 140 WITTEN, Edward. Current algebra, baryons, and quark confinement. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 223, n. 2, p. 433–444, 1983. DOI: [10.1016/0550-3213\(83\)90064-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90064-0). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383900640>. Acesso em: 16 nov. 2018. Citado na p. 77.
- 141 ADKINS, Gregory S.; NAPPI, Chiara R.; WITTEN, Edward. Static properties of nucleons in the Skyrme model. **Nuclear Physics B**, v. 228, n. 3, p. 552–566, 1983. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(83\)90559-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90559-X). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138390559X>. Citado na p. 77.
- 142 CALLAN, Curtis G.; WITTEN, Edward. Monopole catalysis of Skyrminion decay. **Nuclear Physics B**, v. 239, n. 1, p. 161–176, 1984. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90088-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90088-9). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321384900889>. Acesso em: 30 jul. 2019. Citado na p. 77.
- 143 D'HOKER, Eric; FARHI, Edward. Skyrmions and/in the weak interactions. **Nucl. Physics, Sect. B**, North-Holland, v. 241, n. 1, p. 109–128, 1984. ISSN 0550-3213. DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90200-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90200-1). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321384902001>. Acesso em: 30 jul. 2019. Citado na p. 77.
- 144 D'HOKER, Eric; FARHI, Edward. The decay of the skyrmion. **Physics Letters B**, v. 134, n. 1-2, p. 86–90, 1984. ISSN 0370-2693. DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)90991-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)90991-2). Acesso em: 30 jul. 2019. Citado na p. 77.
- 145 PIETTE, B. M. A. G.; TCHRAKIAN, D. H. Static solutions in the U(1) gauged Skyrme model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 62, p. 025020, 2000. DOI: [10.1103/PhysRevD.62.025020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.025020). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.025020>. Citado na p. 77.
- 146 RADU, Eugen; TCHRAKIAN, D. H. Spinning U(1) gauged skyrmions. **Phys. Lett. Sect. B Nucl. Elem. Part. High-Energy Phys.**, North-Holland, v. 632, n. 1, p. 109–113, 2006. ISSN 03702693. DOI: [10.1016/j.physletb.2005.10.020](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.10.020). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305015121>. Citado na p. 77.
- 147 CASANA, R.; FARIAS, C. F.; FERREIRA, M. M.; LAZAR, G. Self-dual solitons in a CPT-odd and Lorentz-violating gauged O(3) sigma model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, n. 6, p. 065036, 2016. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.065036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.065036). Citado na p. 77.

065036. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.065036>. Citado na p. 101.

APÊNDICE A – A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO MAXWELL BABY SKYRME COM QSL PARA SÓLITONS AUTODUAIS

A.1 O formalismo BPS

A seção 5.2 apresenta o modelo Maxwell Baby Skyrme, Eq. (5.21), e suas equações de movimento. Este apêndice, tem por objetivo mostrar que a correta implementação do formalismo BPS requer a modificação do modelo (5.21) pela inclusão de novos termos a densidade lagrangiana. Os novos termos incorporam um novo campo, que chamamos de campo escalar neutro, que interage apenas com o campo de Skyrme.

Antes da efetiva implementação do formalismo BPS, devemos primeiramente escrever a densidade hamiltoniana do modelo (5.21). Isso pode ser feito, como usual, via formulação hamiltoniana de campos. Procedendo deste modo, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} L_{ij} F_{i0} F_{j0} + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + \frac{\lambda^2}{2} M_{ij} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_0 \boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j \boldsymbol{\phi} \times D_0 \boldsymbol{\phi}) \\ & + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q^2 + V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{2} \delta (1 - \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde a positividade de $\mathcal{H}$ é garantida se as matrizes L_{ij} e M_{ij} forem definidas positivas e se $\kappa_{ii} < 1$ e $(k_{\phi\phi})_{ii} < 1$.

Como sempre, estamos interessados em configurações do modelo associadas à estados de mínima energia, o quais, por sua vez, são configurações de equilíbrio independentes do tempo. Em razão disto, escrevemos a energia estacionária do modelo (5.21) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i A_0 \partial_j A_0 + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + g^2 \frac{\lambda^2}{2} M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 \\ & + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q^2 + V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{2} \delta (1 - \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Novamente, a densidade de energia (A.2) deve ser nula nas configurações de vácuo, ou seja, devemos ter $\mathcal{E} \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Tal exigência nos levar a concluir que os campos satisfazem as seguintes condições de contorno no vácuo:

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_i A_0 = 0, & \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B = 0, & \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) A_0 = 0, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} Q = 0, & \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) = 0, & \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi} = \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ao impormos as condições de contorno acima estabelecidas sobre

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) + g \epsilon_{ij} A_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.4})$$

concluimos que a condição $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} Q = 0$ só ficará bem estabelecida se a condição adicional

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_i \boldsymbol{\phi} = 0, \quad (\text{A.5})$$

for imposta. Essa nova condição remove a ambiguidade residual ainda remanescente sobre a condição de contorno imposta sobre o termo $(\hat{n} \cdot \partial_i \phi) A_0$ em (A.3), implicando assim na seguinte condição

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Como consequência, a condição $\lim_{|x| \rightarrow \infty} A_0$ corresponde, em princípio, à alguma constante arbitrária.

Visto que a lei de Gauss, (5.31), pode ser escrita como

$$L_{ij} \partial_j \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B = -\mathcal{J}_0, \quad (\text{A.7})$$

podemos agora determina a carga elétrica

$$\mathcal{Q}_{em} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \mathcal{J}_0 = - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x [L_{ij} \partial_j \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B] \quad (\text{A.8})$$

que sob as condições de contorna acima estabelecidas resulta nula. Desse forma, o modelo provê configurações eletricamente neutras.

