

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Soluções BPS de vórtices e Skyrmons em teorias de  
calibre estendidas imersas em meios magnéticos**

**João Luís Brandão Andrade**

**ORIENTADOR: CARLOS EDUARDO DA HORA SANTOS**

SÃO LUÍS, DEZEMBRO DE 2024

JOÃO LUÍS BRANDÃO ANDRADE

**Soluções BPS de vórtices e Skyrmons em teorias de calibre estendidas imersas em meios magnéticos.**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

**Área de concentração:** Física de Partículas Elementares e Campos.

**Linha de Pesquisa:** Teorias de Campos e Gravitação.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos

SÃO LUÍS, DEZEMBRO DE 2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Andrade, João Luís Brandão.

Soluções BPS de vórtices e skyrmions em teorias de calibre estendidas imersas em meios magnéticos / João Luís Brandão Andrade. - 2024.

141 p.

Orientador(a): Carlos Eduadro da Hora Santos.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, Universidade Federal do Maranhão, 2024.

1. Defeitos Topológicos. 2. Formalismo Bps. 3. Skyrmions. 4. Vórtices. 5. Teorias de Calibre. I. Hora Santos, Carlos Eduadro da. II. Título.

João Luís Brandão Andrade

# Soluções BPS de vórtices e skyrmions em teorias de calibre estendidas imersas em meios magnéticos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

**Área de concentração:** Física de Partículas Elementares e Campos.

**Linha de Pesquisa:** Teorias de Campos e Gravitação.

Aprovado em: 20/12/2024

Comissão Examinadora

---

---

---

---

---

---

---

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado capacidade de superar mais este grande desafio. A minha mãe Raimunda Cecília e meu pai Luís Carlos, que me ensinaram desde cedo a correr atrás dos meus objetivos, sendo sempre presentes em todos os momentos da minha vida. A minha esposa Rosângela, uma mulher muito admirável e virtuosa, que sempre me apoia e compartilha comigo dos momentos alegres e difíceis. A toda a minha família, Avós, Tios, Tias, Primos e Primas, que sempre estão por perto quando preciso, nas horas boas e tristes; e que sempre acreditaram na minha capacidade. Aos amigos que fiz na escola: Valderfrank (in memoriam), Hugo Sousa, Edson Junior, Edivaldo Oliveira, Thiago Sarapião, Andressa Brito, Girlande Castro, Stherfane Batista, Ricardo Lima, Vanilson Silva, Neiano Sales, Joelson Reis Prado, Marcos Vinícius, Andrey Borges, Carlos Eduardo, Railson Oliveira, Rayanne, Daniel França, Joel Félix, Joel Anderson, Kayman Jhosef, Arthur Ferreira, Wellington Luís, Lucas Franco, Sâmara Barros, George Bruno, Charles Duarte, Marcell, Uadson Pereira, Cássio Diego, Moizés Filho, Diego Aguiar, Emerson Chaves, Neyver Henry, César Antônio, João Vitor, Marcelo Feitosa, Alessandro Lucena, Letícia Lisboa, João Alfíeres, Andressa Macêdo, Andressa, Ruana Lima, Joyce Pinto, Luziane Diniz, Nerlyane Melo, Lívia Soares, Lígia Costa, Joyce Alves, Socorro Amorim, André Cavalcante, Elivaldo Ribeiro, Jucelino Sousa, Janielton Andrade, Edmanferson Holanda, Carlos Magno, e aos demais cujos nomes não citei.

Ao Prof. Carlos Eduardo da Hora Santos, pela paciência, disposição e dedicação em me orientar ao longo desses 4 anos. Ao Prof. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, por ter sido meu co-orientador e contribuído para a minha formação. Ao Prof. Antônio Pinto Neto, que foi meu professor e tutor, e me ajudou com seus ensinamentos. Aos Cardoso e Welber que me ajudaram com aulas de reforço, e ao Prof. Raimundo Aires, pelas em suas aulas de física no ensino médio que serviram para me incentivar a ingressar no curso de física.

A Universidade Federal do Maranhão, em particular, PIBIC-Física e ao PET-Física, e ao PPGF por terem cedido espaço para os meus estudos e a CAPES e CNPQ que financiaram a minha formação e elaboração desse trabalho.

*“As vezes, eu começo uma frase e eu nem sei aonde ela vai parar. Eu só espero encontrar o sentido ao longo do caminho.”*

(“Michael Scott” - The Office 2008.)

# Resumo

Nesta tese, apresento três contribuições originais de soluções de Skyrmions e Vórtices planares por meio do formalismo BPS. Primeiramente, no contexto dos modelos de Skyrme, propomos duas configurações originais que geram sólitons BPS: a primeira no modelo baby Skyrme-Maxwell e a segunda no modelo baby Skyrme-Born-Infel. Em ambos os cenários, introduzimos uma função  $G(\varphi_n)$ , denominada de permeabilidade generalizada, junto aos termos de Maxwell e Born-Infeld, respectivamente. Nos dois cenários, a partir da minimização do funcional de energia, obtivemos expressões gerais para a energia mínima das configurações de campo, bem como para as respectivas equações BPS, que passam a depender diretamente da estrutura das permeabilidades. Analisamos as soluções dos modelos modificados e comparamos com as soluções usuais, com o objetivo de identificar e destacar a modificação gerada pela introdução das funções não-triviais  $G$ . Por fim, no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons, seguindo o mesmo procedimento dos modelos de Skyrme, propomos a extensão do modelo por meio do acoplamento de uma nova permeabilidade. Agora, a função  $G(\chi)$  depende de um campo escalar adicional  $\chi$ , cuja dinâmica é introduzida a fim de estender a simetria da densidade lagrangiana original, além de servir como campo fonte de soluções de vórtice.

**PALAVRAS-CHAVE:** Defeitos topológicos, Formalismo BPS, Skyrmions, Vórtices, Teorias de Gauge,

# Abstract

In this thesis, I present three original contributions to solutions of Skyrmions and planar vortices using the BPS formalism. First, in the context of Skyrme models, we propose two original configurations that generate BPS solitons: the first in the baby Skyrme-Maxwell model and the second in the baby Skyrme-Born-Infeld model. In both scenarios, we introduce a function  $G(\varphi_n)$ , called generalized permeability, together with the Maxwell and Born-Infeld terms, respectively. In both scenarios, from the minimization of the energy functional, we obtain general expressions for the minimum energy of the field configurations, as well as for the respective BPS equations, which depend directly on the structure of the permeabilities. We analyze the solutions of the modified models and compare them with the usual solutions, with the aim of identifying and highlighting the modification generated by the introduction of the non-trivial  $G$  functions. Finally, in the context of Maxwell-Chern-Simons electrodynamics, following the same procedure as the Skyrme models, we propose the extension of the model by means of the coupling of a new permeability. Now, the  $G(\chi)$  function depends on an additional scalar field  $\chi$ , whose dynamics is introduced in order to extend the symmetry of the original Lagrangian density, in addition to serving as a source field for vortex solutions.

KEY WORDS: Topological Defects, BPS Formalism, Skyrmions, Vortices, Gauge Theories,

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2 Definições</b>	<b>21</b>
2.1 Noções de Topologia . . . . .	21
2.1.1 Relação de equivalência e classes de equivalência . . . . .	22
2.1.2 Espaços topológicos . . . . .	22
2.1.3 Homotopia . . . . .	23
2.1.4 Grupo Fundamental . . . . .	26
2.1.5 Classificação das soluções . . . . .	27
2.2 Ondas Solitárias, Sólitons e Defeitos . . . . .	28
2.2.1 Ondas Solitárias e Sólitons . . . . .	28
2.2.2 Defeitos Topológicos . . . . .	29
2.3 Modelos Sigma e Skyrme e baby Skyrme puro . . . . .	30
2.4 Métodos Numéricos . . . . .	32
<b>3 Sólitons BPS no modelo restrito de baby Skyrme-Maxwell</b>	<b>33</b>
3.1 O modelo . . . . .	34
3.1.1 O modelo restrito . . . . .	36
3.2 Formalismo BPS . . . . .	38
3.2.1 Descrição do formalismo . . . . .	38

3.2.2	Formalismo BPS aplicado ao modelo baby Skyrme-Maxwell . . . . .	39
3.3	Soluções de primeira ordem . . . . .	43
3.4	Fluxo Magnético . . . . .	45
3.5	Soluções numéricas . . . . .	46
3.5.1	Soluções para $\delta = 2$ . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Sólitons BPS no modelo restrito de baby Skyrme-Born-Infeld</b>	<b>53</b>
4.1	O modelo . . . . .	54
4.2	Formalismo BPS . . . . .	56
4.3	Soluções de primeira-ordem . . . . .	59
4.4	Fluxo Magnético . . . . .	61
4.5	Soluções BPS . . . . .	61
4.6	Soluções Numéricas . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Sólitons BPS no modelo baby Skyrme-Maxwell restrito na presença de permeabilidade magnética</b>	<b>66</b>
5.1	O modelo . . . . .	66
5.2	Formalismo BPS no modelo modificado . . . . .	67
5.3	Soluções de primeira ordem na presença de $G(\varphi_n)$ . . . . .	71
5.4	Fluxo Magnético . . . . .	73
5.5	Soluções Generalizadas . . . . .	74
5.6	Soluções numéricas . . . . .	76
5.6.1	Perfis do campo $B(r)$ . . . . .	79
5.6.2	Perfis para a densidade de energia . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Sólitons BPS no modelo restrito de baby Skyrme-Born-Infeld na presença de uma permeabilidade magnética não trivial</b>	<b>90</b>
6.1	O modelo . . . . .	90
6.2	Formalismo BPS . . . . .	92
6.3	Soluções de primeira-ordem . . . . .	95
6.4	Fluxo Magnético . . . . .	96

6.5	Soluções generalizadas	97
6.6	Soluções numéricas	99
6.6.1	Perfis do campo $B(r)$	102
<b>7</b>	<b>Vórtices Quirais no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs generalizado</b>	<b>107</b>
7.1	Eletrodinâmica quiral	109
7.2	O modelo modificado	112
7.3	Formalismo BPS	113
7.4	Soluções de primeira ordem	117
7.5	O Fluxo Magnético	119
7.6	Soluções Numéricas	120
7.6.1	Soluções de vórtices Quirais	121
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>137</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>140</b>

# Lista de Figuras

2.1	Espaço topológico $X$ . . . . .	24
2.2	Espaço topológico $Y$ . . . . .	24
2.3	Produto entre mapas . . . . .	26
3.1	Solução do campo de Skyrme para $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ , obtidas a partir de (3.85) e (3.86) via as condições de contorno (3.51) e (3.59). . . . .	50
3.2	Solução do campo de Skyrme para $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas a partir de (3.85) e (3.86) e com auxílio das condições (3.51) e (3.59). . . . .	50
3.3	Soluções numéricas para o campo de gauge para valores de $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ a partir de (3.85) e (3.86) e com auxílio das condições de contorno (3.51) e (3.59). . . . .	51
3.4	Soluções numéricas para o campo de gauge $a(r)$ para valores de $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas a partir das equações (3.85) e (3.86) com auxílio das condições de contorno (3.51) e (3.59). . . . .	51
3.5	Soluções do campo magnético $B(r)$ para $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ , obtidas a partir de (3.85) e considerando as condições (3.51) e (3.59). . . . .	51
3.6	Soluções de $B(r)$ para valores de $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas a partir de da equação (3.85) e considerando as condições (3.51) e (3.59). . . . .	51
3.7	Soluções numéricas de $\varepsilon_{bps}(r)$ para $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ , obtidas a partir de (3.56) e considerando as condições (3.51) e (3.59). . . . .	52
3.8	Soluções numéricas de $\varepsilon_{bps}(r)$ para $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas por meio da equação (3.56) e considerando as condições (3.51) e (3.59). . . . .	52
4.1	Soluções de $h(r)$ para $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir de (4.63) e (4.64) e as condições de fronteira (4.43), (4.45) e (4.51). . . . .	64

4.2	Soluções de $a(r)$ para $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir de (4.63) e (4.64) e das condições de contorno (4.43), (4.45) e (4.51). . . . .	64
4.3	Solução numérica de $B(r)$ para valores de $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir da equação (4.54) e considerando as condições (4.45) e (4.51). . . . .	65
4.4	Solução numérica para $\varepsilon_{bps}(r)$ para valores de $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir da equação (4.48) e considerando as condições (4.45) e (4.51). . . . .	65
5.1	Soluções para o campo de Skyrme $h(r)$ para $\alpha = 0.0, 0.50, 0.85$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69). . . . .	77
5.2	Soluções do campo de Skyrme para $\alpha = 1.5, 1.75, 2.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69). . . . .	77
5.3	Soluções do campo de calibre para valores de $\alpha = 0.0, 0.5, 0.85$ , obtidas a partir de (5.68) e (5.69). . . . .	78
5.4	Soluções do campo de calibre para $\alpha = 1.5, 1.75, 2.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69). . . . .	78
5.5	Soluções do campo de Skyrme para $\alpha = 3.0, 3.5, 4.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69). . . . .	78
5.6	Soluções do campo de calibre para $\alpha = 3.0, 3.5, 4.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69). . . . .	78
5.7	Solução do campo magnético para $\alpha = 0$ . . . . .	80
5.8	Solução do campo magnético para $0 < \alpha < 1$ . . . . .	81
5.9	Solução do campo magnético para $\alpha = 1$ . . . . .	82
5.10	Solução do campo magnético para $1 < \alpha < 3$ . . . . .	83
5.11	Solução do campo magnético para $\alpha \geq 3$ . . . . .	83
5.12	Solução da densidade de energia magnética para $\alpha = 0$ . . . . .	85
5.13	Solução da densidade de energia magnética para $0 < \alpha < 1$ . . . . .	86
5.14	Solução da densidade de energia magnética para $\alpha = 1$ . . . . .	87
5.15	Solução da densidade de energia magnética para $1 < \alpha < 2$ . . . . .	88
5.16	Solução da densidade de energia magnética para $\alpha = 2$ . . . . .	88
5.17	Solução da densidade de energia magnética para $\alpha > 2$ . . . . .	89

6.1	Soluções do campo de Skyrme para $0 < \alpha < 1$ obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) via as condições de contorno (6.38) e (6.45). . . . .	101
6.2	Soluções do campo de Skyrme para valores de $1 < \alpha < 2.01$ obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) e das condições de contorno (6.38) e (6.45). . . . .	101
6.3	Soluções do campo de calibre para $0 < \alpha < 1$ , obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) via as condições de contorno (6.38) e (6.45). . . . .	102
6.4	Soluções do campo de gauge $a(r)$ para valores de $1 < \alpha < 2.01$ obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) e com auxílio das condições de contorno (6.38) e (6.45). . . . .	102
6.5	Soluções do campo magnético para $0 < \alpha < 1$ obtidas a partir da equação (6.59). . . . .	105
6.6	Soluções do campo magnético para $1 < \alpha < 2.01$ obtidas a partir de (6.59). . . . .	105
6.7	Soluções da densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ para $0 < \alpha < 1$ obtidas a partir de (6.42). . . . .	106
6.8	Soluções da densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ para valores de $1 < \alpha < 2.01$ obtidas a partir de (6.42). . . . .	106
7.1	Soluções para o campo de Higgs $g(r)$ obtidas a partir das equações (7.90), (7.91) e (7.92) via as condições de contorno (7.64) e (7.66). . . . .	124
7.2	Soluções para o campo de Higgs $g(r)$ para valores de $r_0$ variando no intervalo, $0 \leq r_0 \leq 1.95$ . . . . .	124
7.3	Soluções para o campo de calibre $a(r)$ obtidas a partir das equações (7.90), (7.91) e (7.92) via as condições de contorno (7.64) e (7.66). . . . .	124
7.4	Soluções para $B(r)$ obtidas de (7.90), (7.91) e (7.92), considerando (7.64) e (7.66). . . . .	125
7.5	Valores assumidos pelo campo magnético $B(r)$ na origem em função do parâmetro $r_0$ . . . . .	125
7.6	Valores dos segundos máximos do campo $B(r)$ e suas respectivas localizações em função de $r_0$ . . . . .	126
7.7	Soluções de $A_0$ obtidas a partir (7.92) e considerando (7.64) e (7.66). . . . .	126
7.8	Valores do potencial escalar $A_0$ na origem em função do parâmetro $r_0$ . . . . .	126
7.9	Solução para $E(r)$ obtidas a partir (7.92) e (7.69) e considerando as condições (7.64) e (7.66). . . . .	127

7.10	Valores do primeiro máximo do campo elétrico e a suas respectivas posições em função de $r_0$ .	127
7.11	Valores dos segundos máximos de $E(r)$ e suas respectivas localizações em função de $r_0$ .	128
7.12	Soluções para $\varepsilon_G(r)$ obtidas de (7.78) e considerando as condições (7.64) e (7.66).	129
7.13	Valores da densidade de energia $\varepsilon_G(0)$ na origem em função de valores crescentes de $r_0$ .	129
7.14	Soluções para o campo de Higgs $g(r)$ obtidas a partir das equações (7.90), (7.91) e (7.92) via as condições de contorno (7.64) e (7.66).	133
7.15	Soluções para o campo de calibre $a(r)$ obtidas a partir das equações (7.111), (7.112) e (7.113) e das condições (7.64) e (7.66).	133
7.16	Soluções para $B(r)$ obtidas a partir de (7.112), (7.111),(7.113) e considerando (7.64), (7.66).	134
7.17	Valores do máximo do campo magnético e suas respectivas localizações em função de $r_0$ .	134
7.18	Soluções para $A_0(r)$ obtidas de (7.113) e considerando as condições (7.64), (7.66).	134
7.19	Valores da amplitude do potencial escalar $A_0(r)$ em função do parâmetro $r_0$ .	134
7.20	Solução para $E(r)$ obtidas a partir (7.113) e (7.69) e considerando as condições (7.64) e (7.66).	135
7.21	Valores da amplitude do campo elétrico $E(r)$ para valores crescentes de $r_0$ .	135
7.22	Valores das posições dos máximos do campo elétrico $E(r)$ em função do parâmetro $r_0$ .	135
7.23	Solução para $\varepsilon_G(r)$ obtidas a partir (7.78) e considerando as condições (7.64) e (7.66).	136
7.24	Valores da amplitude da densidade energia $\varepsilon$ em função de valores crescentes de $r_0$ .	136

# Capítulo 1

## Introdução

A Teoria de Campos (clássicos, quânticos e quânticos-relativísticos) descreve a maior parte das interações físicas conhecidas. Um campo é uma quantidade físico-matemática responsável por transmitir as interações. No contexto atual, o Modelo Padrão das interações fundamentais é baseado na ideia de que para cada tipo de interação fundamental existe um campo associado, e cada partícula conhecida associada ao campo surge das excitações desses campos. Como exemplo, podemos citar o Eletromagnetismo. A interação eletromagnética é transmitida pelo fóton que é a partícula mediadora da interação.

Podemos pensar num campo como uma “máquina” que ocupa uma posição no espaço-tempo e produz, neste ponto, um objeto que representa uma “amplitude” naquele ponto [1]. Desse modo, uma teoria de campos clássicos descreve um sistema físico dotado de infinitos graus de liberdade, cujos os campos descrevem quantidades físicas e são definidos, em cada ponto, pelas coordenadas  $x^\mu$  do espaço-tempo. A nível clássico, o formalismo mais usado para descrever a Teoria Clássica de Campos é a formulação lagrangiana (ou hamiltoniana) para sistemas contínuos. A teoria é, portanto, descrita por quantidade denominada densidade lagrangiana, que é função dos campos e de suas respectivas derivadas. A partir do princípio da ação mínima, obtemos as equações de campo (EDPs) que governam a dinâmica da teoria e conseqüentemente fornecem as soluções do sistema.

No âmbito das teorias de campos não-lineares, destacamos as soluções das equações de campos denominadas de defeitos. Os defeitos são configurações de energia localizada e que estão intimamente relacionados ao fenômeno da quebra espontânea de uma simetria contínua

(local ou global) de um sistema físico [2]. Eles possuem importantes aplicações em várias áreas da física, como em sistemas de Matéria Condensada [3, 4], biologia [5, 6], Cosmologia [2, 7] e na Física de Partículas.

Ainda no contexto das teorias de campo não-lineares destacamos as ondas solitárias que, assim como os defeitos, são soluções das equações de campo. Em particular, as ondas solitárias são estruturas que apresentam densidade de energia localizada, energia finita e possuem a característica de se propagarem sem perder a sua forma [8]. Uma classe particular dessas ondas são os sólitons, que possuem característica adicional de, após interagir com outro sóliton, não sofrem deformação, recuperando a sua forma original ao fim do processo; ou seja, um sóliton é uma solução estável. Além disso, eles não dissipam energia, embora possa ocorrer uma mudança de fase das ondas.

Tanto defeitos quanto sólitons se dividem em duas classes distintas: os topológicos e os não topológicos [9]. Os defeitos (e sólitons) topológicos são aqueles possuem uma estrutura topológica que garante a estabilidade da solução. Por outro lado, os defeitos (e sólitons) não topológicos não apresentam uma estrutura topológica, de modo que sua estabilidade é garantida em relação a outros critérios.

A topologia é uma área da matemática que trata de classificar espaços. Um espaço é dito ser topológico se ele satisfaz um conjunto de propriedades estabelecidas. A importância do estudo da topologia no contexto da teoria de campos reside na classificação das soluções das equações de campo, e especialmente, no entendimento da sua estabilidade. Dois espaços topológicos são equivalentes se é possível deformar um no outro por meio de deformação contínua. Desse modo, existe uma relação de equivalência ou uma “medida de equivalência” entre os espaços [10].

Entre os anos de 1960 e 1970, houve um grande esforço da comunidade científica em estudar as soluções não-lineares das equações de campos clássicos, principalmente no cenário da física das interações fortes; pois devido a estabilidade, as soluções de sólitons possuíam uma estrutura matemática adequada que as credenciaram a serem candidatas a descrever partículas clássicas da teoria [11]. No entanto, é importante entender que as “partículas” obtidas a partir das equações de campos clássicos são diferentes das partículas elementares, que surgem das excitações ondulatórias dos campos [12]. Na verdade, temos que interpretar essas partículas como resultado das oscilações dos campos devido a sua natureza não-linear.

De modo geral, os defeitos e sólitons são oriundos da solução das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. Porém, em configurações campo estacionárias, eles podem ser obtidos a partir da resolução de um sistema de equações de primeira ordem. E. B. Bogomol'nyi [13] em 1976 e Prasad e C. M. Sommerfield [14], desenvolveram um método que permite obter sólitons e defeitos a partir da solução de equações de primeira ordem, que ficaram conhecidas como equações BPS, cuja as soluções satisfazem as equações de Euler-Lagrange, sendo, portanto, soluções legítimas do sistema.

O método BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) consiste em reescrever a densidade de energia como uma soma de quadrados perfeitos e um termo de derivada total. A partir da integração da densidade de energia sobre todo o espaço, obtemos a energia total da configuração. Em seguida, com o objetivo de minimizar a energia total, impomos que os termos quadráticos na integral sejam nulos. Desse modo, encontramos dois resultados importantes: o limite inferior para a energia da configuração, a energia BPS, que é proporcional ao grau topológico  $N$ ; e as equações diferenciais de primeira ordem, as equações BPS, que saturam o limite BPS. Portanto, as soluções de sólitons são estáveis, no sentido que minimizam a energia e são proporcionais a carga topológica.

Esta tese foi desenvolvida da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos as noções de topologia, as definições de ondas solitárias, sólitons e defeitos (topológicos e não-topológicos), e os modelos Sigma, Skyrme e baby Skyrme puro. O objetivo desse capítulo é fornecer a base para compreensão dos capítulos seguintes.

No capítulo 3 apresentamos uma revisão detalhada sobre o estudo de sólitons no modelo baby Skyrme calibrado [15]. Em particular, com foco em configurações regulares, com simetria rotacional e independentes do tempo, implementamos a prescrição de Bogomol'nyi. A partir do método BPS, buscamos minimizar a energia total do modelo, a partir obtemos não só as equações de primeira ordem, mas também o limite mínimo para o valor da energia propriamente dita. De posse das equações BPS, obtenho as soluções numericamente do modelo usando as condições iniciais apropriadas. O objetivo principal desse capítulo é apresentar as soluções BPS usuais construídas para o do modelo de Skyrmion planar, destacando as principais características e motivações das soluções de skyrmions BPS. Estas soluções servirão como referência a ser utilizada durante o processo de introdução dos resultados originais apresentados nesta

tese.

No capítulo 4, apresenta-se uma revisão sobre o estudo de soluções de equações de campo não-lineares no contexto da Eletrodinâmica de Born-Infeld. Aqui, motivado pelo trabalho [16], investigamos as principais características das soluções de sólitons planares. Devido a generalização proposta pelo modelo de Born-Infeld, é necessário implementar um formalismo BPS estendido, capaz de fornecer a estrutura adequada para existência soluções de energia mínima. De fato, as soluções estáveis para essa configuração de campo existem, dentro de um intervalo definido.

No Capítulo 5, apresentamos o primeiro resultado original da nossa pesquisa. Aqui, propomos a generalização do modelo baby Skyrme-Maxwell [15] por meio do acoplamento de uma função não-trivial junto ao setor eletromagnético. A função  $G(\varphi_n)$  representa uma permeabilidade magnética generalizada e caracteriza um meio magnético, donde, procedendo com a nossa abordagem, obteremos nossas soluções BPS. O estudo de configurações estendidas via funções não-triviais é amplamente investigado na literatura [17–22]. No contexto de teorias de campos escalares, modelos desse tipo são usados para simular restrições geométricas em soluções do tipo kink [23], cujos perfis das soluções imitam os resultados experimentais que justificam a influência das restrições na magnetização de um material magnético [24–26]. Em teorias com campos de calibre, como em [27–29], onde a presença da permeabilidade modifica o perfil do campo magnético (em relação às soluções usuais) adicionando estruturas internas às soluções das equações de campo. Funções dielétricas são empregadas no estudo de confinamento e desconfinamento de quarks e glúons em teorias taquiônicas; neste caso, a função dielétrica  $G$  de cor cria uma interação forte entre os quarks e glúons na matéria taquiônica, o que possibilita empregar a teoria da QCD, como feito em [30]. O objetivo desse estudo é obter soluções de skyrmions que saturam o limite BPS, para isso, assim como no modelo usual, é necessário considerar uma função auxiliar  $W$  denominada de superpotencial. Seguindo com o procedimento, obtemos: a energia total, reescrita em termos dos quadrados perfeitos, o termo de derivada total, e uma equação diferencial de primeira ordem, a equação do superpotencial, da qual podemos derivar dois cenários distintos, que geram soluções de sólitons BPS. A partir da minimização do funcional de energia, deriva-se a energia mínima (BPS) e as equações BPS, que dependem da escolha da permeabilidade  $G(\varphi_n)$ . A partir da fixação da permeabi-

lidade, obtem-se as soluções numéricas que devem apresentar perfis distintos das soluções do modelo usual. As modificações geradas por  $G(\varphi_n)$  são interpretadas como uma resposta do meio magnético à presença do campo de calibre  $A_\mu$ . Os resultados deste capítulo resultaram em uma publicações no Physical Review D [31]

- Restricted baby Skyrme-Maxwell theory in a magnetic medium: BPS configurations and some properties. J. Andrade, Rodolfo Casana, E. da Hora, and A.C. Santos, [Phys. Rev. D110, 056005\(2024\)](#);

No capítulo 6, apresentamos a segunda contribuição original da nossa pesquisa. A proposta é introduzir a mesma permeabilidade abordada no capítulo anterior,  $G(\varphi_n)$ , agora acoplada ao setor eletromagnético não-linear do modelo de Born-Infeld. Assim como procedi nos capítulos anteriores, apliquei o formalismo BPS a fim de encontrar as soluções de sólitons planares, agora no modelo mais amplo. Por fim, as soluções obtidas saturam o limite BPS, sendo, portanto, estáveis e de energia mínima. Como esperado, as novas soluções apresentam, como outrora visto, perfis distintos dos usuais. Finalmente, no capítulo 7 apresentamos o terceiro resultado original desta pesquisa: a obtenção de vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs imersa em um meio quiral<sup>1</sup>, cujas propriedades eletromagnéticas são descritas pelo termo de Chern-Simons e um campo neutro escalar, cujo acoplamento com o setor eletromagnético é modulado por uma função não-trivial  $G(\chi)$ , denominada de permeabilidade magnética generalizada [32]. Em particular, com foco em configurações regulares e possuidoras de simetria rotacional e independentes do tempo; procedo à implementação da prescrição de Bogomol’nyi, buscando a minimização da energia total do cenário efetivo, a partir da qual obtenho não só as equações BPS, mas também o limite mínimo para o valor da energia total propriamente dita. Resolvo as equações BPS numericamente com o auxílio de condições de contorno apropriadas e, a partir disso, ressalto as principais características das soluções.

Os resultados desse capítulo resultaram em uma segunda publicação no Physical Review D [33]

- BPS chiral vortices in Maxwell-Higgs electrodynamics. J. Andrade, Rodolfo Casana and E. da Hora, [Phys. Rev. D111, 036019\(2025\)](#).

---

<sup>1</sup>Um meio é dito ser quiral quando os objetos que o constitui não podem ser sobrepostos a suas imagens espelhadas

No Capítulo 8, encerramos o trabalho apresentando as conclusões dos resultados originais obtidos na pesquisa, e as perspectivas de futuras investigações tanto nos modelos baby Skyrme: puro, baby Skyrme-Maxwell e Bor-Infeld-Skyrme; quanto nos modelos de Maxwell e Chern-Simons acoplados ao campo de Higgs.

# Capítulo 2

## Definições

### 2.1 Noções de Topologia

A topologia tem origem do estudo das noções de limite e continuidade de funções [34]. Ela é um ramo da matemática e possui um papel importante na descrição de muitos sistemas físicos, como em Teoria de Campos, Física da Matéria condensada, e em Sistemas Físicos não-lineares. Ao longo do seu desenvolvimento, a topologia foi dividida em quatro campos: a Topologia Geral ou Topologia de conjunto de pontos, que generaliza o conceito de continuidade na definição dos espaços topológicos; a Topologia Combinatória, que estuda as propriedades dos espaços topológicos a partir do conceito de invariantes topológicos [35]; a Topologia Algébrica, que investiga os conceitos de homotopia e homologia e os conecta com os espaços topológicos [36,37]; e a Topologia Diferencial, que estuda as propriedades de variedades diferenciáveis invariantes por difeomorfismos.

Portanto, a proposta da topologia é classificar os espaços de acordo com uma “medida”. Cada tipo de topologia usa uma “medida” diferente para classificar o espaço em estudo. Nesta seção, trataremos de alguns conceitos fundamentais em Topologia, com ênfase na relação de Homotopia, que possui papel importante no tratamento das soluções de defeitos e sólitons topológicos.

### 2.1.1 Relação de equivalência e classes de equivalência

Uma relação de equivalência  $\sim$  é uma relação binária definida num conjunto e que satisfaz as seguintes propriedades

- (i)  $a \sim a$ , reflexiva;
- (ii) Se  $b \sim a$ , então  $a \sim b$ , simetria;
- (iii) Se  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , então  $a \sim c$ , transitiva.

Dado um conjunto  $X$  e uma relação de equivalência  $\sim$ , temos que  $X$  é dividido em subconjuntos mutualmente disjuntos (conjuntos com interseção vazia). Uma classe de equivalência é definida como um subconjunto formado por todos os elementos de  $x \in X$ , que possuem uma relação de equivalência com  $a$ . Uma classe é definida como

$$[a] = \{x \in X | x \sim a\}, \quad (2.1)$$

ou seja, é composta por todos os elementos de  $X$  tal que  $x \sim a$ .

O conjunto de todas as classes é denominado de espaço quociente, representado por  $X/\sim$ . O elemento  $a$  ou qualquer outro da classe  $[a]$  é chamado de representante da classe  $[a]$ . Como exemplo, consideremos um grupo  $G$  e um subgrupo  $H$ , tal que  $H \subset G$ . Sendo  $g$  e  $g' \in G$  e introduzindo a relação de equivalência  $g \sim g'$  se existir um  $h \in H$ , tal que  $g' = gh$ . Denotamos a classe de equivalência  $[g] = \{gh | h \in H\}$  por  $gH$ . A classe  $gH$  é chamada de classe lateral à esquerda (left coset) e satisfaz  $gH \cap g'H = \emptyset$  ou  $gH = g'H$ . Caso a relação  $ghg^{-1} \in H$  para qualquer  $g \in G$  e  $h \in H$ , dizemos que o subconjunto  $H$  é um subgrupo normal de  $G$  e o espaço quociente  $G/H$  forma um grupo, chamado de grupo quociente, onde o produto  $[g] * [g'] = [gg']$  define a operação do grupo. De modo análogo, podemos definir o conceito de classe lateral à direita (right coset). O grupo quociente também é uma classe de equivalência.

O conceito de classes laterais possui aplicações em áreas da Física, das quais destacamos seu papel na Cosmologia [38], em teorias de calibre superssimétricas [39], e no estudo de geometria não comutativa [40].

### 2.1.2 Espaços topológicos

Na seção anterior, definimos relações de equivalência entre elementos de um conjunto  $X$ . No entanto, não mencionamos qual a natureza deste conjunto. A partir deste ponto nos referiremos

a  $X$  como sendo um espaço topológico, cuja estrutura será dada a seguir.

Sendo  $X$  um conjunto de elementos representados por  $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^k \mathcal{T}_i$ , uma coleção de subconjuntos abertos de  $X$ , tal que  $\mathcal{T}$  contém:

- 1  $\emptyset$  e  $X \in \mathcal{T}$ ;
- 2 O conjunto união de quaisquer subconjuntos (finitos ou infinitos) abertos em  $\mathcal{T}$ . Ou seja,  $\mathcal{T}$  é fechado por uniões arbitrárias;
- 3 A intersecção de quaisquer subconjuntos finitos e abertos em  $\mathcal{T}$ ; isto é,  $\mathcal{T}$  é fechado por intersecções finitas.

O par  $(X, \mathcal{T})$  (ou somente  $X$ ) é denominado *espaço topológico* e  $\mathcal{T}$  é chamada de topologia em  $X$  [41, 42]. A topologia pode ser classificada de acordo com a coleção dos conjuntos abertos em  $X$ . A topologia é classificada de trivial quando  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ . Se  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{T}$  corresponder a todos os subconjuntos de  $X$ , então  $\mathcal{T}$  é denominada de topologia discreta. Em ambas as propriedades (1)-(3) são satisfeitas.

### 2.1.3 Homotopia

#### Grupos

Um conjunto de elementos  $G$  representados por  $G = a, b, c, \dots \equiv G, *$  em que é definido uma operação binária  $(*)$ , é denominado de Grupo se seus elementos satisfazem às propriedades a seguir.

1. Para todo  $a, b \in G$ ,  $a * b = c \in G$  (Fechamento)
2. Quaisquer elementos  $g_1, g_2$  e  $g_3 \in G$ ,  $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$  (Associatividade);
3. Existe um elemento  $I \in G$ , tal que  $g * I = I * g = g$ , para todo  $g \in G$  ( $I$  é o elemento identidade);
4. Existe um elemento  $g^{-1} \in G$ , tal que  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = I$ , para todo  $g \in G$  ( $g^{-1}$  é o Elemento Inverso de  $g$ ).

O número de elementos de  $G$  determina a ordem do grupo. Se  $G$  possui um número finito de elementos, logo ele possui ordem finita. Por outro lado, caso ele possua infinitos elementos, sua ordem é infinita. Além disso, os seus elementos podem ser parâmetros discretos ou contínuos.

Ainda em relação aos elementos, podemos classificar os grupos em relação a propriedade da comutatividade. Um grupo  $G$  é dito ser comutativo (ou Abelian) se para todo  $g_1, g_2 \in G$ , tem-se  $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ . Caso essa propriedade não for verificada, o grupo é denominado não comutativo (ou não Abelian).

## Homotopia

Na subseção anterior, vimos que uma relação de equivalência divide um manifold  $X$  em um conjunto de subconjuntos não disjuntos, os quais definem uma classe de equivalência.

A Homotopia é um tipo de relação de equivalência que classifica mapas entre um ou mais espaços topológicos. Para compreendermos seu significado, vamos analisar as figuras abaixo.

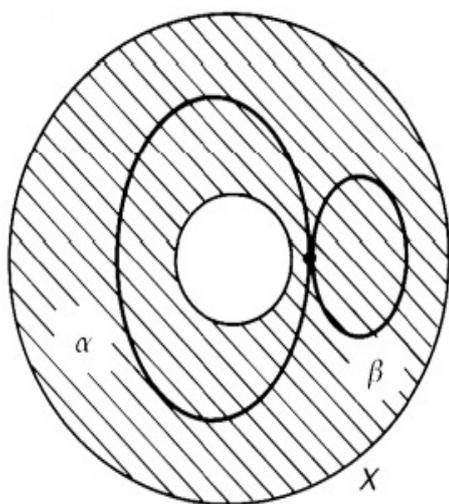


Figura 2.1: Espaço topológico  $X$

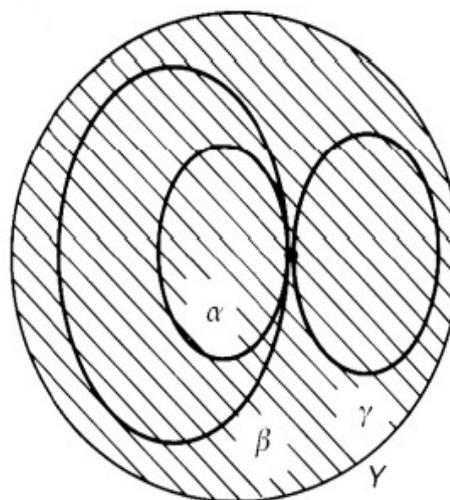


Figura 2.2: Espaço topológico  $Y$

Nas figuras (2.1) e (2.2), temos dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  nos quais definimos caminhos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . O que caracteriza a diferença entre os espaços topológicos?

Na figura 2.1, o loop  $\beta$  pode ser continuamente deformado a um ponto. Contudo, o mesmo processo não pode ser realizado no loop  $\alpha$ , pois existe um buraco no seu interior ( $X$  é uma

região não conexa). Em contrapartida, na figura (2.2), todos os loops podem ser continuamente deformados a um ponto, pois  $Y$  é simplesmente conexo. Portanto, os loops em  $Y$  são ditos homotópicos a um ponto e formam uma classe de homotopia (classe de equivalência dos loops).

Na figura (2.2) existe somente uma classe de homotopia associada com o espaço topológico  $Y$ . Por outro lado, em  $X$ , cada classe de homotopia é identificada por um número  $N \in \mathbb{Z}$  denominado de windind number, que corresponde ao numero de vezes que o loop circunda o buraco. Quando a orientação é no sentido horário  $N < 0$ ; enquanto que no sentido anti-horário  $N > 0$ . Além disso, o grupo  $\mathbb{Z}$  é aditivo com uma operação de grupo definida (+) e possui um significado geométrico: a operação  $N + M$  corresponde a circundar o buraco  $N$  vezes e depois  $M$  vezes.

## Homotopia de caminho

Em um espaço topológico  $X$ , um caminho é uma função contínua do tipo  $f(t) : \Upsilon \mapsto X$  no intervalo  $\Upsilon = [0, 1]$  com  $t \in I$ . Caso  $f(t)$  satisfaça a condição  $f(0) = x_0$  e  $f(1) = x_1$ , sendo  $x_0$  e  $x_1$  os pontos inicial e final de  $f(t)$ , então ela é denominada de *homotopia de caminho* ou *caminho* em  $X$ . Se tivermos um caminho do tipo  $f(0) = f(1) = x_0$ , temos uma estrutura de loop com ponto base  $x_0$ .

Em particular, para  $x \in X$  e  $I$  um mapa identidade em  $X$ , um caminho constante  $c_x$  é definido por  $I : \Upsilon \mapsto X$ , de modo que  $I(t) = x$  para qualquer valor de  $t$  no intervalo  $\Upsilon = [0, 1]$ . Este ultimo resultado implica que o mapa  $I$  compõem trivialmente um loop, pois  $I(0) = I(1) = x$ , que tem como ponto base um  $x$  arbitrário.

Dois caminhos quaisquer  $g(t)$  e  $h(t)$  em  $X$  definidos por  $g(t), h(t) : \Upsilon \mapsto X$  que possuam os mesmos pontos iniciais e finais são ditos ser equivalentes se existe um mapa contínuo  $H(s, t) : \Upsilon \times \Upsilon \rightarrow X$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} H(0, t) = g(t), \\ H(1, t) = h(t). \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} H(s, 0) = g(0) = h(0) = x_0, \\ H(s, 1) = g(1) = h(1) = x_1, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

na qual  $s$  é o parâmetro de deformação contínua. Se as condições acima são satisfeitas, dizemos que  $g(t)$  e  $h(t)$  são *homotópicas* ou *homotopicamente equivalentes*.

Quando  $x_0 = x_1$  os caminhos  $g(t)$  e  $h(t)$  formam loops com ponto base  $x_0$ , satisfazendo as

condições a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} H(0, t) = g(t), \\ H(1, t) = h(t). \end{array} \right. e \left\{ \begin{array}{l} H(s, 0) = g(0) = h(0) = x_0, \\ H(s, 1) = g(1) = h(1) = x_0, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

que possuem uma estrutura de grupo.

Portanto, o mapa contínuo  $H(s, t)$  é uma relação de equivalência entre os caminhos (abertos ou fechados) definidos em espaço topológico. Ela estabelece uma relação de homotopia entre esses os caminhos e os classifica nas chamadas classes de homotopia.

