

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Frederico Elias Passos dos Santos

*Investigações no cenário da QED estendida CPT-par com
acoplamento mínimo e não mínimo*

São Luís
2015

Frederico Elias Passos dos Santos

*Investigações no cenário da QED estendida CPT-par com
acoplamento mínimo e não mínimo*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da UFMA, como requisito para a ob-
tenção parcial do grau de DOUTOR em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Departamento de Física - UFMA

Co-orientador: Prof.Dr. Manoel Messias Ferreira Jr

Departamento de Física - UFMA

São Luís

2015

Santos, Frederico

Investigações no cenário da QED estendida CPT-par com acoplamento mínimo e não mínimo / Frederico Santos - 2015

xx.p

1.Teoria de Campos e Partículas Elementares. I.Título.

CDU 536.21

Frederico Elias Passos dos Santos

*Investigações no cenário da QED estendida CPT-par com
acoplamento mínimo e não mínimo*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da UFMA, como requisito para a ob-
tenção parcial do grau de DOUTOR em Física.

Aprovado em 12 de março de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr. Jose Abdalla Helayël - Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Prof.Dr Ashok Kumar Das
Rochester University - USA

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes Dos Santos Filho
Departamento de Física - IFMA

Prof.Dr. Manoel Messias Ferreira Jr
Departamento de Física - UFMA

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Departamento de Física - UFMA

*Dedicado a minha Família,
que acabou de crescer.*

Resumo

Neste trabalho, investigamos aspectos da eletrodinâmica quântica (QED) estendida, incorporando a violação da simetria de Lorentz em seu arcabouço. Dentre os diversos modelos que descrevem tais teorias, destacamos o modelo padrão estendido (SME). Uma abordagem alternativa, a violação de Lorentz é introduzida através de um acoplamento não mínimo, que adiciona termos de interação novos, em sua maioria, representados por operadores de dimensão 5. Neste contexto, propomos um novo acoplamento não mínimo representado pela derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{\lambda}{2} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}$, que é de caráter CPT-par. Essa derivada covariante modifica a equação de Dirac, sendo possível investigar seus efeitos no limite não relativístico, rendendo uma série de efeitos utilizados para imposição de limites restritivos sobre a magnitude dos parâmetros de violação da simetria de Lorentz (LV). Também temos uma modificação no vértice básico da teoria, afetando os cálculos de amplitudes de espalhamento. Esse efeito, pode ser considerado através da implementação de uma regra de Feynman adicional $\times \rightarrow i\lambda V_\beta = \lambda (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} q^\alpha$, além da regra usual $\bullet \rightarrow -ie\gamma^\mu$. Como um exemplo, nós consideramos o espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ no limite ultra relativístico. A partir da seção de choque obtida e dos dados experimentais, pôde-se determinar um limite para a magnitude do coeficiente de LV. Ainda, consideramos as correções quânticas associadas a este novo acoplamento. No setor dos fótons, essas correções são representadas pelo tensor de polarização do vácuo. Durante os cálculos, percebemos que uma nova interação é gerada a um loop, induzindo um termo do tipo $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$, sendo este o bem conhecido termo CPT-par do setor de gauge da eletrodinâmica estendida do SME. Como uma última investigação, consideramos a quantização do campo de gauge no contexto do SME, onde nos concentramos no termo anisotrópico de paridade par $\kappa^{\mu\nu}$. A quantização deste modelo se mostra problemática no gauge de Lorenz. Porém, a implementação da condição $(g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \partial_\mu A_\nu$ leva a uma quantização bem sucedida, utilizando-se o método de Gupta-Bleuler.

Palavras-chaves: Quebra de Lorentz, seção de choque, acoplamento não mínimo, limite não relativístico, correções radiativas, método de Gupta-Bleuler.

Abstract

In this report, we investigated aspects of an extended quantum electrodynamics (QED) which incorporates Lorentz-violation in its structure. Among the many models describing such Lorentz-violating field theories, we highlight the standard model extension (SME). An alternative approach to introduce Lorentz violation is through the use of a non-minimal coupling which includes new interaction terms, mostly represented by dimension-five operators or higher. In this context, we have proposed a new non-minimal coupling introduced in the covariant derivative $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{\lambda}{2} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}$. The term $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}$ which is CPT-even. This covariant derivative modifies the Dirac equation, making possible to investigate its effects for example, in non-relativistic limit, where it yields new effects allowing to impose restrictive upper-bounds on the magnitude of Lorentz violating parameters (LV). A second application was to investigate such effects on the scattering amplitudes in QED environment. Such effects are analyzed by implementing an additional Feynman rule $\times \rightarrow i\lambda V_\beta = \lambda(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} q^\alpha$, besides the usual $\bullet \rightarrow -ie\gamma^\mu$. As an example, we consider the scattering $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ in ultra-relativistic limit. The obtained cross section and the experimental data, allow to determine an upper-bound on the magnitude of the LV coefficients. The following study, still within the nonminimal coupling context, we consider quantum corrections produced by it in the photon sector, i.e., we compute the vacuum polarization tensor. It is shown that a term type $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$ (the well-known CPT-even abelian gauge term) of the SME electrodynamics is generated radiatively at 1-loop order. Other important aspect of SME electrodynamics is consider its covariant quantization. This way, we focus on the anisotropic parity-even term $\kappa^{\mu\nu}$ belonging to the CPT-even and parity-even sector. The quantization of this model becomes problematic in the Lorenz gauge, however, the implementation of a modified Lorenz condition $(g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \partial_\mu A_\nu$ leads to a successful implementation of the Gupta Bleuler quantization.

Keywords: Lorentz Break, cross sections, non-minimal coupling, non-relativistic limit, radiative corrections, Gupta-Bleuler method

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família, principalmente aos meus pais, por toda a orientação dada ao longo da vida. Agradeço a Luisa, Sophia e agora, Marina Minerva, que são minha fonte de motivação. Agradeço aos amigos, que sempre têm acreditado em meu trabalho. Agradeço aos professores do grupo de teoria de campos pela oportunidade de desenvolver um bom trabalho e pela orientação dada, em especial a Casana e Manoel, que também estão incluídos no grupo dos amigos. E à CAPES e FAPEMA, pelo relevante apoio financeiro.

*“Se eu quero estar perto da minha família,
eu tenho que fazer isto direito. Eu estou
matando por mais agora”.*

*frase adaptada de Dexter Morgan
(Seriado Dexter)*

Sumário

1	Introdução	9
2	Quantização Canônica	13
2.1	Primeira quantização	13
2.2	Segunda quantização	13
2.3	Quantização Canônica do Campo Escalar	14
2.3.1	Aspectos clássicos	14
2.3.2	Quantização do campo escalar livre.	16
2.3.3	Microcausalidade	18
2.3.4	Campo escalar carregado	19
2.3.5	Propagador de Feynman do campo escalar	21
2.4	Campo de Dirac	21
2.4.1	Segunda quantização campo de Dirac	23
2.4.2	Microcausalidade e propagador de Feynman	27
2.5	Campo de Maxwell	28
2.5.1	Método de Dirac	29
2.5.2	Microcausalidade e propagador de Feynman	33
2.5.3	Método de Gupta Bleuler	34
3	Campos em interação	41
3.1	Matriz S	43
3.2	Fórmula de Gell-Mann Low	45
3.3	Valor esperado no vácuo do ordenamento temporal de operadores	47

4	Seção de choque	49
4.1	Regra de ouro	51
4.2	Regras de Feynman	52
5	A amplitude de Feynman para o espalhamento $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	54
5.1	Truque de Casimir	55
5.2	Seção de choque para o espalhamento $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	56
6	Integração funcional e Funcional Gerador	59
6.1	Ordenamento temporal do produto de funções	61
6.2	Integral de Caminho na teoria quântica de campos	61
6.3	funcional Gerador	63
7	Polarização do vácuo	65
7.1	Regularização dimensional	68
8	Violação de Lorentz e o acoplamento não mínimo	75
9	Um acoplamento não mínimo CPT-par	78
9.1	Limite não relativístico	79
9.1.1	Efeitos não relativísticos	81
9.2	Conclusões da seção	83
10	Acoplamento não mínimo no espalhamento elétron-pósitron	84
10.1	Modelo teórico para o cálculo do espalhamento	85
10.2	A seção de choque	86
10.3	Conclusões da seção	92
11	Tensor de polarização do vácuo	94
11.1	Ação efetiva	95

11.2 Polarização do vácuo a um loop	97
11.3 Conclusão da seção	100
12 Método de Gupta-Bleuler e Eletrodinâmica CPT-par do modelo padrão estendido	103
12.1 QED estendida do SME para um lépton	104
12.2 Quantização de Gupta-Bleuler do eletromagnetismo LV e CPT-par	105
12.3 Observações e conclusões da seção	113
13 Conclusões finais e perspectivas	115
Referências Bibliográficas	119

1 Introdução

Explicar ou entender o funcionamento da natureza tem sido o grande desafio da humanidade, desde que se tem notícia. Desde os gregos, estabelecer regras que explicassem o funcionamento das coisas, tais como objetos em queda livre e o movimento dos planetas, foi algo almejado. A física aristotélica foi uma dessas tentativas, que buscava dar essas explicações a partir de um conjunto de postulados básicos. Com o desenvolvimento do método científico e das observações feitas com telescópio, entre outros, esses postulados básicos foram sendo em parte ou totalmente derrubados. O principal responsável pelo desenvolvimento do método científico foi Galileu, dando à ciência o patamar que possui hoje. Suas ideias como o princípio de inércia e o de referenciais inerciais, serviram de base para o desenvolvimento do que veio a ser a mecânica newtoniana. Para a sustentação desta teoria, algumas simetrias eram necessárias, como: o tempo ser absoluto, a invariância por referenciais inerciais sendo, os referenciais inerciais, atribuídos às estrelas fixas no céu. Esse conjunto de simetrias chamamos simetrias de Galileu. A mecânica newtoniana foi severamente testada por anos e, juntamente à Termodinâmica e Eletromagnetismo, pareciam explicar todos os fenômenos da natureza. A ideia de que se tinha alcançado uma teoria do todo, veio por terra com o problema da radiação do corpo negro e outros fenômenos. Este problema foi tratado por Planck, com a introdução de quantas de energia. Essa ideia marcou o nascimento da mecânica quântica e foi usada posteriormente por Bohr, em seu modelo para o átomo de hidrogênio, e também por Einstein, para explicar o efeito foto elétrico. Por trás das ideias utilizadas por Planck e Einstein, está a natureza dual da luz. A ideia de dualidade foi logo estendida por de Broglie para o elétron. À medida que a mecânica quântica se consolidava como uma teoria científica, ficava clara a limitação da mecânica newtoniana à escala macroscópica. Com o nascimento da teoria da relatividade de Einstein, ficou claro o papel restrito da mecânica newtoniana a fenômenos de baixa velocidade. A junção entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade restrita de Einstein, foi conseguida pela teoria de campos, que é a base para o modelo padrão das partículas elementares. Este também é sustentado por princípios de simetria, tais como: paridade, conjugação da carga, inversão temporal, conjugação da carga-paridade, invariância por CPT e invariância de Lorentz. Sabe-se que,

algumas destas simetrias, são violadas por algumas interações fundamentais, por exemplo, a interação fraca viola a paridade, como pôde ser observado no experimento de Wu [1]. Em sistemas de kaóns neutros, uma pequena violação de CP é observada[2]. Uma possível observação de violação de CPT acarretaria também, pelo Teorema CPT [3], em uma violação da simetria de Lorentz. Porém, não se tem dados conclusivos sobre a violação da simetria de Lorentz e de CPT. Entre outros princípios que sustentaram o desenvolvimento do modelo padrão, também temos o princípio da renormalizabilidade e invariância de gauge. O modelo padrão das partículas elementares inclui, em seu arcabouço, apenas três das quatro interações fundamentais, que são elas: eletromagnetismo, interação fraca e interação forte, todas renormalizáveis. Uma das dificuldades de incluir a gravitação, neste contexto, vem do fato de esta teoria não ser quantizada de maneira tão satisfatória quanto as outras. Na tentativa de se obter uma teoria de gravitação quântica, algumas teorias foram desenvolvidas, tais como gravitação quântica em loop e também a teoria de cordas. Neste cenário, alguns resultados apontam para a possibilidade da violação, tanto da simetria de Lorentz, quanto da simetria CPT [4].

O modelo padrão estendido (SME) é um grande arcabouço teórico que inclui termos de violação de Lorentz e CPT na estrutura do modelo padrão usual [5, 6, 7]. Este modelo foi proposto depois da verificação da possibilidade da quebra espontânea da simetria de Lorentz, no contexto de teorias de cordas [4]. Os termos de violação de Lorentz (VL) são gerados como valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais, mantendo a invariância sob transformações de coordenadas da teoria estendida [8]. Este modelo foi examinado em muitos aspectos nos últimos anos, incluindo estudos dos setores fermiônicos e de gauge, além de uma extensão da gravitação [9, 10]. O setor dos férmions [8, 11] foi muito examinado, principalmente com relação a testes de violação da simetria CPT, impondo fortes limites sobre a magnitude dos termos de VL[12] tratando, também, outros aspectos interessantes, como os encontrados na referência [13, 14, 15, 16, 17, 18]. O setor de gauge abeliano do SME é composto de um setor CPT-ímpar [19] e um setor CPT-par, ambos intensivamente investigados nos últimos anos [20, 21, 22, 23, 25, 26, 53, 27, 28].

Além das investigações empreendidas na estrutura do SME, alguns outros trabalhos foram propostos para examinar violação de Lorentz desenvolvidas fora deste cenário mais amplo. Alguns deles envolvendo termos de acoplamento não-mínimo, que modificam os vértices de interação entre os férmions e o campo de gauge. Os acoplamentos $\lambda v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \tilde{F}^{\mu\nu}$ e $\lambda b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi \tilde{F}^{\mu\nu}$, de caráter CPT-ímpar, foram há algum tempo considera-

dos no contexto da equação de Dirac com interessantes consequências em seu limite não relativístico, envolvendo fases topológicas [29], [30, 31] e correções ao espectro do átomo de hidrogênio [32]. Tais acoplamentos não mínimos, foram reexaminados em suas implicações com relação ao problema de Aharonov-Bohm-Casher [33], a seção de choque do processo Bhabha [34], além de outros [35]. Recentemente, outros tipos de acoplamentos não mínimos foram propostos também, no contexto da equação de Dirac, para investigar a geração de fases topológicas e geométricas [36].

Estudos teóricos sobre o cálculo da seção de choque, na presença de termos de VL, foram realizados por alguns autores [11] procurando estabelecer um procedimento para o cálculo de processos de espalhamento em geral. Muito recentemente, alguns autores executaram um estudo do espalhamento Bhabha [34], determinando os efeitos induzidos pelos acoplamentos não mínimos CPT-ímpar e na fórmula da seção de choque total. Comparando os resultados com alguns dados experimentais [37], foi possível determinar um limite superior de $|\lambda v_\mu| \leq 10^{-12} (eV)^{-1}$.

Neste trabalho, consideramos um novo acoplamento não mínimo, o qual se diferencia dos anteriores, principalmente por ser CPT-par (Capítulo 9). Em uma das aplicações deste novo termo, reavaliamos um conhecido processo da eletrodinâmica quântica: processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ na presença deste novo termo de VL (Capítulo 10). Para o desenvolvimento dos cálculos, consideramos as regras de Feynman, implementando um vértice modificado pelo termo de acoplamento não mínimo CPT-par. Considerando um espalhamento não polarizado, implementamos o truque de Casimir e, após a integração sobre o ângulo sólido, obtemos a fórmula para a seção de choque total. Seguindo o procedimento encontrado nas referências [34] e [37], obtemos um limite superior de $|\lambda(K_{\sigma F})| \leq 10^{-12} (eV)^{-1}$. Outra aplicação foi também desenvolvida, no contexto da equação de Dirac. Tomando o limite não relativístico da equação de Dirac modificada (Seção 9.1), explicitamos as novas contribuições ao hamiltoniano de Pauli modificado. Estes novos termos, têm implicações diretas em correções ao momento magnético anômalo; um tipo de efeito Zeeman no espectro do átomo de hidrogênio, associado ao campo elétrico atômico e; um termo de acoplamento do tipo Rashba. Esses efeitos são usados para impor um limite superior na magnitude do acoplamento não mínimo e, os coeficientes de VL, ficam limitados a 1 parte em $10^{16} (eV)^{-1}$. Além disso, também foram estudados efeitos da polarização do vácuo associado a esse novo acoplamento (Capítulo 11). Estes efeitos, contidos no tensor de polarização do vácuo são peças chave na construção

de uma ação efetiva para os fótons. Como resultado, obtemos a geração radiativa do termo CPT-par K_F do SME. Uma última investigação, foi realizada no contexto da quantização do setor de Gauge do SME (Capítulo 12). Concentrando-nos nas contribuições anisotrópicas de paridade par, mostramos que uma quantização covariante, consistente com o método de Gupta-Bleuler, pôde ser desenvolvida ao fixarmos o gauge de Lorenz generalizado $\partial_\mu A^\mu + \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = 0$ e, explicamos o problema da incompatibilidade com o gauge de Lorenz usual. No desenvolver desta tese também é feita uma revisão com o intuito de apresentar os procedimentos que servirão de base para a parte original desta tese. Além da didática, essa revisão também tem o papel de estabelecer uma série de convenções que serão adotadas no decorrer da tese. A revisão inicia-se com uma muito breve introdução a quantização canônica dos campos (Capítulo 2) onde se faz desde um estudo do campo escalar (Seção 2.3) passando pelo campo de Dirac (Seção 2.4) e terminando com o campo de calibre (Seção 2.5). Nesse desenvolvimento são apresentados objetos como os comutadores e propagadores bem como as devidas soluções em ondas planas das equações de movimento. A colocarmos os campos em interação (Capítulo 3), apresentamos um conjunto de técnicas para calcularmos de forma perturbativa os elementos da matriz de espalhamento para um processo em particular, sendo estas, generalizadas no Capítulo 4. Neste capítulo ainda fazemos o cálculo da seção de choque do processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ (Capítulo 5) em nível de árvore. Como uma alternativa ao método canônico de ainda apresentamentos de forma bem rápida o método do funcional gerador Capítulo 6. Ainda fazemos o cálculo do tensor de polarização do vácuo a um loop no Capítulo 7 encerrando-se ai a etapa de revisão

2 Quantização Canônica

2.1 Primeira quantização

A quantização canônica surge no contexto de teorias, onde temos um número finito de graus de liberdade, como em sistemas de partículas. A quantização canônica desses sistemas é feita mediante a implementação da relação de comutação¹,

$$[A, B]_{\pm} = i\{A, B\}_{PB}. \quad (2.1)$$

Onde, a relação de comutação (anti-comutação) entre dois operadores na mecânica quântica se relacionam com os parênteses de Poisson da teoria não quantizada (Clássica). Este procedimento, revela que

$$[x^i, x^j] = i\{x^i, x^j\}_{PB} = 0, \quad (2.2)$$

$$[x^i, p^j] = i\{x^i, p^j\}_{PB} = i\delta^{ij}, \quad (2.3)$$

$$[p^i, p^j] = i\{p^i, p^j\}_{PB} = 0. \quad (2.4)$$

Este tipo de relação de comutação, nos dará a relação correta de incerteza de Heisenberg [38] e, tem muitas aplicações em vários problemas da mecânica quântica, como o oscilador harmônico quântico e o átomo de hidrogênio. Contudo, ela falha quando existem vínculos entre as variáveis de momento e posição. Neste caso, o problema pode ser resolvido implementando o algoritmo de Dirac e usando os parênteses de Dirac no lugar dos parênteses de Poisson.

$$[A, B]_{\pm} = i\{A, B\}_{DB}. \quad (2.5)$$

2.2 Segunda quantização

A segunda quantização, também chamada de quantização da teoria de campos, é uma generalização da mecânica quântica convencional. Ela é adequada para tratarmos sistemas com infinitos graus de liberdade. Um dos problemas da primeira quantização é que, espaço e tempo, são tratados de forma distinta, ou seja, enquanto o tempo desempenha o papel

¹Usaremos o sistema de unidades naturais, onde $\hbar = c = 1$

de parâmetro de evolução da teoria, a variável de posição ganha status de operador. Isso deixa de ser um problema na linguagem de segunda quantização, pois o objeto quantizado agora é o próprio campo, e não as coordenadas do espaço tempo.

Assim como na primeira quantização, na quantização canônica do campo partimos das relações de comutação da teoria clássica e usamos comutadores semelhantes para obtermos sua versão quântica. Ao lidarmos com teorias de gauge, esbarramos novamente nos vínculos que podem ser tratados usando o algoritmo de Dirac. Entre outras alternativas, ainda podemos adicionar um termo de quebra da simetria de gauge local, que deve ser restabelecida de alguma forma posteriormente.

2.3 Quantização Canônica do Campo Escalar

2.3.1 Aspectos clássicos

Começamos nosso estudo sobre a quantização canônica com o campo escalar por se tratar do campo mais simples. Também, não consideraremos a possibilidade de vínculos. Nosso ponto de partida é a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial^\mu \varphi), \quad (2.6)$$

onde \mathcal{L} é a densidade de lagrangiana. A condição de minimização da ação nos fornecerá a equação de Euler-Lagrange²

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi} \delta \partial^\mu \varphi \right]. \quad (2.7)$$

Considerando que o operador δ , que é a variação funcional do campo e a derivada ∂^μ comutam, podemos isolar o termo $\delta \varphi$ realizando uma integração por partes, considerando $\delta \varphi$ nulo na fronteira, ou seja

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi} \right] \delta \varphi. \quad (2.8)$$

A condição de minimização da ação é $\delta S = 0$, de modo que devemos ter:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi} = 0. \quad (2.9)$$

²usamos a notação de soma de Einstein e também adotaremos métrica $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Para seguirmos em direção à quantização canônica, devemos passar ao formalismo hamiltoniano. Computaremos o momento canônico da seguinte forma:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (2.10)$$

e introduzimos a densidade hamiltoniana usando uma transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}. \quad (2.11)$$

Fazendo a variação de (2.11) com respeito às variáveis π , φ e $\partial^i \varphi$ como independentes, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial^i \varphi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^i \varphi}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Combinando com as equações acima (2.12), (2.10) e (2.9), obtemos as equações de Hamilton para o campo escalar.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} - \partial^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial^i \varphi} = -\dot{\pi}. \end{cases} \quad (2.13)$$

O hamiltoniano será, então, definido em termos da integral

$$H = \int d\vec{x} \mathcal{H}. \quad (2.14)$$

Em termos deste e das derivadas funcionais³, as equações de Hamilton assumem a forma mais simples.

$$\begin{cases} \frac{\delta H}{\delta \pi} = \dot{\varphi}, \\ \frac{\delta H}{\delta \varphi} = -\dot{\pi}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Qualquer funcional das variáveis de campo φ e π têm sua dinâmica especificada da seguinte forma:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \int d\vec{x} \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\delta F}{\delta \pi} \dot{\pi} \right). \quad (2.16)$$

Substituindo as equações de Hamilton na expressão anterior, encontramos

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \int d\vec{x} \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi} \frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta H}{\delta \varphi} \right). \quad (2.17)$$

Definiremos os parênteses de Poisson da seguinte forma:

$$\{A, B\}_{PB} = \int d\vec{x} \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi} \frac{\delta B}{\delta \varphi} \right), \quad (2.18)$$

³Derivadas funcionais são comumente definidas em física como $\frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta \varphi(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\varphi(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[\varphi(x)]}{\varepsilon}$.

o qual nos permite simplificar (2.17) como:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_{PB}. \quad (2.19)$$

Podemos verificar as seguintes relações:

$$\{\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{y})\}_{PB} = 0, \quad (2.20)$$

$$\{\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\}_{PB} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.21)$$

$$\{\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\}_{PB} = 0. \quad (2.22)$$

2.3.2 Quantização do campo escalar livre.

Para sairmos da teoria clássica para a sua versão quântica, promovemos as variáveis de campo a operadores, cujos comutadores são definidos fazendo a correspondência $[,] = i\{, \}_{PB}$. O sinal de menos, se justifica na estatística obedecida por partículas escalares que são bósons de spin 0, satisfazendo a estatística de Bose-Einstein. As equações (2.20), (2.21) e (2.22), dão as relações canônicas de comutação

$$[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0, \quad (2.23)$$

$$[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.24)$$

$$[\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0, \quad (2.25)$$

enquanto que a equação (2.19) corresponde à equação de Heisenberg

$$[F, H] = i \left(\dot{F} - \frac{\partial F}{\partial t} \right). \quad (2.26)$$

Para o caso particular do campo escalar livre, sua densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (2.27)$$

O momento canônico será simplesmente

$$\pi = \dot{\varphi}, \quad (2.28)$$

e, em termos da transformação de Legendre, temos a densidade hamiltoniana.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \partial^i \varphi \partial^i \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (2.29)$$

e , conseqüentemente, a energia

$$H = \int d^3 \vec{x} \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \partial^i \varphi \partial^i \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right). \quad (2.30)$$

Implementando a equação (2.26) temos as equações de movimento

$$[\varphi, H] = i \dot{\varphi}, \quad (2.31)$$

$$[\pi, H] = i \dot{\pi}. \quad (2.32)$$

Agora, considerando as relações (2.23), (2.24) e (2.25),

$$[\pi, H] = i (\nabla^2 - m^2) \varphi. \quad (2.33)$$

Combinando (2.28), (2.32) e (2.33),

$$i \dot{\pi} = i (\nabla^2 - m^2) \varphi, \quad (2.34)$$

de modo que podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\ddot{\varphi} = (\nabla^2 - m^2) \varphi, \quad (2.35)$$

que ainda pode ser rearranjada na forma conhecida da equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \varphi = 0. \quad (2.36)$$

Podemos resolver a equação anterior usando o método de transformação de Fourier, onde se escreve o campo escalar da seguinte forma:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{p} \tilde{\varphi}(\vec{p}, t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \quad (2.37)$$

ou, de maneira inversa,

$$\tilde{\varphi}(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{x} \varphi(t, \vec{x}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}. \quad (2.38)$$

Para que as relações canônicas de comutação sejam satisfeitas, devemos ter:

$$[\tilde{\varphi}(\vec{p}, t), \tilde{\varphi}^\dagger(\vec{p}', t)] = 0, \quad (2.39)$$

$$[\tilde{\varphi}(\vec{p}, t), \dot{\tilde{\varphi}}^\dagger(\vec{p}', t)] = i \delta(p - p'), \quad (2.40)$$

$$[\dot{\tilde{\varphi}}(\vec{p}, t), \tilde{\varphi}^\dagger(\vec{p}', t)] = 0. \quad (2.41)$$

Substituindo a transformação de Fourier na equação de movimento, podemos encontrar uma solução para $\tilde{\varphi}(\vec{p}, t)$ da seguinte forma:

$$\tilde{\varphi}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2E}} (a(p) e^{-iEt} + a^\dagger(-p) e^{iEt}), \quad (2.42)$$

onde temos a relação de dispersão $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Os operadores a e a^\dagger , satisfazem as relações de comutação típicas de operadores de criação e destruição

$$\begin{aligned} [a(p), a^\dagger(p')] &= \delta(p - p'), \\ [a(p), a(p')] &= [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

De fato, os operadores $a^\dagger(p)$ são operadores de criação, enquanto que os operadores $a(p)$ são operadores de destruição

$$[H, a^\dagger(\vec{p})] = E(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}), \quad (2.44)$$

$$[H, a(\vec{p})] = -E(\vec{p}) a(\vec{p}). \quad (2.45)$$

Em termos destes operadores, o hamiltoniano se escreve deslocando os níveis de energia para que o vácuo possua energia nula, da seguinte forma:

$$H_{ON} =: H := \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}), \quad (2.46)$$

onde o efeito do ordenamento normal é o de reposicionar os operadores de criação à esquerda.

Definindo-se o vácuo como sendo o estado aniquilado pelos operadores de destruição $a(\vec{p})|0\rangle = 0$, qualquer auto estado da energia pode ser construído pela aplicação sucessiva dos operadores de criação sobre o vácuo. Esses estados são identificados como estados de múltiplas partículas pela relação

$$|n\rangle = C \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \dots d^3\vec{p}_n f(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) a^\dagger(\vec{p}_1) a^\dagger(\vec{p}_2) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle. \quad (2.47)$$

2.3.3 Microcausalidade

Nossos pontos de partida para a obtenção da versão quantizada da teoria foram as relações canônicas de comutação, que são tomadas em tempos iguais. De posse das relações de comutação para os operadores de criação e destruição, podemos construir relações de comutação entre os campos que sejam válidas para qualquer instante de tempo. Essa relação de comutação é dada da seguinte forma

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\Delta_{PJ}(x - x'). \quad (2.48)$$

A função $\Delta_{PJ}(x)$ que caracteriza a relação de comutação anterior é conhecida como função de Pauli-Jordan

$$i\Delta_{PJ}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2E} \left(e^{-ip^\mu(x-x')_\mu} - e^{ip^\mu(x-x')_\mu} \right). \quad (2.49)$$

Pode-se demonstrar que, as relações de comutação canônicas, podem ser obtidas das propriedades da função de Pauli-Jordan. Outra importante propriedade da função de Pauli-Jordan é a de que a mesma constitui uma função invariante de Lorentz, sendo ela nula para intervalos tipo espaço. Na Figura 2.1, a função de Pauli-Jordan apresenta valores não nulos apenas na região sombreada.

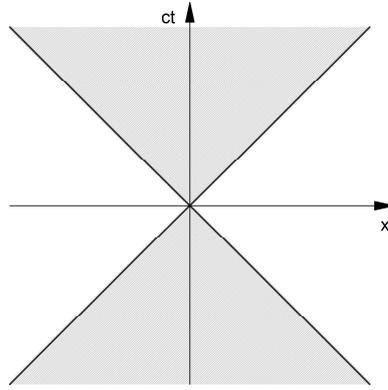


Figura 2.1: A função de Pauli-Jordan é nula fora do cone.

Essa importante propriedade, conhecida como microcausalidade, reflete não somente as propriedades fundamentais da teoria quântica como também do próprio espaço-tempo.

2.3.4 Campo escalar carregado

A teoria desenvolvida até aqui, refere-se ao campo escalar e as partículas associadas a esse campo não possuem carga. A teoria do campo escalar complexo pode ser obtida da teoria do campo neutro se considerarmos que as componentes reais e imaginárias do campo complexo satisfazem a equação de Klein-Gordon. Podemos, então, tratar as partes real e imaginária do campo escalar complexo como dois campos independentes, porém, ao invés de fazer isso, é útil considerar que φ e φ^* são independentes. Neste caso, temos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (2.50)$$

A quantização do modelo é feita impondo as relações de comutação a tempos iguais:

$$[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = [\varphi^\dagger(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.51)$$

onde $\pi = \dot{\varphi}^\dagger$ e $\pi^\dagger = \dot{\varphi}$. O campo escalar complexo satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (\square + m^2)\varphi^* = 0. \quad (2.52)$$

Podemos escrever a solução em termos de ondas planas

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E}} (a(p) e^{-ip^\mu x_\mu} + b^\dagger(p) e^{ip^\mu x_\mu}), \quad (2.53)$$

$$\varphi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E}} (b(p) e^{-ip^\mu x_\mu} + a^\dagger(p) e^{ip^\mu x_\mu}), \quad (2.54)$$

donde se extrai as seguintes relações de comutação não nulas:

$$[a(p), a^\dagger(p')] = [b(p), b^\dagger(p')] = \delta(p - p'). \quad (2.55)$$

Para este caso, o hamiltoniano é escrito como

$$H = \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) (a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})). \quad (2.56)$$

Uma corrente conservada pode ser construída para o campo escalar complexo

$$J^\mu = i(\varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^\dagger \varphi), \quad (2.57)$$

com

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.58)$$

Verifica-se que uma quantidade conservada pode ser construída em nível quântico em termos da componente J^0 da corrente

$$Q =: \int d^3\vec{x} J^0 :=: \int d^3\vec{p} (a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})) :. \quad (2.59)$$

Não é tarefa difícil mostrar que $[Q, H] = 0$, sendo Q , o operador de carga, uma constante do movimento. Pode-se interpretar os operadores $a^\dagger(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$ como operadores que criam partícula com carga $+$ e carga $-$, respectivamente, enquanto que $a(\vec{p})$ e $b(\vec{p})$ são operadores de destruição. Um comutador generalizado, pode ser construído em termos da função de Pauli-Jordan

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(x')] = i\Delta_{PJ}(x - x'). \quad (2.60)$$

2.3.5 Propagador de Feynman do campo escalar

A função de Pauli-Jordan não é a única função invariante de Lorentz que se pode construir para o campo escalar. Outra função de grande importância é o propagador de Feynman. O propagador de Feynman estabelece a amplitude de probabilidade de uma partícula criada, em certo ponto do espaço, num dado instante de tempo, ser absorvida ou aniquilada em outro instante de tempo e outra posição. Pode-se definir o propagador de Feynman da seguinte forma:

$$-i\Delta_F(x-x') = \langle 0|T\varphi(x)\varphi^\dagger(x')|0\rangle, \quad (2.61)$$

onde o símbolo T denota ordenamento temporal. Em termos da expansão em ondas planas dos campos φ e φ^\dagger , obtemos uma forma integral para o propagador de Feynman

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-1}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} e^{-ip^\mu(x-x')_\mu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \Delta_F(p) e^{-ip^\mu(x-x')_\mu}. \quad (2.62)$$

Pode-se mostrar que o propagador de Feynman satisfaz a equação não homogênea:

$$(\square + m^2) \Delta_F(x-x') = \delta^4(x-x'). \quad (2.63)$$

O propagador de Feynman assume uma forma particularmente simples no espaço de Fourier quando não existem interações. Quando temos interações, porém, essa forma pode ser alterada. No cálculo do propagador exato se utiliza métodos perturbativos, onde o propagador livre desempenha um papel crucial.

2.4 Campo de Dirac

Em nossas seções anteriores, consideramos o caso do campo escalar real e complexo. Ao tratarmos do campo escalar complexo, observou-se a possibilidade de construirmos uma corrente conservada J^μ . A partir da componente J^0 , definimos o observável Q , que é interpretado como a carga, não sendo a mesma positiva definida. Nos primórdios do desenvolvimento da mecânica quântica relativística, uma das primeiras tentativas de generalizar a equação de Schrödinger foi feita em termos da equação de Klein-Gordon, porém, o fato de J^0 não ser positivo definido, dificultava a interpretação probabilística. Dirac notou que o problema era causado pela derivada temporal, que era de segunda ordem e, então, buscou uma equação relativística que fosse de primeira ordem no tempo.

Essa equação ficou conhecida como equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (2.64)$$

onde ψ é o spinor de Dirac de quatro componentes e as matrizes γ^μ satisfazem

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.65)$$

Na representação de Dirac, essas matrizes são expressas em blocos:

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{c|c} 1_{2 \times 2} & 0 \\ \hline 0 & -1_{2 \times 2} \end{array} \right), \quad \gamma^i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma^i \\ \hline -\sigma^i & 0 \end{array} \right), \quad (2.66)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Diferente da equação de Klein-Gordon, a equação de Dirac descreve partículas de spin 1/2, que devem satisfazer a estatística de Fermi-Dirac. A equação de Dirac pode ser obtida pelo método variacional, a partir da seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (2.68)$$

Onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ e ψ são tratados como independentes. Em termos do campo $\bar{\psi}$, temos a equação

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0, \quad (2.69)$$

onde se utilizou a propriedade de que $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$. Pode-se mostrar que é possível construir uma corrente conservada

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.70)$$

cuja componente J^0 é positiva definida, admitindo-se assim, uma interpretação probabilística para a equação de Dirac.