A fim de implementarmos o formalismo BPS, introduzimos na densidade de energia (A.2) as seguintes identidades

$$\partial_i A_0 \partial_j A_0 = (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \mp \partial_j \Psi) \pm 2 \partial_i \Psi \partial_j A_0 - \partial_i \Psi \partial_j \Psi, \quad (\text{A.9})$$

$$B^2 = (B \mp \Sigma)^2 \pm 2 \Sigma B - \Sigma^2, \quad (\text{A.10})$$

$$(A_0)^2 = (A_0 \mp \Psi)^2 \pm 2 \Psi A_0 - \Psi^2, \quad (\text{A.11})$$

$$Q^2 = (Q \mp \vartheta)^2 \pm 2 \vartheta Q - \vartheta^2, \quad (\text{A.12})$$

onde Σ , Ψ e ϑ são quatro funções com dependências e formas ainda a serem determinadas. Desta maneira, a densidade de energia é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \check{\mathcal{E}} \pm L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j A_0 \pm (1 - \kappa_{ii}) \Sigma B \pm g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi A_0 \pm \lambda^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta Q \\ & + V - \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi - \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \Sigma^2 - \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi^2 - \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta^2, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{E}} = & \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \mp \partial_j \Psi) + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) (A_0 \mp \Psi)^2 \\ & + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) (B \mp \Sigma)^2 + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] (Q \mp \vartheta)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

é a contribuição dos termos quadráticos.

Com o objetivo de reescrevemos o segundo termo, contido na primeira linha da Eq. (A.13), multiplicamos ambos os lados da lei de Gauss (5.28) pela função Ψ , a qual, após alguma manipulação algébrica, provê a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \pm L_{ij} \partial_j \Psi \partial_i A_0 = & \mp g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi A_0 \\ & \pm g \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi Q \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} (\partial_j \Psi) B \pm \partial_j (L_{ij} \Psi \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Após usarmos (A.15) a densidade de energia se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \check{\mathcal{E}} \pm \lambda^2 \{ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta + g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \} Q \\ & \pm [(1 - \kappa_{ii}) \Sigma - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi] B \pm \partial_j (L_{ij} \Psi \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B) \\ & + V - \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi - \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \Sigma^2 - \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi^2 - \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta^2. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nós agora necessitamos fazer uso da Eq. (5.30),

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi) + g\epsilon_{ij} A_i (\hat{n} \cdot \partial_j \phi),$$

para reescrevermos o segundo termo contido na primeira linha de (A.16). Neste caso, a densidade de energia agora é escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \check{\mathcal{E}} + \mathcal{E}_{BPS} \pm \partial_j (L_{ij} \Psi \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B) \\ & \pm [(1 - \kappa_{ii}) \Sigma - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi] B \pm g\lambda^2 (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \{ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta + g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \} \epsilon_{ij} A_i \\ & + V - \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi - \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \Sigma^2 - \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi^2 - \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta^2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm \frac{1}{2} \lambda^2 \{ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta + g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \} \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi), \quad (\text{A.18})$$

é a contribuição que provê o mínimo da energia no limite BPS, sendo esta, portanto, proporcional ao grau topológica

$$\deg[\phi] = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ij} \phi \cdot (\partial_i \phi \times \partial_j \phi). \quad (\text{A.19})$$

A implementação do formalismo estará completa se os seguintes dois passos forem cumpridos: (1) se os termos contidos na segunda linha da Eq. (A.17) forem reescritos como uma derivada total e (2) se toda a terceira linha, ainda na Eq. (A.17), for tomada como sendo nula.

O passo (1) é alcançado ao lembrarmos que $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$ e impormos as seguintes relações

$$(1 - \kappa_{ii}) \Sigma - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi = -W \quad (\text{A.20})$$

e

$$g\lambda^2 (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \{ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \vartheta + g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) \Psi \} = \partial_j W, \quad (\text{A.21})$$

onde $W \equiv W(\hat{n} \cdot \phi)$. Desse modo, a segunda linha em (A.17) é reescrita como

$$\pm W \epsilon_{ij} \partial_j A_i \pm \partial_j W \epsilon_{ij} A_i = \pm \partial_j (\epsilon_{ij} A_i W). \quad (\text{A.22})$$

A partir das Eqs. (A.20) e (A.21) as funções Σ e ϑ são determinadas e assumem as seguintes formas

$$\Sigma = -\frac{1}{1 - \kappa_{ii}} [W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}) - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi], \quad (\text{A.23})$$

e

$$\vartheta = \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi \right], \quad (\text{A.24})$$

onde usamos

$$\partial_j W = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})}. \quad (\text{A.25})$$

O passo (2) provê o “potencial” V , o qual, após usamos (A.23) e (A.24), resulta na seguinte expressão

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi)^2 \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

onde Ψ assume o papel de um campo adicional extra e $W(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})$ se porta como um superpotencial, conforme já observado na literatura.

Aqui, convém ressaltarmos que o “potencial” assim obtido está em clara contradição com a hipótese inicial do qual o mesmo possuiria dependência funcional com relação a $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}$ apenas, como introduzido na densidade lagrangiana (5.21). Ao invés disso, o “potencial” (A.26), além da dependência com o campo de Skyrme, também depende do campo adicional extra $\Psi(\mathbf{x})$ e também das derivadas de ambos os campos. Além disso, a presença de tais derivadas confere a V não mais o estatus de potencial, mas de um termo de interação contendo o verdadeiro potencial que deve ter dependência funcional apenas com os campos $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}$ e Ψ , ou seja, $\tilde{V}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}, \Psi) \subset V(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}, \Psi, \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}, \partial_i \Psi)$. Finalmente, com será visto adiante, a nova forma funcional de V traz consequências para as soluções das equações BPS enquanto soluções legítimas do modelo (5.21).