### 2.1.4 Grupo Fundamental

Na seção anterior, definimos um caminho como um mapa  $f(t) : \Upsilon \mapsto X$ , caso  $f(0) = x_0$  e  $f(1) = x_1$  ou  $f(0) = f(1) = x_0$ , no espaço topológico  $X$ . Agora, vamos analisar a estrutura de grupo desses caminhos. Seja  $X$  um espaço topológico, os mapas  $g(t), h(t) : \Upsilon \mapsto X$  com  $t \in \Upsilon$ , formam um caminho tal que  $g(0) = h(1)$ . O produto entre os mapas é dado por

$$p(t) \equiv (g * h)(t) = \begin{cases} g(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

que descreve o caminho ilustrado na figura (2.3).

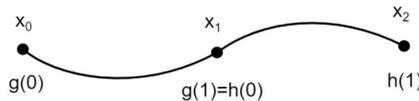


Figura 2.3: Produto entre mapas

A composição  $(g * h)(t)$  é subdividida em dois caminhos: os caminhos  $g(t)$  e  $h(t)$  que correspondem, respectivamente, aos caminhos de  $[x_0, x_1]$  e  $[x_1, x_2]$ .

Definimos o elemento inverso de  $g(t)$  como  $g^{-1}(t) = g(1 - t)$  e corresponde ao caminho partindo de  $x_1$  a  $x_0$ . Sendo  $p(t), g(t)$  e  $h(t) \in K$ , a propriedade associativa é satisfeita, pois

$$[p(t) * g(t)] * h(t) = p(t) * [g(t) * h(t)]. \quad (2.5)$$

O elemento identidade é especificado pelo mapa identidade  $I : \Upsilon \mapsto X$ , com  $I(t) = x \forall t \in \Upsilon$  no intervalo  $\Upsilon = [0, 1]$  e  $x \in X$ , define um caminho constante. Porém, analisando as expressões

a seguir

$$g^{-1}(t=0) = g(1) = g^{-1}(t)|_{x_0}, \text{ em } t=0, \quad (2.6)$$

$$g^{-1}\left(t = \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g^{-1}(t)|_{x_1}, \text{ em } t = \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

observamos que a existência de dois elementos de identidade ao longo do caminho, ou seja,

$$g(t) * g^{-1}(t)|_{x_0} \equiv I_{x_0}, \text{ em } t=0, \quad (2.8)$$

$$g(t) * g^{-1}(t)|_{x_1} \equiv I_{x_1}, \text{ em } t = \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Desse modo, o (2.8) e (2.9) violam as propriedades de grupo (2) e (3). Portanto, concluí-se que classes de equivalência de caminhos abertos, tais como (2.4), não possuem uma estrutura de grupo.

Em particular, caminhos do tipo  $f(t) : \Upsilon \mapsto X$  com mesmos pontos iniciais e finais  $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ , são denominados loops com ponto base em  $x_0$ . O conjunto formado por todas as classes de homotopia do loops  $[f]$  possui uma estrutura de grupo, ao qual chamamos de *grupo fundamental* ou *primeiro grupo de homotopia*  $\pi_1(X, x_0)$ .

### 2.1.5 Classificação das soluções

Em teorias de campos escalares, usa-se duas técnicas para classificar as soluções de sólitons. A primeira é a homotopia, que relaciona: caminhos percorridos em um espaço topológico  $X$  (homotopia de caminho); e mapas entre dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ . Em ambos, interpreta-se a homotopia como uma relação de equivalência entre os caminhos e os espaços topológicos [43].

A segunda técnica é a teoria do grau topológico. O grau topológico definido é para um mapa  $\Omega : X \rightarrow Y$ , entre dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ , que são diferenciáveis, contínuos, conectados e de mesma dimensão. O grau topológico,  $\deg \Omega$ , de uma configuração de campo, é um número inteiro que quantifica quantas vezes um espaço pode ser “coberto por outro”. Além disso, é um invariante topológico, pois não muda por uma deformação contínua. Na descrição de partículas,  $\deg \Omega$  responsável por identificar o tipo e a energia da partícula a ele associada. Considerando um mapeamento do tipo  $\Omega : S^n \rightarrow S^m$ ; se  $\Omega$  está na  $N$  –ésima classe de homotopia do grupo  $\pi_n(S^n)$ . Então,  $\deg \Omega = N$ , em que  $N$  é o winding number.

Para configurações de campo com  $N = 0$ , temos um mapa homotópico a um ponto, isto é, os mapas associados aos campos são deformados a um único ponto, o que caracteriza uma topologia trivial. Nesse caso, a energia associada ao sóliton é nula, e eles não são estáveis [12]. Quando  $N = 1$ , a configuração possui um valor de energia mínima e, portanto, estável, pois não pode decair em uma configuração de topologia trivial. A densidade de energia é suave e localizada em uma região do espaço; a solução para este cenário é denominada de sóliton topológico (ou sóliton). Associado ao sóliton temos os antisólitons, que possuem  $N = -1$ . Quando os sólitons e antisólitons são oriundos de modelos integráveis; a interação entre o não alteram a forma dos sólitons (e antisólitons). Por outro lado, em modelos não integráveis, a interação entre o par sóliton-antisóliton pode gerar a aniquilação dessas quantidades.

Para valores de  $N > 1$ , as soluções são denominadas de multisólitons. Nesses casos, dois comportamentos são possíveis: o primeiro consiste em decair num estado ligado de  $N$  sólitons; ou serem decompostos em  $N$  sólitons de carga topológica  $N = 1$ .

## 2.2 Ondas Solitárias, Sólitons e Defeitos

### 2.2.1 Ondas Solitárias e Sólitons

As ondas solitárias foram primeiramente observadas em 1834, pelo engenheiro civil e arquiteto naval John Scott Russell (1808-1882), no canal da união em Edimburgo, na Escócia. Na ocasião, Russell estudava o modelo de barco mais viável para navegação no canal, quando observou um pulso que se propagava com uma velocidade constante e sem perder a sua forma por uma longa distância através do canal. Observando a particularidade do fenômeno, Russell passou a reproduzi-lo a fim de analisar suas propriedades. Em 1845, os resultados das pesquisas de Russell foram publicados na British Association for the Advancement of Science [44].

Em 1895, Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) e Gustav de Vries (1866-1934), propuseram uma equação diferencial parcial, a equação KdV [45], que serve de modelo matemático para descrever completamente as ondas solitárias observadas por Russell; seu estudo leva ao entendimento das ideias por trás do conceito de sóliton [46]. Apesar do resultado significativo fornecido pela equação KdV, as ondas solitárias foram consideradas, por muito tempo, soluções sem relevância das equações não-lineares.

A justificativa para o perfil constante das ondas solitárias resulta do equilíbrio estável de dois efeitos: a não-linearidade e a dispersão. O primeiro tende a localizar a onda, estreitando o pulso; enquanto o segundo tende a espalhá-la. O balanço dinâmico entre esses dois efeitos garante uma estabilidade a onda solitária [46]. Por outro lado, na ausência de um desses efeitos, a possibilidade de existências de ondas solitárias não é possível [47].

Os sólitons são uma classe particular de ondas solitárias que possuem a característica adicional que o distingue das demais ondas solitárias: eles viajam com velocidade constante e preservam sua forma (exceto por uma mudança de fase) sem perder energia mesmo após interagir com outros sólitons. Essa característica específica dos sólitons está associada ao conceito de integrabilidade [48]. Um modelo integrável é aquele no qual podemos definir infinitas quantidades conservadas [49, 50]. Exemplos de modelos cujas as soluções fornecem sólitons integráveis são: equação KdV, Equação de Schrodinger não-linear e modelo Sine-Gordon.

Em relação a topologia, os sólitons podem ser classificados em dois tipos: os topológicos e os não-topológicos. Os sólitons topológicos são aqueles em que a condição de contorno para os campos no infinito é diferente daquela na origem. Além disso, é necessária a existência de estados de vácuo degenerados. Assim, a carga topológica associada a configuração,  $Q_{top}$ , é diferente de zero, uma vez que é escrita em termos dos valores dos campos nas fronteiras. Exemplos de sólitons topológicos são: kinks [51], vórtices [52, 53] e monopólos magnéticos [54, 55]. Por outro lado, os sólitons não-topológicos são caracterizados por condições de fronteiras definidas no mesmo ponto; assim, não existe a necessidade de vácuos não-degenerados [56]. Esses sólitons possuem carga topológica  $Q_{top} = 0$ . Como exemplo temos: os Q-balls que foram introduzidos em [57], e em [58] foram empregadas no contexto de extensões supersimétricas do modelo padrão.

### 2.2.2 Defeitos Topológicos

Os defeitos topológicos são configurações estáveis de matéria que surgem devido a quebras de simetria, espontâneas ou explícitas, em sistemas físicos devido a fatores como transições de fase e potenciais que induzem a quebra. Simetrias espontaneamente quebradas surgiram inicialmente no contexto da matéria condensada, sendo posteriormente empregada na descrição da física de partículas e na cosmologia. Assim como os sólitons, essas estruturas possuem densidade

de energia localizada e energia total finita, além de serem classificados como topológicos ou não-topológicos.

Existem vários tipos de defeitos topológicos que estão relacionados com a topologia, ao tipo de quebra de simetria, e a dimensão em que essas configurações surgem. Por exemplo, defeitos chamados de kinks ocorrem em  $(1 + 1)$ -dimensões espaço-temporal em modelos descritos com campos escalares e por uma função não-negativa  $V$ , denominada de potencial. Em  $(2 + 1)$ -dimensões espaço-temporais temos o surgimento de defeitos denominados vórtices que podem ser de dois tipos: os globais, que são caracterizados por um campo escalar complexo e quebra de simetria  $U(1)$  global; e locais, quando os campos escalares estão acoplados ao campo de calibre e existe a quebra da simetria  $U(1)$  local.

Em  $(3 + 1)$ -dimensões espaço-temporais temos os skyrmions, que surgem da quebra da simetria  $SO(4)$  para  $SO(3)$  no espaço interno dos campos. Devido a quebra, essas soluções apresentam uma estrutura vácuo degenerada munida de uma topologia não trivial [2].

Nesta tese, vamos estudar defeitos topológicos e sólitons topológicos no contexto das teorias de campos clássicos, e suas respectivas soluções clássicas.

## 2.3 Modelos Sigma e Skyrme e baby Skyrme puro

Uma classe de teorias de campos que fornece soluções do tipo sólitons é o modelo  $O(N)$  não-linear, descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\varphi} \cdot \partial^\mu \vec{\varphi} - V(\varphi), \quad (2.10)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Para formular o modelo, parametriza-se o campo  $\vec{\varphi} = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ , como um vetor de um espaço interno. Assim, os campos escalares  $\vec{\varphi}_i$  são definidos como mapas de um espaço-tempo de  $(d - 1)$ -dimensões espaço-temporais para um manifold alvo de Riemann que, neste caso, é uma esfera unitária em  $(S^{N-1})$ -dimensões. Além disso, cada eixo no espaço interno corresponde a uma componente do campo  $\vec{\varphi}$ . Na densidade lagrangiana, (2.10) o termo  $V(\varphi)$ , que chamaremos de potencial, é uma função positiva definida que não contém termos de derivada dos campos. Em particular, considerando o modelo com três campos,  $N = 3$ , na

ausência do potencial de auto-interação, obtemos o modelo sigma  $O(3)$  definido por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\varphi} \cdot \partial^\mu \vec{\varphi}, \quad (2.11)$$

com  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ . Os modelos sigma possuem diversas aplicações em física; por exemplo, na matéria condensada, ele descreve o limite contínuo entre o modelo antiferromagnético de Heisenberg e o efeito Hall Quântico [59].

Uma generalização do modelo sigma em  $(3+1)$ -dimensões espaço-temporais foi proposta em [60], a qual as soluções foram denominadas de Skyrmons. A teoria de Skyrme é uma teoria efetiva de baixas energias que foi desenvolvida como uma alternativa para estudar as propriedades físicas de hádrons e núcleos na Cromodinâmica Quântica [61]. Um Skyrmon é uma solução em regime estático de uma equação de campo não-linear que descreve as três componentes dos campos de píons [62]. Os píons fazem parte do grupo do mésons, que são partículas de matéria do tipo hadrônica e possuem spin inteiro (bósons). Os mésons, assim como os bárions (spin semi-inteiro) interagem predominantemente por meio força nuclear forte com os prótons e nêutrons.

A densidade lagrangiana que descreve o modelo de Skyrme é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\varphi} \cdot \partial^\mu \vec{\varphi} - \frac{\lambda^2}{2} (\partial_\mu \vec{\varphi} \times \partial_\nu \vec{\varphi})^2, \quad (2.12)$$

onde, além do termo sigma, temos um termo de ordem quatro nas derivadas denominado de termo de skyrme, que é necessário para garantir soluções regulares em dimensões espaço-temporais maiores que 1 [12]. O modelo de Skyrme é invariante perante o grupo de de rotações  $SO(3)$ .

O acoplamento da teoria de Skyrme com o campo eletromagnético é realizado por meio do calibramento do grupo  $U(1)$  de  $SO(2)$ . Esse modelo efetivo deve ser entendido como uma tentativa de entender as propriedades eletromagnéticas dos skyrmons. A interação com o campo de calibre abeliano é crucial para a descrição das propriedades dos núcleos atômicos. Como exemplo, em [63], a teoria de Skyrme-Maxwell, apesar de apresentar uma grande dificuldade matemática, foi empregada para prever a diferença de massa entre protón e nêutron.

Em particular, a versão  $(2+1)$ -dimensões espaço-temporais do modelo de Skyrme foi investigada inicialmente em [64–67] e em [68], onde atribuiu-se o nome de baby Skyrme. O modelo

planar serve de laboratório teórico para analisar muitos aspectos da teoria original. A densidade lagrangiana que descreve o modelo é similar a do modelo original, acrescida de um termo proporcional ao campo de Skyrme, denominado de potencial  $V(\varphi)$ , e é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\varphi} \cdot \partial^\mu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\varphi} \times \partial_\nu \vec{\varphi})^2 - \mu^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\varphi}). \quad (2.13)$$

O potencial é responsável por: permitir a quebra espontânea da simetria e, combinado ao termo de Skyrme, fornece uma escala para o modelo, ou seja, garante soluções de sólitons estáveis [69]. O interesse nesse modelo reside na semelhança com o modelo original e na aplicação em física da matéria condensada, na descrição de sistemas Hall quânticos [70, 71] e na formação das redes cristalinas [72, 73].

## 2.4 Métodos Numéricos

As soluções de vórtices e Skyrmions apresentadas nessa tese foram obtidas através da resolução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, na qual as variáveis destas são os campos que definem a teoria. Em todos os capítulos, as soluções são obtidas numericamente com o auxílio dos Softwares: Maple 18 e Wolfram Mathematica 13.3. Os métodos numéricos empregados para resolver o sistema de equações acopladas foram o Método de diferenças finitas [74] e Runger-Kutta.

Do capítulo 3 ao capítulo 6, as soluções de Skyrmions foram obtidas por meio a resolução numérica das EDO's acopladas dada as condições de contorno apropriadas, via Wolfram Mathematica 13.3 e usando o pacote NDSolve. Em particular, NDSolve é um método iterativo que escolhe, de acordo com o sistema de equações, um método apropriado para obter as soluções desse sistema. Em nosso caso, foi empregado o método numérico Runger Kutta de 4 ordem, que funciona calculando a solução através de um conjunto de passos, cada qual envolvendo uma combinação ponderada de avaliações da função derivada, isto é, avalia a derivada da função em vários pontos dentro do passo escolhido [75].

No capítulo 7, empregamos Método de Diferenças finitas. Este método consiste em aproximar a derivada de uma função por meio de diferenças finitas, que consistem em fórmulas discretas que exigem um conjunto finito de pares ordenados  $\sum_{i=1}^n x_i, f(x_i)$ . A ideia central é

substituir as derivadas das funções por expressões de diferenças finitas e, desse modo, transformar a equação diferencial em um sistema de equações algébricas lineares ou não-lineares.

## Capítulo 3

# Sólitons BPS no modelo restrito de baby Skyrme-Maxwell

A teoria proposta por T. Skyrme [60] é um modelo efetivo de baixas energias que generaliza os modelos sigma não-linear em  $(3+1)$ -dimensões espaço-temporais. Inicialmente, o modelo foi proposto para descrever propriedades físicas de hádrons e núcleos na Cromodinâmica Quântica (QCD) [76], e suas soluções são chamadas de Skyrmons. O modelo em duas dimensões foi introduzido em [68]. Neste capítulo, vamos estudar a versão planar acoplada ao campo de calibre abeliano  $A_\mu$ .

Skyrme apresentou o primeiro defeito topológico tridimensional surgindo em uma teoria de campo não linear, e propôs um papel potencialmente credível para tais soluções na física de partículas. A ideia original era explorar a natureza semelhante a partículas dos estados de defeito (devido a estabilidade topológica) para fornecer uma descrição do espectro observado de excitações de partículas [2].

O primeiro termo corresponde a lagrangiana da teoria de Maxwell livre, o segundo termo trata-se da versão calibrada do termo sigma  $O(3)$ , e terceiro termo é a versão calibrada do termo de Skyrme e o último termo corresponde ao potencial. A densidade lagrangiana (3.3) possui quatro parâmetros:  $g$  que representa o acoplamento forte do campo de calibre e possui dimensão de inverso comprimento;  $v$  uma constante adimensional;  $\lambda$  uma constante com dimensão de comprimento, e  $\mu$  que possui dimensão de inverso de comprimento.

Na densidade lagrangiana (2.12), o termo de Skyrme  $(\partial_\mu \vec{\varphi} \times \partial_\nu \vec{\varphi})^2$ , é necessário para estabilizar as soluções. Contudo, no modelo calibrado, a presença do termo de Skyrme não é obrigatória para que haja soluções bem comportadas. O termo de Maxwell fornece o mesmo comportamento de escala do termo de Skyrme; ou seja, é possível obter boas soluções sem a presença do termo de Skyrme calibrado,  $(D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2$ . Essa possibilidade é abordada em [77]. Por outro lado, em [78], investiga-se soluções do modelo baby Skyrme sem a presença do potencial de auto-interação.

### 3.1 O modelo

O modelo baby Skyrme é uma teoria de campos não-linear em  $(2 + 1)$ -dimensões espaço-temporais no espaço de Minkowski e suporta soluções de sólitons topológicos estáveis, conhecidos como baby Skyrmions. Essa teoria é a uma versão planar da teoria de Skyrme em  $(3 + 1)$ -dimensões espaço-temporais. A justificativa para estudar o modelo em dimensão reduzida é devido ao interesse de obter soluções estáveis, o que exige a presença de termos que forneçam uma escala (de tamanho) para o sóliton, e conseqüentemente estabilizem a solução.

Com o interesse em investigar as propriedades eletromagnéticas do campo de Skyrme planar, J. Gladyskoski [79], propôs a versão calibrada do modelo baby Skyrme, onde o acoplamento entre o campo de Skyrme e o campo de calibre abeliano foi feito por meio da derivada covariante

$$D_\alpha \vec{\varphi} = \partial_\alpha \vec{\varphi} + A_\alpha \vec{n} \times \vec{\varphi}. \quad (3.1)$$

A lagrangiana do modelo baby Skyrme-Maxwell é escrita como

$$L = E_0 \int d^2x \mathcal{L}, \quad (3.2)$$

em que  $E_0$  tem dimensão de energia e define a escala de energia da configuração. Em nosso modelo, fixaremos  $E_0 = 1$ . A  $\mathcal{L}$  é dada seguir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{v^2}{2} D_\mu \vec{\varphi} \cdot D^\mu \vec{\varphi} - \frac{\lambda^2}{2} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - \mu^2 V. \quad (3.3)$$

O primeiro termo em (3.3) é a contribuição usual de Maxwell. O segundo termo trata-se da versão calibrada do termo sigma  $O(3)$ . O terceiro é termo de Skyrme (que garante

soluções estáveis no limite do acoplamento eletromagnético nulo) e o último é o potencial de autointeração.

O campo  $\vec{\varphi}$  é chamado de campo de Skyrme e corresponde a um tripleto de campos escalares  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , que estão restritos ao vínculo

$$|\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1, \quad (3.4)$$

ou seja, o espaço interno dos campos descreve uma esfera de raio unitário. O potencial  $V$  é uma função real e não nula da componente normal do campo de Skyrme,  $\varphi_n = \vec{n} \cdot \vec{\varphi}$ ; isto é,  $V = V(\varphi_n)$ , na qual  $\vec{n}$  é um vetor unitário no espaço interno dos campos que define a orientação do campo do pión. Na lagrangiana (3.3),  $\lambda$  e  $1/\mu$  são constantes com dimensão de comprimento, enquanto que  $g$  representa o acoplamento do campo de calibre e também possui dimensão de inverso de comprimento. Além disso, a constante  $v$  é adimensional e multiplica o termo sigma.

Os termos  $\sigma$  e de Skyrme, na lagrangiana (3.3), são invariantes perante o grupo de rotações  $SO(3)$  do espaço interno dos campos. O potencial  $V(\varphi_n)$  é escolhido de modo a quebrar parte desta simetria e preservar a simetria  $SO(2)$  do espaço interno. Além disso, ele deve possuir um valor de vácuo unívoco, ou seja, não degenerados de modo a garantir soluções estáveis. Desejamos configurações que levem o potencial  $V(\varphi_n) \rightarrow 0$  quando o seu valor  $\varphi_n \rightarrow 1$ .

Como  $V(\varphi_n)$  preserva a simetria  $SO(2)$ , e uma vez este grupo de simetria é isomorfo ao subgrupo  $U(1)$ , abre-se a possibilidade implementar uma simetria local por meio da introdução de um campo de calibre abeliano,  $A_\mu$ , com dinâmica regida pelo termo de Maxwell.

Características topológicas são necessárias para classificar sólitons, bem como entender sua estabilidade. As configurações de energia finita são alcançadas quando o campo  $\varphi_n$  atinge seu estado de vácuo, no limite espacial  $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(\vec{r}) = \vec{n}$ . Assumiremos que o vetor  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ , de modo que o valor de vácuo do campo de  $\varphi_n$  é dado por  $\varphi_3 = 1$ . Dessa forma, um ponto no espaço físico de base  $\mathbb{R}^2$  pode ser compactado, o que o torna topologicamente equivalente a uma esfera bidimensional  $S_2^{(esf)}$ . Por outro lado, o espaço interno dos campos também é uma esfera, de raio unitário (3.4), que chamaremos de  $S_2^{(int)}$ . Então, as configurações de campo estáticos e de energia finita podem ser interpretadas como mapas  $\vec{\Psi} : S_2^{(esf)} \rightarrow S_2^{(int)}$ , na qual o caráter

topológico é manifestado por

$$\text{deg}[\vec{\varphi}] = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\vec{r} \vec{\varphi} \cdot (\partial_1 \vec{\varphi} \times \partial_2 \vec{\varphi}) = N, \quad (3.5)$$

onde  $N \in \mathbb{Z}$  representa o winding number (ou carga topológica) da configuração.

### 3.1.1 O modelo restrito

O parâmetro  $v$ , que multiplica o termo sigma, generaliza a densidade lagrangiana (3.3). Uma escolha particular do parâmetro significa restringir o modelo; por exemplo, para  $v = 1$  temos o modelo baby Skyrme original estudado em [68]. Neste capítulo, vamos escolher  $v = 0$ , que corresponde ao modelo investigado em [15]. A densidade lagrangiana é reescrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - \mu^2 V(\varphi_n). \quad (3.6)$$

Nesse capítulo, vamos obter soluções de Skyrmions magnéticos em um meio definido pela função  $G(\varphi)$ ; desse modo, definimos o modelo em  $(2+1)$ -dimensões espaço-temporais, cuja métrica é diagonal e possui a assinatura  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1)$ <sup>1</sup>. Os índices gregos referem-se as coordenadas espaço-temporais, enquanto os índices latinos referem-se as coordenadas espaciais.

Na Física, a ação  $\mathcal{S}$  é uma quantidade escalar que descreve como a energia cinética e energia potencial se comportam quando o sistema físico a qual estão associadas, evolui entre dois estados distintos. A ação é um funcional definido como a integral da função Lagrangiana,

$$\mathcal{S} = \int L dt, \quad (3.7)$$

ou, em termos da densidade lagrangiana

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^D x dt, \quad (3.8)$$

onde  $L = \mathcal{L} d^D x$  e o índice  $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Em nossa abordagem, a ação  $\mathcal{S}$  corresponde a integral da densidade lagrangiana (3.6), sobre todo o espaço-tempo

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}_{SM}(A_\mu, \partial_\beta A_\mu, \varphi, \partial_\rho \varphi) d^2 x dt, \quad (3.9)$$

em que  $D = 2$ .

---

<sup>1</sup>Adotaremos essa convenção se estende também aos demais capítulos da tese.

O modelo possui dois campos: um escalar real, representado pelo campo de Skyrme  $\varphi(r)$ ; e um vetorial, representados pelo campo de calibre  $A_\mu(r)$  que interage com o campo de calibre por meio da função dielétrica  $G(\varphi_n)$ .

Um funcional é uma função real cujo o domínio é composto por outras funções, e que associa um número real a cada função a qual está definido. O cálculo variacional lida exatamente com o problema de determinar os extremos desses funcionais. A função densidade lagrangiana é um exemplo de funcional que depende dos campos  $A_\mu$  e  $\varphi$ , e suas derivadas. Aplicando o princípio variacional a  $\mathcal{L}_{SM}$  buscamos obter soluções para os campos que levam a um valor estacionário para a ação (3.9), ou seja

$$\delta\mathcal{S} = 0, \quad (3.10)$$

ou

$$\delta\mathcal{S}(\alpha) = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\alpha}d\alpha = 0,$$

implica na seguinte condição para integral

$$\left. \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (3.11)$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro de minimização.

O resultado da condição (3.11) é determinado por meio de uma diferenciação funcional da integral da ação em relação ao parâmetro  $\alpha$ . Ao fim do processo, a fim de satisfazer a condição (3.11), somos conduzidos as seguintes equações:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \partial_\beta \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\mu)} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\rho \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\varphi)} \right), \quad (3.12)$$

As equações (3.12) são as equações de Euler-Lagrange que determinam a dinâmica do sistema. Portanto, a partir da minimização do funcional  $\mathcal{S}$ , obtemos as equações de campo da teoria, cujas soluções minimizam a própria ação  $\mathcal{S}$ . São elas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g^2 j^\nu, \quad (3.13)$$

$$\lambda^2 D_\mu J^\mu = -\mu^2 \frac{\partial V}{\partial(\varphi_n)} (\vec{n} \times \vec{\varphi}). \quad (3.14)$$

na qual  $j^\nu = \vec{n} \cdot J^\nu$  é a densidade de corrente elétrica conservada, com

$$J^\mu = \lambda^2 D_\nu \vec{\varphi} [\vec{\varphi} \cdot (D^\mu \vec{\varphi} \times D^\nu \vec{\varphi})]. \quad (3.15)$$

Estamos interessados em estudar soluções estacionárias, isto é, independentes do tempo. Desse modo, assumindo configurações estáticas (campos sem dependência temporal), obtemos a Lei de Gauss

$$\partial_i (\partial^i A^0) = g^2 J^0, \quad (3.16)$$

onde  $J^0 = \lambda^2 A^0 [(\vec{n} \cdot \partial^i \vec{\varphi})(\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi})]$  é a densidade de carga elétrica conservada. Notamos que a Lei de Gauss (3.16) é satisfeita identicamente se impomos como solução o gauge temporal (estático)  $A_\mu = (0, A^i)$ . A escolha do gauge implica em configurações de campo eletricamente neutras, isto é, possuidoras de campo elétrico nulo. A lei de Ampère é escrita como

$$\partial_i B = g^2 J_i, \quad (3.17)$$

com  $B = -\epsilon_{ij} \partial_i A_j$  e densidade de corrente espacial

$$J_i = -\lambda^2 \partial_i \vec{\varphi} \cdot [\vec{\varphi} \cdot (D_1 \vec{\varphi} \times D_2 \vec{\varphi})]. \quad (3.18)$$

## 3.2 Formalismo BPS

### 3.2.1 Descrição do formalismo

Em 1976, E. B. Bogomol'nyi, buscando solucionar o problema da estabilidade de soluções de campos clássicos, publicou um artigo [13], em que apresentou um método eficaz para obtenção dessas soluções clássicas. O método consiste em reescrever o funcional de energia da configuração como a soma de quadrados perfeitos e um termo de derivada total; em seguida, a fim de obter a energia mínima da configuração, impõem-se o cancelamento dos termos quadráticos. Do procedimento obtém-se: o limite inferior para energia da configuração de campo, e equações de primeira ordem, que fornecem as soluções do sistema. A vantagem no método implementado por Bogomol'nyi situa-se em:

- A energia mínima é proporcional a carga topológica;
- A energia mínima é obtida mesmo não conhecendo as soluções das equações de primeira ordem;

- As equações de primeira-ordem satisfazem as equações de campo de segunda ordem, fornecendo, portanto, soluções legítimas do sistema.

No artigo, Bogomol’nyi empregou o método inicialmente para soluções do tipo parede de domínio, estendendo posteriormente para soluções do tipo linha de vórtice, monopólos magnéticos e dyrons.

No entanto, Bogomol’nyi não foi o primeiro a investigar soluções de campos clássicos por meio do método de completar quadrados. Em 1975, M. K. Prasad e Charles M. Sommerfeld publicaram um artigo [14] onde aplicam o mesmo método para obter soluções estáveis para monopólos de ’t Hooft–Polyakov e do Dyon de Julia-Zee, no limite em que a razão entre as massas dos campos vetoriais e escalares tende a zero. Por esse motivo, o método ficou conhecido formalismo BPS, e o limite de energia mínima, atingido ao minimizar a energia total, denominou-se de “limite de Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfeld (limite BPS)”.

### 3.2.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo baby Skyrme-Maxwell

Nesta seção, buscamos implementar o formalismo BPS ao modelo restrito de baby Skyrme Maxwell (3.6), a fim de obtermos o limite inferior para a energia da configuração, bem como as equações de primeira ordem (equações BPS) que fornecerão as soluções numéricas do modelo. Para tal, inicialmente escrevemos o tensor de energia momento, que é dado por

$$\mathcal{T}_{\nu\rho} = -\frac{1}{g^2}F_{\mu\nu}F^\mu{}_\rho - \lambda^2 (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\lambda \vec{\varphi}) (D^\mu \vec{\varphi} \times D_\rho \vec{\varphi}) - \eta_{\nu\rho} \mathcal{L}. \quad (3.19)$$

A componente temporal do tensor de energia momento é igual a densidade de energia do modelo, ou seja

$$\varepsilon = \mathcal{T}_{00} = -\mathcal{L}, \quad (3.20)$$

a partir da qual, usando (3.6), obtemos

$$\varepsilon = \frac{1}{2g^2}B^2 + \frac{\lambda^2}{2}Q^2 + \mu^2 V(\varphi_n), \quad (3.21)$$

em que

$$Q = \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) + \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}). \quad (3.22)$$

A densidade de energia deve anular-se quando  $r \rightarrow \infty$ ; o que exige que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} B = 0, \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} Q = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} V = 0. \quad (3.23)$$

A energia total da configuração de campo é dada pela integral da densidade de energia sobre o espaço. De forma explícita, escrevemos

$$E_{tot} = \int \varepsilon(r) d^2r. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.21) na integral, obtemos

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{1}{2g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \mu^2 V(\varphi_n) \right\} d^2r. \quad (3.25)$$

A implementação do formalismo BPS depende da adição das funções auxiliares  $b(\varphi_n)$  e  $Z(\varphi_n)$ , que serão determinadas adiante.

Desse modo, podemos reescrever (3.25) como

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm Z)^2 \mp \frac{Bb}{g^2} - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 \mp \lambda^2 Z \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 Z A_i (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}) + \mu^2 V \right\} d^2r. \quad (3.26)$$

O penúltimo termo de (3.26) pode ser reescrito como uma derivada total. Para isso, impomos a condição

$$Z (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}) = \partial_j W, \quad (3.27)$$

onde a  $W = W(\varphi_n)$ . A função  $Z(\varphi_n)$  assume a seguinte forma

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \varphi_n} = W_{\varphi_n}. \quad (3.28)$$

Desse modo, usando o resultado (3.28), podemos escrever (3.26) como

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \frac{Bb}{g^2} - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 [\partial_j (A_i W) - W (\partial_j A_i)] + \mu^2 V \right\} d^2r. \quad (3.29)$$

ou, distribuindo os termos nos colchetes

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W) \pm \lambda^2 \epsilon_{ij} W \partial_j A_i \mp \frac{Bb}{g^2} - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 + \mu^2 V \right\} d^2r. \quad (3.30)$$

Usando a definição do campo magnético  $B = \epsilon_{ij}\partial_j A_i = -\epsilon_{ij}\partial_i A_j$ , escrevemos

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{1}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \right. \\ \left. \pm \lambda^2 W B \mp \frac{Bb}{g^2} - \frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 + \mu^2 V \right\} d^2 r \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2 r \partial_j (A_i W). \quad (3.31)$$

A energia deve ser um quantidade bem definida somente em termos da carga topológica de um termo de derivada total dos campos. Assim, os termos extras que aparecem na energia devem ser cancelados para garantir soluções de energia mínima. Logo, os termos da segunda linha devem satisfazer

$$\mp \frac{Bb}{g^2} \pm \lambda^2 W B = 0, \quad (3.32)$$

e

$$-\frac{b^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 + \mu^2 V = 0. \quad (3.33)$$

Da equação (3.32), encontramos expressão para a função  $b(\varphi_3)$

$$b = g^2 \lambda^2 W. \quad (3.34)$$

E de (3.33), obtemos o potencial de auto-dual.

$$V(\varphi_n) = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} W_{\varphi_n}^2 + \frac{g^2 \lambda^4}{2\mu^2} W^2. \quad (3.35)$$

A equação (3.35) pode ser considerada uma equação do superpotencial, cuja solução  $W(\varphi_n)$  depende da vizinhança do estado de vácuo do campo de Skyrme. Estruturas análogas a (3.35) são encontradas no contexto de paredes de domínio auto-gravitantes [80–82] e em modelos de inflação de campos escalares [83–85], nos quais  $W(\varphi)$  é determinado em termos de um potencial  $V(\varphi)$  para um campo escalar real  $\varphi$ . A partir desse ponto chamaremos a função  $W(\varphi_n)$  de superpotencial do campo de Skyrme.

O superpotencial  $W(\varphi_n)$  é construído de modo a satisfazer as condições de fronteira do potencial  $V(\varphi_n)$ , isto é,  $\lim_{\varphi_n \rightarrow 1} V(\varphi_n) = 0$ . Assim, devemos impor que as condições sobre  $W(\varphi_n)$ ,

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} W(\varphi_n) = 0, \quad (3.36)$$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} W_{\varphi_n}(\varphi_n) = 0, \quad (3.37)$$

sejam satisfeitas a fim de obtermos soluções finitas.

A energia total do modelo restrito se reduz a

$$E_{tot} = \int d^2r \varepsilon = E_0 + E_{bps} \pm \int d^2r \lambda^2 \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W), \quad (3.38)$$

com

$$E_0 = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} (B \pm g^2 \lambda^2 W)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \right\}, \quad (3.39)$$

e

$$E_{bps} = \mp \lambda^2 \int d^2r W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}). \quad (3.40)$$

A última integral em (3.38),

$$\mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2r \partial_j (A_i W) = 0, \quad (3.41)$$

devido as condições de contorno do superpotencial (3.36 e 3.37), ou seja, não contribui para a energia total. Portanto,

$$E_{tot} = \int d^2r \varepsilon(r) = E_0 + E_{bps}. \quad (3.42)$$

O campo de Skyrme  $\vec{\varphi}$  define um mapeamento  $\vec{\Phi}$  do espaço físico  $\mathbb{R}^2$  em uma superfície esférica  $S_2^{(int)}$  de raio unitário. Desse modo, levando em conta que o espaço interno dos campos também é uma superfície esfera de raio unitário  $S_{int}^2$ , temos que  $\vec{\varphi}$  é um mapa

$$\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_{int}^2. \quad (3.43)$$

O limite inferior da energia é alcançado quando os campos possuem configurações que levam  $E_0 = 0$ , isto é,

$$E \geq E_{bps}. \quad (3.44)$$

A equação (3.44) é a energia mínima da configuração que é alcançada quando os campos atingem seus valores de vácuo. Em [86] é mostrado que o integrando da equação (3.40) é totalmente análogo ao elemento de superfície esférica  $dS_{int}$  no espaço interno dos internos do campos; desse modo, podemos escrever

$$E_{tot} \geq E_{bps} = \mp 4\pi \lambda^2 N \langle W_{\varphi_n} \rangle, \quad (3.45)$$

com

$$\langle W_{\varphi_n} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int dS_{int} W_{\varphi_n}. \quad (3.46)$$

No limite BPS, a energia será a mínima possível quando a contribuição da integral (3.39) for nula. Para tal é necessário que o conjunto de equações de primeira ordem sejam satisfeitas

$$B \pm g^2 \lambda^2 W = 0, \quad (3.47)$$

$$Q \pm W_{\varphi_n} = 0, \quad (3.48)$$

que são as equações auto-duais do modelo. Vale destacar que as equações auto-duais satisfazem as equações de Euler-Lagrange (3.13) e (3.14), ou seja, são soluções legítimas do sistema.

### 3.3 Soluções de primeira ordem

Nesta seção, vamos investigar as soluções de sólitons estacionários do modelo (3.6) no limite BPS. Adotando o mesmo ansatz usado em [68], buscamos estudar soluções independentes do tempo e com simetria radial

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(N\theta) \sin f(r) \\ \sin(N\theta) \sin f(r) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas no plano,  $N$  é o winding number (3.5) do campo de Skyrme e  $f(r)$  é uma função arbitrária que satisfaz as condições de contornos topológicas. Assumimos que  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  de modo que  $\varphi_n = \varphi_3$ . Para o campo de calibre consideramos

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_i = -\epsilon_{ij} \hat{x}_j \frac{Na(r)}{r}, \quad (3.50)$$

com  $\hat{x}_j = (\cos \theta, \sin \theta)$  representa o vetor unitário do plano. A função  $a(r)$ , assim como  $f(r)$ , deve obedecer condições de fronteira.

As soluções de Skyrme devem ser regulares, isto é, livre de divergências. Para tal, é preciso que as funções arbitrárias  $f(r)$ ,  $a(r)$  e  $W(r)$  satisfaçam as seguintes condições de contorno

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad (3.51)$$

onde  $W_0$  é uma constante que será definida a posteriori. A fim de facilitar o desenvolvimento numérico das soluções, adotaremos a redefinição feita em [15] para o campo de Skyrme

$$\varphi_3 = \cos f(r) = 1 - 2h(r), \quad (3.52)$$

onde  $h(r)$  satisfaz

$$h(0) = 1. \quad (3.53)$$

O campo magnético  $B = \epsilon_{ij} \partial_j A_i$ , escrito em termos do ansatz (3.50) é escrito como

$$B = -\frac{N}{r} \frac{da(r)}{dr}. \quad (3.54)$$

A equação do superpotencial (3.35) é uma equação de primeira ordem que a princípio fornece uma família de soluções  $W_{\varphi_n}$  possíveis. Contudo, queremos garantir que (3.35) possua uma solução única. Para tal, temos que assumir a existência de uma solução local que satisfaça a condição de vácuo do potencial e seja válida no intervalo  $\varphi_3 \in [-1, 1]$ . Dessa maneira, o limite BPS (3.45) é atingido, pois  $W_{\varphi_n}$  e  $\langle W_{\varphi_n} \rangle$  passam a ter soluções unívocas.

A energia BPS calculada explicitamente considerando ansatz é dada por

$$E \geq E_{bps} = \mp 2\pi N W(0) = \mp 2\pi \lambda^2 N W_0, \quad (3.55)$$

no qual  $W_0 = 1/\lambda^2 > 0$ . A energia BPS é uma quantidade positiva definida, desse modo, o sinal superior corresponde a  $N < 0$  e os sinais inferiores,  $N > 0$ .

No limite BPS, a densidade de energia (3.21) assume a forma

$$\varepsilon = \frac{1}{g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{4} \left( \frac{dW}{dh} \right)^2, \quad (3.56)$$

onde usamos (3.47) e (3.48). Percebe-se que a densidade de energia BPS possui duas contribuições

$$\varepsilon_{bps}(r) = \varepsilon_B(r) + \varepsilon_W(r), \quad (3.57)$$

na qual  $\varepsilon_B(r)$  é a contribuição do setor magnético e  $\varepsilon_W(r)$  é a contribuição do setor escalar.