A interação da partícula de spin 1/2 com o campo eletromagnético externo, é feita mediante a prescrição de acoplamento mínimo, onde se faz

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu). \quad (2.71)$$

O limite não relativístico da equação de Dirac pode ser obtido escrevendo o spinor de quatro componentes da seguinte forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{i\sigma^j D^j}{2m} \chi \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad (2.72)$$

onde a componente inferior do spinor é considerada fraca em comparação à superior. Substituindo a prescrição acima na equação de Dirac temos, considerando $|D_0\chi| \ll |m\chi|$ temos

$$i\partial_0\chi = \left[\frac{1}{2m} \left((-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) - 2e\vec{S} \cdot \vec{B} \right) + e\varphi \right] \chi, \quad (2.73)$$

que corresponde à equação de Pauli, com $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ sendo o operador de spin. O spinor de duas componentes χ descreve também o grau de liberdade de spin, mostrando assim que a equação de Dirac descreve uma partícula de spin 1/2. Particularizando para o caso de um campo magnético homogêneo, podemos escrever

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x} \times \vec{B}_0. \quad (2.74)$$

Substituindo na equação de Dirac, obteremos para o caso de um campo fraco

$$i\partial_0\chi = \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}_0 + e\varphi \right] \chi, \quad (2.75)$$

onde $\vec{L} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}$ é o operador de momento angular orbital. Da expressão anterior, vemos que o fator giro magnético correto surge naturalmente no limite não relativístico da equação de Dirac. Em uma seção posterior, trataremos do limite não relativístico com um pouco mais de detalhes.

2.4.1 Segunda quantização campo de Dirac

O fato da equação de Dirac ser de primeira ordem no tempo, resolve os problemas com a interpretação probabilística da teoria de Dirac, porém, causa problemas com o método de quantização canônica. Ao passarmos ao formalismo hamiltoniano, encontramos as seguintes restrições:⁴

$$\begin{aligned} (\pi_\psi)_a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = -i\bar{\psi}_b (\gamma^0)_{ba}, \\ (\pi_{\bar{\psi}})_a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} = 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

mostrando que as variáveis $\pi_\psi, \psi, \pi_{\bar{\psi}}, \bar{\psi}$ não são mutuamente independentes, como se verifica no caso do campo escalar. Um hamiltoniano pode ser calculado da forma padrão

$$\mathcal{H} = \dot{\bar{\psi}}_a (\pi_{\bar{\psi}})_a + \dot{\psi}_a (\pi_\psi)_a - \mathcal{L} = \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi, \quad (2.77)$$

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = \int d^3\vec{x} \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi. \quad (2.78)$$

⁴Para a obtenção das equações a seguir, foi considerado o caráter anti-comutativo do campo fermiônico $\psi(x) \rightarrow \psi(x_i) C_i$ em termos de variáveis grassmannianas C_i .

Propondo que a dinâmica das variáveis canônicas seja obtida a partir dos parênteses de Poisson, obtemos o seguinte resultado:

$$\dot{\psi} = \{\psi, H\}_{PB}, \quad (2.79)$$

$$\dot{\psi}_b = \sum_a \int d\vec{x} \left(-\frac{\delta\psi_b}{\delta(\pi_\psi)_a} \frac{\delta H}{\delta\psi_a} - \frac{\delta H}{\delta(\pi_\psi)_a} \frac{\delta\psi_b}{\delta\psi_a} - \frac{\delta\psi_b}{\delta(\pi_{\bar{\psi}})_a} \frac{\delta H}{\delta\bar{\psi}_a} - \frac{\delta H}{\delta(\pi_{\bar{\psi}})_a} \frac{\delta\psi_b}{\delta\bar{\psi}_a} \right). \quad (2.80)$$

Verifica-se, da expressão anterior, que os parênteses de Poisson foram adaptados para variáveis anti-comutantes. A equação de movimento obtida para ψ em termos do hamiltoniano canônico (2.78) e dos parênteses (2.80), não descreve a dinâmica correta para o campo de Dirac. Para resolver este tipo de situação, Dirac propôs adicionar ao hamiltoniano canônico as restrições obtidas inicialmente. Essas restrições serão chamadas vínculos primários e, o hamiltoniano canônico mais os vínculos primários, foi chamado hamiltoniano primário

$$H_P = H + \int d^3\vec{x} (\bar{C}\pi_{\bar{\psi}} + (\pi_\psi + i\bar{\psi}_b\gamma^0) D). \quad (2.81)$$

Observa-se que, quando os vínculos primários são satisfeitos, os hamiltonianos H_p e H são equivalentes. Em seguida, considerando que a evolução temporal do sistema é regida pelo hamiltoniano primário, observa-se que a evolução temporal dos vínculos primários são

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_\psi + i\dot{\bar{\psi}}\gamma^0 &= i\partial_i\bar{\psi}\gamma^i + m\bar{\psi} + i\bar{C}\gamma^0 \approx 0, \\ \dot{\pi}_{\bar{\psi}} &= -(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi - i\gamma^0 D \approx 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Nessa última expressão, o símbolo \approx significa fracamente nulo⁵. O último par de equações serve para fixar os valores das constantes arbitrárias C e D e não temos mais outros vínculos. Seguindo adiante, agora nós dividimos os vínculos em duas classes. Aqueles que possuem parênteses de Poisson fracamente nulos, com todos os outros, são chamados de vínculos de primeira classe e, aqueles que possuem parênteses de Poisson não nulo, com pelo menos um dos outros vínculos, são chamados vínculos de segunda classe. Definindo-se o conjunto dos vínculos como

$$\Sigma^A = \{\pi_\psi + i\bar{\psi}\gamma^0, \pi_{\bar{\psi}}\}, \quad (2.83)$$

verificamos que os vínculos constituem um conjunto de segunda classe

$$M^{AB} = \{\Sigma^A, \Sigma^B\}_{PB} = -i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.84)$$

⁵Devido à forma funcional da densidade lagrangiana, as soluções das equações de movimento estão restritas a orbitas contidas em uma região específica do espaço de fase. O símbolo de \approx designa, neste caso, uma igualdade válida apenas nesta região.

Em seguida, definimos um parênteses generalizado chamado parênteses de Dirac da seguinte forma:

$$\{A, B\}_{DB} = \{A, B\}_{PB} - \int dzdw \{A, \Sigma^A(z)\}_{PB} M^{-1AB}(z, w) \{\Sigma^A(w), B\}_{PB}. \quad (2.85)$$

Podemos mostrar que os parênteses de Dirac, entre qualquer variável e um vínculo, é identicamente nulo. Partindo do hamiltoniano canônico e usando os parênteses de Dirac no lugar dos parênteses de Poisson, conseguimos a equação de movimento correta

$$\dot{\psi} = \{\psi, H\}_{DB} = -i\gamma^0 (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi, \quad (2.86)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (2.87)$$

Para sistemas com vínculos, a quantização é feita mediante a correspondência entre os parênteses de Dirac e os comutadores ou anticomutadores da mecânica quântica. Nesse caso, que temos para o campo de Dirac

$$[,]_{\pm} = i \{, \}_{DB}. \quad (2.88)$$

Podemos escrever alguns resultados:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} &= \{\bar{\psi}_a(t, \vec{x}), \bar{\psi}_b(t, \vec{y})\} = 0, \\ \{\psi_a(t, \vec{x}), \bar{\psi}_b(t, \vec{y})\} &= \gamma_{ab}^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Podemos resolver a equação de Dirac usando o método de transformação de Fourier, onde escrevemos o campo de Dirac da seguinte forma

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\lambda} \int d^3\vec{p} \tilde{\psi}_{\lambda}(t, \vec{p}) u_{\lambda}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (2.90)$$

onde os objetos $u_{\lambda}(\vec{p})$ são autovetores da matriz $\gamma^0(-\gamma^i p_i + m)$, de modo que

$$\gamma^0(-\gamma^i p_i + m) u_{\lambda}(\vec{p}) = \alpha_{\lambda} u_{\lambda}(\vec{p}) \quad (2.91)$$

onde temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = E = \sqrt{m^2 + p^2}$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = -E = -\sqrt{m^2 + p^2}$ são os autovalores e, explicitamente, os autovetores são dados por

$$\begin{aligned} u_1(\vec{p}) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(m+E)}\chi_+ \end{pmatrix}, & u_2(\vec{p}) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_- \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(m+E)}\chi_- \end{pmatrix}, \\ u_3(\vec{p}) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_+}{(m+E)} \\ \chi_+ \end{pmatrix}, & u_4(\vec{p}) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_-}{(m+E)} \\ \chi_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde $(\chi_+)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $(\chi_-)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, conseqüentemente, $u_\lambda^\dagger(\vec{p}) u_{\lambda'}(\vec{p}) = 2E \delta_{\lambda\lambda'}$. Ainda podemos fazer de forma inversa.

$$\tilde{\psi}_\lambda(t, \vec{p}) = \frac{1}{2E(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{x} u_\lambda^\dagger(\vec{p}) \psi(t, \vec{x}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (2.93)$$

Para satisfazermos as relações de comutação propostas inicialmente, devemos ter:

$$\left\{ \tilde{\psi}_\lambda(t, \vec{p}) \tilde{\psi}_{\lambda'}(t, \vec{p}') \right\} = \left\{ \tilde{\psi}_\lambda^\dagger(t, \vec{p}) \tilde{\psi}_{\lambda'}^\dagger(t, \vec{p}') \right\} = 0, \quad (2.94)$$

$$\left\{ \tilde{\psi}_\lambda(t, \vec{p}) \tilde{\psi}_{\lambda'}^\dagger(t, \vec{p}') \right\} = \frac{1}{2E} \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.95)$$

Substituindo (2.90) na equação de Dirac temos a solução

$$\tilde{\psi}_\lambda(t, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E}} c_\lambda(\vec{p}) e^{-i\alpha_\lambda t}. \quad (2.96)$$

Novamente, para garantirmos as relações de comutação iniciais, devemos ter

$$\begin{aligned} \{c_\lambda(\vec{p}) c_{\lambda'}(\vec{p}')\} &= 0, \\ \{c_\lambda(\vec{p}) c_{\lambda'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Deste modo, a solução em ondas planas se escreve como

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_\lambda \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E}} c_\lambda(\vec{p}) u_\lambda(\vec{p}) e^{-i\alpha_\lambda t} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \quad (2.98)$$

Substituindo a solução (2.98) no hamiltoniano canônico

$$H = \sum_\lambda \int d^3\vec{p} \alpha_\lambda c_\lambda^\dagger(\vec{p}) c_\lambda(\vec{p}), \quad (2.99)$$

$$H = \int d^3\vec{p} E \left(c_1^\dagger(\vec{p}) c_1(\vec{p}) + c_2^\dagger(\vec{p}) c_2(\vec{p}) - c_3^\dagger(\vec{p}) c_3(\vec{p}) - c_4^\dagger(\vec{p}) c_4(\vec{p}) \right). \quad (2.100)$$

A interpretação usual dos operadores $c_\lambda^\dagger(\vec{p})$ e $c_\lambda(\vec{p})$, em termos de operadores de criação e destruição é problemática neste caso, pois para $\lambda = 3, 4$ esses operadores criariam e destruiriam um quanta de energia negativa. O hamiltoniano, para esse caso, não é positivo definido. Para resolvermos esse problema, utilizamos a teoria dos buracos de Dirac, onde uma partícula de energia negativa pode ser vista como uma antipartícula de energia positiva. Isso equivale a fazer

$$c_{3,4}^\dagger(\vec{p}) = d_{1,2}(-\vec{p}). \quad (2.101)$$

Fazendo essa substituição e empurrando os níveis de energia para que o vácuo possua energia nula, temos:

$$H_{NO} =: H := \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{p} E \left(c_\lambda^\dagger(\vec{p}) c_\lambda(\vec{p}) + d_\lambda^\dagger(\vec{p}) d_\lambda(\vec{p}) \right), \quad (2.102)$$

onde os operadores $c_{1,2}^\dagger(\vec{p})$ e $c_{1,2}(\vec{p})$ criam e aniquilam partículas, enquanto que $d_{1,2}^\dagger(\vec{p})$ e $d_{1,2}(\vec{p})$ criam e aniquilam antipartículas. Em termos desses novos operadores, temos a solução em onda plana

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(c_\lambda(\vec{p}) u_\lambda(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + d_\lambda^\dagger(\vec{p}) v_\lambda(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \right), \quad (2.103)$$

onde

$$v_1(\vec{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_+}{(m+E)} \\ \chi_+ \end{pmatrix}, \quad v_2(\vec{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_-}{(m+E)} \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad (2.104)$$

e observamos as relações de ortogonalidade

$$\bar{u}_\lambda u_{\lambda'} = 2m\delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (2.105)$$

$$\bar{u}_\lambda v_{\lambda'} = \bar{v}_\lambda u_{\lambda'} = 0, \quad (2.106)$$

$$\bar{v}_\lambda v_{\lambda'} = -2m\delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (2.107)$$

além das relações de completeza

$$\sum_{\lambda=1}^2 u_\lambda \bar{u}_\lambda = \not{p} + m, \quad (2.108)$$

$$\sum_{\lambda=1}^2 v_\lambda \bar{v}_\lambda = \not{p} - m. \quad (2.109)$$

Os spinores unitários também satisfazem as equações de Dirac no espaço dos momentos:

$$(\not{p} - m) u_\lambda = 0, \quad \bar{u}_\lambda (\not{p} - m) = 0, \quad (2.110)$$

$$(\not{p} + m) v_\lambda = 0, \quad \bar{v}_\lambda (\not{p} + m) = 0. \quad (2.111)$$

2.4.2 Microcausalidade e propagador de Feynman

Partindo da expansão em ondas planas, podemos calcular as relações de anti-comutação para qualquer instante de tempo

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(x')\}_{DB} = (i\not{\partial} + m)_{ab} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2E} \left(e^{-ip^\mu(x-x')_\mu} - e^{ip^\mu(x-x')_\mu} \right), \quad (2.112)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(x')\}_{DB} = (i\not{\partial} + m)_{ab} i\Delta_{PJ}(x-x') = i(S_{PJ})_{ab}(x-x'). \quad (2.113)$$

Mais uma vez encontramos que as relações de comutação, para qualquer tempo, são escritas em termos da função invariante de Pauli-Jordan, que se anula fora do cone de luz, mostrando que medidas separadas por intervalos tipo espaço são independentes.

O propagador de Feynman também pode ser calculado partindo-se das expansões em ondas planas dos campos.

$$iS_{ab}(x-x') = \langle 0|T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')|0\rangle \quad (2.114)$$

Considerando que no ordenamento temporal precisamos levar em conta o caráter anticomutativo das variáveis, a expressão anterior se reescreve como:

$$iS_{ab}(x-x') = \Theta(x_0-x'_0)\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')|0\rangle - \Theta(x'_0-x_0)\langle 0|\bar{\psi}_b(x')\psi_a(x)|0\rangle. \quad (2.115)$$

Explicitando em termos dos operadores de criação e destruição, chegaremos ao seguinte resultado:

$$S_{ab}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{(\not{p}+m)_{ab}}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip^\mu(x-x')_\mu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \tilde{S}_{ab}(p) e^{-ip^\mu(x-x')_\mu}. \quad (2.116)$$

Podemos identificar o propagador de Feynman no espaço dos momentos

$$\tilde{S}_{ab}(p) = \frac{(\not{p}+m)_{ab}}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \quad (2.117)$$

2.5 Campo de Maxwell

Em adição às partículas de spin 0 e spin $\frac{1}{2}$, tratadas em termos do campo escalar e do campo de Dirac, temos as partículas de spin 1 que também desempenham um papel relevante em física. Nas próximas seções, vamos discutir um pouco o campo eletromagnético, representado pelo vetor potencial A^μ que está associado aos fótons, que são partículas não massivas de spin 1. No desenvolvimento da quantização do campo de Maxwell, nos deparamos com algumas complicações formais. Essas complicações estão associadas ao fato do campo eletromagnético estar sobre-representado em termos do vetor potencial (quatro graus de liberdade), enquanto que o campo eletromagnético possui na realidade apenas dois graus de liberdade. Essa representação excedente se manifesta na teoria em termos da liberdade de gauge e, na existência de vínculos, quando passamos ao formalismo hamiltoniano. Nas seções que se seguem, vamos abordar a quantização do campo eletromagnético de duas formas: pelo método de Dirac e pelo método conhecido como método de Gupta-Bleuler.

2.5.1 Método de Dirac

Um dos maiores obstáculos para derivação do formalismo hamiltoniano, a partir do formalismo lagrangiano, é a existência de vínculos. No caso do campo eletromagnético, vínculos surgem naturalmente da estrutura da lagrangiana. A densidade lagrangiana do campo eletromagnético livre é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.118)$$

onde o tensor $F^{\mu\nu}$ é definido em termos do vetor potencial como segue

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.119)$$

Da forma como se define o tensor $F^{\mu\nu}$, verifica-se facilmente que o mesmo é invariante pela transformação $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \alpha$ que constitui uma transformação de gauge. As componentes do tensor $F^{\mu\nu}$ estão associadas às componentes do campo elétrico e magnético.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

A partir da variação da ação, determinamos a equação de movimento para o campo eletromagnético

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.121)$$

que corresponde a duas das quatro equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.122)$$

O outro par de equações é obtido a partir do tensor dual

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (2.123)$$

As componentes do tensor dual $F^{*\mu\nu}$ são obtidas a partir das componentes do tensor $F^{\mu\nu}$, a partir da correspondência $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$

$$F^{*\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

Da definição do tensor $F^{\mu\nu}$, em termos do quadrivetor potencial e da definição do tensor dual, observamos que o tensor dual satisfaz a equação

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (2.125)$$

que corresponde ao outro par de equações de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.126)$$

Podemos então, tentar implementar o método de quantização canônica, passando inicialmente do formalismo lagrangiano ao formalismo hamiltoniano, calculando os momentos canônicos

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}. \quad (2.127)$$

Observa-se que, a invariância de Gauge, nos leva a $\pi^0 = 0$, o que constitui um vínculo primário. Podemos definir o hamiltoniano canônico da maneira usual

$$H = \int d^3\vec{x} \left(\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right), \quad (2.128)$$

$$H = \int d^3\vec{x} \left(\pi_i \partial^i A^0 - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right). \quad (2.129)$$

Seguindo o formalismo de Dirac, definimos o hamiltoniano primário, adicionando ao hamiltoniano canônico os vínculos primários

$$H_P = H + \int d^3\vec{x} C \pi^0. \quad (2.130)$$

Avaliamos a evolução temporal do vínculo primário, obtemos

$$\dot{\pi}^0 = \partial^i \pi_i \approx 0, \quad (2.131)$$

que constitui um vínculo secundário. Devemos então incluir esse novo vínculo ao hamiltoniano

$$H_E = H + \int d^3\vec{x} (C \pi^0 + D \partial_i \pi^i), \quad (2.132)$$

onde o hamiltoniano H_E inclui todos os vínculos. Avaliando-se a evolução temporal do vínculo secundário, verifica-se que, de fato, não há mais vínculos. A distinção entre vínculos primários e secundários não é relevante, mas sim a distinção entre vínculos de primeira classe e de segunda classe. Dado que os vínculos encontrados possuem parênteses de Poisson nulos, os mesmos formam um conjunto de primeira classe.

No caso estudado anteriormente, também possuíamos vínculos primários, que deveriam ser incluídos no hamiltoniano juntamente com termos, em princípio, arbitrários. Ao considerarmos a evolução temporal daqueles vínculos, encontramos um conjunto de equações que servia para fixar os termos em princípio arbitrários. O mesmo já não se observa para o caso do campo eletromagnético, como se pode ver fazendo a evolução temporal dos campos:

$$\dot{A}_0 = C, \quad (2.133)$$

$$\dot{A}^j = -\pi^j - \partial^j D. \quad (2.134)$$

De onde notamos que a dinâmica do campo A^μ permanece arbitrária. Esse problema pode ser resolvido explorando a liberdade de gauge do eletromagnetismo. Podemos impor condições sobre os campos de modo a fixar os termos arbitrários C e D . Do algoritmo de Dirac, sabemos que devemos fixar duas condições de Gauge, uma para cada vínculo. No caso do campo eletromagnético livre, essas condições podem ser:

$$A^0 = 0, \quad (2.135)$$

$$\partial_i A^i = 0, \quad (2.136)$$

que corresponde a resolvermos as equações de movimento no gauge de Coulomb para na ausência de carga. Essas equações nos levam a tomarmos $C = 0$ e $D = 0$. As condições de gauge, juntamente com o conjunto de primeira classe, formam um conjunto de segunda classe

$$\Sigma^A = \{A^0, \partial_i A^i, \pi^0, \partial_i \pi^i\}. \quad (2.137)$$

A matriz dos parênteses de Poisson entre os vínculos é

$$M^{AB}(x, y) = \{\Sigma^A(x), \Sigma^B(y)\}_{PB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_i \partial^j \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_i \partial^j & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (2.138)$$

onde temos os parênteses de Poisson

$$\{F, G\}_{PB} = \int d\vec{x} \left(\frac{\delta F}{\delta A^\mu} \frac{\delta G}{\delta \pi_\mu} - \frac{\delta F}{\delta \pi_\mu} \frac{\delta G}{\delta A^\mu} \right). \quad (2.139)$$

A partir de (2.138), define-se os parênteses de Dirac.

$$\{A, B\}_{DB} = \{A, B\}_{PB} - \sum_{A, B} \int dz dw \{A, \Sigma^A(z)\}_{PB} (M^{-1})^{AB}(z, w) \{\Sigma^B(w), B\}_{PB}. \quad (2.140)$$

Como alguns casos especiais dos parênteses de Dirac, observamos que os parênteses entre qualquer quantidade e um vínculo, ou condição de Gauge, é nulo

$$\{A, \Sigma^B\}_{DB} = 0. \quad (2.141)$$

Também verificamos os parênteses nulos

$$\{A^i, A^j\}_{DB} = \{\pi^i, \pi^j\}_{DB} = 0, \quad (2.142)$$

e os parênteses não nulos

$$\{A^i(x), \pi^j(y)\}_{DB} = \left(g^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\partial_k \partial^k}\right) \delta(x-y). \quad (2.143)$$

Prosseguindo, vamos fazer a quantização canônica impondo as seguintes relações de comutação a tempos iguais

$$[A^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = [\pi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})] = 0, \quad (2.144)$$

$$[A^i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})] = i \left(\delta_j^i - \frac{\partial^i \partial_j}{\partial_k \partial^k}\right) \delta(x-y), \quad (2.145)$$

e o hamiltoniano deve respeitar os vínculos.

$$H = \int d^3\vec{x} \left(-\frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \frac{1}{2}\partial^i A^j \partial_i A_j\right). \quad (2.146)$$

As equações de movimento para os campos físicos são

$$\dot{A}^i = -\pi^i, \quad (2.147)$$

$$\dot{\pi}_j = \partial^i \partial_i A_j. \quad (2.148)$$

Combinando as últimas duas equações

$$\ddot{A}^k + \partial^i \partial_i A^k = \square A^k = 0. \quad (2.149)$$

Essa equação pode ser resolvida em analogia ao que já foi feito para o campo escalar real.

$$A^i(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\lambda=2}^3 \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_\lambda(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + a_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu}\right) \varepsilon_\lambda^i(\vec{p}) \quad (2.150)$$

Onde $p^\mu = (E, \vec{p})$ e $E = |\vec{p}|$. Os vetores de base $\varepsilon_\lambda^i(p)$ satisfazem as relações

$$p_i \varepsilon_{1,2}^i(p) = 0 \quad (2.151)$$

$$\varepsilon_{i\lambda}(p) \varepsilon_{\lambda'}^i(p) = g_{\lambda\lambda'} \quad (2.152)$$

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\lambda}^i(\vec{p}) \varepsilon_{\lambda}^j(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2}. \quad (2.153)$$

Para que as relações de comutação canônicas sejam satisfeitas, devemos ter:

$$[a_{\lambda}(\vec{p}), a_{\lambda'}(\vec{p}')] = [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{p}')] = 0, \quad (2.154)$$

$$[a_{\lambda}(\vec{p}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{p}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.155)$$

O hamiltoniano se escreve como em termos do ordenamento normal

$$H_{NO} =: H := \sum_{\lambda=2}^3 \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{p}) a_{\lambda}(\vec{p}), \quad (2.156)$$

onde interpretamos os operadores $a_{\lambda}^{\dagger}(p)$ e $a_{\lambda}(p)$ como operadores que criam e aniquilam fóton com polarização linear λ e energia E .

2.5.2 Microcausalidade e propagador de Feynman

De posse dos comutadores entre os operadores de criação e destruição, podemos encontrar relações de comutação entre os campos para qualquer instante de tempo

$$[A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = \delta_i^{\mu} \delta_j^{\nu} [A^i(x), A^j(x')]. \quad (2.157)$$

Substituindo a expressão em ondas planas

$$[A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = \delta_i^{\mu} \delta_j^{\nu} \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\partial^k \partial^k} \right) i\Delta_{PJ}(x - x'), \quad (2.158)$$

ou de outra forma, considerando que $\square\Delta_{PJ} = 0$ para partícula sem massa

$$[A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu} - \delta_0^{\nu} \partial^{\mu} \partial^0 - \delta_0^{\mu} \partial^0 \partial^{\nu}}{\square - \partial^0 \partial_0} \right) i\Delta_{PJ}(x - x'). \quad (2.159)$$

Embora o resultado anterior não seja covariante, podemos obter uma relação de comutação que é covariante para o campo $F^{\mu\nu}$

$$[F^{\alpha\mu}(x), F^{\beta\nu}(x')] = (-g^{\mu\nu} \partial^{\beta} \partial^{\alpha} + g^{\mu\beta} \partial^{\nu} \partial^{\alpha} + g^{\alpha\nu} \partial^{\beta} \partial^{\mu} - g^{\alpha\beta} \partial^{\nu} \partial^{\mu}) i\Delta_{PJ}(x - x'). \quad (2.160)$$

Podemos, ainda, calcular o propagador de Feynman

$$\langle 0|TA^{\mu}(x) A^{\nu}(x')|0\rangle = \delta_i^{\mu} \delta_j^{\nu} \langle 0|TA^i(x) A^j(x')|0\rangle, \quad (2.161)$$

onde

$$\langle 0|TA^i(x) A^j(x')|0\rangle = \Theta(x_0 - x'_0) \langle 0|A^i(x) A^j(x')|0\rangle + \Theta(x'_0 - x_0) \langle 0|TA^j(x') A^i(x)|0\rangle. \quad (2.162)$$

Substituindo as soluções em ondas planas

$$\langle 0|TA^i(x)A^j(x')|0\rangle = -i\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{-1}{(p^2+i\varepsilon)}\left(\delta^{ij}-\frac{p^ip^j}{p^kp^k}\right)e^{-ip^\mu(x-x')_\mu}. \quad (2.163)$$

Definimos a função

$$D^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\tilde{D}^{\mu\nu}(p)e^{-ip(x-y)}, \quad (2.164)$$

onde

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = -\delta_0^\mu\delta_0^\nu\frac{1}{p_ip^i} - \frac{1}{p^2+i\varepsilon}\delta_i^\mu\delta_j^\nu\left(g^{ij}-\frac{1}{p_kp^k}p^ip^j\right). \quad (2.165)$$

Podemos escrever

$$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle = iD^{\mu\nu}(x-x') - i\frac{\delta_0^\mu\delta_0^\nu}{\partial_k\partial^k}\delta^4(x-x'). \quad (2.166)$$

2.5.3 Método de Gupta Bleuler

Embora o método de Dirac consiga tratar dos vínculos que surgem devido à estrutura da lagrangiana e da invariância de gauge, o mesmo não produz resultados covariantes, no sentido de que as componentes A^0 e A^i recebem tratamento diferente no processo de quantização. Um dos grandes problemas para a quantização covariante do campo de gauge, é que a lagrangiana escrita em termos do tensor $F^{\mu\nu}$ não possui dependência no termo \dot{A}^0 , o que estabelece o vínculo $\pi^0 = 0$. No tratamento dos vínculos usando o método de Dirac, fixamos as condições $A^0 = 0$ e $\partial_i A^i = 0$ o que coloca toda dinâmica em termos apenas da componente espacial do quadri vetor. Uma alternativa para se conseguir uma quantização covariante para o eletromagnetismo é partimos da seguinte lagrangiana modificada

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\alpha A^\alpha)^2, \quad (2.167)$$

onde o parâmetro ξ pode ser escolhido em princípio livremente. Fazendo a variação da ação, temos a equação de movimento para o quadripotencial

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{1}{\xi}\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha = 0. \quad (2.168)$$

Tomando a derivada desta equação, temos

$$\frac{1}{\xi}\square\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (2.169)$$

Podemos encontrar uma solução formal para esse tipo de equação pelo método de Green

$$\square\varphi = j. \quad (2.170)$$

Temos a solução formal

$$\varphi(x) = \oint ds'_\mu (\varphi(x') \partial'^\mu G(x', x) - \partial'^\mu \varphi(x') \partial'^\mu G(x', x)) + \int d^4x' G(x', x) j(x'), \quad (2.171)$$

onde $\square'G(x', x) = \delta^4(x' - x)$. Para condições de contorno de Cauchy com $j(x') = 0$,

$$\varphi|_{\text{hipersuperfície}} = 0, \quad n_\mu \partial'^\mu \varphi|_{\text{hipersuperfície}} = 0. \quad (2.172)$$

Se o campo vai a zero na fronteira espacial, é o mesmo que dizer:

$$\varphi|_{t'=t_0} = 0, \quad \partial'^0 \varphi|_{t'=t_0} = 0, \quad (2.173)$$

de modo que $\varphi(x) = 0$. Então, se temos a condição $\partial'_\alpha A^\alpha|_{t'=t_0} = 0$ e $\partial'_0 \partial'_\alpha A^\alpha|_{t'=t_0} = 0$, teremos $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, o que estabelece um vínculo. Essa é a chamada condição de Lorentz.

Diferentemente da condição imposta no método de Dirac, onde tínhamos $\partial_i A^i = 0$, também chamada de gauge de Coulomb, o gauge de Lorentz estabelece uma condição de gauge covariante para o eletromagnetismo. Chama-se então o termo adicional, acrescentado à lagrangiana (2.167) de termo de fixação de gauge. Observa-se que para $\xi = 1$, a equação de movimento (2.168) se reduz a uma equação onde, cada componentes do quadri vetor potencial, é solução da equação de Klein-Gordon não massiva. Para esse valor em particular, chamado gauge de Feynman, a lagrangiana (2.167) pode ser convertida, após uma integração por partes, em

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu. \quad (2.174)$$

Seguiremos o procedimento de quantização canônica a partir da lagrangiana (2.174). Inicialmente, calculamos os momentos conjugados

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu. \quad (2.175)$$

O hamiltoniano pode ser calculado de maneira padrão

$$H = \int d^3\vec{x} \left(\pi^\mu A_\mu + \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu \right) = \int d^3\vec{x} \left(-\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial^i A^\nu \partial_i A_\nu \right), \quad (2.176)$$

$$H = \int d^3\vec{x} \left(-\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial^i A^\nu \partial_i A_\nu \right). \quad (2.177)$$

Dado que não temos vínculos entre as variáveis de campo e seus momentos canonicamente conjugados, a quantização pode ser feita mediante os parênteses de Poisson

$$[,] = i \{, \}_PB, \quad (2.178)$$

onde temos

$$[A^\alpha(t, \vec{x}), A^\beta(t, \vec{x}')] = [\pi^\alpha(t, \vec{x}), \pi^\beta(t, \vec{x}')] = 0, \quad (2.179)$$

$$[A^\alpha(t, \vec{x}), \pi^\beta(t, \vec{x}')] = i g^{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.180)$$

de onde tiramos as equações de movimento

$$i\dot{\pi}^\mu = [\pi^\mu, H] = i\partial_i \partial^i A^\mu, \quad (2.181)$$

$$i\dot{A}^\mu = [A^\mu, H] = -i\pi^\mu. \quad (2.182)$$

Combinando as duas ultimas equações, temos a equação de movimento

$$-\ddot{A}^\mu = \partial_i \partial^i A^\mu, \quad (2.183)$$

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.184)$$

Podemos propor uma solução para essa equação similarmente ao que já foi feito anteriormente

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(a_\lambda(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + a_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \right) \varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p}), \quad (2.185)$$

onde, uma alternativa para os vetores de polarização $\varepsilon_\lambda^\mu(p)$ pode ser construída em termos de um vetor tipo tempo u^μ e do quadrimomento p^μ da seguinte forma:

$$\varepsilon_{(0)}^\mu(p) = u^\mu, \quad (2.186)$$

$$\varepsilon_{(1)}^\mu(p) = \frac{p^\mu - u^\mu u^\nu p_\nu}{\sqrt{(u^\alpha p_\alpha)^2 - p^2}}, \quad (2.187)$$

e $\varepsilon_{(2)}^\mu(p)$ e $\varepsilon_{(3)}^\mu(p)$ são dois quadrivetores tipo espaço, tais que $\varepsilon_{(0,1)}^\mu \varepsilon_{\mu(2,3)} = 0$. De modo geral temos:

$$\varepsilon_{(\lambda)}^\mu \varepsilon_{\mu(\lambda')} = g_{(\lambda)(\lambda')}, \quad (2.188)$$

$$\sum_{\lambda} g_{(\lambda)(\lambda')} \varepsilon_{(\lambda)}^\mu \varepsilon_{(\lambda')}^\nu = g^{\mu\nu}. \quad (2.189)$$

Em um referencial em que $u^\mu = (1, \vec{0})$, temos $\varepsilon_{(1)}^\mu = \frac{1}{|\vec{p}|} (0, \vec{p})$ e $\varepsilon_{(2,3)}^\mu = (0, \vec{\varepsilon}_{2,3})$ onde $\vec{\varepsilon}_{2,3}$ são os mesmos usados em (2.150). Para que as relações de comutação (2.179) e (2.180)

sejam satisfeitas, precisamos que os operadores $a_\lambda(p)$ e $a_\lambda^\dagger(p)$ satisfaçam as relações de comutação

$$\left[a_\lambda(\vec{p}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{p}') \right] = -g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.190)$$

$$\left[a_\lambda(\vec{p}), a_{\lambda'}(\vec{p}') \right] = \left[a_\lambda^\dagger(\vec{p}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{p}') \right] = 0. \quad (2.191)$$

Substituindo a solução em ondas planas e, considerando o ordenamento normal, temos o hamiltoniano

$$H_{ON} = - \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) a_\lambda^\dagger(\vec{p}) a_\lambda(\vec{p}) g_{\lambda\lambda}, \quad (2.192)$$

$$H_{ON} = \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) \left(-a_0^\dagger(\vec{p}) a_0(\vec{p}) + \sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda^\dagger(\vec{p}) a_\lambda(\vec{p}) \right). \quad (2.193)$$

Uma série de problemas podem ser observados aqui quando fizermos a interpretação dos operadores $a_\lambda(p)$ e $a_\lambda^\dagger(p)$, como operadores que aniquilam e criam fótons. O primeiro deles pode ser observado ao construirmos um estado de um fóton com polarização 0

$$|1_0\rangle = \int d^3\vec{p} f(\vec{p}) a_0^\dagger(\vec{p}) |0\rangle. \quad (2.194)$$

Como se pode ver, esse vetor possui norma negativa

$$\langle 1_0 | 1_0 \rangle = - \int d^3\vec{p} |f(\vec{p})|^2 < 0. \quad (2.195)$$

Tomando-se o valor esperado da energia para o vetor (2.194), obtemos o seguinte resultado

$$\langle H_{ON} \rangle = \langle 1_0 | H_{ON} | 1_0 \rangle = - \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) |f(\vec{p})|^2, \quad (2.196)$$

de onde vemos a possibilidade de estados associados a probabilidades negativas e, consequentemente, com valores esperados negativos da energia.