A partir das condições de contorno $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V = 0$ e $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) = 0$ em (A.3) e (A.6), respectivamente, concluímos que, nas configurações de vácuo, as seguintes condições de contorno são válidas

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_i \Psi = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} = 0. \quad (\text{A.27})$$

Agora, estamos em condições de estabelecer a energia total do modelo como sendo dada por

$$E = \check{E} + E_{BPS} \pm \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \partial_j (L_{ij} \Psi \partial_i A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B + \epsilon_{ij} A_i W), \quad (\text{A.28})$$

onde

$$\begin{aligned} \check{E} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \check{\mathcal{E}} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \mp \partial_j \Psi) + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) (A_0 \mp \Psi)^2 \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] \left[Q \mp \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left(\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \left[B \pm \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi) \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

é a contribuição dos termos quadráticos e

$$E_{BPS} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \mathcal{E}_{BPS} = \pm \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_i \boldsymbol{\phi} \times \partial_j \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})}, \quad (\text{A.30})$$

é a contribuição devido a carga topológica do campo de Skyrme correspondente a energia mínima do modelo no limite BPS.

O último termo do lado direito da Eq. (A.28) é formado por derivadas totais as quais, sob as condições de contorno já previamente estabelecidas, resulta nula, não contribuindo, portanto, para energia total do modelo, de modo que a Eq. (A.28) agora resulta

$$E = \check{E} + E_{BPS}. \quad (\text{A.31})$$

O limite BPS é saturado quando $\check{E} = 0$, ou seja, quando os campos satisfizerem as seguintes equações autoduais (equações BPS)

$$\partial_i A_0 = \pm \partial_i \Psi, \quad (\text{A.32})$$

$$A_0 = \pm \Psi, \quad (\text{A.33})$$

$$(1 - \kappa_{ii}) B = \mp (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi), \quad (\text{A.34})$$

$$[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q = \pm \left(\frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi \right). \quad (\text{A.35})$$

A.2 A equivalência entre as equações BPS e as equações de Euler-Lagrange

Nesta seção, verificaremos se as equações BPS, (A.32), (A.33), (A.34) e (A.35), reproduzem as equações de segunda ordem (5.32), (5.34). Nós primeiro observamos que a condição $\Psi = \pm A_0$ satisfaz simultaneamente as Eqs. (A.32) e (A.33). Desse modo, as equações BPS remanescentes, (A.34) e (A.35) ficam reescritas como

$$(1 - \kappa_{ii}) B - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0 = \mp W, \quad (\text{A.36})$$

$$[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q + g\epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 = \pm \frac{1}{g\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})}. \quad (\text{A.37})$$

Será útil reescrevermos a interação potencial V , (A.26), em termos da condição $\Psi = \pm A_0$ e das Eqs. (A.36) e (A.37), como segue

$$V = \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i A_0 \partial_j A_0 + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0)^2 + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \mp g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right]^2. \quad (\text{A.38})$$

Na sequência, a fim de recuperarmos a lei de Ampère, aplicamos a derivada ∂_k a sobre a Eq. (A.36) reescrevendo-a na forma

$$(1 - \kappa_{ii}) \partial_k B - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \partial_k A_0 = \mp (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})}, \quad (\text{A.39})$$

onde aqui usamos a seguinte identidade

$$\partial_k W = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})}. \quad (\text{A.40})$$

No passo seguinte, isolamos (A.37) em termos de $\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})}$ para em seguida substituí-la em (A.39), levando-nos a seguinte expressão

$$(1 - \kappa_{ii}) \partial_k B - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \partial_k A_0 = -g \lambda^2 [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi}) Q - g^2 \lambda^2 \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0,$$

que é, como se poderia esperar, exatamente a lei de Ampère (5.32).

A fim de recuperarmos a equação de Skyrme, Eq. (5.34), multiplicamos ambos os lados da Eq. (A.37) pela derivada covariante $D_n \boldsymbol{\phi}$ e em seguida, também em ambos os lados, aplicamos a derivada $\epsilon_{ml} D_m$, obtendo assim a seguinte expressão

$$g \lambda^2 \epsilon_{kl} D_k \left(\left\{ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q + g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right\} D_l \boldsymbol{\phi} \right) = \pm \epsilon_{kl} D_k \left(\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} D_l \boldsymbol{\phi} \right). \quad (\text{A.41})$$

Aqui, notamos que o lado direito da Eq. (A.41) pode ser reescrito como

$$\epsilon_{kl} D_k \left(\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} D_l \boldsymbol{\phi} \right) = \epsilon_{kl} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi}) D_l \boldsymbol{\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \epsilon_{kl} D_k D_l \boldsymbol{\phi}. \quad (\text{A.42})$$

Usando as identidades¹

$$\epsilon_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) D_j \boldsymbol{\phi} = -Q (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.43})$$

$$\epsilon_{ij} D_i D_j \boldsymbol{\phi} = g B (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.44})$$

encontramos que a Eq. (A.42) pode ser reescrita na forma

$$\epsilon_{kl} D_k \left(\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} D_l \boldsymbol{\phi} \right) = \left[-Q \frac{\partial^2 W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2} + g B \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}). \quad (\text{A.45})$$

¹ A demonstração dessas identidades é apresentada na seção B.3 do apêndice B.

A presença de Q e B em (A.45) possibilita o uso das Eqs. (A.36) e (A.37), de modo que agora temos

$$\epsilon_{kl} D_k \left(\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} D_l \boldsymbol{\phi} \right) = \mp g \left\{ \frac{1}{g} \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left(\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \mp g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})^2} + \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0) \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \right\} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.46})$$

onde identificamos o termo entre chaves como sendo a derivada do “potencial” na forma dada em (A.38), ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} = + \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0) \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \mp g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right]^2. \quad (\text{A.47})$$

Dessa forma, a Eq. (A.46) fica reescrita como

$$\epsilon_{kl} D_k \left(\frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} D_l \boldsymbol{\phi} \right) = \mp g \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.48})$$

que ao ser substituída em (A.41) retorna a seguinte expressão

$$\lambda^2 \epsilon_{kl} D_k \left(\left\{ [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q + g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right\} D_l \boldsymbol{\phi} \right) + \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) = 0, \quad (\text{A.49})$$

que difere de (5.34) pela ausência do termo $g \lambda^2 \partial_i \left[g M_{ij} (A_0)^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) + \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0j} (A_0 Q) \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})$.