A equação do superpotencial (3.35), torna-se

$$V(h) = \frac{\lambda^2}{8\mu^2} W_h^2 + \frac{g^2 \lambda^4}{2\mu^2} W^2. \quad (3.58)$$

com  $W_h = dW/dh$ . No limite assintótico,  $r \rightarrow \infty$ , o estado de vácuo da teoria é atingido; as condições de contorno que garantem soluções regulares e de energia finita são

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dh}{dr} = 0, \quad (3.59)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{da}{dr} = 0, \quad (3.60)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dW}{dr} = 0. \quad (3.61)$$

As equações BPS (3.47) e (3.48) escritas em termos dos Ansatz (3.49) e (3.50), tornam-se

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = \pm g^2 \lambda^2 W, \quad (3.62)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = \pm \frac{\partial W}{\partial h}. \quad (3.63)$$

### 3.4 Fluxo Magnético

Nesta seção, mostraremos como o fluxo magnético associado a um sóliton esfericamente simétrico depende da escolha do superpotencial. Desse modo, uma escolha  $W$  permite obter o valor de  $\Phi$ . Partindo da definição de fluxo magnético, escrevemos

$$\Phi_B = \int d^2r B(r) = 2\pi \int r dr B(r). \quad (3.64)$$

Usando a definição (3.54), escrevemos  $\Phi$  como

$$\Phi_B = -2\pi N a_\infty, \quad (3.65)$$

na qual usou-se as condições de contorno para o campo de calibre. O parâmetro  $a_\infty$  é uma constante que está de acordo com a condição  $\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a_\infty$ . A princípio, não existe restrições aos valores de  $a_\infty$ , o que levaria a um fluxo magnético não-quantizado. Contudo, é possível reescrever  $\Phi_B$  em termos de  $W(h)$ , e assim encontrar uma condição para o qual o fluxo torna-se quantizado. Para encontrar tal condição, vamos inicialmente dividir (3.62) por (3.63), que resulta em

$$\frac{1}{(1+a)} \frac{da}{dr} = \frac{4g^2 \lambda^2 W}{W_h} \frac{dh}{dr}. \quad (3.66)$$

A seguir, definimos a função  $F(h)$  como

$$F_h \equiv \frac{4W}{W_h}. \quad (3.67)$$

Reescrevendo (3.66), obtemos

$$\frac{1}{(1+a)} \frac{da}{dr} = g^2 \lambda^2 F_h \frac{dh}{dr}. \quad (3.68)$$

Em seguida, integrando em ambos os lados, chegamos a expressão

$$\ln C(1+a) = g^2 \lambda^2 F(h), \quad (3.69)$$

com

$$F(h) = \int_0^h F_h dh', \quad (3.70)$$

e  $C$  é uma constante de integração. Aqui, assumimos que no intervalo  $[0, 1]$  a função  $W_h \neq 0$ , o que implica que  $F(h)$  exista e seja finita no mesmo intervalo. Assim usando  $h(0) = 1$  e  $a(0) = 0$ , obtemos

$$a_\infty = -1 + \exp(-\lambda^2 g^2 F(1)). \quad (3.71)$$

Desse modo, o fluxo magnético (3.65), torna-se

$$\Phi_B = 2\pi N [1 - \exp(-\lambda^2 g^2 F(1))], \quad (3.72)$$

em que

$$F(1) = \int_0^1 \frac{4W}{W_h} dh'. \quad (3.73)$$

O resultado (3.72) mostra que o fluxo magnético depende do valor das constantes do modelo. Fixando o parâmetro  $\lambda$ ,  $\Phi_B$  passa a depender exclusivamente da constante de acoplamento  $g$ .

No limite do acoplamento fraco ( $g \ll 1$ ), o fluxo magnético assume a seguinte forma

$$\Phi_B \sim 2\pi N \lambda^2 g^2 F(1). \quad (3.74)$$

Por outro lado, no regime de acoplamento forte ( $g \gg 1$ ), o fluxo magnético torna-se

$$\Phi_B \sim 2\pi N \lambda^2. \quad (3.75)$$

Portanto, para valores grandes de  $g$ , o fluxo magnético torna-se efetivamente quantizado.

### 3.5 Soluções numéricas

A equação do superpotencial possui uma solução unívoca e definida pela condição inicial  $W(1) = 0$ ,  $W_h(1) = 0$  no valor de vácuo do potencial,  $\varphi_3 = 1$ . Se tal condição pode ser integrada de modo que a solução cubra todo o intervalo  $-1 \leq \varphi_3 \leq 1$ , então existe um limite BPS bem definido para o modelo em questão. No entanto, para alguns potenciais (e constantes de acoplamento), não podemos integrar a equação (3.58) no intervalo definido, o que implica no não estabelecimento de um limite BPS. A seguir, vamos abordar dois tipos de potenciais que evidenciam os dois cenários possíveis; são eles o “old baby Skyrme” e o “new baby Skyrme”.

O potencial old baby skyrme possui a seguinte estrutura

$$V_o(\varphi_3) = (1 - \varphi_3). \quad (3.76)$$

Este potencial quebra a simetria original  $SO(3)$  em  $SO(2)$ , e possui um vácuo único. Usando a redefinição  $\varphi_3 = 1 - 2h$ , escrevemos

$$V_o(h) = 2h(r). \quad (3.77)$$

Para essa escolha de potencial, a solução da equação do superpotencial existe sobre o intervalo fechado  $h \in [0, 1]$  (ou seja,  $\varphi_3 \in [-1, 1]$ ). Desse modo, concluímos que soluções das equações BPS (3.62) e (3.63) existem e saturam o limite BPS (3.55). De modo geral, para potenciais do tipo  $V_a = V_o^2 = (2h)^a$ , tanto a solução global da equação do superpotencial quanto as soluções de BPS existem para todos os valores de  $a$ .

O potencial “new baby Skyrme” é do tipo

$$V_n = \frac{1}{4} (1 - \varphi_3^2) = h(1 - h), \quad (3.78)$$

que faz parte de uma classe de potenciais que possuem dois vácuos, ou seja, dois pontos que levam  $V_n(h) \rightarrow 0$ . Para estes potenciais, a equação (3.58) não possui uma solução global, pois a integração numérica é impedida devido as singularidades no intervalo  $h \in [0, 1]$ . Portanto, para potenciais como (3.78), não temos soluções solitônicas, uma vez que elas ocorrem unicamente mediante a existência da solução global  $W$ .

No entanto, em modelos baby Skyrme sem a presença do campo de calibre (com  $g = 0$ ), potenciais do tipo new baby Skyrme geram soluções globais para o vínculo (3.58), de modo que as soluções de sólitons existem e conseqüentemente saturam o limite BPS.

Portanto, tendo em vista o cenário descrito pela equação do superpotencial (3.35), podemos proceder por dois caminhos para obter soluções solitônicas que saturam o limite BPS. O primeiro caminho é fixar o potencial  $V(h)$  e em seguida resolver a equação (3.35) numericamente. O segundo caminho é fixar a função superpotencial  $W(h)$ , em seguida determinar o potencial  $V(h)$ , e assim obter as soluções do modelo.

Em nossa investigação, buscamos mostrar que escolhas ajustadas de potenciais, as soluções exatas ocorrem tanto para a equação do superpotencial quanto para as equações BPS. De início,

vamos propor a seguinte solução global para a equação do superpotencial

$$W = \frac{h^\delta}{\lambda^2}, \quad (3.79)$$

a mesma foi adotada em [15], onde o parâmetro  $\delta > 1$  e  $\mu^2 = 1$ . Tal escolha que fornece o seguinte potencial

$$V(h) = \frac{h^{2(\delta-1)}}{2\mu^2\lambda^2} \left( \frac{\delta^2}{4} + g^2\lambda^2 h^2 \right). \quad (3.80)$$

Usando (3.79), reescrevemos as equações de primeira ordem (3.62) e (3.63) como

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = \pm g^2 h^\delta = 0, \quad (3.81)$$

e

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = \pm \frac{\delta h^{\delta-1}}{\lambda^2} = 0. \quad (3.82)$$

O parâmetro  $\delta$  define os tipos de configurações de sólitons do modelo. Em [87], três escolhas de  $\delta$  geram diferentes tipos de sólitons: para  $1 < \delta < 2$  temos sólitons chamados compactons, cujo estado de vácuo é atingido para um valor de  $R$  finito; para  $\delta = 2$  temos soluções de skyrmions localizados que decaem exponencialmente, e para  $\delta > 2$  as soluções de skyrmions são deslocalizadas apresentando decaimento do tipo potência. Nos dois últimos cenários os campos atingem seu valor de vácuo quando  $r \rightarrow \infty$ .

A escolha de (3.79) é interessante pois introduz um potencial que reproduz o cenário descrito por  $V_a = (2h)^a$ , nos quais existem soluções solitônicas. Em (3.80), para valores pequenos da constante de acoplamento  $g$ , o primeiro termo do potencial é dominante e o potencial efetivo torna-se proporcional a  $V \sim h^{2\alpha}$  (old baby Skryme). Porém, se buscamos analisar o comportamento assintótico, ou seja, próximo do valor de vácuo, o primeiro termo do potencial domina, mesmo que o valor da constante  $g$  seja suficientemente grande, pois próximo do vácuo o valor de  $h \rightarrow 0$ . Portanto, a escolha (3.79) gera um potencial que fornece soluções de sólitons topológicos que saturam o limite BPS.

### 3.5.1 Soluções para $\delta = 2$

Em nossa investigação, estamos interessados em analisar as soluções de Skyrmions bem comportados e que apresentam um decaimento do tipo Gaussiano, quando os campos se aproximam dos seus valores assintóticos. Para tal, escolhemos  $\delta = 2$ ; assim o superpotencial (3.79),

o potencial de auto-interação (3.80) e as equações de primeira ordem (3.81 e 3.82) tornam-se, respectivamente:

$$W(h) = \frac{h^2}{\lambda^2}, \quad (3.83)$$

$$V(h) = \frac{h^2}{2\mu^2\lambda^2} (1 + g^2\lambda^2 h^2), \quad (3.84)$$

e

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} + g^2 h^2 = 0, \quad (3.85)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} + \frac{2h}{\lambda^2} = 0, \quad (3.86)$$

onde consideramos os sinais inferiores para os quais  $N > 0$ .

Antes de construirmos as soluções numéricas das equações BPS, faz-se necessário verificar como os campos se comportam tanto na origem quanto no limite assintótico. Desse modo, resolveremos as equações (3.85) e (3.86) nas regiões próximas as fronteira.

Próximo a origem, as soluções para os campos  $a(r)$  e  $h(r)$  são

$$h(r) \approx 1 - \frac{1}{4N} \frac{r^2}{\lambda^2} - \frac{1}{32N^2} \frac{(2g^2\lambda^2 - 1)}{\lambda^4} r^4 + O(r^5), \quad (3.87)$$

e

$$a(r) \approx -\frac{1}{2} \frac{g^2}{N} r^2 + \frac{1}{8} \frac{g^2}{N^2} r^4 + O(r^5). \quad (3.88)$$

A partir da solução aproximada (3.88), escrevemos a expressão para o campo magnético

$$B(r) \approx g^2 - \frac{1}{2} \frac{g^2}{N} r^2 + \frac{g^2}{8N^2\lambda^2} (1 - g^2\lambda^2) r^4 + O(r^5). \quad (3.89)$$

Por fim, a densidade de energia perto da origem, torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_B(r) \approx & g^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{N\lambda^2} \left( g^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \right) r^2 + \left[ \frac{g^2}{4N^2\lambda^4} (2 - g^2\lambda^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{8N^2\lambda^4} (1 - g^2\lambda^2) \right] r^4 + O(r^5). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Por outro lado, no limite assintótico os campos possuem o seguinte comportamento

$$h(r) \approx C_\infty \exp(-\xi r^2), \quad (3.91)$$

e

$$a(r) \approx a_\infty + \lambda^2 g^2 (1 + a_\infty) C_\infty^2 \exp(-2\xi r^2), \quad (3.92)$$

onde  $C_\infty$  é uma constante arbitrária positiva e  $\xi$

$$\xi = \frac{1}{4N\lambda^2(1+a_\infty)}. \quad (3.93)$$

O parâmetro  $\xi$ , presente no argumento nas exponenciais (3.91) e (3.92), corresponde a um coeficiente de massa que está associado ao alcance da interação. A presença do termo massivo implica em uma teoria cuja interação é de menor alcance. Como consequência, o estado de vácuo é atingido mais rapidamente, devido a presença de  $\xi$  [12].

Tendo em vista o cenário restrito caracterizado por (3.83), podemos obter as soluções numéricas para os campos. As figuras (3.1) e (3.2) apresentam as soluções para o campo de Skyrme,  $h(r)$ , para alguns valores da constante de acoplamento. Além disso, as figuras (3.3) e (3.4) ilustram as soluções para o campo de calibre  $a(r)$ , bem como para as figuras (3.5) e (3.6) correspondem as soluções do campo magnético  $B(r)$ . Por fim, nas figuras (3.7) e (3.8), temos soluções para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Os valores da constante de acoplamento são dados por:  $g = 0.1$  (linha preta sólida),  $g = 0.5$  (linha vermelha sólida),  $g = 1.0$  (linha azul sólida),  $g = 1.5$  (linha magenta sólida),  $g = 2.0$  (linha marrom tracejada),  $g = 2.5$  (linha laranja tracejada) e  $g = 3.0$  (linha cinza tracejada). Para todas as soluções fizemos  $N = \lambda = 1$ .

Notamos que, para os valores de  $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$  as soluções decaem exponencialmente até atingir seu estado de vácuo. Por outro lado, a partir de  $g = 2$  as soluções se assemelham aos sólitons compactos descritos em [87].

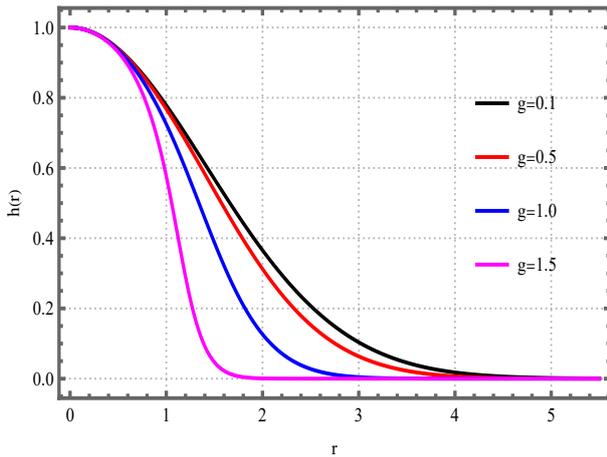


Figura 3.1: Solução do campo de Skyrme para  $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ , obtidas a partir de (3.85) e (3.86) via as condições de contorno (3.51) e (3.59).

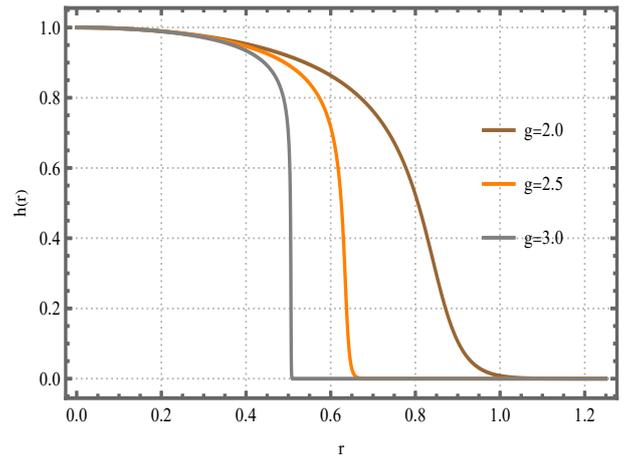


Figura 3.2: Solução do campo de Skyrme para  $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas a partir de (3.85) e (3.86) e com auxílio das condições (3.51) e (3.59).

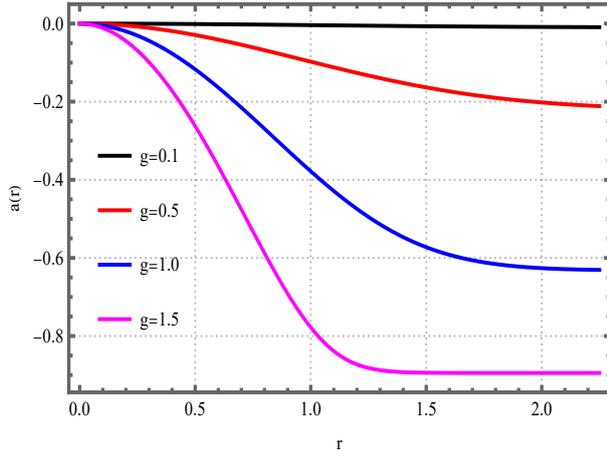


Figura 3.3: Soluções numéricas para o campo de gauge para valores de  $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$  a partir de (3.85) e (3.86) e com auxílio das condições de contorno (3.51) e (3.59).

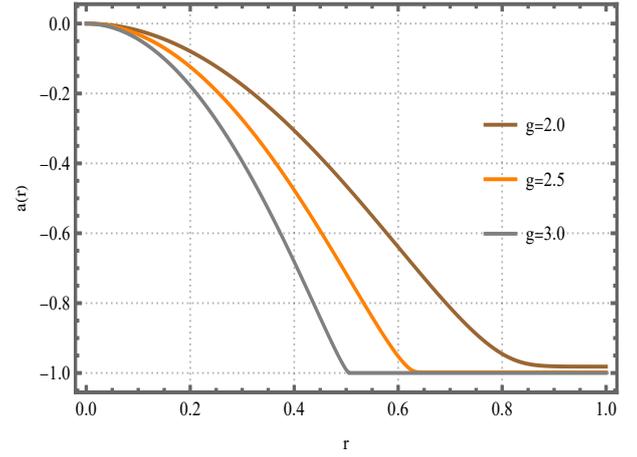


Figura 3.4: Soluções numéricas para o campo de gauge  $a(r)$  para valores de  $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas a partir das equações (3.85) e (3.86) com auxílio das condições de contorno (3.51) e (3.59).

O comportamento das soluções de  $B(r)$  e  $\varepsilon_{bps}(r)$  se assemelham aos perfis de  $h(r)$  e  $a(r)$ . Para os valores de  $0.1 \leq g \leq 1.5$ , as soluções decaem exponencialmente até atingir sua configuração de vácuo. Em contrapartida, para  $g > 2$  os plots se assemelham as soluções de sólitons compactos.

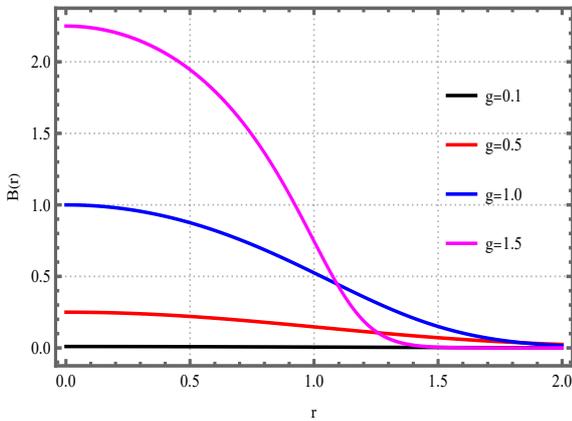


Figura 3.5: Soluções do campo magnético  $B(r)$  para  $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ , obtidas a partir de (3.85) e considerando as condições (3.51) e (3.59).

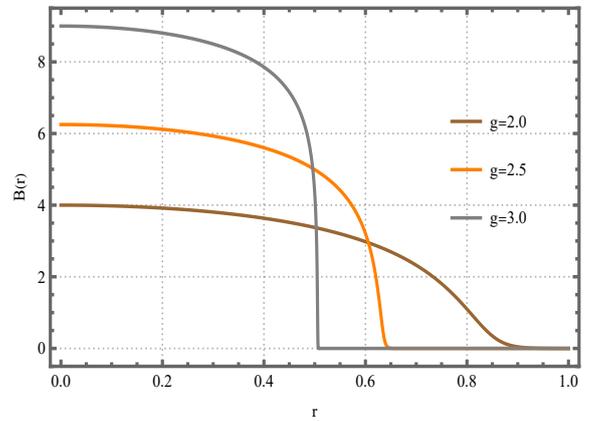


Figura 3.6: Soluções de  $B(r)$  para valores de  $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas a partir de da equação (3.85) e considerando as condições (3.51) e (3.59).

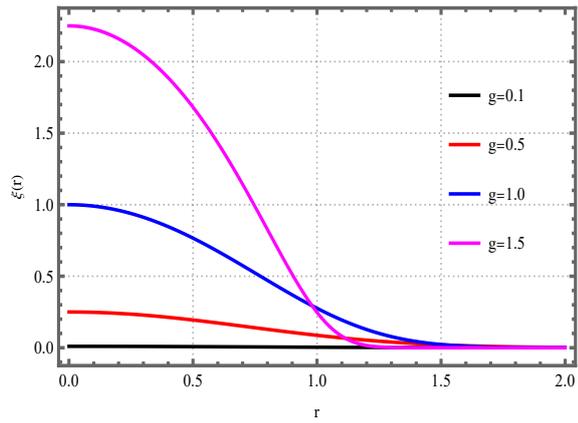


Figura 3.7: Soluções numéricas de  $\varepsilon_{bps}(r)$  para  $g = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ , obtidas a partir de (3.56) e considerando as condições (3.51) e (3.59).

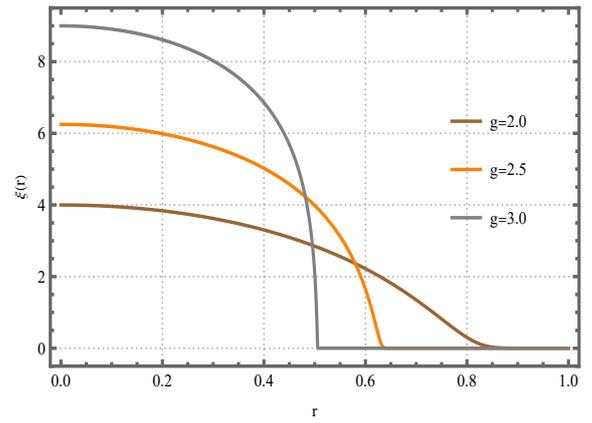


Figura 3.8: Soluções numéricas de  $\varepsilon_{bps}(r)$  para  $g = 2.0, 2.5, 3.0$ , obtidas por meio da equação (3.56) e considerando as condições (3.51) e (3.59).

## Capítulo 4

# Sólitons BPS no modelo restrito de baby Skyrme-Born-Infeld

Uma extensão da eletrodinâmica Maxwell livre foi desenvolvida por Max Born (1882-1970) e Leopold Infeld (1898-1968) em [88]. A eletrodinâmica de Born-Infeld, como ficou conhecida, trata-se de uma teoria de campos não-linear desenvolvida com a proposta de resolver o problema da divergência da auto-energia de uma carga pontual a nível clássico [89]. A auto-energia infinita causou dificuldades na formulação de uma teoria quântica da eletrodinâmica. Desse modo, a eletrodinâmica de Born-Infeld é uma tentativa de unificar a mecânica quântica e electromagnetismo [90]; no entanto, o objetivo não foi atingido, pois a teoria não é a base da eletrodinâmica quântica, (QED). Apesar de não cumprir seu papel original a teoria Born-Infeld foi posteriormente usada em outros contextos, como: em gravitação e cosmologia [91], gravidade quântica [92], extensões supersimétricas [93], no estudo de ondas de choque características [94, 95] e em teoria de cordas superssimétricas [96, 97].

Por meio dessas implementações, a auto-energia outrora divergente, passa a ter um valor finito.

Buscando investigar soluções de sólitons em modelos generalizados, em [16], foi investigado a ocorrência de soluções de sólitons topológicos no modelo generalizado de Born-Infeld baby Skyrme. Vale destacar que as soluções do modelo geral reproduzem as soluções usuais do modelo usual baby Skyrme-Maxwell, na medida que tomamos o limite de  $\beta \rightarrow \infty$ .

## 4.1 O modelo

A eletrodinâmica de Maxwell livre é descrita pela densidade lagrangiana [98]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2), \quad (4.1)$$

da qual obtém-se a energia

$$U = \frac{1}{2} \int (E^2 - B^2). \quad (4.2)$$

Pela lei de Gauss, o campo elétrico gerado por uma carga pontual é proporcional ao inverso do quadrado da distância, ou seja

$$E \propto \frac{1}{r^2}, \quad (4.3)$$

como o raio da partícula tende a zero, temos uma divergência no valor da energia.

A eletrodinâmica de Born-Infeld impõem um limite superior ao campo elétrico e assim a auto-energia associada ao elétron torna-se finita

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \implies \mathcal{L} = \beta^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2\beta^2}} \right), \quad (4.4)$$

onde o parâmetro  $\beta$ , denominado de parâmetro de Born-Infeld, é responsável por limitar o campo  $\vec{E}$ . Os campos, no entanto, não são mais suaves e por isso as soluções não são realmente sólitons [12].

A densidade lagrangiana (4.4) é livre de interações; porém, acoplando-a a uma lagrangiana de Skyrme, obtemos a densidade lagrangiana do modelo baby Skyrme-Born-Infeld [16]

$$\mathcal{L} = \beta^2 (1 - \mathcal{R}) - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - \nu(\varphi_n), \quad (4.5)$$

na qual definimos

$$\mathcal{R} = \sqrt{1 + \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2\beta^2 g^2}}, \quad (4.6)$$

onde  $g$  possui dimensão de massa e  $\beta$  possui a mesma dimensão do campo  $A_\mu$ , isto é,  $[\beta] = m^{\frac{3}{2}}$ .

A densidade lagrangiana (4.5) possui três contribuições: a primeira corresponde ao do termo de BI que generaliza o termo de Maxwell, o segundo é o termo de Skyrme, que é acoplado minimamente com o campo de gauge através da derivada covariante, definida por

$$D_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} + A_\mu \vec{n} \times \vec{\varphi}, \quad (4.7)$$

na qual  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  é um tripleto de campos escalares reais, que mapeiam o espaço de Minkowski no espaço dos campos, correspondendo a um difeomorfismo entre as variáveis diferenciáveis. Tais campos satisfazem a seguinte relação de vínculo

$$|\varphi|^2 = \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1, \quad (4.8)$$

ou seja, no espaço interno descrevem uma esfera de raio unitário. Além disso, temos que  $\varphi_n = \vec{n} \cdot \vec{\varphi}$ , onde  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  é um vetor unitário no espaço interno (através do qual obtemos  $\varphi_n = \varphi_3$ , isto é, a terceira componente do campo de Skyrmion).

Por fim, temos o potencial de auto-interação  $\nu(\varphi_n)$ , que é responsável pela quebra espontânea da simetria, e é dado por

$$\nu(\varphi_n) = \beta^2 (1 - V(\varphi_n)), \quad (4.9)$$

satisfazendo a condição  $0 < V(\varphi_n) < 1$ .

Vale destacar que o modelo descrito por (4.5) no limite em que o parâmetro de Born-Infeld,  $\beta \rightarrow \infty$ , recupera o modelo original baby Skyrme-Maxwell restrito (3.6), descrita pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - V(\varphi_n). \quad (4.10)$$

A partir da variação da ação, encontramos as equações de campo do modelo (4.5)

$$\partial_\lambda \left( \frac{F^{\lambda\rho}}{\mathcal{R}} \right) = g^2 J^\rho, \quad (4.11)$$

e

$$\lambda^2 D_\chi \vec{J}^\chi = -\frac{\partial \nu}{\partial \varphi_n} (\vec{n} \times \vec{\varphi}), \quad (4.12)$$

com  $j^\rho = \vec{n} \cdot \vec{J}^\rho$  e

$$\vec{J}^\rho = \lambda^2 D_\nu \vec{\varphi} [\vec{\varphi} \cdot (D^\rho \vec{\varphi} \times D^\nu \vec{\varphi})]. \quad (4.13)$$

A lei de Gauss para configurações estacionárias é escrita como segue

$$\partial_i \left( \frac{1}{\mathcal{R}} \partial_i A_0 \right) = g^2 \lambda^2 A_0 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi})^2.$$

Assim como nos cenários anteriores, vamos estudar skyrmions puramente magnéticos.

## 4.2 Formalismo BPS

Uma vez que a eletrodinâmica de Born-Infeld generaliza a eletrodinâmica de Maxwell, é necessário propor uma estrutura BPS adequada para a configuração. Observando o limite  $\beta \rightarrow \infty$ , essa abordagem deve ser condizente com a estrutura BPS usual da teoria de Maxwell. A fim de implementar o método, partiremos calculando a expressão para o tensor de energia-momento

$$\mathcal{T}_{\nu\rho} = -\frac{F_{\mu\nu}F^\mu{}_\rho}{g^2\mathcal{R}} - \lambda^2 (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi}) (D^\mu \vec{\varphi} \times D^\rho \vec{\varphi}) - \eta_{\nu\rho}\mathcal{L}, \quad (4.14)$$

e a densidade de energia

$$\varepsilon = \beta^2 (\mathcal{R} - V) + \frac{\lambda^2}{2} Q^2, \quad (4.15)$$

onde

$$Q = \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) + \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi}). \quad (4.16)$$

A densidade de energia (4.15) deve se anular quando  $r \rightarrow \infty$ ; o que exige que as seguintes soluções sejam satisfeitas

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} B = 0 \quad , \quad \text{o que implica que} \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} \mathcal{R} = 1 \quad (4.17)$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} V = 1 \quad , \quad \lim_{|r \rightarrow \infty|} Q = 0. \quad (4.18)$$

Tais condições garantem que as soluções possuam energia total finita e localizada.

A energia total da configuração de campo é dada pela integral da densidade de energia sobre o espaço. De forma explícita, escrevemos

$$E_{tot} = \int \varepsilon(r) d^2r. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.15), escrevemos

$$E_{tot} = \int \left\{ \beta^2 (\mathcal{R} - V) + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 \right\} d^2r. \quad (4.20)$$

Procederemos de maneira semelhante ao capítulo precedente no que diz respeito a implementação do formalismo BPS. Primeiramente, adicionamos as funções auxiliares  $\Sigma(\varphi_n)$ ,  $b(\varphi_n)$  e  $Z(\varphi_n)$ ; o que nos permite reescrever (4.20) como uma soma de quadrados perfeitos

$$E_{tot} = \int \left\{ \Sigma(B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm Z)^2 \mp 2\Sigma B b - \Sigma b^2 - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 \mp \lambda^2 Z \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 Z A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi}) + \beta^2 \mathcal{R} - \Sigma B^2 - \beta^2 V \right\} d^2r. \quad (4.21)$$

O termo  $\lambda^2 Z \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi})$  pode ser reescrito como  $Z (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi}) = \partial_j W$ , e dele definimos a função  $Z(\varphi_n)$

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \varphi_n} = W_{\varphi_n}. \quad (4.22)$$

Considerando o resultado (4.22), a energia pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E_{tot} = \int \left\{ \Sigma (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp 2\Sigma Bb - \Sigma b^2 - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 \right. \\ \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 [\partial_j (A_i W) - W (\partial_j A_i)] \\ \left. + \beta^2 \mathcal{R} - \Sigma B^2 - \beta^2 V \right\} d^2 r. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Distribuindo os termos nos colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} E_{tot} = \int d^2 r \left\{ \Sigma (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp 2\Sigma Bb - \Sigma b^2 - \frac{\lambda^2 W_{\varphi_n}^2}{2} \right. \\ \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_1 \vec{\varphi} \times \partial_2 \vec{\varphi}) \pm \lambda^2 W B + \beta^2 \mathcal{R} - \Sigma B^2 - \beta^2 V \left. \right\} \\ \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2 r \partial_j (A_i W), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde usamos  $B = -\epsilon_{ij} \partial_i A_j$ .

A energia total deve ser escrita em termos da carga topológica e de uma derivada total; por conta disso, contribuições adicionais devem ser canceladas, o que leva os seguintes resultados.

Os termos proporcionais a  $B(r)$  podem ser combinados afim de determinar a função auxiliar  $b$ .

$$\mp 2\Sigma Bb \pm \lambda^2 W B = 0, \quad (4.25)$$

leva a

$$b = \frac{\lambda^2 W}{2\Sigma}. \quad (4.26)$$

Os termos que sobram são

$$-\Sigma b^2 - \frac{\lambda^2 W_{\varphi_n}^2}{2} - \Sigma B^2 + \beta^2 \mathcal{R} - \beta^2 V = 0, \quad (4.27)$$

de onde obtemos a expressão geral para o potencial de auto-interação

$$V(\varphi_n) = (\mathcal{R} - \Sigma g^2 \mathcal{R}^2 + \Sigma g^2) - \frac{\lambda^4 W^2}{4\Sigma \beta^2} - \frac{\lambda^2}{2\beta^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi_n} \right)^2, \quad (4.28)$$

onde usamos  $B^2 = \beta^2 g^2 (\mathcal{R}^2 - 1)$ .

A equação (4.28) corresponde a equação do superpotencial, cuja solução é unívoca e satisfaz as condições de fronteira para  $V(\varphi_n)$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} W(\varphi_n) = 0, \quad (4.29)$$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} W_{\varphi_n}(\varphi_n) = 0. \quad (4.30)$$

Por fim, determinamos a função auxiliar  $\Sigma(\varphi_n)$ , que é escrita em termos da função  $\mathcal{R}$

$$\Sigma = \frac{1}{2g^2\mathcal{R}}. \quad (4.31)$$

De posse desses resultados (4.26), (4.27) e (4.31), a energia total (4.24) se reduz a seguinte expressão

$$E_{tot} = \int \varepsilon(r) d^2r = E_0 + E_{BPS} \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 \int d^2r \partial_j (A_i W), \quad (4.32)$$

com

$$E_0 = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2g^2\mathcal{R}} (B \pm g^2 \lambda^2 \mathcal{R} W)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \right\}, \quad (4.33)$$

e

$$E_{BPS} = \mp \lambda^2 \int d^2r W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}). \quad (4.34)$$

Devido a condição de vácuo  $W_{\varphi_n}(r \rightarrow \infty) = 0$ , a última integral em (4.32) não contribui, isto é

$$\mp \epsilon_{ij} \lambda^2 \int d^2r \partial_j (A_i W) = 0. \quad (4.35)$$

O limite inferior da energia é alcançado quando a integral (4.33) se anula e a energia torna-se

$$E_{tot} \geq E_{bps}. \quad (4.36)$$

A equação (4.36) corresponde a energia mínima do modelo que é atingida quando os campos assumem seus valores de vácuo, e quando as seguintes equações de primeira ordem

$$B \pm g^2 \lambda^2 \mathcal{R} W = 0, \quad (4.37)$$

$$Q \pm W_{\varphi_n} = 0. \quad (4.38)$$

forem satisfeitas. As equações acima são as equações BPS do modelo escritas a forma covariante.

A quebra espontânea da simetria do modelo é manifestada através do potencial (4.28), que pode ser reescrito como

$$V(\varphi_n) = \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda^2}{2\beta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_n}\right)^2. \quad (4.39)$$

O potencial total (4.9) escrito de forma explícita é dado pela expressão abaixo

$$\nu(\varphi_n) = \beta^2 \left[1 - \left(\left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda^2}{2\beta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_n}\right)^2\right)\right]. \quad (4.40)$$

### 4.3 Soluções de primeira-ordem

Uma vez que já implementamos a formulação BPS para o modelo generalizado de Skyrme-Born-Infeld, seguiremos para a obtenção das soluções das equações de primeira ordem. Adotaremos os mesmos Ansatz usado nos capítulo anterior

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(N\theta) \sin f(r) \\ \sin(N\theta) \sin f(r) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_i = -\epsilon_{ij} \hat{x}_j \frac{Na(r)}{r}, \quad (4.42)$$

onde o vetor unitário  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ , de modo que  $\varphi_n = \varphi_3$ . Como consequência, ocorre a quebra espontânea da simetria  $SO(3)$  inerente ao modelo ampliado definido pela lagrangiana (4.5). As funções  $a(r)$  e  $f(r)$ , bem como superpotencial  $W(r)$ , devem satisfazer as condições de contorno a seguir

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad (4.43)$$

com  $W_0$  uma constante. Adotando a redefinição feita em [15], reescrevemos o campo  $\varphi_3$  como

$$\varphi_3 = \cos f(r) = 1 - 2h(r), \quad (4.44)$$

onde a função radial  $h(r)$  satisfaz

$$h(0) = 1. \quad (4.45)$$

O campo magnético pode ser reescrito em termos dos Ansatz assumindo a seguinte forma

$$B(r) = -\frac{N}{r} \frac{da(r)}{dr}. \quad (4.46)$$

A energia mínima da configuração assume a seguinte forma quando escrita em termos dos campos projetados

$$E_{BPS} = \mp 2\pi\lambda^2 NW_0. \quad (4.47)$$

Por outro lado, no limite BPS a densidade de energia é

$$\varepsilon_{BPS} = g^2\lambda^4 W^2 \left(1 - \frac{g^2\lambda^4 W^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)^2. \quad (4.48)$$

ou seja, possui duas contribuições

$$\varepsilon_{BPS}^T(r) = \varepsilon_{BPS}^{BI}(r) + \varepsilon_{BPS}^S(r). \quad (4.49)$$

O potencial (4.39), torna-se.

$$V(\varphi_n) = \left(1 - \frac{g^2\lambda^4 W^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda^2}{8\beta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)^2, \quad (4.50)$$

em que usamos  $\varphi_n \equiv 1 - 2h$ .

No limite que a coordenada radial tende ao seu valor assintótico, os campos da teoria atingem seus estados de vácuo. Nesses pontos os valores dos campos devem ser tais que garantam soluções finitas. Desse modo, as condições de fronteira a seguir devem ser cumpridas

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dh}{dr} = 0, \quad (4.51)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{da}{dr} = 0, \quad (4.52)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dW}{dr} = 0. \quad (4.53)$$

A exemplo da energia, podemos escrever as equações (4.37) e (4.38) em termos dos Ansatz, de modo que assumem a seguinte estrutura

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = \pm g^2\lambda^2 W \left(1 - \frac{g^2\lambda^4 W^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.54)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = \pm \frac{\partial W}{\partial h}. \quad (4.55)$$

## 4.4 Fluxo Magnético

Nesta seção, vamos obter o fluxo magnético associado a configuração de campo. Partiremos da definição de fluxo magnético

$$\Phi_B = \int d^2r B(r) = 2\pi \int r dr B(r). \quad (4.56)$$

Usando a definição de  $B(r)$  (4.46) e as condições de contorno para o campo de calibre (4.43) e (4.52), escrevemos

$$\Phi_B = -2\pi N a_\infty. \quad (4.57)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado no capítulo anterior, a partir das equações BPS (4.54) e (4.55), obtemos uma expressão para a constante  $a_\infty$ , dada por

$$a_\infty = -1 + \exp(-\lambda^2 g^2 F(1)). \quad (4.58)$$

Desse modo, o fluxo magnético (4.56), torna-se

$$\Phi_B = 2\pi N [1 - \exp(-\lambda^2 g^2 F(1))]. \quad (4.59)$$

em que

$$F(h) = \int_0^1 \frac{4W(h')}{W_h} \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2(h')}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dh'. \quad (4.60)$$

O resultado (4.59) é uma expressão geral para o fluxo magnético, que depende tanto de  $W(h)$  quanto das constantes da teoria. A seguir, após impormos uma escolha para o superpotencial, encontraremos uma expressão particular para o fluxo que permitirá dizer em que regimes ele é ou não quantizado.

## 4.5 Soluções BPS

Como mencionado no terceiro capítulo, podemos seguir por dois caminhos para obtermos as soluções BPS. Seguindo a mesma escolha do capítulo precedente, fixamos um superpotencial  $W(h)$  do tipo

$$W(h) = \frac{h^2}{\lambda^2}, \quad (4.61)$$

Para essa escolha da função  $W(h)$ , o potencial (4.50) e as equações de primeira BPS, tornam-se

$$V(h) = \left(1 - \frac{g^2 h^4}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{2\beta^2 \lambda^2}. \quad (4.62)$$

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = -g^2 h^2 \left(1 - \frac{g^2 h^4}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.63)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{\lambda^2}. \quad (4.64)$$

Aqui, adotamos os sinais inferiores nas equações (4.54) e (4.55), para os quais  $N > 0$ . Assim, estudaremos soluções com energias positivas.

A partir de (4.61), podemos escrever a função  $F(1)$  (4.60), como segue

$$F(1) = \int_0^1 2h' \left(1 - \frac{g^2}{\beta^2} h'^4\right)^{-\frac{1}{2}} dh', \quad (4.65)$$

cuja solução é

$$F(1) = \frac{1}{2g} \arcsin\left(\frac{g}{\beta}\right). \quad (4.66)$$

E o fluxo magnético torna-se

$$\Phi_B = 2\pi N \left[1 - \exp\left(-\lambda^2 \beta g \arcsin\left(\frac{g}{\beta}\right)\right)\right]. \quad (4.67)$$

O fluxo depende, além das constantes  $\lambda$  e  $g$ , também do parâmetro  $\beta$ . A fim de verificar para quais valores o fluxo é quantizado, vamos fixar  $\lambda$  e  $\beta$  e variar  $g$ .

No acoplamento fraco ( $g \ll 1$ ), o fluxo magnético torna-se

$$\Phi_B \sim 2\pi N \lambda^2 g^2, \quad (4.68)$$

ou seja, não quantizado.

No capítulo 3, no regime de acoplamento forte, o valor da constante  $g$  varia dentro do intervalo  $[0, \infty]$ . Contudo, no modelo atual, existe uma restrição para valores de  $g$ , uma vez que, como veremos na seção seguinte, as soluções estáveis ocorrem para  $g < \beta$ . Portanto, o fluxo torna-se limitado pelas restrições entre  $\beta$  e  $g$ .

$$\Phi_B \sim 2\pi N \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2 \lambda^2 \pi\right)\right]. \quad (4.69)$$

Conclui-se que o fluxo não é quantizado para  $g$  suficientemente grande devido a restrição imposta por  $\beta$ .

Vale destacar que no limite em que  $\beta \rightarrow \infty$ , o fluxo (4.67) torna-se exatamente (3.72)

$$\Phi_B = 2\pi N [1 - \exp(-\lambda^2 g^2 F(1))], \quad (4.70)$$

que é fluxo magnético do modelo baby Skyrme-Maxwell (capítulo 3), como esperado.

