

Fabiano de Carvalho Simas

Tópicos em Defeitos Topológicos: Colisões e Localização de Campos

São Luís
2015

Fabiano de Carvalho Simas

Tópicos em Defeitos Topológicos: Colisões e Localização de Campos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de doutor.

Orientador: Prof. Dr. Adalto Rodrigues
Gomes dos Santos Filho

**São Luís
2015**

Simas, Fabiano de Carvalho

Tópicos em defeitos topológicos: colisões e localização de campos / Fabiano de Carvalho Simas. - São Luís, 2015.

131 páginas

Orientador: Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Pós-Graduação em Física, 2015.

1. Defeitos Topológicos 2. localização de partículas 3. colisão de defeitos
I. Título

CDU 530.145

Tópicos em Defeitos Topológicos: Colisões e Localização de Campos

Fabiano de Carvalho Simas

Aprovada em: ____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho
(Orientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
(Co-orientador)

À Deus
Aos meus pais, Jairo e Maurilene
Aos meus irmãos, Gustavo e Kristiano
Aos meus eternos amigos
A Ana Karoline Sousa Mendes Simas
A pequena Alice Sousa Mendes Simas

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pelas bênçãos. Ao meu orientador Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes meus sinceros agradecimentos pela orientação desde os tempos de iniciação científica. Além disso, pela competência, paciência e sempre por me incentivar em seguir a carreira de pesquisador. Gostaria de agradecer também o Prof. Dr. Rodolfo Casana pela co-orientação e grandes discussões. Grato ainda aos professores do departamento de Física, em especial ao Prof. Dr. Manoel Messias. Ao Prof. Dr. Kleber Zuza pela grande colaboração. Meu agradecimento a Prof. Dr^a. Joana Oliveira pela co-orientação durante o estágio de doutorado sanduíche em Porto (Portugal). Aos meus amigos de doutorado: Kleber Anderson, Mauro Bogeia, Wesdneý, Diego Barbosa, Roemir, Alysson Bruno, Guillermo e Edinilson. À CAPES pela concessão da bolsa, que me possibilitou a realização deste trabalho.

Manifesto minha gratidão à todos meus familiares, principalmente aos meus pais, Jairo e Maurilene Simas e aos meus irmãos Gustavo e Kristiano por me mostrarem o verdadeiro significado de família. Também sou grato aos meus tios Paulo Henrique, Carlos César, Maura e à minha avó Marli Bezerra que sempre me incentivaram. Aproveito ainda para agradecer à Zilda, Junior Abas, George Amilcar e Aline pelo apoio.

Não posso deixar de agradecer aos meus eternos amigos: Thiago Sousa, Isabela, “Jama”, Renato, Arikerne, Gabriela, Fernanda, Marília, Concita e Zequinha. Não esquecendo dos amigos que me acompanham desde a infância, em particular, Wendel e Thales.

À Ana Karoline Simas por seu amor, confiança e por me fazer acreditar sempre. Agradeço a minha pequena Alice Simas, por me proporcionar a realização de um sonho.

"...seja quem você for ou qualquer posição que você tenha na vida, do nível altíssimo ao mais baixo, tenha sempre como meta muita força e muita determinação, e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá, de alguma maneira você chega lá"

Ayrton Senna

Lista de Publicações

- R. Casana, A. R. Gomes, R. Menezes, F. C. Simas - Trapping of spin-0 fields on tube-like topological defects - Physics Letters B 730 (2014) 8-13
- R. Casana, A. R. Gomes, G. V. Martins, F. C. Simas - Trapping Dirac fermions in tubes generated by two scalar fields - Physical Review D 89, 085036 (2014)
- A. R. Gomes, R. Menezes, K. Z. Nobrega, F. C. Simas - Kink-antikink collisions for twin models - Physical Review D 90, 065022 (2014)
- R. Casana, A. R. Gomes, F. C. Simas - Trapping Spin-0 particles on p -balls in $(D,1)$ -dimensions - Journal of High Energy Physics 06 (2015) 135

Resumo

Nesta tese introduz-se uma nova classe de defeitos topológicos em $(D,1)$ -dimensões chamados de p -balls. Os defeitos são construídos, na ausência da interação gravitacional, por $\mathcal{M} \geq 1$ campos escalares que dependem radialmente de p dimensões espaciais, com $2 \leq p \leq D - 1$. Mostra-se que os defeitos são estáveis por perturbações radiais e angulares, analisando de forma geral a localização de uma partícula de spin-0 nos defeitos. A partícula é descrita por um campo escalar Φ suficientemente fraco para não perturbar a configuração do defeito, mas ligado a ele por meio de um termo de acoplamento na Lagrangeana. Após uma decomposição conveniente de Φ , verifica-se que sua amplitude radial satisfaz uma equação do tipo Schrödinger, a partir da qual é possível investigar numericamente a existência de estados ligados ou estados ressonantes. Particularizando, são considerados exemplos com um, dois e três campos, procurando investigar de que forma a estrutura do defeito, número de dimensões radiais e constante de acoplamento entre os campos estão relacionadas com a ocorrência daqueles estados. Em seguida, é abordada a localização de partículas de spin-1/2 em p -balls geradas por dois campos escalares ϕ e χ em $(3,1)$ dimensões. Considera-se um acoplamento geral de Yukawa entre o defeito e o campo fermiônico do tipo $\eta F(\phi, \chi) \bar{\psi} \psi$. Finalmente investigam-se colisões kink (K) - antikink ($\bar{K}$) em modelos gêmeos. Modelos gêmeos são caracterizados, quando consideradas soluções estáticas, por apresentarem os mesmos perfis de campo e de densidade de energia. Determina-se de que forma o espectro de excitações lineares em torno das soluções são responsáveis por distinguir a estrutura de colisão $K\bar{K}$ em modelos gêmeos aos da teoria $\lambda\phi^4$.

Palavras-chave: Defeitos topológicos, localização de partículas e colisão de defeitos.

Abstract

In this work it is introduced a new class of topological defects in $(D,1)$ -dimensions dubbed p -balls. The defects are constructed, in the absence of gravitational interaction, by $\mathcal{M} \geq 1$ scalar fields depending radially of p spatial dimensions, with $2 \leq p \leq D - 1$. It is shown that the defects are stable under radial and angular perturbations. It is analyzed in full generality the issue of localization of a spin-0 particle in the defects. One particle is described by a scalar field Φ sufficiently weak in order not to disturb the defect configuration. The field Φ is attached to the defect by a coupling term in the Lagrangian. After a convenient decomposition of Φ , it is verified that the radial amplitude obeys a Schrödinger-like equation. From this it is possible to investigate numerically the existence of bound or resonant states. Particularizing, are considered examples with one, two and three scalar fields, trying to investigate the way the defect structure, number of radial dimensions and coupling constant between the fields, are related to the occurrence of such states. Next it is studied the localization of spin-1/2 particles in p -balls generated by two scalar fields in $(3,1)$ dimensions. It is considered a general Yukawa coupling between the defect and the fermionic field as $\eta F(\phi, \chi) \bar{\psi} \psi$. Finally it is investigated the dynamics of kink(K) - antikink($\bar{K}$) collisions between a in twin models. Two twin models are characterized, when static solutions are considered, by the same scalar field and energy density profile. It is determined the way the spectrum of linear excitations around the solutions are responsible by the structure of $K\bar{K}$ collisions in twin models from the ϕ^4 theory.

Palavras-chave: Topological defects, localization of particles and collision of defects.

Lista de Figuras

2.1	Potencial ϕ^4	12
2.2	Solução kink ϕ^4	13
2.3	Potencial de Schrödinger ϕ^4	14
2.4	Estado ligado e modo zero	15
2.5	Potencial ϕ^6	16
2.6	Potencial de Schrödinger ϕ^6	17
2.7	Potencial para modelo de dois campos	22
2.8	Solução para modelo de dois campos	24
3.1	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: função $\phi(r)$. Fixamos $r_0 = 1$, $\lambda = 30$. Temos a) $p = 2$, b) $p = 3$ e c) $p = 4$. Curvas são para $q = 1$ (linha preta), 3 (tracejado vermelho), 5 (traço-ponto verde) e 7 (traço longo azul).	40
3.2	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: função $\rho(r)$. Fixamos $r_0 = 1$, $\lambda = 30$. Temos a) $p = 2$, b) $p = 3$ e c) $p = 4$. Curvas são para $q = 3$ (linha preta), 5 (tracejado vermelho), 7 (traço-ponto verde) e 9 (traço longo azul).	41
3.3	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger V para $j = 2$, $r_0 = 1$, $p = 2$ e $q = 1$ (linha preta), $q = 3$ (ponto azul), $q = 5$ (tracejado-ponto marrom), $q = 7$ (traço longo verde). Plots são para a) $\eta = 30$, $\lambda = 100$, b) $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e c) $\eta = 100$, $\lambda = 30$	41
3.4	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger V para $r_0 = 1$, $p = 2$, $q = 5$ e $j = 0$ (linha preta), $j = 2$ (ponto azul), $j = 4$ (traço-ponto marrom), $j = 6$ (traço longo verde). Plots são para a) $\eta = 30$, $\lambda = 100$, b) $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e c) $\eta = 100$, $\lambda = 30$	42

3.5	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger V para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (ponto-traço marrom), $p = 5$ (traço longo verde) e $p = 6$ (traço vermelho). Os gráficos são para a) $q = 3$, b) $q = 5$ e c) $q = 7$	44
3.6	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: funções $\phi(r)$ (tipo kink, linhas sólidas) e $\chi(r)$ (tipo lump, tracejado). Fixamos $r_0 = 1$, $\lambda = 30$. Temos a) $s = 0.06$ e b) $s = 0.1$. Curvas são para $p = 2$ (preto), 3 (vermelho), 4 (verde) e 5 (azul).	47
3.7	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: densidade de energia $\rho(r)$ para $r_0 = 1$ e $\lambda = 30$, $s = 1/60$ (linha preta), $s = 0.03$ (ponto azul), $s = 0.1$ (traço-ponto marrom), $s = 0.3$ (traço longo verde), $s = 0.5$ (tracejado vermelho). Plots são para a) $p = 2$, b) $p = 3$, c) $p = 4$ and d) $p = 8$	47
3.8	Modelo de dois campos para 2-balls em $(D,1)$ -dimensões: densidade de energia $\rho(r)$ para $r_0 = 1$, $p = 2$ e $s = 1/60$ (linha preta), $s = 0.03$ (ponto azul), $s = 0.1$ (traço-ponto marrom), $s = 0.3$ (traço longo verde). Plots são para a) $\lambda = 30$, b) $\lambda = 50$ e c) $\lambda = 100$	48
3.9	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger $V_1(r)$ (esquerda) e $V_2(r)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde). Plots são para $s = 0.06$ e $s = 0.1$	49
3.10	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: Potenciais de Schrödinger a) $V_1(r)$ (esquerda) e b) $V_2(r)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde).	51
3.11	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger a) $V_1(r)$ (esquerda) e b) $V_2(r)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 100$, $s = 0.06$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde).	53
3.12	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger $V_1(r)$ para a) $p = 2$, b) $p = 5$, c) $p = 7$ e $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$, $j = 0$ (linha preta), $j = 2$ (ponto azul), $j = 4$ (traço-ponto marrom), $j = 6$ (traço longo verde).	54