A maioria dos problemas encontrados, até aqui, estão associados ao fato de que, durante a quantização covariante, deixamos alguns ingredientes de lado. O primeiro deles, está associado a termos quatro estados de polarização para o fóton, quando que, experimentalmente, observamos fótons apenas em dois estados de polarização transversais. De alguma forma, precisamos eliminar os dois graus de liberdade espúrios, que permanecem no processo de quantização covariante. Poderíamos, então, imaginar que a condição de Lorentz não imposta até aqui poderia resolver o problema. Porém, a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$ não é compatível com as relações de comutação (2.179) e (2.180), como se pode ver

$$\left[\partial_\alpha A^\alpha(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{x}') \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.197)$$

Dado que não se pode impor a condição de Lorentz em nível de operador, podemos então propor que a condição de Lorentz deve ser imposta sobre os vetores de estado. Somente são admitidos aqueles que satisfazem

$$\langle \psi | \partial_\alpha A^\alpha | \psi \rangle = 0. \quad (2.198)$$

Se separamos o campo em uma parte de frequência positiva, associada aos operadores de destruição A_μ^+ e, uma parte de frequência negativa A_μ^- , associadas a operadores de criação,

$$A_\mu = A_\mu^+ + A_\mu^-. \quad (2.199)$$

A condição (2.198) pode ser satisfeita se impormos a condição mais fraca

$$\partial^\alpha A_\alpha^+ | \psi \rangle = 0, \quad (2.200)$$

$$\langle \psi | \partial^\alpha A_\alpha^- = 0. \quad (2.201)$$

Se essa equação é satisfeita, temos que a condição (2.198) é automaticamente satisfeita, ou seja:

$$\langle \psi | \partial^\alpha A_\alpha | \psi \rangle = \langle \psi | (\partial^\alpha A_\alpha^+ + \partial^\alpha A_\alpha^-) | \psi \rangle = 0. \quad (2.202)$$

Explicitando a expressão (2.200), em termos da expansão em ondas planas, temos:

$$\partial_\mu A^{\mu+} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3 \vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{-ip^\mu x_\mu} (-ip_\mu \varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p})) a_\lambda(\vec{p}) | \psi \rangle, \quad (2.203)$$

$$\partial_\mu A^{\mu+} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{p} \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{-ip^\mu x_\mu} -ip_\mu u^\mu (a_0(\vec{p}) - a_1(\vec{p})) | \psi \rangle. \quad (2.204)$$

Para que a condição (2.200) seja satisfeita, devemos ter

$$(a_0(\vec{p}) - a_1(\vec{p})) | \psi \rangle = 0. \quad (2.205)$$

Essa é conhecida como condição de quantização de Gupta-Bleuler [39, 40]. Uma consequência imediata sobre estados que satisfazem a condição de Gupta-Bleuler é

$$\langle \psi | a_0^\dagger(\vec{p}) a_0(\vec{p}) | \psi \rangle = \langle \psi | a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) | \psi \rangle. \quad (2.206)$$

Podemos construir um estado genérico de um fóton, que satisfaz a condição de Gupta-Bleuler

$$|1\rangle = \int d^3 \vec{p} \left(f(\vec{p}) (a_0^\dagger(\vec{p}) - a_1^\dagger(\vec{p})) + \sum_{\lambda=2}^3 f_\lambda(\vec{p}) a_\lambda^\dagger(\vec{p}) \right) |0\rangle. \quad (2.207)$$

Como se pode verificar, a norma desse vetor é positiva.

$$\langle 1|1\rangle = \sum_{\lambda=2}^3 \int d^3\vec{p} |f_\lambda(\vec{p})|^2 > 0. \quad (2.208)$$

Para esse estado, o valor esperado da energia é positivo

$$\langle 1|H_{ON}|1\rangle = \sum_{\lambda=2}^3 \int d^3\vec{p} E(p) |f_\lambda(\vec{p})|^2 > 0, \quad (2.209)$$

de onde se vê que somente a parte associada a estados de polarização transversal contribuem para o valor médio da energia. Não é difícil mostrar que o vácuo satisfaz a condição de Gupta-Bleuler

$$(a_0(\vec{p}) - a_1(\vec{p}))|0\rangle = 0. \quad (2.210)$$

Podemos, então, construir um estado misto

$$|\tilde{0}\rangle = |0\rangle + \int d^3\vec{p} f(\vec{p}) (a_0^\dagger(\vec{p}) - a_1^\dagger(\vec{p}))|0\rangle. \quad (2.211)$$

Observa-se que, para esses dois casos

$$\langle \tilde{0} | \tilde{0} \rangle = \langle 0 | 0 \rangle > 0, \quad (2.212)$$

$$\langle \tilde{0} | H_{ON} | \tilde{0} \rangle = \langle 0 | H_{ON} | 0 \rangle = 0. \quad (2.213)$$

Tomando o valor esperado para o campo nesses estados, temos:

$$\langle 0 | A^\mu | 0 \rangle = 0, \quad (2.214)$$

$$\langle \tilde{0} | A^\mu | \tilde{0} \rangle = \partial^\mu \alpha, \quad (2.215)$$

onde

$$\alpha = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \frac{1}{E\sqrt{2E}} (e^{-ip^\mu x_\mu} f(\vec{p}) - f^*(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu}), \quad (2.216)$$

satisfazendo

$$\square\alpha = 0. \quad (2.217)$$

Da equação anterior, se vê que os estados $|\tilde{0}\rangle$ e $|0\rangle$ são fisicamente equivalentes. De modo geral, pode-se mostrar que dado um estado $|\psi\rangle$ que satisfaz a condição de Gupta-Bleuler, pode-se mostrar que podemos construir um estado equivalente $|\psi'\rangle$ da seguinte forma

$$|\psi'\rangle = \left(1 + \int d^3\vec{p} f(\vec{p}) L^\dagger(\vec{p}) + \int d^3\vec{p} d^3\vec{p}' f(\vec{p}, \vec{p}') L^\dagger(\vec{p}) L^\dagger(\vec{p}') + \dots \right) |\psi\rangle, \quad (2.218)$$

onde $L^\dagger = a_0^\dagger - a_1^\dagger$, com mesmo valor esperado para a energia e com

$$\langle \psi' | A^\mu | \psi' \rangle = \langle \psi | A^\mu | \psi \rangle + \partial^\mu \alpha. \quad (2.219)$$

Esses estados devem ser entendido como equivalentes. Podemos então fixar essa liberdade de gauge residual, escolhendo apenas estados que satisfazem

$$\langle \psi | a_0^\dagger(\vec{p}) a_0(\vec{p}) | \psi \rangle = \langle \psi | a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) | \psi \rangle = 0. \quad (2.220)$$

Para esses estados, o hamiltoniano pode efetivamente ser escrito apenas em termos dos graus de liberdade físicos

$$H_{ON} = \sum_{\lambda=2}^3 \int d^3\vec{p} E(\vec{p}) a_\lambda^\dagger(\vec{p}) a_\lambda(\vec{p}). \quad (2.221)$$

Microcausalidade e propagador de Feynman

De posse das relações de comutação entre os operadores $a_\lambda^\dagger(\vec{p})$ e $a_\lambda(\vec{p})$, podemos encontrar relações de comutação generalizadas entre os operadores A^μ

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = -\frac{1}{(2\pi)^3} g^{\mu\nu} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2E} \left(e^{-ip^\mu(x-x')_\mu} - e^{ip^\mu(x-x')_\mu} \right), \quad (2.222)$$

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = -ig^{\mu\nu} \Delta_{PJ}(x-x'). \quad (2.223)$$

Da mesma maneira, calcularmos o propagador de Feynman

$$\langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle = iD^{\mu\nu}(x-y), \quad (2.224)$$

onde temos no espaço das posições

$$D^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \tilde{D}^{\mu\nu}(p) e^{-ip^\mu(x-x')_\mu}, \quad (2.225)$$

e no espaço dos momentos

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}. \quad (2.226)$$

O propagador de Feynman desempenha um papel importante nos cálculos perturbativos que serão desenvolvidos em seções posteriores, representando, na linguagem da teoria quântica de campos, as contribuições das partículas virtuais às amplitudes de espalhamento ou taxas de decaimento.

3 Campos em interação

A teoria desenvolvida, até aqui, considerou-se apenas campos livres. Porém, muitos dos processos descritos por partículas requerem interação. Um exemplo muito ilustrativo e importante, de como isso é feito, pode ser observado na eletrodinâmica quântica. Em uma teoria com interação, as equações de movimento consideradas anteriormente homogêneas, passam a equações não homogêneas

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = J^\mu, \quad (3.1)$$

onde o termo inhomogêneo é uma corrente que age como fonte para o campo. Se nós estamos interessados em estudar a interação entre o campo eletromagnético e o campo de Dirac, podemos intuir uma forma simples para a corrente J^μ ,

$$J^\mu = e : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : . \quad (3.2)$$

A equação de movimento (3.1) pode ser obtida da lagrangiana, que envolve os dois campos além de um termo de interação.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : A^\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Na presença da interação eletromagnética, a equação de Dirac toma a já antes apresentada forma.

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \psi = 0. \quad (3.4)$$

É costumeiro fazer o acoplamento eletromagnético por meio da prescrição de acoplamento mínimo, onde se faz $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$. É importante observar, porém, que uma série de outros termos de interação mais complicados poderiam ter sido propostos para acoplar o campo de Dirac e o campo eletromagnético. Na verdade temos, em princípio, uma infinidade de termos. Sabendo-se que esses termos de interação podem ser constituídos de produtos de mais de dois campos no mesmo ponto do espaço-tempo, dadas as relações de comutação canônicas, essas interações se tornam muito singulares, o que nos leva a problemas de natureza matemática. Esses problemas vão se manifestar em termos de integrais divergentes no cálculo de elementos da matriz de espalhamento. O tratamento dessas divergências pode ser feito mediante a implementação de uma técnica chamada renormalização, onde as divergências encontradas são resolvidas em termos de uma redefinição

dos parâmetros da teoria. Para que as técnicas de renormalização possam ser aplicadas em uma teoria representada por uma lagrangiana, contendo um número finito de termos, nem todo tipo de termo será permitido; não serão permitidos termos cuja constante de acoplamento possua dimensão de massa negativa. Combinando os termos permitidos pelas simetrias ao critério de renormalização, os únicos termos permitidos envolvendo o campo de Dirac e o campo eletromagnético, são os encontrados em (3.3). O grande sucesso das predições da eletrodinâmica quântica levou os físicos a usarem o critério de renormalização como um guia na construção de todo modelo padrão, porém, nos últimos anos, foi questionado se realmente o critério de renormalização é algo fundamental. Uma das principais motivações para isso veio das sucessivas falhas em se obter uma teoria de gravitação que fosse renormalizável. De fato, teorias não renormalizáveis encontram uma série de aplicações, como em modelos de teorias efetivas. Uma teoria efetiva de interação entre bárions e o campo eletromagnético, pode conter um termo do tipo

$$\lambda \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi F_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Dado que a lagrangiana deve possuir dimensão de massa 4 em 1+3 dimensões espaço temporais, que o campo spinorial tem dimensão de massa 3/2 e que o tensor $F_{\mu\nu}$ tem dimensão de massa 2, a constante de acoplamento λ deve possuir dimensão de massa -1. Observa-se que o termo (3.5) não pode ser obtido da lagrangiana de férmions livres, utilizando a prescrição de acoplamento mínimo.

Por enquanto, restringiremo-nos à lagrangiana (3.3), onde adicionaremos, assim como feito antes, um termo de fixação de calibre. Passando ao formalismo hamiltoniano, obtemos a seguinte densidade hamiltoniana.

$$\mathcal{H} = \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi - \frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial^i A^\nu \partial_i A_\nu + e : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : A^\mu, \quad (3.6)$$

onde os campos satisfazem as relações de comutação:

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = \{\bar{\psi}_a(t, \vec{x}), \bar{\psi}_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad (3.7)$$

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \bar{\psi}_b(t, \vec{y})\} = \gamma_{ab}^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.8)$$

$$[A^\alpha(t, \vec{x}), A^\beta(t, \vec{x}')] = [\pi^\alpha(t, \vec{x}), \pi^\beta(t, \vec{x}')] = 0, \quad (3.9)$$

$$[A^\alpha(t, \vec{x}), \pi^\beta(t, \vec{x}')] = ig^{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.10)$$

Nas próximas seções, vamos mostrar como calcular alguns processos da eletrodinâmica quântica a partir do hamiltoniano (3.6), no contexto da teoria de perturbações.

3.1 Matriz S

Nas seções anteriores, indicamos uma teoria para a interação entre férmions e o campo eletromagnético. Quando temos interação, as equações antes homogêneas passam a equações não homogêneas

$$\square A^\mu = J^\mu, \quad (3.11)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \eta, \quad (3.12)$$

$$\bar{\psi} \left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m \right) = \bar{\eta}, \quad (3.13)$$

onde J^μ , η e $\bar{\eta}$ são polinômios definidos em termos dos campos. Para resolução das equações (3.11), (3.12) e (3.13), o melhor que podemos fazer, em princípio, é implementar métodos perturbativos. Antes de darmos seguimento à resolução, mesmo que formal, para essas equações, uma questão deve ser levantada: o que fazer com essa solução? Sabemos que não necessariamente os campos que queremos medir são observáveis. Num processo de espalhamento, por exemplo, nós temos um conjunto de partículas cujas energias, momentos e spins são conhecidos e, estamos interessados em saber a probabilidade de encontrarmos o sistema em uma configuração das energias, momentos e spins após uma interação que acontece em uma região finita do espaço-tempo. Para esse tipo de processo, a quantidade de interesse é um elemento da matriz de espalhamento, que nos dá a probabilidade de que a transição ocorra. A coleção de todos os elementos de matriz, associada a todas as transições possíveis, chamamos de matriz de espalhamento

$$S_{\varphi\psi} = \langle \varphi | \psi \rangle, \quad (3.14)$$

onde $|\psi\rangle$ é o estado inicial do sistema e $|\varphi\rangle$ é um auto estado de um conjunto de observáveis compatíveis, que desejamos determinar ao final. Um exemplo desse tipo de processo é o de aniquilação de par $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Onde temos, no estado inicial, um par elétron e pósitron com energias, momentos conhecidos e queremos determinar a probabilidade de encontrarmos um par múon anti-múon no estado final¹. Dado que o que conhecemos são as configurações em um instante de tempo inicial $t_o \rightarrow -\infty$ e a configuração final em um instante $t_f \rightarrow \infty$, podemos considerar que os estados representam partículas livres. Assim, esses estados podem facilmente ser construídos pela aplicação dos operadores de criação e destruição sobre o vácuo $|\Omega\rangle$

$$|\psi\rangle = d_{\lambda_2}^{in\dagger}(\vec{p}_2) c_{\lambda_1}^{in\dagger}(\vec{p}_1) |\Omega\rangle, \quad (3.15)$$

¹A QED pura descreve a interação entre, elétron, múon, tau e suas antipartículas com o fóton

$$\langle \varphi | = \langle \Omega | c_{\lambda_1'}^{out}(\vec{p}_1) d_{\lambda_2'}^{out}(\vec{p}_2), \quad (3.16)$$

onde os operadores de criação e destruição podem ser isolados em termos dos campos

$$c_{\lambda, \vec{p}} = \int d^3 \vec{x} u_{\lambda, \vec{p}}^\dagger(x) \psi_0(t, \vec{x}), \quad (3.17)$$

$$d_{\lambda, \vec{p}}^\dagger = \int d^3 \vec{x} v_{\lambda, \vec{p}}^\dagger(x) \psi_0(x), \quad (3.18)$$

onde

$$u_{\vec{p}}^\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} u_\lambda(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}, \quad (3.19)$$

$$v_{\vec{p}}^\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} v_\lambda(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu}. \quad (3.20)$$

É fácil verificar que $u_{\vec{p}}^\lambda(x)$ e $v_{\vec{p}}^\lambda(x)$ satisfazem a equação de Dirac. Substituindo (3.15), em (3.14) temos:

$$S_{\varphi\psi} = \langle \Omega | c_{\lambda_1', \vec{p}_1}^{out} d_{\lambda_2', \vec{p}_2}^{out} d_{\lambda_2, \vec{p}_2}^{in\dagger} c_{\lambda_1, \vec{p}_1}^{in\dagger} | \Omega \rangle. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.18) em (3.21) temos:

$$S_{\varphi\psi} = \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \int d^3 \vec{x}_2 \langle \Omega | c_{\lambda_1', \vec{p}_1}^{out} d_{\lambda_2', \vec{p}_2}^{out} v_{\vec{p}_2}^{\lambda_2}(x_2) \psi(x_2) c_{\lambda_1, \vec{p}_1}^{in\dagger} | \Omega \rangle. \quad (3.22)$$

Podemos usar a identidade:

$$\int dt \partial_0 [\dots] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\dots] - \lim_{t \rightarrow -\infty} [\dots], \quad (3.23)$$

e que não temos elétrons no estado final, e que $v_{\vec{p}_2}^{\lambda_2}(x_2)$ e $\psi(x_2)$ satisfazem a equação de Dirac homogênea e inhomogênea, respectivamente. Temos, após uma integração por partes,

$$S_{\varphi\psi} = i \int d^4 x_2 \bar{v}_{\vec{p}_2, e}^{\lambda_2}(x_2) \vec{D}_{x_2 e c} \langle \Omega | c_{\lambda_1', \vec{p}_1}^{out} d_{\lambda_2', \vec{p}_2}^{out} \psi_c(x_2) c_{\lambda_1, \vec{p}_1}^{in\dagger} | \Omega \rangle, \quad (3.24)$$

onde $\vec{D}_{x_2 e c} = (i\gamma^\mu \partial_{2\mu} - 1m)_{ec}$. Continuando, procedemos de forma similar, temos

$$S_{\varphi\psi} = i \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int d^4 x_2 d^3 \vec{x}_1 \bar{v}_{\vec{p}_2, e}^{\lambda_2}(x_2) D_{x_2 e c} \langle \Omega | c_{\lambda_1', \vec{p}_1}^{out} d_{\lambda_2', \vec{p}_2}^{out} \psi_c(x_2) \psi^\dagger(x_1) u_{\vec{p}_1}^{\lambda_1}(x_1) | \Omega \rangle. \quad (3.25)$$

Antes de implementar a identidade (3.23), consideremos que

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \psi_c(x_2) \psi^\dagger(x_1) &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (\Theta(t_2 - t_1) \psi_c(x_2) \psi^\dagger(x_1) - \Theta(t_1 - t_2) \psi^\dagger(x_1) \psi_c(x_2)) \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} T(\psi_c(x_2) \psi^\dagger(x_1)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Combinando (3.26), (3.25) e a identidade (3.23) e, procedendo de forma similar ao que fizemos anteriormente

$$S_{\varphi\psi} = (-i)^2 \int d^4x_2 d^4x_1 \bar{v}_{2,e} \vec{D}_{x_2ec} \langle \Omega | c_{\lambda_1, \vec{p}_1}^{out} d_{\lambda_2, \vec{p}_2}^{out} T(\psi_{c(e)}(x_2) \bar{\psi}_{d(e)}(x_1)) | \Omega \rangle \overleftarrow{D}_{x_1df} u_{1,f}. \quad (3.27)$$

Seguindo o mesmo procedimento obtemos

$$S_{\varphi\psi} = (-i)^4 \int d^4(x_2, x_1, x'_2, x'_1) \bar{v}_{2,e} \bar{u}_{1',h} \vec{D}_{x_2ec} \vec{D}_{x'_1ha} G_{abcd}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) \overleftarrow{D}_{x'_2bg} \overleftarrow{D}_{x_1df} v_{2',g} u_{1,f}, \quad (3.28)$$

onde $u_1 = u_{\vec{p}_1}^{\lambda_1}(x_1)$, $v_{2'} = v_{\vec{p}_2}^{\lambda_2}(x'_2)$ e similarmente para o restante, além de

$$G_{abcd}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) = \langle \Omega | T(\psi_a(x'_1) \bar{\psi}_b(x'_2) \psi_c(x_2) \bar{\psi}_d(x_1)) | \Omega \rangle. \quad (3.29)$$

sendo este ultimo objeto também chamado de função de Green de quatro pontos.

3.2 Fórmula de Gell-Mann Low

Na ultima seção, nós montamos um elemento para a matriz de espalhamento do processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, em termos do valor esperado para o vácuo do produto ordenado temporalmente dos operadores de campo. Esses campos, são solução das equações de movimento com interação. Fazendo uso da teoria de perturbações, podemos calcular esse valor esperado em termos de objetos da teoria livre. Inicialmente, retornemos a densidade hamiltoniano (3.6) de onde tirados o hamiltoniano

$$H = H_\psi + H_A + \tilde{H}, \quad (3.30)$$

onde temos

$$H_\psi = \int d^3\vec{x} [\bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi], \quad (3.31)$$

$$H_A = \int d^3\vec{x} \left[-\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial^i A^\nu \partial_i A_\nu \right], \quad (3.32)$$

$$\tilde{H} = \int d^3\vec{x} [e : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : A^\mu]. \quad (3.33)$$

A maneira como dividimos o hamiltoniano não é única, porém, não focaremos nos detalhes envolvidos nesta separação. Na representação de Heisenberg, o campo evolui no tempo segundo a equação de Heisenberg

$$i\dot{\psi} = [\psi, H], \quad (3.34)$$

com a condição inicial $\psi(0, \vec{x}) = \psi_0(0, \vec{x})$, podemos escrever uma solução formal para a equação de Heisenberg

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{iHt} \psi_0(0, \vec{x}) e^{-iHt}. \quad (3.35)$$

O campo da teoria sem interação evolui no tempo segundo o hamiltoniano (3.30). Sem o termo de interação,

$$\psi_0(t, \vec{x}) = e^{iH_0 t} \psi_0(0, \vec{x}) e^{-iH_0 t}, \quad (3.36)$$

onde $H_0 = H_\psi + H_A$. Substituindo (3.36) em (3.35) temos

$$\psi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t) \psi_0(t, \vec{x}) U(t), \quad (3.37)$$

onde definimos o operador $U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$. Derivando com relação ao tempo o operador $U(t)$, temos a seguinte equação diferencial

$$i\partial_t U(t) = \tilde{H}_I U(t), \quad (3.38)$$

onde definimos $\tilde{H}_I = e^{iH_0 t} \tilde{H} e^{-iH_0 t}$ o hamiltoniano de interação na picture de interação. Com a condição de contorno $U(0) = 1$, a solução da equação (3.38) pode ser dada da seguinte forma

$$U(t) = T e^{-i \int_0^t dt' \tilde{H}_I(t')}. \quad (3.39)$$

A partir do operador dado em (3.39), definimos $U(t, t') = U(t) U^\dagger(t')$, que pode ser dado de forma similar à expressão anterior

$$U(t, t') = T e^{-i \int_{t'}^t dt'' \tilde{H}_I(t'')}. \quad (3.40)$$

O próximo passo é obtermos uma expressão que relacione o vácuo da teoria livre e o vácuo da teoria com interação. Para isso, observemos o resultado da aplicação do operador e^{iHt} sobre um vetor arbitrário

$$e^{iHt} |\varphi\rangle = |\Omega\rangle \langle \Omega | |\varphi\rangle + \int dE |E\rangle \langle E | e^{iEt} |\varphi\rangle. \quad (3.41)$$

Nos limites em que $t \rightarrow \pm\infty$, a integral tende a zero devido ao forte cancelamento

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} |\varphi\rangle = |\Omega\rangle \langle \Omega | |\varphi\rangle. \quad (3.42)$$

Se escolhermos agora $|\varphi\rangle = |0\rangle$, temos a relação

$$|\Omega\rangle = \frac{\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} |0\rangle}{\langle \Omega | |0\rangle}. \quad (3.43)$$

Considerando ainda que $e^{iHt}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ e $e^{iH_0t}|0\rangle = |0\rangle$, que é a condição de estabilidade do vácuo, podemos reescrever a expressão anterior

$$|\Omega\rangle = \frac{\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U^\dagger(t)|0\rangle}{\langle\Omega|U^\dagger(t)|0\rangle}. \quad (3.44)$$

Substituindo as expressões (3.44) e (3.37) em (3.29), temos

$$G_{abcd}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) = \frac{\langle 0|T e^{-i\int d^4x \tilde{H}} \psi_a^0(x'_1) \bar{\psi}_b^0(x'_2) \psi_c^0(x_2) \bar{\psi}_d^0(x_1) |0\rangle}{\langle 0|e^{-i\int d^4x \tilde{H}}|0\rangle}, \quad (3.45)$$

que é um resultado particular da fórmula de Gell-Mann Low.

3.3 Valor esperado no vácuo do ordenamento temporal de operadores

Dando seguimento, para calcularmos as funções de Green generalizadas, precisamos calcular o valor esperado no vácuo do ordenamento temporal dos operadores de campo. Como mostrado nas seções iniciais, podemos decompor os campos em uma parte de criação e outra de destruição. A ação dos operadores de destruição sobre o vácuo é levá-lo no vetor nulo. Ao regularizarmos a energia dos campos livres, utilizamos o ordenamento normal, que consiste em reordenarmos os produtos dos campos de modo que os operadores de destruição fiquem à direita dos operadores de criação. Podemos mostrar que, existe uma relação entre o ordenamento normal, o ordenamento temporal e os valores esperados para o vácuo de produto de operadores, através de regras conhecidas como teorema de decomposição de Wick. Para o produto ordenado de dois operadores bosônicos, por exemplo, temos a relação

$$T(AB) =: AB : + \overline{AB}, \quad (3.46)$$

onde a contração entre os campos é definida por $\overline{AB} = \langle 0|TAB|0\rangle$. Para o produto de três campos, temos o resultado

$$T(ABC) =: ABC : + A\overline{BC} + B\overline{AC} + \overline{AB}C. \quad (3.47)$$

O mesmo deve valer para operadores fermiônicos, apenas considerando os fatores de permutação, devido à estatística. Podemos, por indução, generalizar a fórmula (3.47). Para

o caso de quatro campos temos, por exemplo,

$$\begin{aligned}
T(ABCD) = & \\
& :ABCD: + \\
& +\varepsilon_P \overline{AB} : CD : +\varepsilon_P \overline{AC} : BD : +\varepsilon_P \overline{AD} : BC : \\
& +\varepsilon_P \overline{BC} : AD : +\varepsilon_P \overline{BD} : AC : \\
& +\varepsilon_P \overline{CD} : AB : + \\
& +\overline{AB} \overline{CD} + \overline{AC} \overline{BD} + \overline{AD} \overline{BC},
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde o termo ε_P , está associado à permutação entre operadores fermiônicos ou bosônicos. Para o caso de haver ordenamento normal, dentro do argumento do ordenamento temporal, excluimos as contrações entre os campos ordenados normalmente. O resultado das contrações irá depender dos campos envolvidos. Por exemplo

$$\overline{\varphi\psi} = \overline{\varphi^\dagger\psi} = \overline{\varphi\bar{\psi}} = \overline{\varphi A^\mu} = \overline{\varphi^\dagger A^\mu} = \overline{\psi A^\mu} = \overline{\bar{\psi} A^\mu} = \overline{\psi\psi} = \overline{\bar{\psi}\bar{\psi}}. \tag{3.49}$$

Para dois tipos diferentes de férmions ou bóson também teremos contração nula. As contrações não nulas são

$$\overline{\varphi\varphi} = -i\Delta_F, \tag{3.50}$$

para o campo neutro. Para o campo escalar carregado temos

$$\overline{\varphi\varphi^\dagger} = -i\Delta_F. \tag{3.51}$$

Para o campo fermiônico

$$\overline{\psi\psi} = iS. \tag{3.52}$$

E para o campo de gauge

$$\overline{A^\mu A^\nu} = iD^{\mu\nu}. \tag{3.53}$$

Assim, estabelecemos a relação entre produtos dos campos e os propagadores, que será indispensável para desenvolvermos cálculos posteriores.

4 Seção de choque

Desenvolvemos, até aqui, uma técnica que permite calcularmos um elemento da matriz S em termos do valor esperado no vácuo do produto temporalmente ordenado dos campos. Desenvolvemos, em termos perturbativos, uma maneira de calcularmos esses valores esperados em termos dos campos da teoria livre e do vácuo da teoria livre. Dado que precisamos calcular o valor esperado sobre muitos campos, precisávamos de uma maneira de fazer isso sistematicamente. Essa maneira veio do teorema de Wick. Nesta seção, iremos desenvolver a fórmula de Gell-Mann Low em ordem mais baixa e mostrar que a função de Green generalizada pode ser calculada fazendo uso do teorema de Wick. Além disso, será feita a conexão entre a amplitude de espalhamento e uma quantidade mensurável. Voltando para a expressão (3.45),

$$G_{abcd}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) = \frac{\langle 0 | T e^{-i \int d^4x \tilde{H}} \psi_a^0(x'_1) \bar{\psi}_b^0(x'_2) \psi_c^0(x_2) \bar{\psi}_d^0(x_1) | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-i \int d^4x \tilde{H}} | 0 \rangle}, \quad (4.1)$$

em ordem 0 temos:

$$G_{abcd}^{(0)}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) = \langle 0 | T \psi_a^0(x'_1) \bar{\psi}_b^0(x'_2) \psi_c^0(x_2) \bar{\psi}_d^0(x_1) | 0 \rangle. \quad (4.2)$$

Usando o teorema de Wick e que os campos nas variáveis com linha se referem à múons e que a variável sem linha a elétron, temos¹.

$$G_{abcd}^{(0)}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) = iS_{ab}(x'_1 - x'_2) iS_{cd}(x_2 - x_1). \quad (4.3)$$

Em ordem 2,

$$\begin{aligned} G_{abcd}^{(2)}(x'_1, x'_2, x_2, x_1) = & \\ & + iS_{ab}(x'_1 - x'_2) iS_{cd}(x_2 - x_1) + \\ & + (-ie)^2 iS_{ab}(x'_1 - x'_2) \int dx dy iD^{\mu\nu}(x - y) iS_{ce}(x_2 - x) \gamma_{\mu ef} iS_{fg}(x - y) \gamma_{\nu gh} iS_{hd}(y - x_1) \\ & + (-ie)^2 \int dx dy iD^{\mu\nu}(x - y) iS_{ag}(x'_1 - y) \gamma_{\nu gh} iS_{hb}(y - x'_2) iS_{ce}(x_2 - x) \gamma_{\mu ef} iS_{fd}(x - x_1) \\ & + (-ie)^2 iS_{cd}(x_2 - x_1) \int dx dy iD^{\mu\nu}(x - y) iS_{ae}(x'_1 - x) \gamma_{\mu ef} iS_{fg}(x - y) \gamma_{\nu gh} iS_{hb}(y - x'_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹A contração entre o campo do múon e do elétron de deve ser nula.

Substituindo a expressão para a função de Green generalizada na expressão do elemento de matriz S , obtemos

$$S_{\varphi\psi} = (-i)^4 \int d^4\vec{x}_1 d^4x'_1 \bar{v}_{\lambda_2, \vec{p}_2}(x_1) (-ie) \gamma_\mu u_{\lambda_1, \vec{p}_1}(x_1) iD^{\mu\nu}(x_1 - x'_1) \bar{u}_{\lambda'_1, \vec{p}'_1}(x'_1) (-ie) \gamma_\nu v_{\lambda'_2, \vec{p}'_2}(x'_1). \quad (4.5)$$

Explicitando as bases, temos que o propagador de Feynman para o fóton tem o elemento de matriz S no espaço dos momentos

$$iS_{\varphi\psi} = (2\pi)^4 n_2 n_1 n'_1 n'_2 \mathcal{M} \delta^4(p_2 + p_1 - p'_1 - p'_2), \quad (4.6)$$

onde \mathcal{M} é algumas vezes chamado de amplitude de Feynman e temos os fatores de normalização $n_i = ((2\pi)^3 2E_i)^{-\frac{1}{2}}$. Também,

$$-i\mathcal{M} = \bar{v}_{\lambda_2, \vec{p}_2} [-ie\gamma_\mu] u_{\lambda_1, \vec{p}_1} i\tilde{D}^{\mu\nu}(p_2 + p_1) \bar{u}_{\lambda'_1, \vec{p}'_1} [-ie\gamma_\nu] v_{\lambda'_2, \vec{p}'_2}. \quad (4.7)$$

A última etapa que nos resta, é fazer uma conexão entre o elemento da matriz de espalhamento calculado e alguma quantidade mensurável. Essa quantidade será a seção de choque. Um elemento da matriz de espalhamento tem o significado de amplitude de probabilidade que determinado processo ocorra. A probabilidade de que esse processo ocorra será dado pelo módulo da matriz de espalhamento. Obviamente, encontramos um problema nesse ponto, que está associado a termos quadráticos envolvendo a função delta

$$|S_{\varphi\psi}|^2 = (2\pi)^8 (n_2 n_1 n'_1 n'_2)^2 |\mathcal{M}| \delta(0) \delta^4(p_2 + p_1 - p'_1 - p'_2). \quad (4.8)$$

Na última expressão, foi usada a propriedade da função delta $f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$. Esse problema está associado a uma idealização inicial, onde tínhamos o campo expandido em uma representação em ondas planas distribuídas sobre todo espaço. Considerando agora que nosso sistema está contido em uma caixa de volume V e que os estados assintóticos são obtidos para os tempos finitos, porém grandes com $T \ll \sqrt[3]{V}$, podemos reescrever o termo espúrio da expressão (4.8) em termos do limite

$$\delta(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{V, T \rightarrow \infty} VT. \quad (4.9)$$

Dentro dessa caixa, as normalizações devem ser redefinidas para

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V 2E_i}}. \quad (4.10)$$

De modo que temos a probabilidade de Transição

$$|S_{\varphi\psi}|^2 = (2\pi)^4 (n_2 n_1 n'_1 n'_2)^2 |\mathcal{M}| VT \delta^4(p_2 + p_1 - p'_1 - p'_2). \quad (4.11)$$

Podemos definir a taxa de transição por unidade de volume em termos da expressão anterior

$$W = \frac{|S_{\varphi\psi}|^2}{VT} = (2\pi)^4 (n_2 n_1 n'_1 n'_2)^2 |\mathcal{M}| \delta^4(p_2 + p_1 - p'_1 - p'_2). \quad (4.12)$$

O número de estados com momento \vec{p} dentro de um volume $d^3\vec{p}$ é dado por $dn = V d^3\vec{p}/(2\pi)^3$. Como temos duas partículas no estado final, o numero total de estados será

$$dN = V^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}. \quad (4.13)$$

Um diferencial de seção de choque é dado por

$$d\sigma = \frac{dNW}{|\vec{v}_R|} V^2. \quad (4.14)$$

Esse tipo de fórmula é desenvolvida em detalhe na referência [42]. Combinando as expressões (4.14), (4.13) e (4.12), temos

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4E_1 E_2 |\vec{v}_R|} \delta^4(p_2 + p_1 - p'_1 - p'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{2E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E'_2 (2\pi)^3}. \quad (4.15)$$

Ainda podemos escrever, levando em conta que os feixes incidentes devem ser colineares:

$$E_1 E_2 |\vec{v}_R| = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2}, \quad (4.16)$$

com isso:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2}} \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{2E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E'_2 (2\pi)^3}, \quad (4.17)$$

que é um diferencial de seção de choque para o espalhamento considerado.

4.1 Regra de ouro

A equação (4.17), algumas vezes chamada regra de ouro, nos dá uma forma geral para calcularmos a seção de choque diferencial para um caso mais geral de espalhamento do tipo:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5 + \dots + n, \quad (4.18)$$

e a fórmula é:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=3}^n \frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i (2\pi)^3}, \quad (4.19)$$

onde neste caso, S representa um fator estatístico $(1/j!)$ para cada grupo de partículas idênticas. Para o caso de duas partículas e, escolhendo o centro de massa para os cálculos, onde $p_1 = (E_1, \vec{p})$ e $p_2 = (E_2, -\vec{p})$ são, respectivamente, os momentos iniciais das partículas e, $p'_1 = (E'_1, \vec{p}'_1)$ e $p'_2 = (E'_2, \vec{p}'_2)$, os momentos finais ao final as partículas não precisam ser do mesmo tipo). Neste caso, $(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2 = (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|^2$.