## 4.6 Soluções Numéricas

O superpotencial (4.61) permite-nos escrever um potencial generalizado (4.62) que gera soluções BPS. Agora, vamos obter expressões para os campos da teoria nas fronteiras. Próximo a origem, os campos possuem a seguinte forma

$$h(r) \approx 1 - \frac{1}{4N\lambda^2} r^2 + \frac{\mathcal{A}_0 (-2g^2\lambda^2 + \mathcal{A}_0^{-1})}{32N^2\lambda^4} r^4 + O(r^5), \quad (4.71)$$

com

$$\mathcal{A}_0 = \left(1 - \frac{W_0^2 g^2 \lambda^4}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.72)$$

$$a(r) \approx -\frac{\mathcal{A}_0 g^2}{2N} r^2 + \frac{\mathcal{A}_0^3 g^2}{8N^2 \lambda^2} r^4 + O(r^6), \quad (4.73)$$

com

$$\mathcal{A}_0^3 = \left(1 - \frac{W_0^2 g^2 \lambda^4}{\beta^2}\right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.74)$$

Analisando o comportamento dos campos para regiões próximas da origem, evidencia-se a existência de singularidades relacionadas ao parâmetro de Born-Infeld, como é visto em  $\mathcal{A}_0$

$$\mathcal{A}_0 = \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W_0^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}. \quad (4.75)$$

Desse modo, para que haja soluções bem-definidas, o parâmetro  $\beta$  deve satisfazer a seguinte condição

$$\beta > \beta_c = g\lambda^2 W_0. \quad (4.76)$$

Assim, esperamos que as soluções bem-comportados devem existir somente no intervalo

$$\beta_c < \beta < \infty. \quad (4.77)$$

Para regiões próximas do limite assintótico, ou seja, quando a coordenada radial  $r \rightarrow \infty$ , os campos são dados pelas expressões a seguir

$$h(r) \approx C_\infty^{(2)} \exp(-\xi r^2), \quad (4.78)$$

e

$$a(r) \approx a_\infty + \lambda^2 g^2 \exp(-2\xi r^2) (C_\infty^{(2)})^2 (1 + a_\infty) \left[ 1 + \frac{g^2}{6\lambda^2 \beta^2} \exp(-4\xi r^2) (C_\infty^{(2)})^4 \right], \quad (4.79)$$

onde consideramos até primeira contribuição do parâmetro de  $\beta$ . Além disso, temos que  $C_\infty^{(2)}$  é uma constante positiva e  $a_\infty$  é o valor de vácuo do campo de calibre, e  $\xi$  é dada por

$$\xi = \frac{1}{4N\lambda^2(1 + a_\infty)}. \quad (4.80)$$

A seguir, apresentamos as soluções numéricas para os campos  $h(r)$ ,  $a(r)$ ,  $B(r)$  e  $\varepsilon_{bps}(r)$ , para um valor fixo da constante de acoplamento,  $g = 1$ , e valores do parâmetro de Born-Infeld:  $\beta = 1.01$  (linha preta sólida),  $\beta = 1.1$  (linha vermelha sólida) e  $\beta = 1.5$  (linha azul sólida); e  $N = \lambda = 1$ .

As figuras (4.1) e (4.2) apresentam as soluções para o campo de Skyrme  $h(r)$  e o campo de calibre  $a(r)$ . De modo geral, os perfis possuem comportamento semelhante aos do modelo baby Skyrme-Maxwell, apresentando um decaimento do tipo gaussiano.

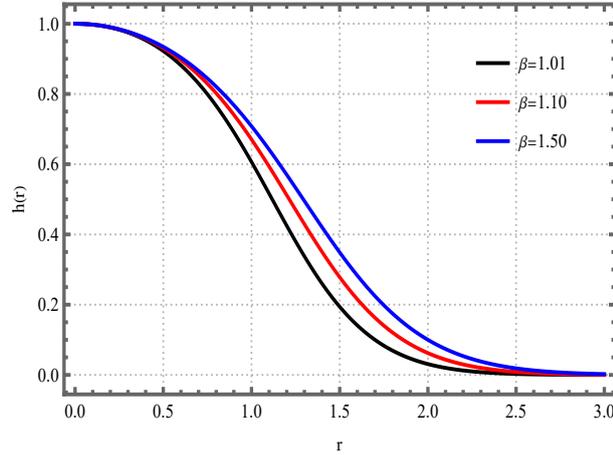


Figura 4.1: Soluções de  $h(r)$  para  $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir de (4.63) e (4.64) e as condições de fronteira (4.43), (4.45) e (4.51).

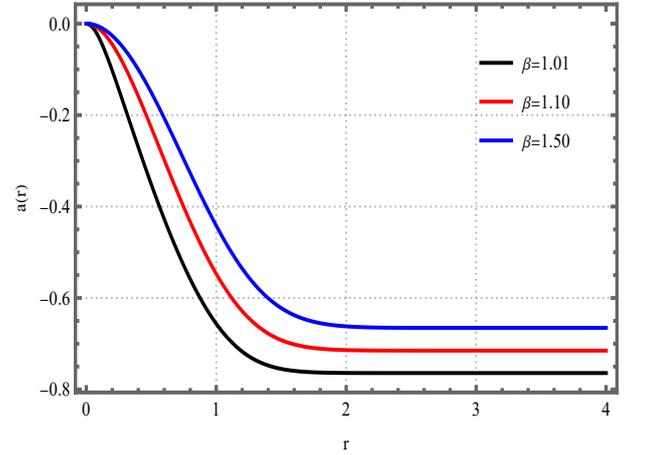


Figura 4.2: Soluções de  $a(r)$  para  $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir de (4.63) e (4.64) e das condições de contorno (4.43), (4.45) e (4.51).

Os perfis do campo magnético  $B(r)$  e da densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  são mostrados nas figuras (4.3) e (4.4). Os perfis apresentam o mesmo comportamento do modelo BPS baby Skyrme, mais precisamente, para valores de  $0 < g < 2$ . Aqui, para valores de  $\beta$  mais próximos do valor crítico  $\beta_c$ , tanto  $B(r)$  quanto  $\varepsilon_{bps}(r)$  apresentam, na origem, valores maiores em relação ao modelo usual, que representam máximos globais desses campos.

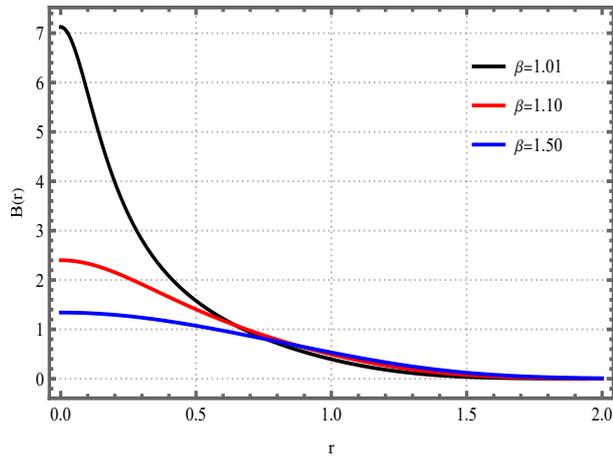


Figura 4.3: Solução numérica de  $B(r)$  para valores de  $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir da equação (4.54) e considerando as condições (4.45) e (4.51).

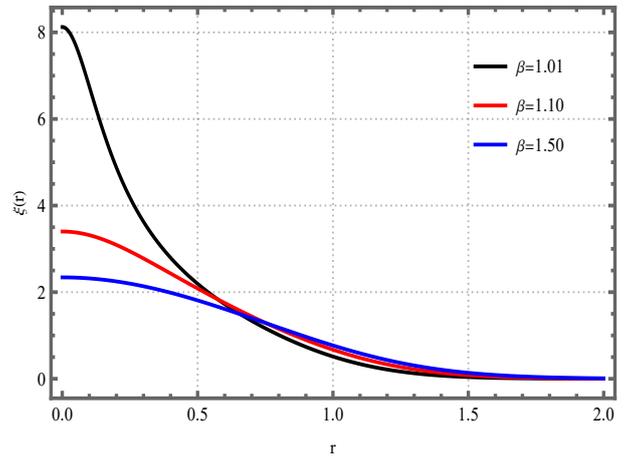


Figura 4.4: Solução numérica para  $\varepsilon_{bps}(r)$  para valores de  $\beta = 1.01, 1.1, 1.5$ , obtidas a partir da equação (4.48) e considerando as condições (4.45) e (4.51).

# Capítulo 5

## Sólitons BPS no modelo baby

## Skyrme-Maxwell restrito na presença de permeabilidade magnética

No capítulo anterior, estudamos o modelo baby Skyrme em  $(2 + 1)$ -dimensões espaço-temporais na presença de um campo de calibre, donde obtivemos soluções solitônicas denominadas de baby Skyrmions. No capítulo presente, propomos uma generalização do modelo descrito por (3.6), onde acoplamos ao termo de Maxwell uma função não-trivial  $G(\varphi_n)$ , que representa uma permeabilidade magnética. Desse modo, vamos estudar como as soluções de sólitons usuais são modificadas quando estamos em um meio magnético caracterizado por  $G(\varphi_n)$ .

### 5.1 O modelo

O modelo baby Skyrme-Maxwell na presença da permeabilidade generalizada  $G(\varphi_n)$  é definido pela densidade lagrangiana a seguir

$$\mathcal{L} = -\frac{G(\varphi_n)}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - \mu^2 V. \quad (5.1)$$

com

$$D_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} + A_\mu \vec{n} \times \vec{\varphi}, \quad (5.2)$$

e

$$\text{deg}[\vec{\varphi}] = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\vec{r} \vec{\varphi} \cdot (\partial_1 \vec{\varphi} \times \partial_2 \vec{\varphi}) = N. \quad (5.3)$$

A partir do princípio variacional encontramos as equações de campo

$$\partial_\nu (GF^{\nu\mu}) = g^2 J^\mu, \quad (5.4)$$

$$\lambda^2 D_\chi \{D_\nu \vec{\varphi} [\vec{\varphi} \cdot (D^\chi \vec{\varphi} \times D^\nu \vec{\varphi})]\} = -\mu^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi_n} (\vec{n} \times \vec{\varphi}) - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial \varphi_n} (\vec{n} \times \vec{\varphi}), \quad (5.5)$$

na qual  $j^\mu = \vec{n} \cdot J^\mu$  é a densidade de corrente elétrica conservada, com

$$J^\mu = \lambda^2 D_\nu \vec{\varphi} [\vec{\varphi} \cdot (D^\mu \vec{\varphi} \times D^\nu \vec{\varphi})]. \quad (5.6)$$

A lei de Gauss estacionária é dada por

$$\partial_i (\partial^i G A^0) = g^2 J^0, \quad (5.7)$$

onde  $J^0 = \lambda^2 A^0 [(\vec{n} \cdot \partial^i \vec{\varphi}) (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi})]$  é a densidade de carga elétrica. Notamos que a Lei de Gauss (5.7) é satisfeita identicamente se impormos a condição  $A^0 = 0$  como possível solução. Assim, a implementação do gauge implica em configurações de campo puramente magnéticas. A componente espacial de (5.4) fornece a Lei de Ampère

$$\partial_i (GB) = g^2 J_i, \quad (5.8)$$

com  $B = -\epsilon_{ij} \partial_i A_j$  e densidade de corrente espacial

$$J_i = -\lambda^2 g^2 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}) \vec{\varphi} \cdot [(D_1 \vec{\varphi} \times D_2 \vec{\varphi})]. \quad (5.9)$$

## 5.2 Formalismo BPS no modelo modificado

Nesta seção, a partir da implementação do formalismo BPS, buscamos encontrar as equações de primeira ordem generalizadas do modelo (5.1), das quais obteremos as soluções numéricas do modelo. Para tal, escrevemos o tensor de energia-momento

$$\mathcal{T}_{\nu\rho} = -\frac{G}{g^2} F_{\mu\nu} F^\mu{}_\rho - \lambda^2 (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi}) (D^\mu \vec{\varphi} \times D^\rho \vec{\varphi}) - \eta_{\nu\rho} \mathcal{L}. \quad (5.10)$$

A componente temporal é identificada como a densidade de energia da configuração, isto é,

$$\varepsilon = \mathcal{T}_{00} = -\frac{G}{g^2} F_{0\nu} F^0{}_\rho - \nu^2 (D_\mu \vec{\varphi} \times D_0 \vec{\varphi}) (D^\mu \vec{\varphi} \times D_0 \vec{\varphi}) - \eta_{00} \mathcal{L}. \quad (5.11)$$

Para configurações de campos estáticos, a densidade de energia pode ser escrita como

$$\varepsilon = \frac{G}{2g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \mu^2 V(\varphi_n), \quad (5.12)$$

com

$$Q = \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) + \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}). \quad (5.13)$$

É necessário que a densidade de energia se anule quando a coordenada radial  $r \rightarrow \infty$ , o que exige que as seguintes condições sejam cumpridas

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \sqrt{G} B = 0, \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} Q = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} V = 0. \quad (5.14)$$

A energia total da configuração de campo é dada pela integral da densidade de energia sobre o espaço. De forma explícita, escrevemos

$$E_{tot} = \int \varepsilon(r) d^2 r. \quad (5.15)$$

Substituindo (5.12), escrevemos

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{G}{2g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 + \mu^2 V(\varphi_n) \right\} d^2 r. \quad (5.16)$$

Para implementarmos de maneira correta o formalismo BPS, temos que adicionar à  $E_{tot}$  as funções auxiliares  $b(\varphi_n)$  e  $Z(\varphi_n)$ , que serão determinadas a posteriori. Em vista disso, reescrevemos (5.16) como segue

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{G}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm Z)^2 \mp \frac{GBb}{g^2} - \frac{Gb^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 \mp \lambda^2 Z \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 Z A_i (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}) + \mu^2 V \right\} d^2 r. \quad (5.17)$$

O penúltimo termo da segunda linha de (5.17) pode ser reescrito como uma derivada total. Para isso, impõem-se a condição

$$Z (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi}) = \partial_j W, \quad (5.18)$$

onde a  $W = W(\varphi_n)$ . A função  $Z(\varphi_n)$  assume a seguinte forma

$$Z(\varphi_n) = \frac{\partial W}{\partial \varphi_n} = W_{\varphi_n}. \quad (5.19)$$

Desse modo, usando o resultado (5.19), podemos escrever (5.17) como

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{G}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \frac{GBb}{g^2} - \frac{Gb^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 [\partial_j (A_i W) - W (\partial_j A_i)] + \mu^2 V \right\} d^2 r. \quad (5.20)$$

Distribuindo os termos dos colchetes, obtemos

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{G}{2g^2} (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \partial_j (A_i W) \mp \frac{GBb}{g^2} \pm \lambda^2 W B - \frac{Gb^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 + \mu^2 V \right\} d^2 r, \quad (5.21)$$

onde usamos a definição do campo magnético  $B = -\epsilon_{ij} \partial_i A_j$ .

A energia total deve ser definida em termos da carga topológica e de um termo de derivada total; logo, contribuições adicionais em (5.21) devem ser desprezadas. Portanto, os termos da segunda linha devem satisfazer

$$\mp \frac{GBb}{g^2} \pm \lambda^2 W B = 0, \quad (5.22)$$

e

$$-\frac{Gb^2}{2g^2} - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 + \mu^2 V(\varphi_n) = 0. \quad (5.23)$$

Da equação (5.22), encontramos a expressão para a função  $b(\varphi_n)$

$$b = \frac{g^2 \lambda^2 W}{G}. \quad (5.24)$$

E de (5.23), obtemos o potencial de auto-interação.

$$V(\varphi_n) = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} W_{\varphi_n}^2 + \frac{g^2 \lambda^4}{2\mu^2 G} W^2. \quad (5.25)$$

A equação (5.25) é a versão generalizada da equação do superpotencial (3.35), que a princípio possui uma família de soluções  $W(\varphi)$  denominadas de superpotenciais. No entanto, é mostrado em [15] que (5.25) possui uma solução unívoca que satisfaz as condições de fronteira do potencial  $V(\varphi_n)$ . Portanto,  $W(\varphi)$  deve satisfazer as condições

$$\lim_{|\vec{r}'| \rightarrow \infty} W(\varphi_n) = 0, \quad (5.26)$$

$$\lim_{|\vec{r}'| \rightarrow \infty} W_{\varphi_n}(\varphi_n) = 0, \quad (5.27)$$

que garantem a condição de vácuo do potencial  $\lim_{\varphi_n \rightarrow 1} V(\varphi_n) = 0$ , e consequentemente soluções finitas.

A energia total é

$$E_{tot} = \int d^2r \varepsilon = E_0 + E_{bps} \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2r \partial_j (A_i W), \quad (5.28)$$

onde

$$E_0 = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2G} (GB \pm g^2 \lambda^2 W)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \right\}, \quad (5.29)$$

e

$$E_{bps} = \mp \lambda^2 \int d^2r W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}). \quad (5.30)$$

A última integral em (5.28) não contribui para a energia, ou seja,

$$\mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2r \partial_j (A_i W) = 0. \quad (5.31)$$

O limite inferior da energia é atingido quando a integral  $E_0$  anula-se, isto é,

$$E_{tot} \geq E_{bps}. \quad (5.32)$$

A equação (5.32) corresponde a energia mínima do modelo, que é alcançada quando os campos atingem seus valores de vácuo. Desse modo, podemos escrever

$$E_{tot} \geq E_{bps} = \mp 4\pi \lambda^2 N \langle W_{\varphi_n} \rangle, \quad (5.33)$$

com

$$\langle W_{\varphi_n} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int dS_{int} W_{\varphi_n}. \quad (5.34)$$

No limite BPS a energia total será a mínima se o conjunto de equações for satisfeito

$$GB \pm g^2 \lambda^2 W = 0, \quad (5.35)$$

$$Q \pm W_{\varphi_n} = 0. \quad (5.36)$$

que são as equações BPS do modelo.

### 5.3 Soluções de primeira ordem na presença de $G(\varphi_n)$

A introdução da permeabilidade modifica o modelo usual tratado no capítulo anterior. A presença de  $G(\varphi_n)$  modifica a variedade de vácuo da teoria, bem como gera soluções BPS não canônicas. A seguir, vamos adotar duas escolhas para a permeabilidade  $G(\varphi_n)$ , das quais obteremos soluções modificadas, que devem ser interpretadas como uma tentativa de compreender as propriedades magnéticas de Skyrmions calibrados, por meio do estudo de sua versão em  $(2 + 1)$ -dimensões espaço-temporais.

O estudo de Skyrmions generalizados foi motivado pelo interesse na investigação de modelos estendidos via introdução de permeabilidades; por exemplo, no contexto de teorias de campos escalares, onde a presença da função não-trivial  $G$  pode ser usada para simular restrições geométricas em soluções tipo-kink [23], e sua influência na magnetização de um material magnético [99]. Além disso, estudos recentes mostram que a presença de restrições geométricas influencia o comportamento dos férmions em um modelo com permeabilidade não-trivial [100].

Agora, após desenvolver de maneira geral o formalismo BPS, vamos particularizar nossa investigação e determinar as soluções de sólitons do modelo (5.1), no limite BPS, a partir das equações (5.35) e (5.36). Buscamos encontrar soluções estacionárias e radialmente simétricas; para isso, adotaremos o mesmo ansatz usado anteriormente no capítulo precedente

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(N\theta) \sin f(r) \\ \sin(N\theta) \sin f(r) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_i = -\epsilon_{ij} \hat{x}_j \frac{Na(r)}{r}. \quad (5.38)$$

Assumimos que o vetor unitário  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  de modo que  $\varphi_n = \varphi_3$ . As funções radiais  $a(r)$  e  $f(r)$ , bem como superpotencial  $W(r)$ , devem satisfazer as condições de contorno a seguir

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad (5.39)$$

onde  $W_0$  é uma constante. Adotando a redefinição feita em [15], reescrevemos o campo de Skyrme

$$\varphi_3 = \cos f(r) \equiv 1 - 2h(r), \quad (5.40)$$

onde a função radial  $h(r)$  satisfaz

$$h(0) = 1. \quad (5.41)$$

O campo magnético  $B = \epsilon_{ij} \partial_j A_i$ , escrito em termos do Ansatzes (3.50) é escrito como

$$B = -\frac{N}{r} \frac{da(r)}{dr}. \quad (5.42)$$

Podemos escrever a energia mínima do modelo usando (5.37) e (5.38). Desse modo, a energia (5.30), torna-se

$$E \geq E_{bps} = \mp 2\pi N W(0) = \mp 2\pi \lambda^2 N W_0, \quad (5.43)$$

com  $W_0 = 1/\lambda^2$  é um valor constante.

No limite BPS a densidade de energia (5.12) torna-se

$$\varepsilon_{bps}(r) = \frac{G}{g^2} B^2 + \frac{\lambda^2}{4} \left( \frac{dW}{dh} \right)^2, \quad (5.44)$$

onde usamos (5.35) e (5.36). Portanto, a densidade de energia total possui duas contribuições

$$\varepsilon_{bps}^T(r) = \varepsilon_{bps}^M(r) + \varepsilon_{bps}^S(r). \quad (5.45)$$

O potencial de auto-interação (5.25), torna-se

$$V(h) = \frac{\lambda^2}{8} W_h^2 + \frac{g^2 \lambda^4}{2G} W^2, \quad (5.46)$$

onde adotamos  $\mu = 1$ .

No limite  $r \rightarrow \infty$ , os campos atingem seus estados de vácuo. Desse modo, eles devem possuir valores que assegurem soluções regulares e finitas; e para isso as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dh}{dr} = 0, \quad (5.47)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{da}{dr} = 0, \quad (5.48)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dW}{dr} = 0. \quad (5.49)$$

Em termos dos ansatz, as equações BPS (5.35) e (5.36) podem ser reescritas como segue

$$\frac{GN}{r} \frac{da}{dr} + g^2 \lambda^2 W = 0, \quad (5.50)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} + \frac{dW}{dh} = 0. \quad (5.51)$$

## 5.4 Fluxo Magnético

No capítulo anterior, mostramos que o fluxo magnético associado a configuração de sóliton simétrico depende da escolha da função superpotencial. No modelo atual, as configurações apresentam uma dependência tanto de  $W$  quanto da permeabilidade  $G$ . Desse modo, é válido esperar que o fluxo magnético seja afetado pela presença da permeabilidade. Partindo da definição de fluxo, escrevemos

$$\Phi_B = \int d^2r B(r) = 2\pi \int r dr B(r). \quad (5.52)$$

Usando a definição de  $B(r)$  e as condições de contorno para o campo de calibre, escrevemos

$$\Phi_B = -2\pi N a_\infty. \quad (5.53)$$

Adotando o mesmo procedimento precedente, buscamos encontrar uma condição para qual o fluxo torne-se quantizado. Dividindo (5.50) por (5.51), obtemos

$$\frac{1}{(1+a)} \frac{da}{dr} = \frac{4g^2 \lambda^2 W(h)}{G(h) W_h} \frac{dh}{dr}. \quad (5.54)$$

Definimos a função  $\mathcal{F}_h(h)$  como

$$\mathcal{F}_h \equiv \frac{4W}{GW_h}. \quad (5.55)$$

Reescrevendo (5.54), obtemos

$$\frac{1}{(1+a)} \frac{da}{dr} = g^2 \lambda^2 \mathcal{F}(h) \frac{dh}{dr}. \quad (5.56)$$

Em seguida, após uma integração em ambos os lados, escrevemos

$$\ln C(1+a) = \lambda^2 g^2 \mathcal{F}(h), \quad (5.57)$$

onde

$$\mathcal{F}(h) = \int_0^h \mathcal{F}_h(h) dh, \quad (5.58)$$

e  $C$  uma constante de integração. Assumindo que  $\mathcal{F}(h)$  é finita no intervalo  $[0, 1]$  e usando  $h(0) = 1$  e  $a(0) = 0$  podemos escrever

$$a_\infty = -1 + \exp(-\lambda^2 g^2 \mathcal{F}(1)). \quad (5.59)$$

Desse modo, o fluxo magnético (5.53), torna-se

$$\Phi_B = 2\pi N [1 - \exp(-\lambda^2 g^2 \mathcal{F}(1))], \quad (5.60)$$

em que

$$\mathcal{F}(1) = \int_0^1 \frac{4W}{GW_h} dh'. \quad (5.61)$$

O resultado (5.60) mostra que a presença da permeabilidade modifica o fluxo magnético do Skyrme, em comparação com a solução livre dada por (3.72)

## 5.5 Soluções Generalizadas

No limite BPS, as soluções solitônicas dependem de uma escolha particular do superpotencial  $W(h)$ . Adotando a mesma escolha feita em [15], escrevemos

$$W(h) = \frac{h^2}{\lambda^2}. \quad (5.62)$$

A partir dessa escolha, o potencial (5.46) e as equações (5.50) e (5.51) tornam-se

$$V(h) = \frac{h^2}{2\lambda^2} \left( 1 + \frac{g^2 \lambda^2 h^2}{G} \right), \quad (5.63)$$

e

$$\frac{GN}{r} \frac{da}{dr} + g^2 h^2 = 0, \quad (5.64)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} + \frac{2h}{\lambda^2} = 0. \quad (5.65)$$

A partir desse ponto, adotamos os sinais inferiores em (5.33), (5.35) e (5.36), para os quais  $N$  é positivo.

A escolha (5.62) define um cenário restrito no qual vamos obter as soluções do modelo (5.1). Além disso, as soluções numéricas para as funções  $h(r)$  e  $a(r)$ , assim como para  $B(r)$  e  $\varepsilon_{bps}(r)$  dependem de uma escolha particular da permeabilidade generalizada  $G(\varphi_n)$ .

Estamos interessados em encontrar Skyrmions generalizados que possuam comportamentos semelhantes aos usuais nas fronteiras; porém, apresentem perfis não-canônicos para valores intermediários da coordenada radial. Configurações semelhantes foram recentemente investigadas em [101], por exemplo. Para essa análise, selecionamos dois meios magnéticos diferentes, caracterizados por permeabilidades distintas.

A fim de gerar as configurações acima mencionadas, escolhamos a permeabilidade generalizada  $G(h)$ , como

$$G(h) = \frac{1}{(\alpha - h^2)^\beta}, \quad (5.66)$$

na qual os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são números inteiros positivos. Aqui, o parâmetro  $\alpha$  é responsável por modificar o perfil dos campos ao longo da coordenada radial. Em nossa análise adotaremos  $\beta = 2$  e construiremos soluções para diferentes valores de  $\alpha$ . Desse modo, a permeabilidade (5.66), torna-se

$$G(h) = \frac{1}{(\alpha - h^2)^2}. \quad (5.67)$$

A escolha da permeabilidade restringe o modelo geral descrito pelas equações (5.50), (5.51) e potencial (5.63). Portanto, com o objetivo de encontrar soluções particulares, reescrevemos as equações auto-duais como

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} + g^2 h^2 (\alpha - h^2)^2 = 0, \quad (5.68)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} + \frac{2h}{\lambda^2} = 0, \quad (5.69)$$

e o potencial restrito

$$V(h) = \frac{h^2}{2\lambda^2} \left( 1 + g^2 \lambda^2 h^2 (\alpha - h^2)^2 \right). \quad (5.70)$$

Na seção anterior, calculamos o fluxo magnético da configuração de Skyrme dado pela equação (5.60)

$$\Phi_B = 2\pi N \left[ 1 - \exp(-\lambda^2 g^2 \mathcal{F}(1)) \right]. \quad (5.71)$$

A função  $\mathcal{F}(1)$  depende dos valores de  $W(h)$ ,  $W_h(r)$  e da permeabilidade  $G(h)$ . Consequentemente, para encontrar uma expressão particular para o fluxo é preciso considerar uma escolha para  $G(h)$ . Adotando (5.67), (5.61) torna-se

$$\mathcal{F}(1) = \int_0^1 \frac{4(\alpha - h'^2)^2 W}{W_h} dh', \quad (5.72)$$

e o fluxo magnético assume a seguinte forma

$$\Phi_B = 2\pi N \left[ 1 - \exp \left( -4\lambda^2 g^2 \int_0^1 (\alpha - h'^2)^2 \frac{W}{W_h} dh' \right) \right], \quad (5.73)$$

e usando (5.62), escrevemos o fluxo como função somente dos parâmetros da teoria modificada

$$\Phi_B = 2\pi N \left[ 1 - \exp \left( -\lambda^2 g^2 \left( \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{3} \right) \right) \right]. \quad (5.74)$$

Portanto, a presença da permeabilidade generalizada altera a forma usual do fluxo magnético (3.72). Agora, este passa a depender também dos valores do parâmetro  $\alpha$ . Assim como no caso usual, o fluxo a princípio, é não-quantizado. No entanto, observando a expressão (5.74), é possível impor regiões onde esse fluxo apresente uma quantização.

No limite do acoplamento fraco ( $g \ll 1$ ), o fluxo magnético é

$$\Phi_B \sim 2\pi N \lambda^2 g^2 \left( \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{3} \right). \quad (5.75)$$

Por outro lado, no regime de acoplamento forte ( $g \gg 1$ ), o fluxo torna-se

$$\Phi_B \sim 2\pi N. \quad (5.76)$$

## 5.6 Soluções numéricas

A escolha de (5.62) como solução da equação do superpotencial (5.46), leva a um potencial do tipo (5.63), que produz soluções BPS que conseqüentemente estabelecem um limite inferior para a energia da configuração. Seguindo a prescrição dos capítulos precedentes, vamos resolver as equações (5.68) e (5.69) próximas às fronteiras a fim de conhecer como tais campos se comportam nesses limites.

Próximo da origem, os campos tornam-se

$$h(r) \approx 1 - \frac{1}{4N} \frac{r^2}{\lambda^2} - \frac{1}{32N^2} \frac{[2g^2\lambda^2(\alpha - 1)^2 - 1]}{\lambda^4} r^4 + O(r^5), \quad (5.77)$$

$$a(r) \approx -\frac{1}{2} \frac{g^2(\alpha - 1)^2}{N} r^2 + \frac{1}{8} \frac{g^2}{N^2\lambda^2} [\alpha(\alpha - 4) + 3] r^4 + O(r^6). \quad (5.78)$$

Próximo ao limite assintótico, o comportamento dos campos é dado por

$$h(r) \approx C_\infty \exp(-\xi r^2), \quad (5.79)$$

e

$$a(r) \approx a_\infty + \lambda^2 g^2 (1 + a_\infty) C_\infty^2 \exp(-2\xi r^2), \quad (5.80)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária e o parâmetro  $\xi$  sendo

$$\xi = \frac{1}{4N\lambda^2(1 + a_\infty)}. \quad (5.81)$$

As soluções numéricas para o campo de skyrme  $h(r)$  e o campo de gauge  $a(r)$  são obtidas para vários valores do parâmetro  $\alpha$ , de acordo com as legendas. Por convenção, escolhemos  $g = \lambda = 1$  e  $N = 1$ .

As figuras (5.1), (5.2) e (5.5) ilustram as soluções para o campo de Skyrme. Os perfis de  $h(r)$  apresentam, no intervalo  $0 \leq \alpha \leq 2$ , um comportamento monotônico que se assemelham aos do modelo usual descritos no capítulo 3 (modelo baby-Skyrme-Maxwell). Para valores de  $\alpha \geq 2.5$ , as soluções se assemelham aos perfis compactos descritos no capítulo 3, onde, nesse caso, o comportamento ocorre quando  $g > 2$ .

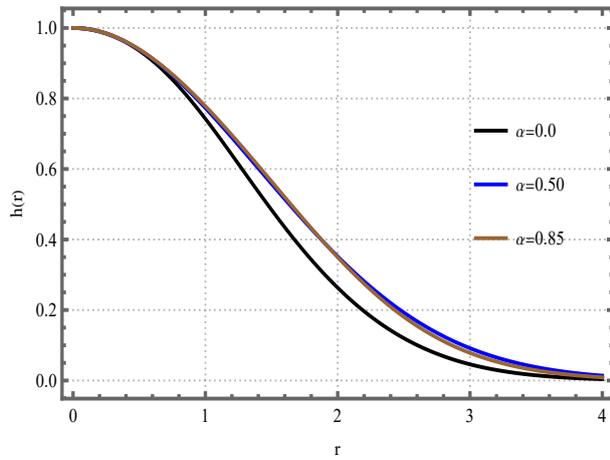


Figura 5.1: Soluções para o campo de Skyrme  $h(r)$  para  $\alpha = 0.0, 0.50, 0.85$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69).

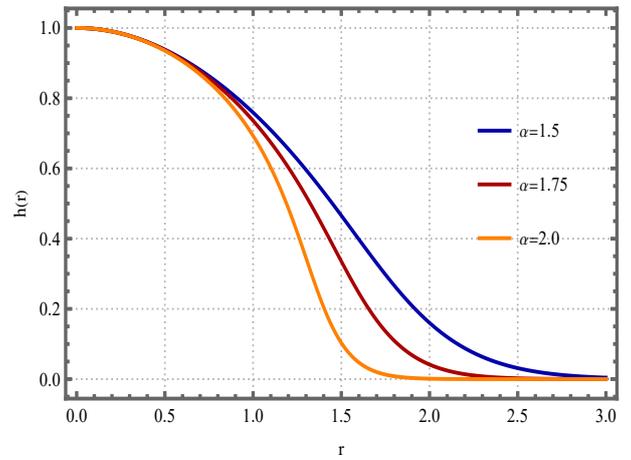


Figura 5.2: Soluções do campo de Skyrme para  $\alpha = 1.5, 1.75, 2.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69).

Por outro lado, as figuras (5.3), (5.4) e (5.6) apresentam as soluções para o campo de calibre  $a(r)$ , no intervalo  $0 < \alpha < 1$ , apresentam platôs para valores intermediários da coordenada radial, o que contrasta com o perfil monotônico da solução usual. No intervalo  $1 \leq a < 3$ , o campo decai exponencialmente até o seu valor de vácuo.

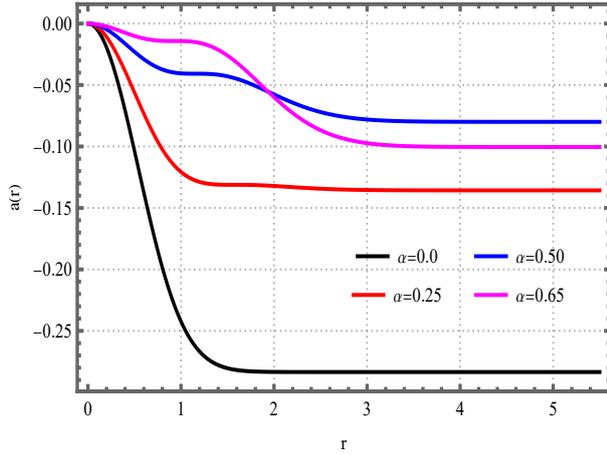


Figura 5.3: Soluções do campo de calibre para valores de  $\alpha = 0.0, 0.5, 0.85$ , obtidas a partir de (5.68) e (5.69).

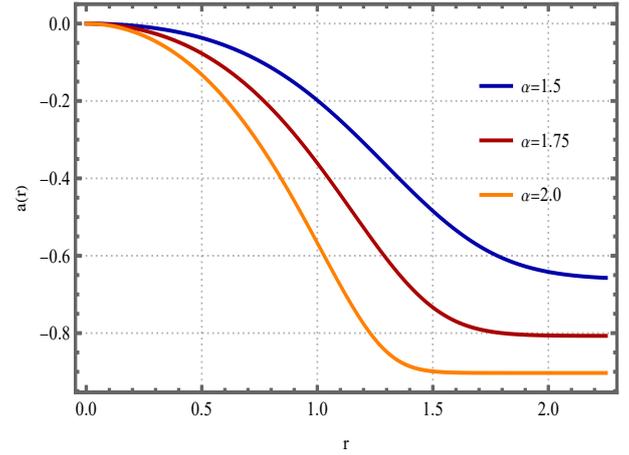


Figura 5.4: Soluções do campo de calibre para  $\alpha = 1.5, 1.75, 2.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69).

Para valores  $\alpha \geq 3$ , as soluções de  $h(r)$  e  $a(r)$  se assemelham as soluções de sólitons compactos. Tal configuração é análoga ao encontrado no modelo usual ( $G = 1$ ) para valores crescentes da constante de acoplamento ( $g > 2$ ).

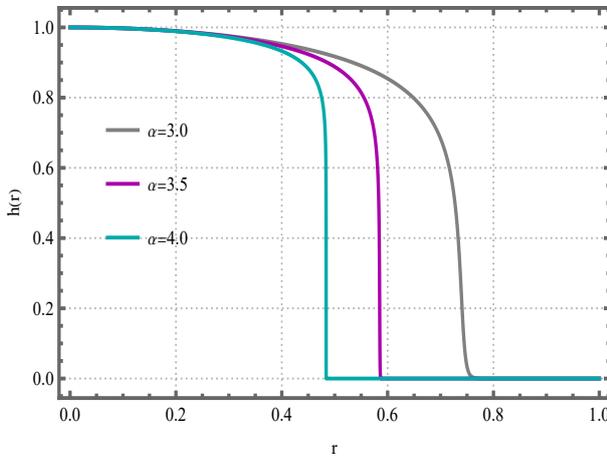


Figura 5.5: Soluções do campo de Skyrme para  $\alpha = 3.0, 3.5, 4.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69).

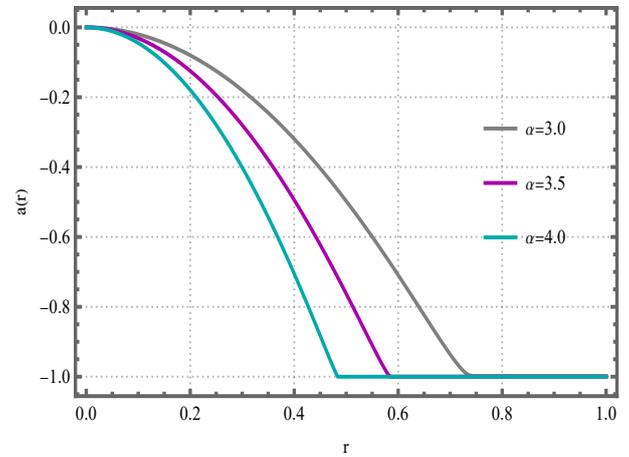


Figura 5.6: Soluções do campo de calibre para  $\alpha = 3.0, 3.5, 4.0$ , obtidas a partir das equações (5.68) e (5.69).

### 5.6.1 Perfis do campo $B(r)$

Os perfis do campo magnético  $B(r)$  dependem diretamente dos valores do parâmetro  $\alpha$ . Para descrever essa dependência, faremos um estudo analítico com o objetivo de comprovar nossa afirmação. Como ponto de partida, escrevemos explicitamente o campo magnético

$$B(r) = h^2 (\alpha - h^2)^2. \quad (5.82)$$

A derivada primeira de  $B(r)$  fornece

$$\frac{dB}{dr} = 2h (\alpha - h^2) (\alpha - 3h^2) \frac{dh}{dr} = 0. \quad (5.83)$$

As figuras (5.1), (5.2) e (5.5) mostram que  $h(r)$  varia monotonicamente entre seu valor máximo na origem,  $h(r=0) = 1$ , e seu valor no limite assintótico,  $h(r \rightarrow \infty) = 0$ ; obtemos que a condição  $B'(R) = 0$  fornece pontos extremos  $R$  de interesse

$$h(R_1) = h_1 = \sqrt{\alpha} < 1, \quad (5.84)$$

$$h(R_2) = h_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{3}} < 1, \quad (5.85)$$

na qual  $0 < R_1 < R_2$ .

O valor do campo magnético (5.82) nos pontos de equilíbrio são

$$B(h_1) = B_1 = 0, \quad (5.86)$$

e

$$B(h_2) = B_2 = \frac{4}{27}\alpha^3. \quad (5.87)$$

O ponto  $B_1$  corresponde a um mínimo local se  $\alpha < 1$ , enquanto que, para  $\alpha < 3$ , o ponto torna-se um máximo local. Na origem, o campo magnético é dado por

$$B(r=0) = B_0 = (\alpha - 1)^2. \quad (5.88)$$

Os resultados (5.86), (5.87) e (5.88), introduzem seis casos distintos baseados nos valores do parâmetro  $\alpha$ . Aqui, vamos considerar todos os valores da coordenada radial, exceto os localizados na região assintótica.

Iniciamos com a escolha de  $\alpha = 0$ , que leva as seguintes equações auto-duais

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} + h^6 = 0, \quad (5.89)$$

$$\frac{4(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} + 2h = 0. \quad (5.90)$$

onde  $G(h) = 1/h^4$ .

Neste caso, percebemos que as equações acima podem ser obtidas diretamente de (5.64) e (5.65), através das escolhas  $G = 1$ ,  $g = N = 1$ ,  $\sigma = 2$  e  $\lambda = 1/\sqrt{3}$ . Desse modo, concluímos que este cenário, caracterizado por  $G(h) = 1/h^4$ , é simplesmente uma redefinição do caso usual para valores diferentes do parâmetro  $\lambda$ . Conseqüentemente, na figura (5.7) a solução não apresenta mudanças relevantes na sua forma em relação ao modelo usual (curva azul da figura 3.5).

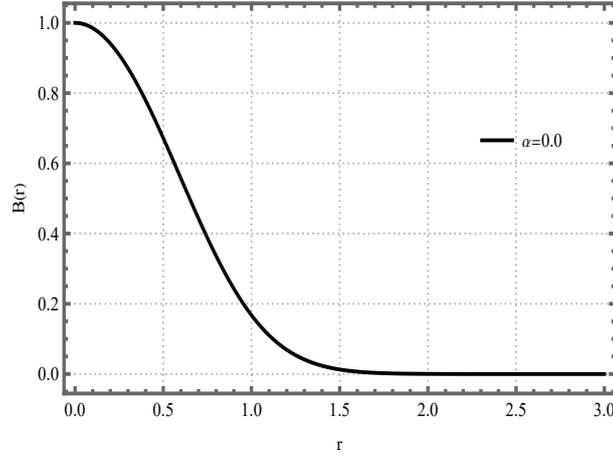


Figura 5.7: Solução do campo magnético para  $\alpha = 0$ .

O segundo caso que iremos abordar ocorre quando consideramos o parâmetro  $\alpha$  variando no intervalo  $0 < \alpha < 1$ . Neste contexto, a solução (5.84) é satisfeita para um  $r = R_1$ . Neste ponto, o valor do campo magnético é nulo (5.86), de modo que podemos inferir que a solução numérica para este campo descreve um lump posicionado na origem, com amplitude dada por (5.88) e centrado por um anel de raio  $r = R_2 > R_1$  e amplitude (5.87).

