

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Eletrodinâmicas estendidas em meios contínuos e efeitos
ópticos**

Pedro Diego da Silva e Silva

ORIENTADOR: MANOEL MESSIAS FERREIRA JR.

SÃO LUÍS
2022

PEDRO DIEGO DA SILVA E SILVA

Eletrodinâmicas estendidas em meios contínuos e efeitos ópticos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos e Partículas sob efeitos da violação da simetria de Lorentz.

Orientador: Prof. Manoel Messias Ferreira Junior

SÃO LUÍS
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

da Silva e Silva, Pedro Diego.

Eletrodinâmicas estendidas em meios contínuos e efeitos
ópticos / Pedro Diego da Silva e Silva. - 2022.

236 f.

Orientador(a): Manoel Messias Ferreira Jr.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
2022.

1. Altas derivadas. 2. Efeitos Ópticos. 3.
Eletrodinâmicas estendidas. 4. Meios contínuos. I.
Messias Ferreira Jr., Manoel. II. Título.

ELETRODINÂMICAS ESTENDIDAS EM MEIOS CONTÍNUOS E EFEITOS ÓPTICOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos e Partículas sob efeitos da violação da simetria de Lorentz.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Marco Schreck
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Prof. Dr. Vitorio Alberto de Lorenci
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

À minha família

Agradecimentos

A mais longa jornada é feita passo a passo. Os passos dados até aqui se devem a muitas pessoas; agradeço imensamente a todas elas. Especialmente, agradeço aos meus pais, pois, sem eles, jamais teria o apoio e carinho fundamentais na vida. Agradeço pela companhia e carinho dos meus irmãos, Henrique e Rayanne, que sempre me apoiaram.

Deixo um agradecimento especial ao meu amigo Robert, também conhecido como Jambão, pela companhia, parceria e conversas motivadoras e calorosas.

Ainda há muitos outros que merecem meus sinceros agradecimentos. Agradeço a todos que me ajudaram de forma direta e indireta nessa jornada.

Agradeço imensamente ao meu orientador Prof. Manoel Messias por todos os seus ensinamentos desde a época da graduação em Física. Tive imensa ajuda do Prof. Manoel no desenvolvimento desta Tese e ao longo de toda minha jornada. Deveras aprendi muito com ele, não só sobre Física, mas também sobre valores humanos, morais e sociais. Agradeço por tudo que ele fez para me guiar ao longo de um caminho iluminado em um mundo cercado de trevas... Muito obrigado, Prof. Manoel!

“No problem is too small or too trivial if we can really do something about it.”

Richard P. Feynman [147]

RESUMO

Neste trabalho, discutiremos a propagação eletromagnética e propriedades ópticas em meios dielétricos regidos por eletrodinâmicas estendidas, através de relações constitutivas modificadas ou por meio de derivadas superiores. Estudamos propriedades de polarização, modos propagantes, birrefringência, rotação óptica e dicroísmo, através da Eledrodinâmica Clássica de Maxwell, dentro dum tratamento de Teoria Clássica de Campos. Inicialmente, apresentamos, no capítulo 2, o ferramental básico a ser utilizado ao longo deste trabalho.

No capítulo 3, comentamos sobre o efeito magnético quiral (CME), a geração de corrente elétrica macroscópica na presença de um campo magnético devido à assimetria entre o número de densidade de férmions de mão-direita e -esquerda no sistema. Motivados por esse efeito intensamente investigado na literatura, propomos uma generalização da lei de Ohm para descrever meios isotrópicos e dispersivos dotados de condutividade magnética. Para o caso de condutividade magnética diagonal isotrópica, o qual inclui o CME, os índices de refração são modificados, implicando em birrefringência. Para os casos de condutividade magnética não-diagonal, os índices de refração modificados exibem partes imaginárias, atribuindo comportamento condutor a um meio dielétrico usual.

No capítulo 4, investigamos os efeitos originados de relações constitutivas estendidas na propagação de ondas em meios bi-isotrópicos e bi-anisotrópicos, calculando as relações de dispersão e os índices de refração. Para os meios bi-anisotrópicos, especificamos duas classes de parâmetros magnetoelétricos, representados por tensores simétrico e anitssimétrico. Os três casos examinados fornecem índices de refração reais e distintos, que implicam em birrefringência. A anisotropia ou efeito de birrefringência é determinada pelo poder de rotação ou pela diferença de fase, sendo dada em termos dos parâmetros magnetoelétricos. Discutimos ainda as velocidades de grupo e vetor de Poynting em cada caso.

No capítulo 5, investigamos o efeito de reversão do poder de rotação em meios bi-isotrópicos dotados de condutividade magnética. O cenário em que a condutividade é isotrópica manifesta birrefringência circular, descrita pelo poder de rotação dispersivo que muda de sinal para uma dada frequência. Para um meio bi-isotrópico com a condutividade antissimétrica, obtém-se um complicado poder de rotação dispersivo, também manifestando inversão de sinal. Tais cenários também indicam uma reversão na quiralidade do meio, propriedade não usual em dielétricos.

No capítulo 6, estudamos como a eletrodinâmica CPT-ímpar de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) e sua extensão não-mínima de dimensão 5 alteram o comportamento óptico de meios contínuos. Iniciamos revisando o modelo MCFJ (com termo CPT-ímpar de dimensão 3) em meio dielétrico, determinando as equações de Maxwell modificadas e relações de dispersão. Para o caso puramente *timelike*, os índices de refração são reais, exibindo birrefringência, e os modos de propagação associados são descritos por polarizações circulares. Para o caso puramente *spacelike*, um índice de refração é sempre real e o outro pode ser complexo. Os modos de propagação circularmente polarizados podem exibir birrefringência e dicroísmo.

Para o modelo modificado por termo CPT-ímpar de dimensão 5, abordado ainda no capítulo 6, determinamos os índices de refração a partir de uma equação de dispersão de sexta ordem. Para o caso puramente *timelike*, obtemos três índices de refração, um deles sendo real e os outros dois sendo complexos. Tais índices de refração são associados a dois modos de propagação circularmente polarizados, exibindo birrefringência ou dicroísmo, dependendo do intervalo de frequência. Para o caso puramente *spacelike*, encontramos cenários de propagação eletromagnética análogos àqueles que ocorrem em dielétricos dispersivos.

Palavras-Chave: Eletrodinâmica Clássica. Relações constitutivas. Relações de dispersão. Birrefringência. Modelo Padrão Estendido não-mínimo. Violação de Lorentz. Eletrodinâmica com altas derivadas.

Abstract

In this work, we discuss the electromagnetic propagation and optical properties in dielectric media governed by an extended electrodynamics by means of modified constitutive relations or higher derivatives. We study polarization, modes of propagation, birefringence, optical rotation and dichroism through Maxwell's Classical Electrodynamics, within the framework of Classical Field Theory. First we present in chapter 2 the basic mathematical tools which are used throughout this work.

In chapter 3, we comment about the chiral magnetic effect (CME), the generation of a macroscopic electric current in the presence of a magnetic field due to an asymmetry between the number density of left- and right-handed fermions in the system. Such an effect is, on the one hand, and the optical properties of continuous media, on the other hand, is a strong motivation for our investigation. Here we propose a generalization of Ohm's law in order to describe isotropic and dispersive media endowed with a magnetic conductivity. For the case of an isotropic magnetic conductivity, which includes the CME, the refractive indices are modified, implying birefringence. For the scenarios of a non-diagonal magnetic conductivity, the modified refractive indices exhibit imaginary pieces, ascribing conducting behavior to a usual dielectric medium.

In chapter 4, we investigate the effects originating from extended constitutive relations on electromagnetic-wave propagation in bi-isotropic and bi-anisotropic media, by calculating dispersion relations and refractive indices. For the bi-anisotropic media, we specify two classes of magnetoelectric parameters represented by symmetric and antisymmetric tensors. The anisotropy of the birefringence effect is determined through the rotatory power or the phase shift, which are evaluated in terms of the magnetoelectric parameters. We also discuss the group velocities and Poynting vector in each case.

In chapter 5, we investigate the rotatory-power reversal effect on bi-isotropic media in the presence of a magnetic conductivity. For the case of an isotropic conductivity, birefringence occurs, described by the dispersive rotatory power that changes its sign at a given frequency. For the case of an antisymmetric conductivity, one obtains the corresponding rotatory power and dichroism coefficients for the both scenarios of null and non-null Ohmic conductivity. All these cases indicate a chirality reversal of the medium when the magnetic conductivity is isotropic, and that anisotropies in the magnetic current can prevent chirality reversal.

In chapter 6, we study how the CPT-odd Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) electrodynamics and its dimension-5 extension modify the optical behavior of continuous media. We start by reviewing the MCFJ model in a dielectric medium, determining the modified Maxwell equations and dispersion relations. For the purely timelike case, the refractive indices are real, exhibiting birefringence, and the propagation modes are described by circularly polarized vectors. In the purely spacelike case, one refractive index is always real and the other one may be complex. The circularly polarized propagation modes may exhibit birefringence and dichroism.

For the MCFJ model modified by the CPT-odd terms of dimension 5, also discussed in chapter 6, we determine the refractive indices from a sixth order dispersion equation. For the purely timelike

case, we obtain three refractive indices, one being real and the other complex conjugates of each other. These refractive indices are associated with two circularly polarized propagation modes. Furthermore, depending on the frequency regime, one obtains birefringence and dichroism. In the purely spacelike case, we find scenarios of electromagnetic propagation analogous to those that occur in dispersive dielectrics.

Key-words: Classical Electrodynamics. Constitutive Relations. Dispersion Relations. Birefringence. Nonminimal Standard Model-Extension. Lorentz Violation. Electrodynamics with higher-order derivatives.

SUMÁRIO

RESUMO	8
Abstract	10
1 Introdução	16
2 Eletrodinâmica Clássica	23
2.1 Relações constitutivas	23
2.2 Formulação covariante da eletrodinâmica em meios	27
2.3 Relações de dispersão para propagação eletromagnética	33
2.3.1 Birrefringência e atividade óptica	36
2.3.2 Atenuação e reflexão	38
3 Efeitos da condutividade magnética na propagação de ondas eletromagnéticas	39
3.1 Tensor de condutividade magnética	40
3.2 Relações de dispersão e modos de propagação	42
3.2.1 Caso diagonal isotrópico	43
3.2.1.1 Meio dielétrico não-condutor	44
3.2.2 Caso diagonal anisotrópico	48
3.2.2.1 Dielétrico não-condutor	50
3.2.3 Caso antissimétrico	54
3.2.3.1 Dielétrico não-condutor e modos de propagação	56
3.2.4 Caso simétrico	57
3.2.4.1 Dielétrico não-condutor e modos de propagação	59
3.3 Consistência das equações de Maxwell	60
3.4 Reflexão e <i>skin depth effect</i>	61
3.4.1 Skin depth effect	61
3.4.2 Reflexão	62
4 Meios bi-anisotrópicos com relações simétrica e antissimétrica	64
4.1 Relações constitutivas estendidas	65
4.2 Relações para conservação de energia	66
4.3 Propagação de ondas eletromagnéticas em cenários bi-isotrópicos e bi-anisotrópicos	67
4.3.1 Caso bi-isotrópico	68
4.3.1.1 Modos de propagação	70
4.3.1.2 Efeitos ópticos dos parâmetros magnetoelétricos em dielétricos não-condutores	71
4.3.1.3 Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting	71

4.3.2	Caso bi-anisotrópico simétrico	74
4.3.2.1	Configuração d -longitudinal	77
4.3.2.2	Configuração d -transversal	77
4.3.2.3	Configuração d -genérico	79
4.3.2.4	Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting	80
4.3.3	Caso bi-anisotrópico antissimétrico	85
4.3.3.1	Configuração a -ortogonal	88
4.3.3.2	Configuração a -longitudinal	90
4.3.3.3	Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting	91
5	Reversão de quiralidade em meios bi-isotrópicos induzida pela condutividade magnética	98
5.1	Comentário sobre meios de mão-direita e mão-esquerda	99
5.2	Meio bi-isotrópico dotado de condutividade magnética	101
5.2.1	Caso de condutividade magnética isotrópica	101
5.2.1.1	Modos de propagação	102
5.2.1.2	Efeitos ópticos	103
5.2.2	Caso antissimétrico	105
5.2.2.1	Modos de propagação	106
5.2.2.2	Efeitos ópticos	107
5.3	Caso simétrico	111
5.3.1	Modos de propagação	113
5.3.1.1	Caso particular 1	113
5.3.1.2	Caso particular 2	114
5.3.2	Efeitos ópticos	115
6	Eletrodinâmica modificada por termos CPT-ímpar	118
6.1	Simetria de Lorentz	119
6.2	A eletrodinâmica de Maxwell-Field-Jackiw	120
6.3	Modelo Padrão Estendido	122
6.3.1	Setor de fótons do Modelo Padrão Estendido	123
6.4	Efeitos do termo <i>CPT</i> -ímpar de dimensão 3 na eletrodinâmica de meios materiais	124
6.4.1	Cenário puramente timelike	128
6.4.2	Cenário puramente spacelike	130
6.4.2.1	Caso V -perpendicular	131
6.4.2.2	Caso V -longitudinal	133
6.5	Efeitos do termo <i>CPT</i> -ímpar de dimensão 5 na eletrodinâmica de meios materiais	135
6.5.1	Cenário puramente timelike	139
6.5.1.1	Modos de propagação	144
6.5.2	Cenário puramente spacelike	145

6.5.2.1	Caso \mathbf{U} -perpendicular	145
6.5.2.2	Caso \mathbf{U} -longitudinal	150
7	Considerações Finais	153
	Apêndices	156
A	Relações de Minkowski para meios bi-isotrópicos	157
B	Modos de propagação para o caso diagonal anisotrópico	161
B.0.1	Modo de propagação (+)	162
B.0.2	Modo de propagação (−)	164
B.1	Autovetores da permissividade elétrica efetiva	166
B.2	Verificando a relação entre u_{\pm} e v_{\pm}	167
C	Modos de propagação para o caso antissimétrico	169
D	Modos de propagação para o caso simétrico	172
D.1	Modo de propagação (+)	173
D.2	Modo de propagação (−)	174
E	Determinando as densidades de carga	176
E.1	Caso antissimétrico	176
E.2	Caso simétrico	177
F	Teorema de Poynting	181
G	Simplificando o vetor de Poynting para meio bi-anisotrópico com relação antisimétrica	185
H	Modos de propagação para meios bi-isotrópicos dotados de condutividade magnética	188
H.1	Caso isotrópico	188
H.2	Caso antissimétrico	190
I	Obtenção das Equações de Maxwell modificadas por termo CPT-ímpar de dimensão 3 em meios	192
J	Simplificando equações de dispersão para o vácuo	196
J.1	Obtenção da Eq. (6.4.13)	196
J.2	Obtenção da Eq. (6.5.21)	197

K	Equações de Dispersão dos modelos CPT-ímpar de dimensões 3 e 5 em termos de quadrivetores	198
K.1	Modelo CPT -ímpar de dimensão 3	198
K.2	Modelo CPT -ímpar de dimensão 5	201
L	Modos de propagação do modelo CPT-ímpar de dimensão 3	205
L.1	Caso timelike	205
L.2	Caso spacelike	209
L.2.1	V-perpendicular	209
L.2.2	V-longitudinal	211
M	Obtenção das Equações de Maxwell modificadas por termo CPT-ímpar de dimensão 5 em meios	213
N	Modos de propagação do modelo CPT-ímpar de dimensão 5	217
N.1	Cenário timelike	217
N.2	Cenário spacelike	221
N.2.1	Caso U-perpendicular	221
N.2.2	Caso U-longitudinal	224
O	Verificando a invariância de gauge para o modelo de dimensão 5	225
	Referências	227

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Das interações fundamentais da Natureza, talvez a eletromagnética seja a mais perceptível aos sentidos humanos. Efeitos dessa interação já eram conhecidos [1–3] desde a Grécia Antiga¹. A interação eletromagnética é responsável por manter a matéria coesa, permitindo que moléculas sejam ligadas a átomos, e também elétrons aos núcleos atômicos. O sucesso da Eletrodinâmica Clássica ou Eletromagnetismo pode ser observado tanto do ponto de vista tecnológico (por exemplo, motores elétricos, telecomunicações, computadores, etc.), quanto do ponto de vista teórico, permitindo novas investigações sobre efeitos físicos envolvendo ondas eletromagnéticas, e também como arquétipo de Teoria de Campos, modelo teórico que se tornou fundamental no desenvolvimento do Modelo Padrão (MP) das interações fundamentais desenvolvido no século XX.

Atualmente, grande parte do avanço tecnológico, decorrente do uso dessa interação, é proporcionada pelo entendimento das leis que regem os fenômenos eletromagnéticos e pela investigação de novos cenários envolvendo esses fenômenos. A nível clássico, o desenvolvimento da Eletrodinâmica foi marcado por grandes descobertas realizadas por várias mentes astutas e lépidas. Através de experimentos envolvendo eletrização por atrito, Charles Façois du Fay (1698–1739), descobriu em 1733 dois tipos de eletricidade², chamadas de vítrea e resinosa [4–6]. Os resultados de Du Fay estabelecem que corpos com a mesma eletricidade/carga se repelem e com cargas diferentes se atraem. Pouco tempo depois, em 1751, Benjamin Franklin (1706–1790) afirma (baseando-se em seus experimentos) que tais “eletricidades”, denominadas por ele de positiva e negativa, são do mesmo tipo e que a eletrização apenas transfere a carga³ de um corpo para o outro [7]. Dessa forma, estabeleceu-se o princípio fundamental conhecido como conservação da carga. Tal princípio está presente em teorias de campo que apresentam simetrias, como ocorre no Eletromagnetismo. Mais tarde, em 1785, Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) investiga experimentalmente a força existente entre objetos carregados, chegando à famosa lei do inverso do quadrado da distância [8]. Essa forma da lei de Coulomb já havia sido observada por Henry Cavendish⁴ (1731–1810)

¹Após sofrer atrito com pele de animais, o âmbar atraía pequenos corpos (sementes, por exemplo). Na Magnésia, uma região da antiga Tessália que fica na Grécia, pedras que se atraíam (magnetita) já eram conhecidas [5, 7], provendo uma origem para o termo magnetismo

²Por exemplo, após eletrização por atrito, objetos formado por âmbar se repeliam, enquanto atraíam objetos formados por vidro (eletrizados por atrito também).

³Apesar de Franklin não ter tido conhecimento na época, a hipótese de transferência de eletricidade havia sido proposta um pouco antes por W. Watson (1715–1787) [6]. Essa transferência deixa um excesso de eletricidade num corpo (daí o nome *positiva*), enquanto o outro corpo permanece com uma escassez dessa eletricidade (daí o termo *negativa*). Hoje sabemos que os elétrons são transferidos nesse processo.

⁴Cavendish era conhecido por ser recluso, excêntrico e muito tímido [10]. Todavia, isso não abalou ou amenizou seu espírito crítico e investigativo acerca dos fenômenos naturais e de medidas experimentais. Às vezes ele publicava

durante suas investigações entre (1771–1871) [9, 11], porém ele não publicou seus resultados na época.

Embora não houvesse uma conexão clara entre electricidade e magnetismo na época, os fenômenos magnéticos também estavam sendo investigados. William Gilbert (1544–1603) apresentou em sua famosa obra *De Magnete* a ideia de que Terra se comporta como um ímã gigante. Descobriu que ao se dividir um ímã em duas partes, obtêm-se dois ímãs, cada um com um pólo norte e sul⁵. John Michell⁶ (1724–1793) descobriu a lei do inverso do quadrado da distância para a força entre pólos magnéticos [6]. Em julho de 1820, um momento de grande impacto para a comunidade científica veio com o trabalho de Hans Christian Ørsted (1777–1851), que descobriu que uma agulha imantada de uma bússola sofria uma deflexão quando estava próxima a um fio de corrente. Esse efeito *eletromagnético*, assim chamado por ele, estabelecia uma correlação entre fenômenos elétricos e magnéticos, marcando o nascimento do eletromagnetismo [8, 12]. Tal fato experimental foi algo surpreendente na época⁷ e marcava a primeira unificação entre forças da Natureza. Em setembro desse mesmo ano, François Arago (1786–1853) apresentou a descoberta de Ørsted na Academia Francesa de Ciência e refez o experimento para os pesquisadores presentes [8, 12], entre eles, André-Marie Ampère (1775–1836). Duas semanas depois, Ampère apresentou seus trabalhos sobre esse tópico, reportando um novo efeito, isto é, forças de atração e repulsão entre fios de corrente.

Os termos *eletromagnético* e *eletromagnetismo* foram introduzidos por Ørsted em seus trabalhos publicados em 1820 e 1821, como forma de caracterizar os novos fenômenos que ele descobrira. Enquanto o vocábulo *eletrodinâmica* foi introduzido por Ampère para diferenciar os efeitos descobertos por ele dos fenômenos eletromagnéticos reportados pouco tempo antes por Ørsted [8, 13].

Paralelamente às investigações sobre os fenômenos da interação eletromagnética, os estudos voltados para o comportamento da luz (óptica) também vinham sendo realizados desde a Grécia Antiga⁸. A concepção platônica de que a visão era formada por raios de luz que partiam dos olhos até os objetos observados perdurou por quase um milênio, até que Alhazém (965–1040) demonstrou⁹ conclusivamente o contrário [14]. Desenvolvimentos notáveis ocorreram na Revolução Científica. Willebrord Snell (1580–1626) descobriu em 1621 a lei da refração¹⁰, um importante re-

suas descobertas, mas muito frequentemente ele não o fazia [11].

⁵Durante esse período na segunda metade do século XVIII, os termos astral e boreal foram introduzidos por Anton Brugmans (1732–1789) e Johann C. Wilcke (1732–1796) [6]. Essa nomenclatura era utilizada para designar o que hoje conhecemos como pólos norte e sul de um ímã, respectivamente. Isto é, o pólo norte (sul) era um lugar com excesso de fluido austral (boreal). Tais termos foram empregados em analogia às eletricidades vítrea e resinosa de Du Fay.

⁶Michell também inventou, de forma independente, a balança de torção, que anos depois foi utilizada por seu amigo H. Cavendish em 1798 para medir a constante de gravitação universal [6].

⁷Ørsted sabia do impacto que sua descoberta causaria. Então resolveu publicar seu trabalho o mais rápido possível através de uma circular que ele enviou para vários pesquisadores na Europa [12].

⁸Os atomistas já hipotetizavam que a luz era formada por corpúsculos que saíam dos objetos até os olhos. Ptolomeu (90–168) fez vários experimentos envolvendo refração, chegando à conclusão de que a razão entre os ângulos de incidência e de refração era constante e dependia das propriedades de cada meio [14, 15].

⁹Os trabalhos sistemáticos de Alhazém sobre óptica foram publicados no *Book of Optics* por volta de 1027 [14].

¹⁰Embora a lei da refração seja creditada a Snell e Descartes, ela apareceu pela primeira vez no tratado *On Burning Mirrors and Lenses* em 984 de autoria de Ibn-Sahl (940–1000).

sultado que relaciona a propagação da luz ao passar de um meio para outro com índices de refração distintos. Mais tarde, discussões acerca da natureza da luz ficaram mais evidentes no panorama científico. A teoria corpuscular da luz foi defendida por Isaac Newton (1642/43–1727), que em sua obra *Opticks* (1704) investigou experimentalmente vários aspectos sobre o comportamento da luz. Por outro lado, em seu livro *Traité de la Lumière* (1690), Christian Huygens (1629–1695) defendia o caráter ondulatório da luz. O grande peso e reputação de Newton, devido às suas contribuições na mecânica e gravitação, favoreceu a aceitação do modelo corpuscular por mais de um século [16], muito embora já houvesse evidências que apontavam na direção da teoria ondulatória, como a difração, descoberta por Francesco Grimaldi (1618–1663) [14, 15].

Somente no início do século XIX, a teoria ondulatória ressurgiu devido aos trabalhos de Thomas Young (1773–1829) e Augustine Fresnel (1788–1827). Young demonstrou, através do experimento da fenda dupla, a natureza ondulatória da luz. Fresnel explicou a difração e interferência da luz¹¹, redefiniu o conceito de polarização da luz, introduziu o caráter transversal das ondas luminosas [17], entre outras contribuições. O evento assertivo para a natureza ondulatória da luz veio um pouco mais tarde, em 1850, com o trabalho de Foucault (1819–1868) sobre a medição da velocidade da luz num meio refrativo¹², no qual ele conclui que o resultado experimental é inconsistente com o modelo corpuscular.

O próximo momento notório de unificação ocorreu em 1845 devido a Michael Faraday (1791–1867), que estabeleceu uma relação entre a luz e o eletromagnetismo ao descobrir que a polarização de um feixe de luz sofria alterações ao se propagar através de um meio numa região com campo magnético, gerando o bem conhecido efeito Faraday [19, 20]. Trabalhando experimentalmente com objetos carregados e magnetizados, Faraday introduziu o conceito de campo. Segundo ele, o campo é uma entidade física invisível que preenche todo o espaço, contendo linhas de força que transmitem a força (ou a influência) de um corpo para o outro [21, 22]. Essa ideia de campo também foi utilizada por James Clerk Maxwell (1831–1879) em seu artigo *A Dynamical Theory of Electromagnetic Field* [23], no qual realizou uma brilhante síntese matemática, relacionando todos os fenômenos eletromagnéticos da época, num conjunto particular de equações que hoje conhecemos como equações de Maxwell. Além disso, deduziu teoricamente que ondas eletromagnéticas se propagavam com a velocidade da luz. A confirmação experimental dessa previsão ocorreu somente em 1888 (9 anos após o falecimento de Maxwell) através dos experimentos de Heinrich R. Hertz (1857–1894). Tal evidência experimental permitiu caracterizar a luz como uma onda eletromagnética, o que contribuiu para a unificação entre óptica e eletrodinâmica. Por consequência, fenômenos ópticos, como reflexão, refração, absorção, birrefringência, etc., podem ser derivados a partir do eletromagnetismo.

É importante ressaltar que, através das ideias de Faraday e Maxwell, observa-se que, além

¹¹Em sua *Mémoire sur la diffraction de la lumière* (1818), o qual lhe concedeu o prêmio da Academia Francesa de Ciências do mesmo ano [6, 16].

¹²Tal experimento constituiu a tese de doutorado de Foucault, contendo apenas 35 páginas, porém com uma conclusão extraordinária: “*always the light is delayed in its passage through the most refractive medium. The final conclusion of this work therefore consists in declaring the system of emission incompatible with the reality of the facts.*” [16, 18].

de cargas (partículas) se movendo pelo espaço, existe outra entidade na natureza, o campo. O conceito de campo viria se tornar fundamental nas teorias de campo a serem desenvolvidas no século XX.

Em adição a descrever o comportamento do campo eletromagnético, as equações de Maxwell também permitem investigações sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em diferentes meios (vácuo, dielétricos, condutores, etc.). Para tal, deve-se conhecer, de um ponto de vista efetivo macroscópico, as relações constitutivas que descrevem o meio. Tais expressões geralmente traduzem a resposta do meio ao campo eletromagnético aplicado por meio de parâmetros constitutivos, propriedades naturais do meio considerado. Por consequência, o emprego de relações constitutivas não-usuais para meios contínuos possibilita investigações de efeitos interessantes, que podem ser derivados da eletrodinâmica de Maxwell. Dessa forma, é possível investigar o comportamento eletromagnético de novos materiais, derivar algumas de suas propriedades ópticas, como índices de refração, coeficientes de absorção, birefringência, etc. Nos próximos capítulos, discutir-se-ão alguns cenários físicos relacionados a esse aspecto.

As próximas mudanças no paradigma científico, ainda relacionado ao eletromagnetismo, ocorreram em 1905 quando Albert Einstein (1879–1955) desenvolveu¹³ a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), resolvendo assim o problema que existia sobre a inconsistência da teoria de Maxwell perante o princípio da relatividade de Galileu, além de apresentar um trabalho explicando o efeito fotoelétrico¹⁴, o que contribuiu para o surgimento da Mecânica Quântica. Dessa forma, a descrição dos sistemas quânticos (microscópicos) ganhou grande desenvolvimento com os trabalhos de E. Schrödinger (1887–1961), W. Heisenberg (1901–1976), P. Dirac (1902–1984), entre outros. O trabalho de Dirac [26] já demonstrava um poderoso arcabouço teórico de teoria de campos quânticos relativística, a partir do qual a existência de antipartículas era possível. O pósitron, antipartícula do elétron foi descoberto em 1932 por C. Anderson em experimentos envolvendo raios cósmicos [27]. Dirac foi responsável pelo início da Eletrodinâmica Quântica, em inglês, *Quantum Electrodynamics* (QED), que mais tarde teve importantes contribuições de vários outros físicos, como R. Feynman (1918–1988), J. Schwinger (1918–1994), entre outros. A QED é a versão quântica da teoria eletromagnética de Maxwell, tornando-se o arquétipo para a construção das outras teorias quânticas de campos que descrevem as interações fraca e forte. O conjunto dessas teorias formam o atual MP.

Muitos outros aspectos que culminaram no MP foram omitidos aqui, como as várias partículas que foram descobertas em raios cósmicos e em aceleradores de partículas. Apesar de ser uma história muito rica e interessante, uma digressão sobre tais fatos seria demasiadamente longa para este trabalho. Todavia a referência [25] apresenta uma breve discussão histórica sobre esse ponto. O principal foco discutido até aqui foram alguns aspectos do desenvolvimento da eletrodinâmica clássica e seu papel revolucionário na descrição dos campos eletromagnéticos e como a sua versão quântica, QED, contribuiu para o desenvolvimento do MP atual. Embora a versão quântica

¹³Lorentz já havia derivado o conjunto de transformações que deixavam o eletromagnetismo invariante. Poincaré já adotava a ideia de que era necessário construir uma nova mecânica e que as leis da física deveriam ser revistas de forma a serem compatíveis com o eletromagnetismo e com o princípio da relatividade [24].

¹⁴Einstein se baseou nas hipóteses de Max Planck (1858–1947) para introduzir o conceito de que a luz era formada por *quanta* de energia, conhecidos como fótons – nome introduzido por Gilbert Lewis (1875–1946) em 1926. [15, 25].

descreva a interação eletromagnética entre cargas ou entre matéria (elétrons) e luz (fótons), a eletrodinâmica clássica constitui um poderoso ferramental teórico para investigações de fenômenos relacionados a ondas eletromagnéticas a nível clássico/macroscópico.

Segundo o MP, a grande quantidade de partículas elementares observadas até hoje pode ser agrupada em léptons, quarks e as partículas mediadoras das interações (bósons). O MP reúne 3 das 4 interações fundamentais (a gravidade ainda não foi incorporada ao escopo do MP), explicando como as partículas interagem na natureza. A inclusão da gravidade no Modelo Padrão tem se apresentado como uma atividade complexa (e desafiadora): as teorias quânticas descrevem o mundo subatômico (microscópico) e a teoria da relatividade geral, o macro-mundo (planetas, estrelas, buracos negros, etc.); assim, “colocá-las” em pé de igualdade ainda não foi possível.

Muitos trabalhos em física teórica visam a busca por uma gravitação quântica, em que o Modelo Padrão é esperado ser o limite de baixas energias. Tais teorias devem ser capazes de descrever a física na escala de energia de Planck ($\simeq 10^{19}$ GeV= 10^{28} eV), que define a era de Planck onde se acredita que as 4 interações fundamentais eram unidas. Um forte candidato é a teoria de cordas, na qual as partículas são interpretadas como os modos de vibração das cordas (elementos fundamentais dessa teoria). Apesar das teorias de cordas possuírem como fundamento a covariância de Lorentz (ou simetria de Lorentz), assim como o MP, existe a possibilidade da quebra espontânea da simetria de Lorentz nessas teorias. O trabalho pioneiro sobre essa possibilidade foi realizado [28] por Kostelecký e Samuel em 1989. Pouco tempo depois, mais desenvolvimentos nesse âmbito e envolvendo violações da simetria *CPT* também foram realizados [29]. Foi então que Colladay e Kostelecký desenvolveram o Modelo Padrão Estendido mínimo (MPE) [30], uma teoria efetiva que incorpora ao Lagrangeano do MP e da Relatividade Geral todos os possíveis termos escalares que se podem construir com os campos do MP e da gravitação contraídos com coeficientes de índices tensoriais adequados. Tais coeficientes constituem parâmetros fenomenológicos que controlam e caracterizam a possível violação de Lorentz (VL).

A pesquisa em VL tem sido um ramo de investigação de Física além do MP muito ativo nas últimas décadas. No MPE, o setor eletromagnético apresenta VL por meio de termos *CPT*-ímpares [141] ou *CPT*-pares [32]. A parte contendo termos *CPT*-ímpares é representado pelo termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) e a eletrodinâmica modificada por esse termo tem sido utilizada em estudos de sistemas da matéria condensada que violam a partidade (P) e inversão temporal (T), e também em sistemas dotados do efeito magnético quiral (CME – da expressão em inglês, *chiral magnetic effect*) [33, 34]. O CME é a geração macroscópica de uma corrente elétrica na presença de um campo magnético devido a uma assimetria entre a densidade de férmions de mão esquerda e direita que compõem o sistema. Outro aspecto interessante de eletrodinâmicas modificadas por VL é o surgimento de relações constitutivas que apresentam contribuições originadas da VL [35, 36].

Modelos eletrodinâmicos dotados com VL também podem apresentar extensões que envolvem derivadas de ordens superiores. Nesse caso, o MPE não mínimo descreve uma teoria efetiva similar ao MP, porém contendo termos com derivadas superiores de dimensões (em unidades naturais) maiores do que quatro [39, 135, 136]. Aspectos clássicos relacionados à eletrodinâmica (no vácuo) modificada por termos *CPT*-ímpares de dimensão cinco e por termos *CPT*-pares de dimensão seis

foram investigados nas referências [42] e [43], respectivamente. Esses estudos envolvem o cálculo do propagador, relações de dispersão, análises de causalidade, unitariedade e estabilidade dos modos. Além disso, outras abordagens de modelos com VL e derivadas superiores também podem ser encontradas em outros cenários, por exemplo, na investigação de propriedades termodinâmicas de sistemas eletromagnéticos [44] e no setor de férmions [45].

O vasto cenário proporcionado por modelos dotados de VL e os efeitos eletromagnéticos em novos materiais [46, 55] foram motivações para a realização deste trabalho. As ferramentas matemáticas utilizadas são relativamente simples, consistindo nas equações de Maxwell usuais e também nas suas versões modificadas por VL. Todavia esse formalismo permite a obtenção de resultados interessantes que ficam na interface entre áreas da Física (teoria clássica de campos, eletrodinâmica-óptica, teorias com violação de Lorentz, matéria condensada). Por esse motivo, o início deste capítulo apresentou, de forma simplificada, pontos importantes que culminaram no desenvolvimento da eletrodinâmica. No capítulo 2, apresentam-se alguns aspectos preliminares da eletrodinâmica clássica e das relações constitutivas. No capítulo 3, são discutidos o comportamento eletromagnético e alguns efeitos ópticos de meios dotados com condutividade magnética. Os resultados deste capítulo geraram uma publicação [47] no *Physical Review D*:

- P.D.S. Silva, M.M. Ferreira Jr., M. Schreck, and L.F. Urrutia, Magnetic-conductivity effects on electromagnetic propagation in dispersive matter, *Phys. Rev. D* **102**, 076001 (2020).

No capítulo 4, estuda-se a propagação de ondas eletromagnéticas em meios bi-isotrópicos e bi-anisotrópicos com relações constitutivas (estendidas) simétrica e antissimétrica. Os resultados deste capítulo geraram um artigo [49] publicado no *Physical Review A*:

- P.D.S. Silva, M.M. Ferreira Jr., and R. Casana, Symmetric and antisymmetric constitutive tensors for bi-isotropic and bi-anisotropic media, *Phys. Rev. A* **106**, 042205 (2022).

No capítulo 5, investigamos a reversão do poder de rotação em meios bi-isotrópicos dotados de condutividade magnética. O conteúdo deste capítulo compõe dois artigos [94] publicados no *Physical Review B*:

- P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **106**, 144430 (2022).
- P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Erratum: Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **107**, 179902 (2023).

No capítulo 6, abordam-se dois modelos de eletrodinâmica modificados por VL: o primeiro introduz um termo *CPT*-ímpar de dimensão três, conhecido como termo de Carroll-Field-Jackiw; enquanto o segundo aborda as contribuições advindas da implementação de um termo *CPT*-ímpar de dimensão cinco. Esses casos foram estudados considerando-se um meio material, diferentemente

do que geralmente se encontra na literatura, na qual as extensões da eletrodinâmica consideram o vácuo. Assim, utilizou-se um tensor constitutivo para a suplementação das propriedades eletromagnéticas do meio contínuo. Os resultados deste capítulo geraram uma publicação [48] no *Physical Review D*:

- P.D.S. Silva, L. Lisboa-Santos, M. M. Ferreira Jr., and M. Schreck, Effects of CPT-odd terms of dimensions three and five on electromagnetic propagation in continuous matter, *Phys. Rev. D* **104**, 116023 (2021).

Este trabalho apresenta ainda um número (demasiadamente grande) de apêndices, servindo como material complementar e também de auxílio a futuros estudantes. Por fim, apresentamos nossas considerações finais sobre os aspectos estudados no capítulo 7.

Além dos artigos gerados nessa tese (os 5 artigos listados acima), o doutorando Pedro Diego da Silva e Silva também é coautor de outros dois artigos, a saber:

- J. B. Araújo, V. E. Mouchrek-Santos, F. E. P. dos Santos, P. D. S. Silva, and M. M. Ferreira Jr., Constraining EDM and MDM lepton dimension-five interactions in the electroweak sector *Phys. Lett. B* **811**, 135839 (2020).
- M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, C. M. Reyes, M. Schreck, and P. D. S. Silva, Unitarity in Stückelberg electrodynamics modified by a Carroll-Field-Jackiw term, *Phys. Lett. B* **804**, 135379, (2020).

ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

Sumário

2.1	Relações constitutivas	23
2.2	Formulação covariante da eletrodinâmica em meios	27
2.3	Relações de dispersão para propagação eletromagnética	33
2.3.1	Birrefringência e atividade óptica	36
2.3.2	Atenuação e reflexão	38

Neste capítulo, apresentam-se definições e ferramentas matemáticas básicas da eletrodinâmica, que serão utilizadas posteriormente ao longo da tese. Também será mostrada a versão covariante do eletromagnetismo clássico em meios contínuos. Para isso, discute-se inicialmente sobre as das relações constitutivas e como diferentes propriedades óptico-eletromagnéticas podem ser parametrizadas efetivamente através dos parâmetros constitutivos que caracterizam o meio onde os fenômenos eletromagnéticos se manifestam. Feito isso, apresenta-se o formalismo básico da equação de Fresnel, importante ferramenta no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios contínuos. Discute-se ainda, o efeito da birrefringência, uma consequência da anisotropia dos meios materiais.

2.1 Relações constitutivas

Para se descrever o comportamento dinâmico do campo eletromagnético num meio material, deve-se suplementar as equações de Maxwell, dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J}, \tag{2.1.1a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \tag{2.1.1b}$$

com expressões que caracterizam a resposta do meio aos campos externos aplicados. Tais expressões, conhecidas como relações constitutivas, podem ser escritas como $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, e caracterizam de forma efetiva as propriedades eletromagnéticas do meio. A necessidade do uso de relações constitutivas pode ser entendida através de duas formas: (i) as relações constitutivas permitem introduzir propriedades do meio que, a princípio, não estão presentes nas equações

de Maxwell, principalmente no que tange à polarização elétrica e magnetização; (ii) o sistema eletromagnético, na presença de \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{H} , apresenta 12 quantidades a serem determinadas (as componentes desses campos), enquanto apenas duas equações de Maxwell são consistentes¹ (lei de Faraday e lei de Ampère-Maxwell), o que fornece 6 equações escalares, ou seja,

$$\epsilon_{ijk}\partial_j E^k + \partial_t B^i = 0, \quad \epsilon_{ijk}\partial_j H^k - \partial_t D^i = J^i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.1.2)$$

Assim, o uso de 2 relações a mais (entre 3-vetores, ou seja, 6 equações escalares) permite a construção de um sistema com 12 variáveis e 12 equações [50]. Dito de outra forma, há 2 equações vetoriais independentes e 4 variáveis (os vetores \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{H}), logo é necessário implementar mais 2 equações (ou relações) vetoriais, que formam as relações constitutivas.

Os campos eletromagnéticos macroscópicos, isto é, deslocamento elétrico \mathbf{D} e campo magnético \mathbf{H} , podem ser derivados através de um processo de média dos campos e densidades de carga e corrente microscópicos. O resultado final é dado por [1]:

$$D^i = \epsilon_0 E^i + P^i - \partial_j Q^{ij} + \dots, \quad (2.1.3a)$$

$$H^i = \frac{1}{\mu_0} B^i - M^i + \dots, \quad (2.1.3b)$$

onde P^i , Q^{ij} e M^i são componentes da polarização, da densidade de quadrupolo elétrico e da magnetização, respectivamente. Na grande maioria dos materiais, os termos de quadrupolo e multipolos de ordens mais altas geralmente são pequenos e negligenciáveis em comparação com \mathbf{P} e \mathbf{M} . Dessa forma, para uma descrição efetiva do comportamento eletromagnético do meio, é suficiente conhecer as formas das funções que relacionam \mathbf{P} e \mathbf{M} com (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Assim, o deslocamento elétrico \mathbf{D} e o campo magnético \mathbf{H} , podem ser descritos por:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.1.4a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (2.1.4b)$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{M} representam os vetores polarização elétrica e magnetização, respectivamente.

O tipo de resposta do meio ao campo aplicado também funciona como parâmetro de classificação do meio, podendo ser chamado de linear, não-linear, isotrópico, anisotrópico, homogêneo, não-homogêneo, dispersivo, não-dispersivo. Um meio linear é aquele cuja resposta ao campo eletromagnético aplicado é linear (não apresenta potências maiores ou diferentes de 1) nos campos aplicados \mathbf{E} e \mathbf{B} . Neste trabalho, será considerado esse tipo de resposta linear do meio. De maneira

¹Consistentes no sentido de que, considerando a equação de continuidade como fundamental, pode-se derivar a lei de Gauss a partir do divergente da lei de Ampère, enquanto $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pode ser determinado aplicando-se o divergente na lei de Faraday [50].

generalizada, as respostas lineares de polarização e magnetização podem ser escritas como,

$$P^i = \epsilon_0 \chi_{ij}^E E^j + \alpha_{ij} B^j, \quad (2.1.5a)$$

$$M^i = \chi_{ij}^H H^j + \tilde{\beta}_{ij} E^j, \quad (2.1.5b)$$

onde χ_{ij}^E , χ_{ij}^H são os tensores de susceptibilidade elétrica e magnética, respectivamente. Enquanto α_{ij} é o tensor que parametriza a resposta elétrica do meio a um campo magnético aplicado, $\tilde{\beta}_{ij}$ representa a resposta magnética devido a um campo elétrico aplicado. Inserindo as relações dadas nas Eqs. (2.1.5) na Eq. (2.1.4), obtém-se

$$D^i = \epsilon_{ij} E^j + \alpha_{ij} B^j, \quad (2.1.6a)$$

$$H^i = \mu_{ij}^{-1} B^j + \beta_{ij} E^j, \quad (2.1.6b)$$

em que

$$\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^E) \quad \mu_{ij} \equiv \mu_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^H), \quad (2.1.7)$$

sendo ϵ_{ij} o tensor de permissividade elétrica ou tensor dielétrico, enquanto μ_{ij}^{-1} é o inverso do tensor de permeabilidade magnética, μ_{ij} . Acrescentamos que β_{ij} é obtido através da relação:

$$\beta_{ij} \equiv -\mu_0 \mu_{il}^{-1} \tilde{\beta}_{lj}. \quad (2.1.8)$$

É importante mencionar que a redefinição dada na Eq. (2.1.8) advém do fato de se ter escolhido a representação $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$, isto é, as relações constitutivas adotadas expressam os campos (\mathbf{D}, \mathbf{H}) em termos de \mathbf{E} e \mathbf{B} . Todavia outras representações também são possíveis, ou seja, pode-se escrever os campos (\mathbf{D}, \mathbf{B}) em termos de \mathbf{E} e \mathbf{H} , por exemplo. Esse último tipo de relação constitutiva também é bastante utilizado na literatura [52, 55].

As relações dadas na Eq. (2.1.6) podem ser ainda reescritas na forma²

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (2.1.9)$$

onde os objetos $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\mu}^{-1}$, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são matrizes de ordem 3×3 , de forma geral. Tais matrizes carregam os chamados parâmetros constitutivos do meio, que contêm de forma efetiva a resposta do meio ao campo eletromagnético.

A dependência funcional dos elementos presentes em $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\mu}^{-1}$, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ está relacionada ao tipo de meio considerado. Assim, pode-se definir simplificadamente alguns meios:

- isotrópicos: os parâmetros constitutivos são escalares (números). O caso mais simples é

²Ao longo deste trabalho, será adotada a seguinte convenção: letras gregas em negrito representam matrizes de ordem $n \times n$. Por exemplo, $\boldsymbol{\epsilon}$ é a matriz de permissividade elétrica de ordem 3×3 .

descrito pelas relações constitutivas usuais,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (2.1.10)$$

enquanto os meios bi-isotrópicos podem ser definidos por

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \beta \mathbf{E}. \quad (2.1.11)$$

- anisotrópicos: os parâmetros são elementos de matriz ou tensores, que refletem a contribuição de uma dada componente i dos campos (\mathbf{E} ou \mathbf{B}) sobre as componentes j de (\mathbf{D} ou \mathbf{H}), com $i \neq j$ ou $i = j$. Tais relações constitutivas são escritas como [7, 20, 102]

$$D^i = \epsilon_{ij} E^j \quad H^i = \mu_{ij}^{-1} B^j. \quad (2.1.12)$$

Em meios bi-anisotrópicos, as relações constitutivas, no geral, tem a mesma forma da Eq. (2.1.6). É importante mencionar que um meio material em movimento (com velocidade \mathbf{u} em relação a um observador) também pode ser entendido como meio bi-anisotrópico, pois, no referencial do observador (que percebe o meio em movimento), as relações constitutivas também terão forma similar à da Eq. (2.1.6), porém com tensores constitutivos que incorporam efeitos advindos da velocidade relativa entre meio e observador. Nesse caso, as relações de Minkowski [111, 112],

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{H} = \epsilon [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \right], \quad (2.1.14)$$

ou na forma³

$$\mathbf{D} = \gamma^2 \left[\left(\epsilon - \frac{u^2}{\mu c^4} \right) \mathbf{E} - \left(\epsilon - \frac{1}{\mu c^2} \right) \left((\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \right], \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{H} = \gamma^2 \left[\left(\frac{1}{\mu} - \epsilon u^2 \right) \mathbf{B} + \left(\epsilon - \frac{1}{\mu c^2} \right) \left((\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{E} \right) \right], \quad (2.1.16)$$

são usualmente empregadas para se descrever meios em movimento⁴.

- homogêneos: os parâmetros não dependem de coordenadas do espaço-tempo;
- não-homogêneos: os parâmetros apresentam dependência nas coordenadas;
- dispersivos: os parâmetros possuem dependência nas derivadas espaciais ou temporais, o que

³Vide Apêndice A.

⁴No seguinte cenário: considere que, no referencial de repouso do meio, as suas relações constitutivas são dadas por Eq. (2.1.10). Então, para um observador que percebe o meio se movendo com velocidade \mathbf{u} , as relações constitutivas do mesmo, agora no referencial do observador, são descritas pelas conhecidas relações de Minkowski.

leva à dependência na frequência ou vetor de onda (no espaço de momentos do formalismo de transformadas de Fourier). Noutras palavras, os parâmetros constitutivos passam a depender da frequência e/ou vetor de onda⁵. Como exemplo, citamos as relações constitutivas de Drude-Born-Fedorov, são descritas por [56]

$$\mathbf{D} = \epsilon_{\text{DBF}} (\mathbf{E} + b \nabla \times \mathbf{E}), \quad (2.1.17a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_{\text{DBF}} (\mathbf{H} + b \nabla \times \mathbf{H}), \quad (2.1.17b)$$

onde ϵ_{DBF} e μ_{DBF} são as constantes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética específicas desse modelo [56], que podem ser diferentes⁶ de ϵ e μ de um meio isotrópico descrito pela Eq. (2.1.10), enquanto b é conhecido como parâmetro de quiralidade. Em outro exemplo, podemos mencionar as relações constitutivas de Condon [101], que introduzem derivadas temporais entre os campos, na forma:

$$\mathbf{D} = \epsilon_{\text{C}} \mathbf{E} - g \partial_t \mathbf{H}, \quad (2.1.18a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_{\text{C}} \mathbf{H} + g \partial_t \mathbf{E}, \quad (2.1.18b)$$

em que g é um parâmetro (análogo a b) que mede as contribuições de $\partial_t \mathbf{H}$ e $\partial_t \mathbf{E}$ aos campos \mathbf{D} e \mathbf{B} , respectivamente. O subscrito “C” designa que os valores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética na Eq. (2.1.18) podem ser diferentes⁷ de ϵ e μ da Eq. (2.1.10).

- não-dispersivos: não há dependência nessas derivadas, ou ainda, os parâmetros constitutivos não são funções da frequência e/ou vetor de onda.

Diferentes meios possuem respostas distintas ao campo eletromagnético aplicado. Tais respostas, incorporadas nos parâmetros constitutivos, geram efeitos sobre a propagação de ondas eletromagnéticas no meio, modificando propriedades ópticas como refração, reflexão, polarização, birrefringência, absorção, etc. Nos próximos capítulos, alguns desses efeitos serão abordados.

2.2 Formulação covariante da eletrodinâmica em meios

A seguir, adotaremos a seguinte assinatura para o tensor métrico de Minkowski

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

⁵Note que isto é diferente da definição de meios não-homogêneos, onde os parâmetros possuem dependências explícitas nas coordenadas (\mathbf{r}, t) . Quando os parâmetros apresentam dependências nas derivadas espaciais e/ou temporais dos campos, o uso do ansatz de ondas planas permite reescrever tais dependências em derivadas como dependências no vetor de onda e na frequência. Por exemplo, não-homogêneo: $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}, t)$, dispersivo: $\epsilon = \epsilon(\nabla, \partial_t) \rightarrow \epsilon = \epsilon(i\mathbf{k}, -i\omega)$.

⁶No seguinte cenário: considere uma medida do campo \mathbf{D} de um meio submetido a um campo \mathbf{E} . Independentemente da representação adotada, ou seja, a relação da Eq. (2.1.17a) ou da Eq. (2.1.10), o valor do campo \mathbf{D} deve ser o mesmo. Sendo assim, igualando-se Eq. (2.1.17a) e Eq. (2.1.10), obtém-se: $\epsilon_{\text{DBF}}(\mathbf{E} + b \nabla \times \mathbf{E}) = \epsilon \mathbf{E}$, o que indica que os valores de ϵ e ϵ_{DBF} não são necessariamente iguais. O mesmo argumento pode ser aplicado para o setor magnético, isto é, igualando-se a Eq. (2.1.17b) com a segunda relação da Eq. (2.1.10).

⁷Pelas mesmas razões apresentadas na nota de rodapé anterior.

As equações de Maxwell em meios materiais podem ser derivadas da seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.2.1)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético usual⁸, definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.2.2)$$

enquanto

$$A^\mu = (A_0 = \varphi/c, \mathbf{A}), \quad J^\mu = (J^0 = c\rho, \mathbf{J}), \quad (2.2.3)$$

são o 4-potencial eletromagnético e a 4-corrente, respectivamente. Utilizando as definições dos campos elétrico e magnético em termos dos potenciais, isto é,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.2.4)$$

pode-se então obter

$$F_{0i} = -F_{i0} = F^{i0} = \frac{E^i}{c}, \quad F_{ij} = F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k, \quad (2.2.5)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Cevita tridimensional, com $\epsilon_{123} = 1$.

O tensor $G^{\mu\nu}$ presente na Eq. (2.2.1) é definido como [104]

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (2.2.6)$$

onde o tensor $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ é denominado tensor constitutivo, sendo responsável por parametrizar a resposta do meio ao campo aplicado. É possível mostrar que a Eq. (2.2.6) é uma forma tensorial da Eq. (2.1.9), assim as componentes de $G^{\mu\nu}$ devem incorporar os campos \mathbf{D} e \mathbf{H} .

O tensor constitutivo satisfaz as seguintes propriedades

$$\chi^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi^{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (2.2.7a)$$

$$\chi^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi^{\mu\nu\beta\alpha}, \quad (2.2.7b)$$

$$\chi^{\mu\nu\alpha\beta} = \chi^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.2.7c)$$

Devido às propriedades de $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ e da antissimetria do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, o tensor $G^{\mu\nu}$ satisfaz $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$. A seguir, as componentes de $G^{\mu\nu}$ serão obtidas, resultando nas relações constitutivas do meio. Devido à semelhança entre $G^{\mu\nu}$ e $F^{\mu\nu}$, as componentes G^{0i} e G^{ij} serão

⁸O tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ foi primeiramente introduzido por H. Minkowski (1864–1909) em 1908 [103].

associadas à D^i e H^i , respectivamente – de forma similar às relações dadas na Eq. (2.2.5).

A partir da Eq. (2.2.6), pode-se fazer

$$G^{0i} = \frac{1}{2}\chi^{0i\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (2.2.8a)$$

$$G^{0i} = \frac{1}{2}\chi^{0i0j}F_{0j} + \frac{1}{2}\chi^{0ij0}F_{j0} + \frac{1}{2}\chi^{0imn}F_{mn}, \quad (2.2.8b)$$

que pode ser simplificada através da Eq. (2.2.5) e das propriedades dadas na Eq. (2.2.7), resultando em

$$G^{0i} = -\frac{1}{c}\chi^{0ij0}E^j - \frac{1}{2}\chi^{0imn}\epsilon_{mnk}B^k, \quad (2.2.9)$$

$$G^{0i} = -cD^i, \quad (2.2.10)$$

onde se definiu a componente i do campo \mathbf{D} como

$$D^i = \frac{1}{c^2}\chi^{0ij0}E^j + \frac{1}{2c}\chi^{0imn}\epsilon_{mnk}B^k. \quad (2.2.11)$$

Implementando agora as redefinições

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{\chi^{0ij0}}{c^2}, \quad \alpha_{ik} \equiv \frac{\chi^{0imn}\epsilon_{mnk}}{2c}, \quad (2.2.12)$$

onde ϵ_{ij} é o tensor de permissividade elétrica e α_{ik} é o tensor que parametriza a contribuição magnética no deslocamento elétrico D^i , a Eq. (2.2.11) fornece a relação constitutiva

$$D^i = \epsilon_{ij}E^j + \alpha_{ik}B^k. \quad (2.2.13)$$

Para a componente G^{ij} , obtém-se a partir de Eq. (2.2.6)

$$G^{ij} = \frac{1}{2}\chi^{ij\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (2.2.14a)$$

$$G^{ij} = \frac{1}{2}\chi^{ij0k}F_{0k} + \frac{1}{2}\chi^{ijk0}F_{k0} + \frac{1}{2}\chi^{ijmn}F_{mn}, \quad (2.2.14b)$$

que pode ser simplificada utilizando-se as equações (2.2.5) e (2.2.7), levando a

$$G^{ij} = -\frac{1}{c}\chi^{ijk0}E^k - \frac{1}{2}\chi^{ijmn}\epsilon_{mnk}B^k. \quad (2.2.15)$$

Para se obter uma expressão similar à última relação dada na Eq. (2.2.5), inicialmente se efetua uma contração da Eq. (2.2.15) com ϵ_{ijl} , então

$$\epsilon_{ijl}G^{ij} = -\frac{2}{2c}\epsilon_{ijl}\chi^{ijk0}E^k - \frac{2}{4}\epsilon_{ijl}\chi^{ijmn}\epsilon_{mnk}B^k, \quad (2.2.16)$$

onde se introduziu o fator (2/2) em cada termo. Esse artifício é útil para que se possa escrever

uma expressão similar a $F_{mn} = -\epsilon_{mnk}B^k$, porém para componentes G_{ij} e H^i . Redefinindo agora os tensores que multiplicam E^k e B^k como

$$\mu_{lk}^{-1} \equiv \frac{1}{4}\epsilon_{ijl}\chi^{ijmn}\epsilon_{mnk}, \quad \beta_{lk} \equiv \frac{\epsilon_{ijl}\chi^{ijk0}}{2c}, \quad (2.2.17)$$

onde μ_{lk} é o tensor de permeabilidade magnética e β_{lk} é o tensor que parametriza a contribuição elétrica no campo magnético H^i . A Eq. (2.2.16) assume a forma

$$\epsilon_{ijl}G^{ij} = -2\mu_{lk}^{-1}B^k - 2\beta_{lk}E^k, \quad (2.2.18a)$$

$$\epsilon_{ijl}G^{ij} = -2H^l, \quad (2.2.18b)$$

na qual definimos a componente l do campo \mathbf{H} como

$$H^l = \mu_{lk}^{-1}B^k + \beta_{lk}E^k, \quad (2.2.19)$$

resultando, dessa forma, na relação constitutiva para \mathbf{H} . Contraindo agora a Eq. (2.2.18b) com ϵ_{lmn} , obtém-se

$$\epsilon_{lmn}\epsilon_{ijl}G^{ij} = -2\epsilon_{lmn}H^l, \quad (2.2.20a)$$

$$(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})G^{ij} = -2\epsilon_{mnl}H^l, \quad (2.2.20b)$$

$$G^{mn} - G^{nm} = -2\epsilon_{mnl}H^l, \quad (2.2.20c)$$

$$G^{mn} = -\epsilon_{mnl}H^l, \quad (2.2.20d)$$

onde se utilizou $\epsilon_{lmn}\epsilon_{ijl} = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}$ e a propriedade $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$.

Em suma, o tensor $G^{\mu\nu}$ possibilita a descrição de um meio material com relações constitutivas, a priori, gerais, na densidade de Lagrangiana de Maxwell. Para se obter as equações de Maxwell a partir da densidade de Lagrangiana (2.2.1), pode-se reescrevê-la como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.2.21a)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - A_\mu J^\mu, \quad (2.2.21b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\nu A_\mu + \frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\partial_\mu A_\nu + \\ & -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\partial_\nu A_\mu - A_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (2.2.21c)$$

Trocando os índices $\mu \leftrightarrow \nu$ no segundo e quarto termos da Eq. (2.2.21c) e, depois disso, utilizando-se $\chi^{\nu\mu\alpha\beta} = -\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$, resulta em

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{4}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\partial_\mu A_\nu - A_\mu J^\mu. \quad (2.2.22)$$

Tal expressão pode ser simplificada um pouco mais renomeando $\alpha \leftrightarrow \beta$ no segundo termo e utilizando a propriedade $\chi^{\mu\nu\beta\alpha} = -\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$. O resultado obtido é então

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu - A_\mu J^\mu. \quad (2.2.23)$$

Utilizando agora as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} \right) = 0, \quad (2.2.24)$$

obtém-se, a partir da Eq. (2.2.23),

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2} \left(\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\kappa}\partial_\mu A_\nu + \chi^{\mu\nu\alpha\beta}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\kappa}\partial_\alpha A_\beta \right), \quad (2.2.25a)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2} \left(\chi^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\mu A_\nu + \chi^{\rho\kappa\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta \right), \quad (2.2.25b)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2} \left(\chi^{\beta\alpha\rho\kappa}\partial_\beta A_\alpha + \chi^{\rho\kappa\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta \right), \quad (2.2.25c)$$

na qual se fez $\mu \rightarrow \beta, \nu \rightarrow \alpha$ no primeiro termo da Eq. (2.2.25b). Utilizando agora $\chi^{\beta\alpha\rho\kappa} = \chi^{\rho\kappa\beta\alpha}$ e $\chi^{\rho\kappa\alpha\beta} = -\chi^{\rho\kappa\beta\alpha}$ no primeiro e segundo termos da Eq. (2.2.25c), respectivamente, tem-se

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\rho\kappa\beta\alpha}(\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta), \quad (2.2.26a)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\rho\kappa\beta\alpha}F_{\beta\alpha} = -G^{\rho\kappa}, \quad (2.2.26b)$$

em que foi usada a definição dada na Eq. (2.2.6). Da Eq. (2.2.23), também se obtém

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -J^\mu\delta_{\mu\kappa} = -J^\kappa. \quad (2.2.27)$$

Assim, substituindo as expressões (2.2.26b) e (2.2.27) na Eq. (2.2.24), tem-se finalmente

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} = J^\kappa, \quad (2.2.28)$$

que representa as equações de Maxwell com termos de fontes (lei de Gauss e lei de Ampère-Maxwell). As equações de Maxwell homogêneas são obtidas via identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (2.2.29)$$

em que $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi-Cevita quadridimensional, com $\epsilon_{0123} = 1$ e $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

A partir da Eq. (2.2.28), as equações de Maxwell na forma vetorial são facilmente obtidas. De

fato, escolhendo $\kappa = 0$, encontra-se a lei de Gauss:

$$\partial_\rho G^{\rho 0} = J^0 \rightarrow \partial_i G^{i0} = J^0 \rightarrow c\partial_i D^i = c\rho, \quad (2.2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.2.31)$$

que foi simplificada usando-se a Eq. (2.2.10) e a quadri-corrente, $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$. A lei de Ampère-Maxwell é obtida tomando-se $\kappa = i$ na Eq. (2.2.28), levando a

$$\partial_\mu G^{\mu i} = J^i \rightarrow \partial_0 G^{0i} + \partial_j G^{ji} = J^i, \quad (2.2.32)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t(-cD^i) - \partial_j(\epsilon_{jik}H^k) = J^i, \quad (2.2.33)$$

em que implementamos as relações (2.2.10), (2.2.20d) e $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$. Utilizando agora $\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$, pode-se simplificar a Eq. (2.2.33)

$$\epsilon_{ijk}\partial_j H^k - \partial_t D^i = J^i, \quad (2.2.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J}. \quad (2.2.35)$$

As equações de Maxwell homogêneas são obtidas a partir da Eq. (2.2.29). Escolhendo $\nu = 0$, a Eq. (2.2.29) fornece

$$\epsilon^{\mu 0\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.2.36a)$$

$$-\epsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = 0, \quad (2.2.36b)$$

$$\epsilon_{ijk}\partial_i(-\epsilon_{jkl}B^l) = 0, \quad (2.2.36c)$$

a qual podemos simplificar utilizando $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$. Então a Eq. (2.2.36c) resulta em

$$\partial_i B^i = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.2.37)$$

Escolhendo agora $\nu = i$, a Eq. (2.2.29) produz

$$\epsilon^{\mu i\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.2.38a)$$

$$\epsilon^{0ijk}\partial_0 F_{jk} + \epsilon^{ji0k}\partial_j F_{0k} + \epsilon^{jik0}\partial_j F_{k0} = 0, \quad (2.2.38b)$$

$$\epsilon_{ijk}\partial_0(-\epsilon_{jkl}B^l) + 2\epsilon_{jik}\partial_j E^k = 0, \quad (2.2.38c)$$

$$-\epsilon_{ijk}\partial_j E^k - \partial_0 B^i = 0, \quad (2.2.38d)$$

que resulta na lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0. \quad (2.2.38e)$$

2.3 Relações de dispersão para propagação eletromagnética

Para se analisar a propagação de ondas eletromagnéticas num meio material, é necessário conhecer as relações de dispersões, que descrevem como momento e frequências se relacionam. Consequentemente, implementando-se [7]

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}, \quad (2.3.1)$$

pode-se determinar os índices de refração do meio⁹ como $n = +\sqrt{\mathbf{k}^2}/\omega$. Usaremos unidades naturais a partir daqui, ou seja, $c = 1$. Para cada índice de refração, há um modo de propagação para a onda eletromagnética associado, cujo campo elétrico pode ser determinado.

A obtenção de tais polarizações e índices de refração pode ser realizada através de manipulações algébricas das equações ue governam a eletrodinâmica do modelo, as equações de Maxwell e as relações constitutivas apropriadas para se descrever o meio. Tal procedimento naturalmente resulta numa equação matricial da forma

$$M_{ij}E^j = 0, \quad (2.3.2)$$

onde M_{ij} é a matriz dos coeficientes e E^j é a componente j do vetor campo elétrico. De maneira geral, os elementos M_{ij} dependem de quantidades associadas à propagação da onda (vetor de onda, frequência) e ao meio material (parâmetros constitutivos), isto é,

$$M_{ij} = M_{ij}(k^\mu, \chi^{\mu\nu\alpha\beta}), \quad (2.3.3)$$

com o quadri-vetor $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})^\mu$.

Considere um meio descrito por

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (2.3.4a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}, \quad (2.3.4b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \quad (2.3.4c)$$

onde σ é a condutividade ôhmica. Utilizando o ansatz de ondas planas, $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, as Eqs.(2.2.35) e (2.2.38e), lei de Ampère e lei de Faraday, fornecem, respectivamente

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega\mathbf{D} = -i\mathbf{J}, \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (2.3.6)$$

⁹Note que o índice de refração pode ser uma função complexa. Assim, ao invés de empregar-se a norma $|\mathbf{k}|$ na definição do índice de refração (que é não negativa e real), utiliza-se $+\sqrt{\mathbf{k}^2}$. Além disso, serão considerados, neste trabalho, índices de refração com parte real não-negativa, o que é indicado explicitamente pelo sinal positivo $+$ na frente da raiz quadrada, $+\sqrt{\mathbf{k}^2}$.

Efetuando-se o produto vetorial entre \mathbf{k} e a Eq. (2.3.6), obtém-se

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) - \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.3.7)$$

$$k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} + \omega (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.3.8)$$

ou, em componentes,

$$k^2 E^i - k_i k_j E^j + \omega (\mathbf{k} \times \mathbf{B})^i = 0, \quad (2.3.9)$$

em que usamos a identidade $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = -k^2 \mathbf{A} + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})$, com $k \equiv |\mathbf{k}|$. Substituindo agora as Eqs. (2.3.4) na Eq. (2.3.5), tem-se (em componentes)

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{B})^i = -\omega \mu \epsilon E^i - i \mu \sigma E^i, \quad (2.3.10)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{B})^i = -\omega \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) E^i. \quad (2.3.11)$$

Implementando a Eq. (2.3.11) no último termo da Eq. (2.3.9), resulta

$$\left[k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} \right] E^j = 0, \quad (2.3.12)$$

ou

$$M_{ij} E^j = 0, \quad (2.3.13)$$

onde, neste caso,

$$M_{ij} = k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij}. \quad (2.3.14)$$

É possível ainda reescrever a Eq. (2.3.12) em termos do índice de refração n . Para isso, basta implementar $k^i = \omega n^i$,

$$\left[n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} \right] E^j = 0, \quad (2.3.15)$$

de tal modo que os elementos M_{ij} agora são representados por

$$M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij}. \quad (2.3.16)$$

As soluções não-triviais (modos diferentes do vetor campo elétrico nulo) da Eq. (2.3.13) são obtidas da condição de que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero [7, 102],

$$\det[M_{ij}] = \det \left[n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} \right] = 0, \quad (2.3.17)$$

o que irá fornecer a equação de Fresnel. Uma vez que $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, a Eq. (2.3.17) fornece a equação

de dispersão, a partir da qual obtêm-se detalhes sobre a propagação de ondas eletromagnéticas no meio, incluindo o índice de refração. Portanto, o cálculo do determinante dado na Eq. (2.3.17) é de fundamental relevância no estudo da propagação eletromagnética em diferentes tipos de meios.

Em meios anisotrópicos, o tensor de permissividade é uma função do vetor de onda \mathbf{k} , da frequência ω , de campos externos (como o campo magnético \mathbf{B}), etc. Assim, a permissividade, $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B})$, pode ser expandida como [46]

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}) = \epsilon_{ij}^0 + \alpha_{ijl}k_l + \beta_{ijl}B_l + \dots \quad (2.3.18)$$

O primeiro termo, ϵ_{ij}^0 é a permissividade usual de um dielétrico anisotrópico. O segundo termo, $\alpha_{ijl}k_l$ é uma assinatura da quebra de inversão espacial (paridade), implicando em atividade óptica que pode se manifestar através de birrefringência ou rotação do plano de polarização de luz linearmente polarizada [20]. O terceiro termo, $\beta_{ijl}B_l$, é associado a um campo (magnético) externo e conduz a violação de inversão temporal. Tal termo gera atividade magneto-óptica via efeito Faraday ou Cotton-Mouton efeito [46]. No exemplo da Eq. (2.3.17), observa-se que $\epsilon_{ij}^0 = (\epsilon + i\sigma/\omega)\delta_{ij}$, no qual as simetrias de inversão temporal e espacial são preservadas, não ocorrendo birrefringência.

Por outro lado, de maneira generalizada, para meios com tensor de permeabilidade magnética representado por $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$, meio magneticamente isotrópico, a equação de Fresnel assume a forma

$$\det [n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \mu\bar{\epsilon}_{ij}] = 0, \quad (2.3.19)$$

onde $\bar{\epsilon}_{ij}$ é o tensor de permissividade elétrica efetivo, incorporando os parâmetros constitutivos que advêm das relações constitutivas $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ e/ou¹⁰ $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Além disso, cenários de eletrodinâmicas modificadas introduzem quantidades adicionais na densidade de Lagrangiana dada na Eq. (2.2.1), que podem conter 4-vetores ou escalares. Exemplos conhecidos na literatura constituem o modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw no vácuo [141] ou em meios¹¹ contínuos [48] e a eletrodinâmica de Maxwell-Bopp-Podolsky [106–108]. Consequentemente, o tensor $\bar{\epsilon}_{ij}$ pode conter termos que violam paridade e/ou inversão temporal, originando efeitos de birrefringência.

Para se construir $\bar{\epsilon}_{ij}$ deve-se conhecer as equações de Maxwell do modelo de eletrodinâmica considerado e implementar as relações constitutivas apropriadas para o meio. Depois disso, a solução de Eq. (2.3.19) irá fornecer a equação de dispersão, da qual se obtêm os índices de refração. O cômputo das polarizações de cada modo de propagação é feito via implementação de cada índice de refração em M_{ij} e solução da equação $M_{ij}E^j = 0$ para o campo elétrico, E^j .

Uma vez conhecidas as relações de dispersão, propriedades ópticas, como birrefringência (atividade óptica), atenuação e reflexão, podem ser examinadas de forma relativamente simples. Nos próximos capítulos, analisar-se-ão tais aspectos.

¹⁰Cenários dotados de relações constitutivas do tipo $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ tópicos serão abordados no capítulo 3.

¹¹Esse modelo será discutido no capítulo 6.

2.3.1 Birrefringência e atividade óptica

A birrefringência é uma propriedade óptica de materiais anisotrópicos (como a maioria dos cristais) [20], responsável por gerar modos propagantes com diferentes velocidades de fase através do meio. Noutras palavras, a birrefringência está relacionada com a existência de índices de refração distintos¹² para cada direção de propagação da onda. Através da equação $M_{ij}E^j = 0$, pode-se determinar a polarização (direção do campo elétrico) associada a cada índice de refração e determinar se ocorre birrefringência circular ou birrefringência por defasagem.

Um efeito interessante gerado pela birrefringência circular é a rotação do plano de polarização da luz incidente linearmente polarizada, efeito que será explicado a seguir. Considere, por exemplo, uma onda plana linearmente polarizada propagando-se através de um meio ao longo do eixo z . Assim, o campo elétrico inicial pode ser escrito como

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.3.20a)$$

com o vetor de polarização apontando ao longo da direção do eixo- x . Tal vetor, na notações de Jones [20], pode ser lido como,

$$\mathbf{E}_{0i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_- + \frac{1}{2}\mathbf{E}_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.20b)$$

que corresponde à soma de vetores de polarização de modos circularmente polarizados à direita e esquerda, respectivamente [1, 7]. Após a onda propagar-se por uma distância z no meio, o campo elétrico final é escrito como uma combinação linear das duas componentes, \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- , com os vetores de onda \mathbf{k}_+ e \mathbf{k}_- , respectivamente [20]. Dessa forma, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f &= \mathbf{E}_+ e^{i(k_+ z - \omega t)} + \mathbf{E}_- e^{i(k_- z - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_f &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_+ z} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_- z} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{E}_f = \frac{1}{2} e^{i\psi} e^{-i\omega t} \left[e^{-i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{i\psi} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.22a)$$

onde as seguintes quantidades foram definidas

$$\theta \equiv -\frac{(k_+ - k_-)z}{2}, \quad \psi \equiv \frac{(k_+ + k_-)z}{2}. \quad (2.3.22b)$$

¹²Observe que a velocidade de fase é definida como $v = \omega/k = 1/n$, onde n é o índice de refração do meio.