3.13	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: $(p-1)+P$ em função de M para o acoplamento $F_1(\chi)$ (esquerda) e $F_2(\phi, \chi)$ (direita) para $j=2$, $r_0=1$, $\eta=30$, $\lambda=30$, e $p=2$ (linha preta), $p=3$ (ponto azul), $p=4$ (traço-ponto azul), $p=5$ (traço longo verde). Os plots são para $s=0.06$ e $s=0.1$, e correspondentes potenciais da Fig. 3.9.	55
3.14	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: $(p-1)+P$ em função de m para o acoplamento $F_1(\chi)$ (esquerda) e $F_2(\phi, \chi)$ (direita) para $j=2$, $r_0=1$, $\eta=30$, $\lambda=100$, $s=0.06$ e $p=2$ (linha preta), $p=3$ (ponto azul), $p=4$ (traço-ponto marrom), $p=5$ (traço longo verde). Os plots correspondem aos potenciais da Fig. 3.11.	56
3.15	Potencial do tipo Schrödinger V_4 para $j=2$, $r_0=1$, $\eta=30$, $\lambda=30$, $s=0.06$ e $a=0, b=2$ (linha preta), $a=0, b=1$ (ponto azul), $a=1, b=1$ (traço ponto marrom), $a=1, b=0$ (traço longo verde), $a=2, b=0$ (traço vermelho). Plots são para $p=3$ (esquerda) e $p=4$ (direita).	59
3.16	2-balls em $(D,1)$ -dimensões para três campos escalares: funções $\phi(r)$ (linha preta), $\chi(r)$ (traço vermelho) e $\sigma(r)$ (traço-ponto verde). Fixamos $r_0=1$ e $\lambda=30$ e acoplamentos $sg^2=1$. Temos $s=1.01$ (linha fina), $s=5$ e $s=10$ (linha espessa).	61
3.17	p -balls em $(D,1)$ -dimensões para três campos escalares: funções $\phi(r)$ (linha preta), $\chi(r)$ (traço vermelho) e $\sigma(r)$ (traço-ponto verde). Fixamos $r_0=1$ e $\lambda=30$, $s=2$ e $sg^2=1$. Temos $p=2$ (linha fina), $p=4$ e $p=8$ (linha espessa).	61
4.1	Tubo	64
4.2	Densidade de Energia	67
4.3	Potenciais de Schrödinger	73
4.4	Picos de Ressonância	74
4.5	Zoom dos picos de ressonância	75
6.1	Solução <i>kink</i> ϕ^4	94
6.2	Model SG	95
6.3	Centro de massa para $v_{ini}=0.18$ e $v_{ini}=0.2411$	97
6.4	Centro de massa para $v_{ini}=0.27$ e $v_{ini}=0.2$	98
6.5	Número de <i>bounces</i> em função da velocidade inicial - modelo ϕ^4	98

6.6	Três primeiras janelas de <i>two-bounces</i>	100
6.7	Estrutura fractal do modelo ϕ^4	101
6.8	Colisão <i>three-bounces</i> ϕ^4	102
7.1	Potencial de Schrödinger $U_q(z)$ para $1/M^2 \rightarrow 0$ (linha vermelha), 0.1 (linha tracejada preta) e 0.2 (linha ponto-tracejada azul).	107
7.2	Campo escalar $\phi(0,t)$ no centro de massa em função do t para a) $v_{in} = 0.18$ (estado <i>bion</i>), b) $v_{in} = 0.20$ (colisão <i>two-bounces</i>) e c) $v_{in} = 0.28$ (colisão <i>one-bounce</i>).	110
7.3	Número de <i>bounces</i> em função da velocidade inicial v_{in} , a) para o modelo ϕ^4 (superior esquerdo) e b) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$ (superior centro) e $1/M^2 = 0.05$ (superior direito), mostrando a presença das janelas de <i>two-bounces</i> . Após o <i>zoom</i> no intervalo, janelas de <i>three-bounces</i> podem ser vistas, para d) o modelo ϕ^4 (inferior esquerdo), e) modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$ (inferior centro) e f) modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.05$ (inferior direito).	111
7.4	Intervalo de velocidades dentro do qual o par $K\bar{K}$ escapa após uma colisão <i>two-bounces</i> como função de m , o número de pequenas oscilações de $\phi(0,t)$ entre as duas interações a) para o modelo ϕ^4 (cruz vermelha), b) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$ (bola preta) e c) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.05$ (quadrado azul).	112
7.5	Campo escalar $\phi(0,t)$ no centro de massa em função de t para a) $v_{in} = 0.18$ (colisão <i>two-bounces</i>), b) $v_{in} = 0.20$ (estado <i>bion</i>) e c) $v_{in} = 0.28$ (colisão <i>one-bounce</i>) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$	113
7.6	Tempo para a primeiro (linha preta), segundo (traço longo vermelho) e terceiro (traço curto azul) <i>bounces</i> em uma colisão $K\bar{K}$, como função da velocidade inicial para a) ϕ^4 e b) gêmeo com $1/M^2 = 0.01$	114
7.7	Tempo entre os <i>bounces</i> em função de $n = m + 2$, onde m é o número das janelas para a) $1/M^2 = 0$ (preta), b) $1/M^2 = 0.01$ (vermelha), c) $1/M^2 = 0.05$ (azul) e d) $1/M^2 = 0.08$ (verde). Para fixos $1/M^2$, círculos representam os resultados numéricos, enquanto que a linha é um ajuste por meio dos mínimos quadrados.	114

Lista de Tabelas

3.1	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: autovalores M_{nj}^2 , soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $p = 2$, com q , λ e η do potencial de Schrödinger para $j = 2$ que corresponde às Figs. 3.3 e 3.4.	43
3.2	Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: autovalores M_{nj}^2 , soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$, com p e q dos potenciais de Schrödinger para $j = 2$ correspondendo à Fig. 3.5. . . .	45
3.3	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: autovalores M_{nj}^2 , soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, com potenciais de Schrödinger para $j = 2$ correspondendo à Fig. 3.9.	50
3.4	Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: autovalores M_{nj}^2 , soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$, com potenciais de Schrödinger para $j = 2$ correspondendo a Fig. 3.10.	52
6.1	As colunas v_1 e v_2 correspondem ao primeiro e último pontos da velocidade da janela, o inteiro m faz referência a janela e Δv corresponde a largura da janela. Os dados representam as 8 primeiras janelas de <i>two-bounces</i> e estão de acordo com a Ref. [33].	101
7.1	Energia do primeiro estado excitado. Na segunda coluna comparamos $(\omega_1^{(1)})^2$, dado pela Eq. (7.14) obtida com a teoria de perturbação independente do tempo. A terceira coluna mostra a energia obtida numericamente com o método de elementos finitos. A quarta coluna nos indica o erro relativo entre os resultados das segunda e terceira colunas.	108

7.2	Separação em velocidades das primeiras quatro janelas de <i>two-bounces</i> . m corresponde a janela de <i>two-bounces</i> (igual ao número de oscilações de $\phi(0,t)$ entre os <i>bounces</i>). Para o modelo ϕ^4 , as colunas v_1 e v_2 correspondem aos primeiro e último pontos da velocidade da janela e Δv corresponde a largura (os resultados numéricos estão de acordo com a tabela II da Ref. [33]). Para o modelo <i>twin k-defect</i> com $1/M^2 = 0.01$, colunas a direita mostram informações similares identificadas por v_{1T} , v_{2T} e Δv_T	111
7.3	Coefficiente angular teórico $2\pi/(\omega_1^{(1)})$ versus coeficiente angular a obtido pelo método dos mínimos quadrados a partir da Fig. 7.7.	115

Sumário

1	Introdução	1
2	Campos Escalares	6
2.1	Modelos com um campo escalar	6
2.1.1	Equação de Bogomol'nyi	8
2.1.2	Estabilidade Linear	9
2.1.3	Exemplo de Defeitos	12
2.2	Modelo com dois campos escalares	18
2.2.1	Estabilidade Linear	19
2.2.2	Modelo BNRT	22
3	Armadilhamento de partículas de spin-0 em p-balls em $(D,1)$-dimensões	26
3.1	Formalismo geral para construção de p -balls em $(D,1)$ -dimensões	27
3.1.1	O formalismo de primeira ordem	29
3.1.2	Carga topológica	30
3.1.3	Estabilidade sob perturbações radiais	31
3.1.4	Estabilidade sob perturbações angulares	33
3.1.5	Aspectos gerais das soluções radiais	34
3.2	Localização de partículas de spin-0 em p -balls	34
3.3	Um modelo de um campo	40
3.4	Um modelo de dois campos	46
3.4.1	p -balls em $(3,1)$ -dimensões	56
3.4.2	p -balls em $(4,1)$ -dimensões	56
3.4.3	p -balls em $(5,1)$ -dimensões	57
3.5	Modelos de três campos	58

4	Armadilhamento de férmions de Dirac em p-balls gerados por dois campos escalares em (3,1)-dimensões	63
4.1	Tubo em (3,1)-dimensões	64
4.2	Localização de Férmions	67
4.3	Resultados Numéricos	72
5	Defeitos topológicos em teorias de campo escalar com termo cinético geral	77
5.1	Modelos com termo cinético geral	77
5.2	Estabilidade Linear	79
5.3	O modelo ALTW	84
6	Colisões <i>kink-antikink</i>	91
6.1	Modelo Sine-Gordon	92
6.2	Modelo ϕ^4	94
7	Colisões <i>kink-antikink</i> para Modelos Gêmeos	103
7.1	O Modelo ϕ^4 e sua parte Gêmea	106
7.2	Resultados Numéricos	109
7.2.1	Teoria $\lambda\phi^4$	109
7.2.2	Teoria Gêmea	112
8	Conclusão	116
A	Método <i>Pseudospectral</i>	119
A.1	Método de Colocação	120
	Referências Bibliográficas	123

Declaração

O Capítulo 2 é uma revisão e segue fortemente o conteúdo das Refs. [2, 5, 37, 53, 54].

O Capítulo 3 contém os resultados de pesquisa científica original, publicado nos artigos *R. Casana, A. R. Gomes, F. C. Simas - Trapping Spin-0 particles on p-balls in (D,1)-dimensions* - Journal of High Energy Physics 06 (2015) 135 e *R. Casana, A. R. Gomes, R. Menezes, F. C. Simas - Trapping of spin-0 fields on tube-like topological defects* - Physics Letters B 730 (2014) 8-13.

O Capítulo 4 contém os resultados de pesquisa científica original, publicado no artigo *R. Casana, A. R. Gomes, G. V. Martins, F. C. Simas - Trapping Dirac fermions in tubes generated by two scalar fields* - Physical Review D 89, 085036 (2014).

O Capítulo 5 é uma revisão e segue fortemente o conteúdo das Refs. [24, 25, 26, 52]

O Capítulo 6 é uma revisão e segue fortemente o conteúdo das Refs. [27, 28, 30, 31, 32, 33]

O Capítulo 7 contém os resultados de pesquisa científica original, publicado no artigo *A. R. Gomes, R. Menezes, K. Z. Nobrega, F. C. Simas - Kink-antikink collisions for twin models* - Physical Review D 90, 065022 (2014).

Capítulo 1

Introdução

O estudo de defeitos topológicos em teoria de campos cobre uma vasta área da Física, desde a aplicação em física da matéria condensada, como ocorre com paredes de domínio em materiais ferromagnéticos, à cosmologia, como no estudo da formação de tais defeitos decorrentes de transições de fases em um Universo primordial [1]. A possibilidade de defeitos aparecerem em nosso Universo depende do entendimento do mecanismo de quebra espontânea de simetria e das transições de fases cosmológicas [2]. Essa transição ocorreu no Universo primordial, quando a temperatura chegou a um ponto crítico para o qual o campo assume um valor esperado de vácuo degenerado, que por sua vez, contribuiu para o surgimento das estruturas topológicas.

Podemos elucidar o mecanismo de quebra espontânea de simetria através de exemplos com caráter meramente ilustrativo, permitindo uma melhor compreensão desse fenômeno. O jogo de roleta no cassino é um bom exemplo que nos possibilita entender o processo de quebra espontânea de simetria. No início, colocamos a bola na roleta, que se encontra em movimento circular. Interessante notar que os espaços a serem ocupados pela bola são iguais, por isso, independente do ângulo que observamos a roleta, a simetria será sempre mantida. Com o passar do tempo, a bola perde parte de sua energia com sucessivas colisões com a roleta, então em um dado instante de tempo, a bola preenche um buraco, mas note que todos os espaços possuem inicialmente a mesma probabilidade de serem ocupados. Portanto, podemos concluir que houve uma quebra espontânea de simetria originando um novo vácuo fundamental não simétrico e degenerado.