Vale destacar que  $\alpha$  também determina a diferença entre as amplitudes dos lumps e anéis; para  $0 < \alpha < 0.75$ , a magnitude do lump é maior que a do anel. Por outro lado, quando  $\alpha = 0.75$ , as amplitudes das duas estruturas são iguais. Por fim, no intervalo  $0.75 < \alpha < 1$ , a magnitude do anel é maior que a do lump. As soluções são mostradas na figura (5.8)

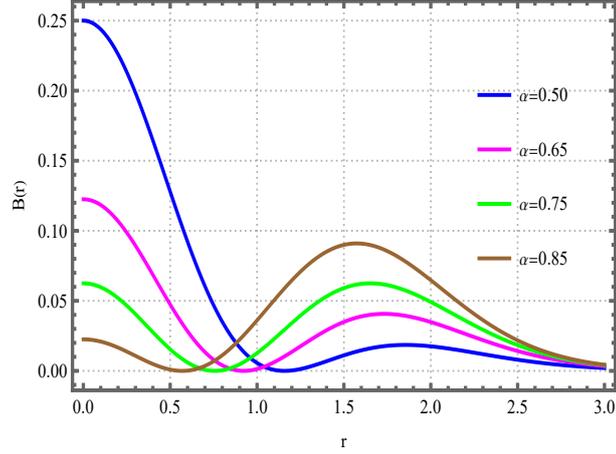


Figura 5.8: Solução do campo magnético para  $0 < \alpha < 1$

O parâmetro  $\alpha$  também controla os valores de  $R_1$  e  $R_2$ , quando  $\alpha$  aumenta, tanto  $h_1 = \sqrt{\alpha}$  quanto  $h_2 = \sqrt{\alpha/3}$  aumentam. Em contrapartida, à medida que  $\alpha$  aumenta, os raios do lump ( $R_1$ ) e do anel ( $R_2$ ) decrescem, aproximando-se da origem  $r = 0$ .

O próximo cenário ocorre para  $\alpha = 1$ , como visto na figura (5.9). As equações BPS tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} + h^2 (1 - h^2)^2 = 0, \quad (5.91)$$

$$\frac{4(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} + 2h = 0. \quad (5.92)$$

Aqui, a equação (5.84) é válida somente na origem, isto é,  $h(r=0) = h_1 = 1$ , que satisfaz a condição de contorno. Portanto, o campo  $B(r)$  é nulo em  $r = 0$ , o que verifica o resultado (5.88). Então, concluímos que o perfil da solução para  $B(r)$  é um único anel cujo raio está localizado em  $r = R_2$ ; a magnitude é dada por

$$B(r) = \frac{4}{27}. \quad (5.93)$$

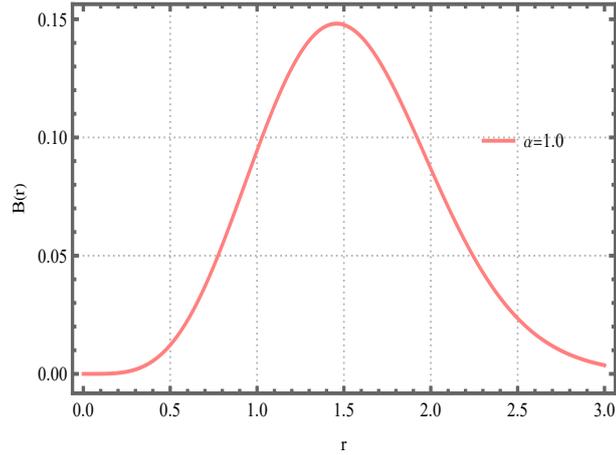


Figura 5.9: Solução do campo magnético para  $\alpha = 1$ .

No intervalo  $1 < \alpha < 3$  (figura 5.10), a condição  $h(R_1) = h_1 = \sqrt{\alpha} < 1$ , não é satisfeita, e concluímos que o campo magnético não apresenta valores nulos para valores intermediários de  $r$ .

A solução magnética se assemelha a um vulcão (quando visto tridimensionalmente) que encontra-se centrado na origem; o valor de  $B(r)$  em  $r = 0$  é dado por (5.88), e seu máximo global ocorre no ponto  $r = R_2$ , onde  $B(h_2) = (4/27)\alpha^3$ . O perfil vulcânico é completamente caracterizado pela condição

$$B(r = R_2) > B_0. \quad (5.94)$$

Além disso, assim como no cenário anterior, o parâmetro  $\alpha$  controla o valor do raio da solução. Quando  $\alpha$  aumenta (diminui), o valor de  $h_4 = \sqrt{\alpha/2}$  aumenta (diminui), enquanto o valor de  $R_2$  diminui (aumenta).

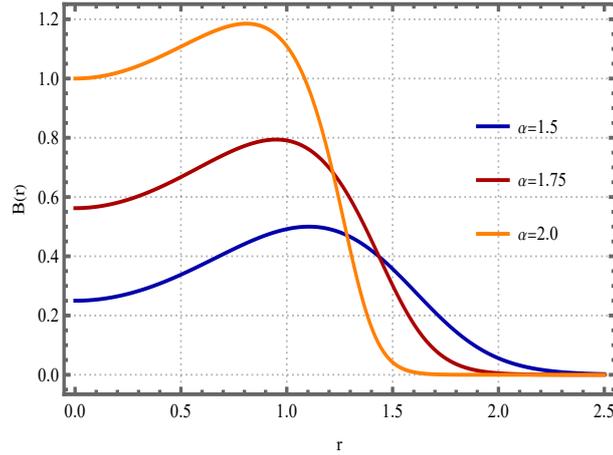


Figura 5.10: Solução do campo magnético para  $1 < \alpha < 3$ .

Dando prosseguimento a nossa análise, vamos estudar soluções para  $\alpha = 3$ . Assim como no cenário anterior, a condição (5.84) não é mais satisfeita, o que implica valores não nulos de  $B(r)$  para valores intermediários de  $r$ . Em contrapartida, a equação (5.85) é satisfeita somente na origem, quando  $h_2 = h(r=0) = 1$ . Neste ponto, por meio da equação (5.87) obtemos o valor do campo magnético,  $B(h_2) = 4$ , que é exatamente o valor do campo na origem dado por (5.88). Para um  $r = R_2$ , o setor magnético descreve um comportamento que se assemelha a estrutura compacta centradas em  $r = 0$ , como é percebido na figura (5.11).

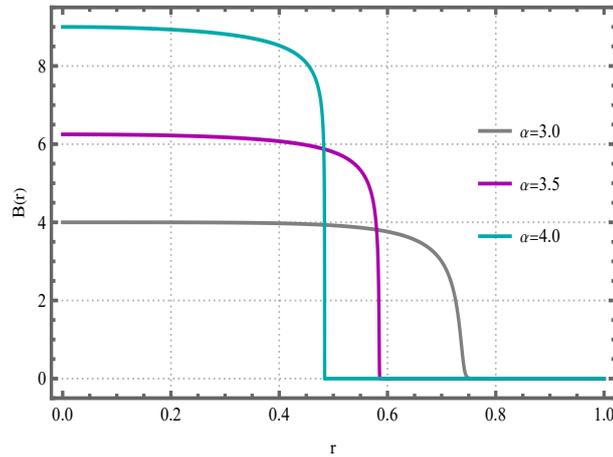


Figura 5.11: Solução do campo magnético para  $\alpha \geq 3$ .

Por fim, para valores  $\alpha \geq 3$ , tanto (5.84) quanto (5.85) não são satisfeitas. As soluções para  $B(r)$  não possuem vales e nem picos adicionais, ou seja,  $B(r)$  varia monotonicamente até seu

valor no limite assintótico. Como resultado, à medida que  $\alpha$  aumenta, as soluções para  $B(r)$  tendem a se compactarem centradas em  $r = 0$ . Conforme mencionado antes, tal comportamento é semelhante ao encontrado no caso usual (com  $G = 1$ ) para valores crescentes da constante de acoplamento  $g$ .

### 5.6.2 Perfis para a densidade de energia

As soluções para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  têm, do mesmo modo que o campo magnético  $B(r)$ , suas formas afetadas pelo parâmetro  $\alpha$ . Levando em consideração as escolhas de  $W(h)$  (5.62) e  $G(h)$  (5.67), podemos escrever (5.44) como

$$\varepsilon_{bps}^T(r) = \frac{B^2}{(\alpha - h^2)^2} + h^2. \quad (5.95)$$

No desenvolvimento das soluções, vamos considerar somente a contribuição do campo magnético na densidade de energia total. Portanto, podemos escrever a densidade de energia como segue

$$\varepsilon_{bps}^T(r) = \varepsilon_{bps}^M(r) = h^4 (\alpha - h^2)^2, \quad (5.96)$$

onde usamos (5.82).

Usaremos o mesmo procedimento adotado anteriormente para estudar as soluções modificadas. Desse modo, a derivada primeira de (5.96) fornece

$$\frac{d}{dr} \varepsilon_{bps}^M = 4h^3 (\alpha - h^2) (\alpha - 2h^2) \frac{dh}{dr}, \quad (5.97)$$

donde extraímos os pontos extremos

$$h(R_3) = h_3 = \sqrt{\alpha} < 1, \quad (5.98)$$

e

$$h(R_4) = h_4 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} < 1, \quad (5.99)$$

na qual  $0 < R_3 < R_4$ . O valor da densidade de energia nos pontos de equilíbrio são

$$\varepsilon_{bps}^M(h_3) = \varepsilon_{bps,3}^M = 0, \quad (5.100)$$

$$\varepsilon_{bps}^M(h_4) = \varepsilon_{bps,4}^M = \frac{\alpha^4}{16}. \quad (5.101)$$

Na origem, a densidade de energia magnética  $\varepsilon_{bps}^M(r)$  é dada por

$$\varepsilon_{bps,0}^M(r) = (\alpha - 1)^2. \quad (5.102)$$

Assim como no estudo das soluções para  $B(r)$ , a presença de  $\alpha$  introduz seis cenários distintos, descritos pelos resultados (5.100), (5.101) e (5.102).

O primeiro é definido escolhendo  $\alpha = 0$ ; como explicado anteriormente, essa escolha de parâmetro pode ser interpretada como uma redefinição do modelo usual para com valor diferente da constante  $\lambda$ . Assim, as soluções numéricas não apresentam modificações consideráveis e comportam-se analogamente ao modelo sem a presença da permeabilidade generalizada  $G(h)$ . Como mostra a figura (5.12).

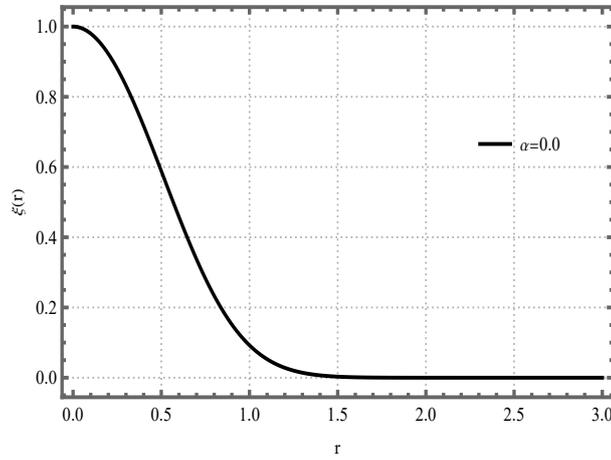


Figura 5.12: Solução da densidade de energia magnética para  $\alpha = 0$ .

No intervalo  $0 < \alpha < 1$ , a equação (5.98) é satisfeita em  $r = R_3$ . Neste ponto a densidade de energia magnética assume o valor dado em (5.100), isto é, é nula independente do valor de  $\alpha$  (dentro do intervalo definido). A solução descreve um lump posicionado em  $r = 0$ , com amplitude dada pela equação (5.102), e rodeado por um anel com raio  $r = R_4$  e amplitude dada pela equação (5.101).

Vale destacar que, assim como ocorre para o campo magnético, o parâmetro  $\alpha$  modula a diferença entre as magnitudes do lump e do anel. Quando,  $0 < \alpha < 2(\sqrt{2} - 1)$ , o pico do lump na origem é mais alto que o pico do anel em  $r = R_4$ . Quando  $\alpha = 2(\sqrt{2} - 1)$ , os picos têm a mesma magnitude. Contudo, quando  $2(\sqrt{2} - 1) < \alpha < 1$ , o pico do anel no ponto  $r = R_4$  é mais alto em relação ao do lump na origem.

Comparando as equações (5.84) e (5.98), conclui-se que  $R_1 = R_3$ . Desse modo, o campo magnético e a densidade de energia magnética se anulam no mesmo ponto. Além disso, a igualdade dos pontos controla a posição do vale entre dois picos densidade de energia.

O parâmetro  $\alpha$  também controla os valores de  $R_3$  e  $R_4$ : quando  $\alpha$  aumenta, o valor de  $h_4 = \sqrt{\alpha/2}$  aumenta e, portanto,  $R_4$  diminui. Esses comportamentos são apresentados na figura (5.13).

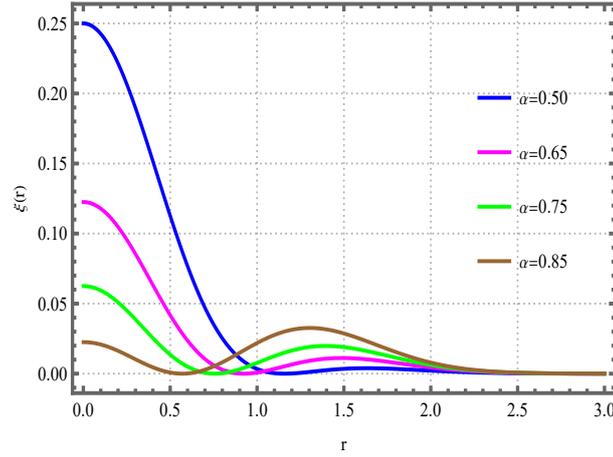


Figura 5.13: Solução da densidade de energia magnética para  $0 < \alpha < 1$

Na figura (5.14), temos as soluções para  $\alpha = 1$ , o valor do campo de Skyrme (5.98) é satisfeito somente em  $r = 0$ . Neste ponto, a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}^M(r) \rightarrow 0$ , de modo que o perfil da solução é um anel com máximo global localizado em  $r = R_4$ , sendo o próprio máximo dado por

$$\varepsilon_{bps}^M(r) = \frac{1}{16}. \quad (5.103)$$

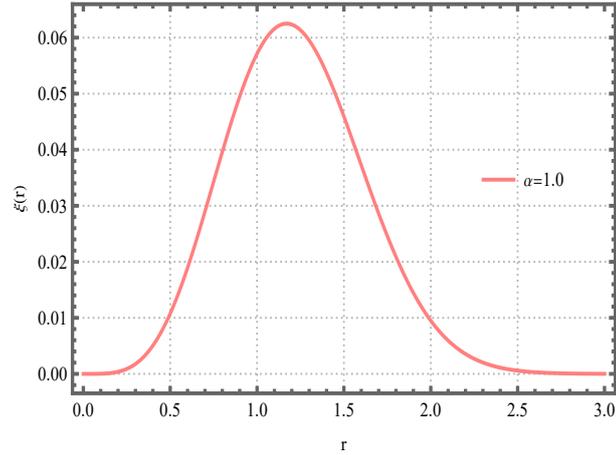


Figura 5.14: Solução da densidade de energia magnética para  $\alpha = 1$ .

Para valores de  $\alpha$  no intervalo  $1 < \alpha < 2$ , a equação (5.98) não é satisfeita e, portanto, a densidade de energia magnética não assume valores nulos para valores intermediários da coordenada radial  $r$ .

O perfil da solução se assemelha a um vulcão centrado na origem, o valor de  $\varepsilon_{bps}^M(r)$  em  $r = 0$  é dado por (5.102), e seu máximo global ocorre no ponto  $r = R_4$ , onde  $\varepsilon_{bps}^M(h_4) = (\alpha^4/16)$ . O perfil vulcânico é completamente caracterizado pela condição

$$\varepsilon_{bps}^M(r = R_4) > \varepsilon_{bps,0}^M. \quad (5.104)$$

O parâmetro  $\alpha$  controla o valor do raio. Quando  $\alpha$  aumenta (diminui), o valor de  $h_4 = \sqrt{\alpha/2}$  aumenta (diminui), enquanto o valor de  $R_4$  diminui (aumenta). A figura (5.15) apresenta o perfil das soluções.

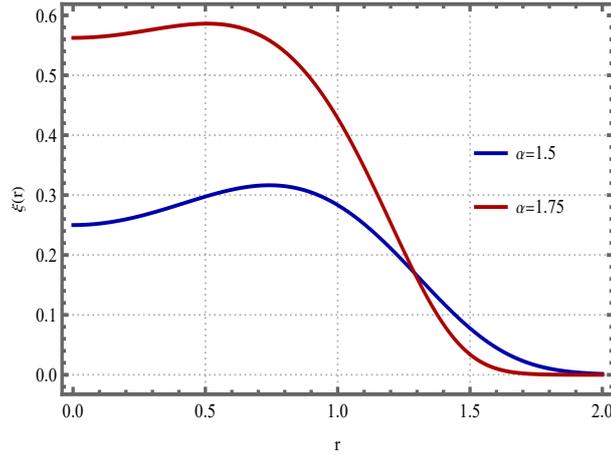


Figura 5.15: Solução da densidade de energia magnética para  $1 < \alpha < 2$ .

A figura (5.16) mostra a solução para  $\alpha = 2$ , a condição (5.98) não é mais válida, implicando em  $\varepsilon_{bps}^M(r) \neq 0$  para um  $r$  intermediário. No entanto, a equação (5.99) é válida somente em  $r = 0$ , onde a densidade energia magnética  $\varepsilon_{bps}^M(r) = 1$ . O perfil da solução para essa escolha de parâmetro é um lump compacto centrado na origem.

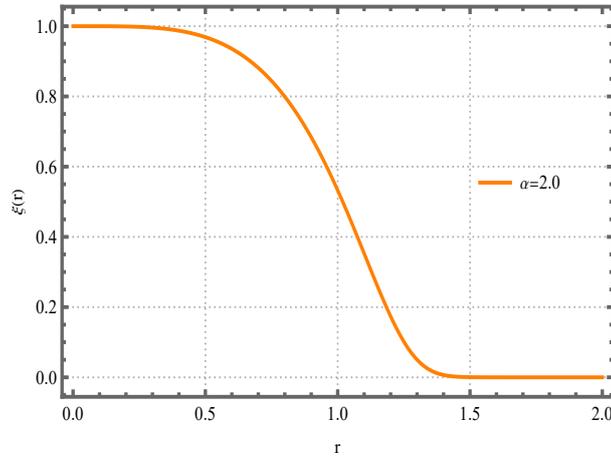


Figura 5.16: Solução da densidade de energia magnética para  $\alpha = 2$ .

Por fim, vamos considerar as soluções para  $\alpha > 2$ , no qual as equações (5.98) e (5.99) não são satisfeitas. Neste quadro, as soluções para a densidade de energia magnética variam monotonicamente do seu valor na origem,  $\varepsilon_{bps,0}^M(r=0) = (\alpha - 1)^2$ , até  $\varepsilon_{bps,0}^M(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

Os perfis de lumps centrados na origem se tornam cada vez mais compactos à medida que o parâmetro  $\alpha$  aumenta. Comportamento semelhante a esse é encontrado no caso usual (com

$G = 1$ ), para valores crescentes da constante de acoplamento  $g$ . A figura (5.17) ilustra esse cenário.

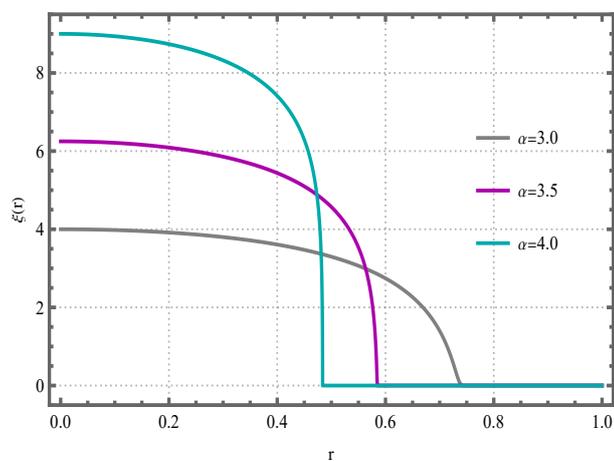


Figura 5.17: Solução da densidade de energia magnética para  $\alpha > 2$ .

# Capítulo 6

## Sólitons BPS no modelo restrito de baby Skyrme-Born-Infeld na presença de uma permeabilidade magnética não trivial

No capítulo anterior, estudamos soluções de Skyrmons planares em um modelo de Born-Infeld, do qual obtivemos soluções que saturam o limite BPS. A partir desse ponto, vamos propor uma generalização do termo de Born-Infeld em (4.5), por meio do acoplamento de uma permeabilidade generalizada. Através do formalismo BPS, vamos investigar como as soluções do modelo (4.5) são modificadas pela presença da função permeabilidade  $G(\varphi)$ .

### 6.1 O modelo

Vamos propor a seguinte modificação no termo de Born-Infeld

$$\mathcal{R} = \sqrt{1 + \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2\beta^2 g^2}} \rightarrow \mathcal{R}_G = \sqrt{1 + \frac{G(\varphi_n) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2\beta^2 g^2}}. \quad (6.1)$$

Desse modo, a densidade lagrangiana do modelo é escrita como

$$\mathcal{L} = \beta^2 (1 - \mathcal{R}_G) - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - \nu(\varphi_n). \quad (6.2)$$

As definições para o tensor de Faraday, derivada covariante e o potencial de auto-interação permanecem inalteradas. A densidade lagrangiana (4.5), descreve uma teoria eletromagnética, cuja as soluções BPS são restritas a um cenário particular, livres da influência de efeitos eletromagnéticos relacionados à matéria. No entanto, buscando compreender um cenário mais geral, propomos o acoplamento, junto ao termo de Maxwell, de uma função não-trivial  $G(\varphi_n)$  denominada de permeabilidade generalizada, que representa as propriedades magnéticas da matéria.

Neste capítulo, vamos investigar as soluções do modelo descrito pela lagrangiana (6.2) por meio do formalismo BPS, e comparar as mudanças provocadas pela extensão do modelo (4.5) via o acoplamento da função  $G(\varphi_n)$ .

Além disso, vale pontuar que o modelo atual, avaliado no limite  $\beta \rightarrow \infty$ , recai no modelo baby Skyrme-Maxwell na presença de uma função não trivial  $G(\varphi_n)$ ,

$$\mathcal{L} = -\frac{G(\varphi_n)}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{4} (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\nu \vec{\varphi})^2 - V, \quad (6.3)$$

que foi abordado no capítulo 4.

Aplicando o princípio variacional à lagrangiana (6.2), encontramos as equações de campo

$$\partial_\lambda \left( \frac{GF^{\lambda\rho}}{\mathcal{R}_G} \right) = g^2 J^\rho, \quad (6.4)$$

e

$$\lambda^2 D_x \vec{J}^x = -\frac{\partial \nu}{\partial \varphi_n} (\vec{n} \times \vec{\varphi}), \quad (6.5)$$

com  $j^\rho = n \cdot \vec{J}^\rho$  e

$$\vec{J}^\rho = \lambda^2 D_\nu \vec{\varphi} [\vec{\varphi} \cdot (D^\rho \vec{\varphi} \times D^\mu \vec{\varphi})]. \quad (6.6)$$

A lei de Gauss é obtida a partir de (6.4), e possui a seguinte estrutura

$$\partial_i \left( \frac{G}{\mathcal{R}_G} \partial_i A_0 \right) = g^2 \lambda^2 A_0 (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{\varphi})^2. \quad (6.7)$$

A exemplo dos capítulos anteriores, estudaremos as soluções de skyrmions na presença somente de campos magnéticos.

## 6.2 Formalismo BPS

Agora, aplicaremos mais uma vez o formalismo BPS a fim de encontrar as equações de primeira ordem, que fornecerão as soluções numéricas do modelo (6.2). Iniciaremos escrevendo o tensor de energia momento

$$\mathcal{T}_{\lambda\rho} = -\frac{GF_{\mu\lambda}F^\mu{}_\rho}{g^2\mathcal{R}_G} - \lambda^2 (D_\mu \vec{\varphi} \times D_\lambda \vec{\varphi}) (D^\mu \vec{\varphi} \times D_\rho \vec{\varphi}) - \eta_{\lambda\rho} \mathcal{L}. \quad (6.8)$$

A densidade de energia é, portanto, escrita como

$$\varepsilon = \beta^2 (\mathcal{R}_G - V) + \frac{\lambda^2}{2} Q^2. \quad (6.9)$$

onde usamos

$$Q = \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) + \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi}), \quad (6.10)$$

A densidade de energia  $\varepsilon(r)$  deve assumir o valor nulo quando o valor de  $r \rightarrow \infty$ . Desse modo, nessa região as condições de fronteira abaixo devem ser obrigatoriamente satisfeitas

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} B = 0 \quad , \quad \text{o que implica em } \lim_{|r| \rightarrow \infty} \mathcal{R}_G = 1 \quad (6.11)$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} V = 1 \quad , \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} Q = 0. \quad (6.12)$$

A energia total da configuração é dada pela integral da densidade de energia sobre o espaço. De forma explícita, escrevemos

$$E_{tot} = \int \varepsilon(r) d^2r. \quad (6.13)$$

Substituindo (6.9), obtemos

$$E_{tot} = \int \left\{ \beta^2 (\mathcal{R}_G - V) + \frac{\lambda^2}{2} Q^2 \right\} d^2r. \quad (6.14)$$

Agora, aplicaremos a mesma prescrição usada nos capítulos anteriores, a fim de encontrar as soluções de energia mínima. Assim, como ponto de partida, reescreveremos (6.14) como

$$E_{tot} = \int \left\{ \varrho G (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm Z)^2 \mp 2\varrho G B b - \varrho G b^2 - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 \mp \lambda^2 Z \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \epsilon_{ij} Z \lambda^2 A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi}) + \beta^2 \mathcal{R}_G - \varrho G B^2 - \beta^2 V \right\} d^2r. \quad (6.15)$$

onde as funções auxiliares  $\varrho(\varphi_n)$ ,  $b(\varphi_n)$  e  $Z(\varphi_n)$  são necessárias para o estabelecimento do limite BPS.

O termo  $\lambda^2 Z \epsilon_{ij} A_i (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{\varphi})$  pode ser reescrito de modo que obtemos a seguinte expressão

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \varphi_n} = W_{\varphi_n} \quad (6.16)$$

Considerando (6.16) na densidade de energia, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_{tot} = \int \left\{ \varrho G (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp 2\varrho G B b - \varrho G b^2 - \frac{\lambda^2}{2} W_{\varphi_n}^2 \right. \\ \left. \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_i \vec{\varphi} \times \partial_j \vec{\varphi}) \mp \epsilon_{ij} \lambda^2 [\partial_j (A_i W) - W (\partial_j A_i)] \right. \\ \left. + \beta^2 \mathcal{R}_G - \varrho G B^2 - \beta^2 V \right\} d^2 r. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Distribuindo os termos nos colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} E_{tot} = \int d^2 r \left\{ \varrho G (B \pm b)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \mp 2\varrho G B b - \varrho G b^2 - \frac{\lambda^2 W_{\varphi_n}^2}{2} \right. \\ \left. \mp \lambda^2 W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_1 \vec{\varphi} \times \partial_2 \vec{\varphi}) \pm \lambda^2 W B + \beta^2 \mathcal{R}_G - \varrho G B^2 - \beta^2 V \right\} \\ \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2 r \partial_j (A_i W), \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde usamos a definição tensorial do campo magnético  $B = -\epsilon_{ij} \partial_i A_j$ .

A energia total deve ser escrita em termos da carga topológica e de termos de derivada total; portanto, os termos extras em (6.18) devem ser desconsiderados, o que leva os seguintes resultados: os termos proporcionais ao campo  $B(r)$  fornecem a expressão

$$\mp 2\varrho G B b \pm \lambda^2 W B = 0, \quad (6.19)$$

que nos permite escrever a função auxiliar  $b(\varphi_n)$

$$b = \frac{\lambda^2 W}{2\varrho G}. \quad (6.20)$$

Os termos restantes

$$-\varrho G b^2 - \frac{\lambda^2 W_{\varphi_n}^2}{2} + \beta^2 \mathcal{R}_G - \varrho G B^2 = \beta^2 V, \quad (6.21)$$

compõem o potencial de auto-interação

$$V(\varphi_n) = (\mathcal{R}_G - \varrho g^2 \mathcal{R}_G^2 + \varrho g^2) - \frac{\lambda^4 W^2}{4\varrho G \beta^2} - \frac{\lambda^2}{2\beta^2} W_{\varphi_n}^2. \quad (6.22)$$

A equação do superpotencial, (6.21), agora possui uma contribuição adicional devido a presença da permeabilidade  $G(\varphi_n)$ . No entanto, a solução permanece unívoca e satisfaz as condições de fronteira para  $V(\varphi_n)$

$$\lim_{|\vec{r}'| \rightarrow \infty} W(\varphi_n) = 0, \quad (6.23)$$

$$\lim_{|\vec{r}'| \rightarrow \infty} W_{\varphi_n}(\varphi_n) = 0. \quad (6.24)$$

Por fim, escrevemos a função auxiliar  $\alpha(\varphi_n)$ , que depende  $\mathcal{R}_G$  e da permeabilidade  $G(\varphi_n)$

$$\alpha = \frac{1}{2g^2\mathcal{R}_G}. \quad (6.25)$$

Tendo em vista os resultados anteriores, a energia total é reescrita como segue

$$E_{tot} = \int \varepsilon(r) d^2r = E_0 + E_{BPS} \mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2r \partial_j (A_i W), \quad (6.26)$$

na qual

$$E_0 = \int d^2r \left( \frac{1}{2g^2\mathcal{R}_G} G \left( B \pm \frac{g^2\mathcal{R}_G\lambda^2 W}{G} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (Q \pm W_{\varphi_n})^2 \right) \quad (6.27)$$

e

$$E_{BPS} = \mp \lambda^2 \int d^2r W_{\varphi_n} \vec{\varphi} \cdot (\partial_1 \vec{\varphi} \times \partial_2 \vec{\varphi}). \quad (6.28)$$

A condição de vácuo  $W_{\varphi_n}(r \rightarrow \infty) = 0$ , anula a última integral em (6.26), ou seja

$$\mp \lambda^2 \epsilon_{ij} \int d^2r \partial_j (A_i W) = 0. \quad (6.29)$$

Ao impor a minimização da energia total, é necessário que a integral (6.27) seja anulada, isto é

$$E_{tot} \geq E_{BPS}. \quad (6.30)$$

A equação (6.30) é identificada como limite inferior da energia que ocorre quando os campos atingem seus valores de vácuo. Neste mesmo limite, as equações de primeira ordem

$$B \pm \frac{g^2\mathcal{R}_G\lambda^2 W}{G} = 0, \quad (6.31)$$

$$Q \pm W_{\varphi_n} = 0, \quad (6.32)$$

devem ser satisfeitas. As equações (6.31) e (6.32) são as equações BPS do modelo, a partir da qual vamos obter as soluções da teoria.

Por outro lado, o potencial de auto-interação, que manifesta a quebra espontânea da simetria, pode ser reescrito como

$$V(\varphi_n) = \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{G\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda^2}{2\beta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_n}\right)^2. \quad (6.33)$$

Podemos também escrever o potencial geral

$$\nu(\varphi_n) = \beta^2 (1 - V(\varphi_n)), \quad (6.34)$$

como

$$\nu(\varphi_n) = \beta^2 \left[1 - \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{G\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda^2}{2\beta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_n}\right)^2\right]. \quad (6.35)$$

### 6.3 Soluções de primeira-ordem

Nesta seção, vamos obter as soluções do modelo generalizado por meio da resolução das equações BPS (6.31) e (6.32). Partiremos dos mesmos Ansatzes empregados nos capítulos anteriores, a fim de restringirmos o modelo para um cenário planar; são eles

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(N\theta) \sin f(r) \\ \sin(N\theta) \sin f(r) \\ \cos f(r) \end{pmatrix}, \quad (6.36)$$

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_i = -\epsilon_{ij} \hat{x}_j \frac{Na(r)}{r}, \quad (6.37)$$

na qual as funções  $a(r)$ ,  $f(r)$  e  $W(r)$  satisfazem as condições de contorno

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad W(0) = W_0, \quad (6.38)$$

com  $W_0$  uma constante. Adotando a redefinição feita em [15], reescrevemos o campo  $\varphi_3$  como

$$\varphi_3 = \cos f(r) = 1 - 2h(r), \quad (6.39)$$

onde a função radial  $h(r)$  satisfaz a condição de fronteira  $h(0) = 1$ .

Em segundo lugar, adotaremos a seguinte notação para o campo magnético

$$B(r) = -\frac{N}{r} \frac{da(r)}{dr}, \quad (6.40)$$

onde usamos  $B = -\epsilon_{ij}\partial_i A_j$  e o Ansatz (6.37).

A energia BPS, quando escrita usando os Ansatzes, torna-se

$$E_{BPS} = \mp 2\pi N \lambda^2 W_0. \quad (6.41)$$

Em contrapartida, a densidade de energia no limite BPS assume a seguinte forma

$$\varepsilon_{BPS}(r) = \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{G} \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{G\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\lambda^4}{4} \left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)^2. \quad (6.42)$$

Quando a coordenada radial aproxima-se do seu valor assintótico, os campos atingem seus estados de vácuo cujos valores devem proporcionar soluções bem comportadas. Portanto, os campos de Skyrme e de calibre devem satisfazer as condições de fronteira

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dh}{dr} = 0, \quad (6.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{da}{dr} = 0, \quad (6.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dW}{dr} = 0. \quad (6.45)$$

Assim como a energia, as equações BPS podem ser projetadas em termos dos ansatz, assumindo a seguinte forma

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = \pm \frac{g^2 \lambda^2 W}{G} \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2}{G\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.46)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = \pm \frac{\partial W}{\partial h}. \quad (6.47)$$

## 6.4 Fluxo Magnético

Nesta seção, vamos obter a expressão para o fluxo generalizado e verificar se existe ou não modificação em relação ao fluxo no modelo de Born-Infeld usual (4.59). Partindo da definição de fluxo

$$\Phi_B = \int d^2r B(r) = 2\pi \int r dr B(r). \quad (6.48)$$

Usando (6.40), e as condições de contorno para o campo de calibre, obtemos

$$\Phi_B = -2\pi N a_\infty. \quad (6.49)$$

O parâmetro  $a_\infty$ , a princípio, não possui um valor conhecido. Desse modo, o fluxo magnético é não quantizado. Contudo, reescrevendo-o em termos de  $W(h)$ , torna-se possível quantizar o fluxo. Adotando o mesmo procedimento dos capítulos anteriores, manipulando as equações BPS (6.46) e (6.47), obtemos uma expressão para  $a_\infty$  dada por

$$a_\infty = -1 + \exp(-\lambda^2 g^2 \mathcal{F}(1)). \quad (6.50)$$

Assim, reescrevemos o fluxo (6.49), como segue

$$\Phi_B = 2\pi N [1 - \exp(-\lambda^2 g^2 \mathcal{F}(1))], \quad (6.51)$$

em que

$$F(h) = \int_0^1 \frac{4W(h')}{W_h} \left(1 - \frac{g^2 \lambda^4 W^2(h')}{G\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dh'. \quad (6.52)$$

## 6.5 Soluções generalizadas

Vamos agora determinar numericamente as soluções do modelo descrito por (6.2) no cenário particular descrito pelos Ansatzes. De início, vamos adotar o mesmo superpotencial dos modelos anteriores

$$W(h) = \frac{h^2}{\lambda^2}. \quad (6.53)$$

Por meio dessa escolha, obtemos um potencial o tipo

$$V = \left(1 - \frac{g^2 h^4}{G\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{2\beta^2 \lambda^2}, \quad (6.54)$$

e as equações BPS

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = -\frac{g^2 h^2}{G} \left(1 - \frac{g^2 h^4}{G\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.55)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{\lambda^2}, \quad (6.56)$$

onde escolhemos os sinais inferiores para os quais  $N > 0$ .

As soluções de Skyrmons planares dependem de dois campos: o superpotencial  $W(h)$ , dado pela equação (6.53) e da permeabilidade generalizada  $G(\varphi_n)$ , que será escolhida a posteriori.

O modelo atual compreende, ao mesmo tempo, uma generalização dos modelos estudados nos capítulos 3 e 4, que são definidos pelas densidades lagrangianas (4.5) e (5.1), respectivamente. Buscamos obter soluções de skyrmions em meios magnéticos que são caracterizados pela

escolha de uma forma funcional da permeabilidade, no contexto de uma eletrodinâmica livre de divergências. Para tal, e considerando a conexão entre os modelos estudados nos capítulos precedentes, adotaremos a mesma permeabilidade empregada no capítulo 4. Assim, as soluções do modelo atual, descrito pela densidade lagrangiana (6.2), deve reproduzir as soluções do modelo (5.1), no limite em que  $\beta \rightarrow \infty$ .

A função permeabilidade é definida a seguir

$$G(h) = \frac{1}{(\alpha - h^2)^2}. \quad (6.57)$$

Desse modo, restringimos a configuração de campo; o potencial de auto-interação e as equações de primeira ordem são escritos como segue

$$V = \left(1 - \frac{g^2 h^4 (\alpha - h^2)^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{2\beta^2 \lambda^2}, \quad (6.58)$$

$$\frac{N}{r} \frac{da}{dr} = -g^2 h^2 (\alpha - h^2)^2 \left(1 - \frac{g^2 h^4 (\alpha - h^2)^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.59)$$

$$\frac{4N(1+a)}{r} \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{\lambda^2}. \quad (6.60)$$

As soluções dessas equações devem, devido ao cenário descrito por (6.57), apresentar perfis que diferem das soluções descritas pelas equações (4.63) e (4.64). No entanto, o comportamento dos campos nas fronteiras devem ser mantidos, uma vez que os campos devem satisfazer as condições de contorno topológicas.

A partir da escolha de (6.53) e (6.57), podemos reescrever a equação (6.52) como

$$F(h) = \int_0^1 2h' (\alpha - h'^2)^2 \left(1 - \frac{(\alpha - h'^2)^2 g^2 h'^4}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dh'. \quad (6.61)$$

A integral anterior não possui solução analítica. No entanto, podemos analisar o fluxo por meio do estudo da raízes da função  $\mathcal{F}_h$

$$\mathcal{F}_h = 2h' (\alpha - h'^2)^2 \left(1 - \frac{(\alpha - h'^2)^2 g^2 h'^4}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.62)$$

As raízes do numerador são dadas por

$$2h' (\alpha - h'^2)^2 = 0, \quad (6.63)$$

cujas raízes são

$$h'_1 = 0, \quad h'_2 = \sqrt{\alpha} \text{ e } h'_3 = -\sqrt{\alpha}. \quad (6.64)$$

O polinômio do denominador deve ser positivo, uma vez  $\mathcal{F}_h$  deve ser real; desse modo, vamos encontrar certas restrições nos valores de  $\alpha$  para  $g$  e  $\beta$  fixos.

Para que  $\mathcal{F}_h \in \mathbb{R}$  temos que impor

$$\frac{(\alpha - h'^2)^2 g^2 h'^4}{\beta^2} < 1, \quad (6.65)$$

o que nos leva ao resultado a seguir

$$(\alpha - h'^2)^2 g^2 h'^4 < \beta^2. \quad (6.66)$$

Analisando (6.66) nos valores limites de  $h'$ , obtemos

$$(\alpha - 1)^2 g^2 < \beta^2. \quad (6.67)$$

Ou seja, existe uma relação entre  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $g$  que impõem uma restrição ao fluxo magnético, que é real quando a condição acima é satisfeita.