Note que Eq. (2.3.22a) descreve uma onda linearmente polarizada cujo vetor de polarização está rotacionado por um ângulo θ em relação à configuração inicial. Da Eq. (2.3.22b), tem-se o ângulo,

$$\theta = -\frac{(n_+ - n_-)z\omega}{2}, \quad (2.3.23)$$

que caracteriza o efeito da birrefringência circular. Note que foi usado $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$. Geralmente, os índices de refração podem ser quantidades complexas, ou seja,

$$n = \text{Re}(n) + i\text{Im}(n). \quad (2.3.24)$$

Assim, pode-se inferir da Eq. (2.3.23)

$$\frac{\theta}{z} = -\frac{\omega}{2} [\text{Re}(n_+) + i\text{Im}(n_+) - \text{Re}(n_-) - i\text{Im}(n_-)], \quad (2.3.25)$$

a partir da qual se define o poder de rotação específico,

$$\delta = \frac{\theta}{z} \equiv -\frac{\omega}{2} [\text{Re}(n_+) - \text{Re}(n_-)], \quad (2.3.26)$$

que mede a rotação do plano de oscilação do campo elétrico da luz linearmente polarizada (por unidade de comprimento percorrido no meio). Ainda da Eq. (2.3.25), define-se

$$\delta_d = -\frac{\omega}{2} [\text{Im}(n_+) - \text{Im}(n_-)]. \quad (2.3.27)$$

como o coeficiente de dicroísmo, uma medida da diferença de absorção entre os modos circularmente polarizados à direita e esquerda [46], pelo meio. Os efeitos de birrefringência circular e dicroísmo, dados através das Eqs. (2.3.26) e (Eq. (2.3.27)), são típicos de meios opticamente ativos: aqueles que suportam modos propagantes¹³ RCP e LCP. Note ainda que quando o meio não é birrefringente, tem-se $\theta = 0$ e $\psi = kz$. Assim, a configuração inicial de polarização (2.3.20a) é recuperada a partir da configuração final (2.3.22a).

Quando os modos propagantes são descritos por polarizações diferentes das polarizações circulares à direita e esquerda, o efeito da birrefringência (mais uma vez, manifestado através da diferença de fase entre os modos propagantes) é medido através do *phase shift* [15] comunicado pelo meio aos modos propagantes,

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (n_+ - n_-), \quad (2.3.28)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda da luz incidente no vácuo, d é o comprimento da distância percorrida pela onda no meio considerado.

Em suma, a existência de diferentes índices de refração num meio material gera a birrefringência e seus efeitos. Desde o início do século XIX, efeitos de atividade óptica de cristais de quartzo já

¹³RCP - *right-handed circular polarization*, LCP - *left-handed circular polarization*.

eram observados por Arago e Biot [109]. O tratamento formal em termos de polarização foi realizado pouco tempo depois por Fresnel. A natureza dessa atividade óptica está relacionada com a quiralidade de certos materiais: um objeto é “quiral” se não é equivalente à sua imagem espelhada [110]. Tal propriedade é comumente encontrada em moléculas de DNA, proteínas e açúcares. No contexto do eletromagnetismo de meios materiais, a quiralidade está relacionada com a quiralidade das moléculas que o constituem. Dessa forma, luz circularmente polarizada pode também ser dita quiral. O efeito da rotação do plano de polarização segue como consequência de tal propriedade.

2.3.2 Atenuação e reflexão

Considere o ansatz de ondas planas utilizado na seção 2.3,

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}, \quad (2.3.29)$$

para uma onda que se propaga ao longo do eixo z , com amplitude E_0 e vetor de polarização $\hat{\mathbf{e}}$. Utilizando agora $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, pode-se escrever

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(nz\omega - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}, \quad (2.3.30)$$

que pode ainda ser lida como

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\text{Im}[n]z\omega} e^{i(\text{Re}[n]\omega z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}, \quad (2.3.31)$$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-(\gamma/2)z} e^{i(\text{Re}[n]\omega z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}, \quad (2.3.32)$$

onde se definiu [7]

$$\gamma \equiv 2\omega \text{Im}[n], \quad (2.3.33)$$

como o coeficiente de absorção da onda eletromagnética. Observe na Eq. (2.3.32) que a onda apresenta um fator exponencial decrescente na mesma direção de propagação, o que leva a uma atenuação da amplitude da onda à medida que se propaga. Assim, o inverso de γ atua como medida do comprimento de penetração da onda eletromagnética no interior do meio, a partir do qual se define o conhecido *skin depth* [1, 7]. Esse efeito é comumente encontrado em meios condutores, nos quais o índice de refração é complexo.

As principais definições e ferramentas utilizadas para se estudar a propagação de ondas eletromagnéticas foram brevemente expostas neste capítulo. Dessa forma, novos cenários para propagação eletromagnética podem ser investigados. No capítulo 3, as consequências clássicas da condutividade magnética serão abordadas. No capítulo 6, dois modelos de eletrodinâmicas estendidas para meios materiais serão discutidos também.

EFEITOS DA CONDUTIVIDADE MAGNÉTICA NA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Sumário

3.1	Tensor de condutividade magnética	40
3.2	Relações de dispersão e modos de propagação	42
3.2.1	Caso diagonal isotrópico	43
3.2.1.1	Meio dielétrico não-condutor	44
3.2.2	Caso diagonal anisotrópico	48
3.2.2.1	Dielétrico não-condutor	50
3.2.3	Caso antissimétrico	54
3.2.3.1	Dielétrico não-condutor e modos de propagação	56
3.2.4	Caso simétrico	57
3.2.4.1	Dielétrico não-condutor e modos de propagação	59
3.3	Consistência das equações de Maxwell	60
3.4	Reflexão e <i>skin depth effect</i>	61
3.4.1	Skin depth effect	61
3.4.2	Reflexão	62

Neste capítulo, será introduzido o conceito de condutividade magnética em meios materiais através de relações constitutivas não usuais. As consequências dessa propriedade para a propagação de ondas eletromagnéticas serão discutidas em 4 cenários distintos, os quais empregam diferentes parametrizações para o tensor de condutividade magnética. Os casos em que a condutividade magnética, σ^B , é descrita por matrizes diagonais, efeitos de birrefringência são observados. Nos cenários em que σ^B contém elementos off-diagonais, a equação de Fresnel nos fornece relações de dispersão cujas soluções resultam em índices de refração complexos. Tal propriedade pode ser utilizada para se determinar coeficientes de absorção para o meio nesses casos, que não ocorrem nas configurações diagonais. Outras consequências, como reflexão e comprimento de penetração também serão discutidas. Os resultados apresentados neste capítulo geraram uma publicação no *Physical Review D*:

- P.D.S. Silva, M.M. Ferreira Jr., M. Schreck, and L.F. Urrutia, Magnetic-conductivity effects on electromagnetic propagation in dispersive matter, *Phys. Rev. D* **102**, 076001 (2020).

3.1 Tensor de condutividade magnética

Na seção 2.3, apresentou-se a relação constitutiva da lei de Ohm¹,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.1.1)$$

onde σ é a condutividade ôhmica do meio. A Eq. (3.1.1) estabelece uma relação de proporcionalidade entre a densidade superficial de corrente elétrica num meio e o campo elétrico aplicado ao mesmo. Tal expressão atua como descrição efetiva de vários materiais condutores, do ponto de vista macroscópico.

Alguns sistemas apresentam um efeito magnético análogo à Eq. (3.1.1), isto é, a geração de corrente elétrica devido à aplicação de um campo magnético. Um exemplo de interesse notável é o chamado efeito magnético quiral (CME - *chiral magnetic effect*), no qual a densidade de corrente é da forma [33, 34]

$$J_{\text{CME}}^i = \frac{e^2}{4\pi^2} (\Delta\mu) B^i, \quad (3.1.2)$$

sendo e a carga elementar, \mathbf{B} o campo magnético aplicado e $\Delta\mu \equiv \mu_R - \mu_L$, o potencial químico quiral, quantidade que expressa a assimetria entre a densidade de férmions quirais de mão direita e esquerda no sistema, como apontado na Ref. [34]. Esse efeito de origem quântica tem sido objeto de várias pesquisas em física de partículas, teoria de campos e também em física da matéria condensada. Investigações em plasmas de quarks e glúons com potencial químico quiral sob influência de campo magnético externo podem ser encontradas nas Refs. [115, 116]. O CME também é estudado em astrofísica, como forma de explicar a origem dos campos magnéticos intensos (da ordem de 10^{15} G) observados em estrelas de nêutrons [117–119]. Em sistemas da matéria condensada, o CME surge como um importante efeito e sua primeira observação experimental foi realizada em 2014 [120]. Várias outras investigações acerca do CME em diferentes aspectos podem ser encontradas na literatura, tais como: conexões com matéria sujeita à interação eletrofraca [121], CME e transporte anômalo em semimetais de Weyl [122], supercondutividade quiral [123], etc. É importante mencionar que uma relação entre o CME e a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) (em vácuo) também foi reportada [33], indicando conexões entre o CME e teorias com violação de Lorentz (VL).

O tipo de corrente originada no CME é uma motivação para se investigar meios materiais dielétricos não-usuais. Uma motivação adicional para esse estudo advém da magnetohidrodinâmica,

¹A forma vetorial apresentada na Eq. (3.1.1) foi derivada por Gustav Kirchhoff (1824–1887) [113, 114].

na qual a lei de Ohm para um modelo de plasma pode ser escrita como [124]

$$(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})^i = \eta^{ij} J^j, \quad (3.1.3)$$

onde \mathbf{V} é a velocidade média dos elétrons e íons, enquanto \mathbf{J} é a densidade de corrente total. A expressão $\eta^{ij} J^j$ corresponde a um termo de colisão para elétrons e íons, com η^{ij} representando um tensor de resistividade. Embora a Eq. (3.1.3) não pertença a um modelo rigoroso, ela é amplamente utilizada, pois captura os efeitos mais importantes de um modelo magnetohidrodinâmico ideal. Invertendo a Eq. (3.1.3), obtém-se $J^i = \sigma_{ij} E^j + \tilde{\sigma}_{ij} B^j$, com σ_{ij} sendo o inverso de η^{ij} e $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ip} \epsilon_{pqj} V_q$ (onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Cevita tridimensional) definindo uma condutividade magnética para esse caso.

A seguir, considere um meio material onde vale relação constitutiva, que equivale a uma generalização da lei de Ohm,

$$J^i = \sigma_{ij} E^j + \sigma_{ij}^B B^j, \quad (3.1.4)$$

em que σ_{ij} é a condutividade ôhmica e σ_{ij}^B é o tensor de condutividade magnética, aqui considerado completamente independente da condutividade elétrica σ_{ij} . Noutras palavras, assumir-se-á que o tensor σ_{ij}^B caracteriza efetivamente uma propriedade do meio material, do ponto de vista macroscópico.

No que tange ao comportamento sob simetrias discretas, o tensor de condutividade magnética, σ_{ij}^B , é par sob transformações de inversão temporal (T) e conjugação de carga (C), e ímpar sob transformação de paridade (P). A tabela 1 ilustra uma análise comparativa entre os tensores de condutividades magnética e ôhmica sob as transformações discretas, revelando diferenças importantes.

Tabela 1: Comportamento das condutividades ôhmica e magnética, respectivamente, sob as transformações C , P , and T .

	\mathbf{E}	\mathbf{B}	\mathbf{J}	σ	σ^B
C	–	–	–	+	+
P	–	+	–	+	–
T	+	–	–	–	+

Nota-se que o tensor σ_{ij}^B é par sob inversão temporal (T), uma vez que \mathbf{J} e \mathbf{B} são ímpares sob T , indicando um comportamento não usual para a condutividade magnética, em comparação com a condutividade ôhmica, que é T -ímpar. Esse comportamento é análogo ao do parâmetro fenomenológico μ (não confundir com a permeabilidade magnética μ) existente no modelo de supercondutividade de London [123], $\mathbf{J} = -\mu^2 \mathbf{A}$. O caráter T -par de σ_{ij}^B é típico de processos não dissipativos [34]. Noutras palavras, tais correntes associadas a condutividades T -ímpares, como condutividade ôhmica, geram dissipação de energia no sistema, levando a um aumento de

entropia, caracterizando processos que não podem ser reversíveis (em relação ao tempo). Por outro lado, condutividades T -pares estão associadas a processos não-dissipativos, isto é, reversíveis (vide Ref. [123]).

Na próxima seção, a equação de dispersão para um meio dotado de condutividade magnética será obtida considerando-se diferentes cenários de parametrizações para σ_{ij}^B . Suas consequências para a propagação eletromagnética (em cada caso) são analisadas na sequência.

3.2 Relações de dispersão e modos de propagação

Considerando as equações de Maxwell obtidas a partir da Eq. (2.2.28) e um meio cujas relações constitutivas são dadas por

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}, \quad (3.2.1)$$

e também por

$$J^i = \sigma E^i + \sigma_{ij}^B B^j, \quad (3.2.2)$$

pode-se agora aplicar o mesmo procedimento descrito na Seção 2.3, o qual fornece

$$[\mathbf{k}^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \mu \bar{\epsilon}_{ij}] E^j = 0, \quad (3.2.3)$$

$$M_{ij} E^j = 0, \quad (3.2.4)$$

$$(3.2.5)$$

com

$$M_{ij} = k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \mu \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (3.2.6)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} + \frac{i}{\omega^2} (\sigma^B)_{ia} \epsilon_{abj} k_b. \quad (3.2.7)$$

Utilizando $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$, obtemos de forma equivalente

$$M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (3.2.8)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} + \frac{i}{\omega} (\sigma^B)_{ia} \epsilon_{abj} n_b. \quad (3.2.9)$$

Para se obter as relações de dispersão e índices de refração do meio, deve-se avaliar $\det[M_{ij}] = 0$. A princípio, a forma do tensor de condutividade magnética, σ_{ij}^B , não é conhecida. Todavia, algumas parametrizações podem ser implementadas, permitindo escrevê-lo em algumas configurações, e, com isso, o cálculo das relações de dispersão.

Note que na Eq. (3.1.2) o efeito da corrente gerada pela aplicação do campo magnético é

claramente representada por um tensor de condutividade magnética diagonal isotrópico, isto é,

$$\sigma_{ij}^B = \Sigma \delta_{ij}, \quad (3.2.10)$$

com a identificação

$$\Sigma = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mu. \quad (3.2.11)$$

Pode-se agora escrever o tensor de condutividade magnética na seguinte forma

$$\sigma_{ij}^B = \Sigma \delta_{ij} + \Sigma_{ij}, \quad (3.2.12)$$

onde Σ corresponde a 1/3 do traço da matriz $\sigma^B = [\sigma_{ij}^B]$ e representa a parte isotrópica desse tensor de condutividade, enquanto Σ_{ij} representa todas as componentes não diagonais (*off-diagonal*) de σ_{ij}^B . Assim, a parte diagonal do tensor de condutividade está relacionada com o CME e será o cerne do primeiro caso a ser analisado. Depois disso, o tensor de condutividade magnética será analisado nos casos exóticos², ou seja,

$$J^i = \Sigma_{ij} B^j, \quad (3.2.13)$$

na qual Σ_{ij} é composto pela parte *off-diagonal* e anisotrópica da condutividade magnética.

3.2.1 Caso diagonal isotrópico

Para o caso diagonal isotrópico, o tensor de condutividade magnética é dado pela Eq. (3.2.10). Inserindo-a na Eq. (3.2.9), obtém-se

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} - \frac{i\Sigma}{\omega} \epsilon_{ijb} n_b, \quad (3.2.14)$$

no qual o último termo representa a contribuição da condutividade quiral. Note que todos os efeitos relacionados a anisotropias no meio se manifestam através da forma como a condutividade magnética é acoplada com os campos. Nesse caso, o tensor M_{ij} dado na Eq. (3.2.8) tem a forma

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - \mu\epsilon - i\mu \frac{\sigma}{\omega} & -n_1 n_2 + i\mu \frac{n_3 \Sigma}{\omega} & -n_1 n_3 - i\mu \frac{n_2 \Sigma}{\omega} \\ -n_1 n_2 - i\mu \frac{n_3 \Sigma}{\omega} & n_1^2 + n_3^2 - \mu\epsilon - i\mu \frac{\sigma}{\omega} & -n_2 n_3 + i\mu \frac{n_1 \Sigma}{\omega} \\ -n_1 n_3 + i\mu \frac{n_2 \Sigma}{\omega} & -n_2 n_3 - i\mu \frac{n_1 \Sigma}{\omega} & n_1^2 + n_2^2 - \mu\epsilon - i\mu \frac{\sigma}{\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

²O termo *exótico* para os casos off-diagonal foi escolhido por que não havia casos similares na literatura no momento de execução desta pesquisa.

Calculando agora $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se

$$n_{\pm}^2 = 4\Upsilon_{\Sigma} + \mu \left(-\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) \pm \frac{\mu\Sigma}{\omega} \sqrt{2\Upsilon_{\Sigma} + i\mu\frac{\sigma}{\omega}}, \quad (3.2.16a)$$

$$2\Upsilon_{\Sigma} = \mu\epsilon + \left(\frac{\mu}{2\omega} \Sigma \right)^2, \quad (3.2.16b)$$

o qual pode ser dividido nas partes real e imaginária na seguinte forma:

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon + \frac{\mu\Sigma}{\omega} \left(\frac{\mu\Sigma}{2\omega} \pm N_{\pm} \right) + i\frac{\mu}{\omega} (\sigma \pm \Sigma N_{\pm}), \quad (3.2.17a)$$

onde

$$N_{\pm} = \sqrt{\sqrt{\Upsilon_{\Sigma}^2 + \left(\frac{\mu\sigma}{2\omega} \right)^2} \pm \Upsilon_{\Sigma}}. \quad (3.2.17b)$$

A Eq. (3.2.17a) produz dois índices de refração distintos para cada frequência ω , a qual é compatível com a física de um meio dielétrico condutor dotado de birefringência, assim, quando considerado no interior de um meio com condutividade ôhmica ($\sigma \neq 0$), a condutividade magnética (3.2.10) modifica o índice de refração, n , do meio, alterando a velocidade de fase (associada com a parte real de n) e o coeficiente de absorção ou atenuação (associado à parte imaginária de n).

3.2.1.1 Meio dielétrico não-condutor

No caso em que o meio dielétrico não possui condutividade ôhmica, $\sigma = 0$, a Eq. (3.2.16a) fornece dois valores distintos e reais para o índice de refração quadrático,

$$n_{\pm}^2 = 4\Upsilon_{\Sigma} - \mu\epsilon \pm \frac{\mu\Sigma}{\omega} \sqrt{2\Upsilon_{\Sigma}}, \quad (3.2.18a)$$

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon + 2 \left(\frac{\mu\Sigma}{2\omega} \right)^2 \pm \frac{\mu\Sigma}{\omega} \sqrt{\mu\epsilon + \left(\frac{\mu\Sigma}{2\omega} \right)^2}, \quad (3.2.18b)$$

que caracteriza um dielétrico com comportamento dispersivo e não-condutor. Portanto, o sistema se comporta como um meio dispersivo birrefringente onde ondas eletromagnéticas se propagarão sem passar por atenuação (ausência de absorção). Os índices de refração são então dados por

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon + \left(\frac{\mu\Sigma}{2\omega} \right)^2} \pm \frac{\mu\Sigma}{2\omega}. \quad (3.2.19)$$

O quadrado da Eq. (3.2.19) recupera o resultado da Eq. (3.2.18a). Na presente configuração, é importante destacar que a condutividade magnética implica em um comportamento típico de um condutor (para o meio dielétrico) somente quando é definida simultaneamente com a condutividade ôhmica ($\sigma \neq 0, \sigma^B \neq 0$), como está demonstrado na Eq. (3.2.17a). Quando a condutividade magnética está definida para um dielétrico não-condutor ($\sigma = 0, \sigma^B \neq 0$), o comportamento do meio permanece equivalente ao de um meio dielétrico dispersivo sem absorção, como é indicado

pelo índice de refração da Eq. (3.2.18a). Isso acontece por que $N_- = 0$, quando $\sigma = 0$.

Alternativamente, os índices de refração podem ser determinados a partir da frequência (como função do vetor de onda), via a definição $n = +\sqrt{\mathbf{k}^2}/\omega(\mathbf{k})$. As possíveis frequências ω obtidas dessa forma são associadas com os modos de propagação do campo elétrico. Implementando-se $n = \sqrt{\mathbf{k}^2}/\omega$ na Eq. (3.2.18a), obém-se a equação de dispersão

$$\omega^4 - 2\omega^2 \frac{k^2}{\mu\epsilon} + \left(\frac{k^2}{\mu\epsilon} - \frac{\mu\Sigma^2}{2\epsilon} \right)^2 - \frac{\mu^2\Sigma^4}{4\epsilon^2} = 0, \quad (3.2.20)$$

com $k = \sqrt{\mathbf{k}^2}$. Resolvendo para ω , tem-se

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2}{\mu\epsilon} \left(1 \pm \frac{\mu\Sigma}{k} \right). \quad (3.2.21)$$

A Eq. (3.2.21) representa dois modos distintos, ω_+ e ω_- . Enquanto a frequência ω_+ é real para qualquer valor de k , a frequência ω_- pode ser imaginária se $k < \Sigma\mu$. Para garantir que ω_- represente a frequência de um modo propagante físico, deve-se exigir $k > \Sigma\mu$. A birrefringência ocorre quando modos de polarização distintos se propagam com diferentes velocidades de fase, $v_{\text{ph}} = \omega/k$. No meio com $\sigma = 0$ e $\sigma^B \neq 0$, as velocidades de fase são

$$v_{\text{ph}(\pm)} = \frac{\omega_{\pm}}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 \pm \frac{\mu\Sigma}{k}}, \quad (3.2.22)$$

levando à seguinte diferença de velocidade de fase

$$\begin{aligned} \Delta v_{\text{ph}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{1 + \frac{\mu\Sigma}{k}} - \sqrt{1 - \frac{\mu\Sigma}{k}} \right] \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\mu\Sigma}{k}, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

atestando que o traço Σ da condutividade magnética isotrópica é responsável pela birefringência. Portanto, a condutividade σ_{ij}^B isotrópica gera comportamento dispersivo e birrefringente num meio não-condutor ($\sigma = 0$).

Analisando agora a velocidade de grupo,

$$v_{g(\pm)} = \left| \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial \mathbf{k}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1 \pm \mu\Sigma/(2k)}{\sqrt{1 \pm \mu\Sigma/k}}, \quad (3.2.24)$$

observa-se que há um comportamento divergente para momentos pequenos, indicando problemas com a causalidade clássica (devido a $v_{g(\pm)} > 1$). A causalidade, entretanto, é preservada para a propagação de ondas no regime de grandes momentos.

É importante mencionar que os índices de refração do meio podem ser obtidos diagonalizando-se o tensor de permissividade efetivo dado na Eq. (3.2.14) e igualizando cada autovalor a n^2/μ .

Considere então a equação de autovalores,

$$\bar{\epsilon}_{ij}e_a^j = \epsilon_a e_a^i, \quad (3.2.25)$$

onde ϵ_a e \mathbf{e}_a , com $(a = 1, 2, 3)$, representam autovalores e autovetores, respectivamente. Nesse caso, obtém-se

$$\epsilon_1 = \epsilon, \quad (3.2.26)$$

$$\epsilon_{2,3} \equiv \epsilon_{\pm} = \epsilon \pm \frac{\Sigma}{\omega} n, \quad (3.2.27)$$

os quais podem ser associados aos seguintes índices de refração:

$$n^2 = \mu\epsilon, \quad (3.2.28a)$$

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu\Sigma}{\omega} n_{\pm}, \quad (3.2.28b)$$

que, com a substituição dos índices n_{\pm} da Eq. (3.2.19), reproduz exatamente a Eq. (3.2.18). Surpreendentemente, os resultados da Eq. (3.2.28b) reproduzem os índices de refração da Eq. (3.2.19) que foram obtidos via $\det[M_{ij}] = 0$ e válidos para direção arbitrária de propagação, o que significa que os autovalores ϵ_2 e ϵ_3 correspondem aos índices de refração do meio, n_+ e n_- , respectivamente. A determinação dos índices de refração n através da equação $n^2 = \mu\epsilon_a(n)$, onde ϵ_a são os autovalores da permissividade elétrica efetiva somente funciona sob o requerimento da ortogonalidade dos modos propagantes. De fato, para um vetor geral \mathbf{n} , o campo elétrico correspondente \mathbf{E}_a , que satisfaz a condição $M_{ij}E_a^j = 0$ quando respeita a condição de transversalidade, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0$, equivale aos autovetores \mathbf{e}_a . Nesse caso, diagonalizar $M = [M_{ij}]$ é equivalente a diagonalizar $\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_{ij}]$, dado que o tensor M_{ij} da Eq. (3.2.8) equivale efetivamente a $M_{ij} \equiv n^2\delta_{ij} - \mu\bar{\epsilon}_{ij}$, uma vez que $n_j E_j = 0$. O resultado $\mathbf{E}_a \sim \mathbf{e}_a$ então se verifica. Essa situação é claramente ilustrada no presente cenário, onde os três autovetores da permissividade elétrica efetiva são

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n}}{n} \equiv \mathbf{m}, \quad (3.2.29a)$$

$$\mathbf{e}_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2(m_1^2 + m_3^2)}} \begin{pmatrix} m_3 \mp im_1 m_2 \\ \pm i(m_1^2 + m_3^2) \\ \mp im_2 m_3 - m_1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.29b)$$

com o versor \mathbf{m} definindo a direção de propagação. Observe que os autovetores nas Eqs. (3.2.29a) e (3.2.29b) são funções da direção dada por \mathbf{m} e independentes dos índices de refração correspondentes. Note ainda que $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3^* = 0$, indicando que esses três autovetores são linearmente independentes. Em particular, \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são ortogonais a $\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}$, levando corretamente aos índices de refração n_{\pm} da Eq. (3.2.18a) de acordo com o método proposto. Nesse caso, os modos de propagação do campo elétrico são corretamente descritos pelos autovetores \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 . O

autovalor $\epsilon_1 = \epsilon$ deve ser desconsiderado, ou seja, não pode ser associado a um índice de refração do meio, pois o autovetor associado, \mathbf{e}_1 , não satisfaz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ (não constitui um modo propagante).

Pode-se escolher, sem perda de generalidade, $\mathbf{m} = (0, 0, m)$. Assim, a Eq. (3.2.29b) simplifica-se em

$$\mathbf{e}_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.30)$$

Os vetores \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , respectivamente, podem ser interpretados como os vetores de polarização de ondas eletromagnéticas com polarização³ de mão-esquerda (*L* - *left*) e mão-direita (*R* - *right*). Logo $n_{L,R} \equiv n_{\pm}$.

Essas polarizações são transversais, isto é, perpendiculares a \mathbf{m} . De acordo com a Tabela 1, a condutividade magnética é ímpar sob transformação de paridade. Enquanto violação de paridade não aparece em nenhum dos índices de refração da Eq. (3.2.19) através de uma dependência angular, por exemplo, ela se manifesta através dos valores distintos de índices de refração para as ondas eletromagnéticas com polarizações (*L*) e (*R*). Essa é a razão física para a birrefringência.

Como discutido na Seção 2.3.1, um dos efeitos da birrefringência é a rotação do plano de vibração de uma onda linearmente polarizada. Tal efeito ocorre pois a polarização da onda incidente pode se dividir em duas ondas circularmente polarizadas que se propagam com velocidades de fase distintas. Esse fenômeno é quantificado pelo poder de rotação específico, dado na Eq. (2.3.26). Utilizando então os índices de refração dados na Eq. (3.2.19), obtém-se

$$\delta = -\frac{\mu\Sigma}{2}, \quad (3.2.31)$$

que corresponde a um poder de rotação específico independente da frequência, configurando uma assinatura de meio dotado com condutividade magnética isotrópica $\sigma_{ij}^B = \Sigma\delta_{ij}$.

Até o momento, não há conexão clara entre o CME e medidas de birrefringência, então se discute brevemente uma possível forma para se observar tal efeito em meios quirais. Antes de métodos mais sofisticados serem desenvolvidos, a birrefringência era detectada com um conjunto de polarizadores lineares cruzados que não permitiam que nenhuma luz cruzasse todo o conjunto. Se um meio material birrefringente circular fosse colocado entre esses dois polarizadores, causaria a rotação do plano de polarização da luz que passara pelo primeiro polarizador de tal modo a assegurar a passagem de uma parcela da intensidade de luz pelo segundo polarizador, proporcional ao ângulo θ de rotação [vide Eq. (2.3.23)]. Entretanto, esse método não é preciso o suficiente para medir valores pequenos de birrefringência. Além disso, é muito desafiador efetuar medições de birrefringência de um meio não-homogêneo.

Portanto, uma técnica mais sofisticada foi desenvolvida na Ref. [85]. O sistema a ser utilizado é constituído por um polarizador, uma placa de um quarto de onda e um analisador. A luz que passa

³Define-se a polarização como mão direita (esquerda) se o vetor de polarização de uma onda plana gira ao longo de um círculo na direção horária (anti-horária) quando o observador olha a onda se aproximando dele [1, 7].

pelo sistema é capturada por uma câmera CCD, a partir da qual os dados medidos são avaliados por softwares num computador. Esse sistema foi comercialmente distribuído sob o nome *Metripol*. A intensidade I da luz detectada em qualquer ponto é expressa em termos dos ângulos ξ e ψ que descrevem a orientação do polarizador:

$$I = \frac{I_0}{2}[1 - \sin(2\xi - 2\psi) \sin \Delta], \quad (3.2.32)$$

onde $I_0/2$ é uma intensidade normalizada (da luz incidente) e Δ é a diferença de fase entre as duas polarizações da luz,

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}d(n_+ - n_-), \quad (3.2.33)$$

com d sendo a espessura da amostra do material e λ_0 , o comprimento de onda no vácuo da luz incidente.

Assim, para se medir a birrefringência de um meio dotado com condutividade magnética, uma amostra do material de espessura d pode ser colocada no sistema *Metripol*, que irá determinar o fator $\sin \Delta$. Esse fator fornece a diferença entre os índices de refração via $(\Delta n) \equiv n_+ - n_- = \lambda \Delta / (2\pi d)$. Esse último resultado experimental em combinação com a Eq. (3.2.19) leava ao parâmetro da condutividade magnética:

$$\Sigma = \frac{\omega(\Delta n)}{\mu}. \quad (3.2.34)$$

Uma técnica similar para medidas de birrefringência pode ser encontrada na Ref. [126].

3.2.2 Caso diagonal anisotrópico

Nesta seção, será analisado outro caso particular para a condutividade magnética, sendo representada por um tensor diagonal que descreve um sistema anisotrópico

$$[\sigma_{ij}^B] = \begin{pmatrix} \Sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_z \end{pmatrix}, \quad (3.2.35)$$

com o conjunto $\{\Sigma\} = \{\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z\}$ composto por elementos distintos na diagonal principal, $\Sigma_x \neq \Sigma_y \neq \Sigma_z$. Uma configuração similar à Eq. (3.2.35) pode ser encontrada em cenários envolvendo semimetais de Weyl [125]. O tensor de permissividade elétrica efetivo, dado na Eq. (3.2.9), tem

agora a seguinte forma

$$[\bar{\epsilon}_{ij}] = \begin{pmatrix} \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} & -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_x k_3 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_x k_2 \\ \frac{i}{\omega^2}\Sigma_y k_3 & \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} & -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_y k_1 \\ -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_2 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_1 & \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.2.36)$$

As relações de dispersão são obtidas calculando-se $\det[M_{ij}] = 0$ onde o tensor M_{ij} é definido pela Eq. (3.2.8), com $\bar{\epsilon}_{ij}$ agora dado na Eq. (3.2.36). Então determinando $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se

$$[\omega n^2 - \mu(i\sigma + \epsilon\omega)]^2 = \Omega, \quad (3.2.37a)$$

com a função

$$\Omega = \Omega(\mathbf{n}) = \mu^2(\Sigma_x \Sigma_y n_3^2 + \Sigma_x \Sigma_z n_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z n_1^2), \quad (3.2.37b)$$

Note que a Eq. (3.2.37b) é uma expressão complicada, uma vez que envolve explicitamente as componentes do vetor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ em vez de n , como no caso isotrópico investigado na seção anterior. Para se evitar problemas na separação das partes real e imaginárias dos índices de refração, será considerado que $\Omega \geq 0$. Para se realizar uma investigação conveniente do conteúdo físico da Eq. (3.2.37a), pode-se adotar a seguinte parametrização [7] para \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = n(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \equiv n \mathbf{m}, \quad (3.2.38)$$

com os ângulo $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$. Utilizando a Eq. (3.2.38), a Eq. (3.2.37a) é reescrita como

$$\omega^2 n^4 - D n^2 - G = 0, \quad (3.2.39a)$$

onde

$$D = 2\mu\omega(\epsilon\omega + i\sigma) + \tilde{\Omega}, \quad (3.2.39b)$$

$$G = \mu^2(\sigma^2 - 2i\epsilon\omega\sigma - \epsilon^2\omega^2), \quad (3.2.39c)$$

$$\tilde{\Omega} = \mu^2 [\cos^2 \theta \Sigma_x \Sigma_y + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \Sigma_x \Sigma_z + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \Sigma_y \Sigma_z] = \Omega/n^2. \quad (3.2.39d)$$

A equação de dispersão dada na Eq. (3.2.39a) fornece duas soluções para n ,

$$n_{\pm}^2 = \frac{D}{2\omega^2} \pm \frac{1}{2\omega^2} \sqrt{D^2 + 4\omega^2 G}, \quad (3.2.40)$$

revelando dois valores para qualquer frequência. O comportamento geral dos índices de refração da Eq. (3.2.40) em termos da frequência e para propagação ao longo do eixo- z ($\theta = 0$) é ilustrado nas Figs. 3.1 e 3.2.

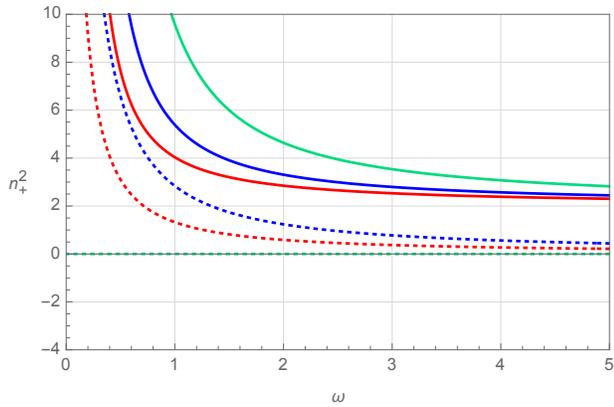


Figura 3.1: Índice de refração n_+^2 da Eq. (3.2.40) para $\theta = 0$. Linhas sólidas representam $\text{Re}[n_+^2]$, enquanto linhas tracejadas indicam $\text{Im}[n_+^2]$. Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$. Para as curvas em vermelho, tem-se $\sigma = 1$, $\Sigma_x = \Sigma_y = \Sigma_z = 1$. Para as linhas em azul, vale $\sigma = 2$, $\Sigma_x = 2$, $\Sigma_y = 3$ e $\Sigma_z = 1$. Nos plots em verde, tem-se $\sigma = 0$, $\Sigma_x = 2$, $\Sigma_y = 3$ e $\Sigma_z = 1$.

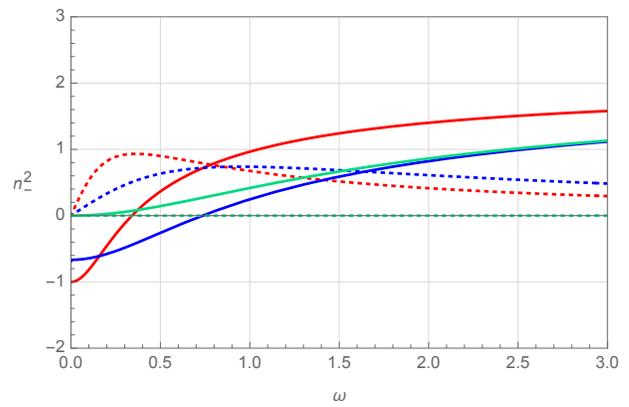


Figura 3.2: Índice de refração n_-^2 da Eq. (3.2.40) para $\theta = 0$. Linhas sólidas representam $\text{Re}[n_-^2]$, enquanto linhas tracejadas indicam $\text{Im}[n_-^2]$. Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$. Para as curvas em vermelho, tem-se $\sigma = 1$, $\Sigma_x = \Sigma_y = \Sigma_z = 1$. Para as linhas em azul, vale $\sigma = 2$, $\Sigma_x = 2$, $\Sigma_y = 3$ e $\Sigma_z = 1$. Nos plots em verde, tem-se $\sigma = 0$, $\Sigma_x = 2$, $\Sigma_y = 3$ e $\Sigma_z = 1$.

Observamos que as partes real e imaginária de n_+ apresentam dispersão anômala. Por outro lado, notamos que a parte real de n_-^2 possui dispersão normal, enquanto a parte imaginária de n_-^2 cresce até o valor de frequência no qual a parte real de n_-^2 se torna positiva, ou seja, $\text{Re}[n_-^2] > 0$. Assim, enquanto $\text{Re}[n_-^2]$ cresce, a parte imaginária decresce.

3.2.2.1 Dielétrico não-condutor

No limite onde a condutividade ôhmica é igual a zero, $\sigma = 0$, todas as partes complexas (imaginárias) da Eq. (3.2.37a) ou da Eq. (3.2.39) se tornam nulas, e os índices de refração dados na Eq. (3.2.40) se tornam reais. Algum termo complexo poderia ocorrer na Eq. (3.2.40) se o discriminante fosse negativo⁴: $\Delta_0 = D_0^2 + 4\omega^2 G_0 < 0$, onde $G_0 = -\epsilon^2 \mu^2 \omega^2$ e $D_0 = 2\epsilon \mu \omega^2 + \tilde{\Omega}$. Todavia $\Delta_0 = \tilde{\Omega}^2 + 4\tilde{\Omega} \epsilon \mu \omega^2 > 0$ e, portanto, essa possibilidade não se realiza. De fato, para $\sigma = 0$, a Eq. (3.2.37a) simplifica-se em

$$\omega^2 (n^2 - \mu\epsilon)^2 = \Omega, \quad (3.2.41)$$

a partir da qual, obtém-se

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{1}{\omega} \sqrt{\Omega}. \quad (3.2.42)$$

⁴O subscrito zero em Δ_0 , D_0 e G_0 indicam que essas quantidades estão sendo avaliadas para $\sigma = 0$.

Aplicando a parametrização da Eq. (3.2.38) na Eq. (3.2.41), pode-se obter

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon + \frac{\tilde{\Omega}}{2\omega^2} \pm \frac{1}{2\omega^2} \sqrt{4\mu\epsilon\omega^2\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2}. \quad (3.2.43)$$

Utilizando novamente a Eq. (3.2.38) agora na Eq. (3.2.42), obtém-se

$$n_{\pm} = \sqrt{2\Upsilon_{\{\Sigma\}}} \pm \frac{\sqrt{\tilde{\Omega}}}{2\omega}, \quad (3.2.44a)$$

$$2\Upsilon_{\{\Sigma\}} = \mu\epsilon + \frac{\tilde{\Omega}}{4\omega^2}, \quad (3.2.44b)$$

de onde se pode verificar facilmente que o quadrado da Eq. (3.2.44a) reproduz os resultados da Eq. (3.2.43). Assim, para $\sigma = 0$ e $\sigma_{ij}^B \neq 0$, o sistema se caracteriza como um meio dispersivo não condutor, no sentido em que a condutividade ôhmica é nula.

Diagonalizando a permissividade elétrica feita da Eq. (3.2.36) para $\sigma = 0$, obtém-se os seguintes autovalores

$$\epsilon_1 = \epsilon, \quad (3.2.45a)$$

$$\epsilon_{2,3} = \epsilon \pm \frac{\gamma}{\omega^2}, \quad (3.2.45b)$$

com

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{k}) &\equiv \frac{\omega}{\mu} \sqrt{\Omega(\mathbf{k}/\omega)} \\ &= \sqrt{\Sigma_y \Sigma_z k_1^2 + \Sigma_x \Sigma_z k_2^2 + \Sigma_x \Sigma_y k_3^2}. \end{aligned} \quad (3.2.45c)$$

Nesse caso, quando os dois autovalores da Eq. (3.2.45b) são multiplicados por μ , obtém-se $\mu\epsilon_{2,3} = \mu\epsilon_{\pm}$, sendo iguais aos valores de n_{\pm}^2 dados na Eq. (3.2.42) calculados através da condição $\det[M_{ij}] = 0$. Essa coincidência numérica constitui um bom exemplo de que embora os autovalores na Eq. (3.2.45b) forneçam $n_{\pm}^2 = \mu\epsilon_{\pm}$, essa igualdade não implica que os autovetores associados a $\epsilon_{2,3} = \epsilon_{\pm}$ correspondem, necessariamente, aos modos de propagação do campo elétrico. De fato, os autovetores da Eq. (3.2.45b) são

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} k_1/k_3 \\ k_2/k_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.46a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\varkappa} \begin{pmatrix} i\Sigma_x k_2 \gamma - \Sigma_x \Sigma_y k_1 k_3 \\ -i\Sigma_y k_1 \gamma - \Sigma_x \Sigma_y k_2 k_3 \\ \varkappa \end{pmatrix}, \quad (3.2.46b)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\varkappa} \begin{pmatrix} -i\Sigma_x k_2 \gamma - \Sigma_x \Sigma_y k_1 k_3 \\ i\Sigma_y k_1 \gamma - \Sigma_x \Sigma_y k_2 k_3 \\ \varkappa \end{pmatrix}, \quad (3.2.46c)$$

com

$$\begin{aligned} \varkappa &= \Sigma_z (\Sigma_y k_1^2 + \Sigma_x k_2^2) \\ &= \omega^2 n^2 \Sigma_z (\Sigma_y m_1^2 + \Sigma_x m_2^2), \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

onde se utilizou \mathbf{m} definido na Eq. (3.2.38). Note ainda que

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^* = 1 - \frac{(k_1^2 + k_2^2) \Sigma_x \Sigma_y}{\varkappa} - i \frac{\gamma k_1 k_2 (\Sigma_x - \Sigma_y)}{\varkappa k_3}, \quad (3.2.48a)$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2, \quad (3.2.48b)$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3^* = 1 - \frac{\Sigma_x^2 (\gamma k_2 + i k_1 k_3 \Sigma_y)^2}{\varkappa^2} + \frac{\Sigma_y^2 (k_2 k_3 \Sigma_x + i \gamma k_1)^2}{\varkappa^2}. \quad (3.2.48c)$$

Esses resultados mostram que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_a \neq 0$ para todos $a = 1, 2, 3$ de modo que esses autovetores não podem descrever os modos de propagação \mathbf{E}_\pm do campo elétrico. Para ilustrar esse ponto mais claramente, os modos de propagação são calculados⁵ no caso onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0) = \omega n(m_1, m_2, 0)$ e então são comparados com os correspondes autovetores da permissividade elétrica efetiva. Os resultados para os modos de propagação são

$$\mathbf{E}_\pm = \begin{pmatrix} -\omega n_\pm m_2 / u_\pm \\ \omega n_\pm m_1 / v_\pm \\ \pm i \omega^2 \Sigma_z / \sqrt{\varkappa_\pm} \end{pmatrix}, \quad (3.2.49a)$$

com

$$u_\pm = \frac{\mu \epsilon}{1 \mp \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa_\pm}}, \quad (3.2.49b)$$

$$v_\pm = \frac{\mu \epsilon}{1 \mp \mu \Sigma_y \Sigma_z / \sqrt{\varkappa_\pm}}, \quad (3.2.49c)$$

$$\varkappa_\pm = \omega^2 n_\pm^2 \Sigma_z (\Sigma_y m_1^2 + \Sigma_x m_2^2). \quad (3.2.49d)$$

Os índices de refração satisfazem a equação

$$n_\pm^2 = \mu \left(\epsilon \pm \frac{n_\pm}{\omega} \sqrt{\Sigma_z (\Sigma_x m_2^2 + \Sigma_y m_1^2)} \right), \quad (3.2.50)$$

a qual é escrita em termos do vetor unitário \mathbf{m} . De fato, a Eq. (3.2.50) pode ser obtida fazendo-se $n_3 = 0$ na Eq. (3.2.37b) e depois a substituindo na Eq. (3.2.42). As funções u_\pm e v_\pm satisfazem a

⁵Veja o Apêndice B.

relação

$$n_{\pm}^2 \left(\frac{m_1^2}{v_{\pm}} + \frac{m_2^2}{u_{\pm}} \right) = 1, \quad (3.2.51)$$

que é uma consequência⁶ da Eq. (3.2.50).

Como $\gamma|_{k_3=0} = \sqrt{\varkappa_{\pm}}$ a partir da Eq. (3.2.45c), observa-se que os autovetores nas Eqs. (3.2.46b) e (3.2.46c), nesse caso, são⁷

$$\mathbf{e}_{\pm} \equiv \pm i \sqrt{\varkappa} \mathbf{e}_{2,3} = \begin{pmatrix} -\Sigma_x k_2 \\ \Sigma_y k_1 \\ \pm i \sqrt{\varkappa} \end{pmatrix}. \quad (3.2.52)$$

Observa-se que \mathbf{e}_{\pm} não coincide com os modos de propagação \mathbf{E}_{\pm} dados na Eq. (3.2.49), demonstrando que, embora os autovalores e_{\pm} correspondentes reproduzem os índices de refração do meio, os seus autovetores não descrevem as polarizações dos modos.

Para se ter uma interpretação física mais clara dos modos de propagação dados na Eq. (3.2.49), pode-se realizar uma simplificação e considerar propagação ao longo do eixo y , ou seja, implementa-se $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$. Assim, tem-se $n_{\pm}^2 = u_{\pm}$, via a Eq. (3.2.51), e $\sqrt{\varkappa_{\pm}} = \omega n_{\pm} \sqrt{\Sigma_x \Sigma_z}$. Substituindo então essas expressões na Eq. (3.2.49), obtém-se os seguintes vetores de polarizações normalizados

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm}|_{m_1=m_3=0} = \sqrt{\frac{\Sigma_x}{\Sigma_x + \Sigma_z}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \sqrt{\Sigma_z / \Sigma_x} \end{pmatrix}, \quad (3.2.53)$$

que descrevem modos elipticamente polarizados com índices de refração distintos

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2}{4\omega^2} \Sigma_x \Sigma_z} \pm \frac{\mu}{2\omega} \sqrt{\Sigma_x \Sigma_z}, \quad (3.2.54)$$

obtidas da Eq. (3.2.44) e $\tilde{\Omega} = \Omega/n^2 = (\mu^2/n^2)(\Sigma_x \Sigma_y n_3^2 + \Sigma_x \Sigma_z n_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z n_1^2) = \mu^2(\Sigma_x \Sigma_y m_3^2 + \Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2)$, que para $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$ simplifica-se em $\tilde{\Omega} = \mu^2 \Sigma_x \Sigma_z$. Os modos associados a $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}$ na Eq. (3.2.53) representam estados de polarização de mão esquerda (L) e direita (R), respectivamente, pela mesma definição utilizada após a Eq. (3.2.31). É importante chamar a atenção para o fato de que a propagação associada com a Eq. (3.2.53) ocorre ao longo do eixo y , enquanto a propagação associada com as polarizações dadas na Eq. (3.2.31) ocorre na direção do eixo z . Isso explica o sinal oposto que aparece na polarizações da Eq. (3.2.53) em comparação com os sinais da Eq. (3.2.31).

É fácil perceber que a Eq. (3.2.44) juntamente com a Eq. (3.2.54) incluem o caso isotrópico. De fato, considerando $\Sigma_x = \Sigma_y = \Sigma_z = \Sigma$, tem-se $\tilde{\Omega} = \mu^2 \Sigma$ e a Eq. (3.2.44) reproduz exatamente o resultado da Eq. (3.2.19). Além disso, os modos de polarização circulares, como os descritos pela

⁶Veja a seção B.2.

⁷Veja a seção B.1.

Eq. (3.2.31), são recuperados a partir da Eq. (3.2.53), porém com a propagação ocorrendo num eixo diferente. Lembre-se de que a propagação associada com os modos da Eq. (3.2.31) ocorrem na direção do eixo z , enquanto a propagação correspondente às polarizações da Eq. (3.2.53) acontecem ao longo do eixo y .

Note que ambos os casos isotrópico e diagonal anisotrópico, com $\sigma = 0$, exibem birrefringência. Todavia existe uma diferença: no caso isotrópico, os dois índices de refração são independentes da direção de propagação (definida pelo vetor de onda), enquanto no caso diagonal anisotrópico, uma dependência nessa direção aparece devido ao fator $\tilde{\Omega}$ presente na Eq. (3.2.43).

Nos dois casos diagonais analisados até o momento, percebe-se que o tensor de condutividade magnética não é suficiente para estabelecer um comportamento de condutor para o meio quando $\sigma = 0$, levando a coeficientes de absorção nulos em ambos os casos.

A seguir, serão discutidos os casos exóticos, constituídos pelos elementos off-diagonal de σ_{ij}^B .

3.2.3 Caso antissimétrico

Para se analisar cenários onde a condutividade magnética σ_{ij}^B é composta por elementos off-diagonal (o que também confere anisotropia ao sistema), o tensor de condutividade pode ser parametrizado de maneira conveniente, a princípio, para se ter uma simplificação a partir da qual as propriedades de propagação de ondas eletromagnéticas possam ser extraídas. Nesse intuito, adota-se a seguinte parametrização antissimétrica para σ_{ij}^B em termos do tri-vetor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\sigma_{ij}^B = \epsilon_{ijk} b_k, \quad (3.2.55)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita em tridimensional, e o vetor \mathbf{b} atua como parâmetro constitutivo efetivo responsável pela corrente gerada através da condutividade magnética. Inserindo a Eq. (3.2.55) na Eq. (3.2.9), tem-se

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} + i \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}}{\omega} \right) \delta_{ij} - \frac{i}{\omega} n_i b_j. \quad (3.2.56)$$

Implementando agora a Eq. (3.2.56) na Eq. (3.2.8), obtém-se a seguinte forma explícita para a matriz $[M_{ij}]$

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - \mu\epsilon & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & n_1^2 + n_3^2 - \mu\epsilon & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & n_1^2 + n_2^2 - \mu\epsilon \end{pmatrix} + i \frac{\mu}{\omega} \begin{pmatrix} -(\sigma + n_2 b_2 + n_3 b_3) & n_1 b_2 & n_1 b_3 \\ n_2 b_1 & -(\sigma + n_1 b_1 + n_3 b_3) & n_2 b_3 \\ n_3 b_1 & n_3 b_2 & -(\sigma + n_1 b_1 + n_2 b_2) \end{pmatrix}, \quad (3.2.57)$$

para a qual $\det[M_{ij}] = 0$ fornece

$$\left[n^2 - i\frac{\mu}{\omega}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) - \mu \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) \right]^2 = 0. \quad (3.2.58)$$

Contrariamente aos casos isotrópico, dado na Eq. (3.2.16a), e diagonal anisotrópico, da Eq. (3.2.39a), a Eq. (3.2.58) envolve o quadrado de um polinômio de segundo grau nas componentes de \mathbf{n} . Assim, a solução para o índice de refração é duplamente degenerada e, dessa forma, há apenas um índice de refração com parte real não negativa. Implementando agora $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = bn \cos \theta$ onde $b = |\mathbf{b}|$, a Eq. (3.2.58) produz o seguinte índice de refração

$$n = \sqrt{2\Upsilon_b + i\mu\frac{\sigma}{\omega} + i\Xi_b}, \quad (3.2.59a)$$

$$2\Upsilon_b = \mu\epsilon - \Xi_b^2, \quad \Xi_b = \frac{\mu}{2\omega}b \cos \theta. \quad (3.2.59b)$$

Outra diferença em relação aos casos diagonais surge aqui: a presença do sinal $(-)$ entre os dois termos que compõem Υ_b em contraste com Υ_{Σ} da Eq. (3.2.16b) e $\Upsilon_{\{\Sigma\}}$ da Eq. (3.2.44b). Assim, será considerado que $\mu\epsilon \geq \Xi_b^2$, garantido que n tenha uma parte real não nula. Decompondo agora o índice de refração da Eq. (3.2.59a) nas suas partes real e imaginária, tem-se

$$n = \alpha'_+ + i(\Xi_b + \alpha'_-), \quad (3.2.60)$$

onde

$$\alpha'_{\pm} = \sqrt{\sqrt{\Upsilon_b^2 + \left(\frac{\mu\sigma}{2\omega}\right)^2} \pm \Upsilon_b}. \quad (3.2.61)$$

Nesse caso, obtém-se um índice de refração complexo que contém contribuições da condutividade exótica, sendo ainda compatível com um meio condutor. A parte imaginária relaciona-se com o coeficiente de absorção para a onda eletromagnética, a qual passa por atenuação enquanto se propaga. Portanto, uma onda eletromagnética não pode se propagar através de um meio com índice de refração da Eq. (3.2.60), uma vez que a absorção diminui sua intensidade. Então quando considerado um meio dielétrico condutor, $(\epsilon, \sigma, \sigma^B)$, a condutividade magnética modifica as partes real e imaginária do índice de refração. Isso origina uma alteração no coeficiente de absorção⁸ que, neste caso, é dado por $\tilde{\alpha} = \mu b \cos \theta + 2\omega\alpha'_-$, com α'_- dado na Eq. (3.2.61).

Observe ainda que para os casos diagonais (isotrópico e anisotrópico) da condutividade magnética, havia dois índices de refração distintos com partes reais positivas, vide as Eqs. (3.2.19) e (3.2.44). Assim, a ocorrência de apenas um índice de refração na Eq. (3.2.59) é inesperada no contexto de um modelo com violação de paridade. Contrariamente aos casos anteriores analisados, a condutividade magnética dada pela Eq. (3.2.55) não implica em birrefringência. Esses resultados sugerem que a condutividade magnética antissimétrica leva a uma permissividade elétrica efetiva

⁸Definido por $\tilde{\alpha} = 2\omega\text{Im}[n]$ [7].

$\bar{\epsilon}_{ij}$ de uma forma que permite apenas um índice de refração com parte real positiva.

Uma transformação de paridade em três dimensões implica em $\cos \theta \mapsto \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$. Como a parte real do índice de refração, $\text{Re}[n]$, na Eq. (3.2.59) contém apenas o quadrado de $\cos \theta$, então $\text{Re}[n]$ é invariante sob transformações de paridade. Entretanto, observa-se que a parte imaginária de n exibe propriedades não-invariante sob paridade.

É relevante mencionar que o caso exótico descrito pela condutividade antissimétrica (3.2.55) foi proposto aqui como forma de viabilizar a análise das propriedades de propagação de ondas eletromagnéticas em meios dotados com tal condutividade, pelo menos de um ponto de vista efetivo. Entretanto, a Ref. [127] faz uma investigação sobre as correntes geradas por uma condutividade magnética em cristais de TaAs. Dessa forma, a Ref. [127] descreve a realização de uma condutividade magnética de forma muito similar⁹ à estrutura proposta na Eq. (3.2.55).

3.2.3.1 Dielétrico não-condutor e modos de propagação

Para um meio dielétrico não-ôhmico e dotado de condutividade magnética ($\epsilon \neq 0$, $\sigma = 0$, $\sigma^B \neq 0$), a Eq. (3.2.60) simplifica-se em

$$n = \sqrt{2\mathcal{Y}_b} + i\Xi_b, \quad \Xi_b = \frac{\mu b}{2\omega} \cos \theta, \quad (3.2.62)$$

a qual descreve o comportamento de um meio condutor. Assim, a condutividade magnética off-diagonal dada na Eq. (3.2.55) origina propriedades de condutor para um material mesmo quando o meio é um substrato dielétrico puro ($\epsilon \neq 0$, $\sigma = 0$). A seguir, os modos de propagação são discutidos.

Para se analisar fenomenologicamente o comportamento dos modos de propagação relativos a esse cenário, pode-se escolher um sistema de coordenadas convenientemente a fim de se simplificar a análise. Uma vez que \mathbf{n} e \mathbf{b} definem um plano, configura-se o eixo z apontando ao longo da direção de \mathbf{n} , de tal forma que

$$\mathbf{n} = (0, 0, n), \quad \mathbf{b} = b(0, \sin \theta, \cos \theta) \equiv (0, b_2, b_3). \quad (3.2.63)$$

Essa escolha de coordenadas conduz a uma expressão muito simples para matriz dada na Eq. (3.2.57), ou seja,

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon - n\frac{i\mu}{\omega}b_3 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - \mu\epsilon - n\frac{i\mu}{\omega}b_3 & 0 \\ 0 & n\frac{i\mu}{\omega}b_2 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}, \quad (3.2.64)$$

⁹O trabalho da Ref. [127] foi desenvolvido independentemente do trabalho de pesquisa desta tese. A Ref. [127] foi colocada na rede (arXiv) apenas alguns dias depois do artigo relacionado a este capítulo. Além disso, outros aspectos e linha de pesquisa são adotados em [127].

a partir da qual, $\det[M_{ij}] = 0$ fornece imediatamente a equação de dispersão

$$\left(n^2 - \mu\epsilon - n \frac{i\mu}{\omega} b_3 \right)^2 = 0, \quad (3.2.65)$$

com $nb_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$. Note que a Eq. (3.2.65) corresponde exatamente ao resultado da Eq. (3.2.58) com $\sigma = 0$. A solução da Eq. (3.2.65) para n é dada pela Eq. (3.2.62).

Lembrando agora que $\sqrt{2\Upsilon_b} = \sqrt{\mu\epsilon - \Xi_b^2}$, pode-se então obter dois cenários distintos de acordo com o sinal global dentro da raiz quadrada: *i*) quando $\mu\epsilon \geq \Xi_b^2$, o índice de refração é puramente imaginário com parte imaginária positiva, a qual leva a um coeficiente de absorção responsável pela atenuação durante a propagação; *ii*), quando $\mu\epsilon > \Xi_b^2$, o índice de refração possui parte real positiva, que pode ser associada com os modos de propagação. Implementado a Eq. (3.2.65) na Eq. (3.2.64), a condição $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$E^3 = n \frac{ib_2}{\epsilon\omega} E^2, \quad (3.2.66)$$

deixando a componente E^1 completamente arbitrária. Note que E^i ($i = 1, 2, 3$) corresponde a uma componente do vetor campo elétrico. Utilizando-se dessa liberdade para E^1 , pode-se determinar dois vetores ortogonais que satisfazem a Eq. (3.2.66). Assim, tem-se¹⁰

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2(1+Q^2)}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1+Q^2} \\ -1 \\ -iQe^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{b_2 N}{\epsilon\omega}. \quad (3.2.67)$$

Aqui o índice de refração foi reescrito na forma

$$n = Ne^{i\alpha}, \quad N = \sqrt{n^*n} = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (3.2.68a)$$

$$\tan \alpha = \frac{\Xi_b}{\sqrt{\mu\epsilon - (\Xi_b)^2}}. \quad (3.2.68b)$$

Assim, foi possível obter dois modos ortogonais nos quais a propagação é associada com o mesmo índice de refração. Embora esse resultado seja inesperado (em relação aos casos analisados nas secções anteriores), o mesmo é análogo ao caso de um dielétrico isotrópico com condutividade magnética nula, onde duas polarizações lineares são relacionadas com o mesmo índice de refração.

3.2.4 Caso simétrico

Para se investigar mais configurações onde o tensor de condutividade magnética apresenta elementos off-diagonal, implementa-se a seguinte parametrização simétrica

$$\sigma_{ij}^B = \frac{1}{2} (a_i c_j + a_j c_i), \quad (3.2.69)$$

¹⁰Vide Apêndice C.

em termos dos vetores ortogonais \mathbf{a} e \mathbf{c} , ou seja, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$. Note ainda que essa parametrização produz um tensor com traço nulo, $\sigma_{ii}^B = 0$. Utilizando a Eq. (3.2.69), a permissividade elétrica efetiva da Eq. (3.2.9) resulta em

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} + \frac{i}{2\omega} (a_i c_n + a_n c_i) \epsilon_{nbj} n_b. \quad (3.2.70)$$

Inserindo agora a Eq. (3.2.70) em M_{ij} da Eq. (3.2.8), obtém-se

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - \mu\epsilon & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & n_1^2 + n_3^2 - \mu\epsilon & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & n_1^2 + n_2^2 - \mu\epsilon \end{pmatrix} - i \frac{\mu}{2\omega} \begin{pmatrix} 2\sigma + \epsilon_{11} & n_1(a_1 c_3 + a_3 c_1) & -n_1(a_1 c_2 + a_2 c_1) \\ & -2n_3 a_1 c_1 & +2n_2 a_1 c_1 \\ -n_2(a_2 c_3 + a_3 c_2) & 2\sigma + \epsilon_{22} & n_2(a_2 c_1 + a_1 c_2) \\ +2n_3 a_2 c_2 & & -2n_1 a_2 c_2 \\ n_3(a_3 c_2 + a_2 c_3) & -n_3(a_3 c_1 + a_1 c_3) & 2\sigma + \epsilon_{33} \\ -2n_2 a_3 c_3 & +2n_1 a_3 c_3 & \end{pmatrix}, \quad (3.2.71a)$$

onde

$$\epsilon_{11} = (a_1 c_2 + a_2 c_1) n_3 - (a_1 c_3 + a_3 c_1) n_2, \quad (3.2.71b)$$

$$\epsilon_{22} = (a_2 c_3 + a_3 c_2) n_1 - (a_1 c_2 + a_2 c_1) n_3, \quad (3.2.71c)$$

$$\epsilon_{33} = (a_3 c_1 + a_1 c_3) n_2 - (a_3 c_2 + a_2 c_3) n_1. \quad (3.2.71d)$$

Calculando-se $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se

$$\left[n^2 - \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) + i \frac{\mu}{2\omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \right] \times \left[n^2 - \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) - i \frac{\mu}{2\omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \right] = 0. \quad (3.2.72)$$

Comparado ao caso antissimétrico da Eq. (3.2.55), onde ocorria apenas um índice de refração, a configuração dada na Eq. (3.2.69) gera dois índices de refração. Utilizando agora $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = n|\mathbf{a}||\mathbf{c}| \cos \varphi$, a Eq. (3.2.72) resulta em

$$n_{\pm} = \alpha_{\pm}'' + i (\alpha_{\pm}'' \pm \Xi_{a,c}), \quad (3.2.73a)$$

$$\Xi_{a,c} = \frac{\mu}{4\omega} |\mathbf{a}||\mathbf{c}| \cos \varphi, \quad (3.2.73b)$$

$$\alpha_{\pm}'' = \sqrt{\sqrt{\Upsilon_{a,c}^2 + \left(\frac{\mu\sigma}{2\omega} \right)^2} \pm \Upsilon_{a,c}}, \quad (3.2.73c)$$

$$2\Upsilon_{a,c} = \mu\epsilon - \Xi_{a,c}^2, \quad (3.2.73d)$$

com a presença de novos termos imaginários oriundos da condutividade exótica. Observe que a estrutura do termo contendo a dependência do índice de refração com o ângulo entre \mathbf{k} e o trivetor $(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$, ou seja, o termo $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$, é análoga ao que ocorre no caso antissimétrico, onde se tem $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$. Além disso, existe também um sinal negativo entre as contribuições na Eq. (3.2.73d). Assim, para se ter índice de refração com parte real positiva quando $\sigma = 0$, considera-se $\mu\epsilon \geq \Xi_{a,c}^2$. Como os modos se diferenciam apenas nas suas partes imaginárias, então birrefringência não ocorre. Nesse caso, apenas a atenuação se diferencia para cada modo.

3.2.4.1 Dielétrico não-condutor e modos de propagação

No caso de um meio dielétrico não ôhmico, $\sigma = 0$, a Eq. (3.2.73) simplifica-se em

$$n_{\pm} = \sqrt{2\Upsilon_{a,c}} \pm i \frac{\mu}{4\omega} |\mathbf{a}||\mathbf{c}| \cos \varphi, \quad (3.2.74)$$

na qual se observa comportamento exótico de absorção para o meio não-condutor ($\sigma = 0$), com o coeficiente de atenuação sendo $2\tilde{\alpha} = \mu|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| \cos \varphi$. Nesse caso, a modificação é proporcional a $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{c}|$, indicando que tal efeito está associado aos elementos off-diagonal de σ_{ij}^B em vez do seu traço.

Note ainda que os cenários simétrico e antissimétrico compõem os cenários exóticos, ou seja, a condutividade magnética σ^B contém elementos off-diagonais. Nesses dois casos, comportamento condutor pode ser atribuído a um meio dielétrico puro.

Para se determinar os modos de propagação, escolhe-se um sistema de coordenadas onde $\mathbf{a} = (0, a, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, c)$. Dessa forma, M_{ij} da Eq. (3.2.71a) pode ser reescrito na forma

$$M_{ij} = A\delta_{ij} - n_i n_j + C (\epsilon_{klj} \delta_{i2} \delta_{k3} n_l + \epsilon_{klj} \delta_{i3} \delta_{k2} n_l), \quad (3.2.75a)$$

com

$$A = n^2 - \mu\epsilon, \quad C = -i \frac{\mu}{2\omega} ac. \quad (3.2.75b)$$

Assim, a forma explícita da matriz na Eq. (3.2.71a) simplifica-se em

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} A - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & A - n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & A - n_3^2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & n_1 & 0 \\ n_3 & 0 & -n_1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.76)$$

produzindo a seguinte equação de dispersão

$$(A^2 - C^2 n_1^2) (A - n^2) = 0. \quad (3.2.77)$$

Uma vez que $A - n^2 = -\mu\epsilon$, as relações de dispersão serão dadas por

$$A = \pm Cn_1. \quad (3.2.78)$$

Implementando-se a solução com sinal positivo, $A = Cn_1$, na Eq. (3.2.76), obtém-se

$$E_+^y = \frac{n_2}{n_1} E_+^x, \quad E_+^z = \left(\frac{Cn_1 - n_1^2 - n_2^2}{n_1 n_3} \right) E_+^x. \quad (3.2.79)$$

Consequentemente, o campo elétrico para o modo de propagação (+) é dado por¹¹

$$\mathbf{E}_+ = E_+^{(0)} (n_1 n_3, n_2 n_3, Cn_1 - n_1^2 - n_2^2), \quad (3.2.80)$$

onde $E_+^{(0)}$ é uma amplitude apropriadamente escolhida. Utilizando agora $A = -Cn_1$, dado na Eq. (3.2.78), na Eq. (3.2.76), tem-se

$$E_-^x = \frac{n_1}{n_3} E_-^z, \quad E_-^y = -\frac{Cn_1 + n_1^2 + n_3^2}{n_2 n_3} E_-^z. \quad (3.2.81)$$

Portanto, o campo elétrico associado é dado por

$$\mathbf{E}_- = E_-^{(0)} (n_1 n_2, -(Cn_1 + n_1^2 + n_3^2), n_2 n_3), \quad (3.2.82)$$

com outra amplitude $E_-^{(0)}$.

3.3 Consistência das equações de Maxwell

Nessa seção, estende-se a densidade de corrente \mathbf{J} na Eq. (2.2.8a) de forma a incluir contribuições de fontes externas \mathbf{J}_e , ou seja, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \sigma \cdot \mathbf{E} + \sigma^B \cdot \mathbf{B}$. Nas seções anteriores, a propagação eletromagnética foi discutida considerando-se cenários distintos para a condutividade magnética e na ausência de fontes externas, $\mathbf{J}_e = 0$. Uma questão que pode surgir quando se considera $\mathbf{J}_e \neq 0$ é identificar a correspondente densidade de carga ρ que mantém o formalismo consistente, isto é, que para uma escolha arbitrária de correntes, a conservação de carga, $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ seja preservada.

Utilizando o espaço de momentos com as convenções $\nabla \mapsto i\mathbf{k}$ e $\partial_t \mapsto -i\omega$, efetua-se o produto escalar entre \mathbf{k} e a lei de Ampère, fornecendo

$$i\omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3.3.1)$$

que juntamente com a lei de Gauss $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \rho$ leva à identificação

$$\rho = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} / \omega, \quad (3.3.2)$$

¹¹Vide Apêndice D.

com $\omega \neq 0$. Note que a Eq. (3.3.2) é exatamente a equação de continuidade no espaço de momentos. Dessa forma, pode-se identificar explicitamente a densidade de carga em cada cenário onde se parametrizou a condutividade magnética. Considerando $\sigma = 0$, as expressões para a densidade de carga de cada caso são apresentadas¹² a seguir.

Para o caso isotrópico da seção 3.2.1 com $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \Sigma \mathbf{B}$, a densidade de carga correspondente é

$$\rho = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{J}_e + \Sigma \mathbf{B}) = \rho_e, \quad (3.3.3)$$

uma vez que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ e se definiu $\rho_e = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e / \omega$.

Para o cenário antissimétrico da seção 3.2.3 com $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{b} \times \mathbf{B}$, tem-se a seguinte densidade de carga

$$\rho = \rho_e + \mu \epsilon \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} + \frac{i\mu}{\omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_e, \quad (3.3.4)$$

onde se utilizou algumas equações de Maxwell para se derivar a expressão acima.

No caso simétrico da seção 3.2.4 onde a densidade de corrente é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_e + \frac{1}{2} [\mathbf{a} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})], \\ &= \mathbf{J}_e + \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

a correspondente densidade de carga é escrita como

$$\rho = \rho_e - \frac{\mu \epsilon}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] - \frac{i\mu}{2\omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e. \quad (3.3.6)$$

3.4 Reflexão e *skin depth effect*

A presença da condutividade magnética, como um parâmetro material efetivo do meio, é capaz de modificar os índices de refração do meio, levando a birrefringência e comportamento condutor. Conforme foi visto, os casos exóticos são particularmente interessantes, pois permitem o surgimento de uma parte imaginária não-nula nas expressões dos índices de refração. Dessa forma, outros efeitos relacionados à propagação das ondas eletromagnéticas, como comprimento de penetração e reflexão em interfaces, também podem ser avaliados. A seguir, esses dois fenômenos são discutidos para os casos off-diagonal já citados.

3.4.1 Skin depth effect

Quando uma onda eletromagnética incide sobre a superfície de um condutor, uma parte de sua amplitude penetra parcialmente o material, enquanto outra parte será refletida. O comprimento de penetração característico dentro do meio condutor define o conhecido efeito de penetração

¹²Vide Apêndice E.

(*skin depth effect*), dado por

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\omega \text{Im}[n]}, \quad (3.4.1)$$

onde $\text{Im}[n]$ é a parte imaginária do índice de refração. Em casos simples usuais, o comprimento de penetração é dado por [7],

$$\bar{\delta}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}. \quad (3.4.2)$$

para bons condutores ôhmicos. Note que, neste caso, o comprimento diminui com a frequência.

Para os cenários da condutividade magnética com parametrizações simétrica (S) e antissimétrica (AS), os respectivos índices de refração (com $\sigma = 0$) são dados pelas Eqs. (3.2.74) e (3.2.62). Dessa forma, os comprimentos de penetração associados a esses casos serão

$$\bar{\delta}_{AS} = \frac{2}{\mu b \cos \theta}, \quad (3.4.3a)$$

$$\bar{\delta}_S = \frac{4}{\mu |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| \cos \varphi}. \quad (3.4.3b)$$

Portanto, tais efeitos *skin depths* não exibem dependência com a frequência, o que implica num mesmo comprimento de penetração para todas as frequências. Comparando as Eqs. (3.4.3a) e (3.4.2), observamos que o caráter não-dispersivo da Eq. (3.4.3a) não é usual para condutores.

3.4.2 Reflexão

Quando uma onda eletromagnética incide na interface entre dois meios (do meio 1 para o meio 2, por exemplo), parte de sua energia pode ser refletida de volta ao meio 1, e parte de sua energia também pode ser transmitida para o meio 2. Na literatura [1, 7], as conhecidas equações de Fresnel estabelecem relações para se calcular os coeficientes de reflexão e transmissão, que dependem do ângulo de incidência e dos índices de refração dos meios. Para incidência normal, sabe-se que

$$R = \left| \frac{\mu_1 n_2' - \mu_2 n_1 + i\mu_1 n_2''}{\mu_1 n_2' + \mu_2 n_1 + i\mu_1 n_2''} \right|^2, \quad (3.4.4)$$

onde $n_{1(2)}'$ e $n_{1(2)}''$ são as partes reais e imaginárias dos índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente. As quantidades $\epsilon_{1(2)}$ e $\mu_{1(2)}$ representam as permissividades elétrica e permeabilidades magnéticas dos meios 1 e 2.

Considere um sistema formado por um dielétrico ordinário caracterizado pelo índice de refração $n_1 = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ e um meio com índice de refração complexo $n_2 = n_2' + in_2''$, descrito pelos parâmetros constitutivos μ_2 , ϵ_2 e a condutividade ôhmica σ . Para uma onda que se propaga de um dielétrico e incide sobre a superfície do meio condutor, o coeficiente de reflexão para incidência normal (e

considerando $n_1 \ll n'_2$) é dado por

$$R \approx 1 - 4 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \frac{n_1 n'_2}{n_2'^2 + n_2''^2}. \quad (3.4.5)$$

Nos cenários convencionais da eletrodinâmica, para um bom condutor ($\sigma/(\omega\mu_2) \gg 1$), tem-se $n'_2 = n_2'' = \sqrt{\mu_2\sigma/(2\omega)}$. Então o coeficiente de reflexão, para esse caso, da Eq. (3.4.5) fornece

$$R \approx 1 - 2\sqrt{2\frac{\mu_2\epsilon_1\omega}{\mu_1\sigma}}. \quad (3.4.6)$$

Considerando $\mu_1 = \mu_2$, obtém-se então a conhecida fórmula de Hagen-Rubens

$$R \approx 1 - 2\sqrt{2\frac{\epsilon_1\omega}{\sigma}}. \quad (3.4.7)$$

Pode-se agora derivar uma versão da Eq. (3.4.7) considerando um meio dielétrico (com $\sigma = 0$) e dotado de condutividade magnética σ_{ij}^B .

