

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Jefferson Georgy de Lima Cavalcante Junior

**Agrupamento Nebuloso Evolutivo Baseado em
Critério Gaussiano Multivariável para Tomada de
Decisão em Fluxos de Dados**

São Luís - MA

2025

Jefferson Georgy de Lima Cavalcante Junior

Agrupamento Nebuloso Evolutivo Baseado em Critério Gaussiano Multivariável para Tomada de Decisão em Fluxos de Dados

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal do Maranhão.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís - MA

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Calvalcante Junior, Jefferson Georgy de Lima.

Agrupamento Nebuloso Evolutivo Baseado em Critério Gaussiano Multivariável para Tomada de Decisão em Fluxos de Dados / Jefferson Georgy de Lima Calvalcante Junior. - 2025.

368 f.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2025.

1. Agrupamento Nebuloso Evolutivo. 2. Agrupamento de Fluxos de Dados. 3. Modelagem Online de Séries Temporais. 4. Identificação Online de Sistemas. 5. Sistema de Inferência Nebuloso Evolutivo. I. Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II. Título.

Jefferson Georgy de Lima Cavalcante Junior

Agrupamento Nebuloso Evolutivo Baseado em Critério Gaussiano Multivariável para Tomada de Decisão em Fluxos de Dados

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal do Maranhão.

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 14 de Março de 2025:

Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra
Orientador - IFMA

Dr. Francisco das Chagas de Souza
Examinador Interno - UFMA

Dra. Patrícia Helena Moraes Rêgo
Examinadora Externa - UEMA

Dr. Selmo Eduardo Rodrigues Junior
Examinador Externo - IFMA

São Luís - MA
2025

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que tem me dado a força, o ânimo e a paciência, tem provido todo o sustento e, principalmente, tem alimentado a minha alma com a grandiosa salvação em Cristo Jesus.

Agradeço aos meus pais Maria e Jefferson por todo o cuidado e amor na minha criação que pavimentaram o meu caminho até aqui, bem como por todo o incentivo nesta jornada de 2 anos. Aos meus irmãos Bianca e Marcos Paulo, obrigado pela força e companhia em todos os momentos.

Agradeço ao meu professor e orientador, Dr. Ginalber Serra, por todos os ensinamentos, pela exemplar orientação, e por toda a paciência nas revisões, que contribuíram profundamente para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ao Grupo de Pesquisa em Inteligência Computacional Aplicada à Tecnologia do Instituto Federal do Maranhão, especialmente ao meu colega Ben-Hur, por todo o auxílio complementar no desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ao pastor Junior e à sua esposa Poliana, bem como a todos os irmãos da Igreja Cristã Maranata do Cohajap, por toda a comunhão, o amor, o auxílio, a amizade e as inúmeras caronas. Vocês foram a minha família aqui nesta cidade.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Maranhão (UFMA), ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por todo o suporte estrutural e financeiro durante este curso de mestrado.

Agradeço aos professores Me. Luís Miguel e Dr. Selmo, por toda a orientação durante minha graduação e pela indicação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão.

Agradeço ao meu tio-avô Joacy e à sua esposa Valmizólia, por todo o auxílio na minha chegada e adaptação a São Luís, especialmente na busca pelo apartamento onde passei a morar, e pelo período em que fiquei na vossa casa. À minha avó Maria Iracy, agradeço por ter viajado comigo na minha chegada à São Luís, e por todo o auxílio na estruturação do meu novo lar.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta dissertação: muito obrigado!

“Eis aqui vos digo um mistério: Na verdade, nem todos dormiremos, mas todos seremos transformados, num momento, num abrir e fechar de olhos, ante a última trombeta; porque a trombeta soará, e os mortos ressuscitarão incorruptíveis, e nós seremos transformados. Porque convém que isto que é corruptível se revista da incorruptibilidade e que isto que é mortal se revista da imortalidade. E, quando isto que é corruptível se revestir da incorruptibilidade, e isto que é mortal se revestir da imortalidade, então, cumprir-se-á a palavra que está escrita: Tragada foi a morte na vitória. Onde está, ó morte, o teu aguilhão? Onde está, ó inferno, a tua vitória? Ora, o aguilhão da morte é o pecado, e a força do pecado é a lei. Mas graças a Deus, que nos dá a vitória por nosso Senhor Jesus Cristo. Portanto, meus amados irmãos, sede firmes e constantes, sempre abundantes na obra do Senhor, sabendo que o vosso trabalho não é vão no Senhor.”

(Bíblia Sagrada, 1 Coríntios 15:51-58)

Resumo

Nesta dissertação, é proposto um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo aplicado a fluxos de dados. O algoritmo realiza o agrupamento dos dados em uma abordagem “*from scratch*”, ou seja, determinando as suas variáveis completamente a partir dos dados disponibilizados em fluxo, iniciando a partir da primeira amostra de dados. Ele é baseado na computação de potencial dos dados para a tomada de decisão sobre os centros dos grupos a cada amostra, que é realizada a partir de uma função gaussiana multivariável que considera a densidade e a taxa de variação como variáveis de informação. O algoritmo possui um mecanismo autônomo de normalização de dados para similaridade na escala dos mesmos de acordo com a faixa de operação dinâmica do fluxo de dados, e constrói grupos com protótipos variantes no tempo de acordo com matrizes de covariância nebulosa e uma métrica de distância exponencial. No seu processo de tomada de decisão, ele apresenta um mecanismo baseado nas sensibilidades dos grupos e em raios de grupo adaptativos. No processo de atualização e mescla de grupos, o algoritmo apresenta um mecanismo baseado na técnica evolucionária de cruzamento. Resultados computacionais consideram a implementação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064) amplamente utilizados na tarefa de agrupamento de fluxos de dados, bem como para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais (Função Hipérbole, Mackey-Glass e Nakanishi) e à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares (SISO e MIMO). Resultados experimentais consideram a implementação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos do mundo real (Planta Térmica, Helicóptero 2DoF e Foguete Fogtrein-I). No processo de modelagem *online* de séries temporais e identificação *online* de sistemas dinâmicos, o algoritmo é aplicado no processo de fuzzificação de dados e criação/atualização de regras nebulosas evolutivas em um sistema de inferência nebuloso evolutivo. Na proposição consequente das regras nebulosas evolutivas, o modelo no espaço de estados é adotado, de modo que sua identificação paramétrica é realizada através do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo (*Recursive Fuzzy Observer/Kalman filter Identification/Eigensystem Realization Algorithm*). Em geral, os resultados indicam que o algoritmo é adequado para o agrupamento nebuloso evolutivo de fluxos de dados, alcançando desempenho competitivo em comparação com outros algoritmos na literatura.

Palavras-chave: Agrupamento Nebuloso Evolutivo, Agrupamento de Fluxos de Dados, Modelagem *Online* de Séries Temporais, Identificação *Online* de Sistemas, Sistema de Inferência Nebuloso Evolutivo, OKID/ERA Nebuloso Recursivo.

Abstract

In this dissertation, an evolving fuzzy clustering algorithm applied to data streams is proposed. The algorithm performs the clustering of the data using a “from scratch” approach, i.e., determining its variables completely from the streaming data, starting from the first data sample. It is based on computing the potential of the data to make decisions about the centers of clusters at each sample, using a multivariable Gaussian function that considers the density and the rate of variation as information variables. The algorithm includes an autonomous data normalization mechanism for similarity in scaling according to the dynamic operating range of the data stream and constructs clusters with time-varying prototypes based on fuzzy covariance matrices and an exponential distance metric. In its decision-making process, it employs a mechanism based on clusters’ sensitivities and adaptive cluster radii. For updating and merging clusters, the algorithm includes a mechanism based on the evolutionary crossover technique. Computational results consider the implementation of the algorithm for evolving fuzzy clustering of 8 datasets benchmarks (S1, A1, R15, Unbalance, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032, and DIM064) widely used in data stream clustering tasks, as well as for evolving fuzzy clustering of data applied to online time-series modeling (Hyperbole Function, Mackey-Glass, and Nakanishi) and to online identification of nonlinear dynamic systems (SISO and MIMO). Experimental results consider the implementation of the algorithm for evolving fuzzy clustering of data applied to online identification of real-world dynamic systems (Thermal Plant, 2DoF Helicopter, and Fogtrein-I Rocket). In the online time-series modeling and online dynamic systems identification processes, the algorithm is applied in the fuzzification of data and in the creation/updating of evolving fuzzy rules in an evolving fuzzy inference system. For the consequent proposition of the evolving fuzzy rules, the state-space model is adopted, with its parametric identification performed using the Recursive Fuzzy Observer/Kalman filter Identification/Eigensystem Realization Algorithm (OKID/ERA). In general, the results indicate that the algorithm is suitable for evolving fuzzy clustering of data streams, achieving competitive performance in comparison to other algorithms in the literature.

Keywords: Evolving Fuzzy Clustering, Data Stream Clustering, Online Time-Series Modeling, Online System Identification, Evolving Fuzzy Inference System, Recursive Fuzzy OKID/ERA.

Lista de Figuras

- Figura 1 – Exemplo de diferentes grupos no espaço bidimensional, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”. Fonte: Autor. 76
- Figura 2 – Ilustração dos protótipos dos grupos no espaço bidimensional, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros dos grupos $\mathbf{c}^i$ em “asteriscos vermelhos”, as retas que passam pelos eixos dos protótipos em “linhas tracejadas pretas”, e as formas dos protótipos, representadas pelas curvas isométricas, em “linhas tracejadas vermelhas”. Os protótipos são ilustrados para três tipos de normas induzidas: (a) Norma Euclidiana, com protótipos hiperesféricos; (b) Norma Diagonal, com protótipos hiperelipsoidais cujos eixos são paralelos aos eixos das coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$; (c) Norma Mahalanobis, com protótipos hiperelipsoidais cujos eixos são arbitrários. Fonte: Adaptado de Babuška (2012). 84
- Figura 3 – Ilustração da diferença entre modelos adaptativos e modelos evolutivos no contexto de modelagem de dados, em que u_k é a variável de entrada dos modelos, y_k é a variável de saída dos modelos, os dados antigos são ilustrados em “pontos lilás”, os dados novos em “pontos roxos”, o modelo original em “linha preta”, o modelo adaptativo em “linha tracejada preta”, e o modelo evolutivo em “linha pontilhada preta”. (a) Caso em que a presença de novos dados resulta apenas na adaptação de parâmetros do modelo para manter uma boa aproximação; (b) Caso em que uma evolução da estrutura do modelo é necessária para manter uma boa aproximação com a presença de novas amostras de dados. Fonte: Adaptado de Lughofer (2011a). 96
- Figura 4 – Ilustração do efeito do peso multivariável γ sobre o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ em função da amostra k , a partir de um par de curvas da função $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ para a densidade de $\bar{\mathbf{x}}_k$ e da função $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ para a taxa de variação de $\bar{\mathbf{x}}_k$, em que a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,00$ ($P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$) é ilustrada em “linha laranja”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,20$ em “linha amarela”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,40$ em “linha roxa”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,60$ em “linha verde”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,80$ em “linha azul”, e a curva de potencial correspondente a $\gamma = 1,00$ ($P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$) em “linha vermelha”. Fonte: Autor. 140

Figura 5 – Ilustração do efeito do uso da métrica de distância exponencial sobre o processo de agrupamento nebuloso evolutivo, em que $\bar{\mathcal{D}}_k^i$ é a distância de norma induzida de Mahalanobis entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra. (a) Gráficos de $\bar{D}_k^i$ em função de $\bar{\mathcal{D}}_k^i$ para o uso direto da norma induzida de Mahalanobis ($\bar{D}_k^i = \bar{\mathcal{D}}_k^i$), ilustrado em “linha preta”, e para o uso da expressão exponencial ($\bar{D}_k^i = e^{\bar{\mathcal{D}}_k^i} - 1$), ilustrado em “linha verde”; (b) Efeito do uso da métrica de distância exponencial sobre as curvas isométricas dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, as curvas isométricas ($\bar{D}_k^i = \bar{\mathcal{D}}_k^i$ constante) dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ para o uso direto da norma induzida de Mahalanobis em “linhas tracejadas pretas”, e as curvas isométricas ($\bar{D}_k^i = e^{\bar{\mathcal{D}}_k^i} - 1$ constante) dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ para o uso da métrica de distância exponencial em “linhas tracejadas verdes”.
 Fonte: Autor. 142

Figura 6 – Ilustração para o processo de computação da densidade do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \mid_{j=1, \dots, \psi_k}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a última criação de grupo são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra em “asteriscos vermelhos”, os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \mid_{j=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra em “asteriscos azuis”, e o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra em “asterisco verde”.
 Fonte: Autor. 143

Figura 7 – Ilustração do efeito do decaimento gaussiano r sobre a computação do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, com base no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{D}_k^i)^2}$ em função da distância adaptativa $\bar{D}_k^i$, no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2}\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_j\|^2}$ em função da norma euclidiana $\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_j\|$, e no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2}(\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k})^2}$ em função da taxa de variação normalizada $\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$, considerando os valores de decaimento gaussiano $r \in \{0,05, 0,10, 0,30, 0,50, 0,75, 1,00\}$, em que a curva gaussiana correspondente a $r = 0,05$ é ilustrada em “linha laranja”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,10$ em “linha amarela”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,30$ em “linha roxa”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,50$ em “linha verde”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,75$ em “linha azul”, e a curva gaussiana correspondente a $r = 1,00$ em “linha vermelha”.
 Fonte: Autor. 144

- Figura 8 – Ilustração do procedimento de atualização do grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra através da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a $(k-1)$ -ésima amostra são ilustrados em “pontos lilás”, o dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra em “asterisco azul”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ em “asterisco vermelho”, a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} , representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$, em “linha tracejada vermelha”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ resultante do procedimento de atualização em “asterisco verde”, e a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} resultante do procedimento de atualização, representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$, em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor. 151
- Figura 9 – Ilustração do comportamento do raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ em função do número de grupos R_k , considerando os valores de decaimento gaussiano $r \in \{0,05, 0,10, 0,30, 0,50, 0,75, 1,00\}$, em que a curva correspondente a $r = 0,05$ é ilustrada em “linha laranja”, a curva correspondente a $r = 0,10$ em “linha amarela”, a curva correspondente a $r = 0,30$ em “linha roxa”, a curva correspondente a $r = 0,50$ em “linha verde”, a curva correspondente a $r = 0,75$ em “linha azul”, e a curva correspondente a $r = 1,00$ em “linha vermelha”. Fonte: Autor. 153
- Figura 10 – Ilustração do procedimento de mescla dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} na k -ésima amostra através da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a k -ésima amostra são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$ em “asteriscos vermelhos”, as zonas de influência dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} , representadas pelas curvas isométricas $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$ e $\bar{D}_k^{j*} = \varepsilon_k^{j*}$, em “linhas tracejadas vermelhas”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla em “asterisco verde”, e a zona de influência do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla, representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{R_k+1} = \varepsilon_k^{R_k+1}$, em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor. 159

Figura 11 – Ilustração do modelo de função de pertinência μ_k^i adotado pelo algoritmo.

(a) Níveis de contorno associados aos graus de pertinência μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,8$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,6$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,4$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Efeito do grau de incerteza m sobre os níveis de contorno associados a um grau de pertinência (μ_k^i constante) dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 1,50$ em “linhas tracejadas laranja”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 2,00$ em “linhas tracejadas amarelas”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 2,50$ em “linhas tracejadas roxas”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 3,00$ em “linhas tracejadas verdes”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 3,50$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno correspondentes a $m = 4,00$ em “linhas tracejadas vermelhas”. Fonte: Autor. 165

Figura 12 – Relação entre o comprimento e a orientação dos eixos do protótipo hiperelipsoidal do grupo Θ_k^i com os autovalores ($\lambda_k^{i,1}$ e $\lambda_k^{i,2}$) e os autovetores ($\boldsymbol{\varrho}_k^{i,1}$ e $\boldsymbol{\varrho}_k^{i,2}$) da sua matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ na k -ésima amostra para o caso bidimensional ($n = 2$), em que o centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ é ilustrado em “asterisco vermelho”, as retas que passam pelos eixos do protótipo em “linhas tracejadas pretas”, a forma do protótipo, representada pela curva isométrica, em “linha tracejada vermelha”, e os autovetores $\boldsymbol{\varrho}_k^{i,1}$ e $\boldsymbol{\varrho}_k^{i,2}$ da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ em “setas pretas” nas direções dos eixos do hiperelipsoide. Fonte: Adaptado de Babuška (2012). 167

Figura 13 – Fluxograma para a implementação do algoritmo proposto, o qual indica a sequência de procedimentos computacionais para o agrupamento nebuloso evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Fonte: Autor. 170

Figura 14 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 185

Figura 15 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 187

Figura 16 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 189

Figura 17 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas $(\bar{D}_{k,N}^i \text{ constante})$, em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 190

Figura 18 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 192

Figura 19 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 194

Figura 20 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 196

Figura 21 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 198

Figura 22 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 199

Figura 23 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* *Unbalance*: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 201

Figura 24 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance*: (a) Variação dos potenciais $P_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 203

Figura 25 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance*: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 205

Figura 26 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim: (a) Coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 207

Figura 27 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 209

Figura 28 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 211

Figura 29 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim: (a) Coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 212

Figura 30 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 214

Figura 31 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 216

Figura 32 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032: (a) Coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 218

Figura 33 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 220

Figura 34 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 222

Figura 35 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064: (a) Coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas $(\bar{D}_{k,N}^i \text{ constante})$, em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 224

Figura 36 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 226

Figura 37 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 228

Figura 38 – Diagrama de blocos da estrutura do processo de modelagem *online* de séries temporais através do sistema de inferência nebuloso evolutivo, no qual a fuzzificação dos dados $\mathbf{x}_k$ e a criação/atualização das regras nebulosas evolutivas são realizadas pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto. Fonte: Autor. 230

Figura 39 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole: (a) Última variável de entrada u_k^7 e variável de saída y_k da função Hipérbole em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 235

Figura 40 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 237

Figura 41 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 239

Figura 42 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* da função Hipérbole: (a) Estimação de saída, em que a variável de saída y_k da função Hipérbole é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k da função Hipérbole é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 240

Figura 43 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Variável de entrada u_k do sistema de inferência nebuloso evolutivo baseado no algoritmo e variável de saída y_k da série temporal caótica de Mackey-Glass em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas $(\bar{D}_{k,N}^i \text{ constante})$, em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 243

Figura 44 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 245

Figura 45 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 246

Figura 46 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Estimação da série temporal, em que a variável y_k correspondente à série temporal caótica de Mackey-Glass é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação da série temporal, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável y_k correspondente à série temporal caótica de Mackey-Glass é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 247

Figura 47 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Última variável de entrada u_k^2 e variável de saída y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 251

Figura 48 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 253

Figura 49 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 255

Figura 50 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* do primeiro conjunto de dados de Nakanishi (sistema não linear): (a) Estimação de saída, em que a variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. . . . 256

Figura 51 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi: (a) Última variável de entrada u_k^2 e variável de saída y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 259

Figura 52 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 261

Figura 53 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 263

Figura 54 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* do segundo conjunto de dados de Nakanishi (planta química): (a) Estimação da série temporal, em que a variável correspondente y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação da série temporal, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da série temporal y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 264

Figura 55 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Última variável de entrada u_k^3 e variável de saída y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 267

Figura 56 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 269

Figura 57 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 270

Figura 58 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* do terceiro conjunto de dados de Nakanishi (mercado de ações): (a) Estimação da série temporal, em que a variável correspondente y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação da série temporal, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da série temporal y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 271

Figura 59 – Diagrama de blocos da estrutura do processo de identificação *online* de sistemas dinâmicos através do sistema de inferência nebuloso evolutivo no qual a fuzzificação dos dados $\mathbf{x}_k$ e a criação/atualização das regras nebulosas evolutivas são realizadas pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto. Fonte: Autor. 273

Figura 60 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO: (a) Variável de entrada u_k e variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática do sistema dinâmico SISO em “linha tracejada preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 278

Figura 61 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática do sistema dinâmico SISO em “linha tracejada preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 280

Figura 62 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 282

Figura 63 – Comparação do desempenho do algoritmo proposto com os algoritmos k -means, c -means, GK, subtrativo e eTS+, em relação à identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO por meio da estimação dos centros de grupo, em que a curva estática do sistema dinâmico SISO é ilustrada em “linha tracejada preta”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo k -means em “asteriscos laranja”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo c -means em “asteriscos amarelos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo GK em “asteriscos roxos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo subtrativo em “asteriscos verdes”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo proposto em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo alcançados pelo algoritmo eTS+ em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor. 284

Figura 64 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico SISO: (a) Estimação de saída, em que a variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 286

Figura 65 – Validação no domínio da frequência do desempenho do algoritmo na identificação *online* do sistema dinâmico SISO, em que a magnitude $|H_f|$ da resposta em frequência do sistema dinâmico SISO é ilustrada em “linha preta”, e a magnitude $|\hat{H}_f|$ da resposta em frequência do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor. 286

Figura 66 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Variáveis de entrada u_k^1 e u_k^2 e variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas superfícies isométricas $(\bar{D}_{k,N}^i \text{ constante})$, em “superfícies vermelhas semitransparentes”; (d) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas superfícies isométricas $(\bar{D}_{k,N}^i \text{ constante})$, em “superfícies vermelhas semitransparentes”. Fonte: Autor. 290

Figura 67 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (d) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor. 292

Figura 68 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 294

Figura 69 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base nas variáveis u_k^1 e y_k^1 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base nas variáveis u_k^2 e y_k^2 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (c) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base nas variáveis u_k^1 e y_k^1 , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”; (d) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base nas variáveis u_k^2 e y_k^2 , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 296

Figura 70 – Comparação do desempenho do algoritmo proposto com os algoritmos *k-means*, *c-means*, GK, subtrativo e eTS+, em relação à identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO por meio da estimação dos centros de grupo, em que as superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO são ilustradas em “linhas pretas”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *k-means* em “asteriscos laranja”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *c-means* em “asteriscos amarelos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo GK em “asteriscos roxos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo subtrativo em “asteriscos verdes”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo proposto em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo alcançados pelo algoritmo eTS+ em “asteriscos vermelhos”: (a) Superfície estática correspondente à primeira variável de saída y_k^1 do sistema dinâmico MIMO; (b) Superfície estática correspondente à segunda variável de saída y_k^2 do sistema dinâmico MIMO. Fonte: Autor. 299

- Figura 71 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico MIMO: (a) Estimação de saída, em que a primeira variável de saída y_k^1 do sistema dinâmico MIMO é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k^1$ em “linha tracejada verde”; (b) Estimação de saída, em que a segunda variável de saída y_k^2 do sistema dinâmico MIMO é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k^2$ em “linha tracejada verde”; (c) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k^1 = y_k^1 - \hat{y}_k^1$ de estimação da primeira variável de saída y_k^1 do sistema dinâmico MIMO é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^1 em “linha verde”; (d) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k^2 = y_k^2 - \hat{y}_k^2$ de estimação da segunda variável de saída y_k^2 do sistema dinâmico MIMO é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^2 em “linha verde”. Fonte: Autor. 300
- Figura 72 – Validação no domínio da frequência do desempenho do algoritmo na identificação *online* do sistema dinâmico MIMO: (a) Comparação entre o valor singular ϕ_f^1 da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$ do sistema dinâmico MIMO, ilustrado em “linha preta”, e o valor singular $\hat{\phi}_f^1$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, ilustrado em “linha tracejada verde”; (b) Comparação entre o valor singular ϕ_f^2 da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$ do sistema dinâmico MIMO, ilustrado em “linha preta”, e o valor singular $\hat{\phi}_f^2$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, ilustrado em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor. 301
- Figura 73 – Ambiente experimental de planta térmica composta por uma torradeira monofásica de 220 V AC com um intervalo de temperatura de 25 °C a 250 °C. Fonte: Rocha Filho (2017). 307

Figura 74 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica: (a) Variável de entrada (tensão u_k) e variável de saída (temperatura y_k) da Planta Térmica em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática da Planta Térmica em “linha tracejada preta”, os dados no estado estacionário em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 310

Figura 75 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática da Planta Térmica em “linha tracejada preta”, os dados em estado estacionário da Planta Térmica em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 312

Figura 76 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 313

Figura 77 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* da Planta Térmica: (a) Estimação de temperatura de saída, em que a temperatura y_k da Planta Térmica é ilustrada em “linha preta”, e a temperatura estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de temperatura de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da temperatura y_k da Planta Térmica é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 314

Figura 78 – Sistema dinâmico não linear multivariável composto de helicóptero de 2 graus de liberdade. Fonte: Rocha Filho (2017). 316

Figura 79 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Variáveis de entrada (tensão do motor de arfagem u_k^1 e tensão do motor de guinada u_k^2) e variáveis de saída (ângulo de arfagem y_k^1 e ângulo de guinada y_k^2) do Helicóptero 2DoF em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Fonte: Autor. 319

Figura 80 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (d) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor. 320

Figura 81 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 322

Figura 82 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ em “linhas tracejadas verdes”; (c) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”; (d) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 324

Figura 83 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do Helicóptero 2DoF: (a) Estimação de ângulo de arfagem, em que o ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o ângulo de arfagem estimado $\hat{y}_k^1$ em “linha tracejada verde”; (b) Estimação de ângulo de guinada, em que o ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o ângulo de guinada estimado $\hat{y}_k^2$ em “linha tracejada verde”; (c) Erro de estimação de ângulo de arfagem, em que o erro $e_k^1 = y_k^1 - \hat{y}_k^1$ de estimação do ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^1 em “linha verde”; (d) Erro de estimação de ângulo de guinada, em que o erro $e_k^2 = y_k^2 - \hat{y}_k^2$ de estimação do ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^2 em “linha verde”. Fonte: Autor. 325

Figura 84 – Foguete Fogtrein-I projetado pelo Comando da Aeronáutica (COMAER) e pela Avibras (empresa brasileira). Fonte: Pires e Serra (2018). 327

Figura 85 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Variáveis de entrada (ângulo de arfagem u_k^1 e ângulo de guinada u_k^2) e variável de saída (altura y_k) do Foguete Fogtrein-I em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Fonte: Autor. 329

Figura 86 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (d) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor. 331

Figura 87 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor. 332

Figura 88 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (c) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”; (d) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor. 334

Figura 89 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do Foguete Fogtrein-I: (a) Estimação de altura de saída, em que a altura y_k do Foguete Fogtrein-I é ilustrada em “linha preta”, e a altura estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de altura de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da altura y_k do Foguete Fogtrein-I é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor. 335

Lista de Tabelas

Tabela 1	– Caracterização dos <i>benchmarks</i> para tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, em que o número de amostras N , o número de dimensões n e o número de grupos q são fornecidos.	177
Tabela 2	– Desempenho na tarefa de agrupamento dos <i>benchmarks</i> S1 e A1 em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis.	179
Tabela 3	– Desempenho na tarefa de agrupamento dos <i>benchmarks</i> R15 e <i>Unbalance</i> em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.	179
Tabela 4	– Desempenho na tarefa de agrupamento dos <i>benchmarks</i> Gauss 6-dim e Gauss 10-dim em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis.	180
Tabela 5	– Desempenho na tarefa de agrupamento dos <i>benchmarks</i> DIM032 e DIM064 em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis.	181
Tabela 6	– Parametrização do algoritmo para a sua implementação na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 <i>benchmarks</i> (S1, A1, R15, <i>Unbalance</i> , Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), em que os valores do peso multivariável γ , do decaimento gaussiano r e do grau de incerteza m são fornecidos.	182
Tabela 7	– Análise da sensibilidade do índice de qualidade Q aos parâmetros γ , r e m do algoritmo, considerando a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 <i>benchmarks</i> (S1, A1, R15, <i>Unbalance</i> , Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), de acordo com a faixa dos valores dos parâmetros que resultam em uma baixa sensibilidade de Q e com o comprimento ζ das faixas.	183
Tabela 8	– Desempenho na tarefa de modelagem <i>online</i> em relação à função Hipérbole, considerando 7 variáveis de entrada ($n_u = 7$), em termos do RMSE e do NDEI.	240

Tabela 9 – Desempenho na tarefa de modelagem da série temporal caótica de Mackey-Glass em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE e do CCP.	248
Tabela 10 – Desempenho na tarefa de modelagem em relação ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi (sistema não linear) em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE, do CCP e do CD. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.	257
Tabela 11 – Desempenho na tarefa de modelagem em relação ao segundo conjunto de dados de Nakanishi (planta química) em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE, do CCP e do CD. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.	264
Tabela 12 – Desempenho na tarefa de modelagem em relação ao terceiro conjunto de dados de Nakanishi (mercado de ações) em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE, do CCP e do CD. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.	272
Tabela 13 – Parametrização dos algoritmos <i>k-means</i> , <i>c-means</i> , GK, subtrativo, algoritmo proposto e eTS+, para suas implementações na tarefa de agrupamento dos dados do sistema dinâmico SISO. O valor atribuído e a descrição dos parâmetros são fornecidos.	283
Tabela 14 – Resultados de comparação em relação à identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO através da estimação dos centros de grupo, em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos) e do valor do RMSE.	285
Tabela 15 – Desempenho na tarefa de identificação do sistema dinâmico SISO, em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE e do FIT. Como o modelo polinomial não inclui regras nebulosas, sua estrutura nesta implementação é descrita pela “ordem” igual a 12. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.	287
Tabela 16 – Parametrização dos algoritmos <i>k-means</i> , <i>c-means</i> , GK, subtrativo, algoritmo proposto e eTS+, para suas implementações na tarefa de agrupamento dos dados do sistema dinâmico MIMO. O valor atribuído e a descrição dos parâmetros são fornecidos.	297

Tabela 17 – Resultados de comparação em relação à identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO através da estimação dos centros de grupo, em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos) e do valor do RMSE.	299
Tabela 18 – Desempenho na tarefa de identificação <i>online</i> do sistema dinâmico MIMO, em termos do número final de regras (grupos) R_N , do RMSE e do FIT.	302
Tabela 19 – Desempenho do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação <i>online</i> da Planta Térmica, em termos do tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, do tempo de execução para a tarefa de identificação <i>online</i> , do número final de grupos R_N , do RMSE, do NDEI, do CCP, do CD, e do FIT.	315
Tabela 20 – Desempenho do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação <i>online</i> do Helicóptero 2DoF, em termos do tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, do tempo de execução para a tarefa de identificação <i>online</i> , do número final de grupos R_N , do RMSE, do NDEI, do CCP, do CD, e do FIT.	326
Tabela 21 – Desempenho do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação <i>online</i> do Foguete Fogtrein-I, em termos do tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, do tempo de execução para a tarefa de identificação <i>online</i> , do número final de grupos R_N , do RMSE, do NDEI, do CCP, do CD, e do FIT.	336

Lista de Algoritmos

2.1	Algoritmo de Agrupamento <i>C-Means</i> Nebuloso.	82
2.2	Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Gustafson-Kessel.	86
2.3	Algoritmo de Agrupamento de Estimativa de Máxima Verossimilhança Nebulosa.	89
2.4	Algoritmo de Agrupamento Subtrativo.	93
2.5	Algoritmo eTS.	102
2.6	Algoritmo eTS+.	112
2.7	Algoritmo de Agrupamento eVQ-AMS.	130
3.1	Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo com Critério Gaussiano Multivariável.	171

Lista de Abreviaturas e Siglas

AFNN	<i>Adaptive Fuzzy Neural Network</i>
ALMMo	<i>Autonomous Learning Multi-Model</i>
AnYa	Angelov-Yager
AWGG	<i>Adaptive Weighted Gath-Geva</i>
CCP	Coeficiente de Correlação de Pearson
CD	<i>Coefficient of Determination</i>
COMAER	Comando da Aeronáutica
DEFS	<i>Dynamic Evolving Fuzzy System</i>
DFKNN	<i>Dynamic Fuzzy K-Nearest Neighbours</i>
DS-PFGK	<i>Double-Supressed - Possibilistic Fuzzy Gustafson-Kessel</i>
EDSSC	<i>Evolutionary Dynamic Sparse Subspace Clustering</i>
eFIS	<i>evolving Fuzzy Inference System</i>
eFMI	<i>evolving Fuzzy model with multivariable gaussian participatory learning and Multi-Innovations recursive weighted least squares</i>
eGAUSS+	<i>evolving Gaussian plus</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
ELM	<i>Evolving Local Means</i>
ERA	<i>Eigensystem Realization Algorithm</i>
ESOM	<i>Evolving Self-Organizing Map</i>
eTS	<i>evolving Takagi-Sugeno</i>
eTS+	<i>evolving Takagi-Sugeno plus</i>
eVQ	<i>evolving Vector Quantization</i>
eVQ-A	<i>evolving Vector Quantization for Arbitrary ellipsoids</i>

eVQ-AM	<i>evolving Vector Quantization for Arbitrary ellipsoids with Merge functionality</i>
eVQ-AMS	<i>evolving Vector Quantization for Arbitrary ellipsoids with Merge-and-Split functionality</i>
FCM	<i>Fuzzy C-Means</i>
FLEXFIS	<i>Flexible Fuzzy Inference System</i>
FIT	<i>Fit index</i>
FMLE	<i>Fuzzy Maximum Likelihood Estimates</i>
Fogtrein-I	Foguete de Treinamento - Intermediário
FRB	<i>Fuzzy Ruled-Based</i>
FTS	<i>Fuzzy Time Series</i>
FWLS	<i>Fuzzily Weighted Least Squares</i>
GG	Gath-Geva
GK	Gustafson-Kessel
GMM	<i>Gaussian Mixture Model</i>
IT2EFKF	<i>Interval Type-2 Evolving Fuzzy Kalman Filter</i>
LS	<i>Least Squares</i>
LVQ	<i>Learning Vector Quantization</i>
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i>
MIMO	<i>Multiple Input, Multiple Output</i>
NDEI	<i>Non-Dimensional Error Index</i>
nrFCM	<i>noise-resistant Fuzzy C-Means</i>
OKID	<i>Observer/Kalman filter Identification</i>
PFCM	<i>Possibilistic Fuzzy C-Means</i>
PFGG	<i>Possibilistic Fuzzy Gath-Geva</i>
PRSSA+ENFN	<i>Parallel Recursive Singular Spectrum Analysis and Evolving Neuro-Fuzzy Network</i>

RBF	<i>Radial Basis Function</i>
RFWLS	<i>Recursive Fuzzily Weighted Least Squares</i>
RLS	<i>Recursive Least Squares</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
SAFIS	<i>Sequential Adaptive Fuzzy Inference System</i>
SC	<i>Subtractive Clustering</i>
Simpl_eTS	<i>Simplified evolving Takagi-Sugeno</i>
SISO	<i>Single Input, Single Output</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TLBO-KFCM	<i>Teaching Learning Based Optimization - Kernel Fuzzy C-Means</i>
2DoF	<i>2 Degrees of Freedom</i>
xTS	<i>extended Takagi-Sugeno</i>

Lista de Símbolos

$\mathbf{A}_k^i$	Matriz de estado associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{a}_k$	Vetor de regressores do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo na k -ésima amostra
$\leftarrow$	Atribuição
$\rightarrow$	Tendência
$\forall$	Para todo
$\alpha_{\mathcal{H}}$	Número de blocos de linhas das matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{k,j}^i \Big _{j=0,1, i=1,\dots,R_k}$
$\beta_{\mathcal{H}}$	Número de blocos de colunas das matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{k,j}^i \Big _{j=0,1, i=1,\dots,R_k}$
$\mathbf{B}_k^i$	Matriz de entrada associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{b}_k^i$	Vetor de correção do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{C}_k^i$	Matriz de saída associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{c}_k^i$	i -ésimo centro de grupo na k -ésima amostra
$\mathbf{c}_k^{i,l}$	l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra
$\bar{\mathbf{c}}_k^i$	i -ésimo centro de grupo normalizado na k -ésima amostra
$\bar{\mathbf{c}}_k^{i,l}$	l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra
$\subset$	Está contido, mas não igual
$\mathbf{D}_k^i$	Matriz de transição direta associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\bar{D}_k^i$	Distância adaptativa entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra

$\bar{D}_{k,N}^i$	Distância adaptativa entre o k -ésimo dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_N^i$ na N -ésima amostra
$\bar{\mathcal{D}}_k^i$	Distância de norma induzida de Mahalanobis entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra
$\tilde{D}_j^i$	Distância entre o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ e o j -ésimo dado utilizado na computação de seu potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i}$
$\bar{d}_k^i$	Distância média dos dados normalizados associados ao i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
$\bar{\Delta}_k^{i,j}$	Distância adaptativa entre os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ e $\bar{\mathbf{c}}_k^j$ na k -ésima amostra computada a partir da matriz de covariância nebulosa do i -ésimo grupo Θ_k^i
e	Número de Euler, aproximadamente igual a 2,7183
e_k	Erro de estimação na k -ésima amostra
ε_k^i	Raio do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
$\varepsilon_{o,k}^i$	Raio inicial do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
$\exists$	Existe
$\sum_{i=1}^n$	Somatório com i variando de 1 até n
$\mathbf{F}_k^i$	Matriz de covariância nebulosa do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
Ξ_k^i	Expressão matemática correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
Λ_k^i	Expressão matemática correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
$f_{\bar{\mathbf{x}}_k}$	Função para a densidade do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$
$f_{\bar{\mathbf{x}}_k}^v$	Função para a taxa de variação do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$
f	Frequência
ϕ_f^l	l -ésimo valor singular da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$
$\hat{\phi}_f^l$	l -ésimo valor singular da resposta em frequência estimada $\hat{\mathbf{H}}_f$
$\mathbf{G}_k^i$	Matriz de ganho do observador de estados associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra

γ	Peso multivariável
$\mathbf{H}_f$	Resposta em frequência de sistema dinâmico MIMO
$\hat{\mathbf{H}}_f$	Estimativa da resposta em frequência de sistema dinâmico MIMO
H_f	Resposta em frequência de sistema dinâmico SISO
$\hat{H}_f$	Estimativa da resposta em frequência de sistema dinâmico SISO
$\mathcal{H}_{k,j}^i$	Matriz de Hankel de índice j associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{I}_{n \times n}$	Matriz identidade de ordem n
I^i	Amostra de criação do i -ésimo grupo Θ_k^i
K_j^i	Amostra do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_j^i}$ associado ao i -ésimo grupo Θ_k^i em termos do suporte S_k^i
$\lambda_k^{i,l}$	l -ésimo autovalor da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
$\tilde{\lambda}$	Fator de esquecimento do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo
m	Grau de incerteza
μ_k^i	Grau de pertinência do dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra
$\mu_{k,N}^i$	Grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_N^i na N -ésima amostra
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não nulos
N	Número de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$
N_t	Número de amostras de treinamento do conjunto de dados $\mathbf{X}$
n	Número de coordenadas do conjunto de dados $\mathbf{X}$
n_u	Número de variáveis de entrada
n_y	Número de variáveis de saída
n_z^i	Ordem do modelo no espaço de estados associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$

$\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}$	Número de dados utilizados na computação do potencial $P_k^{\bar{c}_k^i}$ do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^i$ na k -ésima amostra
η_k	Quantidade de dados $\mathbf{x}_i$ $\Big _{i=\psi_k+1,\dots,k-1}$ apresentados no conjunto de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra
$\mathbf{O}_{a \times b}$	Matriz nula de ordem $a \times b$
$\mathcal{O}_k^i$	Matriz de observabilidade do modelo no espaço de estados associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
Ω_k^i	Matriz de covariância do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$P_k^{\bar{x}_k}$	Potencial do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra
$P_k^{\bar{c}_k^i}$	Potencial do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^i$ na k -ésima amostra
p	Número de parâmetros de Markov
ψ_k	Amostra da última criação de grupo quantificada na k -ésima amostra
Ψ_k	Matriz de saída da equação do observador na k -ésima amostra
Q	Índice de qualidade de agrupamento
q	Número real de grupos
$\mathbf{Q}_k^i$	Matriz de pesos do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\rho_k^{\bar{x}_k}$	Peso atribuído ao dado normalizado $\bar{x}_k$ no processo de cruzamento na k -ésima amostra
$\rho_k^{\bar{c}_k^{i*}}$	Peso atribuído ao centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i*}$ no processo de cruzamento na k -ésima amostra
φ_k^l	Faixa de operação da l -ésima coordenada do conjunto de dados $\mathbf{X}$ na k -ésima amostra
π	Constante matemática que representa a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, aproximadamente igual a 3,1415
$\prod_{i=1}^n$	Produtório com i variando de 1 até n
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais de ordem n
$\mathbb{R}^{a \times b}$	Conjunto das matrizes reais de ordem $a \times b$
R_k	Número de grupos na k -ésima amostra
$\mathfrak{R}_k^i$	i -ésima regra nebulosa evolutiva na k -ésima amostra
r	Decaimento gaussiano
$\boldsymbol{\varrho}_k^{i,l}$	l -ésimo autovetor da matriz de covariância nebulosa $\boldsymbol{F}_k^i$ do i -ésimo grupo $\boldsymbol{\Theta}_k^i$ na k -ésima amostra
S_k^i	Suporte do i -ésimo grupo $\boldsymbol{\Theta}_k^i$ na k -ésima amostra
$\bar{S}_k^i$	Suporte normalizado do i -ésimo grupo $\boldsymbol{\Theta}_k^i$ na k -ésima amostra
s_k^i	Sensibilidade do i -ésimo grupo $\boldsymbol{\Theta}_k^i$ na k -ésima amostra
T_S	Período de amostragem
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Interseção de conjuntos
$\boldsymbol{\Theta}_k^i$	i -ésimo grupo na k -ésima amostra
$\boldsymbol{U}$	Matriz de partição de dados
$\boldsymbol{u}_k$	Sinal de entrada na k -ésima amostra
u_k	Variável de entrada na k -ésima amostra
u_k^l	l -ésima variável de entrada na k -ésima amostra
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\boldsymbol{V}_k$	Matriz de regressores da equação do observador na k -ésima amostra
$\boldsymbol{X}$	Conjunto de dados
$\bar{\boldsymbol{X}}$	Conjunto de dados normalizados
$\boldsymbol{x}_k$	Dado na k -ésima amostra
x_k^l	l -ésima coordenada do dado $\boldsymbol{x}_k$ na k -ésima amostra

$\bar{\mathbf{x}}_k$	Dado normalizado na k -ésima amostra
$\bar{x}_k^l$	l -ésima coordenada do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra
$\nabla \bar{\mathbf{x}}_k$	Diferença de primeira ordem do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra
$\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$	Taxa de variação normalizada de $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra
$\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i}$	Taxa de variação normalizada do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{y}_k$	Sinal de saída na k -ésima amostra
$\hat{\mathbf{y}}_k$	Estimativa do sinal de saída na k -ésima amostra
$\hat{\mathbf{y}}_k^i$	Sinal de saída da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
y_k	Variável de saída na k -ésima amostra
y_k^l	l -ésima variável de saída na k -ésima amostra
$\hat{y}_k$	Estimativa da variável de saída na k -ésima amostra
$\hat{y}_k^l$	Estimativa da l -ésima variável de saída na k -ésima amostra
ζ	Comprimento de faixa de valores paramétricos
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos números inteiros não positivos
$\mathbf{Z}_k^i$	Conjunto de parâmetros de Markov associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\bar{\mathbf{Z}}_k^i$	Conjunto de parâmetros de Markov do observador associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra
$\mathbf{z}_k^i$	Vetor de estado associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra

Sumário

I	CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL	62
1	INTRODUÇÃO	63
1.1	Revisão da Literatura	64
1.2	Motivação e Justificativa	68
1.3	Objetivos	69
1.3.1	Objetivo Geral	69
1.3.2	Objetivos Específicos	69
1.4	Contribuições da Dissertação de Mestrado	70
1.5	Trabalhos Publicados Pelo Autor	71
1.5.1	Artigos em Periódicos	71
1.5.2	Artigos em Anais de Congressos	71
1.6	Organização da Dissertação	72
II	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	74
2	ALGORITMOS DE AGRUPAMENTO NEBULOSO	75
2.1	Partições Rígidas	77
2.2	Partições Nebulosas	78
2.3	Algoritmos de Agrupamento Nebuloso em Batelada	79
2.3.1	Algoritmo de Agrupamento <i>C-Means</i> Nebuloso	80
2.3.2	Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Gustafson-Kessel	84
2.3.3	Algoritmo de Agrupamento de Estimativa de Máxima Verossimilhança Nebulosa	87
2.3.4	Algoritmo de Agrupamento Subtrativo	88
2.4	Algoritmos de Agrupamento Nebuloso Evolutivo	94
2.4.1	Algoritmo eTS	97
2.4.1.1	Computação de Potencial	98
2.4.1.2	Atualização de Grupos	99
2.4.1.3	Criação de Grupos	100
2.4.1.4	Computação dos Graus de Pertinência	101
2.4.1.5	Implementação do Algoritmo eTS	101
2.4.2	Algoritmo eTS+	102
2.4.2.1	Computação de Potencial	104
2.4.2.2	Computação dos Graus de Pertinência	105
2.4.2.3	Criação de Grupos	106
2.4.2.4	Remoção de Grupos	107

4.1	Agrupamento Nebuloso Evolutivo de 8 <i>Benchmarks</i>	176
4.1.1	Análise Comparativa	177
4.1.2	Análise Paramétrica do Algoritmo	181
4.1.3	Análise Qualitativa do Algoritmo	183
4.1.3.1	<i>Benchmark S1</i>	183
4.1.3.2	<i>Benchmark A1</i>	188
4.1.3.3	<i>Benchmark R15</i>	193
4.1.3.4	<i>Benchmark Unbalance</i>	200
4.1.3.5	<i>Benchmark Gauss 6-dim</i>	204
4.1.3.6	<i>Benchmark Gauss 10-dim</i>	210
4.1.3.7	<i>Benchmark DIM032</i>	217
4.1.3.8	<i>Benchmark DIM064</i>	223
4.1.4	Considerações Finais sobre o Agrupamento Nebuloso Evolutivo de 8 <i>Benchmarks</i>	229
4.2	Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Modelagem <i>Online</i> de Séries Temporais	229
4.2.1	Considerações Preliminares Para Modelagem <i>Online</i> de Séries Temporais	229
4.2.2	Função Hipérbole	232
4.2.3	Série Temporal Caótica de Mackey-Glass	240
4.2.4	Conjuntos de Dados de Nakanishi	248
4.2.4.1	Primeiro Conjunto de Dados de Nakanishi	249
4.2.4.2	Segundo Conjunto de Dados de Nakanishi	256
4.2.4.3	Terceiro Conjunto de Dados de Nakanishi	265
4.3	Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação <i>Online</i> de Sistemas Dinâmicos Não Lineares	273
4.3.1	Considerações Preliminares Para Identificação <i>Online</i> de Sistemas Dinâmicos Não Lineares	274
4.3.2	Sistema Dinâmico SISO	276
4.3.3	Sistema Dinâmico MIMO	288
4.4	Resumo do Capítulo	303
5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	304
5.1	Considerações Preliminares Para Resultados Experimentais	304
5.2	Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação <i>Online</i> da Planta Térmica	307
5.3	Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação <i>Online</i> do Helicóptero 2DoF	315
5.4	Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação <i>Online</i> do Foguete Fogtrein-I	326
5.5	Resumo do Capítulo	336

V	CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL	338
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	339
7	PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	343
	REFERÊNCIAS	344
	APÊNDICES	359
	APÊNDICE A – MÉTODO OKID/ERA NEBULOSO RECURSIVO (<i>RECURSIVE FUZZY OBSERVER/KALMAN</i> <i>FILTER IDENTIFICATION/EIGENSYSTEM RE-</i> <i>ALIZATION ALGORITHM</i>)	360
A.1	Algoritmo OKID Nebuloso Recursivo (<i>Recursive Fuzzy Observer/Kalman Filter Identification</i>)	362
A.2	Algoritmo de Realização de Autossistema Nebuloso (<i>Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm</i>)	365

Parte I

CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL

1 Introdução

A teoria de conjuntos e sistemas nebulosos foi introduzida por Zadeh em 1965, proporcionando uma estrutura matemática robusta para modelar e lidar com a incerteza inerente aos fenômenos observados na realidade, oferecendo uma abordagem inovadora para representar a imprecisão e a subjetividade que são características do pensamento humano (ZADEH, 1965). A base de conhecimento dos sistemas nebulosos é composta de regras nebulosas do tipo SE-ENTÃO, as quais consistem de proposições no antecedente e no consequente. Uma abordagem extensivamente usada é a de sistemas nebulosos do tipo Takagi-Sugeno, na qual a proposição consequente contém uma função das variáveis de entrada para determinar a saída das regras nebulosas (TAKAGI; SUGENO, 1985; SUGENO; KANG, 1988; TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2019). Na proposição antecedente das regras nebulosas de sistemas nebulosos do tipo Takagi-Sugeno, as funções de pertinência podem ser produzidas a partir do conhecimento do especialista e/ou a partir de dados experimentais (BABUŠKA, 2012). Dentre os métodos que criam funções de pertinência de sistemas nebulosos integralmente a partir de dados, podem-se citar os algoritmos neural-nebulosos baseados em gradiente (JANG, 1992; OLIVEIRA, 1993; JANG; SUN; MIZUTANI, 1997), métodos de mínimos quadrados ortogonais (WANG, 1994), particionamento sucessivo (TAKAGI; SUGENO, 1985; SUGENO; TANAKA, 1991), algoritmos de construção de *splines* (KAVLI, 1993; BROWN; HARRIS, 1994), e métodos de agrupamento nebuloso no espaço das variáveis de entrada e saída do sistema (YOSHINARI; PEDRYCZ; HIROTA, 1993; BABUŠKA; VERBRUGGEN, 1994; ZHAO; WERTZ; GOREZ, 1994; NAKAMORI; RYOKE, 1994).

Dessa forma, algoritmos de agrupamento nebuloso têm sido uma ferramenta útil para a construção de sistemas de inferência nebulosos a partir de dados experimentais (BABUŠKA, 2012), os quais são aplicáveis em uma grande variedade de contextos, tais como identificação e controle de sistemas (RAFIEI; AKBARZADEH-T., 2023; PRECUP et al., 2020; SILVA; SERRA, 2014), previsão de séries temporais (RODRIGUES JUNIOR; SERRA, 2022; SOTO et al., 2019), reconhecimento de padrões (GUPTA; KUMAR, 2024; WANG et al., 2023), sistemas de classificação (IWENDI et al., 2022; JIMÉNEZ et al., 2019), sistemas de tomada de decisão (SELVACHANDRAN et al., 2021; ZHAN et al., 2022), processamento de sinais (HU et al., 2021; SHOEIBI et al., 2022), e detecção de faltas (CHENG et al., 2022; ZHANG et al., 2022). Agrupamento de dados é também uma ferramenta importante em mineração de dados, aprendizagem de máquina e análise de dados nas áreas de engenharia, economia e biomedicina (SIMIĆ et al., 2020).

1.1 Revisão da Literatura

A partir da literatura, podem ser vistos diversos algoritmos de agrupamento nebuloso. O algoritmo de agrupamento *C-Means* Nebuloso (FCM - *Fuzzy C-Means*) otimiza um funcional usando iterações, e desenvolve protótipos de grupos com formas fixas através de uma matriz de norma induzida constante para todos os grupos (DUNN, 1973; BEZDEK; EHRLICH; FULL, 1984). Em Askari (2021), o algoritmo de agrupamento *C-Means* Nebuloso resistente a ruído (nrFCM - *noise-resistant Fuzzy C-Means*) é proposto, no qual o efeito de ruídos e *outliers*¹ sobre os centros dos grupos é removido incorporando uma função de distância exponencial dentro da função objetivo. Em (SINGH; SRIVASTAVA, 2022), o algoritmo de agrupamento *C-Means* Nebuloso com Kernel e Otimização Baseada em Ensino e Aprendizagem (TLBO-KFCM - *Teaching Learning Based Optimization - Kernel Fuzzy C-Means*) é proposto, no qual um *kernel*² melhora a separação entre os grupos e a otimização baseada em ensino e aprendizagem melhora a compactação dos mesmos.

O algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafson-Kessel (GK) estende o algoritmo de agrupamento FCM usando uma norma de distância adaptativa (GUSTAFSON; KESSEL, 1978). Uma vez que cada grupo tem a sua própria matriz de norma induzida associada a uma matriz de covariância nebulosa, esse algoritmo detecta grupos com diferentes formas geométricas. Em Chen et al. (2023), é proposto o algoritmo de agrupamento nebuloso GK baseado na distância de Mahalanobis enraizada, que apresenta melhor desempenho de agrupamento e robustez superior em comparação com o tradicional algoritmo de agrupamento nebuloso GK, ao introduzir uma distância de Mahalanobis enraizada. Em Yu et al. (2023), é apresentado o algoritmo de agrupamento Possibilístico Nebuloso Gustafson-Kessel com Dupla Supressão (DS-PFGK - *Double-Supressed - Possibilistic Fuzzy Gustafson-Kessel*), que introduz uma nova função objetivo com uma distância de Mahalanobis modificada, além de um método aprimorado de configuração de parâmetros de peso que aproveita a estabilidade da pertinência nebulosa e a capacidade anti-ruído da pertinência possibilística³.

Gath e Geva introduziram o algoritmo de agrupamento de Estimativa de Máxima Verossimilhança Nebulosa (FMLE - *Fuzzy Maximum Likelihood Estimates*), também conhecido como algoritmo de agrupamento GG (Gath-Geva), que incorpora uma estimativa de máxima verossimilhança nebulosa nas suas normas de distância (GATH; GEVA, 1989).

¹ Palavra em inglês que em uma tradução direta para o português significa “ponto fora da curva”. Nesse contexto de agrupamento, diz respeito a pontos que estão distantes da grande massa de dados, mas não em quantidade suficiente para se considerar uma nova região de operação dos mesmos, e assim deve-se evitar criar grupos a partir de *outliers* (PEDRYCZ, 2005; GAN; MA; WU, 2007).

² Um *kernel* é uma função que recebe dois vetores de dados e retorna um número real que caracteriza a sua similaridade (SCHÖLKOPF; SMOLA, 2002).

³ O conceito de pertinência possibilística é melhor explicado na Seção 2.2.

A matriz de covariância nebulosa é utilizada como argumento de uma função exponencial, e conceitos estatísticos como a função de probabilidade *a priori* são aplicados, de modo que o algoritmo identifica grupos de várias formas, tamanhos e densidades (BEZDEK; DUNN, 1975). Em Wu et al. (2021), é proposto o algoritmo de agrupamento Possibilístico Nebuloso Gath-Geva (PFGG - *Possibilistic Fuzzy Gath-Geva*) para resolver o problema de sensibilidade ao ruído do algoritmo de agrupamento FMLE e estender o algoritmo de agrupamento *C-Means* Possibilístico Nebuloso (PFCM - *Possibilistic Fuzzy C-Means*) para o agrupamento de dados hiperelipsoidais. Em Hu et al. (2022), é proposto o algoritmo de agrupamento Gath-Geva Ponderado Adaptativo (AWGG - *Adaptive Weighted Gath-Geva*), que apresenta melhorias em relação ao algoritmo de agrupamento FMLE e pode adaptar-se para produzir resultados de agrupamento ótimos sem um número predeterminado de grupos. A abordagem é combinada com um Autoencoder Esperso Empilhado (SSAE - *Stacked Sparse Autoencoder*) para realizar a análise de agrupamento de *Big Data* industrial não rotulado em uma estrutura de reconhecimento de falhas não supervisionada.

O algoritmo de Agrupamento Subtrativo (SC - *Subtractive Clustering*) adota uma abordagem diferente para selecionar os centros de grupo, utilizando a medição de potencial, que consiste em funções gaussianas que medem a densidade dos dados (CHIU, 1994). Nesse método, o dado que possui maior densidade de dados próximos a ele tem o maior potencial e é escolhido como centro de grupo. Um procedimento de subtração é usado para encontrar todos os centros de grupo até que os potenciais alcancem valores abaixo de um determinado limite. Esse algoritmo é uma versão modificada e mais eficiente do Método da Montanha (*Mountain Method*) de Yager e Filev (YAGER; FILEV, 1994). O algoritmo SC determina o número de grupos de forma autônoma com base no parâmetro especificado de raio de agrupamento e é utilizado em várias aplicações no contexto de agrupamento nebuloso. Em Zeng, Chen e Teng (2019), é proposta uma nova abordagem de previsão de Séries Temporais Nebulosas (FTS - *Fuzzy Time Series*) baseada em combinações lineares de variáveis independentes, no algoritmo de agrupamento subtrativo e no algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais (ABC - *Artificial Bee Colony*). Nessa abordagem, o algoritmo SC é usado para criar automaticamente grupos a partir dos dados históricos de treinamento e localizar o centro de cada grupo. Em Wang e Luo (2022), é proposta uma nova estratégia de controle baseada no algoritmo SC e em uma Rede Neural Nebulosa Adaptativa (AFNN - *Adaptive Fuzzy Neural Network*) para resolver o problema da distribuição de potência entre duas fontes de energia quando o cronograma de direção muda no contexto de um Sistema de Armazenamento de Energia Híbrido (HESS - *Hybrid Energy Storage System*) em Veículos Elétricos Híbridos (HEV - *Hybrid Electric Vehicles*). Essa abordagem usa o algoritmo SC para identificar a estrutura da AFNN.

A evolução dos modos de processamento da informação, devido à maior necessidade de extrair conhecimento significativo a partir de dados, que em muitos contextos, apresentam-se não apenas em grandes quantidades, mas também de diferentes formas em

fluxos de dados (*data streams*), tem estabelecido novos desafios e, consequentemente, novas abordagens (incluindo ferramentas para agrupamento de dados), que não são apenas *offline* e estacionárias, mas também *online* e dinâmicas (ANGELOV, 2010). No contexto de agrupamento nebuloso *online*, os algoritmos realizam a tomada de decisão sobre o agrupamento nebuloso dos dados a cada amostra disponibilizada, sem ter todo o conjunto de dados à disposição. Assim, esses algoritmos devem estar aptos a evoluir o conjunto de grupos à medida que as amostras são disponibilizadas no fluxo de dados, e por esta característica são conhecidos como algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo. Plamen Angelov desenvolveu no ano de 2004 uma versão evolutiva dos algoritmos de agrupamento nebuloso, contida no conhecido modelo Takagi-Sugeno evolutivo (eTS - *evolving Takagi-Sugeno*), que utiliza a função do tipo Cauchy de primeira ordem para calcular recursivamente o potencial em um contexto *online* (ANGELOV; FILEV, 2004; ANGELOV; FILEV, 2005; ANGELOV; ZHOU, 2006). Baseado em uma política de tomada de decisão derivada do cálculo de potencial, o algoritmo eTS evolui a estrutura dos grupos na proposição antecedente de regras nebulosas à medida que o fluxo de dados se desenvolve. Com o tempo, o algoritmo foi aprimorado com novos recursos, como condições alternativas para adição e remoção de regras, bem como mudanças no raio de agrupamento (zona de influência), resultando no algoritmo Takagi-Sugeno evolutivo *plus* (eTS+ - *evolving Takagi-Sugeno plus*) (ANGELOV, 2010). Em Pires e Serra (2020), é proposta uma metodologia para identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo, cuja formulação matemática contempla uma estimação inicial *offline* dos parâmetros antecedentes e consequentes a partir do algoritmo de agrupamento GK e uma versão nebulosa do algoritmo OKID (*Observer/Kalman filter Identification*), e a estimação *online* dos parâmetros antecedentes e consequentes a partir do algoritmo eTS e de uma versão nebulosa evolutiva do algoritmo OKID. Em Gomes e Serra (2024), é proposto um Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Tipo-2 Intervalar (IT2EFKF - *Interval Type-2 Evolving Fuzzy Kalman Filter*) para processamento de componentes espectrais não observáveis de dados experimentais. A metodologia considera um modelo inicial do filtro de Kalman nebuloso tipo-2 intervalar identificado *offline* a partir de uma janela inicial dos dados experimentais, a atualização das proposições antecedentes do filtro de Kalman nebuloso tipo-2 intervalar utilizando uma formulação tipo-2 intervalar do algoritmo eTS, e a atualização das proposições consequentes usando uma formulação nebulosa tipo-2 do algoritmo OKID, considerando a análise singular espectral multivariável recursiva dos dados experimentais.

Os algoritmos de agrupamento mencionados acima são clássicos e servem como base para os leitores. Além disso, a revisão da literatura indica algumas propostas interessantes no contexto do estado da arte em algoritmos de agrupamento evolutivo, em conexão com o algoritmo proposto nesta dissertação. Em Bezerra et al. (2020), é proposto um algoritmo para agrupamento evolutivo de fluxos de dados, chamado *AutoCloud*, baseado nos conceitos de análise de tipicidade e excentricidade de dados. O algoritmo de agrupamento *AutoCloud*

é uma técnica evolutiva, *online* e recursiva que não requer treinamento ou conhecimento prévio sobre o conjunto de dados. Os grupos criados pelo algoritmo *AutoCloud* são chamados de nuvens de dados, sendo estruturas sem forma ou limites predefinidos. Em Škrjanc (2020), é proposto o algoritmo de agrupamento evolutivo Gaussiano *plus* (eGAUSS+ - *evolving Gaussian plus*), que apresenta um novo conceito de mescla de grupos baseado na comparação da soma dos volumes de dois grupos que atendem ao critério de um número mínimo de amostras em cada grupo em relação ao volume esperado do grupo recém-criado após a mescla. Segundo o autor, trata-se de um algoritmo de agrupamento simples de desenvolver, capaz de lidar com conjuntos de dados de alta dimensionalidade, e que realiza todos os cálculos necessários *online*. Em Wang, Liu e Chen (2022), é apresentada uma técnica de previsão nebulosa probabilística com granularização baseada em agrupamento evolutivo de dados. A abordagem de granularização baseada em agrupamento evolutivo é usada para converter dados numéricos brutos em grânulos de informação. O agrupamento evolutivo proposto é então utilizado para determinar as relações entre os grupos dentro dos grânulos de informação. Para lidar com a incerteza, a previsão de longo prazo final emprega a teoria de conjuntos nebulosos juntamente com a teoria da probabilidade. Em Sui et al. (2022), é proposto o algoritmo de Agrupamento de Subespaço Esperso Dinâmico Evolucionário (EDSSC - *Evolutionary Dynamic Sparse Subspace Clustering*) para fluxos de dados. O algoritmo EDSSC consiste em duas fases: aprendizagem estática e agrupamento *online*. Durante a primeira fase, é apresentada uma estrutura de dados para armazenar o resumo estatístico do fluxo de dados. Na segunda fase, é proposto um índice mais apropriado, chamado de Índice de Concentração de Esparsidade Média (ASCI - *Average Sparsity Concentration Index*), que melhora significativamente a precisão do agrupamento *online* em comparação com o índice SCI (*Sparsity Concentration Index*) comumente utilizado no contexto de agrupamento de subespaços esparsos. Em Rodrigues Junior e Serra (2022), é proposta uma abordagem híbrida chamada Análise de Espectro Singular Recursiva Paralela e Rede Neural Nebulosa Evolutiva (PRSSA+ENFN - *Parallel Recursive Singular Spectrum Analysis and Evolving Neuro-Fuzzy Network*) para previsão de séries temporais experimentais monovariáveis e multivariáveis, com aprendizagem a partir de fluxos de dados compostos por amostras de séries temporais. A metodologia considera uma base neural nebulosa evolutiva, ou seja, a abordagem PRSSA+ENFN adapta, estende e evolui a estrutura de regras nebulosas com base em novos dados das séries temporais a partir do processo de agrupamento nebuloso evolutivo desses dados. As séries temporais são subdivididas em componentes não observáveis, que são padrões contidos nos dados, e a rede neural nebulosa evolutiva prevê essas amostras de componentes para reconstruir a série temporal original considerando valores futuros. Em Rodrigues, Silva e Lemos (2022), é proposto o modelo Nebuloso evolutivo com aprendizagem participativa gaussiana multivariável e mínimos quadrados recursivo ponderado por Múltiplas Inovações (eFMI - *evolving Fuzzy model with multivariable gaussian participatory learning and*

Multi-Innovations recursive weighted least squares). O eFMI utiliza um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo não supervisionado com aprendizagem participativa e funções de pertinência Gaussianas multivariáveis. O modelo emprega regras nebulosas do tipo Takagi-Sugeno (as proposições consequentes são expressões funcionais de primeira ordem) obtidas pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, que pode criar novos grupos no processo, além de remover, mesclar e atualizar grupos existentes. Os grupos são formados utilizando uma medida de compatibilidade e um mecanismo de ativação propostos. Os parâmetros resultantes da proposição consequente são atualizados utilizando o método de mínimos quadrados recursivo ponderado por múltiplas inovações. Em Sangma et al. (2023), é proposto um algoritmo de agrupamento hierárquico nebuloso para múltiplos fluxos de dados nominais utilizando a abordagem de agrupamento por variável. A afinidade nebulosa dos fluxos de dados com diferentes grupos é calculada utilizando a similaridade cosseno normalizada para os centros dos grupos. O algoritmo lida com o conceito de evolução ao atualizar a estrutura de agrupamento hierárquico por meio da mescla e/ou divisão de nós de acordo com o grau de mudança na entropia dos nós. Em Mei, Zhao e Gu (2024), é proposto o Sistema Nebuloso Evolutivo Dinâmico (DEFS - *Dynamic Evolving Fuzzy System*) para previsão de fluxos de dados. O DEFS utiliza o conceito de potencial de dados aprimorado e os erros de previsão de modelos locais individuais como os principais critérios para a criação de novos grupos na estrutura da proposição antecedente das regras nebulosas, além de apresentar um novo esquema de mescla de grupos que ajusta automaticamente sua tolerância ao grau de similaridade entre dois grupos de acordo com o tamanho do conjunto de grupos.

1.2 Motivação e Justificativa

A tarefa de agrupamento tem sido estudada e aplicada em uma grande variedade de campos de pesquisa, incluindo mineração de dados (AGRAWAL et al., 1998), reconhecimento de padrões (GUPTA; KUMAR, 2024), aprendizagem de máquina (EZUGWU et al., 2022), biomedicina (SIMIĆ et al., 2020), economia (ZHOU, 2021) e engenharia (PRECUP et al., 2020). Embora usualmente a tarefa de agrupamento esteja associada com problemas de classificação, ela também pode ser amplamente aplicada como base na identificação de modelos (CHIU, 1994). Nesse contexto, os algoritmos de agrupamento nebuloso têm sido amplamente estudados na literatura, por realizarem a tarefa de agrupamento de modo a lidar com a incerteza muitas vezes presente em dados reais, que tem ganhado crescente atenção na comunidade de pesquisa (SCHUBERT et al., 2015). Ademais, o desenvolvimento científico e tecnológico tem estimulado a proposição de algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo, que agrupam dados em uma abordagem *online* e incremental⁴, e evo-

⁴ Métodos incrementais se caracterizam por realizar o agrupamento de modo que as variáveis associadas aos grupos são atualizadas gradualmente (incrementalmente) a cada amostra de dados (ANGELOV,

luem o conjunto de grupos à medida que as amostras são disponibilizadas no fluxo de dados (ANGELOV, 2010). Os algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo têm sido aplicados em cenários tais como modelos de regressão (ŠKRJANC, 2020), predição de séries temporais (LUGHOFFER, 2008b; ALGHAMDI et al., 2019; WANG; LIU; CHEN, 2022; RODRIGUES JUNIOR; SERRA, 2022; RODRIGUES; SILVA; LEMOS, 2022; MEI; ZHAO; GU, 2024; GOMES; SERRA, 2024), classificadores evolutivos (ANGELOV; ZHOU; KLAWONN, 2007; ANGELOV; ZHOU, 2008a; LUGHOFFER; BUCHTALA, 2013; SOARES; ANGELOV; GU, 2020), detecção de novidades (ANGELOV; RAMEZANI; ZHOU, 2008), e identificação e controle de sistemas dinâmicos (ANGELOV, 2004b; TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2020; CAVALCANTE JUNIOR; RODRIGUES JUNIOR; TORRES, 2021).

1.3 Objetivos

Nesta seção são apresentados o objetivo geral e os objetivos específicos desta dissertação de mestrado.

1.3.1 Objetivo Geral

Proposta de um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo baseado em uma função de potencial multivariável para aplicação em fluxos de dados.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta dissertação de mestrado são:

- Apresentar uma base teórica sobre algoritmos de agrupamento nebuloso;
- Formular matematicamente o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto;
- Apresentar os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto;
- Validar computacionalmente o algoritmo proposto no agrupamento nebuloso evolutivo de dados em fluxo a partir de *benchmarks* na literatura, bem como no agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais e à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares;
- Validar experimentalmente o algoritmo proposto no agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos do mundo real.

2013; LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

1.4 Contribuições da Dissertação de Mestrado

Em comparação aos métodos do estado da arte sobre algoritmos de agrupamento evolutivo apresentados na Seção 1.1, esta dissertação apresenta um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, cuja metodologia está atrelada às seguintes contribuições em correspondência à sua originalidade:

- Função de potencial multivariável na qual a taxa de variação é incluída como informação na computação do potencial dos dados. Essa informação é adicionada na função de potencial em uma expressão multivariável que considera ambas a densidade e a taxa de variação, de modo que na implementação o usuário seleciona o peso aplicado à taxa de variação na determinação do potencial. Essa abordagem tem a vantagem de deslocar os centros dos grupos para localizações que são bem representativas do conjunto de dados fornecido.
- Formulação matemática original para atualização recursiva das inversas das matrizes de covariância nebulosa dos grupos. Os protótipos hiperelipsoidais dos grupos são variantes no tempo de acordo com matrizes de covariância nebulosa, cujas inversas são utilizadas na computação de distâncias adaptativas através de uma função exponencial. Para o cálculo da inversa da matriz de covariância nebulosa associada a cada grupo, são computadas, separadamente, a inversa da matriz associada à expressão matemática correspondente ao seu numerador, e a expressão matemática correspondente ao seu denominador. Essa abordagem tem a vantagem de proporcionar aos grupos protótipos variantes no tempo com um baixo custo computacional, uma vez que não é realizada em nenhuma ocasião a operação de inversão matricial. O uso de uma métrica de distância exponencial também reduz o efeito de ruídos e *outliers* sobre as características dos grupos.
- Mecanismo de seleção de centros de grupo baseado nas sensibilidades dos grupos. A sensibilidade de um grupo define a sua propensão a modificações ou criações de grupos próximos a ele, e é ajustada autonomamente no fluxo de dados. Essa abordagem tem a vantagem de evoluir o agrupamento com sensibilidade para detectar novos grupos emergentes no fluxo de dados, e com uma baixa tendência a criar novos grupos a partir de *outliers*.
- Formulação matemática original para ajuste adaptativo dos raios de grupo no contexto de agrupamento evolutivo. A tomada de decisão sobre a atualização, criação e mescla de grupos é baseada em raios de grupo adaptativos ajustados autonomamente no fluxo de dados. Os raios dos grupos são atualizados a cada amostra do fluxo de dados em uma expressão original que considera raios iniciais ajustáveis de acordo com a quantidade de grupos presentes na estrutura, bem como características estatísticas

associadas aos grupos. Essa abordagem tem a vantagem de realizar uma tomada de decisão autônoma sobre a atualização, criação e mescla de grupos a cada amostra do fluxo de dados.

- Mecanismos de atualização e mescla de grupos baseados na técnica evolucionária de cruzamento. O procedimento de cruzamento, baseado em computação evolucionária, é realizado entre o dado disponibilizado em fluxo e um centro de grupo no caso da atualização de grupos, ou entre dois centros de grupo no caso da mescla de grupos, de maneira que as características do dado resultante do cruzamento são herdadas em uma abordagem ponderada pelos potenciais dos dados considerados no cruzamento. Essa abordagem tem a vantagem de atualizar e mesclar grupos sem o desperdício de nenhuma característica relevante em potencial, além de prevenir o crescimento excessivo do número de grupos.

1.5 Trabalhos Publicados Pelo Autor

Nesta seção são apresentados os trabalhos publicados pelo autor associados a esta dissertação de mestrado.

1.5.1 Artigos em Periódicos

O trabalho desenvolvido nesta dissertação de mestrado resultou nos seguintes artigos aceitos em periódicos:

- Jefferson Cavalcante Junior e Ginalber Serra, *An Algorithm Based on Multivariable Gaussian Decision-Making Criterion for Evolving Clustering of Time Series. Fuzzy Sets and Systems*. Aceito sob revisão.
- Jefferson Cavalcante Junior e Ginalber Serra, *An Evolving Fuzzy Clustering Algorithm Based on Multiobjective Decision-Making Criterion for Data Modeling. Evolving Systems*. Aceito sob revisão.

1.5.2 Artigos em Anais de Congressos

O trabalho desenvolvido nesta dissertação de mestrado resultou no seguinte artigo aceito em anais de congressos:

- CAVALCANTE JUNIOR, J. G. L.; SERRA, G. L. O., Algoritmo de Agrupamento *Fuzzy* Evolutivo Baseado em Critério de Decisão Multivariável para Modelagem

Computacional via Dados Experimentais. In: Anais do Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro - RJ, 2024.

1.6 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada em cinco partes principais: CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, REFERENCIAL METODOLÓGICO, RESULTADOS E CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL.

A Parte I, CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL, é constituída apenas pelo Capítulo 1, Introdução, que introduz o tópico de pesquisa desta dissertação e as contribuições inerentes à sua originalidade. Nesse capítulo, são apresentados uma revisão da literatura sobre o contexto de agrupamento nebuloso na Seção 1.1, a motivação e justificativa desta dissertação na Seção 1.2, os objetivos geral e específicos desta dissertação na Seção 1.3, as contribuições desta dissertação na Seção 1.4, os trabalhos publicados pelo autor associados a esta dissertação na Seção 1.5, e a organização desta dissertação na Seção 1.6.

A parte II, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, é constituída apenas pelo Capítulo 2, Algoritmos de Agrupamento Nebuloso, no qual fundamentam-se algoritmos de agrupamento nebuloso em batelada e evolutivo. Nesse capítulo, são apresentados o conceito e a formulação de partições rígidas na Seção 2.1, o conceito e a formulação de partições nebulosas na Seção 2.2, a formulação de algoritmos de agrupamento nebuloso em batelada (FCM, GK, FMLE e SC) na Seção 2.3, a formulação de algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo (eTS, eTS+ e eVQ-AMS) na Seção 2.4, e o resumo do capítulo na Seção 2.5.

A Parte III, REFERENCIAL METODOLÓGICO, é constituída apenas pelo Capítulo 3, Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo com Critério Gaussiano Multivariável, em que é descrito o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto. Nesse capítulo, são apresentados a formulação matemática do algoritmo na Seção 3.1, os aspectos de implementação do algoritmo na Seção 3.2, e o resumo do capítulo na Seção 3.3.

A Parte IV, RESULTADOS, é constituída pelos Capítulos 4 e 5. O Capítulo 4, Resultados Computacionais, descreve os resultados da implementação do algoritmo no agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* amplamente utilizados na tarefa de agrupamento de fluxos de dados, e no agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais e à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares. Nesse capítulo, são apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064) na Seção 4.1, os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais (Função Hiperbole, Mackey-Glass e Nakanishi) na Seção 4.2, os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados

aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares (SISO e MIMO) na Seção 4.3, e o resumo do capítulo na Seção 4.4. O Capítulo 5, Resultados Experimentais, descreve os resultados da implementação do algoritmo no agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos do mundo real. Nesse capítulo, são apresentadas as considerações preliminares para os resultados experimentais sobre a aplicação do algoritmo no processo de fuzzificação de dados e criação/atualização de regras nebulosas evolutivas em um sistema de inferência nebuloso evolutivo na Seção 5.1, os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* da Planta Térmica na Seção 5.2, os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* do Helicóptero 2DoF na Seção 5.3, os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* do Foguete Fogtrein-I na Seção 5.4, e o resumo do capítulo na Seção 5.5.

A Parte V, CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL, é constituída pelo Capítulo 6, Considerações Finais, e pelo Capítulo 7, Propostas de Trabalhos Futuros. O Capítulo 6 apresenta as considerações finais sobre o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto nesta dissertação, a sua complexidade computacional, e os resultados computacionais e experimentais alcançados. O Capítulo 7 apresenta propostas de trabalhos futuros a partir desta dissertação, de acordo com as características do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto e os resultados computacionais e experimentais alcançados.

Parte II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2 Algoritmos de Agrupamento Nebuloso

O objetivo da tarefa de agrupamento (*clustering*) é a classificação de dados de acordo com as similaridades presentes entre eles, organizando esses dados em grupos (*clusters*) (BABUŠKA, 2012). O agrupamento está entre os métodos de aprendizagem não supervisionada¹, sendo uma das tarefas mais importantes nesse contexto, lidando com a partição da estrutura de dados de uma área muitas vezes desconhecida, e servindo como base para aprendizagens subsequentes (XU; TIAN, 2015). De acordo com Pedrycz (2005), o agrupamento de dados é uma metodologia geral e um quadro conceitual e algorítmico notavelmente rico para análise e interpretação dos mesmos. Ainda, segundo Simić et al. (2020), a tarefa de agrupamento tem sido estudada e aplicada em uma grande variedade de campos de pesquisa, incluindo a mineração de dados, aprendizagem de máquina, reconhecimento de padrões, biomedicina, economia e engenharia. Embora usualmente a tarefa de agrupamento esteja associada com problemas de classificação, ela também pode ser amplamente usada como base na identificação de modelos, e neste contexto é importante a distinção de grupos naturais de dados que produzam uma representação concisa do comportamento do sistema que eles representam (CHIU, 1994).

No processo de agrupamento de dados, elementos que pertencem ao mesmo grupo devem ser tão similares quanto possível, enquanto elementos de grupos diferentes devem ser tão diferentes (dissimilares) quanto possível. Neste contexto é relevante a noção de similaridade, que pode ser entendida como uma medida matemática bem definida a ser utilizada no processo de um algoritmo de agrupamento. Uma medida de similaridade é muitas vezes definida por meio de uma norma de distância, seja uma norma euclidiana ou algum tipo de norma induzida, como a distância de Mahalanobis (BABUŠKA, 2012). Outros exemplos de medidas de similaridade e dissimilaridade podem ser vistas em Xu e Tian (2015), Pedrycz (2005). As similaridades podem ser medidas em relação a pares de dados ou entre um dado e um grupo. Tem-se que um centro de grupo é geralmente um vetor (ou ponto) que é representativo do mesmo, sendo da mesma dimensão dos dados. Um grupo também pode ser representado através de objetos geométricos de nível mais alto, como subespaços e funções lineares ou não lineares (BABUŠKA, 2012).

Os grupos usualmente não são conhecidos *a priori*, sendo os mesmos obtidos pelos algoritmos de agrupamento. Os dados podem apresentar grupos de diferentes formas geométricas, tamanhos e densidades, e algoritmos específicos para lidar com as diversas características são continuamente propostos e aprimorados. Além disso, os grupos podem

¹ A aprendizagem supervisionada utiliza de exemplos que já possuem rótulos de classificação associados a eles, enquanto a aprendizagem não supervisionada busca, com base apenas nos dados de treinamento, encontrar estruturas inerentes aos mesmos (MURTY; DEVI, 2014).

ser bem separados, continuamente conectados entre si, ou sobrepostos, e a separação entre eles é influenciada pela escala e normalização dos dados (BABUŠKA, 2012).

Dados são tipicamente observações de algum processo físico. A k -ésima observação (amostra) consiste em $n \in \mathbb{N}^*$ variáveis medidas, que podem ser agrupadas em um vetor $\mathbf{x}_k = [x_k^1 \cdots x_k^l \cdots x_k^n]^T \in \mathbb{R}^n$, onde $x_k^l \in \mathbb{R}$ é a l -ésima variável presente no dado $\mathbf{x}_k$. Denota-se um conjunto de $N \in \mathbb{N}^*$ observações de $\mathbf{x}_k$ por $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_k \mid k = 1, \dots, N\}$, que pode ser representado pela matriz:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_N^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_N^n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O significado de cada linha e coluna da matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ depende do contexto em que os dados estão inseridos. Por exemplo, em reconhecimento de padrões, cada coluna representa um padrão (ou objeto), enquanto cada linha representa uma característica (ou atributo). Em diagnóstico médico, as colunas podem representar os pacientes, enquanto as linhas fazem referência aos sintomas ou medidas laboratoriais resultantes de exames. No contexto de identificação e controle de sistemas dinâmicos, as colunas geralmente representam amostras de séries temporais, e as linhas são variáveis observadas no sistema, utilizando até mesmo seus valores passados em muitas ocasiões (BABUŠKA, 2012). Um exemplo de diferentes grupos no espaço bidimensional pode ser visualizado na Figura 1, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”.

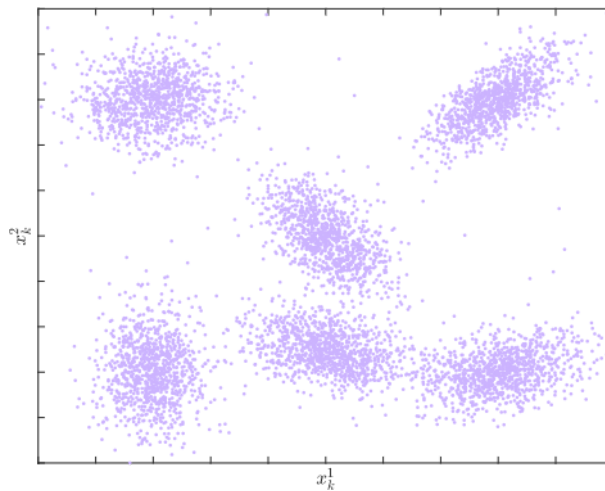


Figura 1 – Exemplo de diferentes grupos no espaço bidimensional, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”. Fonte: Autor.

Uma classificação no contexto de algoritmos de agrupamento é se os subconjuntos por ele gerados são rígidos (*hard* ou *crisp*) ou nebulosos (*fuzzy*) (BABUŠKA, 2012). Os algoritmos de agrupamento rígido (*hard clustering*) são baseados na teoria clássica de conjuntos, em que um dado pertence ou não pertence a cada grupo, e assim todos os

grupos são mutuamente exclusivos. Já os algoritmos de agrupamento nebuloso (*fuzzy clustering*) são baseados na teoria de conjuntos nebulosos, em que um dado pode pertencer simultaneamente a vários grupos, com diferentes graus de pertinência (*membership degrees*).

2.1 Partições Rígidas

Pela teoria clássica de conjuntos, uma partição rígida do conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ apresentado na Equação (2.1) é definida como uma família de subconjuntos $\{\Theta^i \mid i = 1, \dots, R\}$ que satisfaz as seguintes propriedades (BEZDEK, 1981):

$$\bigcup_{i=1}^R \Theta^i = \mathbf{X}, \quad (2.2a)$$

$$\Theta^i \cap \Theta^j = \emptyset, \quad i, j = 1, \dots, R, \quad i \neq j, \quad (2.2b)$$

$$\emptyset \subset \Theta^i \subset \mathbf{X}, \quad i = 1, \dots, R, \quad (2.2c)$$

onde $R \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de subconjuntos (ou grupos). A propriedade presente na Equação (2.2a) indica que a união de todos os grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ deve formar o conjunto total de dados $\mathbf{X}$. A propriedade presente na Equação (2.2b) indica que a interseção de quaisquer dois conjuntos Θ^i e Θ^j diferentes ($i \neq j$) deve ser o conjunto vazio $\emptyset$, ou seja, os conjuntos não devem ter elementos em comum (conjuntos disjuntos). A propriedade presente na Equação (2.2c) indica que nenhum grupo Θ^i é vazio (igual a $\emptyset$) nem contém todos os dados (igual a $\mathbf{X}$) (BABUŠKA, 2012).

A partir do grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ^i , dado por $\mu_k^i \in \{0, 1\}$, pode-se criar uma matriz de partição $\mathbf{U} = [U_{ik}] \in \{0, 1\}^{R \times N}$, onde o elemento $U_{ik} = \mu_k^i$, e $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$. Esta matriz de partição $\mathbf{U}$ representa uma partição rígida se e somente se satisfaz as seguintes condições (BABUŠKA, 2012):

$$\mu_k^i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, R, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.3a)$$

$$\sum_{i=1}^R \mu_k^i = 1, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.3b)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_k^i < N, \quad i = 1, \dots, R \quad (2.3c)$$

A propriedade presente na Equação (2.3a) indica que os graus de pertinência $\mu_k^i \mid k=1, \dots, N, i=1, \dots, R$ só podem assumir valores binários (0 ou 1). A propriedade presente na Equação (2.3b) indica que um dado $\mathbf{x}_k$ só pode pertencer a um único grupo Θ^i , pois a soma dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R$ de qualquer dado em relação a todos os grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ deve ser unitária. A propriedade presente na Equação (2.3c) indica que um grupo Θ^i não pode ser vazio nem ter todos os dados, pois a soma dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid k=1, \dots, N$ de todos os dados $\mathbf{x}_k \mid k=1, \dots, N$ em relação a esse grupo não pode ser nula.

nem maior ou igual à quantidade de dados N . A matriz de partição de dados $\mathbf{U}$ só possui elementos nulos ou unitários no caso de uma partição rígida.

2.2 Partições Nebulosas

Uma partição nebulosa do conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ é uma generalização da partição rígida na qual permite-se que os graus de pertinência μ_k^i assumam valores no intervalo contínuo $[0, 1]$ (RUSPINI, 1970). De maneira análoga às propriedades apresentadas nas Equações (2.3a)-(2.3c), uma matriz de partição $\mathbf{U} \in [0, 1]^{R \times N}$ é nebulosa se e somente se satisfazer as seguintes propriedades (BABUŠKA, 2012):

$$\mu_k^i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, R, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.4a)$$

$$\sum_{i=1}^R \mu_k^i = 1, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.4b)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_k^i < N, \quad i = 1, \dots, R, \quad (2.4c)$$

onde $R \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de grupos (conjuntos nebulosos) $\Theta^i \big|_{i=1, \dots, R}$ da partição, e $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, que possui $n \in \mathbb{N}^*$ variáveis. A propriedade presente na Equação (2.4a) indica que os graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{k=1, \dots, N, i=1, \dots, R}$ podem assumir quaisquer valores dentro do intervalo $[0, 1]$. A propriedade presente na Equação (2.4b) indica que, para qualquer dado $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, a soma dos seus graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1, \dots, R}$ em relação a todos os grupos $\Theta^i \big|_{i=1, \dots, R}$ deve ser unitária. A propriedade presente na Equação (2.4c) indica que, para qualquer grupo Θ^i , a soma dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{k=1, \dots, N}$ de todos os dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1, \dots, N}$ em relação a esse grupo não pode ser nula nem maior ou igual à quantidade de dados N .

A partição nebulosa dos dados pode ser considerada uma abordagem mais realista do que a partição rígida, pois as situações de “pertinência parcial” ocorrem com bastante frequência. Os grupos podem não estar bem separados por uma variedade de razões, como ruído ou a falta de poder discriminatório no espaço de características no qual os dados são representados. Um algoritmo de agrupamento que possa fornecer facilmente uma compreensão detalhada dos graus de pertencimento de um dado em relação aos seus grupos então se apresenta como uma ferramenta útil (PEDRYCZ, 2005).

Existe um terceiro tipo de partição, chamado de partição possibilística (ou partição nebulosa irrestrita), que é uma generalização da partição nebulosa (restrita), no qual a condição apresentada na Equação (2.4b) é relaxada, sendo substituída por uma formulação menos restritiva: $\forall k \in \{1, \dots, N\}, \exists i \in \{1, \dots, R\}: \mu_k^i \in \mathbb{R}_+$, que indica que para qualquer dado $\mathbf{x}_k$, o grau de pertinência μ_k^i deve ser um número real positivo (não limitado pela unidade). Essa partição pode levar a resultados algorítmicos mais imunes a ruído, com

maior negligência a *outliers*, sendo adequado em tais contextos (KRISHNAPURAM; KELLER, 1993).

As partições nebulosas são a base para os algoritmos de agrupamento nebuloso. Os agrupamentos nebulosos podem ser realizados em uma abordagem *offline* ou em uma abordagem *online* (BARALDI; BLONDA, 1999). Na aprendizagem de máquinas, quando parâmetros de sistemas são aprendidos a partir de dados de treinamento, existem essas duas situações de aprendizagem, que depende de como os dados são apresentados ao modelo. Na configuração *offline*, os dados são disponibilizados como em um bloco, com todo o conjunto de dados já disponível para aprendizagem, e diz-se que o algoritmo é realizado em batelada (*batch*). Na configuração *online*, os dados são disponibilizados sequencialmente para aprendizagem, e diz-se que o algoritmo é incremental, ou seja, atualiza gradualmente (incrementalmente) as variáveis associadas ao agrupamento. No contexto dos algoritmos incrementais, estão os algoritmos evolutivos (*evolving*), que realizam o agrupamento de modo a evoluir a partição nebulosa incrementalmente a cada amostra de dado disponibilizada, ou seja, os grupos podem se adaptar e a quantidade de grupos pode aumentar e/ou diminuir no processo.

Os algoritmos de agrupamento nebuloso são amplamente aplicados na fuzzificação de dados e na criação da estrutura da proposição antecedente de regras de sistemas de inferência nebulosos, auxiliando na formação da base de conhecimento desses sistemas exclusivamente a partir de dados. Assim, um algoritmo de agrupamento nebuloso é uma ferramenta útil na criação de sistemas nebulosos utilizados em uma grande variedade de aplicações, tais como identificação e controle de sistemas (RAFIEI; AKBARZADEH-T., 2023; PRECUP et al., 2020; SILVA; SERRA, 2014), previsão de séries temporais (RODRIGUES JUNIOR; SERRA, 2022; SOTO et al., 2019), reconhecimento de padrões (GUPTA; KUMAR, 2024; WANG et al., 2023), sistemas de classificação (IWENDI et al., 2022; JIMÉNEZ et al., 2019), sistemas de tomada de decisão (SELVACHANDRAN et al., 2021; ZHAN et al., 2022), processamento de sinais (HU et al., 2021; SHOEIBI et al., 2022), e detecção de faltas (CHENG et al., 2022; ZHANG et al., 2022).

2.3 Algoritmos de Agrupamento Nebuloso em Batelada

De acordo com Ruspini, Bezdek e Keller (2019), a primeira referência ao uso de conjuntos nebulosos no reconhecimento numérico de padrões foi feita em Bellman, Kalaba e Zadeh (1966). Bill Wee escreveu a primeira tese de doutorado no contexto de reconhecimento de padrões nebuloso em Wee (1967). Em Flake e Turner (1968) é discutido um método para construir uma hierarquia de subconjuntos nebulosos, que foram chamados de *clusters* (grupos). No entanto, o precursor dos agrupamentos nebulosos foi o trabalho em Ruspini (1969), em que o problema geral de classificação de dados foi considerado

equivalente à determinação de uma partição nebulosa dos dados. Nesse trabalho, Ruspini considerou várias possíveis caracterizações do problema de agrupamento, todas baseadas na suposição da disponibilidade de uma função de distância entre pares de dados. A formulação principal foi baseada na utilização de uma métrica no espaço de classificação (graus de pertinência nebulosos) e na identificação de uma função de mapeamento a partir dessa métrica. Assim, pôde-se formular o problema como a minimização de um índice de qualidade do agrupamento (função objetivo). Ruspini também definiu o primeiro índice de validação para métodos de agrupamento nebuloso. Uma das funções objetivo mais utilizadas nesse contexto de agrupamento nebuloso é a função objetivo *c-means* (DUNN, 1973), ou alguma modificação da mesma. Grande parte dos algoritmos de agrupamento nebuloso é baseada na otimização desse funcional (BABUŠKA, 2012).

2.3.1 Algoritmo de Agrupamento *C-Means* Nebuloso

O algoritmo de agrupamento *C-Means* Nebuloso (FCM - *Fuzzy C-Means*), também conhecido como algoritmo *c-means*, é o principal algoritmo referente à otimização do funcional *c-means* nebuloso, dando origem a uma ampla família de agrupamentos nebulosos (BABUŠKA, 2012). O funcional *c-means* nebuloso $J \in \mathbb{R}$ é formulado como segue (BEZDEK, 1981):

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{C}) = \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^N \left(\mu_k^i \right)^m \left(D_k^i \right)^2, \quad (2.5)$$

em que $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ é o conjunto de dados a ser agrupado, $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis do conjunto de dados $\mathbf{X}$, $N \in \mathbb{N}^*$ é o número de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, $\mathbf{U} = [U_{ik}] \in [0, 1]^{R \times N}$ é a matriz de partição nebulosa do conjunto de dados $\mathbf{X}$, com elementos $U_{ik} = \mu_k^i \in [0, 1]$, $R \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de grupos da partição nebulosa, $\mu_k^i \in [0, 1]$ é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ em relação ao i -ésimo grupo Θ^i , $\mathbf{C} = [\mathbf{c}^1 \dots \mathbf{c}^R] \in \mathbb{R}^{n \times R}$ é a matriz formada pelos centros de grupo, $\mathbf{c}^i \in \mathbb{R}^n$ é o i -ésimo centro de grupo, $m \in [1, \infty)$ é um fator de ponderação exponencial que determina o grau de incerteza (*fuzziness degree*) da partição nebulosa, e a distância $(D_k^i)^2 \in \mathbb{R}$ dada por

$$\left(D_k^i \right)^2 = \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i \right)^T \mathbf{P} \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i \right) \quad (2.6)$$

é a medida de dissimilaridade adotada, sendo uma norma quadrática induzida pela matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e ponderada no cálculo de J na Equação (2.5) pela m -ésima potência dos graus de pertinência nebulosos μ_k^i . O funcional *c-means* nebuloso J na Equação (2.5) pode ser visualizado como uma medida de variância total dos dados $\mathbf{x}_k \Big|_{k=1, \dots, N}$ em relação aos centros de grupo $\mathbf{c}^i \Big|_{i=1, \dots, R}$, a ser minimizada no processo do algoritmo (BABUŠKA, 2012).

A minimização do funcional *c-means* nebuloso na Equação (2.5) representa um problema de otimização não linear restrita, do qual uma grande variedade de métodos

disponíveis pode ser utilizada, como a minimização coordenada agrupada, a têmpera simulada, e algoritmos genéticos. O método mais popular utilizado é a realização de iterações de Picard através das condições de primeira ordem para os pontos estacionários (BABUŐKA, 2012). O procedimento que utiliza este último método é conhecido como algoritmo de agrupamento *c-means* nebuloso.

Para encontrar os pontos estacionários da função objetivo J na Equação (2.5), adiciona-se a ela a restrição das partições nebulosas, apresentada na Equação (2.4b), por meio de multiplicadores de Lagrange, formando a seguinte expressão (BABUŐKA, 2012):

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{C}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^N (\mu_k^i)^m (D_k^i)^2 + \sum_{k=1}^N \omega_k \left[\sum_{i=1}^R \mu_k^i - 1 \right], \quad (2.7)$$

em que $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$   o lagrangiano construído a partir do funcional J , $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \cdots \omega_k \cdots \omega_N] \in \mathbb{R}^{1 \times N}$   a matriz dos multiplicadores de Lagrange, e $\omega_k \in \mathbb{R}$   o k -ésimo multiplicador de Lagrange. Igualando o gradiente do lagrangiano $\mathcal{L}$ na Equação (2.7) a zero, pode-se mostrar que os pontos estacionários v o satisfazer, para $k = 1, \dots, N$, e $i = 1, \dots, R$, as seguintes relações (BABUŐKA, 2012):

$$\mu_k^i = \frac{1}{\sum_{j=1}^R \left(\frac{D_k^i}{D_k^j} \right)^{\frac{2}{m-1}}}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}^i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_k^i)^m \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N (\mu_k^i)^m} \quad (2.9)$$

Pode-se observar na Equação (2.9) que cada centro de grupo $\mathbf{c}^i$   uma média dos dados $\mathbf{x}_k$ ponderada pelos graus de pertinência μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação ao seu próprio grupo Θ^i , dando nome ao algoritmo. Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo de agrupamento *c-means* nebuloso são apresentados no Algoritmo 2.1 (BABUŐKA, 2012), no qual o símbolo “ $\leftarrow$ ” denota uma atribui  o².

Nesse algoritmo, o cálculo dos graus de pertinência por meio da Equação (2.8) pode apresentar uma singularidade se $D_k^i = 0$ para um ou mais centros $\mathbf{c}^i$. Neste caso, o valor de μ_k^i é calculado por meio da Equação (2.13), dando pertinência nula para os grupos com distância não nula e dividindo a pertinência total para os grupos com distância nula, de modo a sempre satisfazer a restrição de uma partição nebulosa na Equação (2.4b). Esquemas alternativos também podem ser propostos, como definir o limite de tolerância para a variação nos centros dos grupos $\mathbf{c}^i \big|_{i=1, \dots, R}$, levando à condição de parada $\max_{i=1, \dots, R} (\|\mathbf{c}^{i, (h)} - \mathbf{c}^{i, (h-1)}\|) < \tilde{\epsilon}$ (BABUŐKA, 2012).

² Nesta dissertação, uma atribuição “ $\leftarrow$ ”   utilizada ao invés de uma igualdade “ $=$ ” sempre que o valor de uma variável é atualizado ou redefinido com base em um cálculo que depende do estado atual dessa mesma variável.

Algoritmo 2.1: Algoritmo de Agrupamento *C-Means* Nebuloso.

Entrada: Conjunto de dados $\mathbf{X}$, número de grupos R , grau de incerteza m , tolerância de terminação $\tilde{\epsilon}$ e matriz de norma induzida $\mathbf{P}$;
Saída: Grupos $\Theta^i \big|_{i=1,\dots,R}$ e graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R}$;

- 1 Inicializar a matriz de partição nebulosa $\mathbf{U}^{(0)}$ aleatoriamente, satisfazendo as Equações (2.4a)-(2.4c);
- 2 Fazer o número da iteração $h = 0$;
- 3 **repita**
- 4 Fazer $h \leftarrow h + 1$;
- 5 Computar, para $i = 1, \dots, R$, os centros dos grupos:

$$\mathbf{c}^{i,(h)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\mu_k^{i,(h-1)}\right)^m \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N \left(\mu_k^{i,(h-1)}\right)^m}; \quad (2.10)$$
- 6 Computar, para $k = 1, \dots, N$, e $i = 1, \dots, R$, as distâncias:

$$\left(D_k^i\right)^2 = \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)}\right)^T \mathbf{P} \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)}\right); \quad (2.11)$$
- 7 **para** $k = 1, \dots, N$, **faça**
- 8 **se** $D_k^i > 0$ para $i = 1, \dots, R$, **então**
- 9 Fazer:

$$\mu_k^{i,(h)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^R \left(\frac{D_k^i}{D_k^j}\right)^{\frac{2}{m-1}}}; \quad (2.12)$$
- 10 **senão**
- 11 Fazer:

$$\mu_k^{i,(h)} = 0 \text{ se } D_k^i > 0, \text{ e } \mu_k^{i,(h)} \in [0, 1] \text{ para } D_k^i = 0, \text{ com } \sum_{i=1}^R \mu_k^{i,(h)} = 1; \quad (2.13)$$
- 12 **fim**
- 13 **fim**
- 14 **até** $\max_{\substack{k=1,\dots,N \\ i=1,\dots,R}} \left(\left|\mu_k^{i,(h)} - \mu_k^{i,(h-1)}\right|\right) < \tilde{\epsilon}$;

O grau de incerteza m é determinante nesse algoritmo, e tem influência significativa na partição resultante. Quando $m \rightarrow 1$, a partição tende a ser menos nebulosa e mais rígida, com μ_k^i tendendo a 0 ou 1, enquanto que quando $m \rightarrow \infty$, a partição se torna mais nebulosa, com $\mu_k^i \rightarrow 1/R$. De acordo com Babuška (2012), um valor usualmente escolhido é $m = 2$. O número de grupos R , o qual também é um parâmetro determinante para o algoritmo, é pré-definido pelo usuário, e o *c-means* nebuloso não possui nenhum artifício para determinação autônoma do número de grupos R do conjunto de dados $\mathbf{X}$.

No Algoritmo 2.1, é apresentada uma versão do FCM inicializada com uma matriz de partição nebulosa inicial $\mathbf{U}^{(0)}$ aleatória, a partir da qual os centros de grupos $\mathbf{c}^i \mid i=1, \dots, R$ são obtidos por meio das iterações. Outra abordagem é a inicialização com uma estimativa inicial dos centros de grupo $\mathbf{c}^{i,(0)} \mid i=1, \dots, R$, com as iterações partindo dessa estimativa. Essa abordagem é coerente quando alguma informação *a priori* sobre a localização dos centros está disponível, seja por conhecimento do especialista, seja por algum outro mecanismo ou algoritmo que forneça essa informação.

Com a escolha adequada da matriz $\mathbf{P}$, pode-se modificar a forma dos protótipos dos grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$. Se $\mathbf{P} = \mathbf{I}_{n \times n}$, onde $\mathbf{I}_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n , a distância utilizada no algoritmo é a norma euclidiana, que leva a grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ cujos protótipos possuem a forma de hiperesferas, ou seja, as superfícies no espaço n -dimensional que são equidistantes dos centros dos grupos $\mathbf{c}^i \mid i=1, \dots, R$ são hiperesferas. Uma outra possibilidade é escolher $\mathbf{P}$ como uma matriz diagonal $n \times n$ cujos elementos são os recíprocos das variâncias em cada coordenada dos dados $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\zeta^1}\right)^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left(\frac{1}{\zeta^l}\right)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \left(\frac{1}{\zeta^n}\right)^2 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde $\zeta^l \in \mathbb{R}$ é o desvio padrão da l -ésima coordenada do conjunto de dados $\mathbf{X}$, induzindo uma norma diagonal no $\mathbb{R}^n$ e levando a grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ com formas hiperelipsoidais cujos eixos são paralelos aos eixos de coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$. Outra possibilidade é escolher $\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-1}$, em que $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dada por

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \right) \left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \right)^T \right] \quad (2.15)$$

é a matriz de covariância dos dados $\mathbf{x}_k \mid k=1, \dots, N$. Nesse caso, $\mathbf{P}$ induz uma norma Mahalanobis no $\mathbb{R}^n$ (BEZDEK, 1981; BABUŠKA, 2012), cuja forma é hiperelipsoidal com seus eixos arbitrários. A Figura 2 mostra a influência desses três tipos de normas nas formas resultantes dos protótipos dos grupos no espaço bidimensional, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros dos grupos $\mathbf{c}^i$ em “asteriscos vermelhos”, as retas que passam pelos eixos dos protótipos em “linhas tracejadas pretas”, e as formas dos protótipos, representadas pelas curvas isométricas, em “linhas tracejadas vermelhas”. Na Figura 2a, pode-se ver que o uso de uma norma Euclidiana detecta protótipos de grupos com formas hiperesféricas. Na Figura 2b, pode-se ver que o uso de uma norma diagonal detecta protótipos de grupos com formas hiperelipsoidais cujos eixos são paralelos aos eixos das coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$. Na Figura 2c, pode-se ver que o uso de uma norma

Mahalanobis detecta protótipos de grupos com formas hiperelipsoidais cujos eixos são arbitrários.

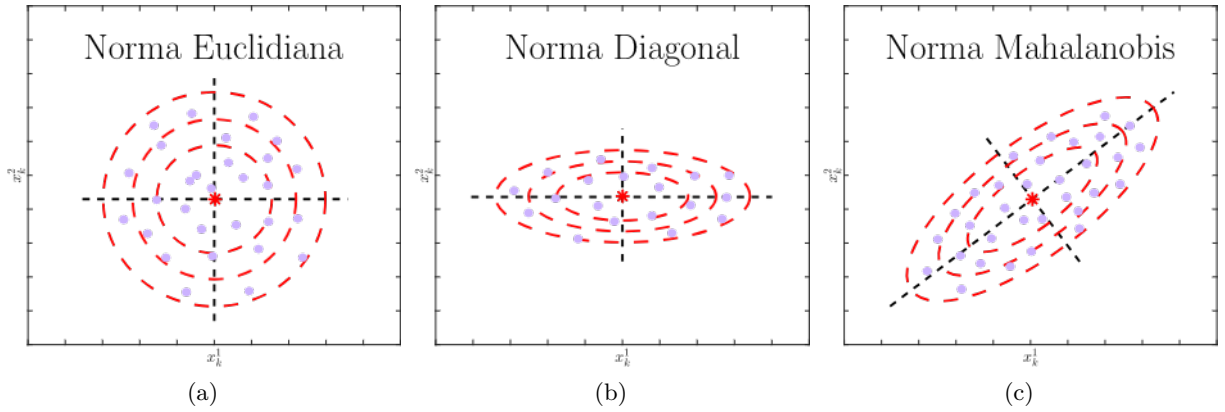


Figura 2 – Ilustração dos protótipos dos grupos no espaço bidimensional, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros dos grupos $\mathbf{c}^i$ em “asteriscos vermelhos”, as retas que passam pelos eixos dos protótipos em “linhas tracejadas pretas”, e as formas dos protótipos, representadas pelas curvas isométricas, em “linhas tracejadas vermelhas”. Os protótipos são ilustrados para três tipos de normas induzidas: (a) Norma Euclidiana, com protótipos hiperesféricos; (b) Norma Diagonal, com protótipos hiperelipsoidais cujos eixos são paralelos aos eixos das coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$; (c) Norma Mahalanobis, com protótipos hiperelipsoidais cujos eixos são arbitrários. Fonte: Adaptado de Babuška (2012).

Uma limitação do algoritmo *c-means* nebuloso é que ele é baseado em normas de distância fixas para todos os grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$. Em contrapartida, os dados podem conter grupos com formas de protótipos diferentes em cada região do espaço, e dessa forma o algoritmo não é capaz de “perceber” essas diferenças.

2.3.2 Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Gustafson-Kessel

A adaptação das distâncias de norma induzida $D_k^i \mid i=1, \dots, R$ para cada grupo $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$, onde $R \in \mathbb{N}^*$ é o número de grupos, dá origem a uma família de algoritmos de agrupamento nebuloso baseados originalmente no FCM. Um dos principais algoritmos dessa família é o algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafson-Kessel (GUSTAFSON; KESSEL, 1978), conhecido como algoritmo GK. Este algoritmo pode ser considerado como uma extensão do algoritmo *c-means* nebuloso padrão em que se aplicam normas de distância adaptativas com o objetivo de detectar grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ cujos protótipos têm diferentes formas geométricas no conjunto de dados (BABUŠKA, 2012).

O algoritmo GK considera em cada grupo $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ uma matriz de norma induzida $\mathbf{P}^i \mid i=1, \dots, R$, que leva à seguinte norma de produto interno:

$$(D_k^i)^2 = (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i)^T \mathbf{P}^i (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i), \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{P}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de norma induzida associada ao i -ésimo grupo Θ^i , $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis do conjunto de dados $\mathbf{X}$, e $D_k^i \in \mathbb{R}_+$ é a distância adaptativa entre o

k -ésimo dado $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ e o i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}^i \in \mathbb{R}^n$, computada através da matriz $\mathbf{P}^i$. Nesse contexto, as matrizes $\mathbf{P}^i \big|_{i=1, \dots, R}$ passam a se tornar variáveis de otimização do funcional c -means na Equação (2.5), tornando a função objetivo $J \in \mathbb{R}$ do algoritmo GK igual a

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{C}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^N (\mu_k^i)^m (D_k^i)^2, \quad (2.17)$$

em que $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ é o conjunto de dados a ser agrupado, $N \in \mathbb{N}^*$ é o número de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, $\mathbf{U} = [U_{ik}] \in [0, 1]^{R \times N}$ é a matriz de partição nebulosa do conjunto de dados $\mathbf{X}$, com elementos $U_{ik} = \mu_k^i$, $\mu_k^i \in [0, 1]$ é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ^i , $\mathbf{C} = [\mathbf{c}^1 \ \dots \ \mathbf{c}^R] \in \mathbb{R}^{n \times R}$ é a matriz formada pelos centros de grupo $\mathbf{c}^i \big|_{i=1, \dots, R}$, $m \in [1, \infty)$ é o grau de incerteza da partição nebulosa, e $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^R\}$ é o conjunto das R matrizes de norma induzida $\mathbf{P}^i \big|_{i=1, \dots, R}$.

No processo de obtenção de uma solução viável, é interessante que as matrizes $\mathbf{P}^i$ sejam restritas de alguma forma. Uma forma comum, que é utilizada no algoritmo GK, é restringir o determinante das matrizes $\mathbf{P}^i \big|_{i=1, \dots, R}$, permitindo a variação das mesmas com seus determinantes fixos, o que corresponde a otimizar as formas dos protótipos dos grupos $\Theta^i \big|_{i=1, \dots, R}$ mantendo o volume dos mesmos constante (BABUŠKA, 2012), de modo que para $i = 1, \dots, R$, tem-se que:

$$\det(\mathbf{P}^i) = \tilde{p}^i, \quad (2.18)$$

onde $\tilde{p}^i \in \mathbb{R}_+^*$ é o volume do i -ésimo grupo Θ^i , definido previamente pelo usuário. A seguinte solução é obtida para as matrizes de norma induzida $\mathbf{P}^i \big|_{i=1, \dots, R}$ ao utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\mathbf{P}^i = [\tilde{p}^i \det(\mathbf{F}^i)]^{\frac{1}{n}} (\mathbf{F}^i)^{-1}, \quad (2.19)$$

em que $\mathbf{F}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância nebulosa do i -ésimo grupo Θ^i , definida por:

$$\mathbf{F}^i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_k^i)^m (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i) (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i)^T}{\sum_{k=1}^N (\mu_k^i)^m} \quad (2.20)$$

A matriz de norma induzida $\mathbf{P}^i$ dada pela Equação (2.19) resulta em uma norma de distância de Mahalanobis (Figura 2c) entre os dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1, \dots, N}$ e os centros de grupo $\mathbf{c}^i \big|_{i=1, \dots, R}$, sendo a matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}^i$ ponderada na Equação (2.20) pela m -ésima potência dos graus de pertinência μ_k^i . Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso GK podem ser visualizados no Algoritmo 2.2 (BABUŠKA, 2012).

Os volumes dos grupos podem ser simplesmente fixados em $\tilde{p}^i = 1$, $\forall i \in \{1, \dots, R\}$ e, neste caso, o algoritmo GK encontra grupos $\Theta^i \big|_{i=1, \dots, R}$ com volumes iguais. As matrizes

Algoritmo 2.2: Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Gustafson-Kessel.

Entrada: Conjunto de dados $\mathbf{X}$, número de grupos R , grau de incerteza m , tolerância de terminação $\tilde{\epsilon}$ e volumes dos grupos $\tilde{p}^i \mid_{i=1,\dots,R}$;

Saída: Grupos $\Theta^i \mid_{i=1,\dots,R}$ e graus de pertinência $\mu_k^i \mid_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R}$;

1 Inicializar a matriz de partição nebulosa $\mathbf{U}^{(0)}$ aleatoriamente, satisfazendo as Equações (2.4a)-(2.4c);

2 Fazer o número da iteração $h = 0$;

3 **repita**

4 Fazer $h \leftarrow h + 1$;

5 Computar, para $i = 1, \dots, R$, os centros dos grupos:

$$\mathbf{c}^{i,(h)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\mu_k^{i,(h-1)} \right)^m \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N \left(\mu_k^{i,(h-1)} \right)^m}; \quad (2.21)$$

6 Computar, para $i = 1, \dots, R$, as matrizes de covariância nebulosa dos grupos:

$$\mathbf{F}^i = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\mu_k^{i,(h-1)} \right)^m \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)} \right) \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)} \right)^T}{\sum_{k=1}^N \left(\mu_k^{i,(h-1)} \right)^m}; \quad (2.22)$$

7 Computar, para $k = 1, \dots, N$, e $i = 1, \dots, R$, as distâncias:

$$\left(D_k^i \right)^2 = \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)} \right)^T \left[\tilde{p}^i \det \left(\mathbf{F}^i \right) \right]^{\frac{1}{n}} \left(\mathbf{F}^i \right)^{-1} \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)} \right); \quad (2.23)$$

8 **para** $k = 1, \dots, N$, **faça**

9 **se** $D_k^i > 0$ para $i = 1, \dots, R$, **então**

10 Fazer:

$$\mu_k^{i,(h)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^R \left(\frac{D_k^i}{D_k^j} \right)^{\frac{2}{m-1}}}; \quad (2.24)$$

11 **senão**

12 Fazer:

$$\mu_k^{i,(h)} = 0 \text{ se } D_k^i > 0, \text{ e } \mu_k^{i,(h)} \in [0, 1] \text{ para } D_k^i = 0, \text{ com } \sum_{i=1}^R \mu_k^{i,(h)} = 1; \quad (2.25)$$

13 **fim**

14 **fim**

15 **até** $\max_{\substack{k=1,\dots,N \\ i=1,\dots,R}} \left(\left| \mu_k^{i,(h)} - \mu_k^{i,(h-1)} \right| \right) < \tilde{\epsilon}$;

de covariância nebulosa $\mathbf{F}^i \mid_{i=1,\dots,R}$ fornecem a informação sobre as formas e orientações

dos protótipos hiperelipsoidais dos grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$. Para o i -ésimo grupo Θ^i , a razão dos comprimentos dos eixos dos hiperelipsoides é igual à razão das raízes quadradas dos autovalores $\lambda^{i,l} \mid l=1, \dots, n \in \mathbb{R}_+^*$ da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}^i$, enquanto as direções dos eixos dos hiperelipsoides são dadas pelos autovetores $\mathbf{q}^{i,l} \mid l=1, \dots, n \in \mathbb{R}^n$ da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}^i$ (ver detalhes na Figura 12) (BABUŠKA, 2012).

Os comentários feitos sobre a inicialização do algoritmo FCM são válidos para o algoritmo GK, tendo-se a possibilidade de inicializar o algoritmo com estimativas já disponibilizadas dos centros dos grupos $\mathbf{c}^{i,(0)} \mid i=1, \dots, R$, facilitando o processo do algoritmo GK de otimizar o seu funcional na Equação (2.17) e alcançar as formas adequadas dos protótipos dos grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$. Informações *a priori* sobre os volumes $\tilde{p}^i \mid i=1, \dots, R$ dos grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ também podem ser adequadas para a obtenção de melhores resultados a partir do algoritmo GK. Assim como no caso do algoritmo FCM, o número de grupos R é um parâmetro pré-definido, de modo que o algoritmo GK não possui nenhum artifício para determinação autônoma do número de grupos R do conjunto de dados $\mathbf{X}$.

2.3.3 Algoritmo de Agrupamento de Estimativa de Máxima Verossimilhança Nebulosa

O algoritmo de agrupamento de Estimativa de Máxima Verossimilhança Nebulosa, também conhecido como algoritmo FMLE (*Fuzzy Maximum Likelihood Estimation*), foi proposto inicialmente em Gath e Geva (1989). Ele aplica uma norma de distância baseada na estimativa de máxima verossimilhança nebulosa, proposta em Bezdek e Dunn (1975), dada por:

$$D_k^i = \frac{[\det(\mathbf{F}^i)]^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{P}^i} e^{\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i)^T (\mathbf{F}^i)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i)}, \quad (2.26)$$

onde $D_k^i \in \mathbb{R}$ é a distância adaptativa entre o k -ésimo dado $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ e o i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}^i \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de variáveis do conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, $\mathbf{F}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância nebulosa do i -ésimo grupo Θ^i , e $\mathcal{P}^i \in \mathbb{R}$ é a probabilidade *a priori* de selecionar o i -ésimo grupo Θ^i . Essa norma de distância dada pela Equação (2.26) acrescenta um termo exponencial, tendo portanto um decrescimento muito mais rápido em comparação com a norma de produto interno na Equação (2.16) utilizada pelo algoritmo GK. A matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}^i$ do i -ésimo grupo Θ^i é dada por (BABUŠKA, 2012):

$$\mathbf{F}^i = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_k^i (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i) (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^i)^T}{\sum_{k=1}^N \mu_k^i}, \quad (2.27)$$

onde $\mu_k^i \in [0, 1]$ é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ^i . Pode-se observar na Equação (2.27) que não há a presença do grau de incerteza m

na computação das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}^i \big|_{i=1,\dots,R}$ dos grupos $\Theta^i \big|_{i=1,\dots,R}$ no algoritmo FMLE, em que $R \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de grupos. A probabilidade *a priori* $\mathcal{P}^i$ de selecionar o i -ésimo grupo Θ^i é dada por:

$$\mathcal{P}^i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu_k^i, \quad (2.28)$$

ou seja, $\mathcal{P}^i$ é a média dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{k=1,\dots,N}$ de todos os dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1,\dots,N}$ em relação ao i -ésimo grupo Θ^i , ao passo que pode-se interpretar μ_k^i como a probabilidade a posteriori de selecionar o i -ésimo grupo Θ^i dado o vetor de dados $\mathbf{x}_k$ (BABUŠKA, 2012).