Um outro bom exemplo é o de uma vareta colocada na posição vertical sobre uma mesa. Ao ser aplicada uma força sobre a vareta, a mesma se movimentará de forma aleatória para

qualquer um dos lados, ou seja, ocasionando a quebra de simetria. Não apenas em exemplos do cotidiano encontramos quebras de simetria. Em sistemas ferromagnéticos, os vetores de magnetização podem ficar alinhados em uma única direção até uma certa área de transição marcada pela mudança na direção desses vetores, assim cria-se um defeito chamado parede de energia de domínio magnética, mantendo desconectadas duas regiões com a mesma energia. Os vários tipos de defeitos formados dependem exclusivamente do tipo de simetria que é quebrada e da natureza da transição de fase.

A simetria da lagrangiana é importante pois caracteriza a estrutura dos estados de vácuo da teoria. Por exemplo, uma lagrangiana com simetria $U(1)$ é invariante sobre uma transformação da forma $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\theta}\phi(x)$ [3], onde a coordenada θ nos permite o estudo de dois tipos de simetrias. A primeira delas é a global, que ocorre quando θ não depende da coordenada do espaço-tempo e assume um valor fixo. Ao contrário da global, existe a simetria local, onde a coordenada θ depende do espaço-tempo, $\theta = \theta(x)$. Há ainda outros tipos de transformações, como por exemplo, a simetria Z_2 ($\phi \rightarrow -\phi$), onde o modelo mais simples que apresenta esse fenômeno é o $\lambda\phi^4$. A quebra acontece em virtude do potencial da teoria passar a ter dois estados de mínima energia, ao invés de um estado de vácuo.

A ideia matemática que se tem de defeitos é simplesmente uma solução com energia finita alcançada a partir de uma equação diferencial não linear. Quanto à visão Física, são definidos como a região de transição entre diferentes vácuos do sistema. Assim, em Teoria de Campos os defeitos são conhecidos como soluções clássicas da equação de movimento que possuem uma topologia não trivial. A topologia é uma ramo da matemática que estuda o comportamento assintótico, podemos identificar a divisão das soluções em dois grupos, as topológicas e não topológicas [5]. A primeira classe de soluções citadas, possui limites assintóticos diferentes ($\phi(-\infty) = \phi_1$) e ($\phi(+\infty) = \phi_2$), um exemplo desse defeito são os *kinks*. A solução não topológica por sua vez, apresenta os mesmos limites assintóticos ($\phi(\pm\infty) = \phi_0$), e como exemplo temos os *lumps* [6].

Nos últimos anos, houve uma crescente no estudo da imersão de soluções topológicas em estruturas com dimensão espacial superior [7]-[8]. A proposta de mundo brana consiste em considerar o nosso Universo 4-dimensional imerso em um meio de dimensões espaciais maior chamado *bulk*. Uma importante característica relacionada ao cenário das dimensões extras é que todos os campos de matéria são confinados dentro da membrana, enquanto a gravidade é livre para propagar em todas as dimensões [9, 10].

No que se refere à Física de mais baixa dimensionalidade, há investigações interessantes envolvendo, por exemplo, a construção de defeitos topológicos com campos escalares contornando o Teorema de Derrick [1, 5, 11]. É certo que modelos em $(1+1)$ -dimensões, apesar de seu caráter mais simples, sofrem uma grande restrição no que tange à descrição de sistemas mais realísticos. Seria interessante encontrarmos, para mais dimensões espaciais, soluções do tipo *soliton* em modelos envolvendo apenas campos escalares. No entanto, o Teorema de Derrick afirma que soluções estáveis estáticas e não singulares não podem existir para $D \geq 2$ [1, 16]. Assim, o teorema impõe restrições quanto à dimensionalidade do espaço para defeitos topológicos construídos apenas com campos escalares; consequentemente, teríamos soluções independentes do tempo de energia finita apenas em $D = 1$.

A premissa do teorema assume uma estrutura padrão da lagrangiana com o potencial que é não negativo [17]. É conhecido que as soluções com $D \geq 2$ colapsam e são portanto instáveis [18]. No entanto, esta dificuldade pode ser evitada por meio de alternativas às premissas do Teorema de Derrick [6]. Dentre elas, podemos considerar a inclusão de termos de derivadas de ordem superior na lagrangiana [19], a adição de campos de gauge construindo defeitos em $(3,1)$ -dimensões - modelo de Yang-Mills [20], introdução da dependência temporal, resultando em soluções não dissipativas [16], inclusão de vínculos entre os campos, como no caso do modelo $O(3)$ não linear [21], sistemas com divergência na energia total, contornada por um *cutoff* na distância devido à existência de um outro defeito [22] e dependência explícita com a distância no potencial [11].

No que segue, é estabelecida a divisão estrutural deste trabalho.

No Capítulo 2, é feita uma revisão quanto a formação dos defeitos topológicos em consequência da quebra espontânea de simetria. Como ponto de partida, iniciamos o estudo de defeitos com um campo escalar em $(1+1)$ -dimensão. Dentro desse quadro, demonstramos como obter as equações de movimento, e mostrando como o método de Bogomol'nyi reduz a ordem das equações de movimento (formalismo BPS). Também analisamos a estabilidade linear das soluções estáticas. Descrevemos alguns exemplos de defeitos conhecidos na literatura, tais como os construídos com os modelos ϕ^4 e ϕ^6 . A seção 2.2 corresponde à revisão do modelo com dois campos escalares reais acoplados. A inclusão de mais um campo escalar está interligado ao surgimento de estrutura interna no defeito [23]. Em seguida, são reproduzidas as soluções topológicas do modelo BNRT (modelo estendido ϕ^4) a partir do Método das Órbitas [6].

No Capítulo 3, introduz-se as p -balls como defeitos topológicos em $(D,1)$ -dimensões construídos com $\mathcal{M} \geq 1$ campos escalares que dependem radialmente de p dimensões radiais, com $2 \leq p \leq D - 1$. Primeiramente, é apresentado o formalismo geral, que leva a soluções BPS localizadas em p dimensões radiais. Demonstramos a estabilidade das p -balls por perturbações radiais e angulares. Analisamos a localização de partículas de spin-0 caracterizadas por um campo escalar Φ , considerando um acoplamento geral com os campos escalares que formam o defeito. Estuda-se defeitos para modelos de um, dois e três campos, observando alguns aspectos de localização de campo de spin-0 em cada sistema, e investigando numericamente a ocorrência de estados ligados e ressonâncias.

No capítulo 4, consideramos p -balls com $\mathcal{M} = 2$, $D = 3$ e $p = 2$, caracterizando os defeitos com estrutura tipo tubo. Consideramos a localização de campos fermiônicos conectados ao tubo por meio de um acoplamento de Yukawa. Uma decomposição dos campos fermiônicos estabelece um conjunto de equações de primeira ordem para as componentes de mão direita e esquerda. Após uma nova decomposição das amplitudes, obtém-se uma equação de Schrödinger cujos autovalores são as massas dos estados fermiônicos. É importante notar que a barreira de potencial construída a partir de um modelo de dois campos nos leva ao aparecimento de um defeito com estrutura interna, que contribuirá para o surgimento das ressonâncias. Em modelos de branas que lidam com localização de férmions, observamos que as ressonâncias são caracterizadas pelo vazamento dos estados massivos após um tempo suficiente grande dentro do defeito. Na última parte deste capítulo, descrevemos os resultados numéricos, em particular, com interesse em ressonâncias.

No capítulo 5, revisamos teorias com dinâmica generalizada com um campo escalar em $(1+1)$ -dimensões, construindo defeitos topológicos conhecidos como k -defects [24]-[26]. A estabilidade linear de uma estrutura de defeito por meio da introdução de flutuações em torno da solução também é estudada de forma generalizada, nos levando a uma equação de Schrödinger independente do tempo. A estabilidade é garantida se os autovalores forem positivos ou iguais a zero, caracterizando a ausência dos modos taquiônicos. No entanto, a análise dos autovalores depende do potencial do modelo específico em questão [24]. Em seguida, é feita uma descrição de um modelo modificado chamado de ALTW [26]. A analogia entre o modelo com termo cinético não canônico com o modelo com dinâmica padrão é a característica central desse problema. Podemos encontrar mesmas propriedades físicas descritas por diferentes modelos, sendo essa semelhança intitulada como teoria gêmea, ou seja, quando duas teorias

distintas resultam na mesma solução e densidade de energia.

No capítulo 6 revisamos colisões de defeitos topológicos. Essa é uma linha de pesquisa que contém trabalhos interessantes, como podemos observar em [27]-[36]. O modelo *sine-Gordon* é um exemplo clássico de teoria com solução tipo *soliton*, pois após o choque, os *kinks* reaparecem sem qualquer deformação, apenas com uma mudança de fase [30]. As principais diferenças em relação aos demais modelos encontram-se em sua integrabilidade e na presença de apenas um estado fundamental (modo translacional). O modelo ϕ^4 é não integrável e possui um estado ligado, que o diferencia gradamente do modelo *sine-Gordon* (SG). A existência de modos ligados extras contribuem para o armazenamento de energia durante o impacto, fornecendo comportamentos interessantes [32]. A análise feita em [28] mostra que diferentes velocidades iniciais dos *kinks* levam a diferentes comportamentos, com destaque para os *bions* e as janelas de *bounces*. O comportamento *bion* também é conhecido como *breathers*, e é caracterizado pelas colisões que perduram indefinidamente, com emissão de radiação. O número de *bounces* corresponde ao número de batidas entre o par kink-antikink ($K\bar{K}$) antes da sua completa separação.

O capítulo 7 aborda de que forma o processo de colisão de *kink-antikink* pode ser usado para distinguir modelos gêmeos, caracterizados no capítulo 6. Como vimos, são modelos diferentes com a mesma solução e densidade de energia. Em particular, é investigado sobre quais aspectos a presença de um termo cinético não canônico na lagrangiana pode ser revelado durante a colisão. Estudamos algumas diferenças entre os modelos gêmeo; tais como, seus estados ligados. Finalizamos com resultados numéricos de espalhamento $K\bar{K}$ e sua dependência com um parâmetro do modelo gêmeo.

As principais conclusões desse trabalho estão descritas no capítulo 8. O apêndice A descreve o método numérico utilizado no processo de colisão de *kinks*.

Capítulo 2

Campos Escalares

Neste capítulo vamos analisar defeitos topológicos em modelos com campos escalares em $1 + 1$ dimensões. Na seção 2.1 a investigação consistirá do estudo de modelos com apenas um campo real. Em seguida, estudamos modelos de dois campos escalares acoplados. Utilizamos o método de Bogomol'nyi-Prasad-Somerfeld para a solução da equação de movimento. Com isso, podemos verificar que para uma certa classe de potenciais as soluções de equações de primeira ordem também são soluções das de segunda ordem, as quais são estáveis e minimizam a energia do sistema.

2.1 Modelos com um campo escalar

Uma enorme gama de sistemas físicos são descritos pelos mais variados tipos de campos. Podemos citar por exemplo, a interação entre cargas e correntes elétricas descrita por um campo eletromagnético vetorial. Há ainda os campos tensoriais e os espinoriais, sendo todos caracterizados por suas leis de transformações. Quanto aos campos escalares, sua simplicidade é observada devido a sua invariância seguindo as leis de transformações. Destaca-se ainda que as equações de movimento podem ter soluções clássicas conhecidas como defeitos topológicos, que aparecem em modelos capazes de suportar a quebra espontânea de simetria.