Neste ponto, convém lembrarmos que a interação potencial V contrária a hipótese inicial de dependência única com a variável funcional $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}$. Desta forma, a equação de campo tal como apresentada em (A.49) esta incompleta e devemos considerar não apenas a derivada funcional com relação a $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi}$ mas também com relação a $\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}$. Levando isto em conta, obtemos a seguintes expressão

$$\frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi})} = g^2 \lambda^2 M_{ik} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 \mp \frac{\lambda^2 g \epsilon_{ik} (k_{\phi\phi})_{0i} A_0}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} \mp g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right], \quad (\text{A.50})$$

que após usarmos (A.37) se torna

$$\frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi})} = g^2 \lambda^2 M_{ik} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 - \lambda^2 g \epsilon_{ik} (k_{\phi\phi})_{0i} A_0 Q. \quad (\text{A.51})$$

Para fins de concordância com a equação do campo de Skyrme, (5.34), devemos aplicar $(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \partial_k$ a nova expressão tal que esta se torna

$$\partial_k \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi})} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) = g \lambda^2 \partial_k \left[g M_{ik} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 - \epsilon_{ik} (k_{\phi\phi})_{0i} A_0 Q \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}). \quad (\text{A.52})$$

Substituindo (A.52) em (A.49), encontramos

$$\begin{aligned}
0 = & \lambda^2 \epsilon_{kl} D_k \left(\left\{ \left[1 - (k_{\phi\phi})_{ii} \right] Q + g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) A_0 \right\} D_l \boldsymbol{\phi} \right) \\
& + g \lambda^2 \partial_k \left[g M_{ik} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 - \epsilon_{ik} (k_{\phi\phi})_{0i} A_0 Q \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \\
& + \left[\frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - \partial_k \frac{\partial V}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi})} \right] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}), \tag{A.53}
\end{aligned}$$

que é de fato a equação do campo de Skyrme (5.34) modificada pela presença do termo de interação $\partial_k [\partial V / \partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_k \boldsymbol{\phi})] (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})$.

Portanto, embora o procedimento BPS tenha provido um par de equações autoduais, mostramos que estas, em particular a equação do campo de Skyrme, não reproduzem as equações de segunda ordem (5.32) e (5.34). Desta forma, o modelo acima não apresenta uma estrutura BPS verdadeira e necessitando ser modificado para que tal estrutura possa ser alcançada. A maneira como tal modificação pode ser realizada é sugerida pelo termo de interação potencial, (A.26), o qual nos mostra como introduzir novos termos ao modelo (5.21) tornando-o capaz de gerar configurações BPS. É o objetivo da próxima seção apresentar como isto pode ser feito.

A.3 A construção do modelo Maxwell-Skyrme CPT-par generalizado

O ponto de partida para a construção do novo modelo é a densidade de energia (A.2) a qual, após o uso da interação potencial (A.26), é expressa como

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i A_0 \partial_j A_0 + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) B^2 + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) (A_0)^2 \\
& + \frac{\lambda^2}{2} [1 - (k_{\phi\phi})_{ii}] Q^2 + \frac{1}{2} L_{ij} \partial_i \Psi \partial_j \Psi + \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 M_{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\phi}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi^2 + \mathcal{U}, \tag{A.54}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \kappa_{ii}} (W - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{1 - (k_{\phi\phi})_{ii}} \left[\frac{1}{g \lambda^2} \frac{\partial W}{\partial (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi})} - g \epsilon_{ij} (k_{\phi\phi})_{0i} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j \boldsymbol{\phi}) \Psi \right]^2. \tag{A.55}$$

como sendo a interação potencial do novo modelo.

A fim de reescrevemos a densidade de energia em termos do tensor de intensidade do campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, e da derivada covariante do campo de Skyrme, $D_\mu \boldsymbol{\phi}$,

fazemos as seguintes identificações

$$\frac{1}{2}L_{ij}\partial_i A_0\partial_j A_0 = \frac{1}{2}L_{ij}F_{i0}F_{j0}, \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{1}{2}(1 - \kappa_{ii})B^2 = \frac{1}{4}(\delta_{ij} - 2\kappa_{ij})F_{ij}F_{ik}, \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\lambda^2}{2}[1 - (k_{\phi\phi})_{ii}]Q^2 = \frac{\lambda^2}{4}\left[\delta_{ij} - 2(k_{\phi\phi})_{ij}\right](D_i\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{1}{2}g^2\lambda^2 M_{ij}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})(A_0)^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{1}{2}g^2\lambda^2 M_{ij}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_j\boldsymbol{\phi})\Psi^2 = \frac{1}{2}g^2\lambda^2 M_{ij}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_i\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_j\boldsymbol{\phi})\Psi^2, \quad (\text{A.60})$$