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) \delta^3(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3\vec{p}'_1}{2E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'_2}{2E'_2 (2\pi)^3}. \quad (4.20)$$

Integrando em \vec{p}'_2 , obtemos as relações $-\vec{p}'_2 = \vec{p}'_1 = \vec{p}'$, $E'_1 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2}$ e $E'_2 = \sqrt{M^2 + |\vec{p}'|^2}$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3\vec{p}'}{4E'_1 E'_2 (2\pi)^6}. \quad (4.21)$$

Chamamos atenção para o fato de que $d\sigma = \int d\sigma d^3\vec{p}'_2$, onde optamos por manter o mesmo símbolo. Continuando, temos:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega}{4E'_1 E'_2 (2\pi)^6}. \quad (4.22)$$

Aqui, fazemos uma mudança de variável do tipo

$$E'_1 + E'_2 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} + \sqrt{M^2 + |\vec{p}'|^2}, \quad (4.23)$$

$$\frac{d(E'_1 + E'_2)}{E'_1 + E'_2} = \frac{|\vec{p}'| d|\vec{p}'|}{E'_2 E'_1}, \quad (4.24)$$

de modo que

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\vec{p}'|}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d(E'_1 + E'_2) d\Omega}{4(E'_1 + E'_2) (2\pi)^6}. \quad (4.25)$$

Integrando em $(E'_1 + E'_2)$, encontramos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}'|}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2. \quad (4.26)$$

4.2 Regras de Feynman

Embora nosso resultado para seção de choque seja válida para qualquer tipo de espalhamento, nossa amplitude \mathcal{M} está particularizada para o caso de espalhamento de férmions. Para um espalhamento Compton, por exemplo, as peças que compõem a amplitude são outras. É possível montar a amplitude \mathcal{M} , usando um conjunto de regras conhecidas como regras de Feynman. Os processos da QED são representados por diagramas de Feynman. De posse destes diagramas, montamos a amplitude de espalhamento. Vejamos como funciona:

1. Escreva todos os momentos externos (p_1, p_2, \dots), internos (q_1, q_2, \dots), e os spins (s_1, s_2, \dots). Utilize setas para determinar se as partículas estão chegando ou saindo.

2. As linhas externas contribuem com os seguintes fatores:

Elétron	Elétron chegando ): u
	Elétron saindo ): \bar{u}
Pósitron	Pósitron chegando ): \bar{v}
	Pósitron saindo ): v
Fóton	Fóton chegando ): ε^μ
	Fóton saindo (): $\varepsilon^{\mu*}$

3. Os vértices contribuem com:

$$-ig_e\gamma^\mu, \quad (4.27)$$

em nosso sistema de unidades $g_e = e$.

4. As linhas internas contribuem com iS , caso sejam elétrons ou pósitrons, e com $i\tilde{D}^{\mu\nu}$ caso sejam fótons.
5. Para garantir a conservação do quadri-momento, a cada vértice devemos adicionar uma função delta de Dirac do tipo:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \quad (4.28)$$

6. Integre sobre todos os momentos internos e escreva para cada um deles um fator:

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (4.29)$$

7. O que restar, estará multiplicado por um fator $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \dots p_n)$, sendo este fator, indentificado como $-i\mathcal{M}$.

5 A amplitude de Feynman para o espalhamento $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Neste capítulo, usaremos as regras de Feynman para escrever e calcular a amplitude de espalhamento e seção de choque do espalhamento elétron-pósitron, resultando em múon e anti-múon, $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Deste modo, neste capítulo estaremos revisando alguns desenvolvimentos facilmente encontrados nas Refs. [43],[44],[45],[46], [47],[48],[49], [50].

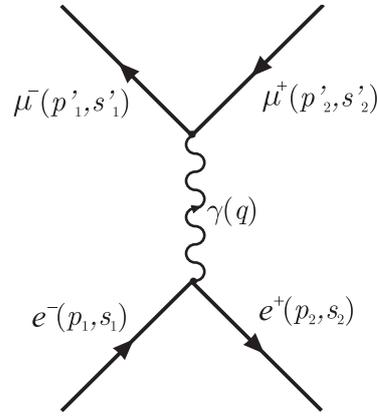


Figura 5.1: Processo de espalhamento elétron-pósitron a nível de árvore ("tree-level").

Usando as regras de Feynman lidas da Figura 5.1, escrevemos a amplitude do espalhamento como:

$$\begin{aligned}
 & \int \underbrace{\bar{v}^{s_2}(p_2)}_{R2} \underbrace{-ig_e \gamma^\mu}_{R3} \underbrace{u^{s_1}(p_1)}_{R2} \underbrace{i\tilde{D}_{\mu\nu}(q)}_{R4} \underbrace{\bar{u}^{s'_1}(p'_1)}_{R2} \underbrace{-ig_e \gamma^\nu}_{R3} \underbrace{v^{s'_2}(p'_2)}_{R2} \times \\
 & \times \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q)}_{R5} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - q)}_{R5} \underbrace{\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}}_{R6} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Integrando no momento interno, obtemos $q = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, e a amplitude resulta igual a:

$$-ie^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_1 - p'_1 - p'_2) \quad (5.2)$$

Usando a regra (7), encontramos

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2). \quad (5.3)$$

Na prática, é comum estudarmos processos onde as partículas não possuem polarização determinada. Neste caso, a seção de choque será:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}'|}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle, \quad (5.4)$$

onde

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s'_1, s'_2} |\mathcal{M}|^2, \quad (5.5)$$

é uma média sobre os spins iniciais e uma soma sobre os spins finais do sistema, ou seja, como os estados de polarização de spin são desconhecidos, todas as possibilidades são consideradas.

5.1 Truque de Casimir

O truque de Casimir consiste em um procedimento para calcular a quantidade $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ sem calcular cada amplitude individualmente. Vejamos como funciona: sabemos que $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$, de modo que primeiro calculamos \mathcal{M}^* :

$$\mathcal{M}^* = e^2 [\bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\alpha u^{s_1}(p_1)]^* \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \left[\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\beta v^{s'_2}(p'_2) \right]^*, \quad (5.6)$$

onde

$$[\bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\alpha u^{s_1}(p_1)]^* = (\bar{v}^{s_2}(p_2))^\dagger (\gamma^\alpha)^\dagger \left(\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \right)^\dagger = \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^0 (\gamma^\alpha)^\dagger \gamma^0 v^{s_2}(p_2), \quad (5.7)$$

$$[\bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\alpha u^{s_1}(p_1)]^* = \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^0 (\gamma^\alpha)^\dagger \gamma^0 v^{s_2}(p_2). \quad (5.8)$$

Usando a Eq. (5.8) na Eq. (5.6), temos:

$$\mathcal{M}^* = e^2 \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha v^{s_2}(p_2) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \bar{v}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\beta u^{s'_1}(p'_1). \quad (5.9)$$

Lembrando que \mathcal{M} está dado pela Eq. (5.3), escrevemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= e^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2) \times \\ &\quad \times \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1) \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s'_2}(p'_2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Reorganizando os termos da equação acima

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* [\bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha v^{s_2}(p_2)] \times \\ &\quad \times \left[\bar{v}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\beta u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Aqui usaremos a seguinte relação:

$$a^\dagger M b = \text{tr} (M b a^\dagger), \quad (5.12)$$

o que nos leva a

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \text{tr} (\gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha v^{s_2}(p_2) \bar{v}^{s_2}(p_2)) \times \\ \times \text{tr} (\gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2) \bar{v}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\beta u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s'_1}(p'_1)). \quad (5.13)$$

Uma vez escrita a amplitude quadrática, $|\mathcal{M}|^2$, podemos encontrar a amplitude quadrática média tomando-se a soma (média) sobre os estados de spin, ou seja:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \sum_{s_1, s_2} \sum_{s'_1, s'_2} \text{tr} (\gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha v^{s_2}(p_2) \bar{v}^{s_2}(p_2)) \times \\ \times \text{tr} (\gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2) \bar{v}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\beta u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s'_1}(p'_1)). \quad (5.14)$$

Considerando-se as somas nos spins (2.108), (2.109) e implementando a relação de completudeza, resulta:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_2 - m)) \times \\ \times \text{tr} (\gamma^\nu (\not{p}'_2 - M) \gamma^\beta (\not{p}'_1 + M)), \quad (5.15)$$

o que pode ser escrito simplificadaamente como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}, \quad (5.16)$$

onde definimos:

$$L^{\mu\alpha} = \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_2 - m)), \quad (5.17)$$

$$M^{\nu\beta} = \text{tr} (\gamma^\nu (\not{p}'_2 - M) \gamma^\beta (\not{p}'_1 + M)). \quad (5.18)$$

Efetivamente, teremos

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4q^4} L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha}. \quad (5.19)$$

5.2 Seção de choque para o espalhamento $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Usando as regras de traço das matrizes gama, podemos mostrar que

$$L^{\mu\alpha} = 4[p_2^\mu p_1^\alpha + p_1^\mu p_2^\alpha - g^{\mu\alpha} (m^2 + p_1 \cdot p_2)], \quad (5.20)$$

$$M^{\nu\beta} = 4[p_2'^\nu p_1'^\alpha + p_1'^\nu p_2'^\alpha - g^{\nu\alpha} (M^2 + p'_1 \cdot p'_2)]. \quad (5.21)$$

Deste modo, a contração presente na Eq. (5.19) no referencial do CM é dada por:

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 32\{(p_1 \cdot p'_2)(p_2 \cdot p'_1) + (p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2) + M^2(p_1 \cdot p_2) + m^2(p'_1 \cdot p'_2) + 2m^2 M^2\}, \quad (5.22)$$

onde vale a conservação do 4-momento total:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad (5.23)$$

essa expressão também pode ser escrita como:

$$p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2, \quad (5.24)$$

$$p_1 - p'_2 = p'_1 - p_2. \quad (5.25)$$

Quadrando cada uma dessas expressões, obtemos as relações:

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2, \quad (5.26)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1, \quad (5.27)$$

$$p_1 \cdot p'_1 - m^2 = p_2 \cdot p'_2 - M^2. \quad (5.28)$$

Para calcularmos a seção de choque, é preciso escolher um referencial. Escolhemos o referencial do centro de massa, onde $p_1 = (E, \vec{p})$, $p_2 = (E, -\vec{p})$, $p'_1 = (E, \vec{p}')$ e $p'_2 = (E, -\vec{p}')$, e a condição $|\vec{p}|^2 = |\vec{p}'|^2 + M^2 - m^2$ garante a conservação da energia. Com isso:

$$p_1 \cdot p_2 = 2E^2 - m^2, \quad (5.29)$$

$$p'_1 \cdot p'_2 = 2E^2 - M^2, \quad (5.30)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E^2 + |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta, \quad (5.31)$$

$$p_1 \cdot p'_1 = p_2 \cdot p'_2 = E^2 - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta, \quad (5.32)$$

$$q^2 = 4E^2. \quad (5.33)$$

Substituindo estes resultados na Eq. (5.22), temos

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 64[E^4 + (M^2 + m^2) E^2 + (E^4 - (M^2 + m^2) E^2 + M^2 m^2) \cos^2 \theta]. \quad (5.34)$$

Montamos, assim, a seguinte amplitude quadrática média:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{E^4} [E^4 + (M^2 + m^2) E^2 + (E^4 - (M^2 + m^2) E^2 + M^2 m^2) \cos^2 \theta]. \quad (5.35)$$

Se temos $M \gg |\vec{p}'|$, a amplitude quadrática média é lida como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = e^4 \left(2 + \frac{m^2}{M^2} \right), \quad (5.36)$$

enquanto a seção de choque reduz-se a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{16\pi M} \right)^2 \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \left(2 + \frac{m^2}{M^2} \right). \quad (5.37)$$

Se consideramos ainda $M \gg m$, a seção de choque passa a valer

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left(\frac{e^2}{16\pi M} \right)^2 \frac{|\vec{p}'|}{M} \rightarrow 0. \quad (5.38)$$

Tomando agora o limite ultra-relativístico na expressão (5.35), decorre

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = e^4 (1 + \cos^2 \theta), \quad (5.39)$$

e a seção de choque fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{16\pi |\vec{p}'|} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (5.40)$$

Mostramos assim, como obter a seção de choque do espalhamento elétron + pósitron-múon anti-múon (para feixe não polarizado), partindo-se das regras de Feynman, usando-se o truque de Casimir e o propagador de Feynman para o campo de gauge.

6 Integração funcional e Funcional Gerador

Nos capítulos anteriores, consideramos a representação de Heisenberg para campos livres e a representação de Dirac para campos em interação. Podemos mostrar como valores esperados podem ser calculados em termos de integrais funcionais. Em mecânica quântica, podemos trabalhar definindo uma base $|o, t_0\rangle$ de um dado operador hermitiano. Tal que

$$O_0|o, t_0\rangle = o|o, t_0\rangle, \quad (6.1)$$

onde O_0 é o operador num instante de tempo inicial. Podemos determinar o espectro desse operador, num instante de tempo posterior mediante a aplicação do operador de evolução temporal, onde temos

$$O(t)|o, t\rangle = o|o, t\rangle, \quad (6.2)$$

em que a base do operador evoluído no tempo, se relaciona com a base inicial pela aplicação do operador de evolução temporal

$$|o, t\rangle = U^\dagger(t, t_0)|o, t_0\rangle. \quad (6.3)$$

Um grande número de problemas em mecânica quântica, consistem em determinar a amplitude de transição

$$\langle o', t_f || o, t_0 \rangle = \langle o', t_0 | U(t_f, t_0) | o, t_0 \rangle. \quad (6.4)$$

Introduzimos a identidade em termos dos autokets de posição,

$$\langle o', t_f || o, t_0 \rangle = \int dq_N dq_0 \langle o', t_0 || q_N \rangle \langle q_N | U(t_f, t_0) | q_0 \rangle \langle q_0 || o, t_0 \rangle, \quad (6.5)$$

de modo que, o objeto básico que devemos calcular, é amplitude de transição

$$\langle q_N | U(t_f, t_0) | q_0 \rangle. \quad (6.6)$$

Dado que operador de evolução temporal satisfaz a lei de composições, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\langle q_N | U(t_f, t_0) | q_0 \rangle = \langle q_N | \prod_{i=1}^N U(t_i, t_{i-1}) | q_0 \rangle. \quad (6.7)$$

Considerando a completeza, podemos inserir identidades entre os operadores de evolução temporal

$$\langle q_N | U(t_N, t_0) | q_0 \rangle = \int dq_{N-1} \dots dq_1 \prod_{i=0}^{N-1} \langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle. \quad (6.8)$$

Precisamos agora calcular a quantidade $\langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle$. Para isso, introduzimos a identidade em termos do auto ket de momento linear. Além disso, vamos considerar que os instantes de tempo são muito próximos

$$\langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \approx \int dp_{i+1} \langle q_{i+1} | | p_i \rangle \langle p_i | (1 - i(t_{i+1} - t_i) H) | q_i \rangle. \quad (6.9)$$

definindo

$$\langle p_i | H | q_i \rangle = \langle p_i | | q_i \rangle H(p_i, q_i), \quad (6.10)$$

resulta,

$$\langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \approx \int dp_{i+1} \langle q_{i+1} | | p_i \rangle \langle p_i | | q_i \rangle (1 - i(t_{i+1} - t_i) H(p_{i+1}, q_i)). \quad (6.11)$$

Agora, inserimos o objeto abaixo em (6.11)

$$\langle q_{i+1} | | p_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_{i+1}p_i}, \quad (6.12)$$

tal que

$$\langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \approx \int \frac{dp_{i+1}}{2\pi} e^{i[\dot{q}_i p_i - H(p_i, q_i)](t_{i+1} - t_i)}, \quad (6.13)$$

onde definimos

$$\dot{q}_i = \frac{q_{i+1} - q_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (6.14)$$

Teremos ao final

$$\langle q_N | U(t_N, t_0) | q_0 \rangle = \int dq_{N-1} \dots dq_1 \prod_{i=0}^{N-1} \int \frac{dp_{i+1}}{2\pi} e^{i[\dot{q}_i p_i - H(p_i, q_i)](t_{i+1} - t_i)}. \quad (6.15)$$

Tomando o limite de $(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$, podemos definir as medidas de integração:

$$\begin{aligned} \int Dq &= \int dq_{N-1} \dots dq_1, \\ \int Dp &= \prod_{i=0}^{N-1} \int \frac{dp_{i+1}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ao final, teremos, após uma integração sobre as variáveis de momento,

$$\langle q_N | U(t_N, t_0) | q_0 \rangle = N \int_{q_0}^{q_f} Dq e^{i \int_{t_0}^{t_f} L dt}. \quad (6.17)$$

A equação (6.17) representa a integral de caminho de Feynman. Ela nos fornece a amplitude de transição em termos da soma de todos os caminhos possíveis entre duas condições

dadas. Embora o limite tomado para essa expressão encontre algumas complicações, de modo geral, essa formulação nos permite uma interpretação da mecânica clássica como limite da mecânica quântica. De fato, vemos que a maior contribuição para a amplitude, vem dos caminhos que minimizam a ação. As contribuições quânticas são vistas como flutuações em torno do caminho clássico.

6.1 Ordenamento temporal do produto de funções

A representação em termos da integral de caminho de Feynman nos permite calcular amplitudes de transição do tipo dado em (6.17). Também, estamos interessados em elementos de matriz do tipo

$$\langle q', t_f | q(t^{(n)}) \dots q(t'') q(t') | o, t_0 \rangle, \quad (6.18)$$

onde em física, o produto de funções costuma aparecer ordenado no tempo. Podemos mostrar que, utilizando o formalismo de integrais de caminho, também podemos colocar a função de correlação (6.18) em termos de uma integral funcional. Para o caso de apenas um operador, temos

$$\langle q', t_f | q(t') | o, t_0 \rangle = N \int_{q_0}^{q_f} Dq q(t') e^{i \int_{t_0}^{t_f} L dt}. \quad (6.19)$$

Podemos utilizar a mesma técnica e mostrar que para produtos ordenados temporalmente,

$$\langle q', t_f | T q(t'') q(t') | o, t_0 \rangle = N \int_{q_0}^{q_f} Dq q(t'') q(t') e^{i \int_{t_0}^{t_f} L dt}. \quad (6.20)$$

É possível generalizar esse resultado para um sistema com vários graus de liberdade da seguinte forma:

$$\langle Q', t_f | T q_i(t'') q_j(t') | Q, t_0 \rangle = N \int DQ q_i(t'') q_j(t') e^{i \int_{t_0}^{t_f} L dt}, \quad (6.21)$$

onde temos a medida $DQ = Dq_1 \dots Dq_n$

6.2 Integral de Caminho na teoria quântica de campos

Considerando agora o caso de um campo escalar, podemos mostrar que o mesmo conjunto de técnicas podem ser aplicadas para a teoria de campos. Para isso,

consideremos o caso do campo escalar real $\varphi_{op}(t_0, \vec{x})$ e um autovetor $|\Phi, t_0\rangle$, tal que

$$\varphi_{op}(t_0, \vec{x}) |\Phi, t_0\rangle = \varphi(t_0, \vec{x}) |\Phi, t_0\rangle. \quad (6.22)$$

Na picture de Heisenberg, o operador $\varphi_{op}(t, \vec{x})$ terá seus autovetores dados em termos dos autovetores de $\varphi_{op}(t_0, \vec{x})$ pela equação

$$|\Phi, t\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\Phi, t_0\rangle. \quad (6.23)$$

Podemos, então, escrever a amplitude de transição entre dois estados

$$\langle \Phi', t | | \Phi, t_0 \rangle = \langle \Phi', t_0 | U(t, t_0) | \Phi, t_0 \rangle. \quad (6.24)$$

Em total analogia ao que foi feito antes, um campo pode ser entendido como um sistema com infinitos graus de liberdade, onde cada grau de liberdade é rotulado pelo índice espacial. Sendo assim, podemos escrever (6.24) em termos de uma integral funcional

$$\langle \Phi', t | | \Phi, t_0 \rangle = N \int_{\varphi}^{\varphi'} D\varphi e^{i \int_{t_0}^{t_f} L dt}, \quad (6.25)$$

e, da mesma forma, podemos calcular o produto temporalmente ordenado de campos.

Para o caso de dois campos, por exemplo, temos

$$\langle \Phi', t_f | T \varphi(t'', \vec{x}'') \varphi(t', \vec{x}') | \Phi, t_0 \rangle = N \int_{\varphi}^{\varphi'} D\varphi \varphi(t'', \vec{x}'') \varphi(t', \vec{x}') e^{i \int_{t_0}^{t_f} L dt}. \quad (6.26)$$

Podemos então, aplicando técnicas semelhantes às já utilizadas em outros capítulos, escrever o valor esperado para o vácuo do produto temporalmente ordenado dos campos, em termos de amplitudes como a (6.26). Para isso, retornemos à expressão (3.42)

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} |\varphi\rangle = |\Omega\rangle \langle \Omega | | \varphi \rangle, \quad (6.27)$$

onde $|\Omega\rangle$ é o estado de vácuo da teoria e $|\varphi\rangle$ um estado qualquer. Podemos então escrever

$$|\Phi, -\infty\rangle = |\Omega\rangle \langle \Omega | | \Phi, t_0 \rangle, \quad (6.28)$$

$$|\Phi, \infty\rangle = |\Omega\rangle \langle \Omega | | \Phi, t_f \rangle. \quad (6.29)$$

Substituindo na expressão (6.26), temos

$$\langle \Omega | T \varphi(t'', \vec{x}'') \varphi(t', \vec{x}') | \Omega \rangle = \frac{N \int_{\varphi}^{\varphi'} D\varphi \varphi(t'', \vec{x}'') \varphi(t', \vec{x}') e^{i \int_{-\infty}^{\infty} L dt}}{\langle \Phi', t_f | | \Omega \rangle \langle \Omega | | \Phi, t_0 \rangle}. \quad (6.30)$$

Novamente, de (6.28), (6.29) e (6.25), temos

$$\langle \Omega | T \varphi(t'', \vec{x}'') \varphi(t', \vec{x}') | \Omega \rangle = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi'} D\varphi \varphi(t'', \vec{x}'') \varphi(t', \vec{x}') e^{i \int_{-\infty}^{\infty} L dt}}{\int_{\varphi}^{\varphi'} D\varphi e^{i \int_{-\infty}^{\infty} L dt}}. \quad (6.31)$$

Para uma função de Green genérica, podemos escrever de forma conveniente

$$\langle \Omega | T \varphi(x^{(n)}) \dots \varphi(x'') \varphi(x') | \Omega \rangle = N \int D\varphi \varphi(x^{(n)}) \dots \varphi(x'') \varphi(x') e^{i \int d^4x \mathcal{L}}, \quad (6.32)$$

sendo esta, uma abordagem alternativa para o cálculo das funções de Green.

6.3 funcional Gerador

Um objeto fundamental definido em teoria de campos, é o funcional gerador das funções de Green. Sua importância, está no fato de podermos determinar todas as funções de Green, por meio de derivadas em relação às fontes externas. Para o caso do campo escalar, o funcional gerador define-se como se segue

$$\mathcal{Z}(J) = \langle \Omega | T e^{i \int d^4x J \varphi} | \Omega \rangle. \quad (6.33)$$

É possível escrever o funcional gerador \mathcal{Z} em uma série de potências como

$$\mathcal{Z}(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x^{(0)} \dots d^4x^{(n)} J(x^{(0)}) \dots J(x^{(n)}) G^{(n)}(x^{(0)}, \dots, x^{(n)}). \quad (6.34)$$

Por esse motivo, ele é chamado de funcional gerador das funções de Green completas.

$$G^{(n)}(x^{(0)}, \dots, x^{(n)}) = \langle \Omega | T \varphi(x^{(0)}) \dots \varphi(x^{(n)}) | \Omega \rangle = \left. \frac{\delta^n \mathcal{Z}(J)}{\delta i J(x^{(0)}) \dots \delta i J(x^{(n)})} \right|_{J=0} \quad (6.35)$$

Costuma-se definir, ainda, o funcional gerador das funções de Green conexas

$$\mathcal{Z}(J) = e^{i\mathcal{W}(J)}, \quad (6.36)$$

ou de outra maneira,

$$\mathcal{W}(J) = -i \ln(\mathcal{Z}(J)). \quad (6.37)$$

As funções de Green conexas, são obtidas da seguinte forma:

$$G_C^{(n)}(x^{(0)}, \dots, x^{(n)}) = \left. \frac{\delta^n i\mathcal{W}(J)}{\delta i J(x^{(0)}) \dots \delta i J(x^{(n)})} \right|_{J=0}. \quad (6.38)$$

A partir de uma transformação de Legendre, define-se o funcional gerador das funções 1-PI (irredutíveis de uma partícula)

$$\Gamma(\varphi_{cl}) = \mathcal{W}(J) - \int d^4x J(x) \varphi_{cl}(x), \quad (6.39)$$

onde $\varphi_{cl}(x)$ é obtido como se segue

$$\varphi_{cl}(x) = \frac{\delta \mathcal{W}(J)}{\delta J(x)}. \quad (6.40)$$

O funcional gerador das funções 1-PI é, por vezes, chamado de ação efetiva. Dado que, em uma expansão em série de potências, os primeiros termos estão associados à ação clássica e, os termos restantes, carregam as contribuições do vácuo ou correções quânticas.

Voltando para o funcional gerador das funções de Green completas, sabemos que, se conhecemos $\mathcal{Z}(J)$, podemos determinar todas as funções de Green ou, de maneira

inversa, se conhecemos todas as funções de Green podemos determinar o funcional gerador $\mathcal{Z}(J)$. Na seção anterior, vimos como representar as funções de Green em termos de integrais funcionais, o que permite uma expressão para o gerador $\mathcal{Z}(J)$ em termos de uma integral funcional

$$\mathcal{Z}(J) = N \int D\varphi e^{i \int d^4x \mathcal{L} + J\varphi}. \quad (6.41)$$

Embora o funcional gerador calculado aqui, remeta apenas ao campo escalar, a generalização para o campo de gauge e o campo de Dirac pode ser feita introduzindo uma integração sobre cada campo, além de considerarmos uma fonte externa para cada um deles. Para a QED, temos o funcional gerador.

$$Z(J, \bar{\eta}, \eta) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu + \bar{\psi} (i \not{p} - m) \psi + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right)}. \quad (6.42)$$

Deve-se ressaltar que, devido a estatística dos férmions, o campo de Dirac deve ser descrito por variáveis anti-comutativas ou grassmannianas, justificando a quantização realizada em anteriormente na Seção 2.4. O funcional gerador das funções de Green conexas, será calculado da mesma forma que em (6.37), sendo que seu resultado será o mesmo calculado pelo método de Gell-Mann-Low. A ação efetiva também será calculada de maneira análoga, apenas introduzindo as fontes para os respectivos campos.

$$\Gamma = \mathcal{W} - \int d^4x \left(J^\mu A_{\mu cl} + \bar{\eta} \psi_{cl} + \bar{\psi}_{cl} \eta \right). \quad (6.43)$$

Num primeiro momento, pode-se acreditar que não exista vantagens entre um método e outro, mas devemos nos lembrar que somente foi possível realizar a quantização covariante, do campo de gauge, para $\xi = 1$, devido à incompatibilidades entre o formalismo operatorial e o gauge de Lorenz que será discutida mais à frente. Já no formalismo de integração funcional, os campos são c-números, em distinção aos operadores que são q-números. Deste modo, podemos proceder com o cálculo das funções de Green para qualquer valor arbitrário de ξ . De fato, as vantagens de trabalharmos com o método de integração funcional, se tornam ainda maiores quando estamos lidando com teorias de gauge não abelianas. Porém, o objetivo desta seção é apenas apresentar alguns objetos que serão utilizados em seções futuras.

7 Polarização do vácuo

Em capítulo anterior, calculamos a seção de choque em ordem mais baixa na teoria de perturbações, representado pelo diagrama (5.1). Se quisermos calcular correções de ordem maior, podemos expandir a fórmula de Gell-Mann-Low, até a ordem desejada, e desenvolver uma série de termos utilizando as contrações de Wick. Uma ótima alternativa é também o uso do funcional gerador, de onde se pode obter perturbativamente, os valores esperados em termos de integrais de Feynman. Seguindo por qualquer um dos caminhos, considerar os termos de ordem maior, significa calcular termos que podem ser representados por diagramas

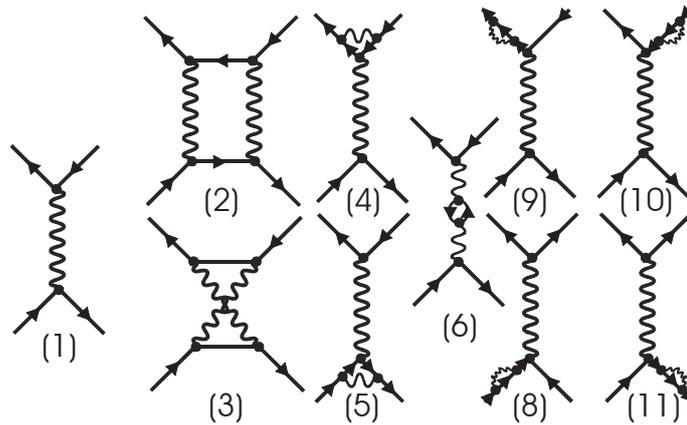


Figura 7.1: Diagramas que representam o espalhamento elétron-pósitron \rightarrow múon-antimúon. A figura número (1), é um diagrama de segunda ordem, enquanto os outros são de quarta ordem.

Os diagramas da Figura 7.1, são os que devemos considerar caso desejemos calcular a seção de choque até quarta ordem. Aqui, nos deparamos com uma dificuldade que existe não apenas na QED, mas que acompanha toda teoria quântica de campos. Diagramas que deveriam contribuir com pequenas correções, acabam se tornando infinitamente grandes. Apresentaremos aqui, superficialmente, a técnica utilizada para lidar com esse problema, técnica esta conhecida como renormalização.

Considerar as contribuições de ordem quatro no processo de espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, consiste em escrever e calcular cada amplitude de Feynman que tenha

elétrons e pósitrons no estado inicial e, múons e antimúons no estado final¹. Alguns desses diagramas podem ser reagrupados, de modo que os mesmos consistem em correções aos propagadores ou, ao vértice da teoria. Um exemplo desse tipo de diagrama é representado pelo gráfico (7.1).(6). Ao somarmos esse diagrama ao diagrama de ordem dois (7.1).(1), percebemos que, efetivamente, estamos trocando o propagador da teoria livre, calculado à ordem zero, pelo propagador a um loop. A um loop, podemos escrever o propagador do fóton

$$i\mathcal{D}^{\mu\nu}(x-y) = iD^{\mu\nu}(x-y) + \quad (7.1)$$

$$-(-ie)^2 \int d^4u d^4v iD^{\mu\alpha}(x-u) iD^{\nu\beta}(y-v) \text{tr} [iS(v-u) \gamma_\alpha iS(u-v) \gamma_\beta] \quad (7.2)$$

No espaço dos momentos, temos

$$i\tilde{\mathcal{D}}^{\mu\nu}(q) = i\tilde{D}^{\mu\nu}(q) + i\tilde{D}^{\mu\alpha}(q) [-i\Pi_{\alpha\beta}(q)] iD^{\nu\beta}(-q), \quad (7.3)$$

que pode ser representado pelos diagramas da Figura 7.2:



Figura 7.2: Propagador perturbado em segunda ordem.

O objeto $-i\Pi_{\alpha\beta}(q)$ é denominado tensor de polarização do vácuo. O tensor de polarização do vácuo, vai carregar a influência da criação e aniquilação de partículas virtuais sobre o propagador do fóton. Este objeto, é definido em termos da integral

$$-i\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{tr} \left[i\tilde{S}(p) (-ie\gamma_\alpha) i\tilde{S}(q+p) (-ie\gamma_\beta) \right], \quad (7.4)$$

ou explicitamente

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{tr} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha \frac{\not{q} + \not{p} + m}{(q+p)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\beta \right]. \quad (7.5)$$

Neste ponto, devemos nos atentar para possíveis problemas com a expressão (7.5). Para isso, vamos considerar agora, uma expressão mais extensa para o propagador (Figura 7.3).

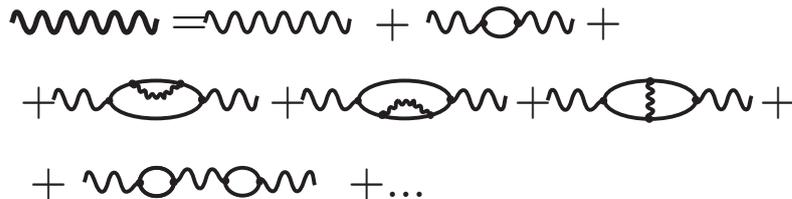


Figura 7.3: Gráficos que representam o propagador perturbado até ordem 4.

¹Quando temos partículas idênticas, o numero de gráficos aumenta devido a indistinguibilidade das partículas.

Ainda poderíamos ter considerado o diagrama da Figura 7.4:

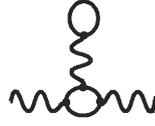


Figura 7.4: Gráfico do tipo tadpole.

Porém, o ordenamento normal nos dará resultado nulo para esse tipo de diagrama. Voltando para a figura anterior, notemos que podemos agrupar alguns subdiagramas da seguinte forma: podemos classificar os 3º, 4º e 5º diagramas como compactos e o 6º como não compacto. Da soma de todos os diagramas compactos (Figura 7.5), associamos a polarização $-i\Pi_{\mu\nu}$.



Figura 7.5: Gráfico do propagador em termos dos diagramas compactos.

Onde o círculo cheio representa as contribuições do vácuo (Figura 7.6).



Figura 7.6: Gráficos que compõem o diagrama compacto.

No espaço dos momentos, temos a expansão para o propagador perturbado,

$$i\tilde{\mathcal{D}}^{\mu\nu} = i\tilde{D}^{\mu\nu} + i\tilde{D}^{\mu\alpha} [-i\Pi_{\alpha\beta}] iD^{\beta\nu} + i\tilde{D}^{\mu\alpha} [-i\Pi_{\alpha\beta}] iD^{\beta\theta} [-i\Pi_{\theta\varphi}] iD^{\varphi\nu} + \dots \quad (7.6)$$

Expandido a polarização do vácuo em potências de q^μ , temos:

$$\Pi_{\alpha\beta} = -ag_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\chi}q^\chi - c_{\alpha\beta\chi\delta}q^\chi q^\delta + \dots \quad (7.7)$$

Substituindo o propagador não perturbado do fóton e, considerando o limite para pequenos momentos transferidos,

$$i\tilde{\mathcal{D}}^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \left(1 - \left[\frac{-a}{q^2 + i\varepsilon} \right] + \left[\frac{-a}{q^2 + i\varepsilon} \right]^2 - \left[\frac{-a}{q^2 + i\varepsilon} \right]^3 + \dots \right). \quad (7.8)$$

Podemos reagrupar a expressão como segue

$$i\tilde{\mathcal{D}}^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon - a}. \quad (7.9)$$

Em comparação ao propagador do campo escalar, vemos que a expressão anterior corresponde ao propagador do fóton que agora possui uma massa \sqrt{a} . Outro ponto importante é que, ao calcularmos o valor de a , temos como resultado

$$a = \frac{\Pi_\alpha^\alpha(0)}{4} = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-2p^2 + m^2}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}. \quad (7.10)$$

Uma análise da divergência superficial para valores grandes de p , nos mostra que o comportamento da integral é quadraticamente divergente.

$$\int d^4p \frac{2p^2 - m^2}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \sim \int_0^\Lambda pdp \sim \Lambda^2. \quad (7.11)$$

Aqui, nós vemos que, além de possuir massa, essa massa ainda deve ser muito grande. Um fato notável sobre o fóton é o de que, experimentalmente, temos limites muito restritivos sobre sua massa [51]. Isso se reflete na lei de Coulomb e no grande alcance da força eletromagnética. De fato, a invariância de gauge ilustrada na Seção 2.5, requer que o fóton seja não massivo. Dado que a teoria original é invariante de gauge, o resultado inconsistente obtido aqui, se explica pelo fato de a expressão (7.5) não ser matematicamente bem definida, possuindo algumas ambiguidades. Existem diversas maneiras de contornar esse problema e fazer a integral se tornar convergente. A esses mecanismos, chamamos de regularização.