A ação clássica que descreve o sistema de um campo escalar em D dimensões é dada por

$$S = \int dt d^D x \left(\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] \right), \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangiana. Um exemplo de $\mathcal{L}$ que descreve a dinâmica de um campo

escalar real ϕ é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.2)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que determina a forma como o campo interage e a lagrangiana é invariante ao aplicarmos a simetria $\phi \rightarrow -\phi$.

A equação de movimento assume a forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \partial_\phi V = 0, \quad (2.3)$$

onde $\partial_\phi V(\phi)$ corresponde a derivada em relação a ϕ . Em (1,1)-dimensões, ou seja, $\phi = \phi(x, t)$, a equação dinâmica do campo se resume a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.4)$$

uma equação diferencial parcial de segunda ordem com um termo não linear devido à derivada do potencial. O objetivo principal nesse quadro é alcançar uma solução para a equação de movimento. Temos o caso onde as configurações de campo são constantes, o que resulta em uma solução trivial. No entanto, soluções não triviais podem ser obtidas a partir do uso de soluções que independem do tempo, ou seja, configurações estáticas. Sendo assim, para campos estáticos, $\phi = \phi(x)$, a equação é levada a seguinte forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.5)$$

identificada como uma equação ordinária não linear de segunda ordem.

Aplicando o método da quadratura na Eq. (2.5), obtemos uma equação de primeira ordem que resolve a equação de segunda ordem por uma simples derivação. Portanto, a Eq. (2.5) pode ser fragmentada em [37]

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi) + C} \quad \text{ou} \quad \frac{d\phi}{dx} = -\sqrt{2V(\phi) + C}, \quad (2.6)$$

e as equações são resolvidas após integração. Impomos o valor nulo à constante C assegurando o caráter finito da energia das soluções.

2.1.1 Equação de Bogomol'nyi

A busca por soluções das equações diferenciais de segunda ordem foi o principal objetivo do método proposto por Bogomol'nyi-Prasad-Somerfeld (BPS) na década de 70 [86]. As soluções BPS são definidas por uma classe de modelos constituídos por potenciais cujos zeros são os pontos de mínimo, ou seja, definem os estados de mínima energia, identificando os setores topológicos do sistema. Considerando potenciais limitados inferiormente, podemos escrever

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.7)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$ e $W(\phi)$ é uma função suave denominada de superpotencial quando associado a teorias supersimétricas (Ref. [38]-[39]). Nesse caso as soluções conectam os mínimos do potencial, mas nem todos os potenciais precisam ser da forma como foi colocado acima. Há modelos descritos por potenciais que não são limitados inferiormente e cujas soluções conectam os pontos de inflexão [40].

O tensor energia momento tem a seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - V(\phi)\right], \quad (2.8)$$

onde a componente $T_{00} = \rho(x,t)$ é conhecida como densidade de energia do sistema. Portanto, a energia do sistema para configurações estáticas de campo consiste na integração da componente $\rho(x)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.9)$$

Na Ref. [41], Bogomol'nyi escreveu a energia em uma forma quadrática e fechada. Utilizando a Eq. (2.7), temos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 dx \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left(W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) dx. \quad (2.10)$$

As soluções fisicamente aceitáveis são as de energia finita, por isso o campo deve assumir um valor de modo que a energia seja mínima, então temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (2.11)$$

assim a primeira integral na Eq. (2.10) deve ser nula, e consequentemente a energia mínima do sistema é dada por

$$E_{min} = \mp \{W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))\} = |\Delta W|, \quad (2.12)$$

também conhecida como energia de Bogomol'nyi. As equações de primeira ordem são chamadas de equações de Bogomol'nyi e as soluções destas equações são conhecidas como estados *BPS*. Portanto, o método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção da equação de primeira ordem, ainda permite escrever a energia das configurações estáticas.

De modo geral, segundo suas características topológicas, podemos classificar as soluções *BPS*. Com isto em vista, introduzindo a corrente topológica [6]

$$j^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.13)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$ e $\epsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita (em 1+1 dimensões, temos $\epsilon^{01} = 1$). Devido ao caráter antissimétrico do tensor, é evidente que a corrente é conservada $\partial_\mu j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0$. A densidade de carga associada a Eq. (2.13) nos leva a uma carga conservada

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \frac{1}{2} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)]. \quad (2.14)$$

A carga Q possui dependência apenas das propriedades assintóticas do campo, dessa forma, podemos especificar os tipos de soluções. As soluções não topológicas (vácuo trivial) com $Q = 0$ conectam um mínimo a ele mesmo, ou seja, $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$. Além disso, existem as soluções topológicas $Q \neq 0$, as quais interligam dois pontos críticos distintos do potencial, ou seja, $\phi(+\infty) \neq \phi(-\infty)$.

Além de concluirmos que as soluções que satisfazem o limite de Bogomol'nyi possuem carga topológica diferente de zero, também poderemos afirmar que tais soluções são estáveis, questão que será discutida em seguida.

2.1.2 Estabilidade Linear

A análise abordada nessa seção refere-se à estabilidade linear das soluções estáticas da equação de movimento. A ideia em torno desse estudo é identificar que as soluções da equação

de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.15)$$

são estáveis. Com essa concepção, é necessário entender o que ocorre nas proximidades da solução estática. O procedimento consiste da introdução de pequenas perturbações de primeira ordem em torno das soluções [6, 43]. Assim temos

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.16)$$

onde $\phi_s(x)$ é a solução estática e $\eta(x, t)$ uma pequena flutuação em torno da solução. A substituição da equação acima na Eq. (2.15), resulta em

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{d^2 \eta}{dx^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.17)$$

Expandindo em série de Taylor em $V_\phi(\phi) = V_\phi(\phi_s + \eta)$ e preservando apenas os termos de primeira ordem, obtém-se

$$-\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \mathcal{V}(x)\eta = -\frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad (2.18)$$

sendo $\mathcal{V}(x) = \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s}$ o potencial da equação diferencial. Substituímos $\eta(x, t) = \rho(x)T(t)$ na Eq. (2.18), em seguida dividimos por $\rho(x)T(t)$, alcançamos

$$-\frac{1}{\rho(x)} \frac{d^2 \rho(x)}{dx^2} + \mathcal{V}(x) = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}. \quad (2.19)$$

O lado esquerdo da equação depende apenas da variável x , enquanto o lado direito depende apenas de t . Igualamos ambos os lados a uma constante de desacoplamento, obtendo como resultado um par de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega_n^2 T(t) = 0 \quad e \quad -\frac{d^2 \rho(x)}{dx^2} + \mathcal{V}(x)\rho(x) = \omega_n^2 \rho(x), \quad (2.20)$$

a primeira equação é do tipo oscilador harmônico simples e sua solução é dada por

$$T(t) = T_0 \cos(\omega_n t). \quad (2.21)$$

Quanto a Eq. (2.20)(b), trata-se de uma equação de autovalor do tipo Schrödinger, que pode ser escrita da seguinte forma [44, 45]

$$\hat{H}\rho_n(x) = \omega_n^2 \rho_n(x), \quad (2.22)$$

onde $\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}(x)$ é o correspondente operador Hamiltoniano, ω_n^2 os autovalores e $\rho_n(x)$ representa o conjunto de autofunções do operador $\hat{H}$. Se tivermos $\omega_n^2 < 0$, ω_n é imaginário, teremos uma solução instável. No entanto, se $\omega_n^2 > 0$, temos ω_n real, resultando em uma solução estável. Com $\omega_n^2 = 0$, $\phi_s(x)$ é estável com perturbação constante no tempo. Portanto, o problema de estabilidade linear é assegurado se o operador $\hat{H}$ for não negativo, ou seja, os autovalores devem ser positivos ou iguais a zero ($\omega_n^2 = 0$ denominado modo zero).

Para verificarmos que $\hat{H}$ é não negativo basta analisarmos se o operador Hamiltoniano pode ser escrito na forma $\hat{H}_\pm = \hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm$. Para esse fim, vamos considerar os modelos descritos por potenciais limitados inferiormente

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (2.23)$$

Substituindo a equação de $V(\phi)$ em $\hat{H}$, ficamos com a seguinte expressão para o Hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(W_\phi^2 + W_\phi W_{\phi\phi} \right) \Big|_{\phi_s(x)}. \quad (2.24)$$

O operador pode então ser fatorado como um produto dos operadores $\hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm$ definidos por

$$\hat{S}_\pm^\dagger = -\frac{d}{dx} \pm W_\phi \Big|_{\phi_s(x)}, \quad \hat{S}_\pm = \frac{d}{dx} \pm W_\phi \Big|_{\phi_s(x)}, \quad (2.25)$$

onde $\hat{S}_\pm^\dagger$ é o conjugado hermitiano de $\hat{S}_\pm$ [44]. À vista disso, podemos assegurar que $\hat{H}$ é positivo definido. Tal afirmação pode ser verificada a partir da Mecânica Quântica, que considera os autovalores como o valor esperado do Hamiltoniano [45]

$$\begin{aligned} \langle \rho_n | \hat{H} | \rho_n \rangle &= \langle \rho_n | \omega_n^2 | \rho_n \rangle, \\ \langle \rho_n | \hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm | \rho_n \rangle &= \langle \rho_n | \omega_n^2 | \rho_n \rangle, \end{aligned}$$

introduzindo o operador identidade $I = \sum_m |\rho_m\rangle \langle \rho_m|$, obtemos $\omega_n^2 = \sum_m |\langle \rho_m | \hat{S}_\pm | \rho_n \rangle|^2 \geq 0$,

e consequentemente o operador $\hat{H}$ é positivo ou nulo, pois o resultado mostra que o operador Hamiltoniano associado ao autoestado tem um autovalor maior ou igual a zero. Desse modo, as soluções *BPS* em sistemas com um campo escalar descrito por potenciais limitados inferiormente são linearmente estáveis mediante pequenas perturbações [46]. Além disso, pode ser calculado o modo zero $\rho_0(x)$, que corresponde ao autoestado com autovalor $\omega_0 = 0$.

A seguir será aplicado o método de Bogomol'nyi em alguns exemplos de modelos com um campo escalar. Inicialmente será discutido a classe de modelos ϕ^4 e posteriormente o ϕ^6 .

2.1.3 Exemplo de Defeitos

Modelo ϕ^4

A discussão sobre a existência das soluções topológicas foi discutida mostrando que é necessário um potencial limitado inferiormente e que este possua mais de um mínimo. Nesse sentido, consideramos o potencial para o modelo ϕ^4

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(a^2 - \phi^2)^2, \quad (2.26)$$

onde λ e a são constantes positivas. Este potencial, que pode ser visto na Fig. 2.1, apresenta simetria Z_2 ($\phi \rightarrow -\phi$) e mínimos em $\phi = \pm a$. Podemos reescrevê-lo em termos do superpotencial

$$W(\phi) = \sqrt{\lambda} \left(a^2 \phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right), \quad (2.27)$$

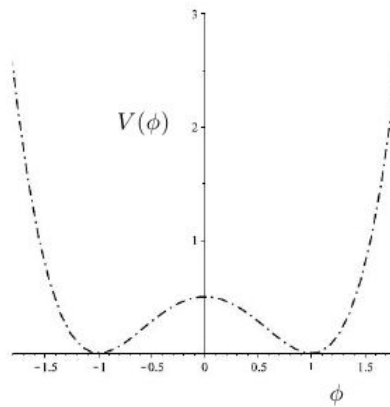


Figura 2.1: Potencial do modelo ϕ^4 com constantes $\lambda = a = 1$.

A partir da equação de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -2\lambda^2 \phi(a^2 - \phi^2), \quad (2.28)$$

e para configurações de campos estáticos em (1,1)-dimensões

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -2\lambda^2 \phi(a^2 - \phi^2), \quad (2.29)$$

onde podemos encontrar soluções *BPS* utilizando as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi = \pm \sqrt{\lambda}(a^2 - \phi^2). \quad (2.30)$$

Após integração, obtemos

$$\phi(x) = \pm a \tanh(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)), \quad (2.31)$$

onde x_0 caracteriza o centro do *kink*. A solução com sinal positivo é o chamado *kink*, enquanto a solução com sinal negativo é conhecida como antikink. O perfil do *kink* é apresentado na Fig. 2.2.