De acordo com Gath e Geva (1989), o algoritmo FMLE é capaz de detectar grupos de várias formas, tamanhos e densidades, por causa de sua matriz de covariância nebulosa utilizada em conjunto com uma distância exponencial, sem restringir os grupos em volume. É necessário, no entanto, uma boa inicialização (ainda melhor que nos casos do FCM e GK), pois o algoritmo tende para um ótimo local próximo da estimativa inicial por causa da norma de distância exponencial. Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo de agrupamento FMLE podem ser vistos no Algoritmo 2.3 (BABUŠKA, 2012). Assim como nos casos dos algoritmos FCM e GK, o número de grupos R é um parâmetro pré-definido, de modo que o algoritmo FMLE não possui nenhum artifício para determinação autônoma do número de grupos R do conjunto de dados $\mathbf{X}$.

2.3.4 Algoritmo de Agrupamento Subtrativo

O algoritmo de Agrupamento Subtrativo (SC - *Subtractive Clustering*), também conhecido como algoritmo subtrativo, foi apresentado em Chiu (1994) como um método eficiente para estimação de centros de grupos de dados numéricos. O mesmo pode ser utilizado para a determinação da quantidade de grupos e também para a inicialização de outros algoritmos de agrupamento baseados em otimização, tais como o FCM, o GK e o FMLE. Destaca-se aqui uma desvantagem dos algoritmos de agrupamento baseados em otimização citados anteriormente, que é a forte dependência da escolha dos valores iniciais dos parâmetros, seja a matriz de partição nebulosa inicial $\mathbf{U}^{(0)}$ ou o conjunto de centros de grupo inicial $\mathbf{C}^{(0)}$. Essa é uma característica da maior parte dos problemas de otimização não linear (CHIU, 1994).

O algoritmo subtrativo é baseado em um outro algoritmo proposto em Yager e Filev (1994), chamado de método da montanha (*Mountain Method*), que foi criado para estimar o número $R \in \mathbb{N}^*$ e as localizações iniciais dos centros de grupo $\mathbf{c}^i \big|_{i=1,\dots,R} \in \mathbb{R}^n$, em que $n \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de coordenadas do conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$, e $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$. No método da montanha, é feita uma “grade” no espaço dos dados, e em cada ponto dessa grade é medido um potencial que é baseado nas distâncias desse ponto aos dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^n$ presentes. Quanto

Algoritmo 2.3: Algoritmo de Agrupamento de Estimativa de Máxima Verossimilhança Nebulosa.

Entrada: Conjunto de dados $\mathbf{X}$, número de grupos R , grau de incerteza m , tolerância de terminação $\tilde{\epsilon}$ e uma boa estimativa de matriz de partição nebulosa inicial $\mathbf{U}^{(0)}$;

Saída: Grupos $\Theta^i \mid i=1, \dots, R$ e graus de pertinência $\mu_k^i \mid k=1, \dots, N, i=1, \dots, R$;

1 Fazer o número da iteração $h = 0$;

2 **repita**

3 Fazer $h \leftarrow h + 1$;

4 Computar, para $i = 1, \dots, R$, os centros dos grupos:

$$\mathbf{c}^{i,(h)} = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_k^{i,(h-1)} \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N \mu_k^{i,(h-1)}}; \quad (2.29)$$

5 Computar, para $i = 1, \dots, R$, as matrizes de covariância nebulosa dos grupos e as probabilidades *a priori*:

$$\mathbf{F}^i = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_k^{i,(h-1)} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)})^T}{\sum_{k=1}^N \mu_k^{i,(h-1)}}, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{P}^i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu_k^{i,(h-1)}; \quad (2.31)$$

6 Computar, para $k = 1, \dots, N$, e $i = 1, \dots, R$, as distâncias:

$$D_k^i = \frac{[\det(\mathbf{F}^i)]^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{P}^i} e^{\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)})^T (\mathbf{F}^i)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}^{i,(h)})}; \quad (2.32)$$

7 **para** $k = 1, \dots, N$, **faça**

8 **se** $D_k^i > 0$ **para** $i = 1, \dots, R$, **então**

9 Fazer:

$$\mu_k^{i,(h)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^R \left(\frac{D_k^i}{D_k^j} \right)^{\frac{2}{m-1}}}; \quad (2.33)$$

10 **senão**

11 Fazer:

$$\mu_k^{i,(h)} = 0 \text{ se } D_k^i > 0, \text{ e } \mu_k^{i,(h)} \in [0, 1] \text{ para } D_k^i = 0, \text{ com } \sum_{i=1}^R \mu_k^{i,(h)} = 1; \quad (2.34)$$

12 **fim**

13 **fim**

14 **até** $\max_{\substack{k=1, \dots, N \\ i=1, \dots, R}} \left(\left| \mu_k^{i,(h)} - \mu_k^{i,(h-1)} \right| \right) < \tilde{\epsilon}$;

mais dados $\mathbf{x}_k$ estiverem próximos de um ponto de grade, maior é o seu potencial. Assim, o ponto de grade com maior potencial é selecionado como o primeiro centro de grupo $\mathbf{c}^1$.

Com esse procedimento, os potenciais de todos os pontos de grade são então reduzidos de acordo com a proximidade em relação ao primeiro centro de grupo $\mathbf{c}^1$. Assim, o ponto remanescente com maior potencial também é escolhido como o próximo centro de grupo $\mathbf{c}^2$. Esse processo é repetido até que os potenciais dos pontos de grade cheguem em um valor abaixo de um limiar pré-estabelecido e, com este critério, a quantidade de grupos R é definida. Embora esse método seja efetivo, apresentando uma ideia promissora para a determinação da quantidade de grupos e dos centros de grupo, o seu custo computacional cresce exponencialmente com a dimensão do problema, por causa dos pontos de grade (CHIU, 1994). Por exemplo, um problema com 2 variáveis em uma resolução de 10 linhas de grade por variável contém 100 pontos de grade, enquanto para 3 variáveis se obtém 1000 pontos de grade e, genericamente, para n variáveis, são 10^n pontos de grade. Isto acarreta em alto custo computacional.

O algoritmo de agrupamento subtrativo apresenta uma solução para esse problema, tornando o procedimento menos dispendioso computacionalmente. Nele, os potenciais são medidos para cada ponto de dado $\mathbf{x}_k \Big|_{k=1,\dots,N}$, e não para cada ponto de grade. Assim, a quantidade de pontos dos quais são obtidos os valores de potenciais é sempre igual à quantidade N de dados presentes, independentemente da dimensão do problema. Ele também elimina a exigência de se escolher uma resolução de grade, removendo a necessidade presente nessa escolha de se ponderar precisão no resultado e complexidade computacional. Outras modificações também são feitas em relação ao método da montanha visando melhorar a eficiência computacional e a robustez do algoritmo. O ponto central para a velocidade desse algoritmo é não envolver qualquer problema de otimização não linear e ter um custo computacional que cresce apenas linearmente com a dimensão do problema (CHIU, 1994).

Para o conjunto $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_k \ \cdots \ \mathbf{x}_N]$ de N amostras de dados no espaço n -dimensional, o algoritmo assume que os dados são normalizados em cada dimensão, se tornando $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \ \cdots \ \bar{\mathbf{x}}_k \ \cdots \ \bar{\mathbf{x}}_N] \in \mathbb{R}^{n \times N}$, limitados portanto a um hipercubo de aresta unitária. Os potenciais definidos para os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k \Big|_{k=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^n$ são computados pela função gaussiana dada por (CHIU, 1994):

$$P^{\bar{\mathbf{x}}_k} = \sum_{j=1}^N e^{-\chi \|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_j\|^2}, \quad (2.35)$$

em que $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \in \mathbb{R}$ é o potencial do k -ésimo dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, e o parâmetro $\chi \in (0, \infty)$ é dado por:

$$\chi = \frac{4}{r_a^2}, \quad (2.36)$$

onde $r_a \in (0, \infty)$ é uma constante real positiva. O comportamento da função gaussiana incorporado no somatório da Equação (2.35) transmite exatamente a ideia desejada: dados $\mathbf{x}_k$ com mais vizinhos próximos apresentam maiores valores de potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_k}$, e são selecionados como centros de grupo. A constante r_a , chamada raio de agrupamento,

está associada ao decaimento da curva gaussiana na Equação (2.35), e é efetivamente um raio que define a vizinhança, de modo que dados além desse raio têm pouca influência na medição de potencial.

Com os potenciais calculados por meio da Equação (2.35), o dado $\mathbf{x}_{k_1}$ com maior potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_1}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k})$ é selecionado como primeiro centro de grupo $\mathbf{c}^1 = \mathbf{x}_{k_1}$, com o potencial do centro $P^{\bar{\mathbf{c}}^1} = P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_1}}$, onde k_1 é a amostra do dado $\mathbf{x}_{k_1}$ selecionado como primeiro centro de grupo $\mathbf{c}^1$. Para os potenciais $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \big|_{k=1,\dots,N}$ de todos os dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1,\dots,N}$, é realizado um procedimento subtrativo (daí o nome do algoritmo), através de uma expressão dada por (CHIU, 1994):

$$P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \leftarrow P^{\bar{\mathbf{x}}_k} - P^{\bar{\mathbf{c}}^1} e^{-\tilde{\gamma} \|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}^1\|^2}, \quad (2.37)$$

em que a variável $\tilde{\gamma} \in (0, \infty)$ é dada por:

$$\tilde{\gamma} = \frac{4}{r_b^2}, \quad (2.38)$$

onde $r_b \in (0, \infty)$ é uma constante positiva. Pode-se ver na Equação (2.37) que os potenciais $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \big|_{k=1,\dots,N}$ dos dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1,\dots,N}$ são subtraídos por uma quantidade proporcional ao potencial do centro $P^{\bar{\mathbf{c}}^1}$, e que quanto maior a proximidade em relação a este centro $\mathbf{c}^1$, menor o valor da norma $\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}^1\|$, e maior a quantidade subtraída do potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_k}$. Esse procedimento é realizado com o objetivo de evitar centros de grupo muito próximos no espaço, sendo r_b um pouco maior que r_a , geralmente se adotando $r_b = 1,5r_a$ (CHIU, 1994).

Com a probabilidade de dados $\mathbf{x}_k$ muito próximos do centro $\mathbf{c}^1$ terem alto potencial já reduzida, então o novo dado $\mathbf{x}_{k_2}$ com maior potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_2}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k})$ é selecionado como segundo centro de grupo $\mathbf{c}^2 = \mathbf{x}_{k_2}$, com o potencial do centro $P^{\bar{\mathbf{c}}^2} = P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_2}}$, onde k_2 é a amostra do dado $\mathbf{x}_{k_2}$ selecionado como segundo centro de grupo $\mathbf{c}^2$. Esse procedimento é repetido, de modo que a operação subtrativa realizada para os potenciais $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \big|_{k=1,\dots,N}$ após a obtenção do i -ésimo centro $\mathbf{c}^i$ é dada por:

$$P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \leftarrow P^{\bar{\mathbf{x}}_k} - P^{\bar{\mathbf{c}}^i} e^{-\tilde{\gamma} \|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}^i\|^2} \quad (2.39)$$

Essas operações são realizadas até que os potenciais $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \big|_{k=1,\dots,N}$ alcancem valores pequenos, de acordo com limites definidos pelo usuário, em um critério de determinação automática da quantidade de grupos R . Em Chiu (1994), são estabelecidos dois limites, $\bar{\epsilon}$ e $\underline{\epsilon}$, em que $\bar{\epsilon}$ estabelece a aceitação completa do i -ésimo centro $\mathbf{c}^i$, de modo que valores de potenciais máximos $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k}) \big|_{i=2,3,\dots}$ que satisfazem a condição

$$P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} > \bar{\epsilon} P^{\bar{\mathbf{c}}^1} \quad (2.40)$$

sempre estabelecem a seleção do próximo centro de grupo $\mathbf{c}^i$, enquanto $\underline{\epsilon}$ estabelece a rejeição completa, de modo que valores de potenciais máximos $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k}) \big|_{i=2,3,\dots}$ que satisfazem a condição

$$P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} < \underline{\epsilon} P^{\bar{\mathbf{c}}^1} \quad (2.41)$$

sempre estabelecem a rejeição do próximo centro de grupo $\mathbf{c}^i$, finalizando o processo do algoritmo com os $i - 1$ centros previamente encontrados, de modo que o número de grupos final é $R = i - 1$. Se o valor de potencial máximo $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k})$ estiver entre os dois limites, de modo que $\underline{\epsilon}P^{\bar{\mathbf{c}}^1} \leq P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} \leq \bar{\epsilon}P^{\bar{\mathbf{c}}^1}$, então a menor distância $\bar{\delta}^i$ do candidato a i -ésimo centro normalizado $\bar{\mathbf{x}}_{k_i}$ para os centros normalizados existentes $\bar{\mathbf{c}}^j \mid j=1,\dots,i-1$ é computada por:

$$\bar{\delta}^i = \min_{j=1,\dots,i-1} (\|\bar{\mathbf{x}}_{k_i} - \bar{\mathbf{c}}^j\|), \quad (2.42)$$

de modo que a seguinte condição de proximidade é analisada:

$$\frac{\bar{\delta}^i}{r_a} + \frac{P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}}}{P^{\bar{\mathbf{c}}^1}} \geq 1 \quad (2.43)$$

Se a condição em (2.43) for satisfeita, então o dado $\mathbf{x}_{k_i}$ é selecionado como o próximo centro de grupo $\mathbf{c}^i$. Essa condição indica que, para potenciais $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}}$ na zona intermediária $\underline{\epsilon}P^{\bar{\mathbf{c}}^1} \leq P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} \leq \bar{\epsilon}P^{\bar{\mathbf{c}}^1}$, é estabelecido um compromisso entre ter potencial necessário e estar suficientemente distante dos centros de grupo já existentes. Se a condição em (2.43) não for satisfeita, então atribui-se para o potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}}$ do dado $\mathbf{x}_{k_i}$ o valor $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = 0$. Desta forma, é selecionado o próximo dado $\mathbf{x}_{k_i}$ com maior potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k})$, onde k_i é a amostra deste novo dado $\mathbf{x}_{k_i}$ com maior potencial $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}}$, de modo que as condições em (2.41) e (2.43) são analisadas novamente. Valores usuais sugeridos pelo autor são $\bar{\epsilon} = 0,50$ e $\underline{\epsilon} = 0,15$ (CHIU, 1994).

Definidos os centros dos grupos, as funções de pertinência do algoritmo podem ser implementadas conforme a percepção do especialista. Em Chiu (1994), o autor faz uma breve comparação entre as funções de pertinência definidas no FCM, conforme a Equação (2.8), e as funções de pertinência gaussianas, dadas por:

$$\mu_k^i = e^{-\chi \|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}^i\|^2}, \quad (2.44)$$

onde $\mu_k^i \in [0, 1]$ é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ^i . Destaca-se que os graus de pertinência μ_k^i computados a partir da função de pertinência gaussiana na Equação (2.44) não satisfazem diretamente a relação necessária para uma partição nebulosa, apresentada na Equação (2.4b), sendo necessária a normalização de cada coluna da matriz de partição nebulosa $\mathbf{U} \in [0, 1]^{R \times N}$ no processo de inferência da saída de um sistema nebuloso no qual essa abordagem está sendo utilizada. Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo de agrupamento subtrativo podem ser visualizados no Algoritmo 2.4 (CHIU, 1994).

O algoritmo subtrativo é capaz de encontrar centros de grupo $\mathbf{c}^i \mid i=1,\dots,R$ bem representativos do comportamento do conjunto de dados $\mathbf{X}$, pois pela sua própria característica, seleciona centros que refletem aglomerações nos dados, de modo que dados de um mesmo grupo têm alta similaridade, e garante altas distâncias entre os centros de grupo, de modo

Algoritmo 2.4: Algoritmo de Agrupamento Subtrativo.

Entrada: Conjunto de dados $\mathbf{X}$, limites de potencial $\bar{\epsilon}$ e $\underline{\epsilon}$, e raios r_a e r_b ;
Saída: Grupos $\Theta^i \mid_{i=1,\dots,R}$ e graus de pertinência $\mu_k^i \mid_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R}$;

- 1 Normalizar os dados em cada coordenada, obtendo $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \ \bar{\mathbf{x}}_2 \ \dots \ \bar{\mathbf{x}}_N]$;
- 2 Calcular $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \mid_{k=1,\dots,N}$ usando a Equação (2.35);
- 3 Selecionar a amostra k_1 tal que $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_1}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k})$;
- 4 Definir primeiro centro de grupo $\mathbf{c}^1 = \mathbf{x}_{k_1}$ com potencial $P^{\bar{\mathbf{c}}^1} = P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_1}}$;
- 5 Fazer $i = 1$;
- 6 **repita**
- 7 Realizar procedimento de subtração para os potenciais $P^{\bar{\mathbf{x}}_k} \mid_{k=1,\dots,N}$ conforme a Equação (2.39);
- 8 **se** $i = 1$, **então**
- 9 Fazer $i \leftarrow i + 1$;
- 10 **fim**
- 11 Selecionar a amostra k_i tal que $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = \max_{k=1,\dots,N} (P^{\bar{\mathbf{x}}_k})$;
- 12 **se** $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} > \bar{\epsilon} P^{\bar{\mathbf{c}}^1}$, **então**
- 13 Definir i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}^i = \mathbf{x}_{k_i}$ com potencial $P^{\bar{\mathbf{c}}^i} = P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}}$;
- 14 Fazer $i \leftarrow i + 1$;
- 15 **senão se** $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} \geq \underline{\epsilon} P^{\bar{\mathbf{c}}^1}$, **então**
- 16 **se a condição em (2.43) for satisfeita, então**
- 17 Definir i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}^i = \mathbf{x}_{k_i}$ com potencial $P^{\bar{\mathbf{c}}^i} = P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}}$;
- 18 Fazer $i \leftarrow i + 1$;
- 19 **senão**
- 20 Fazer $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} = 0$;
- 21 Voltar para linha 11;
- 22 **fim**
- 23 **fim**
- 24 **até** $P^{\bar{\mathbf{x}}_{k_i}} < \underline{\epsilon} P^{\bar{\mathbf{c}}^1}$;
- 25 Calcular $\mu_k^i \mid_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R}$ pela Equação (2.44);

que dados de grupos diferentes tem alta dissimilaridade. Além disso, o algoritmo de agrupamento subtrativo é capaz de determinar de forma autônoma a quantidade R de grupos presentes no conjunto de dados $\mathbf{X}$, o que é uma vantagem em comparação aos algoritmos FCM, GK e FMLE. Ele pode ser utilizado para inicialização desses algoritmos baseados em otimização, mas também se caracteriza por si só como um satisfatório algoritmo de agrupamento nebuloso à medida que são definidas também as funções de pertinência μ_k^i da partição nebulosa dos dados $\mathbf{X}$. A sua abordagem de potencial baseada em densidade de dados é relevante no contexto de agrupamento, sendo amplamente empregada em diversos algoritmos rígidos ou nebulosos (BHATTACHARJEE; MITRA, 2021; ESTER et al., 1996; AGRAWAL et al., 1998; JANUZAJ; KRIEGEL; PFEIFLE, 2004; BÖHM et al., 2009; KRIEGEL; PFEIFLE, 2005b; KRIEGEL; PFEIFLE, 2005a; PEI et al., 2017; TANG et al., 2019), contribuindo também para o desenvolvimento de algoritmos de agrupamento

evolutivo (SANTOS, 2018).

2.4 Algoritmos de Agrupamento Nebuloso Evolutivo

A evolução dos modos de processamento da informação, devido à maior necessidade de extrair conhecimento significativo a partir de dados, que em muitos contextos, se apresentam não apenas em grandes quantidades, mas também de diferentes formas em fluxo de dados (*data stream*), tem estabelecido novos desafios e, consequentemente, novas abordagens em processamento de dados que não são apenas *offline* e estacionárias, mas também *online* e dinâmicas (ANGELOV, 2010), possuindo também maior nível de adaptação do que os sistemas adaptativos clássicos da teoria de sistemas de controle (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010).

No contexto de aprendizagem de máquinas, um dos objetivos dos métodos de aprendizagem *online* é evitar o armazenamento do conjunto completo de dados, preferencialmente desconsiderando cada amostra após a sua utilização (BISHOP, 1995). De acordo com Baraldi e Blonda (1999), os métodos de aprendizagem *online* podem ser requeridos quando é necessária uma resposta em tempo real, ou quando o conjunto de dados é tão grande que métodos em batelada se tornam impraticáveis (seja por causa de suas propriedades numéricas, ou tempo computacional, ou requerimento de memória), ou até mesmo em situações nas quais os dados aparecem em fluxo contínuo, com a quantidade total de amostras indefinida. Nos algoritmos de aprendizagem *online*, os procedimentos que seriam realizados sobre as amostras de treinamento em batelada, que muitas vezes são computacionalmente custosos, passam a ter a separação da contribuição do da última amostra de dados, em uma fórmula de atualização sequencial, também chamada de fórmula recursiva, que permite a atualização de um parâmetro a cada apresentação de uma nova amostra no fluxo de dados. Em alguns contextos, taxas de aprendizagem são incluídas no processo recursivo para melhorar o desempenho (vide o fator de esquecimento no bem conhecido algoritmo de mínimos quadrados recursivo), mas em excesso também podem levar o procedimento a resultados instáveis. Dentro das condições de convergência, tem-se que os sistemas de aprendizagem *online* exigem menos tempo de computação por atualização de parâmetro, e podem convergir significativamente mais rápido que os algoritmos iterativos em batelada (BARALDI; BLONDA, 1999).

Dentro do contexto atual da velocidade de informações, o desafio é oferecer métodos, algoritmos e modelos que permitam não somente a aprendizagem *online*, que é treinar durante a fase operacional, mas também ser capaz de aprender continuamente (evoluir) ao longo de suas “vidas” (ANGELOV; GU, 2019). De acordo com Lughofer (2011a), modelos evolutivos são modelos orientados a dados, que se adaptam autonomamente, e que se estendem e evoluem dinamicamente baseado em novas amostras de dados e nas novas

informações contidas neles. Esses modelos são capazes de dar suporte a qualquer cenário de modelagem para fluxos de dados, de medições *online* e de dados dinâmicos que mudam de natureza e de características no tempo e no espaço. A adaptação de um modelo pode se referir à atualização de seus parâmetros, à alteração de algum limite de decisão, e a modificações nas partições de grupos ou superfícies de aproximação, enquanto o termo evolutivo diz respeito à extensão ou redução do modelo, ou seja, componentes estruturais que “evoluem” com base nas características dos novos dados sob demanda (LUGHOFER, 2011a). Os padrões de dados são frequentemente não estacionários, e somente as adaptações do modelo, típicas da abordagem de controle adaptativo tradicional, não são suficientes, de modo que a melhor performance tem sido alcançada pela evolução dinâmica da estrutura interna dos modelos (ANGELOV; GU, 2019).

Um sistema adaptativo constitui-se de uma estrutura fixa e conhecida que permite a adaptação de seus parâmetros. Já sistemas evolutivos não possuem estruturas fixas, mas as mesmas evoluem dinamicamente. Os sistemas evolutivos também são adaptativos, mas os seus objetos de adaptação são tanto os parâmetros quanto a estrutura (ANGELOV, 2013). A Figura 3 ilustra a diferença entre modelos adaptativos e modelos evolutivos no contexto de modelagem de dados, em que u_k é a variável de entrada dos modelos, y_k é a variável de saída dos modelos, os dados antigos são ilustrados em “pontos lilás”, os dados novos em “pontos roxos”, o modelo original em “linha preta”, o modelo adaptativo em “linha tracejada preta”, e o modelo evolutivo em “linha pontilhada preta”. Na Figura 3a, tem-se um caso em que a presença de novas amostras vindas no fluxo de dados não representa uma mudança brusca na operação do sistema a que os dados se referem, e uma simples alteração dos parâmetros do modelo consegue adaptá-lo bem para que o mesmo continue desempenhando com precisão o seu papel de modelagem. Por sua vez, a Figura 3b apresenta um caso em que os novos dados representam uma mudança brusca na operação do sistema, e uma simples mudança de parâmetros do modelo já não é suficiente, de modo que o mesmo precisa evoluir sua estrutura para incorporar na mesma a nova faixa de operação dos dados do sistema.

Outro aspecto significativo é diferenciar um algoritmo evolutivo (*evolving algorithm*) de um algoritmo evolucionário (*evolutionary algorithm*). Em inteligência computacional, os algoritmos evolucionários, tais como os algoritmos genéticos (GOLDBERG, 1989), a programação genética (KOZA, 1992) e o sistema imunológico artificial (KEPHART, 1994), são algoritmos computacionais fortemente inspirados na teoria da evolução natural. Eles frequentemente utilizam uma busca aleatória “direcionada” para resolver problemas de otimização formulados de forma flexível. Eles imitam um aspecto específico da evolução natural relacionado à evolução genética baseada em população, que é impulsionada por mecanismos como mutação (*mutation*), cruzamento cromossômico (*crossover*), reprodução (*reproduction*), e seleção (*selection*), além de possuir o aspecto do autodesenvolvimento dos indivíduos (ANGELOV, 2013). Apesar das similaridades na nomenclatura, os algoritmos

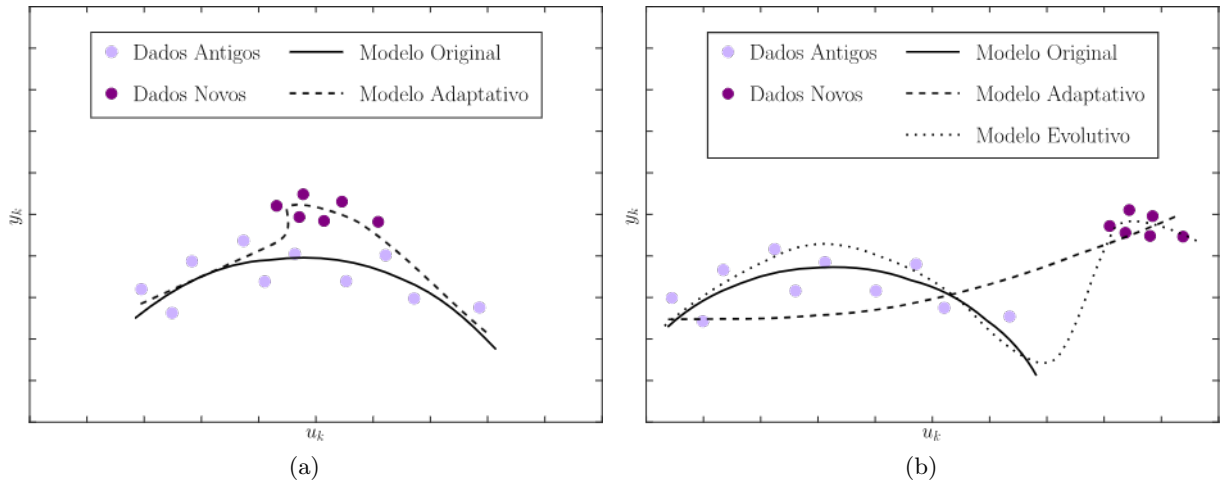


Figura 3 – Ilustração da diferença entre modelos adaptativos e modelos evolutivos no contexto de modelagem de dados, em que u_k é a variável de entrada dos modelos, y_k é a variável de saída dos modelos, os dados antigos são ilustrados em “pontos lilás”, os dados novos em “pontos roxos”, o modelo original em “linha preta”, o modelo adaptativo em “linha tracejada preta”, e o modelo evolutivo em “linha pontilhada preta”. (a) Caso em que a presença de novos dados resulta apenas na adaptação de parâmetros do modelo para manter uma boa aproximação; (b) Caso em que uma evolução da estrutura do modelo é necessária para manter uma boa aproximação com a presença de novas amostras de dados. Fonte: Adaptado de Lughofer (2011a).

evolucionários diferem significativamente do conceito de algoritmos evolutivos. Enquanto o termo “evolucionário” está relacionado a populações de indivíduos e à hereditariedade de “pais” para “filhos”, o termo “evolutivo” está relacionado ao autodesenvolvimento de sistemas individuais, aprendizagem por meio de experiência, mudanças graduais, geração de conhecimento a partir de rotinas de operação, e extração de regras a partir de dados (ANGELOV, 2013).

É importante entender de que forma um sistema evolutivo pode evoluir a sua estrutura. Por exemplo, no contexto da estrutura de um sistema de inferência nebuloso baseado em regras (FRB - *Fuzzy Ruled-Based*), um sistema de inferência FRB evolutivo aprende novas regras nebulosas a partir de novos dados de maneira gradual, preservando a maioria das regras nebulosas aprendidas até o momento atual (ANGELOV, 2002). Destaca-se que não se trata de apenas modificar os parâmetros de uma regra nebulosa, como os parâmetros das funções de pertinência na proposição antecedente ou os parâmetros dos modelos de saída das regras na proposição consequente, mas também de aumentar ou até mesmo diminuir a base de regras nebulosas de acordo com a necessidade do modelo diante do fluxo de dados de entrada.

Com relação a algoritmos de agrupamento, tem-se que métodos de agrupamento evolutivo diferem dos métodos em batelada pelo fato de que o número de grupos pode evoluir, ou seja, crescer ou diminuir, à medida que o algoritmo recebe novas informações em fluxo de dados (ANGELOV, 2013). Assim, algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo se tornam úteis neste contexto de fluxos de dados e de aprendizagem *online*, como na identificação autônoma da base de conhecimento de sistemas de inferência nebulosos

evolutivos, que vêm a ter significantes aplicações em campos como controle não linear adaptativo, detecção e diagnóstico de falhas, análise de performance, previsão, extração de conhecimento, robótica e modelagem de comportamento (ANGELOV; FILEV, 2004).

Os parâmetros iniciais de algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo podem ser definidos a partir de uma estimação em batelada preliminar com um conjunto de dados de inicialização do sistema no qual a aprendizagem está sendo realizada (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010; ANGELOV, 2013). Neste caso, a partição nebulosa já é inicializada com uma quantidade de grupos pré-determinada pelo processamento inicial em batelada. Outra alternativa é inicializar os parâmetros do algoritmo por meio do conhecimento do especialista, usando este artifício para auxiliar o processo de aprendizagem *online*. Uma terceira opção é o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo aprender “começando do zero” (*from scratch*), completamente a partir dos dados disponibilizados em fluxo, sem nenhuma informação prévia (ANGELOV; GU, 2019).

2.4.1 Algoritmo eTS

A abordagem chamada de modelo Takagi-Sugeno evolutivo (eTS - *evolving Takagi-Sugeno*) foi apresentada originalmente em Angelov e Filev (2004), e a sua proposta não se restringe a ser apenas um algoritmo de agrupamento, mas, de maneira mais abrangente, é uma abordagem para aprendizagem *online* de modelos nebulosos do tipo Takagi-Sugeno. O modelo nebuloso dessa abordagem possui a sua estrutura antecedente, que diz respeito aos conjuntos nebulosos e funções de pertinência na proposição antecedente das regras nebulosas, construída pelo seu próprio algoritmo de agrupamento nebuloso, e também possui a sua estrutura consequente, que diz respeito às funções lineares na proposição consequente das regras nebulosas que relacionam a saída de cada regra com as entradas do modelo, em que os parâmetros dessas funções são identificados por meio do algoritmo de mínimos quadrados recursivo ponderado nebuloso (RFWLS - *Recursive Fuzzily Weighted Least Squares*).

Assim, o modelo eTS não consiste apenas de um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, mas toda uma abordagem de identificação de um sistema de inferência nebuloso evolutivo do tipo Takagi-Sugeno, na qual o algoritmo de agrupamento é uma parte integrante. Tanto os grupos produzidos na estrutura antecedente quanto os parâmetros da estrutura consequente se adaptam e evoluem à medida que o modelo interpreta, a partir dos dados, que deve-se atualizar ou criar regras nebulosas. Nesse contexto, regras e grupos (*clusters*) estão muito bem associados, visto que o antecedente de cada regra nebulosa possui um conjunto nebuloso (grupo) correspondente, de modo que a quantidade de grupos é igual à quantidade de regras. O algoritmo de agrupamento do modelo eTS, também

chamado pelo próprio autor de método *eClustering*³ (ANGELOV, 2004a), é baseado no algoritmo de agrupamento subtrativo, podendo ser considerado a sua versão evolutiva, mas diferindo significativamente do mesmo e apenas inspirando-se na sua ideia principal, que é a computação de um potencial para cada amostra de dado, o qual é baseado em uma função de densidade (ANGELOV, 2013).

Para um conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ cujos dados $\mathbf{x}_k \big|_{k=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^n$ são disponibilizados em fluxo, onde $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas do conjunto de dados $\mathbf{X}$, e $N \in \mathbb{N}^*$ é o número de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, o procedimento *online* do algoritmo eTS inicializa a partir do primeiro dado $\mathbf{x}_1$, de modo que o primeiro centro de grupo $\mathbf{c}_1^1 \in \mathbb{R}^n$ na primeira amostra é $\mathbf{c}_1^1 = \mathbf{x}_1$, e o número de grupos $R_1 \in \mathbb{N}^*$ na primeira amostra é $R_1 = 1$. Assim, o algoritmo é capaz de inicializar sem nenhuma informação *a priori*. O potencial $P_1^{\mathbf{c}_1^1} \in [0, 1]$ do primeiro centro de grupo $\mathbf{c}_1^1$ na primeira amostra é unitário: $P_1^{\mathbf{c}_1^1} = 1$ (ANGELOV; FILEV, 2004).

2.4.1.1 Computação de Potencial

A computação de potencial no algoritmo eTS é realizada através da função de Cauchy de primeira ordem (ANGELOV, 2004a), dada por:

$$P_k^{\mathbf{x}_k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^n (x_k^l - x_j^l)^2}, \quad (2.45)$$

em que $P_k^{\mathbf{x}_k} \in [0, 1]$ é o potencial do dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra, e $x_k^l \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$. Na Equação (2.45), tem-se que quanto mais dados anteriores $\mathbf{x}_j \big|_{j=1, \dots, k-1}$ estiverem próximos ao dado $\mathbf{x}_k$, menores são os valores de $(x_k^l - x_j^l)^2$, e conseqüentemente maior é valor do potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$. Em contrapartida, quanto mais dados anteriores $\mathbf{x}_j \big|_{j=1, \dots, k-1}$ estiverem distantes do dado $\mathbf{x}_k$, maiores são os valores de $(x_k^l - x_j^l)^2$, e conseqüentemente menor é valor do potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$. Logo, o potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$ é computado de acordo com a densidade de $\mathbf{x}_k$ em relação a todos os dados anteriores $\mathbf{x}_j \big|_{j=1, \dots, k-1}$.

A principal motivação para a escolha da função de Cauchy dada pela Equação (2.45) para o cálculo do potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$ é que, além de ser monotônica e inversamente proporcional à distância $(x_k^l - x_j^l)$, ela habilita cálculo recursivo, o que é interessante para a implementação de um algoritmo de aprendizagem *online*. A computação recursiva do potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$ do dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra pode ser realizada, conforme prova apresentada em Angelov e Filev (2004), por meio da seguinte expressão:

$$P_k^{\mathbf{x}_k} = \frac{k-1}{(k-1)(\vartheta_k + 1) + \varsigma_k - 2v_k}, \quad (2.46)$$

³ Nesta dissertação, o algoritmo de agrupamento *eClustering* do modelo eTS é chamado simplesmente de algoritmo eTS (*eTS algorithm*), nome que é amplamente adotado na literatura.

em que $\vartheta_k \in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\vartheta_k = \sum_{l=1}^n (x_k^l)^2, \quad (2.47)$$

$\varsigma_k \in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\varsigma_k = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^n (x_j^l)^2, \quad (2.48)$$

$v_k \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$v_k = \sum_{l=1}^n x_k^l \beta_k^l, \quad (2.49)$$

e os valores $\beta_k^l \Big|_{l=1, \dots, n} \in \mathbb{R}$ são dados por:

$$\beta_k^l = \sum_{j=1}^{k-1} x_j^l \quad (2.50)$$

As variáveis ϑ_k e v_k são calculadas, nas Equações (2.47) e (2.49), para o dado atual $\mathbf{x}_k$, enquanto que ς_k e $\beta_k^l \Big|_{l=1, \dots, n}$ nas Equações (2.48) e (2.50) são calculados recursivamente pelas seguintes expressões (ANGELOV; FILEV, 2004):

$$\varsigma_k = \varsigma_{k-1} + \sum_{l=1}^n (x_{k-1}^l)^2, \quad (2.51)$$

$$\beta_k^l = \beta_{k-1}^l + x_{k-1}^l, \quad (2.52)$$

em que $\varsigma_1 = 0$ e $\beta_1^l = 0, \forall l \in \{1, \dots, n\}$.

Quando um novo dado $\mathbf{x}_k$ é disponibilizado em fluxo, ele influencia os potenciais dos dados anteriores $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k-1}$, pois idealmente, o potencial de cada dado $\mathbf{x}_j$ depende da sua distância a todos os demais dados, incluindo os dados posteriores a $\mathbf{x}_j$. Entretanto, os potenciais dos dados anteriores $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k-1}$ não são relevantes para o algoritmo eTS, e somente é computada a influência do dado atual $\mathbf{x}_k$ sobre os potenciais dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ existentes na amostra atual k . Os potenciais $P_k^{\mathbf{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos R_k centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são computados recursivamente no fluxo de dados $\mathbf{X}$ através da seguinte expressão (ANGELOV; FILEV, 2004):

$$P_k^{\mathbf{c}_k^i} = \frac{(k-1)P_{k-1}^{\mathbf{c}_{k-1}^i}}{k-2 + P_{k-1}^{\mathbf{c}_{k-1}^i} + P_{k-1}^{\mathbf{c}_{k-1}^i} \sum_{l=1}^n (x_k^l - c_k^{i,l})^2}, \quad (2.53)$$

em que $c_k^{i,l} \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra.

2.4.1.2 Atualização de Grupos

O algoritmo realiza uma comparação entre o potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$ do dado $\mathbf{x}_k$ e os potenciais $P_k^{\mathbf{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra, de acordo com a seguinte condição:

$$P_k^{\mathbf{x}_k} > \max_{i=1, \dots, R_k} (P_k^{\mathbf{c}_k^i}) \quad (2.54)$$

Se a condição em (2.54) for satisfeita, então considera-se que o dado $\mathbf{x}_k$ é descritivo em relação ao fluxo de dados $\mathbf{X}$, de modo que $\mathbf{x}_k$ é selecionado como centro de grupo. Duas possibilidades são consideradas, em que o dado $\mathbf{x}_k$ pode se tornar o centro do grupo mais próximo a ele ou o centro de um novo grupo. Para esta tomada de decisão, a seguinte condição é analisada:

$$\frac{P_k^{\mathbf{x}_k}}{\max_{i=1,\dots,R_k} \left(P_k^{c_k^i} \right)} - \frac{\kappa_k}{\tilde{r}} \geq 1 \quad (2.55)$$

em que $\tilde{r} \in \mathbb{R}_+^*$ é um parâmetro chamado de raio de influência dos grupos, e $\kappa_k \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$\kappa_k = \min_{i=1,\dots,R_k} \left(\left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^i \right\| \right) \quad (2.56)$$

é a menor distância entre o dado $\mathbf{x}_k$ e os R_k centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra. Se a condição em (2.55) for satisfeita juntamente com a condição em (2.54), então o dado $\mathbf{x}_k$ substitui o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i^*}$ mais próximo, onde o índice i^* é dado por:

$$i^* = \arg \min_{i=1,\dots,R_k} \left(\left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^i \right\| \right) \quad (2.57)$$

Dessa forma, o centro $\mathbf{c}_k^{i^*}$ do i^* -ésimo grupo $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra é atualizado por:

$$\mathbf{c}_k^{i^*} = \mathbf{x}_k, \quad (2.58)$$

e o potencial $P_k^{c_k^{i^*}}$ do i^* -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra é atualizado por:

$$P_k^{c_k^{i^*}} = P_k^{\mathbf{x}_k} \quad (2.59)$$

Na condição apresentada em (2.55), tem-se que a razão entre $P_k^{\mathbf{x}_k}$ e $\max_{i=1,\dots,R_k} \left(P_k^{c_k^i} \right)$ é maior que 1, uma vez que essa condição é analisada para dados $\mathbf{x}_k$ que satisfazem a condição em (2.54). Dessa forma, tem-se na condição em (2.55) que se a distância κ_k do dado $\mathbf{x}_k$ para o centro de grupo mais próximo $\mathbf{c}_k^{i^*}$ for pequena o suficiente para que a expressão à esquerda da desigualdade em (2.55) permaneça maior ou igual a 1, então considera-se que o dado $\mathbf{x}_k$ está dentro da zona de influência do centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i^*}$, e em consequência o i^* -ésimo grupo $\Theta_k^{i^*}$ é atualizado na k -ésima amostra conforme as Equações (2.58)-(2.59). Esse mecanismo faz uma simples adaptação de um grupo, sendo chamado de modificação do conjunto de grupos (ou modificação da base de regras) (ANGELOV; FILEV, 2004).

2.4.1.3 Criação de Grupos

Se a condição em (2.55) não for satisfeita, então o dado $\mathbf{x}_k$, o qual foi selecionado como centro de grupo em (2.54), não está na zona de influência de nenhum centro de

grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ existente na k -ésima amostra, e um novo grupo é criado a partir do dado $\mathbf{x}_k$, de modo que o número de grupos R_k na k -ésima amostra é incrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k + 1 \quad (2.60)$$

O novo centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathbf{c}_k^{R_k} = \mathbf{x}_k, \quad (2.61)$$

e o potencial $P_k^{c_k^{R_k}}$ do novo centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$P_k^{c_k^{R_k}} = P_k^{\mathbf{x}_k} \quad (2.62)$$

2.4.1.4 Computação dos Graus de Pertinência

O algoritmo eTS adota a função de pertinência do tipo gaussiana, dada por:

$$\mu_k^{i,l} = e^{-\tilde{\pi} \|x_k^l - c_k^{i,l}\|^2}, \quad (2.63)$$

onde $\mu_k^{i,l} \in [0, 1]$ é o grau de pertinência da l -ésima variável x_k^l do dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, $c_k^{i,l}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\tilde{\pi} \in \mathbb{R}_+^*$ é dado por:

$$\tilde{\pi} = \frac{4}{\tilde{r}^2}, \quad (2.64)$$

em que $\tilde{r}$ é o parâmetro de raio de influência dos grupos apresentado na Equação (2.55). Os graus de ativação $\tau_k^i \mid i=1, \dots, R_k \in [0, 1]$ dos R_k grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ na k -ésima amostra são então computados através da interseção (norma⁴ T) dos conjuntos nebulosos associados a cada grupo, como dado por:

$$\tau_k^i = \bigcap_{l=1}^n \mu_k^{i,l} = \mu_k^{i,1} \times \dots \times \mu_k^{i,n} \quad (2.65)$$

Os graus de ativação $\tau_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ são então utilizados no processo de inferência do modelo eTS (ANGELOV; FILEV, 2004).

2.4.1.5 Implementação do Algoritmo eTS

De acordo com Angelov e Filev (2004), a abordagem do algoritmo eTS garante que o conjunto de grupos evolua dinamicamente com modificações amenas, pois a cada amostra, a maior parte dos grupos não são alterados, seja em uma modificação do conjunto de grupos, seja em uma criação de novo grupo. Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo eTS podem ser vistos no Algoritmo 2.5.

⁴ No algoritmo eTS, a norma T aplicada aos conjuntos nebulosos é computada a partir do produto dos seus graus de pertinência, conforme Equação (2.65).

Algoritmo 2.5: Algoritmo eTS.

Entrada: Conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$ e raio de influência $\tilde{r}$;
Saída: Grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e graus de pertinência $\mu_k^{i,l} \mid i=1, \dots, R_k, l=1, \dots, n$ a cada amostra k ;

- 1 Inicializar o primeiro grupo Θ_1^1 com centro $\mathbf{c}_1^1 = \mathbf{x}_1$ e potencial $P_1^{\mathbf{c}_1^1} = 1$;
- 2 Fazer $R_1 = 1$;
- 3 Fazer $k = 2$;
- 4 **enquanto** o dado $\mathbf{x}_k$ estiver disponível, **faça**
- 5 Atualizar R_{k-1} e $\mathbf{c}_{k-1}^i \mid i=1, \dots, R_{k-1}$ para a k -ésima amostra: $R_k = R_{k-1}$,
 $\mathbf{c}_k^i = \mathbf{c}_{k-1}^i$;
- 6 Calcular o potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$ usando a Equação (2.46);
- 7 Calcular os potenciais $P_k^{\mathbf{c}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ pela Equação (2.53);
- 8 **se** a condição em (2.54) for satisfeita, **então**
- 9 **se** a condição em (2.55) for satisfeita, **então**
- 10 Atualizar $\mathbf{c}_k^{i*}$ usando a Equação (2.58);
- 11 Atualizar $P_k^{\mathbf{c}_k^{i*}}$ usando a Equação (2.59);
- 12 **senão**
- 13 Atualizar R_k usando a Equação (2.60);
- 14 Calcular $\mathbf{c}_k^{R_k}$ pela Equação (2.61);
- 15 Calcular $P_k^{\mathbf{c}_k^{R_k}}$ pela Equação (2.62);
- 16 **fim**
- 17 **fim**
- 18 Calcular $\mu_k^{i,l} \mid i=1, \dots, R_k, l=1, \dots, n$ e $\tau_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pelas Equações (2.63) e (2.65);
- 19 Fazer $k \leftarrow k + 1$;
- 20 **fim**

O algoritmo eTS se caracteriza por adaptar a abordagem de potencial de dados, presente no algoritmo de agrupamento subtrativo, para o contexto evolutivo, realizando todo o procedimento de forma totalmente recursiva por meio da função de Cauchy apresentada na Equação (2.45). Essa característica torna o eTS um algoritmo rápido, o que é interessante para fluxos contínuos de dados. Um aspecto a se destacar no algoritmo eTS original proposto em Angelov e Filev (2004) é que ele não apresenta mecanismos para simplificação do conjunto de grupos, de modo que o número de grupos R_k a cada amostra pode apenas aumentar ou permanecer igual.

2.4.2 Algoritmo eTS+

A partir da criação do algoritmo eTS, o mesmo passou a ser otimizado em diversos aspectos, realizando a simplificação de procedimentos e acrescentando novas ferramentas e critérios. Uma versão mais simplificada, chamada de Simpl_eTS (*Simplified evolving Takagi-Sugeno*), foi proposta em Angelov e Filev (2005), tornando o procedimento de cálculo

de potencial mais eficiente computacionalmente, ao combinar o conceito de densidade de dados com o de dispersão. Além disso, para representar a estacionariedade dos grupos, o algoritmo também introduz o conceito de idade dos grupos, que é determinada pelo tempo relativo desde o fornecimento das últimas amostras de dados que pertencem aos mesmos. Também é definido o conceito de população de um grupo, que é uma medida da representatividade desse grupo perante todo o conjunto de dados, da qual o algoritmo utiliza um critério para simplificação do conjunto de grupos, introduzindo a ideia de que se um grupo se tornar irrelevante no contexto dos dados, conforme o critério especificado pelo algoritmo Simpl_eTS, o mesmo pode ser removido da partição nebulosa.

Em Angelov e Zhou (2006) foi proposta mais uma modificação do algoritmo eTS chamada de algoritmo xTS (*extended Takagi-Sugeno*). Este algoritmo combina sistemas nebulosos do tipo Takagi-Sugeno de ordem zero e de primeira ordem, com os grupos evoluindo sem nenhuma informação prévia a partir da distribuição dos dados no espaço de entrada e saída. O algoritmo xTS implementa um raio de grupo adaptativo que é atualizado recursivamente de acordo com a distribuição, variância e dispersão dos dados associados a cada grupo. Além disso, é acrescentada uma nova condição com o objetivo de substituir grupos e excluir regras contraditórias. O algoritmo xTS também apresenta uma formulação aprimorada das funções de pertinência nebulosa, refletindo melhor a distribuição gaussiana normal. Por fim, também é introduzida uma medida de qualidade dos grupos em tempo real, chamada de suporte dos grupos. O suporte de um grupo específico se refere à quantidade de dados mais próximos do seu centro em relação aos demais centros de grupo.

Os avanços foram realizados com o passar do tempo, resultando em uma versão robusta, flexível e autônoma do eTS, chamada de algoritmo Takagi-Sugeno evolutivo *plus* (eTS+ - *evolving Takagi-Sugeno plus*), proposta em Angelov (2010). O algoritmo eTS+ possui a estrutura inicial do algoritmo eTS, mas com diversos incrementos que melhoram o seu desempenho. No algoritmo eTS+, o autor define os objetivos do particionamento do espaço de dados, direcionado para o projeto de sistemas de inferência nebulosos, que são formulados como segue (ANGELOV, 2010):

1. Formar grupos representativos com alta capacidade de generalização.
2. Garantir que as funções de pertinência dos conjuntos nebulosos formadas ao redor dos protótipos dos grupos cubram todo o espaço de dados.
3. Determinar o número de grupos somente a partir da distribuição dos dados.
4. Simplificar a estrutura removendo grupos menos representativos à medida que o padrão de dados evolui.
5. Evitar qualquer parâmetro de limite específico do problema ou do usuário.

2.4.2.1 Computação de Potencial

De acordo com Angelov (2010), para alcançar o primeiro objetivo, os centros de grupo são selecionados a partir de dados com alto valor de densidade, por meio do uso da função de potencial de Cauchy de primeira ordem:

$$P_k^{x_k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^n (x_k^l - x_j^l)^2}, \quad (2.66)$$

em que $P_k^{x_k} \in [0, 1]$ é o potencial do dado $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ na k -ésima amostra, $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas do conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ disponibilizado em fluxo, $N \in \mathbb{N}^*$ é o número de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, e $x_k^l \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$. O potencial $P_k^{x_k}$ do dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra pode ser computado recursivamente, a partir da função apresentada na Equação (2.66), por meio da seguinte expressão:

$$P_k^{x_k} = \frac{k-1}{(k-1)(\vartheta_k + 1) + \varsigma_k - 2v_k}, \quad (2.67)$$

em que $\vartheta_k \in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\vartheta_k = \sum_{l=1}^n (x_k^l)^2, \quad (2.68)$$

$\varsigma_k \in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\varsigma_k = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^n (x_j^l)^2, \quad (2.69)$$

$v_k \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$v_k = \sum_{l=1}^n x_k^l \beta_k^l, \quad (2.70)$$

e os valores $\beta_k^l \Big|_{l=1, \dots, n} \in \mathbb{R}$ são dados por:

$$\beta_k^l = \sum_{j=1}^{k-1} x_j^l \quad (2.71)$$

As variáveis ϑ_k e v_k são calculadas, nas Equações (2.68) e (2.70), para o dado atual $\mathbf{x}_k$, enquanto que ς_k e $\beta_k^l \Big|_{l=1, \dots, n}$ nas Equações (2.69) e (2.71) são calculados recursivamente pelas seguintes expressões (ANGELOV, 2010):

$$\varsigma_k = \varsigma_{k-1} + \sum_{l=1}^n (x_{k-1}^l)^2, \quad (2.72)$$

$$\beta_k^l = \beta_{k-1}^l + x_{k-1}^l, \quad (2.73)$$

em que $\varsigma_1 = 0$ e $\beta_1^l = 0, \forall l \in \{1, \dots, n\}$.

No fluxo de dados $\mathbf{X}$, os potenciais $P_k^{\mathbf{c}_k^i} \mid_{i=1,\dots,R_k} \in [0, 1]$ dos $R_k \in \mathbb{N}^*$ centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k} \in \mathbb{R}^n$ na k -ésima amostra são computados recursivamente através da seguinte expressão (ANGELOV, 2010):

$$P_k^{\mathbf{c}_k^i} = \frac{(k-1)P_{k-1}^{\mathbf{c}_{k-1}^i}}{k-2 + P_{k-1}^{\mathbf{c}_{k-1}^i} + P_{k-1}^{\mathbf{c}_{k-1}^i} \sum_{l=1}^n (x_k^l - c_k^{i,l})^2}, \quad (2.74)$$

em que $c_k^{i,l} \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra.

2.4.2.2 Computação dos Graus de Pertinência

De acordo com Angelov (2010), o segundo objetivo é satisfeito com o uso de funções de pertinência nebulosa do tipo gaussiana, dadas por:

$$\mu_k^{i,l} = e^{-\frac{(x_k^l - c_k^{i,l})^2}{2(\sigma_{k-1}^{i,l})^2}}, \quad (2.75)$$

em que $\mu_k^{i,l} \in [0, 1]$ é o grau de pertinência da l -ésima variável x_k^l do dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, $c_k^{i,l}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\sigma_{k-1}^{i,l} \in \mathbb{R}$ é o desvio padrão na $(k-1)$ -ésima amostra associado à l -ésima coordenada do i -ésimo grupo Θ_k^i . De acordo com Angelov (2010), os valores de pertinência $\mu_k^{i,l}$ fora da chamada zona 2σ (HASTIE; TIBSHIRANI; FRIEDMAN, 2009), ou seja, uma zona delimitada pelos desvios padrão das gaussianas, são muito pequenos e podem ser desconsiderados. O algoritmo denota como o número de dados externos $\tilde{N}_k \in \mathbb{N}$ a quantidade de dados que está fora da zona 2σ de todos os grupos na k -ésima amostra, ou seja, a seguinte condição é analisada (ANGELOV, 2010):

$$|x_k^l - c_k^{i,l}| > 2\sigma_{k-1}^{i,l}, \forall i \in \{1, \dots, R_k\}, \forall l \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.76)$$

de modo que se a condição em (2.76) for satisfeita, então o número de dados externos $\tilde{N}_k$ na k -ésima amostra é incrementado em relação à amostra anterior:

$$\tilde{N}_k = \tilde{N}_{k-1} + 1, \quad (2.77)$$

e se a condição em (2.76) não for satisfeita, então o número de dados externos $\tilde{N}_k$ na k -ésima amostra permanece inalterado em relação à amostra anterior:

$$\tilde{N}_k = \tilde{N}_{k-1} \quad (2.78)$$

Os graus de ativação $\tau_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k} \in [0, 1]$ dos R_k grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra são computados através da interseção (norma⁵ T) dos conjuntos nebulosos associados a cada grupo, como dado por:

$$\tau_k^i = \bigcap_{l=1}^n \mu_k^{i,l} = \mu_k^{i,1} \times \dots \times \mu_k^{i,n} \quad (2.79)$$

⁵ No algoritmo eTS+, a norma T aplicada aos conjuntos nebulosos é computada a partir do produto dos seus graus de pertinência, conforme Equação (2.79).

2.4.2.3 Criação de Grupos

De acordo com Angelov (2010), para alcançar o terceiro objetivo, o algoritmo eTS+ determina algumas condições para adição e remoção de grupos a partir da distribuição dos dados. A primeira condição, chamada de $\mathcal{A}_1$, proposta pelo algoritmo eTS+ para a criação de um novo grupo a cada amostra, é dada por:

$$\tilde{\eta}_k P_k^{x_k} > \max_{i=1, \dots, R_k} \left(P_k^{c_k^i} \right), \quad (2.80)$$

em que $P_k^{x_k}$ é o potencial do dado x_k na k -ésima amostra, $P_k^{c_k^i}$ é o potencial do i -ésimo centro de grupo c_k^i na k -ésima amostra, e $\tilde{\eta}_k \in \mathbb{R}_+$ dado por

$$\tilde{\eta}_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu_k^{i,l} > e^{-2}, \forall i \in \{1, \dots, R_k\}, \forall l \in \{1, \dots, n\}, \\ \frac{\tilde{N}_k - 3}{\log k}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.81)$$

é chamado de número normalizado de pontos externos na k -ésima amostra. Quanto maior o valor de $\tilde{\eta}_k$, mais fácil é a criação de um novo grupo pela condição apresentada em (2.80).

A segunda condição, chamada de $\mathcal{A}_2$, proposta pelo algoritmo eTS+ para a criação de um novo grupo a cada amostra, foi apresentada originalmente em Angelov et al. (2004), e é dada por:

$$P_k^{x_k} > \max_{i=1, \dots, R_k} \left(P_k^{c_k^i} \right) \quad \text{OU} \quad P_k^{x_k} < \min_{i=1, \dots, R_k} \left(P_k^{c_k^i} \right) \quad (2.82)$$

De acordo com Angelov (2010), a condição $\mathcal{A}_1$ apresentada em (2.80) pode ter problemas para detectar grupos emergentes em uma localização distante da maior parte dos dados. Em comparação, a condição $\mathcal{A}_2$ apresentada em (2.82) permite uma melhor cobertura do espaço de dados, e cria grupos com mais facilidade que a condição $\mathcal{A}_1$, porém aumenta as chances de *outliers* se tornarem centros de grupo. Os centros indesejados podem ser removidos ou alterados com os indicadores de qualidade do algoritmo eTS+, o que acarreta também o aumento das alterações no conjunto de grupos.

Se a condição selecionada⁶ para criação de um novo grupo for satisfeita, então o número de grupos R_k na k -ésima amostra é incrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k + 1 \quad (2.83)$$

O novo centro de grupo $c_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$c_k^{R_k} = x_k, \quad (2.84)$$

e o potencial $P_k^{c_k^{R_k}}$ do novo centro de grupo $c_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$P_k^{c_k^{R_k}} = P_k^{x_k} \quad (2.85)$$

⁶ No algoritmo eTS+, o usuário seleciona entre a condição $\mathcal{A}_1$ apresentada em (2.80) e a condição $\mathcal{A}_2$ apresentada em (2.82) para a criação de um novo grupo a cada amostra.

2.4.2.4 Remoção de Grupos

Quando um novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ é criado na k -ésima amostra, tem-se que o algoritmo eTS+ utiliza uma condição $\mathcal{B}$ para redução do número de grupos, que visa evitar qualquer redundância e ter controle sobre o nível de sobreposição das funções de pertinência dos grupos. A condição $\mathcal{B}$ foi proposta inicialmente no algoritmo xTS (ANGELOV; ZHOU, 2006), sendo dada por:

$$\exists i \in \{1, \dots, R_k\} : \mu_k^{i,l} > e^{-1}, \forall l \in \{1, \dots, n\} \quad (2.86)$$

A condição $\mathcal{B}$ em (2.86) ser satisfeita indica que o centro de grupo recém criado $\mathbf{c}_k^{R_k} = \mathbf{x}_k$ descreve o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i^*}$ em um certo grau, onde i^* é o índice do grupo para o qual a condição $\mathcal{B}$ é satisfeita. O algoritmo então remove grupo $\Theta_k^{i^*}$ e diminui o número de grupos R_k :

$$R_k \leftarrow R_k - 1, \quad (2.87)$$

eliminando a redundância.

De acordo com Angelov (2010), para alcançar o quarto objetivo, o algoritmo eTS+ monitora constantemente a qualidade dos grupos formados, a fim de simplificar a estrutura removendo grupos menos representativos. Uma variável utilizada para descrever a qualidade dos grupos é o suporte, que representa o número de dados que é associado a cada grupo, e indica o poder de generalização de um grupo. Ele foi proposto inicialmente no Simpl_eTS (ANGELOV; FILEV, 2005), e é atualizado para um grupo $\Theta_k^{i^*}$ específico à cada amostra como segue:

$$S_k^{i^*} = S_{k-1}^{i^*} + 1, \quad (2.88)$$

em que $S_k^{i^*} \in \mathbb{N}$ é o suporte do i^* -ésimo grupo $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, e i^* dado por

$$i^* = \arg \max_{i=1, \dots, R_k} (\tau_k^i) \quad (2.89)$$

é o índice do grupo $\Theta_k^{i^*}$ associado ao dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra, em que τ_k^i é o grau de ativação do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra dado pela Equação (2.79). Para os demais grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$, os suportes $S_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$S_k^i = S_{k-1}^i \quad (2.90)$$

Outro indicador de qualidade dos grupos é a sua idade, que é uma indicação do tempo acumulado relativo dos mesmos, apresentada em Angelov e Filev (2005), Angelov e Zhou (2006), e definida por:

$$\mathcal{A}_k^i = k - \mathcal{B}_k^i, \quad (2.91)$$

em que $\mathcal{A}_k^i \in \mathbb{R}_+$ é a idade do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, e $\mathcal{B}_k^i \in \mathbb{R}_+$ dado por

$$\mathcal{B}_k^i = \frac{1}{S_k^i} \sum_{j=1}^{S_k^i} K_j^i \quad (2.92)$$

é a data de nascimento dinâmica do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, dada pelo valor médio das amostras $K_j^i \big|_{j=1, \dots, S_k^i} \in \mathbb{N}^*$ dos S_k^i dados $\mathbf{x}_{K_j^i} \big|_{j=1, \dots, S_k^i}$ associados a Θ_k^i conforme a Equação (2.89). Tem-se que a idade $\mathcal{A}_k^i$ do grupo Θ_k^i é igual, pela Equação (2.91), à amostra atual k subtraída da data de nascimento dinâmica $\mathcal{B}_k^i$ de Θ_k^i . A idade do grupo indica o quão atuais são as informações generalizadas por esse grupo e, baseado nela, pode-se simplificar a estrutura dos grupos ao se remover grupos com alta idade (ANGELOV, 2010). Além disso, com base na dinâmica da idade de um grupo, também é possível detectar mudanças e desvios na mesma, conforme feito em Angelov e Zhou (2008b). A data de nascimento dinâmica $\mathcal{B}_k^{i^*}$ do i^* -ésimo grupo $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra pode ser calculada recursivamente por:

$$\mathcal{B}_k^{i^*} = \frac{S_{k-1}^{i^*}}{S_k^{i^*}} \mathcal{B}_{k-1}^{i^*} + \frac{1}{S_k^{i^*}} k, \quad (2.93)$$

em que i^* é o índice do grupo $\Theta_k^{i^*}$ que satisfaz a Equação (2.89). Para os demais grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$, os valores $\mathcal{B}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$\mathcal{B}_k^i = \mathcal{B}_{k-1}^i \quad (2.94)$$

Outro indicador de qualidade é o grau de ativação relativo acumulado dos grupos, chamado de utilidade dos grupos, dado por (ANGELOV, 2010):

$$\mathcal{U}_k^i = \frac{1}{k - I^i} \sum_{j=I^i+1}^k \tilde{\zeta}_j^i, \quad (2.95)$$

em que $\mathcal{U}_k^i \in [0, 1]$ é a utilidade do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, que mede o quanto um grupo foi utilizado desde que foi criado, $I^i \in \mathbb{N}^*$ é a amostra de criação do i -ésimo grupo Θ_k^i , e $\tilde{\zeta}_j^i \in [0, 1]$ é o grau de ativação normalizado do i -ésimo grupo Θ_j^i na j -ésima amostra, dado por:

$$\tilde{\zeta}_j^i = \frac{\tau_j^i}{R_j} \quad (2.96)$$

As utilidades $\mathcal{U}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos R_k grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são calculadas recursivamente por:

$$\mathcal{U}_k^i = \frac{(k-1) - I^i}{k - I^i} \mathcal{U}_{k-1}^i + \frac{1}{k - I^i} \tilde{\zeta}_k^i \quad (2.97)$$

Com base nas medidas de qualidade dos grupos dadas pelas Equações (2.88), (2.91) e (2.97), o algoritmo eTS+ pode simplificar o conjunto de grupos à medida que o fluxo de

dados evolui, removendo, por exemplo, grupos que ficaram, com o passar do tempo, com alta idade, com baixo suporte, ou com baixa utilidade (ANGELOV, 2010). O algoritmo eTS+ apresenta a seguinte condição de remoção de grupos baseada nas suas utilidades $\mathcal{U}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, intitulada de condição $\mathcal{C}_1$:

$$\mathcal{U}_k^i < \frac{1}{R_k} \sum_{j=1}^{R_k} (\mathcal{U}_k^j) - \sqrt{\frac{1}{R_k} \sum_{j=1}^{R_k} \left(\mathcal{U}_k^j - \frac{1}{R_k} \sum_{l=1}^{R_k} (\mathcal{U}_k^l) \right)^2}, \quad (2.98)$$

a qual é satisfeita para o grupo Θ_k^{i*} cuja utilidade $\mathcal{U}_k^{i*}$ na k -ésima amostra é menor que a diferença entre a média das utilidades $\mathcal{U}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ e o desvio padrão das utilidades $\mathcal{U}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$. Portanto, o grupo Θ_k^{i*} que satisfaz a condição $\mathcal{C}_1$ apresentada em (2.98) é removido do conjunto de grupos, de modo que o número de grupos R_k na k -ésima amostra é decrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k - 1 \quad (2.99)$$

O algoritmo eTS+ apresenta a seguinte condição de remoção de grupos baseada nas suas idades $\mathcal{A}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, intitulada de condição $\mathcal{C}_2$:

$$\mathcal{A}_k^i > \frac{1}{R_k} \sum_{j=1}^{R_k} (\mathcal{A}_k^j) + \sqrt{\frac{1}{R_k} \sum_{j=1}^{R_k} \left(\mathcal{A}_k^j - \frac{1}{R_k} \sum_{l=1}^{R_k} (\mathcal{A}_k^l) \right)^2}, \quad (2.100)$$

a qual é satisfeita para o grupo Θ_k^{i*} cuja idade $\mathcal{A}_k^{i*}$ na k -ésima amostra é maior que a soma da média das idades $\mathcal{A}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ com o desvio padrão das idades $\mathcal{A}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$. Portanto, o grupo Θ_k^{i*} que satisfaz a condição $\mathcal{C}_2$ apresentada em (2.100) é removido do conjunto de grupos, de modo que o número de grupos R_k na k -ésima amostra é decrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k - 1 \quad (2.101)$$

O algoritmo eTS+ apresenta a seguinte condição de remoção de grupos baseada nos seus suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, intitulada de condição $\mathcal{C}_3$:

$$k \geq I^i + 10 \quad \mathbf{E} \quad S_k^i < 3, \quad (2.102)$$

a qual é satisfeita para o grupo Θ_k^{i*} cuja amostra de criação I^{i*} é anterior às últimas dez amostras do fluxo de dados $\mathbf{X}$ e cujo suporte S_k^{i*} na k -ésima amostra é menor que 3 amostras de dados. Portanto, o grupo Θ_k^{i*} que satisfaz a condição $\mathcal{C}_3$ apresentada em (2.102) é removido do conjunto de grupos, de modo que o número de grupos R_k na k -ésima amostra é decrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k - 1 \quad (2.103)$$

2.4.2.5 Adaptação das Zonas de Influência dos Grupos

De acordo com Angelov (2010), outro indicador do poder de generalização dos grupos é chamado de densidade local, e é dado por:

$$L_k^i = \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\tilde{\nu}_k^{i,l} \right)^2}, \quad (2.104)$$

em que $L_k^i \in [0, 1]$ é a densidade local do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, e $\left(\tilde{\nu}_k^{i,l} \right)^2 \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$\left(\tilde{\nu}_k^{i,l} \right)^2 = \frac{1}{S_k^i - 1} \sum_{j=2}^{S_k^i} \left(x_{K_j^i}^l - c_{K_j^i}^{i,l} \right)^2 \quad (2.105)$$

é a dispersão local da l -ésima variável do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, onde S_k^i é o suporte do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, K_j^i é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_j^i}$ associado ao grupo Θ_k^i conforme a Equação (2.89), $x_{K_j^i}^l$ é a l -ésima coordenada do dado $\mathbf{x}_{K_j^i}$, e $c_{K_j^i}^{i,l}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_{K_j^i}^i$ na K_j^i -ésima amostra. A operação de média na Equação (2.105) desconsidera o primeiro dado $\mathbf{x}_{K_1^i}$ associado ao i -ésimo grupo Θ_k^i , uma vez que esse dado é igual ao centro do grupo $\mathbf{c}_{K_1^i}^i$ na K_1^i -ésima amostra. A diferença da formulação de densidade global dada pela Equação (2.66) para a formulação de densidade local dada pela Equação (2.104) é apenas o número de dados levados em conta no somatório, visto que na densidade global, todos os dados $\mathbf{x}_j \mid j=1, \dots, k-1$ são considerados, enquanto na densidade local, consideram-se apenas os dados $\mathbf{x}_{K_j^i} \mid j=2, \dots, S_k^i$ associados ao i -ésimo grupo Θ_k^i em termos de suporte, conforme Equação (2.105) (ANGELOV, 2010). A dispersões locais $\left(\tilde{\nu}_k^{i*,l} \right)^2 \mid l=1, \dots, n$ do i^* -ésimo grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra são calculadas recursivamente por:

$$\left(\tilde{\nu}_k^{i*,l} \right)^2 = \frac{S_{k-1}^{i*} - 1}{S_k^{i*} - 1} \left(\tilde{\nu}_{k-1}^{i*,l} \right)^2 + \frac{1}{S_k^{i*} - 1} \left(x_k^l - c_k^{i*,l} \right)^2, \quad (2.106)$$

em que i^* é o índice do grupo Θ_k^{i*} que satisfaz a Equação (2.89), S_k^{i*} é o suporte do i^* -ésimo grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, incrementado através da Equação (2.88), x_k^l é a l -ésima coordenada do dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra, e $c_k^{i*,l}$ é a l -ésima coordenada do i^* -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ na k -ésima amostra. Para os demais grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k, i \neq i^*$, as dispersões locais $\left(\tilde{\nu}_k^{i,l} \right)^2 \mid i=1, \dots, R_k, i \neq i^*, l=1, \dots, n$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$\left(\tilde{\nu}_k^{i,l} \right)^2 = \left(\tilde{\nu}_{k-1}^{i,l} \right)^2 \quad (2.107)$$

O algoritmo eTS+ incorpora um mecanismo de zona de influência adaptativa para os grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ a cada amostra. As zonas de influência dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ na k -ésima amostra são representadas pelos desvios padrão apresentados na Equação (2.75),

que se adaptam de acordo com a distribuição dos dados conforme a seguinte expressão (ANGELOV; ZHOU, 2006; ANGELOV, 2010):

$$\sigma_k^{i,l} = \alpha \sigma_{k-1}^{i,l} + (1 - \alpha) \tilde{\nu}_k^{i,l}, \quad (2.108)$$

em que $\sigma_k^{i,l}$ é o desvio padrão da l -ésima variável do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, $\tilde{\nu}_k^{i,l}$ é a raiz quadrada da dispersão local da l -ésima variável do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, computada pelas Equações (2.106)-(2.107), e $\alpha \in [0, 1]$ é a constante de aprendizagem das zonas de influência adaptativas dos grupos, da qual o autor assume o valor $\alpha = 1$ para eliminar a necessidade de seu valor ser fornecido pelo usuário (ANGELOV, 2010). Assim, o autor destaca que apesar do algoritmo eTS+ necessitar de um desvio padrão inicial $\sigma_o \in \mathbb{R}_+^*$ para os valores $\sigma_{I^i}^{i,l} \big|_{l=1,\dots,n}$ associados ao i -ésimo grupo $\Theta_{I^i}^i$ na sua amostra de criação I^i , os desvios padrão são atualizados conforme a dispersão dos grupos pela Equação (2.108), e assim pode-se definir o desvio padrão inicial σ_o em qualquer ocasião com um valor específico, por exemplo $\sigma_o = 1$, tornando assim o algoritmo eTS+ livre de parâmetros específicos do usuário, cumprindo o quinto objetivo (ANGELOV, 2010). Entretanto, no contexto desta dissertação, com o objetivo de se ter uma maior variabilidade nos possíveis resultados provenientes do algoritmo eTS+ para fins de análises comparativas⁷, o desvio padrão inicial σ_o dos grupos é considerado um parâmetro definido pelo usuário.

2.4.2.6 Implementação do Algoritmo eTS+

Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo eTS+ podem ser vistos no Algoritmo 2.6, em que a condição $\mathcal{A}$ se refere, conforme escolha do usuário, à condição $\mathcal{A}_1$ apresentada em (2.80) ou à condição $\mathcal{A}_2$ apresentada em (2.82). O algoritmo eTS+ combina a velocidade do algoritmo eTS original com a robustez de diversas ferramentas e critérios alternativos para a tomada de decisão sobre o conjunto de grupos que formam a estrutura da proposição antecedente das regras nebulosas de sistemas de inferência nebulosos. De acordo com Angelov (2010), o eTS+ é um sistema muito flexível e é aplicado a uma grande variedade de problemas, como modelos de regressão, predição e filtragem de séries temporais, classificadores evolutivos, detecção de novidades e controle.

O modelo eTS+ propõe ferramentas de seleção das variáveis de entrada, que é uma forma de identificar quais variáveis $l \in \{1, \dots, n\}$ do conjunto de dados $\mathbf{X}$ são relevantes para cada regra nebulosa $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na estimação da saída final do sistema de inferência nebuloso do modelo eTS+, estabelecendo condições para se desconsiderar variáveis irrelevantes ao contexto. Isso é conhecido na literatura de classificação como seleção de características (DUDA; HART; STORK, 2000), e é relevante em alguns contextos

⁷ As análises comparativas que incluem o algoritmo eTS+ são realizadas na Seção 4.3.

Algoritmo 2.6: Algoritmo eTS+.

Entrada: Conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$, desvio padrão inicial dos grupos σ_o e escolha da condição $\mathcal{A}$;

Saída: Grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e graus de pertinência $\mu_k^{i,l} \mid i=1, \dots, R_k, l=1, \dots, n$ a cada amostra k ;

- 1 Inicializar o primeiro grupo Θ_1^1 com $\mathbf{c}_1^1 = \mathbf{x}_1$, $P_1^{\mathbf{c}_1^1} = 1$, $S_1^1 = 1$, $I^1 = 1$, $K_1^1 = 1$ e $\sigma_1^{1,l} = \sigma_o, \forall l \in \{1, \dots, n\}$;
- 2 Fazer $R_1 = 1$;
- 3 Fazer $k = 2$;
- 4 **enquanto** o dado $\mathbf{x}_k$ estiver disponível, **faça**
 - 5 Atualizar R_{k-1} e $\mathbf{c}_{k-1}^i \mid i=1, \dots, R_{k-1}$ para a k -ésima amostra: $R_k = R_{k-1}$, $\mathbf{c}_k^i = \mathbf{c}_{k-1}^i$;
 - 6 Calcular o potencial $P_k^{\mathbf{x}_k}$ usando a Equação (2.67);
 - 7 Calcular os potenciais $P_k^{\mathbf{c}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ pela Equação (2.74);
 - 8 Calcular $\mu_k^{i,l} \mid i=1, \dots, R_k, l=1, \dots, n$ e $\tau_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pelas Equações (2.75) e (2.79);
 - 9 **se** a condição $\mathcal{A}$ for satisfeita, **então**
 - 10 Atualizar R_k usando a Equação (2.83);
 - 11 Calcular $\mathbf{c}_k^{R_k}$ pela Equação (2.84);
 - 12 Calcular $P_k^{\mathbf{c}_k^{R_k}}$ pela Equação (2.85);
 - 13 Inicializar $\sigma_k^{R_k,l} = \sigma_o, \forall l \in \{1, \dots, n\}$;
 - 14 Fazer $I^{R_k} = k$ e $S_{k-1}^{R_k} = 0$;
 - 15 **se** a condição $\mathcal{B}$ em (2.86) for satisfeita, **então**
 - 16 Remover o grupo $\Theta_k^{i^*}$ que satisfaz a condição $\mathcal{B}$;
 - 17 Atualizar R_k usando a Equação (2.87);
 - 18 **fim**
 - 19 **fim**
 - 20 Calcular os suportes dos grupos $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pelas Equações (2.88) e (2.90);
 - 21 Calcular as idades dos grupos $\mathcal{A}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pela Equação (2.91);
 - 22 Calcular as utilidades dos grupos $\mathcal{U}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pela Equação (2.97);
 - 23 **se** a condição $\mathcal{C}_1$ em (2.98) for satisfeita, **então**
 - 24 Remover o grupo $\Theta_k^{i^*}$ que satisfaz a condição $\mathcal{C}_1$;
 - 25 Atualizar R_k usando a Equação (2.99);
 - 26 **fim**
 - 27 **se** a condição $\mathcal{C}_2$ em (2.100) for satisfeita, **então**
 - 28 Remover o grupo $\Theta_k^{i^*}$ que satisfaz a condição $\mathcal{C}_2$;
 - 29 Atualizar R_k usando a Equação (2.101);
 - 30 **fim**
 - 31 **se** a condição $\mathcal{C}_3$ em (2.102) for satisfeita, **então**
 - 32 Remover o grupo $\Theta_k^{i^*}$ que satisfaz a condição $\mathcal{C}_3$;
 - 33 Atualizar R_k usando a Equação (2.103);
 - 34 **fim**
 - 35 Calcular as dispersões $(\hat{\nu}_k^{i,l})^2 \mid i=1, \dots, R_k, l=1, \dots, n$ usando as Equações (2.106)-(2.107);
 - 36 Calcular os desvios padrão $\sigma_k^{i,l} \mid i=1, \dots, R_k, l=1, \dots, n$ pela Equação (2.108);
 - 37 Fazer $k \leftarrow k + 1$;
 - 38 **fim**

como o de sensores inferenciais (FORTUNA et al., 2007). Esse processo está associado aos parâmetros da proposição consequente das regras nebulosas do modelo eTS+ (e não com o algoritmo de agrupamento) e detalhes sobre a seleção de variáveis de entrada podem ser vistos em Angelov (2010).

2.4.3 Algoritmo de Agrupamento de Quantização Vetorial Evolutiva para Elipsoides Arbitrários com Funcionalidade de Mescla e Divisão

O algoritmo de agrupamento de quantização vetorial evolutiva para elipsoides arbitrários com funcionalidade de mescla e divisão (eVQ-AMS - *evolving Vector Quantization for Arbitrary ellipsoids with Merge-and-Split functionality*) foi proposto em Lughofer e Sayed-Mouchaweh (2015) e é um método de agrupamento dinâmico no sentido de que atualiza a estrutura de partição dos grupos permanentemente com base em novas amostras de dados. Pela sua operação recursiva a cada passo amostral sem necessitar de fases de re-treinamento computacionalmente custosas, ele é aplicado para extrair grupos a partir de fluxos de dados *online*.

O algoritmo de agrupamento eVQ-AMS é baseado no conhecido método de quantização vetorial (GRAY, 1984). Do ponto de vista matemático, a quantização vetorial pode ser considerada uma versão simplificada do bem conhecido algoritmo de agrupamento *k-means* (GAN; MA; WU, 2007), em uma adaptação no qual os dados são processados a cada amostra de dados (LUGHOFER, 2008a). No entanto, esse processamento da quantização vetorial é realizado diversas vezes sobre o conjunto de dados até que se satisfaça um limite de convergência, e portanto a quantização vetorial não se caracteriza como um método de agrupamento incremental. Em Lughofer (2008a), o algoritmo de agrupamento de quantização vetorial evolutiva (eVQ - *evolving Vector Quantization*) é proposto, no qual o método de quantização vetorial é estendido para uma versão incremental aplicável a tarefas de agrupamento *online* e conjuntos de dados com o número de grupos desconhecido. O algoritmo de agrupamento eVQ é aplicado com sucesso como uma máquina de aprendizagem rápida para sistemas de inferência nebulosos evolutivos, caso do bem conhecido sistema de inferência nebuloso flexível (FLEXFIS - *Flexible Fuzzy Inference System*) (LUGHOFER, 2008b), e classificadores evolutivos (LUGHOFER; BUCHTALA, 2013). O algoritmo de agrupamento eVQ-AMS baseia-se em uma versão dinâmica e estendida do algoritmo de agrupamento de quantização vetorial evolutiva eVQ, generalizando-o para protótipos de grupos com formas elipsoidais em posições arbitrárias. Ele também inclui técnicas incrementais de mescla e divisão para operar em casos de fusão e separação de grupos. A princípio, o algoritmo eVQ é estendido pela evolução e atualização incremental de grupos elipsoidais em posições arbitrárias, ou seja, elipsoides cujos eixos não são limitados aos eixos das coordenadas dos dados, em uma versão chamada de eVQ-A (*evolving Vector Quantization for Arbitrary ellipsoids*). Esse mecanismo proporciona mais flexibilidade em termos de modelagem de nuvens de dados rotacionadas em posições arbitrárias em fluxos de dados. Além disso, o algoritmo eVQ-AMS possui uma estratégia dinâmica de mescla de grupos, que compensa sobreposições entre grupos que formam uma homogeneidade recíproca na forma e direção dos seus protótipos, resultando na versão chamada de eVQ-AM (*evolving Vector Quantization for Arbitrary ellipsoids with Merge functionality*).

Adicionalmente, uma estratégia de divisão resolve casos em que duas áreas de densidade se estabelecem ao longo do tempo dentro de um mesmo grupo, resultando na versão final chamada de eVQ-AMS (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

2.4.3.1 Seleção do Grupo Vencedor

No contexto do algoritmo de agrupamento eVQ-AMS, para cada novo dado $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ disponibilizado em fluxo, onde $n \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de variáveis do conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times N}$, e $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, o centro de grupo mais próximo $\mathbf{c}_k^{i^*} \in \mathbb{R}^n$ é selecionado de acordo com a seguinte expressão (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$i^* = \arg \min_{i=1, \dots, R_k} (D_k^i), \quad (2.109)$$

em que i^* é o índice do centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i^*}$ mais próximo do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$, de modo que o grupo $\Theta_k^{i^*}$ é chamado de grupo vencedor (*winning cluster*) na k -ésima amostra, $R_k \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de grupos existente na partição na k -ésima amostra, e $D_k^i \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$D_k^i = \sqrt{(\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^i)^T (\mathcal{F}_{k-1}^i)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^i)} \quad (2.110)$$

é a distância entre o dado $\mathbf{x}_k$ e o i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra, onde $\mathcal{F}_{k-1}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância, na $(k-1)$ -ésima amostra, do i -ésimo grupo Θ_k^i (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). Com a distância de Mahalanobis dada pela Equação (2.110), pode-se alcançar grupos elipsoidais em posições arbitrárias. Os grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ no espaço multidimensional na k -ésima amostra são então definidos por todos os dados $\mathbf{x}_j \mid_{j=1, \dots, k}$ que satisfazem a seguinte condição (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$D_j^i < \varepsilon_j^i, \quad (2.111)$$

em que $\varepsilon_j^i \in \mathbb{R}_+^*$ é o raio de distância de Mahalanobis do i -ésimo grupo Θ_j^i na j -ésima amostra. Os raios de distância de Mahalanobis $\varepsilon_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ auxiliam na decisão da evolução de um novo grupo a cada amostra.

Adicionalmente à seleção do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ através da Equação (2.109), o grupo $\Theta_k^{\tilde{i}}$ é selecionado de acordo com a seguinte expressão (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\tilde{i} = \arg \min_{\substack{i=1, \dots, R_k \\ i \neq i^*}} (\Delta_k^{i^*, i}), \quad (2.112)$$

em que $\tilde{i}$ é o índice do centro de grupo $\mathbf{c}_k^{\tilde{i}}$ mais próximo do centro $\mathbf{c}_k^{i^*}$ do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, e $\Delta_k^{i^*, i} \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Delta_k^{i^*, i} = \sqrt{(\mathbf{c}_k^{i^*} - \mathbf{c}_k^i)^T (\mathcal{F}_{k-1}^{i^*})^{-1} (\mathbf{c}_k^{i^*} - \mathbf{c}_k^i)} \quad (2.113)$$

é a distância entre o i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ e o centro $\mathbf{c}_k^{i*}$ do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, computada através da matriz de covariância $\mathcal{F}_{k-1}^{i*}$ do grupo vencedor Θ_k^{i*} (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

O algoritmo de agrupamento eVQ-AMS atualiza dinamicamente os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ a cada amostra através da seguinte expressão (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\varepsilon_k^i = \tilde{f} n^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{S_{k-1}^i + 1}\right)^{\tilde{m}}}, \quad (2.114)$$

em que $\tilde{f} \in \mathbb{R}_+^*$ é um parâmetro definido *a priori* pelo usuário que estabelece um acordo entre estabilidade (atualização de um grupo antigo) e plasticidade (evolução de um novo grupo), n é o número de variáveis do conjunto de dados $\mathbf{X}$, ou seja, o número de dimensões do problema de agrupamento, $S_{k-1}^i \in \mathbb{N}$ é o suporte, na $(k-1)$ -ésima amostra, do i -ésimo grupo Θ_k^i , ou seja, o número de dados $\mathbf{x}_k$ para o qual o grupo Θ_k^i foi selecionado como grupo vencedor de acordo com a Equação (2.109) desde a sua inicialização até a $(k-1)$ -ésima amostra, e $\tilde{m} \in \mathbb{R}_+^*$ é um parâmetro exponencial que ajusta a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ em função dos suportes $S_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$. Quanto maior o valor do fator $\tilde{f}$ na Equação (2.114), maiores os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ a cada amostra e, em consequência, as suas zonas de influência, de modo que maior é a tendência a se atualizar grupos (estabilidade). Em contrapartida, quando menor o valor de $\tilde{f}$ na Equação (2.114), menores os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ a cada amostra e, em consequência, as suas zonas de influência, de modo que maior é a tendência a se criar novos grupos (plasticidade). O fator $n^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ na Equação (2.114) é utilizado para compensar a maldição da dimensionalidade, pois para casos de maior dimensão n , maiores são as distâncias entre dados, e maior a tendência a se criar novos grupos, sendo portanto os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ ampliados por um fator $n^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ para prevenir que o algoritmo crie muitos grupos e cause fortes efeitos de sobreajuste. O terceiro termo na Equação (2.114) compensa a incerteza em grupos com baixo suporte S_{k-1}^i , aumentando o valor do raio ε_k^i nos casos em que S_{k-1}^i é pequeno (o fator é igual a $2^{\tilde{m}}$ quando $S_{k-1}^i = 1$), e diminuindo o seu efeito nos casos em que S_{k-1}^i é grande (o fator tende a 1 quando $S_{k-1}^i \rightarrow \infty$). O parâmetro $\tilde{m}$ ajusta o grau de impacto dos suportes $S_{k-1}^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ sobre os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, e é definido pelo autor o valor $\tilde{m} = 4$ como padrão (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Para a realização da análise acerca da necessidade de divisão de grupo do algoritmo de agrupamento eVQ-AMS (conforme apresentado na Seção 2.4.3.5), são considerados subconjuntos de amostras de dados para cada grupo conforme a técnica de amostragem de reservatório (VITTER, 1985), no qual o número máximo de amostras de cada subconjunto é limitado a $N_{sub} \in \mathbb{N}^*$ amostras, em que o autor define $N_{sub} = 300$ como valor padrão para o algoritmo de agrupamento eVQ-AMS. No fluxo de dados são considerados os

subconjuntos $\mathcal{X}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k} \in \mathbb{R}^{n \times \tilde{\tau}_k^i}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra, dados por:

$$\mathcal{X}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{K_1^i} & \cdots & \mathbf{x}_{K_j^i} & \cdots & \mathbf{x}_{K_{\tilde{\tau}_k^i}^i} \end{bmatrix}, \quad (2.115)$$

em que $K_j^i \in \mathbb{N}^*$ é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_j^i}$ pertencente ao subconjunto $\mathcal{X}_k^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i , e $\tilde{\tau}_k^i \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de dados $\mathbf{x}_{K_j^i}$ pertencentes a $\mathcal{X}_k^i$ na k -ésima amostra, dada por:

$$\tilde{\tau}_k^i = \min(S_k^i, N_{sub}) \quad (2.116)$$

Na Equação (2.116), tem-se que se $\tilde{\tau}_k^i = S_k^i$ (o suporte S_k^i é menor ou igual a N_{sub}), então o subconjunto $\mathcal{X}_k^i$ na k -ésima amostra contém todos os dados associados ao i -ésimo grupo Θ_k^i conforme a Equação (2.111). Em contrapartida, se $\tilde{\tau}_k^i = N_{sub}$ (o suporte S_k^i é maior que N_{sub}), então o subconjunto $\mathcal{X}_k^i$ na k -ésima amostra contém apenas os últimos N_{sub} dados associados ao i -ésimo grupo Θ_k^i conforme a Equação (2.111).

2.4.3.2 Criação de Grupos

Para a tomada de decisão sobre o conjunto de grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ a cada amostra do fluxo de dados, o algoritmo de agrupamento considera a seguinte condição (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$D_k^{i*} > \varepsilon_k^{i*}, \quad (2.117)$$

em que D_k^{i*} é a distância entre o dado $\mathbf{x}_k$ e o centro $\mathbf{c}_k^{i*}$ do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, e ε_k^{i*} é o raio do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra. Se a condição em (2.117) for satisfeita, então um novo grupo é criado, de modo que o número de grupos R_k é incrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k + 1 \quad (2.118)$$

O suporte do novo grupo $S_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$S_k^{R_k} = 1 \quad (2.119)$$

O novo centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathbf{c}_k^{R_k} = \mathbf{x}_k, \quad (2.120)$$

e a inversa da matriz de covariância $(\mathcal{F}_k^{R_k})^{-1}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é inicializada por:

$$(\mathcal{F}_k^{R_k})^{-1} = \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} \varphi_k^1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_k^l & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_k^n \end{bmatrix}, \quad (2.121)$$

em que $\xi \in \mathbb{R}_+^*$ é um parâmetro tal que $1/\xi$ denota uma pequena fração das faixas dos dados, e $\varphi_k^l \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$\varphi_k^l = \max_{j=1,\dots,k} (x_j^l) - \min_{j=1,\dots,k} (x_j^l), \quad (2.122)$$

é a faixa associada à l -ésima variável do conjunto de dados $\mathbf{X}$ na k -ésima amostra, igual à diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da l -ésima coordenada $x_j^l \in \mathbb{R}$ dos dados $\mathbf{x}_j \big|_{j=1,\dots,k}$. O autor define $\xi = 100$ como valor padrão. Através da Equação (2.121), a faixa de influência inicial do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é restrita a uma pequena área da faixa total dos dados (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). O subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k} \in \mathbb{R}^{n \times \tilde{\tau}_k^{R_k}}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é inicializado por:

$$\mathcal{X}_k^{R_k} = [\mathbf{x}_k], \quad (2.123)$$

em que $\tilde{\tau}_k^{R_k}$ é a quantidade de dados pertencentes ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra, dada por $\tilde{\tau}_k^{R_k} = S_k^{R_k} = 1$ conforme a Equação (2.116) para $i = R_k$ e a Equação (2.119).

Para os demais grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k-1}$, os suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k-1}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$S_k^i = S_{k-1}^i, \quad (2.124)$$

as inversas das matrizes de covariância $(\mathcal{F}_k^i)^{-1} \big|_{i=1,\dots,R_k-1}$ na k -ésima amostra permanecem inalteradas em relação à amostra anterior:

$$(\mathcal{F}_k^i)^{-1} = (\mathcal{F}_{k-1}^i)^{-1}, \quad (2.125)$$

e os subconjuntos $\mathcal{X}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k-1}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$\mathcal{X}_k^i = \mathcal{X}_{k-1}^i \quad (2.126)$$

2.4.3.3 Atualização de Grupos

A condição em (2.117) indica que, se o dado $\mathbf{x}_k$ estiver distante do centro do grupo vencedor $\mathbf{c}_k^{i*}$ de um valor maior que o seu raio ε_k^{i*} na k -ésima amostra, então o dado $\mathbf{x}_k$ não está localizado na sua zona de influência, e um novo grupo é criado a partir dele. Se a condição em (2.117) não for satisfeita, então o grupo vencedor Θ_k^{i*} é atualizado na k -ésima amostra pela influência do dado $\mathbf{x}_k$ (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). Nessa atualização, o suporte do grupo vencedor S_k^{i*} na k -ésima amostra é computado recursivamente por:

$$S_k^{i*} = S_{k-1}^{i*} + 1 \quad (2.127)$$

O centro do grupo vencedor $\mathbf{c}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra é atualizado por:

$$\mathbf{c}_k^{i^*} \leftarrow \mathbf{c}_k^{i^*} + \frac{1}{S_k^{i^*}} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^{i^*}) \quad (2.128)$$

A inversa da matriz de covariância do grupo vencedor $(\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1}$ na k -ésima amostra é calculada recursivamente por:

$$(\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1} = \frac{(S_k^{i^*} + 1)(\mathcal{F}_{k-1}^{i^*})^{-1}}{S_k^{i^*}} - \frac{1}{S_k^{i^*}} \frac{(\mathcal{F}_{k-1}^{i^*})^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^{i^*}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^{i^*})^T (\mathcal{F}_{k-1}^{i^*})^{-1}}{1 + \frac{1}{S_k^{i^*} + 1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^{i^*})^T (\mathcal{F}_{k-1}^{i^*})^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k^{i^*})} \quad (2.129)$$

A Equação (2.129) computa recursivamente e diretamente a inversa da matriz de covariância do grupo vencedor $(\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1}$, ao invés de computar recursivamente a matriz de covariância $\mathcal{F}_k^{i^*}$ e realizar a operação de inversão matricial, como realizado em Pang, Ozawa e Kasabov (2005), Bouchachia e Mittermeir (2007), Lughofer (2011b). Nestes casos, a operação de inversão a cada passo da aprendizagem incremental pode levar à instabilidade, além de demandar alto custo computacional. O cálculo recursivo da inversa da matriz de covariância do grupo vencedor $(\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1}$ pela Equação (2.129) contorna essa limitação (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). O subconjunto $\mathcal{X}_k^{i^*}$ do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra é atualizado com o dado $\mathbf{x}_k$ utilizando computação de reservatório e a estratégia de atualização de *buffer*⁸ em anel (VITTER, 1985), sendo a quantidade $\tilde{\tau}_k^{i^*}$ de dados pertencentes ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{i^*}$ dada pela Equação (2.116) para $i = i^*$.

Para os demais grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$, tem-se que os suportes $S_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$S_k^i = S_{k-1}^i, \quad (2.130)$$

as inversas das matrizes de covariância $(\mathcal{F}_k^i)^{-1} \mid_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ na k -ésima amostra permanecem inalteradas em relação à amostra anterior:

$$(\mathcal{F}_k^i)^{-1} = (\mathcal{F}_{k-1}^i)^{-1}, \quad (2.131)$$

e os subconjuntos $\mathcal{X}_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$\mathcal{X}_k^i = \mathcal{X}_{k-1}^i \quad (2.132)$$

Adicionalmente à atualização do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, é aplicado um processo decremental sobre o centro de grupo $\tilde{\mathbf{c}}_k^{i^*}$ mais próximo do centro do grupo vencedor $\mathbf{c}_k^{i^*}$, em que $\tilde{i}$ é computado pela Equação (2.112). O $\tilde{i}$ -ésimo centro de grupo $\tilde{\mathbf{c}}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra é atualizado por:

$$\tilde{\mathbf{c}}_k^{i^*} \leftarrow \tilde{\mathbf{c}}_k^{i^*} - \frac{1}{\tilde{S}_k^{i^*}} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{c}}_k^{i^*}), \quad (2.133)$$

⁸ No algoritmo de agrupamento eVQ-AMS, o *buffer* se refere ao subconjunto de dados $\mathcal{X}_k^{i^*}$ que armazena uma quantidade limitada $\tilde{\tau}_k^{i^*}$ de amostras e é atualizado sempre que o grupo $\Theta_k^{i^*}$ em questão é selecionado como vencedor conforme a Equação (2.109).

em que $S_k^{\tilde{i}}$ é o suporte do $\tilde{i}$ -ésimo grupo $\Theta_k^{\tilde{i}}$ na k -ésima amostra. Enquanto o centro do grupo vencedor $\mathbf{c}_k^{i^*}$ é atualizado na Equação (2.128) de modo que o mesmo se aproxima do dado $\mathbf{x}_k$ com uma taxa de aprendizagem igual ao inverso do suporte $S_k^{i^*}$ do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, tem-se que o centro do $\tilde{i}$ -ésimo grupo $\mathbf{c}_k^{\tilde{i}}$ é atualizado na Equação (2.133) de modo que o mesmo se afasta do dado $\mathbf{x}_k$ com uma taxa de aprendizagem igual ao inverso do suporte $S_k^{\tilde{i}}$ do $\tilde{i}$ -ésimo grupo $\Theta_k^{\tilde{i}}$. Esse procedimento de afastamento do centro de grupo $\mathbf{c}_k^{\tilde{i}}$ pela Equação (2.133) diminui a probabilidade de sobreposições entre grupos e, em consequência, aprimora as bordas dos contornos de grupos próximos (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

2.4.3.4 Mescla de Grupos

O algoritmo de agrupamento eVQ-AMS realiza um procedimento de mescla de grupos. De acordo com Lughofer e Sayed-Mouchaweh (2015), uma motivação para esse procedimento é a natureza do fluxo de dados $\mathbf{X}$, sendo possível que as amostras de dados $\mathbf{x}_k$ preencham a lacuna entre dois grupos distintos que passam a ter alta sobreposição. Outra motivação para o procedimento de mescla é uma possível escolha inadequada do parâmetro $\tilde{f}$ na Equação (2.114) que determina os raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ a cada amostra, pois sendo escolhido um valor de $\tilde{f}$ pequeno, grupos supérfluos podem ser criados próximos de grupos existentes e, com o aumento dos suportes desses grupos, aumenta-se a sobreposição entre eles. O processo de decisão do algoritmo eVQ-AMS sobre o mecanismo de mescla a cada amostra é realizado após a atualização do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, em que i^* é dado pela Equação (2.109). Inicialmente, os graus de sobreposição $\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} \mid j=1, \dots, R_k, j \neq i^*$ entre o grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ e os demais grupos $\Theta_k^j \mid j=1, \dots, R_k, j \neq i^*$ na k -ésima amostra são computados por meio da distância de Bhattacharyya (BHATTACHARYYA, 1943; DJOUADI; SNORRASON; GARBER, 1990), definida para distribuições gaussianas multivariáveis por:

$$\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} = \frac{1}{8} (\mathbf{c}_k^{i^*} - \mathbf{c}_k^j)^T \frac{(\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1} + (\mathcal{F}_k^j)^{-1}}{2} (\mathbf{c}_k^{i^*} - \mathbf{c}_k^j) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\det \left(\frac{(\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1} + (\mathcal{F}_k^j)^{-1}}{2} \right)}{\sqrt{\det \left((\mathcal{F}_k^{i^*})^{-1} \right) \det \left((\mathcal{F}_k^j)^{-1} \right)}} \right) \quad (2.134)$$

O grau de sobreposição $\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j}$ apresenta a seguinte propriedade: para grupos $\Theta_k^{i^*}$ e Θ_k^j disjuntos cujos contornos elipsoidais não se encontram, tem-se que $\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} < 0$; para grupos $\Theta_k^{i^*}$ e Θ_k^j cujos contornos elipsoidais se encontram em um único ponto, tem-se que $\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} = 0$; e para grupos $\Theta_k^{i^*}$ e Θ_k^j cujos contornos elipsoidais se cruzam, tem-se que $\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} > 0$, de modo que quanto maior a sobreposição, mais próximo é o valor de $\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j}$ da unidade (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). O algoritmo eVQ-AMS analisa a seguinte condição para

definição de candidatos ao procedimento de mescla:

$$\max_{\substack{j=1,\dots,R_k \\ j \neq i^*}} \left(\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} \right) > 0, \quad (2.135)$$

em que R_k é a quantidade de grupos na k -ésima amostra. Se a condição em (2.135) for satisfeita, então os grupos $\Theta_k^{i^*}$ e $\Theta_k^{j^*}$ são selecionados como candidatos ao procedimento de mescla na k -ésima amostra, em que j^* é dado por:

$$j^* = \arg \max_{\substack{j=1,\dots,R_k \\ j \neq i^*}} \left(\tilde{\vartheta}_k^{i^*,j} \right) \quad (2.136)$$

A decisão final sobre a mescla dos grupos candidatos $\Theta_k^{i^*}$ e $\Theta_k^{j^*}$ é tomada de acordo com a homogeneidade recíproca das formas e orientações dos seus protótipos elipsoidais. Dois grupos são mesclados sempre que a distribuição/protótipo do grupo resultante segue o comportamento das distribuições/protótipos dos grupos individuais. Conforme detalhes apresentados em Lughofer e Sayed-Mouchaweh (2015), tem-se que, quando não existe homogeneidade recíproca das formas e orientações dos protótipos elipsoidais dos grupos $\Theta_k^{i^*}$ e $\Theta_k^{j^*}$, ocorre uma grande expansão no volume do grupo resultante. Logo, um procedimento hipotético de mescla é realizado entre os grupos $\Theta_k^{i^*}$ e $\Theta_k^{j^*}$ na k -ésima amostra, de modo a comparar o volume do grupo resultante com os volumes dos grupos individuais. Dado que os grupos considerados no procedimento hipotético de mescla são $\hat{\Theta}_k^{i^*} = \Theta_k^{i^*}$ e $\hat{\Theta}_k^{j^*} = \Theta_k^{j^*}$, cujos suportes são dados por $\hat{S}_k^{i^*} = S_k^{i^*}$ e $\hat{S}_k^{j^*} = S_k^{j^*}$, cujos centros são dados por $\hat{\mathbf{c}}_k^{i^*} = \mathbf{c}_k^{i^*}$ e $\hat{\mathbf{c}}_k^{j^*} = \mathbf{c}_k^{j^*}$, cujas inversas das matrizes de covariância são dadas por $\left(\hat{\mathcal{F}}_k^{i^*} \right)^{-1} = \left(\mathcal{F}_k^{i^*} \right)^{-1}$ e $\left(\hat{\mathcal{F}}_k^{j^*} \right)^{-1} = \left(\mathcal{F}_k^{j^*} \right)^{-1}$, e cujos raios são dados por $\hat{\varepsilon}_k^{i^*} = \varepsilon_k^{i^*}$ e $\hat{\varepsilon}_k^{j^*} = \varepsilon_k^{j^*}$, então o suporte $\hat{S}_k^{R_k+1}$ do grupo $\hat{\Theta}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\hat{S}_k^{R_k+1} = \hat{S}_k^{i^*} + \hat{S}_k^{j^*} \quad (2.137)$$

O centro de grupo $\hat{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\hat{\mathbf{c}}_k^{R_k+1} = \frac{\hat{S}_k^{i^*} \hat{\mathbf{c}}_k^{i^*} + \hat{S}_k^{j^*} \hat{\mathbf{c}}_k^{j^*}}{\hat{S}_k^{i^*} + \hat{S}_k^{j^*}} \quad (2.138)$$

A inversa da matriz de covariância $\left(\hat{\mathcal{F}}_k^{R_k+1} \right)^{-1}$ do grupo $\hat{\Theta}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra é dada por:

$$\left(\hat{\mathcal{F}}_k^{R_k+1} \right)^{-1} = \frac{\hat{S}_k^{i^*} \left(\hat{\mathcal{F}}_k^{i^*} \right)^{-1} + \hat{S}_k^{j^*} \left(\hat{\mathcal{F}}_k^{j^*} \right)^{-1} + \frac{\hat{S}_k^{i^*} \hat{S}_k^{j^*}}{\hat{S}_k^{i^*} + \hat{S}_k^{j^*}} \left(\hat{\mathcal{F}}_k \right)^{-1}}{\hat{S}_k^{i^*} + \hat{S}_k^{j^*}}, \quad (2.139)$$

em que a matriz $(\hat{\mathcal{F}}_k)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dada por:

$$(\hat{\mathcal{F}}_k)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\hat{c}_k^{R_k+1,1} - \tilde{c}_k^{\tilde{j},1})^2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(\hat{c}_k^{R_k+1,l} - \tilde{c}_k^{\tilde{j},l})^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{(\hat{c}_k^{R_k+1,n} - \tilde{c}_k^{\tilde{j},n})^2} \end{bmatrix}, \quad (2.140)$$

onde $\hat{c}_k^{R_k+1,l} \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do centro de grupo $\hat{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra pela Equação (2.138), n é a quantidade de coordenadas do conjunto de dados $\mathbf{X}$, e $\tilde{c}_k^{\tilde{j},l}$ é a l -ésima coordenada do centro de grupo $\hat{\mathbf{c}}_k^{\tilde{j}}$ na k -ésima amostra, em que $\tilde{j}$ dado por

$$\tilde{j} = \arg \min_{j=i^*, j^*} (\hat{S}_k^j) \quad (2.141)$$

é o índice do grupo $\hat{\Theta}_k^{\tilde{j}}$ considerado para o procedimento hipotético de mescla que apresenta o menor valor de suporte $\hat{S}_k^j \big|_{j=i^*, j^*}$. O raio de influência $\hat{\varepsilon}_k^{R_k+1}$ do grupo $\hat{\Theta}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\hat{\varepsilon}_k^{R_k+1} = \tilde{f} n^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\hat{S}_k^{R_k+1} + 1}\right)^{\tilde{m}}}, \quad (2.142)$$

em que os parâmetros $\tilde{f}$ e $\tilde{m}$ foram apresentados na Equação (2.114).

Para verificação da homogeneidade recíproca das formas e orientações dos protótipos elipsoidais dos grupos $\Theta_k^{i^*}$ e $\Theta_k^{j^*}$ candidatos ao procedimento de mescla, a seguinte condição é analisada:

$$\hat{V}_k^{R_k+1} \leq n \left(\hat{V}_k^{i^*} + \hat{V}_k^{j^*} \right), \quad (2.143)$$

em que $\hat{V}_k^{R_k+1} \in \mathbb{R}$ é o volume do grupo $\hat{\Theta}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra, e $\hat{V}_k^{i^*}$ e $\hat{V}_k^{j^*}$ são os volumes dos grupos $\hat{\Theta}_k^{i^*}$ e $\hat{\Theta}_k^{j^*}$ considerados no procedimento hipotético de mescla na k -ésima amostra. Os volumes $\hat{V}_k^i \big|_{i=i^*, j^*, R_k+1}$ dos grupos $\hat{\Theta}_k^i \big|_{i=i^*, j^*, R_k+1}$ são computados por (JIMENEZ; LANDGREBE, 1998):

$$\hat{V}_k^i = \frac{2 \prod_{l=1}^n \left(\frac{\hat{\varepsilon}_k^i}{\hat{\lambda}_k^{i,l}} \right) \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (2.144)$$

em que $\hat{\lambda}_k^{i,l} \in \mathbb{R}$ é o l -ésimo autovalor da inversa da matriz de covariância $(\hat{\mathcal{F}}_k^i)^{-1}$ do

i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, e $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ é a função gama⁹ no ponto $\frac{n}{2}$. Se a condição em (2.143) for satisfeita, então o procedimento de mescla é realizado entre os grupos candidatos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} , de modo que o suporte $S_k^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$S_k^{R_k+1} = \hat{S}_k^{R_k+1} \quad (2.146)$$

O centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathbf{c}_k^{R_k+1} = \hat{\mathbf{c}}_k^{R_k+1} \quad (2.147)$$

A inversa da matriz de covariância $(\mathcal{F}_k^{R_k+1})^{-1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dada por:

$$(\mathcal{F}_k^{R_k+1})^{-1} = (\hat{\mathcal{F}}_k^{R_k+1})^{-1} \quad (2.148)$$

Os subconjuntos $\mathcal{X}_k^{i*}$ e $\mathcal{X}_k^{j*}$ dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} são mesclados na k -ésima amostra de forma que o subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla contém todos os dados $\mathbf{x}_{K_j^{i*}} \Big|_{j=1, \dots, \tilde{\tau}_k^{i*}}$ e $\mathbf{x}_{K_j^{j*}} \Big|_{j=1, \dots, \tilde{\tau}_k^{j*}}$ pertencentes a $\mathcal{X}_k^{i*}$ e $\mathcal{X}_k^{j*}$ se $\tilde{\tau}_k^{R_k+1} = S_k^{R_k+1}$, ou seja, se o suporte $S_k^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ for menor ou igual a N_{sub} , em que $\tilde{\tau}_k^{R_k+1}$ é dado pela Equação (2.116) para $i = R_k + 1$, e $S_k^{R_k+1}$ é dado pela Equação (2.146). Caso $\tilde{\tau}_k^{R_k+1} = N_{sub}$, ou seja, caso o suporte $S_k^{R_k+1}$ seja maior que N_{sub} , então o subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$ contém os últimos N_{sub} dados do fluxo pertencentes a $\mathcal{X}_k^{i*}$ e $\mathcal{X}_k^{j*}$, que são os dados $\mathbf{x}_{K_j^i}$ correspondentes aos N_{sub} maiores valores de $K_j^i \Big|_{i=i^*, j^*, j=1, \dots, \tilde{\tau}_k^i}$ (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Os grupos mesclados Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} são removidos da partição, e o número de grupos R_k na k -ésima amostra é decrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k - 1 \quad (2.149)$$

2.4.3.5 Divisão de Grupos

O algoritmo de agrupamento eVQ-AMS realiza um procedimento de divisão de grupos. De acordo com Lughofer e Sayed-Mouchaweh (2015), uma motivação para a realização desse procedimento é a natureza do fluxo de dados $\mathbf{X}$, sendo possível que no início os dados aparentem formar um único grupo homogêneo que, no entanto, acaba

⁹ De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012), a função gama $\Gamma(\tilde{x}) : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{R}$ é uma extensão para todo número $\tilde{x}$ real (exceto os inteiros não positivos) da função fatorial $\tilde{\kappa}(\tilde{x}) = \tilde{x}!$, a qual é definida apenas para números naturais. A função $\Gamma(\tilde{x})$ é dada por:

$$\Gamma(\tilde{x}) = \int_0^\infty \tilde{t}^{\tilde{x}-1} e^{-\tilde{t}} d\tilde{t} \quad (2.145)$$

se revelando não homogêneo posteriormente, surgindo assim duas ou mais regiões de densidade dentro de um único grupo. Outra motivação para o procedimento de divisão é uma possível escolha inadequada do parâmetro $\tilde{f}$ na Equação (2.114) que determina os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ a cada amostra, pois sendo escolhido um valor de $\tilde{f}$ grande, a região de influência dos grupos se torna muito abrangente, de modo que os grupos podem conter mais de uma região de densidade, se tornando assim não homogêneos. Um grupo é dividido quando a sua densidade interna é heterogênea, ou seja, quando existem pelo menos duas regiões distintas, cada uma com uma densidade maior do que a densidade entre essas regiões (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Portanto, um mecanismo é utilizado para monitorar a heterogeneidade dos grupos, em uma abordagem baseada em densidade, na qual as dimensões são analisadas de forma independente para evitar o efeito da maldição da dimensionalidade, que geralmente é muito severo no caso de análises de densidade em espaços de alta dimensionalidade (HASTIE; TIBSHIRANI; FRIEDMAN, 2009). Esse mecanismo baseado em densidade considera apenas as amostras $\mathbf{x}_{K_j^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k, j=1,\dots,\tilde{\tau}_k^i}$ dos subconjuntos $\mathcal{X}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentados na Equação (2.115) definidos para os grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ a cada amostra conforme a técnica de amostragem de reservatório (VITTER, 1985), no qual a quantidade de amostras $\tilde{\tau}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos subconjuntos $\mathcal{X}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ é limitada a N_{sub} amostras conforme a Equação (2.116). O procedimento de análise acerca da necessidade de divisão de grupo do algoritmo de agrupamento eVQ-AMS, baseado nesse mecanismo de densidade, é realizado na k -ésima amostra do fluxo de dados apenas para o grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, em que i^* é dado pela Equação (2.109), após a atualização do mesmo (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

O mecanismo baseado em densidade utilizado pelo algoritmo de agrupamento eVQ-AMS consiste na estimação de um modelo de mistura gaussiana (GMM - *Gaussian Mixture Model*) para cada dimensão $l \in \{1, \dots, n\}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h) = \sum_{i=1}^{\tilde{\theta}} \varpi_{k,i}^{i^*,l} \tilde{\phi}_{k,i}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h), \quad (2.150)$$

em que $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h) \in \mathbb{R}_+^*$ é o modelo de mistura gaussiana de $\tilde{\theta} \in \{1, 2\}$ componentes associado à l -ésima dimensão do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, computado para os dados $\mathbf{x}_h \Big|_{h=K_1^{i^*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i^*}}^{i^*}}$ pertencentes ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{i^*}$ do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, $\varpi_{k,i}^{i^*,l} \in [0, 1]$ é a proporção de mistura (peso) da i -ésima componente $\tilde{\phi}_{k,i}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h)$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h)$, e $\tilde{\phi}_{k,i}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h) \in \mathbb{R}_+^*$ é a i -ésima componente do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i^*,l}(\mathbf{x}_h)$, computada para o dado $\mathbf{x}_h$ pela distribuição normal monovariável:

$$\tilde{\phi}_{k,i}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{k,i}^{i*,l} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_h^l - \nu_{k,i}^{i*,l})^2}{2(\tilde{\sigma}_{k,i}^{i*,l})^2}}, \quad (2.151)$$

onde $\nu_{k,i}^{i*,l} \in \mathbb{R}$ é a média da i -ésima componente $\tilde{\phi}_{k,i}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, $\tilde{\sigma}_{k,i}^{i*,l} \in \mathbb{R}_+$ é o desvio padrão da i -ésima componente $\tilde{\phi}_{k,i}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, e x_h^l é a l -ésima coordenada do dado $\mathbf{x}_h$ pertencente ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{i*}$, em que $h \in \{K_1^{i*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i*}}^{i*}\}$. O número de componentes $\tilde{\theta}$ dos modelos de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{\tilde{\theta}=1,\dots,2, l=1,\dots,n}$ é selecionado como $\tilde{\theta} = 1$ componente e como $\tilde{\theta} = 2$ componentes, de modo que os modelos $\mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{l=1,\dots,n}$ e $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{l=1,\dots,n}$ são comparados em termos de qualidade por meio do Critério de Informação Bayesiano (BIC - *Bayesian Information Criterion*) (SCHWARZ, 1978). Sempre que as qualidades, em termos do Critério de Informação Bayesiano, dos modelos de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{l=1,\dots,n}$ para uma componente forem superiores, em todas as coordenadas $l \in \{1, \dots, n\}$, às qualidades dos modelos de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{l=1,\dots,n}$ para duas componentes, então a divisão do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra não é indicada, pois o modelo de uma única distribuição gaussiana representa melhor o grupo em todas as coordenadas, confirmando que o grupo é homogêneo (possui uma única região de densidade) (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

A estimação dos modelos de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{\tilde{\theta}=1,\dots,2, l=1,\dots,n}$ é realizada por meio do algoritmo de maximização da expectativa (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977), no qual as médias $\nu_{k,i}^{i*,l} \Big|_{i=1,\dots,\tilde{\theta}, l=1,\dots,n}$, os desvios padrão $\tilde{\sigma}_{k,i}^{i*,l} \Big|_{i=1,\dots,\tilde{\theta}, l=1,\dots,n}$ e as proporções de mistura $\varpi_{k,i}^{i*,l} \Big|_{i=1,\dots,\tilde{\theta}, l=1,\dots,n}$ das componentes $\tilde{\phi}_{k,i}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{i=1,\dots,\tilde{\theta}, l=1,\dots,n}$ são estimados. Esse algoritmo pode não convergir quando duas componentes são selecionadas ($\tilde{\theta} = 2$), mas apenas uma pode ser extraída de forma confiável e, neste caso, a divisão do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra também não é indicada (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Estimados, por meio da convergência do algoritmo de maximização da expectativa, os modelos de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{\tilde{\theta}=1,\dots,2, l=1,\dots,n}$ para todos os dados $\mathbf{x}_h \Big|_{h=K_1^{i*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i*}}^{i*}}$ pertencentes ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{i*}$ do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, tem-se que, para $\tilde{\theta} = 2$ componentes, o subconjunto $\mathcal{X}_k^{i*}$ é dividido, para cada coordenada $l \in \{1, \dots, n\}$, em dois subconjuntos $\Phi_{k,1}^{i*,l} \in \mathbb{R}^{n \times \tilde{\varphi}_{k,1}^{i*,l}}$ e $\Phi_{k,2}^{i*,l} \in \mathbb{R}^{n \times \tilde{\varphi}_{k,2}^{i*,l}}$. O subconjunto $\Phi_{k,1}^{i*,l}$ é dado por:

$$\Phi_{k,1}^{i*,l} = \left[\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{1,1}^{i*,l}} \cdots \mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,1}^{i*,l}} \cdots \mathbf{x}_{\mathcal{K}_{\tilde{\varphi}_{k,1}^{i*,l},1}^{i*,l}} \right] = \left\{ \mathbf{x}_h : \mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \geq \mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h), h = K_1^{i*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i*}}^{i*} \right\}, \quad (2.152)$$

sendo formado por todos os dados $\mathbf{x}_h$ de $\mathcal{X}_k^{i*}$ tal que a verossimilhança $\mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ em relação ao modelo de mistura gaussiana de 1 componente é maior ou igual à verossimilhança

$\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ em relação ao modelo de mistura gaussiana de 2 componentes, em que $\mathcal{K}_{j,1}^{i*,l} \in \mathbb{N}^*$ é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,1}^{i*,l}}$ pertencente a $\Phi_{k,1}^{i*,l}$, e $\tilde{\varphi}_{k,1}^{i*,l} \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de dados $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,1}^{i*,l}}$ pertencentes a $\Phi_{k,1}^{i*,l}$. O subconjunto $\Phi_{k,2}^{i*,l}$ é dado por:

$$\Phi_{k,2}^{i*,l} = \left[\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{1,2}^{i*,l}} \cdots \mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,2}^{i*,l}} \cdots \mathbf{x}_{\mathcal{K}_{\tilde{\varphi}_{k,2}^{i*,l}}^{i*,l}} \right] = \left\{ \mathbf{x}_h : \mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) > \mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h), h = K_1^{i*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i*}}^{i*} \right\}, \quad (2.153)$$

sendo formado por todos os dados $\mathbf{x}_h$ de $\mathcal{X}_k^{i*}$ tal que a verossimilhança $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ em relação ao modelo de mistura gaussiana de 2 componentes é maior que a verossimilhança $\mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ em relação ao modelo de mistura gaussiana de 1 componente, em que $\mathcal{K}_{j,2}^{i*,l} \in \mathbb{N}^*$ é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,2}^{i*,l}}$ pertencente a $\Phi_{k,2}^{i*,l}$, e $\tilde{\varphi}_{k,2}^{i*,l} \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de dados $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,2}^{i*,l}}$ pertencentes a $\Phi_{k,2}^{i*,l}$. Obviamente, para cada dimensão $l \in \{1, \dots, n\}$ do grupo vencedor Θ_k^{i*} , tem-se que $\tilde{\varphi}_{k,1}^{i*,l} + \tilde{\varphi}_{k,2}^{i*,l} = \tilde{\tau}_k^{i*}$, ou seja, a quantidade de dados $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,1}^{i*,l}}$ pertencentes a $\Phi_{k,1}^{i*,l}$ somada à quantidade de dados $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,2}^{i*,l}}$ pertencentes a $\Phi_{k,2}^{i*,l}$ é igual à quantidade de dados $\mathbf{x}_{K_j^{i*}}$ pertencentes a $\mathcal{X}_k^{i*}$ na k -ésima amostra. Para $\tilde{\theta} = 1$ componente, tem-se, para todas as coordenadas $l \in \{1, \dots, n\}$, que o subconjunto $\Phi_{k,1}^{i*,l}$ é igual a $\mathcal{X}_k^{i*}$, de modo que $\tilde{\varphi}_{k,1}^{i*,l} = \tilde{\tau}_k^{i*}$ e $\mathcal{K}_{j,1}^{i*,l} \Big|_{j=1, \dots, \tilde{\varphi}_{k,1}^{i*,l}} = K_j^{i*} \Big|_{j=1, \dots, \tilde{\tau}_k^{i*}}$ (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Assim, os índices de qualidade dos modelos de mistura gaussiana são computados por meio do Critério de Informação Bayesiano dado por (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\mathcal{Q}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l} = -2\mathcal{L}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l} + 2\tilde{\theta}N_{sub}, \quad (2.154)$$

em que $\mathcal{Q}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}$ é o índice de qualidade do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ de $\tilde{\theta}$ componentes associado à l -ésima dimensão do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, N_{sub} é o número máximo de amostras do subconjunto $\mathcal{X}_k^{i*}$ do grupo vencedor Θ_k^{i*} , e $\mathcal{L}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l} \in \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{L}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l} = \sum_{i=1}^{\tilde{\theta}} \left[\tilde{\varphi}_{k,i}^{i*,l} \ln(\varpi_{k,i}^{i*,l}) - \tilde{\varphi}_{k,i}^{i*,l} \ln(\tilde{\sigma}_{k,i}^{i*,l}) - \tilde{\varphi}_{k,i}^{i*,l} \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{\varphi}_{k,i}^{i*,l}} \left(\frac{(x_{\mathcal{K}_{j,i}^{i*,l}}^l - \nu_{k,i}^{i*,l})^2}{(\tilde{\sigma}_{k,i}^{i*,l})^2} \right) \right] \quad (2.155)$$

é a verossimilhança logarítmica do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, onde $x_{\mathcal{K}_{j,i}^{i*,l}}^l$ é a l -ésima coordenada do dado $\mathbf{x}_{\mathcal{K}_{j,i}^{i*,l}}$ pertencente ao subconjunto $\Phi_{k,i}^{i*,l}$ conforme as Equações (2.152)-(2.153). Quanto maior a verossimilhança logarítmica $\mathcal{L}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}$ dada pela Equação (2.155), menor é o índice de qualidade $\mathcal{Q}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}$ dado pela Equação (2.154). Quanto menor o índice de qualidade $\mathcal{Q}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}$ conforme a Equação (2.154), que também considera o termo de penalização $2\tilde{\theta}N_{sub}$, melhor é o modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,\tilde{\theta}}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$. O termo $2\tilde{\theta}N_{sub}$ penaliza modelos mais complexos (maior número de componentes $\tilde{\theta}$), reduzindo assim a probabilidade da divisão do grupo vencedor Θ_k^{i*} (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Sempre que um modelo de mistura gaussiana com duas componentes $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ alcança uma qualidade superior à qualidade de um modelo com uma única componente $\mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ para qualquer coordenada $l \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, sempre que $\mathcal{Q}_{k,2}^{i*,l} < \mathcal{Q}_{k,1}^{i*,l}$, realiza-se um teste estatístico para verificar se as duas médias $\nu_{k,1}^{i*,l}$ e $\nu_{k,2}^{i*,l}$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ são significativamente diferentes, considerando também os desvios padrão $\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l}$ e $\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l}$ e as proporções de mistura $\varpi_{k,1}^{i*,l}$ e $\varpi_{k,2}^{i*,l}$ correspondentes ao modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$. O teste estatístico utilizado pelo algoritmo de agrupamento eVQ-AMS na análise acerca da necessidade de divisão do grupo vencedor Θ_k^* é uma versão ponderada do teste de Welch (WELCH, 1947), em que o indicador de teste $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l} \in \mathbb{R}_+$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ de 2 componentes associado à l -ésima variável do grupo vencedor Θ_k^* na k -ésima amostra é dado por (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l} = \frac{\min_{i=1,2} \left(\varpi_{k,i}^{i*,l} \right) \left(\nu_{k,1}^{i*,l} - \nu_{k,2}^{i*,l} \right)^2}{\max_{i=1,2} \left(\varpi_{k,i}^{i*,l} \right) \left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l} \right)^2 + \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l} \right)^2} \quad (2.156)$$

Na Equação (2.156), quanto mais distintas forem as médias $\nu_{k,1}^{i*,l}$ e $\nu_{k,2}^{i*,l}$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, indicando uma maior separabilidade entre as componentes $\tilde{\phi}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ e $\tilde{\phi}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, maior o valor do indicador de teste $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l}$, e maior é a probabilidade da divisão do grupo vencedor Θ_k^* na k -ésima amostra. Quanto menores forem os desvios padrão $\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l}$ e $\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l}$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, indicando uma menor sobreposição entre as componentes $\tilde{\phi}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ e $\tilde{\phi}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, maior o valor do indicador de teste $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l}$, e maior é a probabilidade da divisão do grupo vencedor Θ_k^* na k -ésima amostra. Quanto menos distintas forem as proporções de mistura $\varpi_{k,1}^{i*,l}$ e $\varpi_{k,2}^{i*,l}$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, maior a razão entre seus valores mínimo e máximo, indicando pesos mais equilibrados entre as componentes $\tilde{\phi}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ e $\tilde{\phi}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, e maior é o valor do indicador de teste $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l}$, resultando em maior probabilidade da divisão do grupo vencedor Θ_k^* na k -ésima amostra (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015).