7.1 Regularização dimensional

Dentre os métodos de regularização mais populares, destacamos o método de regularização dimensional. Esse método, consiste em trocarmos as integrais originalmente na forma $I = \int d^D p f(p)$ onde D coincide com a dimensionalidade do espaço tempo, por um valor que pode ser ligeiramente menor. Para o nosso caso, trocaremos o valor original de $D = 4$ por $D = 4 - 2\varepsilon$ sendo, os resultados finais, expandidos em torno de $\varepsilon = 0$. É comum considerar que a álgebra das matrizes gama também é afetada por essa alteração mas aqui, vamos sem comprometimento de nossos resultados, considerar que a álgebra das matrizes gama permanece inalterada. A expressão regularizada para o tensor de polarização do vácuo se escreve da seguinte forma

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{-ie^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \text{tr} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha \frac{\not{p} + \not{q} + m}{(p+q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\beta \right]. \quad (7.12)$$

O fator μ é uma constante com dimensão de massa introduzida, para que a constante de acoplamento possua a mesma dimensão de massa que a original. A partir daqui,

utilizaremos uma série de procedimentos matemáticos típicos deste tipo de problema. Um deles é a parametrização de Feynman. Ela consiste em explorar a identidade

$$\frac{1}{s_1 s_2} = \int_0^1 du \frac{1}{(s_1 + (s_2 - s_1)u)^2}. \quad (7.13)$$

Substituindo $s_1 = (p^2 - m^2 + i\varepsilon)$, $s_2 = ((p+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)$ e reagrupando os elementos, temos

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{-ie^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 du \int d^D p \text{tr} \left[\frac{(\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{p} + \not{q} + m) \gamma_\beta}{((p+qu)^2 + q^2 u(1-u) - m^2 + i\varepsilon)^2} \right]. \quad (7.14)$$

Podemos transladar o momento $p \rightarrow p - qu$ e simplificar o denominador

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{-ie^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 du \int d^D p \text{tr} \left[\frac{(\not{p} - u\not{q} + m) \gamma_\alpha (\not{p} + (1-u)\not{q} + m) \gamma_\beta}{(p^2 + q^2 u(1-u) - m^2 + i\varepsilon)^2} \right]. \quad (7.15)$$

Dado que o numerador é uma função par, ainda podemos simplificar um pouco mais

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{-ie^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 du \int d^D p \frac{N_{\alpha\beta}}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2}, \quad (7.16)$$

onde temos as quantidades

$$N_{\alpha\beta} = \text{tr} [\not{p} \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta - u(1-u) \not{q} \gamma_\alpha \not{q} \gamma_\beta + m^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta], \quad (7.17)$$

$$C = m^2 - q^2 u(1-u). \quad (7.18)$$

Uma ultima propriedade útil dessas integrais D dimensionais é:

$$I = \int p^\mu p^\nu f(p^2) d^D p = \frac{g^{\mu\nu}}{D} \int p^2 f(p^2) d^D p, \quad (7.19)$$

o que nos permite fazer $p^\mu p^\nu \rightarrow p^2 g^{\mu\nu}/D$ na expressão (7.17). Desenvolvendo os traços das matrizes gama, ficamos com

$$N_{\alpha\beta} = 4 \left[\left(\frac{2-D}{D} p^2 + C \right) g_{\alpha\beta} + 8u(1-u) (q^2 g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta) \right]. \quad (7.20)$$

Podemos escrever o tensor de polarização da seguinte forma

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = a g_{\alpha\beta} + b (q^2 g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta), \quad (7.21)$$

onde temos as integrais:

$$a = -4e^2 \int_0^1 du \frac{i\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{(2-D) D^{-1} p^2 + C}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2}, \quad (7.22)$$

$$b = -8ie^2 \int_0^1 du u(1-u) \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2}. \quad (7.23)$$

essas integrais possuem valores bem conhecidos em torno de $\epsilon = 0$.

$$a = 0 \quad (7.24)$$

$$b = \frac{e^2}{12\pi^2} \Delta_\epsilon - \frac{e^2}{12\pi^2} f(q^2/4m^2) \quad (7.25)$$

Onde, $\Delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \gamma$ e $f(x) = 6 \int_0^1 duu(1-u) \ln(1-4xu(1-u))$. Podemos ainda, representar a função f graficamente (Figura 7.7).

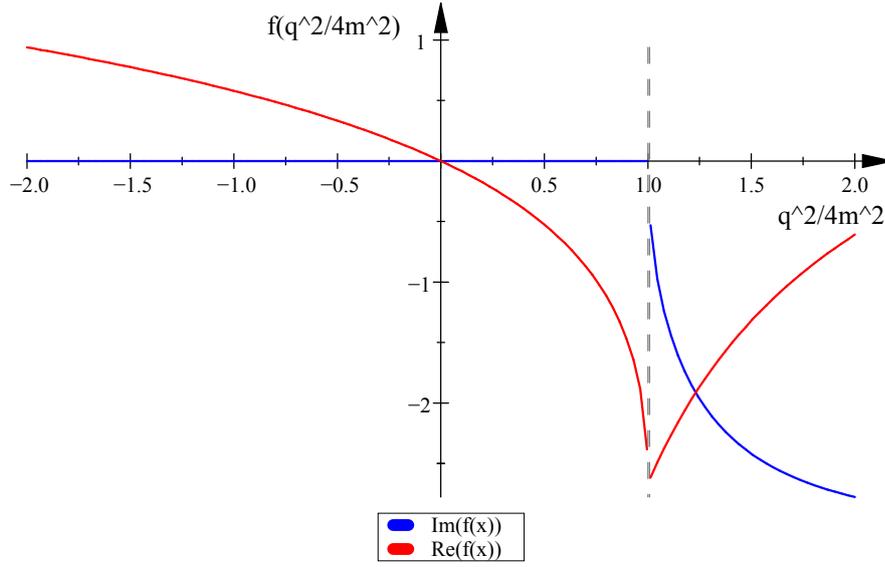


Figura 7.7: Gráfico da função $f(x)$

Deste modo, temos

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \frac{e^2}{12\pi^2} (\Delta_\epsilon - f(q^2/4m^2)) (q^2 g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta). \quad (7.26)$$

Usando a regularização dimensional, conseguimos resolver o problema de gerarmos uma massa infinita para o fóton. Isso fica implícito, ao calcularmos a integral (7.22) que possui, originalmente, divergência quadrática, tornando-se nula neste cenário de regularização.

Ainda resta, porém, a integral (7.23) que possui divergência superficial logarítmica. Ao utilizarmos regularização dimensional, essa divergência foi isolada em termos do parâmetro Δ_ϵ . Verifica-se facilmente, que o tensor de polarização do vácuo (7.26) satisfaz a propriedade

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu} = q^\mu \Pi_{\nu\mu} = 0. \quad (7.27)$$

Embora tenhamos realizado nossos cálculos apenas em segunda ordem na teoria de perturbações, essa propriedade deve se manifestar a todas as ordens, estando a mesma relacionada à invariância de gauge. Pode-se esperar que o tensor de polarização do vácuo

possua a seguinte estrutura a todas as ordens

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \Pi(q) \left(q^2 g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta \right). \quad (7.28)$$

Podemos então, substituindo a expressão(7.28) em (7.6) , mostrar que o propagador perturbado se escreve da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{D}}^{\delta\nu} = \frac{-1}{q^2} \left(\frac{1}{(1 + \Pi(q))} \left(g^{\delta\nu} - \frac{q^\delta q^\nu}{q^2} \right) + \frac{q^\delta q^\nu}{q^2} \right). \quad (7.29)$$

Esse propagador, será utilizado no lugar do propagador não perturbado. Podemos escrever a amplitude de um processo de espalhamento de férmions, como se segue

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u} \gamma^\mu u \frac{-1}{q^2} \left(\frac{1}{(1 + \Pi(q))} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \bar{u}' \gamma^\nu u' \quad (7.30)$$

Por causa da conservação da corrente, efetivamente teremos

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u} \gamma^\mu u \frac{-1}{q^2} \frac{1}{(1 + \Pi(q))} \bar{u}' \gamma_\mu u'. \quad (7.31)$$

Neste ponto, teremos um problema. No limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, ainda nos resta uma divergência associada ao tensor de polarização do vácuo. Na ordem de perturbação em que estamos trabalhando, temos

$$\Pi(0) = \frac{e^2}{12\pi^2} \Delta_\varepsilon. \quad (7.32)$$

Para contornarmos esse problema, façamos a seguinte manipulação.

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{1 + \Pi(0)} \bar{u} \gamma^\mu u \frac{-1}{q^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Pi(q) - \Pi(0)}{1 + \Pi(0)} \right)} \bar{u}' \gamma_\mu u'. \quad (7.33)$$

Faremos a seguinte redefinição

$$e_R = \frac{e}{\sqrt{1 + \Pi(0)}}, \quad (7.34)$$

$$\Pi^R(q) = \frac{\Pi(q) - \Pi(0)}{1 + \Pi(0)}, \quad (7.35)$$

o que resulta na amplitude,

$$\mathcal{M} = e_R \bar{u} \gamma^\mu u \frac{-1}{q^2} \frac{1}{(1 + \Pi^R(q))} \bar{u}' \gamma_\mu u'. \quad (7.36)$$

Vemos claramente, que no limite em que $q^2 \rightarrow 0$, a amplitude (7.36) se torna a mesma calculada em nível de árvore, sendo apenas uma redefinição na constante de acoplamento. Dado que esse tipo de processo pode ser utilizado para determinar o valor da constante de acoplamento, vemos que a longas distâncias, o que de fato medimos, é a constante

de acoplamento renormalizada e_R , enquanto que a constante de acoplamento nua e , não é observável. Dado que as interações nunca podem ser desligadas, o que sempre vamos observar será a carga renormalizada, cujo valor experimental será determinado experimentalmente, sendo este, um caminho elegante para resolvermos o problema da divergência. Agora, considerando o limite contrário, onde temos grandes momentos sendo transferidos, as contribuições do tensor de polarização do vácuo contribuem com efeitos observáveis. Combinando as equações (7.36), (7.35) e (7.26), temos

$$\mathcal{M} = e_R^2 \bar{u} \gamma^\mu u \frac{-1}{q^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} f(q^2/4m^2)\right)} \bar{u}' \gamma_\mu u'. \quad (7.37)$$

Essa amplitude de espalhamento é a mesma calculada em nível de árvore, trocando apenas a carga renormalizada por uma carga efetiva, que depende do momento transferido.

$$\mathcal{M} = e_{eff}^2 \bar{u} \gamma^\mu u \frac{-1}{q^2} \bar{u}' \gamma_\mu u', \quad (7.38)$$

onde

$$e_{eff}^2 = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} f(q^2/4m^2)}. \quad (7.39)$$

Para grandes momentos, podemos escrever aproximadamente,

$$e_{eff}^2 = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2 e^{5/3}}\right)}. \quad (7.40)$$

Graficamente (Figura 7.8), temos

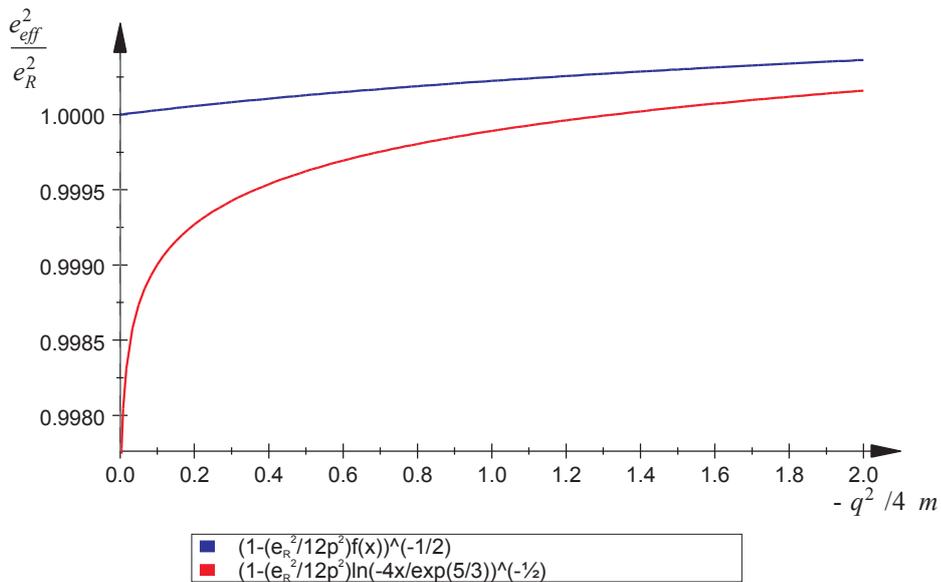


Figura 7.8:

Como podemos ver, para valores grandes do momento transferido, a função $f(x)$ se comporta como logaritmo, de modo que seu valor cresce lentamente. Embora esse crescimento seja lento, esse efeito pode ser mensurado [52]. De maneira realista, essa variação na constante de acoplamento pode ser influenciada por todas as partículas que podem aparecer no loop, incluindo todos os férmions e hádrons. Embora nosso cálculo seja simplista, nos permite perceber que, para algum valor suficientemente grande do momento transferido, a constante de acoplamento deixa de ser pequena de fato: a mesma, se torna infinita para algum valor do momento transferido. Podemos estimar esse valor para algo em torno de

$$\sqrt{-q^2} \sim 10^{286} eV. \quad (7.41)$$

Resultados mais precisos indicam que, se considerarmos não apenas elétrons e mais loops, esse valor deve ser em torno de $10^{34} eV$ o que, apesar de bem menor, ainda é um valor extremamente grande. Em teorias como a QCD, verificamos o efeito contrário, sua constante de acoplamento se torna pequena quando aumentamos a energia. Esse efeito denomina-se liberdade assintótica.

O problema da renormalização pode ser também tratado em nível de lagrangiana. A ação que nós utilizamos como ponto de partida, foi adquirida diretamente da teoria clássica, porém, nada nos diz que a mesma não pode ser alterada a nível quântico. De fato, os cálculos feitos até aqui, indicam possíveis mudanças nos parâmetros da teoria que podem ser acrescentados em nível de lagrangiana. Podemos considerar que, termos adicionais são considerados a cada ordem na teoria de perturbação à lagrangiana original, modificando os parâmetros da teoria. Esses termos adicionais são chamados contratermos. A ação total deve ter a seguinte forma:

$$S = S_0 + \Delta S. \quad (7.42)$$

Os contra termos são definidos de forma que algumas condições sejam obedecidas. Uma dessas condições é a de que o propagador satisfaça a seguinte condição:

$$\lim_{q \rightarrow 0} -q^2 \left(g_{\alpha\nu} - \frac{q_\alpha q_\nu}{q^2} \right) \tilde{D}^{\delta\nu} = \left(\delta_\alpha^\delta - \frac{q_\alpha q^\delta}{q^2} \right). \quad (7.43)$$

Essa condição é consistente com a transversalidade do tensor de polarização do vácuo, o que garante a manutenção da simetria de calibre e com a condição de que

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Pi(q) = 0. \quad (7.44)$$

Para o objeto original, isso não é verdade mas, ao substituirmos $\Pi(q) \rightarrow \Pi^R(q)$, temos que $\Pi^R(q)$ satisfaz essa condição, acarretando na renormalização da constante de acoplamento. Podemos, então incluir um contratermo que resolva essa condição, possuindo a seguinte forma no espaço dos momentos:

$$S = -\frac{1}{2}\delta Z_A \int \tilde{A}^\mu(-q) (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \tilde{A}^\nu(q). \quad (7.45)$$

Esse termo adicional altera o propagador para

$$D^{-1\alpha\beta} = -q^2 g^{\alpha\beta} \rightarrow -q^2 g^{\alpha\beta} - \delta Z (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \quad (7.46)$$

Da equação (7.6), temos que

$$\tilde{D}_{\theta\varphi}^{-1} - \Pi_{\theta\varphi} = \tilde{\mathcal{D}}_{\theta\varphi}^{-1}, \quad (7.47)$$

deste modo, o propagador inverso será

$$-q^2 g^{\alpha\beta} - (\Pi(q) + \delta Z) (q^2 g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta) = \tilde{\mathcal{D}}_{\theta\varphi}^{-1}. \quad (7.48)$$

Essa alteração corresponde a fazermos

$$\Pi(q) \rightarrow \Pi(q) + \delta Z_A. \quad (7.49)$$

Teremos $\Pi(0) = 0$, se $\delta Z_A = -\frac{e^2}{12\pi^2} \Delta_\epsilon$. De fato, um contratermo desse tipo pode ser gerado por uma renormalização do campo original. Consideremos a lagrangiana

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} F^{B\mu\nu} F_{B\nu\mu}. \quad (7.50)$$

Reescreveremos o campo nu em termos do renormalizado $A^B = \sqrt{Z_A} A^R$. Teremos:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} Z_A F^{R\mu\nu} F_{R\nu\mu}. \quad (7.51)$$

Podemos simplesmente reescrever:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} F^{R\mu\nu} F_{R\nu\mu} - \frac{1}{4} (Z_A - 1) F^{R\mu\nu} F_{R\nu\mu}. \quad (7.52)$$

O termo adicional, é equivalente no espaço dos momentos ao termo (7.45), de onde identificamos

$$(Z_A - 1) = \delta Z_A = -\frac{e^2}{12\pi^2} \Delta_\epsilon. \quad (7.53)$$

Sendo esta a constante de renormalização $Z_A = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \Delta_\epsilon$. Uma série de outros diagramas da QED estão associados a objetos que exibem a mesma dificuldade que o tensor de polarização do vácuo. Esses objetos, podem ser encontrados ao calcularmos a auto-energia do elétron e as correções ao vértice. Em todos os casos, podemos utilizar uma lagrangiana efetiva como a (7.52) para resolvermos o problema das possíveis divergências que restam após o uso da regularização e, fixar os parâmetros da teoria a aqueles que são realmente observados.

8 Violação de Lorentz e o acoplamento não mínimo

Até aqui, fizemos uma revisão da literatura visando apresentar o ferramental que será devidamente generalizado no desenvolvimento original desta tese. A partir daqui, trataremos de modelos que consideram a possibilidade de violação da simetria de Lorentz, sendo um deles o modelo padrão estendido. O modelo padrão estendido (SME) [5, 6, 7, 4], tem sido o cenário usual para investigações da violação da simetria de Lorentz em sistemas físicos. O SME é o cenário natural de estudo das propriedades de sistemas físicos com violação da simetria de Lorentz, dado que inclui termos em todos os setores do modelo padrão que possibilitam a violação desta simetria. Neste contexto, os coeficientes de violação da simetria de Lorentz (LV) são gerados como valores esperados no vácuo de tensores definidos em uma alta escala de energia. O SME é então, uma teoria efetiva, que permite investigar os efeitos da violação da simetria de Lorentz, tendo inspirado uma grande quantidade de investigações no últimos anos. Essas investigações englobam: sistemas envolvendo férmions e correções radiativas [8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18] e testes de violação de CPT [12], tendo o setor eletromagnético sido investigado tanto em seus coeficientes de natureza CPT-ímpar [20, 21, 22, 28], como também CPT-par [23, 25, 26]. Recentemente, alguns estudos foram direcionados a termos não normalizáveis, associados a operadores envolvendo termos de altas derivadas e, reportados com grande interesse em [27, 53, 54, 55, 56]. Considerando uma QED estendida advinda do modelo padrão estendido, o setor fermiônico e fotônico é posto em interação utilizando a prescrição de acoplamento mínimo, sendo que, nesta versão, temos que os propagadores livres e os vértice da teoria são alterados. É possível mostrar que nem todos os termos de violação propostos de maneira genérica, proporcionam real violação da simetria de Lorentz, sendo alguns deles eliminados por uma redefinição dos campos ou por uma mudança no sistema de coordenadas [57]. Há algum tempo, foi proposta uma nova maneira de estender a QED usual para que comporte a violação da simetria de Lorentz. Nesta nova abordagem, os férmions e os fótons são postos a interagir, utilizando uma prescrição de acoplamento não

mínimo [29].

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{\lambda}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}v^\lambda F^{\alpha\beta}, \quad (8.1)$$

O termo adicional encontrado na derivada covariante é responsável por violação da simetria de Lorentz e também da simetria CPT, no contexto da equação de Dirac, $(i\gamma^\mu D_\mu - m_e)\psi = 0$, onde o spinor do férmion é ψ , enquanto $v^\mu = (v^0, \vec{v})$ é um quadri vetor de fundo fixo, e λ é a constante que mede a intensidade deste novo acoplamento, proporciona uma série de novos efeitos, tais como a geração de termos tipo éter finito [13]. Análises do limite não relativístico, revelam que esse acoplamento propicia um momento magnético $(\lambda\vec{v})$ para partículas não carregadas [29], ao mesmo tempo que uma fase de Aharonov-Casher em sua função de onda. Foi também mostrado, que esse acoplamento não mínimo induz o surgimento de fases topológicas em contextos mais gerais [31]. Seus efeitos sobre o espectro do átomo de hidrogênio foram estudados na referência [32], enquanto que, sua influência na dinâmica do problema de Aharonov-Bohm-Casher, foi analisado em [33]. Recentemente, este acoplamento foi considerado no contexto do espalhamento de férmions no regime ultra relativístico. Neste trabalho, foi considerado tanto o acoplamento não mínimo vetorial apresentado no início desta seção, como também um acoplamento não mínimo pseudo-vetorial, representado pela derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{\lambda}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\gamma_5 v^\lambda F^{\alpha\beta}. \quad (8.2)$$

Nos dois casos, as correções correspondentes à seção de choque proporcionaram o estabelecimento de um limite superior de 1 em 10^{12} para a magnitude da interação [34]. Outro trabalho recente neste contexto foi desenvolvido envolvendo aspectos relacionados ao efeito Hall e aos níveis de Landau [35]. Versões generalizadas do acoplamento não mínimo têm sido propostas para examinar a indução de um grande número de tipos de fases topológicas e geométricas. [36].

No tópico seguinte, nós apresentaremos um novo acoplamento não mínimo, que se diferencia dos anteriores por violar apenas a simetria de Lorentz, sendo de caráter CPT-par. Este novo acoplamento, conectando os campos fermiônicos e de gauge, será estudado inicialmente no contexto da equação de Dirac. Considerando o limite não relativístico da equação de Dirac modificada, nós calculamos explicitamente as novas contribuições ao hamiltoniano não relativístico. Esses novos termos, implicam correções diretas ao momento magnético, um tipo de efeito Zeeman elétrico ao espectro atômico e uma espécie de acoplamento tipo Rashba. Esses efeitos são, então, usados para impor limites superiores

à magnitude dos coeficientes de violação de Lorentz, que serão inferiores a 1 parte em 10^{16} [58].

Em seções posteriores, também consideraremos o contexto do espalhamento de férmions no regime ultra relativístico, onde no cálculo da seção de choque em nível de árvore teremos que adicionar a nova interação ao vértice usual da teoria. Através dos resultados obtidos, também podemos impor limites superiores para os coeficientes de LV [59].

Ainda no contexto deste acoplamento não mínimo, serão estudadas algumas contribuições a um loop deste acoplamento. Será calculado o tensor de polarização do vácuo. Por causa da natureza especial do acoplamento entre o campo fermiônico e o campo de gauge neste modelo, a constante de acoplamento adicional possuirá dimensão de massa negativa. É esperado então, que as integrais de loop calculadas sejam mais divergentes que as usuais. Devido às simetrias impostas ao tensor de fundo e à simetria de gauge, as integrais possuirão apenas divergência logarítmica, assim como na QED usual. Verifica-se, a partir da estrutura do tensor de polarização do vácuo, que uma nova interação deverá ser adicionada ao setor dos fótons para a possível renormalização a um loop do modelo. Esta interação é o bem conhecido termo CPT-par do modelo padrão estendido [60].

9 Um acoplamento não mínimo CPT-par

Nós consideraremos um acoplamento não mínimo, envolvendo férmions de Dirac e o campo eletromagnético no contexto da equação de Dirac,

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m_e)\psi^{(e)} = 0, \quad (9.1)$$

onde $\psi^{(e)}$ é o spinor do elétron, interpretado como função de onda de quatro componentes e a derivada covariante com acoplamento não mínimo será:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{\lambda^{(e)}}{2} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}. \quad (9.2)$$

onde, para nossos propósitos, o tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ possuirá a mesma estrutura tensorial que o termo CPT-par $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ da eletrodinâmica do SME, enquanto que $\lambda^{(e)}$ é a constante de acoplamento não mínimo do elétron. O tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ possuirá, ao todo, 19 componentes independentes, exatamente como $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, cujas propriedades e efeitos foram examinados em [23]. O tensor de fundo $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann, $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (K_F)_{\alpha\beta\mu\nu}$, $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(K_F)_{\nu\mu\alpha\beta}$, $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(K_F)_{\mu\nu\beta\alpha}$ e duplo traço nulo $(K_F)_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} = 0$, além de satisfazer a identidade de Bianchi $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} + (K_F)_{\mu\beta\nu\alpha} + (K_F)_{\mu\alpha\beta\nu} = 0$, implicando em um total de 19 componentes. Este tensor, pode ser reescrito em termos de quatro matrizes 3×3 κ_{DE} , κ_{DB} , κ_{HE} , κ_{HB} , definidas na referência [23] como:

$$\begin{aligned} (\kappa_{DE})_{ij} &= -2(K_F)_{0i0j}, \\ (\kappa_{HB})^{mn} &= \frac{1}{2}(K_F)_{ijkl} \varepsilon^{0ijm} \varepsilon^{0kln}, \\ (\kappa_{DB})_i{}^l &= (K_F)_{0ijk} \varepsilon^{0jkl} = -(\kappa_{HE})_i{}^l. \end{aligned} \quad (9.3)$$

As matrizes simétricas κ_{DE} , κ_{HB} , contém as componentes de paridade par e possuem juntas 11 componentes independentes, enquanto que as matrizes de traço nulo κ_{DB} , κ_{HE} , possuem juntas 8 componentes independentes, representando o setor de paridade ímpar do tensor $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. A equação de Dirac (9.1), pode ser escrita explicitamente como

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \frac{\lambda^{(e)}}{2} (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - m_e \right] \psi^{(e)} = 0, \quad (9.4)$$

onde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (9.5)$$

A lagrangiana relacionada ao elétron será

$$\mathcal{L}_{(e)} = \bar{\psi}^{(e)} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \frac{\lambda^{(e)}}{2} (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - m_e \right) \psi^{(e)}. \quad (9.6)$$

Um caminho fácil para ver que o termo de acoplamento não mínimo é de natureza CPT-par, é observar, que o mesmo, acopla objetos com a mesma quantidade de índices de Lorentz $\bar{\psi}^{(e)} \sigma^{\mu\nu} \psi^{(e)}$ e $F^{\alpha\beta}$, sendo ambos pares perante CPT. Outros acoplamentos não mínimos, encontrados na literatura, acoplam objetos com quantidade de índices de Lorentz diferentes, como $\bar{\psi}^{(e)} \gamma^\mu \psi^{(e)}$ e $F^{\alpha\beta}$ ou $\bar{\psi}^{(e)} \gamma_5 \gamma^\mu \psi^{(e)}$ e $F^{\alpha\beta}$ sendo o primeiro termo ímpar e, o segundo par, em cada caso. Em ambos os casos, o termo de interação gerado será ímpar perante CPT, diferentemente do proposto em (9.6), que é par. Usaremos a mesma parametrização (9.3) para o tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$, e obteremos:

$$(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 2i\alpha^i \left((\kappa_{DE})_{ij} E^j + (\kappa_{DB})_i{}^l B_l \right) + 2\Sigma^i \left((\kappa_{HE})_j{}^i E^j + (\kappa_{HB})^{ij} B_j \right). \quad (9.7)$$

Estes resultados são calculados de forma explícita na representação das matrizes- γ adotada como:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

Podemos fazer uso da seguinte notação para simplificarmos a expressão (9.7)

$$(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 2i\alpha^j (\mathbb{E}^j + \mathbb{B}^j) - 2\Sigma^j (\tilde{\mathbb{E}}^j + \tilde{\mathbb{B}}^j). \quad (9.9)$$

Onde nós introduzimos as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^k &= (\kappa_{DE})_{kj} E^j, & \mathbb{B}^k &= (\kappa_{DB})_{kj} B^j, \\ \tilde{\mathbb{E}}^k &= (\kappa_{HE})_{kq} E^q, & \tilde{\mathbb{B}}^k &= (\kappa_{HB})_{kp} B^p, \end{aligned} \quad (9.10)$$

No espaço dos momentos, fazemos a correspondência, $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$. A equação de Dirac correspondente se torna

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi^{(e)} &= [\alpha^i (p - eA)^i + eA_0 + m_e \gamma^0 \\ &- \lambda^{(e)} i\gamma^j (\mathbb{E}^j + \mathbb{B}^j) + \lambda^{(e)} \gamma^0 \Sigma^k (\tilde{\mathbb{E}}^k + \tilde{\mathbb{B}}^k)] \Psi^{(e)}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

9.1 Limite não relativístico

Para seguirmos com nossas investigações sobre esse acoplamento não mínimo, nós vamos tomar o limite não relativístico da equação de Dirac. Escrevendo o spinor ψ

em termos de suas componentes forte ϕ e fraca χ temos,

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

A equação de Dirac (9) se torna em um par de equações, acopladas em termos das duas componentes,

$$\begin{aligned} [E - eA_0 - m_e + LV1] \phi - [\sigma^i(p - eA)^i - LV2] \chi &= 0, \\ [\sigma^i(p - eA)^i + LV2] \phi - [E - eA_0 + m_e - LV1] \chi &= 0, \end{aligned} \quad (9.13)$$

com

$$\begin{aligned} LV1 &= -\lambda^{(e)} \sigma^k \left(\tilde{\mathbb{E}}^k + \tilde{\mathbb{B}}^k \right), \\ LV2 &= i\lambda^{(e)} \sigma^j \left(\mathbb{E}^j + \mathbb{B}^j \right). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Neste ponto, nós identificamos o momento canônico definido como se segue

$$\pi^i = (p - eA)^i. \quad (9.15)$$

No limite não relativístico, podemos escrever $E_{NR} = E - m_e$. Neste limite, $E_{NR} \ll m_e$ e a componente fraca se escreve em termos da componente forte da seguinte forma

$$\chi \simeq \frac{1}{[2m_e]} [\sigma^i \pi^i + LV2] \phi. \quad (9.16)$$

Substituindo na equação (9.13), nos resta

$$\begin{aligned} [E - eA_0 - m_e + LV1] \phi &= \\ &= \frac{1}{[2m_e]} [(\sigma^i \pi^i \cdot \pi) - LV2] [(\sigma^i \pi^i) + LV2] \phi. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Em primeira ordem, nos parâmetros de violação de Lorentz, o hamiltoniano não relativístico se escreve da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H^{(e)} &= \frac{1}{2m_e} \left[(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \right] + eA_0 + \lambda^{(e)} \sigma^i \left(\tilde{\mathbb{E}} + \tilde{\mathbb{B}} \right)^i \\ &\quad - \frac{\lambda^{(e)}}{m_e} (\mathbb{E} + \mathbb{B})^i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i + \frac{e\lambda^{(e)}}{m_e} (\mathbb{E} + \mathbb{B})^i (\vec{\sigma} \times \vec{A})^i \\ &\quad + \frac{\lambda^{(e)}}{2m_e} \left[\partial_i \mathbb{E}^i + \partial_i \mathbb{B}^i + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbb{E}) + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbb{B}) \right]. \end{aligned} \quad (9.18)$$

No caso de termos campos uniformes, o hamiltoniano se torna

$$\begin{aligned} H^{(e)} &= \frac{1}{2m_e} \left[(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \right] + eA_0 + \lambda^{(e)} \sigma^i \left(\tilde{\mathbb{E}} + \tilde{\mathbb{B}} \right)^i \\ &\quad - \frac{\lambda^{(e)}}{m_e} (\mathbb{E} + \mathbb{B})^i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i + \frac{e\lambda^{(e)}}{m_e} (\mathbb{E} + \mathbb{B})^i (\vec{\sigma} \times \vec{A})^i. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Este hamiltoniano induz uma série de novos efeitos. Notemos que o termo $(\mathbb{E})^i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i$ é uma generalização do acoplamento de Rashba $\alpha v^i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i$ [24], enquanto $\lambda^{(e)} \sigma^i (\tilde{\mathbb{B}})^i$, implica uma contribuição ao momento magnético anômalo do elétron. Outro exemplo é o termo $\lambda^{(e)} \sigma^i (\tilde{\mathbb{E}})^i$, que rende uma espécie de efeito Zeeman elétrico na total ausência de campo magnético.

9.1.1 Efeitos não relativísticos

Nesta seção, nós analisaremos alguns efeitos físicos induzidos pelos termos de correção encontrados em (9.18). Neste sentido, nós particularizaremos este hamiltoniano para algumas configurações especiais dos campos elétrico e magnético. Além disso, temos - inicialmente - particular interesse nos coeficientes que não são suprimidos pela massa do elétron que, no limite não relativístico, é considerada grande.