No cenário de uma condutividade magnética antissimétrica, o índice de refração é modificado de acordo com a Eq. (3.2.62), a partir da qual se tem

$$n'_2 = \sqrt{\mu_2\epsilon_2 - \left(\frac{\mu_2}{2\omega} b \cos \theta \right)^2}, \quad n_2'' = \frac{\mu_2}{2\omega} b \cos \theta. \quad (3.4.8)$$

Implementando a Eq. (3.4.8) na Eq. (3.4.5), obtém-se

$$R_{AS} \approx 1 - 4\sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\mu_2}{\epsilon_2} \left(\frac{b \cos \theta}{2\omega} \right)^2}, \quad (3.4.9)$$

para n'_2 real. Este resultado é o análogo da fórmula de Hagen-Rubens para reflexão na superfície de um meio dotado com condutividade magnética no caso antissimétrico. Note que tal resultado é muito diferente do coeficiente de reflexão na interface entre dois dielétricos ordinários,

$$R \approx 1 - 4\sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_2}}, \quad (3.4.10)$$

uma vez que a condutividade magnética introduz um termo dependente da frequência na expressão para R .

No cenário de condutividade magnética com parametrização simétrica, com índice de refração dado na Eq. (3.2.74), o coeficiente de reflexão será dado por

$$R_S \approx 1 - 4\sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\mu_2}{\epsilon_2} \left(\frac{|\mathbf{a}||\mathbf{c}| \cos \varphi}{4\omega} \right)^2}. \quad (3.4.11)$$

MEIOS BI-ANISOTRÓPICOS COM RELAÇÕES SIMÉTRICA E ANTISSIMÉTRICA

Sumário

4.1	Relações constitutivas estendidas	65
4.2	Relações para conservação de energia	66
4.3	Propagação de ondas eletromagnéticas em cenários bi-isotrópicos e bi-anisotrópicos	67
4.3.1	Caso bi-isotrópico	68
4.3.1.1	Modos de propagação	70
4.3.1.2	Efeitos ópticos dos parâmetros magnetoelétricos em dielétricos não-condutores	71
4.3.1.3	Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting . . .	71
4.3.2	Caso bi-anisotrópico simétrico	74
4.3.2.1	Configuração d -longitudinal	77
4.3.2.2	Configuração d -transversal	77
4.3.2.3	Configuração d -genérico	79
4.3.2.4	Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting . . .	80
4.3.3	Caso bi-anisotrópico antissimétrico	85
4.3.3.1	Configuração a -ortogonal	88
4.3.3.2	Configuração a -longitudinal	90
4.3.3.3	Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting . . .	91

Neste capítulo, será discutida a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais descritos por relações constitutivas lineares estendidas. Inicialmente, abordaremos o caso bi-isotrópico, em que os parâmetros magnetoelétricos são números. Depois disso, dois cenários para meios bi-anisotrópicos são considerados: simétrico e antissimétrico. Esses últimos se referem à parametrização escolhida para se escrever as relações estendidas. Aspectos relacionados à birrefringência e absorção também serão comentados. Além disso, discutiremos como a conservação de energia, descrita através do teorema de Poynting, estabelece restrições sobre os parâmetros constitutivos do meio. Os tópicos deste capítulo geraram um artigo publicado no *Physical Review A* [49]:

- P.D.S. Silva, M.M. Ferreira Jr., and R. Casana, Symmetric and antisymmetric constitutive tensors for bi-isotropic and bi-anisotropic media, *Phys. Rev. A* **106**, 042205 (2022).

4.1 Relações constitutivas estendidas

Na Seção 2.1, aspectos gerais sobre as relações constitutivas de um meio foram discutidos, incluindo a classificação dos meios quanto ao tipo de relação constitutiva válida, com alguns exemplos mencionados.

Relações constitutivas estendidas introduzem respostas (do meio ao campo aplicado) elétrica e magnética adicionais, escritas como funções do tipo¹ $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Restringindo-se à eletrodinâmica linear, as relações estendidas podem ser escritas pela Eq. (2.1.6), isto é,

$$D^i = \epsilon_{ij}E^j + \alpha_{ij}B^j, \quad (4.1.1a)$$

$$H^i = \mu_{ij}^{-1}B^j + \beta_{ij}E^j, \quad (4.1.1b)$$

sendo ϵ_{ij} e μ_{ij} os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, enquanto os tensores α_{ij} e β_{ij} capturam as respostas magnetoelétricas do meio, ou seja, α_{ij} mede a resposta elétrica devido ao campo magnético aplicado, β_{ij} descreve a resposta magnética ao campo elétrico aplicado. O cenário mais simples da (4.1.1) é dado por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \mathbb{1} & \alpha \mathbb{1} \\ \beta \mathbb{1} & \zeta \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

em que ϵ , μ , α e β são parâmetros, e descreve os meios bi-isotrópicos (materiais homogêneos, isotrópicos e lineares [50, 51]). As relações bi-isotrópicas (4.1.2) foram muito investigadas na literatura [52, 55–60], sendo também importantes, por exemplo, na abordagem de propriedades de isolantes topológicos [61–68], na eletrodinâmica de axions [69–71], e na construção de isoladores ópticos (a partir de materiais quirais) [72]. No cenário bi-anisotrópico, as relações (4.1.1) encontram aplicação em sistemas diversos, a exemplo de gás de elétrons relativísticos [73], meios regidos por parâmetros magnetoelétricos dependentes do tempo [74], semimetais de Weyl [75, 76], materiais magnetizados [77, 78], e relações de dispersão anisotrópicas [79–81].

Os tensores constitutivos (4.1.1) podem depender também da magnitude dos campos eletromagnéticos aplicados, dentro de uma abordagem para se descrever birrefringência na eletrodinâmica não-linear [99]. Por exemplo, tensores constitutivos do tipo² $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(E, B)$ e $\hat{\mu} = \hat{\mu}(E, B)$, sendo (E,B) as magnitudes dos campos elétrico e magnético, permitem descrever os efeitos Kerr e Cotton-Moutton em algumas configurações particulares [100].

Outra possibilidade de cenários estendidos surge no contexto da eletrodinâmica modificada por

¹Na representação (\mathbf{D}, \mathbf{H}) em termos de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

²Aqui, a notação “chapéu” indica uma matriz, ou seja, $\hat{\epsilon} = [\epsilon_{ij}]$.

violação da simetria de Lorentz (VL) [35–38], na qual as relações constitutivas são descritas por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \mathbb{1} + \kappa_{DE} & \kappa_{DB} \\ \kappa_{HE} & \mu^{-1} \mathbb{1} + \kappa_{HB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (4.1.3)$$

onde κ_{DE} , κ_{DB} , κ_{HE} e κ_{HB} são matrizes adimensionais de ordem 3×3 . Essas generalizações conduzem a uma eletrodinâmica não usual na qual os parâmetros magnetoelétricos, oriundos da VL, podem gerar efeitos interessantes potencialmente relacionados à fenomenologia de novos materiais.

Com base nesse vasto cenário, o presente capítulo irá estudar o caso em que a permissividade elétrica e permeabilidade magnética são dadas por $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$, $\mu_{ij}^{-1} = \mu^{-1} \delta_{ij}$, enquanto os tensores magnetoelétricos são descritos por parametrizações simétrica e antissimétrica, que serão discutidos nas seções (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3). Na seção a seguir, abordaremos a conservação de energia e suas consequências para os tensores constitutivos.

4.2 Relações para conservação de energia

A conservação de energia eletromagnética é estabelecida pelo teorema de Poynting³ [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{i\omega}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}) - \frac{(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E})}{2}, \quad (4.2.1)$$

no qual o vetor de Poynting é dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (4.2.2)$$

A parte real da Eq. (4.2.1) fornece a conservação de energia para o sistema. Na ausência de fontes ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$) e fluxo de densidade energia ($\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$), a lei de conservação de energia simplifica-se em

$$\text{Re} [i\omega (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B})] = 0. \quad (4.2.3)$$

Dependendo da forma das relações constitutivas, é possível obter diferentes expressões restritivas para os parâmetros constitutivos do meio a partir da Eq. (4.2.3). Considere as relações constitutivas de um meio bi-anisotrópico,

$$D^i(\omega) = \epsilon_{ij}(\omega) E^j(\omega) + \alpha_{ij}(\omega) B^j(\omega), \quad (4.2.4a)$$

$$H^i(\omega) = \mu_{ij}^{-1}(\omega) B^j(\omega) + \beta_{ij}(\omega) E^j(\omega). \quad (4.2.4b)$$

³Vide o Apêndice F.

Substituindo (4.2.4) na Eq. (4.2.3) e utilizando a propriedade $\text{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + z^*)$, sendo z um complexo, obtemos⁴

$$[E^i (\epsilon_{ij}^* E^{*j} + \alpha_{ij}^* B^{*j}) - (\zeta_{ij}^* B^{*j} + \beta_{ij}^{*j} E^{*j}) B^i - E^{*i} (\epsilon_{ij} E^j + \alpha_{ij} B^j) + (\zeta_{ij} B^j + \beta_{ij} E^j) B^{*i}] = 0, \quad (4.2.5)$$

com $\zeta_{ij} = \mu_{ij}^{-1}$. Renomeando os índices $i \leftrightarrow j$ nos terceiro, quinto e sétimo termos, tem-se

$$(\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ji}) E^i E^{*j} - (\zeta_{ij}^* - \zeta_{ji}) B^i B^{*j} + \alpha_{ij}^* E^i B^{*j} - \beta_{ij}^* E^{*j} B^i - \alpha_{ij} E^{*i} B^j + \beta_{ij} E^j B^{*i} = 0, \quad (4.2.6)$$

que pode ser simplificada utilizando-se novamente $i \leftrightarrow j$ nos terceiro, quarto, quinto e sexto termos, resultando em

$$(\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ji}) E^i E^{*j} - (\zeta_{ij}^* - \zeta_{ji}) B^i B^{*j} + (\alpha_{ij}^* + \beta_{ji}) E^i B^{*j} - (\beta_{ij}^* + \alpha_{ji}) E^{*j} B^i = 0. \quad (4.2.7)$$

Essa equação estabelece a relação geral para a conservação de energia, envolvendo todos os tensores constitutivos com os campos elétrico e magnético. Uma forma simples de garantir a conservação de energia é fazer todos os “coeficientes” (contraídos com os campos) iguais a zero, ou seja,

$$\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ji} = 0 \rightarrow \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{T*}, \quad (4.2.8)$$

$$\zeta_{ij}^* - \zeta_{ji} = 0 \rightarrow \zeta_{ij} = \zeta_{ij}^{T*}, \quad (4.2.9)$$

$$\alpha_{ij}^* + \beta_{ji} = 0 \rightarrow \alpha_{ij} = -\beta_{ij}^{T*}. \quad (4.2.10)$$

Na forma matricial, essas relações são escritas como

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^\dagger, \quad \hat{\zeta} = \hat{\zeta}^\dagger, \quad \hat{\alpha} = -\hat{\beta}^\dagger. \quad (4.2.11)$$

Uma vez que as condições (4.2.11) são satisfeitas, a conservação de energia no sistema eletromagnético é assegurada. Tal condição será considerada nas seções seguintes.

4.3 Propagação de ondas eletromagnéticas em cenários bi-isotrópicos e bi-anisotrópicos

Utilizando o *ansatz* de ondas planas, $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, as equações de Maxwell são escritas como (para $\rho = 0$)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = -i\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (4.3.1a)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (4.3.1b)$$

⁴Note que omitimos aqui a dependência na frequência ω para termos uma notação mais “limpa”.

Considere um meio homogêneo cujas relações constitutivas são dadas por (4.1.1). Implementando agora

$$\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}, \quad \zeta_{ij} = \mu^{-1} \delta_{ij}, \quad J^i = \sigma E^i, \quad (4.3.2)$$

as equações de Maxwell permitem escrever – seguindo o procedimento discutido na Sec. 2.3:

$$M_{ij} E^j = 0, \quad M_{ij} = [n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \bar{\epsilon}_{ij}], \quad (4.3.3)$$

em que o tensor de permissividade elétrica estendido é dado por

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \tilde{\epsilon} \delta_{ij} - (\alpha_{il} \epsilon_{lmj} + \beta_{lj} \epsilon_{iml}) n_m, \quad (4.3.4)$$

com $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$.

A seguir, examinaremos os efeitos de propagação de ondas eletromagnéticas em três cenários distintos, que consideram diferentes parametrizações para os tensores magnetoelétricos α_{ij} e β_{ij} .

4.3.1 Caso bi-isotrópico

Iniciamos considerando o caso de parâmetros α_{ij} e β_{ij} simétricos e isotrópicos, onde os coeficientes das quantidades $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são dadas por

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta \delta_{ij}, \quad (4.3.5)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Aplicando a condição $\alpha_{ij} = -\beta_{ij}^\dagger$ na parametrização (4.3.5), tem-se

$$\beta^* = -\alpha. \quad (4.3.6)$$

Nesse caso, as relações constitutivas assumem a forma típica bi-isotrópica (4.1.2),

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \beta \mathbf{E}, \quad (4.3.7)$$

intensamente investigadas na literatura em vários cenários [52, 55–60].

Inserindo (4.3.5) na Eq. (4.3.4), obtém-se

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \tilde{\epsilon} \delta_{ij} + (\alpha + \beta) \epsilon_{ijk} n_k, \quad (4.3.8)$$

enquanto o tensor M_{ij} tem a forma seguinte:

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - \mu\epsilon - i\mu\sigma/\omega & -n_1 n_2 - \mu(\alpha + \beta) n_3 & -n_1 n_3 + \mu(\alpha + \beta) n_2 \\ -n_1 n_2 + \mu(\alpha + \beta) n_3 & n_1^2 + n_3^2 - \mu\epsilon - i\mu\sigma/\omega & -n_2 n_3 - \mu(\alpha + \beta) n_1 \\ -n_1 n_3 - \mu(\alpha + \beta) n_2 & -n_2 n_3 + \mu(\alpha + \beta) n_1 & n_1^2 + n_2^2 - \mu\epsilon - i\mu\sigma/\omega \end{pmatrix}. \quad (4.3.9)$$

Calculando $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se

$$n^4 - n^2 [2\mu\tilde{\epsilon} - \mu^2(\alpha + \beta)^2] + \mu^2\tilde{\epsilon}^2 = 0, \quad (4.3.10)$$

a qual fornece os seguintes índices de refração

$$n_{\pm}^2 = \mu\tilde{\epsilon} - 2Z \pm i\mu(\alpha + \beta)\sqrt{\mu\tilde{\epsilon} - Z}, \quad (4.3.11a)$$

$$Z = \frac{\mu^2(\alpha + \beta)^2}{4}, \quad (4.3.11b)$$

que se simplificam em

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\tilde{\epsilon} - Z} \pm i\sqrt{Z}. \quad (4.3.12)$$

Os índices de refração podem também ser obtidos através da diagonalização do tensor de permissividade elétrica efetiva e, então, faz-se cada autovalor igual a n^2/μ . Os autovalores ϵ_a ($a = 1, 2, 3$) satisfazem $\bar{\epsilon}_{ij}e_a^j = \epsilon_a e_a^i$, onde \mathbf{e}_a representa o autovetor associado a ϵ_a . Diagonalizando-se a matriz $\bar{\epsilon}$ da Eq. (4.3.9), encontramos os autovalores

$$\epsilon_1 = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}, \quad (4.3.13a)$$

$$\epsilon_{2,4} \equiv \epsilon_{\pm} = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \pm i(\alpha + \beta)n, \quad (4.3.13b)$$

associados aos seguintes autovetores,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n}}{n}, \quad (4.3.14a)$$

$$\mathbf{e}_{2(3)} = \frac{1}{n\sqrt{2(n_1^2 + n_3^2)}} \begin{pmatrix} n_3n \pm in_1n_2 \\ \mp i(n_1^2 + n_3^2) \\ \pm in_2n_3 - n_1n \end{pmatrix}. \quad (4.3.14b)$$

Os autovalores (4.3.13a) e (4.3.13b) são relacionados com os seguintes índices de refração

$$n^2 = \mu \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right), \quad (4.3.15)$$

$$n_{\pm}^2 = \mu \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) \pm i\mu(\alpha + \beta)n. \quad (4.3.16)$$

Nota-se que a Eq. (4.3.15) representa o índice refrativo de um meio isotrópico condutor. Por outro lado, a Eq. (4.3.16) recupera o resultado (4.3.12), o que significa que somente os autovalores ϵ_2 e ϵ_3 podem ser associados com os índices de refração n_+ e n_- do meio, respectivamente. Essa abordagem de determinação dos índices de refração via a relação $n^2 = \mu\epsilon_a(n)$, onde ϵ_a representa os autovalores da permissividade $\bar{\epsilon}_{ij}$, funciona somente quando o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação. Tal condição é garantida aqui pela lei de Gauss, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$, na qual o

deslocamento elétrico, dado por

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (4.3.17)$$

leva a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Assim, para um vetor geral $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, o campo elétrico associado, \mathbf{E}_a , satisfaz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0$. Dessa forma, a Eq. (4.3.3) simplifica-se em

$$[n^2 \delta_{ij} - \mu \bar{\epsilon}_{ij}] E^j = 0, \quad (4.3.18)$$

ou $n^2 \delta_{ij} = \mu \bar{\epsilon}_{ij}$, gerando uma correspondência direta entre n^2 e os autovalores de $\bar{\epsilon}_{ij}$, isto é, $n^2 = \mu \epsilon_a(n)$. Essa é razão pela qual os autovetores (e_a) representam os campos elétricos, $\mathbf{E}_a \sim \mathbf{e}_a$. Além disso, observa-se que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a = 0$ é satisfeita pelos autovetores da Eq. (4.3.14b), indicando a transversalidade dos modos propagantes, $\mathbf{E}_2 \sim \mathbf{e}_2$, $\mathbf{E}_3 \sim \mathbf{e}_3$, cujos autovalores (4.3.13b) produzem os índices de refração n_{\pm} [veja a Eq. (4.3.12)]. Em contrapartida, observa-se que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 \neq 0$, o que significa que o autovalor ϵ_1 não gera um índice de refração do meio.

4.3.1.1 Modos de propagação

Para se determinar as polarizações dos modos propagantes, pode-se escolher um sistema de coordenadas no qual a propagação ocorre ao longo do eixo z , ou seja,

$$\mathbf{n} = (0, 0, n). \quad (4.3.19)$$

Nesse caso, a matriz (4.3.9) é escrita na forma

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu \tilde{\epsilon} & -\mu(\alpha + \beta)n & 0 \\ \mu(\alpha + \beta)n & n^2 - \mu \tilde{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \tilde{\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (4.3.20)$$

A condição $M_{ij} E^j = 0$ fornece as seguintes soluções normalizadas para o campo elétrico:

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.21)$$

em que \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- representam vetores LCP e RCP, respectivamente. A solução (4.3.21) não depende da natureza (real ou complexa) dos parâmetros constitutivos α e β , sendo válida para todos os casos que serão discutidos a seguir.

4.3.1.2 Efeitos ópticos dos parâmetros magnetoelétricos em dielétricos não-condutores

Para um dielétrico não condutor ($\sigma \mapsto 0$), os índices de refração (4.3.12) tomam a forma,

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon - \frac{\mu^2(\alpha + \beta)^2}{4}} \pm i \frac{\mu(\alpha + \beta)}{2}. \quad (4.3.22)$$

Naturalmente, no limite em que $\alpha + \beta \mapsto 0$, recupera-se o índice de refração usual para um dielétrico, $n_{\pm} \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}$. A Eq. (4.3.22) assume comportamentos distintos quando os parâmetros magnetoelétricos são reais ou complexos, ou seja, *i*) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e *ii*) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

No primeiro caso *i*), $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e podemos escrever:

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \quad \beta = \beta' + i\beta'', \quad (4.3.23)$$

em que $\alpha' = \text{Re}[\alpha]$, $\alpha'' = \text{Im}[\alpha]$, $\beta' = \text{Re}[\beta]$ e $\beta'' = \text{Im}[\beta]$. A condição (4.3.6) implica que

$$\alpha' = -\beta', \quad \alpha'' = \beta'', \quad (4.3.24)$$

que leva a $\alpha + \beta = 2i\alpha''$. Portanto, os índices (4.3.22) se tornam

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2\alpha''^2} \mp \mu\alpha'', \quad (4.3.25)$$

que são reais, positivos e geram birrefringência. Uma vez que os modos de polarização são LCP e RCP [vide (4.3.21)], o efeito da birrefringência pode ser avaliado em termos do poder de rotação (2.3.26) que, para os índices da Eq. (4.3.25), produz

$$\delta = \mu\omega\alpha''. \quad (4.3.26)$$

Tal efeito é uma consequência de $(\alpha + \beta) = 2i\alpha''$. Portanto, a birrefringência ocorre somente quando os parâmetros constitutivos possuem uma parte imaginária. No segundo caso *ii*) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se $\beta = -\alpha$ e $\alpha'' = 0$. Consequentemente, vale $(\alpha + \beta) = 0$, e temos apenas $n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon}$. Logo, não ocorre birrefringência.

4.3.1.3 Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting

Substituindo $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ na Eq. (4.3.12), obtém-se

$$\omega_{\pm} = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon - \bar{Z}} \pm i\sqrt{Z}}. \quad (4.3.27)$$

Para avaliarmos as velocidades de grupo e de fase, consideramos a natureza (real ou complexa) dos parâmetros magnetoelétricos. Assim, temos:

i) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tem-se $(\alpha + \beta) = 2i\alpha''$. Logo, $Z = -\mu^2\alpha''^2$ e

$$\omega_{\pm} = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon + \mu\alpha''^2 \mp \mu\alpha''}}. \quad (4.3.28)$$

Nesse caso, observamos que $\omega_{\pm} > 0$ para todos os valores de k , garantindo a propagação de modos físicos. As velocidades de fase e grupo serão iguais

$$v_{\text{ph}(\pm)} = \frac{\omega_{\pm}}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon + \mu\alpha''^2 \mp \mu\alpha''}}, \quad v_{g(\pm)} = \left| \frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial\mathbf{k}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon + \mu\alpha''^2 \mp \mu\alpha''}}. \quad (4.3.29)$$

ii) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se $(\alpha + \beta) = 0$. Logo, $Z = 0$ e

$$\omega_{\pm} = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (4.3.30)$$

Conseqüentemente, as velocidades de grupo e fase são aquelas de um dielétrico homogêneo e isotrópico, ou seja,

$$v_{g(\pm)} = \left| \frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial\mathbf{k}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad v_{\text{ph}(\pm)} = \frac{\omega_{\pm}}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (4.3.31)$$

Uma vez que $v_{g(\pm)} < 1$ em ambos os casos *i)* e *ii)*, a causalidade clássica é assegurada para a propagação de ondas eletromagnéticas em todo o domínio de k .

Podemos agora determinar o vetor de Poynting (4.2.2) para o cenário bi-isotrópico. Inicialmente, substituímos $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ (obtido da lei de Faraday) na relação constitutiva (4.3.7) para \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{n} \times \mathbf{E} + \beta \mathbf{E}, \quad (4.3.32)$$

de modo que (4.2.2) fornece

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*)] + \frac{\beta^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*), \quad (4.3.33)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{n}|\mathbf{E}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^*] + \frac{\beta^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*), \quad (4.3.34)$$

onde $\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) = \mathbf{n}|\mathbf{E}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^*$. Na ausência de fontes ($\rho = 0$), a lei de Gauss fornece $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$. Considerando a relação bi-isotrópica $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \alpha\mathbf{B}$, temos $\epsilon\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} + \alpha\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, que implica em

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.3.35)$$

uma vez que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$. Assim, substituindo (4.3.35) na Eq. (4.3.34), obtemos finalmente

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\beta^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*). \quad (4.3.36)$$

A parte real do vetor complexo acima⁵ nos fornece a média temporal do vetor de Poynting [1], ou seja,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re} \left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\beta^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) \right], \quad (4.3.37)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \text{Re} \left[\frac{\beta^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) \right], \quad (4.3.38)$$

na qual usamos $\text{Re}[\mathbf{n}] = \mathbf{n} = n\hat{\mathbf{n}}$, pois os índices de refração são reais. Utilizando agora a propriedade $\text{Re}[z] = (1/2)(z + z^*)$, teremos

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \left[\beta^* (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) + \beta (\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) \right], \quad (4.3.39)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \left[(\beta^* - \beta) (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) \right]. \quad (4.3.40)$$

Para simplificar, podemos escrever o campo elétrico como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}'', \quad (4.3.41)$$

em que $\mathbf{E}' = \text{Re}[\mathbf{E}]$ e $\mathbf{E}'' = \text{Im}[\mathbf{E}]$, sendo \mathbf{E}' e \mathbf{E}'' reais. Utilizando novamente $\beta = \beta' + i\beta''$, temos $\beta^* - \beta = -2i\beta''$, e escrevemos:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} (-2i\beta'') \left[(\mathbf{E}' \times \mathbf{E}') - i(\mathbf{E}' \times \mathbf{E}'') + i(\mathbf{E}'' \times \mathbf{E}') + (\mathbf{E}'' \times \mathbf{E}'') \right], \quad (4.3.42)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} (-i\beta'') (-2i) (\mathbf{E}' \times \mathbf{E}''), \quad (4.3.43)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 - \alpha'' (\mathbf{E}' \times \mathbf{E}''), \quad (4.3.44)$$

onde utilizamos $\beta'' = \alpha''$.

Como a lei de Gauss fornece $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$, vale $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}' = 0$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}'' = 0$, de modo que \mathbf{E}' e \mathbf{E}'' estão definidos no mesmo plano ortogonal a \mathbf{n} . Portanto, $(\mathbf{E}' \times \mathbf{E}'')$ é paralelo ou antiparalelo a \mathbf{n} . Portanto, no meio bi-isotrópico considerado, o fluxo de energia se propaga na mesma direção da onda eletromagnética, independentemente do parâmetro magnetoelétrico, α'' , responsável pela

⁵Segundo o Jackson [1], a convenção adotada é que a média temporal do produto de quantidades complexas é igual a 1/2 da parte real do produto, ou seja, $\langle \mathbf{A} \rangle = (1/2)\text{Re}[\mathbf{A}]$, sendo $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^*$, onde \mathbf{A} , \mathbf{C} e \mathbf{F} são vetores complexos quaisquer. Um pouco adiante, na p. 265 [1], o Jackson já implementa o fator 1/2 nas quantidades complexas e, dessa forma, a média temporal das mesmas é obtida apenas tomando-se a parte real delas. Por exemplo, ele define o vetor de Poynting complexo como $\mathbf{S} = (1/2)(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ em vez de $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$, como definido pelo Zangwill p.593 [7] e o Kong p.48 [50]. Dessa forma, a média temporal do vetor de Poynting, dada por $\langle \mathbf{S} \rangle = (1/2)\text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$ fica equivalente nas três referências [1, 7, 50].

birrefringência.

4.3.2 Caso bi-anisotrópico simétrico

Agora exploraremos o cenário onde α_{ij} e β_{ij} são tensores simétricos não-diagonais, enquanto a permissividade elétrica, ϵ , e permeabilidade magnética, μ , são constantes. Esses tensores podem ser parametrizados por meio de um tri-vetor \mathbf{d} constante, ou seja,

$$\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}d_id_j, \quad \beta_{ij} = \tilde{\beta}d_id_j, \quad (4.3.45)$$

de tal forma que as relações constitutivas são escritas como

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \tilde{\alpha}\mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{B}), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \tilde{\beta}\mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}). \quad (4.3.46)$$

Os parâmetros α_{ij} e β_{ij} na Eq. (4.3.45) representam matrizes 3×3 simétricas com traços dados por $\tilde{\alpha}\mathbf{d}^2$ e $\tilde{\beta}\mathbf{d}^2$, respectivamente, contendo elementos *off-diagonal* que podem gerar anisotropia. Essa é uma diferença notável em relação à configuração bi-isotrópica (4.3.5), estudada na Sec. 4.3.1.

Por questões de generalidade, supomos $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$, o que é compatível com $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{C}$. Dessa forma, a condição (4.2.11) permite estabelecer

$$\tilde{\beta} = -\tilde{\alpha}^*, \quad (4.3.47)$$

o que implica em

$$\tilde{\alpha}' = -\tilde{\beta}', \quad \tilde{\alpha}'' = \tilde{\beta}'', \quad (4.3.48)$$

sendo $\tilde{\alpha}' = \text{Re}[\tilde{\alpha}]$, $\tilde{\alpha}'' = \text{Im}[\tilde{\alpha}]$, $\tilde{\beta}' = \text{Re}[\tilde{\beta}]$ e $\tilde{\beta}'' = \text{Im}[\tilde{\beta}]$.

Substituindo (4.3.45) no tensor de permissividade elétrica (4.3.4), obtemos (com $\sigma = 0$)

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon\delta_{ij} - \left(\tilde{\beta}\epsilon_{imn}n_md_nd_j + \tilde{\alpha}\epsilon_{amj}d_id_an_m \right). \quad (4.3.49)$$

O tensor M_{ij} (4.3.3) é reescrito como

$$[M_{ij}] = \mathcal{N} - \mu(\mathcal{T} + \mathcal{E}), \quad (4.3.50)$$

com \mathcal{N} dado por

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - \mu\epsilon & -n_1n_2 & -n_1n_3 \\ -n_1n_2 & n_1^2 + n_3^2 - \mu\epsilon & -n_2n_3 \\ -n_1n_3 & -n_2n_3 & n_1^2 + n_2^2 - \mu\epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.3.51)$$

enquanto as contribuições dos parâmetros magnetoelétricos estão contabilizadas nas seguintes ma-

trizes:

$$\mathcal{T} = -(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \text{diag}(T_1, T_2, T_3), \quad (4.3.52a)$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & 0 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.52b)$$

onde

$$T_1 = d_1(d_2n_3 - d_3n_2), \quad T_2 = d_2(d_3n_1 - d_1n_3), \quad T_3 = d_3(d_1n_2 - d_2n_1), \quad (4.3.52c)$$

$$\epsilon_{12} = -\tilde{\beta}d_2(d_3n_2 - d_2n_3) + \tilde{\alpha}d_1(d_1n_3 - d_3n_1), \quad (4.3.53a)$$

$$\epsilon_{13} = -\tilde{\beta}d_3(d_3n_2 - d_2n_3) + \tilde{\alpha}d_1(d_2n_1 - d_1n_2), \quad (4.3.53b)$$

$$\epsilon_{21} = -\tilde{\beta}d_1(d_1n_3 - d_3n_1) + \tilde{\alpha}d_2(d_3n_2 - d_2n_3), \quad (4.3.53c)$$

$$\epsilon_{23} = -\tilde{\beta}d_3(d_1n_3 - d_3n_1) + \tilde{\alpha}d_2(d_2n_1 - d_1n_2), \quad (4.3.53d)$$

$$\epsilon_{31} = -\tilde{\beta}d_1(d_2n_1 - d_1n_2) + \tilde{\alpha}d_3(d_3n_2 - d_2n_3), \quad (4.3.53e)$$

$$\epsilon_{32} = -\tilde{\beta}d_2(d_2n_1 - d_1n_2) + \tilde{\alpha}d_3(d_1n_3 - d_3n_1). \quad (4.3.53f)$$

Calculando $\det[M_{ij}] = 0$, obtemos a seguinte relação de dispersão:

$$\epsilon (n^2 - \mu\epsilon)^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\mu [\mu\epsilon d^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})^2] |\mathbf{d} \times \mathbf{n}|^2 = 0. \quad (4.3.54)$$

Utilizando a relação (4.3.47), temos $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = -|\tilde{\alpha}|^2$. Implementando $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = nd \cos \varphi$, a Eq. (4.3.54) fornece os seguintes índices de refração

$$n_{\pm}^2 = \frac{1}{s} \left[N \pm \mu |\tilde{\alpha}| d^2 \sin^2 \varphi \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2 |\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4}} \right], \quad (4.3.55)$$

ou

$$n_{\pm} = \sqrt{\frac{N + \mu\epsilon\sqrt{s}}{2s}} \pm \sqrt{\frac{N - \mu\epsilon\sqrt{s}}{2s}}, \quad (4.3.56)$$

na qual

$$N = \mu\epsilon + \frac{\mu^2 |\tilde{\alpha}|^2 d^4}{2} \sin^2 \varphi, \quad s = 1 + \frac{\mu}{\epsilon} |\tilde{\alpha}|^2 d^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi. \quad (4.3.57)$$

O comportamento dos índices de refração (4.3.56) está ilustrado nas Figs. 4.1 e a Fig. 4.2 em termos de $\varphi \in [0, \pi]$ e $|\tilde{\alpha}| \in [0, 1]$ (para ilustração). O efeito de anisotropia se manifesta através da dependência de n_{\pm} com o ângulo φ , definido entre o vetor constitutivo \mathbf{d} e a direção de propagação \mathbf{n} . Observamos que o comportamento não-linear de n_{\pm} acentua-se à medida que o valor de $|\tilde{\alpha}|$

aumenta. Notamos ainda que para ângulos $\varphi = \{0, \pi\}$, n_+ assume valores mínimos, enquanto n_- apresenta valores máximos. Por outro lado, para $\varphi = \{\pi/2\}$, n_+ expressa valor máximo, e n_- assume valor mínimo. Para $\varphi = \{0, \pi\}$, percebe-se também que $n_+ = n_-$, o que está de acordo com $s = 1$ e com a Eq. (4.3.56), que resulta em $n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon}$ para $\varphi = \{0, \pi\}$. Tal característica está ilustrada na Fig. 4.3, na qual notamos que as duas superfícies se encontram somente nas direções $\varphi = \{0, \pi\}$.

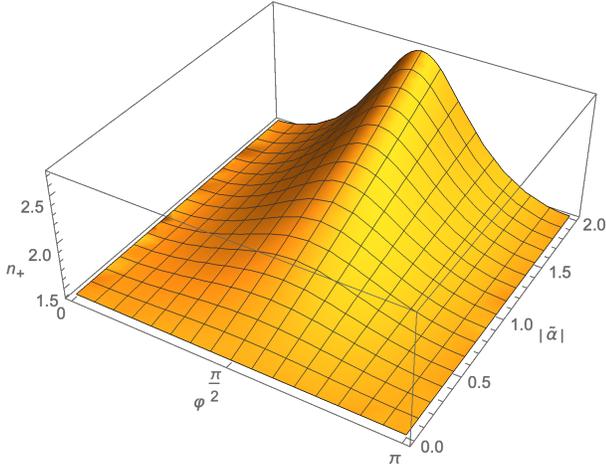


Figura 4.1: Índice de refração n_+ da Eq. (4.3.56). Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$ e $d = 1$.

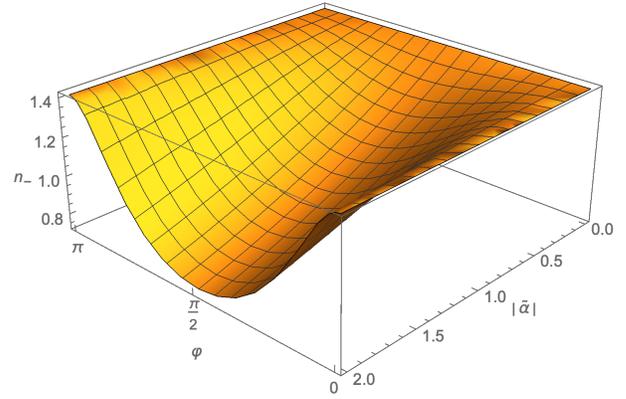


Figura 4.2: Índice de refração n_- da Eq. (4.3.56). Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$ e $d = 1$.

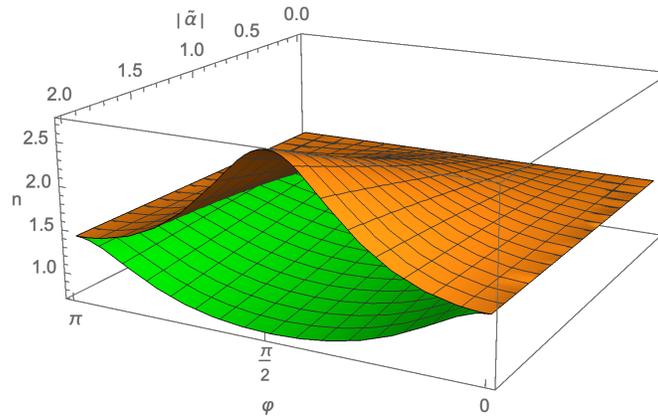


Figura 4.3: Índices de refrações n_+ (superfície na cor laranja) e n_- (na cor verde) da Eq. (4.3.56). Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$ e $d = 1$.

A seguir, vamos examinar dois casos particulares desse cenário: *i*) a configuração **d**-longitudinal onde $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = nd$; e *ii*) a configuração **d**-transversal em que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$.

4.3.2.1 Configuração d-longitudinal

Para esse caso, vale $\varphi = 0$, $N = \mu\epsilon$ e $s = 1$, de modo que podemos escrever $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = nd$. Dessa forma, a Eq. (4.3.56) simplifica-se em

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (4.3.58)$$

revelando a existência de apenas um único índice de refração, $n_+ = n_-$. Conseqüentemente, não há birrefringência para essa configuração.

Para obtermos os modos de propagação, escolhemos um sistema de coordenadas onde $\mathbf{n} = (0, 0, n)$. Implementando agora (4.3.58) na Eq. (4.3.54), a condição $M_{ij}E^j = 0$ fornece modos de propagação genéricos

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.59)$$

que representam campos transversais com polarização não definida (linear, circular ou elíptica). É interessante observar que somente um índice de refração foi determinado e o mesmo não depende da direção de propagação, indicando sinal de isotropia no sistema. Isso nos permite interpretar a direção \mathbf{d} como eixo óptico do meio.

4.3.2.2 Configuração d-transversal

Podemos construir o caso \mathbf{d} -transversal escrevendo,

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, 0), \quad \mathbf{n} = (0, 0, n), \quad (4.3.60)$$

que implica em $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$. Assim, teremos $s = 1$ e $N = \mu\epsilon + |\tilde{\alpha}|^2\mu^2d^4/2$ de forma que (4.3.55) é lida como

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon + \frac{\mu^2|\tilde{\alpha}|^2d^4}{2} \pm |\tilde{\alpha}|d^2\sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2|\tilde{\alpha}|^2d^4}{4}}, \quad (4.3.61)$$

ou

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2|\tilde{\alpha}|^2d^4}{4}} \pm \frac{\mu|\tilde{\alpha}|d^2}{2}. \quad (4.3.62)$$

Para o cômputo dos modos de propagação, iniciamos implementando (4.3.60) na matriz (4.3.54), o que fornece

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_{\pm}^2 - \mu\epsilon + \Omega n_{\pm} & -\mu n_{\pm}(\tilde{\beta}d_2^2 + \tilde{\alpha}d_1^2) & 0 \\ \mu n_{\pm}(\tilde{\beta}d_1^2 + \tilde{\alpha}d_2^2) & n_{\pm}^2 - \mu\epsilon - \Omega n_{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.3.63)$$

em que

$$\Omega = \mu(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})d_1d_2 = 2\mu\tilde{\alpha}'d_1d_2. \quad (4.3.64)$$

Utilizando agora (4.3.62), reescrevemos a (4.3.61) como

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \mu|\tilde{\alpha}|d^2n_{\pm}. \quad (4.3.65)$$

Assim, substituindo (4.3.65) na Eq. (4.3.63), a condição $M_{ij}E^j = 0$ resulta em

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu(\tilde{\beta}d_1^2 + \tilde{\alpha}d_2^2)}{\Omega \mp \mu|\tilde{\alpha}|d^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.66)$$

com E_0 sendo uma amplitude apropriadamente escolhida. Para $d_1 = 0$, tem-se

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \frac{\tilde{\alpha}}{|\tilde{\alpha}|} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tilde{\alpha}' + i\tilde{\alpha}''}{|\tilde{\alpha}|} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.67)$$

que representa polarizações lineares para $\alpha' \neq 0$, $\alpha'' = 0$, ou polarizações circulares para $\alpha' = 0$, $\alpha'' \neq 0$.

A birrefringência é um efeito esperado nessa configuração, uma vez que a Eq. (4.3.62) exhibe dois índices de refração reais e distintos. Os modos (4.3.67) são genéricos, entretanto, não representam necessariamente vetores RCP ou LCP, de forma que a birrefringência não pode ser sempre descrita em termos do poder de rotação [vide (2.3.26)]. De fato, para $\alpha' \neq 0$ e $\alpha'' \neq 0$, pode-se caracterizar a birrefringência em termos da diferença de fase Δ , dada por

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}l(n_+ - n_-), \quad (4.3.68)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda (no vácuo) da luz incidente e l é a espessura do meio ou distância percorrida pela onda. Usando (4.3.62), encontramos a seguinte diferença de fase por unidade de comprimento:

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\mu|\tilde{\alpha}|d^2. \quad (4.3.69)$$

Para $\alpha' = 0$ e $\alpha'' \neq 0$, os modos da Eq. (4.3.67) simplificam-se em vetores RCP e LCP, situação em que a birrefringência pode ser avaliada por meio do poder rotação [vide (2.3.26)]. Nesse caso,

utilizando (4.3.62), obtemos

$$\delta = -\omega \frac{\mu |\tilde{\alpha}| d^2}{2}. \quad (4.3.70)$$

Como a diferença de fase (4.3.69) e o poder de rotação (4.3.70) dependem do módulo de $\tilde{\alpha}$, a birrefringência ocorre independentemente da natureza dos parâmetros magnetoelétricos (reais ou complexos). Essa é uma importante distinção em relação ao caso bi-isotrópico da Sec. 4.3.1, no qual a birrefringência ocorre somente quando a parte imaginária de $\tilde{\alpha}$ é não-nula.

4.3.2.3 Configuração d-genérico

Vamos analisar um caso combinado onde o vetor \mathbf{d} possui componentes longitudinal e ortogonal em relação à direção de propagação \mathbf{n} , adotada em (4.3.60). Assim, propõe-se

$$\mathbf{d} = (0, d_2, d_3). \quad (4.3.71)$$

Os índices de refração (4.3.55) são reescritos na forma

$$n_{\pm}^2 = \frac{1}{s} (\mu\epsilon + \Lambda_{\pm} \sin^2 \varphi), \quad (4.3.72)$$

com s dado por (4.3.57) e Λ_{\pm} definido como

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\mu^2 |\tilde{\alpha}|^2 d^4}{2} \pm \mu |\tilde{\alpha}| d^2 \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2 |\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4}}. \quad (4.3.73)$$

A matriz (4.3.54) é dada agora por

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_3^2 - \mu\epsilon & -\mu\tilde{\beta}d_2^2n_3 & -\mu\tilde{\beta}d_2d_3n_3 \\ +\mu\tilde{\alpha}d_2^2n_3 & n_3^2 - \mu\epsilon & 0 \\ +\mu\tilde{\alpha}d_2d_3n_3 & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.3.74)$$

na qual se utilizou (4.3.71). A Eq. (4.3.72) pode ser lida como

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon + \frac{1}{\Upsilon_{\pm}}, \quad (4.3.75)$$

onde se define

$$\Upsilon_{\pm} = \frac{s}{\mu\epsilon} (1 - s) + \Lambda_{\pm} \sin^2 \varphi. \quad (4.3.76)$$

Substituindo (4.3.75) na matriz (4.3.74), o cômputo de $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu(\tilde{\alpha}' + i\tilde{\alpha}'')d_2^2 n_{\pm} \gamma_{\pm} \\ +(\tilde{\alpha}' + i\tilde{\alpha}'')d_2 d_3 n_{\pm} / \epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.3.77)$$

Diferentemente dos casos particulares **d**-longitudinal e **d**-transversal, os modos (4.3.77) são dotados de uma componente longitudinal, sendo essa uma propriedade dessas soluções gerais para $\varphi \neq 0$ ou $\varphi \neq \pi/2$.

A polarização dos modos (4.3.77) é lida a partir do setor transversal da matriz, ou seja, as duas primeiras componentes. A parte transversal da Eq. (4.3.77) não representa onda LCP nem RCP, sendo linearmente polarizada (para $\alpha' \neq 0$, $\tilde{\alpha}'' = 0$) ou elipticamente polarizada (para $\tilde{\alpha}' = 0$, $\alpha'' \neq 0$). Portanto, a birrefringência é avaliada por meio da diferença de fase Δ . Logo, utilizando (4.3.56), a Eq. (4.3.68) resulta em

$$\Delta = \frac{4\pi l}{\lambda_0} \sqrt{\frac{N - \mu\epsilon\sqrt{s}}{2s}}. \quad (4.3.78)$$

Na Fig. 4.4, plotamos a Eq. (4.3.78) em termos do ângulo φ e da magnitude do parâmetro magnetoelétrico $\tilde{\alpha}$, que controlam a anisotropia do sistema.

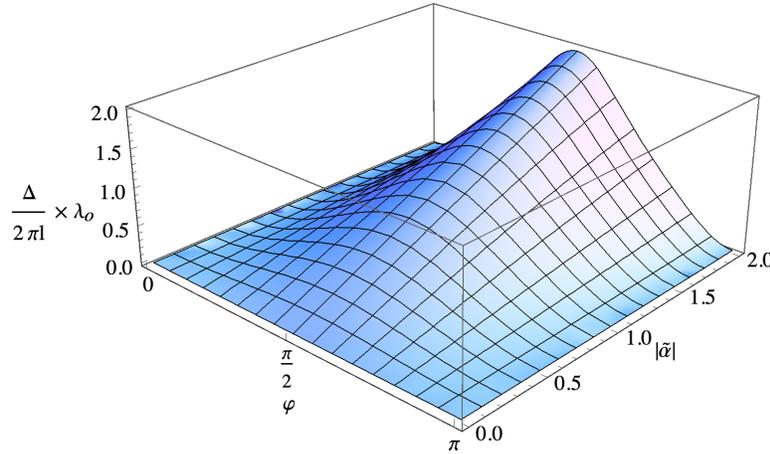


Figura 4.4: Fator de defasagem (diferença de fase por unidade de comprimento) da Eq. (4.3.78) em termos de φ e $|\tilde{\alpha}|$. Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$ e $d = 1$.

Observamos que a birrefringência assume valor máximo para $\varphi = \pi/2$, que corresponde exatamente à configuração em que n_+ apresenta valor máximo e n_- expressa valor mínimo.

4.3.2.4 Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting

O cenário bi-anisotrópico simétrico, dado nas Eqs. (4.3.45) e (4.3.46), leva a uma equação de dispersão anisotrópica, contendo produtos escalar e vetorial entre o vetor **d** e a direção de propagação **n**. Dessa forma, a relação de dispersão se torna dependente das componentes de

ambos os vetores. De fato, da Eq. (4.3.54) podemos escrever

$$(\mathbf{k}^2 - \mu\epsilon\omega^2)^2 - \frac{\mu}{\epsilon}|\tilde{\alpha}|^2 [\mu\epsilon\omega^2 d^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})^2] [d^2\mathbf{k}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] = 0, \quad (4.3.79)$$

que fornece

$$\omega^4 - 2\omega^2 \left\{ \frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^2}{2\epsilon^2} [d^2\mathbf{k}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] \right\} + \frac{\mu}{\epsilon} \frac{|\tilde{\alpha}|^2}{\mu^2\epsilon^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})^2 [d^2\mathbf{k}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] + \frac{\mathbf{k}^4}{\mu^2\epsilon^2} = 0. \quad (4.3.80)$$

Resolvendo em ω , obtemos

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^2}{2\epsilon^2} [d^2\mathbf{k}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] \pm \frac{|\tilde{\alpha}|}{\epsilon} [d^2\mathbf{k}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}}, \quad (4.3.81)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|}{\epsilon} [d^2\mathbf{k}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] \left[\frac{|\tilde{\alpha}| d^2}{2\epsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right]. \quad (4.3.82)$$

As velocidades de fase de cada modo, ω_+ e ω_- , serão dadas por

$$v_{\text{ph}(\pm)} \equiv \frac{\omega_{\pm}}{k} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|}{\epsilon} [d^2 - (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2] \left(\frac{|\tilde{\alpha}| d^2}{2\epsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right)}, \quad (4.3.83)$$

sendo válidas para o caso geral, onde o vetor \mathbf{d} pode possuir componentes longitudinal e ortogonal à direção de propagação.

Para o caso \mathbf{d} -longitudinal, em que $\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{k}} = d$, temos

$$v_{\text{ph}(\pm)}^{\text{long.}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (4.3.84)$$

Na configuração \mathbf{d} -transversal, vale $\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$, de forma que a Eq. (4.3.83) resulta em

$$v_{\text{ph}(\pm)}^{\text{trans.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \pm \frac{|\tilde{\alpha}| d^2}{2\epsilon}. \quad (4.3.85)$$

Para se determinar as velocidades de grupo, podemos efetuar uma diferenciação implícita na (4.3.81), uma vez que a mesma contém o produto escalar envolvendo a direção de propagação, $\hat{\mathbf{k}}$. Teremos então

$$2\omega_{\pm} \underbrace{\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial k^i}}_{\equiv v_g^i(\pm)} = \left(2k^j \frac{\partial k^j}{\partial k^i} \right) + \left[d^2 \left(2k^j \frac{\partial k^j}{\partial k^i} \right) - 2(\mathbf{d} \cdot \mathbf{k}) d^j \frac{\partial k^j}{\partial k^i} \right] \left[\frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^2}{2\epsilon^2} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right], \quad (4.3.86)$$

mas $\frac{\partial k^j}{\partial k^i} = \delta_{ij}$, então obtemos

$$2\omega_{\pm} v_{g(\pm)}^i = \frac{2k^i}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|}{\epsilon} [2d^2 k^i - 2(\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})d^i] \left[\frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{2\epsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right], \quad (4.3.87)$$

$$v_{g(\pm)}^i = \frac{1}{\omega_{\pm}} \left\{ \frac{k^i}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|}{\epsilon} [d^2 k^i - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})d^i] \left[\frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{2\epsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right] \right\}. \quad (4.3.88)$$

Note que as velocidades de grupo (4.3.88) dependem das componentes dos vetores \mathbf{d} e \mathbf{k} e da direção relativa entre ambos, $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})$. Tal anisotropia não é observada, como esperado, no cenário isotrópico [vide Eq. (4.3.29)].

Para o caso \mathbf{d} -longitudinal, temos \mathbf{k} e \mathbf{d} apontando na mesma direção. Assim, observamos que, no segundo termo de (4.3.88), o fator dependente das componentes de \mathbf{d} e \mathbf{k} simplifica-se em: $d^2 k^i - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})d^i = d^2 k^i - dk d^i = d^2 k \hat{\mathbf{e}}_i - dk(d \hat{\mathbf{e}}_i) = d^2 k \hat{\mathbf{e}}_i - d^2 k \hat{\mathbf{e}}_i = 0$, em que $\hat{\mathbf{e}}_i$ representa uma direção de propagação arbitrária. Dessa forma, a Eq. (4.3.82) resulta em

$$\omega_{\pm(\text{long.})}^2 = \frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} \rightarrow \omega_{\pm(\text{long.})} = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (4.3.89)$$

Consequentemente a velocidade de grupo (4.3.88) será

$$v_{g(\pm)}^{i(\text{long.})} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon} k^i}{k \mu\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k^i}{k} \rightarrow \mathbf{v}_{g(\pm)}^{\text{long.}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.3.90)$$

No caso \mathbf{d} -transversal, vale $\mathbf{d} \cdot \mathbf{k} = 0$. Logo, a Eq. (4.3.82) fornece

$$\omega_{\pm(\text{trans.})}^2 = \mathbf{k}^2 \left[\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{2\epsilon^2} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right], \quad (4.3.91)$$

$$\omega_{\pm(\text{trans.})}^2 = \mathbf{k}^2 \left[\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{2\epsilon} \right]^2. \quad (4.3.92)$$

A velocidade de grupo (4.3.88) nesse caso será dada por

$$v_{g(\pm)}^{i(\text{trans.})} = \frac{k^i}{\omega_{\pm(\text{trans.})}} \left[\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{2\epsilon^2} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \right], \quad (4.3.93)$$

$$v_{g(\pm)}^{i(\text{trans.})} = \frac{k^i}{\omega_{\pm(\text{trans.})}} \left[\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{2\epsilon} \right]^2, \quad (4.3.94)$$

que pode ser simplificada utilizando-se a (4.3.92), resultando em

$$v_{g(\pm)}^{i(\text{trans.})} = \frac{k^i}{k} \left[\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{2\epsilon} \right] \rightarrow \mathbf{v}_{g(\pm)}^{\text{trans.}} = \left[\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} \pm \frac{|\tilde{\alpha}|d^2}{2\epsilon} \right] \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.3.95)$$

O comportamento da velocidade de grupo (4.3.95) em termos do parâmetro magnetoelétrico, $\tilde{\alpha}$, é ilustrado na Fig. 4.5.

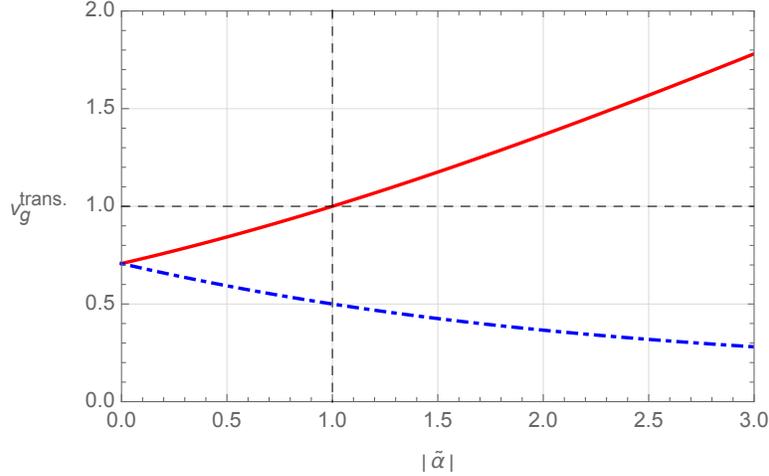


Figura 4.5: Velocidades de grupo $v_{g(\pm)}$ do caso **d**-transversal. A curva azul e ponto-tracejada representa $v_{g(-)}$, enquanto a curva em vermelho ilustra $v_{g(+)}$. A linha tracejada vertical indica o valor de $|\tilde{\alpha}| = 1$, de acordo com (4.3.98), acima do qual $v_{g(+)} > 1$. Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$ e $d = 1$.

Notamos que $v_{g(+)} > 1$ ocorre para determinados valores de $|\tilde{\alpha}|$, isto é, para $|\tilde{\alpha}| > \alpha_c$, sendo α_c o valor crítico no qual $v_{g(+)} = 1$. De forma geral, utilizando a Eq. (4.3.95), podemos determinar uma relação entre os parâmetros constitutivos que, quando satisfeita, gera $v_{g(+)} > 1$. Assim, temos

$$\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|\tilde{\alpha}|^2 d^4}{4\epsilon^2}} + \frac{|\tilde{\alpha}| d^2}{2\epsilon} > 1, \quad (4.3.96)$$

que, após algumas simplificações, fornece:

$$|\tilde{\alpha}| > \alpha_c, \quad (4.3.97)$$

em que definimos

$$\alpha_c = \frac{\mu\epsilon - 1}{\mu d^2}. \quad (4.3.98)$$

Portanto, para $|\tilde{\alpha}| > \alpha_c$, observamos velocidade de grupo $v_{g(+)} > 1$. Esse modo está associado ao índice de refração n_- da Fig. 4.2 que, para a configuração transversal $\varphi = \pi/2$, assume valores $n < 1$ à medida em que o parâmetro $|\tilde{\alpha}|$ cresce. É importante estar atento ao subscritos (\pm) utilizados para distinguir n_{\pm} e $v_{g(\pm)}$. A associação entre essas quantidades deve ser feita da seguinte forma: os modos propagantes (\pm) com índices de refração n_{\pm} estão relacionados às velocidades de grupo $v_{g(\mp)}$. Esse detalhe de notação pode ser rapidamente simplificado trocando-se o sinal (\pm) no último termo da (4.3.81). Dessa forma, a associação entre as quantidades analisadas aqui ocorre de forma direta: n_{\pm} está associado a $v_{g(\pm)}$.

A seguir, determinaremos o vetor de Poynting (4.2.2) para o cenário simétrico. Partindo da relação constitutiva (4.3.46), escrevemos

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \tilde{\beta} \mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}), \quad (4.3.99)$$

na qual utilizamos $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$. Substituindo (4.3.99) na (4.2.2), obtém-se

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*)] + \frac{\tilde{\beta}^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{d})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}^*), \quad (4.3.100)$$

que resulta em

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{2\mu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^* + \frac{\tilde{\beta}^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{d})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}^*). \quad (4.3.101)$$

Substituindo a primeira relação da (4.3.46) na lei de Gauss, temos

$$\epsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} + \tilde{\alpha} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.3.102)$$

que, por meio de $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, fornece

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\tilde{\alpha}}{\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) [\mathbf{d} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E})], \quad (4.3.103)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\tilde{\alpha}}{\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})]. \quad (4.3.104)$$

Assim, o vetor de Poynting (4.3.101) é dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \mathbf{E}^* + \frac{\tilde{\beta}^*}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{d})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}^*). \quad (4.3.105)$$

Para simplificar tal expressão, usamos $\tilde{\beta}^* = -\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}' - i\tilde{\alpha}''$ e

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}'', \quad (4.3.106)$$

sendo $\mathbf{E}' = \text{Re}[\mathbf{E}]$ e $\mathbf{E}'' = \text{Im}[\mathbf{E}]$, com \mathbf{E}' e \mathbf{E}'' reais. Implementando então (4.3.106) na Eq. (4.3.105),

teremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = & \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\tilde{\alpha}'}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \left\{ \mathbf{E}' [\mathbf{E}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] + \mathbf{E}'' [\mathbf{E}'' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \right\} + \\
& - \frac{\tilde{\alpha}''}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \left\{ \mathbf{E}' [\mathbf{E}'' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] - \mathbf{E}'' [\mathbf{E}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \right\} - \frac{\tilde{\alpha}'}{2} \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) \right] + \\
& + \frac{\tilde{\alpha}''}{2} \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) \right] + i \frac{\tilde{\alpha}'}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \left\{ \mathbf{E}' [\mathbf{E}'' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] - \mathbf{E}'' [\mathbf{E}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \right\} + \\
& + i \frac{\tilde{\alpha}''}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \left\{ \mathbf{E}' [\mathbf{E}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] + \mathbf{E}'' [\mathbf{E}'' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \right\} - \frac{i}{2} \tilde{\alpha}' \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) \right] + \\
& - \frac{i}{2} \tilde{\alpha}'' \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) \right]. \tag{4.3.107}
\end{aligned}$$

Tomando a parte real da Eq. (4.3.107), encontramos a média temporal do vetor de Poynting, ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S} \rangle = & \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\tilde{\alpha}'}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \left\{ \mathbf{E}' [\mathbf{E}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] + \mathbf{E}'' [\mathbf{E}'' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \right\} + \\
& - \frac{\tilde{\alpha}''}{2\mu\epsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \left\{ \mathbf{E}' [\mathbf{E}'' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] - \mathbf{E}'' [\mathbf{E}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{n})] \right\} - \frac{\tilde{\alpha}'}{2} \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) + \right. \\
& \left. + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) \right] + \frac{\tilde{\alpha}''}{2} \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) \right]. \tag{4.3.108}
\end{aligned}$$

Observamos que o fluxo de energia não é paralelo à direção de propagação, \mathbf{n} . Depende das direções relativas entre o vetor constitutivo, \mathbf{d} , e a direção de propagação, \mathbf{n} , e o campo elétrico. Para os cenários discutidos anteriormente, temos $\mathbf{d} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ para a configuração \mathbf{d} -longitudinal, enquanto para o caso \mathbf{d} -transversal, vale $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$. Assim, a Eq. (4.3.109) simplifica-se em

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S} \rangle = & \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 - \frac{\tilde{\alpha}'}{2} \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) \right] + \\
& + \frac{\tilde{\alpha}''}{2} \left[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{E}'' \times \mathbf{d}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'') (\mathbf{E}' \times \mathbf{d}) \right], \tag{4.3.109}
\end{aligned}$$

sendo válida para ambos os casos \mathbf{d} -longitudinal e \mathbf{d} -transversal.

4.3.3 Caso bi-anisotrópico antissimétrico

Examinaremos a seguir o cenário no qual os parâmetros magnetoelétricos são descritos por tensors antissimétricos, escritos como

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ijk} a_k, \quad \beta_{kn} = \epsilon_{knr} b_r, \tag{4.3.110}$$

em que $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ são, em princípio, 3-vetores complexos fixos, que introduzem direções privilegiadas no sistema, enquanto ϵ_{ijk} representa o símbolo de Levi-Cevita tridimensional. Para que a relação (4.2.11) continue válida, os vetores utilizados em (4.3.110)

devem satisfazer

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{a}. \quad (4.3.111)$$

Dessa forma, as relações constitutivas desse cenário assumem a forma

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{a} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \mathbf{b} \times \mathbf{E}. \quad (4.3.112)$$

Na literatura, relações constitutivas análogas à Eq. (4.3.112) possuem aplicação na descrição de sistemas de gás de elétrons [73] e na investigação da propagação eletromagnética em meios dependentes do tempo (com acoplamento magnetoelétrico antissimétrico e permissividade elétrica isotrópica dependente do tempo) [74].

Substituindo (4.3.110) na Eq. (4.3.4), obtém-se

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{\omega} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}}{\omega} \right) \delta_{ij} + \frac{b_i k_j}{\omega} + \frac{a_j k_i}{\omega}, \quad (4.3.113)$$

onde observamos o surgimento de termos que dependem de direções, ou seja, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})$, $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$, $a_i k_j$ e $a_j k_i$, que também contribuem para a matriz $[M_{ij}]$, dada por

$$[M_{ij}] = \mathcal{N} + \mu[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}] \mathbb{1}_{3 \times 3} - \mu(\mathcal{A} + \mathcal{B}), \quad (4.3.114)$$

com \mathcal{N} dado em (4.3.51), e

$$\mathcal{A} = \text{diag} \left((b_1 + a_1)n_1, (b_2 + a_2)n_2, (b_3 + a_3)n_3 \right), \quad (4.3.115)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 n_2 + a_2 n_1 & b_1 n_3 + a_3 n_1 \\ b_2 n_1 + a_1 n_2 & 0 & b_2 n_3 + a_3 n_2 \\ b_3 n_1 + a_1 n_3 & b_3 n_2 + a_2 n_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.116)$$

O cálculo de $\det[M_{ij}] = 0$ resulta na seguinte relação de dispersão (com $\sigma = 0$)

$$0 = [n^2 - \mu\epsilon + \mu(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})] \left\{ [n^2 - \mu\epsilon + \mu(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})] + \frac{\mu}{\epsilon} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})n^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})] \right\}, \quad (4.3.117)$$

sendo $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Sendo os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} complexos, podemos escrever

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}'', \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}' + i\mathbf{b}''. \quad (4.3.118)$$

A restrição imposta por (4.3.111) leva a

$$\mathbf{a}' = \mathbf{b}', \quad \mathbf{a}'' = -\mathbf{b}''. \quad (4.3.119)$$

Consequentemente, podemos simplificar alguns termos da Eq. (4.3.117), ou seja,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = 2(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}), \quad (4.3.120a)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n})^2, \quad (4.3.120b)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a'^2 + a''^2 = |a|^2. \quad (4.3.120c)$$

Iremos supor que o vetor \mathbf{a} satisfaz $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n} = a'n \cos \varphi$, $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n} = a''n \cos \varphi$, sendo \mathbf{a}' e \mathbf{a}'' paralelos. Dessa forma, a complicada relação de dispersão (4.3.117) nos fornece

$$[n^2 - \mu\epsilon + 2\mu a'n \cos \varphi] = 0, \quad (4.3.121)$$

$$[n^2 (\epsilon + \mu|a|^2 \sin^2 \varphi) + 2\mu\epsilon a'n \cos \varphi - \mu\epsilon^2] = 0, \quad (4.3.122)$$

a partir das quais obtemos os índices de refração (positivos), dados por

$$n_{(1)} = \mu\sqrt{a'^2 \cos^2 \varphi + \epsilon/\mu} - \mu a' \cos \varphi, \quad (4.3.123)$$

$$n_{(2)} = \frac{1}{r} \left(\sqrt{\mu\epsilon + \mu^2 a'^2 + \mu^2 a''^2 \sin^2 \varphi} - \mu a' \cos \varphi \right), \quad (4.3.124)$$

com

$$r = 1 + \frac{\mu}{\epsilon}|a|^2 \sin^2 \varphi, \quad (4.3.125)$$

em que φ designa o ângulo entre \mathbf{a}' , \mathbf{a}'' e a direção de propagação, \mathbf{n} .

Nas Eqs. (4.3.123) e (4.3.124), consideramos as soluções (positivas) que reproduzem índices de refração de um dielétrico ordinário no limite em que os parâmetros magnetoelétricos são nulos, ou seja, $n_{(1,2)} \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}$ quando $a' \mapsto 0$ e $a'' \mapsto 0$.

O comportamento dos índices (4.3.123) e (4.3.124) em termos de $\varphi \in [0, \pi]$ e $a' \in [0, 1]$ está representado nas Figs. 4.6 e 4.7, respectivamente, onde consideramos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$, $a'' = 1$. Como $n_{(1)}$ depende apenas de a' , não apresentando dependência em $|a|$ ou a'' (como ocorre em $n_{(2)}$), escolhemos $a'' = 1$ e implementamos $|a|^2 = 1 + a'^2$ em $n_{(2)}$ para construir o gráfico. Dessa forma, os índices $n_{(1)}$ e $n_{(2)}$ apresentarão dependência apenas em (a', φ) , facilitando a comparação entre os seus perfis gráficos.

O efeito de anisotropia se manifesta através da dependência de $n_{(1,2)}$ com o ângulo φ . Observa-se que ambos $n_{(1,2)}$ apresentam um valor máximo para a direção $\varphi = \pi$. Notamos ainda que, para $a' = 0$, decorre $n_{(1)} \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}$, enquanto

$$n_{(2)} \mapsto \frac{1}{1 + (\mu/\epsilon)a''^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2 a''^2 \sin^2 \varphi}, \quad (4.3.126)$$

o que justifica a o perfil não-linear em $n_{(2)}$ para $a' = 0$ na Fig. 4.7. Isso acontece porque $|a|^2 = a'^2 + a''^2$, e escolhemos $a'' = 1$ para que os plots das Figs. 4.6 e 4.7 exibissem a dependência de $n_{(1,2)}$ em a' . Essa diferença de comportamento em $a' = 0$ é ilustrada na Fig. 4.8.

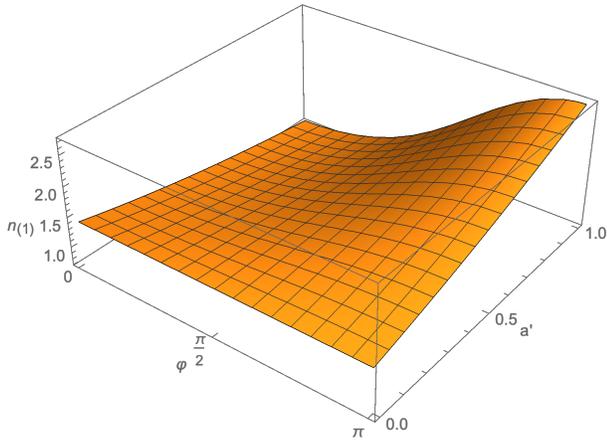


Figura 4.6: Índice de refração $n_{(1)}$ da Eq. (4.3.123).

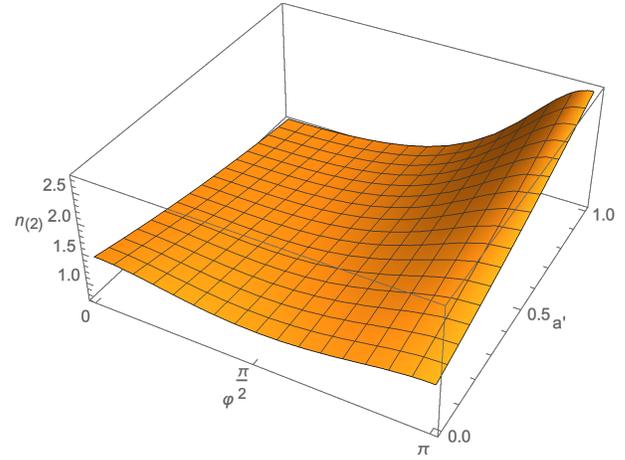


Figura 4.7: Índice de refração $n_{(2)}$ da Eq. (4.3.124).

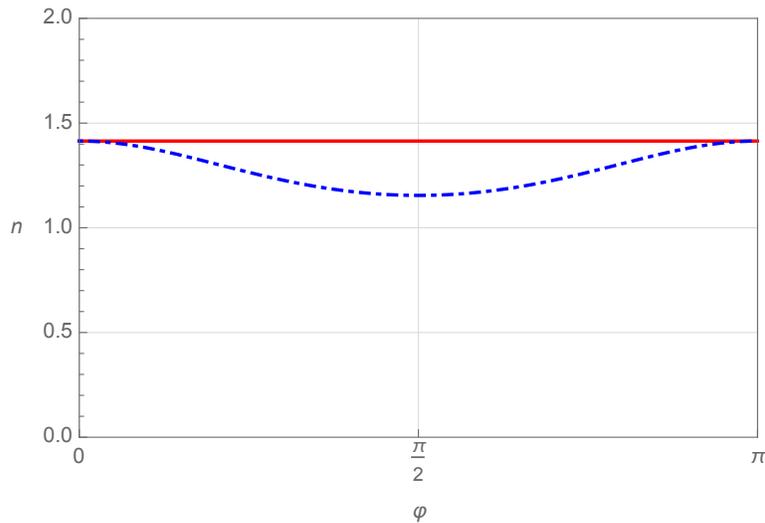


Figura 4.8: Comparação entre os índices de refração $n_{(1)}$ e $n_{(2)}$ para $a' = 0$. A linha vermelha representa $n_{(1)}$, enquanto a curva azul ponto-tracejada indica $n_{(2)}$.

A seguir, investigaremos duas configurações particulares entre \mathbf{a} e \mathbf{n} : configurações i) \mathbf{a} -ortogonal e ii) \mathbf{a} -longitudinal.

4.3.3.1 Configuração \mathbf{a} -ortogonal

Para o caso ortogonal, temos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ ou $\varphi = \pi/2$. Assim, a relação de dispersão fornece dois índices de refração,

$$n_{(1)} = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (4.3.127)$$

$$n_{(2)} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{1 + (\mu/\epsilon)|a|^2}}, \quad (4.3.128)$$

que são reais e positivos. Nesse caso, há birrefringência sem ocorrência de absorção.

Para determinarmos os modos propagantes, escolhamos novamente um sistema de coordenadas em que $\mathbf{n} = (0, 0, n)$. Transversal a essa direção de propagação, podemos estabelecer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$, de forma que a matriz (4.3.114) simplifica-se em

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon & 0 & -\mu a_1^* n \\ 0 & n^2 - \mu\epsilon & -\mu a_2^* n \\ -\mu a_1 n & -\mu a_2 n & -\mu\epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.3.129)$$

em que utilizamos $\mathbf{b} = \mathbf{a}^*$. Utilizando (4.3.127), a equação $M_{ij}E^j = 0$ conduz ao seguinte modo de propagação transversal:

$$\mathbf{E}_{(1)} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.130)$$

com $|\mathbf{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}$. Substituindo agora (4.3.128) na Eq. (4.3.129), obtemos

$$\begin{pmatrix} -\mu\epsilon f_a & 0 & -\mu a_1^* n_3 \\ 0 & -\mu\epsilon f_a & -\mu a_2^* n_3 \\ -\mu a_1 n_3 & -\mu a_2 n_3 & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (4.3.131)$$

cuja solução é dada por

$$\mathbf{E}_{(2)} = \frac{1}{|a|\sqrt{1+f_a}} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ -|a|\sqrt{f_a} \end{pmatrix}, \quad (4.3.132)$$

onde

$$f_a = \frac{(\mu/\epsilon)|a|^2}{1 + (\mu/\epsilon)|a|^2}. \quad (4.3.133)$$

Observe que a Eq. (4.3.132) representa um modo misto, ou seja, dotado de uma parte transversal e uma componente longitudinal, relativas à direção de propagação escolhida $\mathbf{n} = (0, 0, n)$. Nesse caso, não é possível determinar um modo transversal puro para o campo elétrico $\mathbf{E}_{(2)}$, pois a componente longitudinal permanece caso $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$. O modo transversal $\mathbf{E}_{(1)}$ e o setor transversal de $\mathbf{E}_{(2)}$ podem exibir polarização linear, circular ou elíptica. De fato, pode-se escrever as componentes de \mathbf{a} como $a_1 = (a'_1 + ia''_1)$, $a_2 = (a'_2 + ia''_2)$. Assim, para $a''_1 = a''_2 = 0$ ou $a'_1 = a'_2 = 0$, a Eq. (4.3.130) e a parte transversal de (4.3.132) resultam em modos linearmente polarizados. Por outro lado, para $a'_1 = a''_1 = 0$ ou $a''_1 = a'_1 = 0$, isto é, para $(a_1 = a'_1, a_2 = ia''_2)$ ou $(a_1 = ia''_1, a_2 = a'_2)$, tem-se polarização elíptica. Modos circularmente polarizados somente ocorrem quando $(a'_1 = a''_2 = 0$ e $a'_2 = a''_1)$ ou $(a''_1 = a'_2 = 0$ e $a'_1 = a''_2)$.