Portanto, o algoritmo de agrupamento eVQ-AMS utiliza a seguinte condição para a tomada de decisão sobre a divisão do grupo vencedor Θ_k^* na k -ésima amostra (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\exists l \in \{1, \dots, n\} : \mathcal{C} \left(\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \right) = 1 \quad \mathbf{E} \quad \mathcal{Q}_{k,2}^{i*,l} < \mathcal{Q}_{k,1}^{i*,l} \quad \mathbf{E} \quad \mathcal{I}_{k,2}^{i*,l} > \iota_o, \quad (2.157)$$

em que $\mathcal{C} \left(\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \right) \in \{0, 1\}$ é uma função lógica que retorna 1 se o modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ for convergente no algoritmo de maximização da expectativa (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977), e retorna 0 se o modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ não for convergente, $\mathcal{Q}_{k,1}^{i*,l}$ e $\mathcal{Q}_{k,2}^{i*,l}$ são os índices de qualidade dos modelos $\mathcal{G}_{k,1}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$ e $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, computados pela Equação (2.154) para $\tilde{\theta} = 1$ e $\tilde{\theta} = 2$, $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l}$ é o indicador de teste do modelo $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h)$, computado pela Equação (2.156), e $\iota_o \in \mathbb{R}_+$ é o parâmetro que define o valor máximo do indicador de teste $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l}$ para o qual a divisão do grupo vencedor Θ_k^* na k -ésima amostra não é realizada, configurado

pelo autor, de acordo com um nível de significância de 1% nas tabelas estatísticas, como $\iota_o = 2,57$ (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). Se a condição em (2.157) for satisfeita, então a divisão do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra é realizada através da coordenada l^* que satisfaz a condição em (2.157). Se mais de uma coordenada $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfazer a condição em (2.157), então a coordenada l^* é selecionada por:

$$l^* = \arg \max_{l=1, \dots, n} \left(\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l} \right), \quad (2.158)$$

ou seja, l^* é a coordenada correspondente ao maior valor do indicador de teste $\mathcal{I}_{k,2}^{i*,l}$ entre os modelos de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l}(\mathbf{x}_h) \Big|_{l=1, \dots, n}$ de 2 componentes.

No processo de divisão do grupo vencedor Θ_k^{i*} , um ponto de corte $\tilde{\alpha}_k^{i*,l^*} \in \mathbb{R}$ associado à l^* -ésima coordenada do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra é computado, se $\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} = \tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*}$, por (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015):

$$\tilde{\alpha}_k^{i*,l^*} = \frac{\nu_{k,1}^{i*,l^*} + \nu_{k,2}^{i*,l^*}}{2} + \frac{\left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 \left[\ln \left(\varpi_{k,1}^{i*,l^*} \right) - \ln \left(\varpi_{k,2}^{i*,l^*} \right) \right]}{\nu_{k,1}^{i*,l^*} - \nu_{k,2}^{i*,l^*}}, \quad (2.159)$$

em que $\nu_{k,1}^{i*,l^*}$ e $\nu_{k,2}^{i*,l^*}$ são as médias das componentes $\tilde{\phi}_{k,1}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ e $\tilde{\phi}_{k,2}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ associado à l^* -ésima coordenada do grupo vencedor Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, $\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*}$ e $\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*}$ são os desvios padrão das componentes $\tilde{\phi}_{k,1}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ e $\tilde{\phi}_{k,2}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$, e $\varpi_{k,1}^{i*,l^*}$ e $\varpi_{k,2}^{i*,l^*}$ são as proporções de mistura das componentes $\tilde{\phi}_{k,1}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ e $\tilde{\phi}_{k,2}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$ do modelo de mistura gaussiana $\mathcal{G}_{k,2}^{i*,l^*}(\mathbf{x}_h)$. Se $\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \neq \tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*}$, então o ponto de corte $\tilde{\alpha}_k^{i*,l^*}$ é dado por:

$$\tilde{\alpha}_k^{i*,l^*} = \frac{\nu_{k,2}^{i*,l^*} \left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 - \nu_{k,1}^{i*,l^*} \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2 \pm \sqrt{\nu_{k,1}^{i*,l^*} \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2 - \nu_{k,2}^{i*,l^*} \left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 - \left[\left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 - \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2 \right] \tilde{\beta}_k^{i*,l^*}}}{\left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 - \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2}, \quad (2.160)$$

em que a variável auxiliar $\tilde{\beta}_k^{i*,l^*} \in \mathbb{R}$ é dada por:

$$\tilde{\beta}_k^{i*,l^*} = 2 \left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2 \left[\ln \left(\varpi_{k,1}^{i*,l^*} \right) - \ln \left(\varpi_{k,2}^{i*,l^*} \right) \right] + \left(\nu_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2 \left(\tilde{\sigma}_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 - \left(\nu_{k,1}^{i*,l^*} \right)^2 \left(\tilde{\sigma}_{k,2}^{i*,l^*} \right)^2 \quad (2.161)$$

A partir do ponto de corte $\tilde{\alpha}_k^{i*,l^*}$ associado à l^* -ésima coordenada, o grupo vencedor Θ_k^{i*} é dividido em dois grupos $\Theta_k^{R_k+1}$ e $\Theta_k^{R_k+2}$, de modo que o subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathcal{X}_k^{R_k+1} = \left[\mathbf{x}_{K_1^{R_k+1}} \cdots \mathbf{x}_{K_j^{R_k+1}} \cdots \mathbf{x}_{K_{\tilde{\tau}_k^{R_k+1}}^{R_k+1}} \right] = \left\{ \mathbf{x}_h : x_h^{l^*} \leq \tilde{\alpha}_k^{i*,l^*}, h = K_1^{i*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i*}}^{i*} \right\}, \quad (2.162)$$

em que $K_j^{R_k+1}$ é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_j^{R_k+1}}$ pertencente ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$, e $\tilde{\tau}_k^{R_k+1}$ é a quantidade de dados $\mathbf{x}_{K_j^{R_k+1}}$ pertencentes ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$, que é igual a quantidade de dados $\mathbf{x}_h$ do subconjunto $\mathcal{X}_k^{i*}$ que satisfazem o

critério de que a sua l^* -ésima coordenada $x_h^{l^*}$ é menor ou igual ao ponto de corte $\tilde{\alpha}_k^{i^*, l^*}$. O subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+2}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+2}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathcal{X}_k^{R_k+2} = \left[\mathbf{x}_{K_1^{R_k+2}} \cdots \mathbf{x}_{K_j^{R_k+2}} \cdots \mathbf{x}_{K_{\tilde{\tau}_k^{R_k+2}}^{R_k+2}} \right] = \left\{ \mathbf{x}_h : x_h^{l^*} > \tilde{\alpha}_k^{i^*, l^*}, h = K_1^{i^*}, \dots, K_{\tilde{\tau}_k^{i^*}}^{i^*} \right\}, \quad (2.163)$$

em que $K_j^{R_k+2}$ é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do j -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_j^{R_k+2}}$ pertencente ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+2}$, e $\tilde{\tau}_k^{R_k+2}$ é a quantidade de dados $\mathbf{x}_{K_j^{R_k+2}}$ pertencentes ao subconjunto $\mathcal{X}_k^{R_k+2}$, que é igual a quantidade de dados $\mathbf{x}_h$ do subconjunto $\mathcal{X}_k^{i^*}$ que satisfazem o critério de que a sua l^* -ésima coordenada $x_h^{l^*}$ é maior que o ponto de corte $\tilde{\alpha}_k^{i^*, l^*}$. Os centros $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ e $\mathbf{c}_k^{R_k+2}$ e as inversas das matrizes de covariância $(\mathcal{F}_k^{R_k+1})^{-1}$ e $(\mathcal{F}_k^{R_k+2})^{-1}$ dos grupos $\Theta_k^{R_k+1}$ e $\Theta_k^{R_k+2}$ são então estimados de acordo com os dados dos subconjuntos $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$ e $\mathcal{X}_k^{R_k+2}$ na k -ésima amostra (LUGHOFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). O suporte $S_k^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$S_k^{R_k+1} = \frac{\tilde{\tau}_k^{R_k+1}}{\tilde{\tau}_k^{R_k+1} + \tilde{\tau}_k^{R_k+2}} S_k^{i^*}, \quad (2.164)$$

em que $S_k^{i^*}$ é o suporte do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra. O suporte $S_k^{R_k+2}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+2}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$S_k^{R_k+2} = \frac{\tilde{\tau}_k^{R_k+2}}{\tilde{\tau}_k^{R_k+1} + \tilde{\tau}_k^{R_k+2}} S_k^{i^*} \quad (2.165)$$

O grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, no qual é realizado o procedimento de divisão, é removido da partição, e o número de grupos R_k na k -ésima amostra é incrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k + 1 \quad (2.166)$$

2.4.3.6 Computação dos Graus de Pertinência

O algoritmo de agrupamento eVQ-AMS é aplicável tanto no contexto de agrupamento rígido quanto no contexto de agrupamento nebuloso. Em Lughofer (2008b), o algoritmo de agrupamento eVQ (sem a funcionalidade de mescla, divisão e elipsoides arbitrários) é aplicado na identificação da estrutura das proposições antecedentes de regras nebulosas em sistemas nebulosos evolutivos do tipo Takagi-Sugeno, em um modelo conhecido como sistema de inferência nebuloso flexível (FLEXFIS - *Flexible Fuzzy Inference System*). Nesta metodologia, é adotado o seguinte modelo de função de pertinência:

$$\mu_k^i = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{(x_k^l - c_k^{i,l})^2}{(\tilde{v}_k^{i,l})^2}}}{\sum_{j=1}^{R_k} e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{(x_k^l - c_k^{j,l})^2}{(\tilde{v}_k^{j,l})^2}}}, \quad (2.167)$$

em que $\mu_k^i \in (0, 1)$ é o grau de pertinência do dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, R_k é o número de grupos na k -ésima amostra, x_k^l é a l -ésima coordenada do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$, $c_k^{i,l}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\tilde{v}_k^{i,l} \in \mathbb{R}_+^*$ é o comprimento da l -ésima coordenada do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra. Quando um novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ é criado na k -ésima amostra, os seus comprimentos $\tilde{v}_k^{R_k,l} \mid_{l=1,\dots,n}$ são inicializados por (LUGHOFFER, 2008b):

$$\tilde{v}_k^{R_k,l} = \tilde{\xi} \varphi_k^l, \quad (2.168)$$

em que φ_k^l é a faixa associada à l -ésima coordenada do conjunto de dados $\mathbf{X}$ na k -ésima amostra, dada pela Equação (2.122), e $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^*$ é um fator de inicialização definido com um pequeno valor positivo, como $\tilde{\xi} = 1/\xi$, em que ξ é definido na Equação (2.121) e tem como valor padrão $\xi = 100$ conforme atribuição do autor (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). Quando o grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ é atualizado na k -ésima amostra, os seus comprimentos $\tilde{v}_k^{i^*,l} \mid_{l=1,\dots,n}$ são computados por (LUGHOFFER, 2008b):

$$\left(\tilde{v}_k^{i^*,l}\right)^2 = \frac{S_{k-1}^{i^*}}{S_k^{i^*}} \left(\tilde{v}_{k-1}^{i^*,l}\right)^2 + \frac{1}{S_k^{i^*}} \left(c_k^{i^*,l} - x_k^l\right)^2 + \left(c_k^{i^*,l} - c_{k-1}^{i^*,l}\right)^2, \quad (2.169)$$

em que $S_k^{i^*}$ é o suporte do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, atualizado conforme Equação (2.127), e $\mathbf{c}_k^{i^*}$ é o centro do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, atualizado conforme Equação (2.128).

2.4.3.7 Implementação do Algoritmo de Agrupamento de Quantização Vetorial Evolutiva para Elipsoides Arbitrários com Funcionalidade de Mescla e Divisão

De acordo com o autor, o eVQ-AMS se aproxima de um algoritmo de agrupamento evolutivo sem parâmetros, uma vez que as funcionalidades de mescla e de divisão compensam valores inadequados do parâmetro $\tilde{f}$ apresentado na Equação (2.114), que é o único parâmetro a ser definido pelo usuário (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). Assim, o algoritmo tende a dar bons resultados de agrupamento para uma ampla faixa de valores de $\tilde{f}$, diminuindo a necessidade de um conhecimento profundo do parâmetro por parte do usuário. Essa é uma propriedade importante, pois em determinados casos, múltiplas execuções de um algoritmo com várias configurações de parâmetros não são desejadas, como em fluxos de dados enormes, ou não são possíveis, no caso de agrupamento de fluxos de dados em tempo real (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015). Entretanto, destaca-se que o algoritmo de agrupamento eVQ-AMS possui diversos outros parâmetros que não são definidos diretamente pelo usuário, mas que são definidos em valores padronizados especificados pelo autor com base em experimentos realizados com fluxos de dados. Os procedimentos computacionais para a implementação do algoritmo de agrupamento eVQ-AMS são descritos no Algoritmo 2.7, onde $\mathbf{I}_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n .

Algoritmo 2.7: Algoritmo de Agrupamento eVQ-AMS.

Entrada: Conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$ e região de tolerância $\tilde{f}$;
Saída: Grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ a cada amostra k ;

- 1 Inicializar o primeiro grupo Θ_1^1 com $\mathbf{c}_1^1 = \mathbf{x}_1$, $S_1^1 = 1$, $\mathcal{X}_1^1 = [\mathbf{x}_1]$, e $(\mathcal{F}_1^1)^{-1} = \mathbf{I}_{n \times n}$;
- 2 Fazer $R_1 = 1$;
- 3 Fazer $k = 2$;
- 4 **enquanto** o dado $\mathbf{x}_k$ estiver disponível, **faça**
 - 5 Atualizar R_{k-1} e $\mathbf{c}_{k-1}^i \mid i=1, \dots, R_{k-1}$ para a k -ésima amostra: $R_k = R_{k-1}$, $\mathbf{c}_k^i = \mathbf{c}_{k-1}^i$;
 - 6 Selecionar grupo vencedor Θ_k^{i*} pela Equação (2.109);
 - 7 Selecionar grupo $\tilde{\Theta}_k^i$ mais próximo do grupo vencedor Θ_k^{i*} pela Equação (2.112);
 - 8 Calcular os raios dos grupos $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pela Equação (2.114);
 - 9 **se** a condição em (2.117) for satisfeita, **então**
 - 10 Atualizar R_k usando a Equação (2.118);
 - 11 Calcular $S_k^{R_k}$, $\mathbf{c}_k^{R_k}$ e $(\mathcal{F}_k^{R_k})^{-1}$ pelas Equações (2.119)-(2.121);
 - 12 Inicializar $\mathcal{X}_k^{R_k}$ pela Equação (2.123);
 - 13 Calcular $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k-1$, $(\mathcal{F}_k^i)^{-1} \mid i=1, \dots, R_k-1$ e $\mathcal{X}_k^i \mid i=1, \dots, R_k-1$ pelas Equações (2.124)-(2.126);
 - 14 **senão**
 - 15 Atualizar S_k^{i*} , $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $(\mathcal{F}_k^{i*})^{-1}$ pelas Equações (2.127)-(2.129);
 - 16 Atualizar $\mathcal{X}_k^{i*}$ pela técnica de amostragem de reservatório (VITTER, 1985);
 - 17 Calcular $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k, i \neq i^*$, $(\mathcal{F}_k^i)^{-1} \mid i=1, \dots, R_k, i \neq i^*$ e $\mathcal{X}_k^i \mid i=1, \dots, R_k, i \neq i^*$ pelas Equações (2.130)-(2.132);
 - 18 Atualizar $\tilde{\mathbf{c}}_k^{i*}$ pela Equação (2.133);
 - 19 **fim**
 - 20 **se** a condição em (2.135) for satisfeita, **então**
 - 21 **se** a condição em (2.143) for satisfeita, **então**
 - 22 Calcular $S_k^{R_k+1}$, $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ e $(\mathcal{F}_k^{R_k+1})^{-1}$ pelas Equações (2.146)-(2.148);
 - 23 Calcular $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$ pela mescla de $\mathcal{X}_k^{i*}$ e $\mathcal{X}_k^{j*}$;
 - 24 Remover os grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} ;
 - 25 Atualizar R_k usando a Equação (2.149);
 - 26 **fim**
 - 27 **fim**
 - 28 **se** a condição em (2.157) for satisfeita, **então**
 - 29 Calcular $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$, $\mathcal{X}_k^{R_k+2}$, $S_k^{R_k+1}$ e $S_k^{R_k+2}$ pelas Equações (2.162)-(2.165);
 - 30 Calcular $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$, $\mathbf{c}_k^{R_k+2}$, $(\mathcal{F}_k^{R_k+1})^{-1}$ e $(\mathcal{F}_k^{R_k+2})^{-1}$ a partir de $\mathcal{X}_k^{R_k+1}$ e $\mathcal{X}_k^{R_k+2}$;
 - 31 Remover o grupo Θ_k^{i*} ;
 - 32 Atualizar R_k usando a Equação (2.166);
 - 33 **fim**
 - 34 Calcular $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ pela Equação (2.167);
 - 35 Fazer $k \leftarrow k + 1$;
 - 36 **fim**

2.4.4 Outros Algoritmos de Agrupamento Evolutivo

Outros algoritmos de agrupamento evolutivo podem ser encontrados na literatura¹⁰. Em Bharitkar e Filev (2001) é proposto um algoritmo *online* com a abordagem de Aprendizagem por Quantização Vetorial (LVQ - *Learning Vector Quantization*), de forma semelhante ao caso do algoritmo de agrupamento eVQ-AMS. Nele, toda nova amostra de dados influencia na estrutura dos grupos, seja alterando a posição do grupo mais próximo ou criando um novo grupo, de acordo com a distância do dado para os centros existentes. Cada grupo nesse algoritmo é igual a média dos dados associados a ele. De acordo com Angelov (2013), trata-se de um algoritmo computacionalmente leve, porém com uma tendência a formar muitos grupos, que em alguns casos são criados também a partir de *outliers*.

Em Deng e Kasabov (2003) é proposto um algoritmo de Mapa Auto-Organizável Evolutivo (ESOM - *Evolving Self-Organizing Map*) que possui uma estrutura de rede neural evolutiva e aprendizagem rápida *online*. Os mapas auto-organizáveis evolutivos formam malhas de baixa dimensionalidade para os protótipos de nós (similares aos centros de grupo) das redes neurais que evoluem com o fluxo de dados. De acordo com Deng e Kasabov (2003), o algoritmo ESOM alcança bons desempenhos nas tarefas de agrupamento evolutivo e classificação em um rápido processo de aprendizagem, sendo adequado para análise de padrões *online* em problemas do mundo real.

Em Rong et al. (2006) é proposto o Sistema de Inferência Nebuloso Adaptativo Sequencial (SAFIS - *Sequential Adaptive Fuzzy Inference System*), que é desenvolvido com base na equivalência funcional entre uma Função de Base Radial (RBF - *Radial Basis Function*) e um sistema de inferência nebuloso. Ele incorpora o conceito de influência de uma regra nebulosa (grupo) como critério para adição ou remoção de regras (grupos) no processo de aprendizagem *online*. No caso da não adição de uma regra, o dado atual modifica o grupo mais próximo através de um esquema de Filtro de Kalman Estendido (EKF - *Extended Kalman Filter*). De acordo com Rong et al. (2006), esse algoritmo é útil no contexto de identificação não linear e previsão de séries temporais caóticas, alcançando bons resultados com poucas regras (grupos).

Em Hartert, Sayed-Mouchaweh e Billaudel (2010) é proposta uma abordagem de classificação adaptativa chamada de Método Dinâmico Nebuloso dos K Vizinhos mais Próximos (DFKNN - *Dynamic Fuzzy K-Nearest Neighbours*) para monitorar e classificar sistemas evolutivos *online*. O método compreende as fases de detecção, em que uma evolução de classe pode ser detectada e confirmada após a classificação de cada novo padrão (dado), de adaptação, em que os parâmetros da classe evoluída são atualizados de forma incremental, e de validação, em que as classes adaptadas são validadas para manter

¹⁰ Além dos algoritmos de agrupamento evolutivo descritos nesta seção, uma discussão sobre os algoritmos de agrupamento evolutivo do estado da arte é realizada na Seção 1.1.

apenas as classes representativas. Os conjuntos de aprendizagem (grupos) de cada classe devem conter no mínimo dois padrões (dados), e são caracterizados pelo centro e pelo desvio padrão no contexto evolutivo.

Em Filev e Georgieva (2010) e (DOVŽAN; ŠKRJANC, 2011) são propostas versões evolutivas do algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafson-Kessel, em que é realizado o cálculo recursivo da inversa e do determinante da matriz de covariância nebulosa. Ademais, em Angelov (2013) é apresentada outra expressão para a computação recursiva dessas variáveis. Assim, o algoritmo consegue, no contexto *online*, gerar grupos com formas elipsoidais, usando distâncias de norma induzida do tipo Mahalanobis a partir de matrizes de covariância nebulosa.

Em Baruah e Angelov (2012) é proposto um método baseado no popular algoritmo de deslocamento de média, chamado de algoritmo de agrupamento de Médias Locais Evolutivas (ELM - *Evolving Local Means*). Ele se baseia no *kernel* do tipo Epanechnikov, e cada média local está associada a um centro de grupo, que é atualizado se o dado atual associado a ele estiver próximo em termos de raio e variância. Caso contrário, o dado é usado então na criação de um novo grupo. A média e a variância de cada grupo são atualizadas de maneira recursiva e, de acordo com Angelov (2013), o algoritmo é adequado se a distribuição de dados for convexa.

Em Angelov, Gu e Príncipe (2018) é proposta uma abordagem para a aprendizagem autônoma de sistemas multi-modelos a partir de fluxos de dados, chamada de Sistema Multi-Modelo de Aprendizagem Autônoma (ALMMo - *Autonomous Learning Multi-Model*). Este algoritmo é totalmente dirigido a dados e decide a sua estrutura com base em nuvens de dados (grupos) não paramétricas extraídas empiricamente dos mesmos. De acordo com Angelov, Gu e Príncipe (2018), seu mecanismo de evolução de estrutura e de monitoramento de qualidade das nuvens consegue lidar corretamente com os desvios no padrão de dados. Os grupos compõem a estrutura da proposição antecedente de regras nebulosas do tipo AnYa (Angelov-Yager), que foram introduzidas em Angelov e Yager (2012) com o objetivo de simplificar a proposição antecedente das regras nebulosas, que é unicamente definida por centros de nuvens de dados (grupos) não paramétricas e livres de restrições. Esse algoritmo é útil em diversos contextos, como classificação (SOARES; ANGELOV; GU, 2020), predição de séries temporais (ALGHAMDI et al., 2019) e identificação de sistemas dinâmicos não lineares (CAVALCANTE JUNIOR; RODRIGUES JUNIOR; TORRES, 2021).

2.5 Resumo do Capítulo

Este capítulo apresentou a fundamentação do tópico de algoritmos de agrupamento nebuloso. Na Seção 2.1 foram apresentados o conceito e a formulação de uma partição rígida, que é uma partição baseada na teoria clássica de conjuntos, na qual os grupos são mutuamente exclusivos, ou seja, cada dado pertence apenas a um único grupo com grau de pertinência unitário, conforme Equações (2.2)-(2.3). Na Seção 2.2 foram apresentados o conceito e a formulação de uma partição nebulosa, que é uma generalização da partição rígida na qual permite-se que os graus de pertinência assumam valores no intervalo contínuo $[0, 1]$, de modo que cada dado pertence a todos os grupos com o devido grau de pertinência associado a cada grupo, conforme Equação (2.4). As partições nebulosas são a base para os algoritmos de agrupamento nebuloso, que podem ser realizados *offline* (algoritmos em batelada) ou *online* (destacam-se os algoritmos evolutivos).

Na Seção 2.3 foram apresentadas as formulações de algoritmos de agrupamento nebuloso em batelada: FCM, GK, FMLE e SC. O algoritmo FCM (Seção 2.3.1) realiza iterações para encontrar os centros dos grupos e os graus de pertinência de acordo com a otimização do funcional *c-means* nebuloso apresentado na Equação (2.5). Os protótipos dos grupos têm formas fixas de acordo a matriz de norma induzida escolhida (geralmente a matriz identidade), e o número de grupos é fornecido pelo usuário. O algoritmo GK (Seção 2.3.2) também realiza iterações para encontrar os centros dos grupos e os graus de pertinência, de acordo com a otimização da função objetivo na Equação (2.17) que é uma adaptação do funcional *c-means* nebuloso para o caso de matrizes de norma induzida adaptativas em cada grupo. Logo, os protótipos dos grupos se adaptam de acordo com matrizes de covariância nebulosa, e o número de grupos também é fornecido pelo usuário. O algoritmo FMLE (Seção 2.3.3) também realiza iterações baseadas em otimização para encontrar os centros dos grupos e os graus de pertinência, e introduz uma métrica de distância exponencial como medida de dissimilaridade em uma função de estimativa de máxima verossimilhança nebulosa na Equação (2.26), que também apresenta conceitos estatísticos como a função de probabilidade *a priori* na Equação (2.28). O algoritmo detecta grupos de várias formas, tamanhos e densidades, e o número de grupos também é fornecido pelo usuário. Esses algoritmos baseados em otimização dependem fortemente de uma boa inicialização. Diferentemente dos algoritmos baseados em otimização, o algoritmo SC (Seção 2.3.4) é baseado na computação de um potencial gaussiano dos dados conforme a Equação (2.35). O dado com maior potencial é selecionado como centro de grupo, e um procedimento subtrativo é realizado para encontrar os demais centros de grupo até que os potenciais alcancem valores abaixo de um limite estabelecido. A quantidade de grupos da partição é determinada autonomamente pelo algoritmo com o auxílio de parâmetros fornecidos pelo usuário.

Na Seção 2.4 foram apresentadas as formulações de algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo: eTS, eTS+ e eVQ-AMS. A partir da abordagem de potencial baseada em densidade de dados, o algoritmo eTS (Seção 2.4.1) realiza o agrupamento de fluxos de dados de forma *online* e evolutiva, iniciando a partir da primeira amostra de dados. O potencial é computado a partir da função de Cauchy de primeira ordem na Equação (2.45), que possibilita o cálculo recursivo do mesmo conforme a Equação (2.46), a partir do qual a tomada de decisão do algoritmo é realizada sobre a criação e atualização de grupos, e os graus de pertinência são computados a partir de funções gaussianas conforme Equação (2.63). O algoritmo eTS foi otimizado em diversos aspectos, realizando a simplificação de procedimentos e acrescentando novas ferramentas e critérios, resultando no algoritmo eTS+ (Seção 2.4.2). Este algoritmo forma grupos representativos com alta capacidade de generalização a partir da computação de potencial pela função de Cauchy na Equação (2.66), a qual é computada recursivamente pela Equação (2.67). As suas funções de pertinência gaussianas na Equação (2.75) cobrem o espaço de dados, o número de grupos é determinado somente a partir da distribuição dos dados através de condições para adição e remoção de grupos em (2.80), (2.82), e (2.86), e a estrutura é simplificada com a remoção de grupos menos representativos através das condições em (2.98), (2.100) e (2.102). Ademais, o algoritmo eTS+ é praticamente livre de parâmetros específicos do usuário. O algoritmo eVQ-AMS (Seção 2.4.3) é baseado no método de quantização vetorial, e também realiza o agrupamento de fluxos de dados de forma *online* e evolutiva, iniciando a partir da primeira amostra de dados. No seu processo de agrupamento, é selecionado a cada amostra um grupo vencedor conforme a Equação (2.109), que pode ser atualizado ou permitir a criação de um grupo próximo de acordo com a condição em (2.117). Um procedimento de mescla de grupos é realizado de acordo com as condições em (2.135) e (2.143) baseadas nos graus de sobreposição e volumes dos grupos. Um procedimento de divisão de grupos é realizado quando as suas estruturas de densidade interna são heterogêneas, conforme a condição em (2.157). No contexto de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo é aplicado com funções de pertinência gaussianas conforme a Equação (2.167). Ademais, o algoritmo eVQ-AMS é praticamente livre de parâmetros específicos do usuário. Outros algoritmos de agrupamento evolutivo são apresentados na Seção 2.4.4.

Os algoritmos de agrupamento nebuloso apresentados neste capítulo, juntamente com conceitos tais como partições nebulosas, agrupamento nebuloso evolutivo, matrizes de covariância nebulosa e a computação recursiva de suas inversas, grau de incerteza, métrica de distância exponencial, potencial de dados, e condições para criação, atualização e mescla de grupos, servem como fundamentação para o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, apresentado no capítulo seguinte (3).

Parte III

REFERENCIAL METODOLÓGICO

3 Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo com Critério Gaussiano Multivariável

Este capítulo apresenta o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto nesta dissertação a partir de sua formulação matemática e de seus aspectos de implementação, incluindo os procedimentos computacionais, parametrização e inicialização.

3.1 Formulação Matemática

Considere um fluxo de dados denotado pela matriz $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k \cdots \mathbf{x}_N] \in \mathbb{R}^{n \times N}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis do fluxo de dados $\mathbf{X}$, $N \in \mathbb{N}^*$ é o número de amostras do fluxo de dados $\mathbf{X}$, $\mathbf{x}_k = [x_k^1 \cdots x_k^l \cdots x_k^n]^T \in \mathbb{R}^n$ é o dado na k -ésima amostra do fluxo de dados $\mathbf{X}$, e $x_k^l \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra. O algoritmo realiza o agrupamento nebuloso evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$ em uma abordagem “*from scratch*”, ou seja, determinando as suas variáveis completamente a partir dos dados $\mathbf{x}_k$ disponibilizados em fluxo, iniciando a partir do primeiro dado $\mathbf{x}_1$, de modo que o número de grupos na primeira amostra é $R_1 = 1$ e o centro do primeiro grupo na primeira amostra é $\mathbf{c}_1^1 = \mathbf{x}_1$.

3.1.1 Normalização dos Dados

O algoritmo realiza um procedimento de normalização de dados a cada amostra, com o objetivo de obter similaridade na escala dos mesmos. Para cada dado $\mathbf{x}_k$, tem-se que o dado normalizado é $\bar{\mathbf{x}}_k = [\bar{x}_k^1 \cdots \bar{x}_k^l \cdots \bar{x}_k^n]^T \in [0, 1]^n$, em que $\bar{x}_k^l \in [0, 1]$ é a l -ésima coordenada do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra. As coordenadas $\bar{x}_k^l \Big|_{l=1, \dots, n}$ são dadas por:

$$\bar{x}_k^l = \frac{x_k^l - \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)}{\max_{j=1, \dots, k} (x_j^l) - \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)}, \quad (3.1)$$

em que $\min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)$ e $\max_{j=1, \dots, k} (x_j^l)$ são os valores mínimo e máximo da l -ésima coordenada x_j^l dos dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k}$ até a k -ésima amostra.

No fluxo de dados $\mathbf{X}$, são detectadas mudanças no valor máximo $\max_{j=1, \dots, k} (x_j^l)$ ou mínimo $\min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)$ de cada coordenada $l \in \{1, \dots, n\}$ dos dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k}$ até a k -ésima amostra em relação ao valor máximo $\max_{j=1, \dots, k-1} (x_j^l)$ ou mínimo $\min_{j=1, \dots, k-1} (x_j^l)$ de cada coordenada $l \in \{1, \dots, n\}$ dos dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k-1}$ até a $(k-1)$ -ésima amostra, de modo

que a seguinte condição é analisada:

$$\exists l \in \{1, \dots, n\} : \max_{j=1, \dots, k} (x_j^l) > \max_{j=1, \dots, k-1} (x_j^l) \quad \text{OU} \quad \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l) < \min_{j=1, \dots, k-1} (x_j^l) \quad (3.2)$$

Se a condição em (3.2) for satisfeita, então, para todos os valores de l que satisfazem esta condição, as coordenadas $\bar{c}_k^{i,l} \Big|_{i=1, \dots, R_k} \in [0, 1]$ dos $R_k \in \mathbb{N}^*$ centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k} \in [0, 1]^n$ são atualizadas por:

$$\bar{c}_k^{i,l} = \frac{c_k^{i,l} - \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)}{\max_{j=1, \dots, k} (x_j^l) - \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)}, \quad (3.3)$$

em que $c_k^{i,l} \in \mathbb{R}$ é a l -ésima coordenada do i -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^i \in \mathbb{R}^n$ na k -ésima amostra. Similarmente, se a condição em (3.2) for satisfeita, então, para todos os valores de l que satisfazem esta condição, as coordenadas $\bar{x}_\theta^l \Big|_{\theta=\psi_k+1, \dots, k-1}$ dos $\eta_k \in \mathbb{N}$ dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_\theta \Big|_{\theta=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra são atualizadas por:

$$\bar{x}_\theta^l = \frac{x_\theta^l - \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)}{\max_{j=1, \dots, k} (x_j^l) - \min_{j=1, \dots, k} (x_j^l)}, \quad (3.4)$$

em que x_θ^l é a l -ésima coordenada do θ -ésimo dado $\mathbf{x}_\theta$, $\psi_k \in \mathbb{N}^*$ é a amostra da última criação de grupo quantificada na k -ésima amostra, e η_k dado por

$$\eta_k = k - 1 - \psi_k \quad (3.5)$$

é a quantidade de dados $\mathbf{x}_\theta \Big|_{\theta=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo ($\theta = \psi_k$) até a $(k-1)$ -ésima amostra ($\theta = k-1$), excluindo o extremo $\theta = \psi_k$.

Os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra e os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_\theta \Big|_{\theta=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra são atualizados pelas Equações (3.3)-(3.4) em caso de mudança nas faixas de operação do fluxo de dados $\mathbf{X}$, detectada pela condição em (3.2), uma vez que $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ e $\bar{\mathbf{x}}_\theta \Big|_{\theta=\psi_k+1, \dots, k-1}$ são determinantes para a tomada de decisão do algoritmo sobre a atualização e criação de grupos na k -ésima amostra, baseado na computação de potenciais, conforme mostrado na Seções 3.1.2-3.1.6.

Ademais, se a condição em (3.2) for satisfeita, então as distâncias médias dos dados normalizados associados¹ aos grupos são atualizadas por:

$$\bar{d}_{k-1}^i \leftarrow \frac{\sum_{l=1}^n \varphi_{k-1}^l}{\sum_{l=1}^n \varphi_k^l} \bar{d}_{k-1}^i, \quad (3.6)$$

¹ A associação um dado $\mathbf{x}_k$ a um grupo Θ_k^i é explicada na Seção 3.1.8.

em que o símbolo “ $\leftarrow$ ” denota uma atribuição², $\bar{d}_{k-1}^i$ é a distância média, na $(k-1)$ -ésima amostra³, dos dados normalizados associados ao i -ésimo grupo Θ_k^i , e $\varphi_k^l \in \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_k^l = \max_{j=1,\dots,k} (x_j^l) - \min_{j=1,\dots,k} (x_j^l) \quad (3.7)$$

é a faixa de operação da l -ésima coordenada do fluxo de dados $\mathbf{X}$ na k -ésima amostra, sendo a diferença entre o valor máximo $\max_{j=1,\dots,k} (x_j^l)$ e o valor mínimo $\min_{j=1,\dots,k} (x_j^l)$ de $x_j^l \mid j=1,\dots,k$. No início do fluxo de dados $\mathbf{X}$, as faixas de operação $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$ são estreitas (o valor máximo é próximo do valor mínimo), de modo que mesmo pequenas distâncias entre os dados levam a grandes distâncias entre os dados normalizados⁴. À medida que as faixas de operação $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$ de $\mathbf{X}$ aumentam (o valor máximo se torna mais distante do valor mínimo), as distâncias entre os dados normalizados tendem a diminuir. Logo, para compensar o efeito da variação das faixas de operação $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$ sobre as distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \mid i=1,\dots,R_k$, os valores de $\bar{d}_{k-1}^i \mid i=1,\dots,R_k$ são corrigidos pela Equação (3.6) no caso de mudança em $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$, detectada pela condição em (3.2). O fator de correção das distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \mid i=1,\dots,R_k$ na Equação (3.6) é sempre menor que a unidade, uma vez que, sempre que uma mudança nas faixas de operação $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$ é detectada pela condição em (3.2), o somatório de $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$ na k -ésima amostra é maior que o somatório de $\varphi_{k-1}^l \mid l=1,\dots,n$ na $(k-1)$ -ésima amostra, de modo que as distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \mid i=1,\dots,R_k$ tendem a diminuir quando há uma mudança em $\varphi_k^l \mid l=1,\dots,n$.

3.1.2 Computação de Potencial

A computação do potencial para o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ é necessária para a tomada de decisão sobre os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1,\dots,R_k$. Para isso, a densidade, a qual está associada com a proximidade dos dados em relação a $\bar{\mathbf{x}}_k$, é uma informação comumente usada em algoritmos de agrupamento para a computação de seu potencial (CHIU, 1994; ANGELOV; FILEV, 2004; ANGELOV; FILEV, 2005; ANGELOV; ZHOU, 2006; ANGELOV, 2010; ANGELOV; GU; PRÍNCIPE, 2018). Na computação de densidade, o seu valor cresce para dados $\mathbf{x}_k$ que estão próximos de uma grande quantidade de outros dados, e decresce para dados $\mathbf{x}_k$ que estão próximos de uma pequena quantidade de outros dados. Uma vez que grupos (*clusters*) são caracterizados por agregação de dados, a densidade é

² Nesta dissertação, uma atribuição “ $\leftarrow$ ” é utilizada ao invés de uma igualdade “ $=$ ” sempre que o valor de uma variável é atualizado ou redefinido com base em um cálculo que depende do estado atual dessa mesma variável.

³ As distâncias médias $\bar{d}_k^i \mid i=1,\dots,R_k$ na k -ésima amostra são computadas em uma etapa subsequente do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, conforme mostrado na Seção 3.1.8. A definição das distâncias médias $\bar{d}_k^i \mid i=1,\dots,R_k$ dos dados normalizados associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1,\dots,R_k$, na k -ésima amostra, também é dada na Seção 3.1.8.

⁴ Grandes distâncias dentro do contexto de dados normalizados, em que a máxima distância euclidiana entre dois dados é $\sqrt{n}$, em que n é o número de variáveis do fluxo de dados $\mathbf{X}$.

útil na localização de centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ representativos do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (PEDRYCZ, 2005).

A taxa de variação dos dados, a qual é relevante no contexto de fluxos de dados, geralmente associados a séries temporais, pode também ser útil na computação de potencial. Dados $\mathbf{x}_k$ com baixa taxa de variação estão próximos dos dados de regime permanente de séries temporais. Por exemplo, em sistemas dinâmicos, dados de entrada e saída em regime permanente são fundamentais para o entendimento da operação do sistema (CLARK, 1996). Além disso, no contexto de séries temporais, uma baixa taxa de variação está correlacionada com a densidade, pois dados com baixa variabilidade estão tipicamente mais próximos uns dos outros. Em fluxos de dados *online*, onde a densidade de $\mathbf{x}_k$ não é computada com o conjunto de dados $\mathbf{X}$ inteiro, a taxa de variação é útil na identificação de centros de grupo relevantes, de modo que dados $\mathbf{x}_k$ com menores taxas de variação têm maiores potenciais.

O potencial é computado a partir de uma função multivariável, baseada no método da soma ponderada de funções que consideram a densidade e a taxa de variação dos dados, como dado por:

$$P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = (1 - \gamma)f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k} + \gamma f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}, \quad (3.8)$$

em que $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} \in [0, 1]$ é o potencial do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra, $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k} \in [0, 1]$ é a função para a densidade de $\bar{\mathbf{x}}_k$, $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k} \in [0, 1]$ é a função para a taxa de variação de $\bar{\mathbf{x}}_k$, e $\gamma \in [0, 1]$ determina um valor de ponderação para a função multivariável, sendo chamado de peso multivariável. Um valor de $\gamma = 0$ atribui peso total para a densidade de $\bar{\mathbf{x}}_k$, enquanto $\gamma = 1$ atribui peso total para a taxa de variação de $\bar{\mathbf{x}}_k$ na computação de potencial. A formulação matemática da função de potencial apresentada na Equação (3.8) habilita o especialista a tomar decisões baseado na relevância dessas duas variáveis. A Figura 4 ilustra o efeito do peso multivariável γ sobre o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ na Equação (3.8) em função da amostra k , a partir de um par de curvas⁵ das funções $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ e $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$, em que a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,00$ ($P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$) é ilustrada em “linha laranja”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,20$ em “linha amarela”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,40$ em “linha roxa”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,60$ em “linha verde”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,80$ em “linha azul”, e a curva de potencial correspondente a $\gamma = 1,00$ ($P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$) em “linha vermelha”. Pode-se ver que menores valores de γ resultam em um comportamento do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ mais próximo ao da função para a densidade $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$, enquanto maiores valores de γ resultam em um comportamento do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ mais próximo ao da função para a taxa de variação $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$.

⁵ O par de curvas das funções $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ e $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ mostrado na Figura 7 tem o propósito ilustrativo.

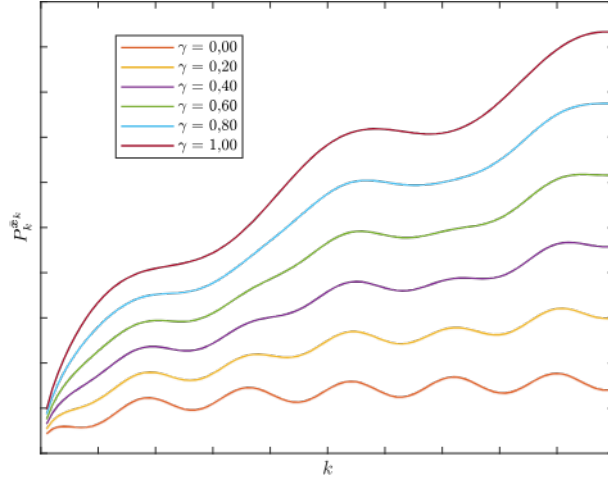


Figura 4 – Ilustração do efeito do peso multivariável γ sobre o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ em função da amostra k , a partir de um par de curvas da função $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ para a densidade de $\bar{\mathbf{x}}_k$ e da função $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ para a taxa de variação de $\bar{\mathbf{x}}_k$, em que a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,00$ ($P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$) é ilustrada em “linha laranja”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,20$ em “linha amarela”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,40$ em “linha roxa”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,60$ em “linha verde”, a curva de potencial correspondente a $\gamma = 0,80$ em “linha azul”, e a curva de potencial correspondente a $\gamma = 1,00$ ($P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$) em “linha vermelha”. Fonte: Autor.

A função para a densidade $f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ na Equação (3.8) é dada por:

$$f_d^{\bar{\mathbf{x}}_k} = \frac{1}{R_k + \eta_k} \left(\sum_{i=1}^{R_k} e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{D}_k^i)^2} + \sum_{j=\psi_k+1}^{k-1} e^{-\frac{4}{r^2} \|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_j\|^2} \right), \quad (3.9)$$

em que R_k é o número de grupos na k -ésima amostra, η_k é a quantidade de dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra, dada pela Equação (3.5), ψ_k é a amostra da última criação de grupo quantificada na k -ésima amostra, $r \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro relacionado com o decaimento da função gaussiana (o desvio padrão é $r/2$), $\bar{\mathbf{x}}_j$ é o dado normalizado na j -ésima amostra, e $\bar{D}_k^i \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$\bar{D}_k^i = e^{\sqrt{(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \left[\det \left((\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} (\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)} - 1} \quad (3.10)$$

é a distância adaptativa entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra, onde $(\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a inversa da matriz de covariância nebulosa, na $(k-1)$ -ésima amostra⁶, do i -ésimo grupo Θ_k^i , e n é o número de variáveis do fluxo de dados $\mathbf{X}$. As matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_N^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_N^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ têm a seguinte formulação geral⁷ (BABUŠKA, 2012):

⁶ As inversas das matrizes de covariância nebulosa $(\mathbf{F}_k^i)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são computadas em uma etapa subsequente do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, conforme mostrado na Seção 3.1.10.

⁷ A formulação geral para as matrizes de covariância nebulosa considera que todo o conjunto de dados $\mathbf{X}$ está à disposição. A formulação das matrizes de covariância nebulosa no contexto evolutivo é dada na Seção 3.1.10.

$$\mathbf{F}_N^i = \frac{\sum_{j=1}^N (\mu_j^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_N^i) (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_N^i)^T}{\sum_{j=1}^N (\mu_j^i)^m} = \frac{\boldsymbol{\Xi}_N^i}{\Lambda_N^i}, \quad (3.11)$$

em que N é o número total de amostras no fluxo de dados $\mathbf{X}$, $\mu_j^i \in [0, 1]$ é o grau de pertinência do j -ésimo dado $\mathbf{x}_j$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_N^i , $m \in (1, \infty)$ é um fator de ponderação exponencial, de modo que quanto maior o valor de m , maior a incerteza (*fuzziness*) no agrupamento do fluxo de dados $\mathbf{X}$, $\bar{\mathbf{x}}_j$ é o dado normalizado na j -ésima amostra, $\bar{\mathbf{c}}_N^i$ é o i -ésimo centro de grupo normalizado, $\boldsymbol{\Xi}_N^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a expressão matemática correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_N^i$ do i -ésimo grupo Θ_N^i , e $\Lambda_N^i \in \mathbb{R}_+^*$ é a expressão matemática correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_N^i$ do i -ésimo grupo Θ_N^i . A partir da Equação (3.11), tem-se que as inversas das matrizes de covariância nebulosa $(\mathbf{F}_N^i)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_N^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ são dadas por:

$$(\mathbf{F}_N^i)^{-1} = \left(\frac{\boldsymbol{\Xi}_N^i}{\Lambda_N^i} \right)^{-1} = \frac{(\boldsymbol{\Xi}_N^i)^{-1}}{(\Lambda_N^i)^{-1}} = \Lambda_N^i (\boldsymbol{\Xi}_N^i)^{-1} \quad (3.12)$$

Na Equação (3.10), a matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^i$ induz uma norma de Mahalanobis, a qual é aplicada em uma expressão exponencial, elevando os valores de distância $\bar{D}_k^i$ resultantes e comprimindo as curvas isométricas dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, dando assim menos significância a dados mais distantes dos centros de grupo $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ e reduzindo também o efeito de ruídos e *outliers* sobre as características do agrupamento (ASKARI, 2021). A Figura 5 ilustra o efeito do uso da métrica de distância exponencial na Equação (3.10) sobre o processo de agrupamento nebuloso evolutivo, em que $\bar{\mathcal{D}}_k^i$ é a distância de norma induzida de Mahalanobis entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra (o expoente na Equação 3.10), computada por $\bar{\mathcal{D}}_k^i = \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \left[\det \left((\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} (\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)}$. A Figura 5a mostra os gráficos de $\bar{D}_k^i$ em função de $\bar{\mathcal{D}}_k^i$ para o uso direto da norma induzida de Mahalanobis ($\bar{D}_k^i = \bar{\mathcal{D}}_k^i$), ilustrado em “linha preta”, e para o uso da expressão exponencial ($\bar{D}_k^i = e^{\bar{\mathcal{D}}_k^i} - 1$) aplicada na Equação (3.10), ilustrado em “linha verde”. Pode-se ver que o uso da métrica de distância exponencial eleva os valores de distância $\bar{D}_k^i$ resultantes em comparação com o uso direto da norma induzida de Mahalanobis. A Figura 5b ilustra o efeito da métrica de distância exponencial na Equação (3.10) sobre as curvas isométricas dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, as curvas isométricas ($\bar{D}_k^i = \bar{\mathcal{D}}_k^i$ constante) dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ para o uso direto da norma induzida de Mahalanobis em “linhas tracejadas pretas”, e as curvas isométricas ($\bar{D}_k^i = e^{\bar{\mathcal{D}}_k^i} - 1$ constante) dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ para o uso da métrica de distância

exponencial na Equação (3.10) em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o uso da métrica de distância exponencial comprime as curvas isométricas dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em comparação com o uso direto da norma induzida de Mahalanobis.

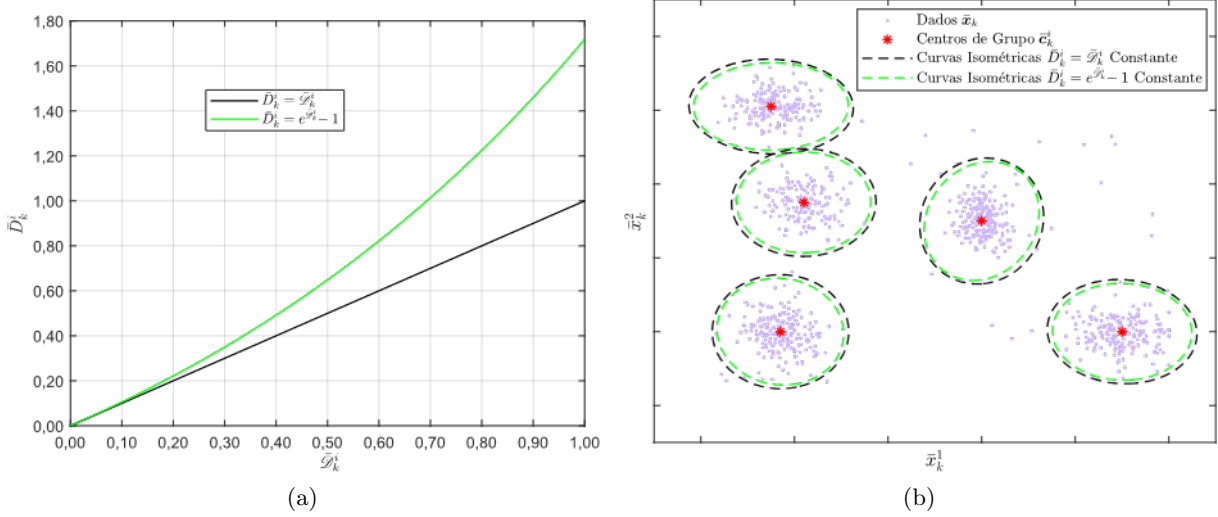


Figura 5 – Ilustração do efeito do uso da métrica de distância exponencial sobre o processo de agrupamento nebuloso evolutivo, em que $\bar{\mathcal{D}}_k^i$ é a distância de norma induzida de Mahalanobis entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra. (a) Gráficos de $\bar{D}_k^i$ em função de $\bar{\mathcal{D}}_k^i$ para o uso direto da norma induzida de Mahalanobis ($\bar{D}_k^i = \bar{\mathcal{D}}_k^i$), ilustrado em “linha preta”, e para o uso da expressão exponencial ($\bar{D}_k^i = e^{\bar{\mathcal{D}}_k^i} - 1$), ilustrado em “linha verde”; (b) Efeito do uso da métrica de distância exponencial sobre as curvas isométricas dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, as curvas isométricas ($\bar{D}_k^i = \bar{\mathcal{D}}_k^i$ constante) dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ para o uso direto da norma induzida de Mahalanobis em “linhas tracejadas pretas”, e as curvas isométricas ($\bar{D}_k^i = e^{\bar{\mathcal{D}}_k^i} - 1$ constante) dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ para o uso da métrica de distância exponencial em “linhas tracejadas verdes”. Fonte: Autor.

A densidade do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ computada pela Equação (3.9) considera as distâncias adaptativas $\bar{D}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e os R_k centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra, computadas pela Equação (3.10), bem como as distâncias $\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_j\| \Big|_{j=\psi_k+1,\dots,k-1}$ entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e os η_k dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \Big|_{j=\psi_k+1,\dots,k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra, computadas por normas euclidianas. A Figura 6 ilustra o processo de computação da densidade de $\bar{\mathbf{x}}_k$ pela Equação (3.9), em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \Big|_{j=1,\dots,\psi_k}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a última criação de grupo são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra em “asteriscos vermelhos”, os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \Big|_{j=\psi_k+1,\dots,k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra em “asteriscos azuis”, e o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra em “asterisco verde”. Conforme a Equação (3.9), os dados utilizados para a computação da densidade (e do potencial) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, ilustrado em “asterisco verde” na Figura 6, são os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i$, ilustrados em “asteriscos vermelhos”, e os dados

normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \big|_{j=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra, ilustrados em “asteriscos azuis”. Desta forma, a densidade para $\bar{\mathbf{x}}_k$ é computada sem a necessidade de iterações sobre todos os demais dados $\bar{\mathbf{x}}_j \big|_{j=1, \dots, k-1}$, pois os centros de grupo $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ são representativos dos dados referentes aos seus respectivos grupos.

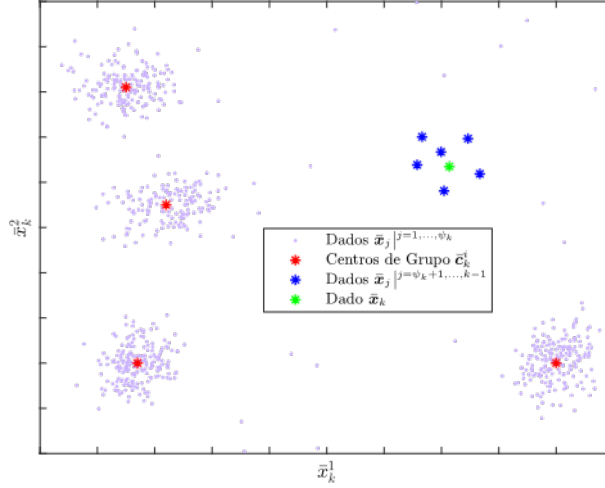


Figura 6 – Ilustração para o processo de computação da densidade do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \big|_{j=1, \dots, \psi_k}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a última criação de grupo são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra em “asteriscos vermelhos”, os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \big|_{j=\psi_k+1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra em “asteriscos azuis”, e o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra em “asterisco verde”. Fonte: Autor.

A função para a taxa de variação $f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ na Equação (3.8) é dada por:

$$f_v^{\bar{\mathbf{x}}_k} = e^{-\frac{4}{r^2} (\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k})^2}, \quad (3.13)$$

em que r é o parâmetro associado ao decaimento da função gaussiana apresentado na Equação (3.9), e $\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} \in [0, 1]$ é a taxa de variação normalizada de $\bar{\mathbf{x}}_k$ na k -ésima amostra. O valor de $\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é computado a partir da diferença de primeira ordem $\nabla \bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$ do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, dada por:

$$\nabla \bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad (3.14)$$

de modo que a taxa de variação normalizada $\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é dada por:

$$\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} = \frac{\|\nabla \bar{\mathbf{x}}_k\|}{\max_{j=2, \dots, k} (\|\nabla \bar{\mathbf{x}}_j\|)}, \quad (3.15)$$

em que $\|\cdot\|$ corresponde à norma euclidiana, e $\max_{j=2, \dots, k} (\|\nabla \bar{\mathbf{x}}_j\|)$ é o valor máximo das normas euclidianas das diferenças de primeira ordem $\nabla \bar{\mathbf{x}}_j \big|_{j=2, \dots, k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \big|_{j=2, \dots, k}$ desde a segunda amostra⁸ até a k -ésima amostra.

⁸ A diferença de primeira ordem $\nabla \bar{\mathbf{x}}_1$ do primeiro dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_1$ não é definida, uma vez que não há dado anterior a $\mathbf{x}_1$ no fluxo de dados $\mathbf{X}$, de modo que a Equação (3.14) não é aplicável para $k = 1$.

Substituindo as Equações (3.9) e (3.13) na Equação (3.8), tem-se que o critério gaussiano multivariável para a computação do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra é dado por:

$$P_k^{\bar{x}_k} = \frac{1 - \gamma}{R_k + \eta_k} \left(\sum_{i=1}^{R_k} e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{D}_k^i)^2} + \sum_{j=\psi_k+1}^{k-1} e^{-\frac{4}{r^2} \|\bar{x}_k - \bar{x}_j\|^2} \right) + \gamma e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k})^2} \quad (3.16)$$

A Figura 7 ilustra o efeito do decaimento gaussiano r sobre a computação do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ na Equação (3.16), com base no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{D}_k^i)^2}$ em função da distância adaptativa $\bar{D}_k^i$, no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2} \|\bar{x}_k - \bar{x}_j\|^2}$ em função da norma euclidiana $\|\bar{x}_k - \bar{x}_j\|$, e no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k})^2}$ em função da taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k}$, considerando os valores de decaimento gaussiano $r \in \{0,05, 0,10, 0,30, 0,50, 0,75, 1,00\}$, em que a curva gaussiana correspondente a $r = 0,05$ é ilustrada em “linha laranja”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,10$ em “linha amarela”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,30$ em “linha roxa”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,50$ em “linha verde”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,75$ em “linha azul”, e a curva gaussiana correspondente a $r = 1,00$ em “linha vermelha”. Pode-se ver que menores valores de r resultam em um decaimento mais rápido das curvas gaussianas e, conseqüentemente, em faixas mais estreitas de distâncias ($\bar{D}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ ou $\|\bar{x}_k - \bar{x}_j\| \big|_{j=\psi_k+1, \dots, k-1}$) e taxas de variação normalizadas ($\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k}$) que resultam em altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ na Equação (3.16).

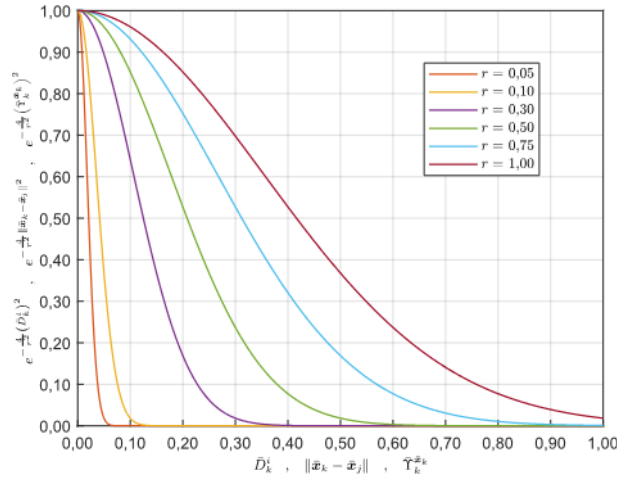


Figura 7 – Ilustração do efeito do decaimento gaussiano r sobre a computação do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$, com base no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{D}_k^i)^2}$ em função da distância adaptativa $\bar{D}_k^i$, no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2} \|\bar{x}_k - \bar{x}_j\|^2}$ em função da norma euclidiana $\|\bar{x}_k - \bar{x}_j\|$, e no comportamento da expressão gaussiana $e^{-\frac{4}{r^2} (\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k})^2}$ em função da taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k}$, considerando os valores de decaimento gaussiano $r \in \{0,05, 0,10, 0,30, 0,50, 0,75, 1,00\}$, em que a curva gaussiana correspondente a $r = 0,05$ é ilustrada em “linha laranja”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,10$ em “linha amarela”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,30$ em “linha roxa”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,50$ em “linha verde”, a curva gaussiana correspondente a $r = 0,75$ em “linha azul”, e a curva gaussiana correspondente a $r = 1,00$ em “linha vermelha”. Fonte: Autor.

3.1.3 Atualização dos Potenciais dos Centros dos Grupos

A partir da Equação (3.16), tem-se que os potenciais $P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \Big|_{i=1, \dots, R_{k-1}} \in [0, 1]$ dos R_{k-1} centros de grupo normalizados $\bar{c}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_{k-1}}$ na $(k-1)$ -ésima amostra são dados pela seguinte expressão:

$$P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} = \frac{1 - \gamma}{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\tilde{D}_j^i)^2} + \gamma e^{-\frac{4}{r^2} \left(\tilde{\Upsilon}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \right)^2}, \quad (3.17)$$

em que γ é o peso multivariável apresentado na Equação (3.8), $\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \in \mathbb{N}^*$ é o número de dados utilizados⁹ na computação do potencial $P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}$ do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_{k-1}^i$ na $(k-1)$ -ésima amostra, r é o parâmetro associado ao decaimento da função gaussiana apresentado na Equação (3.9), $\tilde{\Upsilon}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \in [0, 1]$ é a taxa de variação normalizada do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_{k-1}^i$ na $(k-1)$ -ésima amostra, e $\tilde{D}_j^i \in \mathbb{R}_+$ é a distância entre o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_{k-1}^i$ e o j -ésimo dado normalizado utilizado¹⁰ na computação de seu potencial $P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}$.

Quando o dado $\mathbf{x}_k$ é disponibilizado no fluxo de dados $\mathbf{X}$, ele é utilizado para a computação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos R_k centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra, de modo que os números $\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ de dados utilizados para a computação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ são atualizados recursivamente por:

$$\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i} = \mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} + 1 \quad (3.18)$$

Assim, a partir da Equação (3.17), tem-se que os potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são dados por:

$$P_k^{\bar{c}_k^i} = \frac{1 - \gamma}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\tilde{D}_j^i)^2} + \gamma e^{-\frac{4}{r^2} \left(\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i} \right)^2}, \quad (3.19)$$

em que $\tilde{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i}$ é a taxa de variação normalizada do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^i$ na k -ésima amostra.

A partir das Equações (3.17) e (3.19), é possível obter uma expressão para a computação recursiva dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra a partir dos potenciais

⁹ Na Equação (3.16), o número de dados utilizados na computação do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra é igual a $R_k + \eta_k$, ou seja, é o número de elementos dos somatórios presentes na computação da função $f_d^{\bar{x}_k}$ para a densidade de $\bar{x}_k$ na Equação (3.9).

¹⁰ O j -ésimo dado normalizado utilizado na computação do potencial $P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}$ é diferente do j -ésimo dado normalizado $\bar{x}_j$ apresentado no fluxo de dados $\mathbf{X}$. As amostras originais, no fluxo de dados $\mathbf{X}$, dos $\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \Big|_{i=1, \dots, R_{k-1}}$ dados normalizados utilizados para a computação dos potenciais $P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \Big|_{i=1, \dots, R_{k-1}}$, não são relevantes nesse contexto.

$P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \Big|_{i=1,\dots,R_{k-1}}$ na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$. O último termo do somatório na Equação (3.19), para o qual $j = \mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}$, está associado à influência do dado normalizado¹¹ $\bar{\mathbf{x}}_k$ sobre o potencial $P_k^{\bar{c}_k^i}$, de modo que as distâncias $\tilde{D}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são iguais às distâncias $\bar{D}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra, computadas pela Equação (3.10). Logo, separando o último termo do somatório na Equação (3.19) e fazendo também uso da Equação (3.18), obtém-se a seguinte expressão:

$$P_k^{\bar{c}_k^i} = \frac{1-\gamma}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\tilde{D}_j^i)^2} + \frac{1-\gamma}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{D}_k^i)^2} + \gamma e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i})^2} \quad (3.20)$$

Isolando o somatório na Equação (3.17), e considerando que $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k} = \bar{\Upsilon}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \Big|_{i=1,\dots,R_{k-1}}$, ou seja, as taxas de variação normalizadas dos centros de grupo normalizados não variam na passagem da $(k-1)$ -ésima amostra para a k -ésima amostra¹², obtém-se a seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\tilde{D}_j^i)^2} = \frac{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}}{1-\gamma} \left(P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} - \gamma e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i})^2} \right) \quad (3.21)$$

A substituição da Equação (3.21) na Equação (3.20) resulta nas seguintes expressões:

$$P_k^{\bar{c}_k^i} = \frac{1-\gamma}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} \frac{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}}{1-\gamma} \left(P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} - \gamma e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i})^2} \right) + \frac{1-\gamma}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{D}_k^i)^2} + \gamma e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i})^2}, \quad (3.22)$$

$$P_k^{\bar{c}_k^i} = \frac{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} + \frac{1-\gamma}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{D}_k^i)^2} + \left(1 - \frac{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} \right) \gamma e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i})^2} \quad (3.23)$$

Por fim, simplificando a Equação (3.23) e fazendo uso da Equação (3.18), tem-se a seguinte expressão:

$$P_k^{\bar{c}_k^i} = \frac{\mathcal{N}_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i}}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} + \frac{1}{\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}} \left[(1-\gamma) e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{D}_k^i)^2} + \gamma e^{-\frac{4}{r^2}(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^i})^2} \right], \quad (3.24)$$

a partir da qual se obtém a atualização recursiva dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra a partir dos seus valores $P_{k-1}^{\bar{c}_{k-1}^i} \Big|_{i=1,\dots,R_{k-1}}$ na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$.

¹¹ Para $i = 1, \dots, R_k$, o $\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i}$ -ésimo dado normalizado utilizado na computação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ é $\bar{\mathbf{x}}_k$, a partir do qual os valores $\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são atualizados incrementalmente na Equação (3.18).

¹² A atualização de variáveis na passagem da $(k-1)$ -ésima amostra para a k -ésima amostra é mostrada na Linha 4 do Algoritmo 3.1.

3.1.4 Seleção de Centros de Grupo

Considerando o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$, computado pela Equação (3.16), e os potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos R_k centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, computados pela Equação (3.24), a seguinte condição é analisada a cada amostra:

$$P_k^{\bar{x}_k} > (1 - s_k^{i^*}) P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}, \quad (3.25)$$

em que $P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ é o potencial do centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ mais próximo do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra, $s_k^{i^*} \in [0, 1]$ é a sensibilidade do grupo $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, e i^* dado por

$$i^* = \arg \min_{i=1, \dots, R_k} (\bar{D}_k^i) \quad (3.26)$$

é o índice do grupo $\Theta_k^{i^*}$ cujo centro normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ é o mais próximo de $\bar{x}_k$, onde $\bar{D}_k^i$ é a distância entre $\bar{x}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^i$ na k -ésima amostra, computada pela Equação (3.10). Se a condição em (3.25) for satisfeita, então o conjunto de grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ é modificado a partir de $\bar{x}_k$. Esta modificação pode ser a criação de um novo grupo a partir do dado $\bar{x}_k$ ou a atualização do grupo $\Theta_k^{i^*}$ mais próximo. A condição em (3.25) estabelece um critério para a modificação do conjunto de grupos a partir do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$, de modo que se este potencial for maior que a proporção $(1 - s_k^{i^*})$ do potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ do centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ mais próximo de $\bar{x}_k$, então considera-se que $\bar{x}_k$ tem potencial suficiente para ser um novo centro de grupo ou modificar o grupo $\Theta_k^{i^*}$ mais próximo. O valor de $s_k^{i^*}$ determina a sensibilidade do grupo $\Theta_k^{i^*}$ a modificações ou a criações de novos grupos próximos a ele a partir dos dados $\bar{x}_k$ disponibilizados em fluxo. Quanto maior a sensibilidade ($s_k^{i^*} \rightarrow 1$) do grupo $\Theta_k^{i^*}$, maior a probabilidade da condição em (3.25) ser satisfeita, e maior a quantidade de modificações do grupo $\Theta_k^{i^*}$ ou criações de grupos próximos a ele. Alternativamente, quanto menor a sensibilidade ($s_k^{i^*} \rightarrow 0$) do grupo $\Theta_k^{i^*}$, menor a probabilidade da condição em (3.25) ser satisfeita, e menor a quantidade de modificações do grupo $\Theta_k^{i^*}$ ou criações de grupos próximos a ele. O fator $(1 - s_k^{i^*})$ que multiplica o potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ na condição em (3.25) é chamado de fator de sensibilidade do i^* -ésimo grupo $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra.

A abordagem de seleção de dados $\bar{x}_k$ relevantes como centros de grupo, presente na condição em (3.25), apresenta a vantagem de modificar o conjunto de grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ com base nas sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos mesmos a essas modificações, sendo as sensibilidades adaptativas¹³ no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O algoritmo eTS (Seção 2.4.1) apresenta em (2.54) uma condição rígida para seleção de dados relevantes como centros de grupo, uma vez que o dado $\bar{x}_k$ é selecionado como centro de grupo apenas se o seu potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ for maior que todos os potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros de grupo $\bar{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima

¹³ A adaptação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ é descrita na Seção 3.1.8.

amostra, em uma condição de sensibilidade mínima, a qual resulta em uma maior dificuldade do algoritmo eTS em criar novos grupos emergentes em uma localização distante da maior parte dos dados¹⁴. Por sua vez, o algoritmo de agrupamento eVQ-AMS (Seção 2.4.3) não apresenta alguma condição para seleção de dados relevantes como centros de grupo, uma vez que todos os dados $\mathbf{x}_k$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ modificam o conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ a cada amostra, seja pela criação de um novo grupo, seja pela atualização do grupo vencedor $\Theta_k^{i^*}$, em uma condição de sensibilidade máxima possível, a qual resulta em uma maior facilidade do algoritmo de agrupamento eVQ-AMS em criar novos grupos a partir de *outliers*. Já o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto contorna esses problemas a partir das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, uma vez que a condição em (3.25) torna o agrupamento sensível para criar novos grupos emergentes em uma localização distante da maior parte dos dados, e com uma baixa propensão a criar novos grupos a partir de *outliers*, pois apenas dados $\mathbf{x}_k$ relevantes em potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ são selecionados como centros de grupo.

3.1.5 Atualização de Grupos

Considere a seguinte condição associada ao dado $\mathbf{x}_k$ selecionado pela condição em (3.25):

$$\bar{D}_k^{i^*} < \varepsilon_k^{i^*}, \quad (3.27)$$

em que $\bar{D}_k^{i^*}$ é a distância entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, dada pela Equação (3.10) para $i = i^*$, $\varepsilon_k^{i^*} \in \mathbb{R}_+^*$ é o raio do i^* -ésimo grupo $\Theta_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, e i^* é o índice do grupo $\Theta_k^{i^*}$ cujo centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i^*}$ é o mais próximo do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, dado pela Equação (3.26). Se a condição em (3.27) for satisfeita para o dado $\mathbf{x}_k$ selecionado pela condição em (3.25), então um mecanismo de atualização de grupo é realizado através da computação evolucionária de cruzamento (*crossover*) entre o dado $\mathbf{x}_k$ e o i^* -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra. Logo, um dado $\mathbf{x}_k$ com potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ relevante para se tornar um centro de grupo, de acordo com o critério de seleção dado pela condição em (3.25), que está dentro da zona de influência do grupo $\Theta_k^{i^*}$ cujo centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i^*}$ é o mais próximo, vem a ser utilizado na atualização desse grupo, ao invés de ser utilizado na criação de um novo grupo, reduzindo assim a sobreposição entre grupos no processo de agrupamento nebuloso evolutivo.

O peso $\rho_k^{\bar{\mathbf{x}}_k} \in (0, 1)$ atribuído ao dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ no processo de cruzamento

¹⁴ O autor apresenta posteriormente, para criação de grupos no algoritmo eTS+ (Seção 2.4.2.3), condições alternativas com o objetivo de resolver esse problema, chamadas de condições $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, apresentadas respectivamente em (2.80) e (2.82).

na k -ésima amostra é dado por:

$$\rho_k^{\bar{x}_k} = \frac{P_k^{\bar{x}_k}}{P_k^{\bar{x}_k} + P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}}, \quad (3.28)$$

em que $P_k^{\bar{x}_k}$ é o potencial do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra, computado na Equação (3.16), e $P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ é o potencial do i^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra, computado na Equação (3.24) para $i = i^*$. O peso $\rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \in (0, 1)$ atribuído ao i^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ no processo de cruzamento na k -ésima amostra é dado por:

$$\rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} = \frac{P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}}{P_k^{\bar{x}_k} + P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}} \quad (3.29)$$

O centro de grupo $\bar{c}_k^{i^*}$ é atualizado na k -ésima amostra por:

$$\bar{c}_k^{i^*} \leftarrow \rho_k^{\bar{x}_k} \bar{x}_k + \rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \bar{c}_k^{i^*} \quad (3.30)$$

O centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ é atualizado na k -ésima amostra por:

$$\bar{c}_k^{i^*} \leftarrow \rho_k^{\bar{x}_k} \bar{x}_k + \rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \bar{c}_k^{i^*} \quad (3.31)$$

O potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ do centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ é atualizado na k -ésima amostra por:

$$P_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \leftarrow \rho_k^{\bar{x}_k} P_k^{\bar{x}_k} + \rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} P_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \quad (3.32)$$

O número $\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ de dados utilizados para a computação do potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ é atualizado na k -ésima amostra por:

$$\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \leftarrow \left\lceil \rho_k^{\bar{x}_k} (R_k + \eta_k) + \rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \right\rceil, \quad (3.33)$$

em que R_k é a quantidade de grupos na k -ésima amostra, η_k é a quantidade de dados apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k - 1)$ -ésima amostra, dada pela Equação (3.5), e $\lceil \cdot \rceil$ é a função teto¹⁵. A taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^{i^*}}$ do centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ é atualizada na k -ésima amostra por:

$$\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \leftarrow \rho_k^{\bar{x}_k} \bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k} + \rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} \bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^{i^*}}, \quad (3.34)$$

em que $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k}$ é a taxa de variação normalizada do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra, dada pela Equação (3.15).

Uma vez que o i^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ é atualizado, a distância $\bar{D}_k^{i^*}$ entre o dado normalizado $\bar{x}_k$ e o centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i^*}$ na k -ésima amostra é atualizada por:

$$\bar{D}_k^{i^*} = e^{\sqrt{(\bar{x}_k - \bar{c}_k^{i^*})^T \left[\det \left((F_{k-1}^{i^*})^{-1} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} (F_{k-1}^{i^*})^{-1} (\bar{x}_k - \bar{c}_k^{i^*})} - 1}, \quad (3.35)$$

¹⁵ A função teto, também conhecida como função menor inteiro, é a função cujo valor em qualquer número real $\tilde{x}$ é o menor inteiro que é maior ou igual a $\tilde{x}$, denotada por $\lceil \tilde{x} \rceil$ (THOMAS; WEIR; HASS, 2015).

em que $(\mathbf{F}_{k-1}^{i*})^{-1}$ é a inversa da matriz de covariância nebulosa, na $(k-1)$ -ésima amostra, do i^* -ésimo grupo Θ_k^{i*} , e n é o número de variáveis do fluxo de dados $\mathbf{X}$.

As características $\mathbf{c}_k^{i*}$, $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$, $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$, $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ e $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ do grupo Θ_k^{i*} são atualizadas na k -ésima amostra nas Equações (3.30)-(3.34) pela computação evolucionária de cruzamento, de acordo com a média ponderada das características originais provenientes do centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ e do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, em que os pesos dessa média são dados pelos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ do centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ e $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, conforme as Equações (3.28)-(3.29). O procedimento de cruzamento realizado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo para a atualização do grupo Θ_k^{i*} é um mecanismo baseado no processo de computação evolucionária, que é fortemente inspirada pela teoria da evolução natural. Esse mecanismo atualiza os grupos de modo a evitar grandes sobreposições entre os mesmos, e sem o desperdício de nenhuma característica relevante em potencial¹⁶, uma vez que as características do grupo Θ_k^{i*} atualizado não são desconsideradas, mas sim cruzadas com novas características provenientes do dado $\mathbf{x}_k$, de modo que as características resultantes são herdadas das originais. A Figura 8 ilustra o procedimento de atualização do grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra através da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_j$ $|_{j=1, \dots, k-1}$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a $(k-1)$ -ésima amostra são ilustrados em “pontos lilás”, o dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra em “asterisco azul”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ em “asterisco vermelho”, a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} , representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$, em “linha tracejada vermelha”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ resultante do procedimento de atualização em “asterisco verde”, e a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} resultante do procedimento de atualização, representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$, em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o dado $\mathbf{x}_k$, o qual é selecionado pela condição em (3.25), está dentro da zona de influência do grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, de modo que a atualização é realizada resultando no deslocamento do centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$, e que a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} atualizado não sofre modificação em sua forma, sendo apenas deslocada juntamente com o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$.

3.1.6 Criação de Grupos

Considere a condição em (3.27) associada ao dado $\mathbf{x}_k$ selecionado pela condição em (3.25), em que $\bar{D}_k^{i*}$ é a distância entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ na k -ésima amostra, dada pela Equação (3.10) para $i = i^*$, ε_k^{i*} é o raio do i^* -ésimo grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra, e i^* é o índice do grupo Θ_k^{i*} cujo centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ é o mais próximo de $\bar{\mathbf{x}}_k$, dado pela Equação (3.26). Se a condição em (3.27) não for satisfeita para o dado $\mathbf{x}_k$ selecionado pela condição em (3.25), então um

¹⁶ Todas as características dos grupos Θ_k^i $|_{i=1, \dots, R_k}$ têm a sua origem em dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$, conforme critério de seleção de centros de grupo baseado na condição apresentada em (3.25).

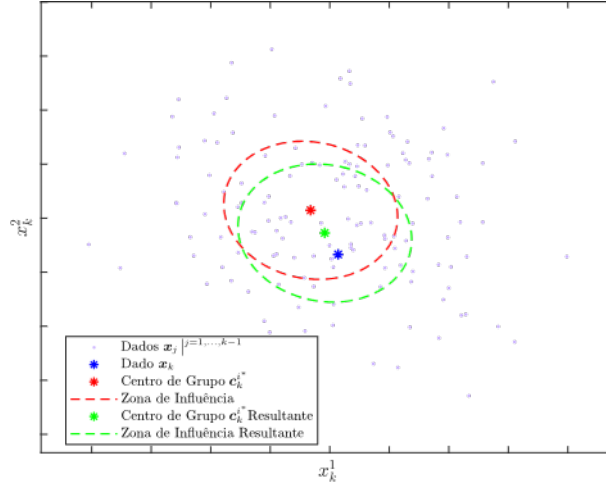


Figura 8 – Ilustração do procedimento de atualização do grupo Θ_k^{i*} na k -ésima amostra através da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_j \mid j=1, \dots, k-1$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a $(k-1)$ -ésima amostra são ilustrados em “pontos lilás”, o dado $\mathbf{x}_k$ na k -ésima amostra em “asterisco azul”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ em “asterisco vermelho”, a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} , representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$, em “linha tracejada vermelha”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ resultante do procedimento de atualização em “asterisco verde”, e a zona de influência do grupo Θ_k^{i*} resultante do procedimento de atualização, representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$, em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor.

novo grupo é criado a partir dele. Logo, um dado $\mathbf{x}_k$ com potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ relevante para se tornar um centro de grupo, de acordo com o critério de seleção dado pela condição em (3.25), que está fora da zona de influência do grupo Θ_k^{i*} cujo centro $\mathbf{c}_k^{i*}$ é o mais próximo, vem a ser utilizado na criação de um novo grupo, indicando que o algoritmo alcançou uma nova zona de operação significativa do fluxo de dados $\mathbf{X}$, evoluindo em consonância o conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$.

Na criação do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, a quantidade de grupos R_k na k -ésima amostra é incrementada como segue:

$$R_k \leftarrow R_k + 1 \quad (3.36)$$

O centro $\mathbf{c}_k^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathbf{c}_k^{R_k} = \mathbf{x}_k \quad (3.37)$$

O centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k} = \bar{\mathbf{x}}_k \quad (3.38)$$

O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}}$ do centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}} = P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}, \quad (3.39)$$

em que $P_k^{\bar{x}_k}$ é o potencial do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra. O número $\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^{R_k}}$ de dados utilizados para a computação do potencial $P_k^{\bar{c}_k^{R_k}}$ é dado por¹⁷:

$$\mathcal{N}_k^{\bar{c}_k^{R_k}} = R_k - 1 + \eta_k, \quad (3.40)$$

em que η_k é a quantidade de dados apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última criação de grupo até a $(k-1)$ -ésima amostra, dada pela Equação (3.5). A taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^{R_k}}$ do centro normalizado $\bar{c}_k^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dada por:

$$\bar{\Upsilon}_k^{\bar{c}_k^{R_k}} = \bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k}, \quad (3.41)$$

em que $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k}$ é a taxa de variação normalizada do dado normalizado $\bar{x}_k$ na k -ésima amostra, dada pela Equação (3.15).

O raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k} \in \mathbb{R}_+^*$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dado por:

$$\varepsilon_{o,k}^{R_k} = \left(\frac{e}{\sqrt{r}} e^{-\frac{\sqrt{r}}{e} (R_k)^2} + 1 \right) r, \quad (3.42)$$

em que r é o parâmetro associado ao decaimento da função gaussiana apresentado na Equação (3.9). A Figura 9 ilustra o comportamento do raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ em função do número de grupos R_k de acordo com a Equação (3.42), considerando os valores de decaimento gaussiano $r \in \{0,05, 0,10, 0,30, 0,50, 0,75, 1,00\}$, em que a curva correspondente a $r = 0,05$ é ilustrada em “linha laranja”, a curva correspondente a $r = 0,10$ em “linha amarela”, a curva correspondente a $r = 0,30$ em “linha roxa”, a curva correspondente a $r = 0,50$ em “linha verde”, a curva correspondente a $r = 0,75$ em “linha azul”, e a curva correspondente a $r = 1,00$ em “linha vermelha”. Pode-se ver que o raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ é elevado quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tende ao valor do decaimento gaussiano r à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). No início do fluxo de dados $\mathbf{X}$, quando a quantidade de grupos R_k é pequena, as suas faixas de operação $\varphi_k^l \Big|_{l=1,\dots,n}$ na Equação (3.7) são pequenas e consequentemente as distâncias $\bar{D}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ entre os dados normalizados $\bar{x}_k$ e os centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são grandes¹⁸, aumentando a tendência da condição em (3.27) não ser satisfeita e muitos grupos serem criados. O alto valor inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$ do raio do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ quando o número de grupos R_k é pequeno vem a compensar os altos valores das distâncias $\bar{D}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na condição em (3.27), prevenindo, ou minimamente atenuando, esse efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Pode-se

¹⁷ Detalhes sobre o número de dados utilizados na computação do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$ são apresentados na Nota de Rodapé 9. Na Equação (3.40), uma unidade é subtraída do número de grupos R_k devido ao seu incremento realizado na Equação (3.36) com a criação do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra.

¹⁸ O efeito da variação das faixas de operação $\varphi_k^l \Big|_{l=1,\dots,n}$ sobre as distâncias entre dados normalizados é melhor detalhado na Seção 3.1.1 e na Nota de Rodapé 4.

ver também na Figura 9 que o fator que multiplica o parâmetro r na Equação (3.42) decresce com o seu aumento, sendo $\varepsilon_{o,k}^1/r = 12,1966$ para $r = 0,05$ e $\varepsilon_{o,k}^1/r = 2,8816$ para $r = 1,00$, de modo que o efeito do aumento de r sobre o raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é compensado, prevenindo valores extremamente elevados de $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$.

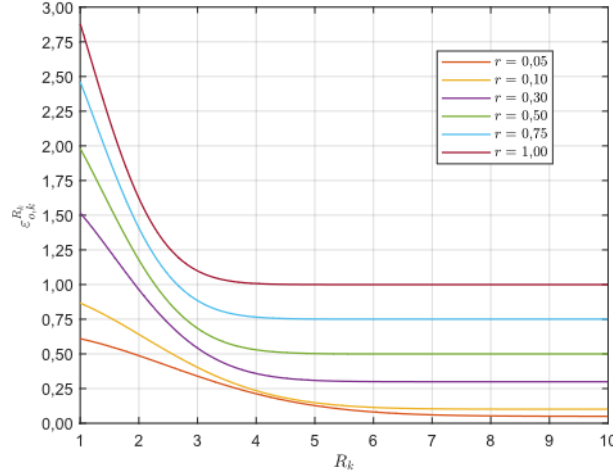


Figura 9 – Ilustração do comportamento do raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ em função do número de grupos R_k , considerando os valores de decaimento gaussiano $r \in \{0,05, 0,10, 0,30, 0,50, 0,75, 1,00\}$, em que a curva correspondente a $r = 0,05$ é ilustrada em “linha laranja”, a curva correspondente a $r = 0,10$ em “linha amarela”, a curva correspondente a $r = 0,30$ em “linha roxa”, a curva correspondente a $r = 0,50$ em “linha verde”, a curva correspondente a $r = 0,75$ em “linha azul”, e a curva correspondente a $r = 1,00$ em “linha vermelha”. Fonte: Autor.

A inversa $(\Xi_{k-1}^{R_k})^{-1}$ da matriz que representa a expressão matemática, apresentada na Equação (3.12) para $N = k - 1$ e $i = R_k$, correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^{R_k}$, na $(k - 1)$ -ésima amostra¹⁹, do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, é dada por:

$$(\Xi_{k-1}^{R_k})^{-1} = \mathbf{I}_{n \times n}, \quad (3.43)$$

em que $\mathbf{I}_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n , e n é o número de variáveis do fluxo de dados $\mathbf{X}$. A atribuição na Equação (3.43) indica que a forma inicial do protótipo do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ é hipersférica. A expressão matemática $\Lambda_{k-1}^{R_k}$, apresentada na Equação (3.12) para $N = k - 1$ e $i = R_k$, correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^{R_k}$, na $(k - 1)$ -ésima amostra²⁰, do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, é dada por:

$$\Lambda_{k-1}^{R_k} = 1, \quad (3.44)$$

e, conseqüentemente, a inversa da matriz de covariância nebulosa $(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k})^{-1}$, na $(k - 1)$ -ésima amostra, do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, é dada, conforme a Equação (3.12) para $N = k - 1$ e $i = R_k$, por:

$$(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k})^{-1} = \Lambda_{k-1}^{R_k} (\Xi_{k-1}^{R_k})^{-1} \quad (3.45)$$

¹⁹ As matrizes inversas $(\Xi_k^i)^{-1} \mid_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são computadas em uma etapa subsequente do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, conforme mostrado na Seção 3.1.10.

²⁰ As expressões matemáticas $\Lambda_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são computadas em uma etapa subsequente do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, conforme mostrado na Seção 3.1.10.

O suporte $S_{k-1}^{R_k} \in \mathbb{N}$, na $(k-1)$ -ésima amostra²¹, do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ é dado por:

$$S_{k-1}^{R_k} = 0 \quad (3.46)$$

A distância média $\bar{d}_{k-1}^{R_k}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, dos dados normalizados associados ao novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, é dada por:

$$\bar{d}_{k-1}^{R_k} = 0 \quad (3.47)$$

As distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$ dos dados normalizados associados aos demais grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$ são ajustadas, na criação do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, pela seguinte expressão:

$$\bar{d}_{k-1}^i \leftarrow \frac{R_{k-1}}{R_k} \bar{d}_{k-1}^i, \quad (3.48)$$

em que o número de grupos R_k é atualizado incrementalmente pela Equação (3.36) com a criação do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$. O ajuste nas distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$ é realizado na Equação (3.48) porque dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j$, em amostras anteriores, mais próximos do centro $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}$ do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ foram associados²², antes da sua criação na k -ésima amostra, aos demais grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$, de modo que as suas distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$ crescem a partir destes dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j$. Logo, com a criação do novo grupo $\Theta_k^{R_k}$, o ajuste na Equação (3.48) sobre as distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$ vem a diminuir esse efeito, que é mais acentuado no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$, em que as distâncias entre dados normalizados tendem a ser grandes²³, e o número de grupos R_k é pequeno. Assim, na Equação (3.48), quanto menor o número de grupos R_k , menor é a razão R_{k-1}/R_k , e maior é o ajuste sobre as distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$. Em contrapartida, quanto maior o número de grupos R_k , maior é a razão R_{k-1}/R_k (mais próxima de 1), e menor é o ajuste sobre as distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k-1}$.

Uma vez que o novo grupo $\Theta_k^{R_k}$ é criado, a distância $\bar{D}_k^{R_k}$ entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}$ na k -ésima amostra é dada por:

$$\bar{D}_k^{R_k} = 0, \quad (3.49)$$

pois $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k} = \bar{\mathbf{x}}_k$ conforme a Equação (3.38). A amostra ψ_k da última criação de grupo quantificada na k -ésima amostra é computada por:

$$\psi_k = k \quad (3.50)$$

²¹ Os suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são computados em uma etapa subsequente do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, conforme mostrado na Seção 3.1.8. A definição dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra também é dada na Seção 3.1.8.

²² Estes dados $\bar{\mathbf{x}}_j$ têm alta pertinência em relação a $\Theta_k^{R_k}$ na partição final, e seriam associados a ele se o mesmo já houvesse sido criado anteriormente à k -ésima amostra. A Figura 6 ilustra esse caso, em que o grupo correspondente aos dados ilustrados em “asteriscos azuis” e “asterisco verde” ainda não foi criado, e esses dados são associados a outros grupos.

²³ Ver discussão sobre as distâncias entre dados normalizados no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ na Seção 3.1.1 e na Nota de Rodapé 4.

3.1.7 Mescla de Grupos

As distâncias entre os centros de grupo normalizados são computadas pela seguinte expressão:

$$\bar{\Delta}_k^{i,j} = e^{\sqrt{(\bar{c}_k^i - \bar{c}_k^j)^T \left[\det \left((\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} (\mathbf{F}_{k-1}^i)^{-1} (\bar{c}_k^i - \bar{c}_k^j)}} - 1, \quad (3.51)$$

em que $\bar{\Delta}_k^{i,j} \in \mathbb{R}_+$ é a distância entre os centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i$ e $\bar{c}_k^j$ na k -ésima amostra computada através da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i . Considere a seguinte condição baseada nas distâncias $\bar{\Delta}_k^{i,j} \big|_{i,j=1,\dots,R_k}$ computadas na Equação (3.51):

$$\exists i, j \in \{1, \dots, R_k\}, i \neq j : \quad \bar{\Delta}_k^{i,j} < \varepsilon_k^i \quad \mathbf{E} \quad \bar{\Delta}_k^{j,i} < \varepsilon_k^j, \quad (3.52)$$

em que ε_k^i é o raio do grupo i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra. Enquanto a condição em (3.52) for satisfeita, um mecanismo de mescla de grupos é realizado através da computação evolucionária de cruzamento (*crossover*) entre os centros de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$ na k -ésima amostra, em que i^* e j^* são os índices dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} que satisfazem a condição em (3.52). Logo, pares de grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} cujos centros $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$ entram conjuntamente nas zonas de influência um do outro são mesclados através da computação evolucionária de cruzamento entre os seus centros $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$, simplificando o conjunto de grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e reduzindo assim a sobreposição entre grupos no processo de agrupamento nebuloso evolutivo. A presença conjunta de grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} nas zonas de influência um do outro é possível devido à adaptação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ a cada amostra²⁴, bem como à adaptação das formas hiperelipsoidais dos protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, representadas pelas matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, a cada amostra²⁵.

O peso $\rho_k^{\bar{c}_k^{i*}} \in (0, 1)$ atribuído ao i^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{i*}$ no processo de cruzamento na k -ésima amostra é dado por:

$$\rho_k^{\bar{c}_k^{i*}} = \frac{P_k^{\bar{c}_k^{i*}}}{P_k^{\bar{c}_k^{i*}} + P_k^{\bar{c}_k^{j*}}}, \quad (3.53)$$

em que $P_k^{\bar{c}_k^{i*}}$ e $P_k^{\bar{c}_k^{j*}}$ são os potenciais dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^{i*}$ e $\bar{c}_k^{j*}$ envolvidos no procedimento de mescla na k -ésima amostra, computados na Equação (3.24) para $i = i^*$ e $i = j^*$. O peso $\rho_k^{\bar{c}_k^{j*}} \in (0, 1)$ atribuído ao j^* -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^{j*}$ no processo de cruzamento na k -ésima amostra é dado por:

$$\rho_k^{\bar{c}_k^{j*}} = \frac{P_k^{\bar{c}_k^{j*}}}{P_k^{\bar{c}_k^{i*}} + P_k^{\bar{c}_k^{j*}}} \quad (3.54)$$

²⁴ A adaptação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ é descrita na Seção 3.1.8.

²⁵ A adaptação das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ é descrita na Seção 3.1.10.

O centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\mathbf{c}_k^{R_k+1} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} \mathbf{c}_k^{i*} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \mathbf{c}_k^{j*} \quad (3.55)$$

O centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} \bar{\mathbf{c}}_k^{i*} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \bar{\mathbf{c}}_k^{j*} \quad (3.56)$$

O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$ do centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \quad (3.57)$$

O número $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$ de dados utilizados para a computação do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$ é dado por:

$$\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}} = \left[\rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} \mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \right], \quad (3.58)$$

em que $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ e $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}}$ são os números de dados utilizados para a computação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ e $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}}$, dados pela Equação (3.18) para $i = i^*$ e $i = j^*$. A taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$ do centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dada por:

$$\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} \bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}}, \quad (3.59)$$

em que $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ e $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}}$ são as taxas de variação normalizadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ e $\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}$ envolvidos no procedimento de mescla na k -ésima amostra. O raio inicial $\varepsilon_{o,k}^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é dado por:

$$\varepsilon_{o,k}^{R_k+1} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} \varepsilon_{o,k}^{i*} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \varepsilon_{o,k}^{j*}, \quad (3.60)$$

em que $\varepsilon_{o,k}^{i*}$ e $\varepsilon_{o,k}^{j*}$ são os raios iniciais dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} envolvidos no procedimento de mescla na k -ésima amostra.

A inversa da matriz de covariância nebulosa $(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1})^{-1}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla, pode ser dada a partir da seguinte expressão:

$$(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1})^{-1} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} (\mathbf{F}_{k-1}^{i*})^{-1} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} (\mathbf{F}_{k-1}^{j*})^{-1}, \quad (3.61)$$

em que $(\mathbf{F}_{k-1}^{i*})^{-1}$ e $(\mathbf{F}_{k-1}^{j*})^{-1}$ são as inversas das matrizes de covariância nebulosa, na $(k-1)$ -ésima amostra, dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} envolvidos no procedimento de mescla. Fazendo uso da Equação (3.12) para $N = k-1$, e $i = i^*, j^*, R_k+1$, a Equação (3.61) pode ser reescrita como:

$$\frac{(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1}}{(\Lambda_{k-1}^{R_k+1})^{-1}} = \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}} \frac{(\Xi_{k-1}^{i*})^{-1}}{(\Lambda_{k-1}^{i*})^{-1}} + \rho_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}} \frac{(\Xi_{k-1}^{j*})^{-1}}{(\Lambda_{k-1}^{j*})^{-1}}, \quad (3.62)$$

em que $(\Xi_{k-1}^i)^{-1} \Big|_{i=i^*, j^*, R_k+1}$ são as inversas das matrizes que representam as expressões matemáticas correspondentes aos numeradores das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^i \Big|_{i=i^*, j^*, R_k+1}$, e $\Lambda_{k-1}^i \Big|_{i=i^*, j^*, R_k+1}$ são as expressões matemáticas correspondentes aos denominadores das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^i \Big|_{i=i^*, j^*, R_k+1}$. A Equação (3.62) pode ser reescrita como:

$$\frac{(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1}}{(\Lambda_{k-1}^{R_k+1})^{-1}} = \frac{\rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} (\Lambda_{k-1}^{j^*})^{-1} (\Xi_{k-1}^{i^*})^{-1} + \rho_k^{\bar{c}_k^{j^*}} (\Lambda_{k-1}^{i^*})^{-1} (\Xi_{k-1}^{j^*})^{-1}}{(\Lambda_{k-1}^{i^*})^{-1} (\Lambda_{k-1}^{j^*})^{-1}} \quad (3.63)$$

A partir da Equação (3.63), tem-se que:

$$(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1} = \rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}} (\Lambda_{k-1}^{j^*})^{-1} (\Xi_{k-1}^{i^*})^{-1} + \rho_k^{\bar{c}_k^{j^*}} (\Lambda_{k-1}^{i^*})^{-1} (\Xi_{k-1}^{j^*})^{-1}, \quad (3.64)$$

da qual a inversa $(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1}$ da matriz que representa a expressão matemática correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla, é dada por:

$$(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1} = \frac{\rho_k^{\bar{c}_k^{i^*}}}{\Lambda_{k-1}^{j^*}} (\Xi_{k-1}^{i^*})^{-1} + \frac{\rho_k^{\bar{c}_k^{j^*}}}{\Lambda_{k-1}^{i^*}} (\Xi_{k-1}^{j^*})^{-1} \quad (3.65)$$

A partir da Equação (3.63), tem-se que:

$$(\Lambda_{k-1}^{R_k+1})^{-1} = (\Lambda_{k-1}^{i^*})^{-1} (\Lambda_{k-1}^{j^*})^{-1}, \quad (3.66)$$

da qual a expressão matemática $\Lambda_{k-1}^{R_k+1}$ correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla, é dada por:

$$\Lambda_{k-1}^{R_k+1} = \Lambda_{k-1}^{i^*} \Lambda_{k-1}^{j^*} \quad (3.67)$$

Logo, a inversa da matriz de covariância nebulosa $(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1})^{-1}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla é dada, conforme a Equação (3.12) para $N = k-1$ e $i = R_k+1$, por:

$$(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1})^{-1} = \Lambda_{k-1}^{R_k+1} (\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1}, \quad (3.68)$$

em que $(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1}$ é dada pela Equação (3.65), e $\Lambda_{k-1}^{R_k+1}$ é dada pela Equação (3.67).

O suporte $S_{k-1}^{R_k+1}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla é dado por:

$$S_{k-1}^{R_k+1} = S_{k-1}^{i^*} + S_{k-1}^{j^*}, \quad (3.69)$$

ou seja, pela soma dos suportes $S_{k-1}^{i^*}$ e $S_{k-1}^{j^*}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, dos grupos $\Theta_k^{i^*}$ e $\Theta_k^{j^*}$ envolvidos no procedimento de mescla. A distância média $\bar{d}_{k-1}^{R_k+1}$, na $(k-1)$ -ésima

amostra, dos dados normalizados associados ao grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla é dada por:

$$\bar{d}_{k-1}^{R_k+1} = \bar{d}_{k-1}^{i*} + \bar{d}_{k-1}^{j*}, \quad (3.70)$$

ou seja, pela soma das distâncias médias $\bar{d}_{k-1}^{i*}$ e $\bar{d}_{k-1}^{j*}$, na $(k-1)$ -ésima amostra, dos dados normalizados associados aos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} envolvidos no procedimento de mescla.

Uma vez que os grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} são mesclados, a distância $\bar{D}_k^{R_k+1}$ entre o dado normalizado $\bar{x}_k$ e o centro normalizado $\bar{c}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra é computada por:

$$\bar{D}_k^{R_k+1} = e^{\sqrt{\left(\bar{x}_k - \bar{c}_k^{R_k+1}\right)^T \left[\det \left(\left(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1} \right)^{-1} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} \left(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1} \right)^{-1} \left(\bar{x}_k - \bar{c}_k^{R_k+1} \right)}} - 1, \quad (3.71)$$

em que n é o número de variáveis do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} envolvidos no procedimento de mescla são excluídos do conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k+1}$, de modo que o número de grupos R_k na k -ésima amostra é decrementado como segue:

$$R_k \leftarrow R_k - 1 \quad (3.72)$$

As características $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$, $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$, $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$, $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$, $\bar{\Upsilon}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$, $\varepsilon_{o,k}^{R_k+1}$ e $\left(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1}\right)^{-1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra são herdadas nas Equações (3.55)-(3.61) pela computação evolucionária de cruzamento, de acordo com a média ponderada das características originais provenientes dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ e $\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}$ mesclados, em que os pesos dessa média são dados pelos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ e $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}}$ dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ e $\bar{\mathbf{c}}_k^{j*}$, conforme as Equações (3.53)-(3.54). As características $S_{k-1}^{R_k+1}$ e $\bar{d}_{k-1}^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla na k -ésima amostra são herdadas nas Equações (3.69)-(3.70) pela computação evolucionária de cruzamento, de acordo com a soma das características originais provenientes dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} mesclados. O procedimento de cruzamento realizado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo para a mescla dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} é um mecanismo baseado no processo de computação evolucionária, que é fortemente inspirada pela teoria da evolução natural. Esse mecanismo mescla os grupos de modo a simplificar (reduzir) o conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$, evitando grandes sobreposições entre os mesmos, e sem o desperdício de nenhuma característica relevante em potencial²⁶, uma vez que as características dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} mesclados não são desconsideradas, mas sim cruzadas, de modo que as características do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante são herdadas das características dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} originais. A Figura 10 ilustra o procedimento de mescla dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} na k -ésima amostra através da computação evolucionária de cruzamento, em

²⁶ Todas as características dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ têm a sua origem em dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$, conforme critério de seleção de centros de grupo baseado na condição apresentada em (3.25).

que os dados $\mathbf{x}_j \mid j=1, \dots, k$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a k -ésima amostra são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$ em “asteriscos vermelhos”, as zonas de influência dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} , representadas pelas curvas isométricas $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$ e $\bar{D}_k^{j*} = \varepsilon_k^{j*}$, em “linhas tracejadas vermelhas”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla em “asterisco verde”, e a zona de influência do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla, representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{R_k+1} = \varepsilon_k^{R_k+1}$, em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que os grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} têm os seus centros $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$ conjuntamente dentro das zonas de influência um do outro, de modo que a mescla é realizada resultando no grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ cujo centro é $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$, e cuja zona de influência é herdada dos grupos mesclados Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} conforme as Equações²⁷ (3.60), (3.61) e (3.69)-(3.70).

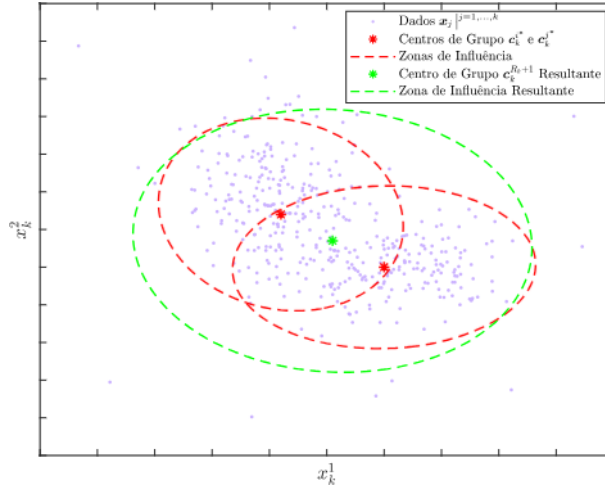


Figura 10 – Ilustração do procedimento de mescla dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} na k -ésima amostra através da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_j \mid j=1, \dots, k$ apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a primeira amostra até a k -ésima amostra são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^{i*}$ e $\mathbf{c}_k^{j*}$ em “asteriscos vermelhos”, as zonas de influência dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} , representadas pelas curvas isométricas $\bar{D}_k^{i*} = \varepsilon_k^{i*}$ e $\bar{D}_k^{j*} = \varepsilon_k^{j*}$, em “linhas tracejadas vermelhas”, o centro de grupo $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla em “asterisco verde”, e a zona de influência do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante do procedimento de mescla, representada pela curva isométrica $\bar{D}_k^{R_k+1} = \varepsilon_k^{R_k+1}$, em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor.

3.1.8 Atualização das Características dos Grupos

No fluxo de dados $\mathbf{X}$, com o conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ definido na k -ésima amostra a partir dos procedimentos formulados nas Seções 3.1.1-3.1.7, tem-se que o dado $\mathbf{x}_k$ é associado²⁸ ao grupo Θ_k^{i*} cujo centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ é o mais próximo do seu valor

²⁷ O raio $\varepsilon_k^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$, que também está associado à sua zona de influência, é definido conforme a Equação (3.84) para $i = R_k + 1$.

²⁸ A associação aqui referida diz respeito ao dado $\mathbf{x}_k$ dar suporte, conforme a Equação (3.75), ao grupo Θ_k^{i*} cujo centro normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ é o mais próximo do seu valor normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, e portanto não tem relação com os graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ (também chamados de graus de associação) do dado $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$. Os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em termos

normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, ou seja, o índice i^* do grupo $\Theta_k^{i^*}$ ao qual o dado $\mathbf{x}_k$ é associado na k -ésima amostra é dado por:

$$i^* = \arg \min_{i=1, \dots, R_k} (\bar{D}_k^i), \quad (3.73)$$

em que $\bar{D}_k^i$ é a distância entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra, computada pela Equação (3.10) para os grupos não modificados, pela Equação (3.35) para o grupo atualizado conforme formulação apresentada na Seção 3.1.5, pela Equação (3.49) para o grupo criado conforme formulação apresentada na Seção 3.1.6, e pela Equação (3.71) para o grupo resultante do procedimento de mescla conforme formulação apresentada na Seção 3.1.7.

Definição 3.1 *O suporte $S_k^i \in \mathbb{N}$ do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra é definido como a quantidade de dados $\mathbf{x}_j \Big|_{j=K_1^i, \dots, K_h^i, \dots, K_{S_k^i}^i}$ no fluxo de dados $\mathbf{X}$ que foram associados ao i -ésimo grupo Θ_k^i conforme a Equação (3.73) até a k -ésima amostra, em que $K_h^i \in \mathbb{N}^*$ é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do h -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_h^i}$ associado ao i -ésimo grupo Θ_k^i .*

Tem-se que cada dado $\mathbf{x}_j \Big|_{j=1, \dots, k}$ no fluxo de dados $\mathbf{X}$ é associado a apenas 1 grupo $\Theta_j^{i^*} \Big|_{j=1, \dots, k}$, em termos de suporte, a cada amostra $j = 1, \dots, k$, de modo que:

$$\sum_{i=1}^{R_k} S_k^i = k, \quad (3.74)$$

ou seja, a soma das quantidades $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ de dados associados a todos os grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, na k -ésima amostra, é igual à quantidade total k de dados (amostras) disponibilizadas no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte $S_k^{i^*}$ do grupo $\Theta_k^{i^*}$ ao qual o dado $\mathbf{x}_k$ é associado na k -ésima amostra é computado recursivamente por:

$$S_k^{i^*} = S_{k-1}^{i^*} + 1, \quad (3.75)$$

em que o índice i^* do grupo $\Theta_k^{i^*}$ é dado pela Equação (3.73). Assim, a amostra $K_{S_k^{i^*}}^{i^*}$ do último dado associado ao grupo $\Theta_k^{i^*}$ é dada por $K_{S_k^{i^*}}^{i^*} = k$. Para os demais grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$, os suportes $S_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ na k -ésima amostra permanecem inalterados em relação à amostra anterior:

$$S_k^i = S_{k-1}^i \quad (3.76)$$

Definição 3.2 *A distância média $\bar{d}_k^i \in \mathbb{R}_+$ dos dados normalizados associados ao grupo Θ_k^i , na k -ésima amostra, é definida por:*

$$\bar{d}_k^i = \frac{1}{S_k^i} \sum_{h=1}^{S_k^i} \bar{D}_{K_h^i}^i, \quad (3.77)$$

de suporte auxiliam na computação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ e das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ conforme as Equações (3.84)-(3.85).

em que S_k^i é o suporte do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, K_h^i é a amostra no fluxo de dados $\mathbf{X}$ do h -ésimo dado $\mathbf{x}_{K_h^i}$ associado ao i -ésimo grupo Θ_k^i , e $\bar{D}_{K_h^i}^i$ é a distância entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_{K_h^i}$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_{K_h^i}^i$ na K_h^i -ésima amostra. A distância média $\bar{d}_k^i$ na Equação (3.77) é dada pelo valor médio das distâncias $\bar{D}_j^i \Big|_{j=K_1^i, \dots, K_{S_k^i}^i}$ entre os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_j \Big|_{j=K_1^i, \dots, K_{S_k^i}^i}$ associados ao grupo Θ_k^i e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_j^i \Big|_{j=K_1^i, \dots, K_{S_k^i}^i}$ na j -ésima amostra.