onde utilizamos $\partial_i A_0 = F_{i0}$, $\epsilon_{ij}B = F_{ij}$, $gA_0(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) = D_0\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_i\boldsymbol{\phi}) = -D_i\boldsymbol{\phi} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})$ e $\epsilon_{ik}Q = \boldsymbol{\phi} \cdot (D_i\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi})$. Dessa forma, identificamos a densidade de energia como sendo a densidade hamiltoniana e escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2}L_{ij}F_{i0}F_{j0} + \frac{1}{4}(\delta_{ij} - 2\kappa_{ij})F_{ij}F_{ik} + \frac{1}{2}L_{ij}\partial_i\Psi\partial_j\Psi + \frac{1}{2}g^2\lambda^2 M_{ij}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_i\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_j\boldsymbol{\phi})\Psi^2 \\ & + \frac{\lambda^2}{4}\left[\delta_{ij} - 2(k_{\phi\phi})_{ij}\right](D_i\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) + \frac{\lambda^2}{2}M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) + \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Para o caso estacionário, a densidade lagrangiana se relaciona com a densidade hamiltoniana por $\mathcal{L} = -\mathcal{H}$. Assim, podemos expressar a densidade lagrangiana como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}L_{ij}F_{i0}F_{j0} - \frac{1}{4}(\delta_{ij} - 2\kappa_{ij})F_{ij}F_{ik} - \frac{1}{2}L_{ij}\partial_i\Psi\partial_j\Psi - \frac{1}{2}g^2\lambda^2 M_{ij}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_i\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_j\boldsymbol{\phi})\Psi^2 \\ & - \frac{\lambda^2}{2}M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) - \frac{\lambda^2}{4}\left[\delta_{ij} - 2(k_{\phi\phi})_{ij}\right](D_i\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) - \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

A fim de expressarmos a densidade lagrangiana numa forma covariante, fazemos uso das seguintes identidades

$$-\frac{1}{2}L_{ij}F_{i0}F_{j0} - \frac{1}{4}(\delta_{ij} - 2\kappa_{ij})F_{ik}F_{jk} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - L_{ij}F_{i0}F_{j0} - \kappa_{i0}F_{j0}F_{ij} \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda^2}{2}M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) - \frac{\lambda^2}{4}\left[\delta_{ij} - 2(k_{\phi\phi})_{ij}\right](D_i\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_k\boldsymbol{\phi}) = \\ -\frac{\lambda^2}{4}(D_\mu\boldsymbol{\phi} \times D_\nu\boldsymbol{\phi}) \cdot (D^\mu\boldsymbol{\phi} \times D^\nu\boldsymbol{\phi}) - \frac{\lambda^2}{2}(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_\mu\boldsymbol{\phi} \times D_\rho\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_\nu\boldsymbol{\phi} \times D^\rho\boldsymbol{\phi}) \\ -\lambda^2 M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) + \lambda^2(k_{\phi\phi})_{i0}(D_0\boldsymbol{\phi} \times D_j\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_i\boldsymbol{\phi} \times D_j\boldsymbol{\phi}), \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$$-\frac{1}{2}L_{ij}\partial_i\Psi\partial_j\Psi = \frac{1}{2}(1 + \kappa_{00})\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi + \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi, \quad (\text{A.65})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g^2\lambda^2 M_{ij}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_i\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_j\boldsymbol{\phi})\Psi^2 = \frac{1}{2}g^2\lambda^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}](\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D^\mu\boldsymbol{\phi})\Psi^2 \\ + \frac{1}{2}g^2\lambda^2(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\mu\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_\nu\boldsymbol{\phi})\Psi^2. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Com isso, a densidade lagrangiana fica agora expressa como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{\lambda^2}{4}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D_{\nu}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D^{\nu}\boldsymbol{\phi}) \\
& - \frac{\lambda^2}{2}(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D_{\rho}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\nu}\boldsymbol{\phi} \times D^{\rho}\boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{2}(1 + \kappa_{00})\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi \\
& + \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}\partial_{\mu}\Psi\partial_{\nu}\Psi + \frac{1}{2}g^2\lambda^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}](\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\mu}\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D^{\mu}\boldsymbol{\phi})\Psi^2 \\
& + \frac{1}{2}g^2\lambda^2(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\mu}\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\nu}\boldsymbol{\phi})\Psi^2 - \mathcal{U} - L_{ij}F_{i0}F_{j0} - \kappa_{i0}F_{j0}F_{ij} \\
& - \lambda^2 M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) + \lambda^2(k_{\phi\phi})_{i0}(D_0\boldsymbol{\phi} \times D_j\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_i\boldsymbol{\phi} \times D_j\boldsymbol{\phi}), \quad (\text{A.67})
\end{aligned}$$

Neste ponto, torna-se oportuno fazer uso da lei Gauss a qual escrevemos em termos do tensor de intensidade F_{0i} na forma

$$L_{ij}\partial_j F_{i0} + \kappa_{0i}\partial_j F_{ij} = -\mathcal{J}_0. \quad (\text{A.68})$$

A partir desta expressão, podemos construir a seguinte identidade

$$-L_{ij}F_{i0}\partial_j A_0 - \kappa_{0i}\partial_j A_0 F_{ij} = +A_0\mathcal{J}_0 + \partial_j(L_{ij}A_0 F_{i0} + \kappa_{0i}A_0 F_{ij}), \quad (\text{A.69})$$

onde aqui

$$A_0\mathcal{J}_0 = \lambda^2 M_{ij}(D_i\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) + \lambda^2(k_{\phi\phi})_{0i}(D_j\boldsymbol{\phi} \times D_0\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_i\boldsymbol{\phi} \times D_j\boldsymbol{\phi}). \quad (\text{A.70})$$

Utilizando estas expressões, a densidade lagrangiana do modelo modificado é então escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{2}(1 + \kappa_{00})\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi + \frac{1}{2}\kappa^{\mu\nu}\partial_{\mu}\Psi\partial_{\nu}\Psi \\
& - \frac{\lambda^2}{4}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D_{\nu}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D^{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D^{\nu}\boldsymbol{\phi}) - \frac{\lambda^2}{2}(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\boldsymbol{\phi} \times D_{\rho}\boldsymbol{\phi}) \cdot (D_{\nu}\boldsymbol{\phi} \times D^{\rho}\boldsymbol{\phi}) \\
& + \frac{1}{2}g^2\lambda^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}](\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\mu}\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D^{\mu}\boldsymbol{\phi})\Psi^2 + \frac{1}{2}g^2\lambda^2(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\mu}\boldsymbol{\phi})(\hat{\mathbf{n}} \cdot D_{\nu}\boldsymbol{\phi})\Psi^2 \\
& - \mathcal{U} + \partial_j(L_{ij}A_0 F_{i0} + \kappa_{0i}A_0 F_{ij}), \quad (\text{A.71})
\end{aligned}$$

onde o termo constitui uma derivada total e não contribui para as equações de campo.