Nós começamos nossas discussões pela correção induzida ao espectro do átomo de hidrogênio. A fim de computarmos a contribuição associada ao termo $\lambda^{(e)}\sigma^i(\tilde{\mathbb{E}})^i$, envolvendo o operador de spin, é necessário trabalharmos explicitamente com as soluções do hamiltoniano não perturbado $|n, j, m_j, l, s\rangle$, que é adequada para a situação onde existe adição de momento angular ($J = L + S$) com n, j, m_j, l, s , sendo o conjunto de números quânticos associados ao problema. Neste caso, a correção à energia é dada da seguinte forma:

$$\Delta E = \lambda^{(e)}\langle n, j, m_j, l, s | \sigma^i(\tilde{\mathbb{E}})^i | n, j, m_j, l, s \rangle. \quad (9.20)$$

Agora, nós adotamos uma configuração em que \vec{S}_z está orientado na direção z, tal que

$$\sigma^i(\tilde{\mathbb{E}})^i = (\kappa_{HE})_{3j} \sigma_z E_j, \quad (9.21)$$

com E_j sendo as componentes do campo elétrico e $(\kappa_{HE})_{3j}$, as componentes não nulas do elemento de matriz (κ_{HE}) . Logo,

$$\Delta E = \lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3j} E_j \langle n, j, m_j, l, s | \sigma_z | n, j, m_j, l, s \rangle. \quad (9.22)$$

Para completarmos este cálculo, é necessário escrever as soluções na base de auto estados do operador de spin $|+\rangle$ e $|-\rangle$, de forma que temos a expansão para $j = l + \frac{1}{2}$

$$|n, j, m_j, l, s\rangle = \sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1}} |+\rangle |n, l, m_j - 1/2\rangle + \sqrt{\frac{l - m_j + 1/2}{2l + 1}} |-\rangle |n, l, m_j + 1/2\rangle, \quad (9.23)$$

o que nos fornece

$$\Delta E = 2\lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3i} E_i \frac{m_j}{2l + 1}. \quad (9.24)$$

Para o caso em que $j = l - 1/2$, teremos

$$|n, j, m_j, l, s\rangle = \sqrt{\frac{l - m_j + 1/2}{2l + 1}} |+\rangle |n, l, m_j - 1/2\rangle - \sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1}} |-\rangle |n, l, m_j + 1/2\rangle, \quad (9.25)$$

e, conseqüentemente, teremos

$$\Delta E = -2\lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3i} E_i \frac{m_j}{2l+1}, \quad (9.26)$$

onde teremos sinal positivo para $j = l + 1/2$ e negativo quando $j = l - 1/2$, respectivamente. A dependência em m_j , proporciona uma separação em $(2j + 1)$ linhas, representando um tipo de efeito Zeeman elétrico (devido à presença de um campo elétrico, que pode ser externo ou atômico). As correções da QED usual aos níveis do átomo de Hidrogênio são chamadas de Lamb shift [62]. Neste trabalho [63], essas correções ao nível de energia mais baixo, são calculados com um precisão melhor que 1kHz, que corresponde a um valor inferior a $10^{-11} eV$. No que diz respeito à possibilidade de limitarmos os coeficientes de LV a partir de (9.24), consideraremos que essa correção deve ser razoavelmente inferior a $10^{-10} eV$. Trabalhando com um campo elétrico atômico típico, cuja magnitude é dada em unidades naturais como sendo aproximadamente $\langle E \rangle = 1.2 \times 10^6 (eV)^2$ para o estado fundamental $1S_{1/2}$, temos então o seguinte limite:

$$\lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3i} E_i < 10^{-10} eV \quad (9.27)$$

O que nos fornece um limite superior

$$|\lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3i}| < 8 \times 10^{-17} (eV)^{-1}. \quad (9.28)$$

Outro efeito encontrado no hamiltoniano (9.18), está associado ao momento anômalo magnético do elétron. Um estudo feito sobre a influência da violação de Lorentz, neste contexto, é encontrado em [61]. O momento magnético do elétron é $\vec{\mu} = -g\mu\vec{s}$, com $\mu = e/2m_e$ e, para o elétron, $g = 2$ é seu fator giromagnético. O momento magnético anômalo do elétron é dado por $(g - 2)/2 = a$, com $a = 0.00115965218073$ [64], representando o desvio em relação ao caso usual. Neste caso, a interação magnética é $H' = -\mu(1 + a)\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$. Em concordância com as medidas muito precisas e os cálculos da QED pura [64], o fator de correção é determinado tal que o desvio entre o valor previsto, considerando-se apenas a QED pura, e o valor encontrado é menor que $\Delta a \leq 3 \cdot 10^{-11}$. No nosso caso, o hamiltoniano (9.18) propicia uma correção em nível de árvore em termos do coeficiente de LV ao fator giromagnético, que não pode ser maior que a . A interação magnética total em (9.18) é

$$\mu \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) + \lambda^{(e)} \sigma^i \left(\tilde{\mathbb{E}} + \tilde{\mathbb{B}} \right)^i. \quad (9.29)$$

Para um campo magnético na direção do eixo z e um spin polarizado também na direção z, a interação assume a forma

$$\mu \left[1 + \frac{\lambda^{(e)}}{\mu} (\kappa_{HB})_{33} \right] (\sigma_z B_0), \quad (9.30)$$

com $\frac{\lambda^{(e)}}{\mu} (\kappa_{HB})_{33}$ representando uma correção em nível de árvore decorrente do coeficiente de LV, que deve ser menor que a . Fazendo essa consideração, nós obtemos o seguinte limite superior:

$$|\lambda^{(e)} (\kappa_{HB})_{33}| \leq 9.7 \times 10^{-11} (eV)^{-1}, \quad (9.31)$$

onde nós usamos $\mu = 8.36 \times 10^{-8} (eV)^{-1}$.

9.2 Conclusões da seção

Nesta seção, nós introduzimos um novo acoplamento não-mínimo, responsável por violar a simetria de Lorentz, porém, sem violar a simetria CPT. Este acoplamento de caráter CPT-par, acopla o termo $\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$ de dimensão de massa 3 e o tensor $F^{\mu\nu}$ de dimensão de massa 2 através do tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$, análogo ao tensor $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ da eletrodinâmica CPT-par do modelo padrão estendido. Dado que este acoplamento é classificado como sendo de dimensão 5, será necessária a introdução de uma constante de acoplamento, cuja dimensão de massa será negativa. Ao considerarmos este acoplamento no contexto da equação de Dirac, o limite não relativístico nos revelou uma série de novas interações, como um tipo de efeito Zeeman elétrico, correções ao momento magnético anômalo do elétron e um acoplamento do tipo Rashba. Os efeitos mais sensíveis são aqueles associados a termos não suprimidos pela massa do elétron. A partir do efeito Zeeman elétrico, podemos estimar um bom limite superior $|\lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3j}| < 8 \times 10^{-17} (eV)^{-1}$, enquanto que as correções ao momento proporcionaram um limite superior em torno de 1 em 10^{10} . Este e outros resultados foram publicados na referência [58](R. Casana, M. M. Ferreira Jr, E. Passos, F.E.P. dos Santos, E.O. Silva . PRD 2013), onde é discutida a possibilidade de impormos limites aos outros coeficientes, utilizando as interações restantes.

10 Acoplamento não mínimo no espalhamento elétron-pósitron

Na seção anterior, nós estudamos a influência do acoplamento não mínimo no contexto da equação de Dirac. Ao tomarmos o limite não relativista, vimos seus efeitos à baixas energias, associados ao átomo de hidrogênio.

Como foi dito em seções anteriores, além das investigações realizadas na estrutura do SME, alguns outros trabalhos propuseram uma maneira alternativa para investigar violação da simetria de Lorentz fora deste quadro mais amplo. Alguns deles, envolveram acoplamentos não mínimos, que modificam o vértice de interação entre os férmions e os fótons. Acoplamentos CPT-ímpar, onde adicionamos à derivada covariante termos como $gv_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ e $g\gamma_5 b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$, foram considerados há algum tempo, no contexto da equação de Dirac, com interessantes consequências no limite não relativístico, envolvendo fases topológicas [29], [30, 31] e correções ao espectro do átomo de hidrogênio [32]. Tais acoplamentos, também mostraram ter conexão e implicações com o problema de Aharonov-Bohm-Casher [33] e, mais recentemente, para investigar a geração de fases topológicas e geométricas [36].

Estudos teóricos sobre o cálculo de seções de choque, na presença de termos de violação de Lorentz, foram realizados por alguns autores [11], procurando elucidar o procedimento para que se possa calcular seções de choque para processos de espalhamentos gerais. Recentemente, alguns autores desenvolveram um estudo sobre o espalhamento Bhabha [34]. A partir da seção de choque obtida e, em comparação com alguns dados disponíveis sobre tal espalhamento [37], foi possível impor um limite superior $|gv_\mu| \leq 10^{-12} (eV)^{-1}$.

Nesta seção, nós vamos considerar um bem conhecido processo da eletrodinâmica quântica, o espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ na presença do novo acoplamento não mínimo [58], envolvendo férmions e o setor de gauge. Primeiramente, nós calculamos as amplitudes de espalhamento considerando novos diagramas de Feynman, em decorrência do novo vértice da teoria. Para que possamos calcular a seção de choque total, começamos escrevendo as amplitudes quadráticas do espalhamento não polarizado usando

o truque de Casimir. Por simplicidade, nos atentamos aos subsectores de paridade par e ímpar do tensor de fundo. Ao final, seguindo a abordagem das referências [34] e [37], nós comparamos a seção de choque obtida com os dados experimentais, ajustando um limite para a magnitude do novo acoplamento para algo da ordem de $|\lambda(K_F)| \leq 10^{-12} (eV)^{-1}$.

10.1 Modelo teórico para o cálculo do espalhamento

Nós estamos interessados em analisar aspectos da eletrodinâmica modificada, onde a lagrangiana dos férmions é escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_\psi = \psi(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (10.1)$$

Onde a derivada covariante usual é suplementada pelo termo CPT-par, de acoplamento não mínimo, tal que,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{\lambda}{2} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (10.2)$$

onde $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ é um tensor de fundo análogo ao tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ do setor de gauge do SME. Usando as simetrias do tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ na lagrangiana (10.1), nós obtemos

$$\mathcal{L}_\psi = \psi \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - m \right) \psi. \quad (10.3)$$

O novo acoplamento representado por $(\lambda K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$, possui dimensão de massa $[\lambda K_{\sigma F}] = -1$, o que leva a uma teoria não renormalizável por contagem de potência. Esse aspecto não representa nenhum problema nesta investigação, dado que estamos interessados em analisar o espalhamento em nível de árvore.

Agora, nós apresentamos a lagrangiana da QED modificada,

$$\mathcal{L}_{\text{modQED}} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_I^{\text{new}}, \quad (10.4)$$

onde \mathcal{L}_{QED} é a lagrangiana usual da QED e, $\mathcal{L}_I^{\text{new}}$, representa a nova integração produzida pelo termo de acoplamento não mínimo, a ser considerada

$$\mathcal{L}_I^{\text{new}} = \frac{\lambda}{2} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F^{\alpha\beta}. \quad (10.5)$$

A teoria representada pela lagrangiana (10.1) possui, além do vértice usual $\bullet \rightarrow -ie\gamma^\mu$, um vértice adicional associado à LV, representado por

$$\times \rightarrow i\lambda V_\beta = \lambda (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} q^\alpha, \quad (10.6)$$

no espaço dos momentos, sendo q^α o momento transferido.

Nós estamos interessados em analisar como o espalhamento elétron-pósitron, $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, é alterado pelo novo vértice. Este processo pode ser descrito pelos seguintes diagramas de Feynman de nível de árvore (Figura 10.1):

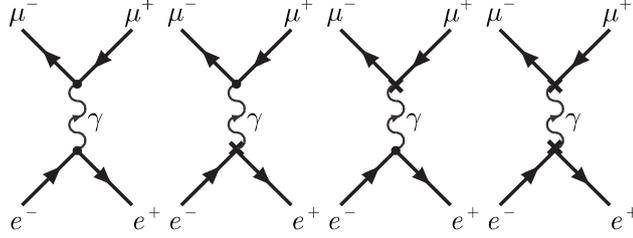


Figura 10.1:

Para isso, nós usaremos a seguinte parametrização:

$$(K_{\sigma F})^{\lambda\nu\delta\rho} = \frac{1}{2} [g^{\lambda\delta} \kappa^{\nu\rho} - g^{\nu\delta} \kappa^{\lambda\rho} + g^{\nu\rho} \kappa^{\lambda\delta} - g^{\lambda\rho} \kappa^{\nu\delta}]. \quad (10.7)$$

Que é conhecida por representar as 9 componentes não birrefringentes do tensor (K_F) do SME, onde $\kappa^{\mu\nu} = (K_F)_\alpha^{\mu\alpha\nu}$ é uma matriz simétrica de traço nulo. Em nosso caso,

$$\kappa^{\mu\nu} = (K_{\sigma F})_\alpha^{\mu\alpha\nu}. \quad (10.8)$$

Motivos adicionais para limitarmos nossos cálculos a essas componentes são dados na conclusão desta seção. Em termos desta parametrização, a lagrangiana de interação (10.5) é reescrita como

$$\mathcal{L}_I^{\text{new}} = \lambda \kappa_{\nu\beta} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_\mu^\beta, \quad (10.9)$$

que implica no seguinte vértice:

$$i\lambda V^\mu = \lambda q^\beta (\kappa^{\nu\mu} \sigma_{\beta\nu} - \kappa_{\nu\beta} \sigma^{\mu\nu}). \quad (10.10)$$

As componentes do tensor podem ser classificadas por suas propriedades de paridade. As componentes κ_{00} , κ_{ij} são de paridade par, enquanto κ_{0i} é de paridade ímpar.

10.2 A seção de choque

Nesta seção, nós calcularemos a seção de choque diferencial e seção de choque total para o processo,

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-, \quad (10.11)$$

onde as partículas rotuladas com momento e variável de spin como $e^+(p_1; s_1)$, $e^-(p_2; s_2)$, $\mu^+(p'_1; s'_1)$ e $\mu^-(p'_2; s'_2)$. Nós trabalharemos no referencial do centro de massa (CM), onde as variáveis de momento se tornam $p_1 = (E, \vec{p})$, $p_2 = (E, -\vec{p})$, $p'_1 = (E, \vec{p}')$ e $p'_2 = (E, -\vec{p}')$, com p_1, p_2 e p'_1, p'_2 representando os momentos das partículas incidentes e emergentes, respectivamente. O momento transferido ($q = p_1 + p_2$) é $q^\beta = (\sqrt{s}, 0)$, sendo \sqrt{s} a energia no CM. Neste referencial, também temos $|\vec{p}'|^2 = |\vec{p}|^2 - m_\mu^2 + m_e^2$, e

$$\not{p}_2 = \gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 = \gamma^0 \not{p} \gamma^0, \not{p}'_2 = \gamma^0 \not{p}'_1 \gamma^0 = \gamma^0 \not{p}'^0, \quad (10.12)$$

com m_μ, m_e representando a massa do múon e do elétron, respectivamente. As componentes do vértice são $V^0 = 0$ e

$$V^i = \sqrt{s} (\kappa_{00} \sigma^{0i} - \kappa_{ij} \sigma^{0j} - \kappa_{0j} \sigma^{ij}). \quad (10.13)$$

Cada parte do vértice pode ser classificada com relação à paridade

$$V^i = V_{+I}^i + V_{+A}^i + V_-^i, \quad (10.14)$$

onde $V_{+I}^i = \sqrt{s} \kappa_{00} \sigma^{0i}$ é a parte isotrópica de paridade par, $V_{+A}^i = -\sqrt{s} \kappa_{ij} \sigma^{0j}$ está relacionando a parte anisotrópica de paridade par, e $V_-^i = -\sqrt{s} \kappa_{0j} \sigma^{ij} = \sqrt{s} \kappa_{j0} \sigma^{ij}$ é a contribuição decorrente da componente de paridade ímpar.

Neste cenário, a seção de choque diferencial é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}'|}{(8\pi)^2 s |\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2. \quad (10.15)$$

A amplitude de espalhamento pode ser lida dos diagramas de Feynman, de modo que

$$\mathcal{M} = \sum_{a,b} [\bar{\nu}^{s_2}(p_2) \Gamma_{(a)}^\mu u^{s_1}(p_1)] \frac{1}{q^2} [\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \Gamma_{(b)\mu} \nu^{s'_2}(p'_2)], \quad (10.16)$$

onde

$$\Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu, \quad \Gamma_{(1)}^\mu = i\lambda V^\mu, \quad (10.17)$$

correspondendo ao vértice usual e ao novo vértice. Também temos que $u^{s_1}(p_1)$ e $\bar{\nu}^{s_2}(p_2)$, são os spinores de elétron e pósitron, enquanto $\bar{u}^{s'_1}(p'_1)$, $\nu^{s'_2}(p'_2)$, representam o múon e antimúon. Para avaliarmos a seção de choque do processo não polarizado, a quantidade relevante é $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$, definida como $|\mathcal{M}|^2 = \sum \mathcal{M} \mathcal{M}^*$, onde a soma é feita sobre os índices de spin s_1, s_2, s'_1, s'_2 . Esta amplitude quadrática, pode ser calculada utilizando-se o truque

de Casimir, baseado na relação de completeza e propriedades das matrizes gama. É sabido que

$$\mathcal{M}^* = \sum_{a,b} [\bar{u}^{s_1}(p_1) \bar{\Gamma}_{(a)}^\mu v^{s_2}(p_2)] \frac{1}{q^2} [\bar{\nu}^{s'_2}(p'_2) \bar{\Gamma}_{(b)\mu} u^{s'_1}(p'_1)]. \quad (10.18)$$

A amplitude quadrada é escrita como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4q^4} \sum \bar{v}^{s_2}(p_2) \Gamma_{(a)}^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu v^{s_2}(p_2) \times \\ &\times \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \Gamma_{(c)\mu} \nu^{s'_2}(p'_2) \bar{\nu}^{s'_2}(p'_2) \bar{\Gamma}_{(d)\nu} u^{s'_1}(p'_1). \end{aligned} \quad (10.19)$$

Onde $\bar{\Gamma}_{(i)}^\mu = \gamma^0 \Gamma_{(i)}^{\mu\dagger} \gamma^0$, e a soma é feita sobre os índices de spin e sobre os índices a, b, c, d .

Usaremos a relação

$$\begin{aligned} &\bar{v}^{s_2}(p_2) \Gamma_{(a)}^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu v^{s_2}(p_2) \\ &= \text{tr}(\Gamma_{(a)}^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu v^{s_2}(p_2) \bar{v}^{s_2}(p_2)). \end{aligned} \quad (10.20)$$

A soma sobre os índices de spin nos fornece

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4q^4} L_T^{\mu\nu} (M_T)_{\mu\nu}, \quad (10.21)$$

onde

$$\begin{aligned} L_T^{\mu\nu} &= L_{(00)}^{\mu\nu} + L_{(01)}^{\mu\nu} + L_{(10)}^{\mu\nu} + L_{(11)}^{\mu\nu}, \\ M_T^{\mu\nu} &= M_{(00)}^{\mu\nu} + M_{(01)}^{\mu\nu} + M_{(10)}^{\mu\nu} + M_{(11)}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

com

$$\begin{aligned} L_{(ab)}^{\mu\nu} &= \text{tr}[\Gamma_{(a)}^\mu (\not{p}_1 + m_e) \bar{\Gamma}_{(a)}^\nu (\not{p}_2 - m_e)] \\ M_{(ab)\mu\nu} &= \text{tr}[\Gamma_{(a)\mu} (\not{p}'_2 - m_e) \bar{\Gamma}_{(a)\nu} (\not{p}'_1 + m_e)]. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Notemos que os índices latinos entre os parênteses (a, b) podem assumir somente dois valores, 0 ou 1, correspondendo ao vértice usual e o novo vértice não mínimo, propriamente definidos nas equações (10.17).

Em seguida, para facilitar nossos cálculos e melhor discutir nossos resultados, nós propomos a separação das contribuições vindas dos setores de paridade par e paridade ímpar.

Contribuições do setor de paridade ímpar

Para calcularmos as contribuições do setor de paridade ímpar à seção de choque, nós restringiremos o vértice (10.14) a

$$V_-^i = \sqrt{s} \sigma^{ij} \kappa_j, \quad (10.24)$$

onde $\kappa^i = (K_F)^{0jij}$. Usando as técnicas de traço de matrizes gama, e usando a identidade (10.12), podemos mostrar

$$L_{(01)}^{ij} = L_{(10)}^{ij} = M_{(01)}^{ij} = M_{(10)}^{ij} = 0. \quad (10.25)$$

Os termos não nulos dos tensores (10.23) são

$$\begin{aligned} L_{(00)}^{ij} &= e^2 \text{tr}[\gamma^i \not{p}_1 \gamma^j \not{p}_2 - m_e^2 \gamma^i \gamma^j], \\ L_{(11)}^{ij} &= \lambda^2 \text{tr}[V^i \not{p}_1 V^j \not{p}_2 - m_e^2 V^i V^j], \\ M_{(00)}^{ij} &= e^2 \text{tr}[\gamma^i \not{p}'_1 \gamma^j \not{p}'_2 - m_\mu^2 \gamma^i \gamma^j], \\ M_{(11)}^{ij} &= \lambda^2 \text{tr}[V^i \not{p}'_1 V^j \not{p}'_2 - m_\mu^2 V^i V^j]. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Enquanto que $L_{(ab)}^{0\mu} = L_{(ab)}^{\mu 0} = M_{(ab)}^{0\mu} = M_{(ab)}^{\mu 0} = 0$. Estes últimos termos, estão explicitamente representados da seguinte forma:

$$L_{(00)}^{ij} = e^2 (2s\delta^{ij} - 8p^i p^j), \quad M_{(00)}^{ij} = e^2 (2s\delta^{ij} - 8p'^i p'^j), \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} L_{(11)}^{ij} &= 8\lambda^2 s \varepsilon^{ikm} \varepsilon^j \ln p^n p^m k^k k^l, \\ M_{(11)}^{ij} &= 8\lambda^2 s \varepsilon^{ikm} \varepsilon^j \ln p'^n p'^m k^k k^l. \end{aligned} \quad (10.28)$$

A amplitude quadrática é

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4s^2} \left(L_{(00)}^{ij} M_{(00)}^{ij} + L_{(11)}^{ij} M_{(00)}^{ij} + L_{(00)}^{ij} M_{(11)}^{ij} + L_{(11)}^{ij} M_{(11)}^{ij} \right). \quad (10.29)$$

A seção de choque diferencial é obtida substituindo este resultado na equação (10.29) e na equação (10.15). A seção de choque total é obtida por integração,

$$\sigma = \frac{|\vec{p}'|}{(8\pi)^2 s |\vec{p}|} \int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega. \quad (10.30)$$

Tomando o vetor de fundo como fixo, nós integramos somente nas variáveis angulares das partículas espalhadas, de modo que

$$\begin{aligned} \int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega &= \frac{1}{4s^2} \left[L_{00}^{ij} \int M_{00}^{ij} d\Omega + L_{11}^{ij} \int M_{00}^{ij} d\Omega \right. \\ &\quad \left. + L_{00}^{ij} \int M_{11}^{ij} d\Omega + L_{11}^{ij} \int M_{11}^{ij} d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Essa integral proporciona

$$\begin{aligned} \int M_{(00)}^{ij} d\Omega &= \frac{16e^2}{3} (s + 2m_\mu^2) \pi \delta^{ij}, \\ \int M_{(11)}^{ij} d\Omega &= \frac{8\lambda^2}{3} \pi s (s - 4m_\mu^2) (\delta^{ij} |\vec{\kappa}|^2 - \kappa^i \kappa^j), \end{aligned} \quad (10.32)$$

onde foi usado $\int p'^i p'^j d\Omega = \frac{1}{3} (s - 4m_\mu^2) \pi \delta^{ij}$. No limite ultra relativístico, nós fazemos $m_e = m_\mu = 0$. A seção de choque resultante (até segunda ordem) é

$$\sigma = \sigma_{QED} \left[1 + \frac{1}{4e^2} \lambda^2 (3s |\vec{\kappa}|^2 - 4(\vec{p} \cdot \vec{\kappa})^2) \right]. \quad (10.33)$$

O resultado, pode ser particularizado de duas maneiras com relação à orientação do feixe em relação ao vetor de fundo κ^i : para o caso do feixe ser perpendicular ao vetor de fundo $\vec{\kappa} \cdot \vec{p} = 0$, nós temos

$$\sigma = \sigma_{QED} \left(1 + \frac{3s}{4e^2} \lambda^2 |\vec{\kappa}|^2 \right), \quad (10.34)$$

Já para o caso em que o feixe é paralelo ao vetor de fundo, $\vec{\kappa} \cdot \vec{p} = |\vec{\kappa}| \sqrt{s}/2$, a seção de choque total é dada por

$$\sigma = \sigma_{QED} \left(1 + \frac{s}{2e^2} \lambda^2 |\vec{\kappa}|^2 \right). \quad (10.35)$$

Os dados experimentais vindos de [37] para o processo de espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ nos fornecem

$$\frac{\sigma - \sigma_{QED}}{\sigma_{QED}} = \pm \frac{2s}{\Lambda_{\pm}^2}, \quad (10.36)$$

onde $\sqrt{s} = 29 \text{ GeV}$ e $\Lambda_+ = 170 \text{ GeV}$ com 95% de nível de confiança. Comparando (10.34) e (10.35) com (10.36), nós obtivemos o seguinte limite:

$$|\lambda \vec{\kappa}| < 3 \times 10^{-12} (\text{eV})^{-1}. \quad (10.37)$$

Contribuições de paridade

Nós começamos considerando a contribuição isotrópica, a qual está associada ao vértice $V_{+I}^i = \sqrt{s} \kappa_{00} \sigma^{0i}$. Neste caso, os elementos dos tensores (10.23) são

$$\begin{aligned} L_{(00)}^{\mu\nu} &= e^2 \text{tr}[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 - m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu], \\ L_{(01)}^{\mu\nu} &= ie \lambda \text{tr}[\gamma^\mu \not{p}_1 V_{+I}^\nu - \gamma^\mu V_{+I}^\nu \not{p}_2], \\ L_{(10)}^{\mu\nu} &= -ie \lambda \text{tr}[V_{+I}^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu - V_{+I}^\mu \gamma^\nu \not{p}_2], \\ L_{(11)}^{\mu\nu} &= \lambda^2 \text{tr}[V_{+I}^\mu \not{p}_1 V_{+I}^\nu \not{p}_2 - m_\mu^2 V_{+I}^\mu V_{+I}^\nu]. \end{aligned} \quad (10.38)$$

As componentes do tensor $M_{(ab)}^{\mu\nu}$, são escritas da mesma maneira, trocando p_1, p_2, m_e por p'_1, p'_2, m_μ . Neste caso,

$$L_{(ab)}^{0\mu} = L_{(ab)}^{\mu 0} = M_{(ab)}^{0\mu} = M_{(ab)}^{\mu 0} = 0, \quad (10.39)$$

restando as componentes não nulas dos tensores $L_{(ab)}^{ij}$, $M_{(ab)}^{ij}$, dadas por

$$\begin{aligned} L_{(01)}^{ij} &= L_{(01)}^{ij} = 4e \lambda \kappa_{00} s m_e \delta^{ij}, \\ M_{(01)}^{ij} &= M_{(01)}^{ij} = 4e \lambda \kappa_{00} s m_\mu \delta^{ij}, \\ L_{(11)}^{ij} &= 8s \lambda^2 (\kappa_{00})^2 (m_e^2 \delta^{ij} + p^i p^j), \\ M_{(11)}^{ij} &= 8s \lambda^2 (\kappa_{00})^2 (m_\mu^2 \delta^{ij} + p'^i p'^j). \end{aligned} \quad (10.40)$$

A amplitude quadrática se torna

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4s^2} \left(L_{(00)}^{ij} + 2L_{(01)}^{ij} + L_{(11)}^{ij} \right) \\ &\times \left(M_{(00)}^{ij} + 2M_{(01)}^{ij} + M_{(11)}^{ij} \right). \end{aligned} \quad (10.41)$$

Seguindo com as integrações e, tomando o limite ultra relativístico ($m_e = m_\mu = 0$), a seção de choque total (em segunda ordem) é

$$\sigma = \sigma_{QED} \left(1 + \frac{s}{e^2} |\lambda\kappa_{00}|^2 \right). \quad (10.42)$$

Comparando o resultado com (10.36), temos

$$|\lambda\kappa_{00}| < 2 \times 10^{-12} (eV)^{-1}. \quad (10.43)$$

Nós continuamos agora com a contribuição anisotrópica de paridade par, cujo vértice relacionado é $V_{+A}^i = -\sqrt{s}\kappa^{ij}\sigma^{0j}$. Tomaremos, desde o início, o limite ultra relativístico ($m_e = m_\mu = 0$). Os tensores (10.23) são reescritos como

$$\begin{aligned} L_{(00)}^{\mu\nu} &= e^2 tr[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2], \\ L_{(11)}^{\mu\nu} &= \lambda^2 tr[V_{+A}^\mu \not{p}_1 V_{+A}^\nu \not{p}_2], \end{aligned} \quad (10.44)$$

com as componentes do tensor $M_{(ab)}^{\mu\nu}$ lidas de maneira similar pela troca de p_1, p_2, m_e por p'_1, p'_2, m_μ , de onde temos explicitamente

$$\begin{aligned} L_{(ab)}^{0\mu} &= L_{(ab)}^{\mu 0} = M_{(ab)}^{0\mu} = M_{(ab)}^{\mu 0} = 0, \\ L_{(11)}^{ij} &= 8s\lambda^2 \kappa^{ik} \kappa^{jl} p^l p^k, \\ M_{(11)}^{ij} &= 8s\lambda^2 \kappa^{ik} \kappa^{jl} p'^l p'^k, \end{aligned} \quad (10.45)$$

implicando em

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4s^2} \left[L_{00}^{ij} M_{00}^{ij} + 8s (\kappa)^{ik} (\kappa)^{jl} \left(p^l p^k M_{00}^{ij} + L_{00}^{ij} p'^l p'^k \right) \right]. \quad (10.46)$$

Desenvolvendo a integração no ângulo sólido, alcançamos o resultado

$$\int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega = \frac{16\pi e^4}{3} \left[1 + \frac{\lambda^2}{4e^2} \left(s (\kappa^2)^{ii} + 4 (\kappa^{ij} p^j)^2 \right) \right], \quad (10.47)$$

onde $(\kappa^2)^{ii} = \kappa^{ij} \kappa^{ji}$. Escolhendo a direção do feixe, tal que $\kappa^{ij} p_j = 0^1$ e, inserindo na seção de choque, nós obtemos

$$\sigma = \sigma_{QED} \left(1 + \frac{\lambda^2 s}{4e^2} (\kappa^2)^{ii} \right), \quad (10.48)$$

¹Uma parametrização comum para a componente anisotrópica de paridade par é $\kappa^{ij} = l(u^i v^j + u^j v^i)$ com $u^i v^j = 0$.

implicando no seguinte limite superior:

$$|\lambda\kappa^{ij}| < 5 \times 10^{-12}(eV)^{-1}. \quad (10.49)$$

Notamos que, o limite superior sobre os parâmetros de paridade par e ímpar, possuem a mesma ordem de grandeza.

10.3 Conclusões da seção

Nesta seção, nós estudamos a influência da violação da simetria de Lorentz através do acoplamento não mínimo CPT-par, especificamente sobre o processo de espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Esse novo acoplamento, implica a inserção de um novo vértice, aumentando o número de diagramas que representam o processo em nível de árvore. Nós efetuamos o cálculo das contribuições deste novo acoplamento à seção de choque do processo de espalhamento não polarizado usando o truque de Casimir. Este cálculo, foi desenvolvido com relativo detalhamento para os coeficientes de paridade par e ímpar no limite ultra relativístico ($m_e = m_\mu = 0$) e ao final, comparamos os resultados obtidos com os dados sobre o espalhamento encontrado na literatura [37]. Nós tivemos sucesso em impor o limite superior a um nível de $10^{-12}(eV)^{-1}$ sobre os coeficientes $\lambda(\kappa)_{\mu\nu}$, de violação de Lorentz, representando uma boa rota para restringir a intensidade deste novo acoplamento em um ambiente relativístico [59] (R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., R. V. Maluf, and F. E. P. dos Santos . PRD 2012). É importante mencionar que esses limites não podem ser comparados diretamente aos limites superiores impostos sobre o coeficiente CPT-par $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ do setor de gauge do SME encontrado nas referências [23], [25], que é uma quantidade adimensional. Os limites impostos aqui, foram sobre uma quantidade dimensional $\lambda(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$, representando um limite sobre o acoplamento CPT-par entre os férmions e o campo de gauge. Dado que utilizamos a parametrização não birrefringente do tensor $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, deixamos de considerar 10 das componentes do tensor $(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ também. O ponto é que, esses coeficientes, contribuem à seção de choque modificada também em segunda ordem, implicando os mesmos limites obtidos anteriormente. Por este motivo, nós podemos então estender os limites conseguidos para todas as suas componentes, de modo que $|\lambda(K_{\sigma F})| \leq 10^{-12}(eV)^{-1}$, sem a necessidade de mais cálculos.

Uma investigação interessante consiste na possível conexão entre este acopla-

mento não mínimo, que é de dimensão 5, e os termos de dimensão superior encontrados na referência [53], que discute termos de dimensão superior no setor fotônico. Em nível de árvore, este operador de dimensão 5 não está contido neste cenário [53]. A conexão começa a aparecer quando tomamos as correções radiativas geradas por este acoplamento não mínimo. De fato, a avaliação do tensor de polarização do vácuo a um loop do fóton, conduz a operadores de dimensão 4 e 6. O operador de dimensão 4 é exatamente como o termo CPT-par $(K_F)_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$. O operador de dimensão 6 é, em segunda ordem em $\lambda K_{\sigma F}$ e, pode ser englobado na referência [53]. O fato de ser possível a geração radiativa do operador de dimensão 4, provavelmente possibilita uso dos limites existentes sobre o termo CPT-par $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ para impor limites melhores sobre a magnitude da quantidade $\lambda (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Na seção seguinte, iremos proceder com a análise desta questão.

11 Tensor de polarização do vácuo

Durante as ultimas seções, nós temos investigado a influencia da violação da simetria de Lorentz em alguns sistemas físicos como o átomo de hidrogênio , onde foi tomado o limite não relativístico [58] e também no processo de espalhamento $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ em nível de árvore onde foi tomado o limite ultra relativístico [59] . Para isto, foi considerada a inserção de novos termos de interação (termos LV de acoplamento não mínimo) na lagrangiana. Esta abordagem, que difere da usual foi investigada em um estudo pioneiro encontrado na referência [29], onde foi proposta a inserção da violação de Lorentz através de um acoplamento não mínimo envolvendo férmions e o campo de gauge $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{\lambda}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}v^\lambda F^{\alpha\beta}$ no contexto da equação de Dirac. A constante λ que mede a intensidade do acoplamento, possui dimensão de massa negativa, $[\lambda] = mass^{-1}$. Este tipo não renormalizável de teoria, tem sido estudada em vários cenários distintos em nível de árvore [32, 33, 34, 35, 36]. Outra questão muito interessante que tem sido examinada na literatura, é a geração radiativa dos termos de violação de Lorentz pertencentes ao SME. Este tópico foi primeiramente encontrado no final dos anos 90 nas referencias [65], onde foi argumentado que o termo CPT-ímpar ou termo de Carroll-Field-Jackiw $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k_{AF})_\mu A_\nu F_{\rho\sigma}$, pertencente a eletrodinâmica do SME é radiativamente induzido pelo termo $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ do setor dos férmions. Este processo conduz, a um loop, ao tensor de polarização do vácuo, $\Pi^{\mu\nu} = \kappa \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha q_\beta$, cujo coeficiente κ depende da prescrição da regularização usada. Tal ambiguidade desencadeou uma grande polêmica sobre a possibilidade do termo de CFJ poder ser gerado ou não, dado que uma prescrição invariante de gauge, em princípio, proporcionaria $\kappa = 0$ [15, 66].

Outro desenvolvimento na geração radiativa, incluindo a indução da ação tipo Chern-Simons em uma extensão LV da QED não massiva, efeitos de temperatura finita e divisão tripla, são encontrados na referência [18].

Na referência [13] foi demonstrado que um termo de violação de Lorentz CPT-par tipo éter [14, 67], pode ser gerado propriamente quando o acoplamento adequado com o campo spinorial é considerado.

No primeiro trabalho da ref. [56] o primeiro termo de derivada superior (di-

mensão-5) CPT-ímpar da QED estendida proposta em [53] foi radiativamente induzido pelo termo envolvendo o coeficiente $g^{\alpha\mu\nu}$. A geração radiativa de outros termos de dimensão superior, incluindo-se o de Myers-Pospelov, foi conseguida no segundo trabalho da ref. [56], partindo de uma QED modificada por um acoplamento não mínimo CPT-ímpar da ref. [29]. Um estudo interessante sobre um modelo para QED também modificado por acoplamento não mínimo $\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\gamma^\mu b^\lambda F^{\alpha\beta}$ foi desenvolvido na ref. [16], onde foi mostrado que as correções quânticas a um loop ao propagador do fóton podem proporcionar dois termos de violação de Lorentz ao setor dos fótons: o termo CPT-ímpar usual de Carroll-Field-Jackiw e um termo CPT-par tipo éter $b_\alpha b_\mu F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$, primeiramente gerado em na primeira referência de ref. [13]. Este termo tipo éter descreve algumas cas componentes do termo CPT-par usual $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, mas não sua estrutura completa. Na referência [17], uma investigação similar foi desenvolvida com, considerando uma versão quiral deste acoplamento $\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\gamma_5\gamma^\mu b^\lambda F^{\alpha\beta}$, com resultados análogos. Novos termos gerados radiativamente foram recentemente encontrados na ref. [18]. Algumas pistas sobre a geração radiativa da parte não birrefringente do tensor CPT-par, $(K_F)^\rho{}_{\mu\rho\nu} = (c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})/2$, a partir do termo $c_{\mu\nu}$ setor dos férmions pode ser encontrado na referência [68]. Notemos entretanto, que as contribuições até aqui, geram somente uma parte do tensor (K_F) completo. Como previamente apontado nas seções anteriores, propomos um novo acoplamento não mínimo CPT-par de dimensão 5 acoplando o setor fermiônico e o campo de gauge representado pela derivada covariante modificada (9.2) e investigamos seus efeitos no limite não relativístico e também efeitos de um espalhamento em nível de árvore.