A partir da Equação (3.77), a distância média $\bar{d}_k^{i*}$ dos dados normalizados associados ao grupo Θ_k^{i*} (i^* é dado pela Equação 3.73), na k -ésima amostra, pode ser formulada pela seguinte expressão:

$$\bar{d}_k^{i*} = \frac{1}{S_k^{i*}} \sum_{h=1}^{S_k^{i*}} \bar{D}_{K_h^{i*}}^{i*}, \quad (3.78)$$

em que o suporte S_k^{i*} é incrementado na k -ésima amostra pela Equação (3.75). Com base na Equação (3.78), tem-se que a distância média $\bar{d}_{k-1}^{i*}$ na $(k-1)$ -ésima amostra é dada pela seguinte expressão:

$$\bar{d}_{k-1}^{i*} = \frac{1}{S_{k-1}^{i*}} \sum_{h=1}^{S_{k-1}^{i*}} \bar{D}_{K_h^{i*}}^{i*} \quad (3.79)$$

A partir das Equações (3.78)-(3.79), é possível obter uma expressão para a computação recursiva da distância média $\bar{d}_k^{i*}$ na k -ésima amostra a partir da distância média $\bar{d}_{k-1}^{i*}$ na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ associado ao grupo Θ_k^{i*} . O último termo do somatório na Equação (3.78), para o qual $h = S_k^{i*}$, está associado à influência do dado normalizado²⁹ $\bar{\mathbf{x}}_k$ sobre a distância média $\bar{d}_k^{i*} \left(K_{S_k^{i*}}^{i*} = k \right)$, de modo que a distância $\bar{D}_{K_h^{i*}}^{i*} \Big|_{h=S_k^{i*}}$ é igual à distância $\bar{D}_k^{i*}$ entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$ na k -ésima amostra. Logo, separando o último termo do somatório na Equação (3.78) e fazendo também uso da Equação (3.75), obtém-se a seguinte expressão:

$$\bar{d}_k^{i*} = \frac{1}{S_k^{i*}} \sum_{h=1}^{S_{k-1}^{i*}} \bar{D}_{K_h^{i*}}^{i*} + \frac{1}{S_k^{i*}} \bar{D}_k^{i*} \quad (3.80)$$

Isolando o somatório na Equação (3.79), obtém-se a seguinte expressão:

$$\sum_{h=1}^{S_{k-1}^{i*}} \bar{D}_{K_h^{i*}}^{i*} = S_{k-1}^{i*} \bar{d}_{k-1}^{i*} \quad (3.81)$$

A substituição da Equação (3.81) na Equação (3.80) resulta na seguinte expressão:

$$\bar{d}_k^{i*} = \frac{S_{k-1}^{i*}}{S_k^{i*}} \bar{d}_{k-1}^{i*} + \frac{1}{S_k^{i*}} \bar{D}_k^{i*}, \quad (3.82)$$

²⁹ O S_k^{i*} -ésimo dado normalizado associado ao grupo Θ_k^{i*} é $\bar{\mathbf{x}}_k$, a partir do qual o suporte S_k^{i*} é atualizado incrementalmente na Equação (3.75).

a partir da qual se obtém a computação recursiva da distância média $\bar{d}_k^{i*}$ dos dados normalizados associados ao grupo Θ_k^{i*} , na k -ésima amostra, a partir da distância média $\bar{d}_{k-1}^{i*}$ na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{x}_k$ associado ao grupo Θ_k^{i*} , em que i^* é dado pela Equação (3.73). As distâncias médias $\bar{d}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$ dos dados normalizados associados aos demais grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k, i \neq i^*}$, na k -ésima amostra, permanecem inalteradas em relação à amostra anterior:

$$\bar{d}_k^i = \bar{d}_{k-1}^i \quad (3.83)$$

Os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ são computados de acordo com a seguinte expressão:

$$\varepsilon_k^i = \bar{d}_k^i + \frac{\varepsilon_{o,k}^i - \bar{d}_k^i}{\sqrt{(S_k^i)^{\frac{1}{n}}}}, \quad (3.84)$$

em que $\varepsilon_{o,k}^i$ é o raio inicial do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, e n é o número de variáveis (dimensões) do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ definem as zonas de influência dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, as quais determinam, conforme a condição em (3.27), a tomada de decisão do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo sobre a criação de um novo grupo ou a atualização do grupo mais próximo do dado normalizado $\bar{x}_k$ com valor de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ significativo, selecionado conforme a condição em (3.25). Os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ também determinam, conforme a condição em (3.52), a tomada de decisão do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo sobre a mescla de grupos que entram conjuntamente nas zonas de influência um do outro. Na Equação (3.84), se o grupo Θ_k^i tem poucos dados associados a ele ($S_k^i \rightarrow 1$), então o seu raio se aproxima do raio inicial: $\varepsilon_k^i \rightarrow \varepsilon_{o,k}^i$. À medida que o número de dados associados ao grupo Θ_k^i aumenta ($S_k^i \rightarrow \infty$), então o seu raio se aproxima da distância média dos dados associados a ele: $\varepsilon_k^i \rightarrow \bar{d}_k^i$. Assim, a computação do raio ε_k^i na Equação (3.84) compensa a incerteza presente na distância média $\bar{d}_k^i$ quando o grupo Θ_k^i tem baixo suporte S_k^i , pois um grupo com poucos dados associados a ele não forma uma estrutura plenamente homogênea de densidade, de maneira que a quantidade de dados S_k^i não proporciona relevância estatística à computação da distância média $\bar{d}_k^i$, que vem a ter alta variabilidade e incerteza nesse caso. À medida que mais dados são associados ao grupo Θ_k^i , ele passa a formar uma estrutura de densidade mais homogênea, de maneira que a quantidade de dados S_k^i proporciona relevância estatística à computação da distância média $\bar{d}_k^i$, que vem a ter mais estabilidade e precisão. Ainda, na Equação (3.84), a transição do raio ε_k^i do grupo Θ_k^i a partir do raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ para a distância média $\bar{d}_k^i$ é mais lenta para fluxos de dados $\mathbf{X}$ com um maior número de dimensões n , uma vez que a quantidade de dados S_k^i necessária para formar uma estrutura homogênea de densidade e dar relevância estatística à computação de $\bar{d}_k^i$ tende a ser maior com o aumento do número de dimensões n .

As sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ são computadas pela seguinte

expressão:

$$s_k^i = P_k^{\bar{c}_k^i} e^{-\bar{S}_k^i}, \quad (3.85)$$

em que $P_k^{\bar{c}_k^i}$ é o potencial do i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^i$ na k -ésima amostra, dado pela Equação (3.24), e $\bar{S}_k^i \in [0, 1]$ dado por

$$\bar{S}_k^i = \frac{S_k^i}{\max_{j=1, \dots, R_k} (S_k^j)} \quad (3.86)$$

é o suporte normalizado do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra. As sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ determinam, conforme a condição em (3.25), a propensão dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ a modificações ou a criações de novos grupos próximos a eles, a partir dos dados $\mathbf{x}_k$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Na Equação (3.85), quanto menor a quantidade de dados associados ao grupo Θ_k^i , menor é o seu suporte normalizado $\bar{S}_k^i$, e maior é a sua sensibilidade s_k^i , indicando que grupos com poucos dados associados a ele se tornam mais sensíveis a sofrerem modificações a partir dos dados $\mathbf{x}_k$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Em contrapartida, quanto maior a quantidade de dados associados ao grupo Θ_k^i , maior é o seu suporte normalizado $\bar{S}_k^i$, e menor é a sua sensibilidade s_k^i , indicando que grupos com muitos dados associados a ele se tornam menos sensíveis a sofrerem modificações a partir dos dados $\mathbf{x}_k$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Ainda, na Equação (3.85), quanto maior o potencial $P_k^{\bar{c}_k^i}$ do centro de grupo normalizado $\bar{c}_k^i$, maior é a sensibilidade s_k^i do grupo Θ_k^i , e quanto menor o potencial $P_k^{\bar{c}_k^i}$, menor é a sensibilidade s_k^i . A partir da condição em (3.25) e da Equação (3.85), tem-se, para o grupo Θ_k^{i*} cujo centro normalizado $\bar{c}_k^{i*}$ é o mais próximo do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ conforme a Equação (3.26), que o potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i*}}$ e a sensibilidade s_k^{i*} produzem um efeito de compensação sobre a propensão do grupo Θ_k^{i*} a modificações ou a criações de novos grupos próximos a ele, uma vez que o aumento do potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i*}}$ torna a condição em (3.25) mais rígida, ou seja, menos provável de ser satisfeita, mas também torna a sensibilidade s_k^{i*} maior, que leva a um fator de sensibilidade $(1 - s_k^{i*})$ menor, tornando a condição em (3.25) menos rígida, ou seja, mais provável de ser satisfeita. Da mesma forma, a diminuição do potencial $P_k^{\bar{c}_k^{i*}}$ torna a condição em (3.25) menos rígida, mas também torna a sensibilidade s_k^{i*} menor, que leva a um fator de sensibilidade $(1 - s_k^{i*})$ maior, tornando a condição em (3.25) mais rígida. Esse efeito de compensação leva a um maior equilíbrio sobre as propensões dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ a modificações, pois um grupo Θ_k^i cujo centro normalizado $\bar{c}_k^i$ tem alto potencial $P_k^{\bar{c}_k^i}$, tendendo assim a ser menos sensível aos dados $\mathbf{x}_k$, é compensado com uma alta sensibilidade s_k^i , e um grupo Θ_k^i cujo centro normalizado $\bar{c}_k^i$ tem baixo potencial $P_k^{\bar{c}_k^i}$, tendendo assim a ser mais sensível aos dados $\mathbf{x}_k$, é compensado com uma baixa sensibilidade s_k^i .

Os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ e as sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ são características relevantes dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, uma vez que elas determinam, conforme as condições em (3.25), (3.27) e (3.52), a tomada de decisão do algoritmo sobre a atualização, criação e mescla de

grupos a cada amostra. Essas características evoluem no fluxo de dados $\mathbf{X}$ pelas Equações (3.84)-(3.85) de forma autônoma, e assim o agrupamento nebuloso evolutivo é capaz de se adaptar continuamente à natureza dinâmica do fluxo de dados $\mathbf{X}$.

3.1.9 Computação dos Graus de Pertinência

A partir do agrupamento evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$, formulado nas Seções 3.1.1-3.1.8, o processo de fuzzificação adota o seguinte modelo de função de pertinência (BABUŠKA, 2012; BEZDEK; EHRLICH; FULL, 1984):

$$\mu_k^i = \begin{cases} 0, & \text{se } \exists j \in \{1, \dots, R_k\}, j \neq i : \bar{D}_k^j = 0, \\ 1, & \text{se } \bar{D}_k^i = 0, \\ \frac{1}{\sum_{j=1}^{R_k} \left(\frac{\bar{D}_k^i}{\bar{D}_k^j} \right)^{\frac{2}{m-1}}}, & \text{se } \bar{D}_k^j > 0, \forall j \in \{1, \dots, R_k\}, \end{cases} \quad (3.87)$$

em que $\mu_k^i \in [0, 1]$ é o grau de pertinência do dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, $\bar{D}_k^i$ é a distância entre o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_k^i$ na k -ésima amostra, dada pela Equação (3.10), R_k é o número de grupos na k -ésima amostra, e $m \in (1, \infty)$ é o grau de incerteza (*fuzziness degree*) no agrupamento evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$, apresentado na Equação (3.11). Quanto menor o grau de incerteza ($m \rightarrow 1$) na Equação (3.87), mais próximos são os valores dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ de 0 ou 1, levando a um agrupamento evolutivo mais rígido. Em contrapartida, quanto maior o grau de incerteza ($m \rightarrow \infty$), mais os valores dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ tendem a se dividir entre os grupos ($\mu_k^i \rightarrow 1/R_k$), levando a um agrupamento evolutivo mais nebuloso. A Equação (3.87) computa valores de $\mu_k^i \Big|_{k=1, \dots, N, i=1, \dots, R_k}$ que satisfazem a seguinte restrição:

$$\sum_{i=1}^{R_k} \mu_k^i = 1, \quad (3.88)$$

em que N é o número de amostras do fluxo de dados $\mathbf{X}$. A Figura 11 ilustra o modelo de função de pertinência μ_k^i na Equação (3.87) adotado pelo algoritmo. A Figura 11a mostra os níveis de contorno associados aos graus de pertinência μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,8$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,6$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,4$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o modelo de função de pertinência adotado na Equação (3.87) se adapta à distribuição dos dados e grupos da partição, uma vez que seus valores são determinados a partir

das distâncias $\bar{D}_k^j \big|_{j=1,\dots,R_k}$ entre cada dado normalizado $\bar{x}_k$ e todos os centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^j \big|_{j=1,\dots,R_k}$. A Figura 11b ilustra o efeito do grau de incerteza m sobre os níveis de contorno associados a um grau de pertinência (μ_k^i constante) dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 1,50$ em “linhas tracejadas laranja”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 2,00$ em “linhas tracejadas amarelas”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 2,50$ em “linhas tracejadas roxas”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 3,00$ em “linhas tracejadas verdes”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 3,50$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno correspondentes a $m = 4,00$ em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o aumento de m comprime os níveis de contorno associados aos graus de pertinência, resultando em uma maior incerteza, pois menos dados possuem alto grau de pertinência em relação aos grupos.

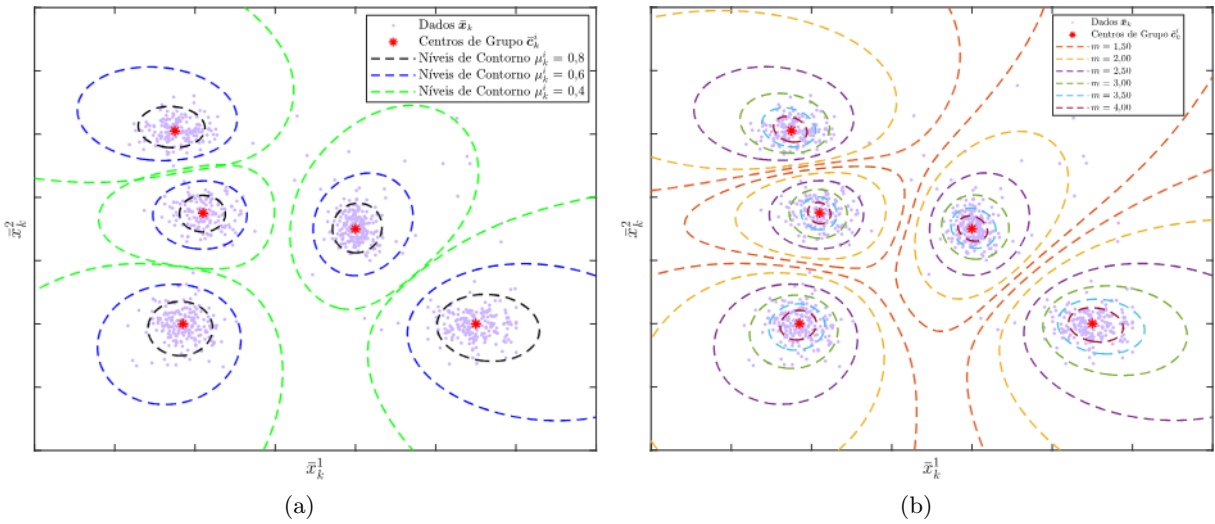


Figura 11 – Ilustração do modelo de função de pertinência μ_k^i adotado pelo algoritmo. (a) Níveis de contorno associados aos graus de pertinência μ_k^i dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,8$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,6$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_k^i = 0,4$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Efeito do grau de incerteza m sobre os níveis de contorno associados a um grau de pertinência (μ_k^i constante) dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, em que os dados normalizados $\bar{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo normalizados $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 1,50$ em “linhas tracejadas laranja”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 2,00$ em “linhas tracejadas amarelas”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 2,50$ em “linhas tracejadas roxas”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 3,00$ em “linhas tracejadas verdes”, os níveis de contorno correspondentes a $m = 3,50$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno correspondentes a $m = 4,00$ em “linhas tracejadas vermelhas”. Fonte: Autor.

3.1.10 Atualização dos Protótipos dos Grupos

No fluxo de dados $\mathbf{X}$, as matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra são dadas, a partir da Equação (3.11), por:

$$\mathbf{F}_k^i = \frac{\sum_{j=I^i}^k (\mu_j^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i) (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i)^T}{\sum_{j=I^i}^k (\mu_j^i)^m} = \frac{\Xi_k^i}{\Lambda_k^i}, \quad (3.89)$$

onde μ_j^i é o grau de pertinência do j -ésimo dado $\mathbf{x}_j$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_j^i na j -ésima amostra, m é o grau de incerteza no agrupamento evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$, $\bar{\mathbf{x}}_j$ é o dado normalizado na j -ésima amostra, $\bar{\mathbf{c}}_j^i$ é o i -ésimo centro de grupo normalizado na j -ésima amostra, $I^i \in \mathbb{N}^*$ é a amostra de criação do i -ésimo grupo Θ_k^i , n é o número de coordenadas do fluxo de dados $\mathbf{X}$, $\Xi_k^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a expressão matemática correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra, e $\Lambda_k^i \in \mathbb{R}_+^*$ é a expressão matemática correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ do i -ésimo grupo Θ_k^i na k -ésima amostra. As matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ determinam a forma e a orientação dos protótipos hiperelipsoidais dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra, de modo que os autovetores $\boldsymbol{\varrho}_k^{i,l} \Big|_{i=1,\dots,R_k, l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ determinam as direções dos eixos dos hiperelipsoides, e as razões entre os comprimentos dos eixos são dadas pelas raízes quadradas das razões entre os autovalores $\lambda_k^{i,l} \Big|_{i=1,\dots,R_k, l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^*$ das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (BABUŠKA, 2012), conforme ilustrado na Figura 12 para o caso bidimensional ($n = 2$), em que o centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ é ilustrado em “asterisco vermelho”, as retas que passam pelos eixos do protótipo em “linhas tracejadas pretas”, a forma do protótipo, representada pela curva isométrica, em “linha tracejada vermelha”, e os autovetores $\boldsymbol{\varrho}_k^{i,1}$ e $\boldsymbol{\varrho}_k^{i,2}$ da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ em “setas pretas” nas direções dos eixos do hiperelipsoide.

A partir da Equação (3.89), tem-se que a expressão matemática Ξ_k^i correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ na k -ésima amostra é dada por:

$$\Xi_k^i = \sum_{j=I^i}^k (\mu_j^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i) (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i)^T, \quad (3.90)$$

e a expressão matemática Ξ_{k-1}^i na $(k-1)$ -ésima amostra é dada por:

$$\Xi_{k-1}^i = \sum_{j=I^i}^{k-1} (\mu_j^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i) (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i)^T \quad (3.91)$$

A partir das Equações (3.90)-(3.91), é possível obter uma expressão para a computação recursiva da matriz inversa $(\Xi_k^i)^{-1}$ na k -ésima amostra a partir da matriz inversa $(\Xi_{k-1}^i)^{-1}$

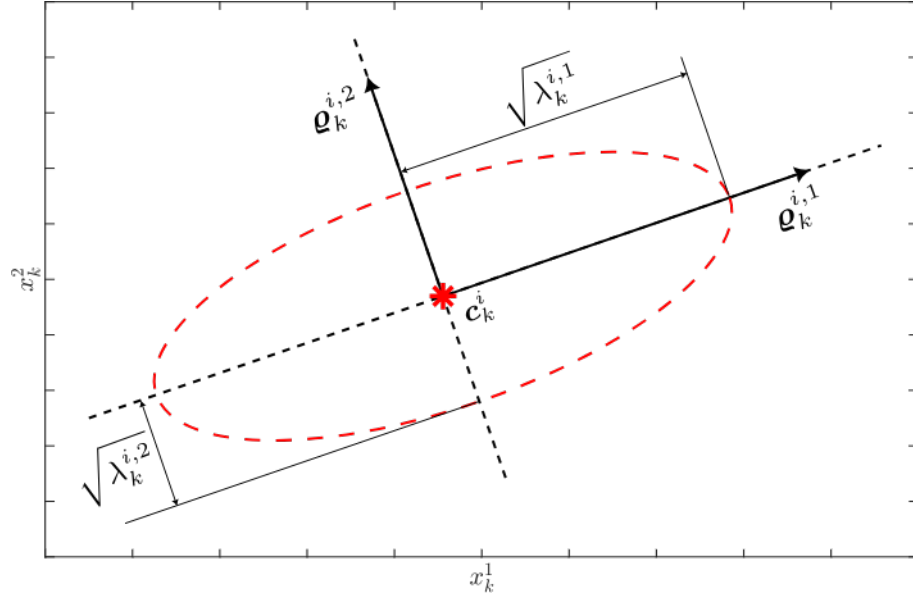


Figura 12 – Relação entre o comprimento e a orientação dos eixos do protótipo hiperelipsoidal do grupo Θ_k^i com os autovalores $(\lambda_k^{i,1}$ e $\lambda_k^{i,2})$ e os autovetores $(\mathbf{q}_k^{i,1}$ e $\mathbf{q}_k^{i,2})$ da sua matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ na k -ésima amostra para o caso bidimensional ($n = 2$), em que o centro de grupo $\mathbf{c}_k^i$ é ilustrado em “asterisco vermelho”, as retas que passam pelos eixos do protótipo em “linhas tracejadas pretas”, a forma do protótipo, representada pela curva isométrica, em “linha tracejada vermelha”, e os autovetores $\mathbf{q}_k^{i,1}$ e $\mathbf{q}_k^{i,2}$ da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ em “setas pretas” nas direções dos eixos do hiperelipsoide. Fonte: Adaptado de Babuška (2012).

na $(k - 1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$. O último termo do somatório na Equação (3.90), para o qual $j = k$, está associado à influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ sobre a matriz Ξ_k^i , de modo que, separando esse último termo do somatório, obtém-se a seguinte expressão:

$$\Xi_k^i = \sum_{j=I^i}^{k-1} (\mu_j^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i) (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{c}}_j^i)^T + (\mu_k^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i) (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \quad (3.92)$$

Substituindo a Equação (3.91) na Equação (3.92), obtém-se:

$$\Xi_k^i = \Xi_{k-1}^i + (\mu_k^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i) (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \quad (3.93)$$

Aplicando a operação de inversão matricial³⁰ em ambos os lados da Equação (3.93), obtém-se:

$$(\Xi_k^i)^{-1} = \left[\Xi_{k-1}^i + (\mu_k^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i) (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.94)$$

Aplicando a fórmula de Sherman-Morrison³¹ (SHERMAN; MORRISON, 1949; SHERMAN;

³⁰ Admite-se, como condição necessária e suficiente, que a matriz Ξ_k^i , na k -ésima amostra, possui *rank* completo.

³¹ De acordo com Press et al. (2007), a fórmula de Sherman-Morrison computa a inversa da matriz $(\mathcal{M} + \pi\phi^T) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a partir da inversa da matriz $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e dos vetores $\pi \in \mathbb{R}^n$ e $\phi \in \mathbb{R}^n$ através da seguinte expressão:

$$(\mathcal{M} + \pi\phi^T)^{-1} = (\mathcal{M})^{-1} - \frac{(\mathcal{M})^{-1} \pi \phi^T (\mathcal{M})^{-1}}{1 + \phi^T (\mathcal{M})^{-1} \pi} \quad (3.95)$$

MORRISON, 1950; PRESS et al., 2007) na Equação (3.94), tem-se a seguinte expressão:

$$\left(\Xi_k^i\right)^{-1} = \left(\Xi_{k-1}^i\right)^{-1} - \frac{(\mu_k^i)^m \left(\Xi_{k-1}^i\right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i) (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \left(\Xi_{k-1}^i\right)^{-1}}{1 + (\mu_k^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)^T \left(\Xi_{k-1}^i\right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)}, \quad (3.96)$$

a partir da qual se obtém a computação recursiva das inversas $\left(\Xi_k^i\right)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ das matrizes que representam as expressões matemáticas correspondentes aos numeradores das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra a partir das matrizes inversas $\left(\Xi_{k-1}^i\right)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$.

A partir da Equação (3.89), tem-se que a expressão matemática Λ_k^i correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i$ na k -ésima amostra é dada por:

$$\Lambda_k^i = \sum_{j=I^i}^k \left(\mu_j^i\right)^m, \quad (3.97)$$

e a expressão matemática Λ_{k-1}^i na $(k-1)$ -ésima amostra é dada por:

$$\Lambda_{k-1}^i = \sum_{j=I^i}^{k-1} \left(\mu_j^i\right)^m \quad (3.98)$$

A partir das Equações (3.97)-(3.98), é possível obter uma relação para a computação recursiva da expressão matemática Λ_k^i na k -ésima amostra a partir da expressão matemática Λ_{k-1}^i na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$. O último termo do somatório na Equação (3.97), para o qual $j = k$, está associado à influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ sobre Λ_k^i , de modo que, separando esse último termo do somatório, obtém-se a seguinte expressão:

$$\Lambda_k^i = \sum_{j=I^i}^{k-1} \left(\mu_j^i\right)^m + \left(\mu_k^i\right)^m \quad (3.99)$$

Substituindo a Equação (3.98) na Equação (3.99), tem-se a seguinte relação:

$$\Lambda_k^i = \Lambda_{k-1}^i + \left(\mu_k^i\right)^m, \quad (3.100)$$

a partir da qual se obtém a computação recursiva das expressões matemáticas $\Lambda_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ correspondentes aos denominadores das matrizes de covariância nebulosa $\mathbf{F}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra a partir das expressões matemáticas $\Lambda_{k-1}^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na $(k-1)$ -ésima amostra e da influência do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$.

Logo, a partir da Equação (3.12), tem-se que as inversas das matrizes de covariância nebulosa $\left(\mathbf{F}_k^i\right)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra são computadas por:

$$\left(\mathbf{F}_k^i\right)^{-1} = \Lambda_k^i \left(\Xi_k^i\right)^{-1}, \quad (3.101)$$

No caso da Equação (3.94), a fórmula de Sherman-Morrison é aplicada usando $\mathbf{M} = \Xi_{k-1}^i$, $\boldsymbol{\pi} = (\mu_k^i)^m (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)$ e $\boldsymbol{\phi} = (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_k^i)$.

em que as matrizes $(\Xi_k^i)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ são computadas pela Equação (3.96), e as expressões matemáticas $\Lambda_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ são computadas pela Equação (3.100).

A computação direta e recursiva das inversas das matrizes de covariância nebulosa $(F_k^i)^{-1} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ através das Equações (3.96) e (3.100)-(3.101) proporciona aos grupos protótipos variantes no tempo com um baixo custo computacional para o algoritmo, uma vez que não é realizada em nenhuma ocasião a operação de inversão matricial.

3.2 Implementação do Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo com Critério Gaussiano Multivariável

Considerando a formulação matemática apresentada na Seção 3.1, a Figura 13 mostra o fluxograma para a implementação do algoritmo, o qual indica a sequência de procedimentos computacionais para o agrupamento nebuloso evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$. O pseudocódigo para a implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, correspondente ao fluxograma mostrado na Figura 13, é apresentado no Algoritmo 3.1.

3.2.1 Parametrização

Para a implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, tem-se que os parâmetros γ , r e m são definidos pelo usuário. O parâmetro $\gamma \in [0, 1]$ determina o peso da função $f_v^{\bar{x}_k}$ para a taxa de variação de $\bar{x}_k$ na computação do seu potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ conforme a Equação (3.8), enquanto o complemento $(1 - \gamma)$ determina o peso da função $f_d^{\bar{x}_k}$ para a densidade de $\bar{x}_k$ na computação do seu potencial $P_k^{\bar{x}_k}$, conforme ilustrado na Figura 4. O parâmetro $r \in (0, \infty)$ está associado com a curva de decaimento da função gaussiana na computação do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ do dado normalizado $\bar{x}_k$, apresentada na Equação (3.16), de maneira que o desvio padrão da função gaussiana é igual a $r/2$. Menores valores de r resultam em um decaimento mais rápido da função gaussiana e, consequentemente, em faixas mais estreitas de distâncias $(\bar{D}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k} \text{ ou } \|\bar{x}_k - \bar{x}_j\| \Big|_{j=\psi_k+1, \dots, k-1})$ e em faixas mais estreitas de taxas de variação normalizadas $(\bar{\Upsilon}_k^{\bar{x}_k})$ que resultam em altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ na Equação (3.16), conforme ilustrado na Figura 7. O parâmetro $m \in (1, \infty)$ define o grau de incerteza no agrupamento evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$, conforme a Equação (3.87) e a Figura 11b. Para $m \rightarrow 1$, os graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ tendem a ser 0 ou 1, reduzindo o grau de incerteza e levando a um agrupamento evolutivo mais rígido. Em contrapartida, para $m \rightarrow \infty$, os graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ tendem a $1/R_k$, aumentando o grau de incerteza e levando a um agrupamento evolutivo mais nebuloso.

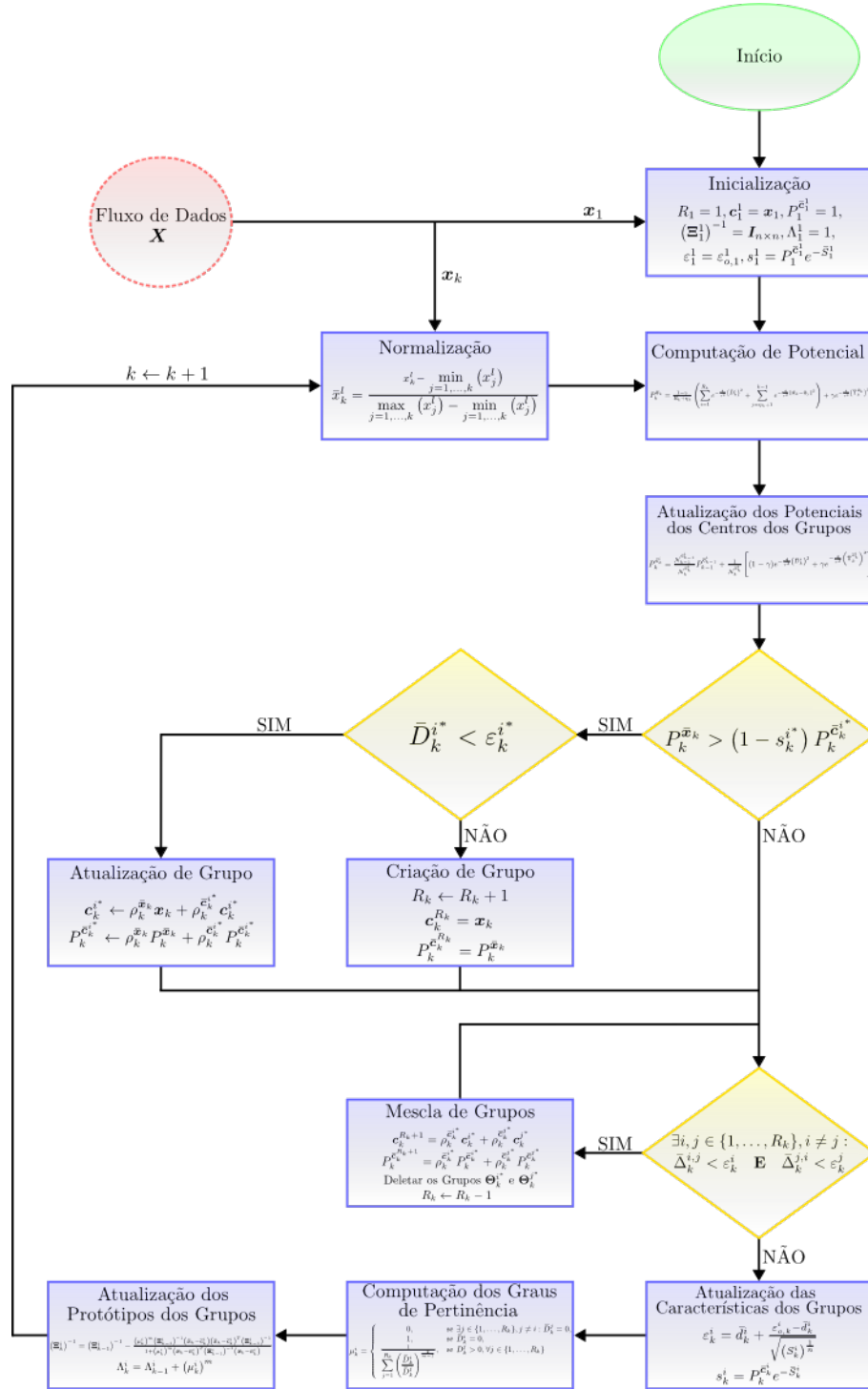


Figura 13 – Fluxograma para a implementação do algoritmo proposto, o qual indica a sequência de procedimentos computacionais para o agrupamento nebuloso evolutivo do fluxo de dados $\mathbf{X}$.
 Fonte: Autor.

3.2.2 Inicialização

Na implementação do algoritmo, o processo de agrupamento nebuloso evolutivo é inicializado a partir do primeiro dado x_1 do fluxo de dados $\mathbf{X}$, em uma abordagem “*from scratch*”, de modo que as coordenadas $\bar{x}_1^l \mid_{l=1, \dots, n}$ do primeiro dado normalizado $\bar{x}_1$ são

Algoritmo 3.1: Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo com Critério Gaussiano Multivariável.

Entrada: Conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$, peso multivariável γ , decaimento gaussiano r , e grau de incerteza m ;

Saída: Grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ e graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ a cada amostra k ;

- 1 Inicializar o algoritmo conforme Seção 3.2.2;
- 2 Fazer $k = 2$;
- 3 **enquanto** o dado $\mathbf{x}_k$ estiver disponível, **faça**
- 4 Atualizar R_{k-1} , ψ_{k-1} , $\mathbf{c}_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$, $\bar{\mathbf{c}}_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$, $\bar{\mathbf{Y}}_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$, $s_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$, $\varepsilon_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$ e $\varepsilon_{o,k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$ para a k -ésima amostra: $R_k = R_{k-1}$, $\psi_k = \psi_{k-1}$, $\mathbf{c}_k^i = \mathbf{c}_{k-1}^i$, $\bar{\mathbf{c}}_k^i = \bar{\mathbf{c}}_{k-1}^i$, $\bar{\mathbf{Y}}_k^i = \bar{\mathbf{Y}}_{k-1}^i$, $s_k^i = s_{k-1}^i$, $\varepsilon_k^i = \varepsilon_{k-1}^i$, $\varepsilon_{o,k}^i = \varepsilon_{o,k-1}^i$;
- 5 Obter o dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ pela Equação (3.1);
- 6 **se** a condição em (3.2) for satisfeita, **então**
- 7 Atualizar $\bar{\mathbf{c}}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, $\bar{\mathbf{x}}_j |_{j=\psi_k+1, \dots, k-1}$ e $\bar{d}_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_k}$ pelas Equações (3.3)-(3.4) e (3.6);
- 8 **fim**
- 9 Calcular $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ usando a Equação (3.16);
- 10 Atualizar $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ usando a Equação (3.24);
- 11 **se** a condição em (3.25) for satisfeita, **então**
- 12 **se** a condição em (3.27) for satisfeita, **então**
- 13 Atualizar $\mathbf{c}_k^{i*}$, $\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}$, $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$, $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$, $\bar{\mathbf{Y}}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{i*}}$ e $\bar{D}_k^{i*}$ pelas Equações (3.30)-(3.35);
- 14 **senão**
- 15 Atualizar R_k usando a Equação (3.36);
- 16 Calcular $\mathbf{c}_k^{R_k}$, $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}$, $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}}$, $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}}$, $\bar{\mathbf{Y}}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k}}$, $\varepsilon_{o,k}^{R_k}$, $(\Xi_{k-1}^{R_k})^{-1}$, $\Lambda_{k-1}^{R_k}$, $(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k})^{-1}$, $S_{k-1}^{R_k}$ e $\bar{d}_{k-1}^{R_k}$ pelas Equações (3.37)-(3.47);
- 17 Atualizar $\bar{d}_{k-1}^i |_{i=1, \dots, R_{k-1}}$ pela Equação (3.48);
- 18 Calcular $\bar{D}_k^{R_k}$ e ψ_k pelas Equações (3.49)-(3.50);
- 19 **fim**
- 20 **fim**
- 21 **enquanto** a condição em (3.52) for satisfeita, **faça**
- 22 Calcular $\mathbf{c}_k^{R_k+1}$, $\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}$, $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$, $\mathcal{N}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$, $\bar{\mathbf{Y}}_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{R_k+1}}$, $\varepsilon_{o,k}^{R_k+1}$, $(\Xi_{k-1}^{R_k+1})^{-1}$, $\Lambda_{k-1}^{R_k+1}$, $(\mathbf{F}_{k-1}^{R_k+1})^{-1}$, $S_{k-1}^{R_k+1}$, $\bar{d}_{k-1}^{R_k+1}$ e $\bar{D}_k^{R_k+1}$ pelas Equações (3.55)-(3.60), (3.65) e (3.67)-(3.71);
- 23 Remover os grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} ;
- 24 Atualizar R_k usando a Equação (3.72);
- 25 **fim**
- 26 Calcular $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, $\bar{d}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, $\varepsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ e $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ pelas Equações (3.75)-(3.76) e (3.82)-(3.85);
- 27 Calcular $\mu_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ pela Equação (3.87);
- 28 Calcular $(\Xi_k^i)^{-1} |_{i=1, \dots, R_k}$, $\Lambda_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ e $(\mathbf{F}_k^i)^{-1} |_{i=1, \dots, R_k}$ pelas Equações (3.96) e (3.100)-(3.101);
- 29 Fazer $k \leftarrow k + 1$;
- 30 **fim**

dadas por:

$$\bar{x}_1^l = 0 \quad (3.102)$$

O número de grupos R_1 na primeira amostra é dado por:

$$R_1 = 1 \quad (3.103)$$

A amostra ψ_1 da última criação de grupo quantificada na primeira amostra é dada por:

$$\psi_1 = 1 \quad (3.104)$$

O primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é inicializado de modo que as suas características são obtidas a partir do primeiro dado $\mathbf{x}_1$, e assim o primeiro centro de grupo $\mathbf{c}_1^1$ na primeira amostra é dado por:

$$\mathbf{c}_1^1 = \mathbf{x}_1 \quad (3.105)$$

O primeiro centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_1^1$ na primeira amostra é dado por:

$$\bar{\mathbf{c}}_1^1 = \bar{\mathbf{x}}_1 \quad (3.106)$$

O potencial $P_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1}$ do primeiro centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_1^1$ na primeira amostra é dado por:

$$P_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1} = 1 \quad (3.107)$$

O número $\mathcal{N}_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1}$ de dados utilizados para a computação do potencial $P_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1}$ é dado por:

$$\mathcal{N}_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1} = 0 \quad (3.108)$$

A taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1}$ do primeiro centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_1^1$ na primeira amostra é dada por:

$$\bar{\Upsilon}_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1} = \min(r^2, 1), \quad (3.109)$$

em que r é o parâmetro associado ao decaimento da função gaussiana apresentado na Equação (3.9). A taxa de variação normalizada $\bar{\Upsilon}_1^{\bar{\mathbf{c}}_1^1}$ é inicializada na Equação (3.109) em um valor não nulo e menor que a unidade. A inversa $(\Xi_1^1)^{-1}$ da matriz que representa a expressão matemática correspondente ao numerador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_1^1$ do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dada por:

$$(\Xi_1^1)^{-1} = \mathbf{I}_{n \times n}, \quad (3.110)$$

em que $\mathbf{I}_{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n . A expressão matemática Λ_1^1 correspondente ao denominador da matriz de covariância nebulosa $\mathbf{F}_1^1$ do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dada por:

$$\Lambda_1^1 = 1 \quad (3.111)$$

A inversa da matriz de covariância nebulosa $(\mathbf{F}_1^1)^{-1}$ do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dada por:

$$(\mathbf{F}_1^1)^{-1} = \Lambda_1^1 (\Xi_1^1)^{-1} = \mathbf{I}_{n \times n} \quad (3.112)$$

O suporte S_1^1 do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dado por:

$$S_1^1 = 1 \quad (3.113)$$

O suporte normalizado $\bar{S}_1^1$ do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dado por:

$$\bar{S}_1^1 = \frac{S_1^1}{\max_{i=1,\dots,R_1} (S_1^i)} = 1 \quad (3.114)$$

A distância média $\bar{d}_1^1$ dos dados normalizados associados ao primeiro grupo Θ_1^1 , na primeira amostra, é dada por:

$$\bar{d}_1^1 = 0 \quad (3.115)$$

O raio inicial $\varepsilon_{o,1}^1$ do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dado por:

$$\varepsilon_{o,1}^1 = \left(\frac{e}{\sqrt{r}} e^{-\frac{\sqrt{r}}{e} (R_1)^2} + 1 \right) r \quad (3.116)$$

O raio ε_1^1 do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dado por:

$$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_{o,1}^1 \quad (3.117)$$

A sensibilidade s_1^1 do primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dada por:

$$s_1^1 = P_1^{\varepsilon_1^1} e^{-\bar{S}_1^1} \quad (3.118)$$

O grau de pertinência μ_1^1 do primeiro dado $\mathbf{x}_1$ em relação ao primeiro grupo Θ_1^1 na primeira amostra é dado por:

$$\mu_1^1 = 1 \quad (3.119)$$

3.3 Resumo do Capítulo

Este capítulo apresentou o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto. Na Seção 3.1 foi apresentada a sua formulação matemática. O algoritmo realiza um procedimento de normalização (Seção 3.1.1) de dados a cada amostra para similaridade na escala dos mesmos de acordo com as faixas de operação dinâmicas do fluxo de dados $\mathbf{X}$, conforme a Equação (3.1). O algoritmo se baseia em uma abordagem que considera o potencial dos dados (Seção 3.1.2) para a tomada de decisão sobre os centros de grupo, o qual é computado através de uma função gaussiana multivariável que considera a densidade e a taxa de variação como variáveis de informação, conforme a Equação (3.16). A partir do fluxo de dados $\mathbf{X}$, tem-se que os potenciais dos centros de grupo são atualizados recursivamente (Seção 3.1.3) através da Equação (3.24) pela influência dos dados disponibilizados a cada amostra. Os centros de grupo são selecionados pelo algoritmo (Seção 3.1.4) através de um critério que considera os potenciais do dado atual e dos centros de grupo, bem como as sensibilidades dos grupos, conforme a condição em (3.25). Um dado selecionado como relevante em potencial pela condição em (3.25) que está localizado dentro da zona de

influência do grupo cujo centro é o mais próximo, conforme a condição em (3.27), é utilizado para a atualização desse grupo (Seção 3.1.5) através da computação evolucionária de cruzamento entre ele e o centro do grupo, conforme as Equações (3.30)-(3.35), evitando grandes sobreposições entre grupos e preservando características relevantes em potencial. Um dado selecionado como relevante em potencial pela condição em (3.25) que não está localizado dentro da zona de influência do grupo cujo centro é o mais próximo, conforme a condição em (3.27), é utilizado para a criação de um novo grupo (Seção 3.1.6) conforme as Equações (3.36)-(3.50), indicando uma nova zona de operação significativa do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Pares de grupos cujos centros entram conjuntamente nas zonas de influência um do outro, conforme a condição em (3.52), são mesclados (Seção 3.1.7) através da computação evolucionária de cruzamento dos seus centros, conforme as Equações (3.55)-(3.60), (3.65), e (3.67)-(3.72), evitando grandes sobreposições entre grupos e preservando características relevantes em potencial. No fluxo de dados $\mathbf{X}$, as demais características dos grupos, como o suporte, a distância média dos seus dados normalizados associados, os raios e as sensibilidades, são atualizadas (Seção 3.1.8) de forma autônoma a cada amostra através das Equações (3.75)-(3.76) e (3.82)-(3.85), de modo que o agrupamento nebuloso evolutivo é capaz de se adaptar continuamente à natureza dinâmica do fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os graus de pertinência dos dados em relação aos grupos são computados (Seção 3.1.9) a cada amostra através do modelo na Equação (3.87), o qual é adaptativo à distribuição dos dados e grupos. Os protótipos dos grupos são atualizados (Seção 3.1.10) a cada amostra através da computação recursiva das inversas das matrizes de covariância nebulosa conforme as Equações (3.96) e (3.100)-(3.101), resultando em um baixo custo computacional para o algoritmo, uma vez que não é realizada em nenhuma ocasião a operação de inversão matricial.

Na Seção 3.2 foi apresentada a implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, com base no fluxograma mostrado na Figura 13 e no pseudocódigo mostrado no Algoritmo 3.1. A parametrização necessária para a implementação do algoritmo foi resumida na Seção 3.2.1, juntamente com o efeito desses parâmetros sobre agrupamento nebuloso evolutivo. A inicialização necessária para a implementação do algoritmo foi apresentada na Seção 3.2.2.

No capítulo seguinte (4) são apresentados os resultados computacionais da implementação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* amplamente usados para a tarefa de agrupamento de fluxos de dados (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), bem como para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais (Função Hipérbole, Mackey-Glass e Nakanishi) e à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares (SISO e MIMO).

Parte IV

RESULTADOS

4 Resultados Computacionais

Neste capítulo são apresentados resultados computacionais da implementação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* amplamente usados para a tarefa de agrupamento de fluxos de dados (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), bem como para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais (Função Hipérbole, Mackey-Glass e Nakanishi) e à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares (SISO e MIMO). A implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo é realizada usando as seguintes configurações computacionais: MATLAB R2024a (24.1.0.2537033), Sistema Operacional Windows 11 64-bit (win64), Processador Intel(R) Core(TM) i5-11260H 2,60 GHz e 8G de Memória RAM.

4.1 Agrupamento Nebuloso Evolutivo de 8 *Benchmarks*

Os 8 *benchmarks* usados para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo estão caracterizados na Tabela 1. Esses *benchmarks* estão disponíveis em <http://cs.joensuu.fi/sipu/datasets/>, e são amplamente utilizados na literatura para a tarefa de agrupamento de dados (FRÄNTI; VIRMAJOKI, 2006; KÄRKKÄINEN; FRÄNTI, 2002; REZAEI; FRÄNTI, 2020; VEENMAN; REINDERS; BACKER, 2002; KÄRKKÄINEN; FRÄNTI, 2007; FRÄNTI; VIRMAJOKI; HAUTAMAKI, 2006). Dos 8 *benchmarks*, 4 são bidimensionais, e os demais são de maior dimensionalidade. O *benchmark* S1 possui $N = 5000$ amostras, $n = 2$ dimensões, e $q = 15$ grupos de formas elipsoidais. O *benchmark* A1 possui $N = 3000$ amostras, $n = 2$ dimensões, e uma quantidade maior de grupos ($q = 20$) de formas elipsoidais com um maior grau de sobreposição em relação ao S1. O *benchmark* R15 possui $N = 600$ amostras, $n = 2$ dimensões, e $q = 15$ grupos distribuídos de modo que há 1 grupo central, 7 grupos formando um círculo ao redor do grupo central, e mais 7 grupos formando um círculo externo ao redor dos demais 8 grupos. O *benchmark* *Unbalance* possui $N = 6500$ amostras, $n = 2$ dimensões, e $q = 8$ grupos, de modo que 3 grupos são de alta densidade com 2000 amostras cada, e os demais 5 grupos são de baixa densidade com 100 amostras cada. Os *benchmarks* Gauss 6-dim e Gauss 10-dim possuem $q = 9$ grupos cada com distribuição gaussiana, tendo o Gauss 6-dim $N = 4051$ amostras e $n = 6$ dimensões, e tendo o Gauss 10-dim $N = 6750$ amostras e $n = 10$ dimensões. Por fim, os *benchmarks* DIM032 e DIM064 possuem $N = 1024$ amostras cada, $q = 16$ grupos cada, e $n = 32$ e $n = 64$ dimensões, respectivamente, sendo conjuntos de dados com alta dimensionalidade que apresentam grupos em distribuição gaussiana.

Tabela 1 – Caracterização dos *benchmarks* para tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, em que o número de amostras N , o número de dimensões n e o número de grupos q são fornecidos.

<i>Benchmark</i>	N	n	q
S1 (FRÄNTI; VIRMAJOKI, 2006)	5000	2	15
A1 (KÄRKKÄINEN; FRÄNTI, 2002)	3000	2	20
R15 (VEENMAN; REINDERS; BACKER, 2002)	600	2	15
<i>Unbalance</i> (REZAEI; FRÄNTI, 2020)	6500	2	8
Gauss 6-dim (KÄRKKÄINEN; FRÄNTI, 2007)	4051	6	9
Gauss 10-dim (KÄRKKÄINEN; FRÄNTI, 2007)	6750	10	9
DIM032 (FRÄNTI; VIRMAJOKI; HAUTAMAKI, 2006)	1024	32	16
DIM064 (FRÄNTI; VIRMAJOKI; HAUTAMAKI, 2006)	1024	64	16

4.1.1 Análise Comparativa

Para comparações, o desempenho na tarefa de agrupamento é medido pelo seguinte índice de qualidade (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015; XIE; BENI, 1991):

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{R_N} \sum_{k=1}^N \mu_{k,N}^i \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_N^i\|}{N \cdot \min_{\substack{i,j=1,\dots,R_N \\ i \neq j}} (\|\mathbf{c}_N^i - \mathbf{c}_N^j\|)}, \quad (4.1)$$

em que N é o número de amostras do conjunto de dados $\mathbf{X}$, R_N é o número de grupos na N -ésima amostra (partição final), $\mathbf{x}_k$ é o dado na k -ésima amostra, $\mathbf{c}_N^i$ é o i -ésimo centro de grupo na N -ésima amostra, e $\mu_{k,N}^i \in [0, 1]$ dado por

$$\mu_{k,N}^i = \begin{cases} 0, & \text{se } \exists j \in \{1, \dots, R_N\}, j \neq i : \bar{D}_{k,N}^j = 0, \\ 1, & \text{se } \bar{D}_{k,N}^i = 0, \\ \frac{1}{\sum_{j=1}^{R_N} \left(\frac{\bar{D}_{k,N}^i}{\bar{D}_{k,N}^j} \right)^{\frac{2}{m-1}}}, & \text{se } \bar{D}_{k,N}^j > 0, \forall j \in \{1, \dots, R_N\} \end{cases} \quad (4.2)$$

é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_N^i na N -ésima amostra, onde m é o grau de incerteza no agrupamento evolutivo do conjunto de dados $\mathbf{X}$, e $\bar{D}_{k,N}^i \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$\bar{D}_{k,N}^i = e^{\sqrt{(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_N^i)^T \left[\det \left((\mathbf{F}_N^i)^{-1} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} (\mathbf{F}_N^i)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{c}}_N^i)} - 1} \quad (4.3)$$

é a distância adaptativa entre o k -ésimo dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e o i -ésimo centro de grupo normalizado $\bar{\mathbf{c}}_N^i$ na N -ésima amostra, onde $(\mathbf{F}_N^i)^{-1}$ é a inversa da matriz de covariância nebulosa do i -ésimo grupo Θ_N^i na N -ésima amostra, e n é o número de dimensões do conjunto de dados $\mathbf{X}$. Quanto menor o valor do índice de qualidade $Q \in \mathbb{R}_+^*$ na Equação (4.1), melhor é o desempenho na tarefa de agrupamento, pois indica uma partição mais

equilibrada, ou seja, baixos graus de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos distantes que apresentam a norma $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_N^i\|$ elevada, e baixas distâncias $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_N^i\|$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para grupos que apresentam uma pertinência $\mu_{k,N}^i$ elevada, e indica também uma alta dissimilaridade $\|\mathbf{c}_N^i - \mathbf{c}_N^j\|$ entre grupos Θ_N^i e Θ_N^j distintos ($i \neq j$).

As comparações consideram diversos algoritmos de agrupamento evolutivo, incluindo o eVQ (LUGHOFFER, 2008a), eVQ-A (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015), eVQ-AM (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015), eVQ-AMS (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015), Neural Gas (FRITZKE, 1994), ESOM (DENG; KASABOV, 2003) e *AutoCloud* (BEZERRA et al., 2020), bem como alguns algoritmos de agrupamento em batelada, tais como o *k-means* (GAN; MA; WU, 2007), subtrativo (SC) (CHIU, 1994) e o GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978). Os resultados para esses algoritmos são reportados em Bezerra et al. (2020), Lughofer e Sayed-Mouchaweh (2015).

Por razões de conveniência, os resultados de comparação na tarefa de agrupamento dos 8 *benchmarks* estão distribuídos nas Tabelas 2-5, nas quais são fornecidos o número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), o número real de grupos q e o índice de qualidade Q , sendo os melhores resultados destacados em negrito. O número de parâmetros ajustáveis para o algoritmo proposto é 3, para o algoritmo *AutoCloud* é 1, para o algoritmo eVQ é 1, para o algoritmo eVQ-A é 1, para o algoritmo eVQ-AM é 1, para o algoritmo eVQ-AMS é 1, para o algoritmo Neural Gas é 6, para o algoritmo ESOM é 3, para o algoritmo *k-means* é 1, para o algoritmo subtrativo é 3, e para o algoritmo GK é 3.

Os resultados de agrupamento para os *benchmarks* S1 e A1 são mostrados na Tabela 2. Com relação ao número de grupos R , o desempenho superior com $R = 15$ (o número correto de grupos q) para o *benchmark* S1 é alcançado pelo algoritmo proposto, pelo algoritmo *AutoCloud*, pelo algoritmo eVQ-A, pelo algoritmo eVQ-AM, pelo algoritmo eVQ-AMS, pelo algoritmo Neural Gas, pelo algoritmo *k-means* e pelo algoritmo subtrativo. O desempenho superior com $R = 20$ (o número correto de grupos q) para o *benchmark* A1 é alcançado pelo algoritmo proposto, pelo algoritmo *AutoCloud*, pelo algoritmo eVQ-AM, pelo algoritmo eVQ-AMS, pelo algoritmo *k-means* e pelo algoritmo subtrativo. Com relação ao índice de qualidade Q , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,0987$ para o *benchmark* S1, valor que é 50,65% superior ao segundo melhor desempenho (0,2000 para os algoritmos eVQ-A, eVQ-AM e eVQ-AMS), e 85,49% superior ao pior desempenho (0,6800 para o algoritmo *k-means*). O algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,1685$ para o *benchmark* A1, valor que é 43,83% superior ao segundo melhor desempenho (0,3000 para o algoritmo *AutoCloud*), e 79,70% superior ao pior desempenho (0,8300 para o algoritmo *k-means*).

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento, o algoritmo proposto tem alcançado 3,3514 s para o *benchmark* S1, e 2,8088 s para o *benchmark* A1. O algoritmo *AutoCloud* tem alcançado 3,7100 s para o *benchmark* S1, e 3,0000 s para o

Tabela 2 – Desempenho na tarefa de agrupamento dos *benchmarks* S1 e A1 em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis.

Algoritmo	Parâmetros	S1 ($q = 15$)		A1 ($q = 20$)	
		R	Q	R	Q
Algoritmo Proposto	3	15	0,0987	20	0,1685
<i>AutoCloud</i> (BEZERRA et al., 2020)	1	15	0,3000	20	0,3000
eVQ (LUGHOFFER, 2008a)	1	14	0,2500	14	0,4700
eVQ-A (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	15	0,2000	21	0,4000
eVQ-AM (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	15	0,2000	20	0,3900
eVQ-AMS (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	15	0,2000	20	0,3900
Neural Gas (FRITZKE, 1994)	6	15	0,2600	12	0,5700
ESOM (DENG; KASABOV, 2003)	3	13	0,2900	12	0,5700
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	1	15	0,6800	20	0,8300
Subtrativo (CHIU, 1994)	3	15	0,2100	20	0,4000

benchmark A1, porém as configurações computacionais de sua implementação não são especificadas pelos autores. Os demais algoritmos (eVQ, eVQ-A, eVQ-AM, eVQ-AMS, Neural Gas, ESOM, *k-means* e subtrativo) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

Os resultados de agrupamento para os *benchmarks* R15 e *Unbalance* são mostrados na Tabela 3. Com relação ao número de grupos R , o desempenho superior com $R = 15$ (o número correto de grupos q) para o *benchmark* R15 é alcançado pelo algoritmo proposto, pelo algoritmo eVQ-A, pelo algoritmo eVQ-AM, pelo algoritmo eVQ-AMS, pelo algoritmo *k-means* e pelo algoritmo subtrativo. Para o *benchmark* *Unbalance*, o algoritmo proposto e o algoritmo *AutoCloud* têm alcançado $R = 8$ (o número correto de grupos q). Com relação ao índice de qualidade Q , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,1433$ para o *benchmark* R15, valor que é 31,76% superior ao segundo melhor desempenho (0,2100 para o algoritmo eVQ-AM), e 88,72% superior ao pior desempenho (1,2700 para o algoritmo *k-means*). O algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,0875$ para o *benchmark* *Unbalance*, valor que é 74,26% superior ao alcançado pelo algoritmo *AutoCloud* (0,3400).

Tabela 3 – Desempenho na tarefa de agrupamento dos *benchmarks* R15 e *Unbalance* em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.

Algoritmo	Parâmetros	R15 ($q = 15$)		<i>Unbalance</i> ($q = 8$)	
		R	Q	R	Q
Algoritmo Proposto	3	15	0,1433	8	0,0875
<i>AutoCloud</i> (BEZERRA et al., 2020)	1	-	-	8	0,3400
eVQ (LUGHOFFER, 2008a)	1	16	0,4100	-	-
eVQ-A (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	15	0,2300	-	-
eVQ-AM (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	15	0,2100	-	-
eVQ-AMS (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	15	0,2200	-	-
Neural Gas (FRITZKE, 1994)	6	14	0,4100	-	-
ESOM (DENG; KASABOV, 2003)	3	13	0,4100	-	-
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	1	15	1,2700	-	-
Subtrativo (CHIU, 1994)	3	15	0,2400	-	-

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento, o algoritmo proposto tem alcançado 0,4363 s para o *benchmark* R15, e 2,1563 s para o *benchmark* Unbalance. O algoritmo *AutoCloud* tem alcançado 1,2100 s para o *benchmark* Unbalance, porém as configurações computacionais de sua implementação não são especificadas pelos autores. Os demais algoritmos (eVQ, eVQ-A, eVQ-AM, eVQ-AMS, Neural Gas, ESOM, *k-means* e subtrativo) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

Os resultados de agrupamento para os *benchmarks* Gauss 6-dim e Gauss 10-dim são mostrados na Tabela 4. Com relação ao número de grupos R , o desempenho superior com $R = 9$ (o número correto de grupos q) para os *benchmarks* Gauss 6-dim e Gauss 10-dim é alcançado pelo algoritmo proposto, pelo algoritmo eVQ-A, pelo algoritmo eVQ-AM, pelo algoritmo eVQ-AMS, pelo algoritmo *k-means*, pelo algoritmo subtrativo e pelo algoritmo GK. Com relação ao índice de qualidade Q , o melhor desempenho com $Q = 0,0610$ para o *benchmark* Gauss 6-dim é alcançado pelo algoritmo eVQ-A, pelo algoritmo eVQ-AM, pelo algoritmo eVQ-AMS, e pelo algoritmo GK, enquanto o algoritmo proposto alcança um desempenho levemente inferior (1,31%) com $Q = 0,0618$, valor que é 98,13% superior ao pior desempenho (3,3000 para o algoritmo *k-means*). O algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,0592$ para o *benchmark* Gauss 10-dim, valor que é 11,64% superior ao segundo melhor desempenho (0,0670 para os algoritmos eVQ-A, eVQ-AM e eVQ-AMS), e 98,65% superior ao pior desempenho (4,4000 para o algoritmo *k-means*).

Tabela 4 – Desempenho na tarefa de agrupamento dos *benchmarks* Gauss 6-dim e Gauss 10-dim em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis.

Algoritmo	Parâmetros	Gauss 6-dim ($q = 9$)		Gauss 10-dim ($q = 9$)	
		R	Q	R	Q
Algoritmo Proposto	3	9	0,0618	9	0,0592
eVQ (LUGHOFFER, 2008a)	1	40	1,4600	36	1,3300
eVQ-A (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	9	0,0610	9	0,0670
eVQ-AM (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	9	0,0610	9	0,0670
eVQ-AMS (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	9	0,0610	9	0,0670
Neural Gas (FRITZKE, 1994)	6	31	1,4100	77	1,7200
ESOM (DENG; KASABOV, 2003)	3	25	1,4900	40	1,7900
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	1	9	3,3000	9	4,4000
Subtrativo (CHIU, 1994)	3	9	0,0640	9	0,0710
GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978)	3	9	0,0610	9	0,6900

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento, o algoritmo proposto tem alcançado 1,9434 s para o *benchmark* Gauss 6-dim, e 4,0071 s para o *benchmark* Gauss 10-dim. Os demais algoritmos (eVQ, eVQ-A, eVQ-AM, eVQ-AMS, Neural Gas, ESOM, *k-means*, subtrativo e GK) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

Os resultados de agrupamento para os *benchmarks* DIM032 e DIM064 são mostrados na Tabela 5. Com relação ao número de grupos R , o desempenho superior com $R = 16$ (o número correto de grupos q) para o *benchmark* DIM032 é alcançado pelo algoritmo proposto, pelo algoritmo eVQ, pelo algoritmo eVQ-A, pelo algoritmo eVQ-AMS, pelo

algoritmo Neural Gas, pelo algoritmo ESOM, pelo algoritmo *k-means*, pelo algoritmo subtrativo e pelo algoritmo GK. O desempenho superior com $R = 16$ (o número correto de grupos q) para o *benchmark* DIM064 é alcançado pelo algoritmo proposto, pelo algoritmo eVQ, pelo algoritmo eVQ-AM, pelo algoritmo eVQ-AMS, pelo algoritmo Neural Gas, pelo algoritmo ESOM, pelo algoritmo *k-means*, pelo algoritmo subtrativo e pelo algoritmo GK. Com relação ao índice de qualidade Q , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,0278$ para o *benchmark* DIM032, valor que é 28,71% superior ao segundo melhor desempenho (0,0390 para os algoritmos eVQ-A e eVQ-AMS), e 99,47% superior ao pior desempenho (5,2000 para o algoritmo *k-means*). O algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $Q = 0,0200$ para o *benchmark* DIM064, valor que é 13,04% superior ao segundo melhor desempenho (0,0230 para o algoritmo eVQ-AMS), e 99,35% superior ao pior desempenho (3,1000 para os algoritmos *k-means* e GK).

Tabela 5 – Desempenho na tarefa de agrupamento dos *benchmarks* DIM032 e DIM064 em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos), do número real de grupos q , do índice de qualidade Q , e do número de parâmetros ajustáveis.

Algoritmo	Parâmetros	DIM032 ($q = 16$)		DIM064 ($q = 16$)	
		R	Q	R	Q
Algoritmo Proposto	3	16	0,0278	16	0,0200
eVQ (LUGHOFFER, 2008a)	1	16	0,0400	16	0,0240
eVQ-A (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	16	0,0390	17	0,0800
eVQ-AM (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	17	0,0500	16	0,0240
eVQ-AMS (LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2015)	1	16	0,0390	16	0,0230
Neural Gas (FRITZKE, 1994)	6	16	0,0400	16	0,0240
ESOM (DENG; KASABOV, 2003)	3	16	0,0400	16	0,0240
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	1	16	5,2000	16	3,1000
Subtrativo (CHIU, 1994)	3	16	0,0400	16	0,0250
GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978)	3	16	2,6000	16	3,1000

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento, o algoritmo proposto tem alcançado 2,1628 s para o *benchmark* DIM032, e 7,2329 s para o *benchmark* DIM064. Os demais algoritmos (eVQ, eVQ-A, eVQ-AM, eVQ-AMS, Neural Gas, ESOM, *k-means*, subtrativo e GK) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

4.1.2 Análise Paramétrica do Algoritmo

Os valores dos parâmetros γ , r e m atribuídos para a implementação do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 *benchmarks* são apresentados na Tabela 6. Os valores atribuídos para o peso multivariável γ estão no intervalo $[0, 0,60]$. Os valores atribuídos para o decaimento gaussiano r estão no intervalo $[0,07, 0,08]$ para os *benchmarks* bidimensionais. Como as distâncias entre dados aumentam com o número de dimensões, valores maiores de r são atribuídos aos *benchmarks* de alta dimensionalidade, no intervalo $[0,25, 0,51]$. Os valores atribuídos para o grau de incerteza m estão no intervalo $[2,50, 4,00]$.

Tabela 6 – Parametrização do algoritmo para a sua implementação na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 *benchmarks* (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), em que os valores do peso multivariável γ , do decaimento gaussiano r e do grau de incerteza m são fornecidos.

<i>Benchmark</i>	γ	r	m
S1	0,15	0,07	2,50
A1	0,13	0,08	2,50
R15	0,00	0,08	2,50
<i>Unbalance</i>	0,31	0,07	2,50
Gauss 6-dim	0,55	0,25	3,20
Gauss 10-dim	0,60	0,30	3,40
DIM032	0,00	0,27	3,80
DIM064	0,45	0,51	4,00

A Tabela 7 apresenta a faixa de valores¹, para os parâmetros do algoritmo, em que o índice de qualidade Q é similar (uma variação de cerca de 10%) ao apresentado nas Tabelas 2-5. Por exemplo, no *benchmark* S1, a faixa associada ao parâmetro r na Tabela 7 é $[0,06, 0,10]$. Isto indica que, quando $r \in [0,06, 0,10]$ e os outros parâmetros permanecem constantes de acordo com a Tabela 6 ($\gamma = 0,15$ e $m = 2,50$), o índice de qualidade Q permanece menor ou igual a 0,1086, que é 10% acima do valor 0,0987 de Q alcançado pelo algoritmo para o *benchmark* S1 mostrado na Tabela 2. O mesmo critério se aplica aos outros casos. Para facilitar a visualização da sensibilidade de Q aos parâmetros do algoritmo, o comprimento da faixa $\zeta \in \mathbb{R}_+$ é também mostrado na Tabela 7. Quanto maior o valor do comprimento da faixa ζ para qualquer parâmetro, menor é a sensibilidade de Q a esse parâmetro. Para o peso multivariável γ , o maior valor de ζ (menor sensibilidade) é 0,62 para o *benchmark* Gauss 10-dim, enquanto o menor valor de ζ (maior sensibilidade) é 0 para os *benchmarks* *Unbalance* e DIM032. Tem-se que o índice de qualidade Q é pouco sensível a altos valores de γ para os *benchmarks* de alta dimensionalidade (Gauss 6-dim, Gauss 10-dim e DIM064), e muito sensível a baixos valores de γ nesses *benchmarks* (DIM032). Para o decaimento gaussiano r , o maior valor de ζ (menor sensibilidade) é 1,01 para o *benchmark* Gauss 10-dim, enquanto o menor valor de ζ (maior sensibilidade) é 0 para os *benchmarks* A1, R15 e *Unbalance*. A sensibilidade do índice de qualidade Q ao parâmetro r é maior nos *benchmarks* bidimensionais (menores valores de ζ), e menor nos *benchmarks* de alta dimensionalidade (maiores valores de ζ). Para o grau de incerteza m , o maior valor de ζ (menor sensibilidade) é 2,80 para o *benchmark* S1, enquanto o menor valor de ζ (maior sensibilidade) é 0,87 para o *benchmark* A1. Em geral, o índice de qualidade Q é pouco sensível ao parâmetro m .

¹ A faixa de valores para cada parâmetro considera variações até a segunda casa decimal.

Tabela 7 – Análise da sensibilidade do índice de qualidade Q aos parâmetros γ , r e m do algoritmo, considerando a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 *benchmarks* (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), de acordo com a faixa dos valores dos parâmetros que resultam em uma baixa sensibilidade de Q e com o comprimento ζ das faixas.

<i>Benchmark</i>	$\gamma \in [0, 1]$		$r \in (0, \infty)$		$m \in (1, \infty)$	
	Faixa	ζ	Faixa	ζ	Faixa	ζ
S1	[0,09, 0,29]	0,20	[0,06, 0,10]	0,04	[2,36, 5,16]	2,80
A1	[0,13, 0,14]	0,01	{0,08}	0,00	[2,37, 3,24]	0,87
R15	[0,00, 0,03]	0,03	{0,08}	0,00	[2,36, 4,87]	2,51
<i>Unbalance</i>	{0,31}	0,00	{0,07}	0,00	[2,14, 3,63]	1,49
Gauss 6-dim	[0,49, 1,00]	0,51	[0,23, 0,37]	0,14	[2,67, 3,84]	1,17
Gauss 10-dim	[0,38, 1,00]	0,62	[0,12, 1,13]	1,01	[2,84, 4,14]	1,30
DIM032	{0,00}	0,00	[0,24, 0,29]	0,05	[3,21, 4,44]	1,23
DIM064	[0,39, 1,00]	0,61	[0,39, 0,57]	0,18	[3,49, 4,77]	1,28

4.1.3 Análise Qualitativa do Algoritmo

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 *benchmarks*, são ilustrados nas Figuras 14-37 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. Essas figuras consideram a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo para grupos em diferentes contextos de protótipos, densidades e distribuição espacial.

4.1.3.1 *Benchmark* S1

A Figura 14 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1 com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 14a mostra as coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* S1 em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* S1 são apresentados sequencialmente na forma de fluxo de dados. O valor mínimo da primeira coordenada x_k^1 é 19835 para $k = 3317$, e o seu valor máximo é 961951 para $k = 4447$. O valor mínimo da segunda coordenada x_k^2 é 51121 para $k = 3233$, e o seu valor máximo é 970756 para $k = 4905$. A Figura 14b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso

evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave, iniciando com 1 grupo, alcançando o valor máximo de 16 grupos na amostra $k = 4788$, e finalizando com o valor correto de 15 grupos. Os pontos em que o número de grupos R_k decresce indicam o processo de mescla de grupos através da técnica evolucionária de cruzamento, o qual simplifica o conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$. A Figura 14c mostra a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 15 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ próximos dos reais, bem como protótipos de grupo adequadamente associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$. A Figura 14d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é 0 para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,5756 para $k = 559$.

A Figura 15 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1 com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 15a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0, 0,20]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{15}}$ do centro normalizado do décimo quinto grupo Θ_k^{15} alcança o valor máximo 0,3709 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^2}$ do centro normalizado do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,0472 da partição final. A Figura 15b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo em posições próximas dos centros reais, alcançando assim centros de grupo finais bem localizados em relação aos mesmos. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial

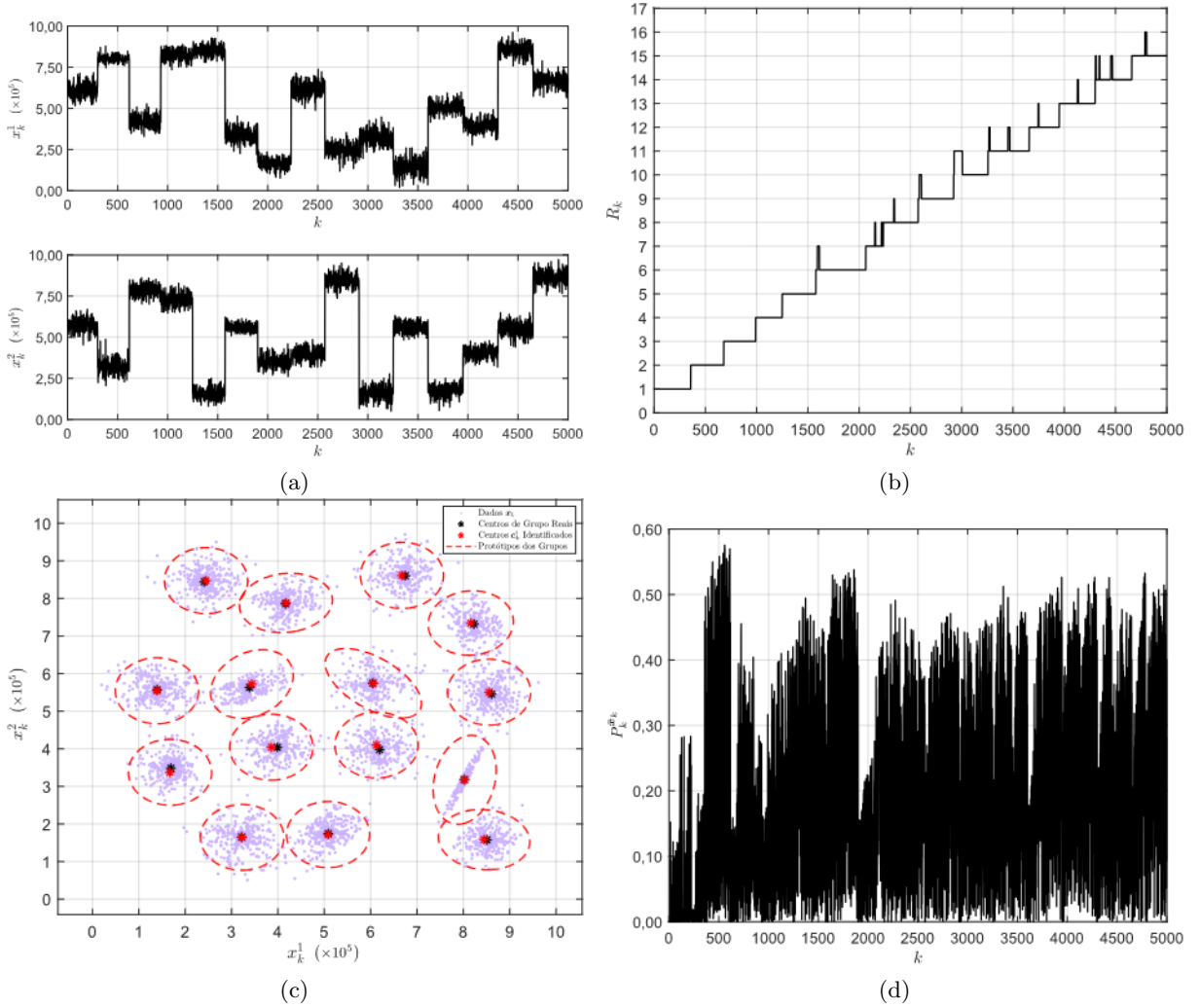


Figura 14 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

$P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ (ver Figura 14d). A Figura 15c mostra a variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^6 do sexto grupo Θ_k^6 alcança o valor máximo da partição final igual a 495 dados, enquanto o suporte S_k^7 do sétimo grupo Θ_k^7 alcança o valor mínimo da partição final igual a 178 dados. A Figura 15d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento

nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,20]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,07$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados S1, previne o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (ver Figura 14b), em que seriam criados exageradamente mais grupos do que a quantidade real devido às faixas de operação $\varphi_k^l \Big|_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ serem pequenas. O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,1616 da partição final, enquanto o raio ε_k^9 do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor mínimo 0,0255 da partição final.

A Figura 16 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1 com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 16a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 15c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 15a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,10]$. As sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 15a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^{15} do décimo quinto grupo Θ_k^{15} alcança o valor máximo 0,1859 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,0248 da partição final. A Figura 16b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos

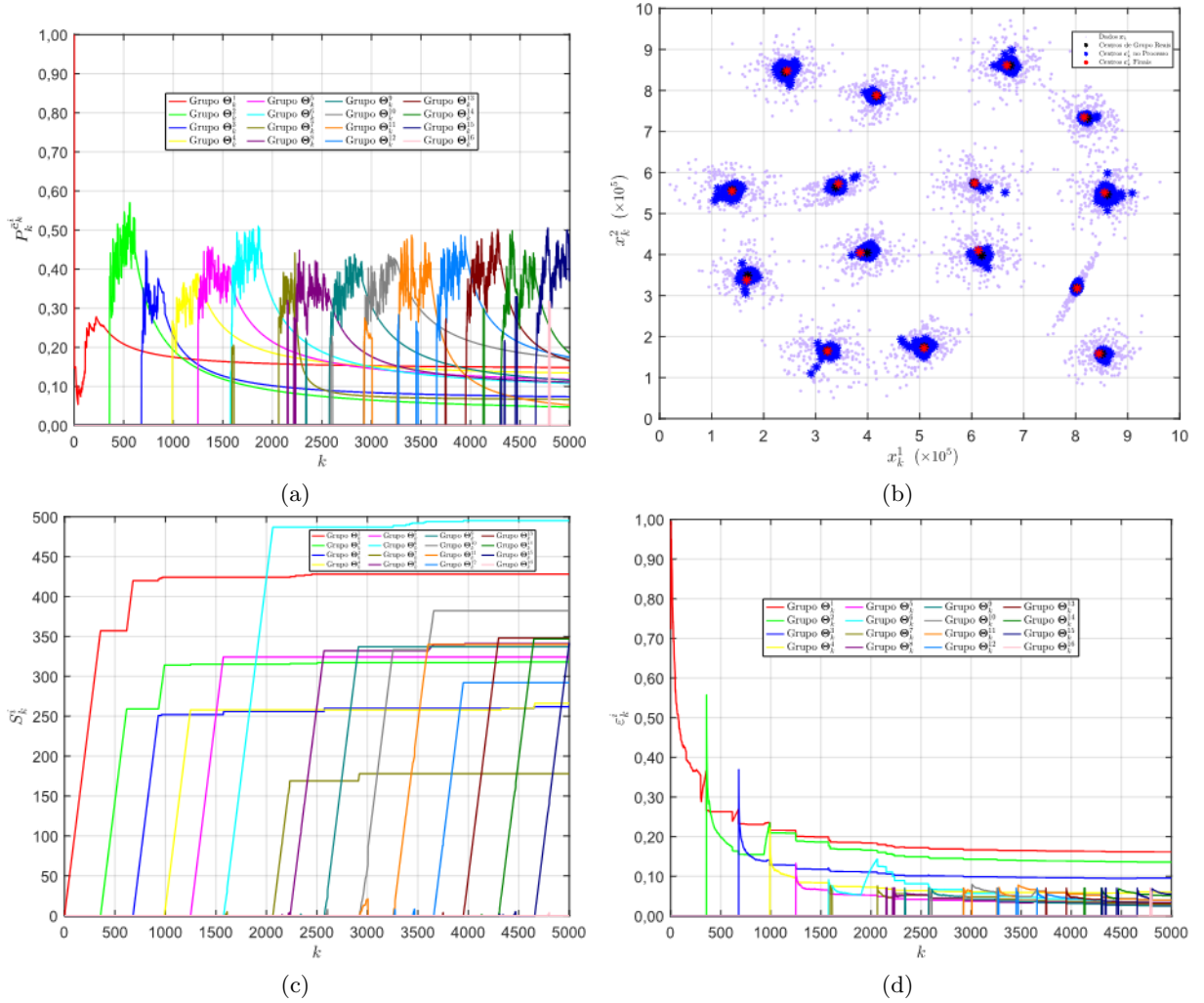


Figura 15 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1: (a) Variação dos potenciais $P_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

(maior incerteza). A Figura 16c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i \mid k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções

de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 14c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 16d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

4.1.3.2 Benchmark A1

A Figura 17 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1 com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 17a mostra as coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* A1 em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* A1 são apresentados sequencialmente na forma de fluxo de dados. O valor mínimo da primeira coordenada x_k^1 é 0 para $k = 2810$, e o seu valor máximo é 65535 para $k = 525$. O valor mínimo da segunda coordenada x_k^2 é 32064 para $k = 1405$, e o seu valor máximo é 64978 para $k = 1983$. A Figura 17b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação moderada, iniciando com 1 grupo, alcançando o valor máximo de 21 grupos na amostra $k = 2901$, e finalizando com o valor correto de 20 grupos. Os pontos em que o número de grupos R_k decresce indicam o processo de mescla de grupos através da técnica evolucionária de cruzamento, o qual simplifica o conjunto de grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. A Figura 17c mostra a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Embora no protótipo do segundo grupo Θ_k^2 , cujo centro é $\mathbf{c}_k^2 = [51641, 4289, 49376, 3124]^T$, tenha sido identificado um hiperelipsoide levemente desproporcional ao protótipo real do grupo, o algoritmo tem alcançado na partição final 20 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ próximos dos reais, assim como protótipos de grupo em geral bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. A Figura 17d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que

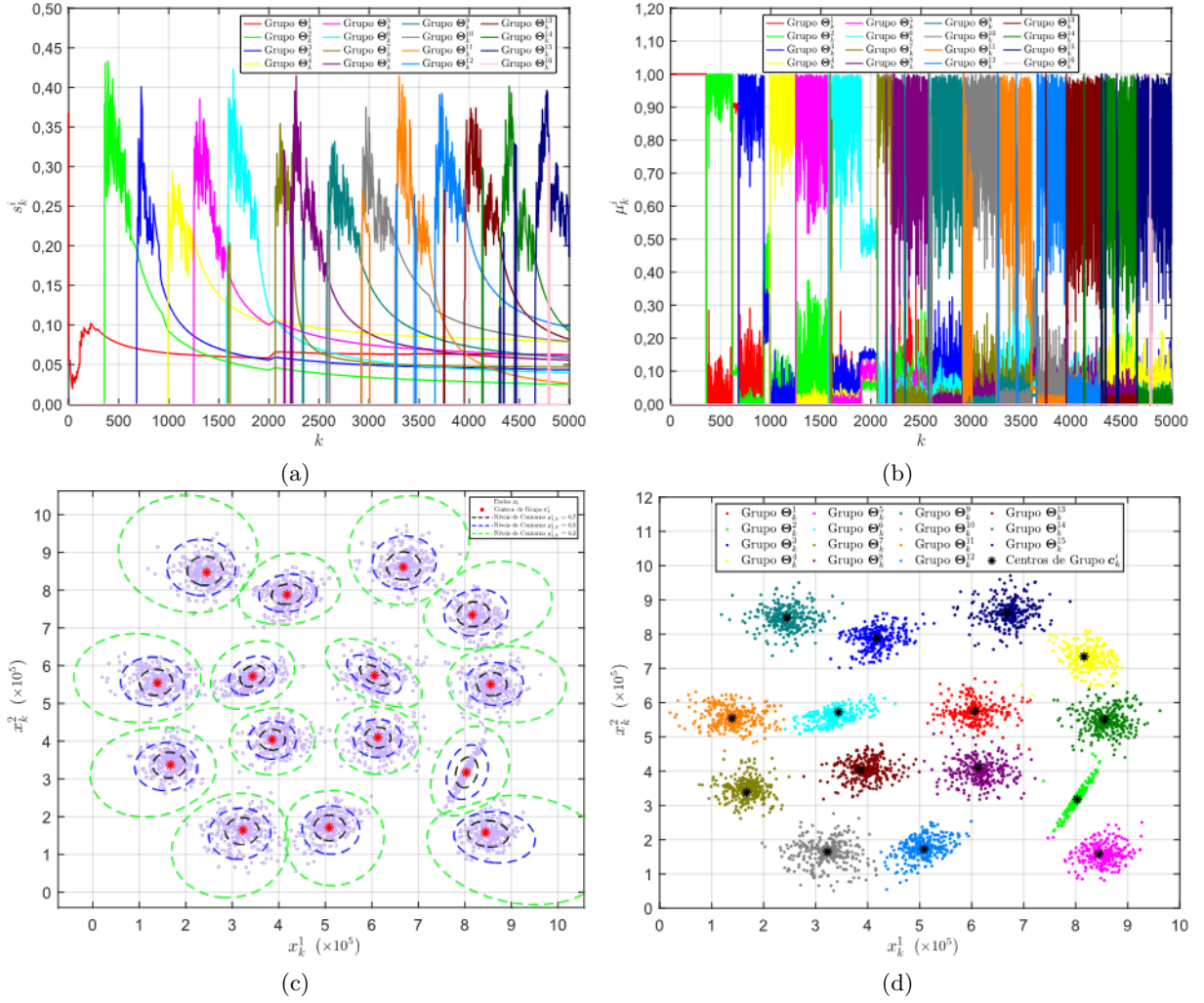


Figura 16 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* S1: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados x_k associados aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

os valores de potencial $P_k^{\bar{x}^k}$ apresentam um comportamento ruidoso. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{x}^k}$ é $1,8743 \times 10^{-207}$ para $k = 4$, e o seu valor máximo é $0,4319$ para $k = 2844$.

A Figura 18 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1 com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 18a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$

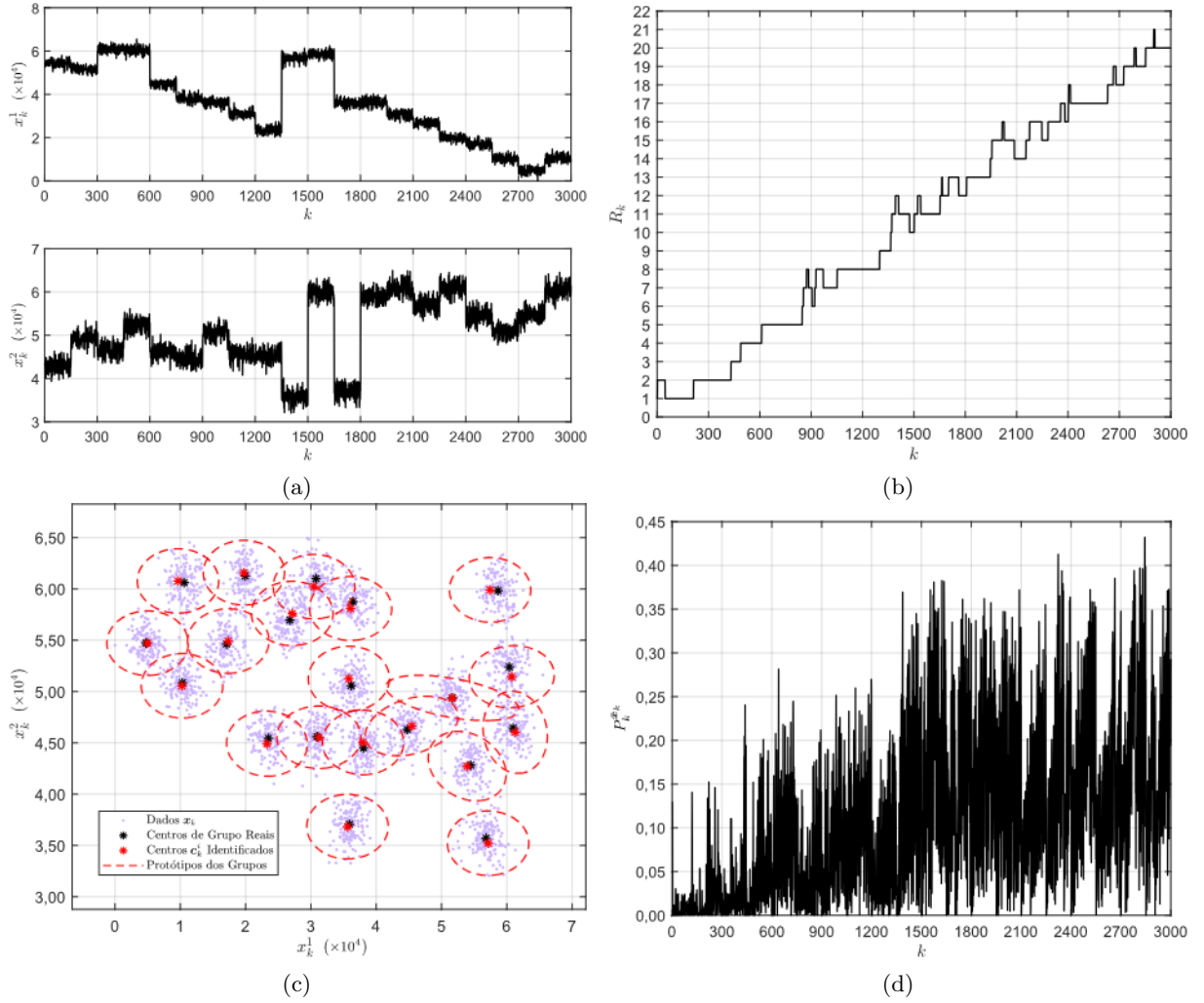


Figura 17 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0, 0,20]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^{20}}$ do centro normalizado do vigésimo grupo Θ_k^{20} alcança o valor máximo 0,2905 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^9}$ do centro normalizado do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor mínimo 0,0198 da partição final. A Figura 18b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a

partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo geralmente em posições próximas dos centros reais, alcançando assim centros de grupo finais geralmente bem localizados em relação aos mesmos. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ (ver Figura 17d). A Figura 18c mostra a variação dos suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo da partição final igual a 259 dados, enquanto o suporte S_k^9 do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor mínimo da partição final igual a 49 dados. A Figura 18d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,20]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,08$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados A1, previne o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (ver Figura 17b), em que seriam criados exageradamente mais grupos do que a quantidade real devido às faixas de operação $\varphi_k^l \mid_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ serem pequenas. O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,1731 da partição final, enquanto o raio ε_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo 0,0302 da partição final.

A Figura 19 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1 com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 19a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 18c) e seus centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam

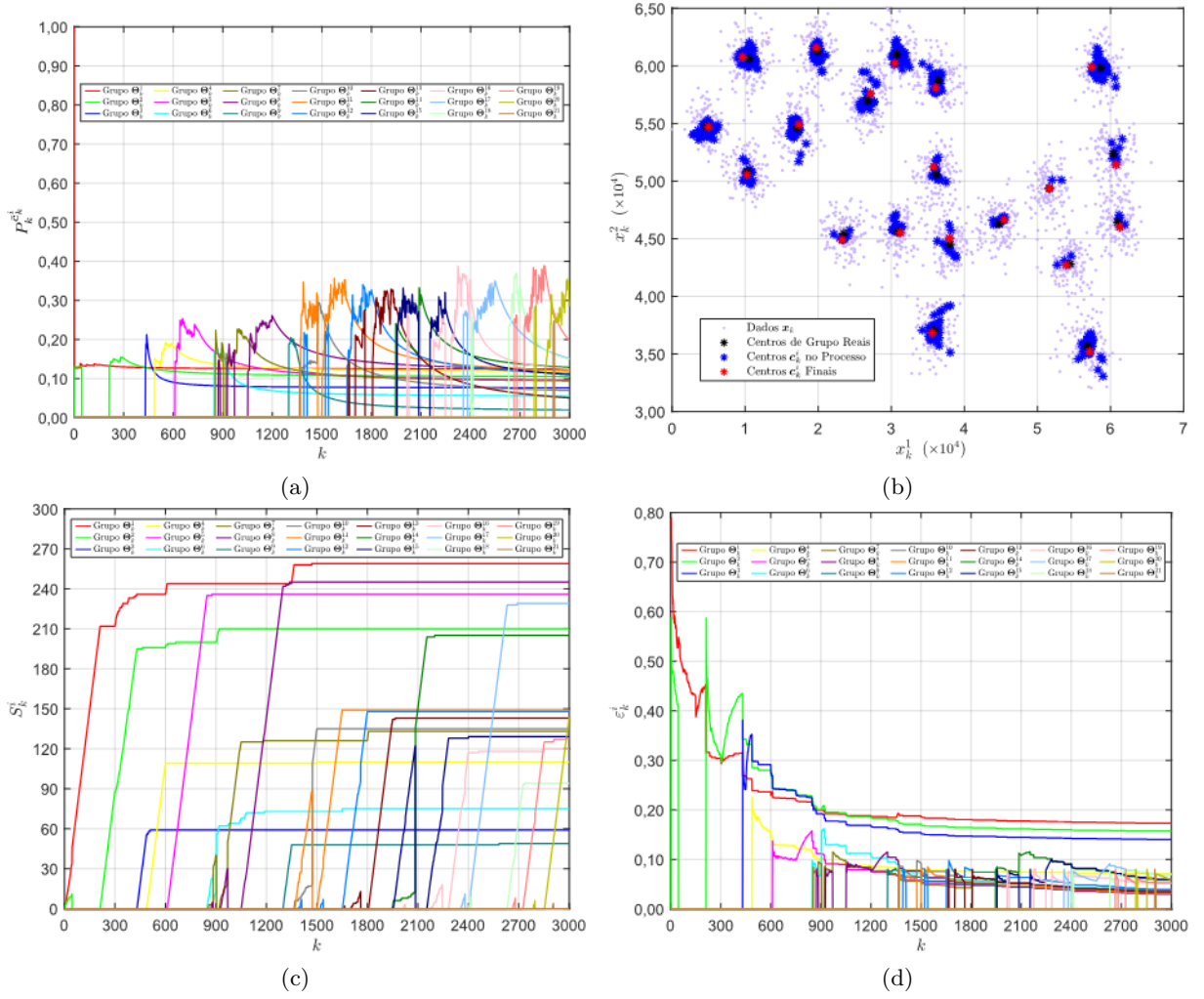


Figura 18 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1:

(a) Variação dos potenciais $P_k^{c_i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

altos potenciais $P_k^{c_i} \mid i=1, \dots, R_k$ (conforme a Figura 18a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{c_i} \mid i=1, \dots, R_k$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0.15]$. As sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{c_i} \mid i=1, \dots, R_k$ mostrados na Figura 18a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas

zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^{20} do vigésimo grupo Θ_k^{20} alcança o valor máximo 0,1666 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^9 do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor mínimo 0,0164 da partição final. A Figura 19b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 19c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1, \dots, R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 17c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 19d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

4.1.3.3 Benchmark R15

A Figura 20 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15 com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 20a mostra as coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* R15 em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* R15 são apresentados sequencialmente na forma de fluxo de dados. O valor mínimo da primeira coordenada x_k^1 é 3,4020 para $k = 506$, e o seu valor máximo é 17,1240 para $k = 342$. O valor mínimo da segunda coordenada x_k^2 é 3,1780 para $k = 530$, e o seu valor máximo é 17,0120 para $k = 416$.

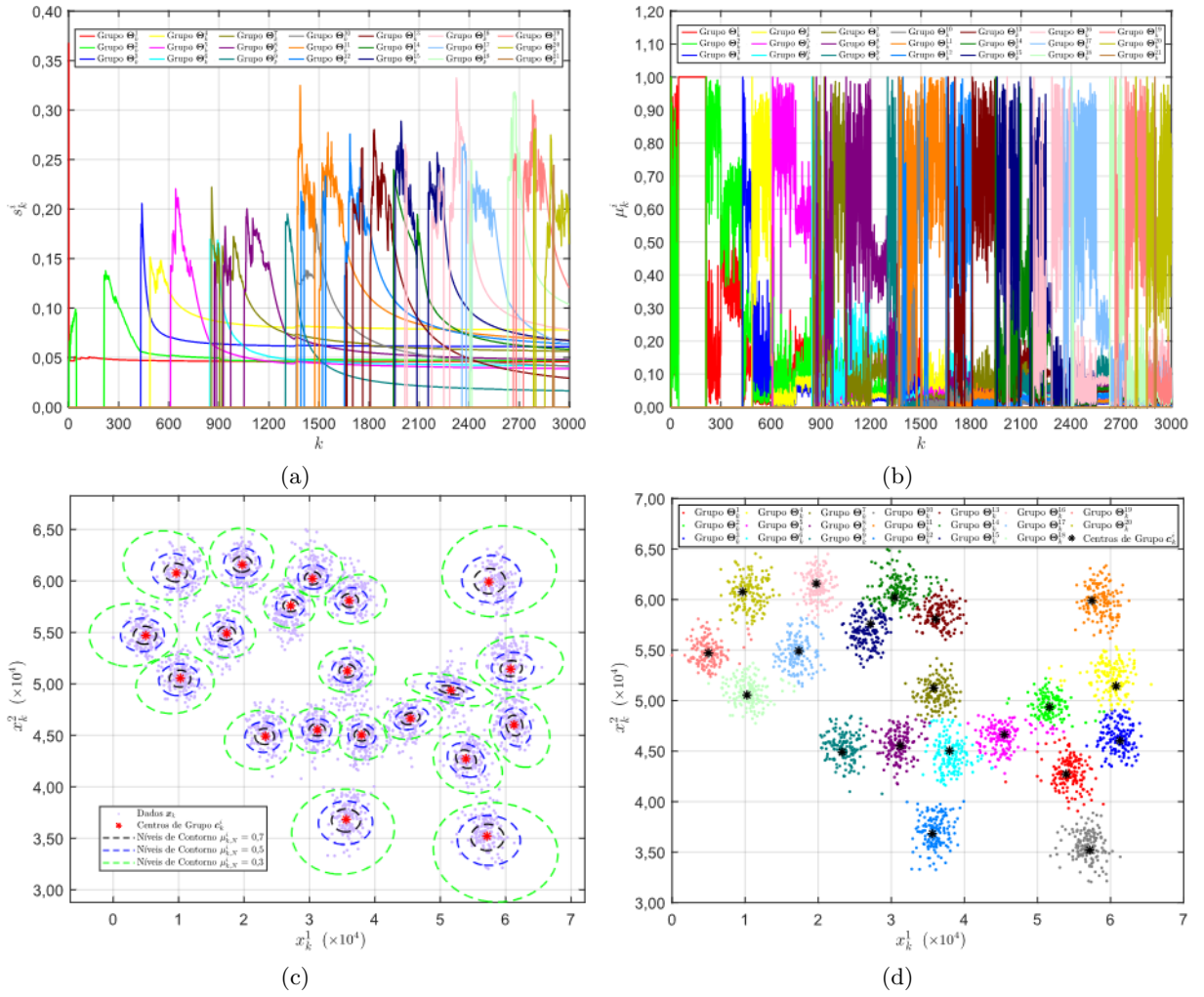


Figura 19 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* A1: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados x_k associados aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

A Figura 20b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave, iniciando com 1 grupo e finalizando com o valor correto de 15 grupos. Os pontos em que o número de grupos R_k decresce indicam o processo de mescla de grupos através da técnica evolucionária de cruzamento, o qual simplifica o conjunto de grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$. A Figura 20c mostra a identificação dos centros $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que

os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Embora no protótipo do segundo grupo Θ_k^2 , cujo centro é $\mathbf{c}_k^2 = [9,7409 \ 11,9344]^T$, tenha sido identificado um hiperelipsoide levemente desproporcional ao protótipo real do grupo, o algoritmo tem alcançado na partição final 15 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ próximos dos reais, bem como protótipos de grupo em geral adequadamente associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$. A Figura 20d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é 0 para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,4535 para $k = 560$.

A Figura 21 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15 com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 21a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0, 0,25]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{15}}$ do centro normalizado do décimo quinto grupo Θ_k^{15} alcança o valor máximo 0,3634 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,0014 da partição final. A Figura 21b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo geralmente em posições próximas dos centros reais, alcançando assim centros de grupo finais geralmente bem localizados em relação aos mesmos. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 20d). A Figura 21c mostra a variação dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos

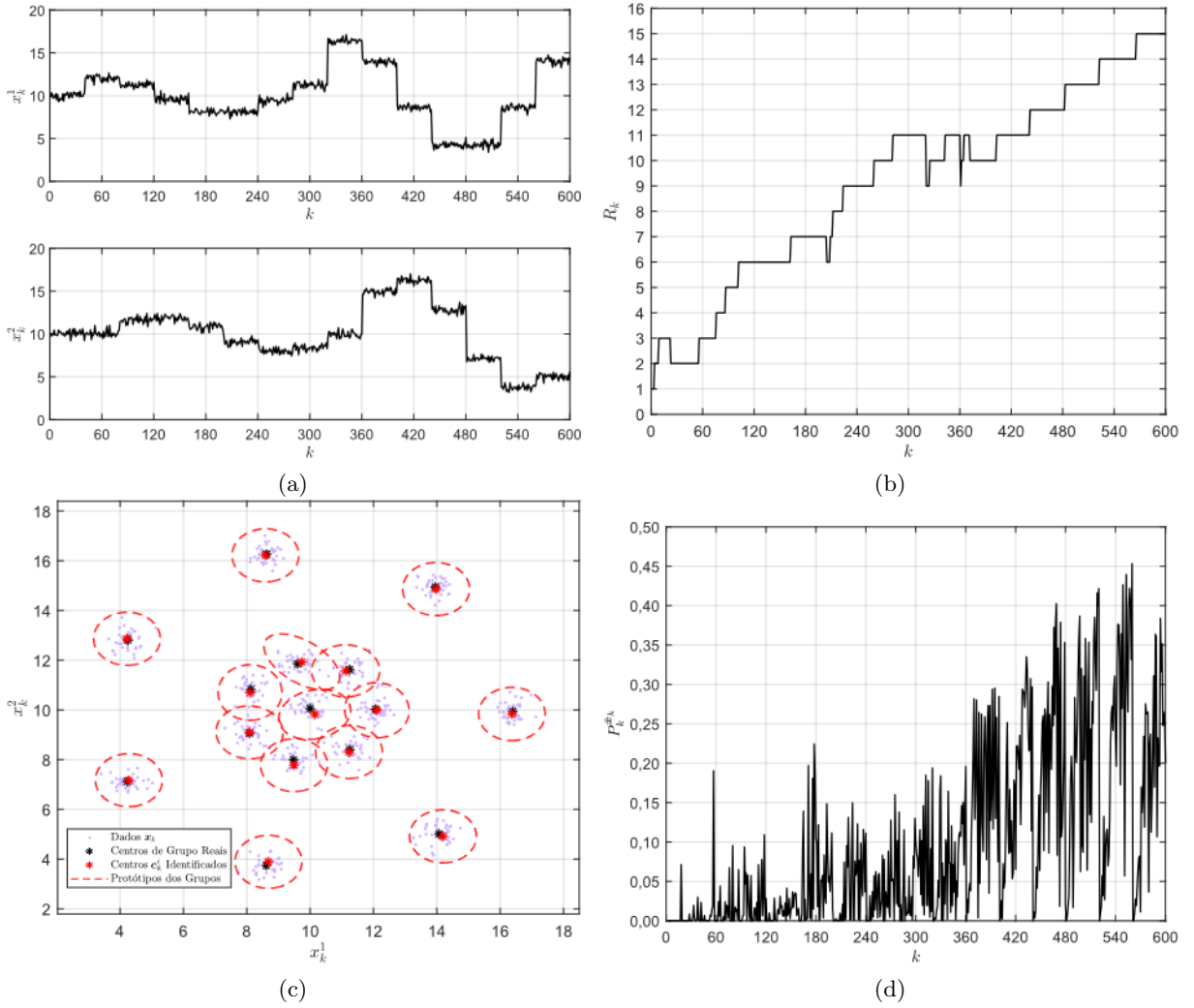


Figura 20 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

$\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo da partição final igual a 66 dados, enquanto o suporte S_k^5 do quinto grupo Θ_k^5 alcança o valor mínimo da partição final igual a 23 dados. A Figura 21d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,30]$. Pode-se ver que os valores iniciais

$\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,08$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados R15, previne o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (ver Figura 20b), em que seriam criados exageradamente mais grupos do que a quantidade real devido às faixas de operação $\varphi_k^l \mid_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ serem pequenas. O raio ε_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo 0,2814 da partição final, enquanto o raio ε_k^{10} do décimo grupo Θ_k^{10} alcança o valor mínimo 0,0415 da partição final.

A Figura 22 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15 com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 22a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 21c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 21a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,15]$. As sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 21a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^{15} do décimo quinto grupo Θ_k^{15} alcança o valor máximo 0,2138 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,0009 da partição final. A Figura 22b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 22c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados

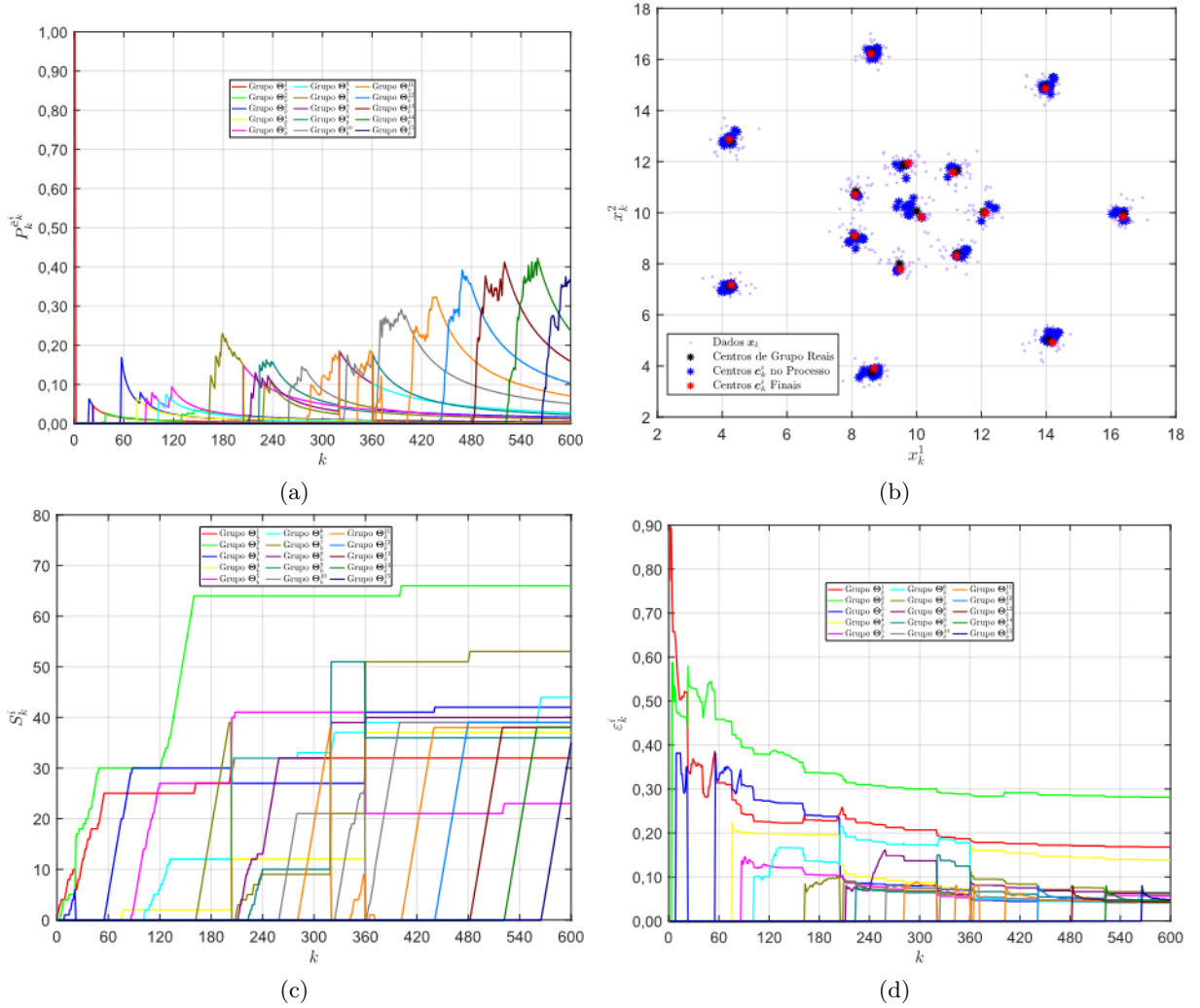


Figura 21 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15: (a) Variação dos potenciais $P_k^c_i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\epsilon_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 20c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos

próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 22d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

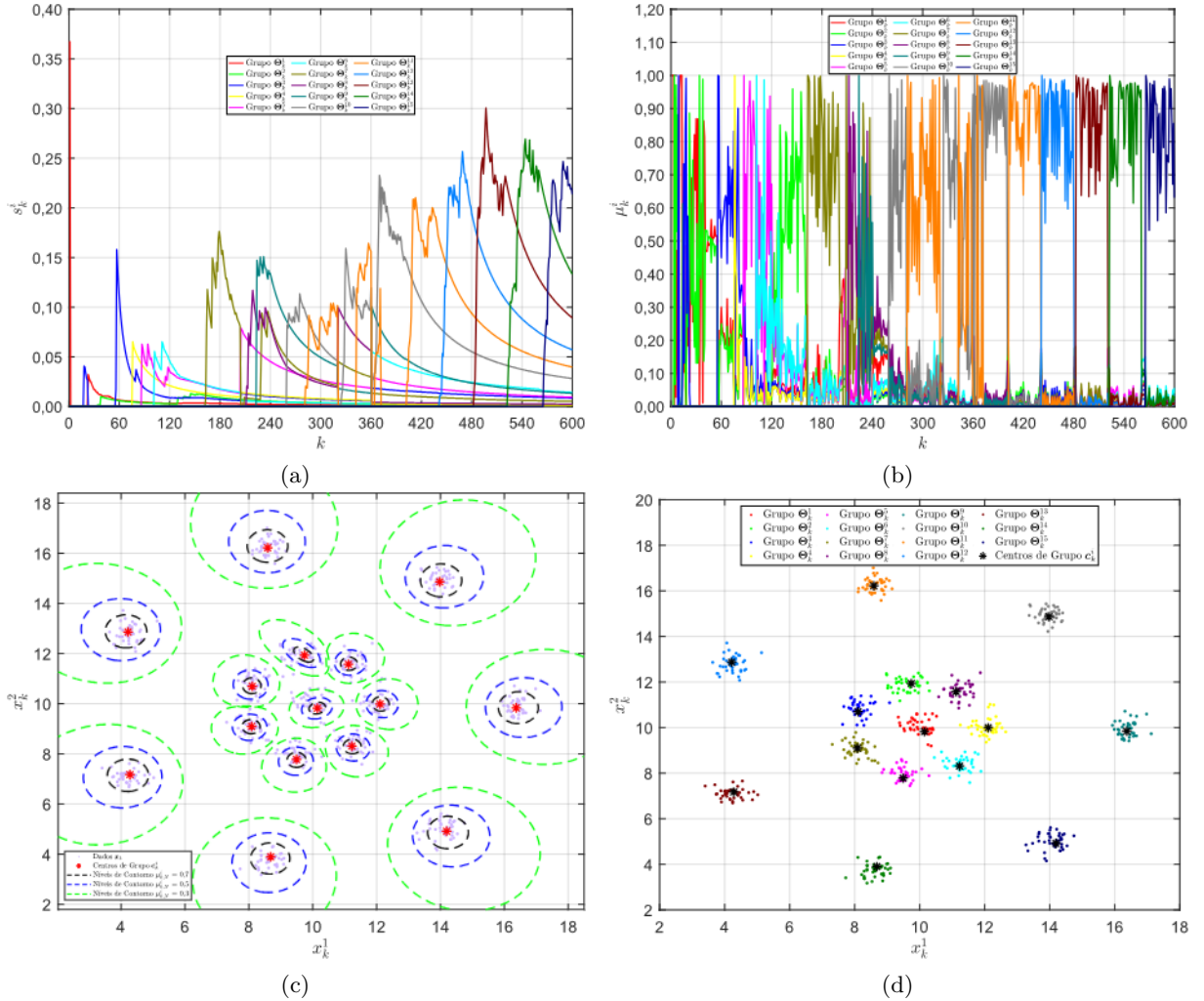


Figura 22 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* R15: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i | k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

4.1.3.4 Benchmark Unbalance

A Figura 23 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance* com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 23a mostra as coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark Unbalance* em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark Unbalance* são apresentados sequencialmente na forma de fluxo de dados, e que os três primeiros grupos apresentam alta densidade, enquanto os demais 5 grupos apresentam baixa densidade. O valor mínimo da primeira coordenada x_k^1 é 139779 para $k = 734$, e o seu valor máximo é 575805 para $k = 6439$. O valor mínimo da segunda coordenada x_k^2 é 271530 para $k = 6325$, e o seu valor máximo é 440940 para $k = 6114$. A Figura 23b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave para os três primeiros grupos, e uma maior variação para os demais 5 grupos, iniciando com 1 grupo, alcançando valor máximo de 9 grupos na amostra $k = 6328$, e finalizando com o valor correto de 8 grupos. Os pontos em que o número de grupos R_k decresce indicam o processo de mescla de grupos através da técnica evolucionária de cruzamento, o qual simplifica o conjunto de grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$. A Figura 23c mostra a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Embora os centros $\mathbf{c}_k^4 = [450642, 7058 \ 295341, 7968]^T$ e $\mathbf{c}_k^7 = [537920, 8406 \ 307115, 2965]^T$ dos grupos Θ_k^4 e Θ_k^7 na partição final estejam levemente distantes dos centro de grupo reais, o algoritmo tem alcançado na partição final centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ que estão geralmente próximos dos reais, assim como protótipos de grupo em geral bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$. A Figura 23d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ apresentam um comportamento ruidoso. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ é 0 para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,5008 para $k = 6111$.

A Figura 24 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance* com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 24a mostra

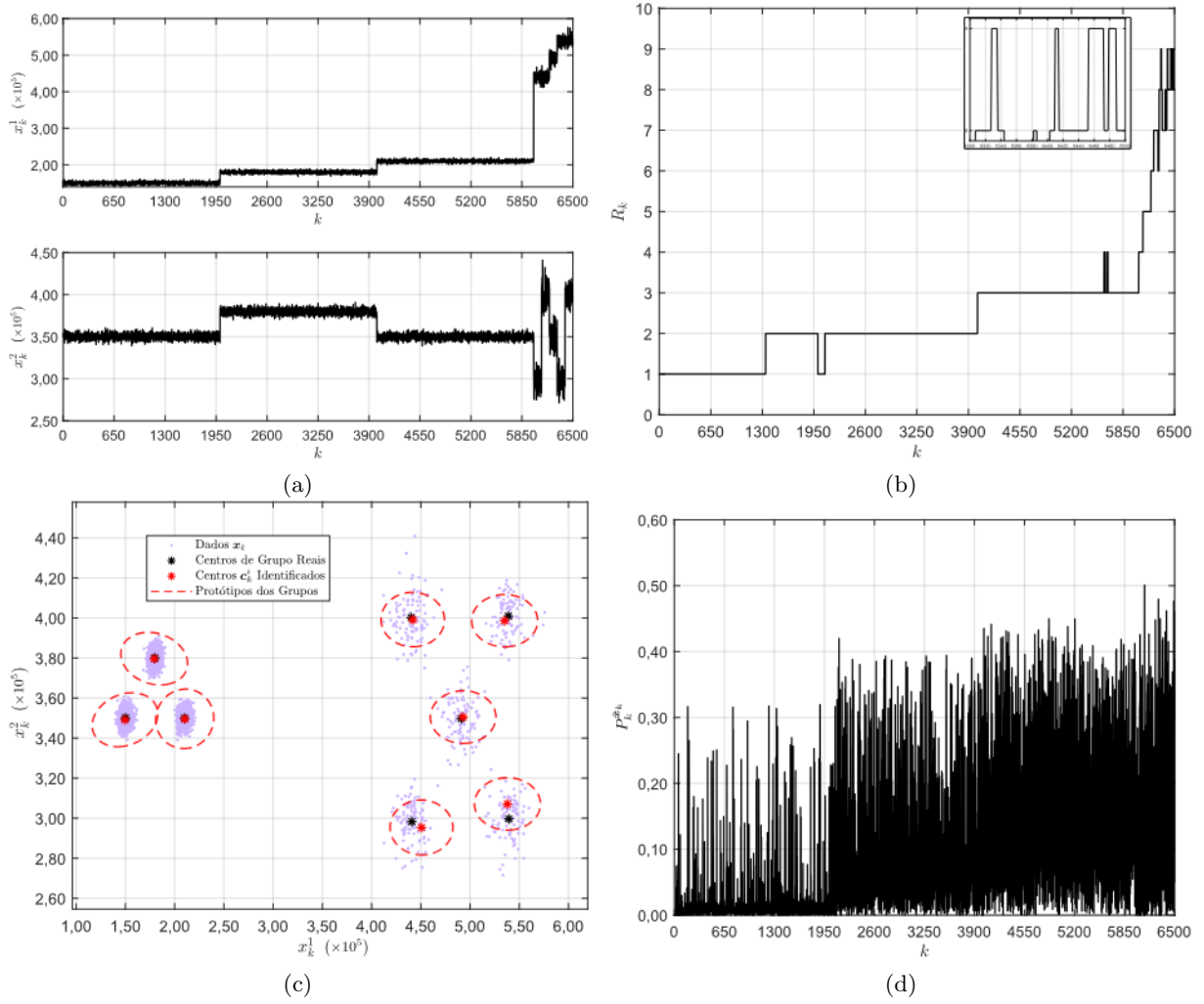


Figura 23 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance*: (a) Coordenadas x_k^1 e x_k^2 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}^i} \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0,20,0,35]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}^8}$ do centro normalizado do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor máximo 0,3304 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}^6}$ do centro normalizado do sexto grupo Θ_k^6 alcança o valor mínimo 0,2081 da partição final. A Figura 24b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais

são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo geralmente em posições próximas dos centros reais, alcançando assim centros de grupo finais geralmente bem localizados em relação aos mesmos. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 23d). A Figura 24c mostra a variação dos suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo da partição final igual a 2091 dados, enquanto o suporte S_k^4 do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor mínimo da partição final igual a 55 dados. A Figura 24d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,10]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,07$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados *Unbalance*, previne o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (ver Figura 23b), em que seriam criados exageradamente mais grupos do que a quantidade real devido às faixas de operação $\varphi_k^l \mid_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ serem pequenas. O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,0970 da partição final, enquanto o raio ε_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,0444 da partição final.