## 6.6 Soluções numéricas

Assim como nos capítulos anteriores, vamos estudar o comportamento dos campos  $h(r)$  e  $a(r)$  nas regiões de fronteira. Primeiro, vamos considerar as soluções na região próxima da origem, onde os campos são dados por

$$h(r) \approx 1 - \frac{1}{4N\lambda^2} r^2 + \frac{1}{32N^2\lambda^4} \frac{\left(-2g^2(\alpha-1)^2\lambda^2 + \sqrt{1 - \frac{(\alpha-1)^2 g^2}{\beta^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{(\alpha-1)^2 W_0^2 g^2 \lambda^4}{\beta^2}}} r^4 + O(r^5), \quad (6.68)$$

onde

$$\mathcal{A}_0 = \left(1 - \frac{(\alpha-1)^2 g^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.69)$$

$$a(r) \approx -\frac{\mathcal{A}_0 g^2 (\alpha-1)^2}{2N} r^2 - \frac{g^2 \mathcal{A}_0^3 \left\{ \frac{g^4}{\lambda^2} - \frac{1}{2} (\alpha-1)^5 + \frac{\beta^2}{\lambda^2} \Omega \right\}}{4N^2 \beta^4} r^4 + O(r^6). \quad (6.70)$$

com

$$\Omega = \left\{ -\frac{g^2}{2} (\alpha - 4) (\alpha - 1)^3 + \frac{\beta^2}{2} [(\alpha - 2)^2 - 1] \right\}. \quad (6.71)$$

Do comportamento dos campos próximos da origem, nota-se a ocorrência de singularidades relacionadas ao parâmetro  $\beta$ , como pode ser observado em  $\mathcal{A}_0$

$$\mathcal{A}_0 = \left( 1 - \frac{g^2 \lambda^4 W_0^2 (\alpha - 1)^2}{\beta^2} \right)^{-1/2}. \quad (6.72)$$

Portanto, as soluções bem-definidas existem se o parâmetro de  $\beta$  satisfizer a seguinte condição

$$\beta > \beta_c = g \lambda^2 W_0 (\alpha - 1). \quad (6.73)$$

Assim, esperamos que as soluções de sólitons bem-comportados devem existir somente no intervalo

$$\beta_c < \beta < \infty. \quad (6.74)$$

Para regiões próximas do limite assintótico, os campos possuem valores dados por

$$h(r) \approx C_\infty^{(2)} \exp(-\xi r^2), \quad (6.75)$$

e

$$\begin{aligned} a(r) = & a_\infty + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2\lambda^4 \beta^2} g^4 \alpha^4 + \lambda^2 g^2 \right] (C_2)^6 (1 + a_\infty) \exp(-6\xi r^2) \\ & + [\lambda^2 g^2 \alpha^2 - g^2 (C_2)^2 \beta^2 \exp(-2\xi r^2)] (C_2)^2 (1 + a_\infty) \exp(-2\xi r^2), \end{aligned} \quad (6.76)$$

ou, simplificando

$$\begin{aligned} a(r) \approx & a_\infty + (1 + a_\infty) (C_\infty^2)^2 \exp(-2\xi r^2) \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2\lambda^4 \beta^2} g^4 \alpha^4 + \lambda^2 g^2 \right] (C_2)^4 \exp(-4\xi r^2) \right. \\ & \left. + [\lambda^2 g^2 \alpha^2 - g^2 (C_2)^2 \beta^2 \exp(-2\xi r^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (6.77)$$

onde consideramos até primeira contribuição do parâmetro de Born-Infeld. Além disso, temos que  $C_\infty^2$  é uma constante constante positiva e  $a_\infty$  é o valor de vácuo do campo de calibre, e  $\xi$  é dada por

$$\xi = \frac{1}{4N\lambda^2 (1 + a_\infty)}. \quad (6.78)$$

As soluções numéricas para o campo de Skyrme  $h(r)$  e o campo de calibre  $a(r)$  são apresentadas considerando um valor fixo da constante de acoplamento,  $g = 1$ , para o valor de  $\beta = 1.01$  e  $N = \lambda = 1$ . Uma vez escolhido o valor do parâmetro de Born-Infeld ( $\beta$ ), a condição (6.73) estabelece um limite para o valor do parâmetro  $\alpha$  e, conseqüentemente, determina o intervalo de existência de soluções bem comportadas, ou seja, estáveis. Desse modo, obteremos soluções para os seguintes valores:  $\alpha = 0$  (curva preta),  $\alpha = 0.25$  (curva vermelha),  $\alpha = 0.50$  (curva azul),  $\alpha = 0.75$  (curva rosa),  $\alpha = 0.85$  (curva magenta),  $\alpha = 0.95$  (curva ciano),  $\alpha = 1.00$  (curva rosa),  $\alpha = 1.10$  (curva azul escuro),  $\alpha = 1.20$  (curva vermelho escuro),  $\alpha = 1.50$  (curva laranja),  $\alpha = 1.75$  (curva cinza) e  $\alpha = 1.85$  (curva magenta escuro).

As figuras (6.1) e (6.2) apresentam as soluções para o campo de Skyrme  $h(r)$ . As soluções, no intervalo  $0 \leq \alpha \leq 1$ , apresentam perfis que se assemelham as soluções do modelo baby-Skyrme-Maxwell na presença de  $G$  (capítulo 4), quando  $0 \leq \alpha < 2$ .

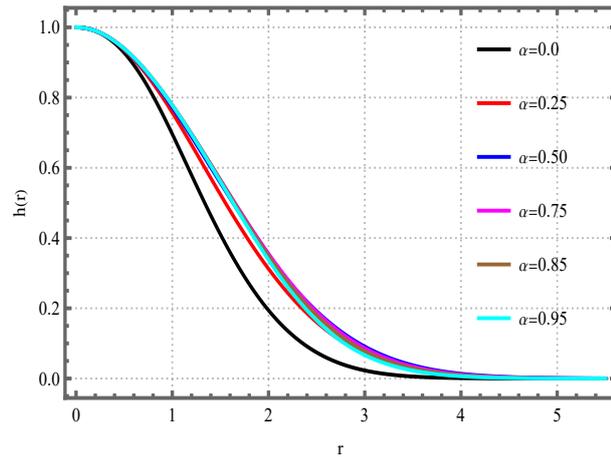


Figura 6.1: Soluções do campo de Skyrme para  $0 < \alpha < 1$  obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) via as condições de contorno (6.38) e (6.45).

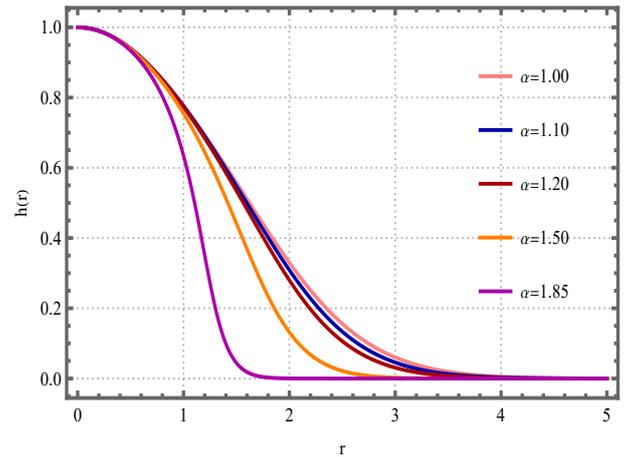


Figura 6.2: Soluções do campo de Skyrme para valores de  $1 < \alpha < 2.01$  obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) e das condições de contorno (6.38) e (6.45).

As soluções para o campo de calibre são mostradas nas figuras (6.3) e (6.4), com as mesmas convenções adotadas nas figuras (6.1) e (6.2). Os perfis também se assemelham as soluções do modelo investigado no capítulo 3, com mudanças somente nos valores do campo no limite assintótico.

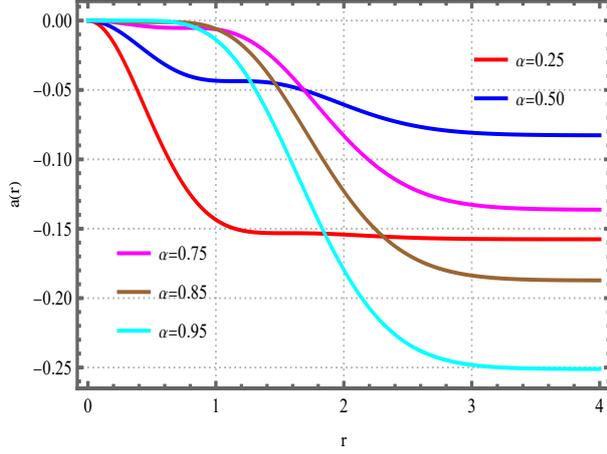


Figura 6.3: Soluções do campo de calibre para  $0 < \alpha < 1$ , obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) via as condições de contorno (6.38) e (6.45).

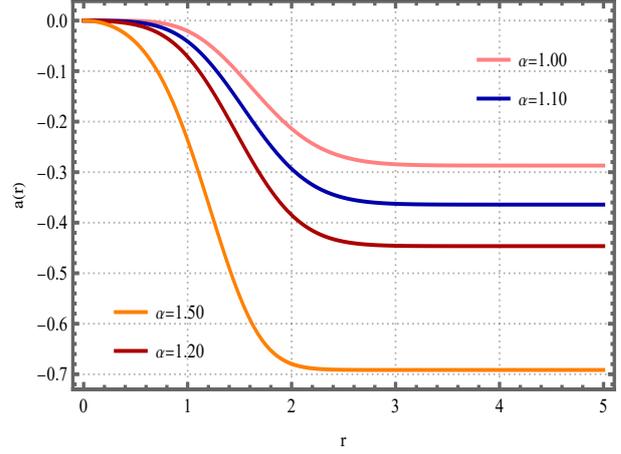


Figura 6.4: Soluções do campo de gauge  $a(r)$  para valores de  $1 < \alpha < 2.01$  obtidas a partir das equações (6.59) e (6.60) e com auxílio das condições de contorno (6.38) e (6.45).

### 6.6.1 Perfis do campo $B(r)$

Nesta subsecção, vamos investigar como o parâmetro  $\alpha$  determina a forma das soluções de sólitons. Fixando as constantes  $g$  e  $\lambda$ , iniciamos escrevendo o campo magnético em função do superpotencial  $W(h)$

$$B(r) = h^2 (\alpha - h^2)^2 \left( 1 - \frac{h^4 (\alpha - h^2)^2}{\beta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.79)$$

Calculando a derivada primeira de  $B(r)$ , obtemos

$$\frac{dB}{dr} = \frac{2h(\alpha - h^2)\Lambda}{\left(1 - \frac{h^4(\alpha - h^2)^2}{\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dh}{dr}, \quad (6.80)$$

com a função auxiliar

$$\Lambda(h) = (\alpha - 3h^2) + (\alpha - h^2)\beta^{-2}h^6. \quad (6.81)$$

A condição  $B'(R) = 0$  leva aos pontos extremos de interesse que estão compreendidos entre os valores limites do campo de Skyrme  $h(r)$

$$(\alpha - h^2) = 0, \quad (6.82)$$

e

$$(\alpha - 3h^2) + (\alpha - h^2)\beta^{-2}h^6 = 0. \quad (6.83)$$

A equação (6.82) fornece a seguinte raiz

$$h(r = R_1) = \sqrt{\alpha}, \quad (6.84)$$

da qual, neste ponto, o campo magnético vale

$$B_1 = B(h = h_1) = 0. \quad (6.85)$$

Isto é, quando  $0 < \alpha < 1$ , o ponto  $r = R_1$  representa o ponto no qual o campo magnético desaparece. Neste caso, à medida que os valores de  $\alpha$  aumentam,  $r = R_1$  move-se para a origem.

Por outro lado, a equação (6.83) possui uma raiz racional  $h_2 = h(r = R_2)$  que depende do parâmetro  $\alpha$ . Na tabela (6.1) os valores das raízes  $h_1$  e  $h_2$  para alguns valores de  $\alpha$ . Os valores do campo  $B_2$  calculado nesses pontos são mostrados na tabela (6.2).

$\alpha$	$h_1$	$h_2$
0.25	0.5000	0.2887
0.50	0.7071	0.4085
0.75	0.8660	0.5013
1.00	0.1000	0.5821
1.25	–	0.6591
1.50	–	0.7409
1.75	–	0.8425

Tabela 6.1: Raízes  $h_1$  e  $h_2$  para alguns valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	$B_1$	$B_2$
0.25	0.0023	0.8398
0.50	0.0186	0.2878
0.75	0.0630	0.0645
1.00	0.1520	0.0
1.25	0.3087	0.0645
1.50	0.5799	0.2878
1.75	1.1260	0.8398

Tabela 6.2: Valores  $B_1$  e  $B_2$  para alguns valores de  $\alpha$ .

As soluções para o setor magnético, no intervalo  $0 < \alpha < 1$ , representam um lump posicionado em  $r = 0$ , cercado por um anel de raio  $R_2$  e amplitude  $B_2$ , que corroboram com os resultados numéricos. O ponto  $R_1$  representa o limite entre o anel externo e o lump interno ( $R_2 > R_1$ ) cuja a amplitude é dada por

$$B(r) = (\alpha - 1)^2 \left( 1 - \frac{(\alpha - 1)^2}{\beta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.86)$$

que é o valor do campo magnético na origem.

Quando  $\alpha = 1$ , a equação (6.84) é satisfeita somente quando  $r = 0$ , nesse caso o campo magnético deve anular-se na origem, isto é,  $R_1 = 0$ . A equação (6.83) admite somente uma única raiz, o que implica que  $B(r)$  é simplesmente um anel.

Para valores  $\alpha > 1$  a equação (6.84) não é satisfeita, de modo que o campo magnético não possui zeros para valores intermediários de  $r$ ; enquanto que a equação (6.83) admite uma raiz única. Para tais valores de  $\alpha$  o campo magnético possui forma de anéis cujo os valores na origem são dados pela equação (6.86). Além disso, à medida que  $\alpha$  aumenta, o valor do raio do anel diminui, aproximando-se da origem.

Soluções bem comportadas para o campo magnético estão sujeitas a uma restrição entre os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Para demonstrar essa afirmação, recorreremos a equação (6.73), que após fixarmos as constantes  $g$  e  $\lambda$ , é escrita como

$$\beta > \beta_c = (\alpha - 1), \quad (6.87)$$

ou

$$\beta > (\alpha - 1). \quad (6.88)$$

A partir da escolha de  $\beta$ , a condição (6.88), torna-se

$$\alpha < 2.01. \quad (6.89)$$

Portanto, para valores de  $\alpha \geq 2.01$ , as soluções não são estáveis. Os perfis para  $B(r)$  são mostrados nas figuras (6.5) e (6.6), para valores e  $\alpha$  no intervalo de soluções estáveis.

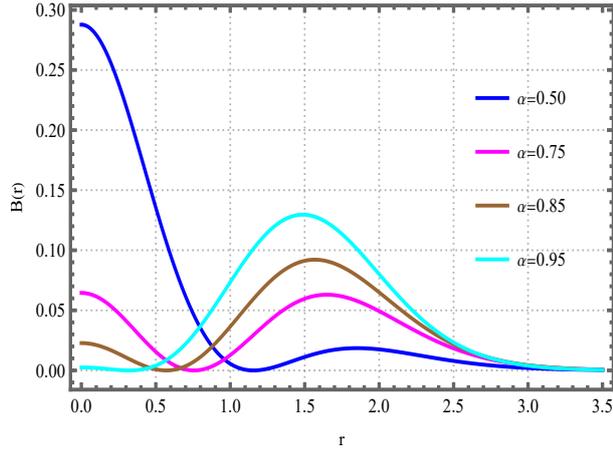


Figura 6.5: Soluções do campo magnético para  $0 < \alpha < 1$  obtidas a partir da equação (6.59).

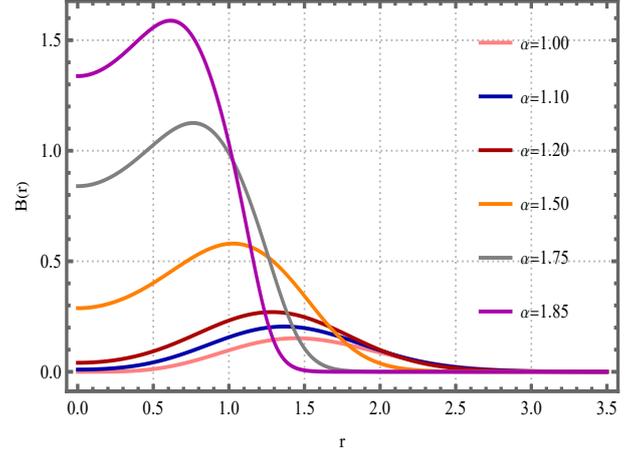


Figura 6.6: Soluções do campo magnético para  $1 < \alpha < 2.01$  obtidas a partir de (6.59).

Das soluções para  $B(r)$  apresentadas nas figuras acima, observa-se que os perfis de anéis estão restritos, aproximadamente, ao intervalo  $0.95 \leq \alpha \leq 1.20$ . Fora desse intervalo, as curvas apresentam dois tipos de comportamentos. O primeiro são caracterizados por perfis de lumps que estão posicionados na origem e centrado por anéis; neste caso, a amplitude dos lumps são dadas pelos seus respectivos valores na origem. O segundo tipo de solução também são lumps, porém sua amplitude ocorre para um valor da coordenada radial diferente de zero.

As soluções para a densidade de energia são mostradas nas figuras (6.7) e (6.8). Para todos os valores de  $\alpha$  dentro do intervalo permitido, as soluções apresentam perfil monotônico partindo de um valor não nulo na origem e tendendo a zero no infinito. Esse comportamento contrasta com as soluções para a densidade de energia do modelo baby Skyrme com  $G$ , capítulo 4; onde as soluções apresentavam, dependendo do intervalo, diferentes estruturas incluindo lumps e anéis. As convenções das curvas são as mesmas adotadas para o campo magnético.

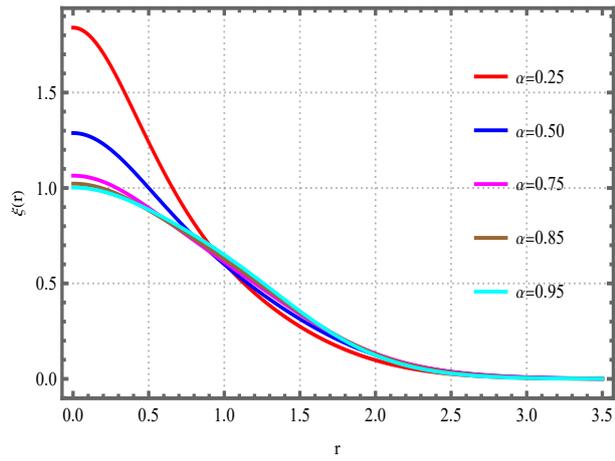


Figura 6.7: Soluções da densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  para  $0 < \alpha < 1$  obtidas a partir de (6.42).

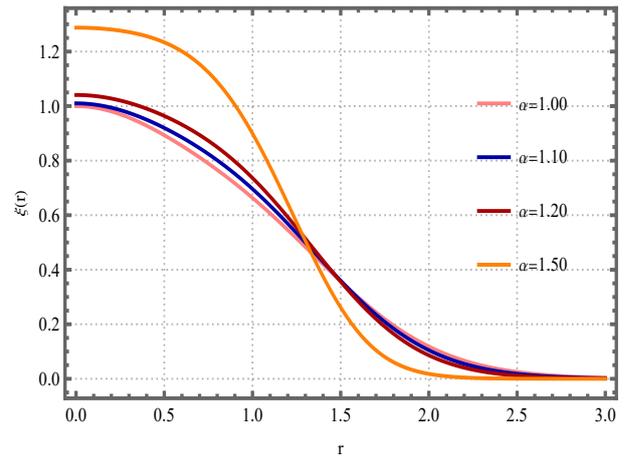


Figura 6.8: Soluções da densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  para valores de  $1 < \alpha < 2.01$  obtidas a partir de (6.42).

# Capítulo 7

## Vórtices Quirais no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs generalizado

O estudo de vórtices em teoria de campos foi motivado pela ocorrência dessas estruturas no eletromagnetismo. No trabalho de Nielsen e Olesen [102], vórtices não carregados (eletricamente) surgem como soluções regulares das equações de campo da teoria na Maxwell-Higgs. O modelo é descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - V(|\phi|), \quad (7.1)$$

em que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor do campo eletromagnético, e  $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$  é a derivada covariante que acopla minimamente o campo de calibre e o campo de Higgs. Por ultimo, temos o potencial de auto-interação  $V(|\phi|)$  que induz a quebra da simetria do modelo.

As soluções são estruturas planares, apresentam simetria rotacional e energia total finita. Adotaremos o sistema de unidades naturais em que  $c = \hbar = 1$ . Nesse sistema, as dimensões de massa ( $M$ ), comprimento ( $L$ ) e tempo ( $T$ ) são relacionadas por  $M = L^{-1} = T^{-1}$ . A partir do método BPS, podemos obter vórtices estáveis por meio da minimização do funcional de energia, de onde obtemos um sistema equações diferenciais de primeira ordem acopladas (equações BPS), cuja solução fornece as soluções de vórtices topológicos. A vantagem dessa abordagem reside na obtenção da energia mínima da configuração de campo.

No mesmo contexto, vórtices planares carregados foram obtidos na eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs (CSH) [103]. O modelo descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CSH} = -\frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa} + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - V(|\phi|), \quad (7.2)$$

que é invariante de Lorentz e possui uma simetria de calibre  $U(1)$  local. O primeiro termo de (7.2) corresponde a lagrangiana da teoria de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa}. \quad (7.3)$$

A densidade lagrangiana  $\mathcal{L}_{CS}$  pode ser escrita em qualquer dimensão ímpar do espaço-tempo, porém, somente em  $(2+1)$ -dimensões espaço-temporais ela é quadrática no campo de calibre [104]. Um termo quadrático no campo de calibre é aquele que possui termos de segunda ordem na potencia de  $A_\mu$ , que é comum em teorias de campo linearizadas. Além disso, o fator que multiplica o termo quadrático é denominado de coeficiente de massa, que determina a massa associada bóson descrito pelo campo.

Em (7.3), o coeficiente  $\kappa$  é uma constante com dimensão de massa denominada de parâmetro de Chern-Simons. Ele é responsável por medir a intensidade do termo de Chern-Simons e induzir a presença de soluções eletricamente carregadas. Além disso, o termo de Chern-Simons provoca a geração de massa para o campo de calibre, o que leva a muitas aplicações interessantes como: efeito Hall quântico fracionário [105, 106] e sistemas antiferromagnéticos [107].

Motivados pela ocorrência das soluções de vórtices nos modelos puros de Maxwell-Higgs e Chern-Simons, C. Lee, K. Lee e H. Min [108], propuseram um modelo composto pelos termos de Maxwell e Chern-Simons. A teoria ficou conhecida como Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH), com a densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_{MCSH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu F_{\nu\kappa} + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi - V(|\phi|, \Psi). \quad (7.4)$$

O modelo de MCSH fornecem soluções de vórtices topológicos e não-topológicos e pode ser entendido como o protótipo de uma teoria quiral.

A densidade lagrangiana (7.4) deriva de uma teoria mais geral de MCSH, definida em  $(3+1)$ -dimensões espaço-temporais. Neste caso, o setor associado ao termo de Chern-Simons é dado por  $\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}(k_{AF})_{\hat{\mu}}A_{\hat{\nu}}F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}$ . A densidade lagrangiana deste modelo é escrita como

$$\mathcal{L}_{MCFSH} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}(k_{AF})_{\hat{\mu}}A_{\hat{\nu}}F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}} + (D_{\hat{\mu}}\phi)^* D^{\hat{\mu}}\phi - V(|\phi|). \quad (7.5)$$

Uma densidade lagrangiana desse tipo foi proposta por M. Carrol, G. B. Field e R. Jackiw [109]. O objetivo era investigar as consequências da violação das simetrias de Lorentz e CPT. Para tal, propuseram uma modificação na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, pela adição de um termo do tipo Chern-Simon, denominado de termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ).

O termo de CFJ está relacionado a violação da simetria de Lorentz e CPT, correspondendo a parte CPT-ímpar do setor eletromagnético do modelo padrão estendido. A eletrodinâmica de CFJ foi a primeira teoria Clássica a considerar a quebra da simetria de Lorentz.

Através de um processo de redução dimensional, obtemos a densidade lagrangiana de MCFJH em  $(2 + 1)$  dimensões

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFSH} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\sigma\mu\nu}A_\sigma F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\mu\sigma}(k_{AF})_\rho A_\sigma \partial_\mu \Psi - \frac{\Psi}{2}\varepsilon^{\rho\mu\nu}(k_{AF})_\rho \partial_\mu A_\nu \\ & + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi - e^2\Psi^2|\phi|^2 - V(|\phi|). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Aqui,  $(k_{AF})_\rho$  é a versão planar do campo de fundo de Carroll-Field-Jackiw, responsável pelas quebras de simetria. O parâmetro de Chern-Simons é  $\kappa = (k_{AF})_{\bar{3}}$ , e  $\Psi = A^{\bar{3}}$  é a terceira componente do campo de calibre que é assumida como um campo escalar com dinâmica própria, gerado no processo de redução dimensional.

Buscamos estudar configurações de campos sem foco na quebra da simetria de Lorentz e CPT; desse modo, vamos considerar  $(k_{AF})_\mu = 0$ . Portanto, a densidade lagrangiana (7.6), torna-se exatamente a densidade lagrangiana do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs definida em (7.4).

O potencial de auto-interação,  $V(|\phi|, \Psi)$ , responsável pela quebra espontânea da simetria da teoria é escrito como

$$V(|\phi|, \Psi) = V(|\phi|) + e^2\Psi^2|\phi|^2. \quad (7.7)$$

## 7.1 Eletrodinâmica quiral

Quiralidade é uma propriedade geométrica relevante em vários campos da ciências, como a matemática [110], química [111], biologia [112] e genética [113]. O termo quiralidade foi introduzido por Lord Kelvin [114], que definiu objetos quirais como aqueles que não podem ser sobrepostos às suas imagens espelhadas. Um meio é dito quiral quando não possui simetria

de inversão de paridade; logo, no eletromagnetismo em meios materiais, a quiralidade está associada à simetria quiral entre as moléculas que a constitui.

Na teoria clássica de campos, as leis de conservação estão associadas a simetrias conservadas [98]. No entanto, em muitos casos, essas simetrias não sobrevivem no cenário da Teoria Quântica de Campos. A quebra da simetria clássica devido a efeitos quânticos é denominada de anomalia quântica [115]. Em sistemas compostos por férmions quirais, anomalias quânticas induzem fenômenos de transporte, que têm sido investigados em diversos setores da física. Isso inclui semi-metals de Weyl ou Dirac na física da matéria condensada [116–118] e na matéria eletrofraca em astrofísica [119, 120].

Um fenômeno de transporte bem conhecido, que resulta do surgimento de anomalias quânticas em matéria quiral, é o Efeito Quiral Magnético (EQM) [121, 122]. Na presença de um campo magnético externo  $\vec{B}_{ext}$ , a invariância rotacional dos spins dos férmions é quebrada. Assim, ocorre um desequilíbrio de quiralidade entre os férmions spins de mão direita e de mão esquerda, o que induz o surgimento de uma corrente elétrica na direção do campo externo aplicado

$$\vec{J}_{CME} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mu \cdot \vec{B}_{ext}, \quad (7.8)$$

onde  $e$  é a carga do férmion e  $\Delta\mu \equiv \mu_R - \mu_L$  é o potencial químico quiral, dado pela diferença entre os potenciais químicos dos férmions de mão direita e mão esquerda.

Outro efeito relacionado a anomalias quânticas é o Efeito Hall Anômalo (EHA), que ocorre na presença de uma separação entre os pontos de cruzamento de energia no espaço dos momentos (nós de Weyl) para férmions de mão direita e de mão esquerda, caracterizados por um vetor  $\Delta\vec{p}$  [123]. Quando um campo elétrico externo é aplicado, uma corrente é estabelecida no material magnético que, por sua vez, induz um desvio na direção do movimento dos elétrons no material. Este desvio produz uma corrente adicional

$$\vec{J}_{Hall} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\vec{p} \times \vec{E}, \quad (7.9)$$

que é perpendicular à direção da corrente original. Além disso, se existe um campo magnético presente, surge outro efeito anômalo que gera uma densidade de carga adicional

$$J_{Anom}^0 = -\frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\vec{p} \cdot \vec{B}_{ext}, \quad (7.10)$$

no material.

Os três efeitos descritos acima são manifestações da quebra espontânea da simetria devido a efeitos quânticos, que modificam a eletrodinâmica quiral ao introduzir termos que quebram a simetria de tempo e paridade. A conexão entre eletrodinâmica quiral e a teoria de MCSH está justamente na violação dessas simetrias discretas. Em [123], os autores propuseram a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw como uma teoria efetiva para explicar esses fenômenos. Os termos adicionais que surgem da teoria são então associados aos efeitos das anomalias quânticas. As equações de campo desse modelo se assemelham às equações de campo do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (7.6); modelo do qual obtemos a eletrodinâmica de MCSH.

A densidade lagrangiana (7.4)

$$\mathcal{L}_{MCSH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_{\mu}F_{\nu\kappa} + (D_{\mu}\phi)^* D^{\mu}\phi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi - V(|\phi|, \Psi). \quad (7.11)$$

uma eletrodinâmica quiral. No entanto, buscando generalizar o nosso modelo, propomos a adição de um setor escalar ao modelo original, de modo a considerar os efeitos não só da presença do termo de CS, mas também da presença do campo adicional. Desse modo, propomos a seguinte densidade lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCSHG} = & -\frac{G(\chi)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_{\mu}\phi)^* D^{\mu}\phi - \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_{\mu}F_{\nu\kappa} + \frac{G(\chi)}{2}\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\chi\partial^{\mu}\chi - e^2\Psi^2|\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi, \chi), \end{aligned} \quad (7.12)$$

onde a função  $U(|\phi|, \Psi, \chi)$  define um potencial que será determinado a posteriori.

Portanto, estamos interessados em obter estruturas BPS em uma eletrodinâmica imersa em um meio quiral, cujas propriedades dinâmicas são descritas pelo termo de Chern-Simons e por um termo adicional, um campo escalar neutro  $\chi(r)$ , cujo acoplamento com o setor eletromagnético é modulado por uma função não-trivial  $G(\chi)$ , que além de carregar as propriedades eletromagnéticas do meio, também é responsável por modificar os perfis dos campos inerentes às configurações de vórtices. Além disso, observa-se que quando  $G(\chi) = 1$ , o campo  $\chi$  se desacopla do setor de calibre e, como consequência, a densidade lagrangiana (7.12) se reduz à (7.4), do modelo de MCSH em um vácuo eletromagnético. Vale destacar que a presença do campo  $\chi(r)$  já foi considerada no contexto de vórtices topológicos com estruturas internas tanto no modelo de Maxwell-Higgs [124], quanto no modelo de Maxwell-CP(2) [125].

## 7.2 O modelo modificado

Usando o princípio variacional, escrevemos a ação  $\mathcal{S}$  como

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^2x dt. \quad (7.13)$$

Calculando a variação da ação,  $\delta\mathcal{S} = 0$ ,<sup>1</sup>, encontramos as equações de campo.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \partial_\beta \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\mu)} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = \partial_\rho \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi^*)} \right), \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = \partial_\tau \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau\Psi)} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} = \partial_\sigma \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\chi)} \right). \quad (7.15)$$

As equações (7.14) e (7.15) são as equações de Euler-Lagrange que descrevem a dinâmica do sistema. Portanto, a partir da minimização do funcional  $\mathcal{S}$ , obtemos as equações de campos da teoria, cujas soluções minimizam a própria ação  $\mathcal{S}$ .

Usando (7.12) em (7.14) e (7.15), obtemos as equações de campo da teoria para os campos  $A_\mu$ ,  $\phi$ ,  $\Psi$  e  $\chi$ , respectivamente.

$$\partial_\alpha (GF^{\alpha\mu}) - \frac{1}{2}\kappa\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = J^\mu, \quad (7.16)$$

$$D^\mu D_\mu\phi = -\frac{\partial u(|\phi|, \Psi)}{\partial\bar{\phi}} - e^2\Psi^2\phi, \quad (7.17)$$

$$\partial_\nu (G\partial^\nu\Psi) + 2e^2\Psi|\phi|^2 = -\frac{\partial u}{\partial\Psi}, \quad (7.18)$$

e

$$\partial^\mu\partial_\mu\chi + \frac{G_\chi}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{G_\chi}{2}\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi = -\frac{\partial U}{\partial\chi}, \quad (7.19)$$

em que  $J^\mu$  é a densidade de corrente conservada

$$J^\gamma = ie \left[ \phi\overline{(D^\gamma\phi)} - \bar{\phi}(D^\gamma\phi) \right], \quad (7.20)$$

e  $G_\chi = dG/d\chi$ .

Neste trabalho, estamos interessados em investigar configurações de campo estacionárias, isto é, que não possuem dependência temporal. Ao impor essa condição, a equação do campo de calibre (7.16), torna-se

$$\partial_j (G\partial_j A_0) + \kappa B = 2e^2 A^0 |\phi|^2. \quad (7.21)$$

<sup>1</sup>Seguindo o mesmo procedimento do capítulo 3

A presença do termo de Chern–Simons na expressão para a Lei de Gauss implica em soluções que possuem carga elétrica e fluxo magnético não nulo. Comparando (7.21) com a lei de Gauss escrita em [123], temos: a densidade de carga (fonte) da configuração  $J^0 = 2e^2 A^0 |\phi|^2$ ; e uma densidade de carga extra,  $\kappa \cdot B = J_{Anom}^0$ , na qual  $\kappa = -(e^2/4\pi^2)\Delta p$  (ver 7.10). Portanto, devido a presença das fontes,  $A_\mu = (0, A^i)$  não é mais uma solução trivial de (7.21).

A parte espacial da equação equação do campo de calibre fornece a lei de Ampère.

$$\partial_j (GF^{ji}) + \kappa \epsilon^{ij} \partial_j A_0 = J_i. \quad (7.22)$$

### 7.3 Formalismo BPS

A partir desse ponto, vamos aplicar o formalismo BPS para obtermos soluções estáveis da teoria descrita pela densidade lagrangiana (7.12). Como ponto de partida, vamos escrever o tensor de energia momento, que é dado por

$$T^{\lambda\rho} = -GF^{\lambda\nu} F^\rho{}_\nu + D^\lambda \phi (D^\rho \phi)^* + D^\rho \phi (D^\lambda \phi)^* + G\partial^\lambda \Psi \partial^\rho \Psi + \partial^\lambda \chi \partial^\rho \chi - \eta^{\lambda\rho} \mathcal{L}_{ntop}. \quad (7.23)$$

na qual a densidade lagrangiana  $\mathcal{L}_{ntop}$  corresponde a densidade lagrangiana (7.12) a menos da contribuição do termo de CS (7.3). A justificativa é que esse termo não contribui para o tensor de energia momento total.

O tensor de energia–momento é um tensor de ordem dois e simétrico em relação a troca de índices. Cada setor de  $\mathcal{T}^{\lambda\rho}$  descreve uma quantidade física, tais como: densidade de energia, o fluxo de energia e o momento. Em particular, a sua componente temporal, por definição, corresponde a densidade de energia da configuração, isto é,  $\varepsilon(r) = \mathcal{T}_{00}$ . Em vista disso, e considerando o regime de campos estacionários, podemos escrever que

$$\varepsilon(r) = -GF^{0\nu} F^0{}_\nu + D^0 \phi (D^0 \phi)^* + D^0 \phi (D^0 \phi)^* + G\partial^0 \Psi \partial^0 \Psi + \partial^0 \chi \partial^0 \chi - \eta^{00} \mathcal{L}_{ntop}, \quad (7.24)$$

na qual

$$F^{0\nu} F^0{}_\nu = -(\partial_i A^0)^2, \quad (7.25)$$

e

$$(D^0 \phi)^* D^0 \phi = e^2 A^0 |\phi|^2, \quad (7.26)$$

que resulta em

$$\varepsilon(r) = G(\partial_i A_0)^2 + 2e^2 A_0 |\phi|^2 - \mathcal{L}_{ntop}, \quad (7.27)$$

a partir da qual, usando a versão estacionária da densidade lagrangiana  $\mathcal{L}_{ntop}$ , dada por

$$\mathcal{L}_{ntop} = \frac{G}{2}(\partial_i A_0)^2 - \frac{GB^2}{2} + |D_0\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - \frac{G}{2}(\partial_i\Psi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\chi)^2 - e^2\Psi^2|\phi|^2 - U, \quad (7.28)$$

obtemos

$$\varepsilon(r) = \frac{G}{2}(\partial_i A_0)^2 + \frac{GB^2}{2} + |D_i\phi|^2 + \frac{G}{2}(\partial_i\Psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\chi)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + e^2\Psi^2 |\phi|^2 + U. \quad (7.29)$$

A densidade de energia (7.29) deve ser nula no limite

$$\lim_{|r|\rightarrow\infty} \varepsilon(r) = 0. \quad (7.30)$$

Para tal, as condições de fronteiras devem ser satisfeitas

$$\lim_{|r|\rightarrow\infty} \sqrt{G}\partial_i A_0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|r|\rightarrow\infty} \sqrt{G}B = 0, \quad (7.31)$$

$$\lim_{|r|\rightarrow\infty} D_i\phi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|r|\rightarrow\infty} \sqrt{G}\partial_i\Psi = 0, \quad (7.32)$$

$$\lim_{|r|\rightarrow\infty} \partial_i\chi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|r|\rightarrow\infty} A_0 = 0, \quad (7.33)$$

$$\lim_{|r|\rightarrow\infty} \Psi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|r|\rightarrow\infty} U = 0. \quad (7.34)$$

A correspondente energia total é escrita como

$$E_{tot}(r) = \int d^2r \varepsilon(r), \quad (7.35)$$

ou, em termos de (7.29)

$$E_{tot}(r) = \int d^2r \left\{ \frac{G}{2}(\partial_i A_0)^2 + \frac{GB^2}{2} + |D_i\phi|^2 + \frac{G}{2}(\partial_i\Psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\chi)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + e^2\Psi^2 |\phi|^2 + U \right\}. \quad (7.36)$$

As condições (7.31),(7.32),(7.33) e (7.34) garantem que a energia total (7.36) seja uma quantidade finita.

A implementação do formalismo BPS exige que a energia total  $E_{tot}(r)$  seja reescrita em termos de quadrados perfeitos; para isso, é necessário introduzir as funções auxiliares  $\Sigma \equiv$

$\Sigma(\phi, \Psi)$  e  $\Gamma \equiv \Gamma(\chi)$ , que serão determinadas adiante. Aplicando o formalismo BPS na energia  $E_{tot}(r)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
E_{tot}(r) = & \int d^2r \left\{ \frac{G}{2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + \frac{G}{2} (B \mp \Sigma)^2 + |D_{\pm} \phi|^2 + e^2 |\phi|^2 (A_0 \mp \Psi)^2 \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( \partial_i \chi \mp \epsilon_{ij} \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2 \pm B [G\Sigma + e |\phi|^2 + \kappa \Psi] \pm \partial_i \chi \left( \epsilon_{ij} \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} \right) \\
& \left. \pm \partial_j (\Psi G \partial_j A_0) \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j + U - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{G}{2} \Sigma^2 \right\}. \quad (7.37)
\end{aligned}$$

Aqui, usamos a identidade

$$|D_i \phi|^2 = |D_{\pm} \phi|^2 \pm eB |\phi|^2 \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j. \quad (7.38)$$

e a Lei de Gauss (7.21).

A energia total (7.37) possui termos que envolvem derivadas totais dos campos, são eles

$$\pm \int d^2r \partial_j (\Psi G \partial_j A_0) = 0, \quad (7.39)$$

e

$$\mp \int d^2r \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i J_j = 0, \quad (7.40)$$

que são anulados devido às condições de fronteira; desse modo, não contribuem para o cálculo da energia total. Por outro lado, o fator que multiplica o campo magnético é escolhido como sendo uma constante, de modo que possibilita fixar a função auxiliar  $\Sigma$

$$G\Sigma + e |\phi|^2 + \kappa \Psi = ev^2, \quad (7.41)$$

ou seja

$$\Sigma = \frac{e(v^2 - |\phi|^2) - \kappa \Psi}{G}. \quad (7.42)$$

Portanto, a energia total (7.37) torna-se

$$\begin{aligned}
E_{tot}(r) = & \int d^2r \left\{ \frac{G}{2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + \frac{G}{2} (B \mp \Sigma)^2 + |D_{\pm} \phi|^2 + e^2 |\phi|^2 (A_0 \mp \Psi)^2 \pm Bev^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \partial_i \chi \mp \epsilon_{ij} \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2 \pm \partial_i \chi \left( \epsilon_{ij} \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} \right) + U - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{G\Sigma^2}{2} \right\}. \quad (7.43)
\end{aligned}$$

A energia total deve ser definida em termos da carga topológica e de um termo de derivada total; desse modo, contribuições adicionais em (7.43) devem ser desconsideradas; logo, os dois últimos termos da segunda linha devem satisfazer

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{G \Sigma^2}{2} = -U. \quad (7.44)$$

Do resultado anterior obtemos o potencial de auto-interação

$$U = \frac{G}{2} \Sigma^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2, \quad (7.45)$$

que pode ser reescrito considerando (7.42)

$$U = \frac{1}{2G} \left( e(v^2 - |\phi|^2) - \kappa \Psi \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2. \quad (7.46)$$

Tendo em vista os resultados (7.42), (7.45) e (7.46), a energia total torna-se

$$E_{tot} = \int d^2 r \varepsilon = E_0 + E_{bps} \geq E_{bps}. \quad (7.47)$$

com

$$E_0 = \int d^2 r \left\{ \frac{G}{2} (\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi)^2 + \frac{1}{2G^2} (GB \mp e(v^2 - |\phi|^2) \pm \kappa \Psi)^2 + |D_{\pm} \phi|^2, \right. \\ \left. + e^2 |\phi|^2 (A_0 \mp \Psi)^2 + \frac{1}{2} \left( \partial_i \chi \mp \epsilon_{ij} \frac{\partial \Gamma_j}{\partial \chi} \right)^2 \right\}. \quad (7.48)$$

e

$$E_{bps}(r) = \pm e v^2 \int B d^2 r \pm \int \epsilon_{ij} \partial_i \Gamma_j d^2 r. \quad (7.49)$$

O limite inferior da energia é alcançado quando os campos possuem configurações que levam a integral sobre  $E_0 = 0$ , isto é,

$$E \geq E_{bps}. \quad (7.50)$$

No limite BPS a energia será a mínima possível quando a contribuição da integral (7.48) for nula. Para tal é necessário que o conjunto de equações de primeira ordem sejam satisfeitas

$$GB \mp e(v^2 - |\phi|^2) \pm \kappa \Psi = 0, \quad (7.51)$$

$$D_{\pm} \phi = 0, \quad (7.52)$$

$$\partial_i A_0 \mp \partial_i \Psi = 0, \quad (7.53)$$

$$\partial_i \chi \mp \epsilon_{ij} \frac{\partial_i \Gamma_j}{\partial \chi} = 0, \quad (7.54)$$

$$A_0 \mp \Psi = 0. \quad (7.55)$$

Assim, energia total torna-se

$$E_{tot} = E_{bps} = \pm e v^2 \int d^2 r B \pm \epsilon_{ij} \int d^2 r (\partial_i \Gamma_j), \quad (7.56)$$

ou seja

$$E_{bps} = \pm e v^2 \Phi \pm \epsilon_{ij} \int d^2 r (\partial_i \Gamma_j). \quad (7.57)$$

As equações BPS (7.53) e (7.55) são idênticamente satisfeitas por  $\Psi = \pm A_0$ ; assim, as equações remanescentes são (7.51), (7.52) e (7.54). O potencial (7.46) é reescrito como

$$U = \frac{1}{2G} (e(v^2 - |\phi|^2) \mp \kappa A_0)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \Gamma_j)^2. \quad (7.58)$$

## 7.4 Soluções de primeira ordem

Nesta seção, vamos investigar as soluções de vórtices estacionários do modelo (7.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCSHG} = & -\frac{G(\chi)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\kappa} A_\mu F_{\nu\kappa} + \frac{G(\chi)}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - e^2 \Psi^2 |\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi, \chi), \end{aligned} \quad (7.59)$$

no limite BPS. Uma vez que estamos interessados em configurações com simetria rotacional, vamos usar os Ansatzes adotados em [102]

$$\phi(r, \theta) = v g(r) e^{iN\theta}, \quad (7.60)$$

$$A_i = \epsilon_{ij} \frac{x_j}{er^2} (a(r) - N), \quad (7.61)$$

e

$$A_0 = A_0(r), \quad (7.62)$$

que descrevem uma configuração de vórtices em  $(2+1)$ -dimensões. Aqui,  $g(r)$  e  $a(r)$  são funções reais e  $\epsilon_{ij}$  é o tensor de Levi-Civita. O fator  $N$  é um número inteiro denominado de

winding number, que caracteriza o mapeamento do espaço físico no espaço interno do campo complexo  $\phi$ .