Nesta seção, nós vamos mostrar que o termo CPT-par da eletrodinâmica do SME pode ser gerado radiativamente em sua estrutura completa. Para isso, vamos utilizar a regularização dimensional e partir dos termos de interação. Em conclusão, nós discutiremos como esses resultados podem melhorar os limites previamente encontrados a magnitude do acoplamento do novo acoplamento

11.1 Ação efetiva

O modelo para QED que consideraremos, é o apresentado em (10.4). Primeiramente nós estamos interessados nas contribuições do campo fermiônico modificado com a interação de

acoplamento não mínimo, à ação efetiva do campo eletromagnético. O funcional gerador será

$$\mathcal{Z}(J, \bar{\eta}, \eta) = N \int D\psi D\bar{\psi} DA e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_I^{new} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (11.1)$$

onde \mathcal{L}_{QED} é dado em (3.3) e \mathcal{L}_I^{new} em (10.5). A contribuição completa do campo fermiônico à ação efetiva do campo de gauge é obtida integrando sobre o campo fermiônico na ausência de fontes externas

$$e^{i\Gamma_{eff}(A)} = N \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_I^{new})}. \quad (11.2)$$

Esta expressão pode ser posta em termos de um determinante funcional

$$e^{i\Gamma_{eff}(A)} = \frac{\det(i\cancel{\partial} - B - m)}{\det(i\cancel{\partial} - m)}, \quad (11.3)$$

onde o termo B é definido como

$$B = e\cancel{A} - \lambda(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta. \quad (11.4)$$

Nós estamos interessados na contribuição quadrática no campo de gauge vinda da equação (11.3), o que é equivalente às contribuições até segunda ordem em e e λ . Utilizando as propriedades dos determinantes e dos traços, podemos reescrever,

$$i\Gamma_{eff}(A) = \text{tr} \ln (\delta(x-y) - e(i\cancel{\partial}_x - m)^{-1} B(x) \delta(x-y)). \quad (11.5)$$

Vale ressaltar que o traço na expressão anterior é tomado no espaço das coordenadas e também sobre as matrizes de Dirac. Levando em conta que devemos expandir em e e λ , o termo (11.5) será reescrito até segunda ordem como:

$$i\Gamma_{eff}(A) = -\text{etr} \int d^4y S(y-y) B(y) - \frac{e^2}{2} \text{tr} \int d^4x d^4y S(x-y) B(y) S(y-x) B(x). \quad (11.6)$$

Para passarmos de (11.5) para (11.6) levamos em conta que o traço no espaço das coordenadas foi explicitado em termos das integrais e $(i\cancel{\partial}_x - m)^{-1} B(x) \delta(x-y) = S(x-y) B(y)$, onde $S(x)$ é a função de Green da equação de Dirac. O primeiro termo da expansão está associado a um diagrama do tipo tadpole e é possível mostrar que seu valor é nulo. Ficamos apenas com:

$$i\Gamma_{eff}(A) = -\frac{e^2}{2} \text{tr} \int d^4x d^4y S(x-y) B(y) S(y-x) B(x). \quad (11.7)$$

Podemos realizar esta integral no espaço dos momentos:

$$i\Gamma_{eff}(A) = -\frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \text{tr} \int d^4p d^4q \tilde{S}(p) \tilde{B}(q) \tilde{S}(p-q) \tilde{B}(-q), \quad (11.8)$$

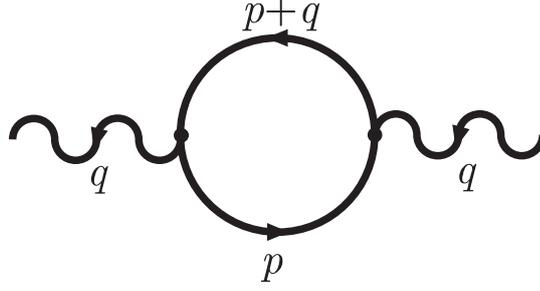


Figura 11.1: Digrama associado a polarização do vácuo

onde podemos explicitar $\tilde{B}(q) = \left(\gamma_\beta + i \frac{\lambda}{e} (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} q^\alpha \right) \tilde{A}^\beta(q) = \mathcal{V}_\beta(q) \tilde{A}^\beta(q)$. Com isso temos:

$$\Gamma_{eff}(A) = \frac{1}{2} \int d^4q \tilde{A}^\alpha(-q) \Pi_{\alpha\beta}(q) \tilde{A}^\beta(q), \quad (11.9)$$

onde

$$-i\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{tr} \left([-ie\mathcal{V}_\alpha(-q)] i\tilde{S}(p) [-ie\mathcal{V}_\beta(q)] i\tilde{S}(p-q) \right), \quad (11.10)$$

É o tensor de polarização do vácuo, diagrameticamente representado na Figura 11.1.

11.2 Polarização do vácuo a um loop

A fim de calcularmos as correções a um loop associadas ao tensor de polarização do vácuo, utilizaremos uma série de procedimentos, alguns destes já implementados no cálculo de (7.26). O primeiro destes procedimentos é a utilização da parametrização Feynman. Explicitando os propagadores no espaço dos momentos temos.

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{tr} \left(\frac{\mathcal{V}_\alpha(-q) (\not{p} + m) \mathcal{V}_\beta(q) (\not{p} - \not{q} + m)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon) ((p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right). \quad (11.11)$$

Fazendo uso da parametrização de Feynman,

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 du \int d^4p \text{tr} \left(\frac{\mathcal{V}_\alpha(-q) (\not{p} + m) \mathcal{V}_\beta(q) (\not{p} - \not{q} + m)}{((p-qu)^2 + (1-u)q^2u - m^2 + i\varepsilon)^2} \right). \quad (11.12)$$

Podemos transladar o momento $p \rightarrow p + qu$ e simplificar o denominador

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 du \int d^4p \text{tr} \left(\frac{\mathcal{V}_\alpha(-q) (\not{p} + \not{q}u + m) \mathcal{V}_\beta(q) (p - (1-u)\not{q} + m)}{(p^2 + (1-u)q^2u - m^2 + i\varepsilon)^2} \right). \quad (11.13)$$

Nós iremos reescrever a expressão (11.13) como uma soma:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \sum_{(a,b)} \Pi_{(a,b)}^{\mu\nu}(q), \quad (11.14)$$

onde $\Pi_{(a,b)}^{\mu\nu}(q)$ é identificado como

$$\Pi_{(a,b)}^{\mu\nu}(q) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 du \int d^4p \frac{N_{(a,b)}^{\mu\nu}}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2}. \quad (11.15)$$

Esta expressão é obtida considerando que o numerador é uma função par tal que $N_{(a,b)}^{\mu\nu}$ é

$$N_{(a,b)}^{\mu\nu} = \text{tr} \left[\mathcal{V}_{(a)}^\mu(-q)(\not{p}) \mathcal{V}_{(b)}^\nu(q)(\not{p}) + \mathcal{V}_{(a)}^\mu(-q)(\not{p}u + m) \mathcal{V}_{(b)}^\nu(q)(m - (1-u)\not{p}) \right], \quad (11.16)$$

com $(a,b) = 0$ ou 1 , representando respectivamente o vértice usual e modificado,

$$-ie\mathcal{V}_{(0)\beta}(q) = -ie\gamma_\beta, \quad -ie\mathcal{V}_{(1)\beta}(q) = \lambda(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} q^\alpha. \quad (11.17)$$

A integral em (11.15) é quadraticamente divergente por contagem de potências e requer alguma técnica de regularização. Em nosso caso, iremos utilizar regularização dimensional. Em nossa notação, $\Pi_{(0,0)}^{\mu\nu}$, representa a contribuição usual ao tensor de polarização do vácuo. As contribuições $\Pi_{(0,1)}^{\mu\nu}$, $\Pi_{(1,0)}^{\mu\nu}$, representam as contribuições em primeira ordem no parâmetro λ enquanto que $\Pi_{(1,1)}^{\mu\nu}$ é de segunda ordem. Nós iremos calcular os termos $\Pi_{(0,1)}^{\mu\nu}$, $\Pi_{(1,0)}^{\mu\nu}$. Não é muito difícil verificar que $\Pi_{(0,1)}^{\mu\nu} = \Pi_{(1,0)}^{\mu\nu}$, então nós iremos calcular apenas o primeira delas. A integral associada será

$$\Pi_{(a,b)}^{\mu\nu}(q) = \frac{ie^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 du \int d^Dp \frac{N_{(a,b)}^{\mu\nu}}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2}, \quad (11.18)$$

E temos

$$N_{(0,1)}^{\mu\nu} = -\frac{8\lambda m}{e} (K_{\sigma F})^{\mu\alpha\nu\beta} q_\alpha q_\beta, \quad (11.19)$$

onde foram consideradas as técnicas de traço de matrizes gama. Ficamos com

$$\Pi_{(0,1)}^{\mu\nu}(q) = -i8e\lambda m (K_F)^{\mu\alpha\nu\beta} q_\alpha q_\beta \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 du \int d^Dp \frac{1}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2}. \quad (11.20)$$

A integral D dimensional possui como resultado

$$\frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dp \frac{1}{(p^2 - C + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right) - \gamma + O(\varepsilon) \right). \quad (11.21)$$

Substituindo esse resultado e integrando em u, temos:

$$\Pi_{(0,1)}^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2\pi^2} e\lambda m (K_{\sigma F})^{\mu\alpha\nu\beta} q_\alpha q_\beta \left(\Delta_\varepsilon - g \left(\frac{q^2}{4m^2} \right) \right), \quad (11.22)$$

em termos da função $g(x) = \int_0^1 du \ln(1 - 4xu(1 - u))$ que tem um comportamento similar a função $f(x)$ definida anteriormente (Figura 11.2).

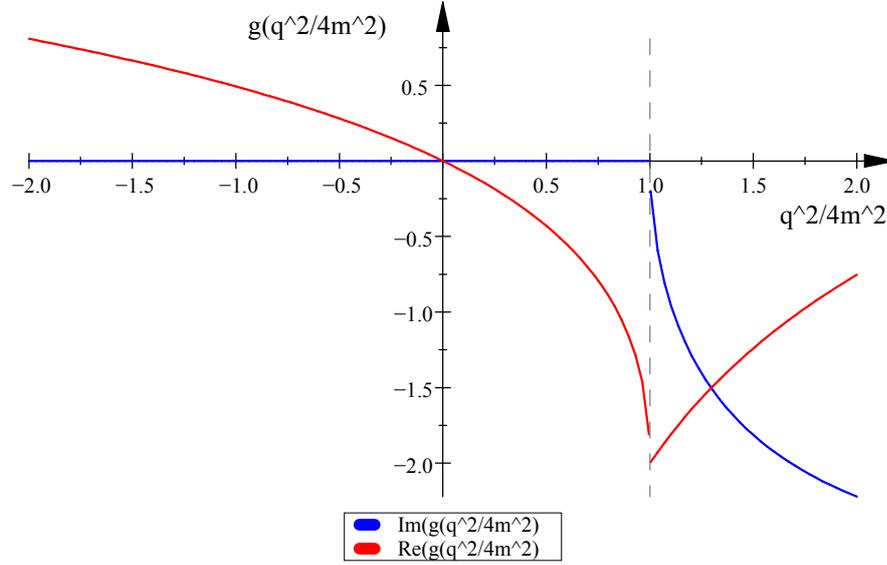


Figura 11.2: Gráfico da função $g(x)$

Inserindo a última expressão na ação efetiva, alcançamos o resultado :

$$\Gamma_{eff}(A) = \frac{1}{2\pi^2} e\lambda m \Delta_\varepsilon \int d^4 q \tilde{A}_\mu(-q) (K_{\sigma F})^{\mu\alpha\nu\beta} q_\alpha q_\beta \tilde{A}_\nu(q) + \text{contribuições finitas.} \quad (11.23)$$

Este resultado revela que uma nova interação é gerada no setor dos fótons. De fato, para cancelar as contribuições divergentes, um termo como $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$, que é termo CPT-par do setor de gauge SME, precisa ser posto na lagrangiana original. Vemos que este é um termo permitido, pois embora não seja invariante de Lorentz é invariante de gauge. Precisamos então, que nossa lagrangiana possua os termos

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}^R F^{R\mu\nu} F^{R\alpha\beta} - \frac{1}{4} \delta Z (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}^R F^{R\mu\nu} F^{R\alpha\beta} \quad (11.24)$$

O contra termo adicional é equivalente no espaço dos momentos ao termo divergente em (11.23), de onde identificamos que a contribuição divergente do tensor de polarização do vácuo será cancelada se

$$\delta Z (K_F)^{R\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2\pi^2} e\lambda m \Delta_\varepsilon (K_{\sigma F})^{\mu\alpha\nu\beta} \quad (11.25)$$

Isso será possível se tomarmos $(K_F)^{R\mu\alpha\nu\beta} = ce\lambda m (K_{\sigma F})^{\mu\alpha\nu\beta}$, sendo c uma constante adimensional e

$$\delta Z = \frac{1}{2\pi^2 c} \Delta_\varepsilon, \quad (11.26)$$

onde assumimos para fins de análise que todas as componentes do tensor $(K_F)^{R\mu\alpha\nu\beta}$ renormalizam da mesma forma. Dado que temos os limites muito restritivos $(K_F) \leq 10^{-17}$, podemos por hipótese considerar $c \sim 1$ o que leva a um novo limite melhor que

$$\lambda (K_{\sigma F})^{\mu\alpha\nu\beta} \leq 10^{-21} eV. \quad (11.27)$$

Outra maneira de tratarmos o termo divergente pode ser feito adotando-se um corte, onde trocamos as integrais $\int_0^\infty \rightarrow \int_0^\Lambda$ e Λ é um parâmetro de corte ultravioleta. Neste cenário, fazemos também a correspondência ($\Delta_\varepsilon \rightarrow \ln(\Lambda^2/m^2)$). Assim, o termo gerado se torna

$$\frac{me\lambda}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}. \quad (11.28)$$

Se tomarmos o cutoff infinito, estamos gerando um termo CPT par infinito, o que está em contra-arcordo com a experiência $|K_F| < 10^{-17}$.

Se tomarmos um cutoff da ordem de ($\sim \text{GeV}$) e confrontarmos com os nossos bounds recentes ($|\lambda K_{\sigma F}| < 10^{-12} eV^{-1}$), devemos ter:

$$\left| \frac{me\lambda}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} \right| < 3 \times 10^{-8} \quad (11.29)$$

Este último resultado, embora não negue o valor experimental, não está em total acordo. Também podemos observar que este resultado varia lentamente com o corte (escala logarítmica), o que nos leva a crer que um bound mais ajustado para λK_F deveria ser pelo menos 10^{-9} menor, o que nos leva novamente a algo em torno de $|\lambda K_{\sigma F}| < 10^{-21} eV^{-1}$. Para confirmar esta hipótese, é necessário considerar toda renormalização da teoria a um loop, trabalho este que já está em andamento. Por fim, a partir da equação (11.22), podemos mostrar explicitamente que o tensor de polarização do vácuo é um objeto transverso.

$$q_\mu \Pi_{(0,1)}^{\mu\nu}(q) = 0 \quad (11.30)$$

Sendo preservada a invariância de gauge. As contribuições vindas de $\Pi_{(1,1)}^{\mu\nu}(q)$ também possuem essa propriedade e suas contribuições divergentes induzirão operadores de dimensão 6 no setor dos fótons. Esse resultado pode ser encontrado em [60].

11.3 Conclusão da seção

Nesta seção nós estudamos as contribuições à ação efetiva do campo eletromagnético induzidas pelo acoplamento não mínimo de dimensão 5 $\lambda (K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$.

Focamos especialmente nos termos quadráticos gerados a um loop. Como principal resultado, verificamos que tais contribuições geram o termo CPT-par da eletrodinâmica do modelo padrão estendido $(K_F)_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$. [60] (R. Casana, M. M. Ferreira Jr, R.V. Maluf, F.E.P. dos Santos, PLB 2013) Nossas análises mostraram que, em primeira ordem no parâmetro de LV, existe uma conexão entre o tensor de polarização do vácuo e termo CPT-par do SME, como apresentado em (11.23). Isto implica que a eletrodinâmica de Maxwell deve ser estendida para conter esta nova interação regida pela densidade lagrangiana $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$. Como uma consequência, nós podemos propor o uso da mesma fenomenologia usada para limitar o tensor (K_F) com limites muito fortes [23, 25, 26, 69] para impormos melhores limites sobre a magnitude da quantidade $\lambda(K_{\sigma F})_{\mu\nu\alpha\beta}$ em pelo menos quatro ordens de grandeza. As componentes associadas aos termos não birrefringentes terão seus limites melhorados para $|\lambda(K_{\sigma F})| < 10^{-21} (\text{eV})^{-1}$ associado ao correspondente acoplamento não mínimo entre o elétron e o fóton. Um argumento similar pode ser usado para estimar os limites existentes sobre as componentes birrefringentes $|K_F| < 10^{-37}$, o que nos leva a $|\lambda(K_{\sigma F})| < 10^{-41} (\text{eV})^{-1}$ para este caso. Algumas questões adicionais ainda permanecem sob investigação. A renormalização deste modelo constitui uma sensível questão física para que possamos considerar esse modelo como uma alternativa teórica sólida. Para isto, devemos juntar ao cálculo do tensor de polarização do vácuo, a auto-energia do elétron, correções ao vértice e ainda a função de Green de quatro pontos. Como resultado preliminar temos

Auto-energia do elétron

$$\Sigma(p) = -\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\not{p} + \frac{e^2}{4\pi^2\varepsilon}m + \frac{e\lambda^T}{24\pi^2\varepsilon}\kappa_\nu^\nu p_\nu p^\nu - \frac{em\lambda^T}{8\pi^2\varepsilon}\kappa_{\beta\kappa}\gamma^\beta p^\kappa + \textit{finito} \quad (11.31)$$

Correção ao vértice

$$\begin{aligned} \Lambda^\rho(p', p) = & -\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\gamma^\rho - \frac{em\lambda^T}{8\pi^2\varepsilon}\kappa_\beta^\alpha\gamma^\beta + \frac{e\lambda^T}{24\pi^2\varepsilon}\kappa_\nu^\rho(p' + p)^\nu + \\ & -\frac{e\lambda^{NT}}{8\pi^2\varepsilon}i(K_{\sigma F}^{NT})^{\rho\nu\mu\alpha}\sigma_{\mu\alpha}(p - p')_\nu + \frac{e\lambda^T}{16\pi^2\varepsilon}i(K_{\sigma F}^T)^{\rho\nu\mu\alpha}\sigma_{\mu\alpha}(p - p')_\nu + \textit{finito} \end{aligned} \quad (11.32)$$

Função de quatro pontos

$$\Lambda^{\mu\nu}(p, p', q, q') = -\frac{\lambda^T e}{24\pi^2\varepsilon}\kappa^{\mu\nu} + \textit{finito} \quad (11.33)$$

Um grande numero de partes do SME são geradas nestas interações, como o termo $\bar{\psi}c^{\mu\nu}\gamma_\mu D_\nu\psi$ em que D_ν é a derivada covariante usual e $c^{\mu\nu}$ é a parte simétrica do tensor geral encontrado no SME, que é sua parte relevante.

Independentemente da renormalização a um loop deste modelo, ele pode ser considerado como uma teoria efetiva de baixa energia, uma vez que um corte ultravioleta for adotado. Em tal caso, as ordens mais altas se tornam irrelevantes e a não renormalizabilidade torna-se uma questão não essencial, o que justifica a proposta de tal modelo como uma opção teórica preliminar.

12 Método de Gupta-Bleuler e Eletrodinâmica CPT-par do modelo padrão estendido

Na seção anterior, foi estudada as correções a um loop à auto-energia do fóton. Como resultado principal, observamos que o termo CPT-par do (SME) [5, 6, 7], composto de um termo CPT-ímpar [19] e uma parte CPT-par [23, 53], foi gerado radiativamente. Estudos sobre o setor CPT-ímpar, envolvendo análises de consistência (causalidade, estabilidade e unitariedade) foram inicialmente desenvolvidos em [20, 28, 22]. Uma análise similar, agora fazendo referência ao setor CPT-par, baseado no cálculo do propagador de Feynman, foi desenvolvida para os setores de paridade par e paridade ímpar na referência [70]. O setor de paridade ímpar não birrefringente foi também investigado em referência [71], que contém uma ampla análise incluindo a base de vetores de polarização, acoplamento com os férmions e análise de alguns processos típicos da QED. Uma análise similar foi desenvolvida para o setor de gauge CPT-par birrefringente do SME [72]. Porém, para tornar possível o tratamento de divergências infravermelhas que assolam a QED mesmo quando estendida pelo termo CPT-par do SME, um termo de massa para fótons foi introduzido [27]. Aspectos da quantização e consistência também foram investigados no contexto das teorias com violação de Lorentz com operadores de dimensões superior [55]. A quantização covariante do setor fotônico CPT-par foi tratada na referência [73], onde foi discutida a quantização no contexto de um espaço de Hilbert com métrica indefinida. Também foi discutida a implementação do método de Gupta-Bleuler. A quantização covariante do setor de gauge CPT-par foi recentemente discutida nas refs. [74, 75], na presença de um termo massivo para o fóton a fim de evitar algumas incompatibilidades apontadas entre o método de Gupta-Bleuler e a condição de Lorenz, tornando o procedimento de quantização livre de contradições.

Nas seções seguintes, nós discutiremos uma maneira de estabelecer a quantização de Gupta-Bleuler para o setor fotônico de paridade par anisotrópico da eletrodinâmica estendida CPT-par do SME, na ausência de um termo massivo para o fóton.

Inicialmente nós voltaremos ao cenário usual, onde apresentaremos uma regra para justificar a quantização bem sucedida via método de Gupta-Bleuler da eletrodinâmica de Maxwell no gauge de Lorenz. Identificando a falha do método de Gupta-Bleuler no gauge de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, para a teoria sem massa LV, argumentamos que o método de Gupta-Bleuler pode ser aplicado de forma satisfatória, escolhendo uma condição Lorentz modificada, $\partial_\mu A^\mu + \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = 0$, onde $\kappa^{\mu\nu}$ representa a violação de Lorentz no setor de fótons. Fazendo uso de uma expansão em ondas planas para o campo de gauge, cujos vetores de polarização são determinados resolvendo um problema de autovalor, e da condição de Gupta-Bleuler, nós obtemos um hamiltoniano quântico positivo definido em termos de operadores de criação e aniquilação. A relação de comutação dos campos é escrita em termos de funções de Pauli-Jordan modificadas, revelando que a microcausalidade é preservada para parâmetros de violação de Lorentz suficientemente pequenos. Este procedimento funciona mesmo à segunda ordem (limite birrefringente)

12.1 QED estendida do SME para um lépton

Um único lépton pode ser descrito pela extensão mínima da QED do SME a partir da seguinte lagrangiana simplificada

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu + i c^{\mu\nu} \gamma_\nu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa_{\nu\rho} F^{\mu\nu} F_\mu{}^\rho, \quad (12.1)$$

que constitui uma peça interessante do SME. Aqui, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante usual. O tensor simétrico de traço nulo $\kappa^{\mu\nu} = (k_F)^{\mu\beta\nu}{}_\beta$, representa as 9 componentes não birrefringentes em primeira ordem do tensor CPT-par $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$, enquanto que o tensor simétrico $c^{\mu\nu}$ afeta o setor CPT-par na lagrangiana dos férmions. Este modelo está contido na extensão mínima da QED do modelo padrão estendido, representando a densidade lagrangiana de um único tipo de férmion, que é invariante de gauge renormalizável por contagem de potências [28, 68]. Na ausência de interação, os parâmetros de LV $\kappa^{\mu\nu}$ e $c^{\mu\nu}$ não implicam em violação de Lorentz real, dado que os mesmos podem ser removidos da teoria por uma redefinição dos campos ou absorvidos (totalmente ou em primeira ordem) por uma escolha adequada de sistema de coordenadas [8, 9, 10, 57, 76]. No entanto, na presença de interação, ambos os tensores ganham significado físico: se tentarmos eliminar $\kappa^{\mu\nu}$ do setor de fótons, este termo de violação de Lorentz ressurgirá modificando o tensor

$c^{\mu\nu}$ no setor dos férmions, e vice-versa. Na verdade, apenas a diferença $2c^{\mu\nu} - \kappa^{\mu\nu}$ pode ser fisicamente observada em uma das referencias de [23] e em [77, 78, 79].

Nosso propósito é então analisar a quantização canônica da eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo coeficiente κ^{ij} contido no tensor CPT-par $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ completo do SME sem a necessidade de adicionarmos um termo de massa para este fim. Sem perda de generalidade, vamos considerar que o setor fermiônico não é influenciado por coeficientes de LV.

12.2 Quantização de Gupta-Bleuler do eletromagnetismo LV e CPT-par

Consideraremos o seguinte eletromagnetismo CPT-par pertencente ao SME descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}F^{\mu\nu}F_{\mu}{}^{\rho}. \quad (12.2)$$

A equação de movimento para o campo de gauge é

$$(\square + \kappa^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}) A^{\beta} + \square\kappa^{\beta\rho}A_{\rho} - \kappa^{\beta\rho}\partial_{\rho}\partial_{\alpha}A^{\alpha} - \partial^{\beta}(\partial_{\alpha}A^{\alpha} + \kappa^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}A_{\rho}) = 0, \quad (12.3)$$

com o último termo, sugerindo uma condição fixação gauge generalizada

$$\partial_{\alpha}A^{\alpha} + \kappa^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}A_{\rho} = 0, \quad (12.4)$$

no lugar da condição habitual de Lorentz [27]. Assim, a equação de movimento é reduzida para

$$(\square + \kappa^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}) A^{\beta} + \square\kappa^{\beta\rho}A_{\rho} + \kappa^{\beta\sigma}\kappa^{\alpha\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\alpha}A_{\rho} = 0. \quad (12.5)$$

Os coeficientes isotrópicos e anisotrópicos de paridade-par são κ_{00} e κ_{ij} , respectivamente, enquanto que κ_{0i} são as componentes de paridade-ímpar. Seguiremos então com implementação da quantização de Gupta-Bleuler usando a condição de gauge (12.4).

Uma prescrição para quantização covariante que é conhecida por quantização de Gupta-Bleuler foi desenvolvida em [39, 40], e se mostrou problemática no contexto de teorias com violação de Lorentz [74, 75]. O procedimento de Gupta-Bleuler consiste em introduzir à densidade lagrangiana, um termo responsável por quebrar a invariância de gauge local, mas sem eliminar nenhum grau de liberdade do campo de gauge.

Por exemplo, na eletrodinâmica de Maxwell, o termo de fixação de calibre, $(\partial_\mu A^\mu)^2/2\xi$, funciona bem no gauge Feynman ($\xi = 1$) [80].

A densidade lagrangiana para a eletrodinâmica de Maxwell no gauge de Lorenz é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (12.6)$$

o que rende a seguinte equação de movimento, no espaço dos momentos, $O_{\mu\nu}^{(M)}\tilde{A}^\nu(p) = 0$, onde definimos o tensor

$$O_{\mu\nu}^{(M)} = p^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) p_\mu p_\nu, \quad (12.7)$$

cujos determinante é $-\xi^{-1}(p^2)^4$ e fornece a relação de dispersão $p^2 = 0$. É fácil verificar que para $\xi \neq 1$, o espaço nulo da matriz¹ $O_{\mu\nu}^{(M)}\Big|_{p^2=0}$ tem dimensão 3. Explicitamente

$$O_{\mu\nu}^{(M)}\Big|_{p^2=0} = - (1 - \xi^{-1}) p_\mu p_\nu. \quad (12.8)$$

Para pertencer ao espaço nulo, o quadrivetor deve satisfazer $v^\mu p_\mu = 0$. Escrevendo o quadrimomento como $p^\mu = E(1, 0, 0, 1)$, podemos conseguir no máximo três vetores linearmente independentes que satisfazem a equação (12.8): $\varepsilon_1^\mu = (1, 0, 0, 1)$, $\varepsilon_2^\mu = (0, 1, 0, 0)$ e $\varepsilon_3^\mu = (0, 0, 1, 0)$. Por outro lado, para $\xi = 1$, o espaço nulo da matriz $O_{\mu\nu}^{(M)}\Big|_{p^2=0}$ tem dimensão 4, pois a mesma se torna a matriz nula. A ideia por trás desta observação é que, um conjunto de vetores pertencentes ao espaço nulo da matriz $O_{\mu\nu}^{(M)}\Big|_{p^2=0}$, para $\xi = 1$, constituem o conjunto de vetores de polarização, permitindo para a expansão em ondas planas do campo de gauge. Com um conjunto bem definido de vetores de polarização que satisfazem a relação de dispersão, a implementação da quantização Gupta-Bleuler segue naturalmente.

Vamos agora usar esta regra para justificar a falha do método Gupta-Bleuler no contexto da eletrodinâmica LV definido pela Eq. (12.2), para a condição de Lorenz no gauge de Feynman, como relatado recentemente [74, 75]. Partimos da densidade lagrangiana (12.2) na presença do termo de gauge de Lorenz,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}F^{\mu\nu}F_\mu{}^\rho - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (12.9)$$

onde $\kappa_{\nu\rho}$ é parametrizado como

$$\kappa_{\mu\nu} = \ell(u_\mu v_\nu + u_\nu v_\mu), \quad (12.10)$$

¹Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow U$ entre dois espaços vetoriais, V e U , define-se o espaço nulo ou núcleo da transformação linear o conjunto de todos os vetores $v \in V$ tal que $T(v) = 0$, sendo neste caso 0 o vetor nulo em U . A expressão espaço nulo é preferível pois a palavra núcleo é comumente utilizada para se referir às funções de Green.

e u_μ, v_μ , são quadrivetores tipo espaço, $u_\mu = (0, \vec{u})$, $v_\mu = (0, \vec{v})$, com \vec{u} e \vec{v} sendo vetores ortonormais, onde $\ell = \sqrt{\text{tr}((\kappa^2)_{\mu\nu})}/2$, com $(\kappa^2)_{\mu\nu} = \kappa_\mu^\beta \kappa_{\beta\nu}$. No gauge de Feynman, $\xi = 1$, a equação de movimento do campo de gauge proporciona $O_{\mu\nu}^{(LF)}(p) \tilde{A}^\nu(p) = 0$, onde

$$O_{\mu\nu}^{(LF)}(p) = (p^2 + \kappa_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta) g_{\mu\nu} + p^2 \kappa_{\mu\nu} - p_\mu \kappa_{\nu\beta} p^\beta - p_\nu \kappa_{\mu\beta} p^\beta. \quad (12.11)$$

A condição $\det O_{\mu\nu}^{(LF)}(p) = 0$ fornece

$$-(p^2)^2 \boxplus(p) \boxtimes(p) = 0 \quad (12.12)$$

Onde

$$\begin{aligned} \boxplus(p) &= p^2 + \kappa^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 0, \\ \boxtimes(p) &= (1 - \ell^2) p^2 + \kappa^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + (\kappa^2)^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 0, \end{aligned} \quad (12.13)$$

A relação de dispersão $p^2 = 0$ possui multiplicidade 2, sendo uma relação de dispersão não física, enquanto as outras duas têm multiplicidade 1 e são as relações de dispersão físicas. Pode-se verificar, utilizando alguma ferramenta, que a dimensão do espaço nulo de $O_{\mu\nu}^{(LF)}|_{p^2=0}$ é 1, isto é., temos apenas um vetor de polarização associado a relação de dispersão $p^2 = 0$. O mesmo vale para as outras relações de dispersão: a dimensão do espaço nulo de $O_{\mu\nu}^{(LF)}|_{\boxplus=0}$ e $O_{\mu\nu}^{(LF)}|_{\boxtimes=0}$ são ambas 1. Os espaços nulos do tensor (12.11), tomados em todas as relações de dispersão, proporcionam um total de três auto vetores. Assim, o método de Gupta-Bleuler não pode ser satisfatoriamente aplicado nesta eletrodinâmica modificada, para a condição usual de Lorenz no gauge de Feynman. Outros valores possíveis de ξ não resolvem o problema. Nós resolvemos esse problema, selecionando a condição de gauge (12.4) o que representa uma generalização LV da condição de Lorenz. Isto irá se revelar uma escolha adequada para implementação bem sucedida da quantização de Gupta-Bleuler neste modelo. Assim, a densidade lagrangiana (12.2) torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa_{\nu\rho} F^{\mu\nu} F_\mu t^\rho - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu + \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu)^2. \quad (12.14)$$

Ao trabalhar no gauge de Feynman, $\xi = 1$, a equação de movimento no espaço dos momentos para o campo de gauge se torna

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}(p) \tilde{A}^\nu(p) = 0, \quad (12.15)$$

com $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ definido por

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} (p^2 + \kappa^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta) + \kappa_{\mu\nu} p^2 + \kappa_{\mu\alpha} \kappa_{\beta\nu} p^\alpha p^\beta, \quad (12.16)$$

Cujo determinante é $-\boxplus(p)^3 \boxtimes(p)$. Aqui, nós também identificamos as duas relações de dispersão físicas indicadas em (12.13). O espaço nulo de $\mathcal{O}_{\mu\nu}$, quando a relação de

dispersão $\boxtimes(p) = 0$ é satisfeita, é 1 proporcionando um vetor de polarização. Por outro lado, a dimensão do espaço nulo $\mathcal{O}_{\mu\nu}|_{\boxtimes=0}$ é 3, isto é., existem três vetores de polarização associadas à relação de dispersão $\boxtimes(p) = 0$, um deles é físico e os outros dois não. Assim, a condição de gauge (12.4), com $\xi = 1$, fornece 4 vetores de polarização associados a essa relação de dispersão, preenchendo as condições necessárias para a implementação da quantização Gupta-Bleuler.

O momento conjugado canônico é

$$\pi^\mu = -(g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \dot{A}_\nu, \quad (12.17)$$

que permite impor as seguintes relações de comutação canônicas

$$[A_\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{y})] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (12.18)$$

enquanto as outras são nulas.

A condição de Lorenz modificada, $\partial_\mu (A^\mu + \kappa^{\mu\nu} A_\nu) = 0$, permite definir quatro vetores de polarização que podem ser utilizados para propor uma solução para a Eq. (12.15) como uma expansão em ondas planas,

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E^{(\lambda)}}} \left[a_{(\lambda)}(\vec{p}) e^{-ix \cdot p^{(\lambda)}} + a_{(\lambda)}^\dagger(\vec{p}) e^{ix \cdot p^{(\lambda)}} \right] \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{p}), \quad (12.19)$$

os operadores de aniquilação e criação são descritos por $a_{(\lambda)}(\vec{p})$ e $a_{(\lambda)}^\dagger(\vec{p})$, respectivamente. Os vetores de polarização $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{p})$ satisfazem a seguinte equação de autovalor:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} \varepsilon_\nu^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)} (g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}. \quad (12.20)$$

Os autovalores $\alpha^{(\lambda)}$ são

$$\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = p^2 + \kappa_{\mu\nu} p^\mu p^\nu, \quad (12.21)$$

$$\alpha^{(3)} = p^2 + \frac{\kappa_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + (\kappa^2)_{\mu\nu} p^\mu p^\nu}{1 - \ell^2}. \quad (12.22)$$

rendendo os quatro vetores de polarização

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu^{(0)} &= (1, \vec{0}), & \varepsilon_\mu^{(1)} &= (0, \vec{\varepsilon}_i^{(1)}), \\ \varepsilon_\mu^{(2)} &= (0, \vec{\varepsilon}_i^{(2)}), & \varepsilon_\mu^{(3)} &= (0, \vec{\varepsilon}_i^{(3)}), \end{aligned} \quad (12.23)$$

com

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(1)} &= n^{(1)} p_i, & \varepsilon_i^{(3)} &= n^{(3)} \left(d_{(2)}^{-1} \right)_{ij} \varepsilon_{jka} p_k w_a, \\ \varepsilon_i^{(2)} &= n^{(2)} \left[(d_{(2)})_{ab} p_a p_b w_i - (p_a w_a) p_i \right], \end{aligned} \quad (12.24)$$

onde $w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$, e $n^{(i)}$ são constantes de normalização. Os vetores de polarização satisfazem a condição de normalização dada por $\varepsilon_\mu^{(\lambda)} (g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \varepsilon_\nu^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}$, e também a relação de completiza

$$\sum_{\lambda=0}^3 g^{\lambda\lambda} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda)} = (g + \kappa)_{\mu\nu}^{-1}. \quad (12.25)$$

A energia associada a cada vetor de polarização é

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= E^{(1)} = E^{(2)} = |\vec{p}| \sqrt{1 - \kappa_{ij} p_i p_j / |\vec{p}|^2}, \\ E^{(3)} &= |\vec{p}| \sqrt{1 - \frac{\kappa_{ij} p_i p_j + (\kappa^2)_{ij} p_i p_j}{(1-\ell^2) |\vec{p}|^2}}, \end{aligned} \quad (12.26)$$

que estão em conformidade com as relações (12.13), e as relações de dispersão obtida na ref.[70]. As energias são números reais sempre que os parâmetros de violação de Lorentz forem suficientemente pequenos. Agora devemos comentar sobre as polarizações físicas deste modelo, representadas por $\varepsilon_\mu^{(2)}$, $\varepsilon_\mu^{(3)}$. Como estes modos são associados a relações de dispersão e velocidades de fase distintas (até segunda ordem), este eletrodinâmica se torna birrefringente em segunda ordem (sendo não birrefringente apenas em primeira ordem).