Uma vez que determinamos os índices de refração, (4.3.127) e (4.3.128), e os correspondentes modos propagantes, podemos discutir os efeitos físicos na propagação de ondas. No caso em que os modos são linearmente ou elipticamente polarizados, a birrefringência é avaliada em termos da diferença de fase,

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} l [n_{(1)} - n_{(2)}]. \quad (4.3.134)$$

Assim, para os índices (4.3.127) e (4.3.128), a diferença de fase por unidade de comprimento é dada por

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\mu\epsilon} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\mu/\epsilon)|a|^2}} \right], \quad (4.3.135)$$

que, no limite $(\mu/\epsilon) \ll 1$ simplifica-se em

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{\pi\mu|a|^2}{\lambda_0}. \quad (4.3.136)$$

4.3.3.2 Configuração a-longitudinal

Consideremos agora o caso em que o vetor \mathbf{a} aponta na mesma direção de propagação, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = an$. Consequentemente, a relação de dispersão (4.3.117) é escrita como

$$(n^2 + 2\mu a' n - \mu\epsilon)^2 = 0, \quad (4.3.137)$$

que envolve o quadrado de um polinômio de segundo grau em n . Assim, há um índice de refração duplamente degenerado, dado por

$$n = \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2 a'^2} - \mu a'. \quad (4.3.138)$$

A solução (4.3.138) corresponde exatamente a (4.3.123) e (4.3.124) para $\varphi = 0$, como esperado.

Determinamos os modos de propagação considerando \mathbf{n} ao longo do eixo z , isto é, $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, e $\mathbf{a} = \mathbf{b}^* = (0, 0, a'_3 + ia''_3)$. Dessa forma, a matriz (4.3.114) se torna

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon + A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - \mu\epsilon + A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.3.139)$$

com $A = 2\mu n a'_3$. Utilizando (4.3.138), a equação $M_{ij} E^j = 0$ proporciona modos transversais

genéricos,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.140)$$

em que E_x e E_y são arbitrários. A solução (4.3.140) pode representar modo de polarização linear, circular ou elíptico, dependendo da natureza e da relação entre E_x e E_y . Como essa relação não é fornecida pelas características analisadas até o presente momento, podemos afirmar que a configuração \mathbf{a} -longitudinal permite, em princípio, qualquer tipo de polarização. Além disso, somente um índice de refração foi obtido, sem sinal de birrefringência. Portanto, concluímos que a direção \mathbf{a} define o eixo óptico do meio.

4.3.3.3 Velocidade de fase, velocidade de grupo e vetor de Poynting

Partindo das relações de dispersão em (4.3.117) e fazendo uso das expressões dadas em (4.3.120), obtemos expressões do tipo $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$, dadas a seguir:

$$\omega^2 - 2\frac{\omega}{\epsilon}(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} = 0, \quad (4.3.141)$$

$$\omega^2 - 2\frac{\omega}{\epsilon}(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k}) - \left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2}\right) \mathbf{k}^2 + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2} + \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2} = 0. \quad (4.3.142)$$

É importante mencionar que a (4.3.141) fornece o índice de refração $n_{(1)}$ da Eq. (4.3.123), enquanto a (4.3.142) resulta no índice $n_{(2)}$ da Eq. (4.3.124). Uma vez que as equações acima envolvem produtos escalares entre os vetores constitutivos e a direção de propagação, é necessário certo cuidado ao se derivar as velocidades de fase e de grupo, tal como fizemos na Seção 4.3.2.4. Resolvendo a primeira equação de dispersão (4.3.141), temos

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2}} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})}{\epsilon}. \quad (4.3.143)$$

Observamos que $\omega_- < 0$, sendo um modo instável, enquanto o modo estável é descrito por $\omega_+ > 0$. Consideraremos então ω_+ e denominaremos $\omega_+ \equiv \omega_{(1)}$. A velocidade de fase será dada então por

$$v_{\text{ph}(1)} = \frac{\omega_{(1)}}{k} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}{\epsilon^2}} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{k}})}{\epsilon}, \quad (4.3.144)$$

$$v_{\text{ph}(1)} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{a'^2}{\epsilon^2} \cos^2 \varphi} + \frac{a'}{\epsilon} \cos \varphi, \quad (4.3.145)$$

em que usamos $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$. A velocidade de grupo é calculada fazendo,

$$v_{\mathbf{g}(1)}^i = \frac{\partial \omega_{(1)}}{\partial k^i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2} \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{\mu\epsilon} \left(k^j \frac{\partial k^j}{\partial k^i} + \frac{\partial k^j}{\partial k^i} k^j \right) + 2 \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})}{\epsilon^2} a'^j \frac{\partial k^j}{\partial k^i} \right] + \frac{a'^j}{\epsilon} \frac{\partial k^j}{\partial k^i}, \quad (4.3.146)$$

que fornece

$$v_{\mathbf{g}(1)}^i = f_{a'} \left[\frac{k^i}{\mu\epsilon} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k}) a'^i}{\epsilon^2} \right] + \frac{a'^i}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{\mathbf{g}(1)} = f_{a'} \left[\frac{\mathbf{k}}{\mu\epsilon} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})}{\epsilon^2} \mathbf{a}' \right] + \frac{\mathbf{a}'}{\epsilon}, \quad (4.3.147)$$

sendo

$$f_{a'} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{k}^2}{\mu\epsilon} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2}}}. \quad (4.3.148)$$

A partir da segunda equação de dispersão, dada na Eq. (4.3.142), obtemos

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} \right) \mathbf{k}^2 - \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k})}{\epsilon}}. \quad (4.3.149)$$

Sendo assim, consideramos a solução ω_+ , que satisfaz $\omega_+ > 0$, e também $\omega_+ \equiv \omega_{(2)}$.

A velocidade de fase associada será dada por

$$v_{\text{ph}(2)} = \frac{\omega_{(2)}}{k} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} - \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}{\epsilon^2} + \frac{(\mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{k}})}{\epsilon}}. \quad (4.3.150)$$

Enquanto a velocidade de grupo é obtida fazendo

$$v_{\mathbf{g}(2)}^i = \frac{\partial \omega_{(1)}}{\partial k^i} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} \right) \mathbf{k}^2 - \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2} \right]^{-1/2} \left[\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} \right) \left(2 \frac{\partial k^j}{\partial k^i} k^j \right) + \frac{2(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k})}{\epsilon^2} a''^j \frac{\partial k^j}{\partial k^i} \right] + \frac{a'^j}{\epsilon} \frac{\partial k^j}{\partial k^i}, \quad (4.3.151)$$

que fornece

$$v_{\mathbf{g}(2)}^i = f_{a''} \left[\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} \right) k^i - \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k}) a''^i}{\epsilon^2} \right] + \frac{a'^i}{\epsilon}, \quad (4.3.152)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}(2)} = f_{a''} \left[\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} \right) \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k})}{\epsilon^2} \mathbf{a}'' \right] + \frac{\mathbf{a}'}{\epsilon}, \quad (4.3.153)$$

com

$$f_{a''} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2}\right) \mathbf{k}^2 - \frac{(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k})^2}{\epsilon^2}}}. \quad (4.3.154)$$

Para os casos particulares estudados anteriormente, teremos:

- Para \mathbf{a} -ortogonal onde $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k} = 0$, a Eq. (4.3.143) fornece:

$$v_{\text{ph}(1)}^{\text{orto.}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \mathbf{v}_{\text{g}(1)}^{\text{orto.}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \hat{\mathbf{k}} \rightarrow v_{\text{g}(1)}^{\text{orto.}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (4.3.155)$$

Para o modo associado a $\omega_{(2)}$, a Eq. (4.3.149) leva a

$$v_{\text{ph}(2)}^{\text{orto.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2}}, \quad \mathbf{v}_{\text{g}(2)}^{\text{orto.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.3.156)$$

O módulo de $\mathbf{v}_{\text{g}(2)}^{\text{orto.}}$ será dado por

$$v_{\text{g}(2)}^{\text{orto.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2}}. \quad (4.3.157)$$

- Para o caso \mathbf{a} -longitudinal, em que $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{k} = a'k$ e $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{k} = a''k$, obtemos

$$v_{\text{ph}(1)}^{\text{long.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{a'^2}{\epsilon^2}} + \frac{a'}{\epsilon}, \quad \mathbf{v}_{\text{g}(1)}^{\text{long.}} = f_{a'} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu\epsilon} + \frac{a'k}{\epsilon} \mathbf{a}' \right) + \frac{\mathbf{a}'}{\epsilon}, \quad f_{a'} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon} + \frac{a'^2 k^2}{\epsilon^2}}}, \quad (4.3.158)$$

sendo o módulo da velocidade de grupo dado por

$$v_{\text{g}(1)}^{\text{long.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{a'^2}{\epsilon^2}} + \frac{a'}{\epsilon}. \quad (4.3.159)$$

Temos ainda as velocidades para o segundo modo, ou seja,

$$v_{\text{ph}(2)}^{\text{long.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{a'^2}{\epsilon^2}} + \frac{a'}{\epsilon}, \quad \mathbf{v}_{\text{g}(2)}^{\text{long.}} = f_{a''} \left[\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2} \right) \mathbf{k} - \frac{a''k}{\epsilon^2} \mathbf{a}'' \right] + \frac{\mathbf{a}'}{\epsilon}, \quad (4.3.160)$$

com

$$f_{a''} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{|a|^2}{\epsilon^2}\right) k^2 - \frac{a''^2 k^2}{\epsilon^2}}}. \quad (4.3.161)$$

O módulo de $\mathbf{v}_{g(2)}^{\text{long.}}$ é dado por

$$v_{g(2)}^{\text{long.}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} + \frac{a'^2}{\epsilon^2}} + \frac{a'}{\epsilon}. \quad (4.3.162)$$

É importante mencionar que as velocidade de grupo $v_{g(1,2)}$, em ambos os casos \mathbf{a} -ortogonal e \mathbf{a} -longitudinal, são independentes de k e ω , sendo uma consequência das configurações adotadas.

O comportamento das velocidades de grupo de ambos os casos longitudinal e ortogonal é ilustrado na Fig. 4.9 em termos do parâmetro a' .

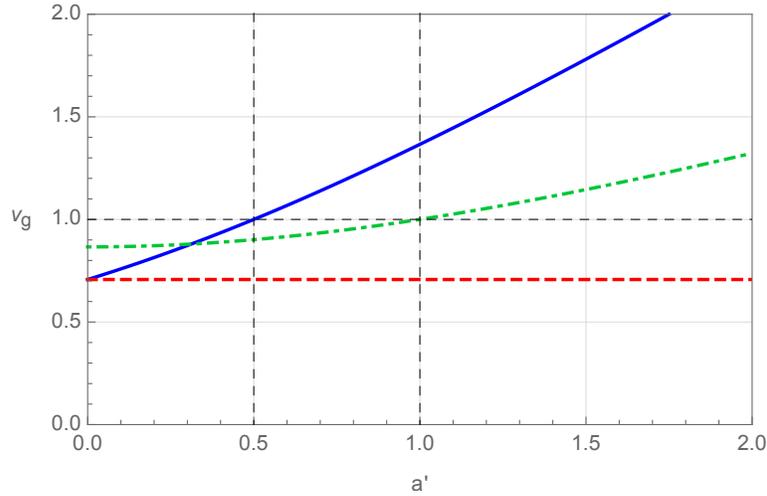


Figura 4.9: Velocidades de grupo dos casos \mathbf{a} -longitudinal e \mathbf{a} -ortogonal. A curva azul (sólida) representa $v_{g(1)}^{\text{long.}}$ da Eq. (4.3.159) e também $v_{g(2)}^{\text{long.}}$ da Eq. (4.3.162). As linhas em vermelho (tracejada) e verde (ponto-tracejada) indicam $v_{g(1)}^{\text{orto.}}$ da última relação da Eq. (4.3.155) e $v_{g(2)}^{\text{orto.}}$ da Eq. (4.3.157), respectivamente. As linhas tracejadas verticais indicam os valores de $a' \in \{1/2, 1\}$ acima dos quais as velocidades de grupo se tornam maior que 1, como indicado nas Eqs. (4.3.163) e (4.3.165). Aqui utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$ e $a'' = 1$.

Observamos que as velocidades de grupo assumem valores maiores do que 1 para determinada faixa de valores do parâmetro magnetoelétrico que se inicia acima de determinado valor crítico. De fato, temos $v_{g(1,2)}^{\text{long.}} > 1$ quando

$$a' > a_c^{\text{long.}}, \quad (4.3.163)$$

sendo

$$a_c^{\text{long.}} = \frac{\mu\epsilon - 1}{2\mu}. \quad (4.3.164)$$

Enquanto $v_{g(2)}^{\text{orto.}} > 1$ ocorre para

$$a' > a_{c(2)}^{\text{orto.}}, \quad (4.3.165)$$

onde

$$a_{c(2)}^{\text{orto.}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}(\mu\epsilon - 1) - a'^2}. \quad (4.3.166)$$

Seguindo nossas análises, determinaremos a seguir a direção do fluxo de energia para o cenário bi-anisotrópico antissimétrico. Inicialmente, partimos da relação (4.3.112) e escrevemos

$$\mathbf{H}^* = \frac{1}{\mu}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) + \mathbf{a} \times \mathbf{E}^*, \quad (4.3.167)$$

em que usamos $\mathbf{b}^* = \mathbf{a}$. Substituindo agora (4.3.167) na Eq. (4.2.2), obtemos

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) + \frac{1}{2}\mathbf{E} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{E}^*). \quad (4.3.168)$$

Em componentes, a (4.3.168) é lida como

$$S^i = \frac{1}{2\mu}\epsilon_{ijk}E^j\epsilon_{kmn}n^mE^{*n} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}E^j\epsilon_{kmn}a^mE^{*n}, \quad (4.3.169)$$

cuja simplificação leva a

$$S^i = \frac{1}{2\mu} [n^i E^j E^{*j} - n^j E^j E^{*i}] + \frac{1}{2} [a^i E^j E^{*j} - a^j E^j E^{*i}], \quad (4.3.170)$$

ou ainda,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} + \mu\mathbf{a})|\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^*. \quad (4.3.171)$$

Notamos que a direção do fluxo de energia possui uma componente apontando na mesma direção do vetor \mathbf{a} , indicando que parte da energia se propaga ao longo do eixo óptico do meio. Podemos simplificar tal expressão utilizando a relação constitutiva para \mathbf{D} e a lei de Gauss, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$, ou seja,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (4.3.172)$$

$$\epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})] = 0, \quad (4.3.173)$$

em que utilizamos $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$. A (4.3.173) se torna então

$$\epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = -n^i \epsilon_{ijk} a^j \epsilon_{kmn} n^m E^n, \quad (4.3.174)$$

$$\epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = -(\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) a^j n^i n^m E^n, \quad (4.3.175)$$

$$\epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})n^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad (4.3.176)$$

na qual podemos fazer

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) [\epsilon - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})] = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})n^2, \quad (4.3.177)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = \frac{-(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})n^2}{\epsilon - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})}. \quad (4.3.178)$$

Substituindo agora (4.3.178) na Eq. (4.3.171), obtém-se

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} + \mu\mathbf{a})|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{n^2}{\mu\epsilon - \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})} - 1 \right] (\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^*. \quad (4.3.179)$$

Simplificando a expressão (4.3.179) por meio de $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}''$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}''$, encontramos⁶ a seguinte média temporal do vetor de Poynting:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} + \mu\mathbf{a}')|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} (F_1\mathbf{E}' + F_2\mathbf{E}'') \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}') - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'') \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (F_1\mathbf{E}'' - F_2\mathbf{E}') \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'') + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}') \right], \end{aligned} \quad (4.3.180)$$

sendo

$$F_1 = \frac{(\mu\epsilon - \mu a' n \cos \varphi)(n^2 - \mu\epsilon + \mu a' n \cos \varphi) - \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}{(\mu\epsilon - \mu a' n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}, \quad (4.3.181a)$$

$$F_2 = \frac{\mu a'' n^3 \cos \varphi}{(\mu\epsilon - \mu a' n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}. \quad (4.3.181b)$$

Para o caso \mathbf{a} -ortogonal onde $\varphi = \pi/2$, a Eq. (4.3.180) resulta em [vide Apêndice G]

$$\langle \mathbf{S} \rangle^{\text{orto.}} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} + \mu\mathbf{a}')|\mathbf{E}|^2 + \frac{(n^2 - \mu\epsilon)}{2\mu\epsilon} \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' \right]. \quad (4.3.182)$$

Para o caso \mathbf{a} -longitudinal, com $\varphi = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle^{\text{long.}} &= \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} + \mu\mathbf{a}')|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \left(F_1^{\text{long.}}\mathbf{E}' + F_2^{\text{long.}}\mathbf{E}'' \right) \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}') - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'') \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left(F_1^{\text{long.}}\mathbf{E}'' - F_2^{\text{long.}}\mathbf{E}' \right) \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'') + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}') \right], \end{aligned} \quad (4.3.183)$$

com

$$F_1^{\text{long.}} = \frac{-a'n - \mu|a|^2}{\epsilon + \mu|a|^2}, \quad F_2^{\text{long.}} = \frac{a''n}{\epsilon + \mu|a|^2}. \quad (4.3.184)$$

Em ambos os casos \mathbf{a} -ortogonal e \mathbf{a} -longitudinal, observamos que o fluxo de energia não se propaga na mesma direção de propagação, \mathbf{n} . Uma parte do fluxo se propaga ao longo do vetor

⁶Vide Apêndice G.

constitutivo \mathbf{a}' , sendo totalmente independente da direção \mathbf{n} . Além disso, a propagação de energia depende das direções relativas entre \mathbf{a}' , \mathbf{E}' e \mathbf{E}'' .

**REVERSÃO DE QUIRALIDADE EM MEIOS BI-ISOTRÓPICOS
INDUZIDA PELA CONDUTIVIDADE MAGNÉTICA**

Sumário

5.1	Comentário sobre meios de mão-direita e mão-esquerda	99
5.2	Meio bi-isotrópico dotado de condutividade magnética	101
5.2.1	Caso de condutividade magnética isotrópica	101
5.2.1.1	Modos de propagação	102
5.2.1.2	Efeitos ópticos	103
5.2.2	Caso antissimétrico	105
5.2.2.1	Modos de propagação	106
5.2.2.2	Efeitos ópticos	107
5.3	Caso simétrico	111
5.3.1	Modos de propagação	113
5.3.1.1	Caso particular 1	113
5.3.1.2	Caso particular 2	114
5.3.2	Efeitos ópticos	115

Na eletrodinâmica linear, sabemos que as relações constitutivas são dadas por

$$D^i = \epsilon_{ij}E^j + \alpha_{ij}B^j, \tag{5.0.1a}$$

$$H^i = \mu_{ij}^{-1}B^j + \beta_{ij}E^j, \tag{5.0.1b}$$

onde ϵ_{ij} e μ_{ij} são tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente. Por outro lado, os tensores α_{ij} e β_{ij} constituem-se de parâmetros magnetoelétricos que capturam a resposta elétrica (ou magnética) a um campo magnético (ou elétrico) aplicado ao meio.

Como sabemos, nas últimas décadas, as relações constitutivas bi-isotrópicas, em que os tensores da Eq. (5.0.1) são dados por $\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{ij}$, $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$, $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ e $\beta_{ij} = \beta\delta_{ij}$, têm sido intensamente investigadas [52, 55–57, 59], sendo importantes na abordagem de isolantes topológicos [61–66, 68] e na eletrodinâmica de axiões [69–71], como apontamos na introdução do capítulo 4.

Para cenários de meios quirais, os parâmetros constitutivos são descritos por tensores, caracterizando, de maneira geral, meios bi-anisotrópicos quirais [49, 58, 74, 80, 81]. Um meio é denominado quiral quando não possui simetria de inversão espacial (P -ímpar), ou seja, quando não pode ser superimposto em sua imagem especular. Noutras palavras, o meio é invariante apenas sob transformações da componente¹ L_0 do grupo de Lorentz [79]. Luz circularmente polarizada de mão direita (RCP) e mão esquerda (LCP) são exemplos de fenômenos eletromagnéticos quirais, que, em meios aquirais, propagam-se com a mesma velocidade fase, indicando ausência de anisotropia. É importante destacar que anisotropia e aquiralidade são propriedades distintas. É possível existir modos LCP e RCP em meios isotrópicos e birrefringentes, num efeito chamado de birrefringência isotrópica, descoberto e descrito no artigo [47] gerado por essa tese. Por outro lado, num meio quiral, as ondas RCP e LCP viajam com diferentes velocidades (relacionadas a índices de refração distintos), gerando o bem conhecido poder de rotação (PR), o qual fornece uma medida da birrefringência (rotação óptica). A rotação óptica de um meio se origina de sua atividade óptica natural ou pode ser induzida por campos externos, como ocorre, por exemplo, no efeito Faraday [20, 82].

Quando o PR depende da frequência, ocorre a dispersão do PR. Se esse último ainda sofre reversão, observa-se dispersão anômala do PR [83]. Assim, a análise do PR constitui uma importante ferramenta na descrição de propriedades ópticas de vários sistemas, tais como cristais [84, 85], compostos orgânicos [86, 87], plasmas e estrelas de nêutrons [88, 89], gás de moléculas girantes [90, 91] e metamateriais quirais [92, 93].

Nesse contexto, abordaremos agora alguns aspectos relacionados ao PR de meios bi-isotrópicos dotados de condutividade magnética. As discussões deste capítulo compõem dois artigos [94] publicado no *Physical Review B*:

- P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **106**, 144430 (2022).
- P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Erratum: Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **107**, 179902 (2023).

5.1 Comentário sobre meios de mão-direita e mão-esquerda

A concepção atual de quiralidade de um meio é devido a Lord Kelvin [86]: “*I call any geometrical figure, or group of point, chiral, and say that it has chirality if its image in a plane mirror, ideally realized, cannot be brought to coincide with itself.*”. Essa mesma definição tornou-se padrão na literatura, vide p. 25 da Ref. [86] e p. 331 da Ref. [83], por exemplo.

Um efeito interessante surge nos meios quirais, a saber: o plano de polarização de luz incidente linearmente polarizada gira enquanto a onda se propaga através do meio. Essa rotação óptica

¹A componente L_0 corresponde à identidade. Sendo assim, as transformações conectadas a L_0 correspondem aos boosts e rotações de Lorentz, ou seja, às transformações próprias ($\det A = 1$) e ortócronas ($A_0^0 \geq 1$), sendo A a matriz de Lorentz, e $A^\mu{}_\nu$ uma de suas componentes. Além dessas, podemos citar outras transformações que também deixam o sistema invariante, como: invariância sob rotações espaciais para meio isotrópico; e invariância sob inversão temporal.

é medida por meio do ângulo de rotação por unidade de comprimento do plano de vibração, o poder de rotação (PR), discutido na Seção 2.3.1 e apresentado na Eq. (2.3.26). Esse efeito foi descoberto por Arago (1811) em cristais de quartzo e, alguns anos mais tarde, também por Biot em soluções de açúcar [96]. A teoria de Fresnel (1824) sobre a polarização da luz e polarização circular estabeleceu a base para a compreensão da rotação óptica [20]: luz linearmente polarizada pode ser considerada como superposição de luz RCP e LCP.

É importante ainda estabelecer uma definição ou convenção sobre o que chamamos de meios de mão-direita e mão-esquerda, uma vez que um meio quiral pode existir em duas formas enantiomórficas². Como apontado na Ref. [96]:

(...) enantiomers may be distinguished by their optical activity. It became customary to label chiral compounds by the sign of their optical rotation at a given wavelength (...). It (looking towards the light source) the plane of linearly polarized light is rotated clockwise by the molecular sample, it is said to be dextrorotatory (...). If the sample rotates the linearly polarized light counterclockwise, it is called levorotatory. (Ref. [96], p. 12-13).

Tal afirmação está de acordo com a Ref. [86] (p. 2), que diz: “(...) *the source of natural optical activity is a chiral (handed) molecular or crystal structure. The two distinct forms that can exist (...) generate optical rotations of equal magnitude but opposite sense at a given wavelength*”. Essas duas formas distintas de moléculas constituem os meios que denominamos de mão-direita e mão-esquerda, que “rotacionam” o campo elétrico de luz linearmente polarizada em sentidos opostos (horário e anti-horário). Um exemplo notável sobre esse tópico pode ser encontrado nos experimentos de Pasteur (1848) [86,96,97] com tartarato de sódio e amônio: Pasteur separou dois tipos de cristais com estruturas distintas, observando que alguns (com certo tipo de estrutura) giravam luz linearmente polarizada para direita, enquanto outros (com estrutura diferente do primeiro grupo) giravam a luz para a esquerda.

Assim, uma definição razoável para meio de mão-direita (ou -esquerda) pode ser relacionada com a sua propriedade óptica de rotacionar luz linearmente polarizada, ou seja, olhando na direção da fonte de luz, um meio quiral de mão-esquerda gira a polarização linear para a esquerda (sentido anti-horário), enquanto um meio de mão-direita gira polarização para a direita (sentido horário) [15].

Considerando os pontos destacados acima, podemos relacionar a quiralidade a uma quantidade mensurável que captura a rotação óptica, isto é, o poder de rotação δ . Dessa forma, seguindo a convenção de sinal usual [15], definimos que:

- Para $\delta > 0$, a polarização linear do campo elétrico gira no sentido horário. Assim, o meio pode ser designado por “mão-direita”, uma vez que rotaciona o plano de vibração de luz linearmente polarizada rotacionará no sentido horário (para a direita) que se propaga por ele.

²Os termos “enantiomorfo” e “enantiômero” geralmente são utilizados para objetos macroscópicos e moléculas, respectivamente [86]. Algumas vezes os dois termos são usados como sinônimos.

- Para $\delta < 0$, a polarização do campo elétrico rotaciona no sentido anti-horário. Dessa forma, dizemos que o meio é de “mão-esquerda”, pois o campo elétrico de luz linearmente polarizada é rotacionado no sentido anti-horário (para a esquerda) enquanto se propaga.

5.2 Meio bi-isotrópico dotado de condutividade magnética

Considere um meio cujas relações constitutivas são dadas por (5.0.1) e dotado de condutividade magnética σ_{ij}^B , descrita por meio da relação

$$J^i = \sigma_{ij}^B B^j. \quad (5.2.1)$$

Partindo das equações de Maxwell usuais e seguindo o procedimento da Seção 2.3, obtém-se

$$M_{ij} E^j = 0, \quad M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - c^2 \mu \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (5.2.2)$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo e $\bar{\epsilon}_{ij}$ é tensor de permissividade elétrica efetivo, dado por

$$c \bar{\epsilon}_{in} = c \epsilon \delta_{in} + \left(\beta_{kn} \epsilon_{imk} + \alpha_{ij} \epsilon_{jmn} + i \frac{\sigma_{ij}^B}{\omega} \epsilon_{jmn} \right) n^m. \quad (5.2.3)$$

A seguir, iremos examinar o comportamento do poder de rotação do meio bi-isotrópico em dois cenários que diferem entre si pela configuração da condutividade magnética: i) o caso diagonal isotrópico e ii) *off-diagonal* antissimétrico.

5.2.1 Caso de condutividade magnética isotrópica

Consideramos uma configuração totalmente simétrica e isotrópica em que as quantidades α_{ij} , β_{ij} e σ_{ij}^B são descritas por tensores diagonais,

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^B = \Sigma \delta_{ij}, \quad (5.2.4)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\Sigma \in \mathbb{R}$. A condição $\alpha_{ij} = -\beta_{ij}^\dagger$ da Eq. (4.2.11) fornece

$$\beta^* = -\alpha. \quad (5.2.5)$$

Dessa forma, as relações constitutivas assumem a seguinte forma

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \beta \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \Sigma \mathbf{B}. \quad (5.2.6)$$

Nesse caso, implementando (5.2.4) na Eq. (5.2.3), obtém-se

$$c\bar{\epsilon}_{ij} = c\epsilon\delta_{ij} - \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) \epsilon_{ijm}n^m, \quad (5.2.7)$$

em que o último termo contém a contribuição magnetoelétrica e a condutividade magnética à permissividade do meio. A matriz $[M_{ij}]$ será dada por

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - c^2\mu\epsilon & -n_1n_2 - \mu c \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) n_3 & -n_1n_3 + \mu c \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) n_2 \\ -n_1n_2 + \mu c \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) n_3 & n_1^2 + n_3^2 - c^2\mu\epsilon & -n_2n_3 - \mu c \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) n_1 \\ -n_1n_3 - \mu c \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) n_2 & -n_2n_3 + \mu c \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right) n_1 & n_1^2 + n_2^2 - c^2\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Calculando $\det[M_{ij}] = 0$, obtemos a seguinte equação de dispersão

$$n^4 - n^2c^2 \left[2\mu\epsilon - \mu^2 \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right)^2 \right] + \mu^2\epsilon^2c^4 = 0, \quad (5.2.9)$$

que fornece as soluções para n seguintes:

$$n_{\pm} = c\sqrt{\mu\epsilon - Z} \pm ic\sqrt{Z}, \quad Z = \frac{\mu^2}{4} \left(\alpha + \beta + i\frac{\Sigma}{\omega} \right)^2. \quad (5.2.10)$$

Note que, nesse cenário completamente isotrópico (5.2.4), a presença de dois índices de refração distintos origina-se da forma como os parâmetros magnetoelétricos e de condutividade magnética se acoplam com os campos nas relações constitutivas (5.2.6). A seguir, discutiremos sobre algumas propriedades ópticas e os modos de propagação suportados nesse cenário.

5.2.1.1 Modos de propagação

Partindo da Eq. (5.2.10), escrevemos

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm}, \quad (5.2.11)$$

que, substituída na matriz $[M_{ij}]$ (5.2.8), fornece os seguintes campos elétricos via Eq. (5.2.2) [vide Apêndice H]:

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2n\sqrt{n^2 - n_1^2}}} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \pm inn_3 - n_1n_2 \\ \mp inn_2 - n_1n_3 \end{pmatrix}. \quad (5.2.12)$$

Considerando o caso específico de propagação na direção do eixo- z , $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, a Eq. (5.2.12) resulta em campos elétricos com polarizações LCP (\mathbf{E}_+) e RCP (\mathbf{E}_-), ou seja,

$$\mathbf{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.13)$$

Assim, os modos de polarização circular (5.2.13) permitem a possibilidade de birrefringência circular no sistema, sendo avaliada (na seção seguinte) por meio do poder de rotação.

5.2.1.2 Efeitos ópticos

Analisaremos o comportamento da rotação óptica considerando a natureza (complexa ou real) dos parâmetros α e β . Escrevemos inicialmente α e β como

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \quad \beta = \beta' + i\beta'', \quad (5.2.14)$$

em que $\alpha' = \text{Re}[\alpha]$, $\alpha'' = \text{Im}[\alpha]$, $\beta' = \text{Re}[\beta]$ e $\beta'' = \text{Im}[\beta]$. A condição (5.2.5) implica em

$$\alpha' = -\beta', \quad \alpha'' = \beta'', \quad \alpha + \beta = 2i\alpha''. \quad (5.2.15)$$

Nesse caso, os índices de refração (5.2.10) simplificam-se em

$$n_\pm = c\sqrt{\mu\epsilon + \mu^2 \left(\alpha'' + \frac{\Sigma}{2\omega} \right)^2} \mp \mu c \left(\alpha'' + \frac{\Sigma}{2\omega} \right), \quad (5.2.16)$$

sendo reais e positivos. A condutividade magnética isotrópica Σ surge como uma contribuição dependente da frequência, a qual atribui comportamento dispersivo ao sistema. Uma vez que os modos de propagação são descritos por vetores polarizados circularmente (5.2.13), a birrefringência pode ser examinada através do poder de rotação, que, considerando (5.2.16), é dado por

$$\delta = \frac{\mu c \Sigma}{2} + \mu c \omega \alpha''. \quad (5.2.17)$$

Observamos que (5.2.17) possui um termo de ordem zero na frequência, o qual recupera o mesmo poder de rotação obtido na Ref. [47] quando $\alpha'' = 0$. Para α'' negativo, o poder de rotação se torna

$$\delta = \frac{\mu c \Sigma}{2} - \mu c \omega |\alpha''|. \quad (5.2.18)$$

A partir da Eq. (5.2.18), pode-se determinar uma frequência de corte ω' ,

$$\omega' = \frac{\Sigma}{2|\alpha''|}, \quad (5.2.19)$$

que define o valor no qual ocorre uma reversão no poder de rotação, δ . Considerando a convenção de sinal adotada na Sec. 5.1 (veja também a Ref. [15]) e a Eq. (5.2.18), destacamos que:

- para $0 < \omega < \omega'$, tem-se $\delta > 0$, gerando rotação da polarização linear no sentido horário.
- para $\omega > \omega'$, tem-se $\delta < 0$, implicando em rotação no sentido anti-horário da luz linearmente polarizada.

Como essa inversão de poder de rotação (PR) ocorre num valor positivo de frequência, $\omega' > 0$, é necessário ter ou $\Sigma < 0$ ou $\alpha'' < 0$. Assim, iremos considerar $\alpha'' < 0$. A reversão do PR aqui observada não é usual em dielétricos lineares, nem em meios dielétricos bi-isotrópicos ou anisotrópicos. Tal efeito também não ocorre em meios dotados de condutividade magnética (sem contribuições magnetoelétricas). Por outro lado, tal efeito pode ser encontrado em outros cenários, como plasmas (girantes) [88] e sistemas de grafeno [98]. Além disso, como apontado na Eq. (5.2.18), esse efeito pode ocorrer em meio bi-isotrópico dotado de condutividade magnética, descrito pelas relações (5.2.6).

O comportamento geral do PR (5.2.18) como função da frequência é ilustrado na Fig. 5.1 para alguns valores de Σ , α'' e μ .

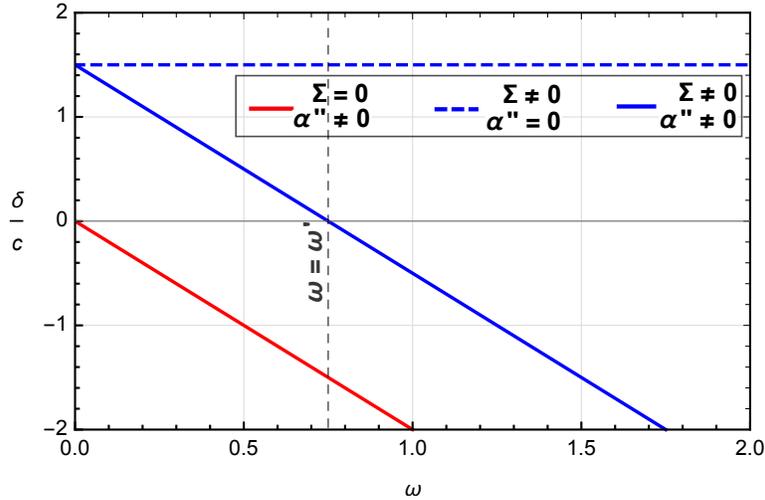


Figura 5.1: Ângulo de rotação por unidade de comprimento, dado na Eq. (5.2.18). Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\Sigma = 3$ e $|\alpha''| = 2$.

Para os casos em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a condição (5.2.5) implica em $\alpha + \beta = 0$, pois $\alpha'' = 0$. Consequentemente, a Eq. (5.2.16) resulta em

$$n_{\pm} = c \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2 \Sigma^2}{4\omega^2}} \mp \frac{\mu c \Sigma}{2\omega}, \quad (5.2.20)$$

que atribui birrefringência ao meio originada apenas da condutividade magnética. O poder de rotação, nesse caso, será $\delta = \mu c \Sigma / 2$, não sofrendo reversão de sinal.

5.2.2 Caso antissimétrico

Consideremos agora um substrato dielétrico descrito por parâmetros constitutivos bi-isotrópicos na presença de condutividade magnética antissimétrica, ou seja,

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta\delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^B = \epsilon_{ijk}b_k. \quad (5.2.21)$$

Nesse caso, a permissividade elétrica (5.2.3) e a matriz $[M_{ij}]$ (5.2.2) são dadas, respectivamente, por

$$c\bar{\epsilon}_{ij} = \left[c\epsilon - \frac{i}{\omega}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \right] \delta_{ij} + (\alpha + \beta)\epsilon_{ijk}n_k + \frac{i}{\omega}n_ib_j, \quad (5.2.22)$$

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 - c^2\mu\epsilon & -n_1n_2 & -n_1n_3 \\ -n_1n_2 & n_1^2 + n_3^2 - c^2\mu\epsilon & -n_2n_3 \\ -n_1n_3 & -n_2n_3 & n_1^2 + n_2^2 - c^2\mu\epsilon \end{pmatrix} + \frac{i\mu c}{\omega}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbb{1}_3 - \frac{i\mu c}{\omega}\mathcal{B}, \quad (5.2.23)$$

sendo

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} n_1b_1 & -i\omega(\alpha + \beta)n_3 + n_1b_2 & i\omega(\alpha + \beta)n_2 + n_1b_3 \\ i\omega(\alpha + \beta)n_3 + n_2b_1 & n_2b_2 & -i\omega(\alpha + \beta)n_1 + n_2b_3 \\ -i\omega(\alpha + \beta) + n_3b_1 & i\omega(\alpha + \beta)n_1 + n_3b_2 & n_3b_3 \end{pmatrix}. \quad (5.2.24)$$

Determinando $\det[M_{ij}] = 0$, obtemos

$$n^4 - 2n^2 \left[\mu\epsilon c^2 - \frac{\mu^2 c^2}{2}(\alpha + \beta)^2 - \frac{i\mu c}{\omega}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \right] + \mu^2 c^2 \left[c\epsilon - \frac{i}{\omega}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \right]^2 = 0. \quad (5.2.25)$$

Implementando-se $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = bn \cos \theta$, prosseguimos buscando as soluções para n que recuperam os índices de refração de um dielétrico ordinário, $n_{\pm} \mapsto c\sqrt{\mu\epsilon}$, no limite em que os parâmetros magnetoelétricos e a condutividade magnética são nulos, ou seja, $\alpha + \beta \mapsto 0$ e $b \mapsto 0$. Dessa forma, encontramos

$$n_{\pm} = c\sqrt{\mu\epsilon - \frac{\mu^2}{4} \left(\alpha + \beta \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right)^2} \pm \frac{i\mu c}{2} \left(\alpha + \beta \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right). \quad (5.2.26)$$

As outras duas soluções da Eq. (5.2.25) fornecem $n_{\pm} \mapsto -c\sqrt{\mu\epsilon}$ no limite de um dielétrico ordinário, não sendo consideradas aqui. Levando em conta a condição (5.2.5), os índices de refração (5.2.26) se tornam

$$n_{\pm} = c\sqrt{\mu\epsilon - \frac{\mu^2}{4} \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right)^2} \mp \mu c\alpha'' - \frac{i\mu c}{\omega}b \cos \theta, \quad (5.2.27)$$

que podem ser rescritos separando-se suas partes real e imaginária, isto é,

$$n_{\pm} = cA + ic\tilde{A}_{\pm} \mp \mu\alpha'' - \frac{i\mu c}{2\omega} b \cos \theta, \quad (5.2.28a)$$

onde

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|f(\omega)|} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 f(\omega)^2}} + \text{sign}[f(\omega)]}, \quad (5.2.28b)$$

$$\tilde{A}_{\pm} = \pm \frac{\text{sign}[g]}{\sqrt{2}} \sqrt{|f(\omega)|} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 f(\omega)^2}} - \text{sign}[f(\omega)]}, \quad (5.2.28c)$$

$$f(\omega) = \mu\epsilon + \mu^2 \alpha''^2 - \frac{\mu^2 b^2 \cos^2 \theta}{4\omega^2}, \quad (5.2.28d)$$

$$g = \mu^2 \alpha'' b \cos \theta. \quad (5.2.28e)$$

É importante mencionar as expressões acima são válidas para o caso de condutividade ôhmica nula, $\sigma = 0$.

Para os casos em que a condutividade ôhmica é diferente de zero, deve-se implementar $\epsilon \rightarrow \epsilon + i\sigma/\omega$ na Eq. (5.2.22). Consequentemente, os índices de refração do caso ôhmico são dados por:

$$n_{\pm} = cA'_{\pm} + icA''_{\pm} \mp \mu\alpha'' - \frac{i\mu c}{2\omega} b \cos \theta, \quad (5.2.29a)$$

where

$$A'_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|f(\omega)|} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{g_{\pm}^2}{\omega^2 f(\omega)^2}} + \text{sign}[f(\omega)]}, \quad (5.2.29b)$$

$$A''_{\pm} = \pm \frac{\text{sign}[g_{\pm}]}{\sqrt{2}} \sqrt{|f(\omega)|} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{g_{\pm}^2}{\omega^2 f(\omega)^2}} - \text{sign}[f(\omega)]}, \quad (5.2.29c)$$

$$g_{\pm} = \mu^2 \alpha'' b \cos \theta \pm \mu\sigma. \quad (5.2.29d)$$

5.2.2.1 Modos de propagação

Consideremos um sistema de coordenadas em que a propagação ocorre ao longo do eixo- z , $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, com que a Eq. (5.2.23) simplifica-se em

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - c^2 \mu \tilde{\epsilon} + \frac{i\mu cn}{\omega} b \cos \theta & -2i\mu\alpha'' n & 0 \\ 2i\mu\alpha'' n & n^2 - c^2 \mu \tilde{\epsilon} + \frac{i\mu cn}{\omega} b \cos \theta & 0 \\ -i\mu cb_1 \frac{n}{\omega} & -i\mu cb_2 \frac{n}{\omega} & -c^2 \mu \tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (5.2.30)$$

em que $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$. Podemos agora reescrever (5.2.27) na forma

$$n_{\pm}^2 = c^2\mu\tilde{\epsilon} \pm i\mu c \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) n_{\pm}. \quad (5.2.31)$$

Substituindo (5.2.31) na matriz (5.2.30), a equação $M_{ij}E^j = 0$ fornece os seguintes campos elétricos [vide Apêndice H]:

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ -in_{\pm}(b_1 \pm ib_2)/(\omega\tilde{\epsilon}c) \end{pmatrix}, \quad (5.2.32)$$

em que E_0 é uma amplitude apropriadamente escolhida para fins de normalização. Para o caso especial em que o vetor \mathbf{b} é paralelo ou anti-paralelo à direção de propagação \mathbf{n} , escrevemos $\mathbf{b} = (0, 0, b_3)$, de forma que a Eq. (5.2.32) resulta em

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.33)$$

representando vetores LCP e RCP, respectivamente.

5.2.2.2 Efeitos ópticos

Considerando as polarizações circulares dos modos de propagação (5.2.33), pode-se examinar a birrefringência através do poder de rotação. Assim, para os índices de refração da Eq. (5.2.28), obtém-se

$$\delta = \omega\mu\alpha'', \quad (5.2.34)$$

cujos comportamento em termos da frequência é ilustrado na Fig. 5.2.

Observamos que o poder de rotação apresenta comportamento linear em todo intervalo de frequências. Além disso, não ocorre reversão de sinal, ou seja, o meio não apresenta reversão de quiralidade nesse cenário anisotrópico. Destacamos ainda que o sinal do poder de rotação é estritamente dado pelo sinal do parâmetro magnetoelétrico α'' , onde

- para $\alpha'' > 0$, o poder de rotação é sempre positivo, indicando rotação no sentido horário da polarização linear;
- para $\alpha'' < 0$, o poder de rotação é negativo, indicando rotação no sentido anti-horário da polarização linear

Nesse cenário de condutividade ôhmica nula, o coeficiente de dicroísmo relacionado com a

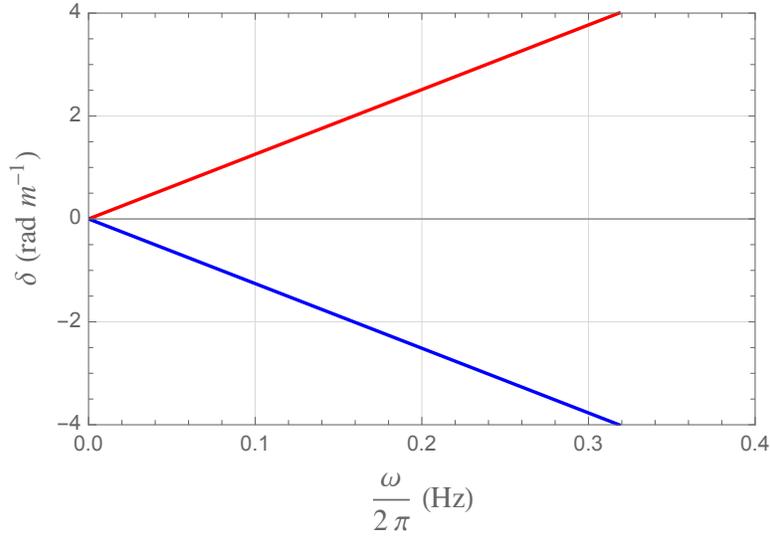


Figura 5.2: Poder de rotação da Eq. (5.2.34). Utilizamos $\mu = 1 \text{ H m}^{-1}$, $\epsilon = 2 \text{ F m}^{-1}$, $b = 1 \text{ } \Omega^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\alpha'' = 2 \text{ F s}^{-1}$ (linha vermelha) e $\alpha'' = -2 \text{ F s}^{-1}$ (linha azul).

Eq. (5.2.28) é determinado por

$$\delta_d = -\frac{\omega}{2}(\tilde{A}_+ - \tilde{A}_-). \quad (5.2.35)$$

O comportamento do dicroísmo com a frequência é demonstrado na Fig. 5.3 a seguir.

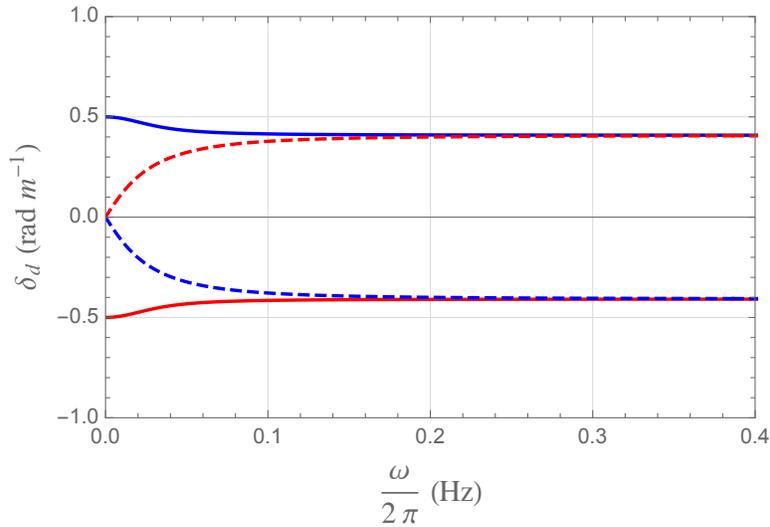


Figura 5.3: Coeficiente de dicroísmo da Eq. (5.2.35) em termos de $\omega/(2\pi)$. As curvas cheias representam o dicroísmo para $\cos \theta = 1$, enquanto as linhas tracejadas indicam (5.2.35) para $\cos \theta = -1$. Aqui, utilizamos $\mu = 1 \text{ H m}^{-1}$, $\epsilon = 2 \text{ F m}^{-1}$, $b = 1 \text{ } \Omega^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\alpha'' = 2 \text{ F s}^{-1}$ (curvas vermelhas) e $\alpha'' = -2 \text{ F s}^{-1}$ (linhas azuis).

Os plots acima indicam que $\delta_d|_{\alpha'' < 0} = -\delta_d|_{\alpha'' > 0}$, um tipo de “simetria especular” associada com o sinal de α'' .

Considerando agora o caso ôhmico, $\sigma \neq 0$, o poder de rotação, agora associado aos índices de

refração da Eq. (5.2.29) é dado por:

$$\delta^{ohmic} = -\frac{\omega}{2} (A'_+ - A'_- - 2\mu\alpha''), \quad (5.2.36)$$

válido em todo o domínio de frequências. Na Fig. 5.4 ilustramos o comportamento do poder de rotação da Eq. (5.2.36) em termos da frequência.

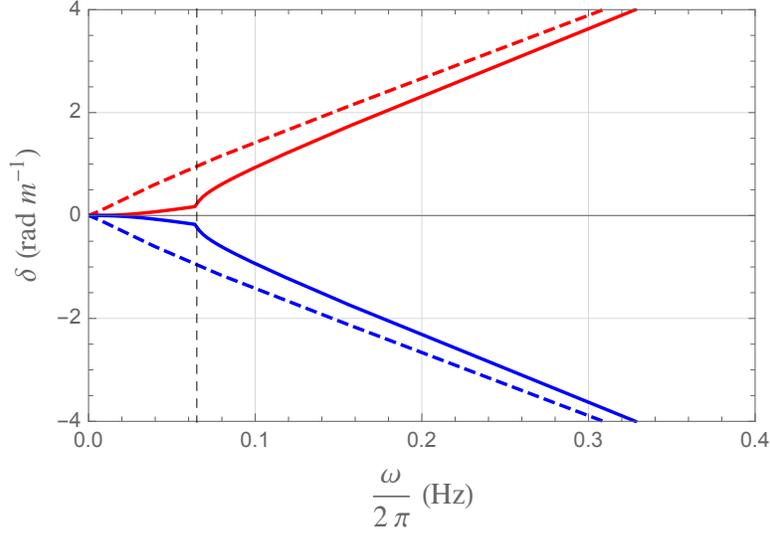


Figura 5.4: Poder de rotação da Eq. (5.2.36). As curvas sólidas representam PR para $\cos \theta = 1$, enquanto as linhas tracejadas indicam (5.2.36) para $\cos \theta = -1$. Aqui, utilizamos $\mu = 1 \text{ H m}^{-1}$, $\epsilon = 2 \text{ F m}^{-1}$, $b = 2 \text{ } \Omega^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 4 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\alpha'' = 2 \text{ F s}^{-1}$ (linhas em vermelho) e $\alpha'' = -2 \text{ F s}^{-1}$ (curvas em azul). A linha vertical tracejada é dada por $\omega_0/(2\pi) = 1/(4\pi\sqrt{6}) \text{ Hz}$, definida pela Eq. (5.2.37).

É importante destacar que para $\cos \theta = 1$, configuração paralela, o poder de rotação apresenta comportamento não linear para $\omega < \omega_0$, com ω_0 definido por

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu b^2 \cos^2 \theta}{\epsilon + \mu \alpha''^2}}, \quad (5.2.37)$$

que é obtido fazendo-se $f(\omega) = 0$, com $f(\omega)$ dado na Eq. (5.2.28d). Por outro lado, nesse mesmo regime de configuração paralela ($\cos \theta = 1$), observa-se que, para $\omega > \omega_0$, o poder de rotação é linear com a frequência.

Para a configuração anti-paralela ($\cos \theta = -1$), o poder de rotação é linear com a frequência. Dessa forma, nos cenários em que $\sigma \neq 0$, pode-se distinguir entre os casos de configuração paralela e anti-paralela por meio do nível de linearidade do poder de rotação em baixas frequências.

O coeficiente de dicroísmo associado com os índices da Eq. (5.2.29) é determinado por

$$\delta_d = -\frac{\omega}{2} (A''_+ - A''_-), \quad (5.2.38)$$

cujos comportamento em termos da frequência é representado na Fig. 5.5.

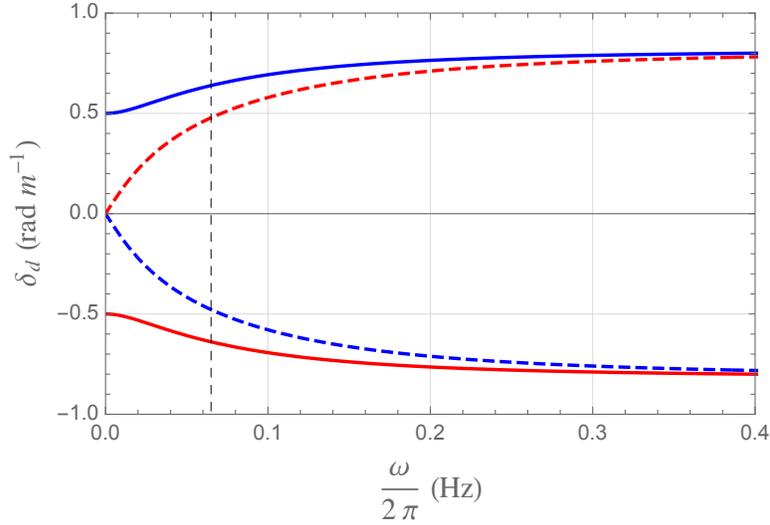


Figura 5.5: Coeficiente de dicroísmo da Eq. (5.2.38). As curvas sólidas ilustram o dicroísmo para $\cos \theta = 1$, enquanto as linhas tracejadas representam (5.2.38) para $\cos \theta = -1$. Utilizamos $\mu = 1 \text{ H m}^{-1}$, $\epsilon = 2 \text{ F m}^{-1}$, $b = 2 \text{ } \Omega^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 4 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\alpha'' = 2 \text{ F s}^{-1}$ (linhas em vermelho) e $\alpha'' = -2 \text{ F s}^{-1}$ (linhas em azul). A linha tracejada vertical é dada por $\omega_0/(2\pi) = 1/(4\pi\sqrt{6}) \text{ Hz}$, definida por Eq. (5.2.37).

No geral, observamos que, no caso isotrópico da Seção 5.2.1, o poder de rotação δ sofre uma inversão de sinal. Tal efeito de reversão somente ocorre quando $\Sigma \neq 0$ e $\alpha'' < 0$. No caso antissimétrico da Seção 5.2.2, o poder de rotação não inverte sinal para nenhuma frequência, em ambos os casos com condutividade ôhmica nula ($\sigma = 0$) ou diferente de zero ($\sigma \neq 0$).

A reversão do poder de rotação não é observada em dielétricos usuais, sendo reportada em alguns contextos específicos, como plasmas [88] e sistemas de grafeno [98]. Essa característica não-usual que obtivemos na Seção 5.2.1 pode ser utilizada como ferramenta de distinção entre cenários bi-isotrópicos com condutividade magnética isotrópica, dada por (5.2.6).

Conforme discutimos anteriormente, quando o poder de rotação δ é positivo, o meio é definido como meio de mão-direita e quando δ é negativo, o meio é dito ser de mão-esquerda. Assim, a inversão do poder de rotação, que obtivemos nas seções anteriores, revela uma reversão de quiralidade do meio dielétrico bi-isotrópico (com $\alpha'' < 0$) dotado de condutividade magnética. Dessa forma, no caso da Seção 5.2.1, para $\omega < \omega'$, o meio é de mão-direita, enquanto para $\omega > \omega'$, torna-se um meio de mão-esquerda.

A não ocorrência de reversão de poder de rotação no cenário de condutividade antissimétrica da Seção 5.2.2 sugere que anisotropias na condutividade magnética de meios bi-isotrópicos podem prevenir a reversão de poder de rotação (reversão de quiralidade) para o regime de propagação de ondas LCP e RCP. Tal característica introduz uma possível ferramenta de distinção entre meios bi-isotrópicos que suportam correntes magnéticas isotrópica e antissimétrica.

5.3 Caso simétrico

Vamos considerar agora um meio bi-isotrópico descrito por

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta\delta_{ij}, \quad (5.3.1)$$

e também dotado de condutividade magnética simétrica dada por

$$\sigma_{ij}^B = \frac{1}{2}(a_i c_j + a_j c_i), \quad (5.3.2)$$

onde os vetores \mathbf{a} e \mathbf{c} satisfazem a relação $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$. Assim, a equação (5.2.3) se torna

$$\bar{\epsilon}_{in}(\omega) = \tilde{\epsilon}\delta_{in} + (\alpha + \beta)\epsilon_{inm}n_m + \frac{i}{2\omega}(a_i c_j + a_j c_i)\epsilon_{jnm}n_m, \quad (5.3.3)$$

na qual utilizamos $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$. Logo, o tensor M_{ij} , dado por

$$M_{ij} = n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \mu\bar{\epsilon}_{ij}, \quad (5.3.4)$$

tem a seguinte forma explícita:

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 - \mu\epsilon & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_2 n_1 & n^2 - n_2^2 - \mu\epsilon & -n_2 n_3 \\ -n_3 n_1 & -n_3 n_2 & n^2 - n_3^2 - \mu\epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma n_3 & -\gamma n_2 \\ -\gamma n_3 & 0 & \gamma n_1 \\ \gamma n_2 & -\gamma n_1 & 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \frac{i(n_2(a_3 c_1 + a_1 c_3) - n_3(a_2 c_1 + a_1 c_2))}{2\omega} & \frac{i(2a_1 c_1 n_3 - n_1(a_3 c_1 + a_1 c_3))}{2\omega} & \frac{i(n_1(a_2 c_1 + a_1 c_2) - 2a_1 c_1 n_2)}{2\omega} \\ \frac{i(n_2(a_3 c_2 + a_2 c_3) - 2a_2 c_2 n_3)}{2\omega} & \frac{i(n_3(a_2 c_1 + a_1 c_2) - n_1(a_3 c_2 + a_2 c_3))}{2\omega} & \frac{i(2a_2 c_2 n_1 - n_2(a_2 c_1 + a_1 c_2))}{2\omega} \\ \frac{i(2a_3 c_3 n_2 - n_3(a_3 c_2 + a_2 c_3))}{2\omega} & \frac{i(n_3(a_3 c_1 + a_1 c_3) - 2a_3 c_3 n_1)}{2\omega} & \frac{i(n_1(a_3 c_2 + a_2 c_3) - n_2(a_3 c_1 + a_1 c_3))}{2\omega} \end{pmatrix}, \quad (5.3.5)$$

com $\gamma = \alpha + \beta$. Calculando $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se (depois de algumas simplificações)

$$(n^2 - \mu\epsilon)^2 + \gamma^2 \mu^2 n^2 + \frac{\mu^2}{4\omega^2} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})]^2 + i \frac{\mu^2 \gamma}{\omega} [n^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})] = 0, \quad (5.3.6)$$

que se simplifica em

$$(n^2 - \mu\epsilon)^2 + \gamma^2 \mu^2 n^2 + \frac{\mu^2}{4\omega^2} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})]^2 - i \frac{\mu^2 \gamma}{\omega} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (5.3.7)$$

pois $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$.

Para determinarmos os índices de refração, escrevemos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| n \cos \varphi, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a n \cos \varphi_a, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = c n \cos \varphi_c, \quad (5.3.8)$$

de forma que a Eq. (5.3.7) se torna

$$n^4 - 2n^2 \left(\mu\epsilon - \frac{S}{2} \right) + \mu^2\epsilon^2 = 0, \quad (5.3.9)$$

com

$$S = \mu^2\gamma^2 + \frac{\mu^2}{4\omega^2} |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|^2 \cos^2 \varphi - i \frac{\mu^2\gamma}{\omega} ac \cos \varphi_a \cos \varphi_c. \quad (5.3.10)$$

Resolvendo a Eq. (5.3.9) para n , obtemos

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon - \frac{S}{2} \pm i\sqrt{S} \sqrt{\mu\epsilon - \frac{S}{4}}. \quad (5.3.11)$$

Podemos ainda obter a Eq. (5.3.11) reescrevendo a Eq. (5.3.9) como

$$(n^2 - \mu\epsilon)^2 + Sn^2 = 0, \quad (5.3.12)$$

que leva a

$$(n^2 - \mu\epsilon)^2 = -Sn^2, \quad (5.3.13)$$

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm i\sqrt{S}n, \quad (5.3.14)$$

$$n^2 \mp i\sqrt{S}n - \mu\epsilon = 0, \quad (5.3.15)$$

cujas soluções são

$$n_{\pm}^{\pm} = \pm i \frac{\sqrt{S}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-S^2 + 4\mu\epsilon}, \quad (5.3.16)$$

$$n_{\pm}^{\pm} = \pm \sqrt{\mu\epsilon - \frac{S}{4}} \pm i \frac{\sqrt{S}}{2}. \quad (5.3.17)$$

A seguir, iremos considerar as soluções que recuperam o índice de refração de um dielétrico usual $n_{\pm} \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}$ no limite em que o parâmetro magnetoelétrico tende a zero, ($\gamma \rightarrow 0$), e condutividade magnética nula, tal como adotamos na Ref. [95]. Portanto, os índices de refração para o meio bi-isotrópico dotado de condutividade magnética simétrica são dados por

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon - \frac{S}{4}} \pm i \frac{\sqrt{S}}{2}. \quad (5.3.18)$$

Note que o quadrado dessa última expressão recupera o resultado da Eq. (5.3.11).

In the next section, we will determine the polarization vectors of the propagating modes and the optical effects.

5.3.1 Modos de propagação

Para determinarmos as polarizações associadas aos modos de propagação, vamos considerar dois casos particulares acerca das configurações entre os vetores \mathbf{a} , \mathbf{c} e \mathbf{n} .

5.3.1.1 Caso particular 1

Escolhendo um sistema de coordenadas onde

$$\mathbf{n} = (0, 0, n), \quad \mathbf{a} = (a_1, 0, a_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, 0, c_3), \quad (5.3.19)$$

temos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (0, a_3c_1 - a_1c_3, 0), \quad (5.3.20)$$

e $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0$. Assim, somente as componentes em x e z de \mathbf{a} e \mathbf{c} contribuem na equação de dispersão da Eq. (5.3.7). Implementando a Eq. (5.3.19) na Eq. (5.3.7), obtemos

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm in\sqrt{S_1}, \quad (5.3.21)$$

com

$$S_1 = \mu^2\gamma^2 - i\frac{\gamma\mu^2}{\omega}a_3c_3. \quad (5.3.22)$$

Para a configuração dada na Eq. (5.3.19), a matriz M_{ij} escreve-se

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon & -n(\mu\gamma + i\frac{\mu}{\omega}a_1c_1) & 0 \\ n\mu\gamma & n^2 - \mu\epsilon & 0 \\ 0 & -i\frac{\mu}{2\omega}n(a_3c_1 + a_1c_3) & -\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.3.23)$$

Implementando agora a Eq. (5.3.21) na Eq. (5.3.23), a equação $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\mathbf{E}_\pm = E'_y \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\frac{\mu\gamma}{\sqrt{S_1}} \\ \pm \frac{\mu\gamma}{2\omega\epsilon\sqrt{S_1}}(a_3c_1 + a_1c_3)n_\pm \end{pmatrix}, \quad (5.3.24)$$

que descreve vetores de polarização gerais compostos por polarização elíptica no setor transversal e uma componente longitudinal.

Fazendo-se a escolha particular $c_3 = 0$, a Eq. (5.3.24) simplifica-se em

$$\mathbf{E}_\pm = E'_y \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \pm \frac{a_3 c_1}{2\omega\epsilon} n_\pm \end{pmatrix}, \quad (5.3.25)$$

cujo setor transversal é representado por vetores LCP e RCP, respectivamente. É importante apontar que devido a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = a_1 c_1 + a_3 c_3 = 0$, a escolha especial $c_3 = 0$ também exige que se escolha $a_1 = 0$ para que se tenha vetores não-nulos \mathbf{a} and \mathbf{c} que satisfaçam $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ e que forneçam modos de propagação com setores transversais dados por ondas LCP e RCP.

5.3.1.2 Caso particular 2

Escolhendo agora um sistema de coordenadas onde

$$\mathbf{n} = (0, 0, n), \quad \mathbf{a} = (a_1, 0, a_3), \quad \mathbf{c} = (0, c_2, 0), \quad (5.3.26)$$

temos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (-a_3 c_2, 0, a_1 c_2). \quad (5.3.27)$$

Nesse caso, observa-se que $(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ possui componentes longitudinal e transversal relativas à direção de propagação.

A partir da equação de dispersão dada na Eq. (5.3.7), encontramos, nesse caso,

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm in\sqrt{S_2}, \quad (5.3.28)$$

com

$$S_2 = \mu^2 \gamma^2 + \frac{\mu^2}{4\omega^2} a_1^2 c_2^2. \quad (5.3.29)$$

Logo, para o sistema dado na Eq. (5.3.26), a matriz M_{ij} é representada por

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon + i\frac{\mu}{2\omega} a_1 c_2 n & -\mu\gamma n & 0 \\ \mu\gamma n & n^2 - \mu\epsilon - i\frac{\mu}{2\omega} a_1 c_2 n & 0 \\ i\frac{\mu}{2\omega} a_3 c_2 n & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.3.30)$$

Implementando agora a Eq. (5.3.28) na Eq. (5.3.30), a equação $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\mathbf{E}_\pm = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{i}{\mu\gamma} (\sqrt{S_2} \pm \frac{\mu}{2\omega} a_1 c_2) \\ \frac{i}{2\omega\epsilon} a_3 c_2 n_\pm \end{pmatrix}. \quad (5.3.31)$$

Escolhendo-se $a_1 = 0$, obtemos a partir da Eq. (5.3.27): $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (-a_3c_2, 0, 0)$, que é perpendicular à direção de propagação. Logo, os vetores de polarização da Eq. (5.3.31) se tornam

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \frac{i}{2\omega\epsilon} a_3 c_2 n_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (5.3.32)$$

nos quais os setores transversais são representados por vetores LCP e RCP, respectivamente. Note que escolhendo-se $a_3 = 0$ em vez de $a_1 = 0$, obtemos $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (0, 0, a_1c_2)$, o qual é longitudinal à direção de propagação. Além disso, a partir da Eq. (5.3.31), temos, nesse caso:

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{i}{\mu\gamma} (\sqrt{S_2} \pm \frac{\mu}{2\omega} a_1 c_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3.33)$$

que representam vetores elipticamente polarizados.

5.3.2 Efeitos ópticos

Considerando o “caso particular 1”, temos a partir da Eq. (5.3.21)

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon - \frac{S_1}{4}} \pm \frac{i}{2} \sqrt{S_1}. \quad (5.3.34)$$

Lembrando que $\gamma = \alpha + \beta$ e utilizando Eq.(30) of Ref. [95], obtemos

$$\gamma = 2i\alpha''. \quad (5.3.35)$$

Usando agora a Eq. (5.3.35) na Eq. (5.3.34), finalmente determinamos (para o caso particular 1):

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2\alpha''^2 - \frac{\mu^2\alpha''}{2\omega} a_3 c_3} \pm \sqrt{\mu^2\alpha''^2 - \frac{\mu^2\alpha''}{2\omega} a_3 c_3}. \quad (5.3.36)$$

Nesse caso, as polarizações, Eq. (5.3.24), não são dadas por vetores LCP e RCP. Logo, a birrefringência é avaliada em termos da diferença de fase,

$$\Delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0} (n_+ - n_-). \quad (5.3.37)$$

Observe que, para $\alpha'' > 0$, o segundo termo da Eq. (5.3.36) se torna nulo na frequência ω_0 dada por

$$\omega_0 = \frac{a_3 c_3}{2\alpha''}. \quad (5.3.38)$$

Essa frequência característica somente ocorre em meios bi-isotrópicos dotados de condutividade

simétrica.

Para os índices de refração da Eq. (5.3.36), a diferença de fase é ilustrada na Fig. 5.6 abaixo:

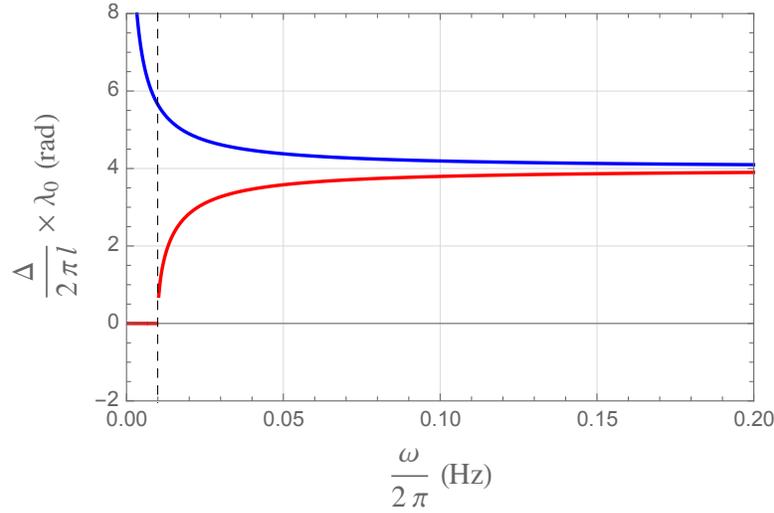


Figura 5.6: Diferença de fase para os índices da Eq. (5.3.37). Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$, $a_3 = c_3 = 0.5$, $\alpha'' = 2$ (linhas em vermelho) e $\alpha'' = -2$ (curvas em azul). A linha tracejada vertical ocorre na frequência ω_0 da Eq. (5.3.38) .

Destacamos ainda que escolhendo-se $c_3 = 0$ para se obter ondas LCP e RCP no setor transversal dos modos propagantes, veja a Eq. (5.3.25), os índices de refração da Eq. (5.3.36) simplificam-se em

$$n_{\pm}|_{c_3=0} = \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2\alpha''^2} + \pm\mu|\alpha''|. \quad (5.3.39)$$

Consequentemente, o efeito de birrefringência se torna constante nesse caso: $\Delta \propto \mu|\alpha''|$, sem a presença da frequência de corte ω_0 .

Para o “caso particular 2”, podemos obter a partir da Eq. (5.3.28)

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2\alpha''^2 - \frac{\mu^2}{16\omega^2}a_1^2c_2^2} \pm \sqrt{\mu^2\alpha''^2 - \frac{\mu^2}{16\omega^2}a_1^2c_2^2}, \quad (5.3.40)$$

onde utilizamos $\gamma = 2i\alpha''$. Nesse caso, a frequência de corte ω' é dada por

$$\omega'^2 = \frac{a_1^2c_2^2}{16\alpha''^2}, \quad (5.3.41)$$

a qual representa uma frequência característica onde não ocorre birrefringência.

Uma vez que os modos propagantes não são representados por polarizações circulares, veja a Eq. (5.3.31), podemos avaliar a birrefringência em termos da diferença de fase da Eq. (5.3.37), considerando os índices da Eq. (5.3.40). Ilustramos o efeito de birrefringência em termos da frequência na Fig. 5.7.

Como antes, destacamos que escolhendo-se $a_3 = 0$ para se obter ondas LCP e RCP nos setores transversais dos modos propagantes, veja a Eq. (5.3.32), os índices de refração da Eq. (5.3.41)

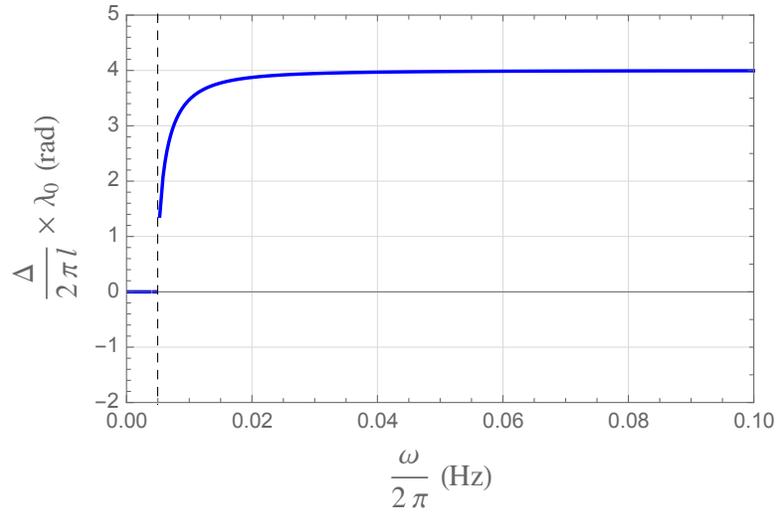


Figura 5.7: Diferença de fase para os índices da Eq. (5.3.36). Aqui, utilizamos $\mu = 1$, $\epsilon = 2$, $a_3 = c_3 = 0.5$ e $|\alpha''| = 2$. A linha vertical tracejada ocorre na frequência ω' da Eq. (5.3.41) .

simplificam-se em

$$n_{\pm}|_{a_1=0} = \sqrt{\mu\epsilon + \mu^2\alpha''^2} + \pm\mu|\alpha''|. \quad (5.3.42)$$

Dessa forma, o efeito de birrefringência também se torna constante: $\Delta \propto \mu|\alpha''|$, sem ocorrência de frequência de corte ω' .