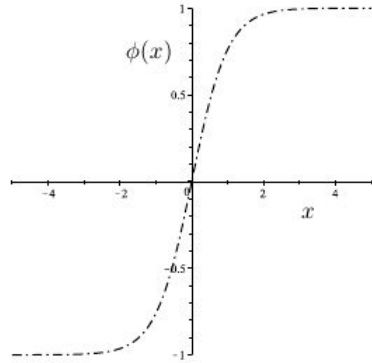


Figura 2.2: Solução do modelo ϕ^4 com constantes $\lambda = a = 1$.

Nota-se a partir da Fig. 2.2 a convergência do *kink* para os vácuos do potencial, ou seja, as soluções de campo conectam os mínimos do sistema. Como exemplo, temos o *kink* apresentando o seguinte comportamento assintótico $\phi(\pm\infty) \rightarrow \pm a = \pm 1$. Outra importante observação está em torno da espessura do defeito. O parâmetro λ está inteiramente associado à questão da largura das soluções. Dessa forma, quanto maior o valor de λ , mais abrupto torna-se o *kink*

(*antikink*), i.e., o $\phi(x)$ alcança seus vácuos mais rapidamente; consequentemente menor será a espessura do defeito.

A energia do *kink* para configurações estáticas pode ser obtida integrando a densidade de energia [47]

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lambda a^4 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda}(x - x_0)) \right] dx = \frac{4a^3\sqrt{\lambda}}{3}. \quad (2.32)$$

A partir desse resultado, verificamos que a energia de fato é finita. Podemos obter a energia através da utilização do superpotencial $W(\phi)$ e as condições assintóticas do campo. Ou seja, fazendo uso da Eq. (2.12) temos

$$E = \pm \{W(a) - W(-a)\} = \frac{4\sqrt{\lambda}a^3}{3}. \quad (2.33)$$

O caráter topológico é uma característica preponderante das soluções discutidas acima. Como já foi visto, os tipos de soluções podem ser especificadas por meio da carga topológica. Portanto, temos

$$Q = \frac{1}{2} \left[\phi(+\infty) - \phi(-\infty) \right] = a, \quad (2.34)$$

como consequência do resultado de $Q \neq 0$, a solução é dita topológica. Assim, os resultados confirmam que estamos diante de uma setor *BPS*.

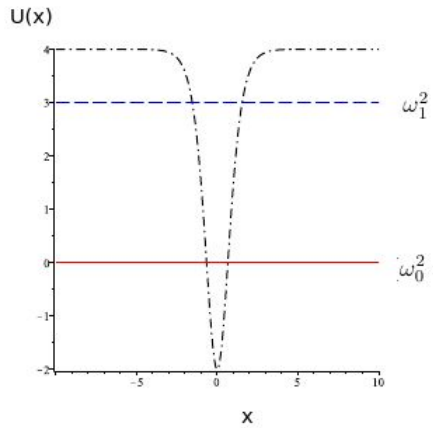


Figura 2.3: Potencial de Schrödinger de estabilidade linear para o modelo ϕ^4 para $\lambda = a = 1$ (traço-ponto preto). Valor do modo zero (linha vermelha) e primeiro estado excitado (tracejado azul).

A estabilidade linear pode ser abordada com base na equação de Schrödinger, onde após

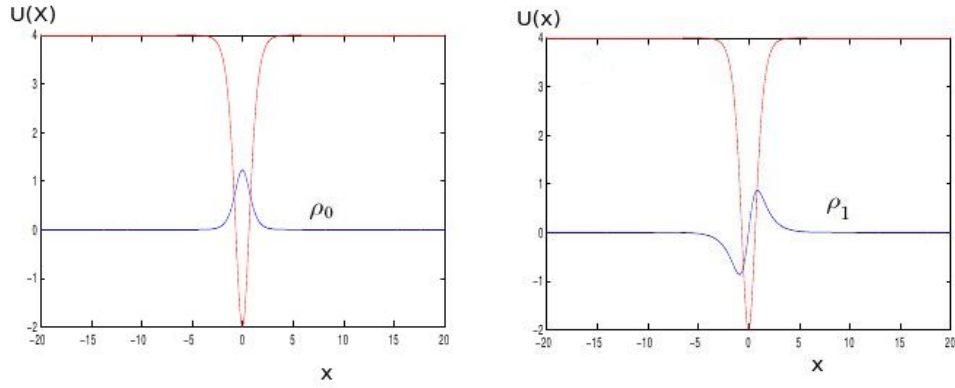


Figura 2.4: Potencial de Schrödinger de estabilidade linear para o modelo ϕ^4 para $\lambda = a = 1$ (linha vermelha). Autoestado do (a) (esquerda - linha azul) modo zero ($\omega_0^2 = 0$) e (b) (direita - linha azul) do primeiro estado excitado ($\omega_1^2 = 3$).

uma simples álgebra, obtemos

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a^2 (4 - 6 \operatorname{sech}^2(a\sqrt{\lambda}(x - x_0))) \right] \rho_n = \omega_n^2 \rho_n. \quad (2.35)$$

O potencial da Eq. (2.35) é conhecido como Pöschl-Teller modificado [48]. O gráfico do potencial está na Fig. 2.3. Como já é conhecido da literatura, esse potencial apresenta dois autovalores discretos $\omega_0 = 0$ e $\omega_1 = \sqrt{3\lambda}$ [27] e também possui autovalores no espectro contínuo $\omega_n^2 = \kappa^2 + 2m^2$. Nas Figs. 2.4(a)-(b) estão apresentados graficamente o modo zero e o primeiro estado de excitação. Os dois modos são de grande relevância para o processo de colisão de defeitos, assunto que será abordado posteriormente. Dentro desse quadro, o autovalor ω_0 é chamado de modo translacional e o ω_1 é chamado de modo vibracional [28].

A autofunção correspondente ao modo zero pode ser obtida utilizando a equação de Schrödinger com o autovalor nulo ($\omega_0^2 = 0$)

$$\rho_0(z) = \sqrt{\frac{3}{4}} \operatorname{sech}^2(z), \quad (2.36)$$

onde $z = a\sqrt{\lambda}(x - x_0)$.

Modelo ϕ^6

Para o modelo ϕ^6 , a teoria é definida pela densidade de energia [49]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \phi^2 (\phi^2 - 1)^2, \quad (2.37)$$

onde as constantes foram igualadas a 1 ($a = \lambda = 1$). O modelo é caracterizado por três vácuos, ou seja, possui três mínimos, em $\phi = 0$ e $\phi = \pm 1$ (Fig. 2.5).

A equação de movimento para configurações de campos estáticos é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi(1 - \phi^2)(1 - 3\phi^2). \quad (2.38)$$

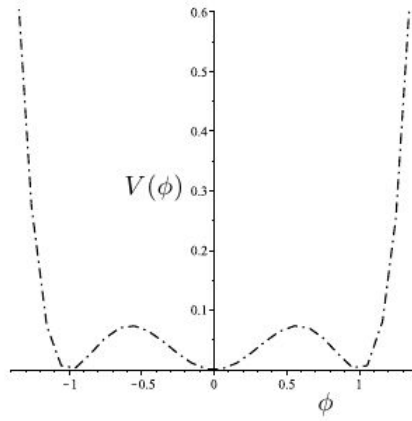


Figura 2.5: Potencial do modelo ϕ^6 com constantes $\lambda = a = 1$.

Podemos encontrar soluções desta equação de segunda ordem a partir das equações de primeira ordem abaixo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\phi(\phi^2 - 1). \quad (2.39)$$

Nesse modelo existem dois setores topológicos, o primeiro interliga os mínimos -1 a 0 e o segundo 0 a $+1$, respectivamente chamados de setor negativo e positivo [49]. A Eq. (2.39) com o sinal positivo admite duas soluções do tipo *kink*, uma para o setor positivo e outra para o negativo

$$\phi_{K+} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \tanh(x)\right)}, \quad \phi_{K-} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \tanh(x)\right)}, \quad (2.40)$$

o sinal negativo da equação de primeira ordem também contribui para duas soluções nos distintos setores. Usando a simetria discreta ($x \rightarrow -x$) sobre as soluções anteriores, temos as soluções *antikink*

$$\phi_{\bar{K}+} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \tanh(x)\right)}, \quad \phi_{\bar{K}-} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \tanh(x)\right)}, \quad (2.41)$$

os defeitos do setor negativo atravessam do vácuo 0 até o mínimo -1 , ao passo que no setor positivo, os *kinks* caminham entre 0 e 1.

A carga topológica é dada por

$$Q = \frac{1}{2} \left[\phi(+\infty) - \phi(-\infty) \right] = \frac{a}{2}, \quad (2.42)$$

associada ao *kink* do setor positivo. A energia para configurações estáticas do modelo abordado é finita e dada por

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + (\phi(\phi^2 - 1))^2 \right] dx = \frac{1}{4}. \quad (2.43)$$

Flutuações em torno das soluções estáticas que interpolam entre os vácuos do potencial são caracterizadas por

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta e^{i\omega t}. \quad (2.44)$$

Substituindo $\phi(x, t)$ acima na equação de movimento, encontramos uma equação de campo linearizada $-\partial_x^2 \eta_n + \mathcal{V}(x) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n$, cujo potencial do tipo Schrödinger é dado por

$$\mathcal{V}(x) = 1 - 12\phi_s^2 + 15\phi_s^4, \quad (2.45)$$

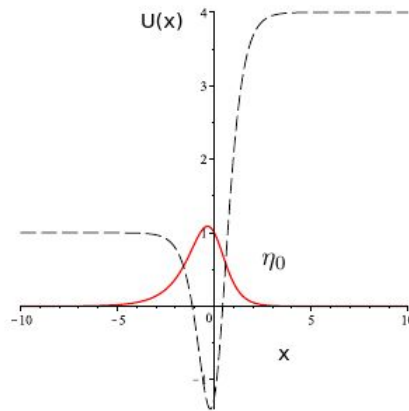


Figura 2.6: Potencial da equação de estabilidade do modelo ϕ^6 (tracejado preto) e o modo zero (linha vermelha).

O modo zero é o único modo que pode ser encontrado nesse modelo, ou seja, não há

estados localizados para um *kink* no modelo ϕ^6 . Consequentemente, temos ausência de modos vibracionais [29]. Resolvendo a equação de Schrödinger com autovalor nulo ($\omega_0^2 = 0$)

$$-\frac{d^2\eta_n}{dx^2} + \left[-\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\tanh(x) + \frac{15}{4}\tanh^2(x) \right] \eta_n = 0, \quad (2.46)$$

o estado fundamental pode ser encontrado:

$$\eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(x) \cosh^2(x)}}, \quad (2.47)$$

A Fig. 2.6 mostra o potencial de Schrödinger (Eq. (2.45)) utilizando como solução o *kink* ϕ_{K+} . Ainda nesse gráfico, observamos o estado translacional (Eq. (2.47)).

2.2 Modelo com dois campos escalares

A inclusão de mais um campo escalar, dependendo do modelo, está associada ao surgimento da estrutura interna no defeito [50]. Em vista disto, consideramos um sistema com dois campos escalares, a partir da densidade lagrangiana abaixo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi,\chi), \quad (2.48)$$

onde $V(\phi,\chi)$ é o potencial do modelo. As equações de Euler-Lagrange para os campos ϕ e χ nos indicam as equações de movimento no espaço-tempo bidimensional

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\chi} = 0. \quad (2.50)$$

Notamos que o sistema de equações de segunda ordem são acopladas e não lineares, por isso, a busca por soluções nesse cenário se torna complicado. Entretanto, assim como o modelo de um campo real, podemos reduzir a ordem das equações diferenciais por meio do método apresentado na Ref. [51]. As equações de movimento tornam-se

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.51)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{dV}{d\chi}, \quad (2.52)$$

quando trabalhamos com campos estáticos.