APÊNDICE B – CÁLCULO DE ALGUMAS IDENTIDADES

B.1 Identidades da seção 3.1

Nesta seção apresentamos o procedimento para encontrar a identidade da Eq. (3.13).

Inicialmente definimos o “operador” $D_{\pm}\phi$ e escrevemos

$$D_{\pm}\phi = D_1\phi \pm iD_2\phi. \quad (\text{B.1})$$

O módulo quadrado deste operador é dado por

$$|D_{\pm}\phi|^2 = (D_{\pm}\phi)^* (D_{\pm}\phi) = |D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 \pm i[(D_1\phi)^* (D_2\phi) - (D_2\phi)^* (D_1\phi)]. \quad (\text{B.2})$$

É conveniente reescrevermos este resultado em termos da soma de índices latinos

$$|D_{\pm}\phi|^2 = |D_j\phi|^2 \pm i\epsilon_{ij}(D_i\phi)^* (D_j\phi), \quad (\text{B.3})$$

onde $i, j = 1, 2$ e $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = +1$. A fim de calcularmos o último termo em (B.3), escrevermos a densidade de corrente, Eq. (3.8), na forma

$$J_i = ie[\phi(D_i\phi)^* - \phi^*(D_i\phi)], \quad (\text{B.4})$$

e, em seguida calculamos o seu “rotacional” (isto é, aplicamos $\epsilon_{ji}\partial_j$), resultando em

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = ie\epsilon_{ji}[(\partial_j\phi)(D_i\phi)^* + \phi(\partial_j D_i\phi)^* - (\partial_j\phi)^*(D_i\phi) - \phi^*(\partial_j D_i\phi)]. \quad (\text{B.5})$$

Lembrando que $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$, podemos mostrar que $D_j D_i \phi = \partial_j D_i \phi - ieA_j D_i \phi$ e, portanto, vê-se que

$$\partial_j D_i \phi = D_j D_i \phi + ieA_j D_i \phi. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo este último resultado em (B.5), nós encontramos (após alguma manipulação algébrica)

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = ie\epsilon_{ji}(\partial_j\phi - ieA_j\phi)(D_i\phi)^* - ie\epsilon_{ji}(\partial_j\phi - ieA_j\phi)^* D_i\phi + ie\epsilon_{ji}\phi(D_j D_i \phi)^* - ie\epsilon_{ji}\phi^* D_j D_i \phi. \quad (\text{B.7})$$

Finalmente, após usarmos

$$D_j \phi = \partial_j \phi - ieA_j \phi, \quad (\text{B.8})$$

reescrevemos (B.7) como

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = ie\epsilon_{ji}(D_j\phi)(D_i\phi)^* - ie\epsilon_{ji}(D_j\phi)^* D_i\phi + ie\epsilon_{ji}\phi(D_j D_i \phi)^* - ie\epsilon_{ji}\phi^* D_j D_i \phi \quad (\text{B.9})$$

Aproveitando-se do fato que os índices são mudos, podemos expressar (B.9) em uma forma mais simples, dada por

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = -2ie\epsilon_{ij}(D_i\phi)^* (D_j\phi) + ie[\phi(\epsilon_{ji}D_j D_i \phi)^* - \phi^*(\epsilon_{ji}D_j D_i \phi)]. \quad (\text{B.10})$$

O último termo pode ser obtido se este for escrito explicitamente em termos de A_i e ϕ . Procedendo assim, encontramos

$$\epsilon_{ji} D_j D_i \phi = \epsilon_{ji} (\partial_j \partial_i - e^2 A_j A_i) \phi - ieB\phi - ie\epsilon_{ji} A_i \partial_j \phi - ie\epsilon_{ij} A_i \partial_j \phi, \quad (\text{B.11})$$

onde foi usado $B = \epsilon_{ji} \partial_j A_i$. Note que os dois últimos termos se cancelam, já que $\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}$. Por outro lado, o fator $\partial_j \partial_i - e^2 A_j A_i$ é simétrico. Como ϵ_{ji} é antissimétrico, então

$$\epsilon_{ji} (\partial_j \partial_i - e^2 A_j A_i) \phi = 0. \quad (\text{B.12})$$

Desse modo, temos

$$\epsilon_{ji} D_j D_i \phi = -ieB\phi. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo esse resultado em (B.10) obtemos

$$\epsilon_{ji} \partial_j J_i = -2ie\epsilon_{ij} (D_i \phi)^* (D_j \phi) - e^2 2B |\phi|^2, \quad (\text{B.14})$$

que ainda pode ser escrito na forma

$$ie\epsilon_{ij} (D_i \phi)^* (D_j \phi) = -\frac{1}{2e} \epsilon_{ji} \partial_j J_i - eB |\phi|^2. \quad (\text{B.15})$$

Retornando a Eq. (B.3), encontramos finalmente que

$$|D_{\pm} \phi|^2 = |D_j \phi|^2 \pm \left[-\frac{1}{2e} \epsilon_{ji} \partial_j J_i - eB |\phi|^2 \right], \quad (\text{B.16})$$

ou ainda

$$|D_j \phi|^2 = |D_{\pm} \phi|^2 \pm \frac{1}{2e} \epsilon_{ji} \partial_j J_i \pm eB |\phi|^2. \quad (\text{B.17})$$

B.2 Identidades da seção 3.3

Nesta seção, mostramos como obter a identidade da Eq. (3.52). Para tanto, utilizando um procedimento similar ao da seção anterior, definimos o “operador” $\mathcal{D}_{\pm} \phi$ e escrevemos

$$\mathcal{D}_{\pm} \phi = \mathcal{D}_1 \phi \pm i\mathcal{D}_2 \phi. \quad (\text{B.18})$$