Baseado nos ansatz, é razoável considerar que o campo escalar  $\chi$  e a função  $\Gamma_i$  podem ser parametrizados como

$$\chi = \chi(r) \quad \text{e} \quad \Gamma_i = -\epsilon_{ij} \frac{x_j}{er^2} W(\chi). \quad (7.63)$$

Os perfis dos campos são funções regulares e que devem satisfazer as seguintes condições na origem

$$g(r=0) = 0, \quad a(r=0) = N \quad \text{e} \quad A_0(r=0) = cte, \quad (7.64)$$

$$\chi(r) = \chi_0 \quad \text{e} \quad W(\chi_0) = W_0, \quad (7.65)$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} g(r) = 1, \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} a(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} \frac{dA_0(r)}{dr} = 0, \quad (7.66)$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \chi(r) = \chi_\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} W(r) = W(\chi_\infty). \quad (7.67)$$

É conveniente escrever expressões para o campo magnético e campo elétrico em termos dos ansatz, isto é,

$$B(r) = -\frac{1}{r} \frac{da(r)}{dr}, \quad (7.68)$$

e

$$E(r) = -\frac{dA_0}{dr}. \quad (7.69)$$

Em seguida, aplicando (7.68) em (7.57), encontramos o seguinte resultado

$$E_{bps} = \pm (2\pi v^2 N + 2\pi \Delta W), \quad (7.70)$$

em que  $\Delta W = W(\infty) - W(0)$ . Na expressão acima, o sinal superior (inferiores) é válido para valores positivos (negativos) de  $N$  e  $\Delta W$ .

Em termos dos ansatz, as equações BPS (7.51), (7.52) e (7.54) tornam-se

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm \frac{ev^2(1-g^2) - \kappa A_0}{G}, \quad (7.71)$$

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (7.72)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{1}{r} \frac{dW}{d\chi}, \quad (7.73)$$

enquanto que a lei de Gauss assume a forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rG \frac{dA_0}{dr} \right) + \kappa B = 2e^2 v^2 g^2 A_0. \quad (7.74)$$

A densidade de energia (7.29), torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = & \frac{G}{2} \left( \frac{dA_0}{dr} \right)^2 + \frac{GB^2}{2} + v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \left( \frac{ag}{r} \right)^2 \right] + \frac{G}{2} \left( \frac{d\Psi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 \\ & + e^2 v^2 g^2 A_0^2 + e^2 v^2 g^2 \Psi^2 + U. \end{aligned} \quad (7.75)$$

E usando as equações BPS em (7.75), chegamos a seguinte expressão

$$\varepsilon_{BPS}(r) = G \left( \frac{dA_0}{dr} \right)^2 + GB^2 + 2v^2 \left( \frac{ag}{r} \right)^2 + 2e^2 v^2 g^2 A_0^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dW}{d\chi} \right)^2. \quad (7.76)$$

Percebe-se que a densidade de energia BPS pode ser separada em duas contribuições

$$\varepsilon_{BPS}(r) = \varepsilon_G(r) + \varepsilon_\chi(r), \quad (7.77)$$

onde

$$\varepsilon_G(r) = G \left( \frac{dA_0}{dr} \right)^2 + GB^2 + 2v^2 \left( \frac{ag}{r} \right)^2 + 2e^2 v^2 g^2 A_0^2, \quad (7.78)$$

que representa a contribuição devido somente ao vórtice, enquanto que

$$\varepsilon_\chi(r) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{dW}{d\chi} \right)^2, \quad (7.79)$$

corresponde a contribuição do campo  $\chi(r)$  que funciona como um campo fonte.

## 7.5 O Fluxo Magnético

A (7.12) descreve um modelo de MCSH estendido pela presença de um campo adicional que é acoplado ao campo de calibre devido a presença da função não-trivial  $G(\chi)$ . A partir do formalismo BPS, encontramos a energia mínima do modelo, dada pelo resultado (7.57). Desse modo, concluimos que a presença do campo neutro  $\chi(r)$  gera uma contribuição para a energia BPS da configuração de campo usual.

O fluxo magnético é dado por

$$\Phi = \int_S d^2r B(r). \quad (7.80)$$

Usando a definição para o campo  $B(r)$ , escrevemos

$$\Phi = - \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{er} \frac{da(r)}{dr} \right) r dr d\theta, \quad (7.81)$$

com auxílio das condições (7.64) e (7.66) podemos determinar  $\Phi$

$$\Phi = -\frac{2\pi}{e} \int_0^\infty da(r) = -\frac{2\pi}{e} [a(\infty) - a(0)], \quad (7.82)$$

que resulta em

$$\Phi = \frac{2\pi}{e} N. \quad (7.83)$$

Portanto, o fluxo magnético é proporcional ao winding number.

Além disso, observando que a primeira contribuição em (7.57) é proporcional ao fluxo  $\Phi$ , podemos afirmar que a energia BPS da configuração de campo possui um termo que é proporcional ao número topológico  $N$ , ou seja, é quantizada em termos do winding number; além de um termo adicional devido a presença de um campo externo.

## 7.6 Soluções Numéricas

Nesta seção, vamos construir um cenário BPS particular a partir do qual obteremos as soluções BPS, ou seja, as soluções numéricas de (7.71), (7.72) e (7.74). Como resultado, apresentaremos as soluções numéricas para os campos  $a(r)$  e  $g(r)$ , bem como para o campo elétrico  $E(r)$ , campo magnético  $B(r)$  e a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ .

Verificamos que a equação (7.73) não contém termos dos outros setores do modelo, de modo que depende unicamente da escolha do supercampo  $W(\chi)$ . Portanto, a partir de uma escolha adequada para  $W(\chi)$ , podemos obter uma forma analítica para o campo adicional  $\chi(r)$ . Neste sentido, escolhemos a função superpotencial como

$$W(\chi) = \chi \left( 1 - \frac{\chi^2}{3} \right), \quad (7.84)$$

que recentemente foi usada como uma tentativa de compreender soluções de sólitons planares tipo-skyrmions [126, 127] e o comportamento de férmions de Dirac sem massa em background de uma configuração planar específica topologicamente não-trivial [128].

A escolha da forma analítica do superpotencial (7.84) permite-nos reescrever a equação BPS (7.73) como

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{1}{r} (1 - \chi^2), \quad (7.85)$$

cuja solução exata é

$$\chi(r) = \pm \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}, \quad (7.86)$$

em que  $r_0$  representa uma constante positiva tal que  $\chi(r_0) = 0$ . Nota-se que a solução para o campo  $\chi(r)$  assume os seguintes valores nas fronteiras

$$\chi_0 = \mp 1 \quad \text{e} \quad \chi_\infty = \pm 1. \quad (7.87)$$

Uma vez que o acoplamento entre o campo de calibre  $A_\mu$  e o campo escalar  $\chi$  é dado pela permeabilidade generalizada, a solução (7.86) permite escolher uma forma particular para a expressão de escolha de uma forma de  $G(\chi)$ , que caracteriza um meio quirais.

### 7.6.1 Soluções de vórtices Quirais

A fim de obter soluções de vórtices quirais em um modelo particular caracterizado pelo superpotencial (7.84), iremos adotar duas escolhas para função permeabilidade magnética. Cada escolha de  $G(\chi)$  representa um meio magnético distinto.

#### Vórtices Quirais de Abrikosov-Nielsen-Olesen

A primeira escolha para a permeabilidade é

$$G_1(\chi) = \frac{1}{\chi^2}, \quad (7.88)$$

ou, em termos de (7.86)

$$G_1(\chi) = \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{(r^2 - r_0^2)^2}. \quad (7.89)$$

Desse modo, as equações BPS (7.71), (7.72) e também a lei de Gauss (7.74) são modificadas e assumem, conseqüentemente, as seguintes formas

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}, \quad (7.90)$$

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{(r^2 + r_0^2)^2} [e(v^2 - |\phi|^2) - \kappa A_0], \quad (7.91)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{(r^2 - r_0^2)^2} r \frac{dA_0}{dr} \right) + \kappa B = 2e^2 v^2 g^2 A_0. \quad (7.92)$$

no qual adotamos os sinais superiores para os quais  $N > 0$  e  $\Delta W > 0$  em (7.70).

Como visto anteriormente, a presença do meio modifica o comportamento dos campos da teoria. Logo, torna-se válido investigar como esses campos se comportam nas regiões próximas às fronteiras. Portanto, resolveremos as equações (7.90) e (7.91) nesses limites.

Próximo da origem, as soluções para os campos  $g(r)$  e  $a(r)$  são

$$\begin{aligned} g(r) \approx & g_N r^N - \frac{eB_0 g_N}{4} r^{N+2} + \frac{e^2 v^2 g_N^3}{4(N+1)^2} r^{3N+2} \\ & + \left( e \frac{B_0}{8} - \frac{\kappa^2}{16} + \frac{1}{r_0^2} \right) \frac{eB_0 g_N}{4} r^{N+4}. \end{aligned} \quad (7.93)$$

e

$$a(r) = N - \frac{eB_0}{2} r^2 - eB_0 \left( \frac{\kappa^2}{16} - \frac{1}{r_0^2} \right) r^4 + \frac{e^2 v^2 g_N^2}{2(N+1)} r^{2N+2}. \quad (7.94)$$

A partir da solução aproximada para  $a(r)$ , encontramos o valor de  $B(r)$

$$B(r) \approx B_0 + 4B_0 \left( \frac{\kappa^2}{16} - \frac{1}{r_0^2} \right) r^2 - ev^2 g_N^2 r^{2N}. \quad (7.95)$$

A lei de Gauss fornece a solução para o campo  $A_0(r)$

$$\begin{aligned} A_0(r) \approx & A_0(0) - \frac{\kappa B_0}{4} r^2 + \frac{3\kappa B_0}{4} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{\kappa^2}{48} \right) r^4 \\ & + \frac{ev^2 g_N^2 [2eA_0(0) + \kappa]}{4(N+1)^2} r^{2N+2}, \end{aligned} \quad (7.96)$$

e usando (7.69), escrevemos a equação do campo elétrico

$$E(r) \approx \frac{\kappa B_0}{2} r + \frac{\kappa B_0^2}{2} r \left( \frac{\kappa^3}{16} - \frac{3\kappa}{r_0^2} \right) r^3 - \frac{ev^2 g_N^2 [2eA_0(0) + \kappa]}{2(N+1)^2} r^{2N+1}, \quad (7.97)$$

com  $g_N > 0$ .

Em (7.95), o termo  $B_0$  corresponde ao valor do campo magnético na origem, cuja forma é

$$B_0 = ev^2 - \kappa A_0(0), \quad (7.98)$$

em que (7.96) o termo  $A_0(0)$  corresponde ao valor do potencial escalar na origem.

A densidade de energia (7.78) em  $r = 0$ , torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_G(r) \approx & B_0^2 + 2N^2 v^2 g_N^2 r^{2N-2} + 2e^2 v^2 (A_0(0))^2 g_N^2 r^{2N} + B_0^2 \left( \frac{3\kappa^2}{4} - \frac{4}{r_0^2} \right) r^2 \\ & - e v^2 B_0 g_N^2 (N^2 + 2N + 2) r^{2N}. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Por outro lado, no limite assintótico  $r \rightarrow \infty$ , os campos  $g(r)$ ,  $a(r)$  e  $A_0(r)$  possuem os seguintes comportamentos

$$g(r) \approx 1 - C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}, \quad (7.100)$$

$$a(r) \approx MC_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}, \quad (7.101)$$

$$A_0(r) \approx \frac{MC_\infty}{e\sqrt{r}} e^{-Mr}, \quad (7.102)$$

$$B(r) \approx MC_\infty \left( \frac{M}{r^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2r^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-Mr}, \quad (7.103)$$

e

$$E(r) \approx \frac{MC_\infty}{e} \left( \frac{M}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2r^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-Mr}. \quad (7.104)$$

O decaimento tipo exponencial das soluções se assemelham as soluções de vórtices de Abrikosov–Nielsen–Olesen. O parâmetro  $M$  representa a massa do campo bosônico e é dada por

$$M = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\kappa^2 + 8e^2 v^2} - |\kappa| \right]. \quad (7.105)$$

O termo de massa (7.105) é o mesmo obtido no modelo de MCSH usual. Desse modo, podemos concluir que a presença de um meio magnético, representado por  $G_1(\chi)$  não altera consideravelmente a maneira como os campos se aproximam do vácuo da teoria.

Os perfis das soluções numéricas dependem da fixação do valor do winding number  $N$ , da constante de acoplamento  $e$ , do valor de vácuo  $v$  e do parâmetro de CS,  $\kappa$ . Aqui, fixamos  $N = 1$ ,  $e = 1$ ,  $v = 1$ ,  $\kappa = 1$  e  $r_0 = 1, 2$  e  $3$ ; e através do método das diferenças finitas e considerando as condições de fronteira, resolvemos as equações (7.90), (7.91) e (7.92) para os valores de  $r_0 = 1$  (curva azul ponto-tracejada) e  $r_0 = 2$  (curva vermelha tracejada). Para efeitos de comparação, mostraremos as soluções usuais do modelo de MCSH (curva preta sólida), que são obtidas fazendo  $G_1(\chi) \equiv 1$ .

A figura (7.1) ilustra a evolução do campo de Higgs para diferentes valores do parâmetro  $r_0$ ; podemos observar que  $g(r)$  cresce monotonicamente de acordo com as condições de fronteira

topológicas (7.64) e (7.66). Além disso, na figura (7.2), percebe-se que o tamanho dos núcleos dos perfis aumentam à medida que o parâmetro  $r_0$  aumenta dentro do intervalo  $0 \leq r_0 < r_l$ . Em particular, quando  $r_0 = r_l$  o núcleo atinge a sua largura máxima. Em contrapartida, para valores de  $r_0 > r_l$ , a largura do núcleo diminui até atingir o mesmo valor obtido no caso usual, isto é, para  $G_1(\chi) \equiv 1$ . Aqui, definimos a largura do perfil como  $\approx 63.2\%$  de sua altura, então, a largura máxima do perfil é atingida quando  $r_l \approx 1.95$ .

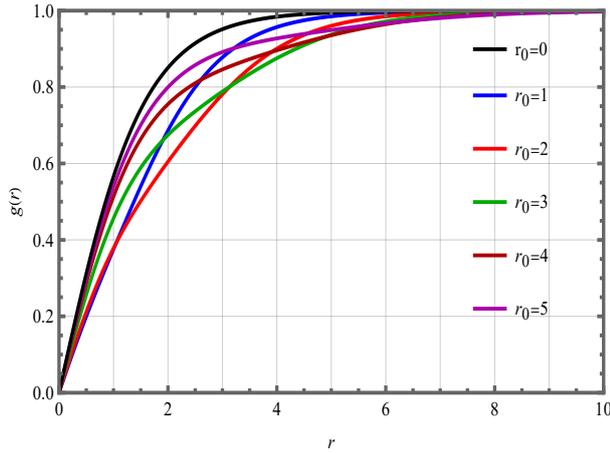


Figura 7.1: Soluções para o campo de Higgs  $g(r)$  obtidas a partir das equações (7.90), (7.91) e (7.92) via as condições de contorno (7.64) e (7.66).

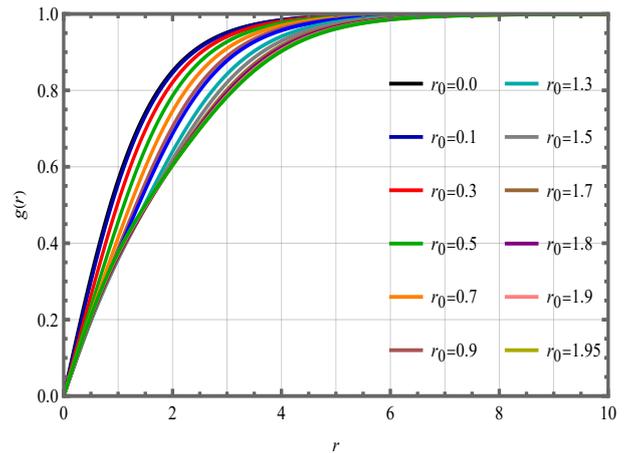


Figura 7.2: Soluções para o campo de Higgs  $g(r)$  para valores de  $r_0$  variando no intervalo,  $0 \leq r_0 \leq 1.95$ .

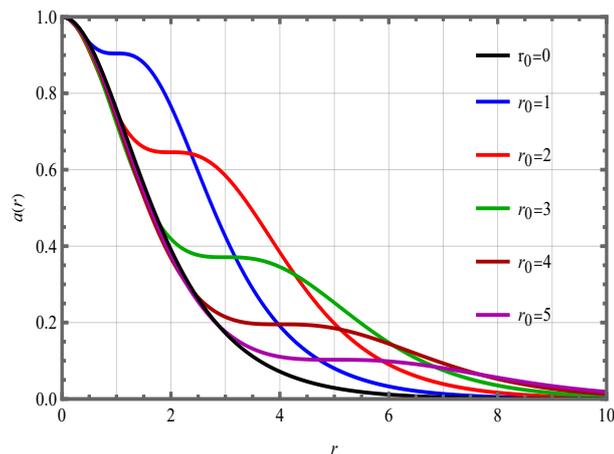


Figura 7.3: Soluções para o campo de calibre  $a(r)$  obtidas a partir das equações (7.90), (7.91) e (7.92) via as condições de contorno (7.64) e (7.66).

A figura (7.3) apresenta as soluções para o campo de calibre  $a(r)$ . Os perfis apresentam,

assim como no setor de Higgs, dependência em relação a  $r_0$ . Em particular, devido a presença do campo  $\chi(r)$ , desenvolve-se um platô em torno da região  $r = r_0$ . A localização do platô, em relação a origem, aumenta com o acréscimo de  $r_0$ . Ao mesmo tempo, o valor de  $a(r_0)$  diminui continuamente com o aumento do parâmetro  $r_0$ . No entanto, os valores de  $a(r)$  nas fronteiras não são modificados pela presença da permeabilidade não-trivial.

As soluções numéricas para  $B(r)$  são mostradas na figura (7.4). A exemplo dos campos anteriores, existe uma dependência em relação a  $r_0$ . Na origem, o campo  $B(r)$  possui um valor não nulo que depende de  $r_0$ . Na figura (7.5), temos os valores do campo magnético na origem  $B_0(0)$  para vários valores do parâmetro  $r_0$ , cujo valor máximo ocorre para  $r_0 = 1.2$ , no qual  $B_0(0) = 0.854059$ . Por outro lado, quando  $r_0$  é suficientemente grande, os perfis de  $B(r)$  se assemelham aos obtidos para  $G_1(\chi) \equiv 1$ .

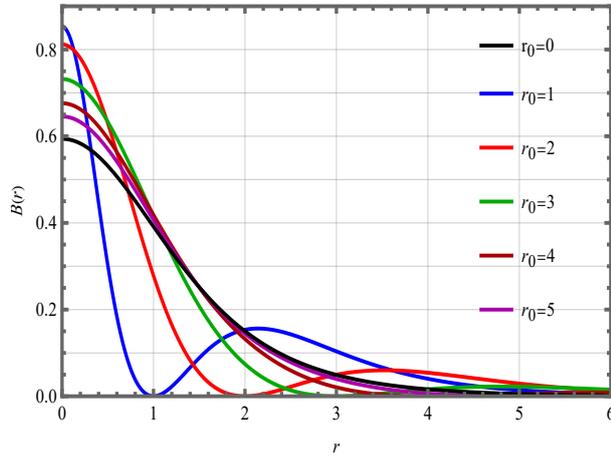


Figura 7.4: Soluções para  $B(r)$  obtidas de (7.90), (7.91) e (7.92), considerando (7.64) e (7.66).

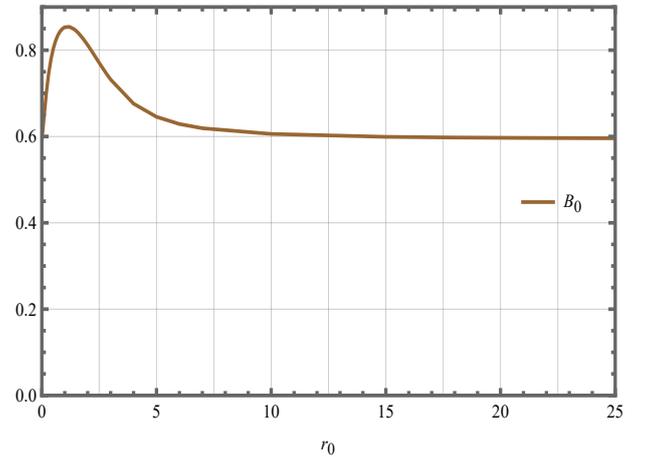


Figura 7.5: Valores assumidos pelo campo magnético  $B(r)$  na origem em função do parâmetro  $r_0$ .

Além disso, o campo magnético assume um segundo máximo de amplitude,  $B_{2\max}(r_{2B})$ , localizado em  $r_{2B} > r_0$ ; a dependência de  $B_{2\max}$  e  $r_{2B}$  com  $r_0$  é mostrada na figura (7.6). Para um  $r_0$  suficientemente grande, observamos o segundo máximo diminuir exponencialmente com  $r_0$  (isto é,  $\sim \exp(-0.687r_0)$ ).

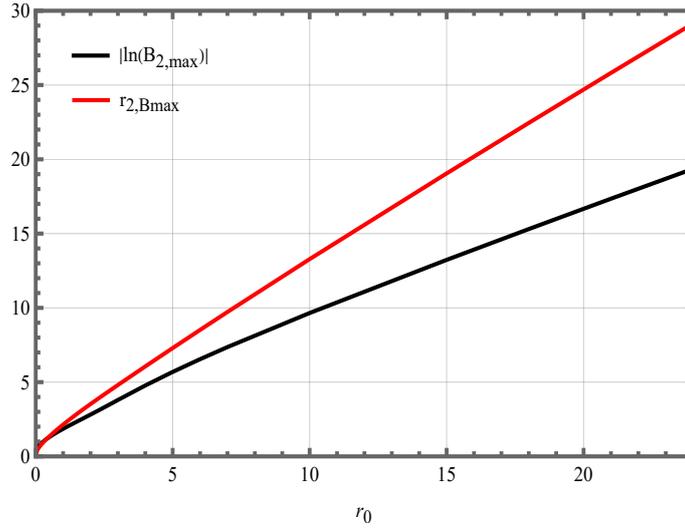


Figura 7.6: Valores dos segundos máximos do campo  $B(r)$  e suas respectivas localizações em função de  $r_0$ .

Na figura (7.7), temos as soluções para potencial escalar  $A_0$ . Como mencionado anteriormente, o potencial possui um valor não nulo,  $A_0(0)$ , na origem que depende de  $r_0$  e corresponde a amplitude do potencial  $A_0(r)$ . O comportamento radial de  $A_0(r)$  assemelha-se aos perfis do campo de calibre, apresentando platôs nas regiões em que  $r = r_0$ . Em (7.8) mostramos os valores  $A_0(0)$  em função  $r_0$ ; o valor mínimo de  $A_0(0) = 0.145941$  é atingido quando  $r_0 = 1.2$ .

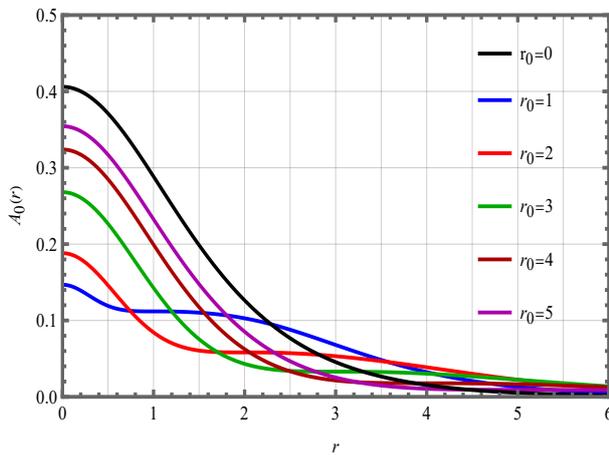


Figura 7.7: Soluções de  $A_0$  obtidas a partir (7.92) e considerando (7.64) e (7.66).

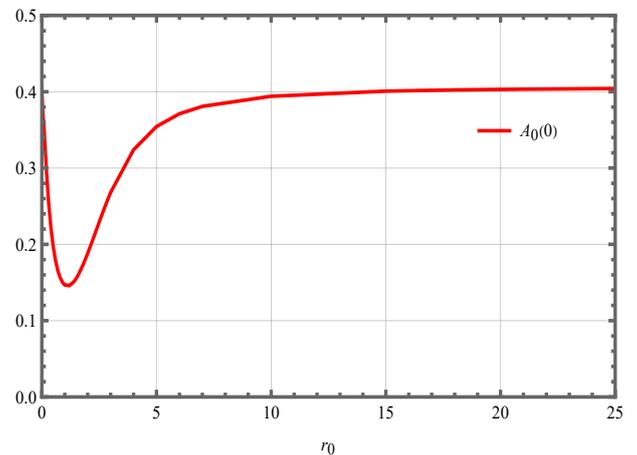


Figura 7.8: Valores do potencial escalar  $A_0$  na origem em função do parâmetro  $r_0$ .

Os perfis do campo elétrico  $E(r)$  são mostrados na figura (7.9). Na origem, o campo elétrico é nulo uma vez que  $A_0$  possui um valor constante nesse ponto. A dependência com  $r_0$  faz com que  $E(r)$  possua dois máximos: o primeiro,  $E_{1,\max}$  ocorre em  $r_{1E}$ , dentro do intervalo  $0 \leq r < r_0$ , e o segundo,  $E_{2,\max}$ , localizado na região onde  $r > r_0$ . Na figura (7.10), mostramos como  $E_{1,\max}$  e  $r_{1E}$  variam com  $r_0$ .

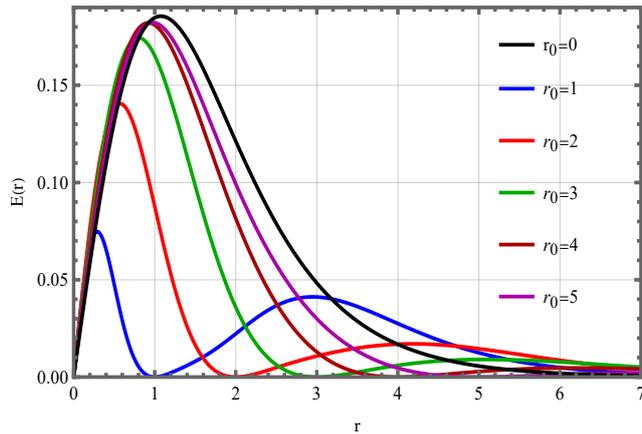


Figura 7.9: Solução para  $E(r)$  obtidas a partir (7.92) e (7.69) e considerando as condições (7.64) e (7.66).

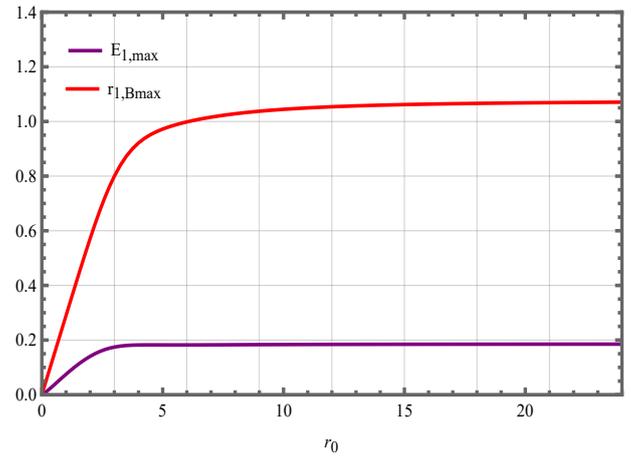


Figura 7.10: Valores do primeiro máximo do campo elétrico e a suas respectivas posições em função de  $r_0$ .

A figura (7.11) mostra como  $E_{2,\max}$  e  $r_{2E}$  variam com o parâmetro  $r_0$ . As soluções mostram que, para um valor suficientemente grande do parâmetro, o segundo máximo diminui exponencialmente com  $r_0$  (isto é,  $\sim \exp(-0.687r_0)$ ), enquanto que a posição aumenta linearmente.

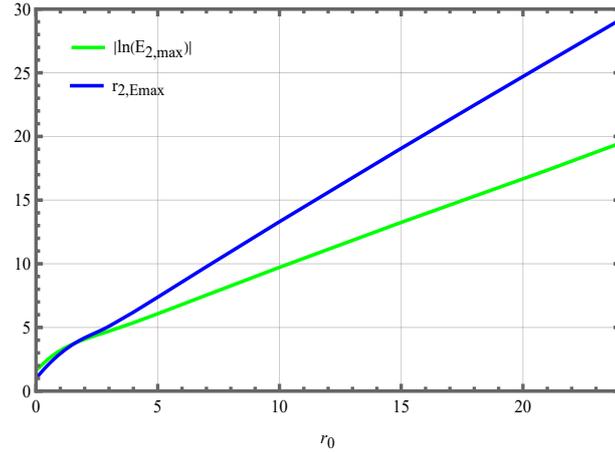


Figura 7.11: Valores dos segundos máximos de  $E(r)$  e suas respectivas localizações em função de  $r_0$ .

Os resultados para a densidade de energia  $\varepsilon_G(r)$  são mostrados na figura (7.12). Assim como no caso usual, sem permeabilidade, o valor da densidade de energia é não nulo na origem. Em  $r = r_0$ , a densidade de energia apresenta um platô na posição  $r = r_0$ . Existe um valor da coordenada radial  $r_{en}$  tal que para  $0 < r_0 < r_{en}$ , um mínimo local surge em torno de  $r_0$ . Ao mesmo tempo, surge um segundo máximo à direita de  $r_0$ . Finalmente, para um  $r_0 > r_{en}$ , ambos os pontos extremos desaparecem e os perfis tornam-se similares ao caso usual  $G(\chi) = 1$ . Na figura (7.13), temos os valores de  $\varepsilon_G(0)$  em função de  $r_0$ , cujo valor mínimo,  $\varepsilon_G(0) = 1.05161$ , é atingido quando  $r_0 = 1.8$ .

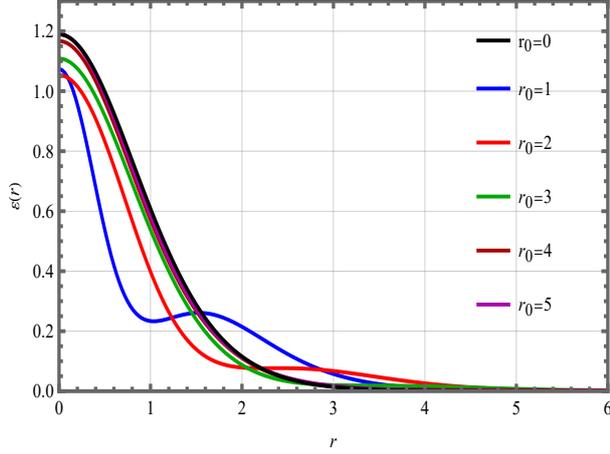


Figura 7.12: Soluções para  $\varepsilon_G(r)$  obtidas de (7.78) e considerando as condições (7.64) e (7.66).

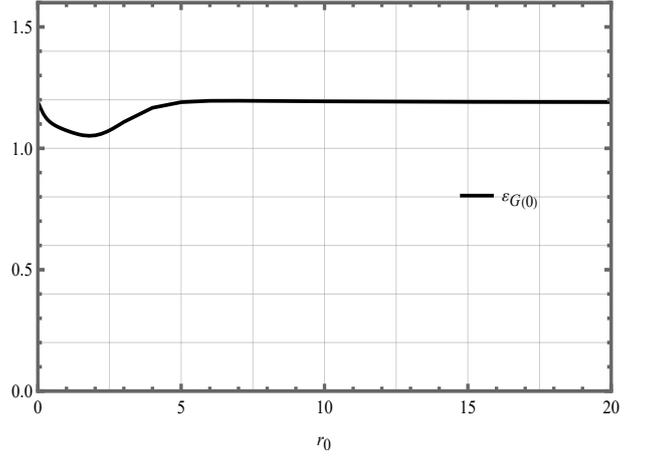


Figura 7.13: Valores da densidade de energia  $\varepsilon_G(0)$  na origem em função de valores crescentes de  $r_0$ .

Um comportamento interessante ocorre com  $B(r)$  e  $E(r)$  quando  $r \rightarrow r_0$ . Nesse ponto a permeabilidade (7.89), torna-se

$$G_1(\chi) = \frac{4r_0^4}{(r_0^2 - r_0^2)^2} \rightarrow +\infty. \quad (7.106)$$

Sendo assim, a densidade de energia (7.29) passariam a apresentar uma divergência, isto é,

$$\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow \infty, \quad (7.107)$$

o que levaria a energia total (7.36) ser uma quantidade infinita.

Porém, quando  $r \rightarrow \infty$  tanto campo magnético quanto o campo elétrico apresentam um comportamento novo: neste ponto  $B(r_0) = 0$  e  $E(r_0) = 0$ , como pode ser visto nas figuras 7.4 e 7.9, respectivamente. Desse modo, a divergência imposta por  $G_1(\chi)$  é compensada pelo comportamento dos campos  $B(r)$  e  $E(r)$ , que convergem a zero mais rapidamente neste ponto. Assim, a densidade de energia

$$\varepsilon_G(r) = \frac{G}{2} (\partial_i A_0)^2 + \frac{GB^2}{2} + |D_i \phi|^2 + \frac{G}{2} (\partial_i \Psi)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + e^2 \Psi^2 |\phi|^2 + U, \quad (7.108)$$

e conseqüentemente a energia total

$$E_{tot}(r) = \int d^2 r \varepsilon_G(r), \quad (7.109)$$

permanecem sendo quantidades físicas finitas.

## Vórtices não-localizados

A segunda escolha da permeabilidade é a que segue

$$G_2(\chi) = \frac{1}{1 - \chi^2} = \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{4r^2 r_0^2}. \quad (7.110)$$

As equações BPS (7.71), (7.72) e a lei de Gauss (7.74), tornam-se

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}, \quad (7.111)$$

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \frac{4r^2 r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} [e(v^2 - |\phi|^2) - \kappa A_0], \quad (7.112)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{4r_0^2 r} \frac{dA_0}{dr} \right) + \kappa B = 2e^2 v^2 g^2 A_0. \quad (7.113)$$

A permeabilidade  $G_2(\chi)$  modifica o comportamento dos campos. Desse modo, seguindo o mesmo procedimento adotado na subseção anterior, vamos investigar como os campos se comportam nas fronteiras. Próximo da origem, obtemos as expressões para  $g(r)$  e  $a(r)$

$$g(r) \approx g_N r^N - \frac{eB_0 g_N}{4r_0^2} r^{N+4} + \frac{2eB_0 g_N}{9r_0^4} r^{N+6} + \frac{e^2 v^2 g_N^3}{(N+2)^2 r_0^2} r^{3N+4}, \quad (7.114)$$

e

$$a(r) \approx N - \frac{eB_0}{r_0^2} r^4 + \frac{3eB_0}{4r_0^4} r^6 + \frac{2e^2 v^2 g_N^2 r^{2N+4}}{(N+2)r_0^2}, \quad (7.115)$$

com  $g_N > 0$  e  $B_0$  dado por (7.98). O campo magnético correspondente é dado por

$$B(r) \approx \frac{4B_0}{r_0^2} r^2 - \frac{8B_0}{r_0^4} r^4 + \frac{12B_0}{r_0^6} r^6 - \frac{4ev^2}{r_0^2} g_N^2 r^{2N+2} + \frac{8ev^2}{r_0^4} g_N^2 r^{2N+4}. \quad (7.116)$$

O potencial escalar fornecido pela lei de Gauss (7.113) é

$$\begin{aligned} A_0(r) \approx & A_0(0) - \frac{2\kappa B_0}{3r_0^4} r^6 + \frac{5\kappa B_0}{3r_0^6} r^8 + \frac{2e^2 v^2 A_0(0)}{(N+1)(N+2)r_0^2} g_N^2 r^{2N+4} \\ & + \frac{4ev^2 \kappa}{(N+2)(N+3)r_0^4} g_N^2 r^{2N+6} - \frac{4e^2 v^2 \kappa A_0(0)}{(N+1)(N+3)r_0^4} g_N^2 r^{2N+6}. \end{aligned} \quad (7.117)$$

O campo elétrico  $E(r)$  é obtido a partir de (7.69), sendo escrito da forma

$$\begin{aligned} E(r) \approx & \frac{4\kappa B_0}{r_0^4} r^5 - \frac{40\kappa B_0}{3r_0^6} r^7 - \frac{4e^2 v^2 A_0(0)}{(N+1)r_0^2} g_N^2 r^{2N+3} \\ & + \frac{8e^2 v^2 A_0(0)}{(N+1)r_0^4} g_N^2 r^{2N+5} - \frac{8ev^2 \kappa}{(N+1)r_0^4} g_N^2 r^{2N+5}. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Por último, temos a densidade de energia que é expressa como

$$\begin{aligned} \varepsilon_G(r) \approx & 2N^2v^2g_N^2r^{2N-2} + 2e^2v^2A_0(0)g_N^2r^{2N} - \frac{4B_0^2}{r_0^2} - \frac{8B_0^2}{r_0^4}r^4 \\ & - (N^2 + 4N + 8) \frac{ev^2B_0}{r_0^2}g_N^2r^{2N+2}. \end{aligned} \quad (7.119)$$

No limite que  $r \rightarrow \infty$ , as soluções dos campos:  $g(r)$ ,  $a(r)$  e  $A_0(r)$  possuem os seguintes comportamentos

$$g(r) \approx 1 - C_\infty r^{-\Lambda}, \quad (7.120)$$

$$a(r) \approx \Lambda C_\infty r^{-\Lambda}, \quad (7.121)$$

$$A_0(r) \approx -\frac{\Lambda C_\infty}{2e\kappa r_0^2} r^{-\Lambda}, \quad (7.122)$$

e

$$B(r) \approx \frac{\Lambda^2}{e} C_\infty r^{-\Lambda-2}, \quad (7.123)$$

$$E(r) \approx -\frac{\Lambda^2 C_\infty}{2e\kappa r_0^2} r^{-\Lambda-1}, \quad (7.124)$$

onde  $C_\infty$  é uma constante de integração positiva. O parâmetro  $\Lambda$

$$\Lambda = 1 + \sqrt{1 + 8(evr_0)^2}, \quad (7.125)$$

que mostra como o decaimento da lei de potência depende de  $r_0$ . A presença do meio dielétrico muda radicalmente o comportamento dos campos no limite assintótico. As soluções passam a apresentar um decaimento que obedece uma lei de potência, em contraste com o comportamento canônico ( $G_2 \equiv 1$ ) que segue uma lei de decaimento exponencial.

A literatura mostra que o limite de London [129] fornece os comportamentos dos campos de vórtices através do modelo de Ginzburg–Landau, prevendo, portanto, que o campo magnético decai monotonicamente e que, para grandes distâncias, é exponencialmente localizado, ou seja,

$$B(r) = B_0 e^{-\frac{r}{\lambda_L}}, \quad (7.126)$$

em que  $B_0$  é a amplitude do campo na amostra e  $\lambda_L$  é um parâmetro denominado de comprimento de penetração de London, um parâmetro fenomenológico que mede o quanto que  $B(r)$  penetra no material. O campo magnético obtido para o primeiro caso,  $G_1(\chi)$ , dado pela solução (7.103), comporta-se aproximadamente como (7.126), ou seja, soluções exponencialmente localizadas.

Contudo, recentemente, durante o estudo sobre o comportamento do campo magnético em materiais supercondutores de duas componentes [130], foi descoberto soluções de vórtices cujas soluções seguem um decaimento de lei de potência, levando a um perfil deslocalizado do campo magnético. Esse comportamento é similar ao apresentado pelo campo magnético para o cenário descrito pela permeabilidade  $G_2(\chi)$  (7.124). Além disso, comportamentos similares ocorrem em modelos de supercondutividade descritos por uma teoria de Chern-Simons na presença de dois campos de calibre abelianos [131]. Nesses sistemas, os vórtices são denominados diamagnéticos, pois apresentam um campo magnético nulo perto dos seus núcleos [132].

As soluções numéricas são apresentadas a seguir. Aqui, assim como no caso anterior, adotamos  $N = 1$ ,  $e = v = 1$  e  $\kappa = 1$  e resolvemos as equações (7.111), (7.112) e (7.113) usando o método das diferenças finitas para valores de  $r_0 = 1$  (curva cinza tracejada) e  $r_0 = 2$  (curva laranja pontilhada), e comparamos os resultados com o caso usual  $G_2 = 1$  (curva preta sólida).