De modo análogo ao que foi apresentado para modelos de um campo, escrevemos a energia do sistema para configuração de campos estáticos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] dx. \quad (2.53)$$

Vamos ainda considerar uma classe de potenciais com dois campos escalares, cujos zeros são os pontos de mínimo de $V(\phi, \chi)$ [52]

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (2.54)$$

substituindo o potencial acima e aplicando o método de Bogomol'nyi, ficamos com a seguinte expressão para a energia

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] dx \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] dx, \quad (2.55)$$

sendo os dois primeiros termos positivos definidos. Consequentemente temos as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi, \quad (2.56)$$

e a energia mínima (conhecida como limite Bogomol'nyi) é $E_{min} = |\Delta W(\phi, \chi)|$. Novamente vale a pena salientar que a energia mínima depende apenas dos pontos assintóticos, i.e, dos valores críticos do potencial. Soluções para tais configurações de campo são denominadas estados *BPS*.

2.2.1 Estabilidade Linear

O problema da estabilidade linear será tratado de forma semelhante à abordagem com um campo escalar. Como foi destacado, a busca por soluções estáveis inicia ao introduzirmos

pequenas perturbações em torno da solução indepenente do tempo

$$\phi(x,t) = \phi_s(x) + \eta(x,t), \quad (2.57)$$

$$\chi(x,t) = \chi_s(x) + \xi(x,t), \quad (2.58)$$

onde $\eta(x,t)$ e $\xi(x,t)$ são perturbações em torno da solução. Substituímos $\phi(x,t)$ e $\chi(x,t)$ nas equações de movimento, obtemos

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{d^2\phi_s}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}\bigg|_{\phi_s, \chi_s} = 0, \quad (2.59)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{d^2\chi_s}{dx^2} + \frac{dV}{d\chi}\bigg|_{\phi_s, \chi_s} = 0. \quad (2.60)$$

Expandindo em série de Taylor as derivadas do potencial e preservando apenas os termos de primeira ordem para η e ξ , temos

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + \eta V_{\phi\phi} + \xi V_{\phi\chi} = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dx^2} + \eta V_{\chi\chi} + \xi V_{\chi\phi} = 0. \quad (2.62)$$

Podemos ainda escrever o sistema de equações na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -\partial_x^2 + V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & -\partial_x^2 + V_{\chi\chi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = -\partial_t^2 \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de separação de variáveis

$$\eta(x,t) = \psi(x)F(t) \quad e \quad \xi(x,t) = \zeta(x)K(t), \quad (2.63)$$

obtemos como resultado um sistema de equações ordinárias

$$\frac{d^2F}{dt^2} + \omega_n^2 F = 0 \quad e \quad \hat{H}\Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x), \quad (2.64)$$

onde

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\chi\chi} \end{bmatrix} \quad e \quad \Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \psi \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

Mais uma vez estamos diante de um oscilador harmônico para a primeira equação diferencial

e caso $\omega_n^2 < 0$, $F(t)$ explode com $t \rightarrow \pm\infty$. A estabilidade linear é analisada em torno da equação de autovalor Eq. (2.64), ou seja, o problema se restringe ao fato do Hamiltoniano possuir ou não autovalores negativos. Para que sejam obtidas soluções estáveis para os campos escalares é necessário que $\omega_n^2 \geq 0$. Então, temos a necessidade de escrever o Hamiltoniano na forma $\hat{H} = \hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm$. Para isso, consideramos o potencial para dois campos dado na Eq. (2.54), cujas derivadas são dadas abaixo

$$V_{\phi\phi} = W_{\phi\phi}^2 + W_{\chi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi\phi}, \quad (2.65)$$

$$V_{\chi\chi} = W_{\phi\chi}^2 + W_{\chi\chi}^2 + W_\phi W_{\phi\chi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi\chi}, \quad (2.66)$$

$$V_{\phi\chi} = V_{\chi\phi} = W_{\phi\chi} W_{\phi\phi} + W_\phi W_{\phi\phi\chi} + W_{\chi\chi} W_{\chi\phi} + W_\chi W_{\phi\chi\chi}. \quad (2.67)$$

A partir disso, podemos escrever o operador $\hat{H}$ em termos do operador $\hat{S}_\pm$ e seu conjugado $\hat{S}_\pm^\dagger$ como

$$\hat{S}_\pm^\dagger = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} - W_{\phi\phi} & -W_{\phi\chi} \\ -W_{\chi\phi} & -\frac{d}{dx} - W_{\chi\chi} \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{S}_\pm = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} - W_{\phi\phi} & -W_{\phi\chi} \\ -W_{\chi\phi} & \frac{d}{dx} - W_{\chi\chi} \end{bmatrix},$$

dessa forma, o operador Hamiltoniano possui caráter positivo. Essa afirmação tem suas bases fixas dentro da Mecânica Quântica [44], ao considerarmos o valor esperado do $\hat{H}$. Aqui faremos o tratamento com integrais, diferente ao que foi feito para um campo escalar real. Então temos [53]

$$\omega_n^2 = \int \Phi_n^\dagger \hat{H} \Phi_n dx = \int \Phi_n^\dagger (\hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm) \Phi_n dx = \int (\hat{S}_\pm \Phi_n)^\dagger \hat{S}_\pm \Phi_n dx = \int |\xi_n|^2 dx. \quad (2.68)$$

onde $\xi_n = \hat{S}_\pm \Phi_n$. Isso permite afirmar que os autovalores possuem apenas valores positivos ou nulos. Desse modo, mesmo para dois campos, são obtidas soluções *BPS* estáveis.

Finalizada a abordagem sobre estabilidade linear, a questão agora apoia-se sobre a investigação das soluções do tipo *BPS*. A princípio, o desacoplamento das equações de Bogomol'nyi irão nos proporcionar defeitos topológicos. Um ponto que merece destaque em modelos de dois campos é o aparecimento de estrutura interna nas soluções, contrário ao que acontece com soluções de um campo escalar.

2.2.2 Modelo BNRT

Soluções com estrutura interna podem ser obtidas com o modelo BNRT [52]. Esse modelo pode ser visto como uma extensão do ϕ^4 . Então, consideramos o superpotencial que foi introduzido e estudado em [52]-[66],

$$W(\phi, \chi) = \lambda \left(a^2 \phi - \frac{1}{3} \phi^3 - s \phi \chi^2 \right), \quad (2.69)$$

onde a e λ são parâmetros reais e s é o parâmetro que controla a forma como os campos interagem. O potencial para esse sistema é escrito como (Fig. 2.7)

$$V(\phi, \chi) = \frac{\lambda^2}{2} \left(a^2 - \phi^2 \right)^2 - \lambda^2 a^2 s \chi^2 + \lambda^2 s (1 + 2s) \phi^2 \chi^2 + \frac{\lambda^2}{2} s^2 \chi^4, \quad (2.70)$$

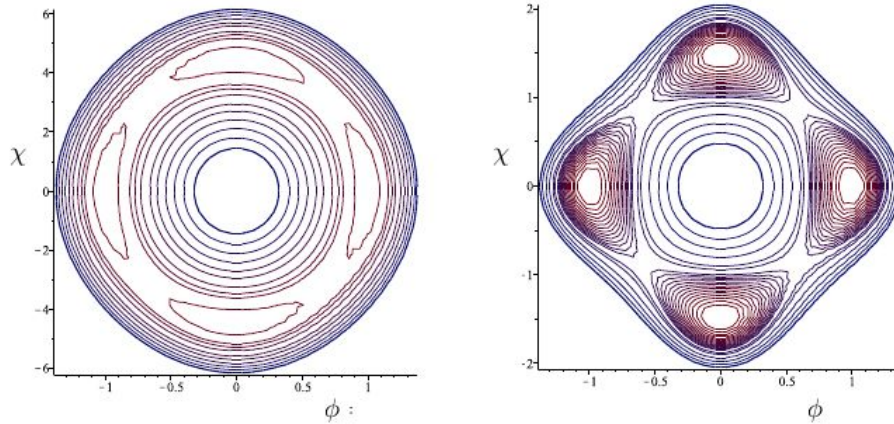


Figura 2.7: CountorPlot do potencial do modelo BNRT com $\lambda = a = 1$ para o $s = 0.05$ (esquerda) e $s = 0.45$ (direita).

As equações de primeira ordem são dadas por

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi = \pm \lambda (a^2 - \phi^2 - s \chi^2) \quad e \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi = \mp 2\lambda s \phi \chi, \quad (2.71)$$

notamos que as equações de Bogomol'nyi formam um sistema não linear e como sabemos, as soluções não triviais conectam dois estados diferentes de vácuo. Os mínimos do potencial podem ser investigados para dois casos: (i) para $s < 0$ temos $(\phi = \pm a, \chi = 0)$ e (ii) para $s > 0$, temos

$$(\phi = \pm a, \chi = 0) \quad e \quad (\phi = 0, \chi = \pm a/\sqrt{s}). \quad (2.72)$$

Para encontrarmos soluções *BPS* no modelo BNRT basta nos preocuparmos com os setores que apresentam $E_{BPS} \neq 0$. Por exemplo, o setor $(\phi = 0, \chi = \pm a/\sqrt{s})$, consiste de uma energia nula ($E_{BPS} = \Delta W = 0$), consequentemente não apresenta defeito do tipo *BPS* conectando os vácuos do potencial. Portanto, a partir dessa discussão, utiliza-se o Método das Órbitas [6], que tem como objetivo encontrar as soluções topológicas dos setores. O método consiste em: (i) escolher uma órbita para os campos ϕ e χ ; (ii) identificar se satisfaz os vácuos do setor em questão; (iii) utilizar a órbita para desacoplar as equações de movimento.

Podemos escolher uma órbita responsável por conectar os mínimos de uma forma mais geral, dada por

$$\phi^2 + \alpha\chi^2 = a^2, \quad (2.73)$$

supomos que $\alpha > 0$. Diferenciando a equação acima em relação a x , temos

$$\frac{d\phi^2}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} + \alpha \frac{d\chi^2}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} = 0, \quad (2.74)$$

substituindo as equações de primeira ordem, obtém-se

$$\lambda\phi(a^2 - \phi^2 - s\chi^2) - 2\lambda\alpha s\phi\chi^2. \quad (2.75)$$

Assumindo $\lambda = a = 1$, escrevemos

$$\phi^2 + s(1 + 2\alpha)\chi^2 = 0, \quad (2.76)$$

que comparada com a Eq. (2.73), leva a

$$\alpha = s(1 + 2\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{s}{1 - 2s}. \quad (2.77)$$

Aqui estamos levando em conta o caso onde $s > 0$. Então, $1 - 2s > 0$, ou seja, $s < 1/2$.

A órbita pode ser escrita como

$$\phi^2 + \frac{s}{1 - 2s}\chi^2 = a^2. \quad (2.78)$$

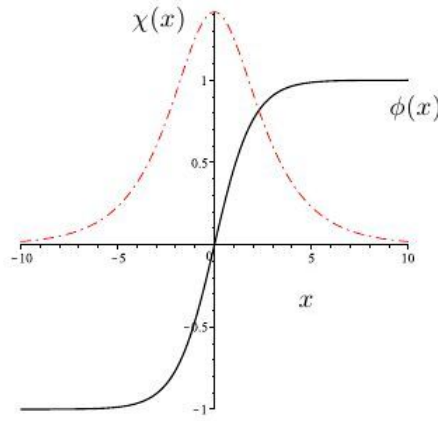


Figura 2.8: Corresponde a solução do tipo *kink* (linha sólida preta) e a solução do tipo *lump* (traço-ponto vermelho). Fixamos $\lambda = a = 1$ e $s = 0.25$.