O módulo quadrado deste resulta em

$$|\mathcal{D}_{\pm} \phi|^2 = |\mathcal{D}_i \phi|^2 \pm ie\epsilon_{ij} (\mathcal{D}_i \phi)^* (\mathcal{D}_j \phi). \quad (\text{B.19})$$

A fim de determinarmos o último termo da Eq. (B.19), tomamos o “rotacional” (derivada $\epsilon_{ji} \partial_j$) sobre a densidade de corrente, Eq. (3.44), na forma

$$\mathcal{J}_i = i[\phi (\mathcal{D}_i \phi)^* - \phi^* (\mathcal{D}_i \phi)], \quad (\text{B.20})$$

e obtemos

$$\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{J}_i = ie\epsilon_{ji} [(\partial_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* - (\partial_j \phi)^* (\mathcal{D}_i \phi)] + i[\phi (\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{D}_i \phi)^* - \phi^* (\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{D}_i \phi)]. \quad (\text{B.21})$$

Agora, de modo similar ao que foi feito na Eq. (B.6), fazemos o uso da derivada covariante para mostrar que

$$\partial_j \mathcal{D}_i \phi = \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi + i(eA_j + F_{jl}\xi_l) \mathcal{D}_i \phi. \quad (\text{B.22})$$

Substituindo esse resultado em (B.21), encontramos

$$\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{J}_i = 2i\epsilon_{ji} (\mathcal{D}_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* + i[\phi (\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi)^* - \phi^* (\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi)]. \quad (\text{B.23})$$

Mais uma vez, a derivada covariante pode ser usada para que $\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi$ seja escrito explicitamente em termos de ϕ e A_i , conduzindo-nos então à

$$\begin{aligned} \epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi = & -ieB\phi - i\epsilon_{ji} \partial_j (\epsilon_{ik} B\xi_k) \phi + \epsilon_{ji} [\partial_j \partial_i + (eA_j + \epsilon_{jl} B\xi_l)(eA_i + \epsilon_{ik} B\xi_k)] \phi \\ & - i(eA_i + \epsilon_{ik} B\xi_k) \epsilon_{ji} \partial_j \phi - i\epsilon_{ji} (eA_j + \epsilon_{jl} B\xi_l) \partial_i \phi, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

de se usou $F_{ij} = \epsilon_{ij}B$ e $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$. Aqui, observa-se que os dois últimos termos são iguais e, portanto, se cancelam¹. Já no termo central, nota-se que a expressão entre colchetes, $\partial_j \partial_i + (eA_j + \epsilon_{jl} B\xi_l)(eA_i + \epsilon_{ik} B\xi_k)$, é simétrica, enquanto o símbolo de Levi-Civita, ϵ_{ji} , é antissimétrico. É fato conhecido que o produto de um tensor antissimétrico por um simétrico resultado nulo. Portanto, temos

$$\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi = -ieB\phi + i\partial_j (B\xi_j) \phi. \quad (\text{B.25})$$

Substituindo essa última expressão na Eq. (B.23), e após reordenarmos os termos, obtemos

$$i\epsilon_{ji} (\mathcal{D}_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* = eB|\phi|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{J}_i - \partial_j (B\xi_j) |\phi|^2. \quad (\text{B.26})$$

O uso da identidade

$$\partial_j (B\xi_j) |\phi|^2 = \partial_j (\xi_j B |\phi|^2) - \xi_j B (\partial_j |\phi|^2), \quad (\text{B.27})$$

permite reescrevermos a expressão (B.26) na forma

$$i\epsilon_{ji} (\mathcal{D}_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* = eB|\phi|^2 + \xi_j B (\partial_j |\phi|^2) + \partial_j \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ji} \mathcal{J}_i - \xi_j B |\phi|^2 \right). \quad (\text{B.28})$$

Por fim, ao substituímos (B.28) em (B.19), somos conduzidos à

$$|\mathcal{D}_i \phi|^2 = |\mathcal{D}_\pm \phi|^2 \pm \xi_j B (\partial_j |\phi|^2) \pm eB|\phi|^2 \pm \partial_j \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ji} \mathcal{J}_i - \xi_j B |\phi|^2 \right), \quad (\text{B.29})$$

que é de fato a mesma expressão da Eq. (3.52).

¹ A igualdade é notada fazendo $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ no último termo $i\epsilon_{ji} (eA_j + \epsilon_{jl} B\xi_l) \partial_i \phi$. Essa é uma operação permitida já que os índices são mudos e estamos lidando com somas.

B.3 Identidades da seção 5.3

B.3.1 Identidade 1

A identidade prescrita pela Eq. (4.15) pode ser derivada a partir das seguintes identidades vetoriais

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{B.31})$$

Para primeira identidade vetorial, (B.30), fazemos a seguinte escolha

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} = \boldsymbol{\phi} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{d} = D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}, \quad (\text{B.32})$$

que conduz imediatamente a

$$[\boldsymbol{\phi} \times (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})]^2 = (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi})(D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})^2 - [\boldsymbol{\phi} \cdot (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})]^2. \quad (\text{B.33})$$

Para a segunda identidade vetorial, (B.31), faz-se a seguinte escolha

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{b} = D_i \boldsymbol{\phi} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = D_j \boldsymbol{\phi}, \quad (\text{B.34})$$

e segue daí que

$$\boldsymbol{\phi} \times (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}) = 0. \quad (\text{B.35})$$

A verificação é concluída ao lembramos que

$$\boldsymbol{\phi}^2 = 1 \quad \text{e} \quad Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} [\boldsymbol{\phi} \cdot (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})], \quad (\text{B.36})$$

mostrando finalmente que

$$(D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}) \cdot (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}) = 2Q^2. \quad (\text{B.37})$$

B.3.2 Identidade 2

Nesta subseção nós mostraremos como obter a identidade (A.43) apresentada na revificação das equações BPS do modelo Maxwell-Baby-Skyme CPT-par.