A fim de satisfazer a relação de comutação canônica (12.18), os operadores de criação e aniquilação deve satisfazer as relações de comutação padrão,

$$\left[a_{(\lambda)}^\dagger(\vec{p}), a_{(\lambda')}(\vec{q}) \right] = g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \quad (12.27)$$

Sendo as outras nulas. O objetivo de nossa escolha para as polarizações (12.23) é a de expressar o hamiltoniano quântico como uma soma explícita das contribuições de cada modo de polarização, como requerido,

$$H = - \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3\vec{p} g_{\lambda\lambda} E^{(\lambda)} N^{(\lambda)}, \quad (12.28)$$

onde $N^{(\lambda)} = a_{(\lambda)}^\dagger a_{(\lambda)}$ é o operador número que conta o modo (λ) . Apesar de o hamiltoniano poder ser expresso de uma forma simples, não é definida positiva Além disso, em nível do operador, a condição de gauge $\partial_\mu A^\mu + \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = 0$ não é compatível com a relação de comutação (12.18). e a partir da Eq. (12.27), observa-se que os operadores de criação $a_{(0)}^\dagger$ e aniquilação $a_{(0)}$, satisfazem a relação de comutação com sinal trocado, levando a estados com norma negativa. Estes problemas podem ser resolvidos de uma forma covariante, impondo a condição de Gupta-Bleuler [39, 40], isto é, os estados físicos $|\varphi\rangle$ são aqueles que fornecem valor esperado nulo para a condição de gauge modificada,

$$\langle \varphi | (g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \partial_\mu A_\nu | \varphi \rangle \quad (12.29)$$

Esta é uma condição forte. Os estados físicos podem ser selecionados impondo uma condição mais fraca,

$$(g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \partial_\mu A_\nu^{(+)} |\varphi\rangle \quad (12.30)$$

onde o campo de gauge foi decomposto em frequências positivas e negativas, $A_\mu = A_\mu^{(+)} + A_\mu^{(-)}$, respectivamente. Vamos agora implementar explicitamente a condição fraca (12.30) na expansão em ondas planas (12.19) do campo de gauge, chegando em

$$\sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E^{(\lambda)}}} e^{-ix \cdot p^{(\lambda)}} [p_\mu^{(\lambda)} (g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}] a_{(\lambda)} |\varphi\rangle = 0. \quad (12.31)$$

Verifica-se que as contribuições provenientes das polarizações $\varepsilon_\nu^{(2)}$ e $\varepsilon_\nu^{(3)}$ são nulas. As polarizações restantes retornam $p_\mu^{(\lambda)} (g^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu}) \varepsilon_\nu^{(\lambda)} = (-1)^\lambda E^{(\lambda)}$, para $\lambda = 0, 1$, com $E^{(1)} = E^{(0)}$, que permite alcançar a seguinte restrição sobre os estados físicos:

$$[a_{(0)} - \dot{a}_{(1)}] |\varphi\rangle. \quad (12.32)$$

A última expressão vincula o valor esperado do número de fótons escalares e longitudinais,

$$\langle \varphi | N^{(0)} | \varphi \rangle = \langle \varphi | N^{(1)} | \varphi \rangle, \quad (12.33)$$

Essa condição suplementar (12.32) resolve o problema relativo às contribuições de energia negativa no hamiltoniano (12.28).

Uma vez que tenhamos quantizado com sucesso esta eletrodinâmica de violadora de Lorentz, também podemos calcular as relações de comutação generalizadas para o campo de gauge

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \int \sum_{\lambda=0}^3 \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E^{(\lambda)}}} \left(e^{i(x-y) \cdot p^{(\lambda)}} - e^{-i(x-y) \cdot p^{(\lambda)}} \right) g_{\lambda\lambda} T_{\mu\nu}^{(\lambda)}, \quad (12.34)$$

onde $T_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(p)$. Usando as relações de dispersão e a relação completeza (12.25), o resultado é

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = T_{\mu\nu}^{(3)}(i\partial) i\Delta^{(3)}(x-y) - [(g + \kappa)_{\mu\nu}^{-1} + T_{\mu\nu}^{(3)}(i\partial)] i\Delta^{(2)}(x-y), \quad (12.35)$$

com $\Delta^{(2)}(x-y)$ e $\Delta^{(3)}(x-y)$ sendo as funções Pauli-Jordan generalizadas definidas por

$$\Delta^{(\beta)}(x_0, \vec{x}) = - \frac{\varepsilon(x_0) \delta \left((x_0)^2 - \left(d_{(\beta)}^{-1} \right)_{ij} x_i x_j \right)}{2\pi \sqrt{\det(d_{(\beta)})}}, \quad (12.36)$$

com

$$(d_{(2)})_{ij} = \delta_{ij} - \kappa_{ij}, \quad (d_{(3)}^{-1})_{ij} = \delta_{ij} + \kappa_{ij}. \quad (12.37)$$

Assim, toda a estrutura microcausal da relação de comutação (12.36) está totalmente determinado pela função de Pauli-Jordan modificada $\Delta^{(\beta)}(x)$. Isso mostra claramente como a violação de Lorentz modifica a seção espacial do cone de luz. Em outras palavras, ela transforma uma esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em uma elipsóide $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1$, onde λ_i são os autovalores de $d_{(2)}^{-1}$ (dados por $1, \frac{1}{1-\ell}, \frac{1}{1+\ell}$) ou $d_{(3)}^{-1}$ (dados por $1, 1-\ell, 1+\ell$). Tais modificações da seção espacial são garantidas porque as matrizes $d_{(2)}^{-1}$ e $d_{(3)}^{-1}$ são definidas positivas para valores suficientemente pequenos de ℓ , isto é, κ_{ij} . A microcausalidade pode ser estudada, mostrando que $\Delta^{(\beta)}(x)$ se anula para vetores tipo espaço. Para tal fim, usaremos, sem perda de generalidade, o vetor $x^\mu = (0, \vec{x})$, Então a função de Pauli-Jordan modificada terá resultado nulo se e somente se

$$x^i (d_{(\beta)}^{-1})_{ij} x^j > 0, \quad (12.38)$$

para x^i não nulo. A positividade de $x^i (d_{(\beta)}^{-1})_{ij} x^j$ é garantida se as matrizes $(d_{(\beta)}^{-1})_{ij}$ são definidas-positivas o que é conseguido quando os parâmetros de violação de Lorentz κ_{ij} são suficientemente pequenos.

Abaixo, nas figuras (12.1), (12.2) e (12.3), as deformações do cone de luz são mostradas explicitamente considerando uma parametrização explícita para os vetores de fundo LV:

$$u = (1, 0, 0), \quad v = (0, 1, 0). \quad (12.39)$$

Explicitamente a seção espacial dos cones de luz deformados dão as seguintes elipsóides para $d_{(2)}^{-1}$ e $d_{(3)}^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2xy\ell + y^2}{1 - \ell^2} + z^2 &= R^2, \\ x^2 + 2xy\ell + y^2 + z^2 &= R^2, \end{aligned} \quad (12.40)$$

respectivamente. Em ambos os casos, a projeção no plano- xy são elipses cujo eixo está rotacionada de 45° .

A projeção do cone de luz deformado é mostrada abaixo em planos espaciais. Em todas as figuras, o lado esquerdo representa o cone de luz deformado associado à polarização $\varepsilon_i^{(2)}$, e o lado direito para a polarização $\varepsilon_i^{(3)}$.

Também temos que os cones amarelos representam a deformação produzida pela violação de Lorentz e os vermelhos são os cones de luz na ausência de Lorentz-violação.

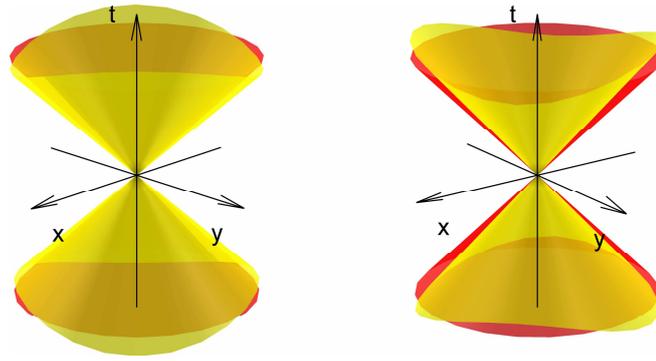


Figura 12.1: A deformação do cone de luz no plano- xy .

A Figura 12.1 mostra a seção plana- xy com $(z = 0)$ do cone de luz deformado, torna-se notável a deformação em comparação ao usual para ambas às polarizações.

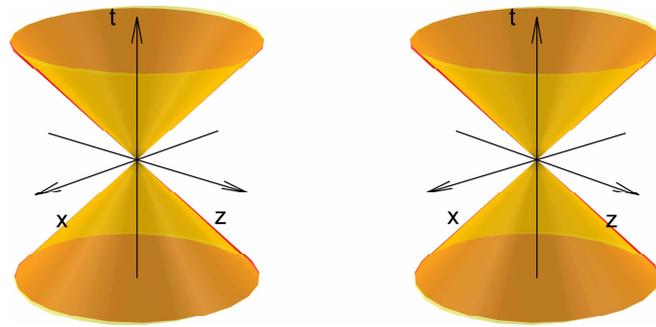


Figura 12.2: A deformação do cone de luz no plano- xz .

A Figura 12.2 descreve a deformação do cone de luz na seção plana- xz com $(y = 0)$, neste caso só ocorre uma ligeira deformação para a polarização $\varepsilon_i^{(2)}$. Por outro lado, a projeção do cone de luz para a polarização $\varepsilon_i^{(3)}$ permanece inalterada neste ponto de vista.

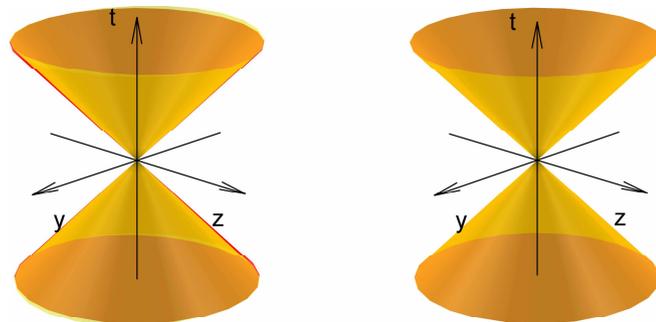


Figura 12.3: A deformação do cone de luz no plano- yz .

Por último, a Figura 12.3 representa a seção plana- yz com $(x = 0)$ do cone de luz deformado. Da mesma forma que a projeção em no plano- xz plane, somente ocorre uma

suave deformação para a polarização $\varepsilon_i^{(2)}$ enquanto que a projeção do cone de luz para a polarização $\varepsilon_i^{(3)}$ permanece inalterada neste ponto de vista.

12.3 Observações e conclusões da seção

Nós desenvolvemos nossas análises a partir da densidade lagrangiana (12.2), que fornece as relações de dispersão físicas dadas pelas Equações (12.13). Em primeira ordem, a densidade lagrangiana (12.2), com $\xi = 1$, pode ser escrita simplesmente como, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu \tilde{g}_{\nu\beta} \tilde{g}_{\mu\alpha} \partial^\mu \partial^\alpha A^\beta$, onde $\tilde{g}_{\mu\alpha} = g_{\mu\alpha} + \kappa_{\mu\alpha}$ é uma métrica efetiva. Depois de uma transformação de coordenadas adequada, esta densidade lagrangiana pode ser transformada na de Maxwell, no gauge de Feynman, de modo a que a quantização de Gupta-Bleuler poderia ser aplicada como usual. Em segunda ordem, no entanto, a equivalência entre a lagrangiana de Maxwell e a com violação de Lorentz (12.2) não pode ser atingida por qualquer transformação de coordenadas ou redefinição do campo. Mesmo a este nível, o processo que desenvolvemos permite implementar o método de Gupta-Bleuler, incluindo também birrefringência [41] (R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., and F.E.P. dos Santos, PRD 2014).

Lembrando que este modelo é birrefringente em segunda ordem, sua estrutura causal será governada por dois cones de luz-deformados decorrentes da expressão (12.36). Em primeira ordem (limite não birrefringente), nós temos $d_{(2)} = d_{(3)}$, de modo que estes cones de luz degeneram em apenas um. Neste regime, existe pelo menos um sistema de coordenadas em que a deformação do cone de luz desaparece, recuperando o padrão usual de Maxwell. No regime birrefringente, no entanto, não é possível eliminar a violação de Lorentz de ambos os cones de luz: uma transformação de coordenadas que elimina os efeitos de LV de um cone de luz, não necessariamente elimina os efeitos de LV no outro.

O nosso principal resultado é então a implementação bem sucedida do método de Gupta-Bleuler para a eletrodinâmica de paridade par anisotrópica (12.2), mesmo no limite birrefringente, sem a necessidade de uma pequena massa para o campo do fóton [27, 75]. Este procedimento dá uma visão clara de como implementar a quantização Gupta-Bleuler para outros setores do tensor k_F , envolvendo inclusive os birrefringentes, uma vez que a condição de gauge apropriado é fixada. Este método também pode ser aplicado para modelos com os operadores k_F de ordem superior na primeira referência de

[53].

Em relação ao modelo (12.1), alguns comentários ainda são bem vindos. Na ausência de LV no sector de fótons, a sua quantização segue o procedimento usual, enquanto o sector férmion modificado é quantificado tal como proposto em Ref. [8, 79]. Se os termos de LV estão presentes em ambos os setores, a quantização dos fótons modificados poderia seguir o procedimento implementado aqui, enquanto a quantização dos férmions segue a prescrição de Ref. [8, 79]. Ambos os procedimentos levam a uma quantização operatorial bem definida em nível de árvore em ambos os setores, de modo a que em nível de árvore os espaços Hilbert tornam-se bem definidos, tal como na ausência de violação de Lorentz. O próximo passo é a quantização perturbativa do modelo (12.1) que pode então ser feita de forma consistente. Nossos resultados também podem ser verificados através do método de quantização de Dirac para sistemas vinculados, como previamente investigados em Ref. [81]. Este formalismo mostra que o gauge temporal, não é compatível com o gauge de Coulomb habitual nesta eletrodinâmica com LV, mas com uma versão modificada do gauge de Coulomb, como será relatado em outra referência [82]

13 Conclusões finais e perspectivas

Neste trabalho, fizemos uma investigação sobre a influência da violação da simetria de Lorentz, representada por um acoplamento não mínimo CPT-par e também aspectos da quantização covariante do setor fotônico da eletrodinâmica CPT-par do modelo padrão estendido. Primeiramente é feita uma revisão da literatura, onde iniciamos com conceitos básicos da teoria clássica de campos, passando à quantização canônica. A quantização canônica foi discutida inicialmente para o campo escalar, que é o mais simples. Ainda no contexto do campo escalar, é discutido brevemente o conceito de microcausalidade e apresentado o propagador do campo escalar em nossa convenção. Ao passarmos ao campo de Dirac, a quantização é desenvolvida aplicando o método de Dirac para sistemas vinculados. Nesta oportunidade, o campo de Dirac é tratado como uma variável anticomutativa já em nível clássico, sendo a quantização feita mediante o parêntese de Dirac. Dentre os resultados obtidos nesta seção, temos a apresentação de algumas convenções que foram reutilizadas em seções posteriores, como: as matrizes gama, matrizes de Pauli e o propagador do férmion. Ao chegarmos ao campo de gauge, novamente implementamos o método de Dirac. Embora o método de Dirac propicie uma quantização válida para o campo eletromagnético, ao tratarmos de forma diferenciada as componentes temporal e espacial do quadri vetor potencial, os resultados perdem a covariância explícita o que constitui um grande inconveniente. A quantização é refeita implementando desta vez o método de Gupta Bleuler, produzindo resultados explicitamente covariantes. Como resultados desta seção, mais uma vez apresentamos algumas convenções que foram reutilizadas adiante, como: as expansões em ondas planas e o propagador do campo de Maxwell no gauge de Feynman. Ao colocarmos os campos em interação, foi apresentada uma série de procedimentos matemáticos para obtermos resultado mediante o uso da teoria de perturbações, passando pela *picture* interativa, chegando à fórmula de Gell-Mann-Low. Através das contrações de Wick, chegamos à expressão para a função de quatro pontos envolvendo múons e elétrons, sendo feita em seguida a conexão com a matriz de espalhamento. É tratado um espalhamento em particular, o bem conhecido $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ para partículas não polarizadas, sendo necessário o uso do truque de Casimir e a técnica de traço de matrizes gama. Embora os resultados tenham sido focados em um processo

em particular, através da regra de ouro de das regras de Feynman, é possível calcular qualquer processo da QED em nível de árvore, sem ter que repassar por trabalhosos cálculos. Também, é feito um breve comentário sobre uma maneira alternativa de se calcular as funções de Green através do uso de integração funcional. Ao comentarmos sobre processos de ordem superior, discutimos o tensor de polarização do vácuo, peça chave para a QED. No cálculo do tensor de polarização do vácuo, utilizamos técnicas como a regularização dimensional e parametrização de Feynman. O tensor de polarização do vácuo possui uma indesejável divergência, que é tratada no contexto da renormalização.

Iniciamos a segunda parte do trabalho investigando a violação de Lorentz no contexto do acoplamento não mínimo CPT-par. É estudado o limite não relativístico da equação de Dirac, considerando a derivada covariante modificada representada por um operador de dimensão 5, e cuja magnitude é dada por uma constante de acoplamento com dimensão de massa negativa, sendo esta, uma teoria não renormalizável por contagem de potência. O hamiltoniano não relativístico obtido foi estudado no contexto do átomo de hidrogênio, sendo sua rica fenomenologia utilizada para impor limites restritivos sobre a magnitude dos parâmetros de violação. Dentre esses diversos efeitos, identificamos uma série de novas interações como: um efeito do tipo Zeeman elétrico, um termo de correção em nível de árvore ao momento magnético anômalo do elétron, além de um acoplamento do tipo Rashba. No limite não relativístico, os efeitos mais sensíveis são aqueles associados a termos não suprimidos pela massa do elétron. A partir destes efeitos, foi possível a obtenção de um limite superior para a magnitude dos coeficientes $\left| \lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3j} \right| < 8 \times 10^{-17} (eV)^{-1}$, no caso do efeito Zeeman elétrico e, em comparação com os dados de grande precisão para medição do momento anômalo do elétron, impor um limite de $\left| \lambda^{(e)} (\kappa_{HE})_{3j} \right| < 8 \times 10^{-17} (eV)^{-1}$ para este outro coeficiente. Como resultado desta pesquisa, foi possível o desenvolvimento de um trabalho [58] já publicado, onde também é discutida a possibilidade de obtermos limites a partir dos outros termos de interação.

Ainda no contexto do acoplamento não mínimo, estudamos novamente o espalhamento $e^+ + e^- = \mu^+ + \mu^-$. Neste contexto, é feita a inserção de um novo vértice para representar a nova interação. Esse novo vértice ainda é subdividido, separando-se a influencia das contribuições isotrópicas e anisotrópicas de paridade par, e também a contribuição de paridade ímpar. Assim antes, foi calculada a seção de choque para o processo não polarizado, onde os conhecimentos advindos da revisão bibliográfica se fa-

zem muito úteis. Após a obtenção da seção de choque diferencial e da integração sobre o ângulo sólido, a seção de choque total obtida é então comparada aos dados experimentais. Este procedimento, que foi repetido para cada contribuição separadamente, proporcionou um limite sobre as componentes não birrefringentes do tensor de fundo da ordem de $|\lambda(\kappa_{\sigma F})| < 10^{-12} (eV)^{-1}$. A partir desta investigação foi possível o desenvolvimento de um trabalho já aceito e publicado [59]. Nesta publicação, além de serem apresentados os resultados aqui mencionados, também é dado um claro insight sobre a geração radiativa do termo CPT-par do setor de gauge abeliano do modelo padrão estendido, com a expectativa de serem utilizados dados experimentais para impor limites superiores em nosso cenário a partir daqueles obtidos no SME.

Seguindo a linha proposta no trabalho anterior, analisamos a possibilidade da geração radiativa do termo CPT-par do SME. Este estudo é feito considerando as contribuições do acoplamento não mínimo à ação efetiva quadrática para o campo eletromagnético. Neste cálculo, é mais uma vez identificado o tensor de polarização do vácuo, associado à auto-energia do fóton. Similarmente ao desenvolvimento anterior, são utilizadas as mesmas técnicas, como: regularização dimensional, parametrização de Feynman, integrais típicas de loop e técnicas de traço de matrizes gama. A partir do resultado obtido, observamos que a divergência usualmente logarítmica após a implementação da regularização, também se mantém logarítmica para este outro caso e que, além de transversal, o tensor de polarização do vácuo revela em sua estrutura uma nova interação, que induz o termo CPT-par do modelo padrão estendido. Esta é a primeira vez que o termo CPT-par foi gerado em sua estrutura completa, dado que os tensores $\kappa_{\sigma F}$ e κ_F possuem as mesmas simetrias e número de componentes. Estes resultados são apresentados na publicação [60]. Nesta publicação, também é discutida a possibilidade de melhora dos limites para até $|\lambda(\kappa_{\sigma F})| < 10^{-21} (eV)^{-1}$ para as componentes não birrefringentes e de até $|\lambda(\kappa_{\sigma F})| < 10^{-41} (eV)^{-1}$ para as componentes birrefringentes. Ainda neste trabalho, é apresentado termos de dimensão 6, que também são gerados radiativamente pelo acoplamento não mínimo.

Saindo do contexto do acoplamento não mínimo para um cenário mais genérico que é o SME, investigamos a quantização da eletrodinâmica anisotrópica de paridade par, parte do SME. A quantização covariante de tais modelos foi recentemente estudada e mostrou algumas complicações no gauge de Lorenz. A solução encontrada até então foi introduzir uma massa para o fóton, com o propósito de regularização de infravermelho.

Nós também atacamos este problema, buscando inicialmente explicar a incompatibilidade entre a quantização covariante, e a teoria com violação de Lorentz. A resposta veio do próprio cenário usual, onde o método de Gupta-Bleuler funciona apenas no gauge de Feynman. Para conseguirmos implementar com sucesso o método de Gupta-Bleuler é preciso um conjunto de quatro vetores de polarização. Estes vetores de polarização pertencem ao espaço nulo de um determinado operador, quando cada uma das relações de dispersão é satisfeita. Este operador, que por sua vez está associado à equação de movimento no espaço dos momentos, depende da condição de gauge fixada. Para o gauge de Lorenz usual, somente encontramos três vetores de polarização. Fixando-se uma condição de Lorenz generalizada, encontramos quatro vetores de polarização e a quantização segue sem problemas. A lagrangiana para esta condição de gauge modificada apresenta termos de segunda ordem em violação de Lorentz e, estes termos, são responsáveis por birrefringência, que se manifesta na existência de dois cones de luz, um associado a cada modo físico de propagação do fóton. Estes resultados podem ser encontrados em um trabalho recentemente publicado [41].

Como perspectiva, ainda temos a averiguação de outros processos da eletrodinâmica quântica, tais como: efeito Compton e, também, a renormalização a um loop da eletrodinâmica modificada por acoplamento não mínimo. No contexto da quantização de Gupta-Bleuler, verificar a extensão deste procedimento para o tensor CPT-par geral além de estudar extensões envolvendo termos de derivada superior.

Referências Bibliográficas

- [1] C. S. Wtj , *et al.*, Phys. Rev **104**, 1315 (1956).
- [2] A. Alavi-Harati *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 22 (1999)
- [3] A. Kosteletsky, (1998). arXiv preprint hep-ph/9810365.
- [4] V. A. Kosteletsky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989), V. A. Kosteletsky and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); V. A. Kosteletsky and R. Potting, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).
- [5] D. Colladay and V. A. Kosteletsky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [6] D. Colladay, V. A. Kosteletsky Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [7] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [8] A. Kosteletsky, R. Lehnert, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001).
- [9] V. A. Kosteletsky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004); V. A. Kosteletsky, Neil Russell, and J. D. Tasson, Phys. Rev. Lett. **100**, 111102 (2008); V. A. Kosteletsky and J. D. Tasson, Phys. Rev. Lett. **102**, 010402 (2009); Q. G. Bailey, V.A. Kosteletsky, Phys.Rev. D **74**, 045001 (2006); Q. G. Bailey, Phys.Rev. D **80**, 044004 (2009); V.A. Kosteletsky and R. Potting, Phys.Rev. D **79**, 065018 (2009); Q. G. Bailey, Phys. Rev. D **82**, 065012 (2010); V.B. Bezerra, C.N. Ferreira, J.A. Helayel-Neto, Phys.Rev. D **71**, 044018 (2005); J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, L.M. de Moraes, C.A.G. Sasaki, V.J. V. Otoyá, Phys. Lett. B **689**, 112 (2010).
- [10] V. Alan Kosteletský, Jay D. Tasson, Phys. Rev. D **83**, 016013 (2011).
- [11] B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004); G. M. Shore, Nucl. Phys. B **717**, 86 (2005); D. Colladay and V. A. Kosteletsky, Phys. Lett. B **511**, 209 (2001); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, J. Math. Phys. **48**, 092302 (2007); R. Lehnert, Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003); V.A. Kosteletsky and C. D. Lane, J. Math. Phys.

- 40, 6245 (1999); R. Lehnert, *J. Math. Phys.* **45**, 3399 (2004); B. Goncalves, Y. N. Obukhov, I. L. Shapiro, *Phys.Rev. D* **80**, 125034 (2009); S. Chen, B. Wang, and R. Su, *Class. Quant.Grav.* **23**, 7581 (2006).
- [12] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002); R. Bluhm and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999); V.A. Kostelecky and C.D. Lane, *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999).
- [13] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Phys. Rev. D* **81**, 045018 (2010).
- [14] C. F. Farias, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, *Phys. Rev. D* **86**, 065035 (2012).
- [15] A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, *Eur. Phys. J. C* **56**, 571 (2008)
- [16] G. Gazzola, H. G. Fagnoli, A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, and M. C. Nemes, *J. Phys. G* **39**, 035002 (2012).
- [17] A. P. Baeta Scarpelli, *J. Phys. G* **39**, 125001 (2012).
- [18] F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, *Phys. Rev. D* **78**, 125023 (2008); *Phys. Lett. B* **681**,495 (2009); F.A.Brito, E. Passos, P.V. Santos, *Europhys. Lett.* **95**, 51001 (2011); J. Leite and T. Mariz, *Eur. Phys. Lett.* **99**, 21003 (2012).
- [19] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [20] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **657**, 214 (2003); A.A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Rev. D* **51**, 5961 (1995); *Phys. Lett. B* **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, *Phys. Rev. D* **59**, 025002 (1998); A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, R. Soldati, *J. High Energy Phys.* 0909, 057 (2009); J. Alfaro, A.A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, R. Soldati, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**,

- 3271 (2010); V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, E. M. Murchikova, Phys.Rev. D **73** 065016, (2006).
- [21] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **734**, **1** (2006).
- [22] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003); M. B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C **46**, 247 (2006); J.A. de Sales, T. Costa-Soares, and V. J. Vasquez Otoyá, Physica (Amsterdam) 391A, 5422 (2012).
- [23] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).
- [24] Bychkov, A. Yu , and E. I. Rashba. JETP lett **39.2** 78 (1984) .
- [25] F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901 (2008); F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).
- [26] B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).
- [27] M. Cambiaso, R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. D **85** 085023 (2012); B. Agostini, F. A. Barone, F. E. Barone, P. Gaete, J. A. Helayel-Neto, Phys. Lett. B **708**, 212 (2012).
- [28] O. M. del Cima, *et al.*, Phys. Rev. D **85**, 065023 (2012).
- [29] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005).
- [30] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, M.T. D. Orlando, Phys. Lett. **B 639**, 678 (2006).
- [31] H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Eur.Phys. J. C **62**, 425 (2009).
- [32] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, and F. M. O. Moucherek, Phys. Rev. D **74**, 065009 (2006).

- [33] H. Belich, E.O. Silva, M.M. Ferreira Jr., and M.T. D. Orlando, Phys. Rev. D **83**, 125025 (2011).
- [34] B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf, A. J. da Silva, Phys. Rev. D **86**, 045003 (2012).
- [35] L. R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, J. Phys. G. **39**, 105004 (2012).
- [36] K. Bakke, H. Belich, J. Phys. G **39**, 085001 (2012); K. Bakke, H. Belich, E. O. Silva, J. Math. Phys. **52**, 063505 (2011); J. Phys. G **39**, 055004 (2012); Annalen der Physik (Leipzig) **523**, 910 (2011); K. Bakke and H. Belich, Eur. Phys. J. Plus **127**, 102 (2012).
- [37] M. Derrick *et al.* Phys. Rev. D **31**, 2352 (1985); D. Bender *et al.* Phys. Rev. D **30**, 515 (1984); M. E. Levi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1941 (1983).
- [38] W. Heisenberg, Zeitschrift für Physik **43.3-4** ,172-198.(1927)
- [39] S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. London Sect. A **63**, 681 (1950).
- [40] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).
- [41] R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., and F.E.P. dos Santos, Phys. Rev. D **90**, 105025 (2014).
- [42] F. E. P. dos Santos, "Espalhamento de Férmions sob Influencia da Violação de Lorentz no Setor Fotônico."
- [43] R.P. Feynman, Phys. Rev.**76** (1949)
- [44] J. M. F. Bassalo, *Eletrodinâmica Quântica*. Editora Livraria da Fisica, (2006).
- [45] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics. Wave equations*, Springer, (2000).
- [46] W. Greiner, J. Reinhardt *Quantum Electrodynamics*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, (2008).
- [47] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, (2008).
- [48] F. Gross, *Relativistic quantum mechanics and field theory*, John Wiley & Sons, (2008).

- [49] D. Mattingly, Living Rev. Rel. **8**, 5 (2005).
- [50] M.E. Peskin, and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Westview, (1995).
- [51] Adelberger, E., Dvali, G., & Gruzinov, A. Physical review letters, 98(1), 010402.(2007)
- [52] G. Abbiendi, .et al. "Measurement of the running of the QED coupling in small-angle Bhabha scattering at LEP", (2005) arXiv preprint hep-ex/0505072.
- [53] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009); M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 116012 (2012).
- [54] R. C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003); P. A. Bolokhov and M. Pospelov, Phys. Rev. D **77**, 025022 (2008); C. M. Reyes, Phys. Rev. D **80**, 105008 (2009); J. Lopez-Sarrion and C. M. Reyes, Eur. Phys. J. C **72**, 2150 (2012); C.M. Reyes, L.F. Urrutia, J.D. Vergara, Phys. Lett. B **675**, 336 (2009).
- [55] C. M. Reyes, L. F. Urrutia, J. D. Vergara, Phys. Rev. D **78**, 125011 (2008); C. M. Reyes, Phys. Rev. D **82**, 125036 (2010); Phys. Rev. D **87**, 125028 (2013).
- [56] T. Mariz, Phys. Rev. D **83**, 045018 (2011); T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D **85**, 125003 (2012); F. A. Brito, M. S. Guimaraes, E. Passos, P. Sampaio, C. Wotzasek, Phys. Rev. D **86**, 105036 (2012).
- [57] D. Colladay, P. McDonald, , J. Math. Phys. **43**, 3554 (2002).
- [58] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, E. Passos, F.E.P. dos Santos, E.O. Silva, Phys. Rev. D **87**, 047701 (2013).
- [59] R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., R. V. Maluf, and F. E. P. dos Santos, Phys. Rev. D **86**, 125033 (2012).
- [60] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, R.V. Maluf, F.E.P. dos Santos, Physics Letters B **726.4**, 815-819 (2013)
- [61] W. F. Chen and G. Kunstatter, Phys. Rev. D **62**,105029 (2000); C. D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006).
- [62] Lamb, E. Willis, and Robert C. Retherford, Physical Review **72**, 241 (1947).

- [63] M. Weitz, *et al.* Physical Review A **52.4**, 2664 (1995).
- [64] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, and B. Odom, Phys. Rev. Lett. **97**, 030802 (2006).
- [65] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999); J.M. Chung, Phys.Rev. D **60**, 127901 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001); G. Bonneau, Nucl. Phys. B **593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, J. High. Energy Phys. 0104, (2001) 032.
- [66] O.A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. B **610**, 316 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G **28**, L23 (2002); J. Phys. G **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, J. High. Energy Phys. 0510 (2005) 019; J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, F. A. Brito, J. High. Energy Phys. 0706, (2007) 016; B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 101701 (2004); F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B **664**, 112 (2008); Oswaldo M. Del Cima, J. M. Fonseca, D.H.T. Franco, O. Piguet, Phys. Lett. B **688**, 258 (2010).
- [67] S. M. Carroll and H. Tam, Phys. Rev. D **78**, 044047 (2008).
- [68] V. A. Kostelecky, C.D. Lane, and A.G.M Pickering, Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002).
- [69] V.A. Kostelecky and N. Russell, Rev. Mod. Phys. **83**, 11 (2011).
- [70] R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., Adalto R. Gomes, and Paulo R. D. Pinheiro, Phys. Rev. D **80**, 125040 (2009); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, F. E. P. dos Santos, Phys. Rev. D **82**, 125006 (2010).
- [71] F.R. Klinkhamer, M. Schreck, Nucl. Phys. B **848**, 90 (2011); M. Schreck, Phys. Rev. D **86**, 065038 (2012).
- [72] M. Schreck, Phys. Rev. D **89**, 085013 (2014).
- [73] M. A. Hohensee, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, arXiv:1210.2683
- [74] D. Colladay, arXiv:1309.5890

-
- [75] D. Colladay, P. McDonald, R. Potting, Phys. Rev. D **89**, 085014 (2014).
- [76] B. Altschul, J. Phys. A **39**, 13757 (2006).
- [77] M. A. Hohensee, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 170402 (2009); Phys. Rev. D **80**, 036010 (2009).
- [78] D. L. Anderson, Marc Sher, Ismail Turan, Phys. Rev. D **70**, 016001 (2004).
- [79] M. Cambiaso, R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. D **90**, 065003 (2014).
- [80] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **38**, 881 (1967).
- [81] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, J. S. Rodrigues, and M. R. O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009); R. Casana, Manoel M. Ferreira Jr, and Madson R. O. Silva, Phys. Rev. D **81**, 105015 (2010).
- [82] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and F. E. P. dos Santos (to be published).