Substituímos o campo $s\chi^2$ na Eq. (2.71), e obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 2s\lambda(a^2 - \phi^2), \quad (2.79)$$

que ao ser integrada fornece a solução para ϕ , dada por

$$\phi(x) = \pm a \tanh(2\lambda a s x). \quad (2.80)$$

Substituímos a solução para o campo ϕ na Eq. (2.78), e finalmente

$$\chi(x) = \pm a \sqrt{\frac{1}{s} - 2} \operatorname{sech}(2\lambda a s x), \quad (2.81)$$

para $0 < s < 0.5$. As soluções estão graficamente representadas na Fig. 2.8. A linha contínua na cor preta representa a solução do tipo *kink* (Eq. (2.80)) interpolando entre os mínimos -1 e $+1$, e o defeito do tipo *lump* (Eq. (2.81)) é exibida na cor vermelha (traço-ponto). O gráfico foi obtido com $\lambda = a = 1$ e $s = 0.25$. Importante destacar que com $s = 0.5$, temos $\chi = 0$ e consequentemente, resgatamos o modelo ϕ^4 para um campo.

Neste capítulo foram abordadas as configurações de modelos com um e dois campos escalares reais. A busca por soluções topológicas que resolvam as equações de primeira ordem foram discutidas. Dessa maneira, revisamos o método de Bogomol'nyi, encontrando a expressão para a energia total e as equações de primeira ordem, cujas soluções correspondem aos estados BPS. Definimos também a corrente topológica, que associada a carga Q , especifica o tipo de solução. Outro ponto que merece destaque é quanto a investigação da estabilidade linear realizada atra-

vés da introdução de pequenas perturbações em torno da solução estática. Estudou-se ainda um modelo com dois campos escalares. Para encontrarmos soluções BPS para o modelo BNRT, utilizou-se o Método da Órbitas, responsável pelo desacoplamento eficiente das equações de primeira ordem.

No próximo capítulo abordaremos a localização de partículas de spin-0 em defeitos topológicos p -balls em $(D,1)$ -dimensões.

Capítulo 3

Armadilhamento de partículas de spin-0 em p -balls em $(D,1)$ -dimensões

O estudo de defeitos topológicos [5, 47] é importante devido a suas propriedades matemáticas e conexão a diversas áreas da física tais como o confinamento de quark [67], cosmologia [68] e matéria condensada [69]. Do ponto de vista dos espaços multidimensionais, podemos citar, por exemplo, o vórtice [70] para física de supercondutores em $(2,1)$ -dimensões, monopolo magnético [20] conectado à cosmologia em $(3,1)$ -dimensões e modelos de branas [71] em $(D,1)$ -dimensões. O exemplo mais simples de defeito topológico é o kink [72], onde as soluções interpolam entre dois vácuos diferentes. O kink é estendido ao conceito de branas com uma dimensão extra [73]-[82], onde a estrutura de brana advém de uma ação com um campo escalar dinâmico. A tentativa de resolver os problemas de hierarquia e da constante cosmológica com uma dimensão extra sempre enfrentou um problema de ajuste fino [71]. Algumas tentativas de contornar este problema incluem a consideração de mais dimensões extras. A literatura tem diversos exemplos importantes de defeitos topológicos com elevado número de codimensões. Em 6 dimensões, com codimensão 2, podemos citar a localização da gravidade em cordas [83] e branas *baby-Skyrmion* [84]. Defeitos topológicos com altas codimensões são estudados em [85].

Em geral, modelos de branas com codimensão-1 podem ser facilmente tratados usando o formalismo de primeira ordem [73]. Em tais casos, o potencial do campo escalar e a métrica podem ser descritos por equações diferenciais de primeira ordem em termos de uma função W denominada de superpotencial. Este nome refere-se ao análogo no espaço-tempo plano onde um verdadeiro superpotencial é introduzido para encontrar os estados BPS [86]. O

formalismo BPS para alguns defeitos com simetria radial, construídos com um campo escalar, foi introduzido nas Refs. [11, 87]. Recentemente, inspirado em modelos brana com codimensão-2, tais estudos foram estendidos para o caso de dois campos escalares acoplados em $(3,1)$ -dimensões com o objetivo de investigar, na ausência de gravidade, ressonâncias e localização de partículas com spin-0 [88] e spin-1/2 [89] em defeitos topológicos simétricos axiais. Essas análises mostraram resultados similares a trabalhos anteriores que tratam sobre localização e ressonâncias de partículas e gravidade em branas com codimensão-1 [7, 23, 50, 90, 91].

Na presença de gravidade, a ausência de um formalismo de primeira ordem para modelos brana com codimensão maior que 1 faz a análise de localização de campo e ressonância muito mais complicada, necessitando em geral de uma análise numérica com o objetivo de encontrar os campos escalares em função das dimensões extras. Contudo, negligenciando os efeitos da gravidade, neste trabalho mostramos que é possível implementar o formalismo de primeira ordem para descrever os defeitos topológicos gerados por campos escalares com pura dependência radial. Consequentemente, analisamos os efeitos de armadilhamento de campos de spin-0 devido a um maior codimensão do defeito topológico.

Neste capítulo apresentamos na seção 3.1 o formalismo de primeira ordem para um espaço-tempo plano em $(D,1)$ -dimensões onde $\mathcal{M} \geq 1$ campos escalares dependem radialmente em p dimensões espaciais, com $2 \leq p \leq D - 1$. Na seção 3.2, consideramos o tratamento geral da localização de partículas de spin-0 em p -balls. Em seguida, aplicamos o formalismo das seções 3.2 e 3.3 para um certo número de casos específicos. Então, nas seções 3.4 e 3.5 consideramos os defeitos formados respectivamente por modelos de um, dois e três campos, olhando para alguns aspectos de localização de spin-0 em cada sistema, e investigando numericamente a ocorrência de estados ligados e efeitos ressonantes.

3.1 Formalismo geral para construção de p -balls em $(D,1)$ -dimensões

Iniciamos com a ação

$$S = \int dt d^D x \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i - V(\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}}) \right), \quad i = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.1)$$

com $\alpha = 0, \dots, D$. As coordenadas cartesianas $(D,1)$ -dimensões serão separadas em $D - p$ dimensões $(x^1, x^2, \dots, x^{D-p})$, onde os campos podem ser localizados, e em p dimensões transversas $(x^{D-p+1}, \dots, x^D)$, com $2 \leq p \leq D - 1$, onde o defeito será formado.

O potencial é escolhido como

$$V(\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}}) = \frac{1}{2r^N} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} (W_{\phi^i})^2, \quad (3.2)$$

onde usamos a notação simplificada

$$W_{\phi_i} = \frac{\partial W}{\partial \phi_i}, \quad W_{\phi_i \phi_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}, \quad (3.3)$$

e assim por diante. A dependência explícita do potencial em r , onde

$$r = \sqrt{\sum_{i=D-p+1}^D (x^i)^2}, \quad (3.4)$$

acompanha e generaliza para $\mathcal{M}$ campos escalares a construção das Refs. [11, 87], inicialmente motivada para evitar o teorema de Derrick-Hobart [17, 18, 50]. Supomos ainda que os campos escalares ϕ^i dependem somente de r .

As equações de movimento dos campos escalares são

$$\square \phi^i + \frac{1}{r^N} \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} W_{\phi^j} W_{\phi^j \phi^i} = 0, \quad i = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.5)$$

e assumem também a forma estática,

$$\nabla^2 \phi^i = \frac{1}{r^N} \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} W_{\phi^j} W_{\phi^j \phi^i}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.6)$$

onde ∇^2 é o laplaciano p -dimensional, definido por

$$\nabla^2 \phi^i = \frac{1}{r^{p-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{p-1} \frac{d\phi^i}{dr} \right). \quad (3.7)$$

A densidade de energia é dada por

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \left[(\nabla \phi^i)^2 + \frac{1}{r^N} (W_{\phi^i})^2 \right], \quad (3.8)$$

e a energia total do defeito no volume transversal é

$$E = \int dx^{D-p+1} \dots dx^D \rho(r). \quad (3.9)$$

3.1.1 O formalismo de primeira ordem

De modo a descrever o sistema via equações diferenciais de primeira ordem, implementamos o formalismo BPS, tal que a energia total pode ser escrita como

$$E = \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \int dr r^{p-1} \left[\left(\frac{d\phi^i}{dr} \mp \frac{1}{r^{N/2}} W_{\phi^i} \right)^2 \pm \frac{2}{r^{N/2}} \frac{d\phi^i}{dr} W_{\phi^i} \right]. \quad (3.10)$$

Definindo como nulo o termo quadrático, obtemos um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi^i}{dr} = \pm \frac{1}{r^{N/2}} W_{\phi^i}, i = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.11)$$

cujas soluções rotulamos como $\phi_{\pm}^i(r)$. Sempre que estas equações forem satisfeitas e, usando (3.3), a energia total será dada por

$$E = \pm \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \int dr r^{p-1} \frac{1}{r^{N/2}} \frac{dW}{dr}. \quad (3.12)$$

Neste ponto observamos que o integrando pode ser transformado em uma derivada total se $N = 2p - 2$. Desse modo, a energia BPS é

$$E_{BPS} = \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)} |W(r \rightarrow \infty) - W(r = 0)|, \quad (3.13)$$

com as correspondentes equações BPS (3.11) sendo lidas como

$$\frac{d\phi^i}{dr} = \pm \frac{1}{r^{p-1}} W_{\phi^i}, i = 1, \dots, \mathcal{M}. \quad (3.14)$$

Um resultado similar sobre o parâmetro N pode ser obtido considerando propriedades de *scaling* dos campos escalares na densidade de energia (3.9). Primeiramente, definimos os vetores $\vec{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}})$ e $\vec{r} = (x^{D-p+1}, \dots, x^D)$. Fazemos a transformação de escala, $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}$ e $\vec{\phi}(\vec{r}) \rightarrow \vec{\phi}(\lambda \vec{r})$, correspondendo a uma mudança na energia, $E \rightarrow E^\lambda$, e impomos $(\partial E^\lambda)/(\partial \lambda)|_{\lambda=1} = 0$. Isto leva à seguinte restrição em N e p : i) para $p = 1$, $N = 0$; ii) para $p = 2$, $N = 2$. Além disso, impondo a igualdade das partes gradiente e potencial de E , obtemos iii) para $p \geq 3$, $N = 2p - 2$. Um resultado similar foi encontrado em [11], para o caso onde $D = p$.

Um modelo específico pode ser construído de modo a ter pelo menos dois conjuntos $\{\bar{\phi}^i\}$

de vácuos satisfazendo $\partial V/\partial\phi^k|_{\{\phi^i\}=\{\bar{\phi}^i\}} = 0$ e $\partial^2 V/(\partial\phi^k\partial\phi^j)|_{\{\phi^i\}=\{\bar{\phi}^i\}} > 0$, para $k,j = 1,\dots,\mathcal{M}$, com $V(\bar{\phi}^1,\bar{\phi}^2,\dots,\bar{\phi}^{\mathcal{M}}) = 0$. Dois destes conjuntos, $\{\bar{\phi}_0^i\}$ e $\{\bar{\phi}_\infty^i\}$, correspondendo a $r = 0$ e $r = \infty$, respectivamente. Consequentemente, as configurações de campo em $r = 0$ obedecem $\lim_{r \rightarrow 0} \phi^i = \bar{\phi}_0^i$, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\phi^i}{dr} = 0$, enquanto o superpotencial $W(r = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} W(\phi^1,\phi^2,\dots,\phi^{\mathcal{M}}) = W(\bar{\phi}_0^1,\bar{\phi}_0^2,\dots,\bar{\phi}_0^{\mathcal{M}})$ é fixo. Similarmente, no infinito, os campos satisfazem $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi^i = \bar{\phi}_\infty^i$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d\phi^i}{dr} = 0$, sendo o potencial $W(r \rightarrow \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} W(\phi^1,\phi^2,\dots,\phi^{\mathcal{M}}) = W(\bar{\phi}_\infty^1,\bar{\phi}_\infty^2,\dots,\bar{\phi}_\infty^{\mathcal{M}})$, também fixo. Em outras palavras, o modelo específico deve ter pelo menos um campo interpolando entre dois diferentes estados de vácuo, ou seja, $\bar{\phi}_0^i \neq \bar{\phi}_\infty^i$, para pelo menos um valor de i . Então, a energia E_{BPS} , dada pela Eq. (3.13), é fixa e torna-se um verdadeiro limite BPS topológico.