A Figura 25 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* *Unbalance* com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 25a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes

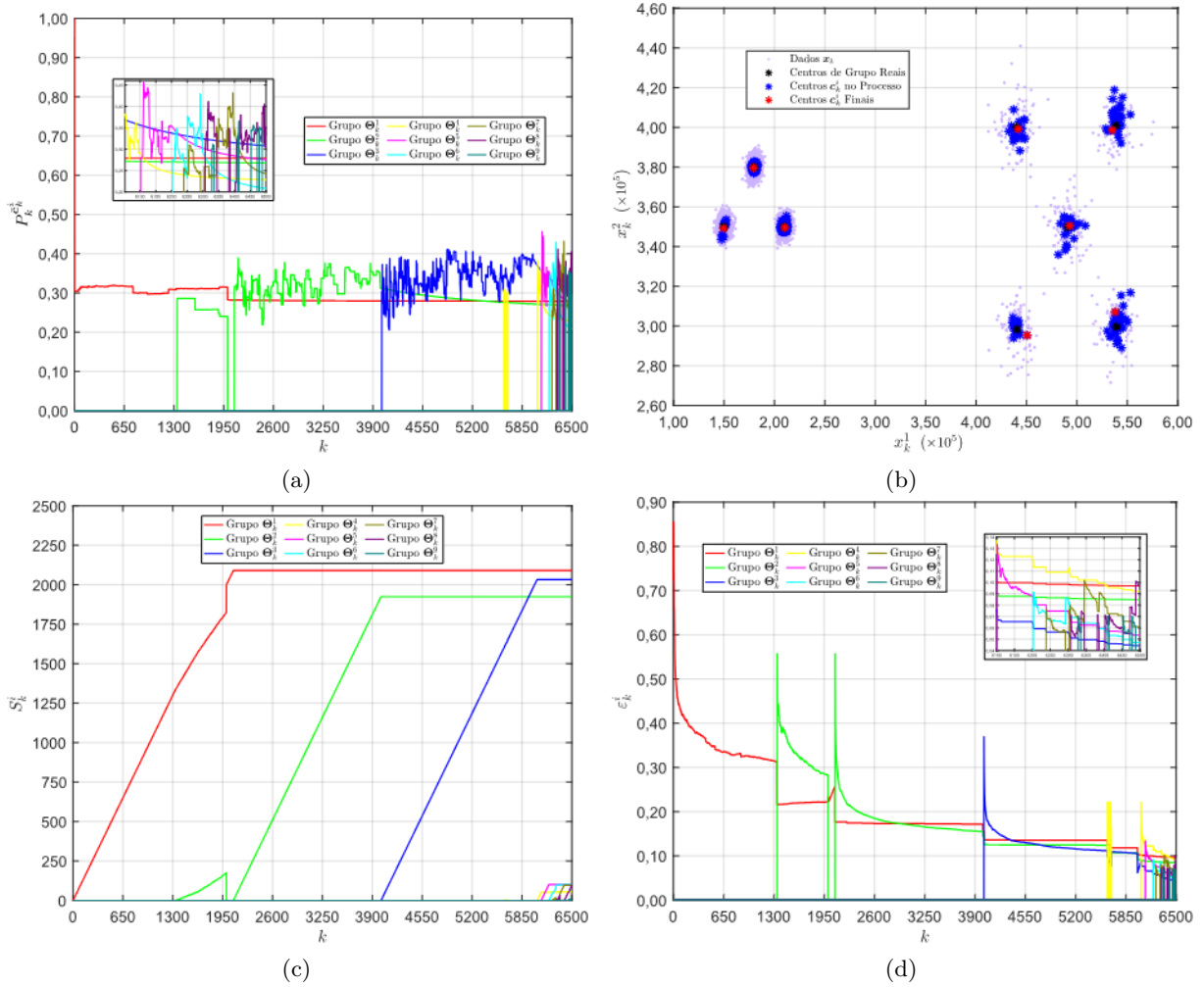


Figura 24 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance*: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

$S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 24c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 24a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,10,0,35]$. As sensibilidades $s_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 24a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas

zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor máximo 0,3153 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,1026 da partição final. A Figura 25b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 25c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 23c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 25d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

4.1.3.5 Benchmark Gauss 6-dim

A Figura 26 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 26a mostra as duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 6-dim em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* Gauss 6-dim são apresentados na forma de fluxo de dados em parte de maneira sequencial, porém com dados de grupos distintos sendo também apresentados alternadamente. O valor mínimo da quinta coordenada x_k^5 é 0 para $k = 2176$ e $k = 4045$, e o seu valor máximo é 908313 para $k = 3438$. O valor mínimo da sexta coordenada x_k^6 é 0 para $k = 2176$, e o seu valor

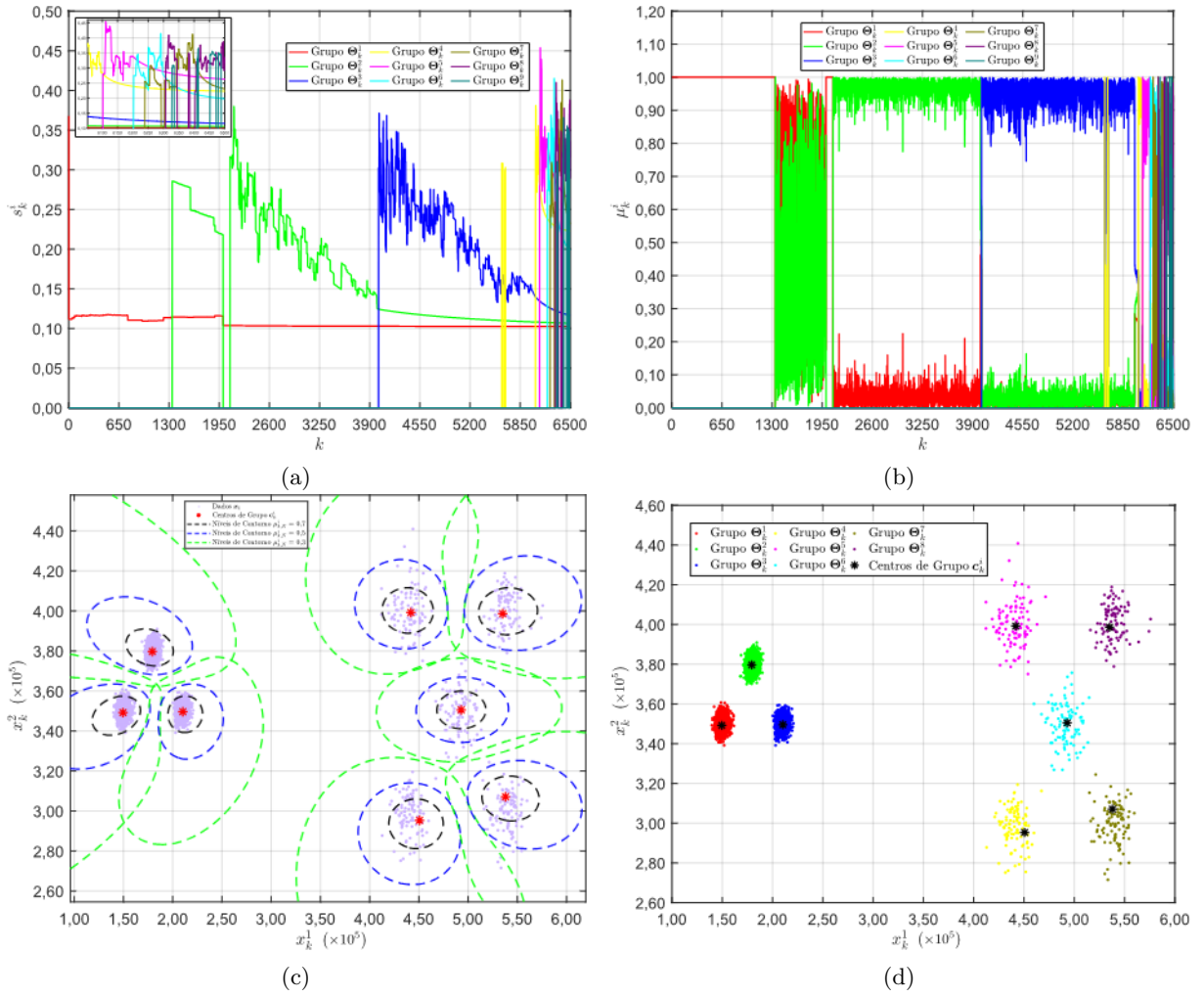


Figura 25 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark Unbalance*: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados x_k associados aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

máximo é 989480 para $k = 2258$. A Figura 26b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave, iniciando com 1 grupo e finalizando com o valor correto de 9 grupos. A Figura 26c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados x_k do *benchmark Gauss* 6-dim, a identificação dos centros $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais

identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ projetados no espaço bidimensional², representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 9 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente bem localizados em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, bem como protótipos de grupo em geral adequadamente associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$. A Figura 26d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso, e que uma grande quantidade de dados $\mathbf{x}_k$ apresenta altos valores de $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $8,8210 \times 10^{-29}$ para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,9417 para $k = 2452$.

A Figura 27 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 27a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0,40, 0,70]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^9}$ do centro normalizado do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor máximo 0,7760 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^2}$ do centro normalizado do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,4116 da partição final. A Figura 27b mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 6-dim, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo em posições geralmente bem localizadas em relação aos dados. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$. A maior parte dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ tem seu centro $\mathbf{c}_k^i$ deslocado por praticamente toda a área de densidade dos mesmos, indicando que muitos dados $\mathbf{x}_k$ foram selecionados como relevantes

² Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (5 e 6) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 4\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^l = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,l}$.

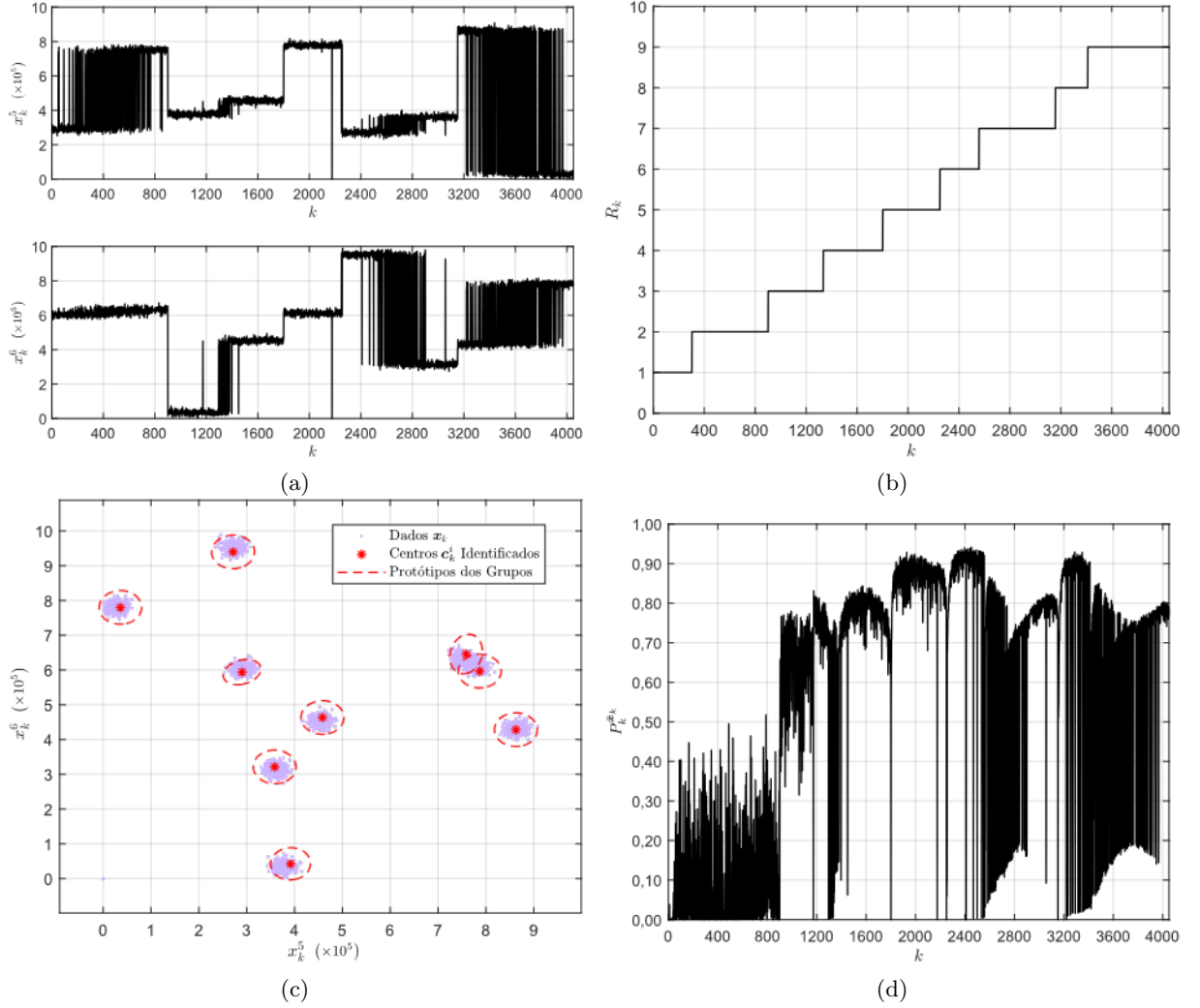


Figura 26 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim: (a) Coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i$ $|_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos Θ_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

em potencial (ver Figura 26d). A Figura 27c mostra a variação dos suportes S_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos Θ_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes S_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos Θ_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo da partição final igual a 475 dados, enquanto o suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo da partição final igual a 426 dados. A Figura 27d mostra a variação dos raios ε_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos Θ_k^i $|_{i=1,\dots,R_k}$ no

processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,15,0,85]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,25$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados Gauss 6-dim, previne o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (ver Figura 26b), em que seriam criados exageradamente mais grupos do que a quantidade real devido às faixas de operação $\varphi_k^l \Big|_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ serem pequenas. O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,8317 da partição final, enquanto o raio ε_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo 0,1576 da partição final.

A Figura 28 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 28a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 27c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 27a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,15,0,35]$. As sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 27a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^9 do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor máximo 0,3152 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,1569 da partição final. A Figura 28b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em

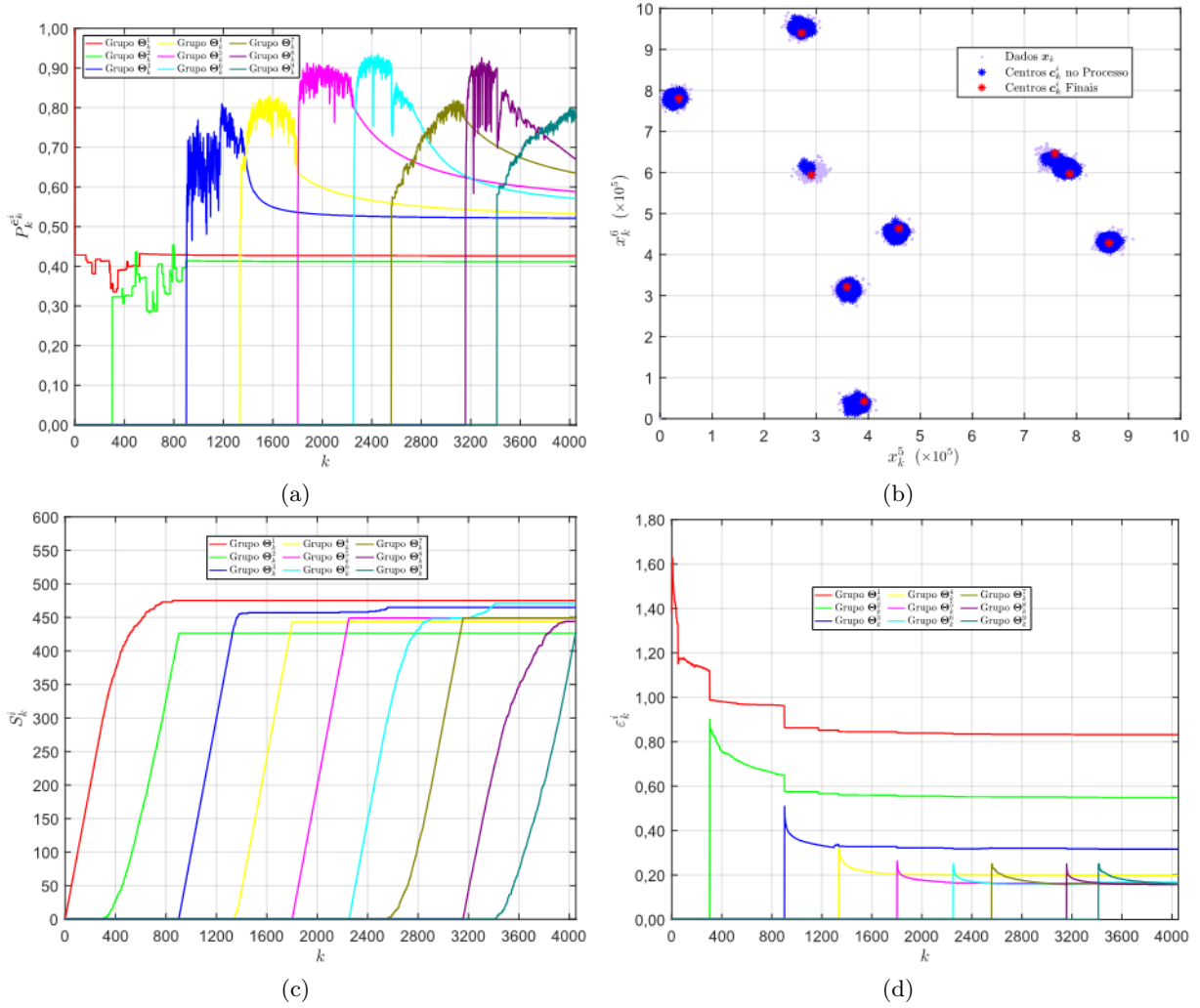


Figura 27 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 , em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\epsilon_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

que os graus de pertinências μ_k^i dos dados x_k são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 28c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados x_k do *benchmark* Gauss 6-dim, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional³, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de

³ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (5 e 6) do dado normalizado $\bar{x}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 4\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i |_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja:

grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 26c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 28d mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 6-dim, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

4.1.3.6 *Benchmark* Gauss 10-dim

A Figura 29 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 29a mostra as duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 10-dim em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* Gauss 10-dim são apresentados na forma de fluxo de dados em parte de maneira sequencial, porém com dados de grupos distintos sendo também apresentados alternadamente. O valor mínimo da nona coordenada x_k^9 é 0 para $k = 4097$, e o seu valor máximo é 881048 para $k = 5301$. O valor mínimo da décima coordenada x_k^{10} é 389096 para $k = 3135$, e o seu valor máximo é 946108 para $k = 5841$. A Figura 29b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave, iniciando com 1 grupo e finalizando com o valor correto de 9 grupos. A Figura 29c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 10-dim, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ projetados no espaço bidimensional⁴, representados

$$\bar{x}_k^l = \bar{c}_N^{i,l}.$$

⁴ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (9 e 10)

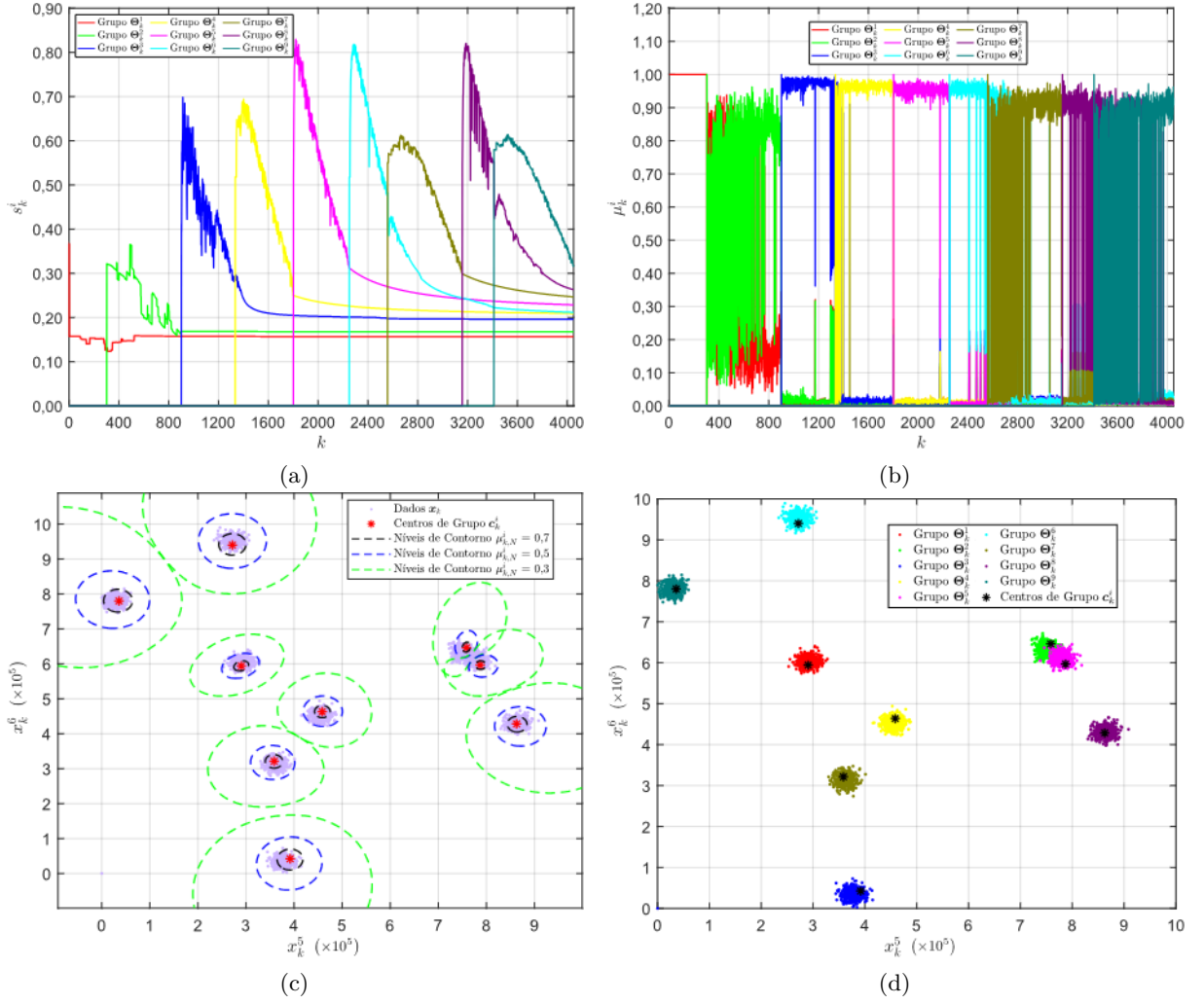


Figura 28 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 6-dim: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^5 e x_k^6 dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Embora no protótipo do segundo grupo Θ_k^2 , cujas duas últimas coordenadas (9 e 10) do centro $\mathbf{c}_k^2$ são $[c_k^{2,9} \ c_k^{2,10}]^T = [277528,9999 \ 643193,4770]^T$, tenha sido identificado um hiperelipsoide levemente desproporcional ao protótipo real do grupo, o algoritmo tem alcançado na partição final 9 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ geralmente bem localizados em relação aos

do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 8\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i |_{i=1, \dots, R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^l = \bar{c}_N^{i,l}$.

dados $\mathbf{x}_k$, bem como protótipos de grupo em geral adequadamente associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$. A Figura 29d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso, e que uma grande quantidade de dados $\mathbf{x}_k$ apresenta altos valores de $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $2,9935 \times 10^{-20}$ para $k = 2$ e $k = 3$, e o seu valor máximo é 0,9389 para $k = 6538$.

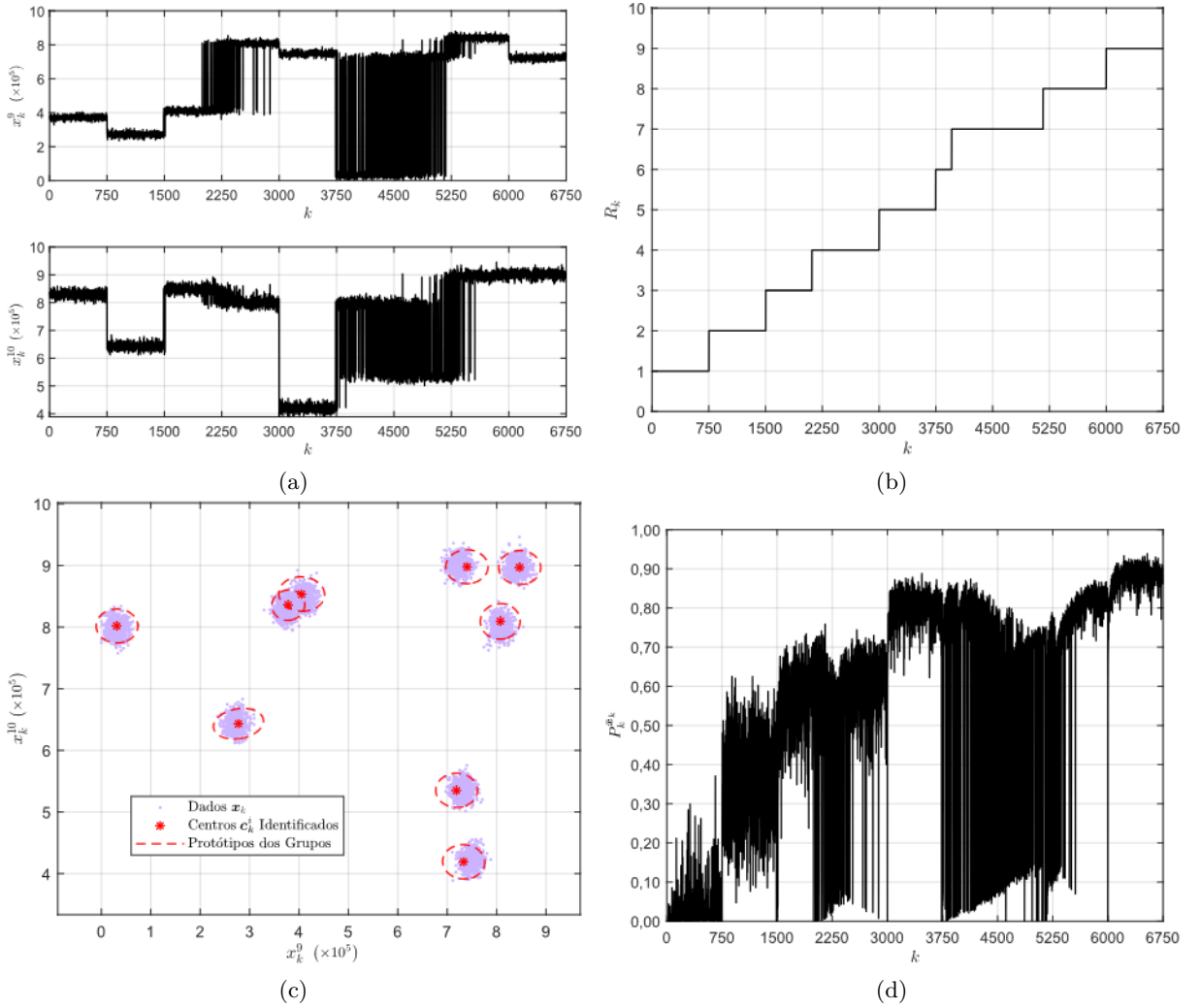


Figura 29 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim: (a) Coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

A Figura 30 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à

variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 30a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0,35, 0,75]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^9}$ do centro normalizado do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor máximo 0,8697 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,3964 da partição final. A Figura 30b mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 10-dim, as posições dos centros de grupo $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo em posições geralmente bem localizadas em relação aos dados. Todas as posições dos centros de grupo $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$. A maior parte dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ tem seu centro $\bar{c}_k^i$ deslocado por praticamente toda a área de densidade dos mesmos, indicando que muitos dados $\mathbf{x}_k$ foram selecionados como relevantes em potencial (ver Figura 29d). A Figura 30c mostra a variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^5 do quinto grupo Θ_k^5 alcança o valor máximo da partição final igual a 765 dados, enquanto o suporte S_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo da partição final igual a 737 dados. A Figura 30d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,20, 1,10]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,30$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados Gauss 10-dim, previne o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ (ver Figura 29b), em que seriam

criados exageradamente mais grupos do que a quantidade real devido às faixas de operação $\varphi_k^l |_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ serem pequenas. O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 1,0926 da partição final, enquanto o raio ε_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo 0,2234 da partição final.

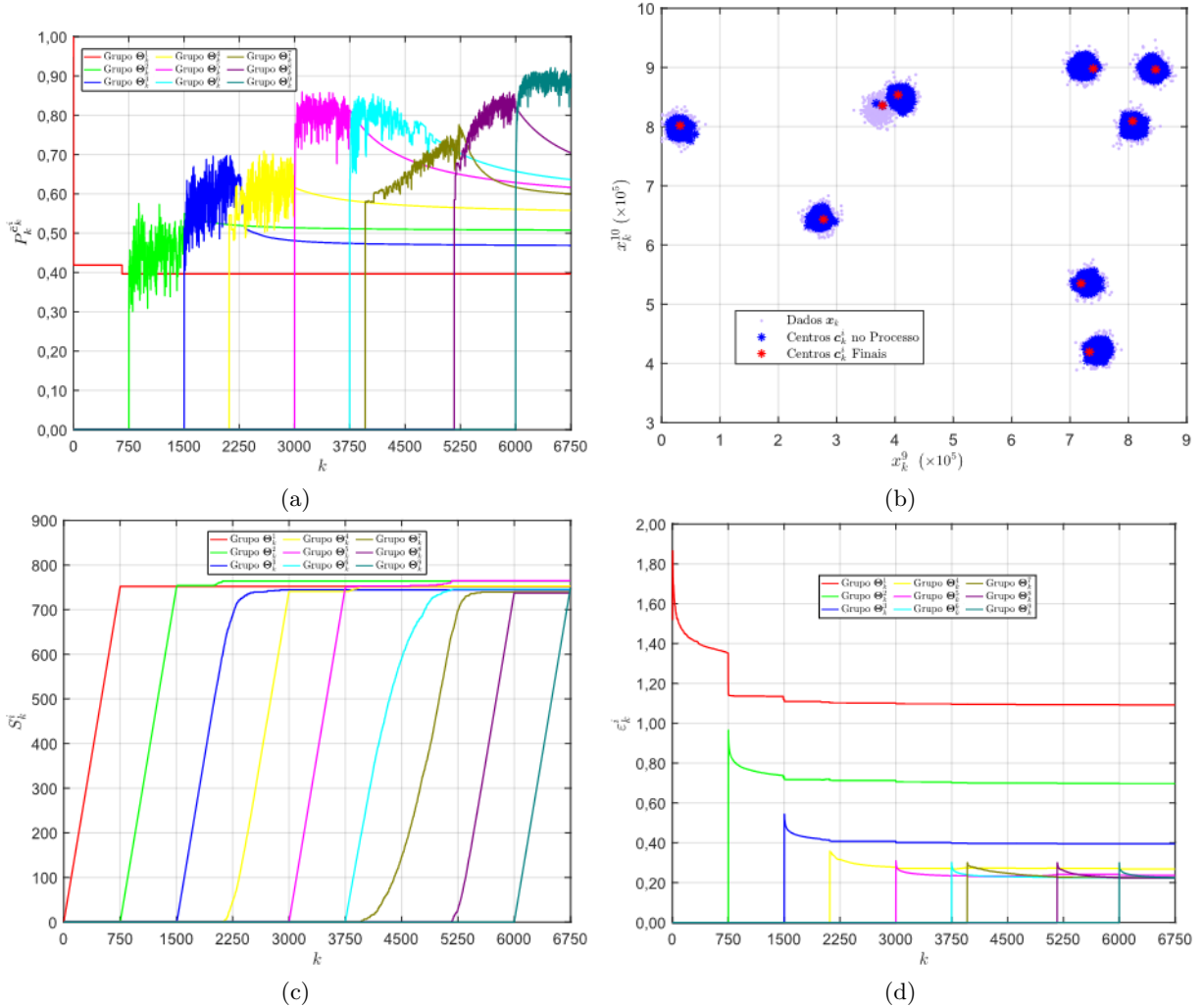


Figura 30 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim: (a) Variação dos potenciais $P_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

A Figura 31 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o

máximo grau de pertinência. A Figura 31a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 30c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 30a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,10,0,35]$. As sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 30a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^9 do nono grupo Θ_k^9 alcança o valor máximo 0,3267 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,1483 da partição final. A Figura 31b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 31c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 10-dim, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional⁵, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 29c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas

⁵ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (9 e 10) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 8\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^l = \bar{c}_N^{i,l}$.

direções onde não existem outros grupos. A Figura 31d mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* Gauss 10-dim, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i |_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

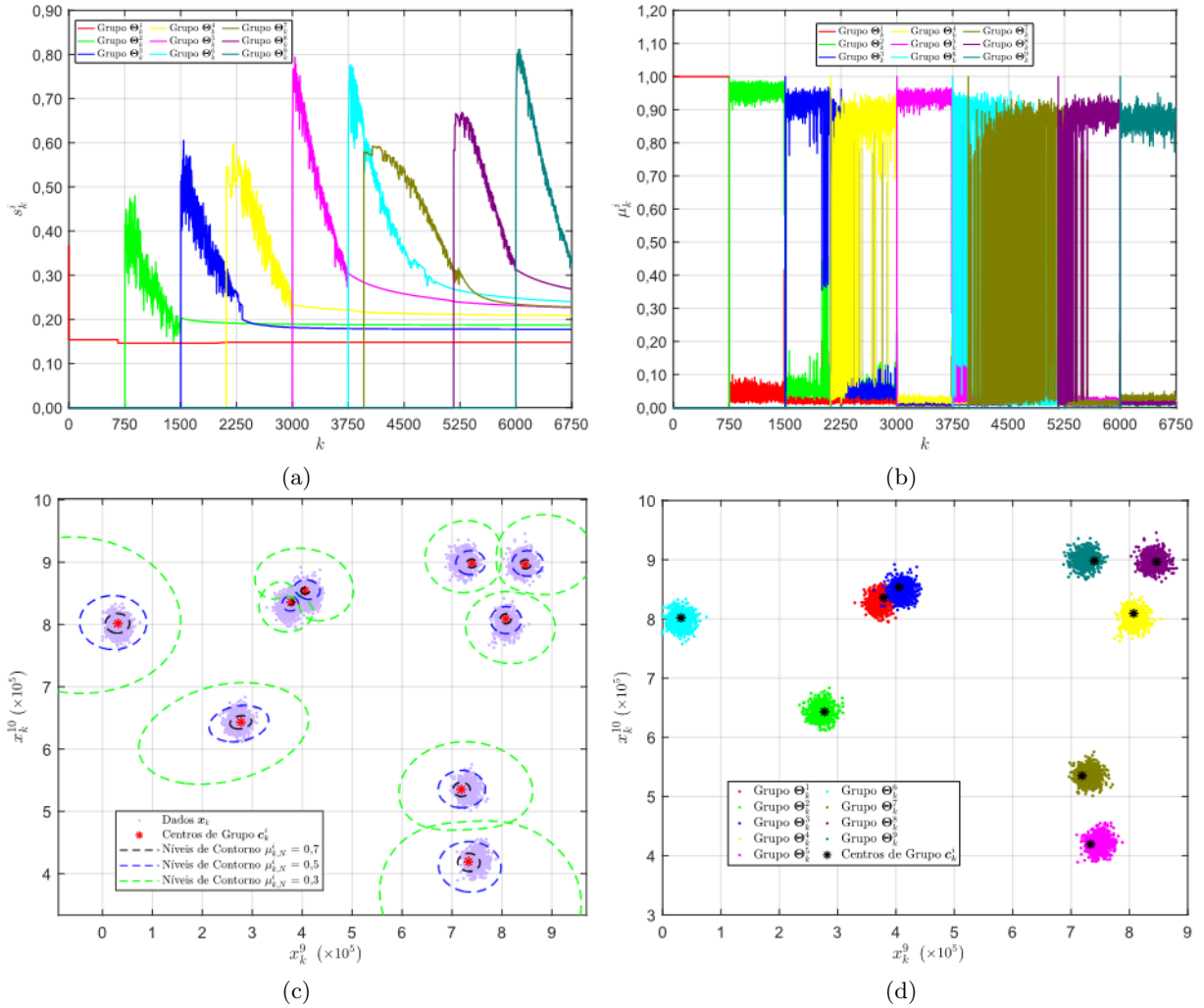


Figura 31 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* Gauss 10-dim: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^9 e x_k^{10} dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

4.1.3.7 Benchmark DIM032

A Figura 32 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032 com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 32a mostra as duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM032 em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* DIM032 são apresentados sequencialmente na forma de fluxo de dados. O valor mínimo da trigésima primeira coordenada x_k^{31} é 41 para $k = 916$, e o seu valor máximo é 218 para $k = 818$. O valor mínimo da trigésima segunda coordenada x_k^{32} é 34 para $k = 651$, e o seu valor máximo é 223 para $k = 859$. A Figura 32b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k inicia em 1 e tem alta variação no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ antes da centésima amostra $k = 100$, alcançando o valor de 6 grupos enquanto a quantidade real de grupos é apenas 2 (ver Figura 32a), devido a menores faixas de operação $\varphi_k^l \big|_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ durante essas amostras. O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ na Equação (3.42) quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados DIM032, não previne completamente o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$, sendo criados mais grupos do que a quantidade real, mas evita que esse agrupamento excessivo seja ainda mais acentuado. Posteriormente à centésima amostra $k = 100$, tem-se que o número de grupos R_k se ajusta à quantidade real por meio do mecanismo de mescla de grupos realizado através da técnica evolucionária de cruzamento, e passa a ter uma variação suave, finalizando com o valor correto de 16 grupos. A Figura 32c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM032, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ projetados no espaço bidimensional⁶, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 16 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ próximos dos reais, bem como protótipos de grupo adequadamente associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$. A Figura 32d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso e com uma tendência

⁶ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (31 e 32) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 30\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^l = \bar{c}_N^l$.

de crescimento durante cada grupo do *benchmark* DIM032 apresentado em fluxo (ver Figura 32a). O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ é 0 para $k \in \{2, 3, 4, 56, 61, 65\}$, e o seu valor máximo é 0,7717 para $k = 383$.

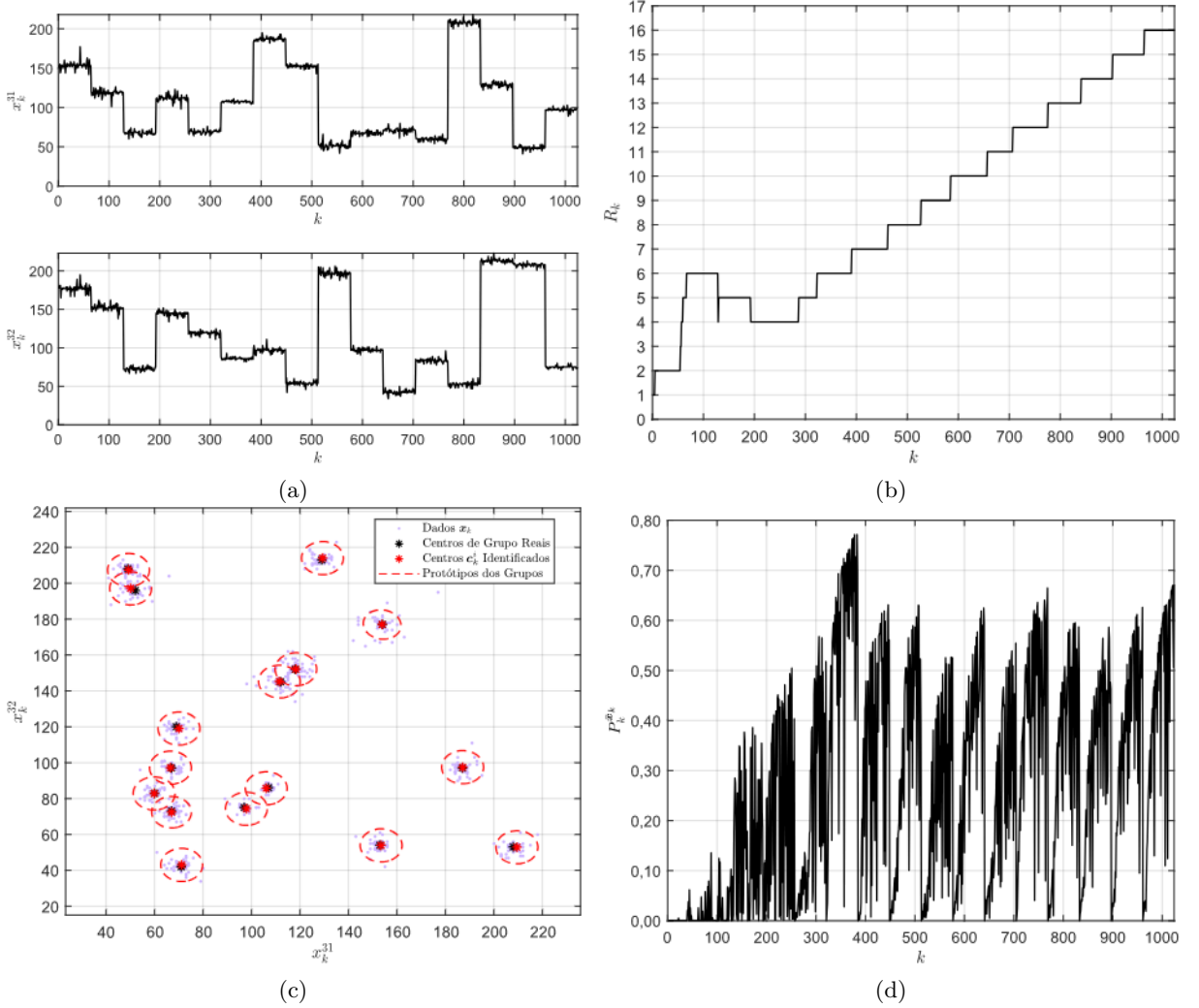


Figura 32 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032: (a) Coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

A Figura 33 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032 com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 33a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os

potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0, 0,35]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^{16}}$ do centro normalizado do décimo sexto grupo Θ_k^{16} alcança o valor máximo 0,6291 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^4}$ do centro normalizado do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor mínimo 0,0025 da partição final. A Figura 33b mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM032, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo em posições geralmente próximas dos centros reais, alcançando assim centros de grupo finais bem localizados em relação aos mesmos. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ (ver Figura 32d). A Figura 33c mostra a variação dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor máximo da partição final igual a 115 dados, enquanto o suporte S_k^5 do quinto grupo Θ_k^5 alcança o valor mínimo da partição final igual a 34 dados. A Figura 33d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento levemente decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,25, 0,50]$ (exceto o raio ε_k^4 do quarto grupo Θ_k^4). Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,27$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^4 do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor máximo 1,5099 da partição final, enquanto o raio ε_k^6 do sexto grupo Θ_k^6 alcança o valor mínimo 0,2552 da partição final.

A Figura 34 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032 com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de

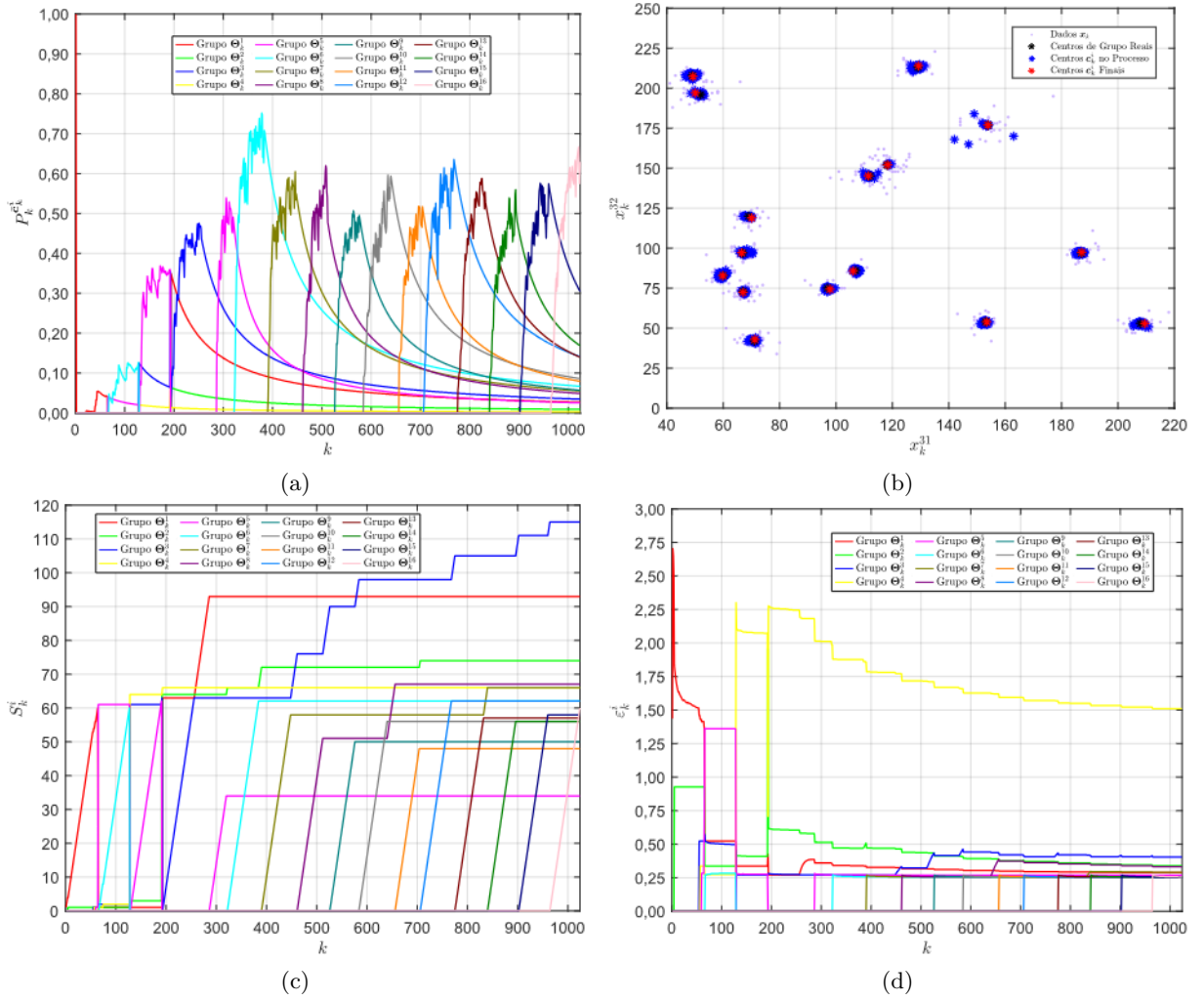


Figura 33 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 34a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ (conforme a Figura 33c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ (conforme a Figura 33a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ é geralmente

decrecente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,20]$. As sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 33a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^{16} do décimo sexto grupo Θ_k^{16} alcança o valor máximo 0,3734 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^4 do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor mínimo 0,0014 da partição final. A Figura 34b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 34c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM032, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional⁷, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 32c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. Devido ao alto grau de incerteza ($m = 3,80$) atribuído nesta implementação, os níveis de contorno apresentam alta compactação⁸, aproximando-se consideravelmente dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, de modo que valores pequenos (0,4, 0,3 e 0,2) de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ para os contornos são adotados para ilustração por conveniência. A Figura 34d mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM032, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência

⁷ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (31 e 32) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 30\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^l = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,l}$.

⁸ O efeito do grau de incerteza m sobre os níveis de contorno associados às funções de pertinência é ilustrado na Figura 11b.

$\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

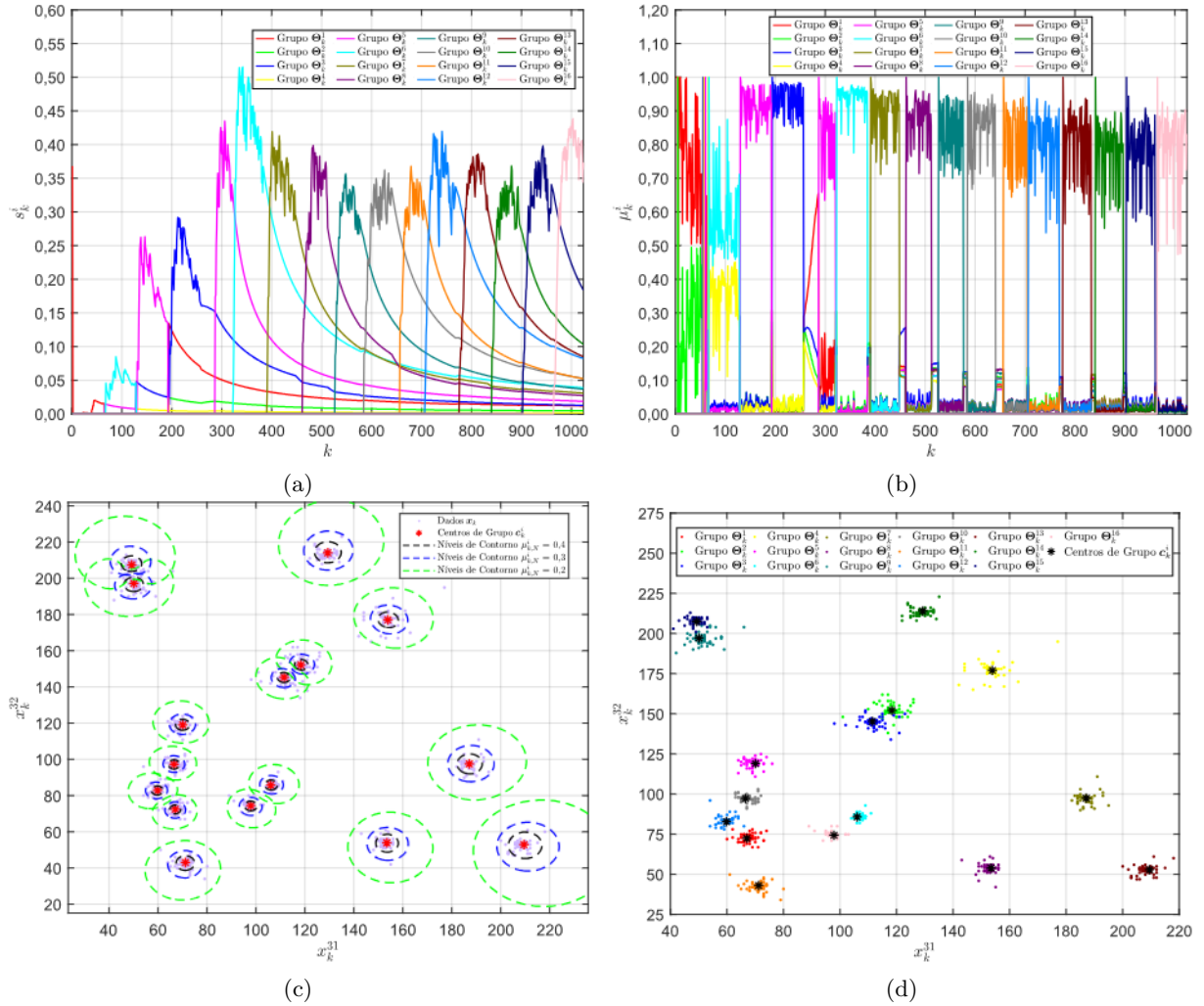


Figura 34 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM032: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{31} e x_k^{32} dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

4.1.3.8 Benchmark DIM064

A Figura 35 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064 com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 35a mostra as duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM064 em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$, que os grupos do *benchmark* DIM064 são apresentados sequencialmente na forma de fluxo de dados. O valor mínimo da sexagésima terceira coordenada x_k^{63} é 58 para $k = 615$, e o seu valor máximo é 228 para $k = 746$. O valor mínimo da sexagésima quarta coordenada x_k^{64} é 25 para $k = 770$, e o seu valor máximo é 210 para $k = 342$ e $k = 368$. A Figura 35b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k inicia em 1 e tem alta variação no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$ antes da centésima amostra $k = 100$, alcançando o valor de 6 grupos enquanto a quantidade real de grupos é apenas 2 (ver Figura 35a), devido a menores faixas de operação $\varphi_k^l \Big|_{l=1,\dots,n}$ do fluxo de dados $\mathbf{X}$ durante essas amostras. O alto valor de raio inicial $\varepsilon_{o,k}^i$ na Equação (3.42) quando o número de grupos R_k é pequeno, neste contexto do *benchmark* de conjunto de dados DIM064, não previne completamente o efeito de agrupamento excessivo no início do fluxo de dados $\mathbf{X}$, sendo criados mais grupos do que a quantidade real, mas evita que esse agrupamento excessivo seja ainda mais acentuado. Posteriormente à centésima amostra $k = 100$, tem-se que o número de grupos R_k se ajusta à quantidade real por meio do mecanismo de mescla de grupos realizado através da técnica evolucionária de cruzamento, e passa a ter uma variação suave, finalizando com o valor correto de 16 grupos. A Figura 35c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM064, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ projetados no espaço bidimensional⁹, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 16 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ próximos dos reais, bem como protótipos de grupo adequadamente associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ nos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. A Figura 35d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso e com

⁹ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (63 e 64) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 62\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^l = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,l}$.

uma tendência de crescimento durante cada grupo do *benchmark* DIM064 apresentado em fluxo (ver Figura 35a). O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ é $9,4260 \times 10^{-8}$ para $k = 2$ e $k = 65$, e o seu valor máximo é 0,9333 para $k = 246$.

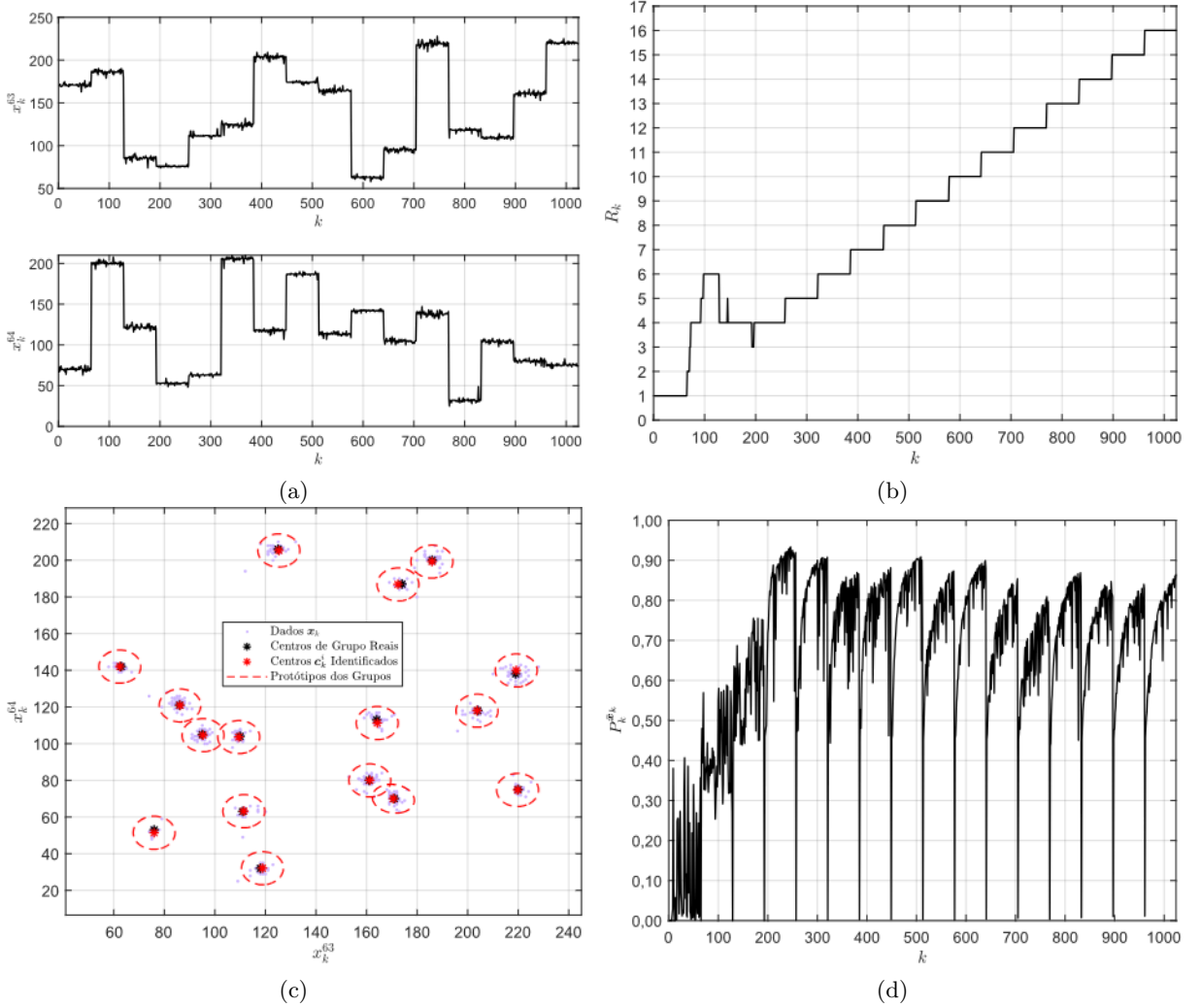


Figura 35 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064: (a) Coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

A Figura 36 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064 com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 36a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os

potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0,30,0,70]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^{16}}$ do centro normalizado do décimo sexto grupo Θ_k^{16} alcança o valor máximo 0,8600 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,3453 da partição final. A Figura 36b mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM064, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo em posições geralmente próximas dos centros reais, alcançando assim centros de grupo finais bem localizados em relação aos mesmos. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ (ver Figura 35d). A Figura 36c mostra a variação dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a estabilizar com pequenas variações quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo da partição final igual a 68 dados, enquanto os suportes S_k^4 , S_k^8 e S_k^{10} dos grupos Θ_k^4 , Θ_k^8 e Θ_k^{10} alcançam o valor mínimo da partição final igual a 62 dados. A Figura 36d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento levemente decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,45,1]$ (exceto o raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1). Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,51$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 1,9556 da partição final, enquanto o raio ε_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo 0,4943 da partição final.

A Figura 37 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064 com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de

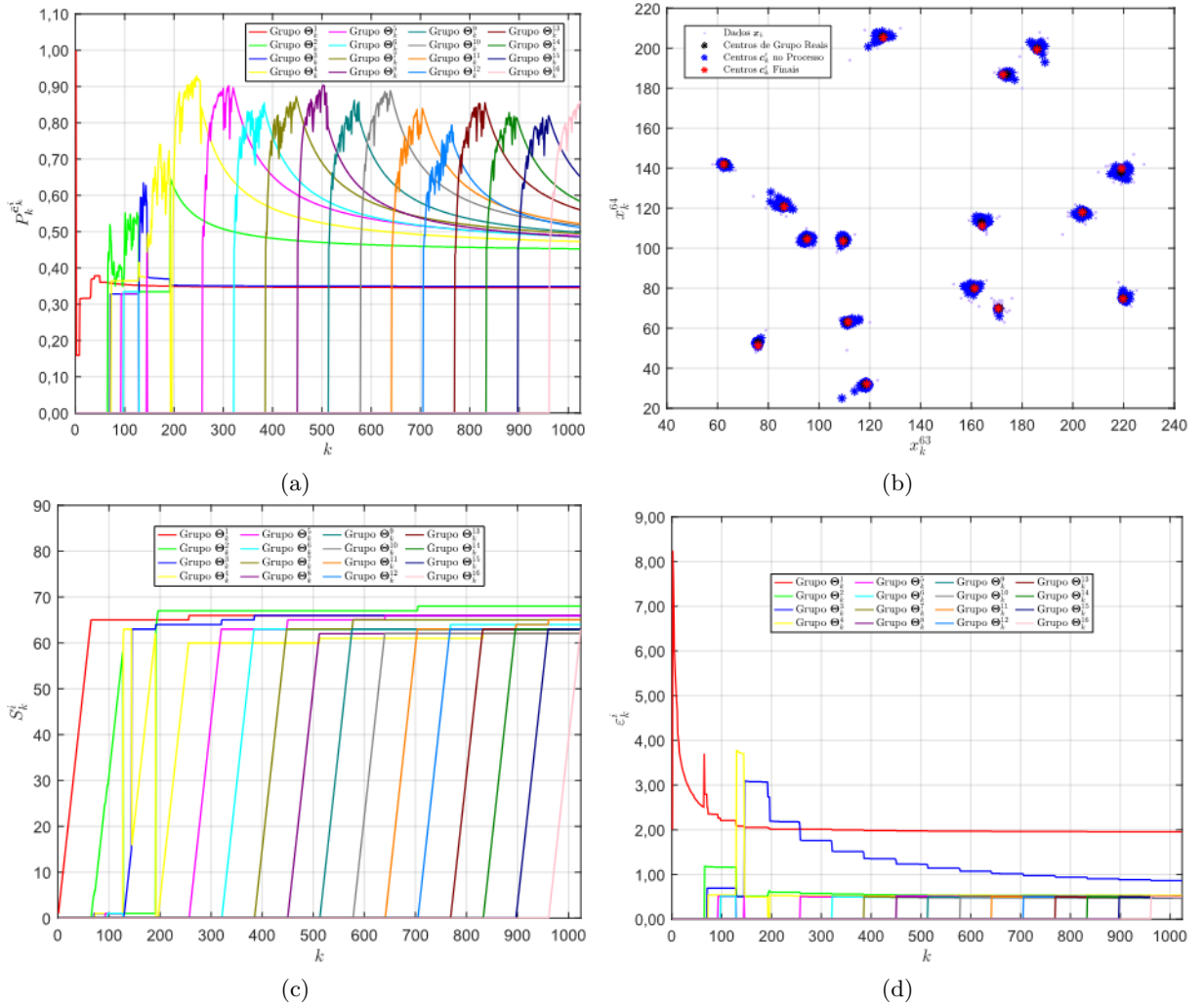


Figura 36 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo reais em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\epsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 37a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ (conforme a Figura 36c) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ (conforme a Figura 36a), de acordo com a Equação (3.85).

O comportamento das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,10,0,30]$. As sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 36a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^{16} do décimo sexto grupo Θ_k^{16} alcança o valor máximo 0,3405 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,1308 da partição final. A Figura 37b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 37c mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark* DIM064, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional¹⁰, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, e adequadamente associados aos protótipos dos mesmos (ver Figura 35c). Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. Devido ao alto grau de incerteza ($m = 4,00$) atribuído nesta implementação, os níveis de contorno apresentam alta compactação¹¹, aproximando-se consideravelmente dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, de modo que valores pequenos (0,4, 0,3 e 0,2) de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ para os contornos são adotados para ilustração por conveniência. A Figura 37d mostra, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$ do *benchmark*

¹⁰ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (63 e 64) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 62\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^l = \bar{\mathbf{c}}_N^l$.

¹¹ O efeito do grau de incerteza m sobre os níveis de contorno associados às funções de pertinência é ilustrado na Figura 11b.

DIM064, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \mid k=1, \dots, N, i=1, \dots, R_N$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu, com algumas poucas exceções, maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para os seus grupos reais.

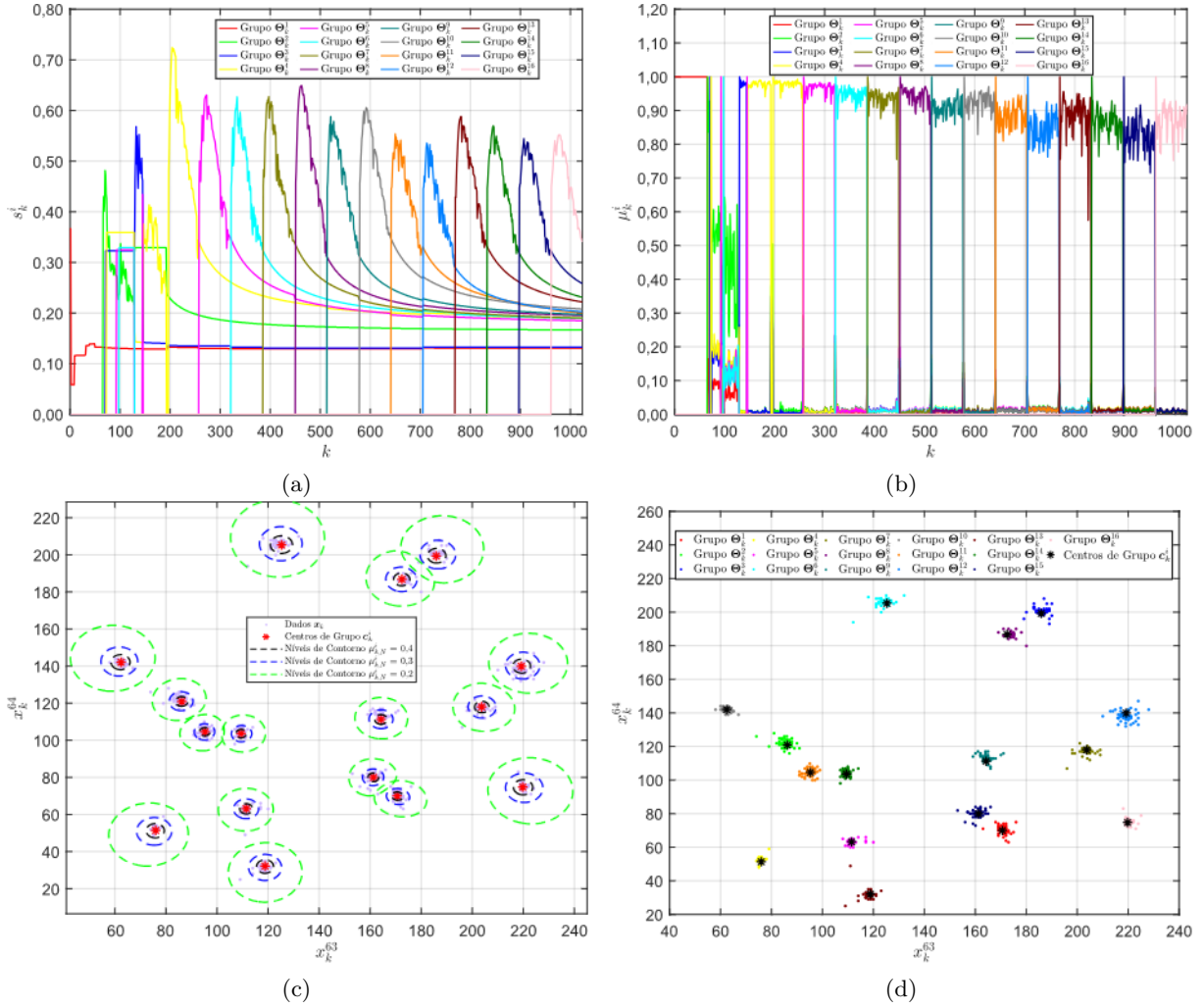


Figura 37 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo do *benchmark* DIM064: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i \mid k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas duas últimas coordenadas x_k^{63} e x_k^{64} dos dados $\mathbf{x}_k$, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

4.1.4 Considerações Finais sobre o Agrupamento Nebuloso Evolutivo de 8 *Benchmarks*

A partir dos resultados mencionados sobre o agrupamento nebuloso evolutivo dos 8 *benchmarks* nas Seções 4.1.1-4.1.3, pode-se observar que o algoritmo proposto é capaz de extrair, a partir de dados disponibilizados em fluxo, as características de agrupamento dos 8 *benchmarks*, como a quantidade correta de grupos (Figuras 14b, 17b, 20b, 23b, 26b, 29b, 32b e 35b e Tabelas 2-5), centros de grupo próximos dos reais com protótipos adequadamente associados à distribuição dos dados nos grupos (Figuras 14c, 15b, 17c, 18b, 20c, 21b, 23c, 24b, 26c, 27b, 29c, 30b, 32c, 33b, 35c e 36b), níveis de contorno associados aos graus de pertinência adaptativos em relação aos dados e grupos (Figuras 16c, 19c, 22c, 25c, 28c, 31c, 34c e 37c), associação adequada dos dados aos grupos a partir dos graus de pertinência máximos (Figuras 16d, 19d, 22d, 25d, 28d, 31d, 34d e 37d), e valores de índice de qualidade Q na Equação (4.1) competitivos em relação a outros algoritmos de agrupamento na literatura (Tabelas 2-5), o que implica que o algoritmo pode ser útil para o projeto de classificadores nebulosos evolutivos.

4.2 Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Modelagem *Online* de Séries Temporais

O diagrama de blocos que ilustra a estrutura do processo de modelagem *online* de séries temporais a partir do agrupamento nebuloso evolutivo de dados realizado pelo algoritmo proposto é mostrado na Figura 38. A estrutura consiste em um Sistema de Inferência Nebuloso Evolutivo (eFIS - *evolving Fuzzy Inference System*) para a modelagem *online* da série temporal $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$, em que $n_y \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas de $\mathbf{y}_k$. A entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo é dada a partir de amostras da série temporal $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, em que $n_u \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas de $\mathbf{u}_k$, enquanto a série temporal $\hat{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$, correspondente à saída do sistema de inferência nebuloso evolutivo, é a estimativa da série temporal $\mathbf{y}_k$.

4.2.1 Considerações Preliminares Para Modelagem *Online* de Séries Temporais

Para a modelagem *online* da série temporal $\mathbf{y}_k$ na Figura 38, o algoritmo é aplicado na fuzzificação de dados $\mathbf{x}_k$ e na criação/atualização de regras nebulosas evolutivas no sistema de inferência nebuloso evolutivo. A representação no espaço de estados é utilizada nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas, que são dadas por:

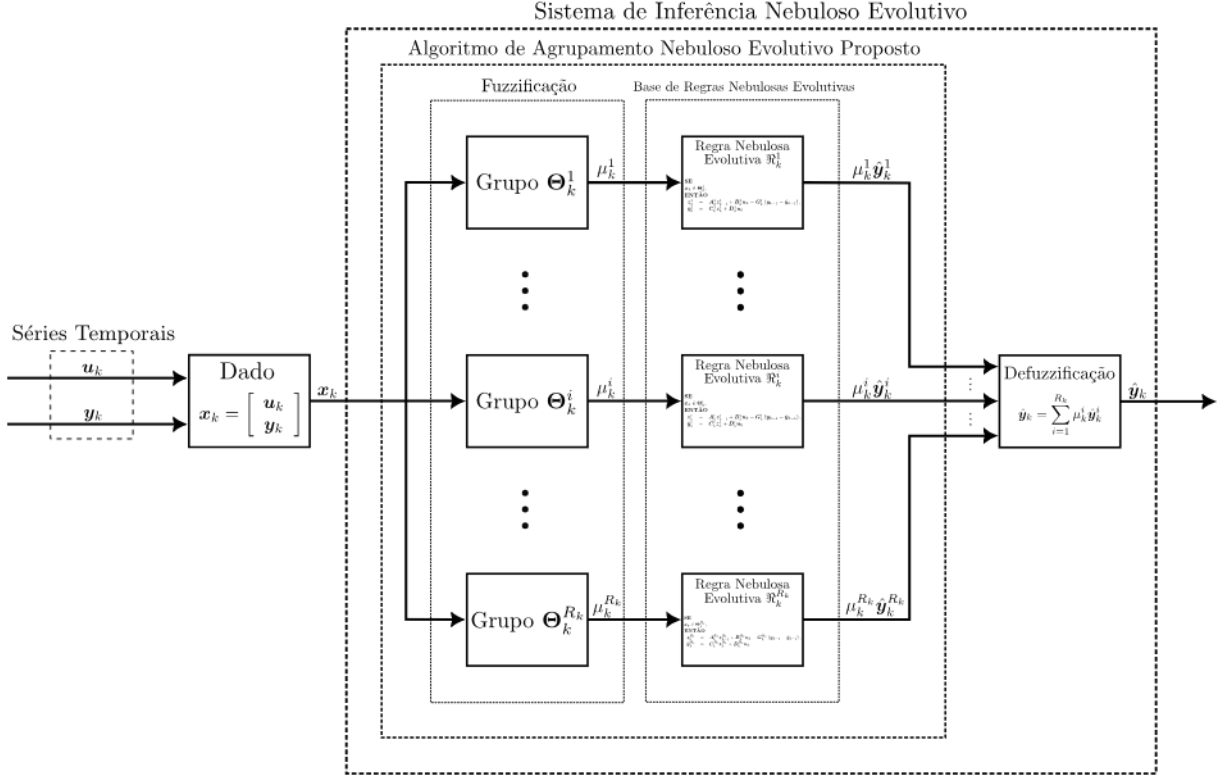


Figura 38 – Diagrama de blocos da estrutura do processo de modelagem *online* de séries temporais através do sistema de inferência nebuloso evolutivo, no qual a fuzzificação dos dados $\mathbf{x}_k$ e a criação/atualização das regras nebulosas evolutivas são realizadas pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto. Fonte: Autor.

$$\mathfrak{R}_k^i : \text{ SE } \mathbf{x}_k \text{ é } \Theta_k^i, \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{z}_k^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{z}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k - \mathbf{G}_k^i (\mathbf{y}_{k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k-1}), \\ \hat{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{z}_k^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k, \end{cases} \quad (4.4)$$

em que $\mathfrak{R}_k^i$ é a i -ésima regra nebulosa evolutiva na k -ésima amostra, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas de $\mathbf{x}_k$, Θ_k^i é o i -ésimo grupo (conjunto nebuloso da proposição antecedente) na k -ésima amostra, $\mathbf{z}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i}$ é o vetor de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $n_z^i \in \mathbb{N}^*$ é a ordem do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$, $\mathbf{u}_k$ é o sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $\mathbf{y}_{k-1}$ é o sinal da série temporal na $(k-1)$ -ésima amostra, $\hat{\mathbf{y}}_{k-1}$ é o sinal de saída do sistema de inferência nebuloso evolutivo na $(k-1)$ -ésima amostra, que é a estimativa de $\mathbf{y}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{A}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_z^i}$ é a matriz de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{B}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_u}$ é a matriz de entrada do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{C}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z^i}$ é a matriz de saída do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa

evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{D}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ é a matriz de transição direta do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\mathbf{G}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ é a matriz de ganho do observador de estados da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra. O sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é calculado, no processo de defuzzificação, pela média ponderada dos sinais de saída $\hat{\mathbf{y}}_k^i$ de cada regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, como segue:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^{R_k} \mu_k^i \hat{\mathbf{y}}_k^i, \quad (4.5)$$

em que μ_k^i , o peso do i -ésimo sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k^i$, é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i , computado pela Equação (3.87). O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = \left[(\mathbf{u}_k)^T \ (\mathbf{y}_k)^T \right]^T$, que é a concatenação dos sinais das séries temporais.

Na modelagem *online* da série temporal $\mathbf{y}_k$, é necessária a estimação, a cada amostra, das matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo. O algoritmo OKID Nebuloso Recursivo (*Recursive Fuzzy Observer/Kalman filter Identification*) é utilizado para identificar os parâmetros de Markov correspondentes aos modelos no espaço de estados a cada amostra. O Algoritmo de Realização de Autossistema Nebuloso (*Fuzzy ERA - Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm*) é utilizado para identificar, com base nos parâmetros de Markov, as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos modelos no espaço de estados a cada amostra. A implementação recursiva do método OKID/ERA Nebuloso requer um processo inicial de treinamento em batelada com as primeiras $N_t \in \mathbb{N}^*$ amostras do fluxo de dados $\mathbf{X}$, após o qual as demais $N - N_t$ amostras são utilizadas para teste em aprendizagem *online*, em que $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$. O método OKID/ERA é amplamente utilizado em aplicações de modelagem de séries temporais e identificação de sistemas (GAGG et al., 2014; SÁNCHEZ; COUSO; GONZÁLEZ, 2014), bem como a sua versão nebulosa recursiva (TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2020; GOMES; SERRA, 2024). A formulação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo para a estimação paramétrica *online* das matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \Big|_{i=1, \dots, R}$ é apresentada no Apêndice A.

Para comparações no desempenho de modelagem, são utilizados os seguintes índices de estimação: a Raiz Média Quadrática do Erro RMSE (*Root Mean Square Error*) (COBANER, 2011), o Índice de Erro Não Dimensional NDEI (*Non-Dimensional Error Index*) (RODRIGUES; SILVA; LEMOS, 2022), o Coeficiente de Correlação de Pearson CCP (ou PCC - *Pearson Correlation Coefficient*) (IYER; PRASAD; QUEK, 2018), e o Coeficiente de Determinação CD (*Coefficient of Determination*) (ASHRAFI; PRASAD;

QUEK, 2020). O RMSE $\in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (e_k)^2}, \quad (4.6)$$

em que $e_k \in \mathbb{R}$ dado por

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \quad (4.7)$$

é o erro de estimação na k -ésima amostra, $y_k \in \mathbb{R}$ é a variável a ser estimada na k -ésima amostra, $\hat{y}_k \in \mathbb{R}$ é a estimativa de y_k na k -ésima amostra, e N é o número de observações da variável y_k . Quanto menor o valor de RMSE, melhor o resultado de estimação da variável y_k . O NDEI $\in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\text{NDEI} = \frac{\text{RMSE}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\hat{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right)^2}}, \quad (4.8)$$

ou seja, pela razão entre o RMSE e o desvio padrão de $\hat{y}_k$. Quanto menor o valor do NDEI, menor é o erro de estimação em relação ao desvio padrão da variável estimada $\hat{y}_k$, e melhor é o resultado da estimação de y_k . O CCP $\in [-1, 1]$ é dado por:

$$\text{CCP} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\left(y_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right) \left(\hat{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right) \right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\hat{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right)^2}}, \quad (4.9)$$

ou seja, é a covariância entre as variáveis y_k e $\hat{y}_k$ dividida pelo produto dos seus desvios padrão. Quanto maior o valor de CCP (mais próximo de 1), maior é a correlação entre y_k e $\hat{y}_k$, e melhor a estimação da variável y_k . O CD $\in [0, 1]$ é dado por:

$$\text{CD} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right)^2}, \quad (4.10)$$

ou seja, é a razão entre o erro quadrático médio de estimação e a variância de y_k , subtraída da unidade. Quanto maior o valor de CD (mais próximo de 1), maior é a proporção da variabilidade de y_k que é explicada pela variável estimada $\hat{y}_k$, e melhor a estimação de y_k .

4.2.2 Função Hipérbole

A função Hipérbole, conforme é descrito em Rodrigues, Silva e Lemos (2022), é dada por:

$$y_k = \frac{1}{0,1 + \frac{1}{n_u} \sum_{l=1}^{n_u} (1 - u_k^l)}, \quad (4.11)$$

onde $u_k^l \in \mathbb{R}$ é a l -ésima variável de entrada na k -ésima amostra, n_u é o número de variáveis de entrada, e $y_k \in \mathbb{R}$ é a variável de saída na k -ésima amostra. O sinal de entrada para o sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \cdots u_k^{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, e a série temporal a ser modelada é correspondente à variável de saída y_k . O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T \ y_k]^T \in \mathbb{R}^{n_u+1}$. É considerado o caso de 7 variáveis de entrada na função Hipérbole ($n_u = 7$), e um total de $N = 2900$ amostras é gerado a partir da Equação (4.11), em que todas as variáveis de entrada $u_k^l \big|_{l=1, \dots, n_u}$ são definidas aleatoriamente dentro do intervalo $[0, 1]$. De todo o conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{8 \times 2900}$ proveniente da função Hipérbole, tem-se que $N_t = 900$ amostras são utilizadas para treinamento e $N - N_t = 2000$ amostras são utilizadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,50$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 1,36$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 1,40$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,95$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 2$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 2$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes da função Hipérbole, são ilustrados nas Figuras 39-41 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 39 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 39a mostra a última variável de entrada u_k^7 e a variável de saída y_k da função Hipérbole em função da amostra k . Pode-se ver, a partir das variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, o comportamento aleatório da série temporal. As demais variáveis de entrada $u_k^l \big|_{l=1, \dots, 6}$ apresentam similar comportamento aleatório. O valor mínimo da variável u_k^7 é 0,0001 para $k = 2892$, e o seu valor máximo é 0,9999 para $k = 981$. O valor mínimo da variável y_k é 1,0184 para $k = 1644$, e o seu valor máximo é 3,8200 para $k = 1301$. A Figura 39b mostra a variação do número R_k de grupos

identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação significativa durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$ devido à aleatoriedade da série temporal, de modo que não tem-se nenhum grupo estável no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, pois contínuas criações e mesclas de grupos são realizadas. O algoritmo inicia com 1 grupo, alcança o valor máximo de 11 grupos na amostra $k = 2463$, e finaliza com o valor de 4 grupos. A Figura 39c mostra, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ projetados no espaço bidimensional¹², representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 4 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo em geral bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$. A Figura 39d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é 0,0575 para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,6432 para $k = 1847$.

A Figura 40 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 40a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam diversas variações súbitas devido à aleatoriedade da série temporal e à ausência de grupos estáveis com as contínuas criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^4}$ do centro normalizado do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor máximo 0,4647 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^3}$ do centro normalizado do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,3290 da partição final. A Figura 40b mostra, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo

¹² Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (7 e 8) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, correspondentes às variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 6\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \mid i=1, \dots, R_N$, ou seja: $\bar{x}_k^l = \bar{c}_N^{i,l}$.

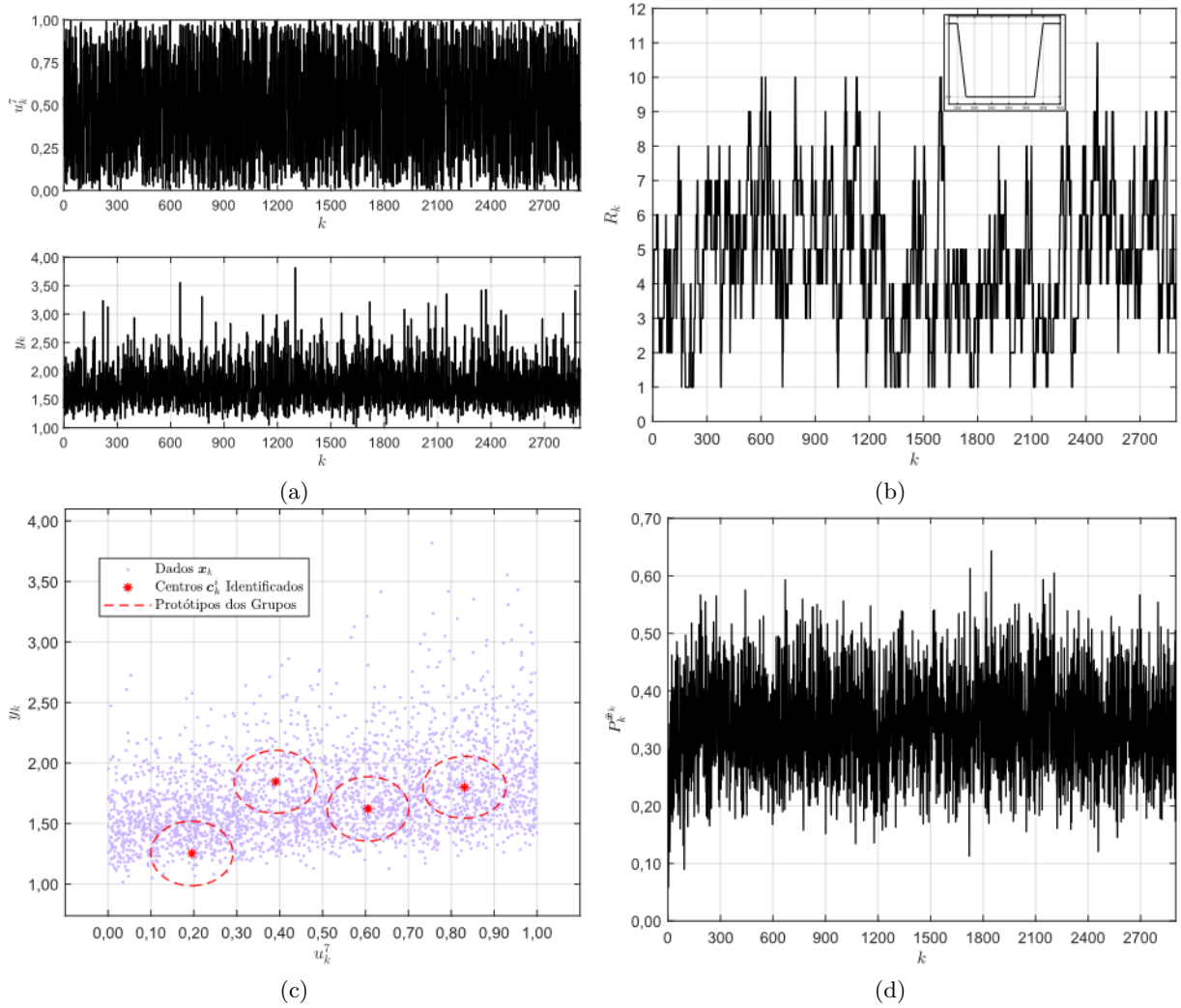


Figura 39 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes da função Hipérbole: (a) Última variável de entrada u_k^7 e variável de saída y_k da função Hipérbole em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

tem deslocado os centros de grupo por praticamente toda a faixa dos dados. Todas as posições dos centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados x_k com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ (ver Figura 39d). A Figura 40c mostra a variação dos suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam um comportamento crescente porém com variações súbitas, devido à aleatoriedade da série temporal e à ausência de grupos estáveis com as contínuas criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. O suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo da partição final igual a 2890 dados, enquanto os suportes S_k^1 e S_k^4

dos grupos Θ_k^1 e Θ_k^4 alcançam o valor mínimo da partição final igual a 2 dados. Tem-se, com a ausência de grupos estáveis, que os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ em termos dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ tendem a se acumular quase em sua totalidade em um grupo específico no processo de agrupamento¹³, que na partição final é o grupo Θ_k^2 . A Figura 40d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam diversas variações súbitas devido à aleatoriedade da série temporal e à ausência de grupos estáveis com as contínuas criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. Os valores iniciais $\varepsilon_{0,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 1,36$ quando a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^4 do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor máximo 1,3108 da partição final, enquanto o raio ε_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,9473 da partição final.

A Figura 41 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 41a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que as sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam diversas variações súbitas devido à aleatoriedade da série temporal e à ausência de grupos estáveis com as contínuas criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. A sensibilidade s_k^4 do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor máximo 0,4644 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,1605 da partição final. A Figura 41b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento ruidoso dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, que também apresentam variações súbitas devido à aleatoriedade da série temporal e à ausência de grupos estáveis com as contínuas criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. Em geral, há uma predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos, que se alternam no fluxo de dados $\mathbf{X}$. A Figura 41c mostra, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional¹⁴, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados

¹³ No procedimento de mescla de grupos descrito na Seção 3.1.7, tem-se que o suporte $S_{k-1}^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante é dado pela soma dos suportes S_{k-1}^{i*} e S_{k-1}^{j*} dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} mesclados, conforme a Equação (3.69), ou seja, o grupo resultante $\Theta_k^{R_k+1}$ herda todos os dados associados aos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} . No caso da ausência de grupos estáveis devido às contínuas criações e mesclas de grupos, os dados associados tendem a se acumular em um único grupo Θ_k^i .

¹⁴ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$

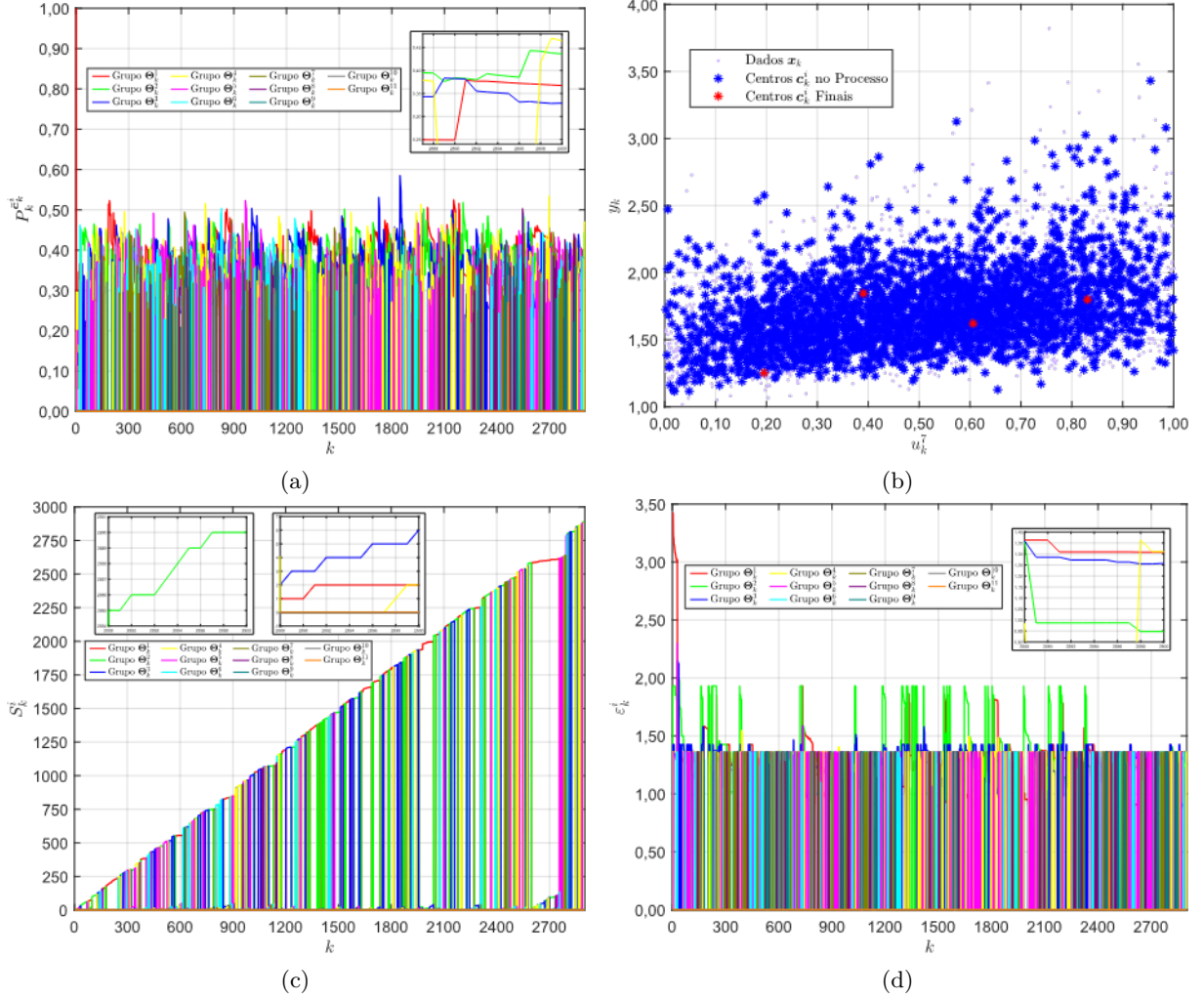


Figura 40 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes da função Hipérbole: (a) Variação dos potenciais $P_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência

na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (7 e 8) do dado normalizado $\bar{x}_k$, correspondentes às variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, \dots, 6\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i \mid i=1, \dots, R_N$, ou seja: $\bar{x}_k^l = \bar{c}_N^l$.

$\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 41d mostra, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que as coordenadas x_k^7 e x_k^8 (associadas às variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole) dos dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ estão distribuídas por praticamente toda a faixa correspondente a elas, devido à aleatoriedade da série temporal em todas as suas variáveis.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de modelagem *online* da função Hipérbole, a Figura 42 ilustra seu desempenho com relação à estimação da variável de saída, ao erro de estimação da variável de saída, e à variação do RMSE na estimação da variável de saída. A Figura 42a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da variável de saída y_k da função Hipérbole, em que a variável de saída y_k é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da variável de saída y_k da função Hipérbole, a qual é altamente ruidosa, indicando a sua efetividade nesse contexto. A Figura 42b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k da função Hipérbole, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 0,2173 na amostra $k = 920$, e o valor absoluto mínimo de $6,9565 \times 10^{-8}$ na amostra $k = 2846$. O RMSE apresenta inicialmente um comportamento ruidoso e posteriormente apresenta um decrescimento suave, alcançando o valor final de 0,0107. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 0,0853 na amostra $k = 903$, e seu valor mínimo é 0,0107 na amostra final $k = 2900$.

Para comparação do desempenho do algoritmo na tarefa de modelagem *online* da função Hipérbole, são considerados outros métodos evolutivos, incluindo o eFMI (RODRIGUES; SILVA; LEMOS, 2022), eMG (LEMOS; CAMINHAS; GOMIDE, 2011), eNFN (SILVA et al., 2014), eOGS (LEITE; ŠKRJANC, 2019), eTS (ANGELOV; FILEV, 2004) e xTS (ANGELOV; ZHOU, 2006). Os resultados para esses métodos são fornecidos em Rodrigues, Silva e Lemos (2022). Os resultados de comparação para a modelagem *online* da função Hipérbole, considerando 7 variáveis de entrada ($n_u = 7$), são mostrados na Tabela 8, em que o RMSE e o NDEI são fornecidos, de modo que os melhores resultados estão destacados em negrito. Com relação ao valor do RMSE, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 0,0107$, valor que é 74,94% superior ao segundo melhor

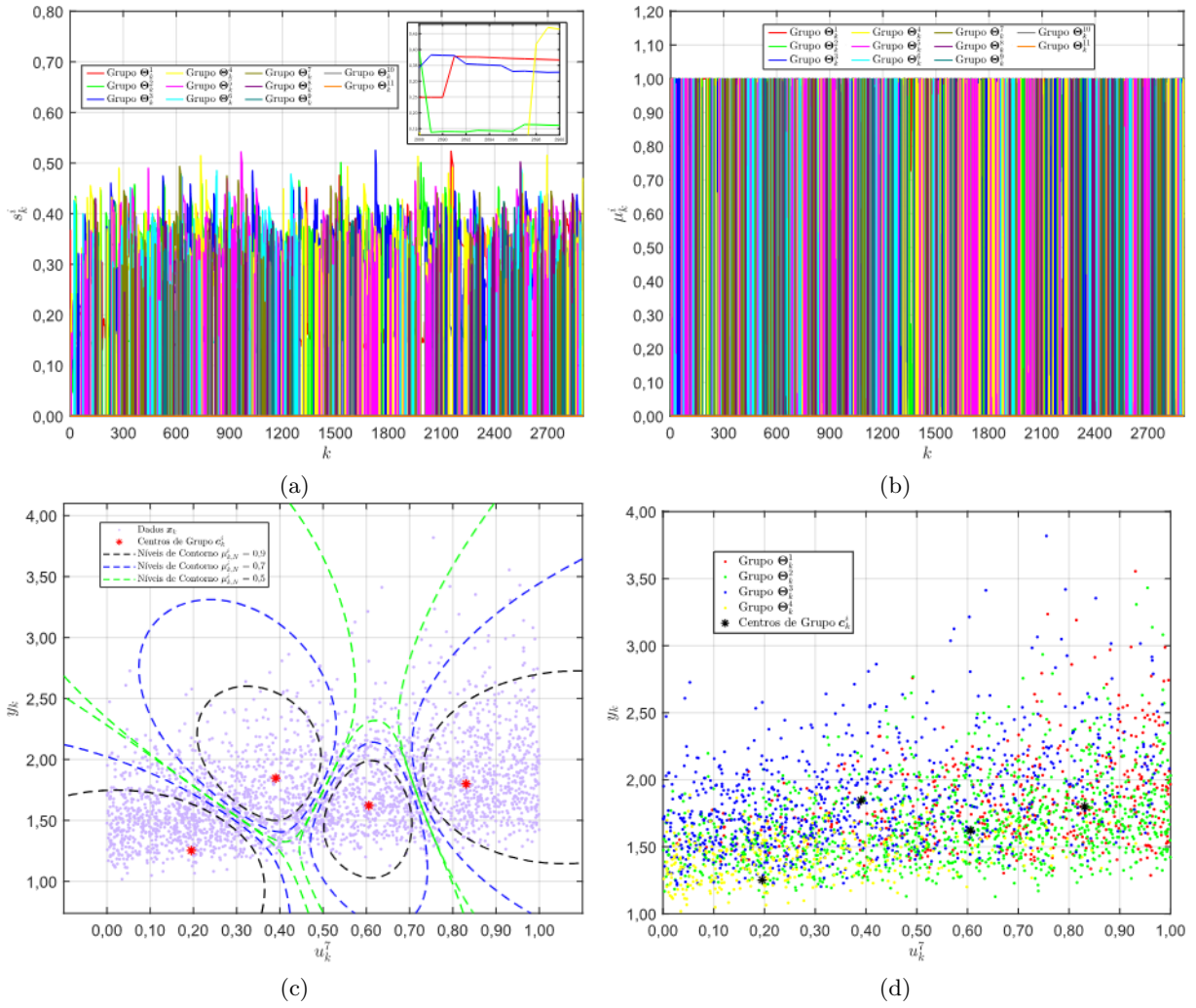


Figura 41 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da função Hipérbole: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^7 e y_k da função Hipérbole, em que os centros de grupo $c_k^i \mid_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

desempenho (0,0427 para o eFMI), e 95,84% superior ao pior desempenho (0,2574 para o xTS). Com relação ao valor do NDEI, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com NDEI = 0,0298, valor que é 90,09% superior ao segundo melhor desempenho (0,3008 para o eFMI), e 98,35% superior ao pior desempenho (1,8113 para o xTS).

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 0,8510 s para o conjunto de dados proveniente da

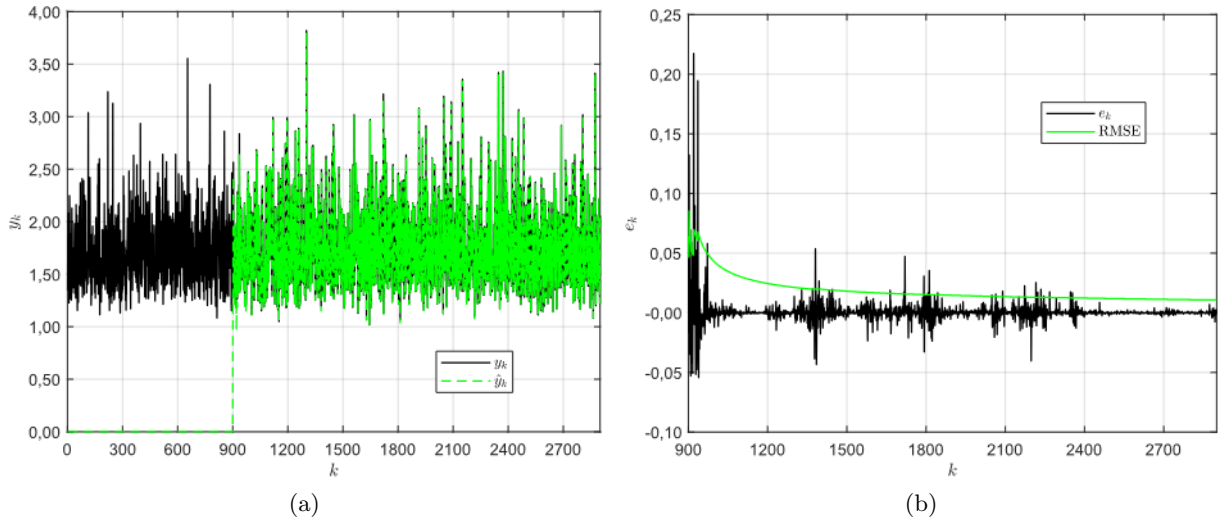


Figura 42 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* da função Hipérbole: (a) Estimação de saída, em que a variável de saída y_k da função Hipérbole é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k da função Hipérbole é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

Tabela 8 – Desempenho na tarefa de modelagem *online* em relação à função Hipérbole, considerando 7 variáveis de entrada ($n_u = 7$), em termos do RMSE e do NDEI.

Método	RMSE	NDEI
Algoritmo Proposto	0,0107	0,0298
eFMI (RODRIGUES; SILVA; LEMOS, 2022)	0,0427	0,3008
eMG (LEMOS; CAMINHAS; GOMIDE, 2011)	0,0452	0,3180
eNFN (SILVA et al., 2014)	0,0545	0,3822
eOGS (LEITE; ŠKRJANC, 2019)	0,0962	0,6750
eTS (ANGELOV; FILEV, 2004)	0,2569	1,8080
xTS (ANGELOV; ZHOU, 2006)	0,2574	1,8113

função Hipérbole. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de modelagem *online*, o algoritmo proposto tem alcançado 5,7214 s para o conjunto de dados proveniente da função Hipérbole. Os demais métodos (EFMI, eMG, eNFN, eOGS, eTS e xTS) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

4.2.3 Série Temporal Caótica de Mackey-Glass

A série temporal caótica de Mackey-Glass é gerada por:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{0,2y(t - \tilde{\rho})}{1 + y^{10}(t - \tilde{\rho})} - 0,1y(t), \quad (4.12)$$

onde $y(t) \in \mathbb{R}$ é a variável da série temporal, $t \in \mathbb{R}_+$ é o tempo, $\tilde{\rho} = 17$ denota o atraso de tempo, e o valor inicial para $y(t)$ é $y(0) = 1,09$. A série é amostrada com um período de amostragem $T_S = 1$, gerando a variável amostrada $y_k \in \mathbb{R}$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ é a amostra. A tarefa é estimar a variável y_k a cada amostra. O sinal de entrada para o sistema de

inferência nebuloso evolutivo é um ruído branco de baixa amplitude¹⁵ $u_k \in \mathbb{R}$. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [u_k \ y_k]^T \in \mathbb{R}^2$. A partir da série temporal caótica de Mackey-Glass, um conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 1000}$ com $N = 1000$ amostras de dados é gerado, dividido em $N_t = 500$ amostras para treinamento e $N - N_t = 500$ amostras para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 1,00$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,33$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 2,00$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,95$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 4$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 4$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass, são ilustrados nas Figuras 43-45 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 43 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 43a mostra a variável de entrada u_k do sistema de inferência nebuloso evolutivo baseado no algoritmo (Figura 59), e a variável de saída y_k da série temporal caótica de Mackey-Glass em função da amostra k . Pode-se ver que o sinal para a variável u_k é um ruído branco de baixa amplitude cujo valor mínimo é $-0,1517$ para $k = 598$ e cujo valor máximo é $0,1707$ para $k = 522$. O valor mínimo da variável y_k é $0,2192$ para $k = 17$, e o seu valor máximo é $1,3105$ para $k = 255$. A Figura 43b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k alterna no fluxo de dados $\mathbf{X}$ entre fases de

¹⁵ O sinal de ruído branco não possui correlação com a série temporal caótica de Mackey-Glass, e é adotado nesta implementação devido à necessidade de um sinal de entrada para o sistema de inferência nebuloso evolutivo realizar a modelagem. A amplitude do sinal é escolhida pequena em relação aos valores da série, e grande o suficiente para evitar a singularidade da matriz de regressores (Equação A.5) no processo de modelagem.

alta variação e fases de variação mais suave. Na amostra $k = 717$, o número de grupos R_k decresce novamente para a unidade (igualmente à configuração na primeira amostra), indicando que os grupos criados nas amostras anteriores não alcançaram estabilidade no processo de agrupamento nebuloso evolutivo. Após a amostra $k = 717$, o algoritmo alcança o valor máximo de 7 grupos na amostra $k = 901$, e finaliza com o valor de 4 grupos. A Figura 43c mostra a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 4 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo em geral bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$. A Figura 43d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresentam um comportamento ruidoso. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $1,1167 \times 10^{-16}$ para $k \in \{4, 11, 16, 37, 51, 87, 120, 125, 168, 169\}$, e o seu valor máximo é 1 para $k = 2$ e $k = 3$.

A Figura 44 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 44a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento ruidoso dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, que também apresentam variações súbitas devido ao alto número de criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^2}$ do centro normalizado do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo 0,8291 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,6526 da partição final. A Figura 44b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo tem deslocado os centros de grupo por praticamente toda a faixa dos dados. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 43d). A Figura 44c mostra a variação

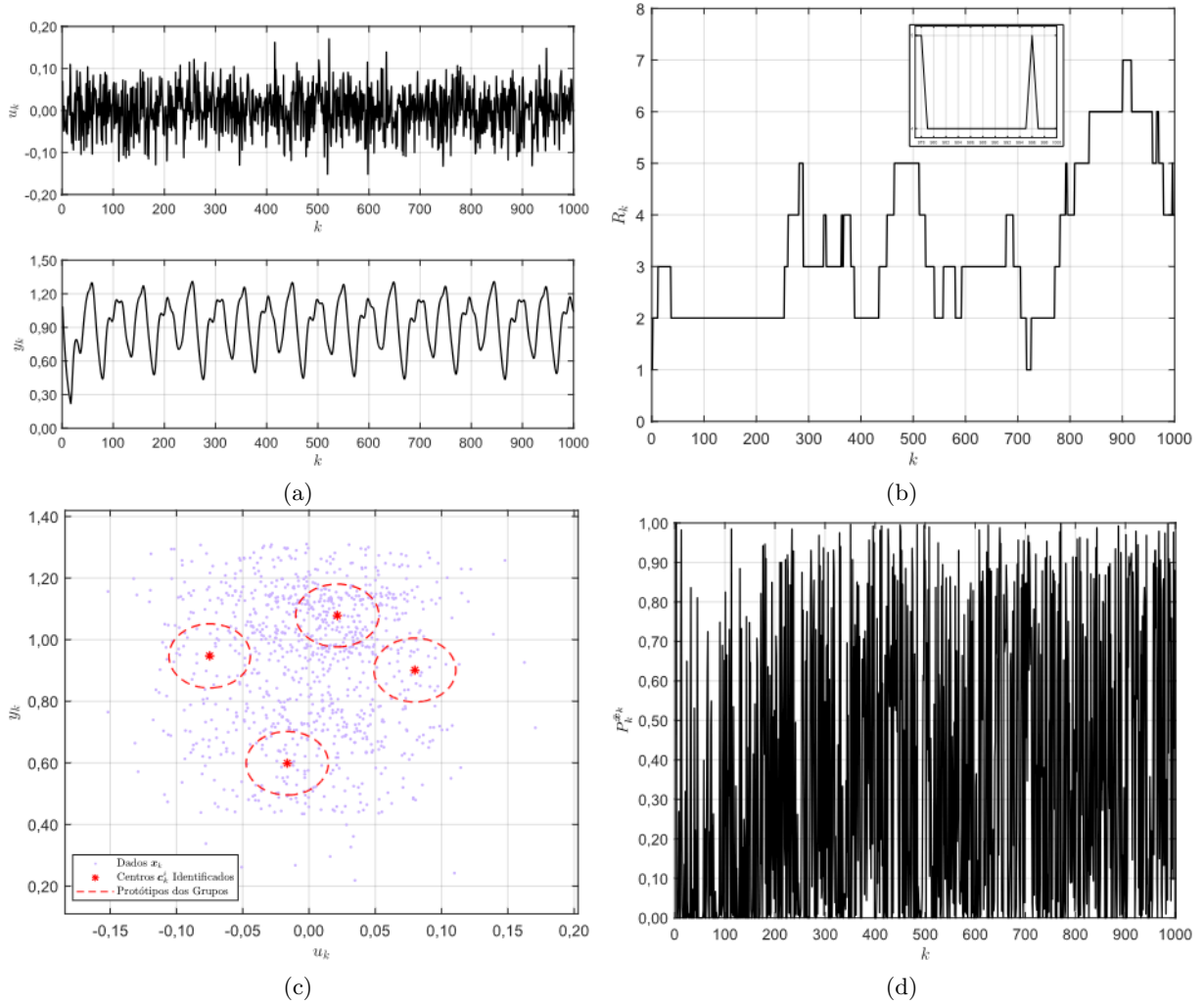


Figura 43 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Variável de entrada u_k do sistema de inferência nebuloso evolutivo baseado no algoritmo e variável de saída y_k da série temporal caótica de Mackey-Glass em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\#}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

dos suportes $S_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam um comportamento crescente porém com variações súbitas, devido ao alto número de criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. O suporte S_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor máximo da partição final igual a 819 dados, enquanto o suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo da partição final igual a 19 dados. Tem-se, com o alto número de criações e mesclas de grupos, que os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ em termos dos suportes $S_k^i \mid_{i=1, \dots, R_k}$ tendem a se acumular quase em sua totalidade em

um grupo específico no processo de agrupamento¹⁶, que na partição final é o grupo Θ_k^3 . A Figura 44d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento geralmente decrescente dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, que também apresentam variações súbitas devido ao alto número de criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. Os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,33$ quando a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo 0,1931 da partição final, enquanto o raio ε_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,1251 da partição final.

A Figura 45 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 45a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que as sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam diversas variações súbitas devido ao alto número de criações e mesclas de grupos no processo de agrupamento. A sensibilidade s_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo 0,7356 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,2908 da partição final. A Figura 45b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 45c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções

¹⁶ No procedimento de mescla de grupos descrito na Seção 3.1.7, tem-se que o suporte $S_{k-1}^{R_k+1}$ do grupo $\Theta_k^{R_k+1}$ resultante é dado pela soma dos suportes S_{k-1}^{i*} e S_{k-1}^{j*} dos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} mesclados, conforme a Equação (3.69), ou seja, o grupo resultante $\Theta_k^{R_k+1}$ herda todos os dados associados aos grupos Θ_k^{i*} e Θ_k^{j*} . No caso de alto número de criações e mesclas de grupos, os dados associados tendem a se acumular em um único grupo Θ_k^i .

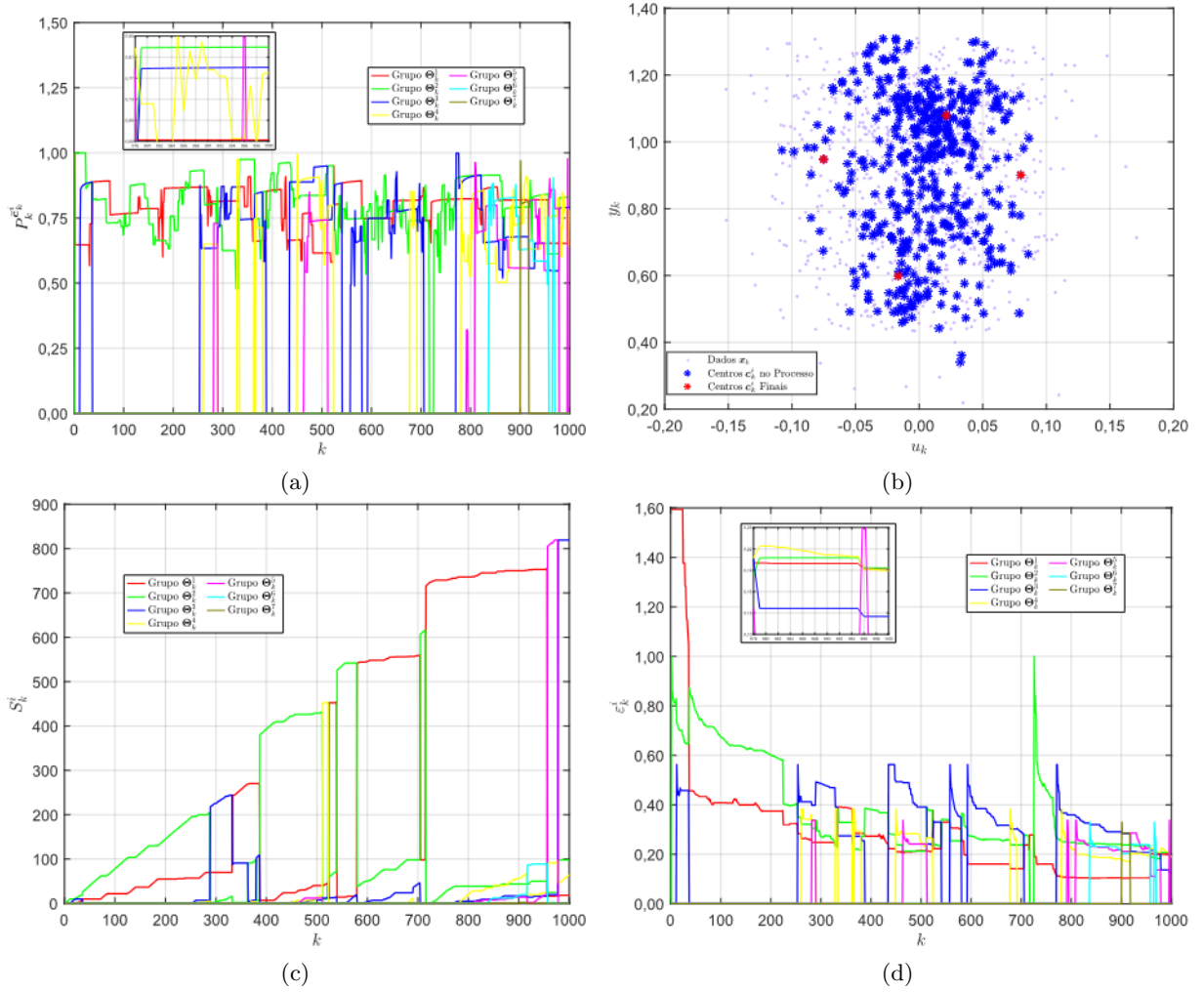


Figura 44 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} | i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 45d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro c_k^i é o mais próximo.

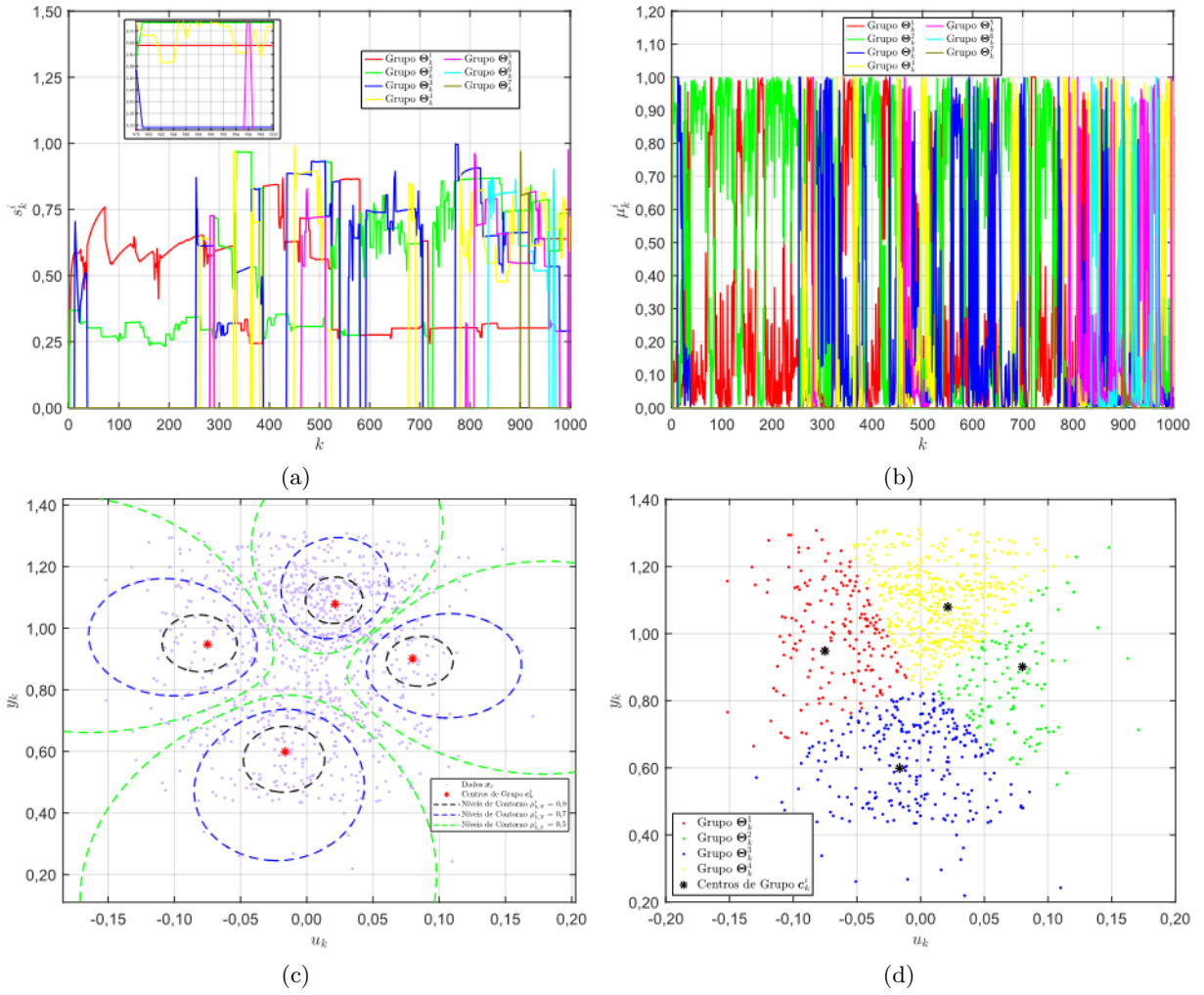


Figura 45 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos dados x_k em relação aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i | k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados x_k associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de modelagem *online* da série temporal caótica de Mackey-Glass, a Figura 46 ilustra seu desempenho com relação à estimação da série temporal, ao erro de estimação da série temporal, e à variação do RMSE na estimação da série temporal. A Figura 46a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da variável y_k correspondente à série temporal caótica de Mackey-Glass, em que a variável y_k é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado uma estimação precisa da série

temporal caótica de Mackey-Glass. A Figura 46b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável y_k correspondente à série temporal caótica de Mackey-Glass, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação, alcançando o valor absoluto máximo de 0,0036 na amostra $k = 528$, e o valor absoluto mínimo de $1,1690 \times 10^{-7}$ na amostra $k = 924$. O RMSE apresenta em geral um decrescimento suave na maior parte da estimação, com algumas curtas fases de crescimento associadas aos picos presentes em e_k , alcançando o valor final de 0,0007. O valor máximo do RMSE no processo de estimação é 0,0015 na amostra $k = 530$, e seu valor mínimo é 0,0005 na amostra $k = 507$.