O ponto de partida é identidade vetorial

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{B.38})$$

Aqui, nós fazemos a seguinte identificação

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}, \quad (\text{B.39})$$

tal que a expressão a seguinte identidade vetorial é obtida

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi}) \times [\boldsymbol{\phi} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi})] = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \boldsymbol{\phi} [(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot (D_i \boldsymbol{\phi} \times D_j \boldsymbol{\phi})] - (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\phi}) Q, \quad (\text{B.40})$$

onde

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \phi \cdot (D_i \phi \times D_j \phi). \quad (\text{B.41})$$

Pode ser demonstrado por meio de (B.38) que o termo entre colchetes, do lado esquerdo na Eq. (B.40), resulta em

$$\phi \times (\hat{n} \times \phi) = \hat{n} - \phi (\hat{n} \cdot \phi). \quad (\text{B.42})$$

Por outro lado, a partir da identidade vetorial

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (\text{B.43})$$

o termo entre colchetes, do lado direito da mesma Eq. (B.40), pode ser reescrito como

$$(\hat{n} \times \phi) \cdot (D_i \phi \times D_j \phi) = [\phi \times (D_i \phi \times D_j \phi)] \cdot \hat{n}. \quad (\text{B.44})$$

Desse modo, a partir das identidades a Eq. (B.40) fica reescrita como

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (D_i \phi \times D_j \phi) \times \hat{n} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} [\phi \times (D_i \phi \times D_j \phi)] (\hat{n} \cdot \phi) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \phi \{ [\phi \times (D_i \phi \times D_j \phi)] \cdot \hat{n} \} - (\hat{n} \times \phi) Q. \quad (\text{B.45})$$

Note-se agora que ambos os lados da Eq. (B.45) contém a expressão $\phi \times (D_i \phi \times D_j \phi)$, a qual, a partir da identidade (B.38), resulta nula, ou seja,

$$\phi \times (D_i \phi \times D_j \phi) = D_i \phi (\phi \cdot D_j \phi) - D_j \phi (\phi \cdot D_i \phi) = 0. \quad (\text{B.46})$$

Com isso, expressão se reduz a

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (D_i \phi \times D_j \phi) \times \hat{n} = -(\hat{n} \times \phi) Q. \quad (\text{B.47})$$

Por fim, demonstra-se, mais uma vez por meio da identidade (B.38), que o termo do lado esquerdo de (B.47) resulta em

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ij} [(D_i \phi \times D_j \phi) \times \hat{n}] = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_j \phi) D_i \phi + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) D_j \phi = \epsilon_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) D_j \phi, \quad (\text{B.48})$$

onde fica finalmente demonstrado a identidade (A.43)

$$\epsilon_{ij} (\hat{n} \cdot \partial_i \phi) D_j \phi = -(\hat{n} \times \phi) Q. \quad (\text{B.49})$$

B.3.3 Identidade 3

A fim de demonstrar a identidade (A.44) nós partimos da derivada covariante a qual escrevemos na forma

$$D_n \phi = \partial_n \phi + g A_n \hat{n} \times \phi. \quad (\text{B.50})$$

Na primeira etapa, nós aplicarmos em ambos os lados da derivada covariante (B.50) o operador $\epsilon_{mn} D_m$, obtendo assim a seguinte expressão

$$\epsilon_{mn} D_m D_n \phi = \epsilon_{mn} D_m (\partial_n \phi) + g \epsilon_{mn} D_m [A_n (\hat{n} \times \phi)]. \quad (\text{B.51})$$

Note-se agora que o primeiro termo do lado direito desta última expressão pode ser reescrita como

$$\epsilon_{mn}D_m(\partial_n\phi) = \epsilon_{mn}\partial_m\partial_n\phi + \epsilon_{mn}A_m(\hat{n} \times \partial_n\phi), \quad (\text{B.52})$$

enquanto que o segundo termo

$$g\epsilon_{mn}D_m[A_n(\hat{n} \times \phi)] = g\epsilon_{mn}\partial_m A_n(\hat{n} \times \phi) + g\epsilon_{mn}A_n(\hat{n} \times \partial_m\phi) + g^2\epsilon_{mn}A_nA_m[\hat{n} \times (\hat{n} \times \phi)], \quad (\text{B.53})$$

onde nós temos usado

$$(\hat{n} \times D_m\phi) = (\hat{n} \times \partial_m\phi) + gA_m[\hat{n} \times (\hat{n} \times \phi)]. \quad (\text{B.54})$$

Substituindo (B.52) e (B.53) em (B.51) e observando que

$$\epsilon_{mn}\partial_m\partial_n\phi = 0, \quad \epsilon_{mn}A_nA_m = 0, \quad \epsilon_{mn}\partial_m A_n = B, \quad (\text{B.55})$$

nós encontramos o seguinte resultado

$$\epsilon_{mn}D_mD_n\phi = \epsilon_{mn}A_m(\hat{n} \times \partial_n\phi) + g\epsilon_{mn}\partial_m A_n(\hat{n} \times \phi) + g\epsilon_{mn}A_n(\hat{n} \times \partial_m\phi). \quad (\text{B.56})$$

Por fim, nós observamos que o primeiro e o terceiro termos no lado direito de (B.56) resulta nula, ou seja, temos

$$\epsilon_{mn}A_m(\hat{n} \times \partial_n\phi) + g\epsilon_{mn}A_n(\hat{n} \times \partial_m\phi) = \epsilon_{mn}A_m(\hat{n} \times \partial_n\phi) - g\epsilon_{mn}A_m(\hat{n} \times \partial_n\phi) = 0, \quad (\text{B.57})$$

e com isso a expressão (B.56) reduz para

$$\epsilon_{mn}D_mD_n\phi = gB(\hat{n} \times \phi), \quad (\text{B.58})$$

que tão somente a identidade apresentada na Eq. (A.44).