ELETRODINÂMICA MODIFICADA POR TERMOS CPT-ÍMPAR

Sumário

6.1	Simetria de Lorentz	119
6.2	A eletrodinâmica de Maxwell-Field-Jackiw	120
6.3	Modelo Padrão Estendido	122
6.3.1	Setor de fótons do Modelo Padrão Estendido	123
6.4	Efeitos do termo <i>CPT</i>-ímpar de dimensão 3 na eletrodinâmica de meios materiais	124
6.4.1	Cenário puramente timelike	128
6.4.2	Cenário puramente spacelike	130
6.4.2.1	Caso V -perpendicular	131
6.4.2.2	Caso V -longitudinal	133
6.5	Efeitos do termo <i>CPT</i>-ímpar de dimensão 5 na eletrodinâmica de meios materiais	135
6.5.1	Cenário puramente timelike	139
6.5.1.1	Modos de propagação	144
6.5.2	Cenário puramente spacelike	145
6.5.2.1	Caso U -perpendicular	145
6.5.2.2	Caso U -longitudinal	150

Uma das bases fundamentais do Modelo Padrão é a simetria de Lorentz, que estabelece equivalência entre todos os referenciais inerciais e a inexistência de direções privilegiadas no espaço. Todavia a violação da simetria de Lorentz (VL) tem sido objeto de estudo nas últimas décadas, e vários modelos sugerem que tal simetria possa ser quebrada espontaneamente num contexto de altas energias. Devido a essa possibilidade de violação, Colladay e Kostelecký elaboraram o Modelo Padrão Estendido, que é uma teoria efetiva capaz de descrever todos os efeitos advindos da violação espontânea da simetria de Lorentz.

Inicialmente alguns aspectos do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw em vácuo e sua aplicabilidade de tal modelo em sistemas quirais são brevemente discutidos. Este último ponto de

discussão motivou em parte a realização dos trabalhos desenvolvidos nesta tese. Ainda neste capítulo, serão abordadas duas extensões da eletrodinâmica em meios materiais que incorporam termos *CPT*-ímpares de dimensões 3 e 5. As consequências desse cenário para a propagação de ondas eletromagnéticas serão discutidas. Os resultados desse estudo geraram uma publicação no *Physical Review D*:

- P.D.S. Silva, L. Lisboa-Santos, M. M. Ferreira Jr., and M. Schreck, Effects of CPT-odd terms of dimensions three and five on electromagnetic propagation in continuous matter, *Phys. Rev. D* **104**, 116023 (2021).

6.1 Simetria de Lorentz

Simetrias são propriedades de sistemas físicos que não mudam sob certas transformações. Por exemplo, o comprimento de um vetor no plano não muda sob uma rotação. A identificação de simetrias na Natureza é de importância na Física, pois levam a certas quantidades físicas (como momento, energia, etc.) que são conservadas, através do teorema de Noether¹.

Por muito tempo, a simetria de Galileu (transformações de Galileu), que deixavam a mecânica newtoniana invariante, foi tomada como sendo exata. Porém, com o advento da teoria de Maxwell, constatou-se que esse conjunto de simetrias não funcionava para as leis do eletromagnetismo. Como as equações de Maxwell eram leis físicas consistentes com todos os experimentos, acreditava-se que deveriam ser invariantes por tais transformações (ou algum outro conjunto de transformações). Com o advento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), verificou-se que o conjunto de transformações que mantinha a invariância no eletromagnetismo de Maxwell eram as transformações de Lorentz [24].

Ao lançar a TRR, Einstein utilizou dois postulados básicos, a saber: as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais e a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os referenciais inerciais. Estabelecia-se assim que todos os referenciais inerciais eram equivalentes, ou seja, não havia referenciais privilegiados na natureza. Sendo as transformações de Lorentz responsáveis por relacionar as grandezas observadas em diferentes referenciais inerciais através de mudanças de coordenadas (mudança no sistema de referência escolhido para descrever o sistema), estabelecendo a simetria de Lorentz.

Atualmente, simetria de Lorentz tem se mantido como exata. Entretanto, trabalhos que surgiram por volta dos anos 1990, buscando teorias quânticas para a gravitação, no contexto das teorias de cordas², sugeriram que a simetria de Lorentz pode ser espontaneamente violada em altas escalas de energia³. A possibilidade de quebra ou violação da simetria de Lorentz implica numa não

¹O teorema de Noether, desenvolvido em 1918 por Emmy Noether (1882-1935), estabelece que simetrias contínuas num sistema levam a cargas conservadas, isto é, se um sistema é invariante sob transformações contínuas, uma quantidade física relacionada é conservada. Por exemplo, simetria sob translações levam a conservação de momento linear.

²Em 1989, Kostelecký e Samuel já reportavam a possibilidade de violação de Lorentz [131].

³A simetria CPT, fundamental do Modelo Padrão, também poderia ser violada nessa escala de energia.

equivalência física entre dois referencias inerciais, isto é, as transformações de Lorentz aplicadas num referencial não descreveriam mais o mesmo cenário físico que descrevem em outro referencial. Geralmente esse tipo de efeito ocorre quando existem os chamados campos de fundo fixos (*background fields*), gerados como valores esperados no vácuo, permeando todo o espaço. Dessa forma, as transformações de Lorentz podem ser classificadas em dois tipos [38, 129]: as transformações de observador (nas quais se realizam transformações no sistema de coordenadas, não se alterando os pontos do espaço-tempo ou grandezas relacionadas a um evento, como o vetor posição de uma partícula) e as transformações de partícula (nas quais se mantém o sistema de coordenadas fixo, transformando-se os pontos do espaço-tempo e grandezas relacionadas às partículas)⁴. A mudança de coordenadas não deve alterar os resultados de medidas de grandezas num sistema, isto é, os resultados (medições de alguma grandeza) não podem depender da escolha de eixos coordenados usados para descrever o sistema. Assim, a simetria de Lorentz não é violada no referencial onde se realizam transformações de observador (mudança de coordenadas). Entretanto, as transformações no referencial das partículas quebram essa invariância, pois os campos de fundo são fixos e não se transformam como vetores ou tensores genuínos neste referencial.

Levando em consideração a possibilidade de violação da simetria de Lorentz, Kostelecký e Colladay [38, 130] desenvolveram o Modelo Padrão Estendido.

6.2 A eletrodinâmica de Maxwell-Field-Jackiw

O modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) foi inicialmente proposto em 1990 [141] explorando uma extensão da eletrodinâmica de Maxwell que mantém a invariância de calibre (ou *gauge*) e que viola a simetria de Lorentz. Tal modelo incorpora um termo (VL) e CPT-ímpar, parametrizado por um campo de fundo $V^\mu = (V^0, \mathbf{V})$ à densidade de Lagrangiana usual de Maxwell, da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{MCFJ}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}V_\alpha A_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (6.2.1)$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange à (6.2.1), obtém-se as equações de MCFJ:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu + \frac{1}{2}V_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (6.2.2a)$$

que nos fornece

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J} + V_0 \mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}. \quad (6.2.2b)$$

⁴A ref. [128] apresenta um exemplo descrevendo um sistema constituído por um elétron e um campo elétrico de fundo: aplicando transformações de observador, rotacionando-se os eixos coordenados, por exemplo, o vetor posição do elétron continua perpendicular em relação ao campo elétrico de fundo; aplicando-se transformações de partícula, ou seja, rotacionando-se o vetor posição do elétron, verifica-se que sua direção não é mais perpendicular ao campo de fundo.

A relação de dispersão obtida para essa eletrodinâmica é da forma

$$p^4 + p^2 V^2 - (p \cdot V)^2 = 0, \quad (6.2.3)$$

com o 4-vetor momento $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ (no vácuo).

Uma das consequências da VL nesse modelo é o surgimento de atividade óptica para o vácuo (birrefringência), levando a rotação de ondas eletromagnéticas linearmente polarizadas que viajam pelo mesmo. Utilizando dados astrofísicos da polarização da radiação emitida por galáxias distantes, S. M. Carroll, G. B. Field e R. Jackiw encontraram um limite superior para a magnitude do campo de fundo, sendo da ordem de [141]

$$|V_0 - |\mathbf{V}| \cos \theta| < 1.7 \times 10^{-33} eV, \quad (6.2.4)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{V} e \mathbf{k} .

A teoria MCFJ também tem sido objeto de investigações em diversos âmbitos nas últimas décadas. Por exemplo, na análise dos aspectos de consistência (estabilidade, causalidade, unitariedade) [142], em acoplamentos com o campo de Higgs [143], em soluções estacionárias do modelo MCFJ-Proca [145], e também nas contribuições do termo CFJ à anisotropia da radiação cósmica de fundo [146]. Mais recentemente, um estudo sobre o comportamento eletromagnético de sistemas quirais foi publicado na Ref. [33]. Nesse artigo, a descrição eletrodinâmica do sistema é realizada por meio das equações de MCFJ que advêm da Eq. (6.2.1). As componentes do campo de fundo foram associadas a fenômenos que violam as simetrias P e T , como o efeito magnético quiral (parametrizado pela componente temporal do campo de fundo), o efeito Hall anômalo e a geração anômala de carga (ambos conectados com a parte espacial do campo de fundo). Outros aspectos interessantes, como efeitos de birrefringência e campos eletromagnéticos gerados por carga pontual e densidade de corrente estática, também são discutidos na Ref. [33].

É importante mencionar que a Ref. [33] foi uma forte motivação para a realização das investigações, a nível clássico, da eletrodinâmica em meios materiais, tendo em vista que a Ref. [33] baseou-se no modelo MCFJ em vácuo. Como resultado das nossas investigações, dois artigos, já citados nesse trabalho, publicados no *Physical Review D* compõem os capítulos 3 e 4 desta tese.

Na seção 6.4, aborda-se uma extensão do modelo MCFJ para meios materiais, caracterizados por relações constitutivas diferentes daquelas utilizadas para o vácuo. Aspectos relacionados à propagação de ondas eletromagnéticas e propriedades ópticas do meio nesse cenário são discutidos. Na seção 6.5, efetua-se uma extensão no termo tipo CFJ que incorpora derivadas superiores ao modelo, com base no Modelo Padrão Estendido não mínimo.

6.3 Modelo Padrão Estendido

No Modelo Padrão Estendido, são incorporados todos os termos (escalares) que causam violação de Lorentz⁵ aos vários setores do Modelo Padrão. Os termos que violam a simetria de Lorentz apresentam quantidades tensoriais que são interpretados como campos de fundo fixos⁶, que permeiam todo o espaço. Quando a simetria de Lorentz é quebrada, esses parâmetros de violação de Lorentz assumem valores não-nulos no vácuo (estado de menor energia do modelo), definindo certas direções no espaço-tempo (anisotropias), o que conduz a referenciais privilegiados, pois algumas propriedades físicas podem depender das direções desses parâmetros.

O Modelo Padrão Estendido é descrito pelas seguintes densidades lagrangeanas:

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{GR} + \delta\mathcal{L}_{LV}, \quad (6.3.1)$$

onde \mathcal{L}_{MP} é a densidade lagrangeana que descreve o Modelo Padrão, \mathcal{L}_{GR} , descreve a interação gravitacional e $\delta\mathcal{L}_{LV}$ representa todos os termos que violam a simetria de Lorentz (sendo alguns CPT-pares, outros CPT-ímpares).

Os termos violadores de Lorentz⁷, presentes na Eq. (6.3.1), podem ser classificados quanto ao seu comportamento sob as transformações CPT, sendo chamados de CPT-pares quando não violam a simetria CPT e CPT-ímpares são quando o fazem. A simetria CPT consiste na invariância de um sistema físico perante as transformações de conjugação de carga, paridade e reversão temporal. A conexão entre violação das simetrias CPT e Lorentz é feita via o teorema de Greenberg [132], que estabelece que violação da simetria CPT implica na violação da simetria de Lorentz.

Em muitas situações, teorias de violação de Lorentz são estudadas, investigando-se os efeitos que esses termos de violação causam nos sistemas físicos usuais. Alguns dos principais efeitos em sistemas fotônicos ou fermiônicos podem ser estudados através da deformação das relações de dispersão, que relacionam energia e momento de forma não usual. Relações de dispersão modificadas podem viabilizar processos proibidos no Modelo Padrão usual, tal como o efeito Cherenkov no vácuo e decaimentos em pares partícula-antipartícula, além de implicar na alteração do threshold energy de alguns processos, aumentando ou diminuindo o limite de energia mínima [133].

Nos últimos anos, extensões do (MPE) foram propostas e incluem termos com altas derivadas com dimensões de massa (em unidades naturais) maiores do que quatro [134–136]. Investigações acerca de aspectos clássicos relacionados à eletrodinâmica (no vácuo) modificada por termos CPT-ímpar de dimensão cinco e por termos CPT-par de dimensão seis podem ser encontradas na literatura [42, 43].

Sendo assim, o (MPE) apresenta a sua versão mínima (MPE-m), com termos até dimensão⁸ quatro, e a versão não-mínima (MPE-nm), com termos de dimensão maiores do que quatro.

⁵Através de contrações tensoriais entre os campos do Modelo Padrão e os parâmetros de violação de Lorentz [48].

⁶As fontes desses campos de fundo são inacessíveis.

⁷Na literatura, é comum substituir as expressões “violação da simetria de Lorentz” e “termos violadores da simetria de Lorentz” por “violação de Lorentz” e “termo(s) violador(es) de Lorentz”.

⁸Essa dimensionalidade, em unidades naturais, refere-se à dimensão de massa do operador de campo, que é acoplado com os tensores que parametrizam a (VL).

6.3.1 Setor de fótons do Modelo Padrão Estendido

O setor de fótons ou setor de gauge do (MPEm) é descrito pela seguinte densidade de Lagrange

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (6.3.2)$$

em que $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Cevita quadridimensional, e $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético usual. Os elementos $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ e $(k_{AF})^\kappa$ representam os parâmetros de violação de Lorentz, onde o primeiro é CPT-par e adimensional, enquanto o segundo é CPT-ímpar com dimensão de massa igual a 1. A contribuição CPT-ímpar também é conhecida como termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), pois foi reportada num trabalho anterior [137] ao desenvolvimento do (MPE).

O setor eletromagnético do (MPE-nm) é descrito por uma densidade de Lagrange similar à da Eq. (6.3.2), ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (6.3.3)$$

Os termos CPT-ímpares e CPT-pares, $(\hat{k}_{AF})_\kappa$ e $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$, respectivamente, são os análogos de $(k_{AF})_\kappa$ e $(k_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ do (MPE-m). Entretanto, essas quantidades envolvem coeficientes não-mínimos contraídos com derivadas adicionais na seguinte forma de série infinita:

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = \sum_{d \text{ odd}} (k_{AF}^{(d)})_\kappa^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (6.3.4a)$$

$$(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d \text{ even}} (k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-4)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-4)}}, \quad (6.3.4b)$$

onde d é a dimensão de massa do operador de campo com o qual o coeficiente está contraído. Os coeficientes $(k_{AF}^{(d)})_\kappa^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}}$ e $(k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-4)}}$, que controlam a VL, tem dimensão de massa igual a $(4-d)$. Por exemplo, na Seção 6.5, estuda-se o termo CPT-ímpar de dimensão 5. Nesse caso, tem-se $d = 5$ e a Eq. (6.3.3) apresenta seguinte termo

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} F_{\mu\nu}, \quad (6.3.5)$$

na qual se utilizou a definição dada na Eq. (6.3.4a) com $d = 5$ para se obter $(\hat{k}_{AF})_\kappa$. Observe que o fator $A_\lambda \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} F_{\mu\nu}$, que está contraído com $(k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2}$, tem dimensão de massa igual a 5.

Motivações adicionais para o objeto de estudo desde capítulo advêm das conexões entre VL e propriedades de sistemas da matéria condensada. Por exemplo, como indicado na Ref. [33], as equações de Maxwell no vácuo modificadas pelo termo CFJ são utilizadas para descrever o efeito magnético quiral, efeito Hall anômalo e a geração anômala de carga em sistemas de férmions quirais. Além disso, a eletrodinâmica modificada por termos tipo CFJ também tem papel importante no estudo de simemetais de Weyl. A descrição desse tipo de material pode ser realizada no contexto de teoria de campos efetivo, através setor de férmions do MPE acoplado com o campo de gauge

A^μ [138–140].

Uma vez que este capítulo se restringe a discutir as contribuições oriundas do termo CPT-ímpar, os termos CPT-pares (dos modelos mínimo e não mínimo) serão considerados iguais a zero, $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$ e $(\hat{k}_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$.

6.4 Efeitos do termo CPT-ímpar de dimensão 3 na eletrodinâmica de meios materiais

Para se investigar as possíveis contribuições do termo de violação de Lorentz CPT-ímpar de dimensão 3 na propagação eletromagnética em meios materiais, escreve-se uma densidade de Lagrange da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}V_\beta A_\lambda F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (6.4.1)$$

onde se implementou o termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) – proporcional a $(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}$ presente na Eq. (6.3.2) – na densidade de Lagrange do eletromagnetismo⁹ em meios materiais [vide a Seção 2.2.]. Note ainda que $(k_{AF})^\kappa$ foi reescrito em termos de $V^\kappa = (V_0, \mathbf{V})$, por simplicidade na notação. Utilizando as equações de Euler-Lagrange na Eq. (6.4.1), obtém-se¹⁰ as seguintes equações de Maxwell (não-homogêneas) modificadas pelo campo de fundo V^κ , ou seja,

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = J^\kappa. \quad (6.4.2)$$

A partir da qual, as leis de Gauss e Ampère modificadas podem ser facilmente obtidas, resultando, respectivamente, em

$$\nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (6.4.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} - V_0 \mathbf{B} + \mathbf{V} \times \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (6.4.3b)$$

em que V_0 e \mathbf{V} são as partes temporal e espacial de V^κ , respectivamente.

Para se estudar o comportamento do modelo descrito pela Eq. (6.4.1) sob as transformações C (conjugação de carga), P (paridade) e T (reversão temporal), é importante lembrar que o termo (CFJ) é CPT-ímpar e que a parte livre (sem fontes) da Eq. (6.4.1) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \left[V^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - A^0 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \right]. \quad (6.4.4)$$

Assim, observa-se que as partes envolvendo V_0 são P -ímpar e T -par, enquanto os termos contendo \mathbf{V} são P -par e T -ímpar, de acordo com a Tabela 2. Assim esses termos são responsáveis por induzir

⁹Adicionando-se o termo (CFJ) na densidade de Lagrange de Maxwell usual (para o vácuo), $\mathcal{L} = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, obtém-se a conhecida eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ).

¹⁰Vide Apêndice I.

uma atividade óptica do meio, na forma de birrefringência ou absorção (dicroísmo).

Tabela 2: Comportamento dos termos VL da densidade de Lagrange dada na Eq. (6.4.1) sob C , P e T .

	\mathbf{E}	\mathbf{B}	A_0	\mathbf{A}	$V_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$	$A_0(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})$	$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})$
C	–	–	–	–	+	+	+
P	–	+	+	–	–	+	+
T	+	–	+	–	+	–	–

Outro aspecto interessante da eletrodinâmica de (MCFJ) consiste no termo $V_0\mathbf{B}$, que pode ser utilizado para representar a densidade de corrente associado ao (CME),

$$\mathbf{J}_{\text{CME}} = \frac{e^2}{4\pi^2} (\Delta\mu) \mathbf{B} \equiv \Sigma\mathbf{B}, \quad (6.4.5)$$

sendo e a carga elementar, enquanto $\Delta\mu = \mu_R - \mu_L$ é conhecido como potencial químico quiral, designando a diferença entre a densidade do número de férmions de mão-direita e mão-esquerda do sistema. Na Eq. (6.4.5), Σ representa a condutividade magnética isotrópica e tem um papel equivalente à componente time-like V_0 da Eq. (6.4.3b), como apontado pela Ref. [33].

Para se investigar as propriedades de propagação relacionadas à eletrodinâmica modificada, descrita pela Eq. (6.4.3), será considerado a classe de meios contínuos cujas relações constitutivas são dadas por

$$D^i = \epsilon E^i, \quad H^i = \frac{1}{\mu} B^i, \quad (6.4.6)$$

em que ϵ e μ são as constantes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio. Note que a escolha feita na Eq. (6.4.6) implica que os parâmetros constitutivos gerais definidos via o tensor constitutivo $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ [vide a Seção 2.2] foram escolhidos de forma que

$$\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{ij}, \quad (\mu^{-1})_{ij} = \mu^{-1}\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0. \quad (6.4.7)$$

Note que, em relação a esses parâmetros constitutivos, o meio é considerado isotrópico. Dessa forma, quaisquer efeitos de anisotropia serão originados devido ao campo de fundo V^κ .

Para seguir o procedimento discutido na Seção 2.3 e, então, obter-se a equação de dispersão, implementam-se as relações dadas na Eq. (6.4.6) e também $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, onde σ é a condutividade ôhmica, na Eq. (6.4.3b). Por conseguinte, obtém-se

$$[\mathbf{k}^2\delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2\mu\bar{\epsilon}_{ij}] E^j = 0, \quad (6.4.8)$$

onde se definiu

$$\bar{\epsilon}_{ij} \equiv \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} - \frac{i}{\omega^2} \epsilon_{iaj} (k_a V_0 - \omega V_a), \quad (6.4.9)$$

como o tensor de permissividade elétrico efetivo. O segundo termo do lado direito da Eq. (6.4.10), $\epsilon_{iaj} k_a V_0$ viola a simetria P , enquanto o terceiro termo, ωV_a , quebra a simetria de reversão temporal T . Ambos são responsáveis pela atividade óptica do meio, que se manifesta via birefringência.

Utilizando agora $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$, pode-se reescrever a Eq. (6.4.8) na forma

$$M_{ij} E^j = 0, \quad (6.4.10a)$$

sendo

$$M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (6.4.10b)$$

com

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} - \frac{i}{\omega} \epsilon_{iaj} (n_a V_0 - V_a). \quad (6.4.10c)$$

As soluções não-triviais para o campo elétrico são obtidas exigindo-se que o determinante da matriz $[M_{ij}]$ seja nulo, $\det[M_{ij}] = 0$. Isso fornecerá as relações de dispersão que descrevem a propagação das ondas eletromagnéticas no meio. A matriz $[M_{ij}]$ é explicitamente dada por

$$[M_{ij}] = \mathcal{M} + i \frac{\mu}{\omega} \mathcal{V}, \quad (6.4.11a)$$

na qual

$$\mathcal{M} = \left[n^2 - \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \right] \mathbb{1}_3 - \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}, \quad (6.4.11b)$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & v_3 - V_0 n_3 & V_0 n_2 - V_2 \\ V_0 n_3 - V_3 & 0 & V_1 - V_0 n_1 \\ V_2 - V_0 n_2 & V_0 n_1 - V_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4.11c)$$

com a matrix identidade $\mathbb{1}_3$ de ordem (3×3) . Calculando $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se a seguinte equação de dispersão

$$\tilde{\epsilon} (n^2 - \mu \tilde{\epsilon})^2 - \frac{\mu}{\omega^2} \left\{ \mu \tilde{\epsilon} [V_0^2 n^2 + \mathbf{V}^2 - 2V_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})] - \mathbf{V}^2 n^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})^2 \right\} = 0, \quad (6.4.12a)$$

com

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (6.4.12b)$$

Para o vácuo, $\mu = \epsilon = 1$ e $\sigma = 0$, a Eq. (6.4.12a) resulta¹¹ na conhecida equação de dispersão do modelo de MCFJ:

$$p^4 + p^2 V^2 - (p \cdot V)^2 = 0, \quad (6.4.13)$$

com $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ e $V^\mu = (V^0, \mathbf{V})$, como se esperava.

É possível reescrever a equação de dispersão dada na Eq. (6.4.12a) numa estrutura análoga à da Eq. (6.4.13). Para isso, definem-se os seguintes quadri-vetores

$$\bar{p}^\mu \equiv \left(\sqrt{\tilde{\epsilon}}\omega, \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\tilde{\mu}}} \right), \quad \bar{V}^\mu \equiv \left(\sqrt{\tilde{\mu}}V^0, \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right). \quad (6.4.14)$$

Assim, a Eq. (6.4.12a) é reescrita como

$$\bar{p}^4 + \bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 = 0. \quad (6.4.15)$$

Nas Eqs. (6.4.15) e (6.4.13), as contrações tensoriais são efetuadas considerando-se a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Alternativamente, pode-se introduzir uma métrica efetiva definida por

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} \equiv \text{diag} \left(\tilde{\epsilon}, -\frac{1}{\tilde{\mu}}, -\frac{1}{\tilde{\mu}}, -\frac{1}{\tilde{\mu}} \right), \quad (6.4.16)$$

o que permite reescrever¹² a Eq. (6.4.15) na forma

$$(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p)^2 + \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left[(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p) (V \cdot \tilde{\eta} \cdot V) - (p \cdot \tilde{\eta} \cdot V)^2 \right] = 0. \quad (6.4.17)$$

Dessa forma, pode-se interpretar a Eq. (6.4.15) como a equação de dispersão para um modelo MCFJ generalizado em meios. O quadri-vetor \bar{p}^μ representa um quadri-momento efetivo que satisfaz uma equação de dispersão análoga à do vácuo quando o campo de fundo é substituído por \bar{V}^μ . A possibilidade de reescrever a equação de dispersão em termos da métrica efetiva, dada na Eq. (6.4.16), e do quadri-momento usual p^μ é uma forma diferente de se compreender esse resultado. Noutras palavras, a presença do meio, descrito pelos parâmetros ϵ , μ e σ , leva a ondas eletromagnéticas que obedecem uma equação de dispersão similar à do caso de ondas eletromagnéticas progagando-se no vácuo, mas com a métrica de Minkowski substituída por uma métrica efetiva.

Para se investigar mais propriedades dessa eletrodinâmica modificada num meio dilétrico, serão discutidos, a seguir, dois cenários: (i) campo de fundo puramente timelike e (ii) spacelike. Também será adotado um substrato dielétrico com condutividade ôhmica nula, $\sigma \mapsto 0$.

¹¹Vide Apêndice J.

¹²Vide Apêndice K.

6.4.1 Cenário puramente timelike

Neste cenário, considera-se o campo de fundo descrito por $V^\mu = (V^0, \mathbf{0})$. Assim, a Eq. (6.4.12a) se reduz a

$$(n^2 - \mu\epsilon)^2 - \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} n^2 = 0, \quad (6.4.18)$$

a qual fornece dois índices de refração distintos:

$$n_\pm^2 = \mu\epsilon + \frac{\mu^2 V_0^2}{2\omega^2} \pm \frac{\mu V_0}{\omega} \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2 V_0^2}{4\omega^2}}, \quad (6.4.19a)$$

ou equivalentemente

$$n_\pm = \sqrt{\mu\epsilon + \frac{\mu^2 V_0^2}{4\omega^2}} \pm \frac{\mu V_0}{2\omega}. \quad (6.4.19b)$$

Esse resultado está de acordo com o índice de refração dado na Eq. (3.2.19) para o caso de meio dotado com condutividade magnética isotrópica. Essa é uma correspondência esperada, uma vez que o V_0 atua como uma parametrização da condutividade magnética. Note que os índices de refração n_\pm são reais positivos, o que permite que ambos os modos se propaguem em qualquer frequência. Assim, comportamento de atenuação/absorção não é observado neste cenário timelike.

Além disso, no limite de altas frequências, a Eq. (6.4.19b) fornece $n_\pm \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}$, recuperando o índice de refração de um meio com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ , tal como é descrito na eletrodinâmica de Maxwell. Esse comportamento é ilustrado na Fig. 6.1 a seguir, a qual mostra os índices de refração (6.4.19b) em termos do parâmetro adimensional ω/V_0 para alguns valores de μ e ϵ . O modo associado a n_+ exibe dispersão anômala, com $dn_+/d\omega < 0$, enquanto n_- é caracterizado por dispersão normal.

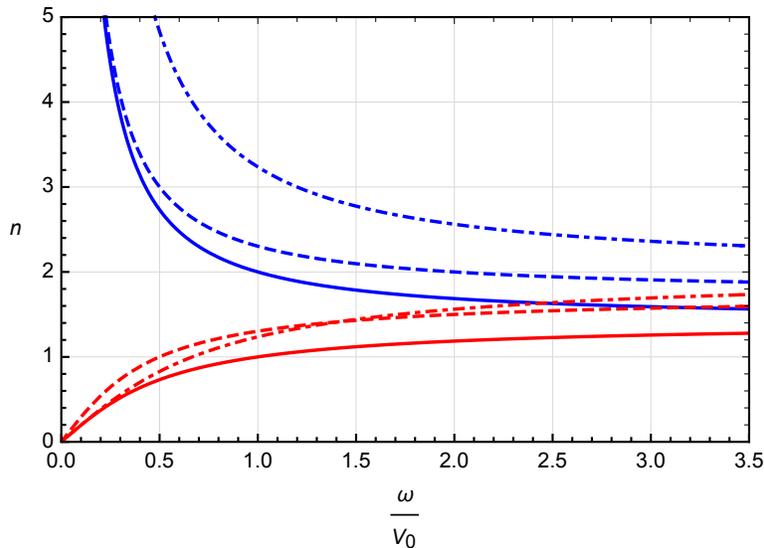


Figura 6.1: Índices de refração $n_{\pm}(\omega)$ da Eq. (6.4.19b) em termos da grandeza adimensional ω/V_0 . As linhas azuis (decrecentes) representam n_+ , enquanto as vermelhas (crescentes) mostram n_- . Para as linhas sólidas (linhas cheias), $\mu = 1$ e $\epsilon = 2$; para as linhas tracejadas, $\mu = 1$ e $\epsilon = 3$; para as linhas ponto-tracejadas, $\mu = 2$ e $\epsilon = 2$.

Para se examinar o estado de polarização dos modos de propagação, reescreve-se inicialmente a Eq. (6.4.18) como

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n. \quad (6.4.20)$$

A seguir, essa relação pode ser implementada na Eq. (6.4.11), a partir da qual a condição $M_{ij}E^j = 0$ fornece¹³ nesse cenário

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sqrt{n^2 - n_1^2}} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \mp i n_3 n - n_1 n_2 \\ \pm i n_2 n - n_1 n_3 \end{pmatrix}. \quad (6.4.21)$$

Considerando o caso particular onde $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, os campos elétricos normalizados da Eq. (6.4.21) simplificam-se em

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4.22)$$

Uma polarização é definida como mão-direita (mão-esquerda) se o vetor de polarização da onda plana rotaciona ao longo de uma circunferência no sentido horário (ou anti-horário) quando o observador vê a onda se aproximando [1, 7]. Portanto, \mathbf{E}_- é interpretado como vetor de polarização circular de mão-esquerda, enquanto \mathbf{E}_+ representa polarização circular de mão-direita. Essas

¹³Vide Apêndice L.

polarizações são associadas com os índices de refração n_- e n_+ da Eq. (6.4.19b), implicando em velocidades de fase diferentes para os modos físicos. Consequentemente, origina-se uma rotação do plano de polarização de uma onda linearmente polarizada, como consequência da birrefringência existente nesse cenário. A birrefringência pode então ser mensurada através do poder rotatório específico [veja a Eq. (2.3.26)], que aqui resulta em

$$\delta = -\frac{\mu V_0}{2}, \quad (6.4.23)$$

a qual é independente da frequência e dependente da componente timelike V_0 do campo de fundo de VL. Esse poder de rotação não-dispersivo é diferente do poder de rotação de um cristal birrefringente típico, que é crescente com a frequência, como indicado pela Eq. (2.3.26) para índices de refração constantes. Dado que os índices de refração da Eq. (6.4.19b) são reais, não há dicroísmo óptico originado por V_0 .

6.4.2 Cenário puramente spacelike

O caso puramente spacelike é caracterizado pelo campo de fundo $V^\mu = (0, \mathbf{V})$. Nesse caso, a Eq. (6.4.12a) resulta em

$$\epsilon(n^2 - \mu\epsilon)^2 - \frac{\mu}{\omega^2} [\mu\epsilon\mathbf{V}^2 - n^2\mathbf{V}^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})^2] = 0. \quad (6.4.24)$$

Implementando $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = n|\mathbf{V}| \cos \theta$, obtém-se

$$(n^2 - \mu\epsilon)^2 - \frac{\mu^2}{\omega^2} |\mathbf{V}|^2 \alpha^2 = 0, \quad (6.4.25)$$

onde se definiu

$$\alpha^2 \equiv 1 - \frac{n^2}{\mu\epsilon} \sin^2 \theta. \quad (6.4.26)$$

Os índices de refração são dados por

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon - \frac{\mu\mathbf{V}^2}{2\epsilon\omega^2} \sin^2 \theta \pm \frac{\mu|\mathbf{V}|}{2\epsilon\omega^2} \sqrt{4\epsilon^2\omega^2 \cos^2 \theta + \mathbf{V}^2 \sin^4 \theta}. \quad (6.4.27)$$

A seguir, serão considerados duas configurações especiais: (i) o caso perpendicular onde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$ e $\sin^2 \theta = 1$; (ii) o caso longitudinal onde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = \pm n|\mathbf{V}|$ e $\sin^2 \theta = 0$. Tais escolhas simplificam o problema e auxiliam no estudo das propriedades de propagação.

6.4.2.1 Caso V-perpendicular

Considerando a configuração perpendicular com $\sin^2 \theta = 1$, as soluções da Eq. (6.4.24) para n^2 de acordo com a Eq. (6.4.27) são dadas por

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon + \frac{\mu\mathbf{V}^2}{2\epsilon\omega^2}(-1 \pm 1), \quad (6.4.28)$$

ou seja,

$$n_+ = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad n_- = \sqrt{\mu\epsilon - \frac{\mu\mathbf{V}^2}{\epsilon\omega^2}}. \quad (6.4.29)$$

Percebe-se que enquanto n_+ é o índice de refração usual da eletrodinâmica de Maxwell em meios, correspondendo a $\alpha_+ = 0$, o índice de refração n_- é associado a $\alpha_- = |\mathbf{V}|/(\epsilon\omega)$, o qual carrega contribuição do campo de fundo. Para $\omega > \omega_-$, tem-se $n_-^2 < 0$ e n_- se torna puramente imaginário. Consequentemente o correspondente modo não se propaga. Assim, define-se a frequência de corte

$$\omega_- = \frac{|\mathbf{V}|}{\epsilon}. \quad (6.4.30)$$

O comportamento geral dos índices de refração é ilustrado na Fig. 6.2, onde os índices de refração (quadrados) são plotados em termos do parâmetro adimensional $\omega/|\mathbf{V}|$.

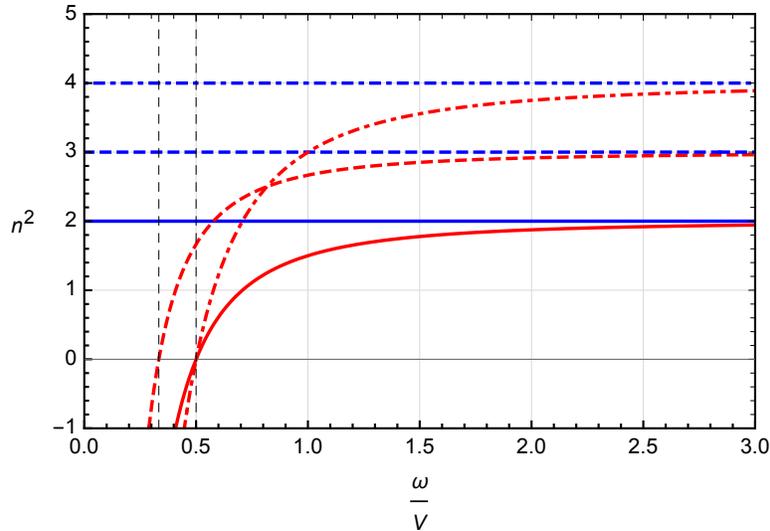


Figura 6.2: Índices de refração $n_{\pm}^2(\omega)$ da Eq. (6.4.28) em termos de ω/V onde $V = |\mathbf{V}|$. Linhas azuis (horizontal) representam n_+^2 , enquanto as linhas vermelhas mostram n_-^2 . Para as linhas cheias, $\mu = 1$ e $\epsilon = 2$; para linhas tracejadas, $\mu = 1$ e $\epsilon = 3$; para linhas ponto-tracejadas, $\mu = 2$ and $\epsilon = 2$.

As linhas horizontais mostram n_+^2 , que é constante para todas as frequências. Para o modo associado a n_-^2 , as linhas verticais tracejadas (localizadas em diferentes valores de $\omega_-/|\mathbf{V}|$) separam a zona de absorção, onde $\omega < \omega_-$, do regime de propagação, onde $\omega > \omega_-$. Além disso, no limite de altas frequências, observa-se que $n_-^2 \mapsto n_+^2 = \mu\epsilon$.

Para se obter os modos de propagação, pode-se escolher um sistema de coordenadas onde $\mathbf{n} = (0, 0, n)$. Assim, uma configuração perpendicular para o campo de fundo será $\mathbf{V} = (V_1, V_2, 0)$. Da Eq. (6.4.25), pode-se escrever

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm \frac{\mu|\mathbf{V}|}{\omega} \alpha. \quad (6.4.31)$$

Implementando essa relação na Eq. (6.4.11) e utilizando $n_+^2 = \mu\epsilon$, $\alpha_+ = 0$, a condição $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{\mathbf{V}}, \quad (6.4.32)$$

onde $\hat{\mathbf{V}}$ é o vetor unitário que aponta na direção de \mathbf{V} . Utilizando agora $n_-^2 = \mu\epsilon - \mu\mathbf{V}^2/(\epsilon\omega^2)$, a condição $M_{ij}E^j = 0$ leva a¹⁴

$$\mathbf{E}_- = E_0^{(-)} \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \\ i(V_1^2 + V_2^2)/(\epsilon\omega) \end{pmatrix} = \tilde{E}_0^{(-)} \left(\hat{\mathbf{V}} \times \hat{\mathbf{n}} + i \frac{|\mathbf{V}|}{\epsilon\omega} \hat{\mathbf{n}} \right), \quad (6.4.33)$$

na qual $E_0^{(-)}$, $\tilde{E}_0^{(-)}$ são amplitudes escolhidas apropriadamente e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário que aponta ao longo da direção de propagação. Note que a componente longitudinal da Eq. (6.4.33) é suprimida pela magnitude da direção privilegiada \mathbf{V} em comparação com a parte transversal¹⁵. Para $V_2 = 0$, o comportamento dos modos de propagação é ainda mais claro:

$$\mathbf{E}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_- = \tilde{E}_0^{(-)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ iV_1/(\epsilon\omega) \end{pmatrix}. \quad (6.4.34)$$

Portanto, os índices de refração da Eq. (6.4.29) são associados a modos linearmente polarizados da Eq. (6.4.34). Embora o vetor \mathbf{E}_- contenha componentes transversal e longitudinal, no que diz respeito às propriedades de polarização, ele é interpretado como um vetor linearmente polarizado e somente sua parte transversal é considerada.

Para se analisar os efeitos de birrefringência gerados neste caso, Considerando o regime de propagação onde $\omega > \omega_-$, observa-se a existência de dois índices de refração distintos, caracterizando modos que se propagam com velocidades de fase distintas. Assim, a diferença de fase entre os

¹⁴Vide Apêndice L.

¹⁵Isso acontece por que a propagação para esse modo ocorre quando $\omega > \omega_-$ com ω_- dado na Eq. (6.4.30). Logo, $|\mathbf{V}| < \epsilon\omega$.

modos de propagação pode ser utilizada para caracterizar a birrefringência [veja a Eq. (2.3.28)]:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (n_+ - n_-), \quad (6.4.35)$$

em que λ_0 é o comprimento de onda eletromagnético no vácuo, e d representa a espessura do meio ou a distância que a onda percorre no mesmo. Utilizando então os índices de refração da Eq. (6.4.29), a diferença de fase por unidade de comprimento será

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right), \quad (6.4.36)$$

que se simplifica em

$$\frac{\Delta}{d} \simeq \frac{\pi \sqrt{\mu\epsilon}}{\lambda_0 \epsilon^2 \omega^2} \mathbf{V}^2, \quad (6.4.37)$$

no limite $\mathbf{V}/\omega \ll 1$. Note que n_- é real para $\omega > \omega_-$ ou $\mathbf{V}/\omega < \epsilon$. Assim, no limite $\mathbf{V}/\omega \ll 1$, a expressão dada na Eq. (6.4.36) continua real, justificando o resultado dado na Eq. (6.4.37). Esses resultados indicam que a birrefringência é controlada pela norma quadrada do campo de fundo \mathbf{V} e depende quadraticamente do inverso da frequência ω . Tais dependências não são observadas no cenário puramente timelike [veja a Eq. (6.4.23) para uma comparação simples], tampouco em dielétricos usuais.

Para $\omega < \omega_-$, n_- se torna complexo, enquanto n_+ permanece real. Assim, a absorção somente ocorre para o modo representando pelo sinal $(-)$. Nesse caso, o coeficiente de absorção, $\gamma = 2\omega \text{Im}[n]$, é dado por

$$\gamma = 2\sqrt{\mu\epsilon}\omega \sqrt{-1 + \frac{|\mathbf{V}|^2}{\epsilon^2 \omega^2}}. \quad (6.4.38)$$

Assim o modo associado à Eq. (6.4.33) é absorvido, enquanto o modo dado na Eq. (6.4.32) se propaga sem atenuação. Portanto, após viajar certa distância no meio, apenas o modo da Eq. (6.4.32) sobreviverá.

6.4.2.2 Caso V-longitudinal

Agora serão consideradas as configurações onde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = \pm n|\mathbf{V}|$, o que implica em $\sin^2 \theta = 0$ e $\alpha^2 = 1$ na Eq. (6.4.25). Isso significa que \mathbf{n} e \mathbf{V} apontam ao longo da mesma direção, ou seja, para $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, escolhe-se $\mathbf{V} = (0, 0, V_3)$. Consequentemente, a Eq. (6.4.27) fornece as seguintes soluções

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu|\mathbf{V}|}{\omega}. \quad (6.4.39)$$

Observa-se imediatamente que $n_+^2 > 0$, o que significa que o modo associado ao índice de refração n_+ se propaga em todo o domínio das frequências. Por outro lado, o modo associado a n_- se propaga apenas para $\omega > \omega_-$, para o qual $n_-^2 > 0$. Aqui ω_- é a frequência de corte dada na Eq. (6.4.30). Essa caracterização é verificada na Fig. 6.3, onde os índices de refração da Eq. (6.4.39) são ilustrados como funções do parâmetro adimensional $\omega/|\mathbf{V}|$. Os modos associados a n_+^2 e n_-^2 exibem dispersão anômala e normal, respectivamente, recuperando o valor usual $n_\pm^2 \mapsto \mu\epsilon$ no regime de altas frequências.

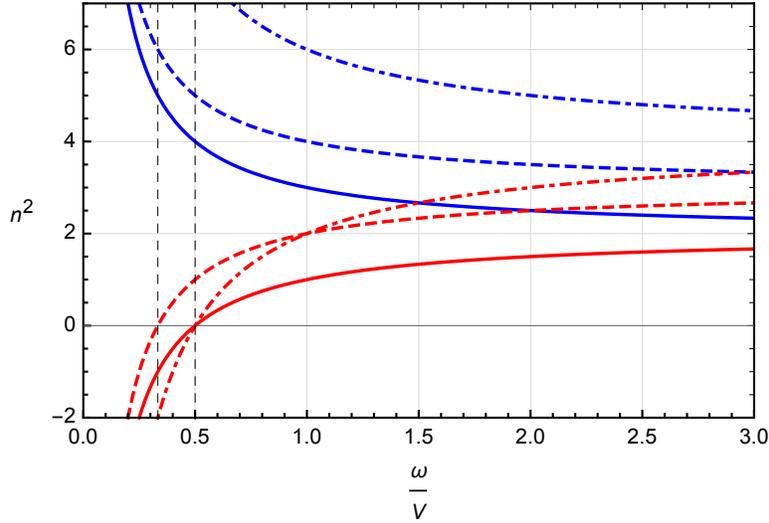


Figura 6.3: Índices de refração $n_\pm^2(\omega)$ da Eq. (6.4.39) em termos de ω/V where $V = |\mathbf{V}|$. As linhas azuis representam n_+^2 , enquanto as vermelhas mostram n_-^2 . Para as linhas cheias, $\mu = 1$ e $\epsilon = 2$; para linhas tracejadas, $\mu = 1$ e $\epsilon = 3$; para linhas ponto-tracejadas, $\mu = 2$ e $\epsilon = 2$. As linhas tracejadas verticais, da esquerda para a direita, são dadas por $\omega_-/V = 1/3$ e $\omega_-/V = 1/2$, respectivamente, com ω_- dado na Eq. (6.4.30).

Para a escolha $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, o campo de fundo longitudinal é escrito na forma $\mathbf{V} = (0, 0, V_3)$. Assim $M_{ij}E^j = 0$ fornece¹⁶

$$\mathbf{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4.40)$$

onde \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- representam, respectivamente, vetores de polarização para modos circularmente polarizados de mão-esquerda e mão-direita. Os dois índices de refração da Eq. (6.4.39) também implicam em birrefringência, que pode ser avaliada através do poder de rotação específico

$$\delta = -\frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{2}\omega \left(\sqrt{1 + \frac{|\mathbf{V}|}{\omega\epsilon}} - \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{V}|}{\omega\epsilon}} \right). \quad (6.4.41)$$

¹⁶Vide Apêndice L.

No limite $|\mathbf{V}|/\omega \ll 1$, n_- permanece real, assim o poder de rotação específico simplifica-se em

$$\delta \simeq -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}|\mathbf{V}|, \quad (6.4.42)$$

indicando birrefringência independente da frequência, resultado similar ao da Eq. (6.4.23).

Por outro lado, para $|\mathbf{V}|/\omega > \epsilon$, n_- se torna puramente imaginário, enquanto n_+ permanece real. Nessa zona de frequência, ambos os modos são absorvidos em graus diferentes. Essa diferença é caracterizada pelo coeficiente de dicroísmo definido na Eq. (2.3.27), o qual fornece nesse caso

$$\delta_d = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{2}\omega\sqrt{-1 + \frac{|\mathbf{V}|}{\omega\epsilon}}. \quad (6.4.43)$$

Com esse último resultado (e os anteriores), concluem-se as análises acerca das propriedades de propagação do modelo de eletrodinâmica modificada por termo *CPT*-ímpar de dimensão 3, descrito na Eq. (6.4.1), num meio material.

6.5 Efeitos do termo *CPT*-ímpar de dimensão 5 na eletrodinâmica de meios materiais

Após analisadas as propriedades da eletrodinâmica modificado por termo *CPT*-ímpar de dimensão 3 (MCFJ) em meio material, o próximo passo de investigação consiste em estudar uma extensão do modelo anterior que envolve derivadas superiores. Tais extensões são descritas pelo MPE não-mínimo da Eq. (6.3.3), que consiste num ferramental teórico para a parametrização das violações de Lorentz e *CPT* numa teoria de campos efetiva. Nenhum sinal de VL no vácuo foi encontrada até o momento. Entretanto, VL pode ser considerada uma propriedade intrínseca de um meio material, assim o MPE é suficiente para se representar certas propriedades materiais dentro de uma configuração de teoria de campos e ainda para se propor novos materiais com propriedades não usuais.

Nesta seção, será abordado o termo *CPT*-ímpar de dimensão 5 ($d = 5$) do MPE não-mínimo dado na Eq. (6.3.3). Assim, o termo a ser considerado é

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu}, \quad (6.5.1)$$

com

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = (k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}. \quad (6.5.2)$$

Implementando a seguinte parametrização,

$$(k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2} = U_\kappa\eta^{\alpha_1\alpha_2}, \quad (6.5.3)$$

com o campo de fundo U^κ e o tensor métrico de Minkowski $\eta^{\alpha_1\alpha_2} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, o termo de derivada superior da Eq. (6.5.1) se torna

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda U_\kappa \square, \quad (6.5.4)$$

onde se introduziu o operador d'Alambertiano $\square = \eta^{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}$. A densidade de Lagrange com o termo de ordem superior (altas derivadas) originada da Eq. (6.3.3) é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta A_\lambda \square F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (6.5.5)$$

o qual envolve a VL parametrizada pelo campo de fundo $U^\kappa = (U_0, \mathbf{U})$.

Para se estudar os efeitos desse termo de altas derivadas na propagação de ondas eletromagnéticas num meio contínuo, implementa-se agora o tensor $G^{\mu\nu}$ no termo cinético da Eq. (6.5.5), tal como na Eq. (2.2.1). Assim, a densidade de Lagrange deste modelo eletrodinâmico novo será

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta A_\lambda \square F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (6.5.6)$$

onde o tensor $G^{\mu\nu}$ é escrito em termos do tensor constitutivo $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$, definido na Eq. (2.2.6). O modelo dado na Eq. (6.5.6) fornece uma generalização da eletrodinâmica da Eq. (6.5.5) em meios materiais.

A densidade de Lagrange da Eq. (6.5.6) envolve uma derivada de terceira ordem no quadri-potencial A_μ , exigindo então uma equação de Euler-Lagrange dotada de derivadas de derivadas de variáveis de campo que são da mesma ordem. Em princípio, a ordem da derivada pode ser reduzida reescrevendo-se a Eq. (6.5.6) na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)\partial^\eta F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (6.5.7)$$

Assim para a densidade de Lagrange da Eq. (6.5.7), é suficiente considerar a equação de Euler-Lagrange envolvendo derivadas de segunda ordem nos campos, ou seja,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)}\right) + \partial_\alpha\partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)}\right) = 0. \quad (6.5.8)$$

Aplicando então essa expressão à Eq. (6.5.7), obtém-se¹⁷

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}U_\beta \square F_{\mu\nu} = J^\kappa. \quad (6.5.9)$$

¹⁷Vide Apêndice M.

Nesse cenário, as leis de Gauss e Ampère modificadas são, respectivamente, dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{D} + 2\Box(\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}) = \rho, \quad (6.5.10a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} + 2\Box U_0 \mathbf{B} - 2\Box(\mathbf{U} \times \mathbf{E}) = \mathbf{J}. \quad (6.5.10b)$$

Essas equações de Maxwell modificadas podem descrever novos efeitos na propagação de ondas eletromagnéticas em meios caracterizados pelo tensor constitutivo $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$. A seguir, as relações de dispersão serão, o comportamento dos índices de refração e os modos de propagação serão obtidos e discutidos. Para isso, as relações constitutivas $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$ serão utilizadas.

Com respeito ao comportamento sob as simetrias discretas, o campo de fundo U^μ na densidade de Lagrange da Eq. (6.5.6) se comporta da mesma forma que V^μ da Eq. (6.4.1), uma vez que os dois termos CPT-ímpares dessas densidades de Lagrange diferem apenas pela presença do operador diferencial de segunda ordem, \Box , que é par sob P e T . De fato, inspecionando os termos VL da Eq. (6.5.6), U^μ , observa-se que os termos envolvendo a componente timelike (U_0) são P -ímpares, C -pares, T -pares e PT -ímpares, enquanto as contribuições contendo o setor espacial, \mathbf{U} , são P -pares, C -pares, T -ímpares e PT -ímpares, como ilustrado na Tabela 3. Isso significa que os termos proporcionais a U_0 e \mathbf{U} atuarão como fonte de atividade óptica do meio considerado para estudo.

Tabela 3: Comportamento dos termos VL da densidade de Lagrange dada na Eq. (6.5.6) sob C , P e T .

	\mathbf{E}	\mathbf{B}	A_0	\mathbf{A}	$U_0(\mathbf{A} \cdot \Box \mathbf{B})$	$A_0(\mathbf{U} \cdot \Box \mathbf{B})$	$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{A} \times \Box \mathbf{E})$
C	-	-	-	-	+	+	+
P	-	+	+	-	-	+	+
T	+	-	+	-	+	-	-

Para se obter as relações de dispersão, segue-se o mesmo procedimento descrito na Seção 2.3 e considerando a Eq. (6.5.10), o que leva a

$$[\mathbf{k}^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \mu \bar{\epsilon}_{ij}(\omega)] E^j = 0, \quad (6.5.11)$$

na qual se definiu o tensor de permissividade efetivo $\bar{\epsilon}_{ij}$:

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} - \frac{2i}{\omega^2} (k^2 - \omega^2) \epsilon_{iaj} (\omega U_a - k_a U_0). \quad (6.5.12)$$

Note que essa quantidade, interpretada também como permissividade elétrica estendida, contém contribuições originadas do termo de altas derivadas. O termo envolvendo $\epsilon_{iaj} \omega U_a$ viola a reversão temporal, enquanto o termo contendo $\epsilon_{iaj} k_a U_0$ quebra a simetria de paridade.

Utilizando agora $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$, a Eq. (6.5.12) pode ser reescrita na forma

$$M_{ij} E^j = 0, \quad (6.5.13a)$$

onde o tensor M_{ij} é dado por

$$M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \mu \bar{\epsilon}_{ij}(\omega), \quad (6.5.13b)$$

e a permissividade efetiva é escrita como

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \delta_{ij} - 2i\omega(n^2 - 1)\epsilon_{iaj}(U_a - n_a U_0). \quad (6.5.13c)$$

É importante perceber que embora o meio tenha permissividade elétrica isotrópica, $\epsilon \delta_{ij}$, os efeitos de anisotropia são gerados pelo campo de fundo U^μ , presente nos elementos off-diagonal de $\bar{\epsilon}_{ij}(\omega)$ na Eq. (6.5.13c).

A matriz M_{ij} na Eq. (6.5.13b) tem a seguinte forma explícita

$$[M_{ij}] = \mathcal{M} + 2i\mu\omega(n^2 - 1)\mathcal{W}, \quad (6.5.14)$$

com \mathcal{M} dado na Eq. (6.4.11b) e

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & U_0 n_3 - U_3 & U_2 - U_0 n_2 \\ U_3 - U_0 n_3 & 0 & U_0 n_1 - U_1 \\ U_0 n_2 - U_2 & U_1 - U_0 n_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5.15)$$

Calculando-se $\det[M_{ij}] = 0$, obtém-se a seguinte equação de dispersão

$$\tilde{\epsilon}(n^2 - \mu\tilde{\epsilon})^2 - 4(n^2 - 1)^2 \mu\omega^2 \left\{ \mu\tilde{\epsilon} [U_0^2 n^2 + \mathbf{U}^2 - 2U_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})] - \mathbf{U}^2 \mathbf{n}^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 \right\} = 0, \quad (6.5.16)$$

com $\tilde{\epsilon}$ dado na Eq. (6.4.12b). Empregando-se o quadrimomento \bar{p}^μ definido na Eq. (6.4.14) e também

$$\bar{U}^\mu \equiv \left(\sqrt{\mu} U^0, \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right), \quad (6.5.17)$$

a equação de dispersão pode ser escrita também na forma¹⁸

$$\bar{p}^4 + 4p^4 \left[\bar{U}^2 \bar{p}^2 - (\bar{U} \cdot \bar{p})^2 \right] = 0. \quad (6.5.18)$$

Lembrando do tensor métrico efetivo da Eq. (6.4.16), pode-se ainda reescrever a equação de dispersão (6.5.18) em termos do quadrimomento usual p^μ e do campo de fundo U^μ :

$$(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p)^2 + 4(p \cdot \eta \cdot p)^2 \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left[(U \cdot \tilde{\eta} \cdot U)(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p) - (U \cdot \tilde{\eta} \cdot p)^2 \right] = 0. \quad (6.5.19)$$

Note que a Eq. (6.5.18) não pode ser escrita somente em termos do quadrimomento efetivo \bar{p}^μ , como ocorre no modelo MCFJ em meios descrito na Eq. (6.4.15). O motivo pelo qual p^μ surge na

¹⁸Vide Apêndice K.

Eq. (6.5.18) consiste nas duas quadriderivadas adicionais que estão contraídas com os coeficientes do termo de dimensão 5 na Eq. (6.5.6). Tais derivadas adicionais advêm da Eq. (6.5.2) e da parametrização adotada na Eq. (6.5.2). A Eq. (6.5.19) também permite dizer que a propagação de ondas eletromagnéticas no meio é governada por duas métricas: a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e a métrica efetiva $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ da Eq. (6.4.16). Assim, o modelo de eletrodinâmica tipo MCFJ modificado pelo termo CPT -ímpar de dimensão 5, definido na Eq. (6.5.7), pode ser chamado de bimétrico nesse sentido. Dessa forma, é notável que a estrutura do modelo modificado por termo de dimensão 5 em meios é muito diferente do modelo MCFJ generalizado para meios da Eq. (6.4.1).

No vácuo, os parâmetros constitutivos são $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma = 0$. Nesse caso, a equação de dispersão na Eq. (6.5.16) se reduz a

$$(n^2 - 1)^2 \left\{ 1 - 4\omega^2 [U_0^2 n^2 - \mathbf{U}^2 n^2 + \mathbf{U}^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 - 2U_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})] \right\} = 0, \quad (6.5.20)$$

que pode ser convenientemente simplificada¹⁹ em

$$p^4 \{ 1 + 4 [p^2 U^2 - (U \cdot p)^2] \} = 0, \quad (6.5.21)$$

com o quadrimomento p^μ e o campo de fundo $U^\mu = (U_0, \mathbf{U})$. A Eq. (6.5.21) recupera a equação de dispersão obtida na Ref. [43], onde esse modelo de eletrodinâmica modificado por altas derivadas foi estudado para o vácuo. É importante apontar que a notável diferença entre a Eq. (6.5.18) e a Eq. (6.5.21) é suscitada pela presença do meio material, pois os termos de altas derivadas, nas densidades de Lagrange (6.5.7) e (6.5.5) são correspondentes.

A seguir, serão investigados dois cenários desse modelo de eletrodinâmica com respeito ao campo de fundo, a saber: cenários i) puramente timelike e ii) puramente spacelike. Além disso, considera-se também meio cuja condutividade ôhmica é nula, $\tilde{\epsilon} \mapsto \epsilon$.

6.5.1 Cenário puramente timelike

O cenário puramente timelike é definido considerando $U_0 \neq 0$ e $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Nesse caso, a Eq. (6.5.16) se reduz a

$$\epsilon(n^2 - \mu\epsilon)^2 - 4\mu^2\omega^2 U_0^2 \epsilon n^2 (n^2 - 1)^2 = 0, \quad (6.5.22a)$$

que implica em

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm 2\mu\epsilon\omega U_0 n (n^2 - 1), \quad (6.5.22b)$$

ou equivalentemente

$$\pm 2\mu\omega U_0 n^3 - n^2 \mp 2\mu\omega U_0 n + \mu\epsilon = 0. \quad (6.5.22c)$$

¹⁹Vide Apêndice J.

Tal equação cúbica em n possui 3 soluções complexas no geral, dadas como funções $n = n(\omega)$. Essas soluções se estendem a domínios de frequências definidos de acordo com o sinal do discriminante da equação cúbica que, para a Eq. (6.5.22c), é dado por

$$\Delta = \frac{S}{2^4 3^3 \mu^3 \omega^4 U_0^4}, \quad (6.5.22d)$$

com

$$S = -\epsilon - \mu\omega^2 U_0^2 [1 + 9\mu\epsilon(2 - 3\mu\epsilon) + 16\mu^2\omega^2 U_0^2]. \quad (6.5.22e)$$

Para uma equação cúbica, o sinal de Δ auxilia na identificação da natureza (real ou complexa) das três soluções, de acordo com a Tabela 4.

Tabela 4: Sinal do discriminante Δ da Eq. (6.5.22d) e a natureza das raízes (soluções) da Eq. (6.5.22c).

Sinal	Soluções
$\Delta > 0$	uma raíz real e duas raízes complexas conjugadas
$\Delta \leq 0$	três raízes reais (com duas ou todas as três iguais se $\Delta = 0$)

Uma vez que o denominador da Eq. (6.5.22d) é positivo, é necessário analisar somente o sinal do numerador, S . Note que S é uma função de quarto grau em ω , assim é possível encontrar duas raízes que fornecem os intervalos de frequências para valores positivos e negativos de Δ . Dessa forma, a relação $S = 0$ estabelece os valores críticos (raízes) que separam os domínios de absorção (com $S > 0$) e propagação (com $S < 0$). Resolvendo $S = 0$, encontram-se as duas soluções para ω^2 , a saber:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{32\mu^2 U_0^2} \left[9\mu\epsilon(3\mu\epsilon - 2) - 1 \pm \sqrt{\mu\epsilon - 1} (9\mu\epsilon - 1)^{3/2} \right]. \quad (6.5.23)$$

Consequentemente, os três intervalos de frequência associados aos dois cenários distintos (propagação e absorção) são descritos da seguinte forma:

- i) Para $\omega_- < \omega < \omega_+$, tem-se $S > 0$ e $\Delta > 0$, então a Eq. (6.5.22c) fornece uma função real $n(\omega)$ e duas funções complexas conjugadas $n(\omega)$.
- ii) Para $\omega < \omega_-$ ou $\omega > \omega_+$, obtém-se $S < 0$ e $\Delta < 0$, assim existem três índices de refração reais $n(\omega)$.

O primeiro domínio descreve efeitos de absorção, enquanto, no segundo, ondas eletromagnéticas podem se propagar sem sofrer atenuação. O sinal de S determina a natureza real ou complexa de $n(\omega)$ no correspondente intervalo de frequência. Para um índice de refração complexo, pode-se escrever $n(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$, onde $\text{Re}[n(\omega)] = n'(\omega)$ é o índice de refração do meio, e $\text{Im}[n(\omega)] = n''(\omega)$ é associado ao coeficiente de absorção do meio $\gamma = 2\omega n''(\omega)$ [7].

Agrupando os cenários descritos acima, conclui-se que:

- a) Para $\omega < \omega_-$, existem três soluções reais.
- b) Para $\omega_- < \omega < \omega_+$, duas soluções se tornam complexas, enquanto a terceira permanece real.
- c) Para $\omega > \omega_+$, as três soluções se tornam reais novamente.

No geral, propagação sem atenuação é associada à parte real do índice de refração, enquanto os efeitos de absorção são relacionados com a parte imaginária do índice de refração, que geralmente pode ser complexo. Assim, observa-se que a eletrodinâmica modificada dada pela Eq. (6.5.6) atribui um comportamento condutor a um substrato dielétrico. Para o cenário timelike, ondas eletromagnéticas se propagam no meio sem atenuação no intervalo de frequências onde as três soluções são reais. No intervalo onde soluções complexas para $n(\omega)$ ocorrem, propagação e absorção são observadas. Esses efeitos novos e não-usuais são originados pela componente U_0 do campo de fundo acoplado aos campos eletromagnéticos.

Os índices de refração para um meio material com propagação descrita pela Eq. (6.5.22c) são dados por expressões muito complicadas [raízes da Eq. (6.5.22c)], as quais não serão mostradas aqui. Em vez disso, essas três funções, $n_i(\omega)$ para $i = 1, 2, 3$ serão ilustradas graficamente em termos do parâmetro adimensional ωU_0 . Para isso, escolhem-se os valores $\epsilon = 2$ e $\mu = 1$. Esses plots são apresentados nas Figs. 6.4, 6.5 e 6.6, onde as linhas cheias representam a parte real de $n_i(\omega)$, enquanto as pontilhadas indicam a parte imaginária de $n_i(\omega)$.

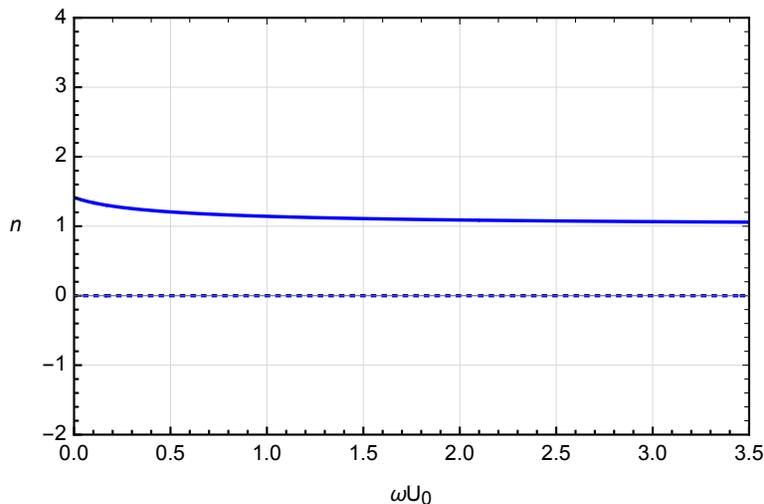


Figura 6.4: Plot de uma raiz real da Eq. (6.5.22c), o índice de refração $n_1(\omega)$, em termos de ωU_0 . Ele é obtido escolhendo-se os sinais inferiores da Eq. (6.5.22c). A linha cheia representa $Re[n_1(\omega)]$, enquanto a linha pontilhada mostra $Im[n_1(\omega)]$, que é nula neste caso.

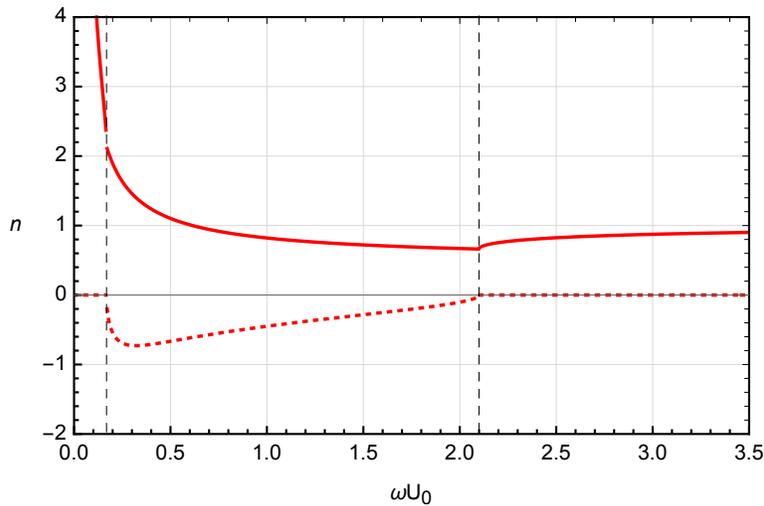


Figura 6.5: Plot de uma raiz complexa da Eq. (6.5.22c), o índice de refração $n_2(\omega)$, em termos de ωU_0 . Tal índice provém da Eq. (6.5.22c) com os sinais superiores sendo considerados. A linha cheia representa $\text{Re}[n_2(\omega)]$, enquanto a linha pontilhada ilustra $\text{Im}[n_2(\omega)]$.

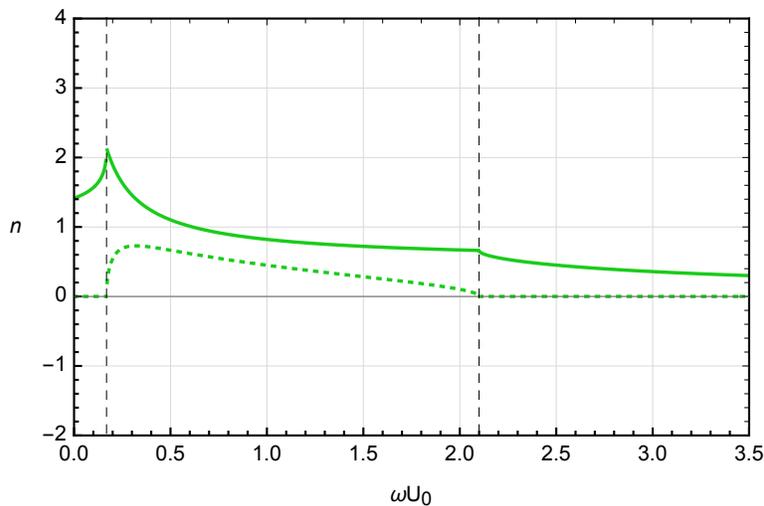


Figura 6.6: Plot de uma raiz complexa da Eq. (6.5.22c), o índice de refração $n_3(\omega)$, em termos de ωU_0 . Ele resulta da Eq. (6.5.22c) com os sinais superiores levados em conta. A linha cheia representa $\text{Re}[n_3(\omega)]$, enquanto a linha pontilhada indica $\text{Im}[n_3(\omega)]$.

Os índices de refração, mostrados nas Figs. 6.4, 6.5 e 6.6, são caracterizados por partes reais positivas. Os três índices de refração restantes, que seguem da equação polinomial de sexto grau dada na Eq. (6.5.22a), possuem partes reais negativas.

Note que $n_1(\omega)$ é sempre real para todo o domínio de frequências. As funções $n_2(\omega)$ e $n_3(\omega)$ se tornam complexas no intervalo $\omega_- < \omega < \omega_+$, o que está de acordo com a análise feita previamente nos itens *a)*, *b)*, *c)*. Combinando todos os três plots na Fig. 6.7, pode-se observar o cenário completo descrito nos itens anteriores.

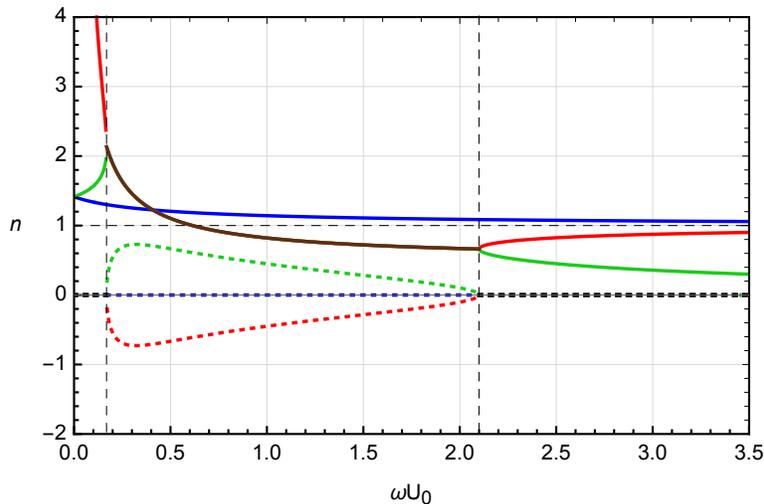


Figura 6.7: Compilação dos índices de refração complexos $n(\omega)$ das Figs. 6.4, 6.5 e 6.6. As linhas cheias ilustram as partes reais de $n_1(\omega)$ (azul), $n_2(\omega)$ (vermelho) e $n_3(\omega)$ (verde). Suas correspondentes partes imaginárias são representadas pelas linhas pontilhadas com a mesma cor da parte real. As linha cheia e marrom indica que $\text{Re}[n_2(\omega)]$ e $\text{Re}[n_3(\omega)]$ estão sobrepostas. As linhas pontilhadas (pretas) são utilizadas sempre que todas as três partes imaginárias ficam sobrepostas.

As linhas tracejadas verticais indicam os valores críticos de frequência da Eq. (6.5.23), ou seja, $\omega_- U_0$ e $\omega_+ U_0$, os quais definem a transição entre os regimes dados nos itens (a) – (c). Outra característica das Figs. 6.5 e 6.6 é a presença de discontinuidades nas partes reais de $n_2(\omega)$ e $n_3(\omega)$, nos valores de frequências ω_{\pm} . Note que isso ocorre por que $n_2(\omega)$ e $n_3(\omega)$ se tornam puramente imaginários para esses valores de frequências.

É importante mencionar ainda que o comportamento físico descrito nesse cenário ocorre somente para eletrodinâmica modificada por derivadas superiores da Eq. (6.5.6) num meio material. De fato, no vácuo, a Eq. (6.5.22a) fornece

$$(n^2 - 1)^2(1 - 4\omega^2 U_0^2 n^2) = 0, \quad (6.5.24)$$

cujas soluções são reais e dadas por:

$$n = 1, \quad n = \frac{1}{2\omega|U_0|}, \quad (6.5.25)$$

o que mostra ausência de efeitos de absorção no vácuo (para esse modelo de dimensão 5). Esse comportamento pode ainda ser obtido diretamente da Eq. (6.5.23), uma vez que $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 0$, para $\mu = \epsilon = 1$. Isso corresponde ao desaparecimento da janela de frequências onde absorção ocorre.

Além disso, o segundo índice de refração da Eq. (6.5.25) não tem um limite bem definido para $U_0 \mapsto 0$. No vácuo, tais modos são chamados de espúrios e suas ocorrências são típicas de teorias com altas derivadas (veja, por exemplo, as Refs. [42, 43, 136] para investigações detalhadas no setor eletromagnético do MPE-nm). Entretanto, um U_0 finito em meios macroscópicos pode ser realizável. Assim, o segundo índice de refração não é necessariamente suprimido em meios materiais e deve ser considerado em pé de igualdade com os outros modos presentes na teoria.