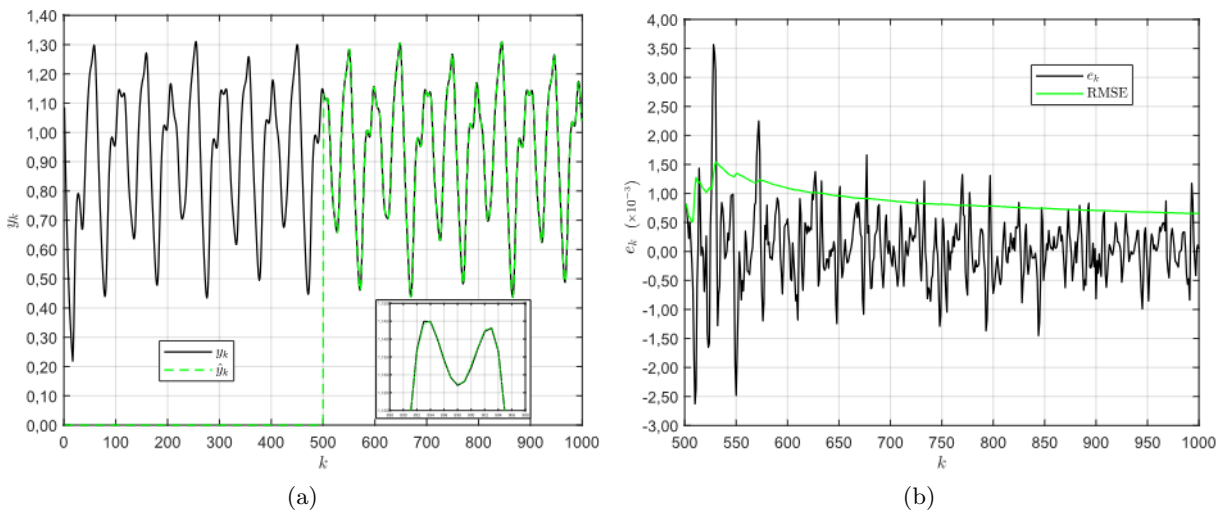


Figura 46 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* da série temporal caótica de Mackey-Glass: (a) Estimação da série temporal, em que a variável y_k correspondente à série temporal caótica de Mackey-Glass é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação da série temporal, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável y_k correspondente à série temporal caótica de Mackey-Glass é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

Para comparação do desempenho do algoritmo na tarefa de modelagem da série temporal caótica de Mackey-Glass, são considerados métodos de estimação nebulosos e neural-nebulosos, tais como o PIE-RSPOP (IYER; PRASAD; QUEK, 2018), ieRSPOP (DAS; ANG; QUEK, 2016), EFuNN (KASABOV, 2001), SAFIN (TUNG; QUEK; GUAN, 2011), ANFIS (JANG, 1993) e DENFIS (KASABOV; SONG, 2002). Os resultados para esses métodos são reportados em Iyer, Prasad e Quek (2018). Os resultados de comparação para a modelagem da série temporal caótica de Mackey-Glass são apresentados na Tabela 9, em que são fornecidos o número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), o RMSE e o CCP, de modo que os melhores resultados estão destacados em negrito. Com relação ao número de regras (grupos) R , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho (menor quantidade de regras) com $R = 4$, que corresponde a 30,77% da quantidade de regras do segundo melhor desempenho (13 para os métodos EFuNN, ANFIS e DENFIS), e 0,57% da quantidade de regras do pior desempenho (701 para o

método ieRSPOP). Com relação ao valor do RMSE, o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 0,0003$ é alcançado pelo método DENFIS, enquanto o algoritmo proposto alcança um desempenho inferior (133,33%) com $\text{RMSE} = 0,0007$, valor que é 98,96% superior ao pior desempenho (0,0670 para o método SAFIN). Com relação ao valor do CCP, o algoritmo proposto alcança, juntamente com os métodos ANFIS e DENFIS, o melhor desempenho com $\text{CCP} = 1,0000$, valor que é 0,51% superior ao segundo melhor desempenho (0,9949 para o método PIE-RSPOP), e 1,32% superior ao pior desempenho (0,9870 para o método EFuNN).

Tabela 9 – Desempenho na tarefa de modelagem da série temporal caótica de Mackey-Glass em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE e do CCP.

Método	R	RMSE	CCP
Algoritmo Proposto	4	0,0007	1,0000
PIE-RSPOP (IYER; PRASAD; QUEK, 2018)	533	0,0229	0,9949
ieRSPOP (DAS; ANG; QUEK, 2016)	701	0,0237	0,9945
EFuNN (KASABOV, 2001)	13	0,0110	0,9870
SAFIN (TUNG; QUEK; GUAN, 2011)	85	0,0670	0,9940
ANFIS (JANG, 1993)	13	0,0005	1,0000
DENFIS (KASABOV; SONG, 2002)	13	0,0003	1,0000

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 0,2325 s para o conjunto de dados proveniente da série temporal caótica de Mackey-Glass. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de modelagem *online*, o algoritmo proposto tem alcançado 1,0967 s para o conjunto de dados proveniente da série temporal caótica de Mackey-Glass. Os demais métodos (PIE-RSPOP, ieRSPOP, EFuNN, SAFIN, ANFIS e DENFIS) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

4.2.4 Conjuntos de Dados de Nakanishi

Os conjuntos de dados de Nakanishi consistem em três casos: um sistema não linear (conjunto de dados 1), operações humanas em uma planta química (conjunto de dados 2) e preços diários do mercado de ações (conjunto de dados 3) (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993). Os conjuntos de dados de Nakanishi possuem tamanhos pequenos, com 50 amostras no conjunto de dados 1, 70 amostras no conjunto de dados 2 e 100 amostras no conjunto de dados 3.

Para comparação do desempenho do algoritmo na tarefa de modelagem das séries temporais provenientes dos conjuntos de dados de Nakanishi, são considerados métodos de modelagem nebulosos e neural-nebulosos, tais como o IT2-GSETSK (ASHRAFI; PRASAD; QUEK, 2020), GSETSK (NGUYEN; ZHOU; QUEK, 2015), ANFIS (JANG, 1993), DENFIS (KASABOV; SONG, 2002), EFuNN (KASABOV, 2001), POP-CRI (ANG;

QUEK; PASQUIER, 2003), RSPOP-CRI (ANG; QUEK, 2005), ACPOP-CRI(S) (TAN; QUEK, 2009), POPFNN (QUEK; ZHOU, 1999), Sugeno P&P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993), Sugeno-P (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993), Sugeno P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993), Mamdani (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993), Turksen (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993), PIE-RSPOP (IYER; PRASAD; QUEK, 2018), ieRSPOP (DAS; ANG; QUEK, 2016) e SAFIN (TUNG; QUEK; GUAN, 2011). Os resultados para esses métodos estão reportados em Iyer, Prasad e Quek (2018), Ashrafi, Prasad e Quek (2020).

4.2.4.1 Primeiro Conjunto de Dados de Nakanishi

O primeiro conjunto de dados de Nakanishi consiste de um sistema não linear dado por:

$$y_k = \left[1 + \left(u_k^1 \right)^{-2} + \left(u_k^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right]^2, \quad (4.13)$$

onde $y_k \in \mathbb{R}$ é a variável de saída na k -ésima amostra, $u_k^1 \in \mathbb{R}$ é a primeira variável de entrada na k -ésima amostra, e $u_k^2 \in \mathbb{R}$ é a segunda variável de entrada na k -ésima amostra. O sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$, e a série temporal a ser modelada é correspondente à variável de saída y_k . O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = \left[(\mathbf{u}_k)^T \ y_k \right]^T \in \mathbb{R}^3$. O primeiro conjunto de dados de Nakanishi ($\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times 50}$) consiste em $N = 50$ amostras, das quais $N_t = 25$ amostras são usadas para treinamento e $N - N_t = 25$ amostras são usadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,88$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,22$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 1,70$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,95$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 3$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 3$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, são ilustrados nas Figuras 47-49 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos

dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 47 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 47a mostra a última variável de entrada u_k^2 e a variável de saída y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k . Pode-se ver que o primeiro conjunto de dados de Nakanishi possui um tamanho pequeno, consistindo em apenas 50 amostras. O valor mínimo da variável u_k^2 é 1,0600 para $k = 24$, e o seu valor máximo é 4,9700 para $k = 30$. O valor mínimo da variável y_k é 1,3000 para $k = 26$, e o seu valor máximo é 5,0500 para $k = 25$. A Figura 47b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$. O algoritmo inicia com 1 grupo e na amostra $k = 18$ o segundo grupo é criado, a partir da qual nenhuma outra criação ou mescla de grupos é realizada, de modo que o algoritmo finaliza com a quantidade de 2 grupos. A Figura 47c mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ projetados no espaço bidimensional¹⁷, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 2 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$. A Figura 47d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ geralmente apresenta baixos valores, com a presença de alguns picos de altos valores durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $1,1282 \times 10^{-36}$ para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,8708 para $k = 43$.

A Figura 48 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 48a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros

¹⁷ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (2 e 3) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, correspondentes às variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, e mantendo a outra coordenada $l = 1$ constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1, \dots, R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^1 = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,1}$.

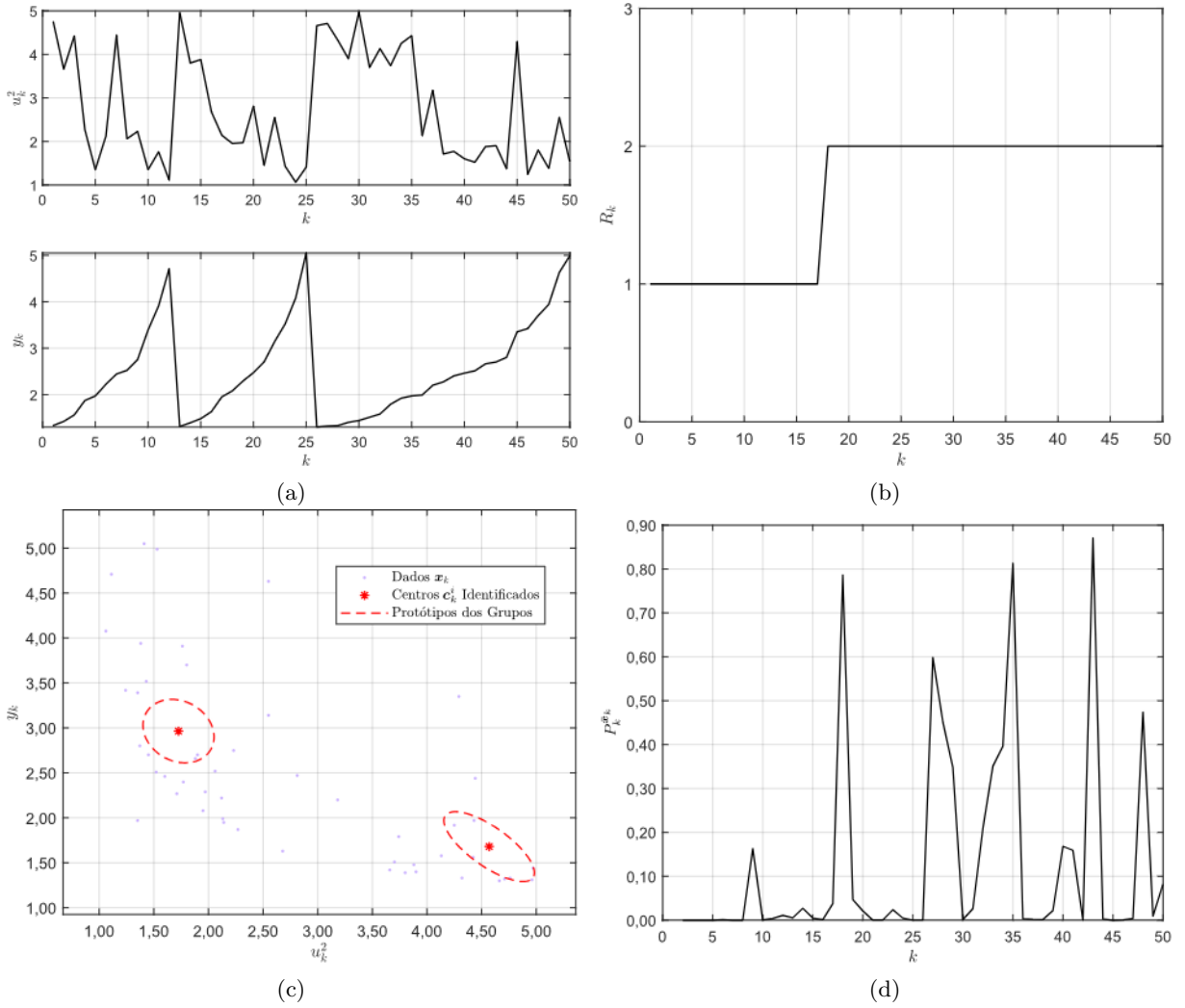


Figura 47 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Última variável de entrada u_k^2 e variável de saída y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento suave dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,7493 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^2}$ do centro normalizado do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,7022 da partição final. A Figura 48b mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e

mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que o algoritmo realizou apenas dois deslocamentos de centros para cada grupo no fluxo de dados $\mathbf{X}$. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$, de modo que a pequena quantidade de deslocamentos dos centros $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ é consequência dos geralmente baixos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ no fluxo de dados $\mathbf{X}$ conforme a Figura 47d. A Figura 48c mostra a variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo da partição final igual a 31 dados, enquanto o suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo da partição final igual a 19 dados. A Figura 48d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento suave, geralmente alternando entre fases de decrescimento leve e fases de estabilização no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O valor inicial $\varepsilon_{o,k}^1$ do raio do primeiro grupo Θ_k^1 é maior que o valor inicial $\varepsilon_{o,k}^2$ do raio do segundo grupo Θ_k^2 , conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,9388 da partição final, enquanto o raio ε_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,6939 da partição final.

A Figura 49 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 49a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento suave das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, com o valor de s_k^1 apresentando pouca variação e o valor de s_k^2 alternando entre fases de decrescimento e de crescimento no fluxo de dados $\mathbf{X}$. A sensibilidade s_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo 0,3804 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,2757 da partição final. A Figura 49b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a um grupo específico (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre os dois grupos (maior incerteza). A Figura 49c mostra, com base

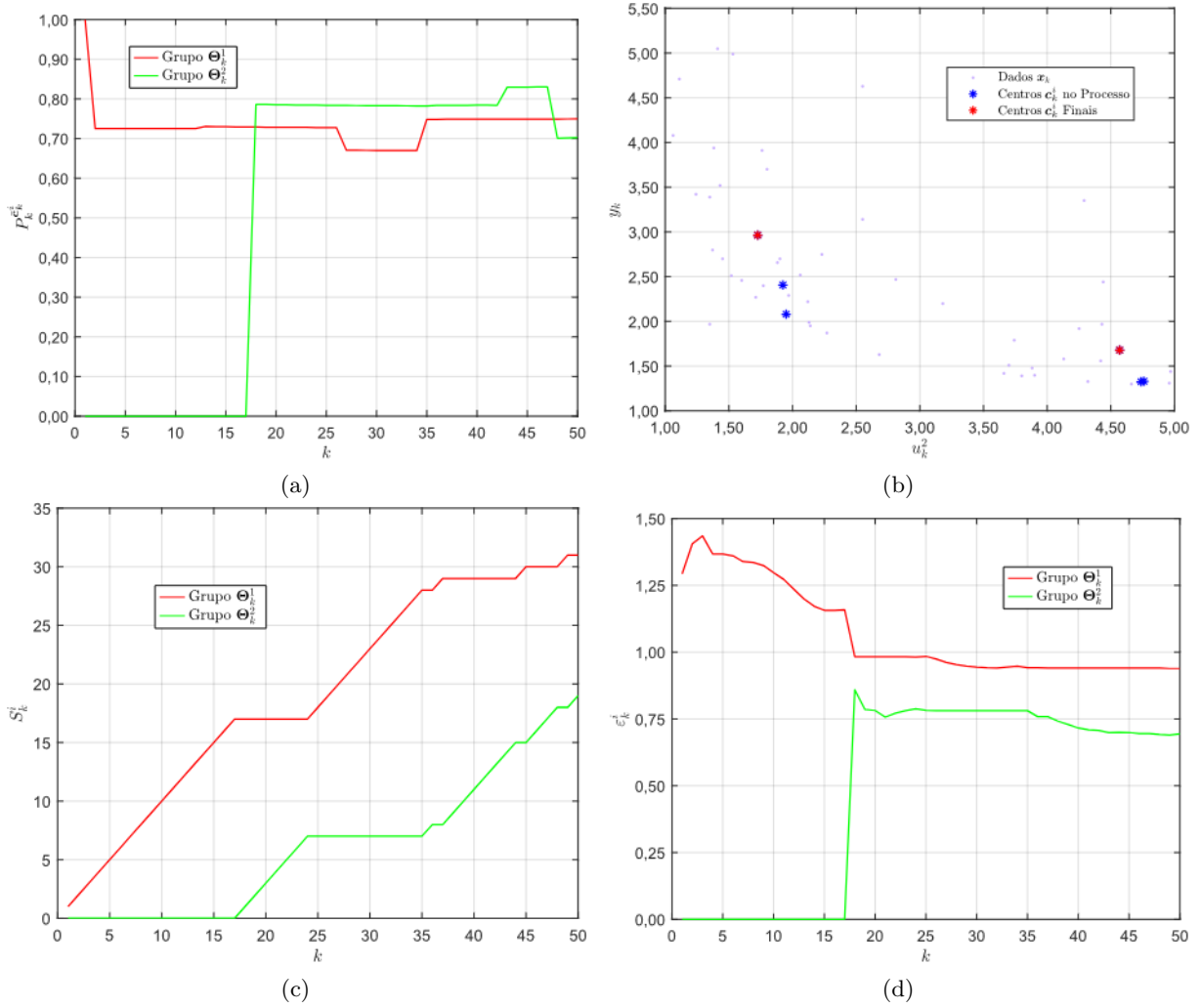


Figura 48 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação dos potenciais $P_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\epsilon_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional¹⁸, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos

¹⁸ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (2 e 3) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, correspondentes às variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, e mantendo a outra coordenada $l = 1$ constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i |_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$.

lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos na direção do outro grupo, e a serem largos nas outras direções. A Figura 49d mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de modelagem *online* do primeiro conjunto de dados de Nakanishi (sistema não linear), a Figura 50 ilustra seu desempenho com relação à estimação da variável de saída, ao erro de estimação da variável de saída, e à variação do RMSE na estimação da variável de saída. A Figura 50a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que a variável de saída y_k é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi. A Figura 50b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 0,2182 na amostra $k = 31$, e o valor absoluto mínimo de 0,0012 na amostra $k = 29$. O RMSE apresenta inicialmente um comportamento crescente e posteriormente apresenta baixa variação, alcançando o valor final de 0,1179. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 0,1390 na amostra $k = 28$, e seu valor mínimo é 0,0062 na amostra $k = 26$.

Os resultados de comparação para a modelagem da série temporal proveniente do primeiro conjunto de dados de Nakanishi são mostrados na Tabela 10, em que são fornecidos o número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), o RMSE, o CCP e o CD, de modo que os melhores resultados estão destacados em negrito. Com relação ao número de regras (grupos) R , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho (menor quantidade de regras) com $R = 2$, que corresponde a 13,33% da quantidade de regras do

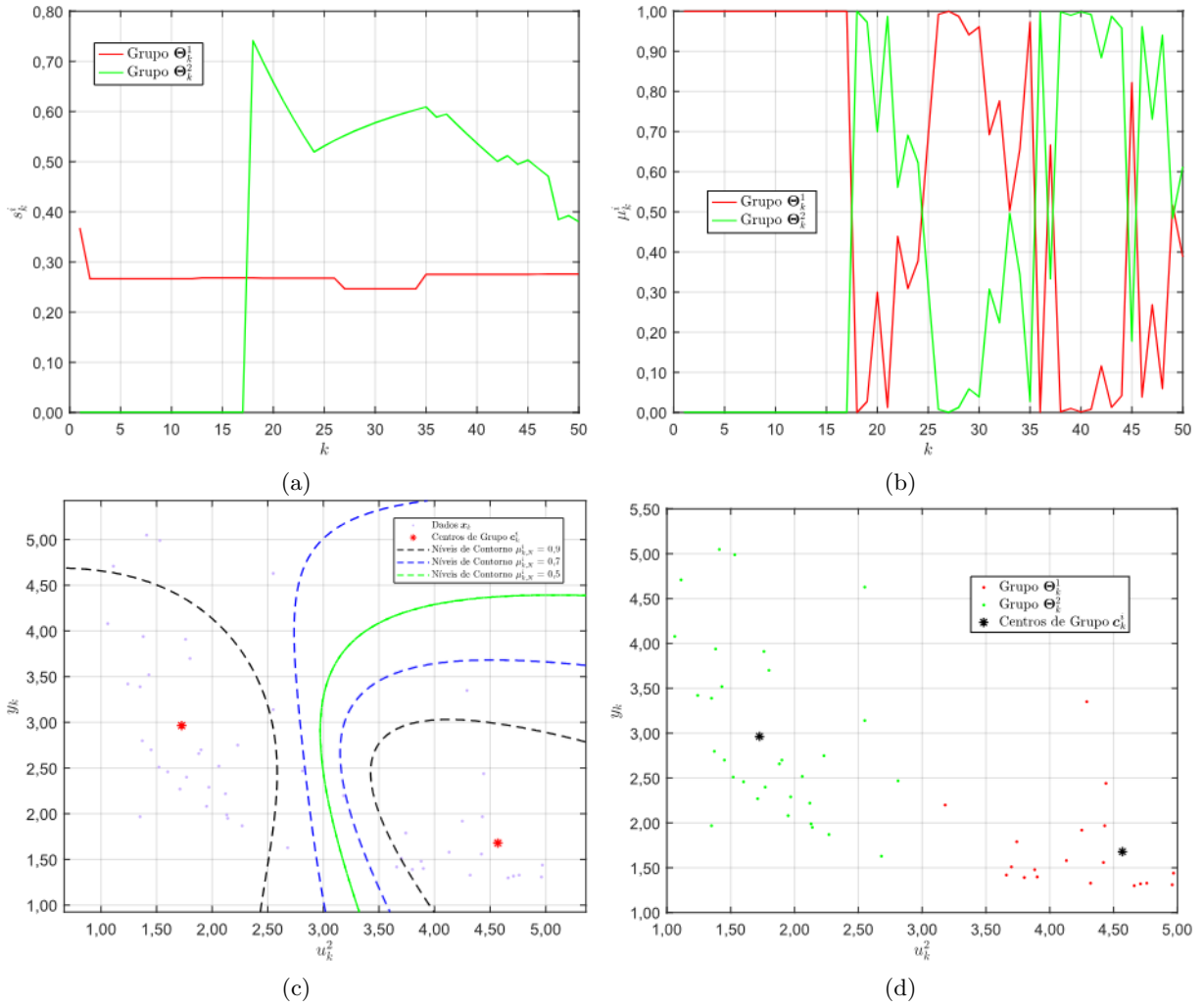


Figura 49 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do primeiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i | k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do primeiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

segundo melhor desempenho (15 para o método ACPOP-CRI(S)), e 1,04% da quantidade de regras do pior desempenho (192 para o método POPFNN). Com relação ao valor do RMSE, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 0,1179$, valor que é 65,32% superior ao segundo melhor desempenho (0,3400 para o método IT2-GSETSK), e 85,96% superior ao pior desempenho (0,8400 para os métodos Turksen e ieRSPOP). Com relação ao valor do CCP, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com

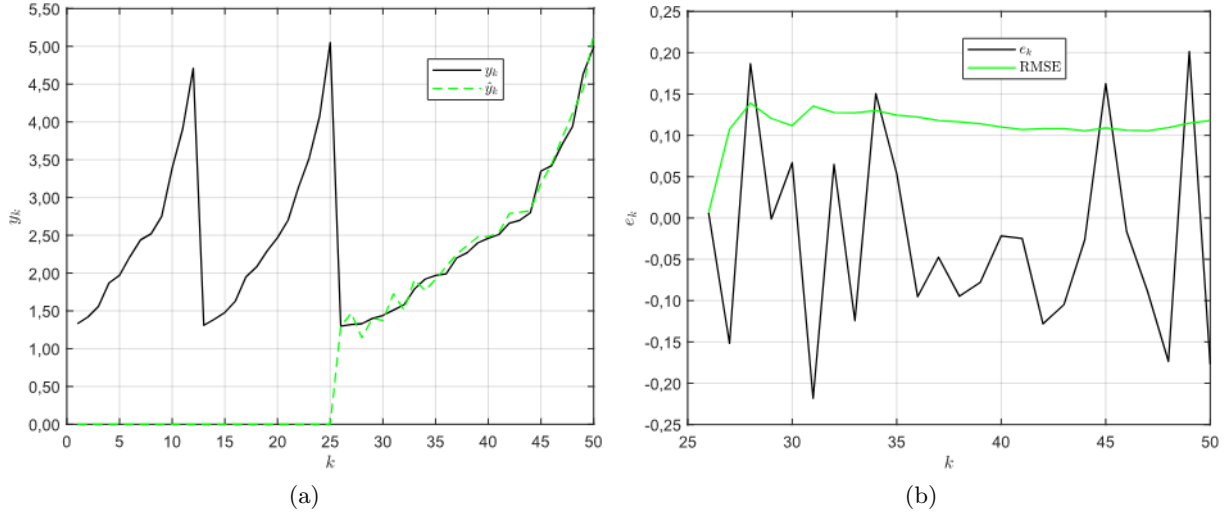


Figura 50 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* do primeiro conjunto de dados de Nakanishi (sistema não linear): (a) Estimação de saída, em que a variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k do sistema não linear correspondente ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

CCP = 0,9938, valor que é 5,72% superior ao segundo melhor desempenho (0,9400 para o método SAFIN), e 74,35% superior ao pior desempenho (0,5700 para o método ieRSPOP). Com relação ao valor do CD, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com CD = 0,9865, valor que é 7,23% superior ao segundo melhor desempenho (0,9200 para o método IT2-GSETSK), e 166,62% superior ao pior desempenho (0,3700 para o método Turksen).

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 0,0072 s para o primeiro conjunto de dados de Nakanishi. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de modelagem *online*, o algoritmo proposto tem alcançado 0,0554 s para o primeiro conjunto de dados de Nakanishi. Os demais métodos (IT2-GSETSK, GSETSK, ANFIS, DENFIS, EFuNN, POP-CRI, RSPOP-CRI, ACPop-CRI(S), POPFNN, Sugeno P&P-G, Sugeno-P, Sugeno P-G, Mamdani, Turksen, PIE-RSPOP, ieRSPOP e SAFIN) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

4.2.4.2 Segundo Conjunto de Dados de Nakanishi

O segundo conjunto de dados de Nakanishi consiste em operações humanas numa planta química. O sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2]^T = [w_k^1 \ w_k^3]^T \in \mathbb{R}^2$, onde $w_k^1 \in \mathbb{R}$ é a concentração do monômero na k -ésima amostra e $w_k^3 \in \mathbb{R}$ é a taxa de fluxo do monômero na k -ésima amostra. A série temporal $y_k \in \mathbb{R}$ a ser modelada é correspondente ao ponto de ajuste do monômero. O

Tabela 10 – Desempenho na tarefa de modelagem em relação ao primeiro conjunto de dados de Nakanishi (sistema não linear) em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE, do CCP e do CD. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.

Método	R	RMSE	CCP	CD
Algoritmo Proposto	2	0,1179	0,9938	0,9865
IT2-GSETSK (ASHRAFI; PRASAD; QUEK, 2020)	-	0,3400	-	0,9200
GSETSK (NGUYEN; ZHOU; QUEK, 2015)	-	0,3800	-	0,9100
ANFIS (JANG, 1993)	-	0,5300	0,8500	0,7300
DENFIS (KASABOV; SONG, 2002)	-	0,6400	0,8100	0,6500
EFuNN (KASABOV, 2001)	25	0,7500	0,7200	0,5200
POP-CRI (ANG; QUEK; PASQUIER, 2003)	-	0,5200	-	0,7700
RSPOP-CRI (ANG; QUEK, 2005)	17	0,6200	0,8600	0,7300
ACPOP-CRI(S) (TAN; QUEK, 2009)	15	0,5200	0,9000	-
POPFNN (QUEK; ZHOU, 1999)	192	0,5200	0,8800	-
Sugeno P&P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	0,5900	0,8300	0,6900
Sugeno-P (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	0,5800	-	0,7300
Sugeno P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	0,6800	0,8400	0,7100
Mamdani (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	0,6600	0,8300	0,6900
Turksen (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	0,8400	0,6100	0,3700
PIE-RSPOP (IYER; PRASAD; QUEK, 2018)	39	0,6500	0,8500	-
ieRSPOP (DAS; ANG; QUEK, 2016)	40	0,8400	0,5700	-
SAFIN (TUNG; QUEK; GUAN, 2011)	22	0,3600	0,9400	-

dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T \ y_k]^T \in \mathbb{R}^3$. O segundo conjunto de dados de Nakanishi ($\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times 70}$) consiste em $N = 70$ amostras, das quais $N_t = 35$ amostras são usadas para treinamento e $N - N_t = 35$ amostras são usadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,00$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,20$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 2,50$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,95$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 3$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 3$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi, são ilustrados nas Figuras 51-53 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 51 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 51a mostra a última variável de entrada u_k^2 e a variável de saída y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k . Pode-se ver que o segundo conjunto de dados de Nakanishi possui um tamanho pequeno, consistindo em apenas 70 amostras, e que as variáveis u_k^2 e y_k apresentam comportamento similar. O valor mínimo da variável u_k^2 é 401 para $k = 36$, e o seu valor máximo é 7032 para $k = 32$. O valor mínimo da variável y_k é 500 para $k = 36$, e o seu valor máximo é 7000 para $k \in \{15, 16, 17, 32, 33, 34, 35, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70\}$. A Figura 51b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k tem uma variação suave, iniciando com 1 grupo, alcançando o valor máximo de 4 grupos nas amostras $k = 10$ e $k = 18$, e finalizando com o valor de 3 grupos. A Figura 51c mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ projetados no espaço bidimensional¹⁹, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 3 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$. A Figura 51d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ oscila entre altos e baixos valores, apresentando diversos picos durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é 0 para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,5199 para $k = 17$.

A Figura 52 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 52a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento suave dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$, que alternam entre fases de decrescimento e de crescimento no fluxo de dados

¹⁹ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (2 e 3) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, correspondentes às variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, e mantendo a outra coordenada $l = 1$ constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \mid i=1, \dots, R_N$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^1 = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,1}$.

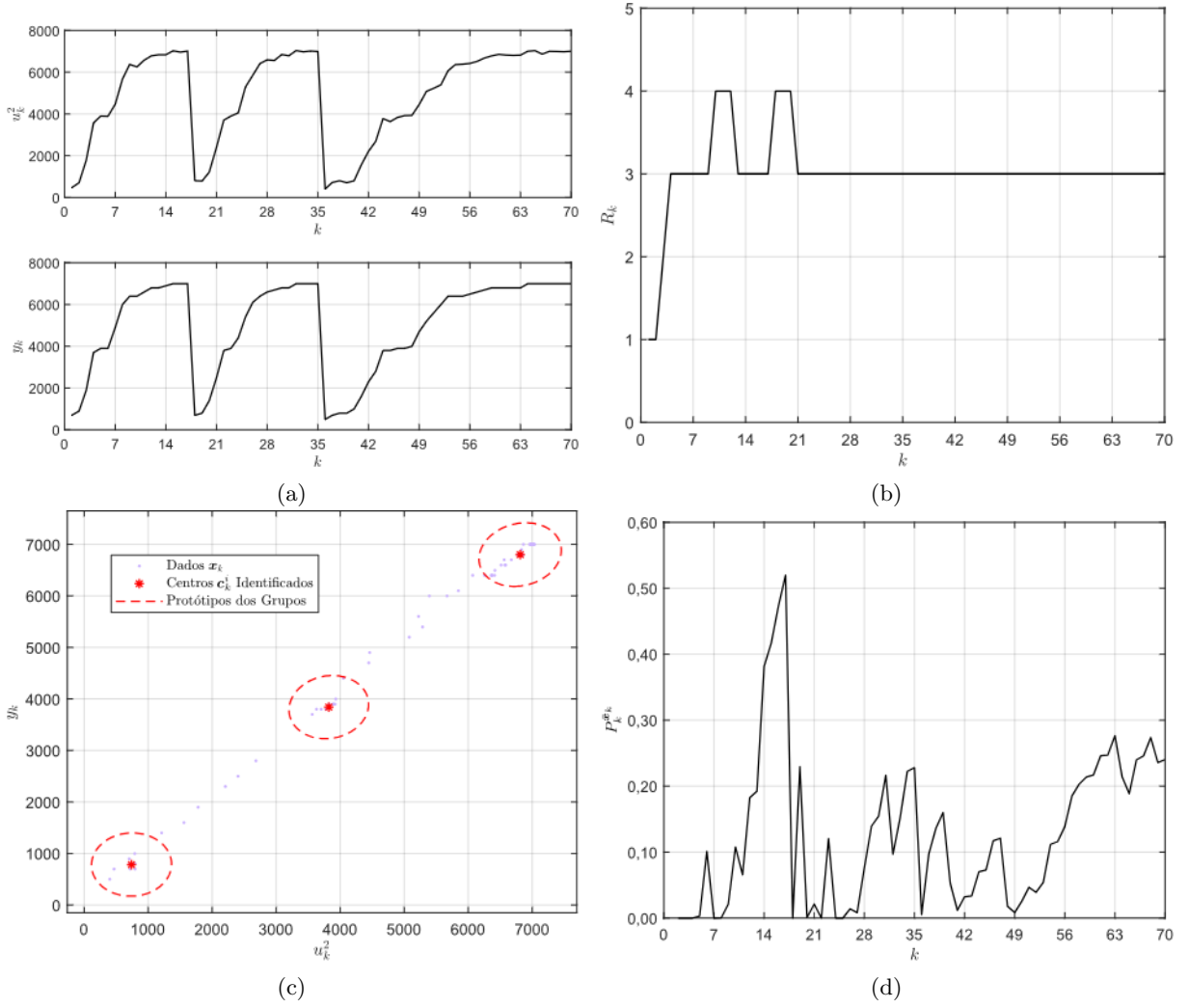


Figura 51 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi: (a) Última variável de entrada u_k^2 e variável de saída y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

X. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,3120 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^3}$ do centro normalizado do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,0717 da partição final. A Figura 52b mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de

grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que os centros de grupo foram deslocados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ por boa parte da faixa de operação dos dados. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ (ver Figura 51d). A Figura 52c mostra a variação dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo da partição final igual a 40 dados, enquanto o suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo da partição final igual a 9 dados. A Figura 52d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam uma maior variabilidade até a amostra $k = 21$, quando ocorre a última mescla de grupos conforme a Figura 51b, e apresentam posteriormente um comportamento aproximadamente constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são maiores quando a quantidade de grupos R_k é menor, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor máximo 0,4774 da partição final, enquanto o raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,2044 da partição final.

A Figura 53 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 53a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento suave das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, que alternam entre fases de decrescimento e de crescimento no fluxo de dados $\mathbf{X}$. A sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,1148 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,0424 da partição final. A Figura 53b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 53c mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional²⁰, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados

²⁰ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas

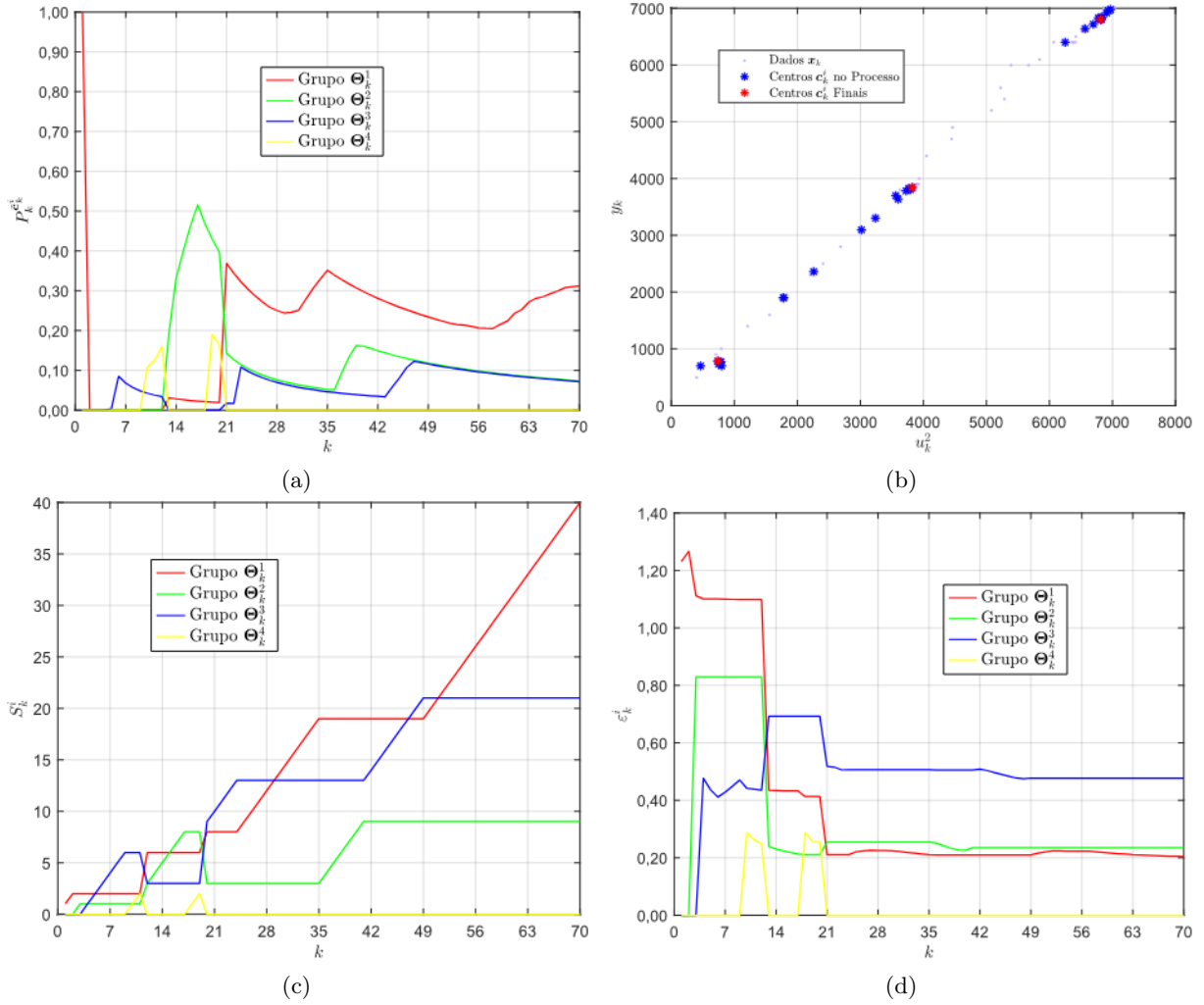


Figura 52 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação dos potenciais $P_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência

(2 e 3) do dado normalizado $\bar{x}_k$, correspondentes às variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, e mantendo a outra coordenada $l = 1$ constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i \mid i=1, \dots, R_N$, ou seja: $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$.

$\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 53d mostra, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Uma vez que as distâncias entre os dados $\mathbf{x}_k \Big|_{k=1,\dots,N}$ e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ também consideram a outra variável u_k^1 do segundo conjunto de dados de Nakanishi, tem-se que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de modelagem *online* do segundo conjunto de dados de Nakanishi (planta química), a Figura 54 ilustra seu desempenho com relação à estimação da série temporal, ao erro de estimação da série temporal, e à variação do RMSE na estimação da série temporal. A Figura 54a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da série temporal y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que a variável correspondente y_k é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da série temporal y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi. A Figura 54b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da série temporal y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 225,0285 na amostra $k = 52$, e o valor absoluto mínimo de 0,1606 na amostra $k = 59$. O RMSE apresenta, próximo ao valor 50, alternância entre fases de decrescimento e de crescimento, alcançando o valor final de 60,6486. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 76,2721 na amostra $k = 52$, e seu valor mínimo é 30,3287 na amostra $k = 39$.

Os resultados de comparação para a modelagem da série temporal proveniente do segundo conjunto de dados de Nakanishi são mostrados na Tabela 11, em que são fornecidos o número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), o RMSE, o CCP e o CD, de modo que os melhores resultados estão destacados em negrito. Com relação ao número de regras (grupos) R , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho (menor quantidade de regras) com $R = 3$, que corresponde a 50,00% da quantidade de regras do segundo melhor desempenho (6 para os métodos ACPOP-CRI(S) e PIE-RSPOP), e 0,16% da quantidade de regras do pior desempenho (1920 para o método POPFNN). Com relação ao valor do RMSE, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com RMSE = 60,6486, valor que é 38,74% superior ao segundo melhor desempenho (99,0000 para o

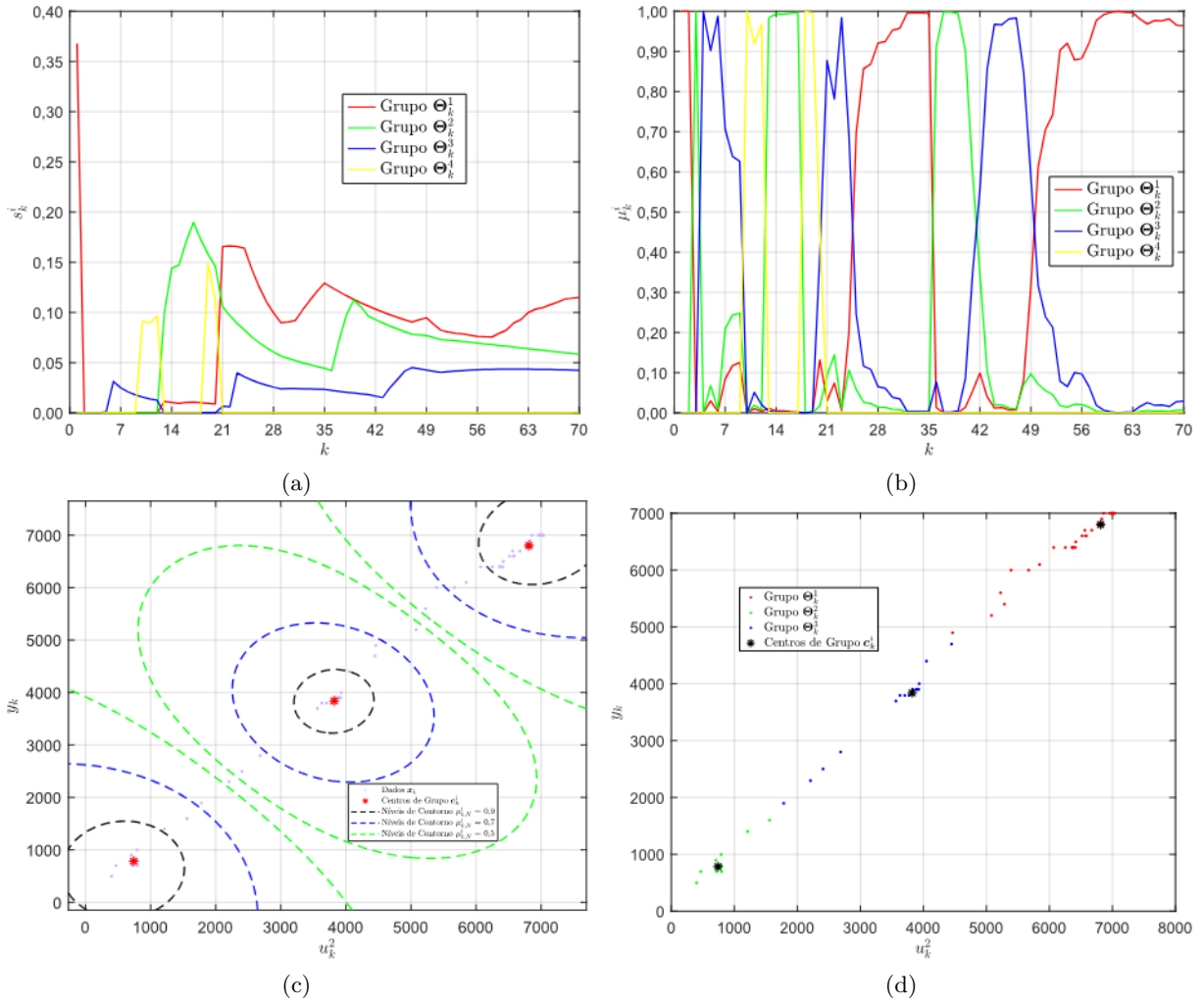


Figura 53 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do segundo conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i | k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^2 e y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

método IT2-GSETSK), e 96,48% superior ao pior desempenho (1722,7900 para o método ANFIS). Com relação ao valor do CCP, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{CCP} = 0,9996$, valor que é 0,97% superior ao segundo melhor desempenho (0,9900 para os métodos DENFIS, ACPOP-CRI(S), Sugeno P-G, Mamdani, Turksen e SAFIN), e 28,15% superior ao pior desempenho (0,7800 para o método ANFIS). Com relação ao valor do CD, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{CD} = 0,9993$, valor que é

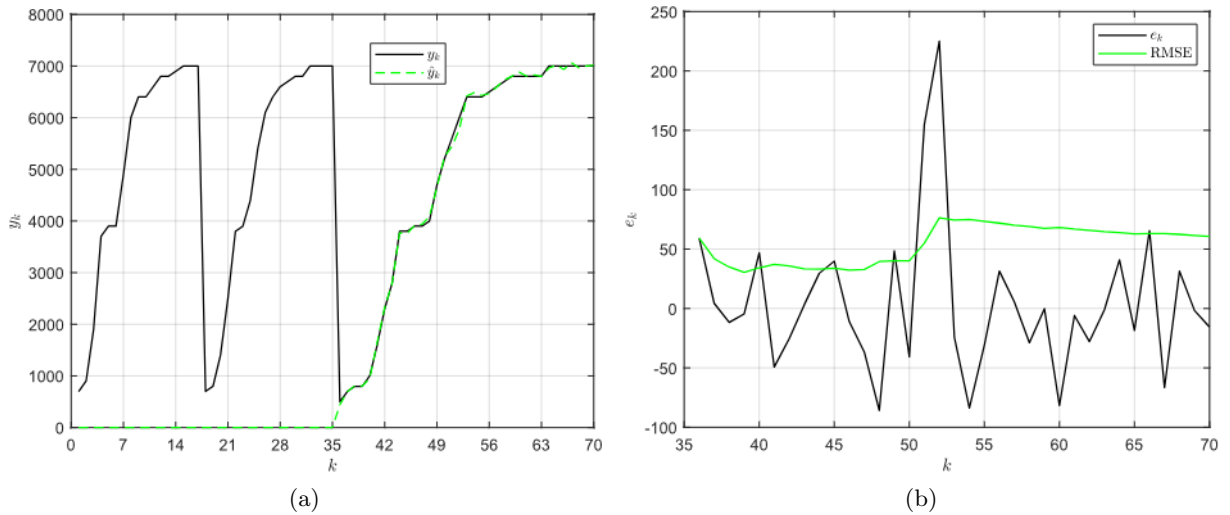


Figura 54 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* do segundo conjunto de dados de Nakanishi (planta química): (a) Estimação da série temporal, em que a variável correspondente y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação da série temporal, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da série temporal y_k do segundo conjunto de dados de Nakanishi é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

0,13% superior ao segundo melhor desempenho (0,9980 para o método IT2-GSETSK), e 63,82% superior ao pior desempenho (0,6100 para o método ANFIS).

Tabela 11 – Desempenho na tarefa de modelagem em relação ao segundo conjunto de dados de Nakanishi (planta química) em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE, do CCP e do CD. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.

Método	R	RMSE	CCP	CD
Algoritmo Proposto	3	60,6486	0,9996	0,9993
IT2-GSETSK (ASHRAFI; PRASAD; QUEK, 2020)	-	99,0000	-	0,9980
GSETSK (NGUYEN; ZHOU; QUEK, 2015)	-	140,0000	-	0,9960
ANFIS (JANG, 1993)	-	1722,7900	0,7800	0,6100
DENFIS (KASABOV; SONG, 2002)	-	228,9100	0,9900	0,9900
EFuNN (KASABOV, 2001)	25	851,3900	0,9500	0,8900
POP-CRI (ANG; QUEK; PASQUIER, 2003)	-	750,0000	-	0,8900
RSPOP-CRI (ANG; QUEK, 2005)	14	460,8700	0,9800	0,9700
ACPOP-CRI(S) (TAN; QUEK, 2009)	6	326,5000	0,9900	-
POPFNN (QUEK; ZHOU, 1999)	1920	750,3300	0,9500	-
Sugeno P&P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	537,4000	0,9800	0,9600
Sugeno-P (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	787,0000	-	0,8800
Sugeno P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	1389,6000	0,9900	0,9800
Mamdani (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	473,0800	0,9900	-
Turksen (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	832,0580	0,9900	-
PIE-RSPOP (IYER; PRASAD; QUEK, 2018)	6	637,8700	0,9700	-
ieRSPOP (DAS; ANG; QUEK, 2016)	29	598,2000	0,9800	-
SAFIN (TUNG; QUEK; GUAN, 2011)	18	342,7200	0,9900	-

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 0,0184 s para o segundo conjunto de dados de Nakanishi. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de modelagem *online*, o algoritmo proposto

tem alcançado 0,1120 s para o segundo conjunto de dados de Nakanishi. Os demais métodos (IT2-GSETSK, GSETSK, ANFIS, DENFIS, EFuNN, POP-CRI, RSPOP-CRI, ACPOP-CRI(S), POPFNN, Sugeno P&P-G, Sugeno-P, Sugeno P-G, Mamdani, Turksen, PIE-RSPOP, ieRSPOP e SAFIN) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

4.2.4.3 Terceiro Conjunto de Dados de Nakanishi

O terceiro conjunto de dados de Nakanishi consiste em variações diárias do mercado de ações para uma ação específica. O sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2 \ u_k^3]^T = [w_k^4 \ w_k^5 \ w_k^8]^T \in \mathbb{R}^3$, onde $w_k^4 \in \mathbb{R}$ é a razão de separação atual em relação à média móvel de um período médio na k -ésima amostra, $w_k^5 \in \mathbb{R}$ é a variação atual da média móvel de um curto período na k -ésima amostra, e $w_k^8 \in \mathbb{R}$ é a razão de separação passada em relação à média móvel de um curto período na k -ésima amostra. A série temporal $y_k \in \mathbb{R}$ a ser modelada é correspondente ao preço estimado da ação. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T \ y_k]^T \in \mathbb{R}^4$. O terceiro conjunto de dados Nakanishi ($\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4 \times 100}$) consiste em $N = 100$ amostras, das quais $N_t = 50$ amostras são usadas para treinamento e $N - N_t = 50$ amostras são usadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,00$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,32$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 3,00$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,95$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 3$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 3$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, são ilustrados nas Figuras 55-57 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 55 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos

grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 55a mostra a última variável de entrada u_k^3 e a variável de saída y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k . Pode-se ver que o terceiro conjunto de dados de Nakanishi possui um tamanho pequeno, consistindo em apenas 100 amostras. O valor mínimo da variável u_k^3 é $-19,6900$ para $k = 34$, e o seu valor máximo é $14,8900$ para $k = 35$. O valor mínimo da variável y_k é $-27,5800$ para $k = 51$, e o seu valor máximo é $34,5100$ para $k = 25$. A Figura 55b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k inicia em 1, apresenta uma alta variação até a amostra $k = 30$, alcançando o valor máximo de 5 grupos nas amostras $k = 14$ e $k = 27$, e posteriormente apresenta uma variação suave, finalizando com o valor de 2 grupos. A Figura 55c mostra, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ projetados no espaço bidimensional²¹, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 2 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$. A Figura 55d mostra o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ apresenta em geral baixos valores, todos abaixo de 0,25, com diversos picos durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ é 0 para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,2453 para $k = 40$.

A Figura 56 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 56a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento suave dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, que alternam entre fases de decrescimento e de crescimento no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,1883 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^2}$ do centro normalizado do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,0435 da partição final. A Figura 56b mostra, com

²¹ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as duas últimas coordenadas (3 e 4) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, correspondentes às variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, 2\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^l \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^l = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,l}$.

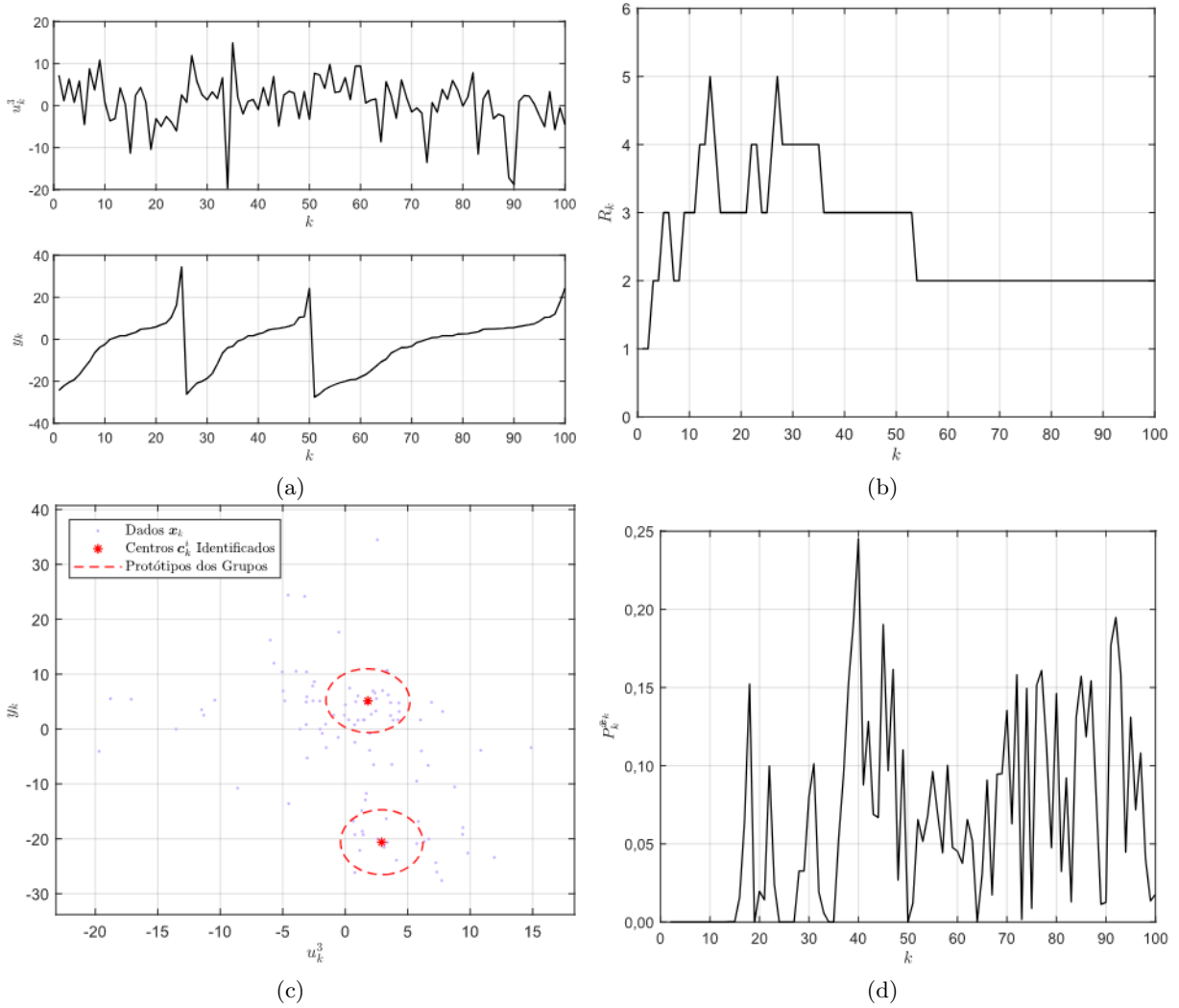


Figura 55 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Última variável de entrada u_k^3 e variável de saída y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que os centros de grupo foram deslocados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ por boa parte da faixa de operação dos dados. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso

evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 55d). A Figura 56c mostra a variação dos suportes $S_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ geralmente alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo da partição final igual a 72 dados, enquanto o suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo da partição final igual a 28 dados. A Figura 56d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam uma maior variabilidade até a amostra $k = 54$, quando ocorre a última mescla de grupos conforme a Figura 55b, e apresentam posteriormente um comportamento aproximadamente constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são maiores quando a quantidade de grupos R_k é menor, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,3994 da partição final, enquanto o raio ε_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,3067 da partição final.

A Figura 57 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 57a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver um comportamento suave das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, que alternam entre fases de decrescimento e de crescimento no fluxo de dados $\mathbf{X}$. A sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,0693 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,0295 da partição final. A Figura 57b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza). A Figura 57c mostra, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional²², em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos

²² Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as duas últimas coordenadas (3 e 4) do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$, correspondentes às variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, e mantendo as demais coordenadas $l \in \{1, 2\}$ constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1, \dots, R_N}$, ou seja: $\bar{\mathbf{x}}_k^l = \bar{\mathbf{c}}_N^{i,l}$.

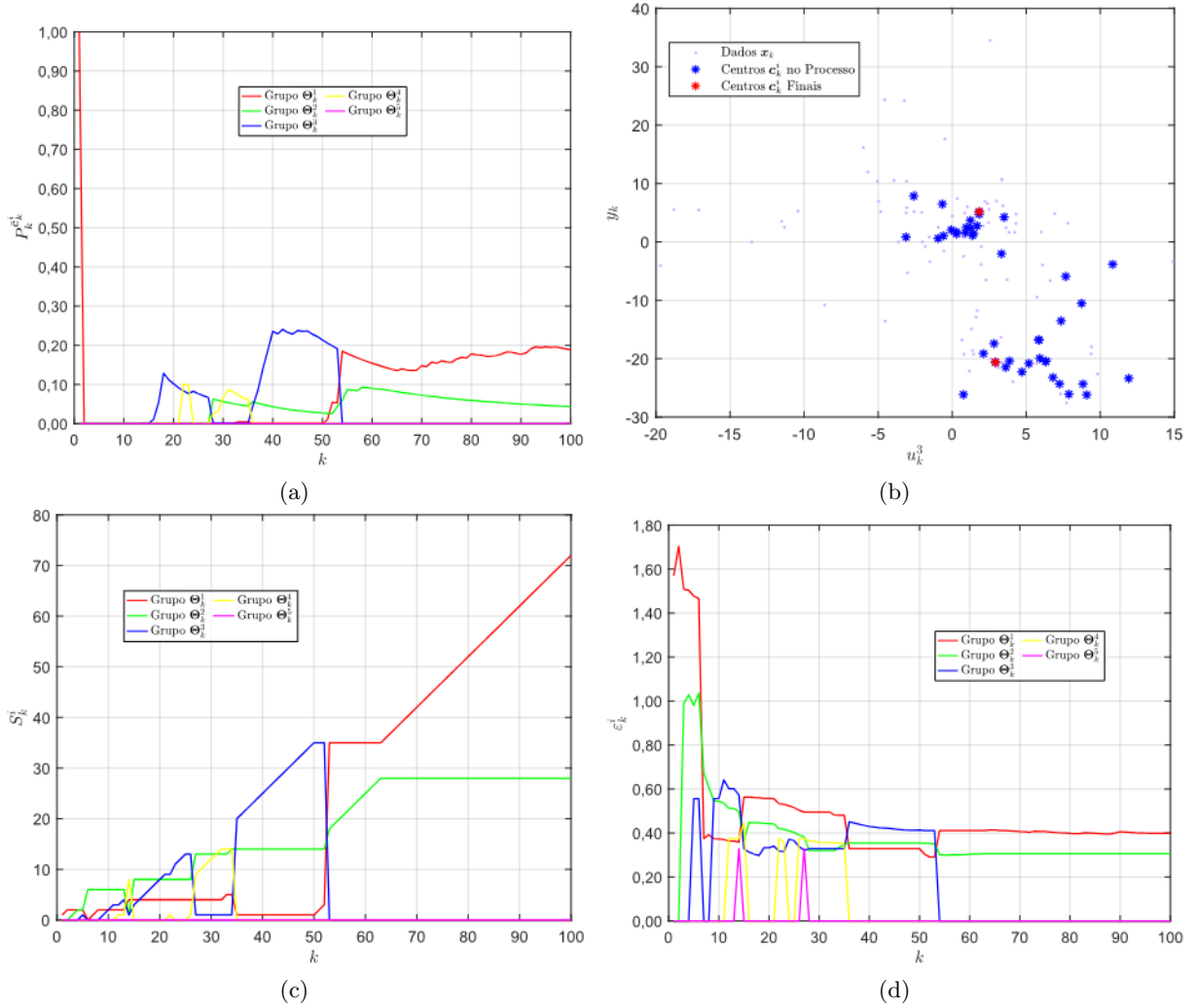


Figura 56 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação dos potenciais $P_k^{c_i^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^{c_i^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\varepsilon_k^{c_i^i} |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos na direção do outro grupo, e a serem largos nas outras direções. A Figura 57d mostra, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto

de dados de Nakanishi, os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \mid k=1, \dots, N, i=1, \dots, R_N$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

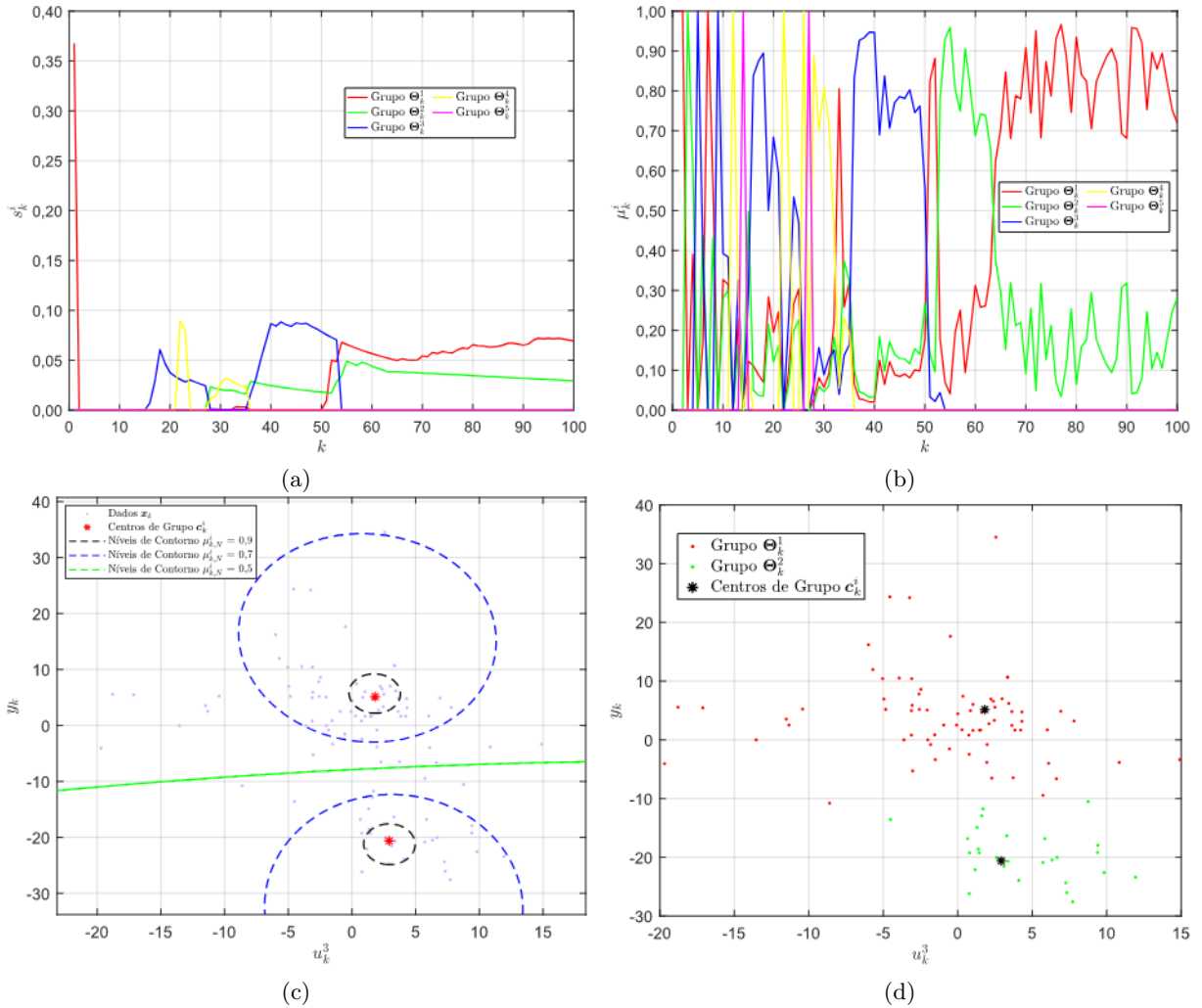


Figura 57 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do terceiro conjunto de dados de Nakanishi: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i \mid k=N, i=1, \dots, R_N$ da partição final com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, com base nas variáveis u_k^3 e y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de modelagem *online* do terceiro conjunto de dados de Nakanishi (mercado de ações), a Figura 58 ilustra seu desempenho com relação à estimação da série temporal, ao erro de estimação da série temporal, e à variação do RMSE na estimação da série temporal. A Figura 58a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da série temporal y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, em que a variável correspondente y_k é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da série temporal y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi. A Figura 58b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da série temporal y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 5,1494 na amostra $k = 99$, e o valor absoluto mínimo de 0,0021 na amostra $k = 53$. O RMSE apresenta geralmente um comportamento decrescente com algumas curtas fases de crescimento, alcançando o valor final de 1,6740. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 3,3008 na amostra $k = 51$, e seu valor mínimo é 1,4254 na amostra $k = 98$.

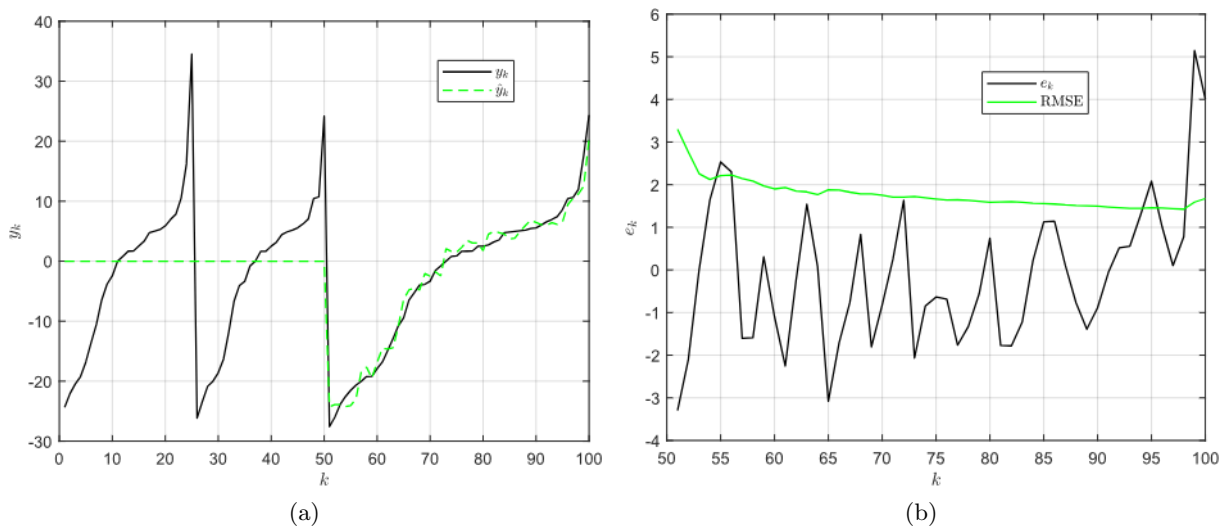


Figura 58 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de modelagem *online* do terceiro conjunto de dados de Nakanishi (mercado de ações): (a) Estimação da série temporal, em que a variável correspondente y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação da série temporal, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da série temporal y_k do terceiro conjunto de dados de Nakanishi é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

Os resultados de comparação para a modelagem da série temporal proveniente do terceiro conjunto de dados de Nakanishi são mostrados na Tabela 12, em que são fornecidos o número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), o RMSE, o CCP e o CD, de modo que os melhores resultados estão destacados em negrito. Com relação ao número de regras (grupos) R , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho (menor

quantidade de regras) com $R = 2$, que corresponde a 16,67% da quantidade de regras do segundo melhor desempenho (12 para o método SAFIN), e 0,06% da quantidade de regras do pior desempenho (3106 para o método POPFNN). Com relação ao valor do RMSE, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 1,6740$, valor que é 66,45% superior ao segundo melhor desempenho (4,9900 para o método RSPOP-CRI), e 87,12% superior ao pior desempenho (13,0000 para o método Sugeno P-G). Com relação ao valor do CCP, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{CCP} = 0,9908$, valor que é 6,54% superior ao segundo melhor desempenho (0,9300 para o método ieRSPOP), e 41,54% superior ao pior desempenho (0,7000 para os métodos Sugeno P-G e Turksen). Com relação ao valor do CD, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{CD} = 0,9806$, valor que é 15,36% superior ao segundo melhor desempenho (0,8500 para o método RSPOP-CRI), e 100,12% superior ao pior desempenho (0,4900 para o método Sugeno P-G).

Tabela 12 – Desempenho na tarefa de modelagem em relação ao terceiro conjunto de dados de Nakanishi (mercado de ações) em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE, do CCP e do CD. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.

Método	R	RMSE	CCP	CD
Algoritmo Proposto	2	1,6740	0,9908	0,9806
IT2-GSETSK (ASHRAFI; PRASAD; QUEK, 2020)	-	6,5000	-	0,7100
GSETSK (NGUYEN; ZHOU; QUEK, 2015)	-	6,5000	-	0,7200
ANFIS (JANG, 1993)	-	6,1700	0,8800	0,7700
DENFIS (KASABOV; SONG, 2002)	-	8,3600	0,8100	0,6600
EFuNN (KASABOV, 2001)	34	8,5200	0,7600	0,5700
POP-CRI (ANG; QUEK; PASQUIER, 2003)	-	8,7000	-	0,5400
RSPOP-CRI (ANG; QUEK, 2005)	29	4,9900	0,9200	0,8500
ACPOP-CRI(S) (TAN; QUEK, 2009)	22	7,0000	0,8400	-
POPFNN (QUEK; ZHOU, 1999)	3106	8,70003	0,7300	-
Sugeno P&P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	9,7100	0,7100	0,5000
Sugeno-P (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	5,9000	-	0,7800
Sugeno P-G (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	13,0000	0,7000	0,4900
Mamdani (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	6,3900	0,8700	0,7500
Turksen (NAKANISHI; TURKSEN; SUGENO, 1993)	-	9,6600	0,7000	-
PIE-RSPOP (IYER; PRASAD; QUEK, 2018)	38	6,9700	0,8200	-
ieRSPOP (DAS; ANG; QUEK, 2016)	55	5,5300	0,9300	-
SAFIN (TUNG; QUEK; GUAN, 2011)	12	7,8100	0,8700	-

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 0,0194 s para o terceiro conjunto de dados de Nakanishi. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de modelagem *online*, o algoritmo proposto tem alcançado 0,0901 s para o terceiro conjunto de dados de Nakanishi. Os demais métodos (IT2-GSETSK, GSETSK, ANFIS, DENFIS, EFuNN, POP-CRI, RSPOP-CRI, ACPPOP-CRI(S), POPFNN, Sugeno P&P-G, Sugeno-P, Sugeno P-G, Mamdani, Turksen, PIE-RSPOP, ieRSPOP e SAFIN) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

4.3 Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação *Online* de Sistemas Dinâmicos Não Lineares

O diagrama de blocos que ilustra a estrutura do processo de identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares a partir do agrupamento nebuloso evolutivo de dados realizado pelo algoritmo proposto é mostrado na Figura 59. A estrutura consiste em um Sistema de Inferência Nebuloso Evolutivo (eFIS - *evolving Fuzzy Inference System*) para a identificação *online* do sistema dinâmico. O sinal de entrada $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo é igual ao sinal de entrada do sistema dinâmico na k -ésima amostra, em que $n_u \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis de entrada do sistema dinâmico, e o sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo é a estimativa do sinal de saída $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ do sistema dinâmico na k -ésima amostra, em que $n_y \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis de saída do sistema dinâmico.

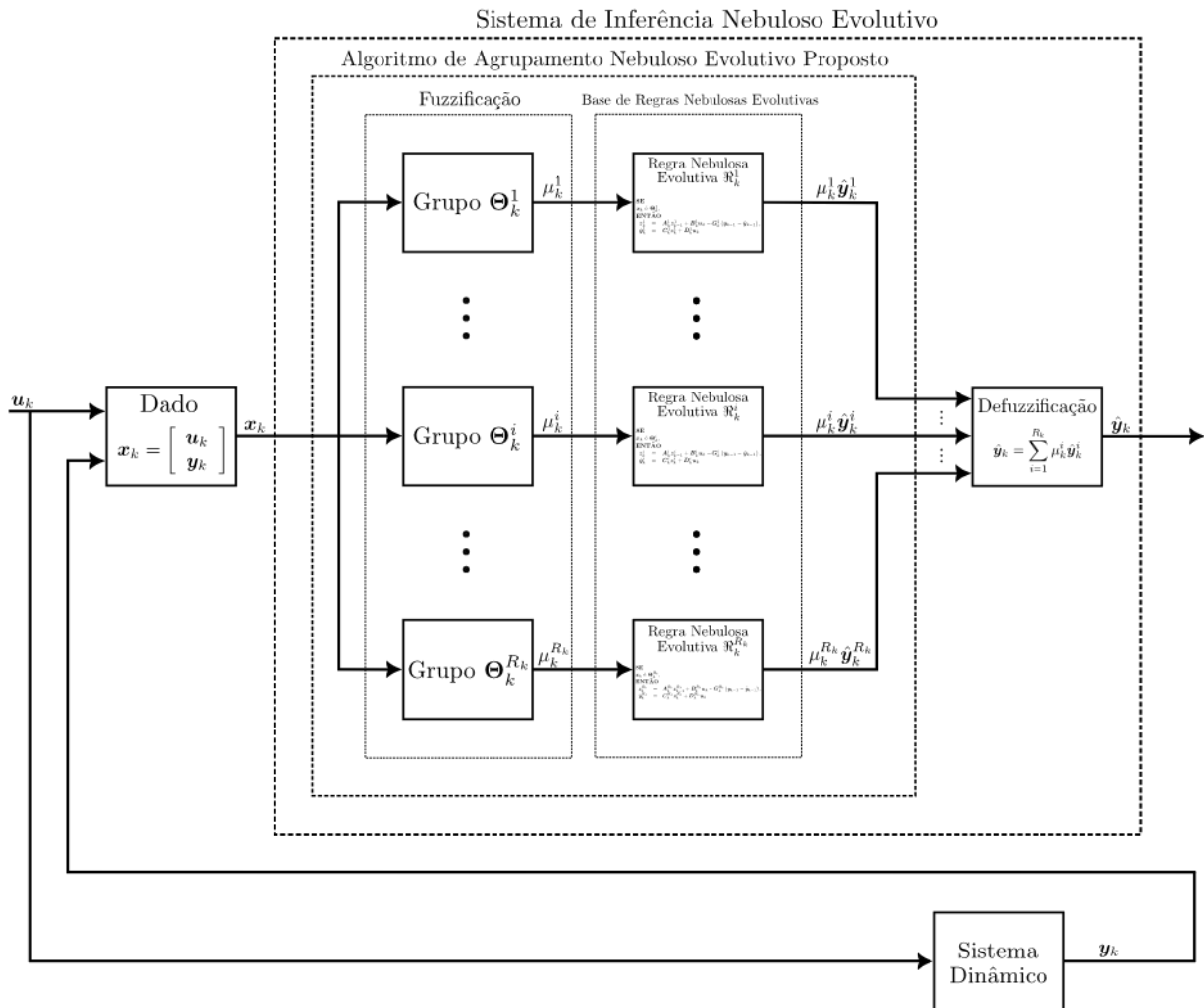


Figura 59 – Diagrama de blocos da estrutura do processo de identificação *online* de sistemas dinâmicos através do sistema de inferência nebuloso evolutivo no qual a fuzzificação dos dados $\mathbf{x}_k$ e a criação/atualização das regras nebulosas evolutivas são realizadas pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto. Fonte: Autor.

4.3.1 Considerações Preliminares Para Identificação *Online* de Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Para a identificação *online* do sistema dinâmico não linear na Figura 59, o algoritmo é aplicado na fuzzificação de dados $\mathbf{x}_k$ e na criação/atualização de regras nebulosas evolutivas no sistema de inferência nebuloso evolutivo. A representação no espaço de estados é utilizada nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas, que são dadas por:

$$\mathfrak{R}_k^i : \text{ SE } \mathbf{x}_k \text{ é } \Theta_k^i, \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{z}_k^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{z}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k - \mathbf{G}_k^i (\mathbf{y}_{k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k-1}), \\ \hat{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{z}_k^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k, \end{cases} \quad (4.14)$$

em que $\mathfrak{R}_k^i$ é a i -ésima regra nebulosa evolutiva na k -ésima amostra, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas de $\mathbf{x}_k$, Θ_k^i é o i -ésimo grupo (conjunto nebuloso da proposição antecedente) na k -ésima amostra, $\mathbf{z}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i}$ é o vetor de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $n_z^i \in \mathbb{N}^*$ é a ordem do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$, $\mathbf{u}_k$ é o sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $\mathbf{y}_{k-1}$ é o sinal de saída do sistema dinâmico na $(k-1)$ -ésima amostra, $\hat{\mathbf{y}}_{k-1}$ é o sinal de saída do sistema de inferência nebuloso evolutivo na $(k-1)$ -ésima amostra, que é a estimativa de $\mathbf{y}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{A}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_z^i}$ é a matriz de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{B}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_u}$ é a matriz de entrada do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{C}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z^i}$ é a matriz de saída do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{D}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ é a matriz de transição direta do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\mathbf{G}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_y}$ é a matriz de ganho do observador de estados da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra. O sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é calculado, no processo de defuzzificação, pela média ponderada dos sinais de saída $\hat{\mathbf{y}}_k^i$ de cada regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, como segue:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^{R_k} \mu_k^i \hat{\mathbf{y}}_k^i, \quad (4.15)$$

em que μ_k^i , o peso do i -ésimo sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k^i$, é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i , computado pela Equação (3.87). O dado para

agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T (\mathbf{y}_k)^T]^T$, que é a concatenação dos sinais de entrada e saída do sistema dinâmico.

O processo de identificação *online* consiste em estimar, a cada amostra, as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo. O algoritmo OKID Nebuloso Recursivo (*Recursive Fuzzy Observer/Kalman filter Identification*) é utilizado para identificar os parâmetros de Markov correspondentes aos modelos no espaço de estados a cada amostra. O Algoritmo de Realização de Autossistema Nebuloso (*Fuzzy ERA - Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm*) é utilizado para identificar, com base nos parâmetros de Markov, as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos modelos no espaço de estados a cada amostra. A implementação recursiva do método OKID/ERA Nebuloso requer um processo inicial de treinamento em batelada com as primeiras $N_t \in \mathbb{N}^*$ amostras do fluxo de dados $\mathbf{X}$, após o qual as demais $N - N_t$ amostras são utilizadas para teste em aprendizagem *online*, em que $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$. O método OKID/ERA é amplamente utilizado em aplicações de modelagem de séries temporais e identificação de sistemas (GAGG et al., 2014; SÁNCHEZ; COUSO; GONZÁLEZ, 2014), bem como a sua versão nebulosa recursiva (TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2020; GOMES; SERRA, 2024). A formulação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo para a identificação paramétrica *online* das matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \big|_{i=1, \dots, R}$ é apresentada no Apêndice A.

Para comparações no desempenho de identificação, os índices de estimação utilizados são a Raiz Média Quadrática do Erro RMSE (*Root Mean Square Error*) (COBANER, 2011), e o Índice de Ajuste FIT (*Fit index*) (SANTOS, 2018). O RMSE $\in \mathbb{R}_+$ é dado pela Equação (4.6), e o FIT $\in [0, 1]$ é dado por:

$$\text{FIT} = 1 - \frac{\left\| [y_1 \ \cdots \ y_k \ \cdots \ y_N]^T - [\hat{y}_1 \ \cdots \ \hat{y}_k \ \cdots \ \hat{y}_N]^T \right\|}{\left\| [y_1 \ \cdots \ y_k \ \cdots \ y_N]^T - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k) [1 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 1]^T \right\|}, \quad (4.16)$$

em que $y_k \in \mathbb{R}$ é a variável a ser estimada na k -ésima amostra, $\hat{y}_k \in \mathbb{R}$ é a estimativa de y_k na k -ésima amostra, e N é o número de observações da variável y_k . O FIT é computado na Equação (4.16) pela razão entre a norma do vetor de erros residuais e a norma do vetor de variabilidade total de y_k , subtraída da unidade. Quanto maior o valor do FIT (mais próximo de 1), maior é o ajuste da variável y_k a partir da variável estimada $\hat{y}_k$, e melhor é a estimação de y_k .

4.3.2 Sistema Dinâmico SISO

O sistema dinâmico SISO é dado, na forma de Hammerstein, por (JIA; LI; CHIU, 2016):

$$w_k = \begin{cases} 2 \tanh(2u_k), & \text{se } u_k \leq 1,5, \\ -2 \frac{e^{u_k}-1}{e^{u_k}+1}, & \text{se } u_k > 1,5, \end{cases} \quad (4.17a)$$

$$y_k = 0,8y_{k-1} + 0,2w_{k-1}, \quad (4.17b)$$

onde $u_k \in \mathbb{R}$ é a variável de entrada na k -ésima amostra, $w_k \in \mathbb{R}$ é a variável intermediária na k -ésima amostra, e $y_k \in \mathbb{R}$ é a variável de saída na k -ésima amostra. A forma de Hammerstein do sistema dinâmico SISO facilita a visualização de sua não linearidade estática complexa descontínua, que é descrita pela Equação (4.17a). A variável de entrada u_k desse sistema dinâmico é um sinal multi-degrau aleatório com amplitude uniformemente distribuída no intervalo $[0, 5]$ e um número de amostras (duração) aleatório para cada degrau no intervalo $[1, 50]$ amostras. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [u_k \ y_k]^T \in \mathbb{R}^2$. O conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 4130}$ do sistema dinâmico SISO é composto por 150 sinais em degraus, bem como a condição inicial $[u_1 \ y_1]^T = [0 \ 0]^T$, totalizando $N = 4130$ amostras, das quais $N_t = 2250$ amostras são usadas para treinamento e $N - N_t = 1880$ amostras são usadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,50$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,15$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 1,20$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 1,00$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 2$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 2$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do sistema dinâmico SISO, são ilustrados nas Figuras 60-62 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 60 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e

aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 60a mostra a variável de entrada u_k do sistema dinâmico SISO, a qual é composta de um sinal multi-degrau aleatório, e a variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO, em função da amostra k . O valor mínimo da variável u_k é 0 para $k = 1$, e o seu valor máximo é 4,9431 para $k \in \{3701, \dots, 3717\}$. O valor mínimo da variável y_k é $-1,9701$ para $k = 3321$, e o seu valor máximo é 1,9890 para $k = 1008$. A Figura 60b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k apresenta uma levemente alta variação, iniciando com 1 grupo, alcançando o valor máximo de 14 grupos nas amostras $k = 3988$ e $k = 4018$, e finalizando com o valor de 11 grupos. A Figura 60c mostra a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática do sistema dinâmico SISO, dada pela Equação (4.17a), em “linha tracejada preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 11 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ que estão próximos e bem distribuídos em relação à curva estática do sistema dinâmico SISO, que corresponde aos dados de entrada e saída em estado estacionário desse sistema dinâmico. Uma vez que dados em estado estacionário são fundamentais para compreender o comportamento de sistemas dinâmicos, tem-se que o algoritmo tem identificado centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ significativos para o sistema dinâmico SISO, apesar de sua não linearidade complexa descontínua. Pode-se ver que os protótipos dos grupos são consistentes com a distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ e com o comportamento da curva estática do sistema dinâmico SISO. A Figura 60d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresenta em geral um comportamento crescente para cada sinal em degrau aplicado à variável de entrada u_k (ver Figura 60a), de modo que maiores valores de $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ são computados para dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ mais próximos do estado estacionário. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $3,0979 \times 10^{-78}$ para $k = 2$, e o seu valor máximo é 0,9632 para $k = 132$.

A Figura 61 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 61a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ são inicializados no intervalo $[0,70, 1]$, e apresentam um comportamento geralmente decrescente e por vezes

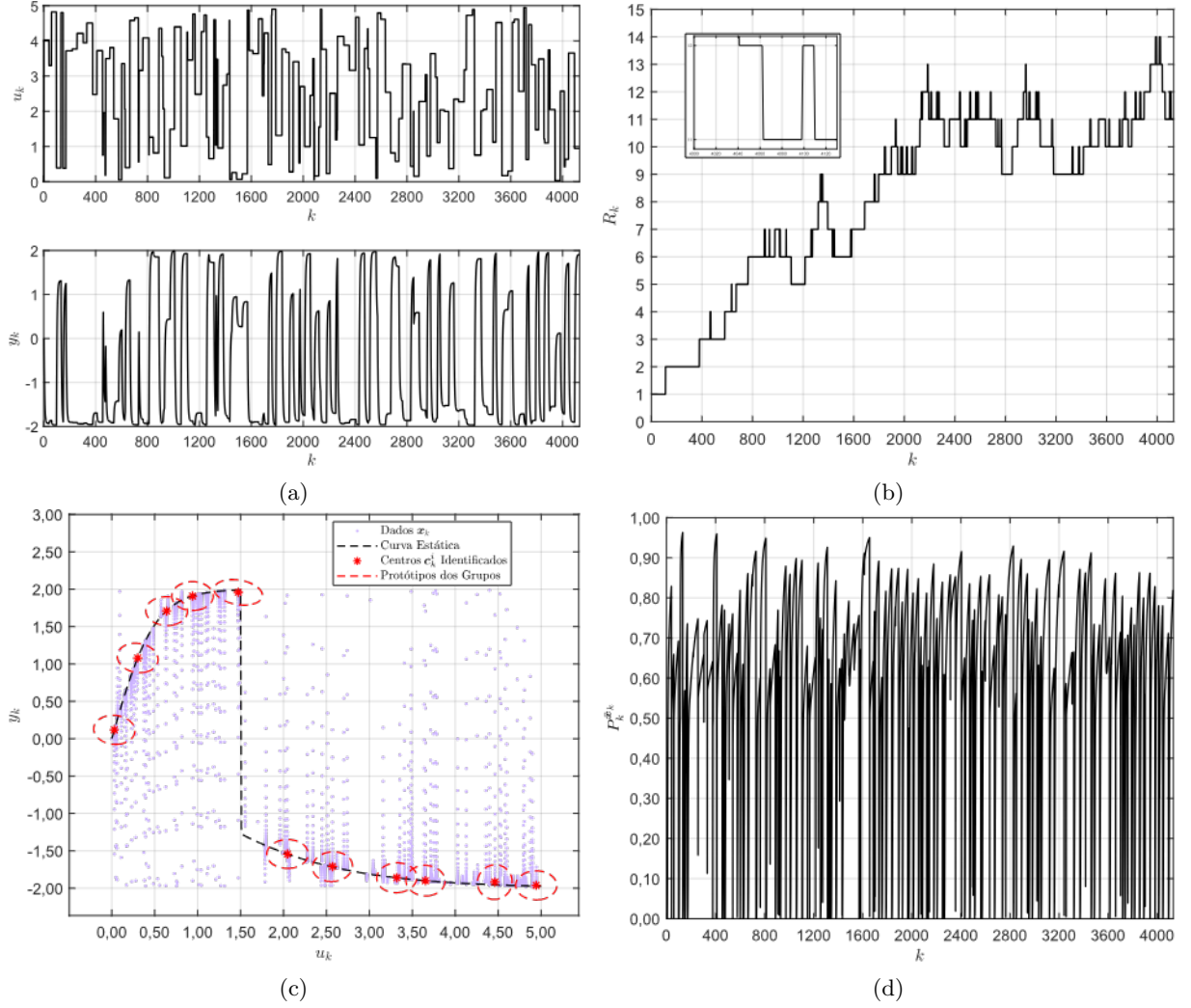


Figura 60 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO: (a) Variável de entrada u_k e variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática do sistema dinâmico SISO em “linha tracejada preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

ruidoso. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^{11}}$ do centro normalizado do décimo primeiro grupo Θ_k^{11} alcança o valor máximo 0,8197 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^4}$ do centro normalizado do quarto grupo Θ_k^4 alcança o valor mínimo 0,5143 da partição final. A Figura 61b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática do sistema dinâmico SISO, dada pela Equação (4.17a), em “linha tracejada preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que

os centros de grupo são deslocados em posições geralmente próximas da curva estática do sistema dinâmico SISO, também correspondentes às zonas de maior densidade de dados $\mathbf{x}_k$. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 60d). A Figura 61c mostra a variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ geralmente alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^5 do quinto grupo Θ_k^5 alcança o valor máximo da partição final igual a 1150 dados, enquanto o suporte S_k^6 do sexto grupo Θ_k^6 alcança o valor mínimo da partição final igual a 24 dados. A Figura 61d mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem geralmente dentro do intervalo $[0, 0,15]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,15$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^6 do sexto grupo Θ_k^6 alcança o valor máximo 0,1347 da partição final, enquanto o raio ε_k^5 do quinto grupo Θ_k^5 alcança o valor mínimo 0,0303 da partição final.

A Figura 62 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 62a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ (conforme a Figura 61c) e seus centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ (conforme a Figura 61a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 20, 0,60]$. A sensibilidade s_k^7 do sétimo grupo Θ_k^7 alcança o valor máximo 0,5610 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^5 do quinto grupo Θ_k^5 alcança o valor mínimo 0,2150 da partição final. A Figura 62b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que geralmente há uma predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos, que se alter-

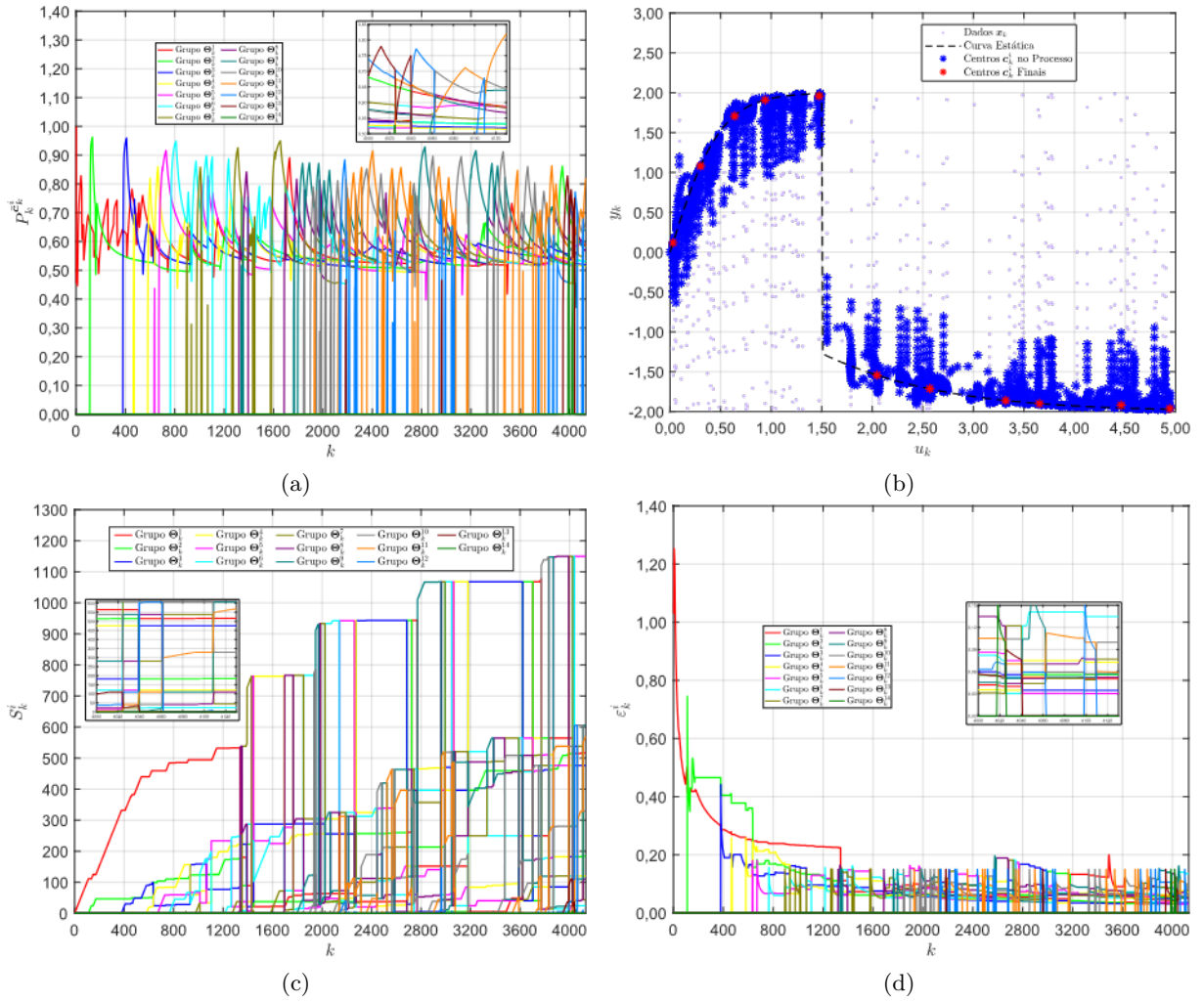


Figura 61 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO: (a) Variação dos potenciais $P_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática do sistema dinâmico SISO em “linha tracejada preta”, os centros de grupo $\bar{\mathbf{c}}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios $\epsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

nam no fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os valores dos graus de pertinência μ_k^i em relação aos grupos predominantes são geralmente muito próximos de 1, devido à característica dos dados $\mathbf{x}_k = [u_k \ y_k]^T$ mostrados na Figura 60a e ao baixo valor do grau de incerteza nesta implementação ($m = 1,20$). A Figura 62c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i |_{i=1, \dots, R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{k=N, i=1, \dots, R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas

tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. A Figura 62d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

A análise de desempenho do algoritmo também considera identificar a curva estática do sistema dinâmico SISO na Equação (4.17a) por meio da estimação dos centros de grupo, em comparação a algoritmos com a natureza de agrupamento rígido (algoritmo *k-means*) (GAN; MA; WU, 2007), agrupamento nebuloso (algoritmo *c-means*, algoritmo GK e algoritmo subtrativo) (DUNN, 1973; BEZDEK; EHRLICH; FULL, 1984; GUSTAFSON; KESSEL, 1978; CHIU, 1994) e agrupamento nebuloso evolutivo (algoritmo eTS+) (ANGELOV, 2010). A parametrização desses algoritmos para a implementação na tarefa de agrupamento dos dados do sistema dinâmico SISO é apresentada na Tabela 13. Os parâmetros de cada algoritmo foram atribuídos de forma a obter a maior proximidade possível dos centros de grupo à curva estática do sistema dinâmico SISO, com o maior número possível de grupos sem alto grau de sobreposição. Para o algoritmo *k-means*, seu melhor desempenho ocorre com o número de grupos $R = 5$. Para o algoritmo *c-means*, seu melhor desempenho ocorre com o grau de incerteza $m = 1,20$ (similarmente ao algoritmo proposto), a tolerância de terminação $\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$ (valor padrão), o número de grupos $R = 5$, e a matriz de norma induzida $\mathbf{P} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, em que $\mathbf{I}_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2. Para o algoritmo GK, seu melhor desempenho ocorre com o grau de incerteza $m = 1,20$ (similarmente ao algoritmo proposto), a tolerância de terminação $\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$ (valor padrão), o número de grupos $R = 4$, e os volumes dos grupos $\tilde{p}^i = 1$ para $i = 1, \dots, R$. Para o algoritmo subtrativo, seu melhor desempenho ocorre com o limite superior do potencial $\bar{\epsilon} = 0,50$ (valor padrão), o limite inferior do potencial $\underline{\epsilon} = 0,15$ (valor padrão), o raio de agrupamento $r_a = 0,097$, e o número de grupos $R = 11$. Para o algoritmo eTS+, seu melhor desempenho ocorre com a condição $\mathcal{A}_2$ em (2.82), sem as condições²³ $\mathcal{C}$, o desvio padrão inicial $\sigma_o = 0,30$ e o número de grupos $R = 7$.

A Figura 63 e a Tabela 14 apresentam os resultados de comparação em relação

²³ O uso das condições de remoção de grupos do algoritmo eTS+ pelos critérios de utilidade, idade e suporte em (2.98), (2.100) e (2.102) resulta, independentemente do valor de σ_o adotado, em desempenho insuficiente para a identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO por meio da estimação dos centros de grupo, e portanto as linhas 23-34 do Algoritmo 2.6 não foram consideradas na sua implementação.

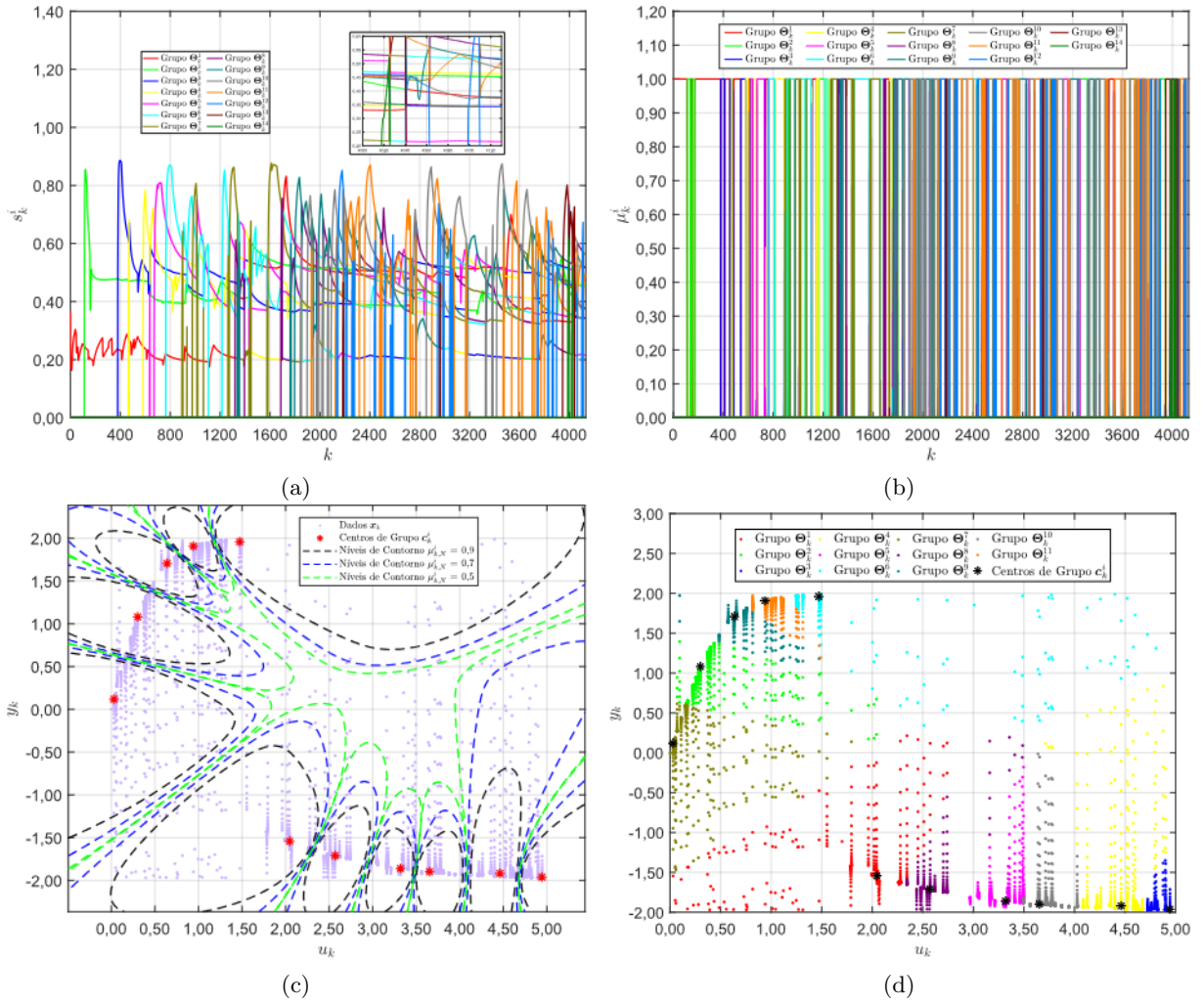


Figura 62 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico SISO: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ dos grupos $\Theta_k^i | k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0.5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i | i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

à identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO na Equação (4.17a) através da estimação dos centros de grupo. Na Figura 63, são ilustrados a curva estática do sistema dinâmico SISO em “linha tracejada preta”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *k-means* em “asteriscos laranja”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *c-means* em “asteriscos amarelos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo GK em “asteriscos roxos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo subtrativo em “asteriscos verdes”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo proposto em “asteriscos azuis”, e

Tabela 13 – Parametrização dos algoritmos *k-means*, *c-means*, GK, subtrativo, algoritmo proposto e eTS+, para suas implementações na tarefa de agrupamento dos dados do sistema dinâmico SISO. O valor atribuído e a descrição dos parâmetros são fornecidos.

Algoritmo	Parâmetros	
	Valor	Descrição
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	$R = 5$	Número de Grupos
<i>c-means</i> (DUNN, 1973)	$m = 1,20$	Grau de Incerteza
	$\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$	Tolerância de Terminação
	$R = 5$	Número de Grupos
GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978)	$m = 1,20$	Grau de Incerteza
	$\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$	Tolerância de Terminação
	$R = 4$	Número de Grupos
Subtrativo (CHIU, 1994)	$\bar{\epsilon} = 0,50$	Limite Superior de Potencial
	$\underline{\epsilon} = 0,15$	Limite Inferior de Potencial
	$r_a = 0,097$	Raio de Agrupamento
Algoritmo Proposto	$\gamma = 0,50$	Peso Multivariável
	$r = 0,15$	Decaimento Gaussiano
	$m = 1,20$	Grau de Incerteza
eTS+ (ANGELOV, 2010)	$\sigma_o = 0,30$	Desvio Padrão Inicial

os centros de grupo alcançados pelo algoritmo eTS+ em “asteriscos vermelhos”. Pode-se observar que o algoritmo proposto e o algoritmo subtrativo têm alcançado todos os centros de grupo próximos e bem distribuídos em relação à curva estática do sistema dinâmico SISO, ambos identificando $R = 11$ grupos. O algoritmo *c-means*, o algoritmo *k-means* e o algoritmo GK têm alcançado centros de grupo com uma proximidade e distribuição em relação à curva estática do sistema dinâmico SISO que são inferiores em comparação com o algoritmo proposto e o algoritmo subtrativo, identificando $R = 5$, $R = 5$ e $R = 4$ grupos, respectivamente. O algoritmo eTS+, que é um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, apresentou o pior desempenho em termos de proximidade e distribuição dos centros de grupo em relação à curva estática do sistema dinâmico SISO, identificando $R = 7$ grupos. Na Tabela 14 são apresentados o número de grupos R ($R = R_N$ no caso dos algoritmos evolutivos) e os valores de RMSE na identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO na Equação (4.17a) através da estimação dos centros de grupo, de forma que o melhor resultado é destacado em negrito. Os valores de RMSE são computados pela Equação (4.6) para $N = R$, onde o erro de estimação e_k associado ao k -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k$ é a distância (norma euclidiana) entre $\mathbf{c}_k$ e o ponto mais próximo na curva estática do sistema dinâmico SISO. O algoritmo proposto apresenta desempenho superior com $\text{RMSE} = 0,0148$, enquanto o algoritmo subtrativo apresenta desempenho levemente inferior

com $RMSE = 0,0203$, o algoritmo *c-means* apresenta desempenho com $RMSE = 0,1912$, o algoritmo *k-means* apresenta desempenho com $RMSE = 0,2027$, o algoritmo GK apresenta desempenho com $RMSE = 0,2576$, e o algoritmo eTS+ apresenta desempenho com $RMSE = 0,6318$. O algoritmo proposto tem alcançado um resultado de $RMSE$ que é 27,09% superior em relação ao segundo melhor desempenho (0,0203 para o algoritmo subtrativo), e 97,50% superior em relação ao pior desempenho (0,5911 para o algoritmo eTS+). O algoritmo eTS+, que é um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, baseia-se no cálculo de potencial dos dados, de forma semelhante ao algoritmo proposto e ao algoritmo subtrativo, mas seu desempenho na identificação de grupos representativos do comportamento do sistema dinâmico SISO é consideravelmente inferior. A função de potencial de Cauchy na Equação (2.66) utilizada pelo algoritmo eTS+ permite o cálculo recursivo do potencial dos dados conforme a Equação (2.67), resultando em um agrupamento rápido, mas não apresenta a mesma qualidade na identificação dos dados representativos como centros de grupo em comparação com a função de potencial gaussiana na Equação (2.35) utilizada pelo algoritmo subtrativo e a função de potencial gaussiana multivariável na Equação (3.16) utilizada pelo algoritmo proposto. Na comparação entre os algoritmos de agrupamento evolutivo (algoritmo proposto e eTS+), o algoritmo eTS+ realizou o agrupamento em 0,8631 s, enquanto o algoritmo proposto realizou o agrupamento em 2,7410 s, o que é 3,1758 vezes mais custoso em termos de tempo, mas com um valor de $RMSE$ (Tabela 14) que é 39,9392 vezes superior.

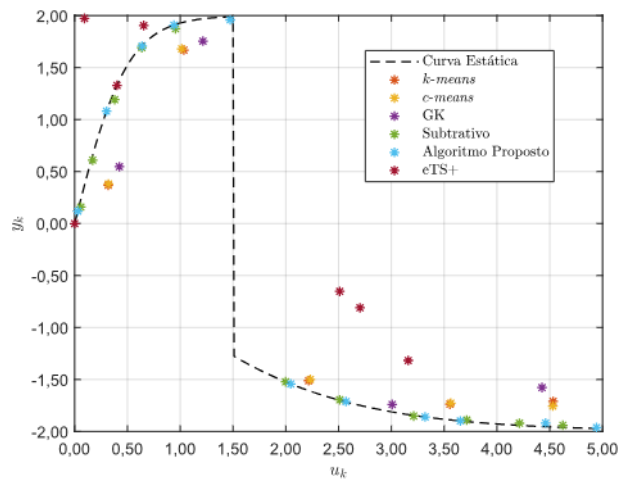


Figura 63 – Comparação do desempenho do algoritmo proposto com os algoritmos *k-means*, *c-means*, GK, subtrativo e eTS+, em relação à identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO por meio da estimação dos centros de grupo, em que a curva estática do sistema dinâmico SISO é ilustrada em “linha tracejada preta”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *k-means* em “asteriscos laranja”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *c-means* em “asteriscos amarelos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo GK em “asteriscos roxos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo subtrativo em “asteriscos verdes”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo proposto em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo alcançados pelo algoritmo eTS+ em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico SISO, a Figura 64 ilustra seu desempenho com relação à estimação da variável

Tabela 14 – Resultados de comparação em relação à identificação da curva estática do sistema dinâmico SISO através da estimação dos centros de grupo, em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos) e do valor do RMSE.

Algoritmo	R	RMSE
k -means (GAN; MA; WU, 2007)	5	0,2027
c -means (DUNN, 1973)	5	0,1912
GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978)	4	0,2576
Subtrativo (CHIU, 1994)	11	0,0203
Algoritmo Proposto	11	0,0148
eTS+ (ANGELOV, 2010)	7	0,5911

de saída, ao erro de estimação da variável de saída, e à variação do RMSE na estimação da variável de saída. A Figura 64a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO, em que a variável de saída y_k é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO, o qual tem uma não linearidade complexa descontínua. A Figura 64b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta diversos picos em seus valores durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 0,4724 na amostra $k = 3055$, e o valor absoluto mínimo de $1,6955 \times 10^{-5}$ na amostra $k = 3898$. O RMSE apresenta inicialmente um comportamento decrescente até a amostra $k = 2500$, e posteriormente um comportamento estável, alcançando o valor final de 0,0393. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 0,4536 na amostra $k = 2251$, e seu valor mínimo é 0,0349 na amostra $k = 2512$.

Para validação no domínio da frequência, na identificação *online* do sistema dinâmico SISO, a Figura 65 mostra a comparação entre a magnitude $|H_f| \in \mathbb{R}$ da resposta em frequência $H_f \in \mathbb{C}$ do sistema dinâmico SISO, ilustrada em “linha preta”, e a magnitude $|\hat{H}_f| \in \mathbb{R}$ da resposta em frequência $\hat{H}_f \in \mathbb{C}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, ilustrada em “linha tracejada verde”, em que $f \in \mathbb{R}$ é a frequência em Hz, sendo adotado um período de amostragem $T_S = 2$ ms. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado em geral uma identificação correta do sistema dinâmico SISO em termos da proximidade de sua representação no domínio da frequência, com um melhor desempenho nas baixas frequências ($f \rightarrow 0$ Hz) em comparação com as altas frequências ($f \rightarrow 100$ Hz).

Para comparação do desempenho do algoritmo na tarefa de identificação do sistema dinâmico SISO, são considerados uma metodologia nebulosa evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados apresentada em Santos (2018), e dois métodos de identificação apresentados em Jia, Li e Chiu (2016), nos quais a não linearidade estática é

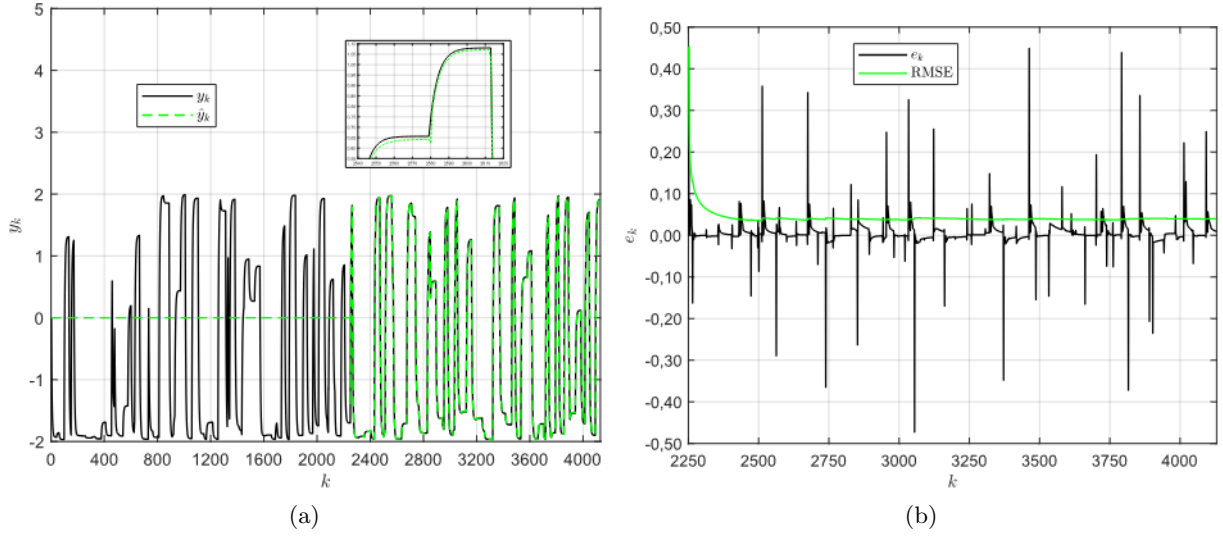


Figura 64 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico SISO: (a) Estimação de saída, em que a variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da variável de saída y_k do sistema dinâmico SISO é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

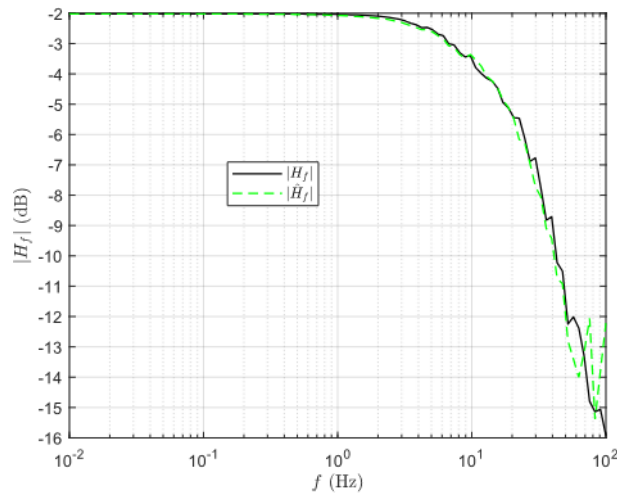


Figura 65 – Validação no domínio da frequência do desempenho do algoritmo na identificação *online* do sistema dinâmico SISO, em que a magnitude $|H_f|$ da resposta em frequência do sistema dinâmico SISO é ilustrada em “linha preta”, e a magnitude $|\hat{H}_f|$ da resposta em frequência do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor.

representada por: (a) um polinômio e (b) uma rede neural-nebulosa. Os resultados para esses métodos são reportados em Santos (2018), Jia, Li e Chiu (2016). Os resultados de comparação para a identificação do sistema dinâmico SISO são apresentados na Tabela 15, em que são fornecidos o número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), o RMSE e o FIT, de modo que os melhores resultados estão destacados em **negrito**. Como o modelo polinomial não inclui regras nebulosas, sua estrutura nesta implementação é descrita pela “ordem” igual a 12. Com relação ao número de regras (grupos) R , o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho (menor quantidade de regras) com $R = 11$, que

corresponde a 47,83% da quantidade de regras do segundo melhor desempenho (23 para a metodologia em Santos (2018)), e 34,38% da quantidade de regras do pior desempenho (32 para a Rede Neural-Nebulosa). Com relação ao valor do RMSE, a metodologia em Santos (2018) alcança o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 0,0302$, enquanto o algoritmo proposto alcança um desempenho inferior (30,13%) com $\text{RMSE} = 0,0393$, valor que é 54,93% superior ao pior desempenho (0,0872 para o Polinômio). Com relação ao valor do FIT, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{FIT} = 0,9732$, valor que é 0,25% superior ao desempenho (0,9708) da metodologia em Santos (2018).

Tabela 15 – Desempenho na tarefa de identificação do sistema dinâmico SISO, em termos do número de regras (grupos) R ($R = R_N$ para os métodos evolutivos), do RMSE e do FIT. Como o modelo polinomial não inclui regras nebulosas, sua estrutura nesta implementação é descrita pela “ordem” igual a 12. As células marcadas com “-” indicam que o valor não é reportado pelos autores.

Método	R	RMSE	FIT
Algoritmo Proposto	11	0,0393	0,9732
Santos (2018)	23	0,0302	0,9708
Rede Neural-Nebulosa (JIA; LI; CHIU, 2016)	32	0,0316	-
Polinômio (JIA; LI; CHIU, 2016)	12	0,0872	-

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 0,8631 s para o sistema dinâmico SISO. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o algoritmo proposto tem alcançado 17,5784 s para o sistema dinâmico SISO. Os demais métodos (Metodologia em Santos (2018), Rede Neural-Nebulosa e Polinômio) não têm o tempo de execução reportado pelos autores.

A partir dos resultados mencionados sobre a identificação do sistema dinâmico SISO nas Equações (4.17a)-(4.17b), pode-se observar que o modelo identificado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto é capaz de extrair, a partir de dados experimentais, as características e complexidades do sistema dinâmico SISO, como o comportamento da curva estática baseado nos grupos identificados (Figuras 60-63 e Tabela 14), um rastreamento adequado da resposta no tempo (Figura 64 e Tabela 15), e um rastreamento adequado da resposta em frequência (Figura 65), o que implica que o algoritmo pode ser útil para fins de controle baseado em modelo no espaço de estados. A representação no espaço de estados para a identificação do sistema dinâmico SISO, neste resultado computacional, utilizando o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, expressa a relação entre as variáveis de entrada e saída do sistema dinâmico SISO em uma estrutura compacta com ordem mínima e, conseqüentemente, reduzindo a carga computacional do algoritmo proposto.