Na figura (7.14) temos as soluções para o campo de Higgs. O campo de Higgs cresce, a exemplo do caso  $G_1(\chi)$ , monotonicamente satisfazendo as condições de fronteira. Os resultados indicam que o tamanho do núcleo dos perfis é maior do que os relacionados ao modelo usual, para quaisquer valores de  $r_0$ . Caso o valor do parâmetro  $r_0$  aumente dentro do intervalo  $0 \leq r_0 \leq r_m$ , o núcleo diminui continuamente até que sua largura mínima seja alcançada em  $r_0 = r_m$ . Além disso, quando  $r_0 > r_m$ , a largura do núcleo cresce lentamente.

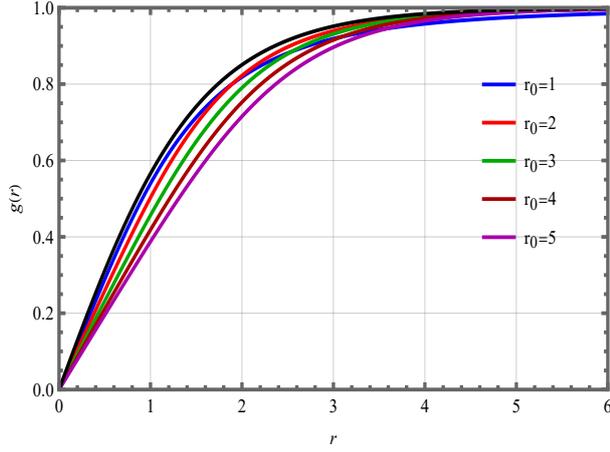


Figura 7.14: Soluções para o campo de Higgs  $g(r)$  obtidas a partir das equações (7.90), (7.91) e (7.92) via as condições de contorno (7.64) e (7.66).

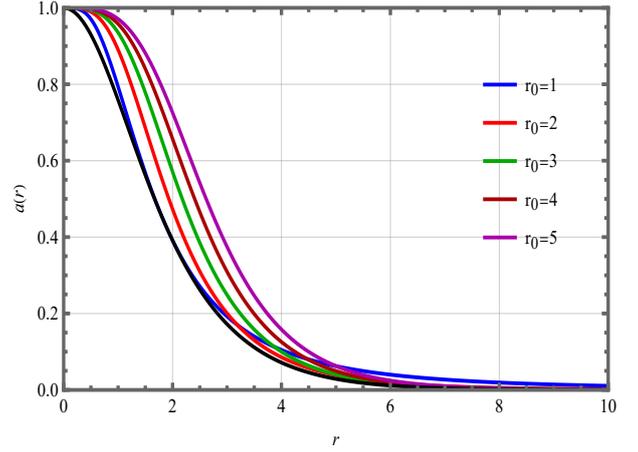


Figura 7.15: Soluções para o campo de calibre  $a(r)$  obtidas a partir das equações (7.111), (7.112) e (7.113) e das condições (7.64) e (7.66).

Na figura (7.15) temos as soluções para o campo de calibre  $a(r)$ . Neste caso, o comportamento do campo  $a(r)$  é análogo ao descrito anteriormente para o campo de Higgs. Ou seja, as soluções satisfazem as condições de fronteira decaindo monotonicamente até seu valor de vácuo.

As soluções para o campo magnético são apresentadas na figura (7.16). Os campos são nulos na origem e atingem um máximo global,  $B_{\max}$ , cujas amplitudes que variam com  $r_0$  são mostradas na figura (7.17). Vale mencionar que para valores suficientemente grandes de  $r_0$ , a amplitude  $B_{\max}$  decai como  $1/r_0$  e sua localização,  $r_{B_{\max}}$ , aumenta como  $\sqrt{r_0}$  ao longo da coordenada radial (7.17).

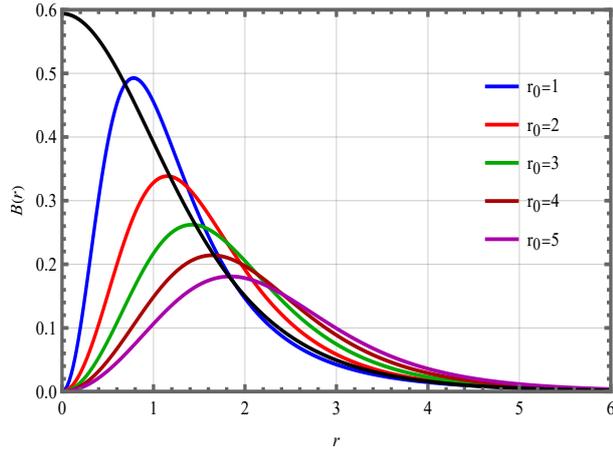


Figura 7.16: Soluções para  $B(r)$  obtidas a partir de (7.112), (7.111), (7.113) e considerando (7.64), (7.66).

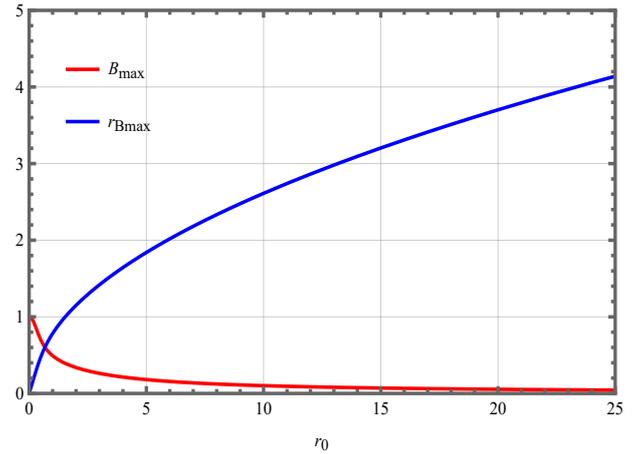


Figura 7.17: Valores do máximo do campo magnético e suas respectivas localizações em função de  $r_0$ .

Os perfis do potencial escalar  $A_0(r)$  são apresentados na figura (7.18). A amplitude do campo, assim como no campo magnético, depende de  $r_0$ , como mostrado na figura (7.19). Contudo, agora o campo se comporta de maneira diferente em relação caso anterior, figura (7.8). Neste caso, a amplitude de  $A_0$  aumenta até atingir um valor máximo  $A_{0_{\max}} = 0.309924$  em  $r_0 = 0.9$ ; depois decai a zero à medida que  $r_0$  cresce.

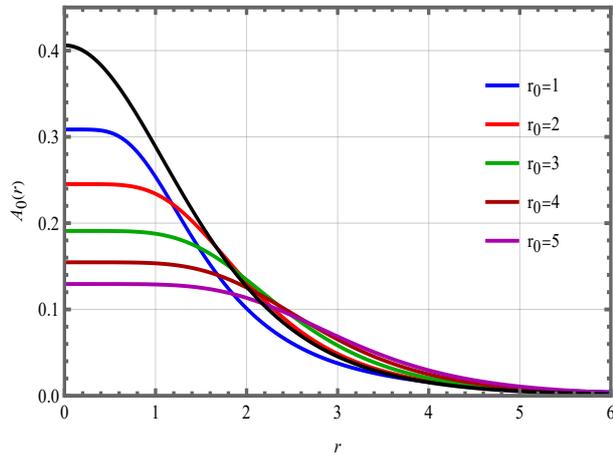


Figura 7.18: Soluções para  $A_0(r)$  obtidas de (7.113) e considerando as condições (7.64), (7.66).

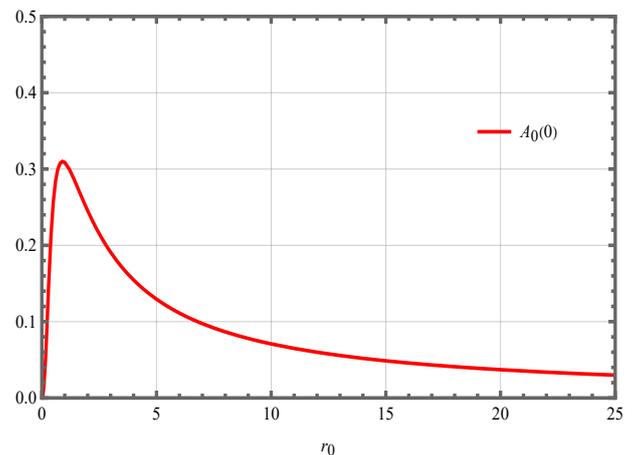


Figura 7.19: Valores da amplitude do potencial escalar  $A_0(r)$  em função do parâmetro  $r_0$ .

Por sua vez, o campo elétrico  $E(r)$  possui os perfis mostrados na figura (7.20). Assim como para o caso  $G_1$ , o campo elétrico  $E(r)$  é nulo na origem e atinge seu máximo global,  $E_{\max}$ , cujas amplitudes também variam com  $r_0$ . O valor máximo do campo elétrico,  $E_{\max}(0) = 0.188605$ , ocorre em  $r_0 = 0.7$ . Para valores suficientemente grandes de  $r_0$  a amplitude de  $E(r)$  decai como  $1/r_0$  e sua localização radial,  $r_{E_{\max}}$ , aumenta como  $\sqrt{r_0}$ , como mostrado nas figuras (7.21) e (7.22), respectivamente.

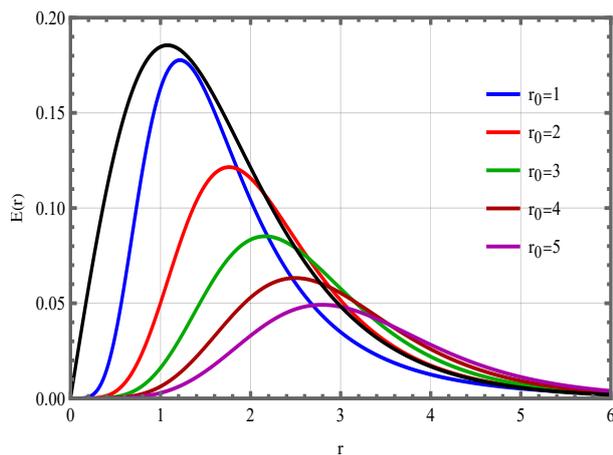


Figura 7.20: Solução para  $E(r)$  obtidas a partir (7.113) e (7.69) e considerando as condições (7.64) e (7.66).

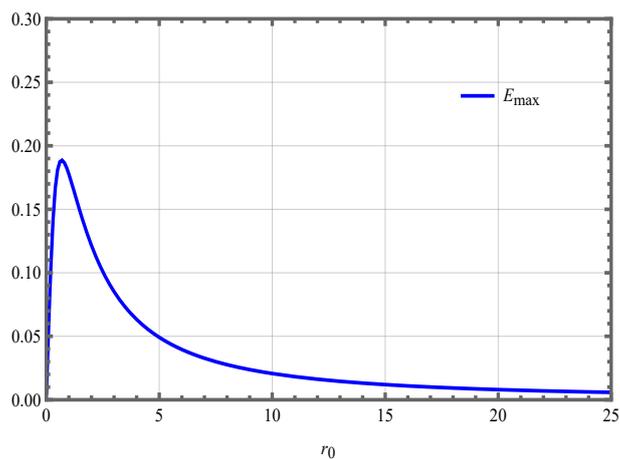


Figura 7.21: Valores da amplitude do campo elétrico  $E(r)$  para valores crescentes de  $r_0$ .

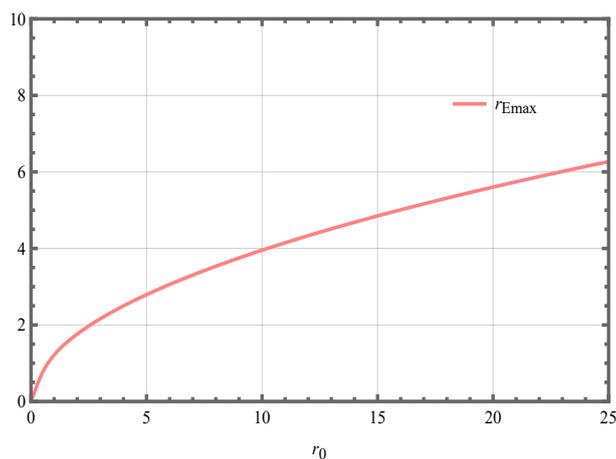


Figura 7.22: Valores das posições dos máximos do campo elétrico  $E(r)$  em função do parâmetro  $r_0$ .

Por fim, as soluções para a densidade de energia  $\varepsilon_G(r)$  são plotadas na figura (7.23). Ao contrário do caso usual ( $G_2 \equiv 1$ ), não existe a formação de lumps e sim de estruturas semelhantes a anéis, como ocorre no contexto da eletrodinâmica de Maxwell–Higgs, mais precisamente para valores de winding number  $N \geq 2$ . Além disso, na figura (7.24) temos os valores de  $\varepsilon_G(r)$  na origem em função de  $r_0$ , cujo valor máximo  $\varepsilon_{Gmáx}(0) = 0.685639$  ocorre no ponto  $r_0 = 0.8$ .

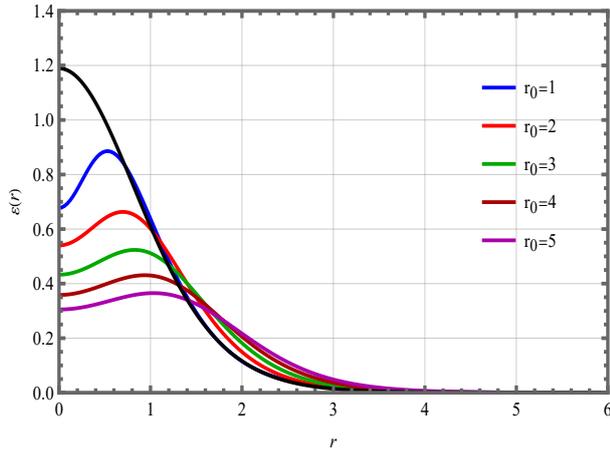


Figura 7.23: Solução para  $\varepsilon_G(r)$  obtidas a partir (7.78) e considerando as condições (7.64) e (7.66).

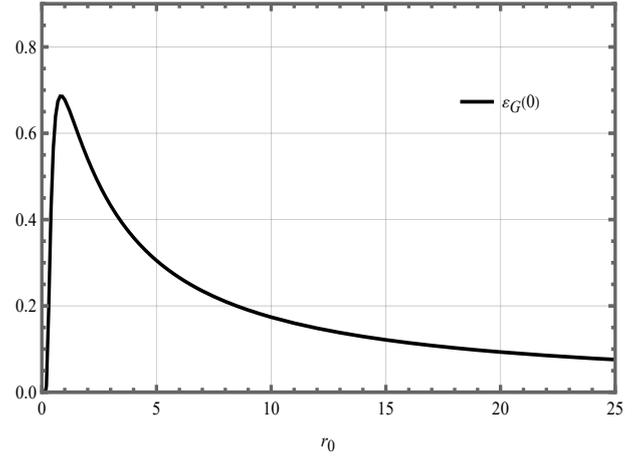


Figura 7.24: Valores da amplitude da densidade energia  $\varepsilon$  em função de valores crescentes de  $r_0$ .

A escolha de permeabilidade

$$G_2(\chi) = \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{4r^2r_0^2}, \quad (7.127)$$

é finita ao longo da coordenada radial; porém, apresenta divergência quando  $r = 0$  e  $r \rightarrow \infty$ . Assim, poderíamos concluir que a energia total seria uma quantidade infinita; no entanto, assim como ocorre para os vórtices localizados, para evitar a singularidades em  $\varepsilon_G(r)$ , é necessário que os campos  $E(r)$  e  $B(r)$  nas fronteiras se anulem mais rapidamente do que a função  $G_2(\chi)$  divirja, de modo que a energia total tenha um valor finito.

# Capítulo 8

## Conclusões

Nesta tese, estudamos dois tipos de configurações de campo que geram soluções topológicas. No capítulo 3, estudamos as soluções BPS no modelo de baby Skyrme na eletrodinâmica de Maxwell. A partir do método BPS, obtivemos as soluções canônicas via equações BPS, que minimizam o funcional de energia de cada modelo. De modo geral, as soluções apresentam um comportamento totalmente monotônico e de acordo com as condições de fronteira.

No capítulo 4, introduzimos a teoria que generaliza a eletrodinâmica usual de Maxwell; a eletrodinâmica de Born-Infeld, que faz parte de um grupo de teorias de campo modificadas e também possibilita a implementação do formalismo BPS, dentro de um intervalo permitido que depende da relação entre os parâmetros da teoria. Por meio do quadrado da densidade de energia do modelo, obtivemos soluções de skyrmions BPS cujos perfis são bem similares aos do modelo usual (Capítulo 3), apresentando somente modificações no valor dos campos na origem. Vale destacar novamente que, à medida que tomamos o limite de  $\beta \rightarrow \infty$  recuperamos o modelo baby-Skyrme-Maxwell.

Em seguida, no capítulo 5, acoplamos a permeabilidade junto ao termo de Maxwell, estendemos o modelo e obtivemos soluções de skyrmions não-usuais. Os resultados obtidos mostraram que os perfis dos campos mudam em relação ao modelo usual; tais mudanças ficam mais evidentes no campo de calibre, no campo magnético e na densidade de energia. A fim de mostrar como a permeabilidade afeta as soluções, fizemos um estudo com base na análise dos máximos e mínimos de  $B(r)$  e  $\varepsilon_{BPS}(r)$ . No modelo usual, as soluções apresentavam um padrão de comportamento monotônico; no modelo atual, as soluções possuem um comportamento mo-

dulado por  $G$ . A partir da análise dos extremos de  $B(r)$  e  $\varepsilon_{BPS}(r)$ , foi possível fazer uma estimativa da forma dessas soluções para todo o intervalo da coordenada radial, que mudam de acordo com a variação dos parâmetros da teoria. Por fim, apesar das modificações no intervalo intermediário de  $r$ , o comportamento dos campos nas fronteiras é inalterado, mantendo assim o caráter topológico das soluções.

No capítulo 6, propomos uma eletrodinâmica de Born-Infeld na presença da permeabilidade generalizada. Assim como nos capítulos precedentes, o objetivo é estudar soluções de energia mínima dentro do contexto da eletrodinâmica na matéria. Inicialmente, aplicamos o formalismo BPS e encontramos um limite inferior para a energia do modelo que é atingido quando as equações de primeira-ordem do modelo são satisfeitas. As soluções numéricas foram obtidas fixando  $g = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\beta = 1$  e variando o parâmetro  $\alpha$ . Como esperado, os perfis das soluções dos campos são modificados devido a função não-trivial. A exemplo do capítulo 5, fizemos um estudo das soluções do campo magnético, considerando intervalos definidos do parâmetro  $\alpha$ . De acordo com o intervalo considerado, os perfis variam entre formas de anéis e Lumps; a diferença na forma das soluções está ligada às condições topológicas do modelo.

Vale frisar que, assim como no modelo de Born-Infeld, existe um limite no intervalo das soluções. Agora, a condição para existência de soluções estáveis passa a depender também do parâmetro  $\alpha$ , isto é, modificamos um resultado já estabelecido na literatura.

No capítulo 7, estudamos o modelo de MCSH modificado (7.12), no qual a função  $G(\chi)$ , denominada de permeabilidade generalizada, foi acoplada ao termo de Maxwell. Por meio da implementação do formalismo BPS, obtivemos a energia mínima da configuração de campo e as equações BPS da teoria, a partir da qual buscamos encontrar soluções vórtices BPS generalizados. A partir da escolha de duas formas funcionais para  $G(\chi)$  encontramos dois tipos de soluções de vórtices: a primeira, caracterizada por  $G_1$ , gerou soluções BPS estáveis. Os perfis, principalmente do campo de calibre, campo magnético, potencial escalar, campo elétrico e densidade de energia, foram modificados devido a presença de  $G_1$ ; apresentando o surgimento estruturas internas resultante de comportamentos não-canônicos desses campos para valores intermediários da coordenada radial. Além disso, apesar da forma não-trivial da permeabilidade, as soluções próximas ao limite assintótico apresentavam um decaimento exponencial típico, semelhante aos dos vórtices Abrikosov-Nielsen-Olesen.

A segunda escolha da permeabilidade,  $G_2$ , assim como a primeira, forneceu soluções BPS estáveis. Ao contrário da primeira escolha, os perfis do campo de calibre, potencial escalar e campo elétrico são análogos ao modelo usual, com mudanças somente nos valores na origem e amplitudes desses campos. No entanto, o campo magnético e a densidade de energia possuem perfis que diferem do modelo usual. Em relação aos valores dos campos próximo ao limite assintótico, a escolha de  $G_2$  gera campos que apresentam um decaimento que obedece uma lei de potência; o que contrasta com o comportamento tanto do modelo usual  $G = 1$ , quanto pelo descrito por  $G_1$ . Na literatura, um comportamento parecido ocorre na Matéria Condensada, na previsão do modelo de Ginzburg-Landau para o campo magnético em um material.

A partir dos resultados obtidos na tese, surgiram ideias de novos trabalhos, tanto nos modelos de Skyrme quanto no modelo de vórtices quirais. Primeiramente, nos modelos de Skyrme pretendemos implementar o formalismo BPS aos modelos completos de baby-Skyrme e baby Skyrme-Born-Infeld, isto é, na presença do termo  $\sigma$ . Em seguida, por meio do acoplamento das permeabilidades, buscamos estender as teorias usuais.

Uma possível aplicação dos modelos de Skyrme reside no estudo de propriedades óticas, especialmente, no contexto de materiais cujas respostas a aplicação do campo eletromagnético é não-linear. Nesses materiais, devido a estrutura não linear das equações de campo, ondas propagantes que preservam sua forma podem surgir. Tais ondas são denominadas sólitons óticos.

Por outro lado, nos modelos de vórtices pretendemos introduzir novas funções não-triviais no modelo de MCSH, a fim de descrever meios materiais com características distintas, que podem ser moduladas pelas permeabilidades.

# Referências Bibliográficas

- [1] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. Oxford University Press, London, England, April 2014.
- [2] Alexander Vilenkin and E. Shellard. *Cosmic Strings*. CRC Press, 2000.
- [3] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15(6):240–243, Aug 1965.
- [4] W. Su, J. Schrieffer, and A. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Physical Review Letters*, 42(25):1698–1701, 6 1979.
- [5] Aleksandra, Doostmohammadi, and Amin. *Topological defects play an important role in biology*. Nature Physics, 2022.
- [6] Tzer Han Tan, Jinghui Liu, Pearson W. Miller, Melis Tekant, Jorn Dunkel, and Nikta Fakhri. Topological turbulence in the membrane of a living cell. *Nature Physics*, 16(6):657–662, 2020.
- [7] Alexander Vilenkin. Cosmological Density Fluctuations Produced by Vacuum Strings. *Physical Review Letters*, 46(22):1496–1496, 6 1981.
- [8] Philip G. Drazin and Robin Stanley Johnson. *Solitons: an introduction*, volume 2. Cambridge university press, 1989.
- [9] R. Jackiw, Kimyeong Lee, and Erick J. Weinberg. Self-dual Chern-Simons solitons. *Phys. Rev. D*, 42:3488–3499, Nov 1990.

- [10] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Graduate student series in physics. Hilger, Bristol, 1990.
- [11] C. Rebbi and G. Soliani. *Solitons And Particles*. World Scientific Publishing Company, 1984.
- [12] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe. *Topological solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [13] E. B. Bogomol'Nyi. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, 24(4), 1976.
- [14] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. *Phys. Rev. Lett.*, 35:760–762, Sep 1975.
- [15] C. Adam, C. Naya, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. Gauged BPS baby Skyrme model. *Phys. Rev. D*, 86:045010, Aug 2012.
- [16] Rodolfo Casana, Andre Santos, Claudio Farias, and Alexsandro Mota. Self-dual solitons in a Maxwell-Chern-Simons baby Skyrme model. *Physical Review D*, 101(4), 2 2020.
- [17] D. Bazeia. Vortices in a generalized Higgs model. *Phys. Rev. D*, 46:1879–1881, Aug 1992.
- [18] D. Bazeia, R. Casana, E. da Hora, and R. Menezes. Generalized self-dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs model. *Phys. Rev. D*, 85:125028, Jun 2012.
- [19] A. Vanhaverbeke, A. Bischof, and R. Allenspach. Control of Domain Wall Polarity by Current Pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 101:107202, Sep 2008.
- [20] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes, and I. Zafalan. Compact vortices. *The European Physical Journal C*, 77(2), January 2017.
- [21] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes, and I. Zafalan. First order formalism for generalized vortices. *Nuclear Physics B*, 934:212â239, September 2018.
- [22] D. Bazeia, M. A. Marques, and D. Melnikov. Planar ringlike vortices. *Physics Letters B*, 785:454–461, 2018.

- [23] D. Bazeia, M. A. Liao, and M. A. Marques. Geometrically constrained kinklike configurations. *The European Physical Journal Plus*, 135:1–9, 2020.
- [24] P.-O. Jubert, R. Allenspach, and A. Bischof. Magnetic domain walls in constrained geometries. *Phys. Rev. B*, 69:220410, Jun 2004.
- [25] A. J. Balseyro Sebastian, D. Bazeia, and M. A. Marques. Mechanism to induce geometric constriction on kinks and domain walls. *Europhysics Letters*, 141(3):34003, February 2023.
- [26] M. A. Marques and R. Menezes. Geometrically constrained multifield models with BNRT solutions. *Chaos, Solitons Fractals*, 181:114730, 2024.
- [27] D. Bazeia, M. A. Marques, and R. Menezes. Maxwell-Higgs vortices with internal structure. *Physics Letters B*, 780:485–490, 2018.
- [28] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, and R. Menezes. Multilayered vortices. *Phys. Rev. Res.*, 1:033053, Oct 2019.
- [29] D. Bazeia, M. A. Liao, and M. A. Marques. Generalized Maxwell-Higgs vortices in models with enhanced symmetry. *The European Physical Journal C*, 82(4), April 2022.
- [30] Adamu Issifu and Francisco A. Brito. The (de)-confinement transition in tachyonic matter at finite temperature. *arXiv e-prints*, page arXiv:1706.09013, June 2017.
- [31] J. Andrade, Rodolfo Casana, E. da Hora, and A. C. Santos. Restricted baby Skyrme-Maxwell theory in a magnetic medium: BPS configurations and some properties. *Phys. Rev. D*, 110:056005, Sep 2024.
- [32] J. Andrade, Rodolfo Casana, and E. da Hora. BPS chiral vortices in a Maxwell-Higgs electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:2402.18517*, 2024.
- [33] J. Andrade, Rodolfo Casana, and E. da Hora. BPS chiral vortices in Maxwell-Higgs electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 111:036019, Feb 2025.
- [34] J. Dixmier. *General Topology*. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1984.

- [35] Dmitry Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology*. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, October 2007.
- [36] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, England, December 2001.
- [37] Sze-Ten Hu. Edited by. In *Pure and Applied Mathematics*, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), page iii. Elsevier, 1959.
- [38] Luca Di Luzio, Michele Redi, Alessandro Strumia, and Daniele Teresi. Coset cosmology. *Journal of High Energy Physics*, 2019(6), June 2019.
- [39] George Douzas, Theodoros Grammatikopoulos, and George Zoupanos. Coset Space Dimensional Reduction and Wilson Flux Breaking of Ten-Dimensional  $N=1$ ,  $E(8)$  Gauge Theory. *Eur. Phys. J. C*, 59:917–935, 2009.
- [40] A. P. Balachandran, Giorgio Immirzi, Joochan Lee, and Peter Presnajder. Dirac Operators on Coset Spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 44, 10 2002.
- [41] Paul Renteln. *Manifolds, tensors, and forms*. Cambridge University Press, Cambridge, England, November 2013.
- [42] A. S. T. Pires. *Geometria diferencial para físicos*. Editora Livraria da Física, 2015.
- [43] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).
- [44] J. S. Russell. Report on Wave. Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York. 1844.
- [45] Diederik Johannes Korteweg and De Gustav Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine Series*, 1895.
- [46] Thierry Dauxois and Michel Peyrard. *Physics of solitons*, page 436. 2006.

- [47] A. Scott, F. Chu, and David Mclaughlin. The soliton: A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, 61(10):1443–1483, 1973.
- [48] O. Alvarez, L. A. Ferreira, and J. Sánchez Gullén. Integrable theories and loop spaces: Fundamentals, applications and new developments. *International Journal of Modern Physics A*, 24(10):1825–1888, 2009.
- [49] Rita de Cássia dos Anjos. *Teorias de campos integráveis e sólitons*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2009.
- [50] Tom Weidig. *Classical and quantum aspects of topological solitons:(using numerical methods)*. Durham University, 1999.
- [51] David Finkelstein. Kinks. *Journal of Mathematical Physics*, 7(7):1218–1225, 7 1966.
- [52] A. Abrikosov. The magnetic properties of superconducting alloys. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 2(3):199–208, 1 1957.
- [53] A. A. Abrikosov. On the Magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, 5, 1956.
- [54] Gerard't Hooft. Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, 79:276–284, 1974.
- [55] A. M. Polyakov. Spectrum of particles in quantum field theory. *JETP lett* 20, 1974.
- [56] T. Lee and Y. Pang. Nontopological solitons. *Physics Reports*, 221(5-6):251–350, 1991.
- [57] Sidney Coleman. Q-balls. *Nuclear Physics B*, 262(2):263–283, 1985.
- [58] Alexander Kusenko and Mikhail Shaposhnikov. Supersymmetric Q-balls as dark matter. *Physics Letters B*, 418(1):46–54, 1998.
- [59] Eduardo Fradkin. *Field theories of condensed matter physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [60] Tony Hilton Royle Skyrme. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 260(1300):127–138, 1961.

- [61] Gregory S. Adkins, Chiara R. Nappi, and Edward Witten. Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model. *Nucl. Phys. B*, 228:552, 1983.
- [62] Nicholas S. Manton. *Skyrmions: A theory of nuclei*. World Scientific, 2022.
- [63] Jurg Gasser and Heinrich Leutwyler. Quark masses. *Physics Reports*, 87(3):77–169, 1982.
- [64] A. A. Bogolubskaya and I. L. Bogolubsky. Stationary topological solitons in the two-dimensional anisotropic Heisenberg model with a Skyrme term. *Physics Letters A*, 136(9):485–488, 1989.
- [65] A. A. Bogolubskaya and I. L. Bogolubsky. On stationary topological solitons in a two-dimensional anisotropic Heisenberg model. *letters in mathematical physics*, 19(2):171–177, 1990.
- [66] Robert A. Leese, Michel Peyrard, and Wojciech J. Zakrzewski. Soliton scatterings in some relativistic models in  $(2+ 1)$  dimensions. *Nonlinearity*, 3(3):773, 1990.
- [67] et al Piette, B. M. A. G. A modified Mottola-Wipf model with sphaleron and instanton fields. *Physics Letters B*, 320(3-4):294–298, 1994.
- [68] Bernard M. A. G. Piette, Bernd J. Schroers, and W. J. Zakrzewski. Multisolitons in a two-dimensional Skyrme model. *Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields*, 65:165–174, 1995.
- [69] G. H. Derrick. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *Journal of Mathematical Physics* 5.9, 1964.
- [70] A. H. Macdonald. Incompressibilis Ergo Sum: Skyrmions and Edge States in the Quantum Hall Effect. In *Quantum Transport in Semiconductor Submicron Structures*, pages 63–91. Springer, 1996.
- [71] Oliver Schwindt and Niels R. Walet. Towards a phase diagram of the 2D Skyrme model. *Europhysics Letters*, 55(5):633, 2001.

- [72] Sebastian Mühlbauer, Benedikt Binz, Florian Jonietz, Christian Pfeleiderer, Achim Rosch, Anja Neubauer, Robert Georgii, and Peter Böni. Skyrmion lattice in a chiral magnet. *Science*, 323(5916):915–919, 2009.
- [73] X. Z. Yu, Yoshinori Onose, Naoya Kanazawa, Joung Hwan Park, J. H. Han, Yoshio Matsui, Naoto Nagaosa, and Yoshinori Tokura. Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal. *Nature*, 465(7300):901–904, 2010.
- [74] Daniel H. E. Dubin. *Numerical and analytical methods for scientists and engineers using Mathematica*. John Wiley & Sons, Nashville, TN, April 2003.
- [75] Stephen L. Campbell. The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods (Ernst Hairer, Christian Lubich, and Michel Roche). *SIAM Review*, 33(3):504–506, 1991.
- [76] M. Durgut and Namik K. Pak. Neutron-proton mass difference in the Skyrme model. *Physics Letters B*, 159(4):357–359, 1985.
- [77] B. J. Schroers. Bogomol’nyi solitons in a gauged  $O(3)$  sigma model. *Physics Letters B*, 356(2):291–296, 1995.
- [78] Jennifer Ashcroft, Mareike Haberichter, and Steffen Krusch. Baby Skyrme models without a potential term. *Physical Review D*, 91(10):105032, 2015.
- [79] J. Gladikowski, B. M. A. G. Piette, and Bernd Johannes Schroers. Skyrme-Maxwell solitons in  $2+1$  dimensions. *Physical Review D*, 53(2):844, 1996.
- [80] Kostas Skenderis and Paul K. Townsend. Gravitational stability and renormalization-group flow. *Physics Letters B*, 468(1):46–51, 1999.
- [81] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev. D*, 62:046008, Jul 2000.
- [82] Mario Trigiante, Thomas Van Riet, and Bert Vercoe. Fake supersymmetry versus Hamilton-Jacobi. *Journal of High Energy Physics*, 2012(5):1–18, 2012.

- [83] Kostas Skenderis and Paul K. Townsend. Hidden Supersymmetry of Domain Walls and Cosmologies. *Phys. Rev. Lett.*, 96:191301, May 2006.
- [84] Arjun Berera, Joel Mabillard, Mauro Pieroni, and Rudnei O. Ramos. Identifying universality in warm inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(07):021, jul 2018.
- [85] Francesco Cicciarella, Joel Mabillard, and Mauro Pieroni. New perspectives on constant-roll inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(01):024, jan 2018.
- [86] R. Rajaraman. *Solitons and instantons: Volume 15*. North-Holland Personal Library. North-Holland, Oxford, England, April 1987.
- [87] Andre Cavalcante Santos et al. *Defeitos topologicos e uma solucao tipo Schwarzschild num modelo bumblebee de gravitacao*. PhD thesis, Universidade Federal do Maranhao, 2019.
- [88] Max Born and Leopold Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 144(852):425–451, 1934.
- [89] E. Moreno, C. Núñez, and F. A. Schaposnik. Electrically charged vortex solution in Born-Infeld theory. *Phys. Rev. D*, 58:025015, Jun 1998.
- [90] Y. F. Alam and A. Behne. Review of Born-Infeld electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:2111.08657*, 2021.
- [91] Tanay Kumar Dey. Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant. *Physics Letters B*, 595(1):484–490, 2004.
- [92] John Ellis, Nick E. Mavromatos, and Tevong You. Light-by-Light Scattering Constraint on Born-Infeld Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 118:261802, Jun 2017.
- [93] Jose M. Queiruga. SUSY Chern-Simons and baby Skyrme models and their BPS structures. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 52(5):055202, jan 2019.

- [94] Guy Boillat. Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):941–951, 1970.
- [95] G. Boillat. Shock relations in nonlinear electrodynamics. *Physics Letters A*, 40(1):9–10, 1972.
- [96] E. Bergshoeff, E. Sezgin, C. N. Pope, and P. K. Townsend. The Born-Infeld action from conformal invariance of the open superstring. *Physics Letters B*, 188(1):70–74, 1987.
- [97] R. R. Metsaev, M. A. Rahmanov, and Arkady A. Tseytlin. The Born-Infeld action as the effective action in the open superstring theory. *Physics Letters B*, 193(2-3):207–212, 1987.
- [98] Valerij A. Rubakov. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press, Princeton, 2009. Description based on publisher supplied metadata and other sources.
- [99] P.-O. Jubert, R. Allenspach, and A. Bischof. Magnetic domain walls in constrained geometries. *Phys. Rev. B*, 69:220410, Jun 2004.
- [100] D. Bazeia, A. Mohammadi, and D. C. Moreira. Fermions in the presence of topological structures under geometric constrictions. *Phys. Rev. D*, 103:025003, Jan 2021.
- [101] J. Andrade, Rodolfo Casana, E. da Hora, and A. C. Santos. Restricted baby Skyrme-Maxwell theory in a magnetic medium: BPS configurations and some properties. *arXiv preprint arXiv:2406.18357*, 2024.
- [102] H. B. Nielsen and P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics B*, 61:45–61, 1973.
- [103] R. Jackiw and Erick J. Weinberg. Self-dual Chern-Simons vortices. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2234–2237, May 1990.
- [104] Gerald V. Dunne. Aspects of chern-simons theory. In *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems: Session LXIX. 7–31 July 1998*, pages 177–263. Springer, 2002.

- [105] S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson. Effective-Field-Theory Model for the Fractional Quantum Hall Effect. *Phys. Rev. Lett.*, 62:82–85, Jan 1989.
- [106] Shou Cheng Zhang. The chern-simons-landau-ginzburg theory of the fractional quantum hall effect. In *Low-Dimensional Quantum Field Theories for Condensed Matter Physicists*, pages 191–224. World Scientific, 1995.
- [107] Krishna Kumar, Kai Sun, and Eduardo Fradkin. Chern-Simons theory of magnetization plateaus of the spin-1/2 quantum XXZ Heisenberg model on the kagome lattice. *Phys. Rev. B*, 90:174409, Nov 2014.
- [108] Choonkyu Lee, Kimyeong Lee, and Hyunsoo Min. Self-dual maxwell chern-simons solitons. *Physics Letters,(Section) B;(Netherlands)*, 252(1), 1990.
- [109] Sean M. Carroll, George B. Field, and Roman Jackiw. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 41:1231–1240, Feb 1990.
- [110] Michel Petitjean. Chirality in geometric algebra. *Mathematics*, 9(13):1521, 2021.
- [111] Lewis E. MacKenzie and Patrycja Stachelek. The twists and turns of chiral chemistry. *Nature Chemistry*, 13(6):521–522, 2021.
- [112] Baojin Ma and Alberto Bianco. Regulation of biological processes by intrinsically chiral engineered materials. *Nature Reviews Materials*, 8(6):403–413, 2023.
- [113] C. Manuel Carlevaro, Ramiro M. Irastorza, and Fernando Vericat. Chirality in a quaternionic representation of the genetic code. *Biosystems*, 150:99–109, 2016.
- [114] William Thomson Baron Kelvin. *The molecular tactics of a crystal*. Clarendon Press, 1894.
- [115] Dmitri E. Kharzeev. The Chiral Magnetic Effect and anomaly-induced transport. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 75:133–151, 2014.
- [116] Binghai Yan and Claudia Felser. Topological materials: Weyl semimetals. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 8(1):337–354, 2017.

- [117] Sumathi Rao. Weyl semi-metals: a short review. *arXiv preprint arXiv:1603.02821*, 2016.
- [118] Shuang Jia, Su-Yang Xu, and M. Zahid Hasan. Weyl semimetals, Fermi arcs and chiral anomalies. *Nature materials*, 15(11):1140–1144, 2016.
- [119] M. Joyce and M. Shaposhnikov. Primordial Magnetic Fields, Right Electrons, and the Abelian Anomaly. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1193–1196, Aug 1997.
- [120] Naoki Yamamoto. Chiral transport of neutrinos in supernovae: Neutrino-induced fluid helicity and helical plasma instability. *Phys. Rev. D*, 93:065017, Mar 2016.
- [121] Dmitri E. Kharzeev, Larry D. McLerran, and Harmen J. Warringa. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: “Event by event P and CP violation”. *Nuclear Physics A*, 803(3):227–253, 2008.
- [122] Kenji Fukushima, Dmitri E. Kharzeev, and Harmen J. Warringa. The Chiral Magnetic Effect. *Phys. Rev. D*, 78:074033, 2008.
- [123] Zebin Qiu, Gaoqing Cao, and Xu-Guang Huang. On electrodynamics of chiral matter. *Phys. Rev. D*, 95(3):036002, 2017.
- [124] I. Andrade, D. Bazeia, M. A. Marques, and R. Menezes. Long range vortex configurations in generalized models with Maxwell or Chern-Simons dynamics. *Phys. Rev. D*, 102:025017, Jul 2020.
- [125] J. Andrade, R. Casana, E. da Hora, and C. dos Santos. First-order solitons with internal structures in an extended maxwell- $cp(2)$  model. *Phys. Rev. D*, 99:056014, Mar 2019.
- [126] D. Bazeia, M. M. Doria, and E. I. B. Rodrigues. Topological excitations in magnetic materials. *Physics Letters A*, 380(22):1947–1952, 2016.
- [127] D. Bazeia, J. G. G. S. Ramos, and E. I. B. Rodrigues. Topological strength of magnetic skyrmions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 423:411–420, 2017.
- [128] D. Bazeia and A. Mohammadi. Dirac field in the background of a planar defect. *Physics Letters B*, 779:420–424, 2018.

- [129] Egor Babaev. Vortices with Fractional Flux in Two-Gap Superconductors and in Extended Faddeev Model. *Phys. Rev. Lett.*, 89:067001, Jul 2002.
- [130] Egor Babaev, Juha Jäykkä, and Martin Speight. Magnetic Field Delocalization and Flux Inversion in Fractional Vortices in Two-Component Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 103:237002, Dec 2009.
- [131] Mohamed M. Anber, Yannis Burnier, Eray Sabancilar, and Mikhail Shaposhnikov. Superconductivity at Any Temperature. *arXiv preprint arXiv:1508.05283*, 2015.
- [132] Mohamed M. Anber, Yannis Burnier, Eray Sabancilar, and Mikhail Shaposhnikov. Diamagnetic vortices in Chern-Simons theory. *Phys. Rev. D*, 92:085049, Oct 2015.