6.5.1.1 Modos de propagação

Para se examinar os modos de propagação para o cenário puramente timelike, implementa-se a Eq. (6.5.22b) na matriz da Eq. (6.5.14), o que fornece

$$[M_{ij}] = - \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} + 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) \begin{pmatrix} \pm n & in_3 & -in_2 \\ -in_3 & \pm n & in_1 \\ in_2 & -in_1 & \pm n \end{pmatrix}. \quad (6.5.26)$$

Resolvendo $M_{ij}E^j = 0$, obtém-se

$$E_y = \frac{\pm in_3 n - n_1 n_2}{n^2 - n_1^2} E_x, \quad (6.5.27a)$$

$$E_z = \frac{\mp in_2 n - n_1 n_3}{n^2 - n_1^2} E_x, \quad (6.5.27b)$$

o que permite escrever os campos elétricos normalizados \mathbf{E}_\pm como²⁰

$$\mathbf{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}n\sqrt{n^2 - n_1^2}} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \pm in_3 n - n_1 n_2 \\ \mp in_2 n - n_1 n_3 \end{pmatrix}. \quad (6.5.28)$$

A expressão (6.5.28) coincide exatamente com a Eq. (6.4.21) com os subscritos trocados. Assim, para a configuração timelike, os campos elétricos dos modelos MCFJ e do modelo tipo MCFJ modificado por termo de dimensão 5 são os mesmos, embora os índices de refração dessas teorias sejam diferentes. Note ainda que \mathbf{E}_\pm das Eqs. (6.5.28) e (6.4.21) não dependem de U_0 e V_0 , respectivamente.

O índice de refração ilustrado na Fig. 6.4 é associado ao campo elétrico \mathbf{E}_- da Eq. (6.5.28), enquanto os índices de refração das Figs. 6.5 e 6.6 são relacionados a \mathbf{E}_+ . Isso pode ser verificado através do software *Mathematica* por meio do seguinte teste: 1) escrever os campos \mathbf{E}_\pm e a matriz $[M_{ij}]$ no caso timelike; 2) fazer as multiplicações ($[M_{ij}]\mathbf{E}_+$) e ($[M_{ij}]\mathbf{E}_-$); 3) depois utilizar um conjunto de parâmetros numéricos para $\mu, \epsilon, \omega U_0, n_2, n_3$ para que as expressões ($[M_{ij}]\mathbf{E}_+$) e ($[M_{ij}]\mathbf{E}_-$) possam ser simplificadas; 4) escrever $n_1 = \sqrt{n^2 - n_2^2 - n_3^2}$. Assim, as expressões ($[M_{ij}]\mathbf{E}_+$) e ($[M_{ij}]\mathbf{E}_-$) ficam dependentes apenas de n^2 ; 5) substituir cada n^2 que é solução da Eq. (6.5.22c) ou em ($[M_{ij}]\mathbf{E}_+$) ou em ($[M_{ij}]\mathbf{E}_-$) e verificar se, após tal substituição, as expressões resultam iguais a zero, satisfazendo a condição $M_{ij}E^j = 0$. Por exemplo, realizando esse procedimento, observa-se que ao se implementar n^2 com $n(\omega)$ descrito pela Fig. 6.4 em $[M_{ij}]\mathbf{E}_-$, obtém-se $M_{ij}E^j = 0$, porém ao implementá-lo em $[M_{ij}]\mathbf{E}_+$, tem-se $M_{ij}E^j \neq 0$. Logo, conclui-se que n da Fig. 6.4 é associado ao campo elétrico \mathbf{E}_- .

Para se ter uma interpretação física mais clara desses modos de propagação, pode-se escolher

²⁰Vide Apêndice N.

um sistema de coordenadas onde $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, levando a campos elétricos dados por

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5.29)$$

os quais representam, respectivamente, vetores de polarização circular de mão esquerda e direita, típicos de meios com atividade óptica. Tal atividade óptica pode ser expressa em termos do poder de rotação da Eq. (2.3.26), se os índices de refração são conhecidos.

6.5.2 Cenário puramente spacelike

Agora será considerado o cenário em que o campo de fundo U^{μ} contém apenas o setor espacial não-nulo, ou seja, $U_0 = 0$ e $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$. Nesse caso, a Eq. (6.5.16) simplifica-se em

$$\epsilon(n^2 - \mu\epsilon)^2 - 4(n^2 - 1)^2\mu\omega^2 \left[(\mu\epsilon - n^2)\mathbf{U}^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 \right] = 0. \quad (6.5.30)$$

Implementando $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = n|\mathbf{U}| \cos \theta$ na Eq. (6.5.30), obtém-se

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm 2\mu\omega(n^2 - 1)\alpha|\mathbf{U}|, \quad (6.5.31)$$

onde se definiu

$$\alpha^2 = 1 - \frac{n^2}{\mu\epsilon} \sin^2 \theta. \quad (6.5.32)$$

Com essa parametrização, pode-se analisar dois casos especiais: (i) configuração perpendicular onde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$ e $\sin^2 \theta = 1$; (ii) configuração longitudinal com $\sin^2 \theta = 0$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = \pm n|\mathbf{U}|$ onde o sinal positivo (negativo) representa \mathbf{n} paralelo (anti-paralelo) a \mathbf{U} . Essas escolhas permitem um estudo mais claro sobre o comportamento da propagação de ondas eletromagnéticas.

6.5.2.1 Caso U-perpendicular

Para a configuração perpendicular, isto é, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$, tem-se $\sin^2 \theta = 1$ e a Eq. (6.5.31) se torna

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm 2\mu\omega(n^2 - 1)|\mathbf{U}| \sqrt{1 - \frac{n^2}{\mu\epsilon}}, \quad (6.5.33)$$

que pode ser reescrita como

$$(n^2 - \mu\epsilon) \left[4\mu^2\mathbf{U}^2(n^2 - 1)^2 + \mu\epsilon(n^2 - \mu\epsilon) \right] = 0, \quad (6.5.34)$$

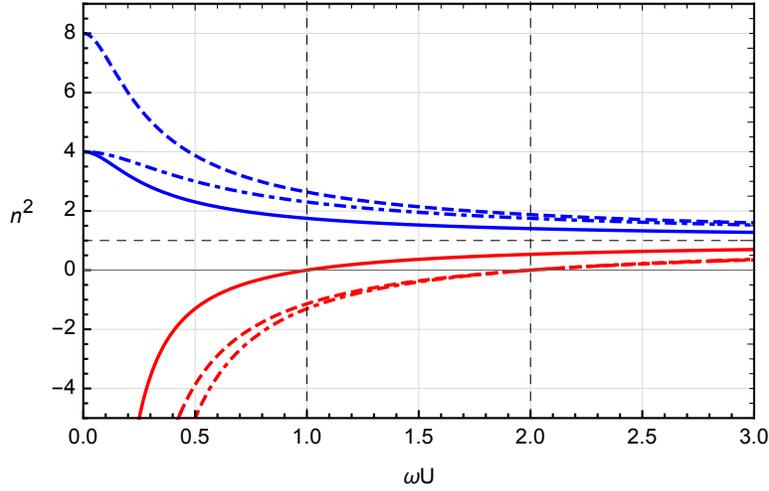


Figura 6.8: Comportamento dos índices de refração n_{\pm}^2 da Eq. (6.5.36) em termos de ωU onde $U = |\mathbf{U}|$. As linhas azuis (acima da linha tracejada horizontal) representam n_{+}^2 , enquanto as linhas vermelhas (abaixo da linha tracejada horizontal) ilustram n_{-}^2 . Para linhas cheias, $\mu = 2$ e $\epsilon = 2$; para linhas tracejadas, $\mu = 2$ e $\epsilon = 4$; para linhas ponto-tracejadas, $\mu = 1$ e $\epsilon = 2$. As linhas verticais tracejadas (cinza) indicam, respectivamente, $\omega_{-}U = 1$ e $\omega_{-}U = 2$, onde ω_{-} é dado pela Eq. (6.5.37).

a qual implica em $n^2 = \mu\epsilon$ e também

$$4\mu^2\omega^2\mathbf{U}^2n^4 + (\mu\epsilon - 8\mu^2\omega^2\mathbf{U}^2)n^2 - \mu^2\epsilon^2 + 4\mu^2\omega^2\mathbf{U}^2 = 0. \quad (6.5.35)$$

A primeira solução, $n^2 = \mu\epsilon$, corresponde ao índice de refração usual obtida na eletrodinâmica de Maxwell em meios materiais, o qual será denotado por $n_0 = \sqrt{\mu\epsilon}$. Por outro lado, a Eq. (6.5.35) carrega informação oriunda do termo de altas derivadas da Eq. (6.5.4) e do campo de fundo \mathbf{U} . Assim, a Eq. (6.5.35) fornece as seguintes soluções:

$$n_{\pm}^2 = 1 + f_{\pm}, \quad (6.5.36a)$$

onde

$$f_{\pm} = \frac{\epsilon}{8\mu\omega^2\mathbf{U}^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \Upsilon} \right), \quad (6.5.36b)$$

$$\Upsilon = 16\mu^2\omega^2\mathbf{U}^2 \left(1 - \frac{1}{\mu\epsilon} \right). \quad (6.5.36c)$$

O comportamto de n_{\pm}^2 em termos do parâmetro adimensional $\omega|\mathbf{U}|$ é ilustrado na Fig. 6.8. Nota-se que n_{+} é real em todo o domínio de frequência e exhibe dispersão anômala. Além disso, a função n_{-}^2 possui uma raiz ω_{-} dada por

$$\omega_{-} = \frac{\epsilon}{2|\mathbf{U}|}, \quad (6.5.37)$$

Tal expressão indica o valor crítico abaixo do qual n_{-} se torna puramente imaginário, cessando a

propagação eletromagnética. Acima de ω_- , o índice de refração n_- se torna real e, conseqüentemente, ondas eletromagnéticas podem se propagar nesse regime.

A primeira linha vertical tracejada na Fig. 6.8, localizado no valor $\omega_-|\mathbf{U}| = 1$, separa as zonas de absorção e propagação para o modo representado pela linha cheia vermelha. A segunda linha vertical, em $\omega_-|\mathbf{U}| = 2$, separa essas zonas para o modo ilustrado pelas linhas vermelhas tracejadas e ponto-tracejadas. No geral, observa-se que:

- Para $0 < \omega < \omega_-$: o índice de refração n_+ é real e n_- é puramente imaginário. Assim, somente o modo associado a n_+ se propaga.
- Para $\omega > \omega_-$: tem-se $n_{\pm}^2 > 0$ e ambos os modos se propagam.
- No limite de frequências muito baixas, $\omega|\mathbf{U}| \mapsto 0$, vale $n_+ = \sqrt{\mu\epsilon}$, recuperando o índice de refração de um meio simples na eletrodinâmica usual.
- No limite de altas frequências, $\omega|\mathbf{U}| \mapsto \infty$, o comportamento dos índices de refração é dado por

$$n_{\pm} = 1 \pm \frac{1}{4\omega|\mathbf{U}|} \sqrt{\epsilon \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right)}. \quad (6.5.38)$$

Note ainda que para frequências muito altas, $n_{\pm} \mapsto 1$, o que é diferente do comportamento dos índices de refração da Eq. (6.4.29) do modelo MCFJ em meios materiais, que, para esse mesmo limite, levam a $n_{\pm} \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}$. Assim a repercussão de uma permissividade e permeabilidade não-triviais é suprimida no âmbito da teoria tipo MCFJ modificada por altas derivadas, descrita pela Eq. (6.5.6).

Em relação aos modos de propagação, a Eq. (6.5.32) produz

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{n_{\pm}^2}{\mu\epsilon}} = \sqrt{1 - \frac{1 + f_{\pm}}{\mu\epsilon}}, \quad (6.5.39)$$

indicando diferentes valores de α para os diferentes índices de refração n_{\pm} da Eq. (6.5.36). Escolhendo $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, pode-se escrever $\mathbf{U} = (U_1, U_2, 0)$, de forma que a relação $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$ continue válida. Dessa forma, os modos de propagação obtidos tem a seguinte forma²¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm} &= E'_0 \begin{pmatrix} U_2 \\ -U_1 \\ -2i\omega f_{\pm}(U_1^2 + U_2^2)/\epsilon \end{pmatrix} \\ &= \tilde{E}'_0 \left(\hat{\mathbf{U}} \times \hat{\mathbf{n}} - 2i\omega f_{\pm} \frac{|\mathbf{U}|}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \right), \end{aligned} \quad (6.5.40)$$

com f_{\pm} dado pela Eq. (6.5.36b).

²¹Vide Apêndice N.

Comparando agora a Eq. (6.5.40) com a Eq. (6.4.33) obtida para o modelo MCFJ em meios, algumas similaridades intrigantes podem ser observadas. A interpretação adotada [48] é que o modo único da Eq. (6.4.33) se divide nos dois modos da Eq. (6.5.40) como consequência da natureza de altas derivadas da teoria dada na Eq. (6.5.6).

Para se entender um pouco melhor esses modos, realiza-se uma expansão em série de Taylor para $\mathbf{U} \mapsto \mathbf{0}$ em f_{\pm} da Eq. (6.5.36b). Assim, tem-se

$$f_+ \simeq \mu\epsilon - 1, \quad f_- \simeq -\frac{\epsilon}{4\mu\omega^2\mathbf{U}^2} + 1 - \mu\epsilon, \quad (6.5.41)$$

os quais permitem escrever

$$n_+ \mapsto \sqrt{\mu\epsilon}, \quad n_- \mapsto \sqrt{2 - \frac{\epsilon}{4\mu\omega^2\mathbf{U}^2} - \mu\epsilon}. \quad (6.5.42)$$

Como consequência, o modo descrito por \mathbf{E}_+ tem um comportamento bem definido no limite $\mathbf{U} \mapsto \mathbf{0}$, enquanto o segundo modo, associado a \mathbf{E}_- , não o tem²². Tal como ocorreu no cenário puramente timelike, existe também no cenário spacelike um modo cuja contra-parte no vácuo seria denotado como espúrio. Todavia, essa situação é contornada em meios materiais, pois $|\mathbf{U}|$ pode ter um valor finito. Assim, tal modo deve ser interpretado como modo propagante regular.

Agora, discute-se a primeira solução $n_0 = \sqrt{\mu\epsilon}$ da Eq. (6.5.34). Nesse caso, a Eq. (6.5.32) provém $\alpha = 0$. Logo, $M_{ij}E^j = 0$ fornece²³

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{U}}. \quad (6.5.43)$$

Tal expressão indica um campo elétrico linearmente polarizado e perpendicular à direção de propagação, relacionado ao índice de refração $n_0 = \sqrt{\mu\epsilon}$. Além disso, tem-se $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_{\pm}^* = 0$, com \mathbf{E}_{\pm} dado na Eq. (6.5.40). O modo da Eq. (6.5.43) é equivalente àquele da Eq. (6.4.32) obtido para a teoria MCFJ em meios macroscópicos. Assim, esse modo em particular não sofre alteração devido à presença de derivadas adicionais no operador de campo tipo CJF da Eq. (6.5.4).

Além disso, mesmo no limite $\mathbf{U} \mapsto \mathbf{0}$, os campos elétricos \mathbf{E}_0 e \mathbf{E}_{\pm} ainda são governados pela direção de \mathbf{U} . Assim, as componentes de \mathbf{U} atuam também como parâmetros do plano ortogonal à direção de propagação.

O número de modos físicos na teoria tipo MCFJ definida pela Eq. (6.5.6) é igual a três. Dois deles se aproximam do comportamento de um meio isotrópico usual no limite $\mathbf{U} \mapsto \mathbf{0}$. Tais modos são aqueles associados a n_+ da Eq. (6.5.42) e a $n_0 = \sqrt{\mu\epsilon}$ da Eq. (6.5.34). Note que possuir três modos de propagação não implicam numa quebra da invariância de gauge da teoria definida na Eq. (6.5.6). Isso por que o operador da Eq. (6.5.4) é claramente invariante de gauge²⁴. O terceiro

²²É ainda evidente que n_- se torna puramente imaginário nesse regime.

²³Vide Apêndice N.

²⁴Vide Apêndice O.

modo ocorre devido a presença do operador d'Alambertiano na Eq. (6.5.4), aumentando o grau polinomial da equação de dispersão. No vácuo, o terceiro modo pode ser denotado como espúrio, mas esse termo técnico não é bem aplicado no contexto de meios macroscópicos, onde \mathbf{U} pode assumir valores finitos realizáveis.

Como os modos associados não são circularmente polarizados, a birrefringência para esse caso é caracterizada em termos da diferença de fase por unidade de comprimento, definido na Eq. (2.3.28). Assim, introduz-se

$$\frac{\Delta_{a,b}}{d} \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_a - n_b), \quad (6.5.44)$$

onde $a, b \in \{0, +, -\}$. Uma vez que existem três modos de propagação para $\omega > \omega_-$, pode-se definir as seguintes diferenças de fase adquiridas depois da ocorrência de propagação por uma distância d :

$$\frac{\Delta_{\pm,0}}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[\sqrt{1 + f_{\pm}} - \sqrt{\mu\epsilon} \right], \quad (6.5.45a)$$

$$\frac{\Delta_{+,-}}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[\sqrt{1 + f_+} - \sqrt{1 + f_-} \right], \quad (6.5.45b)$$

os quais são válidos no intervalo de frequências onde n_- é real, isto é, $\omega|\mathbf{U}| > \epsilon/2$. No limite de altas frequências, $(\omega|\mathbf{U}|)^{-1} \ll 1$, a Eq. (6.5.45) fornece

$$\frac{\Delta_{\pm,0}}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 - \sqrt{\mu\epsilon}) \pm \frac{\Delta}{2d}, \quad (6.5.46a)$$

$$\frac{\Delta_{+,-}}{d} = \frac{\Delta}{d}, \quad (6.5.46b)$$

com

$$\frac{\Delta}{d} \equiv \frac{\pi}{\lambda_0 \omega |\mathbf{U}|} \sqrt{\epsilon \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right)}. \quad (6.5.46c)$$

Comparando os modos indicados pelo subscrito (\pm) com o modo padrão (com subscrito “0”), nota-se que existe uma contribuição de ordem zero, que envolve somente a permissividade e permeabilidade do meio.

Para $\omega < \omega_-$ (ou $\omega|\mathbf{U}| < \epsilon/2$), n_- é puramente imaginário. Então, a partir da Eq. (6.5.36), n_- é reescrito como

$$n_- = i\sqrt{-1 - f_-}. \quad (6.5.47)$$

Como $\text{Im}[n_+] = 0$ para todo o domínio de frequências, somente o modo associado a n_- sofre

atenuação, que é quantificada pelo coeficiente de absorção $\gamma = 2\omega\text{Im}[n_-]$, ou seja,

$$\gamma = 2\omega\sqrt{\frac{\epsilon}{8\mu\omega^2\mathbf{U}^2}\left(1 + \sqrt{1 + \Upsilon}\right)} - 1, \quad (6.5.48)$$

com Υ dado na Eq. (6.5.36c). No limite de baixas frequências, $\omega \ll 1$, Eq. (6.5.48) pode ser expandida como

$$\gamma \simeq \frac{1}{|\mathbf{U}|}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[1 + 2\left(1 - \frac{2}{\mu\epsilon}\right)\omega^2\mu^2|\mathbf{U}|^2\right]. \quad (6.5.49)$$

É importante mencionar que o coeficiente de absorção da Eq. (6.5.49) é calculado no limite $\omega|\mathbf{U}| \ll 1$, enquanto a diferença de fase na Eq. (6.5.46) é determinada no limite oposto ($\omega|\mathbf{U}|)^{-1} \ll 1$. Isso acontece por que atenuação ocorre para n_- puramente imaginário e birrefringência surge quando n_- é real. A condição $\omega|\mathbf{U}| = \epsilon/2$ estabelece uma frequência de corte que separa os dois domínios de frequências para a ocorrência de cada efeito.

6.5.2.2 Caso U-longitudinal

Considerando as configurações longitudinais, ou seja, \mathbf{n} e \mathbf{U} são paralelos ou antiparalelos, tem-se $\sin^2\theta = 0$. Assim a Eq. (6.5.30) resulta em

$$(1 - 4\mu^2\omega^2\mathbf{U}^2)n^4 - 2(\mu\epsilon - 4\mu^2\omega^2\mathbf{U}^2)n^2 + \mu^2\epsilon^2 - 4\mu^2\omega^2 = 0, \quad (6.5.50)$$

cujas soluções para n^2 são

$$n_{\pm}^2 = \frac{\mu(\epsilon \pm 2\omega|\mathbf{U}|)}{1 \pm 2\mu\omega|\mathbf{U}|}. \quad (6.5.51)$$

O comportamento de n_{\pm}^2 em termos do parâmetro adimensional $\omega|\mathbf{U}|$ é ilustrado na Fig. 6.9, considerando alguns valores numéricos para os parâmetros.

Nesse cenário, o modo associado a n_+ exibe dispersão anômala e se propaga para todo o domínio de frequência, uma vez que $n_+^2 > 0$.

O modo associado a n_-^2 possui dois ramos. No ramo superior, definido no intervalo de frequência $0 < \omega < \omega_0$, o modo se propaga, com n_-^2 crescendo rapidamente com ω . Aqui

$$\omega_0 = \frac{1}{2\mu|\mathbf{U}|}, \quad (6.5.52)$$

é o valor de frequência para o qual n_-^2 diverge. Na Fig. 6.9, a primeira linha tracejada vertical, dada por $\omega_0|\mathbf{U}| = 1/4$, é assintótica às curvas vermelhas cheia e tracejada, onde as funções associadas possuem singularidades nesse ponto e mudam seus sinais. A segunda linha tracejada vertical ocorre em $\omega_0|\mathbf{U}| = 1/2$ e é assintótica aos ramos superior e inferior da curva vermelha ponto-tracejada.

Quando $\omega > \omega_0$, tem-se $n_-^2 < 0$ cujo ramo inferior se torna um índice de refração puramente

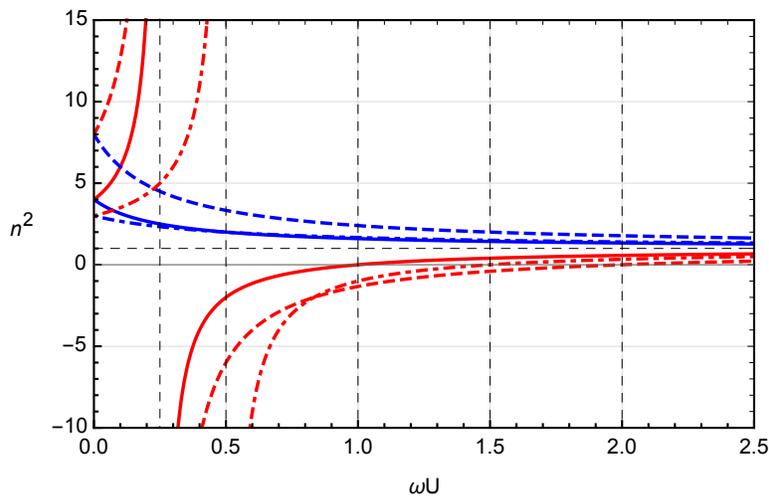


Figura 6.9: Plot de n_{\pm}^2 da Eq. (6.5.51) em termos de ωU com $U = |\mathbf{U}|$. As linhas azuis, que são positivas e decrescentes para todo intervalo de frequência, representam n_{+}^2 . As curvas vermelhas, constituídas por ramos superiores e inferiores, ilustram n_{-}^2 . Para as linhas cheias, $\mu = 2$ e $\epsilon = 2$; para linhas tracejadas, $\mu = 2$ e $\epsilon = 4$; para linhas ponto-tracejadas, $\mu = 1$ e $\epsilon = 3$. As linhas verticais tracejadas (em cinza) indicam os valores de $\omega U \in \{1/4, 1/2, 1, 3/2, 2\}$.

imaginário, representando um modo não propagante. Esse comportamento ocorre no intervalo $\omega_0 < \omega < \omega_-$, com

$$\omega_- = \frac{\epsilon}{2|\mathbf{U}|}, \quad (6.5.53)$$

o qual representa a raiz da Eq. (6.5.51). A Eq. (6.5.54) estabelece uma frequência de corte acima da qual o modo associado a n_- se propaga. A terceira e a quarta linhas verticais, dadas por $\omega_-|\mathbf{U}| = 1$ e $\omega_-|\mathbf{U}| = 1.5$, indicam o início do regime de propagação para linha cheia vermelha e linha tracejada vermelha, respectivamente.

Analisando agora os modos de propagação, observa-se que $\alpha = 1$ para a configuração longitudinal. Então, escolhendo um sistema de coordenadas onde $\mathbf{n} = (0, 0, n)$ e $\mathbf{U} = (0, 0, U_3)$, os campos elétricos normalizados são²⁵

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5.54)$$

que representam ondas circularmente polarizadas de mão direita e esquerda, respectivamente. Assim, quando \mathbf{U} e \mathbf{n} apontam na mesma direção, os modos se tornam transversos, de forma que suas polarizações são perpendiculares a \mathbf{n} .

Para se analisar os efeitos de birrefringência, pode-se calcular o poder de rotação implementando

²⁵Vide Apêndice N.

a Eq. (6.5.51) na Eq. (2.3.26), o que resulta em

$$\delta = -\frac{\mu\epsilon}{2}\omega \left[\frac{g_+}{\sqrt{1+2\mu\omega|\mathbf{U}|}} - \frac{g_-}{\sqrt{1-2\mu\omega|\mathbf{U}|}} \right], \quad (6.5.55a)$$

onde

$$g_{\pm} = \sqrt{1 \pm \frac{2\omega}{\epsilon}|\mathbf{U}|}. \quad (6.5.55b)$$

Note que a expressão (6.5.55) é válida para regiões onde n_- é real, isto é, para $\omega < \omega_0$ e $\omega > \omega_-$, de acordo com a Fig. 6.9. No limite $\omega|\mathbf{U}| \ll 1$, a Eq. (6.5.55) fornece um poder de rotação não linear na frequência,

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(\mu\epsilon - 1)\omega^2|\mathbf{U}|. \quad (6.5.56)$$

O índice de refração n_- é puramente imaginário no intervalo $\omega_0 < \omega < \omega_-$, o que constitui uma zona de absorção. Assim, tem-se

$$\frac{1}{2\mu|\mathbf{U}|} < \omega < \frac{\epsilon}{2|\mathbf{U}|}. \quad (6.5.57)$$

Nesse regime, o índice de refração é dado por

$$n_- = i\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{1-2\omega|\mathbf{U}|/\epsilon}{2\mu\omega|\mathbf{U}|-1}}, \quad (6.5.58)$$

e o correspondente coeficiente de dicroísmo é

$$\delta_d = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{2}\omega\sqrt{\frac{1-2\omega|\mathbf{U}|/\epsilon}{2\mu\omega|\mathbf{U}|-1}}. \quad (6.5.59)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizamos um estudo relativamente extenso sobre algumas propriedades ópticas de sistemas dielétricos em cenários diversos através da Eletrodinâmica de Maxwell, num primeiro momento, e também por extensões eletrodinâmicas que envolvem violação de Lorentz por meio de derivadas superiores. No capítulo 2, apresentamos uma breve revisão sobre os principais aspectos relativos a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais. Para isso, discutimos sobre as relações constitutivas e sua utilização na parametrização da resposta eletromagnética de meios a campos aplicados. Mostramos uma das principais ferramentas utilizadas nesse trabalho: a equação de Fresnel. Através das equações que governam a eletrodinâmica do sistema considerado e das relações constitutivas do mesmo, conseguimos construir equações que nos fornecem os índices de refração do meio e as polarizações correspondentes dos modos de propagação. Depois disso, apresentamos formas de avaliação da birrefringência (poder de rotação e diferença de fase), absorção e dicroísmo.

No capítulo 3, estudamos meios dotados de condutividade magnética, descrita pela relação constitutiva $J^i = \sigma_{ij}^B B^j$. Escolhemos 4 configurações para o tensor de condutividade, obtendo as quantidades de interesse (índices de refração, polarizações, birrefringência, absorção). É importante mencionar ainda que o caso isotrópico abrange o efeito magnético quiral (CME). Além disso, a configuração de condutividade magnética antissimétrica, que apresentamos pioneiramente para fins de estudo teórico, pode ser realizado em alguns semimetais de Weyl.

Investigamos, no capítulo 4, o comportamento de ondas eletromagnéticas em meios bi-isotrópicos e bi-anisotrópicos, lineares e homogêneos. Apresentamos várias referências que utilizam relações constitutivas, motivando, dessa certa forma, nossa investigação. Consideramos cenários bi-anisotrópicos parametrizados em termos de tensores simétrico e antissimétrico. Para o caso simétrico, descrito em termos dos parâmetros magnetoelétricos $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ e do vetor \mathbf{d} , determinamos dois índices de refração distintos, sendo que, no caso em que \mathbf{d} aponta na mesma direção de propagação \mathbf{n} , temos apenas um índice de refração, que implica na ausência de birrefringência. No caso em que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$, ocorre birrefringência, que pode ser examinada em termos do poder de rotação quando os modos de propagação são descritos por vetores LCP e RCP, ou em termos da diferença de fase quando as polarizações não são circulares. Para uma configuração genérica, encontramos que a diferença de fase assume valor máximo para $\varphi = \pi/2$, sendo φ o ângulo entre \mathbf{d} e \mathbf{n} . Obtivemos ainda as velocidades de grupo, velocidades de fase e o vetor de Poynting. No geral, observamos que o fluxo de energia eletromagnética não se propaga na mesma direção da onda, apresentando contribuições que dependem das direções relativas entre o vetor constitutivo \mathbf{d} , a

direção de propagação \mathbf{n} e o campo elétrico. Para o caso antissimétrico, as relações constitutivas estendidas foram escritas em termos dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . No caso \mathbf{a} -longitudinal, obtemos apenas um índice de refração para meio, que suporta campos elétricos com qualquer tipo de polarização. Na configuração \mathbf{a} -ortogonal, observamos birrefringência, mensurada por meio da diferença de fase entre os modos, que podem ser descritos por polarizações linear, circular ou elíptica. Determinamos também que as velocidades de grupo em ambos os casos \mathbf{a} -ortogonal e \mathbf{a} -longitudinal são independentes de k e ω , sendo uma consequência das configurações adotadas. O cômputo do vetor de Poynting mostra que o fluxo de energia não se propaga na direção de propagação \mathbf{n} , possuindo uma contribuição apontando na direção do vetor constitutivo $\mathbf{a}' = \text{Re}[\mathbf{a}]$ e outras partes que dependem das direções relativas entre \mathbf{a}' e o campo elétrico.

No capítulo 5, discutimos a reversão do poder de rotação (PR) δ que ocorre em meios bi-isotrópicos dotados de condutividade magnética. Com esse intuito, estudamos dois casos particulares. No caso de condutividade magnética isotrópica, a reversão de sinal do PR ocorre na frequência $\omega' = \Sigma/(2|\alpha|'')$, de forma que: i) para $0 < \omega < \omega'$, tem-se rotação da polarização linear no sentido horário; enquanto para ii) $\omega > \omega'$, observamos rotação da luz linearmente polarizada no sentido anti-horário. No caso antissimétrico, o poder de rotação, para todo intervalo de frequências, não sofre inversão de sinal nos casos de condutividade Ôhmica nula e não-nula. Isso sugere que anisotropias na corrente magnética podem prevenir a reversão de quiralidade em meios bi-isotrópicos dotados de condutividade magnética.

No capítulo 6, abordamos a propagação eletromagnética em meios dielétricos governados por extensões da Eletrodinâmica envolvendo termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT. Inicialmente consideramos a eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-ímpar de dimensão 3, o termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), descrito por um campo de fundo $V^\mu = (V_0, \mathbf{V})$. Nesse caso, derivamos as equações de Maxwell modificadas, que podem ser utilizadas na descrição de sistemas quirais dotados do efeito magnético quiral, como apontado na Ref. [33]. Depois disso, obtivemos a equação de dispersão que, na forma de 4-vetores, é dada equivalentemente pelas Eqs. (6.4.15) ou (6.4.17), o que permite interpretar a propagação de ondas eletromagnéticas num meio dielétrico obedecendo a uma mesma equação de dispersão de ondas eletromagnéticas no vácuo, porém com a métrica de Minkowski substituída pela métrica efetiva da Eq. (6.4.16). No cenário puramente timelike, $V_0 \neq 0$ e $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, os índices de refração obtidos correspondem com aqueles encontrados para um meio dotado de condutividade magnética isotrópica. Os modos de propagação, nesse caso, podem ser descritos por vetores LCP e RCP. A birrefringência foi calculada através do poder de rotação, revelando ser constante e independente da frequência. No cenário puramente spacelike, $V_0 = 0$ e $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, escolhemos duas configurações particulares para análise: i) caso \mathbf{V} -perpendicular e ii) \mathbf{V} -longitudinal. No caso \mathbf{V} -perpendicular, o modo associado a n_-^2 se propaga para $\omega > |\mathbf{V}|/\epsilon$, enquanto o modo associado a n_+^2 (que é constante) se propaga normalmente em todo domínio de frequências. A birrefringência, nesse caso, foi examinada através da diferença de fase da Eq. (6.4.36), uma vez que os modos de propagação são descritos por polarizações não circulares. No intervalo $\omega < |\mathbf{V}|/\epsilon$, obtivemos ainda o coeficiente de absorção para o modo associado a n_-^2 . Na configuração \mathbf{V} -longitudinal, os modos associados a n_+^2 e n_-^2 exibem dispersão anômala

e normal, respectivamente. A birrefringência foi avaliada, nesse caso, através do poder de rotação dado na Eq. (6.4.41).

Consideramos ainda um modelo de eletrodinâmica modificada por um termo CPT-ímpar de dimensão 5 parametrizado por meio do campo de fundo $U^\mu = (U_0, \mathbf{U})$. Como no modelo anterior, a equação de dispersão, equivalentemente dada por (6.5.18) e (6.5.19), foi reescrita através de 4-vetores, revelando que a propagação de ondas eletromagnética no meio dielétrico é governada por duas métricas: a métrica de Minkowski e a métrica efetiva da Eq. (6.4.16). Assim, o modelo de eletrodinâmica tipo MCFJ modificado pelo termo CPT-ímpar de dimensão 5 pode ser chamado de bimétrico nesse sentido. No cenário puramente timelike, $U_0 \neq 0$ e $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, encontramos uma equação de dispersão cúbica em n , possuindo 3 soluções complexas, dadas como funções $n = n(\omega)$. Analisando o sinal do discriminante da equação cúbica, conseguimos determinar os intervalos de frequências em que os 3 índices de refração $n_i(\omega)$ (com $i = 1, 2, 3$) são reais ou complexos. De fato, temos: *i*) para $\omega_- < \omega < \omega_+$, há 1 índice de refração real e 2 índices de refração complexos (conjugados); para $\omega < \omega_-$ ou $\omega > \omega_+$, os três índices de refração são reais. Aqui ω_\pm é dado pela Eq. (6.5.23). A existência de índices de refração complexos, $\omega_- < \omega < \omega_+$, está relacionada a efeitos de absorção. Dessa forma, a eletrodinâmica modificada pelo termo CPT-ímpar de dimensão 5 atribui um comportamento condutor a um substrato dielétrico. Esses efeitos novos e não-usuais são originados pela componente U_0 do campo de fundo acoplado aos campos eletromagnéticos. Para o cenário puramente spacelike, $U_0 = 0$ e $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, consideramos os casos particulares \mathbf{U} -perpendicular e \mathbf{U} -longitudinal. No primeiro, obtivemos 3 índices de refração distintos, associados a polarizações cuja parte transversal é descrita por polarização linear. Além disso, determinando que: *i*) para $0 < \omega < \omega_-$, com $\omega_- = \epsilon/(2|\mathbf{U}|)$, apenas o modo associado a n_+ se propaga, enquanto o modo relacionado a n_- não o faz; e *ii*) para $\omega > \omega_-$, os dois modos se propagam. As diferenças de fase entre os modos de propagação foram determinadas nas Eqs. (6.5.46a) e (6.5.46b), revelando dependência em $(\omega|\mathbf{U}|)^{-1}$. No caso \mathbf{U} -longitudinal, obtivemos 2 índices de refração distintos, sendo que n_+^2 apresenta dispersão anômala. Por outro lado, o perfil gráfico de n_-^2 , vide Fig. 6.9, revela a existência de dois ramos: no ramo superior, definido no intervalo $0 < \omega < \omega_0$, com $\omega_0 = (2\mu|\mathbf{U}|)^{-1}$, n_-^2 cresce rapidamente com a frequência; no ramo interior, observamos que, para $\omega_0 < \omega < \omega_-$, com $\omega_- = \epsilon/(2|\mathbf{U}|)$, n_- se torna puramente imaginário, representando um modo não propagante. Finalmente, para $\omega > \omega_-$, o modo associado a n_- se propaga novamente. Os modos propagantes são representados, nesse caso, por vetores LCP e RCP. Assim, determinando o poder de rotação dado na Eq. (6.5.55a).

Investigações futuras nesses tópicos de pesquisa podem incluir cenários não-lineares e não-homogêneos, características que podem ser introduzidas por meio da dependência funcional dos parâmetros constitutivos, por exemplo, considerar $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}, t, E, B)$, em que (E, B) indicam a magnitude dos campos elétrico e magnético. Além disso, é válido questionar (e investigar) os efeitos ópticos em meios contínuos governados por Eletrodinâmicas modificadas por termos CPT-pares com derivadas superiores. Por exemplo, pode-se inicialmente investigar a Eletrodinâmica

descrita por uma densidade de Lagrange da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \eta^2 D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} - A_\mu J^\mu, \quad (7.0.1)$$

em que η possui dimensão de $(\text{massa})^{-1}$ e o tensor $D_{\beta\alpha}$ é uma quantidade tensorial adimensional, que representa um tipo de generalização do termo de Podolski [42]. Certamente, eletrodinâmicas descritas por modelos modificados merecem estudo mais detalhado.

RELAÇÕES DE MINKOWSKI PARA MEIOS BI-ISOTRÓPICOS

Considere um meio bi-isotrópico no referencial S' cujas relações constitutivas são

$$\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}' + \alpha \mathbf{B}', \quad (\text{A.0.1})$$

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}' + \beta \mathbf{E}'. \quad (\text{A.0.2})$$

Nesse apêndice, derivaremos as versões relativísticas das relações constitutivas de um meio linear, bi-isotrópico, homogêneo e não-dispersivo (no referencial de repouso do meio), que se move com velocidade uniforme \mathbf{u} em relação a um observador. Assim, estamos interessados em obter as versões completamente relativísticas das relações constitutivas bi-isotrópicas válidas em todos os referenciais inerciais.

As quantidades com linha são observadas no referencial S' de repouso do meio, enquanto as quantidades sem linha são observadas pelo observador no referencial S , que vê o meio se movendo com velocidade \mathbf{u} . As transformações de Lorentz generalizadas para as quantidades \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{E} e \mathbf{B} são [111, 112]

$$\mathbf{D}' = \gamma \left[\mathbf{D} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{H} \right], \quad (\text{A.0.3a})$$

$$\mathbf{H}' = \gamma \left[\mathbf{H} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} \right], \quad (\text{A.0.3b})$$

$$\mathbf{E}' = \gamma \left[\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right], \quad (\text{A.0.3c})$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \left[\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right], \quad (\text{A.0.3d})$$

com o fator de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - (u/c)^2}$.

Nosso objetivo é encontrar as relações constitutivas relativísticas que capturam os efeitos eletromagnéticos de um meio em movimento. Então substituímos Eq. (A.0.3a), Eq. (A.0.3c) e Eq. (A.0.3d) em Eq. (A.0.1); e substituímos também Eq. (A.0.3b), Eq. (A.0.3c) e Eq. (A.0.3d) em

Eq. (A.0.2), obtendo

$$\mathbf{D} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u}}{c^2} + \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{H} = \epsilon \left[\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u}}{c^2} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right] + \alpha \left[\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u}}{c^2} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E} \right], \quad (\text{A.0.3e})$$

$$\mathbf{H} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u}}{c^2} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u}}{c^2} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E} \right] + \beta \left[\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u}}{c^2} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right]. \quad (\text{A.0.3f})$$

Fazendo o produto escalar de Eq. (A.0.3e) e Eq. (A.0.3f) com a velocidade relativa, \mathbf{u} , encontramos

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}) \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right] = \epsilon(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right] + \alpha(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right], \quad (\text{A.0.4})$$

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}) \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right] = \frac{1}{\mu}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right] + \beta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right]. \quad (\text{A.0.5})$$

Devida a igualdade,

$$\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{u^2}{c^2} \right] = \frac{1}{\gamma}, \quad (\text{A.0.6})$$

são válidas

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{u} = \epsilon(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}), \quad (\text{A.0.7})$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}). \quad (\text{A.0.8})$$

Tais relações são igualmente escritas no referencial S' ,

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{u} = \epsilon(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{B}' \cdot \mathbf{u}), \quad (\text{A.0.9})$$

$$\mathbf{H}' \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{B}' \cdot \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}), \quad (\text{A.0.10})$$

como resultado do produto escalar de \mathbf{u} com Eq. (A.0.1) e Eq. (A.0.2). Essa é uma consequência do fato das componentes longitudinais dos campos $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ não serem modificadas sob transformação de Lorentz.

Podemo simplificar Eq. (A.0.3e) e Eq. (A.0.3f) usando as relações (A.0.7) e (A.0.8), assim o termo em $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u})$ no lado esquerdo da Eq. (A.0.3e) é cancelado pelos termos envolvendo $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})$ e $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})$ no lado direito da Eq. (A.0.3e). O mesmo acontece com o termo em $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u})$ no lado esquerdo da Eq. (A.0.3e), o qual se cancela com os termos em $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})$ e $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})$ no lado direito da

Eq. (A.0.3f). Com isso, a Eq. (A.0.3e) e Eq. (A.0.3f) produzem as relações de Minkowski,

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{H} = \epsilon [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}] + \alpha \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \right], \quad (\text{A.0.11})$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \right] + \beta [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (\text{A.0.12})$$

correspondendo às versões relativísticas das relações (A.0.1) e (A.0.2). Note que a Eq. (A.0.11) e Eq. (A.0.12) mesclam todos os campos (elétrico e magnético), como vistos no referencial S . Então, para se obter expressões para (\mathbf{D}, \mathbf{H}) em termos somente de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , substituímos \mathbf{H} da Eq. (A.0.12) na Eq. (A.0.11). Analogamente, substituímos \mathbf{D} da Eq. (A.0.11) na Eq. (A.0.12), produzindo

$$\begin{aligned} & \mathbf{D} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{u} + \frac{1}{\mu c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{u^2}{\mu c^2} \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})}{\mu c^4} \mathbf{u} + \beta \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \beta \mathbf{B} + \beta \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})}{c^2} \mathbf{u} \\ & = \epsilon \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \alpha \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \epsilon \mathbf{u} \times \mathbf{E} - \epsilon [-u^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}] - \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\alpha}{c^2} [-u^2 \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}] \\ & = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} - \frac{1}{\mu c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \beta \mathbf{E} + \beta \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (\text{A.0.14})$$

onde utilizamos a identidade $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) = -u^2 \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$, com \mathbf{A} representando \mathbf{E} , \mathbf{B} e \mathbf{D} . Utilizando agora Eq. (A.0.7) e Eq. (A.0.8), obtemos (após algumas simplificações algébricas),

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \gamma^2 \left[\left(\epsilon - \frac{u^2}{\mu c^4} \right) \mathbf{E} - \left(\epsilon - \frac{1}{\mu c^2} \right) \left((\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\alpha + \beta}{c^2} \right) (\mathbf{u} \times \mathbf{E} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}) + \left(\alpha + \frac{u^2}{c^2} \beta \right) \mathbf{B} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \gamma^2 \left[\left(\frac{1}{\mu} - \epsilon u^2 \right) \mathbf{B} - \left(\frac{1}{\mu} - \epsilon c^2 \right) \left(\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}}{c^2} \right) + \right. \\ & \left. (\alpha + \beta) \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}}{c^2} \right) + \left(\alpha \frac{u^2}{c^2} + \beta \right) \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.0.16})$$

As expressões dadas na Eq. (A.0.15) e na Eq. (A.0.16) são as relações constitutivas relativísticas para (\mathbf{D}, \mathbf{H}) em termos de \mathbf{E} e \mathbf{B} , para um meio bi-isotrópico em movimento. Obviamente, fazendo-se $\alpha = \beta = 0$ nas Eqs. (A.0.11), (A.0.12), (A.0.15) e (A.0.16), recuperamos as relações de Minkowski usuais (para meios isotrópicos) [111, 112], isto é,

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{H} = \epsilon [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (\text{A.0.17})$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \right], \quad (\text{A.0.18})$$

$$\mathbf{D} = \gamma^2 \left[\left(\epsilon - \frac{u^2}{\mu c^4} \right) \mathbf{E} - \left(\epsilon - \frac{1}{\mu c^2} \right) ((\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right], \quad (\text{A.0.19})$$

$$\mathbf{H} = \gamma^2 \left[\left(\frac{1}{\mu} - \epsilon u^2 \right) \mathbf{B} + \left(\epsilon - \frac{1}{\mu c^2} \right) ((\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right], \quad (\text{A.0.20})$$

O processo de generalização feito neste apêndice mostra que relações constitutivas do tipo (A.0.1) e (A.0.2) não representam necessariamente violação da simetria de Lorentz. Em vez disso, elas são apenas formas mais simples (versões vistas no referencial de repouso do meio) das relações relativísticas (A.0.11), (A.0.12), (A.0.15) e (A.0.16) .

Apêndice B

MODOS DE PROPAGAÇÃO PARA O CASO DIAGONAL ANISOTRÓPICO

Para o caso diagonal anisotrópico, temos

$$[\bar{\epsilon}_{ij}] = \begin{pmatrix} \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} & -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_x k_3 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_x k_2 \\ \frac{i}{\omega^2}\Sigma_y k_3 & \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} & -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_y k_1 \\ -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_2 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_1 & \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.1})$$

Para se obter os índices de refração e os modos de propagação correspondentes, precisamos resolver

$$M_{ij}E^j = 0, \quad (\text{B.0.2})$$

onde M_{ij} é dado por:

$$M_{ij} = k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \mu \bar{\epsilon}_{ij}. \quad (\text{B.0.3})$$

Escolhendo um sistema de coordenadas onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$, então

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} k_2^2 - \mu\omega^2 \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right) & -k_1 k_2 & -\mu i \Sigma_x k_2 \\ -k_1 k_2 & k_1^2 - \mu\omega^2 \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right) & \mu i \Sigma_y k_1 \\ -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_2 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_1 & k^2 - \mu\omega^2 \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.4})$$

Calculando $\det[M_{ij}] = 0$, obtemos as seguintes relações de dispersão

$$k_{\pm}^2 = \mu\omega^2 \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right) \pm \mu\sqrt{\varkappa}, \quad (\text{B.0.5})$$

onde

$$\varkappa = \Sigma_x \Sigma_z k_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z k_1^2. \quad (\text{B.0.6})$$

B.0.1 Modo de propagação (+)

Para o sinal (+), a relação de dispersão da Eq. (B.0.4), temos ($\sigma = 0$)

$$\begin{pmatrix} k_2^2 - \mu\omega^2\epsilon & -k_1k_2 & -\mu i\Sigma_x k_2 \\ -k_1k_2 & k_1^2 - \mu\omega^2\epsilon & \mu i\Sigma_y k_1 \\ -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_2 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_1 & +\mu\sqrt{\varkappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.0.7})$$

que leva a

$$\begin{cases} k_2^2 - \mu\omega^2\epsilon)E_x - k_1k_2E_y - i\mu k_2\Sigma_x E_z = 0 \\ -k_1k_2E_x + (k_1^2 - \mu\omega^2\epsilon)E_y + i\mu k_1\Sigma_y E_z = 0 \\ i\mu k_2\Sigma_z E_x - i k_1\Sigma_z E_y + \mu\sqrt{\varkappa}E_z = 0 \end{cases} . \quad (\text{B.0.8})$$

Multiplicando a primeira equação da Eq. (B.0.8) por $\sqrt{\varkappa}$ e adicionando o resultado ao produto da terceira equação da Eq. (B.0.8) com $i k_2\Sigma_x$, obtemos

$$E_x (k_2^2\sqrt{\varkappa} - \mu\epsilon\omega^2\sqrt{\varkappa} - \mu k_x^2\Sigma_x\Sigma_z) + E_y (-k_1k_2\sqrt{\varkappa} + \mu k_1k_2\Sigma_x\Sigma_z) = 0. \quad (\text{B.0.9})$$

Da Eq. (B.0.5), temos $k_2^2 - \mu\epsilon\omega^2 = \mu\sqrt{\varkappa} - k_1^2$. Assim, utilizando esse resultado, temos

$$E_x \left[\frac{\mu\varkappa - k_1^2 - \mu k_2^2\Sigma_x\Sigma_z}{k_1k_2\sqrt{\varkappa}(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} \right] = E_y. \quad (\text{B.0.10})$$

Usando agora a Eq. (B.0.6), obtemos

$$E_x \left[\frac{\mu\Sigma_x\Sigma_z k_2^2 + \mu\Sigma_y\Sigma_z k_1^2 - k_1^2\sqrt{\varkappa} - \mu k_2^2\Sigma_x\Sigma_z}{k_1k_2\sqrt{\varkappa}(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} \right] = E_y, \quad (\text{B.0.11})$$

$$E_x = -\frac{k_2(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}{k_1(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_y. \quad (\text{B.0.12})$$

Agora podemos substituir a Eq. (B.0.12) na segunda equação da Eq. (B.0.8). Isso produz

$$-k_1k_2 \left[-\frac{k_2(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}{k_1(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} \right] E_y + (k_1^2 - \mu\epsilon\omega^2) E_y = -i\mu k_1\Sigma_y E_z, \quad (\text{B.0.13})$$

$$\left(k_2^2 \frac{\sqrt{\varkappa} - \mu\Sigma_x\Sigma_z}{\sqrt{\varkappa} - \mu\Sigma_y\Sigma_z} + k_1^2 - \mu\epsilon\omega^2 \right) E_y = -i\mu k_1\Sigma_y E_z, \quad (\text{B.0.14})$$

$$\left[\frac{\sqrt{\varkappa}(k_1^2 + k_2^2) - \mu(\Sigma_x\Sigma_z k_2^2 + \Sigma_y\Sigma_z k_1^2) - \mu\epsilon\omega^2(\sqrt{\varkappa} - \mu\Sigma_y\Sigma_z)}{\sqrt{\varkappa} - \mu\Sigma_y\Sigma_z} \right] E_z = -i\mu k_1\Sigma_y E_z. \quad (\text{B.0.15})$$

Agora da Eq. (B.0.5), substituímos $k_1^2 + k_2^2 = \mu\epsilon\omega^2 + \mu\sqrt{\varkappa}$, então

$$\left[\frac{\mu\epsilon\omega^2\sqrt{\varkappa} + \mu\varkappa - \mu\varkappa - \mu\epsilon\omega^2\sqrt{\varkappa} + \mu^2\epsilon\omega^2\Sigma_y\Sigma_z}{\sqrt{\varkappa} - \mu\Sigma_y\Sigma_z} \right] E_z = -i\mu k_1\Sigma_y E_z, \quad (\text{B.0.16})$$

$$E_z = \frac{1}{-i\mu k_1\Sigma_y} \frac{\mu^2\epsilon\omega^2\Sigma_y\Sigma_z}{\sqrt{\varkappa}(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_y, \quad (\text{B.0.17})$$

$$E_z = \frac{i}{k_1} \frac{\mu\epsilon\omega^2\Sigma_z}{\sqrt{\varkappa}(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_y. \quad (\text{B.0.18})$$

Assim, temos

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\frac{k_2(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}{k_1(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_y \\ E_y \\ \frac{i}{k_1} \frac{\mu\epsilon\omega^2\Sigma_z}{\sqrt{\varkappa}(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.19})$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu\epsilon E_y}{k_1(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{\mu\epsilon}(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa}) \\ \frac{k_1}{\mu\epsilon}(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa}) \\ \frac{i\omega^2\Sigma_z}{\sqrt{\varkappa}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.20})$$

Portanto, o modo de propagação (+) será dado por:

$$\mathbf{E}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{\mu\epsilon}(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa}) \\ \frac{k_1}{\mu\epsilon}(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa}) \\ i\omega^2\Sigma_z/\sqrt{\varkappa} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.21})$$

Lembrando que estamos tratando o modo (+), temos

$$\varkappa \rightarrow \varkappa_+ = \Sigma_x\Sigma_z k_{2+}^2 + \Sigma_y\Sigma_z k_{1+}^2, \quad (\text{B.0.22})$$

$$= n_+^2\omega^2\Sigma_z(\Sigma_x m_1^2 + \Sigma_y m_2^2), \quad (\text{B.0.23})$$

onde se utilizou $k_{i\pm} = n_{\pm}\omega m_i$ ($i = 1, 2$). Dessa forma, a Eq. (B.0.21) se torna

$$\mathbf{E}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{k_{2+}}{\mu\epsilon}(1 - \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_+}) \\ \frac{k_{1+}}{\mu\epsilon}(1 - \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_+}) \\ i\omega^2\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_+} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.24})$$

B.0.2 Modo de propagação (–)

Para o sinal (–) na Eq. (B.0.4), temos ($\sigma = 0$)

$$\begin{pmatrix} k_2^2 - \mu\omega^2\epsilon & -k_1k_2 & -\mu i\Sigma_x k_2 \\ -k_1k_2 & k_1^2 - \mu\omega^2\epsilon & \mu i\Sigma_y k_1 \\ -\frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_2 & \frac{i}{\omega^2}\Sigma_z k_1 & -\mu\sqrt{\varkappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.0.25})$$

que leva a

$$\begin{cases} k_2^2 - \mu\omega^2\epsilon)E_x - k_1k_2E_y - i\mu k_2\Sigma_x E_z = 0 \\ -k_1k_2E_x + (k_1^2 - \mu\omega^2\epsilon)E_y + i\mu k_1\Sigma_y E_z = 0 \\ i\mu k_2\Sigma_z E_x - ik_1\Sigma_z E_y - \mu\sqrt{\varkappa}E_z = 0 \end{cases} . \quad (\text{B.0.26})$$

Multiplicando a segunda equação da Eq. (B.0.26) por $\sqrt{\varkappa}$ e adicionando o resultado ao produto da terceira equação da Eq. (B.0.26) com $ik_1\Sigma_y$, obtemos

$$E_x (-k_1k_2\sqrt{\varkappa} - \mu k_1k_2\Sigma_y\Sigma_z) + E_y [(k_1^2 - \mu\epsilon\omega^2)\sqrt{\varkappa} + \mu k_1^2\Sigma_y\Sigma_z] = 0. \quad (\text{B.0.27})$$

Da Eq. (B.0.5), temos $k_1^2 - \mu\epsilon\omega^2 = -\mu\sqrt{\varkappa} - k_2^2$. Assim, utilizando esse resultado, temos

$$E_x = -E_y \frac{(-\mu\sqrt{\varkappa} - k_2^2)\sqrt{\varkappa} + \mu k_1^2\Sigma_y\Sigma_z}{-k_1k_2\sqrt{\varkappa}(1 + \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}, \quad (\text{B.0.28})$$

$$E_x = E_y \frac{-\mu\varkappa - k_2^2\sqrt{\varkappa} + \mu k_1^2\Sigma_y\Sigma_z}{k_1k_2\sqrt{\varkappa}(1 + \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}. \quad (\text{B.0.29})$$

Utilizando agora a Eq. (B.0.6), obtemos

$$E_x = E_y \frac{-\mu\Sigma_x\Sigma_z k_2^2 - \mu\Sigma_y\Sigma_z k_1^2 - k_2^2\sqrt{\varkappa} + \mu k_1^2\Sigma_y\Sigma_z}{k_1k_2\sqrt{\varkappa}(1 + \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}, \quad (\text{B.0.30})$$

$$E_x = E_y \frac{-\mu\Sigma_x\Sigma_z k_2^2 - k_2^2\sqrt{\varkappa}}{k_1k_2\sqrt{\varkappa}(1 + \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}, \quad (\text{B.0.31})$$

$$E_x = -\frac{k_2(1 + \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}{k_1(1 + \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_y, \quad (\text{B.0.32})$$

$$E_y = -\frac{k_1(1 + \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})}{k_2(1 + \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa})} E_x. \quad (\text{B.0.33})$$

Agora substituímos a Eq. (B.0.33) na primeira equação da Eq. (B.0.26). Isso produz

$$E_x \left(k_2^2 - \mu\epsilon\omega^2 + \frac{k_1^2\sqrt{\varkappa} + \mu\Sigma_y\Sigma_z k_1^2}{\sqrt{\varkappa} + \mu\Sigma_x\Sigma_z} \right) = i\mu k_2\Sigma_x E_z, \quad (\text{B.0.34})$$

$$E_x \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2) \sqrt{\varkappa} + \mu (\Sigma_x \Sigma_z k_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z k_1^2) - \mu \epsilon \omega^2 (\sqrt{\varkappa} + \mu \Sigma_x \Sigma_z)}{\sqrt{\varkappa} + \mu \Sigma_x \Sigma_z} \right] = i \mu k_2 \Sigma_x E_z. \quad (\text{B.0.35})$$

Esse resultado pode ser simplificado utilizando-se a Eq. (B.0.6) e $k_1^2 + k_2^2 = \mu \epsilon \omega^2 - \mu \sqrt{\varkappa}$. Assim

$$E_x \left[\frac{\mu \epsilon \omega^2 \sqrt{\varkappa} - \mu \varkappa + \mu \varkappa - \mu \epsilon \omega^2 \sqrt{\varkappa} - \mu^2 \epsilon \omega^2 \Sigma_x \Sigma_z}{\sqrt{\varkappa} (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa})} \right] = i \mu k_2 \Sigma_x E_z, \quad (\text{B.0.36})$$

$$E_z = \frac{i \mu \epsilon \omega^2 \Sigma_z}{k_2 \sqrt{\varkappa} (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa})} E_x. \quad (\text{B.0.37})$$

Temos então

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ -\frac{k_1 (1 + \mu \Sigma_y \Sigma_z / \sqrt{\varkappa})}{k_2 (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa})} E_x \\ \frac{i \mu \epsilon \omega^2 \Sigma_z}{k_2 \sqrt{\varkappa} (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa})} E_x \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.38})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu \epsilon E_x}{k_2 (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa})} \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{\mu \epsilon} (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa}) \\ \frac{k_1}{\mu \epsilon} (1 + \mu \Sigma_y \Sigma_z / \sqrt{\varkappa}) \\ -i \omega^2 \Sigma_z / \sqrt{\varkappa} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.39})$$

Portanto, o modo de propagação (-) será dado por:

$$\mathbf{E}_- = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{\mu \epsilon} (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa}) \\ \frac{k_1}{\mu \epsilon} (1 + \mu \Sigma_y \Sigma_z / \sqrt{\varkappa}) \\ -i \omega^2 \Sigma_z / \sqrt{\varkappa} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.40})$$

Lembrando que estamos tratando o modo (-), temos

$$\varkappa \rightarrow \varkappa_- = \Sigma_x \Sigma_z k_{2-}^2 + \Sigma_y \Sigma_z k_{1-}^2, \quad (\text{B.0.41})$$

$$= n_-^2 \omega^2 \Sigma_z (\Sigma_x m_1^2 + \Sigma_y m_2^2), \quad (\text{B.0.42})$$

onde se utilizou $k_{i\pm} = n_{\pm} \omega m_i$ ($i = 1, 2$). Dessa forma, a Eq. (B.0.40) se torna

$$\mathbf{E}_- = \begin{pmatrix} -\frac{k_{2-}}{\mu \epsilon} (1 + \mu \Sigma_x \Sigma_z / \sqrt{\varkappa_-}) \\ \frac{k_{1-}}{\mu \epsilon} (1 + \mu \Sigma_y \Sigma_z / \sqrt{\varkappa_-}) \\ -i \omega^2 \Sigma_z / \sqrt{\varkappa_-} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.43})$$

Utilizando os resultados obtidos na Eq. (B.0.43) e na Eq. (B.0.24), podemos escrever

$$\mathbf{E}_{\pm} = \begin{pmatrix} -\frac{k_{2\pm}}{\mu\epsilon} (1 \mp \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}}) \\ \frac{k_{1\pm}}{\mu\epsilon} (1 \mp \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}}) \\ \pm i\omega^2\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.44})$$

Agora definimos as seguintes quantidades

$$u_{\pm} = \frac{\mu\epsilon}{1 \mp \mu\Sigma_x\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}}}, \quad (\text{B.0.45})$$

$$v_{\pm} = \frac{\mu\epsilon}{1 \mp \mu\Sigma_y\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}}}, \quad (\text{B.0.46})$$

$$\varkappa_{\pm} = n_{\pm}^2\omega^2\Sigma_z(\Sigma_x m_1^2 + \Sigma_y m_2^2). \quad (\text{B.0.47})$$

Assim, os modos de propagação (\pm) para o caso diagonal anisotrópico com $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$ são dados por

$$\mathbf{E}_{\pm} = \begin{pmatrix} -k_{2\pm}/u_{\pm} \\ k_{1\pm}/v_{\pm} \\ \pm i\omega^2\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.48})$$

$$\mathbf{E}_{\pm} = \begin{pmatrix} -n_{\pm}\omega m_2/u_{\pm} \\ n_{\pm}\omega m_1/v_{\pm} \\ \pm i\omega^2\Sigma_z/\sqrt{\varkappa_{\pm}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.49})$$

B.1 Autovetores da permissividade elétrica efetiva

Sobre a Eq. (3.2.52), temos da Eq. (3.2.46b) e Eq. (3.2.46c)

$$\mathbf{e}_{2,3} = \frac{\mp i\sqrt{\varkappa}}{\varkappa} \begin{pmatrix} -\Sigma_x k_2 \\ \Sigma_y k_1 \\ \pm i\sqrt{\varkappa} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pm i\sqrt{\varkappa}} \begin{pmatrix} -\Sigma_x k_2 \\ \Sigma_y k_1 \\ \pm i\sqrt{\varkappa} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pm i\sqrt{\varkappa}} \mathbf{e}_{\pm}, \quad (\text{B.1.1})$$

de onde podemos definir

$$\mathbf{e}_{\pm} \equiv \pm i\sqrt{\varkappa} \mathbf{e}_{2,3} = \begin{pmatrix} -\Sigma_x k_2 \\ \Sigma_y k_1 \\ \pm i\sqrt{\varkappa} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.2})$$

B.2 Verificando a relação entre u_{\pm} e v_{\pm}

Da Eq. (3.2.50), temos

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu}{\omega} n_{\pm} \sqrt{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}. \quad (\text{B.2.1})$$

Podemos fazer então

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu}{\omega} n_{\pm} \sqrt{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2} \frac{\sqrt{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}}{\sqrt{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}}, \quad (\text{B.2.2})$$

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu n_{\pm}}{\omega} \frac{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}{\sqrt{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}}, \quad (\text{B.2.3})$$

mas $\sqrt{\varkappa_{\pm}} = \omega n_{\pm} \sqrt{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}$. Então

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu n_{\pm}}{\omega} \frac{\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2}{\sqrt{\varkappa_{\pm}}/(\omega n_{\pm})}, \quad (\text{B.2.4})$$

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa_{\pm}}} n_{\pm}^2 (\Sigma_x \Sigma_z m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z m_1^2), \quad (\text{B.2.5})$$

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa_{\pm}}} (\Sigma_x \Sigma_z n_{\pm}^2 m_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z n_{\pm}^2 m_1^2), \quad (\text{B.2.6})$$

onde podemos substituir $n_{\pm}^2 = n_{1\pm}^2 + n_{2\pm}^2 = n_1^2 + n_2^2$, na qual omitimos o sinal \pm para se ter uma notação menos carregada. Além disso, podemos fazer também $n_{\pm}^2 m_i^2 = n_{i\pm}^2 = n_i^2$, $i = 1, 2$. Assim, obtemos

$$n_1^2 + n_2^2 = \mu\epsilon \pm \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa_{\pm}}} (\Sigma_x \Sigma_z n_2^2 + \Sigma_y \Sigma_z n_1^2), \quad (\text{B.2.7})$$

$$n_1^2 \left(1 \mp \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa_{\pm}}} \Sigma_y \Sigma_z\right) + n_2^2 \left(1 \mp \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa_{\pm}}} \Sigma_x \Sigma_z\right) = \mu\epsilon. \quad (\text{B.2.8})$$

Dividindo por $\mu\epsilon$, obtemos

$$\frac{n_1^2}{v_{\pm}} + \frac{n_2^2}{u_{\pm}} = 1, \quad (\text{B.2.9})$$

onde utilizamos a Eq. (B.0.45) e Eq. (B.0.46). Como $n_i = n_{i\pm} = n_{\pm} m_i$, $i = 1, 2$, teremos

$$n_{\pm}^2 \frac{m_1^2}{v_{\pm}} + n_{\pm}^2 \frac{m_2^2}{u_{\pm}} = 1, \quad (\text{B.2.10})$$

$$n_{\pm}^2 \left(\frac{m_1^2}{v_{\pm}} + \frac{m_2^2}{u_{\pm}} \right) = 1, \quad (\text{B.2.11})$$

demonstrando o resultado da Eq. (3.2.51).

MODOS DE PROPAGAÇÃO PARA O CASO ANTISSIMÉTRICO

O índice de refração do caso antissimétrico é dado por ($\sigma = 0$)

$$n = \sqrt{\mu\epsilon - \Xi_b^2} + i\Xi_b, \quad (\text{C.0.1})$$

onde

$$\Xi_b = \frac{\mu b}{2\omega} \cos \theta = \frac{\mu b_3}{2\omega}. \quad (\text{C.0.2})$$

Podemos agora reescrever n na forma trigonométrica. Teremos então

$$|n|^2 = n^* n \quad (\text{C.0.3})$$

$$|n|^2 = \mu\epsilon, \quad (\text{C.0.4})$$

$$|n| = N, \quad (\text{C.0.5})$$

onde definimos

$$N = \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (\text{C.0.6})$$

Reescrevendo n , temos

$$n = N (\cos \alpha + i \sin \alpha) = N e^{i\alpha}. \quad (\text{C.0.7})$$

Da Eq. (C.0.1), obtemos

$$\sin \alpha = \frac{\Xi_b}{N}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{\mu\epsilon - \Xi_b^2}}{N}, \quad (\text{C.0.8})$$

que nos fornecem

$$\tan \alpha = \frac{\Xi_b}{\sqrt{\mu\epsilon - \Xi_b^2}}. \quad (\text{C.0.9})$$

No geral, a polarização é escrita como

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.10})$$

Utilizando a Eq. (3.2.66) e aproveitando a arbitrariedade de E^1 , podemos escrever dois vetores da forma

$$\mathbf{E}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm E^1 \\ E^2 \\ \frac{ib_2}{\omega\epsilon} n E^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.0.11})$$

onde utilizamos a Eq. (3.2.66). Utilizando agora a $n = Ne^{i\alpha}$ e definindo

$$Q = \frac{b_2 N}{\omega\epsilon}, \quad (\text{C.0.12})$$

podemos reescrever a Eq. (C.0.11) como

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ iQe^{i\alpha} E^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.13})$$

Normalizando \mathbf{E}_{\pm} , temos

$$|\mathbf{E}|^2 = 1, \quad (\text{C.0.14})$$

$$(E^1)^2 + (E^2)^2 + Q^2(E^2)^2 = 1, \quad (\text{C.0.15})$$

$$(E^2)^2(1 + Q^2) = 1 - (E^1)^2, \quad (\text{C.0.16})$$

na qual podemos escolher $(E^1)^2 = 1/2$, pois E^1 é arbitrário. Então, temos

$$(E^2)^2 = \frac{1}{2(1 + Q^2)}, \quad (\text{C.0.17})$$

$$E^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2(1 + Q^2)}}. \quad (\text{C.0.18})$$

Escolhendo o segundo sinal para E^2 e lembrando que $(E^1)^2 = 1/2 \rightarrow E^1 = \pm 1/\sqrt{2}$, podemos

substituir a Eq. (C.0.18) na Eq. (C.0.13), obtendo finalmente

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2(1+Q^2)}} \\ -i\frac{Qe^{i\alpha}}{\sqrt{2(1+Q^2)}} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.0.19})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2(1+Q^2)}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1+Q^2} \\ -1 \\ -iQe^{i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.20})$$

Note que, para essas escolhas, as componentes y e z da Eq. (C.0.20) satisfazem a condição imposta pela Eq. (3.2.66).

Apêndice D

MODOS DE PROPAGAÇÃO PARA O CASO SIMÉTRICO

Escolhendo um sistema de coordenadas onde $\mathbf{a} = (0, a, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, c)$, podemos reescrever M_{ij} da Eq. (3.2.8) com $\bar{\epsilon}_{ij}$ dada na Eq. (3.2.70), ou equivalentemente M_{ij} da Eq. (3.2.71a), na forma

$$M_{ij} = (n^2 - \mu\epsilon) \delta_{ij} - n_i n_j - i \frac{\mu}{2\omega} (\epsilon_{klj} a_i c_k n_l + \epsilon_{klj} a_k c_i n_l), \quad (\text{D.0.1})$$

$$M_{ij} = (n^2 - \mu\epsilon) \delta_{ij} - n_i n_j - i \frac{\mu}{2\omega} (\epsilon_{klj} a \delta_{i2} c \delta_{k3} n_l + \epsilon_{klj} a \delta_{k2} c \delta_{i3} n_l), \quad (\text{D.0.2})$$

$$M_{ij} = (n^2 - \mu\epsilon) \delta_{ij} - n_i n_j - i \frac{\mu}{2\omega} a c (\epsilon_{klj} \delta_{i2} \delta_{k3} n_l + \epsilon_{klj} \delta_{k2} \delta_{i3} n_l), \quad (\text{D.0.3})$$

onde utilizamos $a_i = a \delta_{i2}$ para indicar que a única componente não-nula de \mathbf{a} é a componente a_2 . O mesmo argumento foi utilizado nos casos similares. Definindo agora as quantidades

$$A = n^2 - \mu\epsilon, \quad C = -i \frac{\mu}{2\omega} a c, \quad (\text{D.0.4})$$

teremos

$$M_{ij} = A \delta_{ij} - n_i n_j + C (\epsilon_{klj} \delta_{i2} \delta_{k3} n_l + \epsilon_{klj} \delta_{k2} \delta_{i3} n_l). \quad (\text{D.0.5})$$

Explicitamente, temos

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} A - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & A - n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & A - n_3^2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & n_1 & 0 \\ n_3 & 0 & -n_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.6})$$

a partir da qual, $\det[M_{ij}] = 0$ nos fornece

$$(A^2 - C^2 n_1^2) (A - n^2) = 0. \quad (\text{D.0.7})$$

Como $A - n^2 = -\mu\epsilon$, as relações de dispersão são

$$A = \pm C n_1. \quad (\text{D.0.8})$$

D.1 Modo de propagação (+)

Utilizando $A = +Cn_1$ na Eq. (D.0.6), a equação $M_{ij}E^j = 0$ é escrita como

$$\begin{pmatrix} Cn_1 - n_1^2 & -n_1n_2 & -n_1n_3 \\ -n_1n_2 - Cn_2 & 2Cn_1 - n_2^2 & -n_2n_3 \\ -n_1n_3 + Cn_3 & -n_2n_3 & -n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{D.1.1})$$

que produz

$$\begin{cases} (Cn_1 - n_1^2)E_x - n_1n_2E_y - n_1n_3E_z = 0 \\ (-n_1n_2 - Cn_2)E_x + (2Cn_1 - n_2^2)E_y - n_2n_3E_z = 0 \\ (-n_1n_3 + Cn_3)E_x - n_2n_3E_y - n_3^2E_z = 0 \end{cases} . \quad (\text{D.1.2})$$

Multiplicando a primeira equação da Eq. (D.1.2) por n_2 e adicionando o resultado ao produto da segunda equação da Eq. (D.1.2) com $(-n_1)$, obtemos

$$n_2(Cn_1 - n_1^2)E_x - n_1n_2^2E_y - n_1(-n_1n_2 - Cn_2)E_x - n_1(2Cn_1 - n_2^2)E_y = 0, \quad (\text{D.1.3})$$

$$2Cn_1n_2E_x - 2Cn_1^2E_y = 0, \quad (\text{D.1.4})$$

que resulta em

$$E_y = \frac{n_2}{n_1}E_x. \quad (\text{D.1.5})$$

Substituindo agora a Eq. (D.1.5) na terceira equação da Eq. (D.1.2), temos

$$(-n_1n_3 + Cn_3)E_x - \frac{n_2^2n_3}{n_1}E_x - n_3^2E_z = 0, \quad (\text{D.1.6})$$

cuja simplificação leva a

$$n_3^2E_z = \left(-n_1n_3 + Cn_3 - \frac{n_2^2n_3}{n_1}\right)E_x, \quad (\text{D.1.7})$$

$$E_z = \left(\frac{Cn_1 - n_1^2 - n_2^2}{n_1n_3}\right)E_x. \quad (\text{D.1.8})$$

Utilizando as Eqs. (D.1.5) e (D.1.8), teremos

$$\mathbf{E}_+ = \left(E_x, \frac{n_2}{n_1} E_x, \frac{Cn_1 - n_1^2 - n_2^2}{n_1 n_3} E_x \right), \quad (\text{D.1.9})$$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{E_x}{n_1 n_3} (n_1 n_3, n_2 n_3, Cn_1 - n_1^2 - n_2^2), \quad (\text{D.1.10})$$

$$\mathbf{E}_+ = E_+^{(0)} (n_1 n_3, n_2 n_3, Cn_1 - n_1^2 - n_2^2), \quad (\text{D.1.11})$$

com uma amplitude apropriada $E_+^{(0)}$.