4.3.3 Sistema Dinâmico MIMO

O sistema dinâmico MIMO é dado, na forma de Hammerstein, por (JIA; LI; CHIU, 2016):

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} 1,6740u_k^1 + 0,8370(u_k^1)^2 - 0,5816u_k^2 - 0,2908(u_k^2)^2 \\ 0,1410u_k^1 + 0,0705(u_k^1)^2 + 0,1614u_k^2 + 0,0807(u_k^2)^2 \end{bmatrix}, \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} -0,0250 & -0,1000 \\ 0,1900 & -0,0500 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{k-1} + \begin{bmatrix} 1,0250 & 0,1000 \\ -0,1900 & 1,0500 \end{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1}, \quad (4.18b)$$

onde $u_k^1 \in \mathbb{R}$ e $u_k^2 \in \mathbb{R}$ são as variáveis de entrada na k -ésima amostra, $\mathbf{w}_k = [w_k^1 \ w_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$ é o sinal intermediário na k -ésima amostra, $w_k^1 \in \mathbb{R}$ e $w_k^2 \in \mathbb{R}$ são as variáveis intermediárias na k -ésima amostra, $\mathbf{y}_k = [y_k^1 \ y_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$ é o sinal de saída na k -ésima amostra, e $y_k^1 \in \mathbb{R}$ e $y_k^2 \in \mathbb{R}$ são as variáveis de saída na k -ésima amostra. O sinal de entrada na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$. A forma de Hammerstein do sistema dinâmico MIMO facilita a visualização de sua não linearidade estática, que é descrita pela Equação (4.18a). O sinal de entrada $\mathbf{u}_k$ desse sistema dinâmico apresenta para cada variável de entrada um sinal multi-degrau aleatório com amplitude uniformemente distribuída no intervalo $[-2, 2]$ e um número de amostras (duração) para cada degrau no intervalo $[1, 50]$ amostras. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T \ (\mathbf{y}_k)^T]^T \in \mathbb{R}^4$. O conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4 \times 4173}$ do sistema dinâmico MIMO é composto por 150 sinais em degraus para cada variável de entrada, bem como a condição inicial $[(\mathbf{u}_1)^T \ (\mathbf{y}_1)^T]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, totalizando $N = 4173$ amostras, das quais $N_t = 2250$ amostras são usadas para treinamento e $N - N_t = 1923$ amostras são usadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,50$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,15$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 1,60$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 1,00$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 2$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 4$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do sistema dinâmico MIMO, são ilustrados nas Figuras 66-69 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos

grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 66 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO com relação à variação do número de grupos e à identificação dos centros e protótipos dos grupos. A Figura 66a mostra as variáveis de entrada u_k^1 e u_k^2 do sistema dinâmico MIMO, as quais são compostas de sinais multi-degrau aleatórios, e as variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, em função da amostra k . O valor mínimo da variável u_k^1 é $-1,9854$ para $k \in \{1106, \dots, 1132\}$, e o seu valor máximo é $1,9514$ para $k \in \{1528, \dots, 1539\}$. O valor mínimo da variável u_k^2 é $-1,9551$ para $k \in \{3281, \dots, 3299\}$, e o seu valor máximo é $1,9860$ para $k \in \{3574, \dots, 3602\}$. O valor mínimo da variável y_k^1 é $-3,1079$ para $k = 362$, e o seu valor máximo é $6,9556$ para $k = 1529$. O valor mínimo da variável y_k^2 é $-0,8656$ para $k = 1529$, e o seu valor máximo é $1,7795$ para $k = 1329$. A Figura 66b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k apresenta uma levemente alta variação, iniciando com 1 grupo, alcançando o valor máximo de 45 grupos nas amostras $k = 3110$, $k = 3577$ e $k = 3795$, e finalizando com o valor de 44 grupos. As Figuras 66c-66d mostram a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, as superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, dadas pela Equação (4.18a), em “linhas pretas”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ projetados no espaço tridimensional²⁴, representados pelas superfícies isométricas $(\bar{D}_{k,N}^i \text{ constante})$, em “superfícies vermelhas semitransparentes”. Na Figura 66c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1, x_k^2 e x_k^3) correspondentes às variáveis u_k^1, u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, bem como a superfície estática correspondente à primeira variável de saída y_k^1 , enquanto na Figura 66d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1, x_k^2 e x_k^4) correspondentes às variáveis u_k^1, u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, bem como a superfície estática correspondente à segunda variável de saída y_k^2 . Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 44 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ que estão próximos e bem distribuídos em relação às superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, que correspondem aos dados de entrada e saída em estado estacionário desse sistema dinâmico. Uma vez que dados em estado estacionário são fundamentais para compreender o comportamento de

²⁴ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço tridimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as coordenadas do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ ($\bar{x}_k^1, \bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 66c e $\bar{x}_k^1, \bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 66d) correspondentes às três variáveis do sistema dinâmico MIMO mostradas nos eixos das Figuras 66c-66d (u_k^1, u_k^2 e y_k^1 na Figura 66c e u_k^1, u_k^2 e y_k^2 na Figura 66d), e mantendo a outra coordenada ($\bar{x}_k^4$ na Figura 66c e $\bar{x}_k^3$ na Figura 66d) constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1, \dots, R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^4 = \bar{c}_N^{i,4}$ na Figura 66c e $\bar{x}_k^3 = \bar{c}_N^{i,3}$ na Figura 66d.

sistemas dinâmicos, tem-se que o algoritmo tem identificado centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ significativos para o sistema dinâmico MIMO. Pode-se ver que os protótipos dos grupos são consistentes com a distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$ e com o comportamento das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO.

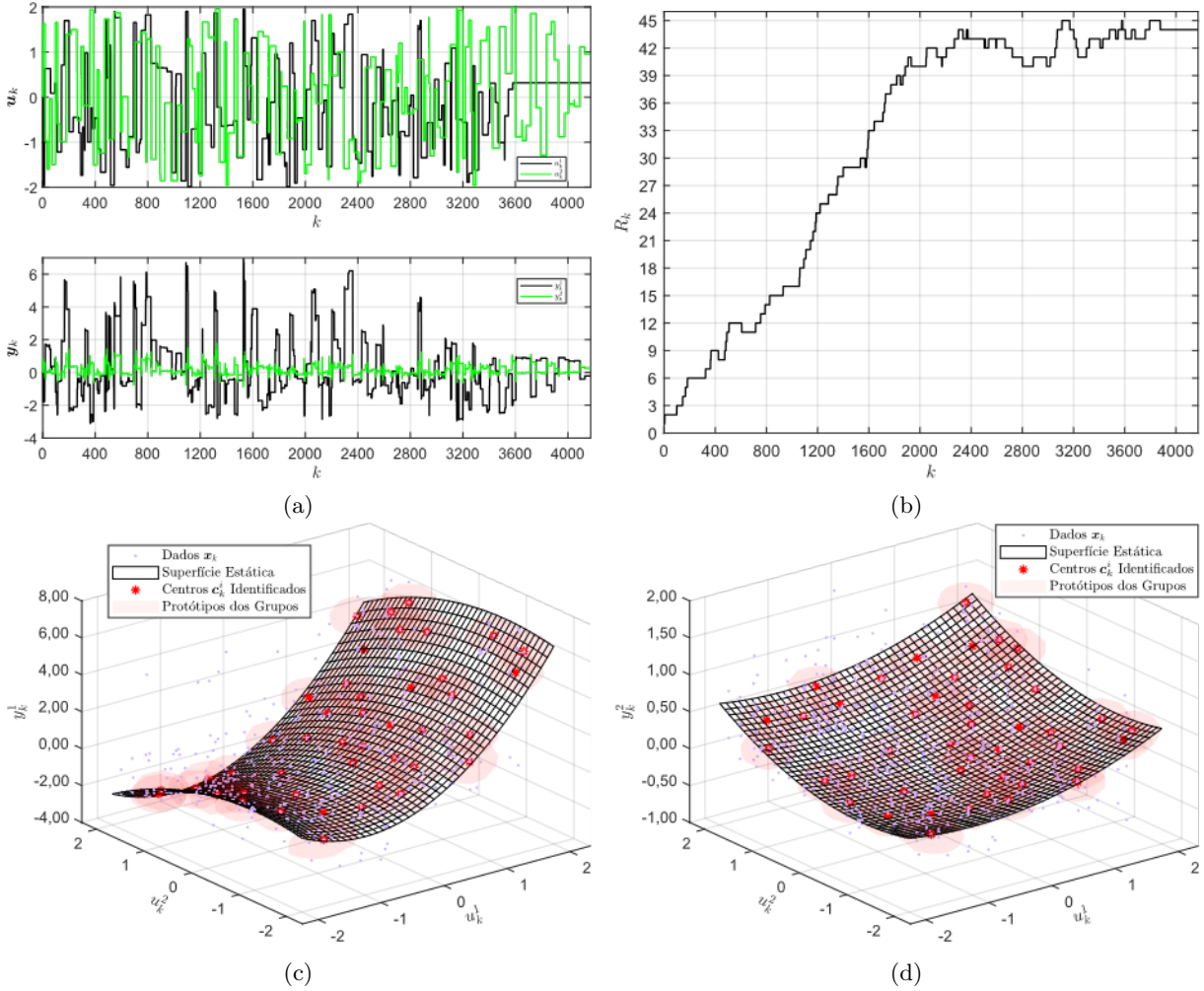


Figura 66 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Variáveis de entrada u_k^1 e u_k^2 e variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas superfícies isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “superfícies vermelhas semitransparentes”; (d) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas superfícies isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “superfícies vermelhas semitransparentes”. Fonte: Autor.

A Figura 67 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO com relação aos

potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, e às posições dos centros de grupo no fluxo de dados. A Figura 67a mostra o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ apresenta em geral um comportamento crescente para cada sinal em degrau aplicado às variáveis de entrada u_k^1 e u_k^2 (ver Figura 66a), de modo que maiores valores de $P_k^{\bar{x}_k}$ são computados para dados normalizados $\bar{x}_k$ mais próximos do estado estacionário. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ é $3,0979 \times 10^{-78}$ para $k = 2$ e $k = 3$, e o seu valor máximo é 0,9444 para $k = 13$. A Figura 67b mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente apresentam um comportamento decrescente e por vezes ruidoso, tendendo a valores no intervalo $[0,45, 0,65]$. O potencial $P_k^{\bar{c}_k^{42}}$ do centro normalizado do quadragésimo segundo grupo Θ_k^{42} alcança o valor máximo 0,6237 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{c}_k^8}$ do centro normalizado do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo 0,4559 da partição final. As Figuras 67c-67d mostram as posições dos centros de grupo $c_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, as superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, dadas pela Equação (4.18a), em “linhas pretas”, os centros de grupo $c_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Na Figura 67c são mostradas as coordenadas dos dados x_k (x_k^1 , x_k^2 e x_k^3) correspondentes às variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, bem como a superfície estática correspondente à primeira variável de saída y_k^1 , enquanto na Figura 67d são mostradas as coordenadas dos dados x_k (x_k^1 , x_k^2 e x_k^4) correspondentes às variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, bem como a superfície estática correspondente à segunda variável de saída y_k^2 . Pode-se ver que os centros de grupo são deslocados em posições geralmente próximas das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, também correspondentes às zonas de maior densidade de dados x_k . Todas as posições dos centros de grupo $c_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados x_k com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ (ver Figura 67a).

A Figura 68 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes do sistema dinâmico MIMO com relação à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, e à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos. A Figura 68a mostra a variação dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^{23} do vigésimo terceiro

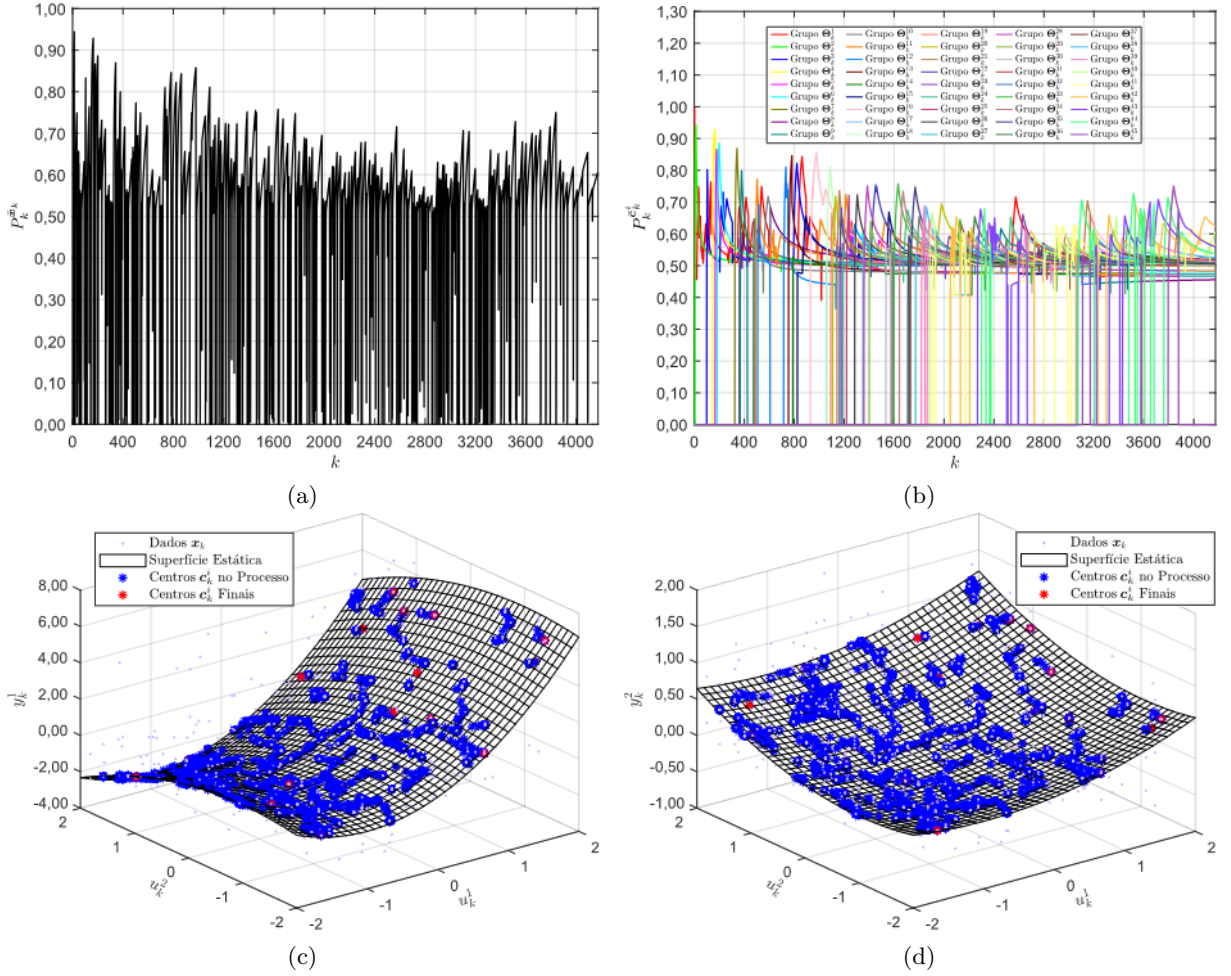


Figura 67 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos potenciais $P_k^{c_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (d) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base nas variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, a superfície estática do sistema dinâmico MIMO em “linha preta”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor.

grupo Θ_k^{23} alcança o valor máximo da partição final igual a 672 dados, enquanto o suporte S_k^{30} do trigésimo grupo Θ_k^{30} alcança o valor mínimo da partição final igual a 3 dados. A Figura 68b mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam um comportamento decrescente ou constante após a inicialização dos grupos

$\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, estabilizando dentro do intervalo $[0, 0,25]$. Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,15$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^{23} do vigésimo terceiro grupo Θ_k^{23} alcança o valor máximo 0,2254 da partição final, enquanto o raio ε_k^{42} do quadragésimo segundo grupo Θ_k^{42} alcança o valor mínimo 0,0815 da partição final. A Figura 68c mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 68a) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 67b), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,15, 0,55]$. A sensibilidade s_k^{43} do quadragésimo terceiro grupo Θ_k^{43} alcança o valor máximo 0,5230 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^{23} do vigésimo terceiro grupo Θ_k^{23} alcança o valor mínimo 0,1849 da partição final. A Figura 68d mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que geralmente há uma predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos, que se alternam no fluxo de dados $\mathbf{X}$. Os valores dos graus de pertinência μ_k^i em relação aos grupos predominantes são geralmente muito próximos de 1, devido à característica dos dados $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T (\mathbf{y}_k)^T]^T$ mostrados na Figura 66a e ao baixo valor do grau de incerteza nesta implementação ($m = 1,60$).

A Figura 69 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO com relação aos níveis de contorno associados às funções de pertinência e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. As Figuras 69a-69b mostram os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional²⁵, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas

²⁵ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as coordenadas do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ ($\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 69a e $\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 69b) correspondentes às duas variáveis do sistema dinâmico MIMO mostradas nos eixos das Figuras 69a-69b (u_k^1 e y_k^1 na Figura 69a e u_k^2 e y_k^2 na Figura 69b), e mantendo as demais coordenadas ($\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 69a e $\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 69b) constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^2 = \bar{c}_N^{i,2}$ e $\bar{x}_k^4 = \bar{c}_N^{i,4}$ na Figura 69a e $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$ e $\bar{x}_k^3 = \bar{c}_N^{i,3}$ na Figura 69b.

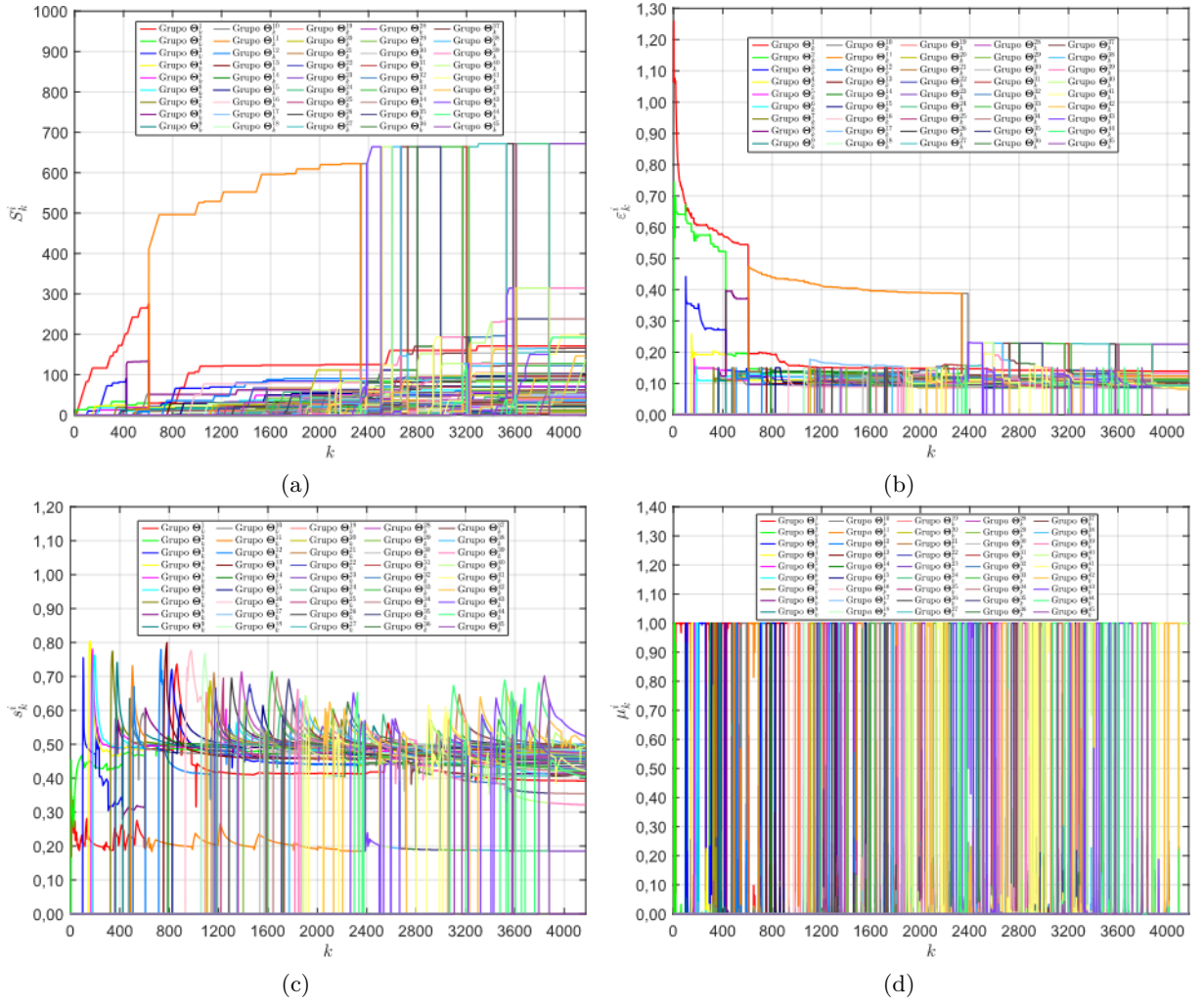


Figura 68 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Variação dos suportes $S_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos raios $\varepsilon_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Variação das sensibilidades $s_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Na Figura 69a são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes às variáveis u_k^1 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, enquanto na Figura 69b são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^4) correspondentes às variáveis u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i | i=1, \dots, R_N$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. As Figuras 69c-69d mostram os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência

$\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Na Figura 69c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes às variáveis u_k^1 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, enquanto na Figura 69d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^4) correspondentes às variáveis u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO. Uma vez que as distâncias entre os dados $\mathbf{x}_k$ e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ consideram todas as variáveis u_k^1 , u_k^2 , y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, tem-se que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

A análise de desempenho do algoritmo também considera identificar as superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO na Equação (4.18a) por meio da estimação dos centros de grupo, em comparação a algoritmos com a natureza de agrupamento rígido (algoritmo *k-means*) (GAN; MA; WU, 2007), agrupamento nebuloso (algoritmo *c-means*, algoritmo GK e algoritmo subtrativo) (DUNN, 1973; BEZDEK; EHRLICH; FULL, 1984; GUSTAFSON; KESSEL, 1978; CHIU, 1994) e agrupamento nebuloso evolutivo (algoritmo eTS+) (ANGELOV, 2010). A parametrização desses algoritmos para a implementação na tarefa de agrupamento dos dados do sistema dinâmico MIMO é apresentada na Tabela 16. Os parâmetros de cada algoritmo foram atribuídos de forma a obter a maior proximidade possível dos centros de grupo às superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, com o maior número possível de grupos sem alto grau de sobreposição. Para o algoritmo *k-means*, seu melhor desempenho ocorre com o número de grupos $R = 17$. Para o algoritmo *c-means*, seu melhor desempenho ocorre com o grau de incerteza $m = 1,60$ (similarmente ao algoritmo proposto), a tolerância de terminação $\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$ (valor padrão), o número de grupos $R = 42$, e a matriz de norma induzida $\mathbf{P} = \mathbf{I}_{4 \times 4}$, em que $\mathbf{I}_{4 \times 4} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é a matriz identidade de ordem 4. Para o algoritmo GK, seu melhor desempenho ocorre com o grau de incerteza $m = 1,60$ (similarmente ao algoritmo proposto), a tolerância de terminação $\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$ (valor padrão), o número de grupos $R = 21$, e os volumes dos grupos $\tilde{p}^i = 1$ para $i = 1, \dots, R$. Para o algoritmo subtrativo, seu melhor desempenho ocorre com o limite superior do potencial $\bar{\epsilon} = 0,50$ (valor padrão), o limite inferior do potencial $\underline{\epsilon} = 0,15$ (valor padrão), o raio de agrupamento $r_a = 0,11$, e o número de grupos $R = 44$. Para o algoritmo eTS+, seu melhor desempenho ocorre com a condição $\mathcal{A}_2$ em (2.82), sem as condições²⁶ $\mathcal{C}$, o desvio padrão inicial $\sigma_o = 0,10$ e o número de grupos $R = 15$.

A Figura 70 e a Tabela 17 apresentam os resultados de comparação em relação à identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO na Equação (4.18a) por meio da estimação dos centros de grupo. Na Figura 70, são ilustrados as superfícies

²⁶ O uso das condições de remoção de grupos do algoritmo eTS+ pelos critérios de utilidade, idade e suporte em (2.98), (2.100) e (2.102) resulta, independentemente do valor de σ_o adotado, em desempenho insuficiente para a identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO por meio da estimação dos centros de grupo, e portanto as linhas 23-34 do Algoritmo 2.6 não foram consideradas na sua implementação.

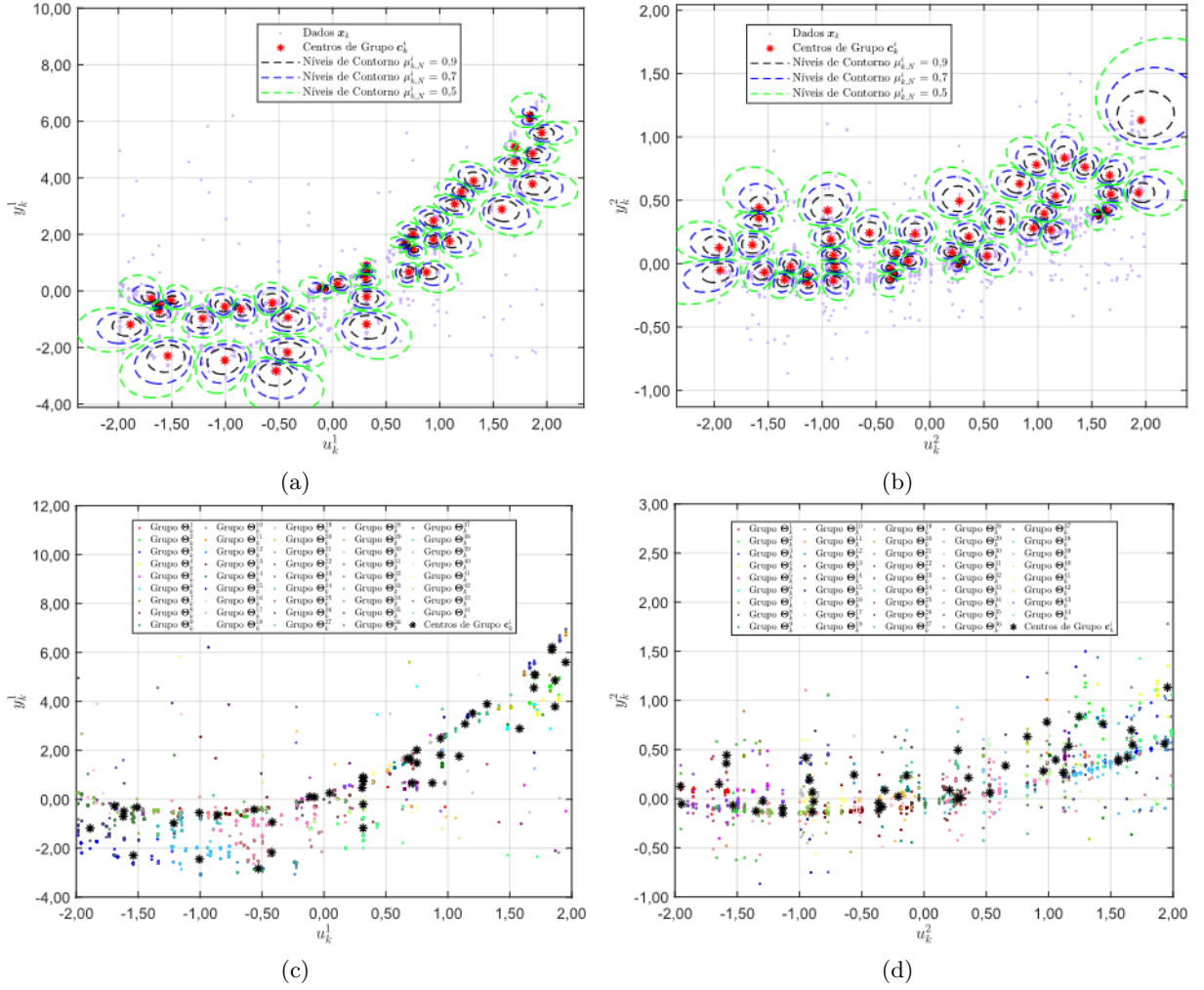


Figura 69 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do sistema dinâmico MIMO: (a) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base nas variáveis u_k^1 e y_k^1 , em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base nas variáveis u_k^2 e y_k^2 , em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (c) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base nas variáveis u_k^1 e y_k^1 , em que os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”; (d) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base nas variáveis u_k^2 e y_k^2 , em que os centros de grupo $c_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

estáticas do sistema dinâmico MIMO em “linhas pretas”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo k -means em “asteriscos laranja”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo c -means em “asteriscos amarelos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo GK em “asteriscos roxos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo subtrativo em “asteriscos verdes”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo proposto em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo alcançados pelo algoritmo eTS+ em “asteriscos vermelhos”. Na

Tabela 16 – Parametrização dos algoritmos *k-means*, *c-means*, GK, subtrativo, algoritmo proposto e eTS+, para suas implementações na tarefa de agrupamento dos dados do sistema dinâmico MIMO. O valor atribuído e a descrição dos parâmetros são fornecidos.

Algoritmo	Parâmetros	
	Valor	Descrição
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	$R = 17$	Número de Grupos
<i>c-means</i> (DUNN, 1973)	$m = 1,60$	Grau de Incerteza
	$\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$	Tolerância de Terminação
	$R = 42$	Número de Grupos
GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978)	$m = 1,60$	Grau de Incerteza
	$\tilde{\epsilon} = 10^{-2}$	Tolerância de Terminação
	$R = 21$	Número de Grupos
Subtrativo (CHIU, 1994)	$\bar{\epsilon} = 0,50$	Limite Superior de Potencial
	$\underline{\epsilon} = 0,15$	Limite Inferior de Potencial
	$r_a = 0,11$	Raio de Agrupamento
Algoritmo Proposto	$\gamma = 0,50$	Peso Multivariável
	$r = 0,15$	Decaimento Gaussiano
	$m = 1,60$	Grau de Incerteza
eTS+ (ANGELOV, 2010)	$\sigma_o = 0,10$	Desvio Padrão Inicial

Figura 70a são mostradas as coordenadas dos centros de grupo correspondentes às variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^1 do sistema dinâmico MIMO, bem como a superfície estática correspondente à primeira variável de saída y_k^1 , enquanto na Figura 70b são mostradas as coordenadas dos centros de grupo correspondentes às variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, bem como a superfície estática correspondente à segunda variável de saída y_k^2 . Pode-se observar que o algoritmo subtrativo, o algoritmo proposto, o algoritmo *c-means*, e o algoritmo *k-means* têm alcançado todos os centros de grupo próximos e bem distribuídos em relação às superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, identificando $R = 44$, $R = 44$, $R = 42$ e $R = 17$ grupos, respectivamente. O algoritmo GK tem alcançado centros de grupo com uma proximidade e distribuição em relação às superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO que são inferiores em comparação com o algoritmo subtrativo, o algoritmo proposto, o algoritmo *c-means*, e o algoritmo *k-means*, identificando $R = 21$ grupos. O algoritmo eTS+, que é um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, apresentou o pior desempenho em termos de proximidade e distribuição dos centros de grupo em relação às superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO, identificando $R = 15$ grupos. Na Tabela 17 são apresentados o número de grupos R ($R = R_N$ no caso dos algoritmos evolutivos) e os valores de RMSE na identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO na Equação (4.18a) através da estimação dos centros de grupo, de forma que o melhor resultado é destacado em

negrito. Os valores de RMSE são computados pela Equação (4.6) para $N = R$, onde o erro de estimação e_k associado ao k -ésimo centro de grupo $\mathbf{c}_k$ é a distância (norma euclidiana) entre $\mathbf{c}_k$ e o ponto mais próximo na superfície estática correspondente do sistema dinâmico MIMO. Na identificação da primeira superfície estática do sistema dinâmico MIMO, o algoritmo subtrativo apresenta desempenho superior com RMSE = 0,0070, enquanto o algoritmo *c-means* apresenta desempenho com RMSE = 0,0240, o algoritmo proposto apresenta desempenho com RMSE = 0,0243, o algoritmo *k-means* apresenta desempenho com RMSE = 0,0378, o algoritmo GK apresenta desempenho com RMSE = 0,0859, e o algoritmo eTS+ apresenta desempenho com RMSE = 0,2722. O algoritmo proposto tem alcançado um resultado de RMSE que é 247,14% inferior em relação ao melhor desempenho (0,0070 para o algoritmo subtrativo), e 91,07% superior em relação ao pior desempenho (0,2722 para o algoritmo eTS+). Na identificação da segunda superfície estática do sistema dinâmico MIMO, o algoritmo subtrativo apresenta desempenho superior com RMSE = 0,0046, enquanto o algoritmo proposto apresenta desempenho com RMSE = 0,0092, o algoritmo *c-means* apresenta desempenho com RMSE = 0,0150, o algoritmo *k-means* apresenta desempenho com RMSE = 0,0163, o algoritmo GK apresenta desempenho com RMSE = 0,0681, e o algoritmo eTS+ apresenta desempenho com RMSE = 0,2510. O algoritmo proposto tem alcançado um resultado de RMSE que é 100,00% inferior em relação ao melhor desempenho (0,0046 para o algoritmo subtrativo), e 96,33% superior em relação ao pior desempenho (0,2510 para o algoritmo eTS+). O algoritmo eTS+, que é um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, baseia-se no cálculo de potencial dos dados, de forma semelhante ao algoritmo proposto e ao algoritmo subtrativo, mas seu desempenho na identificação de grupos representativos do comportamento do sistema dinâmico MIMO é consideravelmente inferior. A função de potencial de Cauchy na Equação (2.66) utilizada pelo algoritmo eTS+ permite o cálculo recursivo do potencial dos dados conforme a Equação (2.67), resultando em um agrupamento rápido, mas não apresenta a mesma qualidade na identificação dos dados representativos como centros de grupo em comparação com a função de potencial gaussiana na Equação (2.35) utilizada pelo algoritmo subtrativo e a função de potencial gaussiana multivariável na Equação (3.16) utilizada pelo algoritmo proposto. Na comparação entre os algoritmos de agrupamento evolutivo (algoritmo proposto e eTS+), o algoritmo eTS+ realizou o agrupamento em 0,8638 s, enquanto o algoritmo proposto realizou o agrupamento em 14,0663 s, o que é 16,2842 vezes mais custoso em termos de tempo, mas com valores de RMSE (Tabela 17) que são 11,2016 vezes superior para a superfície estática 1 e 27,2826 vezes superior para a superfície estática 2.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico MIMO, a Figura 71 ilustra seu desempenho com relação à estimação das variáveis de saída, ao erro de estimação das variáveis de saída, e à variação do RMSE na estimação das variáveis de saída. As Figuras 71a-71b mostram o desempenho do algoritmo com

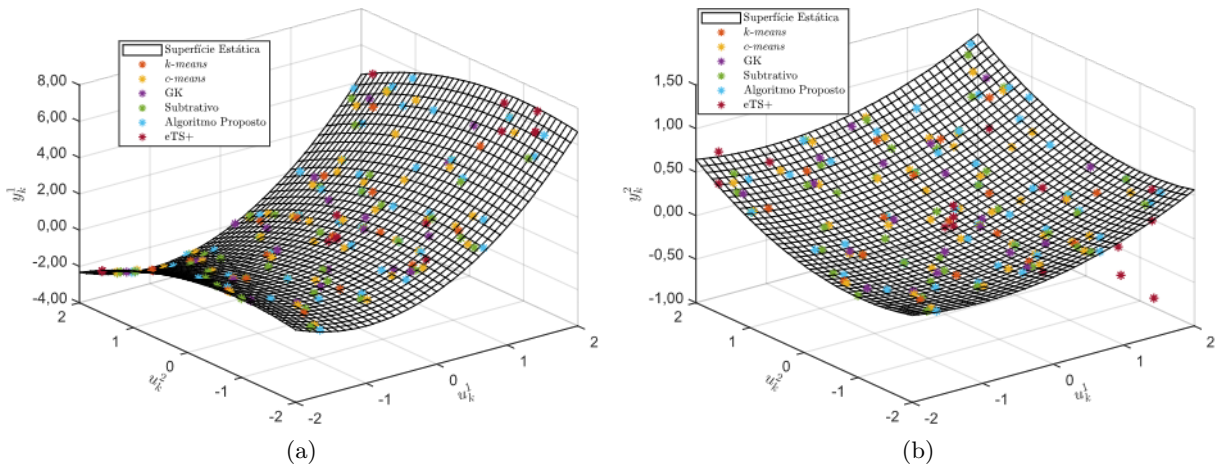


Figura 70 – Comparação do desempenho do algoritmo proposto com os algoritmos *k-means*, *c-means*, GK, subtrativo e eTS+, em relação à identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO por meio da estimação dos centros de grupo, em que as superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO são ilustradas em “linhas pretas”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *k-means* em “asteriscos laranja”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo *c-means* em “asteriscos amarelos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo GK em “asteriscos roxos”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo subtrativo em “asteriscos verdes”, os centros de grupo alcançados pelo algoritmo proposto em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo alcançados pelo algoritmo eTS+ em “asteriscos vermelhos”: (a) Superfície estática correspondente à primeira variável de saída y_k^1 do sistema dinâmico MIMO; (b) Superfície estática correspondente à segunda variável de saída y_k^2 do sistema dinâmico MIMO. Fonte: Autor.

Tabela 17 – Resultados de comparação em relação à identificação das superfícies estáticas do sistema dinâmico MIMO através da estimação dos centros de grupo, em termos do número de grupos R ($R = R_N$ para os algoritmos evolutivos) e do valor do RMSE.

Algoritmo	R	RMSE	
		Superfície Estática 1	Superfície Estática 2
<i>k-means</i> (GAN; MA; WU, 2007)	17	0,0378	0,0163
<i>c-means</i> (DUNN, 1973)	42	0,0240	0,0150
GK (GUSTAFSON; KESSEL, 1978)	21	0,0859	0,0681
Subtrativo (CHIU, 1994)	44	0,0070	0,0046
Algoritmo Proposto	44	0,0243	0,0092
eTS+ (ANGELOV, 2010)	15	0,2722	0,2510

relação à estimação das variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, em que as variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 são ilustradas em “linhas pretas”, e as variáveis estimadas $\hat{y}_k^1$ e $\hat{y}_k^2$ em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa das variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO. As Figuras 71c-71d mostram o desempenho do algoritmo com relação aos erros $e_k^1 = y_k^1 - \hat{y}_k^1$ e $e_k^2 = y_k^2 - \hat{y}_k^2$ de estimação das variáveis de saída y_k^1 e y_k^2 do sistema dinâmico MIMO, ilustrados em “linhas pretas”, bem como à variação dos valores de RMSE associados aos erros e_k^1 e e_k^2 , ilustrados em “linhas verdes”. Os erros e_k^1 e e_k^2 apresentam diversos picos em seus valores durante a estimação *online*. O valor absoluto máximo do erro e_k^1 é 2,0514 na amostra $k = 2362$, e seu valor absoluto mínimo é $4,2255 \times 10^{-6}$ na amostra $k = 3207$. O valor absoluto máximo do

erro e_k^2 é 0,3538 na amostra $k = 2944$, e seu valor absoluto mínimo é $9,7757 \times 10^{-6}$ na amostra $k = 2606$. Os valores de RMSE apresentam em geral um comportamento estável em grande parte da estimação, com algumas curtas fases de crescimento associadas aos picos presentes em e_k^1 e e_k^2 . O valor máximo do RMSE associado ao erro e_k^1 no processo de estimação *online* é 0,2390 na amostra $k = 2362$, seu valor mínimo é 0,0159 na amostra $k = 2265$, e seu valor final é 0,1272. O valor máximo do RMSE associado ao erro e_k^2 no processo de estimação *online* é 0,0311 na amostra $k = 3604$, seu valor mínimo é 0,0055 na amostra $k = 2265$, e seu valor final é 0,0285.

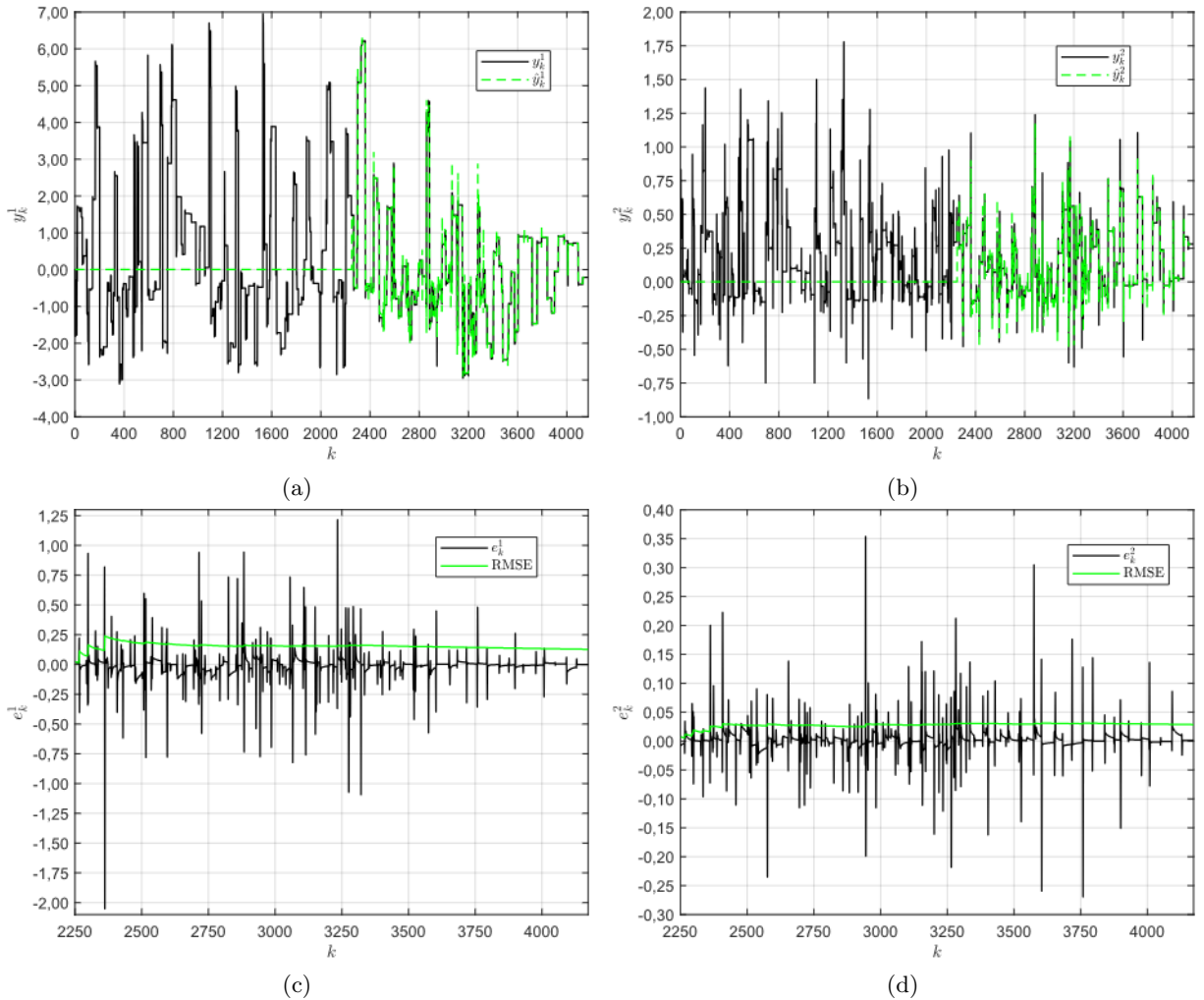


Figura 71 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico MIMO: (a) Estimação de saída, em que a primeira variável de saída y_k^1 do sistema dinâmico MIMO é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k^1$ em “linha tracejada verde”; (b) Estimação de saída, em que a segunda variável de saída y_k^2 do sistema dinâmico MIMO é ilustrada em “linha preta”, e a variável estimada $\hat{y}_k^2$ em “linha tracejada verde”; (c) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k^1 = y_k^1 - \hat{y}_k^1$ de estimação da primeira variável de saída y_k^1 do sistema dinâmico MIMO é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^1 em “linha verde”; (d) Erro de estimação de saída, em que o erro $e_k^2 = y_k^2 - \hat{y}_k^2$ de estimação da segunda variável de saída y_k^2 do sistema dinâmico MIMO é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^2 em “linha verde”. Fonte: Autor.

Para validação no domínio da frequência, na identificação *online* do sistema dinâmico MIMO, a Figura 72 mostra a comparação entre os valores singulares $\phi_f^1 \in \mathbb{R}$ e $\phi_f^2 \in \mathbb{R}$

da resposta em frequência $\mathbf{H}_f \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ do sistema dinâmico MIMO, ilustrados em “linhas pretas”, e os valores singulares $\hat{\phi}_f^1 \in \mathbb{R}$ e $\hat{\phi}_f^2 \in \mathbb{R}$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, ilustrados em “linhas tracejadas verdes”, em que $f \in \mathbb{R}$ é a frequência em Hz, sendo adotado um período de amostragem $T_S = 2$ ms. Na Figura 72a é ilustrado o valor singular ϕ_f^1 da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$ do sistema dinâmico MIMO, juntamente com o valor singular $\hat{\phi}_f^1$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, enquanto na Figura 72b é ilustrado o valor singular ϕ_f^2 da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$ do sistema dinâmico MIMO, juntamente com o valor singular $\hat{\phi}_f^2$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado em geral uma identificação correta do sistema dinâmico MIMO em termos da proximidade de sua representação no domínio da frequência baseada nos valores singulares, com um melhor desempenho nas baixas frequências ($f \rightarrow 0$ Hz) em comparação com as altas frequências ($f \rightarrow 100$ Hz).

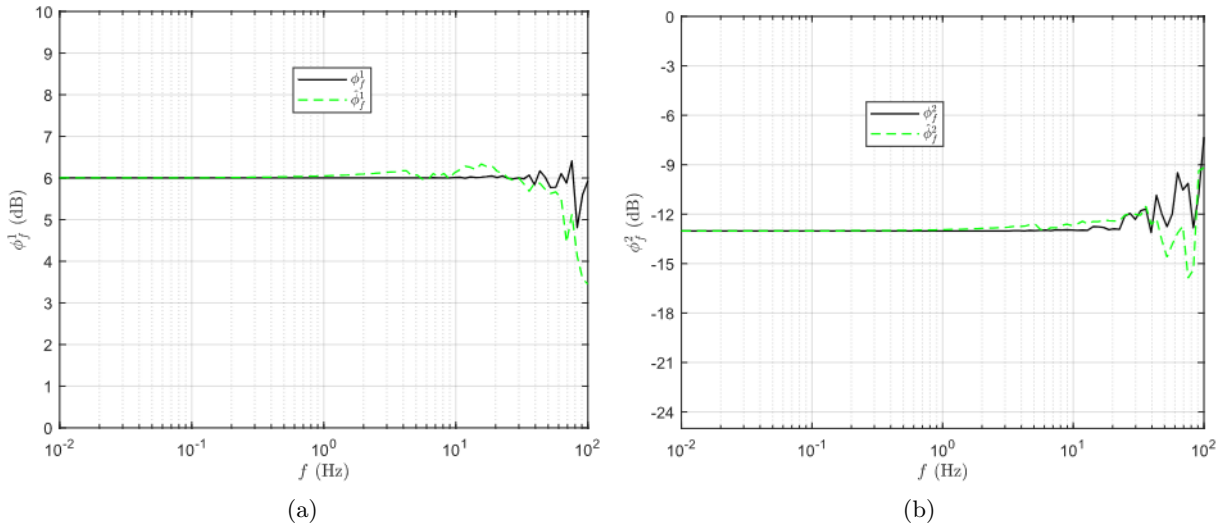


Figura 72 – Validação no domínio da frequência do desempenho do algoritmo na identificação *online* do sistema dinâmico MIMO: (a) Comparação entre o valor singular ϕ_f^1 da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$ do sistema dinâmico MIMO, ilustrado em “linha preta”, e o valor singular $\hat{\phi}_f^1$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, ilustrado em “linha tracejada verde”; (b) Comparação entre o valor singular ϕ_f^2 da resposta em frequência $\mathbf{H}_f$ do sistema dinâmico MIMO, ilustrado em “linha preta”, e o valor singular $\hat{\phi}_f^2$ da resposta em frequência $\hat{\mathbf{H}}_f$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo identificado pelo algoritmo, ilustrado em “linha tracejada verde”. Fonte: Autor.

Para comparação do desempenho do algoritmo na tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico MIMO, é considerada uma metodologia nebulosa evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados apresentada em Santos (2018), de onde os resultados são também reportados. Os resultados de comparação para a identificação do sistema dinâmico MIMO são apresentados na Tabela 15, em que são fornecidos o número final de regras (grupos) R_N , o RMSE e o FIT, de modo que os melhores resultados estão destacados em negrito. Com relação ao número final de regras (grupos) R_N , a

metodologia em Santos (2018) alcança o melhor desempenho (menor quantidade de regras) com $R_N = 18$, enquanto o algoritmo proposto tem alcançado $R_N = 44$ (2,4444 vezes maior). Com relação ao valor do RMSE para a saída 1, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 0,1272$, valor que é 48,17% superior ao desempenho da metodologia em Santos (2018) (0,2454). Com relação ao valor do RMSE para a saída 2, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{RMSE} = 0,0285$, valor que é 37,77% superior ao desempenho da metodologia em Santos (2018) (0,0458). Com relação ao valor do FIT para a saída 1, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{FIT} = 0,9217$, valor que é 2,70% superior ao desempenho da metodologia em Santos (2018) (0,8975). Com relação ao valor do FIT para a saída 2, o algoritmo proposto alcança o melhor desempenho com $\text{FIT} = 0,8802$, valor que é 0,62% superior ao desempenho da metodologia em Santos (2018) (0,8748).

Tabela 18 – Desempenho na tarefa de identificação *online* do sistema dinâmico MIMO, em termos do número final de regras (grupos) R_N , do RMSE e do FIT.

Algoritmo	R_N	RMSE		FIT	
		Saída 1	Saída 2	Saída 1	Saída 2
Algoritmo Proposto	44	0,1272	0,0285	0,9217	0,8802
Santos (2018)	18	0,2454	0,0458	0,8975	0,8748

Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo proposto tem alcançado 14,0663 s para o sistema dinâmico MIMO. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o algoritmo proposto tem alcançado 55,5540 s para o sistema dinâmico MIMO. A metodologia em Santos (2018) não tem o tempo de execução reportado pela autora.

A partir dos resultados mencionados sobre a identificação do sistema dinâmico MIMO nas Equações (4.18a)-(4.18b), pode-se observar que o modelo identificado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto é capaz de extrair, a partir de dados experimentais, as características e complexidades do sistema dinâmico MIMO, como o comportamento das superfícies estáticas baseado nos grupos identificados (Figuras 66-70 e Tabela 17), um rastreamento adequado da resposta no tempo (Figura 71 e Tabela 18), e um rastreamento adequado da resposta em frequência (Figura 72), o que implica que o algoritmo pode ser útil para fins de controle baseado em modelo no espaço de estados. A representação no espaço de estados para a identificação do sistema dinâmico MIMO, neste resultado computacional, utilizando o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, expressa a relação entre as variáveis de entrada e saída do sistema dinâmico MIMO em uma estrutura compacta com ordem mínima e, conseqüentemente, reduzindo a carga computacional do algoritmo proposto.

4.4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados computacionais da implementação do algoritmo proposto. Na Seção 4.1 foram apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* amplamente usados para a tarefa de agrupamento de fluxos de dados (S1, A1, R15, *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064), a partir do qual o algoritmo apresentou desempenho satisfatório em termos da quantidade de grupos (Figuras 14b, 17b, 20b, 23b, 26b, 29b, 32b e 35b e Tabelas 2-5), das localizações dos centros dos grupos e das formas dos protótipos dos grupos (Figuras 14c, 15b, 17c, 18b, 20c, 21b, 23c, 24b, 26c, 27b, 29c, 30b, 32c, 33b, 35c e 36b), dos níveis de contorno associados aos graus de pertinência (Figuras 16c, 19c, 22c, 25c, 28c, 31c, 34c e 37c), das associações dos dados aos grupos a partir dos graus de pertinência máximos (Figuras 16d, 19d, 22d, 25d, 28d, 31d, 34d e 37d), e do índice de qualidade Q na Equação (4.1) (Tabelas 2-5).

Na Seção 4.2 foram apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à modelagem *online* de séries temporais (Função Hipérbole, Mackey-Glass e Nakanishi), a partir do qual o algoritmo apresentou desempenho satisfatório em termos das localizações dos centros dos grupos e das formas dos protótipos dos grupos (Figuras 39c, 40b, 43c, 44b, 47c, 48b, 51c, 52b, 55c e 56b), dos níveis de contorno associados aos graus de pertinência (Figuras 41c, 45c, 49c, 53c e 57c), das associações dos dados aos grupos a partir dos graus de pertinência máximos (Figuras 41d, 45d, 49d, 53d e 57d), da estimação das séries temporais (Figuras 42, 46, 50, 54 e 58), e dos índices de estimação descritos pelas Equações (4.6)-(4.10) (Tabelas 8-12).

Na Seção 4.3 foram apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos não lineares (SISO e MIMO), a partir do qual o algoritmo apresentou desempenho satisfatório em termos das localizações dos centros dos grupos e das formas dos protótipos dos grupos (Figuras 60c, 61b, 66c-66d e 67c-67d), dos níveis de contorno associados aos graus de pertinência (Figuras 62c e 69a-69b), das associações dos dados aos grupos a partir dos graus de pertinência máximos (Figuras 62d e 69c-69d), da identificação das hipersuperfícies estáticas dos sistemas dinâmicos por meio da estimação dos centros de grupo (Figuras 63 e 70 e Tabelas 14 e 17), da estimação das variáveis de saída (Figuras 64 e 71), dos índices de estimação descritos pelas Equações (4.6) e (4.16) (Tabelas 15 e 18), e da identificação das respostas em frequência (Figuras 65 e 72).

No capítulo seguinte (5) são apresentados os resultados experimentais da implementação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos do mundo real (Planta Térmica, Helicóptero 2DoF e Foguete Fogtrein-I).

5 Resultados Experimentais

Neste capítulo são apresentados resultados experimentais da implementação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos do mundo real (Planta Térmica, Helicóptero 2DoF e Foguete Fogtrein-I). A implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo é realizada usando as seguintes configurações computacionais: MATLAB R2024a (24.1.0.2537033), Sistema Operacional Windows 11 64-bit (win64), Processador Intel(R) Core(TM) i5-11260H 2,60 GHz e 8G de Memória RAM.

5.1 Considerações Preliminares Para Resultados Experimentais

O diagrama que ilustra a estrutura do processo de identificação *online* de sistemas dinâmicos do mundo real a partir do agrupamento nebuloso evolutivo de dados realizado pelo algoritmo proposto é mostrado na Figura 59 na Seção 4.3. A estrutura consiste em um Sistema de Inferência Nebuloso Evolutivo (eFIS - *evolving Fuzzy Inference System*) para a identificação *online* do sistema dinâmico. O sinal de entrada $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo é igual ao sinal de entrada do sistema dinâmico na k -ésima amostra, em que $n_u \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis de entrada do sistema dinâmico, e o sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo é a estimativa do sinal de saída $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ do sistema dinâmico na k -ésima amostra, em que $n_y \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis de saída do sistema dinâmico.

Para a identificação *online* do sistema dinâmico real na Figura 59, o algoritmo é aplicado na fuzzificação de dados $\mathbf{x}_k$ e na criação/atualização de regras nebulosas evolutivas no sistema de inferência nebuloso evolutivo. A representação no espaço de estados é utilizada nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas, que são dadas por:

$$\mathfrak{R}_k^i : \text{ SE } \mathbf{x}_k \text{ é } \Theta_k^i, \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{z}_k^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{z}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k - \mathbf{G}_k^i (\mathbf{y}_{k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k-1}), \\ \hat{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{z}_k^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k, \end{cases} \quad (5.1)$$

em que $\mathfrak{R}_k^i$ é a i -ésima regra nebulosa evolutiva na k -ésima amostra, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas de $\mathbf{x}_k$, Θ_k^i é o i -ésimo grupo (conjunto nebuloso da proposição antecedente) na k -ésima amostra, $\mathbf{z}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i}$ é o vetor de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $n_z^i \in \mathbb{N}^*$ é a ordem do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa

evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$, $\mathbf{u}_k$ é o sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $\mathbf{y}_{k-1}$ é o sinal de saída do sistema dinâmico na $(k-1)$ -ésima amostra, $\hat{\mathbf{y}}_{k-1}$ é o sinal de saída do sistema de inferência nebuloso evolutivo na $(k-1)$ -ésima amostra, que é a estimativa de $\mathbf{y}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{A}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z^i}$ é a matriz de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{B}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ é a matriz de entrada do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{C}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z^i}$ é a matriz de saída do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{D}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ é a matriz de transição direta do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\mathbf{G}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ é a matriz de ganho do observador de estados da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra. O sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é calculado, no processo de defuzzificação, pela média ponderada dos sinais de saída $\hat{\mathbf{y}}_k^i$ de cada regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$, como segue:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^{R_k} \mu_k^i \hat{\mathbf{y}}_k^i, \quad (5.2)$$

em que μ_k^i , o peso do i -ésimo sinal de saída $\hat{\mathbf{y}}_k^i$, é o grau de pertinência do k -ésimo dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo Θ_k^i , computado pela Equação (3.87). O dado para o agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T (\mathbf{y}_k)^T]^T$, que é a concatenação dos sinais de entrada e saída do sistema dinâmico.

O processo de identificação *online* consiste em estimar, a cada amostra, as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo. O algoritmo OKID Nebuloso Recursivo (*Recursive Fuzzy Observer/Kalman filter Identification*) é utilizado para identificar os parâmetros de Markov correspondentes aos modelos no espaço de estados a cada amostra. O Algoritmo de Realização de Autossistema Nebuloso (*Fuzzy ERA - Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm*) é utilizado para identificar, com base nos parâmetros de Markov, as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \Big|_{i=1, \dots, R_k}$ dos modelos no espaço de estados a cada amostra. A implementação recursiva do método OKID/ERA Nebuloso requer um processo inicial de treinamento em batelada com as primeiras $N_t \in \mathbb{N}^*$ amostras do fluxo de dados $\mathbf{X}$, após o qual as demais $N - N_t$ amostras são utilizadas para teste em aprendizagem *online*, em que $N \in \mathbb{N}^*$ é a quantidade de amostras do conjunto de dados em fluxo $\mathbf{X}$. O método OKID/ERA é amplamente utilizado em aplicações de modelagem de séries temporais e identificação de sistemas (GAGG et al., 2014; SÁNCHEZ; COUSO; GONZÁLEZ, 2014), bem como a sua versão nebulosa recursiva (TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2020; GOMES; SERRA, 2024). A

formulação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo para a identificação paramétrica *online* das matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \big|_{i=1, \dots, R}$ é apresentada no Apêndice A.

Para o desempenho quantitativo do algoritmo no agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* dos sistemas dinâmicos do mundo real, são considerados os seguintes índices de estimação: a Raiz Média Quadrática do Erro RMSE (*Root Mean Square Error*) (COBANER, 2011), o Índice de Erro Não Dimensional NDEI (*Non-Dimensional Error Index*) (RODRIGUES; SILVA; LEMOS, 2022), o Coeficiente de Correlação de Pearson CCP (ou PCC - *Pearson Correlation Coefficient*) (IYER; PRASAD; QUEK, 2018), o Coeficiente de Determinação CD (*Coefficient of Determination*) (ASHRAFI; PRASAD; QUEK, 2020), e o Índice de Ajuste FIT (*Fit index*) (SANTOS, 2018). O RMSE $\in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (e_k)^2}, \quad (5.3)$$

em que $e_k \in \mathbb{R}$ dado por

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \quad (5.4)$$

é o erro de estimação na k -ésima amostra, $y_k \in \mathbb{R}$ é a variável a ser estimada na k -ésima amostra, $\hat{y}_k \in \mathbb{R}$ é a estimativa de y_k na k -ésima amostra, e N é o número de observações da variável y_k . Quanto menor o valor de RMSE, melhor o resultado de estimação da variável y_k . O NDEI $\in \mathbb{R}_+$ é dado por:

$$\text{NDEI} = \frac{\text{RMSE}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\hat{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right)^2}}, \quad (5.5)$$

ou seja, pela razão entre o RMSE e o desvio padrão de $\hat{y}_k$. Quanto menor o valor do NDEI, menor é o erro de estimação em relação ao desvio padrão da variável estimada $\hat{y}_k$, e melhor é o resultado da estimação de y_k . O CCP $\in [-1, 1]$ é dado por:

$$\text{CCP} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\left(y_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right) \left(\hat{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right) \right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\hat{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{y}_j \right)^2}}, \quad (5.6)$$

ou seja, é a covariância entre as variáveis y_k e $\hat{y}_k$ dividida pelo produto dos seus desvios padrão. Quanto maior o valor de CCP (mais próximo de 1), maior é a correlação entre y_k e $\hat{y}_k$, e melhor a estimação da variável y_k . O CD $\in [0, 1]$ é dado por:

$$\text{CD} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=1}^N \left(y_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right)^2}, \quad (5.7)$$

ou seja, é a razão entre o erro quadrático médio de estimação e a variância de y_k , subtraída da unidade. Quanto maior o valor de CD (mais próximo de 1), maior é a proporção da variabilidade de y_k que é explicada pela variável estimada $\hat{y}_k$, e melhor a estimação de y_k . O FIT $\in [0, 1]$ é dado por:

$$\text{FIT} = 1 - \frac{\left\| [y_1 \cdots y_k \cdots y_N]^T - [\hat{y}_1 \cdots \hat{y}_k \cdots \hat{y}_N]^T \right\|}{\left\| [y_1 \cdots y_k \cdots y_N]^T - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k) [1 \cdots 1 \cdots 1]^T \right\|}, \quad (5.8)$$

ou seja, pela razão entre a norma do vetor de erros residuais e a norma do vetor de variabilidade total de y_k , subtraída da unidade. Quanto maior o valor do FIT (mais próximo de 1), maior é o ajuste da variável y_k a partir da variável estimada $\hat{y}_k$, e melhor é a estimação de y_k .

5.2 Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação *On-line* da Planta Térmica

A Planta Térmica é composta por uma torradeira monofásica de 220 V AC com um intervalo de temperatura de 25 °C a 250 °C, que tem sido amplamente estudada na literatura (SERRA, 2020; SANTOS, 2018; COSTA; SERRA, 2017; ROCHA FILHO, 2017; SILVA; SERRA, 2014), e seu ambiente experimental pode ser visualizado na Figura 73.



Figura 73 – Ambiente experimental de planta térmica composta por uma torradeira monofásica de 220 V AC com um intervalo de temperatura de 25 °C a 250 °C. Fonte: Rocha Filho (2017).

A Planta Térmica tem como variável de entrada $u_k \in \mathbb{R}$ a tensão de excitação AC em Volts na k -ésima amostra, e como variável de saída $y_k \in \mathbb{R}$ a temperatura em °C na k -ésima amostra. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra

é $\mathbf{x}_k = [u_k \ y_k]^T \in \mathbb{R}^2$. O conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 1000}$ da Planta Térmica consiste em $N = 1000$ amostras coletadas com um período de amostragem $T_S = 3$ s, das quais $N_t = 20$ amostras são utilizadas para treinamento, e as demais $N - N_t = 980$ amostras são utilizadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,50$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,10$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 2,00$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número α_H de blocos de linhas e o número β_H de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_H = \beta_H = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,99$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 2$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 2$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes da Planta Térmica, são ilustrados nas Figuras 74-76 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 74 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, e aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo. A Figura 74a mostra a tensão de entrada u_k da Planta Térmica, a qual é composta de um sinal multi-degrau, e a temperatura de saída y_k da Planta Térmica, em função da amostra k . O valor mínimo da tensão u_k é $-0,0455$ V para $k = 2$, e o seu valor máximo é $157,9820$ V para $k = 473$. O valor mínimo da temperatura y_k é $25,8765$ °C para $k = 1$, e o seu valor máximo é $199,6180$ °C para $k = 599$. A Figura 74b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k apresenta uma variação suave, iniciando com 1 grupo e finalizando com o valor de 8 grupos. A Figura 74c mostra a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática da Planta Térmica em “linha tracejada preta”, os dados no estado estacionário em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas

tracejadas vermelhas”, sendo a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final computada conforme a Equação (4.3). Os dados em estado estacionário da Planta Térmica são os 8 pares de entrada e saída relacionados às amostras $k \in \{1, 151, 301, 451, 601, 726, 851, 1000\}$ para a tensão u_k e a temperatura y_k na Figura 74a. A curva estática da Planta Térmica na Figura 74c deriva da interpolação linear desses 8 dados em estado estacionário. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 8 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ que estão próximos dos dados em estado estacionário da Planta Térmica. Uma vez que dados em estado estacionário são fundamentais para compreender o comportamento de sistemas dinâmicos, tem-se que o algoritmo tem identificado centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ significativos para a planta térmica experimental. Pode-se ver que os protótipos dos grupos são consistentes com o comportamento da curva estática da Planta Térmica. A Figura 74d mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresenta em geral um comportamento crescente para cada sinal em degrau aplicado à tensão de entrada u_k , de modo que maiores valores de $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ são computados para dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ mais próximos do estado estacionário. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $9,5758 \times 10^{-175}$ para $k = 2$ e $k = 3$, e o seu valor máximo é 0,8444 para $k = 726$.

A Figura 75 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica com relação à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, e à variação dos raios dos grupos. A Figura 75a mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento crescente e ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e tendem a decrescer suavemente em direção a valores no intervalo $[0,40, 0,65]$ quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^8}$ do centro normalizado do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor máximo 0,7734 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^2}$ do centro normalizado do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo 0,4654 da partição final. A Figura 75b mostra as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática da Planta Térmica em “linha tracejada preta”, os dados em estado estacionário da Planta Térmica em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Pode-se ver que os centros de grupo são deslocados por grande parte da faixa dos dados $\mathbf{x}_k$. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a

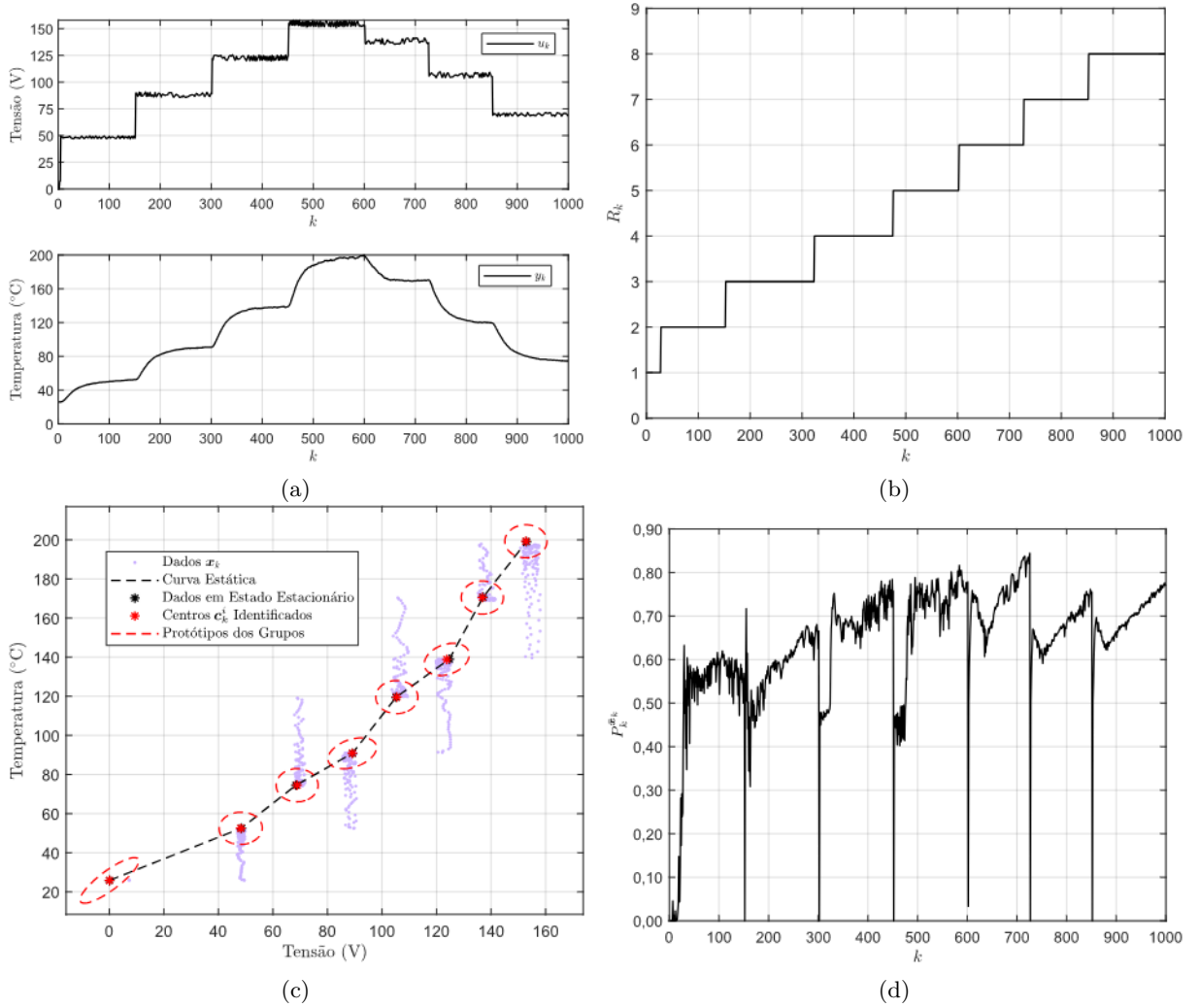


Figura 74 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes da Planta Térmica: (a) Variável de entrada (tensão u_k) e variável de saída (temperatura y_k) da Planta Térmica em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$), em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática da Planta Térmica em “linha tracejada preta”, os dados no estado estacionário em “asteriscos pretos”, os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

dados x_k com altos valores de potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ (ver Figura 74d). A Figura 75c mostra a variação dos suportes $S_k^i | i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os suportes $S_k^i | i=1, \dots, R_k$ apresentam um comportamento crescente com alta inclinação após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i | i=1, \dots, R_k$, e tendem a estabilizar com comportamento constante quando os grupos seguintes são identificados no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor máximo da partição final igual a 171 dados, enquanto o suporte S_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo da partição final igual a 27 dados. A Figura 75d

mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,20]$ (exceto o raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1). Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,10$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,3952 da partição final, enquanto o raio ε_k^8 do oitavo grupo Θ_k^8 alcança o valor mínimo 0,0310 da partição final.

A Figura 76 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica com relação à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. A Figura 76a mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 75c) e seus centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 75a), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,15, 0,45]$. As sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ também apresentam em geral um comportamento ruidoso após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, influenciadas conforme a Equação (3.85) pelos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ mostrados na Figura 75a, enquanto o fluxo de dados $\mathbf{X}$ permanece nas suas zonas de operação, e esse comportamento tende a desaparecer quando o fluxo de dados $\mathbf{X}$ é direcionado para outras zonas de operação. A sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,4102 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,1895 da partição final. A Figura 76b mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que geralmente há uma predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos, que se alternam no fluxo de dados $\mathbf{X}$ na sequência em que são criados. A Figura 76c mostra os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$

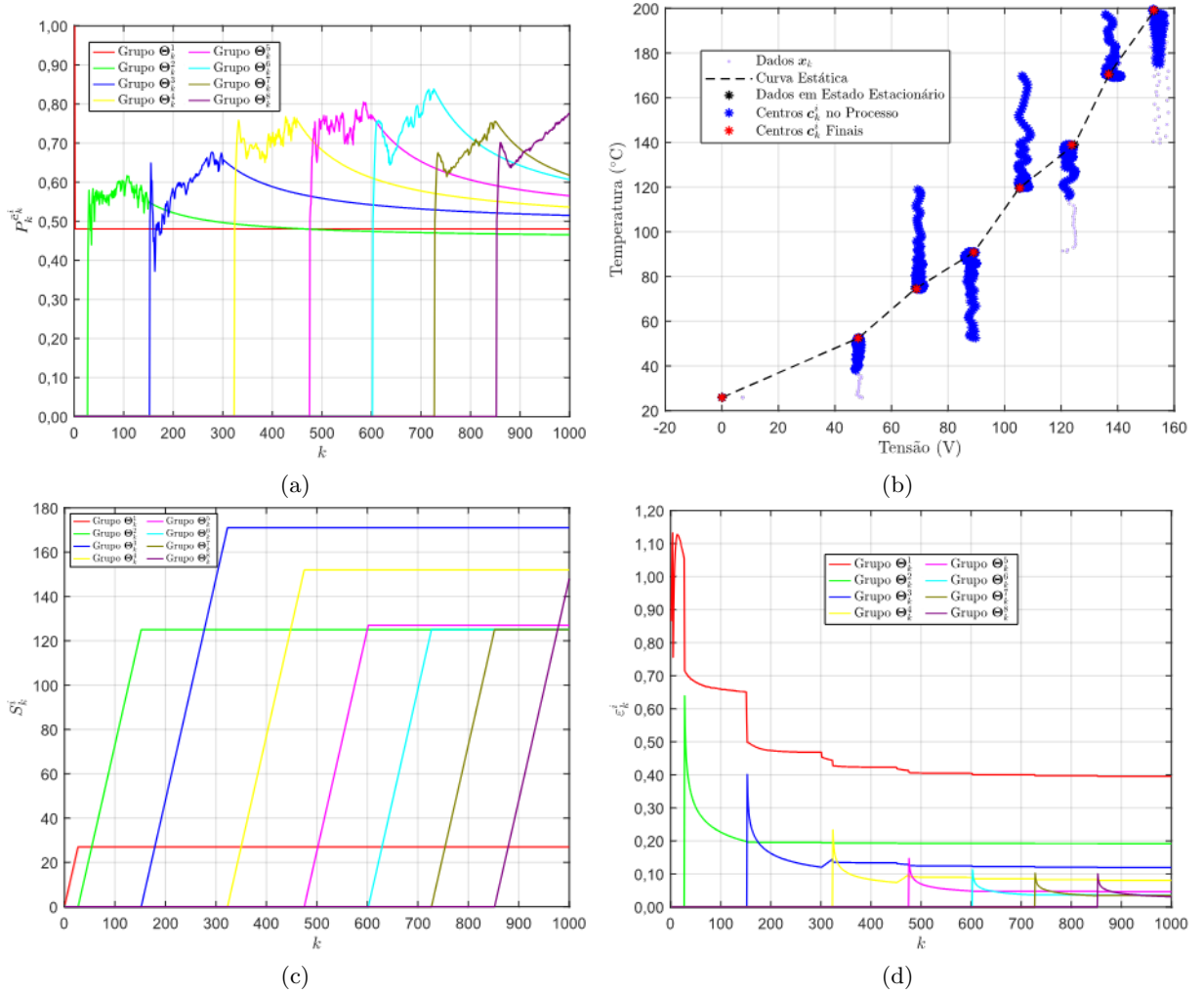


Figura 75 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes da Planta Térmica: (a) Variação dos potenciais P_k^i $|i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i$ $|i=1, \dots, R_k$ dos grupos Θ_k^i $|i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, a curva estática da Planta Térmica em “linha tracejada preta”, os dados em estado estacionário da Planta Térmica em “asteriscos pretos”, os centros de grupo c_k^i $|i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo c_k^i $|i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (c) Variação dos suportes S_k^i $|i=1, \dots, R_k$ dos grupos Θ_k^i $|i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos raios ε_k^i $|i=1, \dots, R_k$ dos grupos Θ_k^i $|i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”, sendo o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final computado conforme a Equação (4.2). Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i$ $|i=1, \dots, R_N$ que são adaptativos em relação aos dados x_k e aos grupos Θ_k^i $|i=1, \dots, R_k$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros

grupos. A Figura 76d mostra os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Pode-se ver que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

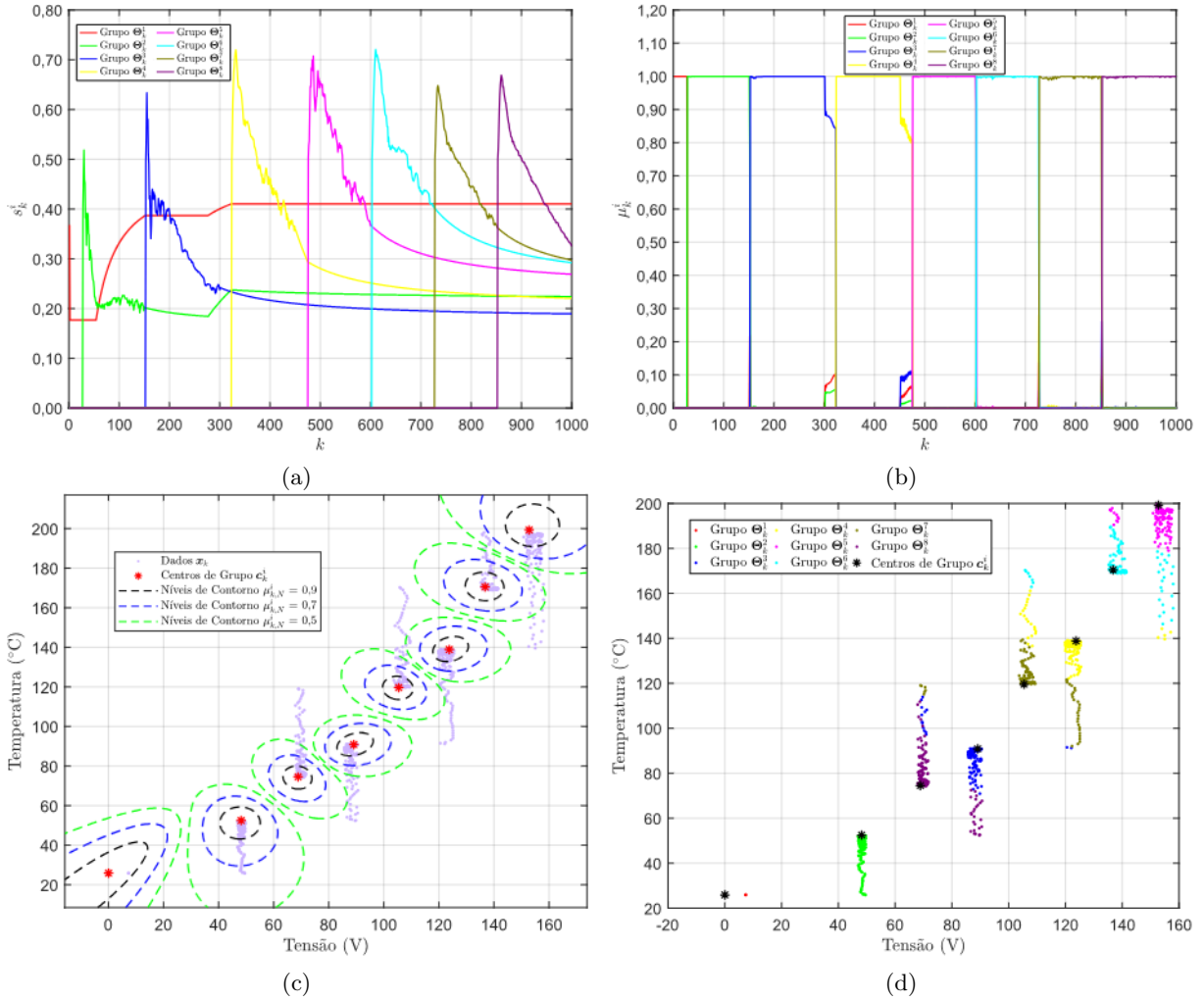


Figura 76 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes da Planta Térmica: (a) Variação das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid k=N, i=1, \dots, R_k$ da partição final, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”; (d) Dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de identificação *online* da Planta Térmica, a Figura 77 ilustra seu desempenho com relação à estimação da temperatura de

saída, ao erro de estimação da temperatura de saída, e à variação do RMSE na estimação da temperatura de saída. A Figura 77a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da temperatura y_k da Planta Térmica, em que a temperatura y_k é ilustrada em “linha preta”, e a temperatura estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da temperatura y_k da Planta Térmica. A Figura 77b mostra o desempenho do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da temperatura y_k da Planta Térmica, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 1,2716 °C na amostra $k = 580$, e o valor absoluto mínimo de 0,0004 °C na amostra $k = 864$. O RMSE apresenta, próximo a 0,2000 °C, alternância entre fases de decrescimento e de crescimento, tendo em geral baixa variação, e alcançando o valor final de 0,2275 °C. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 0,2483 °C na amostra $k = 663$, e seu valor mínimo é 0,1069 °C na amostra $k = 27$.

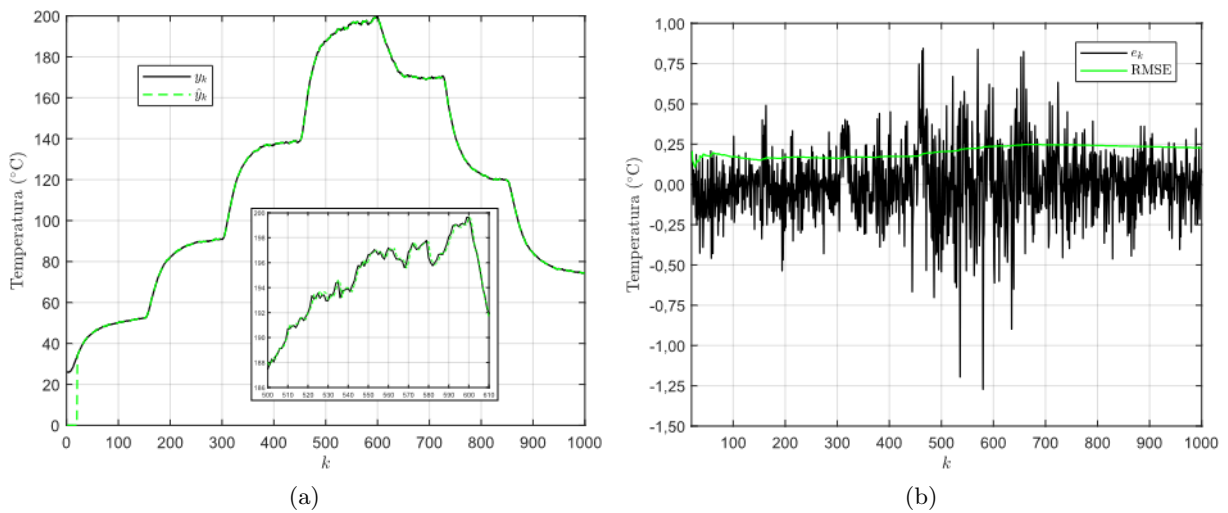


Figura 77 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* da Planta Térmica: (a) Estimação de temperatura de saída, em que a temperatura y_k da Planta Térmica é ilustrada em “linha preta”, e a temperatura estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de temperatura de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da temperatura y_k da Planta Térmica é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

O desempenho quantitativo do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* da Planta Térmica é mostrado na Tabela 19, no qual o tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o número final de grupos R_N , o RMSE, o NDEI, o CCP, o CD, e o FIT são fornecidos. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo tem alcançado 0,3389 s. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o algoritmo tem alcançado 4,1771 s. Com relação ao número final de grupos, o algoritmo tem alcançado $R_N = 8$. Com relação ao RMSE na estimação da temperatura, o algoritmo tem alcançado RMSE = 0,2275 °C. Com

relação ao NDEI na estimação da temperatura, o algoritmo tem alcançado $NDEI = 0,0047$. Com relação ao CCP na estimação da temperatura, o algoritmo tem alcançado $CCP = 1,0000$. Com relação ao CD na estimação da temperatura, o algoritmo tem alcançado $CD = 1,0000$. Com relação ao FIT na estimação da temperatura, o algoritmo tem alcançado $FIT = 0,9953$.

Tabela 19 – Desempenho do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* da Planta Térmica, em termos do tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, do tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, do número final de grupos R_N , do RMSE, do NDEI, do CCP, do CD, e do FIT.

Planta Térmica	
Tempo de Execução para Agrupamento	0,3389 s
Tempo de Execução para Identificação	4,1771 s
R_N	8
Saída	Temperatura
RMSE	0,2275 °C
NDEI	0,0047
CCP	1,0000
CD	1,0000
FIT	0,9953

A partir dos resultados mencionados sobre a identificação da Planta Térmica, pode-se observar que o modelo identificado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto é capaz de extrair, a partir de dados experimentais, as características e complexidades da Planta Térmica, como o comportamento da curva estática baseado nos grupos identificados (Figuras 74-76), e um rastreamento adequado da resposta no tempo (Figura 77 e Tabela 19), o que implica que o algoritmo pode ser útil para fins de controle baseado em modelo no espaço de estados. A representação no espaço de estados para a identificação da Planta Térmica, neste resultado experimental, utilizando o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, expressa a relação entre a variável de entrada (tensão) e a variável de saída (temperatura) da Planta Térmica em uma estrutura compacta com ordem mínima e, conseqüentemente, reduzindo a carga computacional do algoritmo proposto.

5.3 Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação *Online* do Helicóptero 2DoF

O Helicóptero de 2 Graus de Liberdade (2DoF - 2 *Degrees of Freedom*) é um sistema dinâmico não linear multivariável complexo amplamente estudado na literatura

(TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2019; ROCHA FILHO, 2017; SUBRAMANIAN; ELUMALAI, 2016), e pode ser visualizado na Figura 78.



Figura 78 – Sistema dinâmico não linear multivariável composto de helicóptero de 2 graus de liberdade. Fonte: Rocha Filho (2017).

O Helicóptero 2DoF possui duas variáveis de entrada (a tensão do motor de arfagem $u_k^1 \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em Volts e a tensão do motor de guinada $u_k^2 \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em Volts) e duas variáveis de saída (o ângulo de arfagem $y_k^1 \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em graus e o ângulo de guinada $y_k^2 \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em graus). O sinal de entrada na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$, e o sinal de saída na k -ésima amostra é $\mathbf{y}_k = [y_k^1 \ y_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T \ (\mathbf{y}_k)^T]^T \in \mathbb{R}^4$. O conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4 \times 1501}$ do Helicóptero 2DoF contém $N = 1501$ amostras, das quais $N_t = 30$ amostras são utilizadas para treinamento, e as demais $N - N_t = 1471$ amostras são utilizadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,03$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,27$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 3,80$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 0,99$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 2$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 4$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do Helicóptero 2DoF, são ilustrados nas Figuras 79-82 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 79 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF com relação à variação do número de grupos e à identificação dos centros e protótipos dos grupos. A Figura 79a mostra as variáveis de entrada (tensão do motor de arfagem u_k^1 e tensão do motor de guinada u_k^2) e as variáveis de saída (ângulo de arfagem y_k^1 e ângulo de guinada y_k^2) do Helicóptero 2DoF em função da amostra k . O valor mínimo da tensão do motor de arfagem u_k^1 é 12,4018 V na amostra $k = 46$, e seu valor máximo é 16,7669 V na amostra $k = 1221$. O valor mínimo da tensão do motor de guinada u_k^2 é -15 V em 240 amostras no fluxo de dados $\mathbf{X}$, e seu valor máximo é 0,7592 V na amostra $k = 288$. O valor mínimo do ângulo de arfagem y_k^1 é $-40,5879^\circ$ na amostra $k = 518$, e seu valor máximo é $28,1426^\circ$ nas amostras $k = 467$ e $k = 468$. O valor mínimo do ângulo de guinada y_k^2 é $-318,0762^\circ$ na amostra $k = 185$, e seu valor máximo é $280,0635^\circ$ na amostra $k = 425$. A Figura 79b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k apresenta uma levemente alta variação, iniciando com 1 grupo, alcançando o valor máximo de 22 grupos na amostra $k = 1145$, e finalizando com o valor de 18 grupos. As Figuras 79c-79d mostram a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ projetados no espaço bidimensional¹, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Na Figura 79c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes à tensão do motor de arfagem u_k^1 e ao ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, enquanto na Figura 79d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^4) correspondentes à tensão

¹ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as coordenadas do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ ($\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 79c e $\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 79d) correspondentes às duas variáveis do Helicóptero 2DoF mostradas nos eixos das Figuras 79c-79d (tensão do motor de arfagem u_k^1 e ângulo de arfagem y_k^1 na Figura 79c e tensão do motor de guinada u_k^2 e ângulo de guinada y_k^2 na Figura 79d), e mantendo as demais coordenadas ($\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 79c e $\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 79d) constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^2 = \bar{c}_N^{i,2}$ e $\bar{x}_k^4 = \bar{c}_N^{i,4}$ na Figura 79c e $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$ e $\bar{x}_k^3 = \bar{c}_N^{i,3}$ na Figura 79d.

do motor de guinada u_k^2 e ao ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 18 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo em geral bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$. Pode-se ver também na Figura 79d que há grupos Θ_k^i cujas coordenadas $c_k^{i,2}$ e $c_k^{i,4}$ (associadas à tensão do motor de guinada u_k^2 e ao ângulo de guinada y_k^2) dos centros $\mathbf{c}_k^i$ apresentam grande proximidade, mas que as coordenadas $c_k^{i,1}$ e $c_k^{i,3}$ (associadas à tensão do motor de arfagem u_k^1 e ao ângulo de arfagem y_k^1) apresentam maior dissimilaridade conforme a Figura 79c, indicando que não há grande sobreposição entre centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na partição final.

A Figura 80 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF com relação aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, e às posições dos centros de grupo no fluxo de dados. A Figura 80a mostra o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ apresenta em geral um comportamento ruidoso com vários picos no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ é $4,4414 \times 10^{-26}$ para $k = 2$ e $k = 3$, e o seu valor máximo é 0,5800 para $k = 190$. A Figura 80b mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente apresentam um comportamento decrescente e por vezes ruidoso, tendendo a valores no intervalo $[0, 0,25]$. O potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^{18}}$ do centro normalizado do décimo oitavo grupo Θ_k^{18} alcança o valor máximo 0,2386 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,0277 da partição final. As Figuras 80c-80d mostram as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Na Figura 80c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes à tensão do motor de arfagem u_k^1 e ao ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, enquanto na Figura 80d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^4) correspondentes à tensão do motor de guinada u_k^2 e ao ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF. Pode-se ver que os centros de grupo são deslocados por grande parte da faixa dos dados $\mathbf{x}_k$. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 80a).

A Figura 81 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento

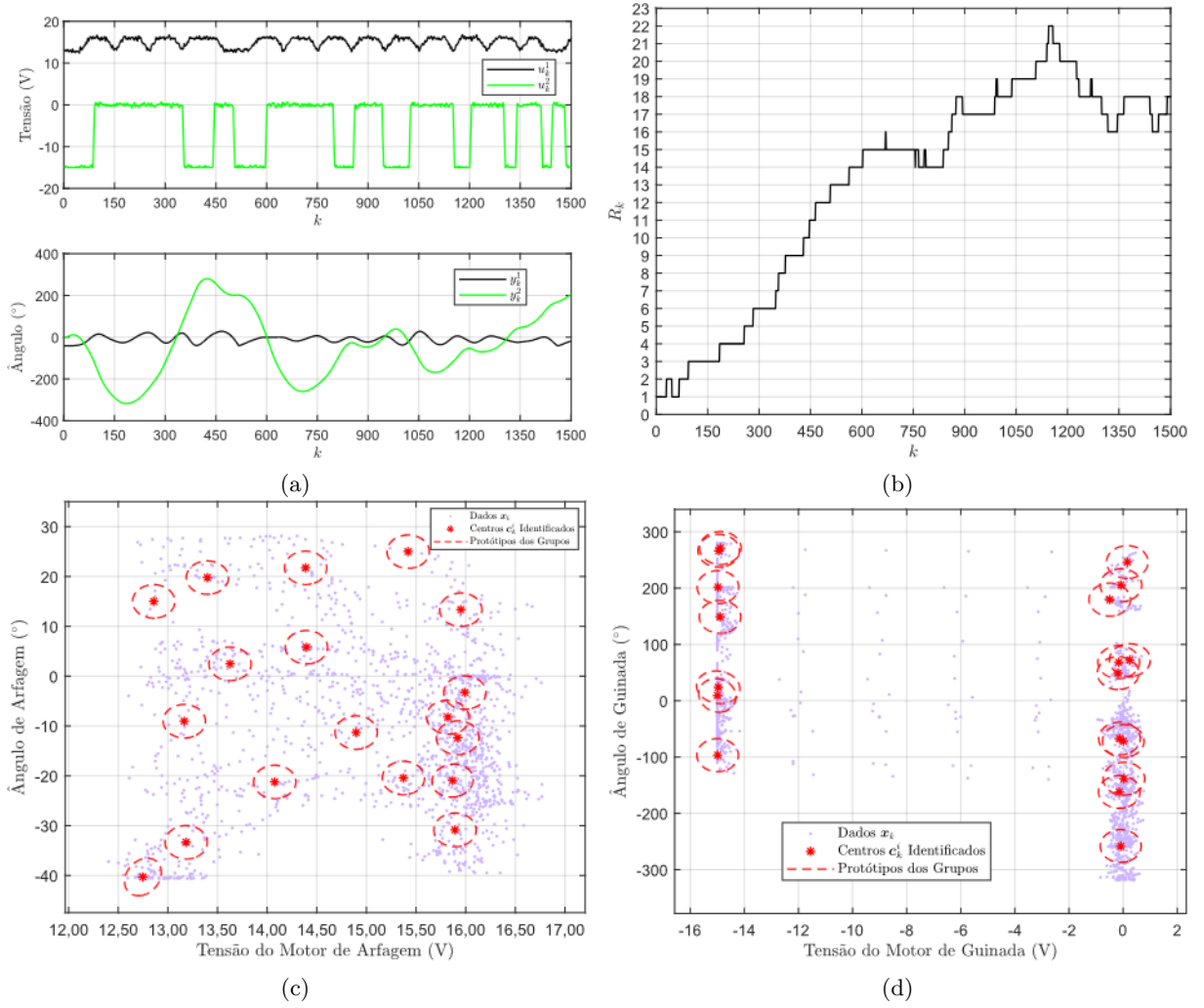


Figura 79 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Variáveis de entrada (tensão do motor de arfagem u_k^1 e tensão do motor de guinada u_k^2) e variáveis de saída (ângulo de arfagem y_k^1 e ângulo de guinada y_k^2) do Helicóptero 2DoF em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Fonte: Autor.

nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF com relação à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, e à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos. A Figura 81a mostra a variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes

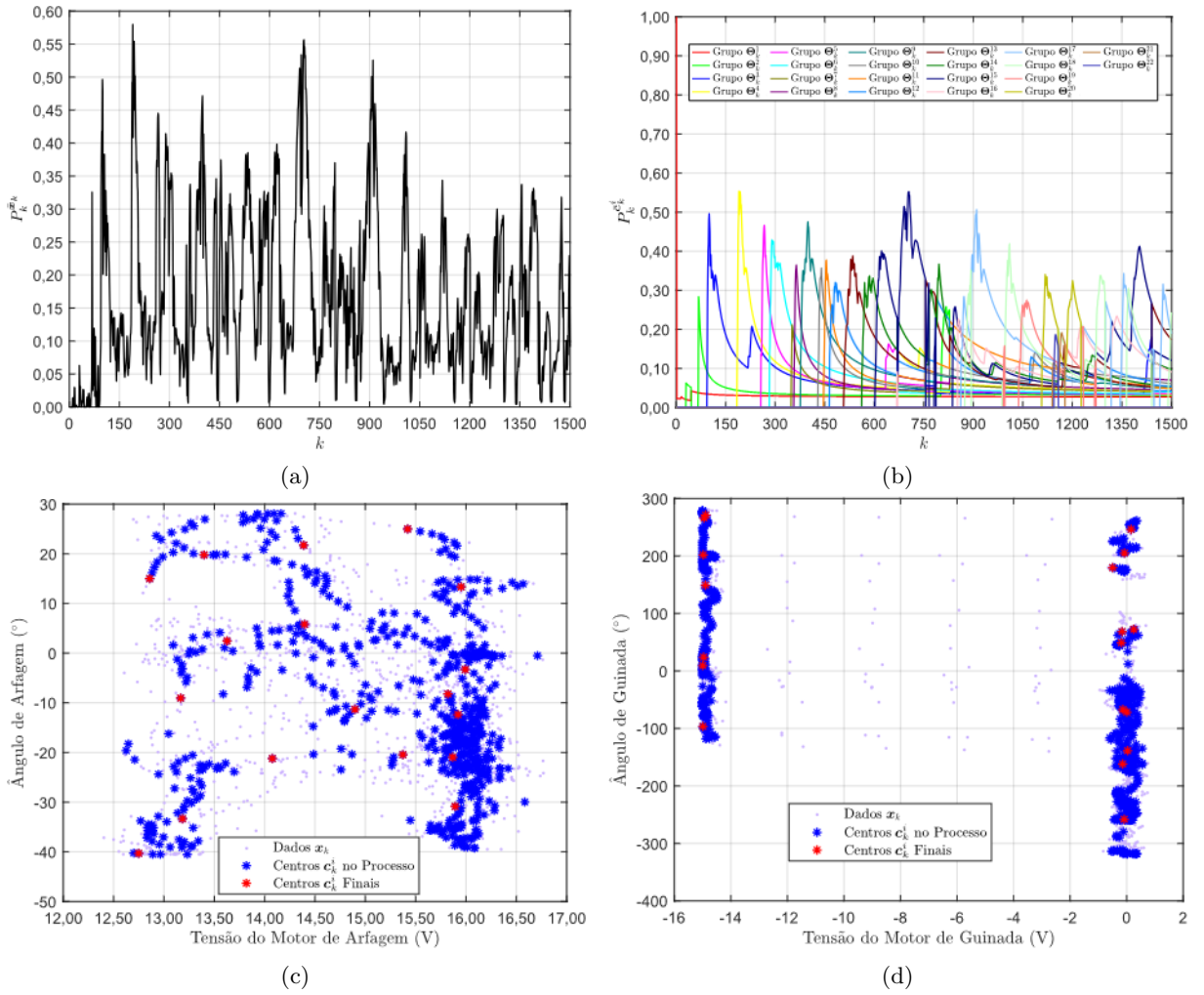


Figura 80 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Potencial $P_k^{\bar{x}}$ dos dados normalizados $\bar{\mathbf{x}}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos potenciais $P_k^{c_i} |_{i=1, \dots, R_k}$ dos centros normalizados $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”; (d) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor.

$S_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ geralmente alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^{13} do décimo terceiro grupo Θ_k^{13} alcança o valor máximo da partição final igual a 523 dados, enquanto o suporte S_k^{18} do décimo oitavo grupo Θ_k^{18} alcança o valor mínimo da partição final igual a 11 dados. A Figura 81b mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ apresentam um

comportamento decrescente após a inicialização dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ representada pelos picos iniciais em seus valores, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,15,0,30]$ (exceto o raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1). Pode-se ver que os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é pequena, e tendem ao valor do decaimento gaussiano $r = 0,27$ à medida que a quantidade de grupos R_k cresce, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor máximo 0,6275 da partição final, enquanto o raio ε_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor mínimo 0,1736 da partição final. A Figura 81c mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 81a) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ (conforme a Figura 80b), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0,0,25]$. A sensibilidade s_k^{18} do décimo oitavo grupo Θ_k^{18} alcança o valor máximo 0,2336 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,0244 da partição final. A Figura 81d mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os graus de pertinência μ_k^i apresentam um comportamento ruidoso durante o fluxo de dados $\mathbf{X}$, e pode-se ver em grande parte períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza), e esporadicamente períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza).

A Figura 82 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF com relação aos níveis de contorno associados às funções de pertinência e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. As Figuras 82a-82b mostram os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional², em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos

² Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as coordenadas do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ ($\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 82a e $\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 82b) correspondentes às duas variáveis do Helicóptero 2DoF mostradas nos eixos das Figuras 82a-82b (tensão do motor de arfagem u_k^1 e ângulo de arfagem y_k^1 na Figura 82a e tensão do motor de guinada u_k^2 e ângulo de guinada y_k^2 na Figura 82b), e mantendo as demais coordenadas ($\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^4$ na Figura 82a e $\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 82b) constantes nos valores correspondentes destas coordenadas dos centros de grupo normalizados $\bar{c}_N^i \big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^2 = \bar{c}_N^{i,2}$ e $\bar{x}_k^4 = \bar{c}_N^{i,4}$ na Figura 82a e $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$ e $\bar{x}_k^3 = \bar{c}_N^{i,3}$ na Figura 82b.

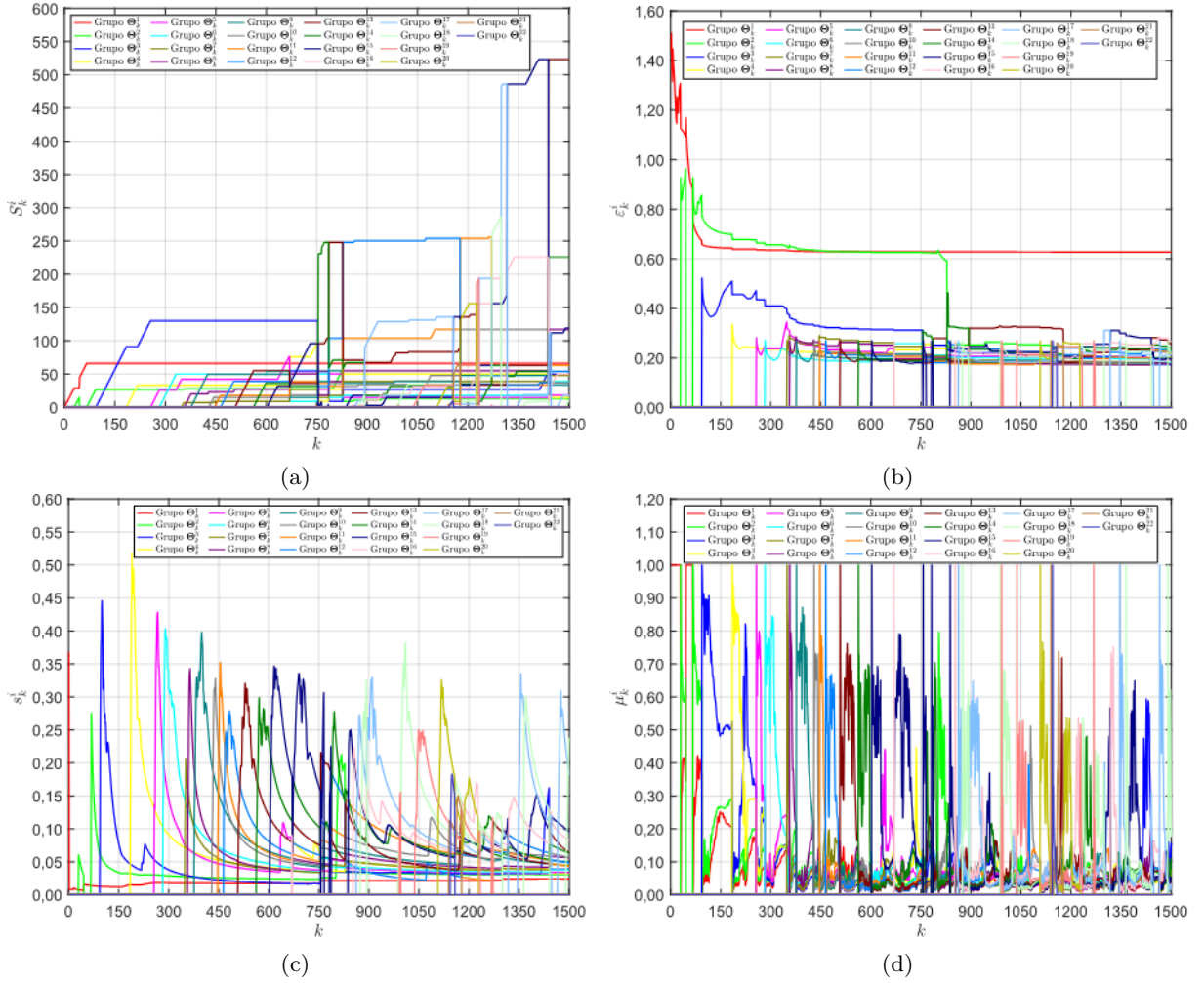


Figura 81 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Variação dos raios $\varepsilon_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Variação das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Na Figura 82a são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes à tensão do motor de arfagem u_k^1 e ao ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, enquanto na Figura 82b são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^4) correspondentes à tensão do motor de guinada u_k^2 e ao ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \mid i=1, \dots, R_N$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. As Figuras 82c-82d mostram os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos

grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Na Figura 82c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes à tensão do motor de arfagem u_k^1 e ao ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF, enquanto na Figura 82d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^4) correspondentes à tensão do motor de guinada u_k^2 e ao ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF. Uma vez que as distâncias entre os dados $\mathbf{x}_k \Big|_{k=1,\dots,N}$ e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ consideram todas as variáveis u_k^1 , u_k^2 , y_k^1 e y_k^2 do Helicóptero 2DoF, tem-se que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de identificação *online* do Helicóptero 2DoF, a Figura 83 ilustra seu desempenho com relação à estimação dos ângulos de saída, ao erro de estimação dos ângulos de saída, e à variação do RMSE na estimação dos ângulos de saída. As Figuras 83a-83b mostram o desempenho do algoritmo com relação à estimação do ângulo de arfagem y_k^1 e do ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF, em que os ângulos y_k^1 e y_k^2 são ilustrados em “linhas pretas”, e os ângulos estimados $\hat{y}_k^1$ e $\hat{y}_k^2$ em “linhas tracejadas verdes”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa do ângulo de arfagem y_k^1 e do ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF. As Figuras 83c-83d mostram o desempenho do algoritmo com relação aos erros $e_k^1 = y_k^1 - \hat{y}_k^1$ e $e_k^2 = y_k^2 - \hat{y}_k^2$ de estimação do ângulo de arfagem y_k^1 e do ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF, ilustrados em “linhas pretas”, bem como à variação dos valores de RMSE associados aos erros e_k^1 e e_k^2 , ilustrados em “linhas verdes”. Os erros e_k^1 e e_k^2 apresentam um comportamento ruidoso e com picos em seus valores durante a estimação *online*. O valor absoluto máximo do erro e_k^1 é $1,2285^\circ$ na amostra $k = 518$, e seu valor absoluto mínimo é $0,00003^\circ$ na amostra $k = 1389$. O valor absoluto máximo do erro e_k^2 é $0,3312^\circ$ na amostra $k = 34$, e seu valor absoluto mínimo é $0,00007^\circ$ na amostra $k = 289$. O valor do RMSE associado ao erro e_k^1 apresenta um comportamento constante em grande parte da estimação, com algumas fases de crescimento. O valor máximo do RMSE associado ao erro e_k^1 no processo de estimação *online* é $0,1089^\circ$ na amostra $k = 556$, seu valor mínimo é $0,0071^\circ$ na amostra $k = 31$, e seu valor final é $0,0893^\circ$. O valor do RMSE associado ao erro e_k^2 apresenta um pico no início da estimação com um posterior decrescimento suave até a amostra $k = 378$, e então apresenta baixa variação em torno de $0,0600^\circ$. O valor máximo do RMSE associado ao erro e_k^2 no processo de estimação *online* é $0,2394^\circ$ na amostra $k = 34$, seu valor mínimo é $0,0499^\circ$ na amostra $k = 378$, e seu valor final é $0,0512^\circ$.

O desempenho quantitativo do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* do Helicóptero 2DoF é mostrado na Tabela 20, no qual o tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o tempo de execução

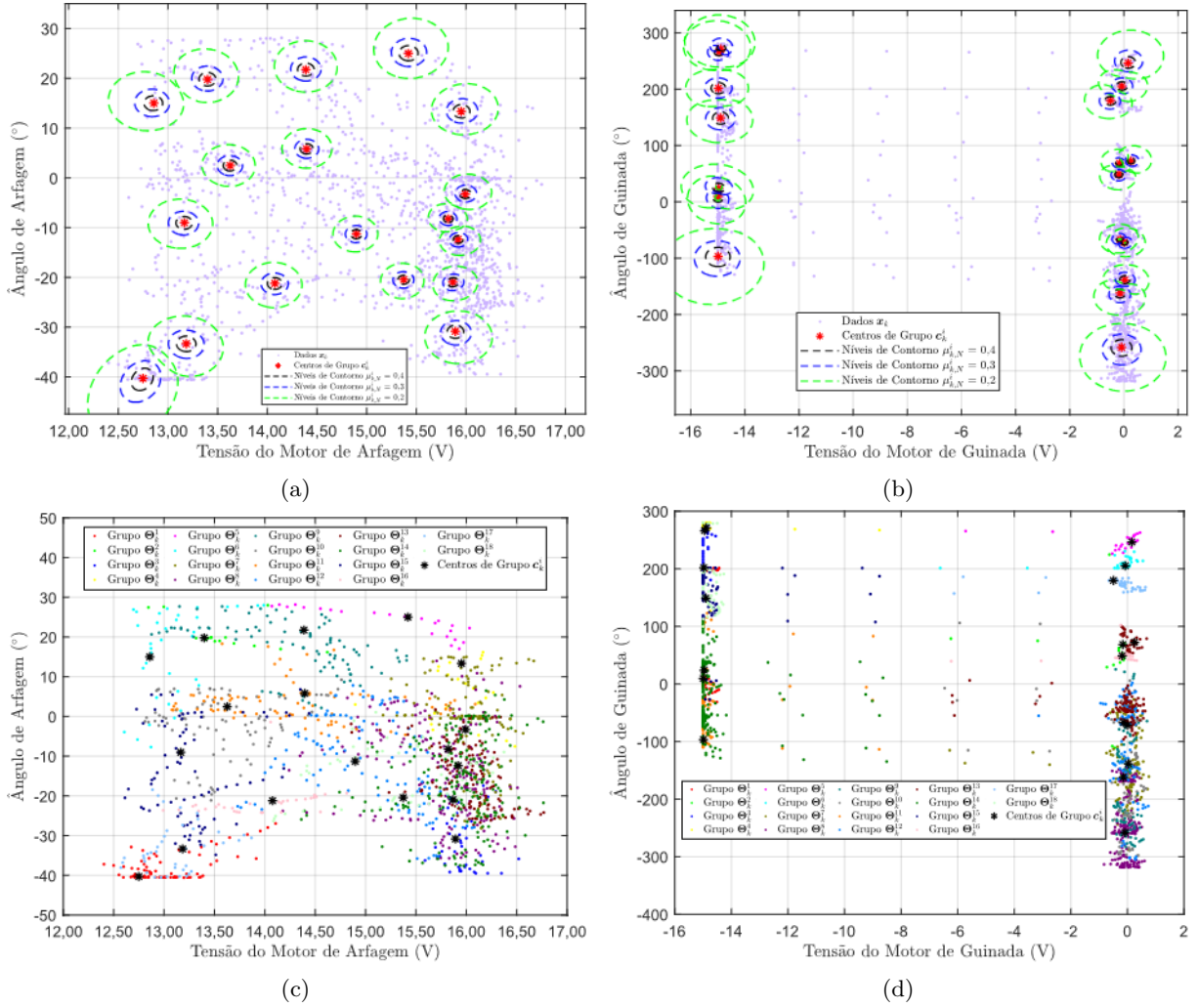


Figura 82 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do Helicóptero 2DoF: (a) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 , em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 , em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,4$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,3$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,2$ em “linhas tracejadas verdes”; (c) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base na tensão do motor de arfagem u_k^1 e no ângulo de arfagem y_k^1 , em que os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ são ilustrados em “asteriscos pretos”; (d) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base na tensão do motor de guinada u_k^2 e no ângulo de guinada y_k^2 , em que os centros de grupo $c_k^i | i=1, \dots, R_k$ são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

para a tarefa de identificação *online*, o número final de grupos R_N , o RMSE, o NDEI, o CCP, o CD, e o FIT são fornecidos. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo tem alcançado 2,0264 s. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o algoritmo tem alcançado 15,2555 s. Com relação ao número final de grupos, o algoritmo tem alcançado $R_N = 18$. Com

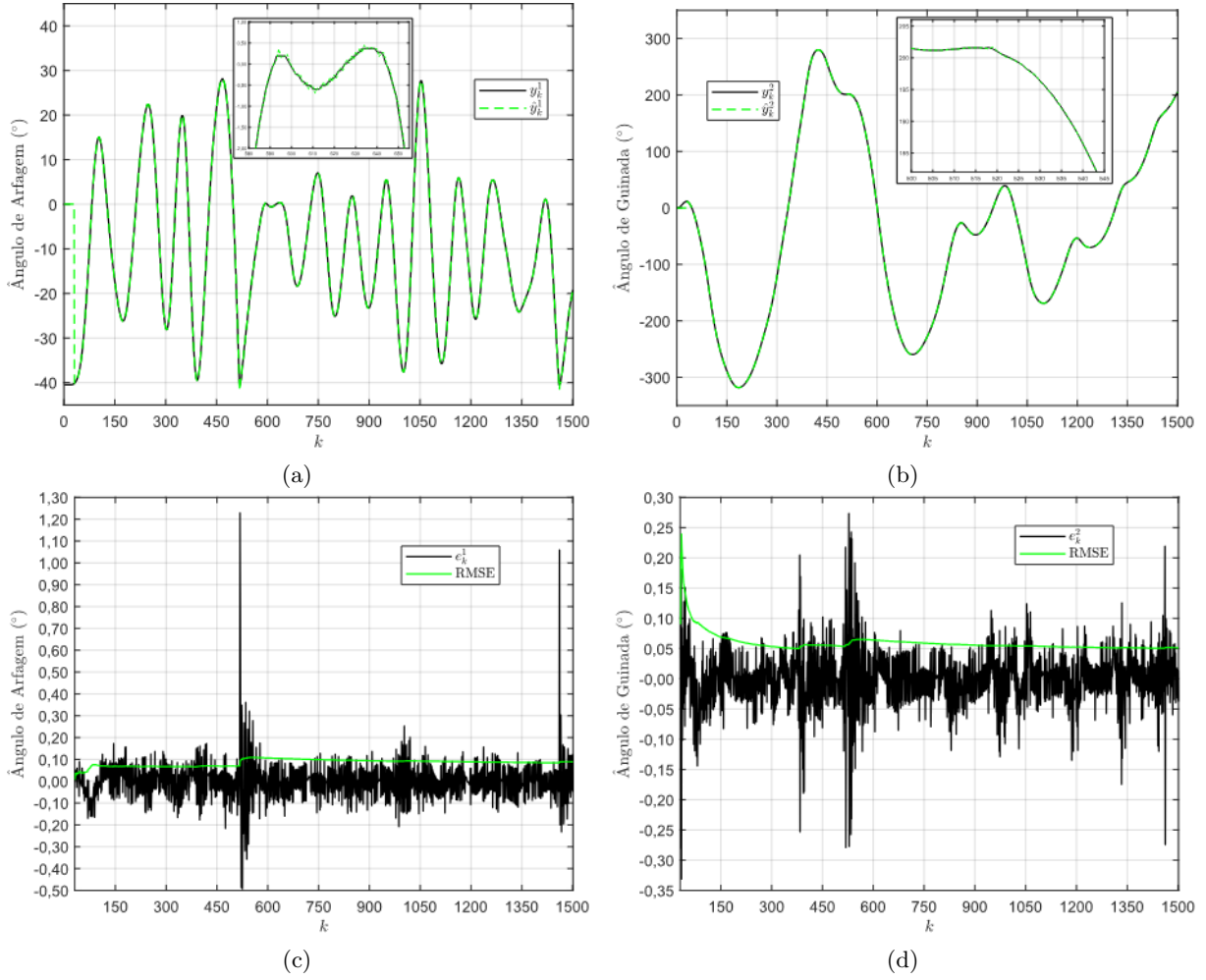


Figura 83 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do Helicóptero 2DoF: (a) Estimação de ângulo de arfagem, em que o ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o ângulo de arfagem estimado $\hat{y}_k^1$ em “linha tracejada verde”; (b) Estimação de ângulo de guinada, em que o ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o ângulo de guinada estimado $\hat{y}_k^2$ em “linha tracejada verde”; (c) Erro de estimação de ângulo de arfagem, em que o erro $e_k^1 = y_k^1 - \hat{y}_k^1$ de estimação do ângulo de arfagem y_k^1 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^1 em “linha verde”; (d) Erro de estimação de ângulo de guinada, em que o erro $e_k^2 = y_k^2 - \hat{y}_k^2$ de estimação do ângulo de guinada y_k^2 do Helicóptero 2DoF é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k^2 em “linha verde”. Fonte: Autor.

relação ao RMSE na estimação do ângulo de arfagem, o algoritmo tem alcançado RMSE = 0,0893°. Com relação ao RMSE na estimação do ângulo de guinada, o algoritmo tem alcançado RMSE = 0,0512°. Com relação ao NDEI na estimação do ângulo de arfagem, o algoritmo tem alcançado NDEI = 0,0055. Com relação ao NDEI na estimação do ângulo de guinada, o algoritmo tem alcançado NDEI = 0,0003. Com relação ao CCP na estimação do ângulo de arfagem, o algoritmo tem alcançado CCP = 1,0000. Com relação ao CCP na estimação do ângulo de guinada, o algoritmo tem alcançado CCP = 1,0000. Com relação ao CD na estimação do ângulo de arfagem, o algoritmo tem alcançado CD = 1,0000. Com relação ao CD na estimação do ângulo de guinada, o algoritmo tem alcançado CD = 1,0000. Com relação ao FIT na estimação do ângulo de arfagem, o algoritmo tem alcançado FIT

= 0,9945. Com relação ao FIT na estimação do ângulo de guinada, o algoritmo tem alcançado $FIT = 0,9997$.

Tabela 20 – Desempenho do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* do Helicóptero 2DoF, em termos do tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, do tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, do número final de grupos R_N , do RMSE, do NDEI, do CCP, do CD, e do FIT.

Helicóptero 2DoF		
Tempo de Execução para Agrupamento	2,0264 s	
Tempo de Execução para Identificação	15,2555 s	
R_N	18	
Saída	Ângulo de Arfagem	Ângulo de Guinada
RMSE	0,0893°	0,0512°
NDEI	0,0055	0,0003
CCP	1,0000	1,0000
CD	1,0000	1,0000
FIT	0,9945	0,9997

A partir dos resultados mencionados sobre a identificação do Helicóptero 2DoF, pode-se observar que o modelo identificado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto é capaz de extrair, a partir de dados experimentais, as características e complexidades do Helicóptero 2DoF, a partir de grupos representativos e bem distribuídos em relação à faixa operacional dos dados (Figuras 79-82), e um rastreamento adequado da resposta no tempo (Figura 83 e Tabela 20), o que implica que o algoritmo pode ser útil para fins de controle baseado em modelo no espaço de estados. A representação no espaço de estados para a identificação do Helicóptero 2DoF, neste resultado experimental, utilizando o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, expressa a relação entre as variáveis de entrada (tensão do motor de arfagem e tensão do motor de guinada) e as variáveis de saída (ângulo de arfagem e ângulo de guinada) do Helicóptero 2DoF em uma estrutura compacta com ordem mínima e, conseqüentemente, reduzindo a carga computacional do algoritmo proposto.