D.2 Modo de propagação (−)

Utilizando $A = -Cn_1$ na Eq. (D.0.6), a equação $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\begin{pmatrix} -Cn_1 - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 - Cn_2 & -n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 + Cn_3 & -n_2 n_3 & -2Cn_1 - n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{D.2.1})$$

que conduz a

$$\begin{cases} (-Cn_1 - n_1^2) E_x - n_1 n_2 E_y - n_1 n_3 E_z = 0 \\ (-n_1 n_2 - Cn_2) E_x - n_2^2 E_y - n_2 n_3 E_z = 0 \\ (-n_1 n_3 + Cn_3) E_x - n_2 n_3 E_y + (-2Cn_1 - n_3^2) E_z = 0 \end{cases}. \quad (\text{D.2.2})$$

Multiplicando a primeira equação da Eq. (D.2.2) por n_3 e adicionando o resultado ao produto da terceira equação da Eq. (D.2.2) com $(-n_1)$, obtemos

$$(-Cn_1 n_3 - n_1^2 n_3) E_x - n_1 n_3^2 E_z + (n_1^2 n_3 - Cn_1 n_3) E_x + (2Cn_1^2 + n_1 n_3^2) E_z = 0, \quad (\text{D.2.3})$$

cuja simplificação resulta em

$$E_x = \frac{n_1}{n_3} E_z. \quad (\text{D.2.4})$$

Substituindo a Eq. (D.2.4) na segunda equação da Eq. (D.2.2), temos

$$(-n_1 n_2 - Cn_2) \frac{n_1}{n_3} E_z - n_2^2 E_y - n_2 n_3 E_z = 0, \quad (\text{D.2.5})$$

$$n_2^2 E_y = \left(-\frac{n_1^2 n_2}{n_3} - \frac{C n_1 n_2}{n_3} - n_2 n_3 \right) E_z, \quad (\text{D.2.6})$$

$$E_y = - \left(\frac{C n_1 + n_1^2 + n_3^2}{n_2 n_3} \right) E_z. \quad (\text{D.2.7})$$

Utilizando as Eqs. (D.2.4) e (D.2.7), obtemos finalmente

$$\mathbf{E}_- = \left(\frac{n_1}{n_3} E_z, -\frac{(C n_1 + n_1^2 + n_3^2)}{n_2 n_3} E_z, E_z \right), \quad (\text{D.2.8})$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{E_z}{n_2 n_3} (n_1 n_2, -(C n_1 + n_1^2 + n_3^2), n_2 n_3), \quad (\text{D.2.9})$$

$$\mathbf{E}_- = E_-^{(0)} (n_1 n_2, -(C n_1 + n_1^2 + n_3^2), n_2 n_3), \quad (\text{D.2.10})$$

com uma amplitude apropriada $E_-^{(0)}$.

DETERMINANDO AS DENSIDADES DE CARGA

A seguir, iremos utilizar a Eq. (3.3.2) para determinar as densidades de carga correspondentes de cada cenário onde a condutividade magnética possui uma parametrização específica.

No caso isotrópico, temos

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \Sigma \mathbf{B}. \quad (\text{E.0.1})$$

Assim, a densidade de carga será

$$\rho = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\Sigma}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{E.0.2})$$

$$\rho = \rho_e, \quad (\text{E.0.3})$$

onde utilizamos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ e definimos

$$\rho_e = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e / \omega. \quad (\text{E.0.4})$$

E.1 Caso antissimétrico

Para o caso antissimétrico, temos

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{b} \times \mathbf{B}. \quad (\text{E.1.1})$$

Utilizando a Eq. (3.3.2), teremos

$$\rho = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e + \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{B}), \quad (\text{E.1.2})$$

$$\rho = \rho_e - \frac{1}{\omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}), \quad (\text{E.1.3})$$

onde utilizamos a Eq. (E.0.4) e também $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B})$. A lei de Ampère no espaço de momentos nos fornece neste caso:

$$i\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}_e + \mathbf{b} \times \mathbf{B}, \quad (\text{E.1.4})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\mu\mathbf{J}_e - i\mu(\mathbf{b} \times \mathbf{B}) - \omega\mu\epsilon\mathbf{E}. \quad (\text{E.1.5})$$

Substituindo a Eq. (E.1.5) na Eq. (E.1.3), obtemos

$$\rho = \rho_e - \frac{1}{\omega} \mathbf{b} \cdot [-i\mu \mathbf{J}_e - i\mu (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) - \omega\mu\epsilon \mathbf{E}], \quad (\text{E.1.6})$$

$$\rho = \rho_e + \frac{i\mu}{\omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_e + \mu\epsilon \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{E.1.7})$$

Podemos verificar que as expressões na Eq. (E.1.1) e na Eq. (E.1.7) naturalmente satisfazem a equação de continuidade. De fato, no espacço de momentos, a equação de continuidade nos fornece

$$-\omega\rho + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (\text{E.1.8})$$

Substituindo a Eq. (E.1.1) e a Eq. (E.1.7) na Eq. (E.1.8), devemos verificar se a equação se mantém válida, ou seja, resulta ser, de fato, igual a zero. Vejamos

$$-\omega \left(\rho_e + \frac{i\mu}{\omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_e + \mu\epsilon \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} \right) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{J}_e + \mathbf{b} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{E.1.9})$$

$$-\omega\rho_e - i\mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_e - \omega\mu\epsilon \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{E.1.10})$$

$$-\omega\rho_e - i\mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_e - \omega\mu\epsilon \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} + \omega\rho_e - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{E.1.11})$$

onde utilizamos a Eq. (E.0.4) para reescrever o quarto termo do lado esquerdo da Eq. (E.1.11) e $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B})$ para reescrever o último termo. Utilizando agora a Eq. (E.1.5) no último termo da Eq. (E.1.11), obtemos

$$-i\mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_e - \omega\mu\epsilon \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{b} \cdot [-i\mu \mathbf{J}_e - i\mu (\mathbf{b} \times \mathbf{B}) - \omega\mu\epsilon \mathbf{E}] = 0, \quad (\text{E.1.12})$$

que é satisfeita imediatamente.

E.2 Caso simétrico

No cenário simétrico, temos

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \frac{1}{2} [\mathbf{a} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})]. \quad (\text{E.2.1})$$

Vamos utilizar as seguintes identidades vetoriais:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (\text{E.2.2})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}. \quad (\text{E.2.3})$$

Adicionando-as, obtemos

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = 2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}. \quad (\text{E.2.4})$$

Identificando agora: $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{C} = \mathbf{c}$ and $\mathbf{B} = \mathbf{B}$ para o nosso caso e utilizando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, teremos

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B})\mathbf{a} = -\mathbf{a} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}, \quad (\text{E.2.5})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B})\mathbf{a} = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}). \quad (\text{E.2.6})$$

Podemos agora utilizar a identidade de Jacobi:

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (\text{E.2.7})$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{c}). \quad (\text{E.2.8})$$

Então substituindo a Eq. (E.2.8) no segundo termo do lado direito da Eq. (E.2.6), temos

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B})\mathbf{a} = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{c}), \quad (\text{E.2.9})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B})\mathbf{a} = 2\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \quad (\text{E.2.10})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B})\mathbf{a} = 2\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}. \quad (\text{E.2.11})$$

Assim, a Eq. (E.2.1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}. \quad (\text{E.2.12})$$

Utilizando agora a Eq. (3.3.2), obtemos a densidade de carga

$$\rho = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e + \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B} \right], \quad (\text{E.2.13})$$

$$\rho = \rho_e + \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] - \frac{1}{2\omega} \mathbf{k} \cdot [(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}]. \quad (\text{E.2.14})$$

Podemos reescrever o último termo como

$$\mathbf{k} \cdot [(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}] \rightarrow k^i \epsilon_{ijk} (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^j B^k, \quad (\text{E.2.15})$$

$$= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c})^j \epsilon_{jik} k^i B^k, \quad (\text{E.2.16})$$

$$= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}). \quad (\text{E.2.17})$$

Então a Eq. (E.2.14) se torna

$$\rho = \rho_e + \frac{1}{\omega} [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] + \frac{1}{2\omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}). \quad (\text{E.2.18})$$

A lei de Ampère, neste caso, nos fornece (no espaço de momentos)

$$\mathbf{i}\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}_e + \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}, \quad (\text{E.2.19})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\mu\mathbf{J}_e - i\mu\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B}) + \frac{i\mu}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B} - \omega\mu\epsilon\mathbf{E}. \quad (\text{E.2.20})$$

Substituindo a Eq. (E.2.20) na Eq. (E.2.18), obtemos

$$\rho = \rho_e + \frac{1}{\omega}[\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] - \frac{i\mu}{2\omega}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e - \frac{i\mu}{2\omega}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] - \frac{\mu\epsilon}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{E.2.21})$$

Podemos avaliar agora o quarto termo do lado direito da Eq. (E.2.21)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] = \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}a^j c^k a^m (\mathbf{c} \times \mathbf{B})^n, \quad (\text{E.2.22})$$

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})a^j c^k a^m (\mathbf{c} \times \mathbf{B})^n, \quad (\text{E.2.23})$$

$$= a^j a^j c^n (\mathbf{c} \times \mathbf{B})^n - (c^k a^k) a^j (\mathbf{c} \times \mathbf{B})^j \quad (\text{E.2.24})$$

$$= a^2 \underbrace{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{B})}_0 - \underbrace{(c \cdot a)}_0 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{B})], \quad (\text{E.2.25})$$

$$= 0, \quad (\text{E.2.26})$$

Portanto, a Eq. (E.2.21) é reescrita como

$$\rho = \rho_e + F - \frac{i\mu}{2\omega}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e - \frac{\mu\epsilon}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E}, \quad (\text{E.2.27})$$

onde

$$F = \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})]. \quad (\text{E.2.28})$$

Podemos agora facilmente verificar que a densidade de carga na Eq. (E.2.27) juntamente com a densidade de corrente na Eq. (E.2.12) satisfazem a equação de continuidade. De fato, teremos

$$-\omega\rho + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (\text{E.2.29})$$

na qual substituímos ρ e \mathbf{J} por (E.2.27) e (E.2.12), respectivamente, obtendo

$$\begin{aligned} \omega\rho_e - \mathbf{k} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] + \frac{i\mu}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\omega\mu\epsilon}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e + \mathbf{k} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] + \\ - \frac{1}{2}\mathbf{k} \cdot [(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}] = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.2.30})$$

na qual podemos cancelar o primeiro e quinto termos, pois $\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_e = \omega\rho$; podemos ainda cancelar o

segundo e sexto termos. Utilizando agora $\mathbf{k} \cdot [(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{B}] = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B})$, obtemos

$$\frac{i\mu}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\omega\mu\epsilon}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (\text{E.2.31})$$

Substituindo agora a Eq. (E.2.20) no último termo, teremos

$$\begin{aligned} \frac{i\mu}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\omega\mu\epsilon}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E} - \frac{i\mu}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}_e - \frac{\omega\mu\epsilon}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{E} + \\ - \frac{i\mu}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{B})] = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.2.32})$$

que é satisfeita imediatamente, uma vez que o último termo é igual a zero – veja o resultado da Eq. (E.2.26).

TEOREMA DE POYNTING

O trabalho (por unidade de tempo) realizado pela força eletromagnética sobre um conjunto de cargas (com densidade de carga ρ e densidade de corrente \mathbf{J}) é dado por [1, 7]:

$$\frac{dW}{dt} = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}). \quad (\text{F.0.1})$$

Uma vez que as quantidades vetoriais de interesse (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{J}) podem ser complexas, devemos então considerar a parte real das mesmas, pois os campos físicos são quantidades reais. Assim, devemos fazer

$$\frac{dW}{dt} = \int d^3\mathbf{r} (\text{Re}[\mathbf{J}] \cdot \text{Re}[\mathbf{E}]). \quad (\text{F.0.2})$$

Utilizando agora a propriedade $\text{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + z^*)$, podemos então escrever a Eq. (F.0.2) como

$$\frac{dW}{dt} = \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{4} (\mathbf{J} + \mathbf{J}^*) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad (\text{F.0.3})$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{r} \left[(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*) + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}^*) \right], \quad (\text{F.0.4})$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[\text{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) + \text{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right]. \quad (\text{F.0.5})$$

Vamos agora avaliar o valor médio da Eq. (F.0.5) sobre um ciclo de oscilação (com período $T = \frac{2\pi}{\omega}$) [7], que podemos chamar de média temporal. Para isso, podemos assumir ansatz de ondas planas monocromáticas e então escrever

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J} = \tilde{\mathbf{J}}e^{-i\omega t}, \quad (\text{F.0.6})$$

em que $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{J}}$ são complexos. Assim, a média temporal da Eq. (F.0.5) será

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[\text{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) + \text{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right] \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \text{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \text{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right\rangle. \quad (\text{F.0.7})$$

Para o primeiro termo do lado direito de (F.0.7), temos

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) dt, \quad (\text{F.0.8})$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{T} \int_0^T \int d^3\mathbf{r} \left[(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*) \right] dt, \quad (\text{F.0.9})$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{T} \int_0^T \int d^3\mathbf{r} \left[(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}) + (\tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*) \right] dt, \quad (\text{F.0.10})$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{r} \left[(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}) + (\tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*) \right] \frac{1}{T} \int_0^T dt, \quad (\text{F.0.11})$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}). \quad (\text{F.0.12})$$

Para o segundo termo da (F.0.7), obtemos

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{T} \int_0^T \int d^3\mathbf{r} \left[(\tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) e^{2i\omega t} + (\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*) e^{-2i\omega t} \right] dt, \quad (\text{F.0.13})$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{r} (\tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{T=2\pi/\omega} e^{2i\omega t} dt}_{=0} + \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{r} (\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*) \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{T=2\pi/\omega} e^{-2i\omega t} dt}_{=0}, \quad (\text{F.0.14})$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right\rangle = 0. \quad (\text{F.0.15})$$

Assim, utilizando (F.0.15) e (F.0.12) na Eq. (F.0.7), obtemos

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \left\langle \int d^3\mathbf{r} (\operatorname{Re}[\mathbf{J}] \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{E}]) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[\operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) + \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) \right] \right\rangle = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}). \quad (\text{F.0.16})$$

Portanto, a média temporal do trabalho (por unidade de tempo) realizado pela força eletromagnética é dado por (1/2) da parte real do produto $(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}})$, ou seja,

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}). \quad (\text{F.0.17})$$

Vamos agora escrever esse resultado numa forma de lei de conservação. Para isso, consideramos novamente os campos elétricos e magnéticos com dependência temporal do tipo $e^{-i\omega t}$ [1]. Assim, as equações de Maxwell são escritas como

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \rho, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} + i\omega \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{J}}, \quad (\text{F.0.18})$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - i\omega \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (\text{F.0.19})$$

Substituindo a lei de Ampère, segunda relação da (F.0.1), no integrando da (F.0.18), obtemos

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^* - i\omega \tilde{\mathbf{D}}^* \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (\text{F.0.20})$$

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[\underbrace{\tilde{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^*)}_{=\tilde{\mathbf{H}}^* \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*)} - i\omega \tilde{\mathbf{D}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right], \quad (\text{F.0.21})$$

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[-\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) + \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \underbrace{(\nabla \times \tilde{\mathbf{E}})}_{=i\omega \tilde{\mathbf{B}}} - i\omega \tilde{\mathbf{D}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right], \quad (\text{F.0.22})$$

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{J}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) - \frac{i\omega}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{D}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \tilde{\mathbf{B}} \right), \quad (\text{F.0.23})$$

na qual definimos o vetor de Poynting complexo

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (\text{F.0.24})$$

uma vez que as exponenciais se cancelam na segunda igualdade, ou seja, $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = (\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}) \times (\tilde{\mathbf{H}}^*e^{i\omega t}) = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*$. Assim, a Eq. (F.0.23) se torna

$$\int d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{i\omega}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{D}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \right) - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right), \quad (\text{F.0.25})$$

da qual, podemos extrair

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{i\omega}{2} \left(\tilde{\mathbf{D}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \right) - \frac{(\tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{E}})}{2}, \quad (\text{F.0.26})$$

sendo equivalentemente dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{i\omega}{2} (\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})}{2}, \quad (\text{F.0.27})$$

que estabelece a lei de conservação de energia eletromagnética. Isso acontece pois a Eq. (F.0.27) é uma forma de equação de continuidade. De fato, utilizando $\partial_t \rightarrow -i\omega$, a Eq. (F.0.27) é escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \partial_t u_{EM} = -\frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})}{2}, \quad (\text{F.0.28})$$

onde definimos a diferença de densidades de energias elétrica e magnética u_{EM} como

$$u_{EM} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{F.0.29})$$

É importante mencionarmos que a definição do vetor de Poynting (F.0.24) segue a mesma convenção do *Jackson* [1]. Dessa forma, “sobram” fatores (1/2) nos outros termos da Eq. (F.0.27).

Tendo esse detalhe sutil em mente, a convenção para a média temporal da Eq. (F.0.27) é obtida apenas tomando-se a parte real da mesma, o que parece contradizer o resultado que obtivemos na Eq. (F.0.18), isto é, “a média temporal de um produto de quantidades vetoriais complexas é igual a (1/2) da parte real do produto entre um dos fatores e o complexo conjugado do outro fator”. Essa aparente contradição só ocorre por que o *Jackson* define o vetor de Poynting contendo o fator 1/2. Assim, ele convencionou as médias temporais simplesmente tomando a parte real. Em outras referências, como *Zangwill* [7] e *Kong* [50], o vetor de Poynting é definido sem o fator 1/2, ou seja,

$$\mathbf{S}^{\text{Zangwill, Kong}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (\text{F.0.30})$$

Assim, a equação de conservação de energia (F.0.27) é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{S}^{\text{Zangwill, Kong}} = -i\omega (\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}), \quad (\text{F.0.31})$$

cuja média temporal será igual a (1/2) da parte real da mesma. Em suma, temos

- Na convenção do *Jackson*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (\text{F.0.32})$$

- Na convenção do *Zangwill* e *Kong*:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (\text{F.0.33})$$

Dessa forma, as médias temporais ficam equivalentes em ambas as convenções.

SIMPLIFICANDO O VETOR DE POYNTING PARA MEIO BI-ANISOTRÓPICO COM RELAÇÃO ANTISSIMÉTRICA

Obtivemos na Eq. (4.3.179) o vetor de Poynting dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{n} + \mu\mathbf{a})|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}) \left[\frac{n^2}{\mu\epsilon - \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})} - 1 \right] \mathbf{E}^*. \quad (\text{G.0.1})$$

Utilizando agora $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}''$, escrevemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a'n \cos \varphi + ia''n \cos \varphi, \quad (\text{G.0.2})$$

em que consideramos $(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}) = a'n \cos \varphi$. Implementando (G.0.2) e $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}''$ na Eq. (G.0.1), teremos

$$\mathbf{S} = J + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{a} + i\mathbf{a}'') \cdot (\mathbf{E}' + i\mathbf{E}'') \right] \left[\frac{n^2}{\mu\epsilon - \mu a'n \cos \varphi - i\mu a''n \cos \varphi} - 1 \right] (\mathbf{E}' - i\mathbf{E}''), \quad (\text{G.0.3})$$

em que

$$J = \frac{1}{2\mu} \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mathbf{a}'}{2} |\mathbf{E}|^2 + i \frac{\mathbf{a}''}{2} |\mathbf{E}|^2. \quad (\text{G.0.4})$$

Da Eq. (G.0.3), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = J + \frac{1}{2} & \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}') + i(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'') + i(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}') - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'') \right] \times \\ & \times \left[\frac{n^2(\mu\epsilon - \mu a'n \cos \varphi + i\mu a'' \cos \varphi)}{(\mu\epsilon - \mu a'n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi} - 1 \right] (\mathbf{E}' - i\mathbf{E}''), \end{aligned} \quad (\text{G.0.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = J + \frac{1}{2} & \left[\frac{(\mu\epsilon - \mu a'n \cos \varphi)(n^2 - \mu\epsilon + \mu a'n \cos \varphi) - \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}{(\mu\epsilon - \mu a'n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 \cos^2 \varphi} + \right. \\ & \left. + i \frac{\mu a'' n^3 \cos \varphi}{(\mu\epsilon - \mu a'n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi} \right] \times \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' + \right. \\ & \left. - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' - i(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' + i(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' + i(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + i(\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.0.6})$$

Vamos definir as seguintes quantidades:

$$F_1 = \frac{(\mu\epsilon - \mu a' n \cos \varphi)(n^2 - \mu\epsilon + \mu a' n \cos \varphi) - \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}{(\mu\epsilon - \mu a' n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}, \quad (\text{G.0.7})$$

$$F_2 = \frac{\mu a'' n^3 \cos \varphi}{(\mu\epsilon - \mu a' n \cos \varphi)^2 + \mu^2 a''^2 n^2 \cos^2 \varphi}. \quad (\text{G.0.8})$$

Então (G.0.6) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & J + \frac{F_1}{2} \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' \right] + \\ & + i \frac{F_1}{2} \left[-(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' \right] + \\ & + i \frac{F_2}{2} \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' \right] + \\ & - \frac{F_2}{2} \left[-(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.0.9})$$

A média temporal do vetor de Poynting acima será dada então por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle = & \frac{1}{2\mu} (\mathbf{n} + \mu \mathbf{a}') |\mathbf{E}|^2 + \frac{F_1}{2} \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' \right] + \\ & - \frac{F_2}{2} \left[-(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' \right], \end{aligned} \quad (\text{G.0.10})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle = & \frac{1}{2\mu} (\mathbf{n} + \mu \mathbf{a}') |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}') (F_1 \mathbf{E}' + F_2 \mathbf{E}'') + \frac{1}{2} (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'') (F_1 \mathbf{E}'' - F_2 \mathbf{E}') + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}') (F_1 \mathbf{E}'' - F_2 \mathbf{E}') - \frac{1}{2} (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'') (F_1 \mathbf{E}' + F_2 \mathbf{E}''), \end{aligned} \quad (\text{G.0.11})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle = & \frac{1}{2\mu} (\mathbf{n} + \mu \mathbf{a}') |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} (F_1 \mathbf{E}' + F_2 \mathbf{E}'') \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}') - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'') \right] + \\ & + \frac{1}{2} (F_1 \mathbf{E}'' - F_2 \mathbf{E}') \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'') + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}') \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.0.12})$$

Para o caso \mathbf{a} -ortogonal, temos $\varphi = \pi/2$. Logo,

$$F_1^{\text{orto.}} = \frac{n^2 - \mu\epsilon}{\mu\epsilon}, \quad F_2^{\text{orto.}} = 0. \quad (\text{G.0.13})$$

Então (G.0.12) resulta em

$$\langle \mathbf{S} \rangle^{\text{orto.}} = \frac{1}{2\mu} (\mathbf{n} + \mu \mathbf{a}') |\mathbf{E}|^2 + \frac{(n^2 - \mu\epsilon)}{2\mu\epsilon} \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}' + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}'' + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}')\mathbf{E}'' - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'')\mathbf{E}' \right]. \quad (\text{G.0.14})$$

Para o caso \mathbf{a} -longitudinal, temos $\varphi = 0$. Então

$$F_1^{\text{long.}} = \frac{(\mu\epsilon - \mu a'n)(n^2 - \mu\epsilon + \mu a'n) - \mu^2 a''^2 n^2}{(\mu\epsilon - \mu a'n)^2 + \mu^2 a''^2 n^2}, \quad (\text{G.0.15})$$

$$F_1^{\text{long.}} = \frac{\mu\epsilon(n^2 - \mu\epsilon + 2\mu a'n) - \mu a'n^3 - \mu n^2(a'^2 + a''^2)}{\mu\epsilon(\mu\epsilon - 2\mu a'n) + \mu^2 n^2(a'^2 + a''^2)}. \quad (\text{G.0.16})$$

Lembrando que $n^2 - \mu\epsilon + 2\mu a'n = 0$ de acordo com a Eq. (4.3.137) e $(a'^2 + a''^2) = |a|^2$ [vide Eq. (4.3.120c)]. Assim (G.0.16) resulta em

$$F_1^{\text{long.}} = \frac{-a'n^3 - \mu^2 n^2 |a|^2}{\mu\epsilon \underbrace{(\mu\epsilon - 2\mu a'n)}_{=n^2} + \mu^2 n^2 |a|^2}, \quad (\text{G.0.17})$$

$$F_1^{\text{long.}} = \frac{-a'n - \mu |a|^2}{\epsilon + \mu |a|^2}. \quad (\text{G.0.18})$$

Para F_2 , teremos

$$F_2^{\text{long.}} = \frac{\mu a'' n^3}{\mu^2 \epsilon^2 - 2\mu^2 \epsilon a'n + \mu^2 n^2(a'^2 + a''^2)} = \frac{\mu a'' n^3}{\mu\epsilon \underbrace{(\mu\epsilon - 2\mu a'n)}_{=n^2} + \mu^2 n^2 |a|^2}, \quad (\text{G.0.19})$$

$$F_2^{\text{long.}} = \frac{a'' n}{\epsilon + \mu |a|^2}. \quad (\text{G.0.20})$$

Portanto, a média temporal do vetor de Poynting para o caso \mathbf{a} -longitudinal será dado por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle^{\text{long.}} &= \frac{1}{2\mu} (\mathbf{n} + \mu \mathbf{a}') |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \left(F_1^{\text{long.}} \mathbf{E}' + F_2^{\text{long.}} \mathbf{E}'' \right) \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}') - (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}'') \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left(F_1^{\text{long.}} \mathbf{E}'' - F_2^{\text{long.}} \mathbf{E}' \right) \left[(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{E}'') + (\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{E}') \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.0.21})$$

MODOS DE PROPAGAÇÃO PARA MEIOS BI-ISOTRÓPICOS DOTADOS DE CONDUTIVIDADE MAGNÉTICA

H.1 Caso isotrópico

Da Eq. (5.2.10), podemos escrever

$$n_{\pm}^2 = \mu\epsilon \pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm}. \quad (\text{H.1.1})$$

Substituída (H.1.1) na matriz $[M_{ij}]$ (5.2.8), a equação $M_{ij}E^j = 0$ é lida como

$$\begin{pmatrix} \pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_1^2 & -n_1n_2 - 2c\sqrt{Z}n_3 & -n_1n_3 + 2c\sqrt{Z}n_2 \\ -n_1n_2 + 2c\sqrt{Z}n_3 & \pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_2^2 & -n_2n_3 - 2c\sqrt{Z}n_1 \\ -n_1n_3 - 2c\sqrt{Z}n_2 & -n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1 & \pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{H.1.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_1^2 \right] E_x + \left[-n_1n_2 - 2c\sqrt{Z}n_3 \right] E_y + \left[-n_1n_3 + 2c\sqrt{Z}n_2 \right] E_z = 0 \\ \left[-n_1n_2 + 2c\sqrt{Z}n_3 \right] E_x + \left[\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_2^2 \right] E_y + \left[-n_2n_3 - 2c\sqrt{Z}n_1 \right] E_z = 0 \\ \left[-n_1n_3 - 2c\sqrt{Z}n_2 \right] E_x + \left[-n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1 \right] E_y + \left[\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_3^2 \right] E_z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{H.1.3})$$

Multiplicando a segunda equação de (H.1.3) por $[\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_3^2]$ e somando o resultado ao produto entre a terceira equação de (H.1.3) e $[n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1]$, obtemos

$$E_x \left[\left(-n_1n_2 + 2c\sqrt{Z}n_3 \right) \left(\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_3^2 \right) + \left(-n_1n_3 - 2c\sqrt{Z}n_2 \right) \left(n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1 \right) \right] + \\ + E_y \left[\left(\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_2^2 \right) \left(\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_3^2 \right) + \left(-n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1 \right) \left(n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1 \right) \right] = 0, \quad (\text{H.1.4})$$

$$E_x \left[\mp 2ic\sqrt{Z}n_{\pm}n_1n_2 \pm 4ic^2Zn_{\pm}n_3 - 2c\sqrt{Z}(n_3^3 + n_1^2n_3) - 2c\sqrt{Z}n_2^2n_3 - 4c^2Zn_1n_2 \right] + \\ + E_y \left[-4c^2Z(n_{\pm}^2 - n_1^2) \mp 2ic\sqrt{Z}n_{\pm}(n_3^2 + n_2^2) \right] = 0, \quad (\text{H.1.5})$$

na qual podemos simplificar os termos destacados em cores correspondentes e substituiremos $(n_3^2 + n_2^2) = n^2 - n_1^2$ no último termo. Assim, teremos

$$E_x \left\{ \mp 2ic\sqrt{Z}[nn_1n_2 \mp in_3 \underbrace{(n_3^2 + n_1^2)}_{=n^2-n_2^2} \mp in_2^2n_3] - 4c^2Z(n_1n_2 \mp inn_3) \right\} + E_y(n^2 - n_1^2) \left[-4c^2Z \mp 2ic\sqrt{Z}n \right] = 0, \quad (\text{H.1.6})$$

$$E_x \left\{ \mp 2ic\sqrt{Z}n(n_1n_2 \mp inn_3) - 4c^2Z(n_1n_2 \mp inn_3) \right\} + E_y(n^2 - n_1^2) \left(-4c^2Z \mp 2ic\sqrt{Z}n \right) = 0, \quad (\text{H.1.7})$$

$$E_x(n_1n_2 \mp inn_3) + E_y(n^2 - n_1^2) = 0, \quad (\text{H.1.8})$$

$$E_y = \frac{\pm inn_3 - n_1n_2}{n^2 - n_1^2} E_x. \quad (\text{H.1.9})$$

Substituindo (H.1.9) na primeira equação de (H.1.3) fornece

$$E_x \left[\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_1^2 + (-n_1n_2 - 2c\sqrt{Z}n_3) \left(\frac{\pm inn_3 - n_1n_2}{n^2 - n_1^2} \right) \right] + E_z(-n_1n_3 + 2c\sqrt{Z}n_2) = 0, \quad (\text{H.1.10})$$

$$\left[\left(\pm 2ic\sqrt{Z}n_{\pm} - n_1^2 \right) \underbrace{(n^2 - n_1^2)}_{=n_2^2+n_3^2} + (-n_1n_2 - 2c\sqrt{Z}n_3)(\pm inn_3 - n_1n_2) \right] E_x + E_z(n^2 - n_1^2)(-n_1n_3 + 2c\sqrt{Z}n_2) = 0, \quad (\text{H.1.11})$$

$$E_z(n^2 - n_1^2)(-n_1n_3 + 2c\sqrt{Z}n_2) = (-1) \left[\pm 2ic\sqrt{Z}nn_2^2 - n_1^2n_3^2 \mp inn_1n_2n_3 + 2c\sqrt{Z}n_1n_2n_3 \right] E_x, \quad (\text{H.1.12})$$

$$E_z(n^2 - n_1^2)(-n_1n_3 + 2c\sqrt{Z}n_2) = (-1) \left[\mp inn_2(n_1n_3 - 2c\sqrt{Z}n_2) - n_1n_3(n_1n_3 - 2c\sqrt{Z}n_2) \right] E_x, \quad (\text{H.1.13})$$

que finalmente fornece

$$E_z = \frac{\mp inn_2 - n_1n_3}{n^2 - n_1^2} E_x. \quad (\text{H.1.14})$$

Utilizando (H.1.9) e (H.1.12), podemos escrever

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_x}{n^2 - n_1^2} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \pm inn_3 - n_1 n_2 \\ \mp inn_2 - n_1 n_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.1.15})$$

Normalizando \mathbf{E}_{\pm} , ou seja, fazendo $|\mathbf{E}_{\pm}|^2 = 1$, obtemos

$$\frac{E_x^2}{(n^2 - n_1^2)^2} [(n^2 - n_1^2)^2 + (\pm inn_3 - n_1 n_2)(\mp inn_3 - n_1 n_2) + (\mp inn_2 - n_1 n_3)(\pm inn_2 - n_1 n_3)] = 1, \quad (\text{H.1.16})$$

que, após algumas simplificações, fornece

$$E_x = \frac{\sqrt{n^2 - n_1^2}}{n\sqrt{2}}. \quad (\text{H.1.17})$$

Portanto, a Eq. (H.1.15) se torna

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sqrt{n^2 - n_1^2}} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \pm inn_3 - n_1 n_2 \\ \mp inn_2 - n_1 n_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.1.18})$$

H.2 Caso antissimétrico

Considerando $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, a matriz (5.2.23) se torna

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - c^2\mu\epsilon + \frac{i\mu cn}{\omega}b \cos \theta & -2i\mu c\alpha''n & 0 \\ 2i\mu c\alpha''n & n^2 - c^2\mu\epsilon + \frac{i\mu cn}{\omega}b \cos \theta & 0 \\ -i\mu cb_1 \frac{n}{\omega} & -i\mu cb_2 \frac{n}{\omega} & -c^2\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{H.2.1})$$

Da Eq. (5.2.27), podemos escrever agora

$$n_{\pm}^2 - \mu\epsilon c^2 = \pm i\mu c \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) n_{\pm}. \quad (\text{H.2.2})$$

Então implementando (H.2.2) na matriz (H.2.1), a equação $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\begin{pmatrix} \pm i\mu c \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) n_{\pm} + i \frac{\mu cb \cos \theta}{\omega} n_{\pm} & -2i\mu c\alpha''n_{\pm} & 0 \\ 2i\mu c\alpha''n_{\pm} & \pm i\mu c \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) n_{\pm} + i \frac{\mu cb \cos \theta}{\omega} n_{\pm} & 0 \\ -i \frac{\mu cb_1}{\omega} n_{\pm} & -i \frac{\mu cb_2}{\omega} n_{\pm} & -\mu\epsilon c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{H.2.3})$$

$$\begin{cases} n_{\pm} \left[\pm i \mu c \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) + i \frac{\mu c b \cos \theta}{\omega} \right] E_x - 2i\mu\alpha'' c n_{\pm} E_y = 0 \\ 2i\mu c \alpha'' n_{\pm} E_x + n_{\pm} \left[\pm i \mu c \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) + i \frac{\mu c b \cos \theta}{\omega} \right] E_y = 0 \\ -i \frac{\mu c b_1}{\omega} n_{\pm} E_x - i \frac{\mu c b_2}{\omega} n_{\pm} E_y - \mu \epsilon c^2 E_z = 0 \end{cases} \quad (\text{H.2.4})$$

Da primeira equação de (H.2.4), temos

$$E_y = \frac{\pm i \mu \left(2i\alpha'' \mp \frac{b}{\omega} \cos \theta \right) + i \mu \frac{b}{\omega} \cos \theta}{2i\mu\alpha''} E_x, \quad (\text{H.2.5})$$

$$E_y = \left[\pm i - \frac{b \cos \theta}{2\alpha''\omega} + \frac{b \cos \theta}{2\alpha''\omega} \right] E_x, \quad (\text{H.2.6})$$

$$E_y = \pm i E_x. \quad (\text{H.2.7})$$

Substituindo (H.2.7) na segunda equação de (H.2.4), obtemos

$$\left\{ 2i\mu\alpha'' + \left[\pm i \mu \left(2i\alpha'' \mp \frac{b \cos \theta}{\omega} \right) + \frac{i\mu b \cos \theta}{\omega} \right] (\pm i) \right\} E_x = 0, \quad (\text{H.2.8})$$

$$\left\{ \cancel{2i\mu\alpha''} - \cancel{2i\mu\alpha''} \pm \frac{\cancel{\mu b \cos \theta}}{\omega} \mp \frac{\cancel{\mu b \cos \theta}}{\omega} \right\} E_x = 0, \quad (\text{H.2.9})$$

a qual é identicamente nula, isto é, considerando (H.2.7), a segunda equação de (H.2.4) é satisfeita para valores arbitrários de E_x .

Substituindo agora (H.2.7) na terceira equação de (H.2.4), tem-se

$$c\mu\epsilon E_z = \left[-i \frac{\mu}{\omega} b_1 n_{\pm} - i \frac{\mu}{\omega} b_2 n_{\pm} (\pm i) \right] E_x, \quad (\text{H.2.10})$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega c \epsilon} n_{\pm} (b_1 \pm i b_2) E_x. \quad (\text{H.2.11})$$

Portanto, utilizando (H.2.7) e (H.2.11), obtemos finalmente

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ -i \frac{n_{\pm}}{\omega c \epsilon} (b_1 \pm i b_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{H.2.12})$$

OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL MODIFICADAS POR TERMO CPT-ÍMPAR DE DIMENSÃO 3 EM MEIOS

O modelo de eletrodinâmica em meios contínuos modificado pelo termo de (CFJ) pode ser obtido como uma extensão da teoria de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) padrão que implementa o tensor constitutivo $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$, isto é, tal eletrodinâmica modificada é descrita pela seguinte densidade de Lagrange:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}V_\beta A_\lambda F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (\text{I.0.1})$$

onde $V^\mu = (V_0, \mathbf{V})$ é o campo de fundo responsável pela (VL). Lembrando que

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (\text{I.0.2})$$

então

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}, \quad (\text{I.0.3})$$

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (\text{I.0.4})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\nu A_\mu + \frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\partial_\mu A_\nu + \\ &\quad -\frac{1}{8}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\partial_\nu A_\mu, \end{aligned} \quad (\text{I.0.5})$$

na qual podemos renomear os índices ($\nu \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \nu$) no segundo e quarto termos da Eq. (I.0.5) e, depois disso, podemos usar $\chi^{\nu\mu\alpha\beta} = -\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$, resultando em

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{4}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\partial_\mu A_\nu, \quad (\text{I.0.6})$$

que pode ser simplificada fazendo-se a substituição ($\beta \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \beta$) no segundo termo da Eq. (I.0.6) e então usando $\chi^{\mu\nu\beta\alpha} = -\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$. Assim, obtemos

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu. \quad (\text{I.0.7})$$

Portanto, a Eq. (I.0.1) pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}V_\beta A_\lambda F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (\text{I.0.8})$$

Utilizando agora as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)}\right) = 0, \quad (\text{I.0.9})$$

obtemos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}V_\beta\delta_{\lambda\kappa}F_{\mu\nu} - \delta_{\mu\kappa}J^\mu = -\frac{1}{4}\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} - J^\kappa. \quad (\text{I.0.10})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)}\left[-\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta)(\partial_\mu A_\nu) - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}V_\beta A_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right], \quad (\text{I.0.11})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\kappa}\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\kappa}\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}V_\beta A_\lambda(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\kappa} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\kappa}), \quad (\text{I.0.12})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\chi^{\rho\kappa\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa}V_\beta A_\lambda + \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\lambda\kappa\rho}V_\beta A_\lambda, \quad (\text{I.0.13})$$

na qual podemos renomear os índices ($\alpha \rightarrow \nu; \beta \rightarrow \mu$) no segundo termo; e utilizar $\epsilon^{\beta\lambda\kappa\rho} = -\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa}$ no quarto termo. Então

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\chi^{\rho\kappa\nu\mu}\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa}V_\beta A_\lambda, \quad (\text{I.0.14})$$

onde podemos fazer $\chi^{\mu\nu\rho\kappa} = \chi^{\rho\kappa\mu\nu}$ no último termo; e também $\chi^{\rho\kappa\nu\mu} = -\chi^{\rho\kappa\mu\nu}$ no segundo termo. Assim, temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\rho\kappa\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa}V_\beta A_\lambda, \quad (\text{I.0.15})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\chi^{\rho\kappa\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa}V_\beta A_\lambda, \quad (\text{I.0.16})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -G^{\rho\kappa} - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa}V_\beta A_\lambda. \quad (\text{I.0.17})$$

Podemos usar agora $\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa} = -\epsilon^{\beta\rho\lambda\kappa} = \epsilon^{\rho\beta\lambda\kappa} = -\epsilon^{\rho\beta\kappa\lambda} = \epsilon^{\rho\kappa\beta\lambda}$ no segundo termo, então

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -G^{\rho\kappa} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\kappa\beta\lambda}V_\beta A_\lambda. \quad (\text{I.0.18})$$

Portanto, substituindo a Eq. (I.0.18) e Eq. (I.0.10) na Eq. (I.0.9), obtemos

$$-\frac{1}{4}\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} - J^\kappa - \partial_\rho \left[-G^{\rho\kappa} - \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\kappa\beta\lambda}V_\beta A_\lambda \right] = 0, \quad (\text{I.0.19})$$

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\kappa\beta\lambda}V_\beta \partial_\rho A_\lambda - \frac{1}{4}\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = J^\kappa. \quad (\text{I.0.20})$$

Notamos agora que

$$\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (\text{I.0.21})$$

$$\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta \partial_\mu A_\nu - \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{I.0.22})$$

onde podemos renomear ($\mu \rightarrow \nu; \nu \rightarrow \mu$) no primeiro termo, assim

$$\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = \epsilon^{\beta\kappa\nu\mu}V_\beta \partial_\nu A_\mu - \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{I.0.23})$$

e usando agora $\epsilon^{\beta\kappa\nu\mu} = -\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}$ no primeiro termo novamente, temos

$$\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = -2\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{I.0.24})$$

Substituindo a Eq. (I.0.24) no terceiro termo da Eq. (I.0.20), obtemos

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\kappa\beta\lambda}V_\beta \partial_\rho A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}V_\beta \partial_\nu A_\mu = J^\kappa, \quad (\text{I.0.25})$$

na qual podemos usar $\epsilon^{\rho\kappa\beta\lambda} = -\epsilon^{\kappa\rho\beta\lambda} = \epsilon^{\kappa\beta\rho\lambda}$ no segundo termo e renomear ($\nu \rightarrow \lambda; \mu \rightarrow \rho$) no terceiro termo. Assim, teremos

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\rho\lambda}V_\beta \partial_\rho A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\kappa\rho\lambda}V_\beta \partial_\lambda A_\rho = J^\kappa, \quad (\text{I.0.26})$$

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\rho\lambda}V_\beta \partial_\rho A_\lambda - \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\rho\lambda}V_\beta \partial_\lambda A_\rho = J^\kappa, \quad (\text{I.0.27})$$

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\rho\lambda}V_\beta (\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho) = J^\kappa, \quad (\text{I.0.28})$$

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\rho\lambda}V_\beta F_{\rho\lambda} = J^\kappa, \quad (\text{I.0.29})$$

ou equivalentemente,

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}V_\beta F_{\mu\nu} = J^\kappa. \quad (\text{I.0.30})$$

De posse da Eq. (I.0.30), podemos obter as leis de Gauss e Ampère modificadas. Fazendo $\kappa = 0$

(para se obter a lei de Gauss), obtemos então

$$\partial_\rho G^{\rho 0} + \frac{1}{2} \epsilon^{0\beta\mu\nu} V_\beta F_{\mu\nu} = J^0, \quad (\text{I.0.31})$$

$$\partial_i G^{i0} + \frac{1}{2} \epsilon^{0imn} V_i F_{mn} = J^0, \quad (\text{I.0.32})$$

mas $F_{0i} = E^i = -F_{i0}$, $G^{0i} = -D^i = -G^{i0}$, $F_{mn} = -\epsilon_{mnk} B^k$ e $J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Então a Eq. (I.0.32) resulta em

$$\partial_i D^i - \frac{1}{2} \epsilon^{0imn} \epsilon_{mnk} V_i B^k = \rho, \quad (\text{I.0.33})$$

mas $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}$ e $V_i = -V^i$. Assim

$$\partial_i D^i + \frac{1}{2} \epsilon_{imn} \epsilon_{mnk} (-V^i) B^k = \rho, \quad (\text{I.0.34})$$

$$\partial_i D^i - \frac{1}{2} 2\delta_{ik} V^i B^k = \rho, \quad (\text{I.0.35})$$

$$\partial_i D^i - V^i B^i = \rho, \quad (\text{I.0.36})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \rho. \quad (\text{I.0.37})$$

Escolhendo agora $\kappa = i$ (Lei de Ampère) na Eq. (I.0.30), obtemos

$$\partial_\rho G^{\rho i} + \frac{1}{2} \epsilon^{i\beta\mu\nu} V_\beta F_{\mu\nu} = J^i, \quad (\text{I.0.38})$$

$$\partial_0 G^{0i} + \partial_j G^{ji} + \frac{1}{2} \epsilon^{i0mn} V_0 F_{mn} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij0k} V_j F_{0k} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk0} V_j F_{k0} = J^i, \quad (\text{I.0.39})$$

onde podemos utilizar $\epsilon^{ij0k} = -\epsilon^{ijk0}$ e $F_{0k} = -F_{k0}$ no quarto termo. Então

$$\partial_0 G^{0i} + \partial_j G^{ji} + \frac{1}{2} \epsilon^{i0mn} V_0 F_{mn} + \epsilon^{ij0k} V_j F_{k0} = J^i, \quad (\text{I.0.40})$$

mas $G^{0i} = -D^i$, $G^{ji} = -\epsilon_{jik} H^k$ e $F_{k0} = -E^k$. Assim

$$-\partial_t D^i - \epsilon_{jik} \partial_j H^k - \frac{1}{2} \epsilon^{i0mn} \epsilon_{mnk} V_0 B^k - \epsilon^{ij0k} V_j E^k = J^i, \quad (\text{I.0.41})$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j H^k - \partial_t D^i + \frac{1}{2} \epsilon_{i0mn} \epsilon_{mnk} V_0 B^k + \epsilon_{ijk0} (-V^j) E^k = J^i, \quad (\text{I.0.42})$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j H^k - \partial_t D^i - \frac{1}{2} \epsilon_{i0mn} \epsilon_{mnk} V_0 B^k + \epsilon_{0ijk} V^j E^k = J^i, \quad (\text{I.0.43})$$

onde utilizamos $\epsilon_{ijk0} = -\epsilon_{ij0k} = \epsilon_{0ijk} = -\epsilon_{0ikj}$. Então a Eq. (I.0.43) finalmente resulta em

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} - V_0 \mathbf{B} + (\mathbf{V} \times \mathbf{E}) = \mathbf{J}. \quad (\text{I.0.44})$$

SIMPLIFICANDO EQUAÇÕES DE DISPERSÃO PARA O VÁCUO

J.1 Obtenção da Eq. (6.4.13)

No vácuo, os parâmetros constitutivos são dados por $\mu = 1$, $\epsilon = 1$ e $\sigma = 0$. Então a Eq. (6.4.12a) do modelo modificado por termo *CPT*-ímpar de dimensão 3 se torna

$$(n^2 - 1)^2 - \frac{1}{\omega^2} [V_0^2 n^2 + \mathbf{V}^2 - 2V_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V}^2 n^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})^2] = 0, \quad (\text{J.1.1})$$

onde podemos utilizar $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$. Assim

$$\left(\frac{k^2}{\omega^2} - 1\right)^2 - \frac{1}{\omega^2} \left[V_0^2 \frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} + \mathbf{V}^2 - 2\frac{V_0}{\omega}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) - \frac{\mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right] = 0, \quad (\text{J.1.2})$$

$$\left(\frac{k^2 - \omega^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{\omega^4} [V_0^2 \mathbf{k}^2 + \omega^2 \mathbf{V}^2 - 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2] = 0, \quad (\text{J.1.3})$$

$$[-(\omega^2 - \mathbf{k}^2)]^2 - V_0^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2 \mathbf{V}^2 + 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V}^2 \mathbf{V}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 = 0, \quad (\text{J.1.4})$$

na qual, podemos adicionar e subtrair o termo $\omega^2 V_0^2$, levando a

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 + \omega^2 V_0^2 - V_0^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2 \mathbf{V}^2 - \omega^2 V_0^2 + 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 = 0, \quad (\text{J.1.5})$$

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 + (\omega^2 - \mathbf{k}^2) V_0^2 - \mathbf{V}^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2) - \omega^2 V_0^2 + 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 = 0, \quad (\text{J.1.6})$$

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 + (\omega^2 - \mathbf{k}^2) (V_0^2 - \mathbf{V}^2) - [\omega^2 V_0^2 - 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2] = 0. \quad (\text{J.1.7})$$

Podemos ainda simplificar a Eq. (J.1.7) utilizando os 4-vetores $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ e $V^\mu = (V_0, \mathbf{V})$. Assim, a Eq. (J.1.7) pode finalmente ser reescrita na forma usual encontrada na literatura:

$$p^4 + p^2 V^2 - (p \cdot V)^2 = 0, \quad (\text{J.1.8})$$

onde utilizamos

$$(p \cdot V)^2 = (\omega V_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 = \omega^2 V_0^2 - 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2. \quad (\text{J.1.9})$$

J.2 Obtenção da Eq. (6.5.21)

Para o modelo modificado por termo CPT -ímpar de dimensão 5, temos

$$\tilde{\epsilon}(n^2 - \mu\tilde{\epsilon})^2 - 4(n^2 - 1)^2\mu\omega^2 \left\{ \mu\tilde{\epsilon} [U_0^2 n^2 + \mathbf{U}^2 - 2U_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})] - \mathbf{U}^2 n^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 \right\} = 0. \quad (\text{J.2.1})$$

Para o vácuo, implementamos $\mu = 1$, $\epsilon = 1$ e $\sigma = 0$. Assim, a Eq. (J.2.1) se reduz a

$$(n^2 - 1)^2 \left\{ 1 - 4\omega^2 [U_0^2 n^2 + \mathbf{U}^2 - 2U_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) - \mathbf{U}^2 n^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2] \right\} = 0, \quad (\text{J.2.2})$$

na qual podemos utilizar $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$. Assim, teremos

$$\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left\{ 1 + 4 [-U_0^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2 \mathbf{U}^2 + 2\omega U_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{U}^2 \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2] \right\} = 0. \quad (\text{J.2.3})$$

Vamos agora adicionar e subtrair o termo $\omega^2 U_0^2$:

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 \left\{ 1 + 4 [-U_0^2 \mathbf{k}^2 + \omega^2 U_0^2 - \omega^2 U_0^2 - \omega^2 \mathbf{U}^2 + 2\omega U_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{U}^2 \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2] \right\} = 0, \quad (\text{J.2.4})$$

onde agrupamos os termos destacados, levando a

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 \left\{ 1 + 4 [(\omega^2 - \mathbf{k}^2)(U_0^2 - \mathbf{U}^2) - (\omega^2 U_0^2 - 2\omega U_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2)] \right\} = 0. \quad (\text{J.2.5})$$

Utilizando agora os quadrivetores

$$p^\mu = (\omega, \mathbf{k}), \quad U^\mu = (U_0, \mathbf{U}), \quad (\text{J.2.6})$$

temos

$$p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2, \quad (\text{J.2.7})$$

$$U^2 = U_0^2 - \mathbf{U}^2, \quad (\text{J.2.8})$$

$$(p \cdot U)^2 = \omega^2 U_0^2 - 2\omega U_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2. \quad (\text{J.2.9})$$

Substituindo então essas expressões na Eq. (J.2.5), obtemos finalmente

$$p^4 \left\{ 1 + 4 [p^2 U^2 - (p \cdot U)^2] \right\} = 0. \quad (\text{J.2.10})$$

EQUAÇÕES DE DISPERSÃO DOS MODELOS CPT -ÍMPAR DE DIMENSÕES 3 E 5 EM TERMOS DE QUADRIVETORES

K.1 Modelo CPT -ímpar de dimensão 3

Para o modelo descrito pela Eq. (6.4.1), obtivemos a seguinte equação de dispersão

$$\tilde{\epsilon}(n^2 - \mu\epsilon)^2 - \frac{\mu^2}{\omega} \left\{ \mu\tilde{\epsilon} [V_0^2 n^2 + \mathbf{V}^2 - 2V_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})] - \mathbf{V}^2 n^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})^2 \right\} = 0. \quad (\text{K.1.1})$$

Utilizando agora $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$, podemos reescrever a Eq. (K.1.2) na forma

$$\left(-\frac{\mu}{\omega^2}\right)^2 \left(\tilde{\epsilon}\omega^2 - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu}\right)^2 - \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}\omega^2} \left\{ \mu\tilde{\epsilon} \left[\frac{V_0^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \mathbf{V}^2 - 2\frac{V_0}{\omega}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) \right] - \frac{\mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right\} = 0. \quad (\text{K.1.2})$$

Vamos agora definir o quadri-vetor \bar{p}^μ como

$$\bar{p}^\mu \equiv \left(\sqrt{\tilde{\epsilon}}\omega, \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\mu}} \right), \quad (\text{K.1.3})$$

em analogia com o quadri-vetor usual $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$. Note ainda que

$$\bar{p}^2 = \tilde{\epsilon}\omega^2 - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu}, \quad (\text{K.1.4})$$

que equivale exatamente ao primeiro termo da Eq. (K.1.2). Assim, teremos

$$\bar{p}^4 - \frac{\omega^2}{\mu\tilde{\epsilon}} \left\{ \mu\tilde{\epsilon} \left[\frac{V_0^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \mathbf{V}^2 - 2\frac{V_0}{\omega}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \right] - \frac{\mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right\} = 0, \quad (\text{K.1.5})$$

$$\bar{p}^4 + \left[-V_0 \mathbf{k}^2 - \omega^2 \mathbf{V}^2 + 2\omega V_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} \mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2 - \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right] = 0, \quad (\text{K.1.6})$$

onde podemos simplificar o segundo e quarto termos dentro dos colchetes:

$$-\omega^2 \mathbf{V}^2 + \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} \mathbf{V}^2 \mathbf{k}^2 = -\frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}} \left(\tilde{\epsilon}\omega^2 - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu} \right) = -\frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}} \bar{p}^2. \quad (\text{K.1.7})$$

Substituindo a Eq. (K.1.7) na Eq. (K.1.6), obtemos

$$\bar{p}^4 + \left[-\frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}} \bar{p}^2 - V_0^2 \mathbf{k}^2 + 2\omega V_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) - \frac{1}{\mu \tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right] = 0. \quad (\text{K.1.8})$$

Vamos agora adicionar e subtrair o termo $V_0^2 \omega^2 \mu \tilde{\epsilon}$:

$$\bar{p}^4 + \left[-\frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}} \bar{p}^2 - V_0^2 \mathbf{k}^2 + V_0^2 \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} - V_0^2 \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} + 2\omega V_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) - \frac{1}{\mu \tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right] = 0, \quad (\text{K.1.9})$$

na qual podemos simplificar segundo e terceiro termos dentro dos colchetes

$$-V_0^2 \mathbf{k}^2 + V_0^2 \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} = V_0^2 \mu \left(\tilde{\epsilon} \omega^2 - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu} \right) = V_0^2 \mu \bar{p}^2. \quad (\text{K.1.10})$$

Substituindo essa última expressão na Eq. (K.1.9), teremos

$$\bar{p}^4 + \left\{ -\frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}} \bar{p}^2 + V_0^2 \mu \bar{p}^2 - \left[V_0^2 \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} - 2\omega V_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\mu \tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right] \right\} = 0, \quad (\text{K.1.11})$$

$$\bar{p}^4 + \left\{ \bar{p}^2 \left(\mu V_0^2 - \frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}} \right) - \left[V_0^2 \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} - 2\omega V_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\mu \tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2 \right] \right\} = 0. \quad (\text{K.1.12})$$

Vamos agora definir o quadri-vetor \bar{V}^μ como

$$\bar{V}^\mu \equiv \left(\sqrt{\mu} V_0, \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right), \quad (\text{K.1.13})$$

em analogia a $V^\mu = (V_0, \mathbf{V})$. Note ainda que

$$\bar{V}^2 = \mu V_0^2 - \frac{\mathbf{V}^2}{\tilde{\epsilon}}, \quad (\text{K.1.14})$$

e também que

$$(\bar{p} \cdot \bar{V})^2 = \left(\sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}} \omega V_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}}{\sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right)^2 = \omega^2 V_0^2 \mu \tilde{\epsilon} - 2\omega V_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})^2}{\mu \tilde{\epsilon}}. \quad (\text{K.1.15})$$

Assim, utilizando as Eqs. (K.1.14) e (K.1.15) na Eq. (K.1.12), obtemos finalmente

$$\bar{p}^4 + \bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 = 0. \quad (\text{K.1.16})$$

Vamos agora reescrever a Eq. (K.1.16) em termos dos quadri-vetores p^μ e V^μ . Esse procedimento nos permitirá redefinir a métrica de forma que a mesma incorpore os parâmetros constitutivos do meio.

Do primeiro termo da Eq. (K.1.16), podemos fazer

$$\begin{aligned}\bar{p}^2 &= \bar{p}^\mu \bar{p}_\mu, \\ &= \bar{p}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{p}^\nu, \\ &= \bar{p}^0 \eta_{00} \bar{p}^0 + \bar{p}^i \eta_{ii} \bar{p}^i,\end{aligned}\tag{K.1.17}$$

na qual podemos utilizar a definição dada na Eq. (K.1.3). Assim, teremos

$$\bar{p}^2 = \omega(\tilde{\epsilon}\eta_{00})\omega + k^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} k^i,\tag{K.1.18}$$

de onde iremos definir o tensor métrico efetivo $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ com as seguintes componentes

$$\tilde{\eta}_{00} \equiv \tilde{\epsilon}\eta_{00} = \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{\eta}_{ii} \equiv \frac{\eta_{ii}}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\delta_{ij}.\tag{K.1.19}$$

Assim, temos

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} \equiv \text{diag}\left(\tilde{\epsilon}, -\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\mu}\right).\tag{K.1.20}$$

Como $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, a Eq. (K.1.18) se torna agora

$$\bar{p}^2 = p^0 \tilde{\eta}_{00} p^0 + p^i \tilde{\eta}_{ii} p^i,\tag{K.1.21}$$

$$\bar{p}^2 = (p \cdot \tilde{\eta} \cdot p).\tag{K.1.22}$$

Manipulando agora o segundo e terceiro termos da Eq. (K.1.16), teremos

$$\begin{aligned}\bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 &= (\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu) (\bar{V}^\mu \bar{V}_\mu) - (\bar{V}^\mu \bar{p}_\mu)^2, \\ &= (\bar{p}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{p}^\nu) (\bar{V}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{V}^\nu) - (\bar{V}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{V}^\nu)^2, \\ &= (\bar{p}^0 \eta_{00} \bar{p}^0 + \bar{p}^i \eta_{ii} \bar{p}^i) (\bar{V}^0 \eta_{00} \bar{V}^0 + \bar{V}^i \eta_{ii} \bar{V}^i) - (\bar{V}^0 \eta_{00} \bar{p}^0 + \bar{V}^i \eta_{ii} \bar{p}^i)^2,\end{aligned}\tag{K.1.23}$$

na qual utilizamos as definições dadas na Eq. (K.1.3) e na Eq. (K.1.13). Assim, teremos

$$\begin{aligned}\bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 &= \left(\omega \tilde{\epsilon} \eta_{00} \omega + k^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} k^i\right) \left(V^0 \mu \eta_{00} V^0 + V^i \frac{\eta_{ii}}{\tilde{\epsilon}} V^i\right) + \\ &\quad - \left(V^0 \sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}} \eta_{00} \omega + V^i \frac{\eta_{ii}}{\sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}}} k^i\right)^2.\end{aligned}\tag{K.1.24}$$

Podemos por em evidência os fatores $(\mu/\tilde{\epsilon})$ a partir do segundo termo entre parênteses e $(\sqrt{\mu}/\sqrt{\tilde{\epsilon}})$,

do terceiro termo entre parênteses. Consequentemente, teremos

$$\begin{aligned} \bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 &= \left(\omega \tilde{\epsilon} \eta_{00} \omega + k^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} k^i \right) \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left(V^0 \tilde{\epsilon} \eta_{00} V^0 + V^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} V^i \right) + \\ &\quad - \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right)^2 \left(V^0 \tilde{\epsilon} \eta_{00} \omega + k^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} V^i \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{K.1.25})$$

Para simplificar agora, utilizamos a definição do tensor métrico efetivo, dada na Eq. (K.1.20), e também $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ e $V^\mu = (V^0, \mathbf{V})$. Dessa forma, a Eq. (K.1.25) resulta em

$$\bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 = \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left[(p^0 \tilde{\eta}_{00} p^0 + p^i \tilde{\eta}_{ii} p^i) (V^0 \tilde{\eta}_{00} V^0 + V^i \tilde{\eta}_{ii} V^i) - (p^0 \tilde{\eta}_{00} V^0 + p^i \tilde{\eta}_{ii} V^i)^2 \right], \quad (\text{K.1.26})$$

$$\bar{p}^2 \bar{V}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{V})^2 = \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left[(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p) (V \cdot \tilde{\eta} \cdot V) - (p \cdot \tilde{\eta} \cdot V)^2 \right]. \quad (\text{K.1.27})$$

Substituindo agora a Eq. (K.1.27) e a Eq. (K.1.22) na Eq. (K.1.16), a equação de dispersão, dada pela Eq. (K.1.2) ou equivalentemente pela Eq. (K.1.16), pode ser reescrita como

$$(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p)^2 + \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left[(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p) (V \cdot \tilde{\eta} \cdot V) - (p \cdot \tilde{\eta} \cdot V)^2 \right] = 0, \quad (\text{K.1.28})$$

com o tensor métrico efetivo $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ definido na Eq. (K.1.20).

K.2 Modelo CPT-ímpar de dimensão 5

Para o modelo descrito pela Eq. (6.5.1), obtivemos a seguinte equação de dispersão

$$\tilde{\epsilon} (n^2 - \mu \tilde{\epsilon})^2 - 4(n^2 - 1)^2 \mu \omega^2 \left\{ \mu \tilde{\epsilon} \left[U_0^2 n^2 + \mathbf{U}^2 - 2U_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \right] - \mathbf{U}^2 n^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 \right\} = 0. \quad (\text{K.2.1})$$

Utilizando $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$, podemos reescrevê-la como

$$\left(\frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} - \mu \tilde{\epsilon} \right)^2 - 4 \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \omega \left\{ \mu \tilde{\epsilon} \left[U_0^2 \frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} + \mathbf{U}^2 - 2 \frac{U_0}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) \right] - \frac{\mathbf{U}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right\} = 0, \quad (\text{K.2.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\omega^4} \left(\omega^2 \tilde{\epsilon} - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu} \right)^2 - \frac{4}{\omega^4} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \omega^2 \left\{ \mu \tilde{\epsilon} \left[U_0^2 \frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} + \mathbf{U}^2 - 2 \frac{U_0}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) \right] + \right. \\ \left. - \frac{\mathbf{U}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{K.2.3})$$

na qual podemos utilizar

$$\bar{p}^2 = \tilde{\epsilon} \omega^2 - \mathbf{k}^2 / \mu, \quad p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2, \quad (\text{K.2.4})$$

com \bar{p}^μ dada pela Eq. (K.1.3) e $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$. Assim, teremos

$$\bar{p}^4 - 4p^4 \frac{\omega^2}{\mu\tilde{\epsilon}} \left\{ \mu\tilde{\epsilon} \left[U_0^2 \frac{\mathbf{k}^2}{\omega^2} + \mathbf{U}^2 - 2\frac{U_0}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) \right] - \frac{\mathbf{U}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} - \frac{\mathbf{U}^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right\} = 0, \quad (\text{K.2.5})$$

$$\bar{p}^4 + 4p^4 \left[-U_0^2 \mathbf{k}^2 - \frac{\mathbf{U}^2}{\tilde{\epsilon}} \left(\tilde{\epsilon} \omega^2 - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu} \right) + 2\omega U_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) - \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right] = 0, \quad (\text{K.2.6})$$

$$\bar{p}^4 + 4p^4 \left[-\bar{p}^2 \frac{\mathbf{U}^2}{\tilde{\epsilon}} - U_0^2 \mathbf{k}^2 + 2\omega U_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) - \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right] = 0, \quad (\text{K.2.7})$$

onde utilizamos a Eq. (K.2.4). Vamos agora adicionar e subtrair o termo $\omega^2 U_0^2 \mu\tilde{\epsilon}$, o que nos permite escrever

$$\bar{p}^4 + 4p^4 \left[-\bar{p}^2 \frac{\mathbf{U}^2}{\tilde{\epsilon}} + U_0^2 \mu \left(\omega^2 \tilde{\epsilon} - \frac{\mathbf{k}^2}{\mu} \right) - \omega^2 U_0^2 \mu\tilde{\epsilon} + 2\omega U_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) - \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right] = 0, \quad (\text{K.2.8})$$

$$\bar{p}^4 + 4p^4 \left\{ \bar{p}^2 \left(\mu U_0^2 - \frac{\mathbf{U}^2}{\tilde{\epsilon}} \right) - \left[\omega^2 U_0^2 \mu\tilde{\epsilon} - 2\omega U_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 \right] \right\} = 0, \quad (\text{K.2.9})$$

de onde podemos definir

$$\bar{U}^\mu \equiv \left(\sqrt{\mu} U_0, \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right). \quad (\text{K.2.10})$$

Com essa definição, temos

$$\bar{U}^2 = \mu U_0^2 - \frac{\mathbf{U}^2}{\tilde{\epsilon}}, \quad (\text{K.2.11})$$

e também

$$(\bar{p} \cdot \bar{U})^2 = \left(\sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}} \omega U_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}}{\sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right)^2 = \omega^2 U_0^2 \mu\tilde{\epsilon} - 2\omega U_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{\mu\tilde{\epsilon}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2. \quad (\text{K.2.12})$$

Assim, podemos simplificar a Eq. (K.2.9) e obter finalmente

$$\bar{p}^4 + 4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 0. \quad (\text{K.2.13})$$

Vamos agora reescrever a Eq. (K.2.13) em termos dos quadri-momento usual p^μ e do campo de fundo U^μ . Seguindo a mesma abordagem realizada entre as Eqs. (K.1.17) e (K.1.22), temos

$$\bar{p}^2 = (p \cdot \tilde{\eta} \cdot p), \quad (\text{K.2.14})$$

com o tensor métrico efeito $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ dado na Eq. (K.1.20). Manipulando agora os outros termos da Eq. (K.2.13), teremos

$$p^2 = p^\mu p_\mu = p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = p \cdot \eta \cdot p. \quad (\text{K.2.15})$$

E também

$$4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 4(p \cdot \eta \cdot p)^2 \left[(\bar{p}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{p}^\nu) (\bar{U}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{U}^\nu) - (\bar{p}^\mu \eta_{\mu\nu} \bar{U}^\nu)^2 \right], \quad (\text{K.2.16})$$

$$4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 4(p \cdot \eta \cdot p)^2 \left[(\bar{p}^0 \eta_{00} \bar{p}^0 + \bar{p}^i \eta_{ii} \bar{p}^i) (\bar{U}^0 \eta_{00} \bar{U}^0 + \bar{U}^i \eta_{ii} \bar{U}^i) + \right. \\ \left. - (\bar{p}^0 \eta_{00} \bar{U}^0 + \bar{p}^i \eta_{ii} \bar{U}^i)^2 \right]. \quad (\text{K.2.17})$$

Utilizando agora a Eq. (K.2.10) e a Eq. (K.1.3), obtemos

$$4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 4(p \cdot \eta \cdot p)^2 \left[\left(p^0 \tilde{\epsilon} \eta_{00} p^0 + p^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} k^i \right) \left(U^0 \mu \eta_{00} U^0 + U^i \frac{\eta_{ii}}{\tilde{\epsilon}} U^i \right) + \right. \\ \left. - \left(p^0 \sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}} \eta_{00} U^0 + p^i \frac{\eta_{ii}}{\sqrt{\mu} \sqrt{\tilde{\epsilon}}} U^i \right)^2 \right], \quad (\text{K.2.18})$$

onde utilizamos $\bar{p}^\mu = (\sqrt{\tilde{\epsilon}}\omega, \mathbf{k}/\sqrt{\mu})$, $\bar{U}^\mu = (\sqrt{\mu}U_0, \mathbf{U}/\sqrt{\tilde{\epsilon}})$, $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ e $U^\mu = (U_0, \mathbf{U})$. Podemos agora por em evidência os fatores $(\mu/\tilde{\epsilon})$ a partir do segundo fator entre parênteses, e $(\sqrt{\mu}/\sqrt{\tilde{\epsilon}})$ a partir do terceiro termo entre parênteses. Assim, obtemos

$$4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 4(p \cdot \eta \cdot p)^2 \left[\left(p^0 \tilde{\epsilon} \eta_{00} p^0 + p^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} p^i \right) \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \left(U^0 \tilde{\epsilon} \eta_{00} U^0 + U^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} U^i \right) + \right. \\ \left. - \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}} \right)^2 \left(p^0 \tilde{\epsilon} \eta_{00} U^0 + p^i \frac{\eta_{ii}}{\mu} U^i \right)^2 \right], \quad (\text{K.2.19})$$

$$4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 4 \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} (p \cdot \eta \cdot p)^2 \left[(p^0 \tilde{\eta}_{00} p^0 + p^i \tilde{\eta}_{ii} p^i) (U^0 \tilde{\eta}_{00} U^0 + U^i \tilde{\eta}_{ii} U^i) + \right. \\ \left. - (p^0 \tilde{\eta}_{00} U^0 + p^i \tilde{\eta}_{ii} U^i)^2 \right], \quad (\text{K.2.20})$$

$$4p^4 \left[\bar{p}^2 \bar{U}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{U})^2 \right] = 4 \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} (p \cdot \eta \cdot p)^2 \left[(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p) (U \cdot \tilde{\eta} \cdot U) - (p \cdot \tilde{\eta} \cdot U)^2 \right], \quad (\text{K.2.21})$$

onde utilizamos o tensor métrico efetivo dado na Eq. (K.1.20). Substituindo agora a Eq. (K.2.21), Eq. (K.2.14) e Eq. (K.2.15) na relação dada na Eq. (K.2.13), a equação de dispersão é finalmente

reescrita na forma

$$(p \cdot \tilde{\epsilon} \cdot p)^2 + 4 \frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} (p \cdot \eta \cdot p)^2 [(p \cdot \tilde{\eta} \cdot p) (U \cdot \tilde{\eta} \cdot U) - (p \cdot \tilde{\eta} \cdot U)^2] = 0. \quad (\text{K.2.22})$$

Apêndice **L**

MODOS DE PROPAGAÇÃO DO MODELO CPT -ÍMPAR DE DIMENSÃO 3

A seguir, iremos calcular explicitamente os vetores de polarização que descrevem os modos de propagação dos cenários timelike e spacelike do modelo descrito pela Eq. (6.4.1).