5.4 Agrupamento Nebuloso Evolutivo Aplicado à Identificação *Online* do Foguete Fogtrein-I

Os Foguetes Fogtrein-I (Foguete de Treinamento - Intermediário) são veículos de porte médio da família de foguetes de treinamento brasileiros, projetados pelo Comando da Aeronáutica (COMAER) e pela Avibras (empresa brasileira). Esses veículos são desenvolvidos para testes, qualificação e treinamento em condições adversas (PIRES; SERRA,

2018). O Foguete Fogtrein-I considerado neste resultado experimental possui um diâmetro de 0,3 m e um comprimento de 5,4 m, e pode ser visualizado na Figura 84.



Figura 84 – Foguete Fogtrein-I projetado pelo Comando da Aeronáutica (COMAER) e pela Avibras (empresa brasileira). Fonte: Pires e Serra (2018).

O conjunto de dados a partir de um experimento com o foguete inclui duas variáveis de entrada (o ângulo de arfagem $u_k^1 \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em graus e o ângulo de guinada $u_k^2 \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em graus) e uma variável de saída (a altura do foguete $y_k \in \mathbb{R}$ na k -ésima amostra em quilômetros). O sinal de entrada na k -ésima amostra é $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2]^T \in \mathbb{R}^2$. O dado para agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra é $\mathbf{x}_k = [(\mathbf{u}_k)^T \ y_k]^T \in \mathbb{R}^3$. O conjunto de dados $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times 4358}$ consiste em $N = 4358$ amostras, das quais $N_t = 100$ amostras são utilizadas para treinamento e as demais $N - N_t = 4258$ amostras são utilizadas para teste.

Na implementação do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto, o peso multivariável γ é atribuído como $\gamma = 0,06$, o decaimento gaussiano r é atribuído como $r = 0,01$ e o grau de incerteza m é atribuído como $m = 2,60$. Na implementação do método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, o número $\alpha_{\mathbf{H}}$ de blocos de linhas e o número $\beta_{\mathbf{H}}$ de blocos de colunas das matrizes de Hankel são atribuídos como $\alpha_{\mathbf{H}} = \beta_{\mathbf{H}} = 10$, o fator de esquecimento $\tilde{\lambda}$ na estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador é atribuído como $\tilde{\lambda} = 1,00$, e o número p de parâmetros de Markov identificados é atribuído como $p = 2$, levando a modelos no espaço de estados de ordem $n_z^i = 2$ para $i = 1, \dots, R_k$.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do Foguete Fogtrein-I, são ilustrados nas Figuras 85-88 os seus aspectos de desempenho com relação à variação do número de grupos, à identificação dos centros e protótipos dos grupos, aos potenciais dos dados normalizados, à variação dos

potenciais dos centros de grupo normalizados, às posições dos centros de grupo no fluxo de dados, à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos, aos níveis de contorno associados às funções de pertinência, e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência.

A Figura 85 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I com relação à variação do número de grupos e à identificação dos centros e protótipos dos grupos. A Figura 85a mostra as variáveis de entrada (ângulo de arfagem u_k^1 e ângulo de guinada u_k^2) e a variável de saída (altura y_k) do Foguete Fogtrein-I em função da amostra k . O valor mínimo do ângulo de arfagem u_k^1 é $-0,3763^\circ$ na amostra $k = 4273$, e seu valor máximo é $45,9481^\circ$ nas amostras $k \in \{1430, \dots, 1433\}$. O valor mínimo do ângulo de guinada u_k^2 é $0,0045^\circ$ na amostra $k = 2946$, e seu valor máximo é $359,9962^\circ$ na amostra $k = 2945$. O valor mínimo da altura y_k é 30 km nas amostras $k \in \{1, \dots, 61\}$, e seu valor máximo é 90,5360 km na amostra $k = 4296$. A Figura 85b mostra a variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . A partir do algoritmo, o número de grupos R_k apresenta uma variação suave, iniciando com 1 grupo e finalizando com o valor de 6 grupos. As Figuras 85c-85d mostram a identificação dos centros $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ e protótipos dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na partição final ($k = N$), em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos finais dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ projetados no espaço bidimensional³, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”. Na Figura 85c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de arfagem u_k^1 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I, enquanto na Figura 85d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de guinada u_k^2 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado na partição final 6 centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ bem distribuídos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$, assim como protótipos de grupo em geral bem associados à distribuição dos dados $\mathbf{x}_k$.

A Figura 86 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I com relação aos potenciais dos dados normalizados disponibilizados em fluxo, à variação dos potenciais dos centros de grupo normalizados, e às posições dos centros de grupo no fluxo de dados.

³ Para a ilustração dos protótipos projetados no espaço bidimensional, a distância $\bar{D}_{k,N}^i$ na partição final é computada conforme a Equação (4.3) variando apenas as coordenadas do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ ($\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 85c e $\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 85d) correspondentes às duas variáveis do Foguete Fogtrein-I mostradas nos eixos das Figuras 85c-85d (ângulo de arfagem u_k^1 e altura y_k na Figura 85c e ângulo de guinada u_k^2 e altura y_k na Figura 85d), e mantendo a outra coordenada ($\bar{x}_k^2$ na Figura 85c e $\bar{x}_k^1$ na Figura 85d) constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \big|_{i=1, \dots, R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^2 = \bar{c}_N^{i,2}$ na Figura 85c e $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$ na Figura 85d.

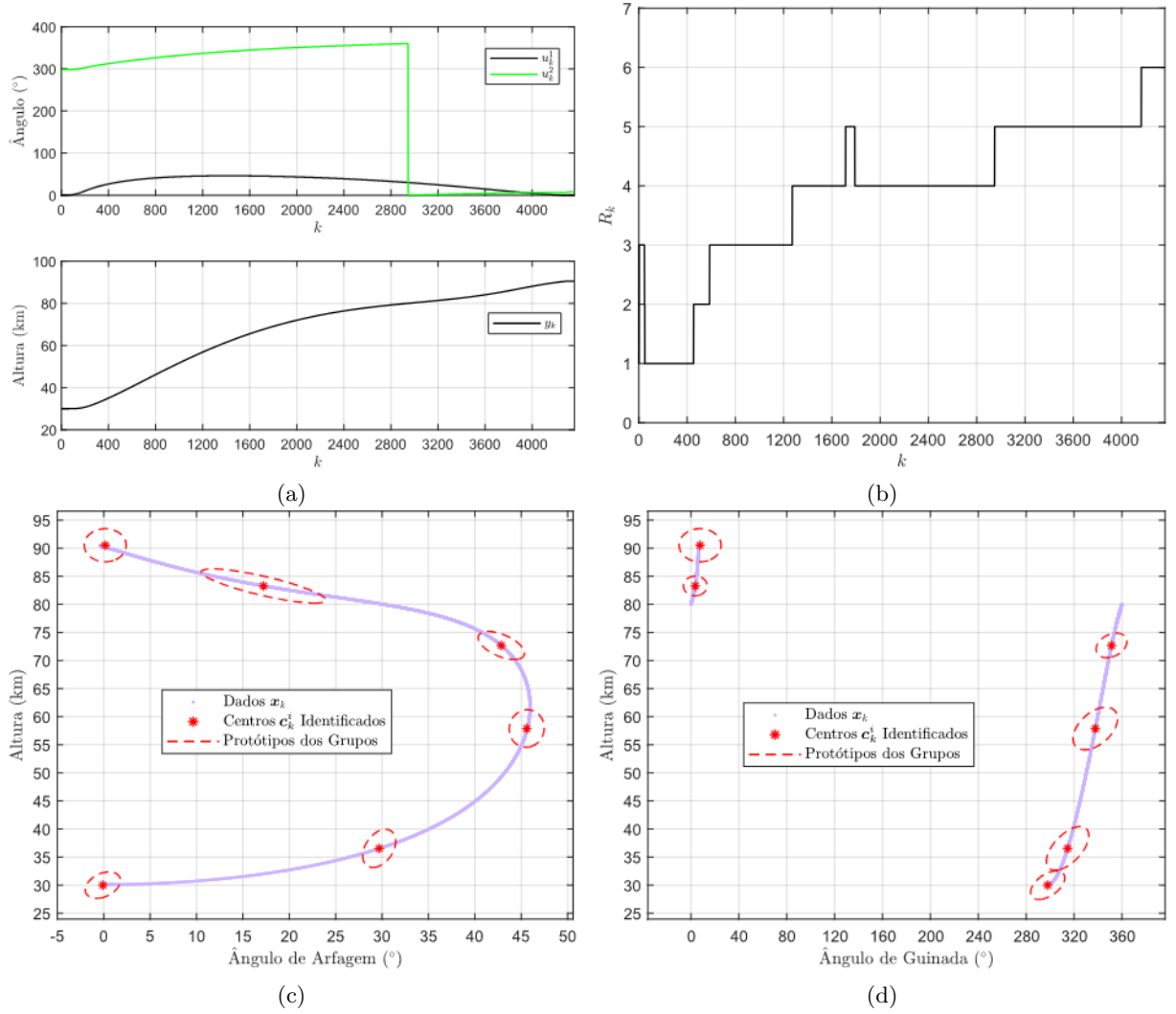


Figura 85 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados x_k provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Variáveis de entrada (ângulo de arfagem u_k^1 e ângulo de guinada u_k^2) e variável de saída (altura y_k) do Foguete Fogtrein-I em função da amostra k ; (b) Variação do número R_k de grupos identificados no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”; (d) Identificação dos centros e protótipos dos grupos na partição final ($k = N$) com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados x_k são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $c_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, e os protótipos dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1, \dots, R_k}$, representados pelas curvas isométricas ($\bar{D}_{k,N}^i$ constante), em “linhas tracejadas vermelhas”.
 Fonte: Autor.

A Figura 86a mostra o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que o potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ apresenta diversos picos em seus valores no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O valor mínimo do potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ é 0 para $k = 14, 19, 40, 41, \dots, 61, 62, 121, 135, 2946$, e o seu valor máximo é 0,6097 para $k = 2958$. A Figura 86b mostra a variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} |_{i=1, \dots, R_k}$

dos centros normalizados $\bar{\mathbf{c}}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os potenciais $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^i} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente apresentam um comportamento decrescente e por vezes ruidoso, tendendo a valores no intervalo $[0, 0,10]$, exceto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^6}$ do centro normalizado do sexto grupo Θ_k^6 , que alcança o valor máximo 0,3454 da partição final, enquanto o potencial $P_k^{\bar{\mathbf{c}}_k^1}$ do centro normalizado do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,0035 da partição final. As Figuras 86c-86d mostram as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais em “asteriscos vermelhos”. Na Figura 86c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de arfagem u_k^1 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I, enquanto na Figura 86d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de guinada u_k^2 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I. Pode-se ver que os centros de grupo são deslocados por grande parte da faixa dos dados $\mathbf{x}_k$. Todas as posições dos centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo estão associadas a dados $\mathbf{x}_k$ com altos valores de potencial $P_k^{\bar{\mathbf{x}}_k}$ (ver Figura 86a).

A Figura 87 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I com relação à variação dos suportes dos grupos, à variação dos raios dos grupos, à variação das sensibilidades dos grupos, e à variação dos graus de pertinência dos dados em relação aos grupos. A Figura 87a mostra a variação dos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver que os suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ geralmente alternam entre um comportamento crescente e um comportamento constante no fluxo de dados $\mathbf{X}$. O suporte S_k^3 do terceiro grupo Θ_k^3 alcança o valor máximo da partição final igual a 1232 dados, enquanto o suporte S_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor mínimo da partição final igual a 132 dados. A Figura 87b mostra a variação dos raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, os raios $\varepsilon_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ apresentam um comportamento suave no fluxo de dados $\mathbf{X}$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,15]$. Os valores iniciais $\varepsilon_{o,k}^i$ dos raios dos grupos Θ_k^i são elevados quando a quantidade de grupos R_k é menor, conforme a Equação (3.42). O raio ε_k^2 do segundo grupo Θ_k^2 alcança o valor máximo 0,1121 da partição final, enquanto o raio ε_k^6 do sexto grupo Θ_k^6 alcança o valor mínimo 0,0349 da partição final. A Figura 87c mostra a variação das sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Em geral, as sensibilidades $s_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ inicializam em valores elevados após a criação dos respectivos grupos $\Theta_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, pois os mesmos apresentam baixos suportes $S_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$

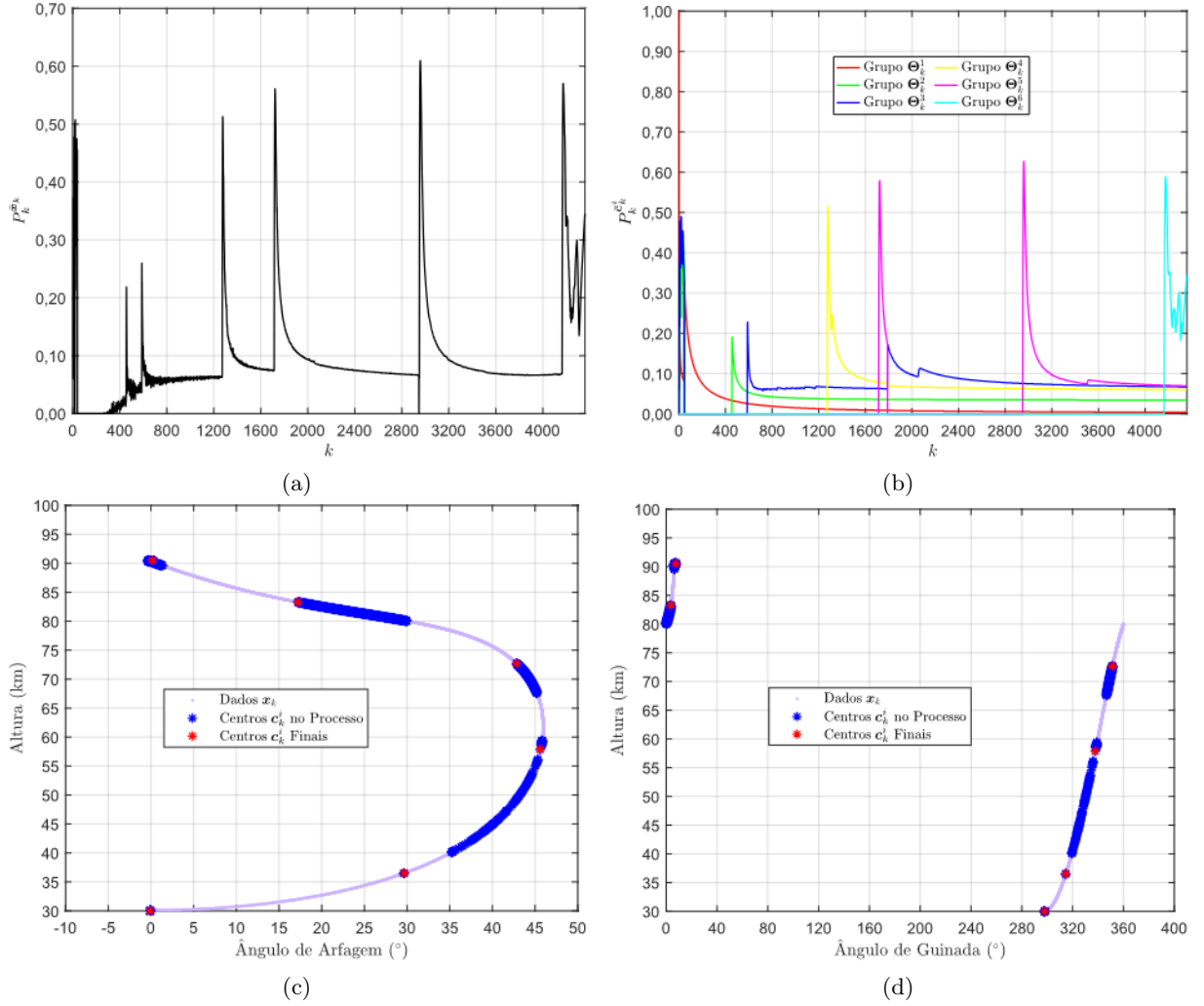


Figura 86 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Potencial $P_k^{\bar{x}_k}$ dos dados normalizados $\bar{x}_k$ computado no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ dos centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”; (d) Posições dos centros de grupo no processo de agrupamento nebuloso evolutivo, os quais são deslocados através dos mecanismos de atualização e mescla de grupos realizados a partir da computação evolucionária de cruzamento, com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ no processo em “asteriscos azuis”, e os centros de grupo $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ finais em “asteriscos vermelhos”. Fonte: Autor.

(conforme a Figura 87a) e seus centros normalizados $\bar{c}_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ apresentam altos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$ (conforme a Figura 86b), de acordo com a Equação (3.85). O comportamento das sensibilidades $s_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ dos grupos $\Theta_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ é geralmente decrescente devido ao aumento dos suportes $S_k^i \mid i=1, \dots, R_k$ e à diminuição dos potenciais $P_k^{\bar{c}_k^i} \mid i=1, \dots, R_k$, tendendo a estabilizarem dentro do intervalo $[0, 0,10]$, exceto a sensibilidade s_k^6 do sexto grupo Θ_k^6 , que

alcança o valor máximo 0,2948 da partição final, enquanto a sensibilidade s_k^1 do primeiro grupo Θ_k^1 alcança o valor mínimo 0,0024 da partição final. A Figura 87d mostra a variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Pode-se ver em grande parte períodos de predominância dos graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação a grupos específicos (menor incerteza), e esporadicamente períodos em que os graus de pertinências μ_k^i dos dados $\mathbf{x}_k$ são bem distribuídos entre grupos distintos (maior incerteza).

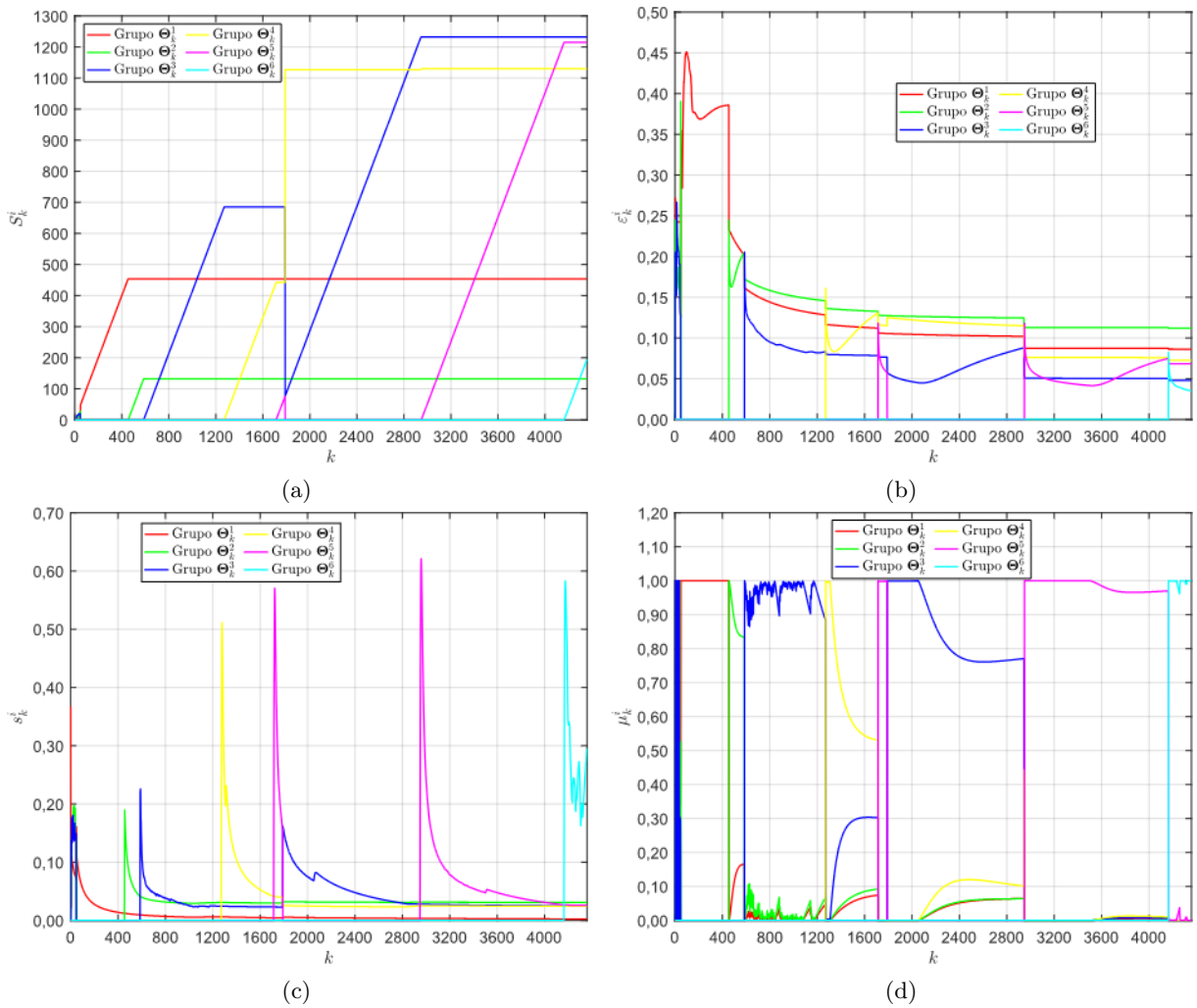


Figura 87 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Variação dos suportes $S_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (b) Variação dos raios $\varepsilon_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (c) Variação das sensibilidades $s_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k ; (d) Variação dos graus de pertinência $\mu_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ dos dados $\mathbf{x}_k$ em relação aos grupos $\Theta_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ no processo de agrupamento nebuloso evolutivo em função da amostra k . Fonte: Autor.

A Figura 88 ilustra o desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados $\mathbf{x}_k$ provenientes do Foguete Fogtrein-I com relação aos

níveis de contorno associados às funções de pertinência e aos dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência. As Figuras 88a-88b mostram os níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ dos grupos $\Theta_k^i \Big|_{k=N, i=1,\dots,R_k}$ da partição final projetados no espaço bidimensional⁴, em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ finais identificados pelo algoritmo em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ dos grupos em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ dos grupos em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ dos grupos em “linhas tracejadas verdes”. Na Figura 88a são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de arfagem u_k^1 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I, enquanto na Figura 88b são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de guinada u_k^2 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I. Pode-se ver que o algoritmo tem alcançado níveis de contorno associados às funções de pertinência $\mu_{k,N}^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$ que são adaptativos em relação aos dados $\mathbf{x}_k$ e aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$. Os níveis de contorno dos grupos tendem a serem estreitos nas direções de outros grupos próximos, e a serem largos nas direções onde não existem outros grupos. As Figuras 88c-88d mostram os dados $\mathbf{x}_k$ associados aos grupos $\Theta_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ com o máximo grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final, em que os valores de $\mu_{k,N}^i \Big|_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,R_N}$ são computados pela Equação (4.2), e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ identificados pelo algoritmo são ilustrados em “asteriscos pretos”. Na Figura 88c são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^1 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de arfagem u_k^1 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I, enquanto na Figura 88d são mostradas as coordenadas dos dados $\mathbf{x}_k$ (x_k^2 e x_k^3) correspondentes ao ângulo de guinada u_k^2 e à altura y_k do Foguete Fogtrein-I. Uma vez que as distâncias entre os dados $\mathbf{x}_k \Big|_{k=1,\dots,N}$ e os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ consideram todas as variáveis u_k^1 , u_k^2 e y_k do Foguete Fogtrein-I, tem-se que em geral o algoritmo atribuiu maior grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ dos dados $\mathbf{x}_k$ para o grupo Θ_k^i cujo centro $\mathbf{c}_k^i$ é o mais próximo.

Para análise qualitativa do algoritmo na tarefa de identificação *online* do Foguete Fogtrein-I, a Figura 89 ilustra seu desempenho com relação à estimação da altura de saída, ao erro de estimação da altura de saída, e à variação do RMSE na estimação da altura de saída. A Figura 89a mostra o desempenho do algoritmo com relação à estimação da altura y_k do Foguete Fogtrein-I, em que a altura y_k é ilustrada em “linha preta”, e a altura estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”. Pode-se ver que o algoritmo tem obtido uma estimação precisa da altura y_k do Foguete Fogtrein-I. A Figura 89b mostra o desempenho

⁴ Para a ilustração dos níveis de contorno projetados no espaço bidimensional, o grau de pertinência $\mu_{k,N}^i$ na partição final é computado conforme a Equação (4.2) variando apenas as coordenadas do dado normalizado $\bar{\mathbf{x}}_k$ ($\bar{x}_k^1$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 88a e $\bar{x}_k^2$ e $\bar{x}_k^3$ na Figura 88b) correspondentes às duas variáveis do Foguete Fogtrein-I mostradas nos eixos das Figuras 88a-88b (ângulo de arfagem u_k^1 e altura y_k na Figura 88a e ângulo de guinada u_k^2 e altura y_k na Figura 88b), e mantendo a outra coordenada ($\bar{x}_k^2$ na Figura 88a e $\bar{x}_k^1$ na Figura 88b) constante nos valores correspondentes desta coordenada dos centros de grupo normalizados $\bar{\mathbf{c}}_N^i \Big|_{i=1,\dots,R_N}$, ou seja: $\bar{x}_k^2 = \bar{c}_N^{i,2}$ na Figura 88a e $\bar{x}_k^1 = \bar{c}_N^{i,1}$ na Figura 88b.

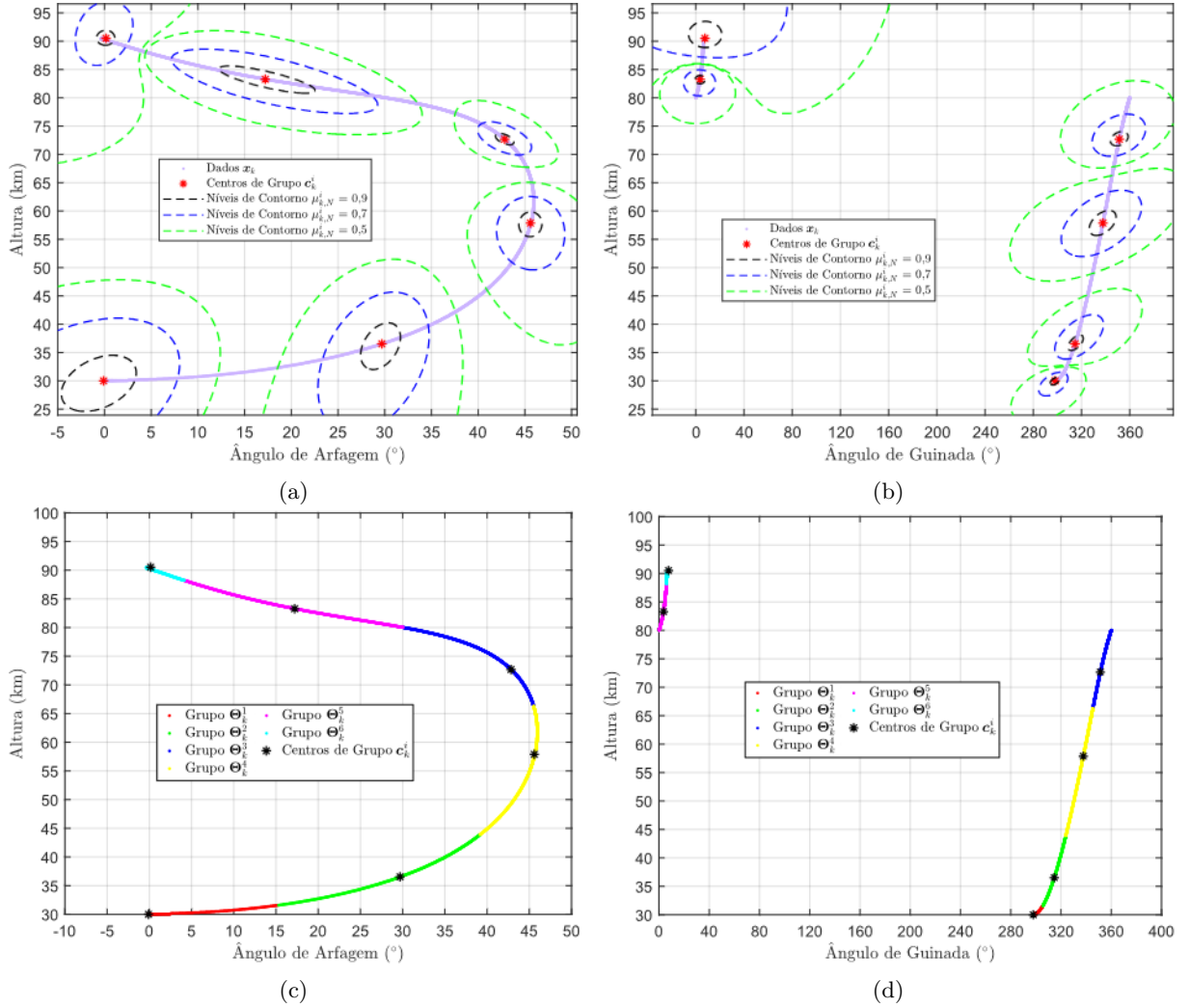


Figura 88 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo dos dados provenientes do Foguete Fogtrein-I: (a) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (b) Níveis de contorno associados às funções de pertinência da partição final com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k , em que os dados $\mathbf{x}_k$ são ilustrados em “pontos lilás”, os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ em “asteriscos vermelhos”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,9$ em “linhas tracejadas pretas”, os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,7$ em “linhas tracejadas azuis”, e os níveis de contorno $\mu_{k,N}^i = 0,5$ em “linhas tracejadas verdes”; (c) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base no ângulo de arfagem u_k^1 e na altura y_k , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”; (d) Dados associados aos grupos com o máximo grau de pertinência na partição final, com base no ângulo de guinada u_k^2 e na altura y_k , em que os centros de grupo $\mathbf{c}_k^i |_{i=1,\dots,R_k}$ são ilustrados em “asteriscos pretos”. Fonte: Autor.

do algoritmo com relação ao erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da altura y_k do Foguete Fogtrein-I, ilustrado em “linha preta”, bem como à variação do RMSE associado ao erro e_k , ilustrado em “linha verde”. O erro e_k apresenta um comportamento ruidoso durante a estimação *online*, alcançando o valor absoluto máximo de 57,1714 m na amostra $k = 121$, e o valor absoluto mínimo de 1,0120 mm na amostra $k = 2946$. O RMSE apresenta um

pico no início da estimação com um posterior decrescimento suave até a amostra $k = 400$, e então apresenta baixa variação em torno de 5 m, alcançando o valor final de 4,7989 m. O valor máximo do RMSE no processo de estimação *online* é 12,6276 m na amostra $k = 121$, e seu valor mínimo é 1,0963 m na amostra $k = 101$.

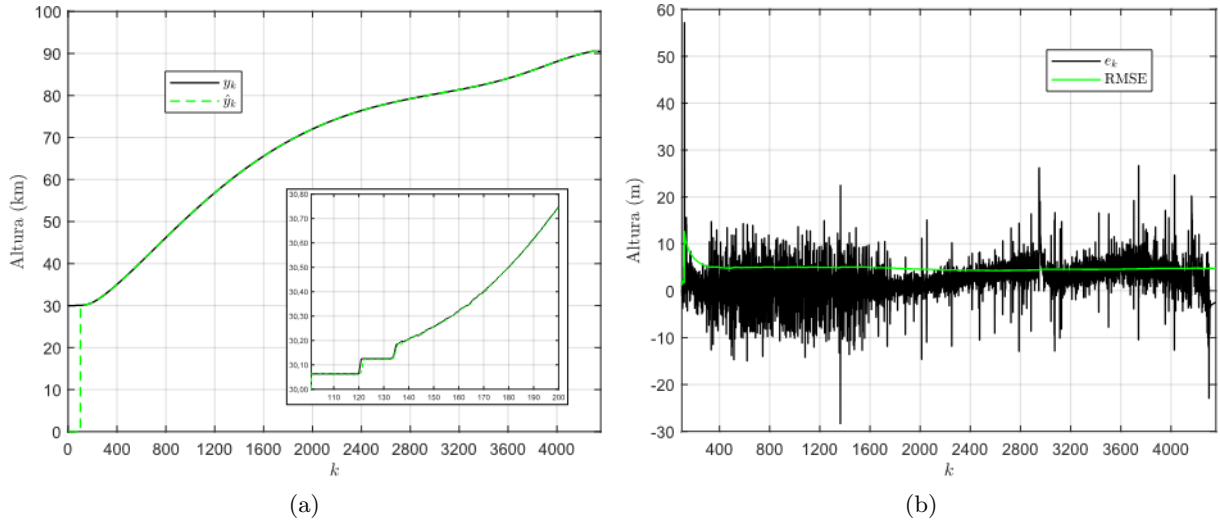


Figura 89 – Desempenho do algoritmo para a tarefa de identificação *online* do Foguete Fogtrein-I: (a) Estimação de altura de saída, em que a altura y_k do Foguete Fogtrein-I é ilustrada em “linha preta”, e a altura estimada $\hat{y}_k$ em “linha tracejada verde”; (b) Erro de estimação de altura de saída, em que o erro $e_k = y_k - \hat{y}_k$ de estimação da altura y_k do Foguete Fogtrein-I é ilustrado em “linha preta”, e o RMSE associado ao erro e_k em “linha verde”. Fonte: Autor.

O desempenho quantitativo do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* do Foguete Fogtrein-I é mostrado na Tabela 21, no qual o tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o número final de grupos R_N , o RMSE, o NDEI, o CCP, o CD, e o FIT são fornecidos. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, o algoritmo tem alcançado 1,2957 s. Com relação ao tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, o algoritmo tem alcançado 12,7481 s. Com relação ao número final de grupos, o algoritmo tem alcançado $R_N = 6$. Com relação ao RMSE na estimação da altura, o algoritmo tem alcançado RMSE = 4,7989 m. Com relação ao NDEI na estimação da altura, o algoritmo tem alcançado NDEI = 0,0003. Com relação ao CCP na estimação da altura, o algoritmo tem alcançado CCP = 1,0000. Com relação ao CD na estimação da altura, o algoritmo tem alcançado CD = 1,0000. Com relação ao FIT na estimação da altura, o algoritmo tem alcançado FIT = 1,0000.

A partir dos resultados mencionados sobre a identificação do Foguete Fogtrein-I, pode-se observar que o modelo identificado pelo algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto é capaz de extrair, a partir de dados experimentais, as características e complexidades do Foguete Fogtrein-I, a partir de grupos representativos e bem distribuídos em relação à faixa operacional dos dados (Figuras 85-88), e de um rastreamento adequado da resposta no tempo (Figura 89 e Tabela 21), o que implica que o algoritmo pode ser

Tabela 21 – Desempenho do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* do Foguete Fogtrein-I, em termos do tempo de execução para a tarefa de agrupamento nebuloso evolutivo, do tempo de execução para a tarefa de identificação *online*, do número final de grupos R_N , do RMSE, do NDEI, do CCP, do CD, e do FIT.

Foguete Fogtrein-I	
Tempo de Execução para Agrupamento	1,2957 s
Tempo de Execução para Identificação	12,7481 s
R_N	6
Saída	Altura
RMSE	4,7989 m
NDEI	0,0003
CCP	1,0000
CD	1,0000
FIT	1,0000

útil para fins de controle baseado em modelo no espaço de estados. A representação no espaço de estados para a identificação do Foguete Fogtrein-I, neste resultado experimental, utilizando o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo, expressa a relação entre as variáveis de entrada (ângulo de arfagem e ângulo de guinada) e a variável de saída (altura) do Foguete Fogtrein-I em uma estrutura compacta com ordem mínima e, conseqüentemente, reduzindo a carga computacional do algoritmo proposto.

5.5 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados experimentais da implementação do algoritmo proposto. Na Seção 5.1 foram apresentadas considerações preliminares para os resultados experimentais sobre a aplicação do algoritmo no processo de fuzzificação de dados e criação/atualização de regras nebulosas evolutivas em um sistema de inferência nebuloso evolutivo, conforme a Figura 59. Neste contexto, a representação no espaço de estados é utilizada nas proposições conseqüentes das regras nebulosas evolutivas, conforme a Equação (5.1), e o método ERA/OKID Nebuloso Recursivo é utilizado para a identificação paramétrica *online* das matrizes dos modelos, conforme o Apêndice A.

Na Seção 5.2 foram apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* da Planta Térmica, cujo ambiente experimental é mostrado na Figura 73, a partir da qual o algoritmo apresentou desempenho satisfatório em termos das localizações dos centros dos grupos, das formas dos protótipos dos grupos e da identificação da curva estática da Planta Térmica por meio da estimação dos centros de grupo (Figuras 74c e 75b), dos níveis de contorno associados aos graus de pertinência (Figura 76c), das associações dos dados aos grupos a partir dos graus de

pertinência máximos (Figura 76d), da estimação da temperatura (Figura 77), e dos índices de estimação descritos pelas Equações (5.3)-(5.8) (Tabela 19).

Na Seção 5.3 foram apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* da Helicóptero 2DoF mostrado na Figura 78, a partir do qual o algoritmo apresentou desempenho satisfatório em termos das localizações dos centros dos grupos e das formas dos protótipos dos grupos (Figuras 79c-79d e 80c-80d), dos níveis de contorno associados aos graus de pertinência (Figuras 82a-82b), das associações dos dados aos grupos a partir dos graus de pertinência máximos (Figuras 82c-82d), da estimação do ângulo de arfagem e do ângulo de guinada (Figura 83), e dos índices de estimação descritos pelas Equações (5.3)-(5.8) (Tabela 20).

Na Seção 5.4 foram apresentados os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de dados aplicado à identificação *online* do Foguete Fogtrein-I mostrado na Figura 84, a partir do qual o algoritmo apresentou desempenho satisfatório em termos das localizações dos centros dos grupos e das formas dos protótipos dos grupos (Figuras 85c-85d e 86c-86d), dos níveis de contorno associados aos graus de pertinência (Figuras 88a-88b), das associações dos dados aos grupos a partir dos graus de pertinência máximos (Figuras 88c-88d), da estimação da altura (Figura 89), e dos índices de estimação descritos pelas Equações (5.3)-(5.8) (Tabela 21).

No capítulo seguinte (6) são apresentadas as considerações finais sobre o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto nesta dissertação, a sua complexidade computacional, e os resultados computacionais e experimentais alcançados. No capítulo posterior (7) são apresentadas as propostas de trabalhos futuros a partir desta dissertação.

Parte V

CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL

6 Considerações Finais

Nesta dissertação foi proposto um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo aplicado a fluxos de dados. O algoritmo realiza o agrupamento dos dados em uma abordagem “*from scratch*”, ou seja, determinando as suas variáveis completamente a partir dos dados disponibilizados em fluxo, iniciando a partir da primeira amostra de dados. Ele se baseia na computação de potencial dos dados, para a tomada de decisão sobre os centros de grupo a cada amostra, que é realizada a partir de uma função gaussiana multivariável que considera a densidade e a taxa de variação como variáveis de informação, assistindo assim na obtenção de centros de grupo representativos do conjunto de dados fornecido. Um mecanismo autônomo de normalização de dados para similaridade na escala dos mesmos de acordo com as faixas de operação dinâmicas do fluxo de dados é apresentado, de modo que o algoritmo se ajusta dinamicamente às características do ambiente operacional. O algoritmo constrói grupos com protótipos variantes no tempo de acordo com matrizes de covariância nebulosa e uma métrica de distância exponencial, levando a grupos que se adaptam à distribuição dos dados em um contexto evolutivo, bem como à redução do efeito de ruídos e *outliers* sobre as características dos mesmos. Um mecanismo de seleção de centros de grupo baseado nas sensibilidades dos grupos é apresentado, levando a uma evolução do agrupamento que é sensível para detectar novos grupos emergentes no fluxo de dados, e com uma baixa tendência a criar novos grupos a partir de *outliers*. Um mecanismo de tomada de decisão sobre a atualização, criação e mescla de grupos baseado em raios de grupo adaptativos é apresentado, de modo que a decisão sobre a estrutura dos grupos é tomada autonomamente no fluxo de dados. O algoritmo também apresenta mecanismos de atualização e mescla de grupos baseados na técnica evolucionária de cruzamento, de modo que previne-se o crescimento excessivo do número de grupos sem o desperdício de nenhuma característica relevante em potencial.

Os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo de 8 *benchmarks* (S1, A1, R15 *Unbalance*, Gauss 6-dim, Gauss 10-dim, DIM032 e DIM064) na Seção 4.1 demonstram que o algoritmo proposto é adequado para esse contexto, alcançando desempenho competitivo em comparação com outros algoritmos na literatura. Os critérios adotados pelo algoritmo para a criação, atualização e mescla de grupos, baseados no potencial dos dados, nas sensibilidades e raios dos grupos, e na computação evolucionária de cruzamento, contribuíram para a identificação correta da quantidade real de grupos, conforme as Figuras 14b, 17b, 20b, 23b, 26b, 29b, 32b e 35b e as Tabelas 2-5. Os elevados valores de raio inicial para uma pequena quantidade de grupos, conforme a Equação (3.42), apresentam a vantagem de prevenir o agrupamento excessivo no início do fluxo de dados, conforme descrito na Seção 4.1, podendo também resultar em valores finais de raios desproporcionais em relação

às reais zonas de influência dos grupos, conforme as Figuras 21d, 27d, 30d, 33d e 36d, embora esse aspecto não tenha prejudicado a identificação correta dos grupos reais. Logo, a abordagem de raios adaptativos para os grupos, com base nas Equações (3.42) e (3.84), pode ser aprimorada a partir dessas considerações. As estratégias adotadas para a seleção e modificação de centros, tais como a função de potencial gaussiana multivariável e o mecanismo de cruzamento, contribuíram para localizações de centros geralmente próximas dos centros reais, conforme as Figuras 14c, 15b, 17c, 18b, 20c, 21b, 23c, 24b, 26c, 27b, 29c, 30b, 32c, 33b, 35c e 36b, havendo ainda espaço para o aprimoramento dessas estratégias, de modo a proporcionar a melhoria dessas localizações em grupos específicos nos quais elas são inferiores. A abordagem de protótipos variantes no tempo, a partir de matrizes de covariância nebulosa, levou a grupos com protótipos geralmente adequados em relação à distribuição dos dados nos mesmos, conforme as Figuras 14c, 17c, 20c, 23c, 26c, 29c, 32c e 35c. Destaca-se que a configuração evolutiva do agrupamento torna alguns protótipos desproporcionais em relação à real distribuição dos dados nos grupos, pois a partição muda frequentemente no processo, e os grupos não necessariamente são criados pelo algoritmo no momento em que são disponibilizados no fluxo de dados, de modo que suas amostras anteriores à sua criação influenciam nos protótipos de outros grupos. Assim, na configuração evolutiva, a obtenção de protótipos hiperelipsoidais plenamente ajustados em relação aos grupos reais é um desafio, no qual a abordagem presente no algoritmo proposto pode ser aprimorada. O modelo de função de pertinência adotado pelo algoritmo resultou em níveis de contorno que são adaptativos em relação aos dados e aos grupos, propiciando uma partição nebulosa inteligente para os conjuntos de dados, conforme as Figuras 16c, 19c, 22c, 25c, 28c, 31c, 34c e 37c. Ademais, o algoritmo geralmente associou o máximo grau de pertinência dos dados em relação aos seus grupos reais, conforme as Figuras 16d, 19d, 22d, 25d, 28d, 31d, 34d e 37d. A partir de centros de grupo bem localizados e de graus de pertinência bem atribuídos, o algoritmo alcançou resultados satisfatórios para o índice de qualidade de agrupamento descrito pela Equação (4.1), conforme as Tabelas 2-5, indicando que realizou uma partição equilibrada dos fluxos de dados. Os resultados acima mencionados implicam que o algoritmo pode ser útil para o projeto de classificadores nebulosos evolutivos.

Os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à modelagem *online* de séries temporais (Função Hiperbole, Mackey-Glass e Nakanishi) na Seção 4.2 demonstram que o algoritmo proposto é adequado para esse contexto, alcançando desempenho competitivo em comparação com outros métodos na literatura. As estratégias adotadas para a seleção e modificação de centros, tais como a função de potencial gaussiana multivariável e a computação evolucionária de cruzamento, bem como a abordagem de protótipos variantes no tempo a partir de matrizes de covariância nebulosa, contribuíram para localizações de centros de grupo e protótipos adequados em relação à distribuição dos dados, conforme as Figuras 39c, 40b, 43c, 44b, 47c, 48b, 51c, 52b, 55c e 56b. O modelo de função

de pertinência adotado pelo algoritmo resultou em níveis de contorno que são adaptativos em relação aos dados e aos grupos, propiciando uma partição nebulosa inteligente para os conjuntos de dados, conforme as Figuras 16c, 19c, 22c, 25c, 28c, 31c, 34c e 37c. A partir de centros de grupo bem localizados e de graus de pertinência bem atribuídos, o algoritmo proporcionou ao sistema de inferência nebuloso evolutivo um desempenho de modelagem adequado em termos da estimação das séries temporais a partir dos índices descritos pelas Equações (4.6)-(4.10), conforme as Figuras 42, 46, 50, 54 e 58 e as Tabelas 8-12.

Os resultados para o agrupamento nebuloso evolutivo aplicado à identificação *online* de sistemas dinâmicos (SISO, MIMO, Planta Térmica, Helicóptero 2DoF e Foguete Fogtrein-I), na Seção 4.3 e no Capítulo 5, demonstram que o algoritmo proposto é adequado para esse contexto, alcançando desempenho competitivo em comparação com outros métodos na literatura. As estratégias adotadas para a seleção e modificação de centros, tais como a função de potencial gaussiana multivariável e a computação evolucionária de cruzamento, contribuíram para localizações de centros geralmente próximas das hipersuperfícies estáticas dos sistemas dinâmicos, e portanto bem representativas do comportamento dos mesmos, conforme as Figuras 60c, 61b, 63, 66c-66d, 67c-67d, 70, 74c e 75b e as Tabelas 14 e 17. A taxa de variação demonstrou ser uma informação útil para o potencial dos dados nesse contexto, bem como o mecanismo de cruzamento, o qual deslocou os centros em direção a localizações representativas para os sistemas dinâmicos. A abordagem de protótipos variantes no tempo, a partir de matrizes de covariância nebulosa, levou a grupos com protótipos geralmente adequados em relação às hipersuperfícies estáticas dos sistemas dinâmicos, conforme as Figuras 60c, 66c-66d e 74c. O modelo de função de pertinência adotado pelo algoritmo resultou em níveis de contorno que são adaptativos em relação aos dados e aos grupos, propiciando uma partição nebulosa inteligente para os conjuntos de dados, conforme as Figuras 62c, 69a-69b, 76c, 82a-82b e 88a-88b. A partir de centros de grupo bem localizados e de graus de pertinência bem atribuídos, o algoritmo proporcionou ao sistema de inferência nebuloso evolutivo um desempenho de identificação adequado em termos da estimação das variáveis de saída a partir dos índices descritos pelas Equações (4.6), (4.16) e (5.3)-(5.8), e em termos da estimação da resposta em frequência, conforme as Figuras 64-65, 71-72, 77, 83 e 89 e as Tabelas 15 e 18-21. Os resultados acima mencionados implicam que o algoritmo pode ser útil para propósitos de controle baseado em modelo no espaço de estados. A representação no espaço de estados para a identificação de sistemas dinâmicos utilizando o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo expressa a relação entre os sinais de entrada e saída de sistemas dinâmicos em uma estrutura compacta com ordem mínima e, conseqüentemente, reduzindo a carga computacional do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto.

Quanto à complexidade computacional do algoritmo, a função de potencial dos dados na Equação (3.16) não habilita cálculo recursivo, e o número de iterações varia de acordo com a quantidade η_k de dados apresentados no fluxo de dados $\mathbf{X}$ desde a última

criação de grupo, logo, o tempo de execução para a tarefa de agrupamento pode ser custoso. Além disso, o cálculo do determinante da inversa da matriz de covariância nebulosa na Equação (3.10) também é relevante em termos de complexidade computacional. Por fim, o procedimento de mescla de grupos na Seção 3.1.7 pode ser realizado mais de uma vez em um mesmo instante amostral, conforme ilustrado na Figura 13, o que também pode aumentar o número de operações do algoritmo na amostra em processamento.

Quanto à implementação, o algoritmo apresenta 3 (três) parâmetros a serem ajustados (Seção 3.2.1), e o seu desempenho pode ser sensível em relação a esses parâmetros (Tabela 7) com a possibilidade de requerer maior esforço computacional para alcançar resultados satisfatórios em algumas aplicações.

7 Propostas de Trabalhos Futuros

O algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo proposto nesta dissertação abre espaço, de acordo com as suas características e resultados computacionais e experimentais alcançados, para o desenvolvimento de trabalhos futuros, considerando os seguintes aspectos de interesse:

- Desenvolvimento de mecanismos de ajuste adaptativo de parâmetros para a implementação do algoritmo, de modo a reduzir a quantidade de parâmetros definidos pelo usuário;
- Aplicação do algoritmo para o agrupamento nebuloso evolutivo de fluxos de dados aplicado ao desenvolvimento de um controlador nebuloso evolutivo para sistemas dinâmicos;
- Desenvolvimento do algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo no contexto de sistemas nebulosos tipo-2 intervalares.

Referências

- AGRAWAL, R.; GEHRKE, J.; GUNOPULOS, D.; RAGHAVAN, P. Automatic subspace clustering of high dimensional data for data mining applications. *SIGMOD Rec.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 27, n. 2, p. 94–105, jun 1998. ISSN 0163-5808. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 93.
- ALGHAMDI, M.; ANGELOV, P. P.; GIMENEZ, R.; RUFINO, M.; SOARES, E. Self-organising and self-learning model for soybean yield prediction. In: *2019 Sixth International Conference on Social Networks Analysis, Management and Security (SNAMS)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 441–446. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 132.
- ANG, K. K.; QUEK, C. RSPOP: Rough Set-Based Pseudo Outer-Product Fuzzy Rule Identification Algorithm. *Neural Computation*, v. 17, n. 1, p. 205–243, 01 2005. ISSN 0899-7667. Citado 4 vezes nas páginas 249, 257, 264 e 272.
- ANG, K. K.; QUEK, C.; PASQUIER, M. Popfnn-cri(s): pseudo outer product based fuzzy neural network using the compositional rule of inference and singleton fuzzifier. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 33, n. 6, p. 838–849, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 249, 257, 264 e 272.
- ANGELOV, P. P. *Evolving rule-based models: a tool for design of flexible adaptive systems*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2002. v. 92. ISBN 978-3-7908-2506-0. Citado na página 96.
- ANGELOV, P. P. An approach for fuzzy rule-base adaptation using on-line clustering. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 35, n. 3, p. 275–289, 2004. ISSN 0888-613X. Integration of Methods and Hybrid Systems. Citado na página 98.
- ANGELOV, P. P. A fuzzy controller with evolving structure. *Information Sciences*, v. 161, n. 1, p. 21–35, 2004. ISSN 0020-0255. Bio-Inspired Systems (BIS). Citado na página 69.
- ANGELOV, P. P. Evolving takagi-sugeno fuzzy systems from streaming data (ets+). In: *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2010. cap. 2, p. 21–50. ISBN 9780470569962. Citado 20 vezes nas páginas 66, 69, 94, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 138, 281, 283, 285, 295, 297 e 299.
- ANGELOV, P. P. *Autonomous Learning Systems: From Data Streams to Knowledge in Real-time*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2013. ISBN 978-1-119-95152-0. Citado 7 vezes nas páginas 69, 95, 96, 97, 98, 131 e 132.
- ANGELOV, P. P.; FILEV, D. P. An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 34, n. 1, p. 484–498, 2004. Citado 11 vezes nas páginas 66, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 138, 238, 240 e 361.
- ANGELOV, P. P.; FILEV, D. P. Simpl_ets: a simplified method for learning evolving takagi-sugeno fuzzy models. In: *The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2005. FUZZ '05*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1068–1073. Citado 4 vezes nas páginas 66, 102, 107 e 138.

ANGELOV, P. P.; FILEV, D. P.; KASABOV, N. *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2010. ISBN 9780470569955. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 97.

ANGELOV, P. P.; GU, X. *Empirical Approach to Machine Learning*. New York: Springer, 2019. (Studies in Computational Intelligence). ISBN 978-3-030-02383-6. Citado 3 vezes nas páginas 94, 95 e 97.

ANGELOV, P. P.; GU, X.; PRÍNCIPE, J. C. Autonomous learning multimodel systems from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 26, n. 4, p. 2213–2224, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 132, 138 e 361.

ANGELOV, P. P.; RAMEZANI, R.; ZHOU, X. Autonomous novelty detection and object tracking in video streams using evolving clustering and takagi-sugeno type neuro-fuzzy system. In: *2008 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1456–1463. Citado na página 69.

ANGELOV, P. P.; VICTOR, J.; DOURADO, A.; FILEV, D. P. On-line evolution of takagi-sugeno fuzzy models. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 37, n. 16, p. 67–72, 2004. ISSN 1474-6670. 2nd IFAC Workshop on Advanced Fuzzy/Neural Control (AFNC'04), Oulu, Finland, September 16-17, 2004. Citado na página 106.

ANGELOV, P. P.; YAGER, R. R. A new type of simplified fuzzy rule-based system. *International Journal of General Systems*, Taylor & Francis, v. 41, n. 2, p. 163–185, 2012. Citado na página 132.

ANGELOV, P. P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy systems from data streams in real-time. In: *2006 International Symposium on Evolving Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 29–35. Citado 7 vezes nas páginas 66, 103, 107, 111, 138, 238 e 240.

ANGELOV, P. P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy-rule-based classifiers from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 16, n. 6, p. 1462–1475, 2008. Citado na página 69.

ANGELOV, P. P.; ZHOU, X. Online learning fuzzy rule-based system structure from data streams. In: *2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 915–922. Citado na página 108.

ANGELOV, P. P.; ZHOU, X.; KLAWONN, F. Evolving fuzzy rule-based classifiers. In: *2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Image and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 220–225. Citado na página 69.

ASHRAFI, M.; PRASAD, D. K.; QUEK, C. It2-gsetsk: An evolving interval type-ii tsf fuzzy neural system for online modeling of noisy data. *Neurocomputing*, v. 407, p. 1–11, 2020. ISSN 0925-2312. Citado 7 vezes nas páginas 232, 248, 249, 257, 264, 272 e 306.

ASKARI, S. Noise-resistant fuzzy clustering algorithm. *Granular Computing*, v. 6, p. 815–828, 2021. ISSN 2364-4974. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 141.

BABUŠKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. Delft: Springer Netherlands, 2012. (International Series in Intelligent Technologies). ISBN 9789401148689. Citado 19 vezes nas páginas 7, 10, 63, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 140, 164, 166 e 167.

- BABUŠKA, R.; VERBRUGGEN, H. Applied fuzzy modeling. In: *Proceedings of IFAC Symposium on Artificial Intelligence in Real Time Control, Valencia, Spain*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 61–66. Citado na página 63.
- BARALDI, A.; BLONDA, P. A survey of fuzzy clustering algorithms for pattern recognition. i. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 29, n. 6, p. 778–785, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 94.
- BARUAH, R. D.; ANGELOV, P. P. Evolving local means method for clustering of streaming data. In: *2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–8. Citado na página 132.
- BELLMAN, R.; KALABA, R.; ZADEH, L. Abstraction and pattern classification. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 13, p. 1–7, 1966. Citado na página 79.
- BEZDEK, J. C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. New York: Plenum Press, 1981. ISBN 9781475704525. Citado 3 vezes nas páginas 77, 80 e 83.
- BEZDEK, J. C.; DUNN, J. C. Optimal fuzzy partitions: A heuristic for estimating the parameters in a mixture of normal distributions. *IEEE Transactions on Computers*, C-24, n. 8, p. 835–838, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 87.
- BEZDEK, J. C.; EHRLICH, R.; FULL, W. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, v. 10, n. 2, p. 191–203, 1984. ISSN 0098-3004. Citado 4 vezes nas páginas 64, 164, 281 e 295.
- BEZERRA, C. G.; COSTA, B. S. J.; GUEDES, L. A.; ANGELOV, P. P. An evolving approach to data streams clustering based on typicality and eccentricity data analytics. *Information Sciences*, v. 518, p. 13–28, 2020. ISSN 0020-0255. Citado 3 vezes nas páginas 66, 178 e 179.
- BHARITKAR, S.; FILEV, D. P. An online learning vector quantization algorithm. In: *Proceedings of the Sixth International Symposium on Signal Processing and its Applications (Cat.No.01EX467)*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 2, p. 394–397 vol.2. Citado na página 131.
- BHATTACHARJEE, P.; MITRA, P. A survey of density based clustering algorithms. *Frontiers of Computer Science*, v. 15, n. 1, 2021. Citado na página 93.
- BHATTACHARYYA, A. On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distribution. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, v. 35, p. 99–110, 1943. Disponível em: <<https://cir.nii.ac.jp/crid/1573105974836363008>>. Citado na página 119.
- BISHOP, C. M. *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford: Clarendon Press, 1995. ISBN 9780198538646. Citado na página 94.
- BÖHM, C.; NOLL, R.; PLANT, C.; WACKERSREUTHER, B. Density-based clustering using graphics processors. In: *Proceedings of the 18th ACM Conference on Information and Knowledge Management*. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2009. (CIKM '09), p. 661–670. ISBN 9781605585123. Citado na página 93.
- BOUCHACHIA, A.; MITTERMEIR, R. Towards incremental fuzzy classifiers. *Soft Computing*, v. 11, n. 2, p. 193–207, 2007. Citado na página 118.

- BROWN, M.; HARRIS, C. *Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control*. New York: Prentice-Hall, 1994. (Prentice-Hall International Series in Systems and Control Engineering). ISBN 978-0131344532. Citado na página 63.
- CAVALCANTE JUNIOR, J. G. L.; RODRIGUES JUNIOR, S. E.; TORRES, L. M. M. Identificação de sistema não linear multivariável com modelos fuzzy almmo de primeira ordem. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente 2021*. [S.l.: s.n.], 2021. v. 1, n. 1, p. 1272–1277. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 132.
- CHEN, C.-W.; HUANG, J.-K.; PHAN, M.; JUANG, J.-N. Integrated system identification and state estimation for control offlexible space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 15, n. 1, p. 88–95, 1992. Citado na página 360.
- CHEN, Q.; YU, W.; ZHAO, X.; NIE, F.; LI, X. Rooted mahalanobis distance based gustafson-kessel fuzzy c-means. *Information Sciences*, v. 644, p. 118878, 2023. ISSN 0020-0255. Citado na página 64.
- CHENG, P.; HE, S.; STOJANOVIC, V.; LUAN, X.; LIU, F. Fuzzy fault detection for markov jump systems with partly accessible hidden information: An event-triggered approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 52, n. 8, p. 7352–7361, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- CHIU, S. L. Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, v. 2, p. 267–278, 1994. Citado 18 vezes nas páginas 65, 68, 75, 88, 90, 91, 92, 138, 178, 179, 180, 181, 281, 283, 285, 295, 297 e 299.
- CLARK, R. N. *Control System Dynamics*. New York: Cambridge University Press, 1996. ISBN 0521472393. Citado na página 139.
- COBANER, M. Evapotranspiration estimation by two different neuro-fuzzy inference systems. *Journal of Hydrology*, v. 398, n. 3, p. 292–302, 2011. ISSN 0022-1694. Citado 3 vezes nas páginas 231, 275 e 306.
- COSTA, E. B. M.; SERRA, G. L. O. Swarm optimization based adaptive fuzzy control design from robust stability criteria. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, v. 32, p. 1787–1804, 2017. ISSN 1875-8967. Citado na página 307.
- DAS, R. T.; ANG, K. K.; QUEK, C. ierspop: A novel incremental rough set-based pseudo outer-product with ensemble learning. *Applied Soft Computing*, v. 46, p. 170–186, 2016. ISSN 1568-4946. Citado 6 vezes nas páginas 247, 248, 249, 257, 264 e 272.
- DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 39, n. 1, p. 1–22, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 124 e 126.
- DENG, D.; KASABOV, N. On-line pattern analysis by evolving self-organizing maps. *Neurocomputing*, v. 51, p. 87–103, 2003. ISSN 0925-2312. Citado 5 vezes nas páginas 131, 178, 179, 180 e 181.
- DJOUADI, A.; SNORRASON, O.; GARBER, F. D. The quality of training sample estimates of the bhattacharyya coefficient. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 12, n. 1, p. 92–97, 1990. Citado na página 119.

- DOVŽAN, D.; ŠKRJANC, I. Recursive clustering based on a gustafson–kessel algorithm. *Evolving Systems*, v. 2, n. 1, p. 15–24, 2011. ISSN 1868-6486. Citado na página 132.
- DUDA, R. O.; HART, P. E.; STORK, D. G. *Pattern Classification*. 2. ed. Chichester, West Sussex, England: Wiley-Interscience, 2000. ISBN 0471056693. Citado na página 111.
- DUNN, J. C. A fuzzy relative of the isodata process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Journal of Cybernetics*, Taylor & Francis, v. 3, n. 3, p. 32–57, 1973. Citado 8 vezes nas páginas 64, 80, 281, 283, 285, 295, 297 e 299.
- ESTER, M.; KRIEGEL, H.-P.; SANDER, J.; XU, X. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In: *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. [S.l.]: AAAI Press, 1996. (KDD'96), p. 226–231. Citado na página 93.
- EZUGWU, A. E.; IKOTUN, A. M.; OYELADE, O. O.; ABUALIGAH, L.; AGUSHAKA, J. O.; EKE, C. I.; AKINYELU, A. A. A comprehensive survey of clustering algorithms: State-of-the-art machine learning applications, taxonomy, challenges, and future research prospects. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 110, p. 104743, 2022. ISSN 0952-1976. Citado na página 68.
- FILEV, D. P.; GEORGIEVA, O. An extended version of the gustafson-kessel algorithm for evolving data stream clustering. In: *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2010. cap. 12, p. 273–300. ISBN 9780470569962. Citado na página 132.
- FLAKE, R. H.; TURNER, B. L. Numerical classification for taxonomic problems. *Journal of Theoretical Biology*, v. 20, n. 2, p. 260–270, 1968. ISSN 0022-5193. Citado na página 79.
- FORTUNA, L.; GRAZIANI, S.; RIZZO, A.; XIBILIA, M. G. *Soft Sensors for Monitoring and Control of Industrial Processes*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. (Advances in Industrial Control (AIC)). ISBN 978-1-84996-608-5. Citado na página 112.
- FRÄNTI, P.; VIRMAJOKI, O. Iterative shrinking method for clustering problems. *Pattern Recognition*, v. 39, n. 5, p. 761–765, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 176 e 177.
- FRÄNTI, P.; VIRMAJOKI, O.; HAUTAMAKI, V. Fast agglomerative clustering using a k-nearest neighbor graph. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 28, n. 11, p. 1875–1881, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 176 e 177.
- FRITZKE, B. A growing neural gas network learns topologies. In: TESAURO, G.; TOURETZKY, D.; LEEN, T. (Ed.). *Advances in Neural Information Processing Systems*. [S.l.]: MIT Press, 1994. v. 7. Citado 4 vezes nas páginas 178, 179, 180 e 181.
- GAGG, F. L. A.; CONCEIÇÃO, S. M.; VASQUES, C. H.; ABREU, G. L. C. M.; LOPES, V.; BRENNAN, M. J. Experimental identification and control of a cantilever beam using era/okid with a lqr controller. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 25, p. 161–173, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 231, 275, 305 e 361.
- GAN, G.; MA, C.; WU, J. *Data clustering: theory, algorithms, and applications*. USA: Society for Industrial & Applied Mathematics, 2007. (Asa-Siam Series on Statistics and Applied Probability). Citado 12 vezes nas páginas 64, 113, 178, 179, 180, 181, 281, 283, 285, 295, 297 e 299.

- GATH, I.; GEVA, A. B. Unsupervised optimal fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 773–780, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 64, 87 e 88.
- GILBERT, E. G. Controllability and observability in multivariable control systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, v. 1, n. 2, p. 128–151, 1963. Citado na página 360.
- GOLDBERG, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Reading: Addison-Wesley, 1989. ISBN 978-0201157673. Citado na página 95.
- GOMES, D. C. S.; SERRA, G. L. O. Interval type-2 evolving fuzzy kalman filter for processing of unobservable spectral components from uncertain experimental data. *Journal of the Franklin Institute*, v. 361, n. 2, p. 637–669, 2024. ISSN 0016-0032. Citado 6 vezes nas páginas 66, 69, 231, 275, 305 e 361.
- GRAY, R. Vector quantization. *IEEE ASSP Magazine*, v. 1, n. 2, p. 4–29, 1984. Citado na página 113.
- GUPTA, R.; KUMAR, S. Novel similarity measure between hesitant fuzzy set and their applications in pattern recognition and clustering analysis. *Journal of Engineering and Applied Science*, v. 71, n. 1, p. 1–26, 2024. Citado 3 vezes nas páginas 63, 68 e 79.
- GUSTAFSON, D. E.; KESSEL, W. C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In: *1978 IEEE Conference on Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes*. [S.l.: s.n.], 1978. p. 761–766. Citado 11 vezes nas páginas 64, 84, 178, 180, 181, 281, 283, 285, 295, 297 e 299.
- HARTERT, L.; SAYED-MOUCHAWEH, M.; BILLAUDEL, P. A semi-supervised dynamic version of fuzzy k-nearest neighbours to monitor evolving systems. *Evolving Systems*, v. 1, n. 1, p. 3–15, 2010. ISSN 1868-6486. Citado na página 131.
- HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference and Prediction*. Heidelberg: Springer, 2009. ISBN 978-0-387-84858-7. Citado 2 vezes nas páginas 105 e 123.
- HO, B. L.; KALMAN, R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *at - Automatisierungstechnik*, v. 14, n. 1-12, p. 545–548, 1966. Citado na página 360.
- HU, M.; ZHONG, Y.; XIE, S.; LV, H.; LV, Z. Fuzzy system based medical image processing for brain disease prediction. *Frontiers in Neuroscience*, v. 15, 2021. ISSN 1662-453X. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- HU, X.; LI, Y.; JIA, L.; QIU, M. A novel two-stage unsupervised fault recognition framework combining feature extraction and fuzzy clustering for collaborative aiOT. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 18, n. 2, p. 1291–1300, 2022. Citado na página 65.
- IWENDI, C.; MAHBOOB, K.; KHALID, Z.; JAVED, A. R.; RIZWAN, M.; GHOSH, U. Classification of covid-19 individuals using adaptive neuro-fuzzy inference system. *Multimedia Systems*, v. 28, p. 1223–1237, 2022. ISSN 1432-1882. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.

- IYER, A. R.; PRASAD, D. K.; QUEK, C. Pie-rsop: A brain-inspired pseudo-incremental ensemble rough set pseudo-outer product fuzzy neural network. *Expert Systems with Applications*, v. 95, p. 172–189, 2018. ISSN 0957-4174. Citado 8 vezes nas páginas 231, 247, 248, 249, 257, 264, 272 e 306.
- JANG, J.-S. R. Self-learning fuzzy controllers based on temporal backpropagation. *IEEE Transactions on neural networks*, v. 3, n. 5, p. 714–723, 1992. Citado na página 63.
- JANG, J.-S. R. Anfis: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 23, n. 3, p. 665–685, 1993. Citado 5 vezes nas páginas 247, 248, 257, 264 e 272.
- JANG, J.-S. R.; SUN, C.-T.; MIZUTANI, E. *Neuro-fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Upper Sadle River: Prentice-Hall, 1997. ISBN 978-0132610667. Citado na página 63.
- JANUZAJ, E.; KRIEGEL, H.-P.; PFEIFLE, M. Dbdc: Density based distributed clustering. In: *Advances in Database Technology - EDBT 2004*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 88–105. ISBN 978-3-540-24741-8. Citado na página 93.
- JIA, L.; LI, X.; CHIU, M.-S. The identification of neuro-fuzzy based mimo hammerstein model with separable input signals. *Neurocomputing*, v. 174, p. 530–541, 2016. ISSN 0925-2312. Citado 5 vezes nas páginas 276, 285, 286, 287 e 288.
- JIMENEZ, L. O.; LANDGREBE, D. A. Supervised classification in high-dimensional space: geometrical, statistical, and asymptotical properties of multivariate data. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, v. 28, n. 1, p. 39–54, 1998. Citado na página 121.
- JIMÉNEZ, F.; MARTÍNEZ, C.; MARZANO, E.; PALMA, J. T.; SÁNCHEZ, G.; SCIAVICCO, G. Multiobjective evolutionary feature selection for fuzzy classification. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 27, n. 5, p. 1085–1099, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- JUANG, J.-N. *Applied System Identification*. Upper Saddle River: Prentice-Hall PTR, 1994. ISBN 013079211X. Citado 7 vezes nas páginas 360, 361, 363, 364, 365, 366 e 367.
- JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985. Citado na página 360.
- KALMAN, R. E. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, v. 1, n. 2, p. 152–192, 1963. Citado na página 360.
- KÄRKKÄINEN, I.; FRÄNTI, P. *Dynamic local search algorithm for the clustering problem*. Joensuu, Finland, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 176 e 177.
- KÄRKKÄINEN, I.; FRÄNTI, P. Gradual model generator for single-pass clustering. *Pattern Recognition*, v. 40, n. 3, p. 784–795, 2007. ISSN 0031-3203. Citado 2 vezes nas páginas 176 e 177.

- KASABOV, N. Evolving fuzzy neural networks for supervised/unsupervised online knowledge-based learning. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 31, n. 6, p. 902–918, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 247, 248, 257, 264 e 272.
- KASABOV, N.; SONG, Q. Denfis: dynamic evolving neural-fuzzy inference system and its application for time-series prediction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 10, n. 2, p. 144–154, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 247, 248, 257, 264 e 272.
- KAVLI, T. Asmo-dan algorithm for adaptive spline modelling of observation data. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 58, n. 4, p. 947–967, 1993. Citado na página 63.
- KEPHART, J. O. A biologically inspired immune system for computers. In: *Artificial Life IV: proceedings of the fourth international workshop on the synthesis and simulation of living systems*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 247, p. 130139. Citado na página 95.
- KOZA, J. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. USA: MIT Press, 1992. ISBN 978-0262111706. Citado na página 95.
- KRIEGEL, H.-P.; PFEIFLE, M. Density-based clustering of uncertain data. In: *Proceedings of the Eleventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery in Data Mining*. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2005. (KDD '05), p. 672–677. ISBN 159593135X. Citado na página 93.
- KRIEGEL, H.-P.; PFEIFLE, M. Hierarchical density-based clustering of uncertain data. In: *Fifth IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'05)*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 4 pp.–. Citado na página 93.
- KRISHNAPURAM, R.; KELLER, J. M. A possibilistic approach to clustering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 1, n. 2, p. 98–110, 1993. Citado na página 79.
- LEITE, D.; ŠKRJANC, I. Ensemble of evolving optimal granular experts, owa aggregation, and time series prediction. *Information Sciences*, v. 504, p. 95–112, 2019. ISSN 0020-0255. Citado 2 vezes nas páginas 238 e 240.
- LEMOES, A.; CAMINHAS, W.; GOMIDE, F. Multivariable gaussian evolving fuzzy modeling system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 19, n. 1, p. 91–104, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 238 e 240.
- LUGHOFFER, E. D. Extensions of vector quantization for incremental clustering. *Pattern Recognition*, v. 41, n. 3, p. 995–1011, 2008. ISSN 0031-3203. Part Special issue: Feature Generation and Machine Learning for Robust Multimodal Biometrics. Citado 5 vezes nas páginas 113, 178, 179, 180 e 181.
- LUGHOFFER, E. D. Flexfis: A robust incremental learning approach for evolving takagi–sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 16, n. 6, p. 1393–1410, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 69, 113, 128 e 129.
- LUGHOFFER, E. D. *Evolving Fuzzy Systems - Methodologies, Advanced Concepts and Applications*. Berlin: Springer, 2011. (Studies in Fuzziness and Soft Computing). ISBN 978-3-642-18086-6. Citado 7 vezes nas páginas 7, 94, 95, 96, 361, 363 e 364.

- LUGHOFFER, E. D. On-line incremental feature weighting in evolving fuzzy classifiers. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 163, n. 1, p. 1–23, 2011. ISSN 0165-0114. Theme: Classification and Modelling. Citado na página 118.
- LUGHOFFER, E. D.; BUCHTALA, O. Reliable all-pairs evolving fuzzy classifiers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 21, n. 4, p. 625–641, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 113.
- LUGHOFFER, E. D.; SAYED-MOUCHAWEH, M. Autonomous data stream clustering implementing split-and-merge concepts – towards a plug-and-play approach. *Information Sciences*, v. 304, p. 54–79, 2015. ISSN 0020-0255. Citado 22 vezes nas páginas 69, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 177, 178, 179, 180 e 181.
- MEI, Z.; ZHAO, T.; GU, X. A dynamic evolving fuzzy system for streaming data prediction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, p. 1–14, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.
- MURTY, M. N.; DEVI, V. S. *Introduction to Pattern Recognition and Machine Learning*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2014. (IISc Lecture Notes Series). ISBN 9814335452. Citado na página 75.
- NAKAMORI, Y.; RYOKE, M. Identification of fuzzy prediction models through hyperellipsoidal clustering. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 24, n. 8, p. 1153–1173, 1994. Citado na página 63.
- NAKANISHI, H.; TURKSEN, I. B.; SUGENO, M. A review and comparison of six reasoning methods. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 57, n. 3, p. 257–294, 1993. ISSN 0165-0114. Citado 5 vezes nas páginas 248, 249, 257, 264 e 272.
- NGUYEN, N. N.; ZHOU, W. J.; QUEK, C. Gsetsk: a generic self-evolving tsf fuzzy neural network with a novel hebbian-based rule reduction approach. *Applied Soft Computing*, v. 35, p. 29–42, 2015. ISSN 1568-4946. Citado 4 vezes nas páginas 248, 257, 264 e 272.
- OLIVEIRA, J. V. Neuron inspired learning rules for fuzzy relational structures. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 57, n. 1, p. 41–53, 1993. ISSN 0165-0114. Citado na página 63.
- PANG, S.; OZAWA, S.; KASABOV, N. Incremental linear discriminant analysis for classification of data streams. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 35, n. 5, p. 905–914, 2005. Citado na página 118.
- PEDRYCZ, W. *Knowledge-based Clustering: from Data to Information Granules*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2005. ISBN 0471469661. Citado 4 vezes nas páginas 64, 75, 78 e 139.
- PEI, H.-X.; ZHENG, Z.-R.; WANG, C.; LI, C.-N.; SHAO, Y.-H. D-fcm: Density based fuzzy c-means clustering algorithm with application in medical image segmentation. *Procedia Computer Science*, v. 122, p. 407–414, 2017. ISSN 1877-0509. 5th International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2017. Citado na página 93.
- PHAN, M.; HORTA, L. G.; JUANG, J.-N.; LONGMAN, R. W. Linear system identification via an asymptotically stable observer. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 79, n. 1, p. 59–86, 1993. Citado na página 360.

- PHAN, M.; JUANG, J.-N.; LONGMAN, R. W. Identification of linear multivariable systems from a single set of data by identification of observers with assigned real eigenvalues. In: *32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. [S.l.: s.n.], 1992. Citado na página 360.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. O. Evolving fuzzy kalman filter: A black-box modeling approach applied to rocket trajectory forecasting. In: BARRETO, G. A.; COELHO, R. (Ed.). *Fuzzy Information Processing*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 336–347. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 327.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. O. Methodology for evolving fuzzy kalman filter identification. *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 17, p. 793–800, 2019. ISSN 2005-4092. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 316.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. O. Methodology for modeling fuzzy kalman filters of minimum realization from evolving clustering of experimental data. *ISA Transactions*, v. 105, p. 1–23, 2020. ISSN 0019-0578. Citado 6 vezes nas páginas 66, 69, 231, 275, 305 e 361.
- PRECUP, R.-E.; TEBAN, T.-A.; ALBU, A.; BORLEA, A.-B.; ZAMFIRACHE, I. A.; PETRIU, E. M. Evolving fuzzy models for prosthetic hand myoelectric-based control. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 69, n. 7, p. 4625–4636, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 63, 68 e 79.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. New York: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-88068-8. Citado 2 vezes nas páginas 167 e 168.
- QUEK, C.; ZHOU, R. W. Popfnn-aar(s): a pseudo outer-product based fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 29, n. 6, p. 859–870, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 249, 257, 264 e 272.
- RAFIEL, H.; AKBARZADEH-T., M.-R. Reliable fuzzy neural networks for systems identification and control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 31, n. 7, p. 2251–2263, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- REZAEI, M.; FRÄNTI, P. Can the number of clusters be determined by external indices? *IEEE Access*, v. 8, p. 89239–89257, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 176 e 177.
- ROCHA FILHO, O. D. *Modelagem Baseada em Agrupamento Nebuloso Evolutivo de Máxima Verossimilhança Aplicada a Sistemas Dinâmicos Operando em Ambiente Não-Estacionário*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 37, 39, 307 e 316.
- RODRIGUES, F. P. S.; SILVA, A. M.; LEMOS, A. Evolving fuzzy predictor with multivariable gaussian participatory learning and multi-innovations recursive weighted least squares: efmi. *Evolving Systems*, v. 13, n. 5, p. 667–686, 2022. Citado 7 vezes nas páginas 67, 69, 231, 232, 238, 240 e 306.
- RODRIGUES JUNIOR, S. E.; SERRA, G. L. O. An approach for evolving neuro-fuzzy forecasting of time series based on parallel recursive singular spectrum analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 443, p. 1–29, 2022. ISSN 0165-0114. From Learning to Modeling and Control. Citado 4 vezes nas páginas 63, 67, 69 e 79.

- RONG, H.-J.; SUNDARARAJAN, N.; HUANG, G.-B.; SARATCHANDRAN, P. Sequential adaptive fuzzy inference system (safis) for nonlinear system identification and prediction. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 157, n. 9, p. 1260–1275, 2006. ISSN 0165-0114. Fuzzy Concepts Applied to Food Control Quality Control. Citado na página 131.
- RUSPINI, E. H. A new approach to clustering. *Information and Control*, v. 15, n. 1, p. 22–32, 1969. ISSN 0019-9958. Citado na página 79.
- RUSPINI, E. H. Numerical methods for fuzzy clustering. *Information Sciences*, v. 2, n. 3, p. 319–350, 1970. ISSN 0020-0255. Citado na página 78.
- RUSPINI, E. H.; BEZDEK, J. C.; KELLER, J. M. Fuzzy clustering: A historical perspective. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, v. 14, n. 1, p. 45–55, 2019. Citado na página 79.
- SANGMA, J. W.; YOGITA; PAL, V.; KUMAR, N.; KUSHWAHA, R. Fhc-nds: Fuzzy hierarchical clustering of multiple nominal data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 31, n. 3, p. 786–798, 2023. Citado na página 68.
- SANTOS, J. A. *Metodologia Nebulosa Evolutiva baseada em Modelo de Hammerstein no Espaço de Estados para Identificação de Sistemas Dinâmicos não Lineares Multivariáveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018. Citado 10 vezes nas páginas 94, 275, 285, 286, 287, 301, 302, 306, 307 e 361.
- SCHÖLKOPF, B.; SMOLA, A. J. *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. Cambridge: MIT Press, 2002. (Adaptive Computation and Machine Learning). ISBN 9780262536578. Citado na página 64.
- SCHUBERT, E.; KOOS, A.; EMRICH, T.; ZÜFLE, A.; SCHMID, K. A.; ZIMEK, A. A framework for clustering uncertain data. *Proc. VLDB Endow.*, VLDB Endowment, v. 8, n. 12, p. 1976–1979, 2015. ISSN 2150-8097. Citado na página 68.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978. ISSN 00905364, 21688966. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2958889>>. Citado na página 124.
- SELVACHANDRAN, G.; QUEK, S. G.; LAN, L. T. H.; SON, L. H.; GIANG, N. L.; DING, W.; ABDEL-BASSET, M.; ALBUQUERQUE, V. H. C. A new design of mamdani complex fuzzy inference system for multiattribute decision making problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 29, n. 4, p. 716–730, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- SERRA, G. L. O. Experimental approach applied to practical classes on digital control systems: A contribution from model-based control theory. *International Journal of Electrical Engineering & Education*, v. 57, n. 2, p. 99–132, 2020. Citado na página 307.
- SHERMAN, J.; MORRISON, W. J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given column or a given row of the original matrix (abstract). *The Annals of Mathematical Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 20, n. 4, p. 620–624, 1949. Citado 2 vezes nas páginas 167 e 168.

- SHERMAN, J.; MORRISON, W. J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 21, n. 1, p. 124–127, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 167 e 168.
- SHOEIBI, A.; GHASSEMI, N.; KHODATARS, M.; MORIDIAN, P.; ALIZADEHSANI, R.; ZARE, A.; KHOSRAVI, A.; SUBASI, A.; ACHARYA, U. R.; GORRIZ, J. M. Detection of epileptic seizures on eeg signals using anfis classifier, autoencoders and fuzzy entropies. *Biomedical Signal Processing and Control*, v. 73, p. 103417, 2022. ISSN 1746-8094. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- SILVA, A. M.; CAMINHAS, W.; LEMOS, A.; GOMIDE, F. A fast learning algorithm for evolving neo-fuzzy neuron. *Applied Soft Computing*, v. 14, p. 194–209, 2014. ISSN 1568-4946. Evolving Soft Computing Techniques and Applications. Citado 2 vezes nas páginas 238 e 240.
- SILVA, J. A.; SERRA, G. L. O. Robust pid ts fuzzy control methodology based on gain and phase margins specifications. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, v. 26, p. 869–888, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 63, 79 e 307.
- SIMIĆ, S.; BANKOVIĆ, Z.; VILLAR, J. R.; SIMIĆ, D.; SIMIĆ, S. D. A hybrid fuzzy clustering approach for diagnosing primary headache disorder. *Logic Journal of the IGPL*, v. 29, n. 2, p. 220–235, 09 2020. ISSN 1367-0751. Citado 3 vezes nas páginas 63, 68 e 75.
- SINGH, S.; SRIVASTAVA, S. Kernel fuzzy c- means clustering with teaching learning based optimization algorithm (tlbo-kfcm). *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, v. 42, p. 1051–1059, 2022. ISSN 1875-8967. Citado na página 64.
- ŠKRJANC, I. Cluster-volume-based merging approach for incrementally evolving fuzzy gaussian clustering—egauss+. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 28, n. 9, p. 2222–2231, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 69.
- SOARES, E.; ANGELOV, P. P.; GU, X. Autonomous learning multiple-model zero-order classifier for heart sound classification. *Applied Soft Computing*, v. 94, p. 106449, 2020. ISSN 1568-4946. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 132.
- SOTO, J.; CASTILLO, O.; MELIN, P.; PEDRYCZ, W. A new approach to multiple time series prediction using mimo fuzzy aggregation models with modular neural networks. *International Journal of Fuzzy Systems*, v. 21, p. 1629–1648, 2019. ISSN 2199-3211. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- SUBRAMANIAN, R. G.; ELUMALAI, V. K. Robust mrac augmented baseline lqr for tracking control of 2 dof helicopter. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 86, p. 70–77, 2016. ISSN 0921-8890. Citado na página 316.
- SUGENO, M.; KANG, G. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 28, n. 1, p. 15–33, 1988. ISSN 0165-0114. Citado na página 63.
- SUGENO, M.; TANAKA, K. Successive identification of a fuzzy model and its applications to prediction of a complex system. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 42, n. 3, p. 315–334, 1991. ISSN 0165-0114. Citado na página 63.

- SUI, J.; LIU, Z.; LIU, L.; JUNG, A.; LI, X. Dynamic sparse subspace clustering for evolving high-dimensional data streams. *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 52, n. 6, p. 4173–4186, 2022. Citado na página 67.
- SÁNCHEZ, L.; COUSO, I.; GONZÁLEZ, M. A design methodology for semi-physical fuzzy models applied to the dynamic characterization of lifepo4 batteries. *Applied Soft Computing*, v. 14, p. 269–288, 2014. ISSN 1568-4946. Evolving Soft Computing Techniques and Applications. Citado 4 vezes nas páginas 231, 275, 305 e 361.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, 1985. Citado na página 63.
- TAN, J.; QUEK, C. Acpop: Ambiguity correction-based pseudo-outer-product fuzzy rule identification algorithm. In: *2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 74–79. Citado 4 vezes nas páginas 249, 257, 264 e 272.
- TANG, Y.; HU, X.; PEDRYCZ, W.; SONG, X. Possibilistic fuzzy clustering with high-density viewpoint. *Neurocomputing*, v. 329, p. 407–423, 2019. ISSN 0925-2312. Citado na página 93.
- THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. R. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2. ISBN 978-85-8143-087-4. Citado na página 122.
- THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. R. *Thomas' Calculus*. [S.l.]: Pearson Education, 2015. ISBN 9780134429809. Citado na página 149.
- TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. O. State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 29, p. 426–440, 2018. ISSN 2195-3899. Citado 7 vezes nas páginas 63, 69, 231, 275, 305, 316 e 361.
- TUNG, S. W.; QUEK, C.; GUAN, C. Safin: A self-adaptive fuzzy inference network. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 22, n. 12, p. 1928–1940, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 247, 248, 249, 257, 264 e 272.
- VEENMAN, C. J.; REINDERS, M. J. T.; BACKER, E. A maximum variance cluster algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 24, n. 9, p. 1273–1280, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 176 e 177.
- VITTER, J. S. Random sampling with a reservoir. *ACM Trans. Math. Softw.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 11, n. 1, p. 37–57, 1985. ISSN 0098-3500. Citado 4 vezes nas páginas 115, 118, 123 e 130.
- WANG, H.; SAAD, M.; KARAMTI, H.; GARG, H.; RAFIQ, A. An approach toward pattern recognition and decision-making using the concept of bipolar t-spherical fuzzy sets. *International Journal of Fuzzy Systems*, v. 25, n. 7, p. 2649–2664, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- WANG, L.-X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1994. ISBN 978-0130996312. Citado na página 63.

- WANG, Q.; LUO, Y. Research on a new power distribution control strategy of hybrid energy storage system for hybrid electric vehicles based on the subtractive clustering and adaptive fuzzy neural network. *Cluster Computing*, v. 25, p. 4413–4422, 2022. Citado na página 65.
- WANG, W.; LIU, W.; CHEN, H. Time-series forecasting via fuzzy-probabilistic approach with evolving clustering-based granulation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 30, n. 12, p. 5324–5336, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 69.
- WEE, W. G. *On generalizations of adaptive algorithms and applications of the fuzzy sets concept to pattern classification*. Tese (Doutorado) — Purdue Univ., West Lafayette, 1967. Citado na página 79.
- WELCH, B. L. The generalization of “Student’s” problem when several different population variances are involved. *Biometrika*, v. 34, n. 1-2, p. 28–35, 01 1947. ISSN 0006-3444. Citado na página 126.
- WU, X.; ZHOU, H.; WU, B.; ZHANG, T. A possibilistic fuzzy gath-geva clustering algorithm using the exponential distance. *Expert Systems with Applications*, v. 184, p. 115550, 2021. ISSN 0957-4174. Citado na página 65.
- XIE, X. L.; BENI, G. A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 13, n. 8, p. 841–847, 1991. Citado na página 177.
- XU, D.; TIAN, Y. A comprehensive survey of clustering algorithms. *Annals of Data Science*, v. 2, p. 165–193, 2015. Citado na página 75.
- YAGER, R. R.; FILEV, D. P. Approximate clustering via the mountain method. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 24, n. 8, p. 1279–1284, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 88.
- YOSHINARI, Y.; PEDRYCZ, W.; HIROTA, K. Construction of fuzzy models through clustering techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 54, n. 2, p. 157–165, 1993. ISSN 0165-0114. Citado na página 63.
- YU, H.; JIANG, L.; FAN, J.; LAN, R. Double-suppressed possibilistic fuzzy gustafson–kessel clustering algorithm. *Knowledge-Based Systems*, v. 276, p. 110736, 2023. ISSN 0950-7051. Citado na página 64.
- ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. Citado na página 63.
- ZEIGER, H.; MCEWEN, A. Approximate linear realizations of given dimension via ho’s algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, n. 2, p. 153–153, 1974. Citado na página 360.
- ZENG, S.; CHEN, S.-M.; TENG, M. O. Fuzzy forecasting based on linear combinations of independent variables, subtractive clustering algorithm and artificial bee colony algorithm. *Information Sciences*, v. 484, p. 350–366, 2019. ISSN 0020-0255. Citado na página 65.
- ZHAN, J.; YE, J.; DING, W.; LIU, P. A novel three-way decision model based on utility theory in incomplete fuzzy decision systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 30, n. 7, p. 2210–2226, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.

ZHANG, X.; WANG, H.; STOJANOVIC, V.; CHENG, P.; HE, S.; LUAN, X.; LIU, F. Asynchronous fault detection for interval type-2 fuzzy nonhomogeneous higher level markov jump systems with uncertain transition probabilities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 30, n. 7, p. 2487–2499, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.

ZHAO, J.; WERTZ, V.; GOREZ, R. A fuzzy clustering method for the identification of fuzzy models for dynamic systems. In: *Proceedings of 1994 9th IEEE International Symposium on Intelligent Control*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 172–177. Citado na página 63.

ZHOU, W. K-means clustering algorithm analysis on specific economic development problems in target countries. In: *2021 2nd International Conference on Computer Science and Management Technology (ICCSMT)*. [S.l.: s.n.], 2021. p. 396–402. Citado na página 68.

Apêndices

APÊNDICE A – Método OKID/ERA

Nebuloso Recursivo (*Recursive Fuzzy*

Observer/Kalman Filter

Identification/Eigensystem Realization

Algorithm)

Numerosos algoritmos para a construção de representações no espaço de estados de sistemas lineares são propostos na literatura de controle (JUANG, 1994). Entre os primeiros trabalhos apresentados, estavam o de Gilbert (GILBERT, 1963) e o de Kalman (KALMAN, 1963), que introduziram princípios importantes da teoria de realização de sistemas em termos dos conceitos de controlabilidade e observabilidade. Ambas as técnicas usam a matriz de função de transferência para resolver o problema de realização. Ho e Kalman mostraram que o problema de realização mínima¹ é equivalente a um problema de representação que envolve uma sequência de matrizes reais conhecidas como parâmetros de Markov (HO; KALMAN, 1966). Uma limitação comum do método de Ho-Kalman é que o efeito do ruído na análise dos dados não é considerado. Zieger e McEwen propuseram uma combinação do método Ho-Kalman com a técnica de Decomposição em Valores Singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*) para o tratamento de dados ruidosos (ZEIGER; MCEWEN, 1974). Neste contexto, o Algoritmo de Realização de Autossistema (ERA - *Eigensystem Realization Algorithm*) foi desenvolvido para identificação de parâmetros e redução de modelos de sistemas dinâmicos usando dados experimentais (JUANG; PAPPA, 1985). O ERA utiliza os parâmetros de Markov do sistema, que são dados históricos de resposta do sistema ao impulso ou pulso amostrado, para a obtenção de um modelo no espaço de estados de ordem mínima com base na decomposição em valores singulares.

Para a obtenção dos parâmetros de Markov de um sistema linear, foi desenvolvido um método no qual o modelo no espaço de estados e um correspondente observador de estados são determinados simultaneamente, chamado de algoritmo OKID (*Observer/Kalman filter Identification*), o qual é formulado inteiramente no domínio do tempo (CHEN et al., 1992; PHAN; JUANG; LONGMAN, 1992; PHAN et al., 1993). A sua principal diferença para os demais métodos contemporâneos de identificação de parâmetros de

¹ Realização mínima significa um modelo no espaço de estados com a menor ordem entre todos os possíveis sistemas realizados que têm a mesma relação entrada-saída dentro de um grau de precisão especificado (JUANG, 1994).

Markov é a introdução de um observador nas equações de identificação, o qual também pode ser usado em projetos de controle. Na sua implementação, os parâmetros de Markov do observador de estados são computados a partir dos dados de entrada e saída do sistema por meio do algoritmo de Mínimos Quadrados (LS - *Least Squares*), enquanto os parâmetros de Markov do sistema são computados a partir dos parâmetros de Markov do observador. O método OKID é simples de ser implementado e apresenta as vantagens associadas à abordagem de ganho de filtro de Kalman direto (JUANG, 1994).

A utilização conjunta dos algoritmos ERA e OKID tem sido recorrente em aplicações de modelagem/identificação de séries temporais e sistemas dinâmicos (GAGG et al., 2014; SÁNCHEZ; COUSO; GONZÁLEZ, 2014). No método OKID/ERA, o algoritmo OKID é utilizado para identificar os parâmetros de Markov do sistema, enquanto o ERA é utilizado para identificar, a partir dos parâmetros de Markov, a realização de ordem mínima do sistema no espaço de estados. Uma versão recursiva do método OKID/ERA é desenvolvida a partir da utilização do algoritmo de Mínimos Quadrados Recursivo (RLS - *Recursive Least Squares*) para a estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador, de modo que o método OKID/ERA Recursivo é aplicável em tarefas de modelagem/identificação *online*. A implementação do método OKID/ERA recursivo requer uma estimação inicial em batelada dos parâmetros de Markov do observador, a partir da qual a estimação recursiva é implementada (SANTOS, 2018).

Um sistema de inferência nebuloso evolutivo é capaz de modelar não linearidades complexas através de múltiplos modelos lineares evolutivos associados às proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas (ANGELOV; FILEV, 2004; ANGELOV; GU; PRÍNCIPE, 2018). No contexto em que os modelos lineares nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas são estruturados a partir da representação no espaço de estados, o método OKID/ERA Recursivo é útil na identificação desses modelos com uma ordem mínima. Neste caso, a versão nebulosa do método OKID/ERA Recursivo é desenvolvida a partir da utilização do algoritmo de Mínimos Quadrados Ponderado Nebuloso Recursivo (RFWLS - *Recursive Fuzzily Weighted Least Squares*) (LUGHOFFER, 2011a) para a estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador do modelo no espaço de estados de cada regra nebulosa evolutiva, de modo que o método OKID/ERA Nebuloso Recursivo é aplicável em tarefas de modelagem/identificação nebulosa *online* (TORRES; SERRA, 2018; PIRES; SERRA, 2020; GOMES; SERRA, 2024).

Considere o sistema de inferência nebuloso evolutivo, apresentado na Figura 59, que possui, na k -ésima amostra, $R_k \in \mathbb{N}^*$ regras nebulosas evolutivas, dadas por:

$$\mathfrak{R}_k^i : \text{ SE } \mathbf{x}_k \text{ é } \Theta_k^i, \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{z}_k^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{z}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k - \mathbf{G}_k^i (\mathbf{y}_{k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k-1}), \\ \hat{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{z}_k^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

em que $\mathfrak{R}_k^i$ é a i -ésima regra nebulosa evolutiva na k -ésima amostra, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o dado para

agrupamento nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $n \in \mathbb{N}^*$ é o número de coordenadas de $\mathbf{x}_k$, Θ_k^i é o i -ésimo grupo (conjunto nebuloso da proposição antecedente) na k -ésima amostra, $\mathbf{z}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i}$ é o vetor de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $n_z^i \in \mathbb{N}^*$ é a ordem do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de entrada do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, $n_u \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis de entrada, $\mathbf{y}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída, do sistema dinâmico a ser identificado, na $(k-1)$ -ésima amostra, $\hat{\mathbf{y}}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída do sistema de inferência nebuloso evolutivo na $(k-1)$ -ésima amostra, que é a estimativa de $\mathbf{y}_{k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $n_y \in \mathbb{N}^*$ é o número de variáveis de saída, $\mathbf{A}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_z^i}$ é a matriz de estado do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{B}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_u}$ é a matriz de entrada do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{C}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z^i}$ é a matriz de saída do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{D}_k^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ é a matriz de transição direta do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\mathbf{G}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_y}$ é a matriz de ganho do observador de estados da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra.

A.1 Algoritmo OKID Nebuloso Recursivo (*Recursive Fuzzy Observer/Kalman Filter Identification*)

A partir da equação do observador nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas em (A.1), as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{G}_k^i\} \big|_{i=1, \dots, R_k}$ são identificadas a partir dos parâmetros de Markov $\mathbf{Z}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ correspondentes aos modelos no espaço de estados na k -ésima amostra, os quais são identificados a partir dos parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ correspondentes aos modelos no espaço de estados na k -ésima amostra.

Os parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, correspondentes aos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$, são as matrizes $\mathbf{D}_k^i, \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i, \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{A}}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i, \dots, \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{p-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i$, onde $\mathbf{D}_k^i$ é a matriz de transição direta na Equação (A.1), $\mathbf{C}_k^i$ é a matriz de saída na Equação (A.1), $\bar{\mathbf{B}}_k^i = [\mathbf{B}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{D}_k^i, -\mathbf{G}_k^i] \in \mathbb{R}^{(n_z^i) \times (n_u + n_y)}$, $\mathbf{B}_k^i$ é a matriz de entrada na Equação (A.1), $\mathbf{G}_k^i$ é a matriz de ganho do observador de estados na Equação (A.1), $\bar{\mathbf{A}}_k^i = \mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{C}_k^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_z^i}$, $\mathbf{A}_k^i$ é a matriz de estados na Equação (A.1), e $p \in \mathbb{N}^*$ é o número de parâmetros de Markov a serem identificados, que é definido antes do processo de

identificação (JUANG, 1994). No método OKID Nebuloso Recursivo, para a identificação dos parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_{N_t}^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na N_t -ésima amostra ($N_t \in \mathbb{N}^*$ é o número de amostras utilizadas para o processo inicial de treinamento em batelada), a partir dos dados $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_k)^T & (\mathbf{y}_k)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u+n_y}$ (a concatenação dos sinais de entrada e saída do sistema dinâmico a ser identificado, em que $k = 1, \dots, N_t$), as seguintes matrizes são construídas (JUANG, 1994):

$$\mathbf{V}_{N_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p+1} & \mathbf{u}_{p+2} & \cdots & \mathbf{u}_{N_t} \\ \mathbf{x}_p & \mathbf{x}_{p+1} & \cdots & \mathbf{x}_{N_t-1} \\ \mathbf{x}_{p-1} & \mathbf{x}_p & \cdots & \mathbf{x}_{N_t-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{N_t-p} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\Psi_{N_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{p+1} & \mathbf{y}_{p+2} & \cdots & \mathbf{y}_{N_t} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{Q}_{N_t}^i = \begin{bmatrix} \mu_{p+1,N_t}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_{p+2,N_t}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{N_t,N_t}^i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\Omega_{N_t}^i = \left(\mathbf{V}_{N_t} \mathbf{Q}_{N_t}^i (\mathbf{V}_{N_t})^T \right)^{-1}, \quad (\text{A.5})$$

onde $\mathbf{V}_{N_t} \in \mathbb{R}^{(n_u+np) \times (N_t-p)}$ é a matriz de regressores da equação do observador em (A.1) na N_t -ésima amostra, $n = n_u + n_y$ é o número de coordenadas de $\mathbf{x}_k$, $\Psi_{N_t} \in \mathbb{R}^{n_y \times (N_t-p)}$ é a matriz de saída da equação do observador em (A.1) na N_t -ésima amostra, $\mathbf{Q}_{N_t}^i \in \mathbb{R}^{(N_t-p) \times (N_t-p)}$ é a matriz de pesos associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva na N_t -ésima amostra, composta pelos graus de pertinência $\mu_{k,N_t}^i \Big|_{k=p+1,\dots,N_t, i=1,\dots,R_{N_t}}$ dos dados $\mathbf{x}_k \Big|_{k=p+1,\dots,N_t}$ em relação aos grupos $\Theta_{N_t}^i \Big|_{i=1,\dots,R_{N_t}}$ na N_t -ésima amostra (computados conforme a Equação 4.2 para $N = N_t$), e $\Omega_{N_t}^i \in \mathbb{R}^{(n_u+np) \times (n_u+np)}$ é a matriz de covariância associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva na N_t -ésima amostra, que é utilizada para a estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ nas amostras subsequentes ($k > N_t$). Os parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_{N_t}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{N_t}^i & \mathbf{C}_{N_t}^i \bar{\mathbf{B}}_{N_t}^i & \mathbf{C}_{N_t}^i \bar{\mathbf{A}}_{N_t}^i \bar{\mathbf{B}}_{N_t}^i & \cdots \\ \mathbf{C}_{N_t}^i \left(\bar{\mathbf{A}}_{N_t}^i \right)^{p-1} \bar{\mathbf{B}}_{N_t}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_u+np)}$ na N_t -ésima amostra são computados usando o algoritmo de Mínimos Quadrados Ponderado Nebuloso (FWLS - *Fuzzily Weighted Least Squares*) como segue (LUGHOFER, 2011a):

$$\bar{\mathbf{Z}}_{N_t}^i = \Psi_{N_t} \mathbf{Q}_{N_t}^i (\mathbf{V}_{N_t})^T \Omega_{N_t}^i \quad (\text{A.6})$$

Após a N_t -ésima amostra ($k > N_t$), os parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^i & \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i & \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{A}}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i & \cdots & \mathbf{C}_k^i \left(\bar{\mathbf{A}}_k^i \right)^{p-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_u+np)}$ são computados recursivamente usando o algoritmo de Mínimos Quadrados Ponderado Nebuloso Recursivo (*Recursive*

Fuzzily Weighted Least Squares) (LUGHOFFER, 2011a):

$$\mathbf{b}_k^i = \frac{(\mathbf{a}_k)^T \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i}{\frac{\tilde{\lambda}}{\mu_k^i} + (\mathbf{a}_k)^T \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i \mathbf{a}_k}, \quad (\text{A.7})$$

$$\boldsymbol{\Omega}_k^i = \tilde{\lambda}^{-1} \boldsymbol{\Omega}_{k-1}^i \left(\mathbf{I}_{(n_u+np) \times (n_u+np)} - \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^i \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_k^i = \bar{\mathbf{Z}}_{k-1}^i + \left(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{Z}}_{k-1}^i \mathbf{a}_k \right) \mathbf{b}_k^i, \quad (\text{A.9})$$

onde $\mathbf{b}_k^i \in \mathbb{R}^{1 \times (n_u+np)}$ é o vetor de correção do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo associado à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{a}_k = [\mathbf{u}_k \ \mathbf{x}_{k-1} \ \mathbf{x}_{k-2} \ \cdots \ \mathbf{x}_{k-p}]^T \in \mathbb{R}^{n_u+np}$ é o vetor de regressores que representa a $(k-p)$ -ésima coluna da matriz $\mathbf{V}_k$ (apresentada na Equação A.2 para $k = N_t$), $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ é o fator de esquecimento do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo, μ_k^i é o grau de pertinência do dado $\mathbf{x}_k$ em relação ao i -ésimo grupo $\boldsymbol{\Theta}_k^i$ na k -ésima amostra, computado conforme Equação (3.87), $\boldsymbol{\Omega}_k^i \in \mathbb{R}^{(n_u+np) \times (n_u+np)}$ é a matriz de covariância do algoritmo de mínimos quadrados ponderado nebuloso recursivo associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{I}_{(n_u+np) \times (n_u+np)} \in \mathbb{R}^{n_u+np}$ é a matriz identidade de ordem $n_u + np$, e $\mathbf{y}_k$ é o sinal de saída, do sistema dinâmico a ser identificado, na k -ésima amostra.

Considerando que, para todas as regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra, os parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{Z}}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ são dados por $\bar{\mathbf{Z}}_k^i = [\bar{\mathbf{Z}}_{k,0}^i \ \bar{\mathbf{Z}}_{k,1}^i \ \bar{\mathbf{Z}}_{k,2}^i \ \cdots \ \bar{\mathbf{Z}}_{k,p}^i] = \left[\mathbf{D}_k^i \ \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i \ \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{A}}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i \ \cdots \ \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{p-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \right]$, onde $\bar{\mathbf{Z}}_{k,0}^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $\bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^i \big|_{j=1, \dots, p} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, segue que (JUANG, 1994):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{k,0}^i &= \mathbf{D}_k^i, \\ \bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^i &= \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \\ &= \left[\mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{C}_k^i)^{j-1} (\mathbf{B}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{D}_k^i), \ -\mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i + \mathbf{G}_k^i \mathbf{C}_k^i)^{j-1} \mathbf{G}_k^i \right] \\ &= \left[\bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^{i,1}, \ -\bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^{i,2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde $\bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^{i,1} \big|_{j=1, \dots, p} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $\bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^{i,2} \big|_{j=1, \dots, p} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$.

A partir da Equação (A.10), são computados os parâmetros de Markov $\mathbf{Z}_k^i = [\mathbf{Z}_{k,0}^i \ \mathbf{Z}_{k,1}^i \ \mathbf{Z}_{k,2}^i \ \cdots \ \mathbf{Z}_{k,p}^i \ \cdots] = [\mathbf{D}_k^i \ \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i \ \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{A}}_k^i \bar{\mathbf{B}}_k^i \ \cdots \ \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^{p-1} \bar{\mathbf{B}}_k^i \ \cdots] \in \mathbb{R}^{n_y \times \infty}$, correspondentes aos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1, \dots, R_k}$ na k -ésima amostra, através da seguinte expressão (JUANG, 1994):

$$\mathbf{Z}_{k,j}^i = \begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}_{k,0}^i, & \text{se } j = 0, \\ \bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^{i,1} - \sum_{l=1}^j \bar{\mathbf{Z}}_{k,l}^{i,2} \mathbf{Z}_{k,j-l}^i, & \text{se } 1 \leq j \leq p, \\ -\sum_{l=1}^p \bar{\mathbf{Z}}_{k,l}^{i,2} \mathbf{Z}_{k,j-l}^i, & \text{se } j > p, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

onde $\mathbf{Z}_{k,j}^i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para a identificação das matrizes de ganho $\mathbf{G}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos observadores de estado das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra, a sequência de parâmetros $\mathbf{Z}_{k,j}^{i,o} \big|_{j=1,2,\dots,i=1,\dots,R_k} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, dada por $\mathbf{Z}_{k,j}^{i,o} = \mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i)^{j-1} \mathbf{G}_k^i$, é calculada como segue (JUANG, 1994):

$$\mathbf{Z}_{k,j}^{i,o} = \begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}_{k,1}^{i,2}, & \text{se } j = 1, \\ \bar{\mathbf{Z}}_{k,j}^{i,2} - \sum_{l=1}^{j-1} \bar{\mathbf{Z}}_{k,l}^{i,2} \mathbf{Z}_{k,j-l}^{i,o}, & \text{se } 2 \leq j \leq p, \\ -\sum_{l=1}^p \bar{\mathbf{Z}}_{k,l}^{i,2} \mathbf{Z}_{k,j-l}^{i,o}, & \text{se } j > p \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

A.2 Algoritmo de Realização de Autossistema Nebuloso (Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm)

No Algoritmo de Realização de Autossistema Nebuloso (Fuzzy ERA - Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm), são construídas, no processo de identificação das matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i\} \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra, a partir dos parâmetros de Markov $\mathbf{Z}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ computados pela Equação (A.11), as seguintes matrizes (JUANG, 1994):

$$\mathcal{H}_{k,0}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{k,1}^i & \mathbf{Z}_{k,2}^i & \cdots & \mathbf{Z}_{k,\beta_{\mathcal{H}}}^i \\ \mathbf{Z}_{k,2}^i & \mathbf{Z}_{k,3}^i & \cdots & \mathbf{Z}_{k,1+\beta_{\mathcal{H}}}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathcal{H}}}^i & \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathcal{H}}+1}^i & \cdots & \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathcal{H}}+\beta_{\mathcal{H}}-1}^i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{H}_{k,1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{k,2}^i & \mathbf{Z}_{k,3}^i & \cdots & \mathbf{Z}_{k,1+\beta_{\mathcal{H}}}^i \\ \mathbf{Z}_{k,3}^i & \mathbf{Z}_{k,4}^i & \cdots & \mathbf{Z}_{k,2+\beta_{\mathcal{H}}}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathcal{H}}+1}^i & \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathcal{H}}+2}^i & \cdots & \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathcal{H}}+\beta_{\mathcal{H}}}^i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

onde $\mathcal{H}_{k,j}^i \big|_{j=0,1} \in \mathbb{R}^{(\alpha_{\mathcal{H}} n_y) \times (\beta_{\mathcal{H}} n_u)}$ são as matrizes de Hankel do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\alpha_{\mathcal{H}}$ é o número de blocos de linhas das matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{k,j}^i \big|_{j=0,1}$, o qual é definido antes do processo de identificação, e $\beta_{\mathcal{H}}$ é o número de blocos de colunas das matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{k,j}^i \big|_{j=0,1}$, o qual é definido antes do processo de identificação. Os valores de $\alpha_{\mathcal{H}}$ e $\beta_{\mathcal{H}}$ devem ser maiores que as ordens $n_z^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$. Os valores das ordens $n_z^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos modelos no espaço de estados são calculados por:

$$n_z^i = \text{rank}(\mathcal{H}_{N_t,0}^i), \quad (\text{A.15})$$

onde $\mathcal{H}_{N_t,0}^i$ é a matriz de Hankel associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_{N_t}^i$ na N_t -ésima amostra. As matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{k,0}^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra são fatoradas usando a decomposição em valores singulares da seguinte forma (JUANG, 1994):

$$\mathcal{H}_{k,0}^i = \mathcal{R}_k^i \Sigma_k^i \left(\mathcal{S}_k^i \right)^T, \quad (\text{A.16})$$

onde as matrizes $\mathcal{R}_k^i \in \mathbb{R}^{(\alpha \mathcal{H} n_y) \times (\alpha \mathcal{H} n_y)}$ e $\mathcal{S}_k^i \in \mathbb{R}^{(\beta \mathcal{H} n_u) \times (\beta \mathcal{H} n_u)}$ são quadradas e ortonormais, e $\Sigma_k^i \in \mathbb{R}^{(\alpha \mathcal{H} n_y) \times (\beta \mathcal{H} n_u)}$ é uma matriz retangular dada por (JUANG, 1994):

$$\Sigma_k^i = \begin{bmatrix} \Sigma_{k,n_z^i}^i & \mathbf{O}_{(n_z^i) \times (\beta \mathcal{H} n_u - n_z^i)} \\ \mathbf{O}_{(\alpha \mathcal{H} n_y - n_z^i) \times (n_z^i)} & \mathbf{O}_{(\alpha \mathcal{H} n_y - n_z^i) \times (\beta \mathcal{H} n_u - n_z^i)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

onde $\mathbf{O}$ é uma matriz nula cuja ordem é indicada no subscrito, e $\Sigma_{k,n_z^i}^i \in \mathbb{R}^{n_z^i \times n_z^i}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os n_z^i valores singulares positivos da matriz de Hankel $\mathcal{H}_{k,0}^i$ na k -ésima amostra. As matrizes $\mathcal{R}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são dadas por (JUANG, 1994):

$$\mathcal{R}_k^i = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{k,n_z^i}^i & \mathcal{R}_{k,O}^i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

onde $\mathcal{R}_{k,n_z^i}^i \in \mathbb{R}^{(\alpha \mathcal{H} n_y) \times (n_z^i)}$ é a matriz formada pelas primeiras n_z^i colunas de $\mathcal{R}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\mathcal{R}_{k,O}^i \in \mathbb{R}^{(\alpha \mathcal{H} n_y) \times (\alpha \mathcal{H} n_y - n_z^i)}$ é a matriz formada pelas demais $\alpha \mathcal{H} n_y - n_z^i$ colunas de $\mathcal{R}_k^i$ na k -ésima amostra. As matrizes $\mathcal{S}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ são dadas por (JUANG, 1994):

$$\mathcal{S}_k^i = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{k,n_z^i}^i & \mathcal{S}_{k,O}^i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

onde $\mathcal{S}_{k,n_z^i}^i \in \mathbb{R}^{(\beta \mathcal{H} n_u) \times (n_z^i)}$ é a matriz formada pelas primeiras n_z^i colunas de $\mathcal{S}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\mathcal{S}_{k,O}^i \in \mathbb{R}^{(\beta \mathcal{H} n_u) \times (\beta \mathcal{H} n_u - n_z^i)}$ é a matriz formada pelas demais $\beta \mathcal{H} n_u - n_z^i$ colunas de $\mathcal{S}_k^i$ na k -ésima amostra. Considerando as matrizes $\mathbf{E}_{\beta \mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{(\beta \mathcal{H} n_u) \times (n_u)}$ e $\mathbf{E}_{\alpha \mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{(\alpha \mathcal{H} n_y) \times (n_y)}$, dadas, respectivamente, por (JUANG, 1994):

$$\mathbf{E}_{\beta \mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \\ \mathbf{O}_{(\beta \mathcal{H} n_u - n_u) \times n_u} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

e

$$\mathbf{E}_{\alpha \mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y \times n_y} \\ \mathbf{O}_{(\alpha \mathcal{H} n_y - n_y) \times n_y} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

tem-se que as matrizes $\{\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i\} \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos modelos no espaço de estados nas proposições consequentes das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \Big|_{i=1,\dots,R_k}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra são identificadas por (JUANG, 1994):

$$\mathbf{A}_k^i = \left(\Sigma_{k,n_z^i}^i \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathcal{R}_{k,n_z^i}^i \right)^T \mathcal{H}_{k,1}^i \mathcal{S}_{k,n_z^i}^i \left(\Sigma_{k,n_z^i}^i \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.22a})$$

$$\mathbf{B}_k^i = \left(\Sigma_{k,n_z^i}^i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{S}_{k,n_z^i}^i \right)^T \mathbf{E}_{\beta \mathcal{H}}, \quad (\text{A.22b})$$

$$\mathbf{C}_k^i = \left(\mathbf{E}_{\alpha \mathcal{H}} \right)^T \mathcal{R}_{k,n_z^i}^i \left(\Sigma_{k,n_z^i}^i \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.22c})$$

$$\mathbf{D}_k^i = \mathbf{Z}_{k,0}^i \quad (\text{A.22d})$$

Para identificação das matrizes de ganho $\mathbf{G}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos observadores de estado das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ na k -ésima amostra, a partir da sequência de parâmetros $\mathbf{Z}_{k,j}^{i,o} \big|_{j=1,2,\dots,i=1,\dots,R_k} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ dada por $\mathbf{Z}_{k,j}^{i,o} = \mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i)^{j-1} \mathbf{G}_k^i$ e computada pela Equação (A.12), as seguintes matrizes são construídas (JUANG, 1994):

$$\mathbf{O}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^i \\ \mathbf{C}_k^i \mathbf{A}_k^i \\ \mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k^i (\mathbf{A}_k^i)^{\alpha_{\mathbf{H}} + \beta_{\mathbf{H}} - 1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{Z}_k^{i,o} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{k,1}^{i,o} \\ \mathbf{Z}_{k,2}^{i,o} \\ \mathbf{Z}_{k,3}^{i,o} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{k,\alpha_{\mathbf{H}} + \beta_{\mathbf{H}}}^{i,o} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

onde $\mathbf{O}_k^i \in \mathbb{R}^{(\alpha_{\mathbf{H}} n_y + \beta_{\mathbf{H}} n_y) \times n_z^i}$ é a matriz de observabilidade do modelo no espaço de estados na proposição consequente da i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, $\mathbf{Z}_k^{i,o} \in \mathbb{R}^{(\alpha_{\mathbf{H}} n_y + \beta_{\mathbf{H}} n_y) \times n_y}$ é a matriz que contém a sequência de parâmetros $\mathbf{Z}_{k,j}^{i,o} \big|_{j=1,\dots,\alpha_{\mathbf{H}} + \beta_{\mathbf{H}}, i=1,\dots,R_k}$, computados na Equação (A.12), associada à i -ésima regra nebulosa evolutiva $\mathfrak{R}_k^i$ na k -ésima amostra, e $\alpha_{\mathbf{H}}$ e $\beta_{\mathbf{H}}$ devem ser escolhidos suficientemente grandes para garantir que as matrizes de observabilidade $\mathbf{O}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ tenham *ranks* iguais a $n_z^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$, que são as ordens dos modelos no espaço de estados identificadas na Equação (A.15). As matrizes de ganho $\mathbf{G}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ dos observadores de estado das regras nebulosas evolutivas $\mathfrak{R}_k^i \big|_{i=1,\dots,R_k}$ do sistema de inferência nebuloso evolutivo na k -ésima amostra são identificadas por (JUANG, 1994):

$$\mathbf{G}_k^i = \left((\mathbf{O}_k^i)^T \mathbf{O}_k^i \right)^{-1} (\mathbf{O}_k^i)^T \mathbf{Z}_k^{i,o} \quad (\text{A.25})$$