L.1 Caso timelike

Vamos calcular os modos de propagação para o caso puramente timelike, $V_0 \neq 0$; $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Da Eq. (6.4.18), temos

$$n^2 - \mu\tilde{\epsilon} = \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n. \quad (\text{L.1.1})$$

Substituindo a Eq. (L.1.1) na Eq. (6.4.11a), obtemos

$$[M_{ia}] = \begin{pmatrix} \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_1^2 & -n_1 n_2 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_3 & -n_1 n_3 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_2 \\ -n_2 n_1 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_3 & \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_2^2 & -n_2 n_3 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_1 \\ -n_3 n_1 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_2 & -n_3 n_2 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_1 & \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_3^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.1.2})$$

Assim $M_{ia} E^a = 0$ se torna

$$\begin{pmatrix} \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_1^2 & -n_1 n_2 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_3 & -n_1 n_3 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_2 \\ -n_2 n_1 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_3 & \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_2^2 & -n_2 n_3 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_1 \\ -n_3 n_1 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_2 & -n_3 n_2 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_1 & \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{L.1.3})$$

que leva a

$$\begin{cases} (\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_1^2) E_x + (-n_1 n_2 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_3) E_y + (-n_1 n_3 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_2) E_z = 0 \\ (-n_1 n_2 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_3) E_x + (\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_2^2) E_y + (-n_2 n_3 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_1) E_z = 0 \\ (-n_1 n_3 - \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_2) E_x + (-n_2 n_3 + \frac{i}{\omega} \mu V_0 n_1) E_y + (\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_3^2) E_z = 0 \end{cases}. \quad (\text{L.1.4})$$

Vamos multiplicar a segunda equação da Eq. (L.1.4) por $[\pm(\mu/\omega)V_0 n - n_3^2]$, depois multiplicar a terceira equação da Eq. (L.1.4) por $[n_2 n_3 + i(\mu/\omega)V_0 n_1]$. Assim, somando esses dois produtos,

os termos em E_Z se cancelam, resultando apenas

$$E_x \left[\left(-n_1 n_2 + i \frac{\mu}{\omega} V_0 n_3 \right) \left(\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_3^2 \right) + \left(-n_1 n_3 - i \frac{\mu}{\omega} V_0 n_2 \right) \left(n_2 n_3 + i \frac{\mu}{\omega} V_0 n_1 \right) \right] + E_y \left[\left(\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_2^2 \right) \left(\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_3^2 \right) + \left(-n_1 n_3 + i \frac{\mu V_0}{\omega} n_1 \right) \left(n_2 n_3 + i \frac{\mu}{\omega} V_0 n_1 \right) \right] = 0, \quad (\text{L.1.5})$$

$$E_x \left[\mp \frac{\mu V_0}{\omega} n n_1 n_2 + n_1 n_2 n_3^2 \pm i \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} n n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_3^3 - n_1 n_2 n_3^2 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_1^2 n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2^2 n_3 \right] + E_y \left[\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} n^2 \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n n_3^2 \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n n_2^2 + n_2^2 n_3^2 - n_2^2 n_3^2 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_1 n_2 n_3 + i \frac{\mu V_0}{\omega} n_1 n_2 n_3 - \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} n_1^2 \right] = 0, \quad (\text{L.1.6})$$

$$E_x \left[\mp \frac{\mu V_0}{\omega} n n_1 n_2 \pm i \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} n n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} (n_3^3 + n_1^2 n_3) + \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} n_1 n_2 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2^2 n_3 \right] + E_y \left[\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} (n^2 - n_1^2) \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n (n_3^2 + n_2^2) \right] = 0, \quad (\text{L.1.7})$$

onde podemos utilizar $n_3^2 + n_2^2 = n^2 - n_1^2$ no último termo. Assim

$$\left[\mp \frac{\mu V_0}{\omega} [n n_1 n_2 \pm i n_3 (n_3^2 + n_1^2)] + \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} (n_1 n_2 \pm i n n_3) - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2^2 n_3 \right] E_x + \left[(n^2 - n_1^2) \left(\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n \right) \right] E_y = 0, \quad (\text{L.1.8})$$

no qual podemos usar novamente $n_3^2 + n_2^2 = n^2 - n_1^2$ no segundo termo do dentro dos colchetes (que multiplicam E_x), obtendo

$$\left[\mp \frac{\mu V_0}{\omega} (n n_1 n_2 \pm i n^2 n_3^2 \mp i n_3 n_2^2 \pm i n_2^2 n_3) + \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} (n_1 n_2 \pm i n n_3) \right] E_x = - (n^2 - n_1^2) \left(\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n \right) E_y, \quad (\text{L.1.9})$$

$$\left[\mp \frac{\mu V_0}{\omega} (n n_1 n_2 \pm i n^2 n_3^2) + \frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} (n_1 n_2 \pm i n n_3) \right] E_x = - (n^2 - n_1^2) \left(\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n \right) E_y, \quad (\text{L.1.10})$$

$$(n_1 n_2 \pm i n n_3) \left(\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n \right) E_x = - (n^2 - n_1^2) \left(\frac{\mu^2 V_0^2}{\omega^2} \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n \right) E_y, \quad (\text{L.1.11})$$

a qual fornece

$$E_y = \frac{\mp inn_3 - n_1 n_2}{n^2 - n_1^2} E_x. \quad (\text{L.1.12})$$

Substituindo a Eq. (L.1.12) na primeira expressão da Eq. (L.1.4), obtemos

$$\left[\left(\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_1^2 \right) + \left(-n_1 n_2 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_3 \right) \frac{(\mp inn_3 - n_1 n_2)}{n^2 - n_1^2} \right] E_x + \left(-n_1 n_3 + i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2 \right) E_z = 0, \quad (\text{L.1.13})$$

$$\left[(n^2 - n_1^2) \left(\pm \frac{\mu V_0}{\omega} n - n_1^2 \right) + \left(-n_1 n_2 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_3 \right) (\mp inn_3 - n_1 n_2) \right] E_x + (n^2 - n_1^2) \left(-n_1 n_3 + i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2 \right) E_z = 0, \quad (\text{L.1.14})$$

$$\left[\frac{\mu V_0}{\omega} n n_2^2 - n_1^2 n_2^2 \pm \frac{\mu V_0}{\omega} n n_3^2 - n_1^2 n_3^2 \pm i n n_1 n_2 n_3 + n_1^2 n_2^2 \mp \frac{\mu V_0}{\omega} n n_3^2 + i \frac{\mu V_0}{\omega} n_1 n_2 n_3 \right] E_x = (n^2 - n_1^2) \left(n_1 n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2 \right) E_z, \quad (\text{L.1.15})$$

onde iremos colocar o fator $\pm inn_2$ em evidência a partir dos termos destacados em azul; e iremos colocar em evidência também o fator $-n_1 n_3$ dos termos destacados em vermelho. Assim, obtemos

$$(n^2 - n_1^2) \left(n_1 n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2 \right) E_z = \left[\pm inn_2 \left(n_1 n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2 \right) - n_1 n_3 \left(n_1 n_3 - i \frac{\mu V_0}{\omega} n_2 \right) \right] E_x, \quad (\text{L.1.16})$$

que finalmente nos fornece

$$E_z = \frac{\pm inn_2 - n_1 n_3}{n^2 - n_1^2} E_x. \quad (\text{L.1.17})$$

Portanto, utilizando a Eq. (L.1.12) e a Eq. (L.1.17), obtemos

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_x}{n^2 - n_1^2} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \mp inn_3 n - n_1 n_2 \\ \pm inn_2 n - n_1 n_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.1.18})$$

Normalizando esses vetores, teremos

$$|\mathbf{E}_{\pm}|^2 = \mathbf{E}_{\pm}^* \mathbf{E}_{\pm} = 1, \quad (\text{L.1.19})$$

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{(\pm in_3 n - n_1 n_2)(\mp in_3 n - n_1 n_2)}{(n^2 - n_1^2)^2} + \frac{(\mp in_2 n - n_1 n_3)(\pm in_2 n - n_1 n_3)}{(n^2 - n_1^2)^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.20})$$

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{n_3^2 n^2 \mp in_1 n_2 n_3 n \pm in_1 n_2 n_3 n + n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n^2 \pm in_1 n_2 n_3 n \mp in_1 n_2 n_3 n + n_1^2 n_3^2}{(n^2 - n_1^2)^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.21})$$

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{(n_2^2 + n_3^2)(n^2 + n_1^2)}{(n^2 - n_1^2)^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.22})$$

que pode ser simplificada utilizando-se $(n^2 - n_1^2) = n_2^2 + n_3^2$, então teremos

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{n^2 + n_1^2}{n_2^2 + n_3^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.23})$$

$$|E_x|^2 \left[\frac{n_2^2 + n_3^2 + n^2 + n_1^2}{n_2^2 + n_3^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.24})$$

$$|E_x|^2 \left[\frac{2n^2}{n_2^2 + n_3^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.25})$$

onde podemos utilizar novamente $(n^2 - n_1^2) = n_2^2 + n_3^2$, logo

$$|E_x|^2 \left[\frac{2n^2}{n^2 - n_1^2} \right] = 1, \quad (\text{L.1.26})$$

$$|E_x|^2 = \frac{n^2 - n_1^2}{2n^2}, \quad (\text{L.1.27})$$

da qual escolhemos

$$E_x = \frac{\sqrt{n^2 - n_1^2}}{\sqrt{2}n}. \quad (\text{L.1.28})$$

Therefore the normalized propagating modes are given by

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sqrt{n^2 - n_1^2}} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \mp in_3 n - n_1 n_2 \\ \pm in_2 n - n_1 n_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.1.29})$$

L.2 Caso spacelike

A seguir, calculamos os vetores de polarização dos casos \mathbf{V} -perpendicular e \mathbf{V} -longitudinal do cenário spacelike, $V_0 = 0$ e $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$. Lembrando que no cenário spacelike temos

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm \frac{\mu|\mathbf{V}|}{\omega} \alpha, \quad (\text{L.2.1})$$

com

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{\mu\epsilon}}. \quad (\text{L.2.2})$$

Considerando um sistema de coordenadas onde $\mathbf{n} = (0, 0, m)$, a Eq. (6.4.11a) simplifica-se em

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon & i\mu V_3/\omega & -i\mu V_2/\omega \\ -i\mu V_3/\omega & n^2 - \mu\epsilon & i\mu V_1/\omega \\ i\mu V_2/\omega & -i\mu V_1/\omega & -\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2.3})$$

L.2.1 \mathbf{V} -perpendicular

Nesse caso, temos $\sin^2 \theta = 1$ e $\mathbf{V} = (V_1, V_2, 0)$. Além disso, os índices de refração obtidos são dados por

$$n_+^2 = \mu\epsilon, \quad n_-^2 = \mu\epsilon - \frac{\mu\mathbf{V}^2}{\epsilon\omega^2}. \quad (\text{L.2.4})$$

Dessa forma, teremos dois valores de α :

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{n_{\pm}^2}{\mu\epsilon}}. \quad (\text{L.2.5})$$

Para o modo (+), temos

$$\alpha_+ = 0, \quad (\text{L.2.6})$$

o que leva a

$$n_+^2 - \mu\epsilon = 0. \quad (\text{L.2.7})$$

Substituindo a Eq. (L.2.7) na Eq. (L.2.3), a condição $M_{ij}E^j = 0$ leva a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\mu V_2/\omega \\ 0 & 0 & i\mu V_1/\omega \\ i\mu V_2/\omega & -i\mu V_1/\omega & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{L.2.8})$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos

$$E_z = 0, \quad E_y = \frac{V_2}{V_1} E_x. \quad (\text{L.2.9})$$

Assim, teremos o campo \mathbf{E}_+ dado por

$$\mathbf{E}_+ = \frac{E_x}{V_1} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2.10})$$

Normalizando \mathbf{E}_+ , ou seja, $\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{E}_+^* = 1$, obtemos

$$\frac{E_x^2}{V_1^2} (V_1^2 + V_2^2) = 1 \rightarrow E_x = \frac{V_1}{|\mathbf{V}|}, \quad (\text{L.2.11})$$

onde $|\mathbf{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$. Assim, o modo (+) tem polarização descrita por

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{\mathbf{V}}, \quad (\text{L.2.12})$$

onde $\hat{\mathbf{V}}$ é o vetor unitário que aponta ao longo da direção do campo de fundo \mathbf{V} .

Para o modo (-), temos

$$\alpha_- = \frac{|\mathbf{V}|}{\epsilon\omega}. \quad (\text{L.2.13})$$

Assim,

$$n_-^2 - \mu\epsilon = \pm \frac{\mu\mathbf{V}^2}{\epsilon\omega^2}. \quad (\text{L.2.14})$$

Substituindo a Eq. (L.2.14) na Eq. (L.2.3), a condição $M_{ij}E^j = 0$ é escrita como

$$\begin{pmatrix} \pm\mu\mathbf{V}^2/(\epsilon\omega^2) & 0 & -i\mu V_2/\omega \\ 0 & \pm\mu\mathbf{V}^2/(\epsilon\omega^2) & i\mu V_1/\omega \\ i\mu V_2/\omega & -i\mu V_1/\omega & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{L.2.15})$$

que leva a

$$\begin{cases} \pm \frac{\mu\mathbf{V}^2}{\epsilon\omega^2} E_x - i \frac{\mu}{\omega} V_2 E_z = 0 \\ \pm \frac{\mu\mathbf{V}^2}{\epsilon\omega^2} E_y + i \frac{\mu}{\omega} V_1 E_z = 0 \\ i \frac{\mu}{\omega} V_2 E_x - i \frac{\mu}{\omega} V_1 E_y - \mu\epsilon E_z = 0 \end{cases}. \quad (\text{L.2.16})$$

Vamos multiplicar a primeira expressão da Eq. (L.2.16) por V_1 e depois somar esse produto com o

produto da segunda expressão com V_2 . Assim os termos em E_z se cancelam, restando

$$\pm \frac{\mu \mathbf{V}^2}{\epsilon \omega^2} V_1 E_x \pm \frac{\mu \mathbf{V}^2}{\epsilon \omega^2} V_2 E_y = 0, \quad (\text{L.2.17})$$

$$E_y = -\frac{V_1}{V_2} E_x. \quad (\text{L.2.18})$$

Substituindo agora a Eq. (L.2.18) na terceira expressão da Eq. (L.2.16), obtemos

$$E_z = \frac{i}{\epsilon \omega} \frac{\mathbf{V}^2}{V_2} E_x. \quad (\text{L.2.19})$$

Logo, o campo \mathbf{E}_- será dado por

$$\mathbf{E}_- = \frac{E_x}{V_2} \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \\ i\mathbf{V}^2/(\epsilon\omega) \end{pmatrix} = E_0^{(-)} \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \\ i\mathbf{V}^2/(\epsilon\omega) \end{pmatrix}, \quad (\text{L.2.20})$$

onde $E_0^{(-)}$ é uma amplitude escolhida apropriadamente.

L.2.2 V-longitudinal

Neste caso, temos $\sin^2 \theta = 0$ e $\mathbf{V} = (0, 0, V_3)$. Assim, teremos da Eq. (L.2.2)

$$\alpha_{\pm} = 1. \quad (\text{L.2.21})$$

Consequentemente, a Eq. (L.2.1) simplifica-se em

$$n_{\pm}^2 - \mu\epsilon = \pm \frac{\mu|\mathbf{V}|}{\omega}. \quad (\text{L.2.22})$$

Implementamos agora a Eq. (L.2.22) e $\mathbf{V} = (0, 0, V_3)$ na Eq. (L.2.3), assim $M_{ij}E^j = 0$ nos fornece

$$\begin{pmatrix} \pm\mu|\mathbf{V}|/\omega & i\mu V_3/\omega & 0 \\ -i\mu V_3/\omega & \pm\mu|\mathbf{V}|/\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{L.2.23})$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos

$$E_y = \pm i E_x, \quad E_z = 0. \quad (\text{L.2.24})$$

Assim, os vetores de polarização serão dados por

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{L.2.25})$$

que, após normalizados, resultam em

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2.26})$$

Apêndice M

OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL MODIFICADAS POR TERMO CPT -ÍMPAR DE DIMENSÃO 5 EM MEIOS

Podemos reescrever a Eq. (6.5.7) na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)\partial^\eta F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu, \quad (\text{M.0.1})$$

onde utilizamos a Eq. (I.0.7), e também fizemos

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta A_\lambda\partial_\eta\partial^\eta F_{\mu\nu} = \partial_\eta\left(\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta A_\lambda\partial^\eta F_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)\partial^\eta F_{\mu\nu}, \quad (\text{M.0.2})$$

da qual negligenciamos a quadridivergência total. Agora, podemos seguir e utilizar a equação de Euler-Lagrange dada na Eq. (6.5.8), para obtermos as equações de Maxwell modificadas. Teremos então

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)}\left[-\frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu\right] + \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)}\left[-\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)\partial^\eta F_{\mu\nu}\right], \quad (\text{M.0.3})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -G^{\rho\kappa} - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}U_\beta\delta_{\eta\rho}\delta_{\lambda\kappa}\partial^\eta F_{\mu\nu} = -G^{\rho\kappa} - \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}U_\beta\partial^\rho F_{\mu\nu}, \quad (\text{M.0.4})$$

e também

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)}\left[-\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)(\partial^\eta\partial_\mu A_\nu - \partial^\eta\partial_\nu A_\mu)\right], \quad (\text{M.0.5})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)\eta^{\eta\rho}\partial_{\mu\alpha}\delta_{\nu\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}U_\beta(\partial_\eta A_\lambda)g^{\eta\rho}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\kappa}, \quad (\text{M.0.6})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa}U_\beta\partial^\rho A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon^{\beta\lambda\kappa\alpha}U_\beta\partial^\rho A_\lambda = -\epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa}U_\beta\partial^\rho A_\lambda. \quad (\text{M.0.7})$$

Substituindo agora as Eqs. (M.0.4), (M.0.7) e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -J^\kappa$ na Eq. (6.5.8), teremos

$$-J^\kappa - \partial_\rho \left[-G^{\rho\kappa} - \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \partial^\rho F_{\mu\nu} \right] + \partial_\rho \partial_\alpha [-\epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \partial^\rho A_\lambda] = 0, \quad (\text{M.0.8})$$

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \square F_{\mu\nu} - \epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square \partial_\alpha A_\lambda = J^\kappa, \quad (\text{M.0.9})$$

mas

$$\epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square F_{\lambda\alpha} = \epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square \partial_\lambda A_\alpha - \epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square \partial_\alpha A_\lambda, \quad (\text{M.0.10})$$

$$\epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square F_{\lambda\alpha} \stackrel{(1)}{=} \epsilon^{\beta\alpha\lambda\kappa} U_\beta \square \partial_\alpha A_\lambda - \epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square \partial_\alpha A_\lambda, \quad (\text{M.0.11})$$

$$\epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square F_{\lambda\alpha} = -2\epsilon^{\beta\alpha\lambda\kappa} U_\beta \square \partial_\alpha A_\lambda, \quad (\text{M.0.12})$$

onde redefinimos, no passo (1), ($\lambda \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \lambda$) no primeiro termo do lado direito da Eq. (M.0.11). Utilizando a Eq. (M.0.12) na Eq. (M.0.9), obtemos

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\lambda\alpha\kappa} U_\beta \square F_{\lambda\alpha} = J^\kappa, \quad (\text{M.0.13})$$

que pode ser simplificada fazend-se ($\lambda \rightarrow \mu, \alpha \rightarrow \nu$) no terceiro termo do lado esquerdo da Eq. (M.0.13). Então utilizando $\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} = -\epsilon^{\beta\mu\kappa\nu} = \epsilon^{\beta\mu\nu\kappa}$, finalmente a Eq. (M.0.13) nos fornece

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \square F_{\mu\nu} = J^\kappa. \quad (\text{M.0.14})$$

A lei de Gauss modificada é obtida escolhendo-se $\kappa = 0$, levando a

$$\partial_\rho G^{\rho 0} + \epsilon^{\beta 0\mu\nu} U_\beta \square F_{\mu\nu} = J^0, \quad (\text{M.0.15})$$

$$\partial_i G^{i0} + \epsilon^{i0mn} U_i \square F_{mn} = J^0, \quad (\text{M.0.16})$$

$$\partial_i G^{i0} - \epsilon_{i0mn} U_i \square F_{mn} = J^0, \quad (\text{M.0.17})$$

onde utilizamos a propriedade $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. Utilizando agora $G^{i0} = D^i$, $F_{mn} = -\epsilon_{mnk} B^k$, obtemos finalmente

$$\partial_i D^i - \epsilon_{i0mn} (-U^i) \square (-\epsilon_{mnk} B^k) = \rho, \quad (\text{M.0.18})$$

$$\partial_i D^i + \epsilon_{0imn} \epsilon_{mnk} \square U^i B^k = \rho, \quad (\text{M.0.19})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} + 2 \square (\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}) = \rho, \quad (\text{M.0.20})$$

onde utilizamos $\epsilon_{0imn} \epsilon_{mnk} = \epsilon_{imn} \epsilon_{mnk} = 2\delta_{ik}$. A lei de Ampère modificada pode ser obtida fazendo-se

$\kappa = i$ na Eq. (M.0.14):

$$\partial_\rho G^{\rho i} + \epsilon^{\beta i \mu \nu} U_\beta \square F_{\mu \nu} = J^i, \quad (\text{M.0.21})$$

$$\partial_0 G^{0i} + \partial_j G^{ji} + \epsilon^{0imn} U_0 \square F_{mn} + \epsilon^{ji0k} U_j \square F_{0k} + \epsilon^{jik0} U_j \square F_{k0} = J^i, \quad (\text{M.0.22})$$

$$\partial_0 G^{0i} + \partial_j G^{ji} + \epsilon^{0imn} U_0 \square F_{mn} + (-\epsilon^{ij0k}) U_j \square (-F_{k0}) + \epsilon^{jik0} U_j \square F_{k0} = J^i, \quad (\text{M.0.23})$$

$$-\epsilon_{jik} \partial_j H^k - \partial_t (-D^i) - \epsilon^{0imn} \epsilon_{mnk} \square U_0 B^k - 2\epsilon^{jik0} \square V^j E^k = J^i, \quad (\text{M.0.24})$$

mas $\epsilon^{0imn} \epsilon_{mnk} = -\epsilon_{0imn} \epsilon_{mnk} = -\epsilon_{imn} \epsilon_{mnk} = -2\delta_{ik}$ e $\epsilon^{jik0} = -\epsilon_{jik0} = -\epsilon_{0jik} = \epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}$. Portanto, a Eq. (M.0.24) se torna

$$\epsilon_{ijk} \partial_j H^k - \partial_t D^i + 2\delta_{ik} \square U_0 B^k - 2\square \epsilon_{ijk} U^j E^k = J^i, \quad (\text{M.0.25})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} + 2\square U_0 \mathbf{B} - 2\square (\mathbf{U} \times \mathbf{E}) = \mathbf{J}. \quad (\text{M.0.26})$$

Por questões de completeza, mostraremos que as mesmas equações modificadas dadas na Eq. (M.0.14) podem ser obtidas da densidade de Lagrange original dada na Eq. (6.5.6). Para isso, reescrevemos a Eq. (6.5.6)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\lambda\mu\nu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - A_\mu J^\mu, \quad (\text{M.0.27})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\lambda\mu\nu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\lambda\mu\nu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\nu A_\mu - A_\mu J^\mu, \quad (\text{M.0.28})$$

na qual podemos fazer ($\mu \rightarrow \nu$; $\nu \rightarrow \mu$) no terceiro termo, levando a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\lambda\mu\nu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\lambda\nu\mu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\mu A_\nu - A_\mu J^\mu, \quad (\text{M.0.29})$$

onde podemos utilizar $\epsilon^{\beta\lambda\nu\mu} = -\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu}$. Assim, obteremos finalmente

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu + \epsilon^{\beta\lambda\mu\nu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\mu A_\nu - A_\mu J^\mu. \quad (\text{M.0.30})$$

Observamos que a densidade de Lagrange da Eq. (M.0.30) apresenta um termo com derivada de terceira ordem nos campos. Assim, para obtermos as equações de Maxwell modificadas, devemos utilizar a equação de Euler-Lagrange apropriada para densidades de Lagrange com derivadas de terceira ordem, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\kappa)} \right) + \partial_\gamma \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\gamma A_\kappa)} \right) - \partial_\tau \partial_\gamma \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa)} \right) = 0. \quad (\text{M.0.31})$$

Utilizando a Eq. (M.0.30), podemos calcular facilmente cada termo da Eq. (M.0.31), obtendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\mu A_\nu - J^\kappa, \quad (\text{M.0.32})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -G^{\rho\kappa}, \quad (\text{M.0.33})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\gamma A_\kappa)} = 0, \quad (\text{M.0.34})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\tau \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa)} [\epsilon^{\beta\lambda\mu\nu} U_\beta A_\lambda \partial_\sigma (\eta^{\sigma\alpha} \partial_\alpha) \partial_\mu A_\nu], \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau \partial_\gamma \partial_\rho A_\kappa)} &= \epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa} U_\beta A_\lambda \eta^{\tau\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{M.0.35})$$

Substituindo as Eqs. (M.0.32), (M.0.33), (M.0.34) e (M.0.35) na Eq. (M.0.31), obtemos

$$\epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\mu A_\nu - J^\kappa - \partial_\rho (-G^{\rho\kappa}) - \partial_\tau \partial_\gamma \partial_\rho [\epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa} U_\beta A_\lambda \eta^{\tau\gamma}] = 0, \quad (\text{M.0.36})$$

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \square \partial_\mu A_\nu - \epsilon^{\beta\lambda\rho\kappa} U_\beta \partial_\tau (\partial_\gamma \eta^{\tau\gamma}) \partial_\rho A_\lambda = J^\kappa, \quad (\text{M.0.37})$$

onde podemos fazer ($\rho \rightarrow \nu$; $\lambda \rightarrow \mu$) no terceiro termo. Então teremos

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \square \partial_\mu A_\nu - \epsilon^{\beta\mu\nu\kappa} U_\beta \square \partial_\nu A_\mu = J^\kappa. \quad (\text{M.0.38})$$

Utilizando agora $\epsilon^{\beta\mu\nu\kappa} = \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}$, obtemos finalmente

$$\partial_\rho G^{\rho\kappa} + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} U_\beta \square F_{\mu\nu} = J^\kappa. \quad (\text{M.0.39})$$

Apêndice N

MODOS DE PROPAGAÇÃO DO MODELO CPT -ÍMPAR DE DIMENSÃO 5

N.1 Cenário timelike

Vamos calcular os modos de propagação para o caso puramente timelike, $U_0 \neq 0$; $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Da Eq. (6.5.22a), temos

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm 2\mu\omega U_0 n(n^2 - 1). \quad (\text{N.1.1})$$

Para o caso timelike, temos

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 - \mu\epsilon & -n_1 n_2 + 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1) & -n_1 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1) \\ -n_1 n_2 - 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1) & n^2 - n_2^2 - \mu\epsilon & -n_2 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1) \\ -n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1) & -n_1 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1) & n^2 - n_3^2 - \mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{N.1.2})$$

Implementando agora a Eq. (N.1.1) na equação matricial $M_{ij}E^j = 0$, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_1^2] E_x + [-n_1 n_2 + 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1)] E_y + \\ \quad + [-n_1 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = 0, \\ [-n_1 n_2 - 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1)] E_x + [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_2^2] E_y + \\ \quad + [-n_2 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1)] E_z = 0, \\ [-n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_x + [-n_2 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1)] E_y + \\ \quad + [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_3^2] E_z = 0. \end{array} \right. \quad (\text{N.1.3})$$

Agora, vamos multiplicar a terceira expressão da Eq. (N.1.3) por $[n_2 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1)]$, e multiplicar a segunda expressão da Eq. (N.1.3) por $[\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_3^2]$. Depois disso, adici-

onamos esses dois produtos um ao outro. Assim, os termos em E_z se cancelam, restando

$$\begin{aligned}
 & [n_2 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1)] \cdot [-n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_x + \\
 & + [n_2 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1)] \cdot [-n_2 n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_1 (n^2 - 1)] E_y + \\
 & + [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_3^2] \cdot [-n_1 n_2 - 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1)] E_x + \\
 & + [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_3^2] \cdot [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_2^2] E_y = 0, \tag{N.1.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x & \left[-n_1 n_2 n_3^2 + 2i\mu\omega U_0 n_2^2 n_3 (n^2 - 1) + 2i\mu\omega U_0 n_1^2 n_3 (n^2 - 1) + 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 n_1 n_2 (n^2 - 1)^2 + \right. \\
 & \left. \mp 2\mu\omega U_0 n_1 n_2 n (n^2 - 1) + \mp 4i\mu^2 \omega^2 U_0^2 n_3 n (n^2 - 1)^2 + n_1 n_2 n_3^2 + 2i\mu\omega U_0 n_3^3 (n^2 - 1) \right] + \\
 + E_y & \left[-n_2^2 n_3^2 - 2i\mu\omega U_0 n_1 n_2 n_3 (n^2 - 1) + 2i\mu\omega U_0 n_1 n_2 n_3 (n^2 - 1) - 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 n_1^2 (n^2 - 1)^2 + \right. \\
 & \left. + 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 n^2 (n^2 - 1)^2 \mp 2\mu\omega U_0 n_2^2 n (n^2 - 1) + \right. \\
 & \left. \mp 2\mu\omega U_0 n_3^2 n (n^2 - 1) + n_2^2 n_3^2 \right] = 0. \tag{N.1.5}
 \end{aligned}$$

Cancelando alguns termos, temos

$$\begin{aligned}
 E_x & \left[2i\mu\omega U_0 (n^2 - 1) (n_2^2 n_3 + n_3 n_1^2 + n_3^3) \mp 2\mu\omega U_0 n_1 n_2 n (n^2 - 1) \mp 4i\mu^2 \omega^2 U_0^2 n_3 n (n^2 - 1) + \right. \\
 & \left. + 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 n_1 n_2 (n^2 - 1)^2 \right] + E_y \left[-4\mu^2 \omega^2 U_0^2 (n^2 - 1)^2 (n_1^2 - n^2) + \right. \\
 & \left. \mp 2\mu\omega U_0 n_2^2 n (n^2 - 1) \mp 2\mu\omega U_0 n_3^2 n (n^2 - 1) \right] = 0, \tag{N.1.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x & \left[2i\mu\omega U_0 (n^2 - 1) n_3 n^2 \mp 2\mu\omega U_0 n_1 n_2 n (n^2 - 1) + 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 (n^2 - 1)^2 (\mp i n_3 n + n_1 n_2) \right] + \\
 & + E_y (n^2 - n_1^2) \left[\mp 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) + 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 (n^2 - 1)^2 \right] = 0, \tag{N.1.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x & \left[2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) (i n_3 n \mp n_1 n_2) + 4\mu^2 \omega^2 U_0^2 (n^2 - 1)^2 (\mp i n_3 n + n_1 n_2) \right] + \\
 & + E_y \left[(n^2 - n_1^2) \left[4\mu^2 \omega^2 U_0^2 (n^2 - 1)^2 \mp 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) \right] \right] = 0, \tag{N.1.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x & \left\{ 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) [n (i n_3 n \mp n_1 n_2) + 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) (\mp i n_3 n + n_1 n_2)] \right\} + \\
 & + 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) (n^2 - 1) [2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) \mp n] E_y = 0, \tag{N.1.9}
 \end{aligned}$$

da qual podemos escrever

$$E_y = \frac{-2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) [n (in_3n \mp n_1n_2) + 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) (\mp in_3n + n_1n_2)]}{2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) (n^2 - n_1^2) [2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) \mp n]} E_x, \quad (\text{N.1.10})$$

$$E_y = \frac{-[\mp n (n_1n_2 \mp in_3n) + 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) (\mp in_3n + n_1n_2)]}{(n^2 - n_1^2) [2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) \mp n]} E_x, \quad (\text{N.1.11})$$

$$E_y = \frac{-(n_1n_2 \mp in_3n) [\mp n + 2\mu\omega U_0 (n^2 - 1)]}{(n^2 - n_1^2) [2\mu\omega U_0 (n^2 - 1) \mp n]} E_x, \quad (\text{N.1.12})$$

que finalmente nos fornece

$$E_y = \frac{\pm in_3n - n_1n_2}{n^2 - n_1^2} E_x. \quad (\text{N.1.13})$$

Substituindo agora a Eq. (N.1.13) na primeira expressão da Eq. (N.1.3), teremos

$$\begin{aligned} [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_1^2] E_x + [-n_1n_2 + 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1)] \left[\frac{\pm in_3n - n_1n_2}{n^2 - n_1^2} \right] E_x + \\ + E_z [-n_1n_3 - 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] = 0, \quad (\text{N.1.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ (n^2 - n_1^2) [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_1^2] + [-n_1n_2 + 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1)] (\pm in_3n - n_1n_2) \} E_x + \\ - (n^2 - n_1^2) [n_1n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = 0, \quad (\text{N.1.15}) \end{aligned}$$

na qual podemos utilizar $(n^2 - n_1^2) = n_2^2 + n_3^2$ no primeiro termo. Assim

$$\begin{aligned} (n^2 - n_1^2) [n_1n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = \{ (n_2^2 + n_3^2) [\pm 2\mu\omega U_0 n (n^2 - 1) - n_1^2] + \\ + [-n_1n_2 + 2i\mu\omega U_0 n_3 (n^2 - 1)] (\pm in_3n - n_1n_2) \} E_x, \quad (\text{N.1.16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n^2 - n_1^2) [n_1n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = \{ \pm 2\mu\omega U_0 n_2^2 n (n^2 - 1) - n_1^2 n_2^2 \pm 2\mu\omega U_0 n n_3^2 (n^2 - 1) + \\ - n_1^2 n_3^2 + \mp in_1 n_2 n_3 n + n_1^2 n_2^2 \mp 2\mu\omega U_0 n_3^2 n (n^2 - 1) + \\ - 2i\mu\omega U_0 n_1 n_2 n_3 (n^2 - 1) \} E_x, \quad (\text{N.1.17}) \end{aligned}$$

onde os termos destacados em vermelho e azul se cancelam. Colocando agora o fator $(\mp in_2n)$ em

evidência a partir dos termos destacadas em verde, obtemos

$$(n^2 - n_1^2) [n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = \{ \mp i n_2 n [n_1 n_3 + 2i\mu\omega V_0 n_2 (n^2 - 1)] + \\ - n_1^2 n_3^2 - 2i\mu\omega U_0 n_1 n_2 n_3 (n^2 - 1) \} E_x, \quad (\text{N.1.18})$$

$$(n^2 - n_1^2) [n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = \{ \mp i n_2 n [n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] + \\ - n_1 n_3 [n_1 n_3 + 2i\mu\omega V_0 n_2 (n^2 - 1)] \} E_x, \quad (\text{N.1.19})$$

$$(n^2 - n_1^2) [n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_z = (\mp i n_2 n - n_1 n_3) [n_1 n_3 + 2i\mu\omega U_0 n_2 (n^2 - 1)] E_x, \quad (\text{N.1.20})$$

que finalmente nos fornece

$$E_z = \frac{\mp i n_2 n - n_1 n_3}{n^2 - n_1^2} E_x. \quad (\text{N.1.21})$$

Utilizando agora a Eq. (N.1.21) e Eq. (N.1.13), obtemos

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ (\pm i n_3 n - n_1 n_2) / (n^2 - n_1^2) \\ (\mp i n_2 n - n_1 n_3) / (n^2 - n_1^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{N.1.22})$$

Normalizando esses vetores, temos

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{(\mp i n_3 n - n_1 n_2)(\pm i n_3 n - n_1 n_2)}{(n^2 - n_1^2)^2} + \frac{(\pm i n_2 n - n_1 n_3)(\mp i n_2 n - n_1 n_3)}{(n^2 - n_1^2)^2} \right] = 1, \quad (\text{N.1.23})$$

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{n_3^2 n^2 \pm i n_1 n_2 n_3 n \mp i n_1 n_2 n_3 n + n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n^2 \mp i n_1 n_2 n_3 n \pm i n_1 n_2 n_3 n + n_1^2 n_3^2}{(n^2 - n_1^2)^2} \right] = 1, \quad (\text{N.1.24})$$

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{(n_2^2 + n_3^2)(n^2 + n_1^2)}{(n^2 - n_1^2)^2} \right] = 1, \quad (\text{N.1.25})$$

que pode ser simplificada utilizando-se $(n^2 - n_1^2) = n_2^2 + n_3^2$, o que nos fornece

$$|E_x|^2 \left[1 + \frac{n^2 + n_1^2}{n_2^2 + n_3^2} \right] = 1, \quad (\text{N.1.26})$$

$$|E_x|^2 \left[\frac{n_2^2 + n_3^2 + n^2 + n_1^2}{n_2^2 + n_3^2} \right] = 1, \quad (\text{N.1.27})$$

$$|E_x|^2 \left[\frac{2n^2}{n_2^2 + n_3^2} \right] = 1, \quad (\text{N.1.28})$$

onde podemos utilizar novamente $(n^2 - n_1^2) = n_2^2 + n_3^2$, logo

$$|E_x|^2 \left[\frac{2n^2}{n^2 - n_1^2} \right] = 1 \rightarrow |E_x|^2 = \frac{n^2 - n_1^2}{2n^2}, \quad (\text{N.1.29})$$

da qual podemos escolher convenientemente

$$E_x = \frac{\sqrt{n^2 - n_1^2}}{\sqrt{2}n}. \quad (\text{N.1.30})$$

Portanto os modos de propagação normalizados serão dados por

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sqrt{n^2 - n_1^2}} \begin{pmatrix} n^2 - n_1^2 \\ \pm in_3n - n_1n_2 \\ \mp in_2n - n_1n_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{N.1.31})$$

N.2 Cenário spacelike

Para o cenário spacelike, obtivemos de forma geral

$$n^2 - \mu\epsilon = \pm 2\mu\omega(n^2 - 1)|\mathbf{U}|\alpha, \quad (\text{N.2.1})$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}(\mu\epsilon - n^2 \sin^2 \theta)}. \quad (\text{N.2.2})$$

A seguir, iremos calcular as polarizações para os dois casos considerados, isto é, casos perpendicular e longitudinal.

N.2.1 Caso U-perpendicular

Para a configuração onde \mathbf{U} é perpendicular a \mathbf{n} , podemos escolher convenientemente

$$\mathbf{n} = (0, 0, n), \quad (\text{N.2.3})$$

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, 0). \quad (\text{N.2.4})$$

Nesse caso, a matriz $[M_{ij}]$ tem a seguinte forma

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon & 0 & 2i\mu\omega(n^2 - 1)U_2 \\ 0 & n^2 - \mu\epsilon & -2i\mu\omega(n^2 - 1)U_1 \\ -2i\mu\omega(n^2 - 1)U_2 & 2i\mu\omega(n^2 - 1)U_1 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{N.2.5})$$

Como nesse caso temos $\sin^2 \theta = 1$, a Eq. (N.2.2) se reduz a

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}(\mu\epsilon - n^2)}. \quad (\text{N.2.6})$$

Lembrando agora que os índices de refração do caso perpendicular são

$$n_0^2 = \mu\epsilon, \quad (\text{N.2.7})$$

$$n_{\pm}^2 = 1 + f_{\pm}, \quad (\text{N.2.8})$$

podemos então determinar as polarizações associadas a cada índice de refração.

1) Para $n_0^2 = \mu\epsilon$

Para o índice de refração $n_0^2 = \mu\epsilon$, temos $\alpha = 0$ conforme a Eq. (N.2.6). Então implementando essas quantidades em Eq. (N.2.5), a condição $M_{ij}E^j = 0$ fornece

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i\mu\omega(n_0^2 - 1)U_2 \\ 0 & 0 & -2i\mu\omega(n_0^2 - 1)U_1 \\ -2i\mu\omega(n_0^2 - 1)U_2 & 2i\mu\omega(n_0^2 - 1)U_1 & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{N.2.9})$$

que nos fornece

$$E_z = 0, \quad E_y = \frac{U_2}{U_1}E_x. \quad (\text{N.2.10})$$

Assim, utilizando a Eq. (N.2.10), o campo elétrico associado a $n_0^2 = \mu\epsilon$ será

$$\mathbf{E} = \frac{E_x}{U_1} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{N.2.11})$$

que normalizado se escreve como

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{U}}, \quad (\text{N.2.12})$$

com $|\mathbf{U}| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$.

2) Para $n_{\pm}^2 = 1 + f_{\pm}$

Para os índices de refração dados na Eq. (N.2.8), observamos que os mesmos levam a $\alpha_{\pm} \neq 0$. Dessa forma, implementando essas quantidades na Eq. (N.2.5), a equação $M_{ij}E^j = 0$ é lida como

$$\begin{pmatrix} \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\alpha_{\pm}|\mathbf{U}| & 0 & 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_2 \\ 0 & \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\alpha_{\pm}|\mathbf{U}| & -2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_1 \\ -2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_2 & 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_1 & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (\text{N.2.13})$$

que nos fornece

$$\begin{cases} \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\alpha_{\pm}|\mathbf{U}|E_x + 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_2E_z = 0 \\ \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\alpha_{\pm}|\mathbf{U}|E_y - 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_1E_z = 0 \\ -2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_2E_x + 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_1E_y - \mu\epsilon E_z = 0 \end{cases}. \quad (\text{N.2.14})$$

Vamos somar o produto da primeira expressão da Eq. (N.2.14) com U_1 ao produto da segunda expressão com U_2 . Isso eliminará os termos em E_z , deixando apenas

$$\pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\alpha_{\pm}|\mathbf{U}|U_1E_x \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\alpha_{\pm}|\mathbf{U}|U_2E_y = 0, \quad (\text{N.2.15})$$

cuja simplificação fornece

$$E_y = -\frac{U_1}{U_2}E_x. \quad (\text{N.2.16})$$

Substituindo a Eq. (N.2.16) na terceira expressão da Eq. (N.2.14), obtemos

$$\mu\epsilon E_z = -2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U_2E_x - 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)\frac{U_1^2}{U_2}E_x, \quad (\text{N.2.17})$$

$$E_z = -2i\frac{\omega}{\epsilon}(n_{\pm}^2 - 1)\left(\frac{U_1^2 + U_2^2}{U_2}\right)E_x, \quad (\text{N.2.18})$$

$$E_z = -\frac{2i\omega}{\epsilon}f_{\pm}\frac{|\mathbf{U}|^2}{U_2}E_x, \quad (\text{N.2.19})$$

onde utilizamos a Eq. (N.2.8). Então, utilizando a Eq. (N.2.16) e Eq. (N.2.19), os campos elétricos associados a n_{\pm}^2 serão

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_x}{U_2} \begin{pmatrix} U_2 \\ -U_1 \\ -2i\omega f_{\pm}(U_1^2 + U_2^2)/\epsilon \end{pmatrix}, \quad (\text{N.2.20})$$

$$\mathbf{E}_{\pm} = E'_0 \begin{pmatrix} U_2 \\ -U_1 \\ -2i\omega f_{\pm}(U_1^2 + U_2^2)/\epsilon \end{pmatrix}, \quad (\text{N.2.21})$$

com uma amplitude apropriada E'_0 .

N.2.2 Caso U-longitudinal

Para a configuração com \mathbf{U} longitudinal ao vetor $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, podemos escolher $\mathbf{U} = (0, 0, U)$. Sendo assim, teremos $\sin^2 \theta = 0$ de acordo com a Eq. (N.2.6). Utilizando essas informações, a matriz $[M_{ij}]$ tem a seguinte forma

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} n^2 - \mu\epsilon & -2i\mu\omega(n^2 - 1)U & 0 \\ 2i\mu\omega(n^2 - 1)U & n^2 - \mu\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{N.2.22})$$

Os índices de refração deste caso, dados por

$$n_{\pm}^2 = \frac{\mu(\epsilon \pm 2\omega|\mathbf{U}|)}{1 \pm 2\mu\omega|\mathbf{U}|}, \quad (\text{N.2.23})$$

satisfazem

$$n_{\pm}^2 - \mu\epsilon = \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U, \quad (\text{N.2.24})$$

onde utilizamos $\alpha = 1$ e $|\mathbf{U}| = U$. Sendo assim, implementando a Eq. (N.2.24) na Eq. (N.2.22), a condição $M_{ij}E^j = 0$ é escrita explicitamente como

$$\begin{pmatrix} \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U & -2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U & 0 \\ 2i\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U & \pm 2\mu\omega(n_{\pm}^2 - 1)U & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{N.2.25})$$

que nos fornece

$$E_z = 0, \quad E_y = \mp iE_x. \quad (\text{N.2.26})$$

Logo, os campos elétricos associados a n_{\pm}^2 serão

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{N.2.27})$$

que normalizados resultam em

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{N.2.28})$$

VERIFICANDO A INVARIÂNCIA DE GAUGE PARA O MODELO DE DIMENSÃO 5

A eletrodinâmica modificada por termo de altas derivadas CPT -ímpar de dimensão 5 em meios materiais é dada pela Eq. (6.5.6), ou seja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}A_\beta U_\kappa \square F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (\text{O.0.1})$$

Considerando a transformação de calibre

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (\text{O.0.2})$$

temos

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad G'^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}. \quad (\text{O.0.3})$$

Assim, a densidade de Lagrange na Eq. (O.0.1) se transforma da seguinte forma

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}(A_\beta + \partial_\beta \lambda)U_\kappa \square F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu - (\partial_\mu \lambda)J^\mu, \quad (\text{O.0.4})$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}(\partial_\beta \lambda)U_\kappa \square F_{\mu\nu} - \partial_\mu(\lambda J^\mu) + \lambda(\partial_\mu J^\mu). \quad (\text{O.0.5})$$

Vamos simplificar agora o segundo termo da Eq. (O.0.5). Teremos então

$$\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}(\partial_\beta \lambda)U_\kappa \square F_{\mu\nu} = \partial_\beta(\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\lambda U_\kappa \square F_{\mu\nu}) - \epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\lambda U_\kappa \square \partial_\beta F_{\mu\nu}. \quad (\text{O.0.6})$$

Percebemos agora que o segundo termo do lado direito da Eq. (O.0.6) é nulo. De fato:

$$\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} = \underbrace{\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\partial_\beta \partial_\mu A_\nu}_{\beta \rightarrow \mu; \mu \rightarrow \beta} - \underbrace{\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\partial_\beta \partial_\nu A_\mu}_{\nu \rightarrow \beta; \beta \rightarrow \nu}, \quad (\text{O.0.7})$$

$$= \epsilon^{\kappa\mu\beta\nu}\partial_\mu \partial_\beta A_\nu - \underbrace{\epsilon^{\kappa\nu\mu\beta}\partial_\nu \partial_\beta A_\mu}_{=\epsilon^{\kappa\mu\beta\nu}}, \quad (\text{O.0.8})$$

$$= \epsilon^{\kappa\mu\beta\nu}\partial_\beta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (\text{O.0.9})$$

$$= \epsilon^{\kappa\mu\beta\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} \quad (\text{O.0.10})$$

$$\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} = -\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{O.0.11})$$

Dessa forma, podemos utilizar as Eqs. (O.0.11), (O.0.6) e a conservação da quadri-corrente para simplificar a Eq. (O.0.5). Obteremos então

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\beta\mu\nu} \lambda U_\kappa \square F_{\mu\nu} - \lambda J^\beta \right). \quad (\text{O.0.12})$$

Dessa forma, observamos que a densidade de Lagrange difere apenas por uma quadri-divergência total. Consequentemente, tal termo pode ser desprezado na ação do modelo considerando uma função λ que se anule no infinito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition. New York (USA): John Wiley & Sons, 1999.
- [2] H. Nussenzveig, *Curso de Física Básica – Eletromagnetismo*. 1st edition. São Paulo (Brazil): Blucher, 1997.
- [3] D. Halliday; R. Resnick, *Física 3*. 4th edition. Tradução de Antonio Máximo R. Luz *et al.* Rio de Janeiro (Brazil): Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1984.
- [4] S. L. B. Boss; J. J. Caluzi, Os conceitos de eletricidade vítrea e eletricidade resinosa segundo Du Fay, *Rev. Bras. Ensino de Física*, vol. 29, n. 4, p. 635-644 (2007).
- [5] P. G. Hewitt, *Física Conceitual*, 11st edition. Porto Alegre (Brazil): Bookman, 2011.
- [6] E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity - vol. 1 - The Classical Theories*. New York: Thomas Nelson and Sons, 1951.
- [7] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*. New York (USA): Cambridge University Press, 2012.
- [8] A. K. T. Assis; J. P. M. C. Chaib, *Ampère's Electrodynamics*. Montreal (Canada): C. Roy Keys Inc., 2015.
- [9] J. C. Maxwell, *The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish - written between 1771-1871*. London: Cambridge University Press, 1879.
- [10] American Physical Society (APS). June 1798: Cavendish weighs the world, APS News - This month in Physics History. Disponível em: <https://aps.org/publications/apsnews/200806/physicshistory.cfm>.
- [11] B. Mahon, *The man who changed everything - The Life of James Clerk Maxwell*. Chichester (England): John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [12] F. Steinle, *Exploratory Experiments - Ampère, Faraday and the Origins of Electrodynamics*. Translated by A. Levine. Pittsburgh (USA): University of Pittsburgh Press, 2016.
- [13] A-M. Ampère, Expériences relatives à de nouveaux phénomènes électro-dynamiques, *Annales de Chimie et de Physique*, 20: 60-74 (1822).
- [14] M. D. Al-Amri; M. M. El-Gomati; M. S. Zubairy (Eds.), *Optics in Our Time*. Cham (Switzerland): Springer, 2016.
- [15] E. Hecht, *Optics*. 4rd ed. San Francisco (USA): Addison Wesley, 2002.
- [16] A. Aspect, From Huygens's waves to Einstein's photons: weird light, *Comptes Rendus Physique*, 18: 498-503 (2017).
- [17] M. C. de Lima; L. D. L. Freitas, Fresnel-Green-Maxwell: a teoria da birrefringência em três atos, *Rev. Bras. Ensino de Física*, vol. 43, e20210084 (2021).

- [18] L. Foucault, *Sur les vitesses relatives de la lumière dans l'air et dans l'eau* (Tese de Doutorado). Faculté des Sciences de Paris (France), 1853. Disponível em: [Foucault-thesis](#).
- [19] M. Faraday, On the Magnetic Affection of Light, and on the Distinction between the Ferromagnetic and Diamagnetic Conditions of Matter, [The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science](#), **29**:194, 249-258 (1846).
- [20] G. R. Fowles, *Introduction to modern optics*, 2nd ed. New York (USA): Dover Publications INC., 1975.
- [21] C. Rovelli, *Reality is not what it seems - The journey to quantum gravity*, UK: Penguin UK, 2016.
- [22] A. K. T. Assis; J. E. A. Ribeiro and A. Vannucci, The field concepts of Faraday and Maxwell, IN: Trends in Physics – Festschrift in Homage to Prof. José Maria Filardo Bassalo (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009), M. S. D. Cattani, L. C. B. Crispino, M. O. C. Gomes and A. F. S. Santoro (editors). Disponível em: [The-field-concepts-of-Faraday-and-Maxwell\(2009\)](#).
- [23] J. C. Maxwell, A Dynamical Theory of Electromagnetic Field, [Phil.Trans. Royal Society of London](#) **155**, 459–512 (1865).
- [24] R. A. Martins, *Teoria da Relatividade Especial*. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- [25] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Federal Republic of Germany: WILEY-VCH, 1987.
- [26] P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron, [Proc. R. Soc. Lond. A](#) volume 117, issue 778, p610-624 (1928).
- [27] C. D. Anderson, The Positive Electron, [Phys. Rev.](#) **43**, 491 (1933).
- [28] V.A. Kostelecký and S. Samuel, Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, [Phys. Rev. D](#) **39**, 683 (1989).
- [29] V.A. Kostelecký and R. Potting, *CPT* and strings, [Nucl. Phys. B](#) **359**, 545 (1991); V.A. Kostelecký and R. Potting, *CPT*, strings, and meson factories, [Phys. Rev. D](#) **51**, 3923 (1995).
- [30] D. Colladay and V.A. Kostelecký, *CPT* violation and the standard model, [Phys. Rev. D](#) **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V.A. Kostelecký, Lorentz-violating extension of the standard model, [Phys. Rev. D](#) **58**, 116002 (1998);
- [31] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics, [Phys. Rev. D](#) **41**, 1231 (1990); A.A. Andrianov and R. Soldati, Lorentz symmetry breaking in Abelian vector-field models with Wess-Zumino interaction, [Phys. Rev. D](#) **51**, 5961 (1995); A.A. Andrianov and R. Soldati, Patterns of Lorentz symmetry breaking in QED by *CPT*-odd interaction, [Phys. Lett. B](#) **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Dynamical Lorentz symmetry breaking from a (3+1)-dimensional axion-Wess-Zumino model, [Phys. Rev. D](#) **59**, 025002 (1998); J. Alfaro, A.A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, and R. Soldati, Bare and induced Lorentz and *CPT* invariance violations in QED, [Int. J. Mod. Phys. A](#) **25**, 3271 (2010); A.A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, and R. Soldati, Anomalous positron excess from Lorentz-violating QED, [J. High Energy Phys.](#) **09** (2009) 057.

- [32] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); V.A. Kostelecký and M. Mewes, Signals for Lorentz violation in electrodynamics, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002); V.A. Kostelecký and M. Mewes, Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006); C.A. Escobar and M.A.G. Garcia, Full *CPT*-even photon sector of the standard model extension at finite temperature, *Phys. Rev. D* **92**, 025034 (2015); A. Martín-Ruiz and C.A. Escobar, Casimir effect between ponderable media as modeled by the standard model extension, *Phys. Rev. D* **94**, 076010 (2016).
- [33] Z. Qiu, G. Cao, and X.-G. Huang, Electrodynamics of chiral matter, *Phys. Rev. D* **95**, 036002 (2017).
- [34] D.E. Kharzeev, The chiral magnetic effect and anomaly-induced transport, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **75**, 133 (2014).
- [35] Q.G. Bailey and V.A. Kostelecký, Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).
- [36] M.E. Tobar, P. Wolf, A. Fowler, and J.G. Hartnett, New methods of testing Lorentz violation in electrodynamics, *Phys. Rev. D* **71**, 025004 (2005).
- [37] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Signals for Lorentz violation in electrodynamics, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).
- [38] D. Colladay, V. A. Kostelcký, Lorentz-Violating Extension of the Standard Model, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [39] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension, *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009); M. Mewes, Higher-order Lorentz violation, in *Proceedings of the 6th Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*, V.A. Kostelecký, ed. (World Scientific, Singapore, 2014); Y. Ding and V.A. Kostelecký, Lorentz-violating spinor electrodynamics and Penning traps, *Phys. Rev. D* **94**, 056008 (2016); V.A. Kostelecký and Z. Li, Gauge field theories with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension, *Phys. Rev. D* **99**, 056016 (2019).
- [40] M. Mewes, Optical-cavity tests of higher-order Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **85**, 116012 (2012).
- [41] M. Schreck, Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector, *Phys. Rev. D* **89**, 105019 (2014).
- [42] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., L. Lisboa-Santos, F.E.P. dos Santos, and M. Schreck, Maxwell electrodynamics modified by *CPT*-even and Lorentz-violating dimension-6 higher-derivative terms, *Phys. Rev. D* **97**, 115043 (2018).
- [43] M.M. Ferreira Jr., L. Lisboa-Santos, R.V. Maluf, and M. Schreck, Maxwell electrodynamics modified by a *CPT*-odd dimension-five higher-derivative term, *Phys. Rev. D* **100**, 055036 (2019).
- [44] A.A. Araújo Filho and R.V. Maluf, Thermodynamic properties in higher-derivative electrodynamics, *Braz. J. Phys* **51**, 820 (2021); A.A. Araújo Filho and J.A.A.S. Reis, Thermal aspects of interacting quantum gases in Lorentz-violating scenarios, *Eur. Phys. J. Plus* **136**, 310 (2021)

- [45] M. Schreck, Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the fermion sector, [Phys. Rev. D **90**, 085025 \(2014\)](#).
- [46] J. Shibata, A. Takeuchi, H. Kohno, and G. Tatara, Theory of electromagnetic wave propagation in ferromagnetic Rashba conductor, [J. App. Phys. **123**, 063902 \(2018\)](#).
- [47] P.D.S. Silva, M.M. Ferreira Jr., M. Schreck, and L.F. Urrutia, Magnetic-conductivity effects on electromagnetic propagation in dispersive matter, [Phys. Rev. D **102**, 076001 \(2020\)](#).
- [48] P.D.S. Silva, L. Lisboa-Santos, M. M. Ferreira Jr., and M. Schreck, Effects of CPT-odd terms of dimensions three and five on electromagnetic propagation in continuous matter, [Phys. Rev. D **104**, 116023 \(2021\)](#).
- [49] P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, [Phys. Rev. B **106**, 144430 \(2022\)](#).
- [50] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*, New York (USA): John Wiley & Sons, 1986.
- [51] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* (Artech House, Boston, 1993).
- [52] R. C. Gauthier, Bi-anisotropic resonators analyzed using Fourier–Bessel numerical formulation; Sagnac effect application, *Optics Communications* 435, 413 (2019).
- [53] A. H. Sihvola and I. V. Lindell, Bi-isotropic constitutive relations, [Microw. Opt. Technol. Lett., **4** \(8\), 295-297 \(1991\)](#).
- [54] E. O. Kamenetskii, Energy balance equation for electromagnetic waves in bianisotropic media, [Phys. Rev. E **54**, 4359 \(1996\)](#).
- [55] Y. T. Aladadi and M. A. S. Alkanhal, Classification and characterization of electromagnetic materials, [Sci. Rep. **10**, 11406 \(2020\)](#).
- [56] A. H. Sihvola and I. V. Lindell, Bi-isotropic constitutive relations, [Microw. Opt. Technol. Lett., **4** \(8\), 295-297 \(1991\)](#).
- [57] A. H. Sihvola and I. V. Lindell, Properties of bi-isotropic Fresnel reflection coefficients, [Optics Communications **89**, 1 \(1992\)](#).
- [58] S. Ougier, I. Chenerie, A. Sihvola, and A. Priou, Propagation in bi-isotropic media: effect of different formalisms on the propagation analysis, [Progress In Electromagnetics Research **09**, 19 \(1994\)](#).
- [59] J. F. Nieves and P. B. Pal, Third electromagnetic constant of an isotropic medium, [Am. J. Phys. **62**, 207 \(1994\)](#).
- [60] L. Jelinek, R. Marqués, F. Mesa, and J. D. Baena, Periodic arrangements of chiral scatterers providing negative refractive index bi-isotropic media, [Phys. Rev. B **77**, 205110 \(2008\)](#).
- [61] Ming-Che Chang and Min-Fong Yang, Optical signature of topological insulators, [Phys. Rev. B **80**, 113304 \(2009\)](#).
- [62] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, The magnetoelectric coupling in Electrodynamics. [Int. J. Mod. Phys. A **34**, 1941002 \(2019\)](#).

- [63] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso, and L.F. Urrutia, Electro- and magnetostatics of topological insulators as modeled by planar, spherical, and cylindrical θ boundaries: Green's function approach, *Phys. Rev. D* **93**, 045022 (2016).
- [64] A. Lakhtakia and T. G. Mackay, Classical electromagnetic model of surface states in topological insulators, *J. Nanophoton.* **10** (3), 033004 (2016).
- [65] T. M. Melo, D. R. Viana, W. A. Moura-Melo, J. M. Fonseca, A. R. Pereira, Topological cutoff frequency in a slab waveguide: Penetration length in topological insulator walls, *Phys. Lett. A* **380**, 973 (2016).
- [66] R. Li, J. Wang, Xiao-Liang Qi and S.-C. Zhang, Dynamical axion field in topological magnetic insulators, *Nature Phys.* **6**, 284 (2010).
- [67] Zheng-Wei Zuo, Dong-Bo Ling, L.Sheng, D.Y.Xing, Optical properties for topological insulators with metamaterials, *Phys. Lett. A* **377**, 2909 (2013).
- [68] Z.-X. Li, Yunshan Cao, Peng Yan, Topological insulators and semimetals in classical magnetic systems, *Phys. Report* **915**, 1 (2021).
- [69] A. Sekine and K. Nomura, Axion electrodynamics in topological materials, *J. Appl. Phys.* **129**, 141101 (2021).
- [70] M. E. Tobar, B. T. McAllister and M. Goryachev, Modified axion electrodynamics as impressed electromagnetic sources through oscillating background polarization and magnetization, *Phys. Dark Universe* **26**, 100339 (2019).
- [71] L. H. C. Borges, A. G. Dias, A. F. Ferrari, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Generation of Axion-Like Couplings via Quantum Corrections in a Lorentz Violating Background, *Phys. Rev. D* **89**, 045005 (2014).
- [72] F. R. Prudêncio and M. G. Silveirinha, Optical isolation of circularly polarized light with a spontaneous magnetoelectric effect, *Phys. Rev. A* **93**, 043846 (2016).
- [73] C. A. A. de Carvalho, The relativistic electron gas: a candidate for nature's left-handed material, *Phys. Rev. D* **93**, 105005 (2016); E. Reyes-Gómez, L. E. Oliveira and C. A. A. de Carvalho, The electromagnetic response of a relativistic Fermi gas at finite temperatures: Applications to condensed-matter systems, *EPL* **114**, 17009 (2016).
- [74] R.-Y. Zhang, Y.-W. Zhai, S.-R. Lin, Q. Zhao, W. Wen, M.-L. Ge, Time Circular Birefringence in Time-Dependent Magnetoelectric Media, *Sci. Rep.* **5**, 13673 (2015); S.-R. Lin, R.-Y. Zhang, Y.-R. Ma, W. Jia, Q. Zhao, Electromagnetic wave propagation in time-dependent media with antisymmetric magnetoelectric coupling, *Phys. Lett. A* **380**, 2582 (2016).
- [75] K. Halterman, M. Alidoust and A. Zyuzin, Epsilon-near-zero response and tunable perfect absorption in Weyl semimetals, *Phys. Rev. B* **98**, 085109 (2018).
- [76] R. Zu, M. Gu, L. Min, C. Hu, N. Ni, Z. Mao, J. M. Rondinelli and V. Gopalan, Comprehensive anisotropic linear optical properties of Weyl semimetals, TaAs and NbAs, [[arXiv:2011.09036](https://arxiv.org/abs/2011.09036)] (2021).
- [77] J. Krupka, Measurement of the complex permittivity, initial permeability, permeability tensor and ferromagnetic linewidth of gyromagnetic materials, *Meas. Sci. Technol.* **29**, 092001 (2018).

- [78] J. Krupka, A. Pacewicz, B. Salski, P. Kopyt, J. Bourhill, M. Goryachev and M. Tobar, Electrodynamic improvements to the theory of magnetostatic modes in ferrimagnetic spheres and their applications to saturation magnetization measurements, *J. Magnetism and Magnetic Materials*, **487**, 165331 (2019).
- [79] P. Hillion, Manifestly covariant formalism for electromagnetism in chiral media, *Phys. Rev. E* **47**, 1365 (1993).
- [80] I. Yakov, Dispersion relation for electromagnetic waves in anisotropic media, *Phys. Lett. A* **374**, 1113 (2010).
- [81] N.J. Damaskos, A.L. Maffett and P.L.E. Uslenghi, Dispersion relation for general anisotropic media, *IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-30*, 991 (1982).
- [82] H. S. Bennett, E. A. Stern, Faraday effect in solids. *Phys. Rev.* **137**, A448–A461 (1965); L. M. Roth. Theory of the Faraday effect in solids, *Phys. Rev.* **133**, A542–A553 (1964).
- [83] R. E. Newnham, *Properties of Materials - anisotropy, symmetry, structure* (Oxford University Press, New York, 2005).
- [84] D. G. Dimitriu, D. O. Dorohoi, New method to determine the optical rotatory dispersion of inorganic crystals applied to some samples of Carpathian Quartz, *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy* **131**, 674-677 (2014).
- [85] L.A. Pajdzik and A.M. Glazer, Three-dimensional birefringence imaging with a microscope tilting-stage. I. Uniaxial crystals, *J. Appl. Cryst.* **39**, 326 (2006).
- [86] L. D. Barron, *Molecular Light Scattering and Optical Activity*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, 2004).
- [87] X. Liu, J. Yang, Z. Geng, nad H. Jia, Simultaneous measurement of optical rotation dispersion and absorption spectra for chiral substances, *Chirality* **8**, 32, 1071-1079 (2022).
- [88] R. Gueroult, J-M. Rax, and N. J. Fisch, Enhanced tuneable rotatory power in a rotating plasma, *Phys. Rev. E* **102**, 051202 (R), 2020.
- [89] R. Gueroult, Y. Shi, J-M. Rax, and N. J. Fisch, Determining the rotation direction in pulsars, *Nat. Commun.* **10**, 3232 (2019).
- [90] I. Tutunnikov, U. Steinitz, E. Gershnel, J-M. Hartmann, A. A. Milner, V. Milner, and I. Sh. Averbukh, Rotation of the polarization of light as a tool for investigating the collisional transfer of angular momentum from rotating molecules to macroscopic gas flows, *Phys. Rev. Research* **4**, 013212 (2022).
- [91] U. Steinitz and I. Sh. Averbukh, Giant polarization drag in a gas of molecular super-rotors, *Phys. Rev. A* **101**, 021404(R) (2020).
- [92] J. H. Woo, B. K. M. Gwon, J. H. Lee, D-W. Kim, W. Jo, D. H. Kim, and J. W. Wu, Time-resolved pump-probe measurement of optical rotatory dispersion in chiral metamaterial, *Adv. Optical Mater.* **5**, 1700141 (2017).

- [93] Q. Zhang, E. Plum, J-Y. Ou, H. Pi, J. Li, K. F. MacDonald, and N. I. Zheludev, Electrogyration in metamaterials: chirality and polarization rotatory power that depend on applied electric field, *Adv. Optical Mater.* **9**, 2001826 (2021).
- [94] P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Erratum: Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **107**, 179902 (2023).
- [95] P.D.S. Silva and M.M. Ferreira Jr., Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **106**, 144430 (2022).
- [96] G.H. Wagniere, *On Chirality and the Universal Asymmetry: Reflections on Image and Mirror Image*, (Wiley-Vch, Zurich, 2007).
- [97] G. Vantomme and J. Crassous, Pasteur and chirality: A story of how serendipity favors the prepared minds, *Chirality* **33** (10): 597-601 (2021).
- [98] J-M. Poumirol, P. Q. Liu, T. M. Slipchenko, A. Y. Nikitin, L. Martin-Morento, J. Faist, and A. B. Kuzmenko, Electrically controlled terahertz magneto-optical phenomena in continuous and patterned graphene, *Nat. Commun.* **8**, 14626 (2017).
- [99] V. A. De Lorenci and D. D. Pereira, Magnetolectric birefringence as unique effect in isotropic media, *Phys. Rev. E* **82**, 036605 (2010).
- [100] V. A. De Lorenci and G. P. Goulart, Magnetolectric birefringence revisited, *Phys. Rev. D* **78**, 045015 (2008) .
- [101] E. U. Condon, Theories of Optical Rotatory Power, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 432 (1937).
- [102] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media, Course of Theoretical Physics, Vol. 8*, 2nd ed. (Pergamon Press, New York, 1984).
- [103] H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathem.-physik. Klasse*, (1908). Uma versão traduzida para o inglês pode ser encontrada em: *The principle of relativity; original papers by A. Einstein and H. Minkowski*, (1920).
- [104] E.J. Post, *Formal Structure of Electromagnetics: General Covariance and Electromagnetics* (Dover Publications Inc., Mineola, New York, 1997)
- [105] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [106] F. Bopp, Eine lineare Theorie des Elektrons, *Ann. Phys.* **430**, 345 (1940).
- [107] B. Podolsky, A generalized electrodynamics part I – non-quantum, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942).
- [108] B. Podolsky and C. Kikuchi, A generalized electrodynamics part II – quantum, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944).
- [109] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov and A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, (Artech House, Inc., 1994).
- [110] S. Kaushik, Magnetic and Optical Response of Chiral Fermions, (PhD thesis), <https://arxiv.org/abs/2112.13749> (2021).

- [111] W. G. V. Rosser, *An introduction to the theory of relativity* (Butterworths, 1964).
- [112] V. A. Ugarov, *Special theory of relativity* (Mir Publishers, 1979).
- [113] P. Graneau and A. K. T. Assis, Kirchhoff on the Motion of Electricity in Conductors, [Apeiron v. 19, p.19-25 \(1994\)](#).
- [114] G. R. Kirchhoff, On a Deduction of Ohm's Laws, in connexion with the Theory of Electrostatics, [Phil. Magazine, v. 37, p. 463-468 \(1850\)](#).
- [115] K. Fukushima, D.E. Kharzeev, and H.J. Warringa, Chiral magnetic effect, [Phys. Rev. D **78**, 074033 \(2008\)](#).
- [116] G. Inghirami, M. Mace, Y. Hirono, L. Del Zanna, D.E. Kharzeev, and M. Bleicher, Magnetic fields in heavy ion collisions: flow and charge transport, [Eur. Phys. J. C **80**, 293 \(2020\)](#).
- [117] M. Dvornikov and V.B. Semikoz, Influence of the turbulent motion on the chiral magnetic effect in the early universe, [Phys. Rev. D **95**, 043538 \(2017\)](#).
- [118] G. Sigl and N. Leite, Chiral magnetic effect in protoneutron stars and magnetic field spectral evolution, [J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 \(2016\) 025](#).
- [119] M. Dvornikov and V.B. Semikoz, Magnetic field instability in a neutron star driven by the electroweak electron-nucleon interaction versus the chiral magnetic effect, [Phys. Rev. D **91**, 061301\(R\) \(2015\)](#).
- [120] Q. Li, D.E. Kharzeev, C. Zhang, Y. Huang, I. Pletikosić, A.V. Fedorov, R.D. Zhong, J.A. Schneeloch, G.D Gu, and T. Valla, Chiral magnetic effect in ZrTe₅, [Nat. Phys. **12**, 550 \(2016\)](#).
- [121] M. Dvornikov and V.B. Semikoz, Instability of magnetic fields in electroweak plasma driven by neutrino asymmetries, [J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 \(2014\) 002](#); M. Dvornikov, Chiral magnetic effect in the presence of an external axial-vector field, [Phys. Rev. D **98**, 036016 \(2018\)](#). M. Dvornikov, Electric current induced by an external magnetic field in the presence of electroweak matter, [EPJ Web Conf. **191**, 05008 \(2018\)](#).
- [122] K. Landsteiner, Anomalous transport of Weyl fermions in Weyl semimetals, [Phys. Rev. B **89**, 075124 \(2014\)](#).
- [123] D.E. Kharzeev, Chiral magnetic superconductivity, [EPJ Web Conf. **137**, 01011 \(2017\)](#).
- [124] D.A. Gurnett and A. Bhattacharjee, *Introduction to Plasma Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2005).
- [125] M.-C. Chang and M.-F. Yang, Chiral magnetic effect in the absence of Weyl node, [Phys. Rev. B **92**, 205201 \(2015\)](#).
- [126] I.G. Wood and A.M. Glazer, Ferroelastic phase transition in BiVO₄. I. Birefringence measurements using the rotating-analyser method, [J. Appl. Cryst. **13**, 217 \(1980\)](#); M.A. Geday, W. Kaminsky, J.G. Lewis, and A.M. Glazer, Images of absolute retardance $L \cdot \Delta n$, using the rotating polariser method, [J. Microsc. **198**, 1 \(2000\)](#).
- [127] S. Kaushik, D.E. Kharzeev, and E.J. Philip, Transverse chiral magnetic photocurrent induced by linearly polarized light in symmetric Weyl semimetals, [Phys. Rev. Research **2** 042011 \(2020\)](#).

- [128] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos, M. T. D. Orlando, Violação da simetria de Lorentz. *Rev. Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, n 1, p. 57-64 (2007).
- [129] V. A. Kostelecký, R. Lehnert, Stability, Causality, and Lorentz and CPT Violation, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001).
- [130] D. Colladay, V. A. Kostelecký, CPT Violation and the Standard Model, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [131] V. A. Kostelecky, S. Samuel, Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [132] O. W. Greenberg, CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002).
- [133] T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena, and astrophysical constraints, *An. Phys.* **321**,150-196 (2006).
- [134] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009); M. Mewes, “Higher-order Lorentz violation,” in *Proceedings of the 6th Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*, V.A. Kostelecký, ed. (World Scientific, Singapore, 2014); Y. Ding and V.A. Kostelecký, “Lorentz-violating spinor electrodynamics and Penning traps,” *Phys. Rev. D* **94**, 056008 (2016); V.A. Kostelecký and Z. Li, “Gauge field theories with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **99**, 056016 (2019).
- [135] M. Mewes, “Optical-cavity tests of higher-order Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **85**, 116012 (2012).
- [136] M. Schreck, “Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector,” *Phys. Rev. D* **89**, 105019 (2014).
- [137] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [138] V. A. Kostelecky, R. Lehnert, N. McGinnis, M. Schreck, B. Seradjeh, Lorentz violation in Dirac and Weyl semimetals, [arXiv:2112.14293](https://arxiv.org/abs/2112.14293) (2021).
- [139] A.G. Grushin, Consequences of a condensed matter realization of Lorentz-violating QED in Weyl semi-metals, *Phys. Rev. D* **86**, 045001 (2012).
- [140] J. Behrends, S. Roy, M.H. Kolodrubetz, J.H. Bardarson, and A.G. Grushin, Landau levels, Bardeen polynomials, and Fermi arcs in Weyl semimetals: Lattice-based approach to the chiral anomaly, *Phys. Rev. B* **99**, 140201 (2019).
- [141] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [142] C. Adam and F.R. Klinkhamer, “Causality and *CPT* violation from an Abelian Chern-Simons-like term,” *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001).
- [143] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., and J.A. Helayel-Neto, Dimensional Reduction of the Abelian-Higgs Carroll-Field-Jackiw Model, *Eur. Phys. J. C* **38**: 511-519 (2005).

- [144] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, and A. B. F. Neves, Maxwell-Chern-Simons vortices in a *CPT*-odd Lorentz-violating Higgs electrodynamics, *Eur. Phys. J. C* **74**, 3064 (2014).
- [145] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and C. E. H. Santos, Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics, *Phys. Rev. D* **78**, 025030 (2008).
- [146] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and J. S. Rodrigues, Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy, *Phys. Rev. D* **78**, 125013 (2008).
- [147] Após receber o prêmio Nobel em 1965, Feynman recebeu muitas cartas de parabenização de várias pessoas. Numa conversa através dessas cartas, ele recebeu as felicitações de um de seus antigos alunos de doutorado, Koichi Mano, que, após ser questionado por Feynman sobre o que ele estava fazendo (investigando), Koichi respondeu ao laureado que estava estudando “um problema simples, humilde”. Feynman então respondeu de volta a Koichi falando que “*the worthwhile problems are the ones you can really solve or help solve, the ones you can really contribute something to*”. Feynman havia se sentido triste, pois percebeu que Koichi parecia infeliz acerca de suas pesquisas. Então, nessa carta de 3 de Fevereiro de 1966, Feynman teve uma conversa sincera com Koichi sobre o que são problemas que valem a pena (problemas interessantes), numa forma de ajudá-lo a ter mais alegria (e motivação e diversão) nas suas pesquisas. Mais tarde, nessa carta, Feynman também diz “*no problem is too small or too trivial if we can really do something about it*”.

Referência: R. P. Feynman, *Perfectly reasonable deviations from the beaten track - The Letters of Richard P. Feynman*, edited by Michelle Feynman (Richard Feynman’s daughter), USA: Basic Books, 2005. p. 198-201.