3.1.2 Carga topológica

O caráter topológico das soluções $\{\phi_\pm^i\}$ pode ser demonstrado seguindo a Ref. [11], com a diferença que lá temos $p = D$. Para $(1,1)$ -dimensões temos $\mathcal{M}$ correntes conservadas $j^{i\mu} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi^i$, com $\mu = 0,1$ e $i = 1,\dots,\mathcal{M}$. Isto resulta em $\mathcal{M}$ quantidades conservadas $\sigma^i = d\phi^i/dx$, tal que $\rho = \sum_i (\sigma^i)^2$ é a energia da configuração de campo [93]. Isso pode ser usado para definir a carga topológica $Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho = \Delta W$ como também a energia total da solução. No entanto, para uma classe de defeitos descritos aqui deve-se estar em $(D,1)$ -dimensões com $D \geq 3$, com os campos escalares dependendo $p \geq 2$ dimensões espaciais. Para um caso mínimo, com $D = 3$ e $p = 2$ temos $\mathcal{M}$ tensores de corrente $j^{i\mu_1\mu_2} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3} \partial_{\mu_3} \phi^i$, onde cada μ_1, μ_2, μ_3 pode assumir os valores 0,1,2. Nós temos $\partial_{\mu_1} j^{i\mu_1\mu_2} = 0$. Para cada campo escalar isto gera um conjunto de duas densidades conservadas $\sigma^{ik_1} = j^{i0k_1}$, onde $k_1 = 1,2$. A quantidade escalar $\rho = \sigma_{ik_1} \sigma^{ik_1} = j_{i0k_1} j^{i0k_1} = \epsilon_{i0k_1k_2} \epsilon^{i0k_1k_3} \partial^{k_2} \phi^i \partial_{k_3} \phi^i = -\sum_i (d\phi^i/dr)^2$ pode ser usada para definir a carga topológica como $Q_T = \int d\vec{r} \rho = -\Omega \Delta W$, que coincide com a energia do defeito no volume transversal. Finalmente, em geral para $(D,1)$ -dimensões com $p \geq 2$ dimensões transversas, temos $\mathcal{M}$ tensores de corrente $j^{i\mu_1\mu_2\dots\mu_p} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p\mu_{p+1}} \partial_{\mu_{p+1}} \phi^i$ com $\partial_{\mu_1} j^{i\mu_1\mu_2\dots\mu_p} = 0$. Isto rende, para cada campo escalar, um conjunto de p densidades conservadas $\sigma^{ik_1k_2\dots k_{p-1}} = j^{i0k_1k_2\dots k_{p-1}}$. A quantidade escalar $\rho = \sigma_{ik_1k_2\dots k_{p-1}} \sigma^{ik_1k_2\dots k_{p-1}} = (-1)^p (p-1)! \sum_i (d\phi^i/dr)$ leva à carga topológica $Q_T = \int d\vec{r} \rho = (-1)^p (p-1)! \Omega_p \Delta W$, que coincide com a densidade de energia do defeito no volume transversal.

Note que a presença de ΔW em Q_T revela o caráter topológico dos defeitos, no sentido que eles conectam os setores caracterizados pelos dois índices topológicos diferentes, isto é,

valores independentes do tempo de $\{\bar{\phi}_0^i\}$ (relacionados a $W(r=0)$) e $\{\bar{\phi}_\infty^i\}$ (relacionados a $W(r \rightarrow \infty)$). Estes setores são topologicamente não conectados no sentido que os campos não podem ser perturbados continuamente sem violar o requisito de energia finita [6]. Portanto, mostramos que o sistema (3.6) admite soluções topológicas obtidas a partir do conjunto de equações auto-duais (3.14) que minimizam a energia do sistema (3.9).

3.1.3 Estabilidade sob perturbações radiais

No que se segue, mostramos que as soluções $\{\phi_\pm^i(r)\}$ são estáveis sobre flutuações radiais e dependentes do tempo. Para tal proposta, seguimos o processo realizado na Ref. [65] para paredes de domínio com dois campos escalares. Então, construímos as funções

$$\phi^k(r, t) = \phi_\pm^k(r) + \sum_n \eta_n^k(r) e^{i\omega_n t}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{M}. \quad (3.15)$$

Substituindo na Eq. (3.5) e mantendo somente os termos lineares nas flutuações $\eta_n^k(r)$, ficamos com

$$\left(-\nabla^2 + \frac{1}{r^{2p-2}} \mathbb{M} \right) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n, \quad (3.16)$$

onde temos definida a matriz $\mathbb{M}$ e o autovetor η_n por

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} V_{\phi^1 \phi^1} & V_{\phi^1 \phi^2} & \dots & V_{\phi^1 \phi^\mathcal{M}} \\ V_{\phi^2 \phi^1} & V_{\phi^2 \phi^2} & \dots & V_{\phi^2 \phi^\mathcal{M}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ V_{\phi^\mathcal{M} \phi^1} & V_{\phi^\mathcal{M} \phi^2} & \dots & V_{\phi^\mathcal{M} \phi^\mathcal{M}} \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} \eta_n^1 \\ \eta_n^2 \\ \vdots \\ \eta_n^\mathcal{M} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Verificamos que

$$\frac{1}{r^{2p-2}} \mathbb{M} = \pm \frac{d\mathbb{G}}{dr} \pm \frac{p-1}{r} \mathbb{G} + \mathbb{G}^2. \quad (3.18)$$

Nesta seção, sinais superiores e inferiores são para, respectivamente, soluções BPS $\phi_\pm^i$ da Eq. (3.14). Ainda definimos a matriz $\mathbb{G}$

$$\mathbb{G} = \frac{1}{r^{p-1}} \begin{pmatrix} W_{\phi^1 \phi^1} & W_{\phi^1 \phi^2} & \dots & W_{\phi^1 \phi^\mathcal{M}} \\ W_{\phi^2 \phi^1} & W_{\phi^2 \phi^2} & \dots & W_{\phi^2 \phi^\mathcal{M}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{\phi^\mathcal{M} \phi^1} & W_{\phi^\mathcal{M} \phi^2} & \dots & W_{\phi^\mathcal{M} \phi^\mathcal{M}} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Agora, a equação anterior na Eq. (3.16) leva a uma útil fatoração

$$\widehat{A}_\pm \widehat{B}_\pm \eta_n = \omega_n^2 \eta_n, \quad (3.20)$$

onde os operadores são definidos como

$$\widehat{A}_\pm = -\mathbf{1} \frac{d}{dr} \mp \mathbb{G} - \frac{(p-1)}{r} \mathbf{1} \quad (3.21)$$

e

$$\widehat{B}_\pm = \mathbf{1} \frac{d}{dr} \mp \mathbb{G}. \quad (3.22)$$

Note que, para um campo escalar (ou seja, $\mathcal{M} = 1$), esta fatoração difere a partir da apresentada em Ref. [11]. A vantagem é que agora podemos verificar explicitamente que os operadores são tais que $\widehat{A}_\pm^\dagger = \widehat{B}_\pm$, ou seja, em p dimensões espaciais

$$\int dr r^{p-1} (\widehat{A}_\pm \psi)^\dagger \psi = \int dr r^{p-1} \psi^\dagger \widehat{B}_\pm \psi, \quad (3.23)$$

desde que impomos a condição de fronteira

$$r^{p-1} \psi^\dagger \psi|_{r=0}^\infty = 0, \quad (3.24)$$

uma condição válida se ψ são estados ligados quadrado-integráveis (não estados de espalhamento). A partir dessa análise nós podemos reescrever a Eq. (3.20) como

$$\widehat{B}_\pm^\dagger \widehat{B}_\pm \eta_n = \omega_n^2 \eta_n, \quad (3.25)$$

que significa que o ω_n^2 são autovalores de um operador não negativo $\widehat{B}_\pm^\dagger \widehat{B}_\pm$. Isso prova que autovalores negativos são ausentes e que as p -balls que satisfazem o conjunto de equações de primeira ordem dadas pela Eq. (3.14) são estáveis.

O menor estado ligado é dado pelo modo zero, identificado como $\widehat{B}_\pm \eta_n = 0$, que fornece $\eta_n^i = c W_{\phi^i}$ para o $\mathcal{M}$ componentes de η_n , onde c é a constante de normalização, tal que

$$\int dr r^{p-1} \eta_n^\dagger \eta_n = 1. \quad (3.26)$$

Além disso, note que a presença de uma dependência explícita com r em $\widehat{A}_\pm$ e sua ausência

em $\hat{B}_\pm$ (compare Eqs. (3.21) e (3.22)) introduz uma assimetria necessária para a condição $\hat{A}_\pm^\dagger = \hat{B}_\pm$ ser válida. Dessa forma, há uma extensão da forma simétrica usual de fatoração para problemas com $p = 1$, o kink (1,1)-dimensional sendo o arquétipo (olhar Eq. (3.5) da Ref. [65]). Fatorações específicas do hamiltoniano foram também obtidos em outros contextos, por exemplo, para sistemas quânticos com massas dependentes da posição [94].

3.1.4 Estabilidade sob perturbações angulares

Como mais um ponto de análise, podemos mostrar que as soluções $\phi_\pm^i(r)$ são estáveis com respeito as perturbações angulares. Com esse propósito, construímos a função [96, 97]

$$\phi^k(t, r, \varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) = \phi_\pm(r) + \sum_{nj} \alpha_{nj} \eta_n^k(r) Y_j(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) e^{i\varpi_n t}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{M}. \quad (3.27)$$

onde α_{nj} são constantes, $Y_j(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2})$ são os harmônicos esféricos generalizados em p -dimensões e j é relacionado aos autovalores do momento angular (para mais detalhes veja Sec. 3.2). Substituindo na Eq. (3.5) e mantendo somente os termos lineares nas flutuações $\eta_n^k(r)$, obtemos

$$\left[\hat{B}_\pm^\dagger \hat{B}_\pm + \frac{1}{r^2} j(j+p-2) \right] \eta_n = \varpi_n^2 \eta_n, \quad (3.28)$$

com $\hat{B}_\pm^\dagger = \hat{A}_\pm$ e $\hat{A}_\pm$ e $\hat{B}_\pm$ são dados pelas Eqs. (3.21) e (3.22). O segundo operador acima pode ser escrito como

$$\hat{C}^\dagger \hat{C} = \frac{1}{r^2} j(j+p-2), \quad (3.29)$$

com $\hat{C} = \hat{C}^\dagger = \frac{\sqrt{j(j+p-2)}}{r}$. Então a equação para flutuações torna-se

$$\left(\hat{B}_\pm^\dagger \hat{B}_\pm + \hat{C}^\dagger \hat{C} \right) \eta_n = \varpi_n^2 \eta_n. \quad (3.30)$$

Por outro lado, já provamos que $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ é um operador não negativo com autofunção $\{\eta_n\}$ e autovalores $\{\omega_n^2\}$. Agora tomando o produto escalar de (3.30) com η_n , segue que ϖ_n^2 é sempre positivo,

$$\varpi_n^2 = \omega_n^2 + \|C\eta_n\|^2 > 0. \quad (3.31)$$

Contudo, da álgebra linear conhecemos que o operador auto-adjunto com autovalores positivos é um operador positivo definido [98]. Dessa maneira, a equação para flutuações descrita pelo operador positivo definido $\hat{B}_\pm^\dagger \hat{B}_\pm + \hat{C}^\dagger \hat{C}$ possui autovalores positivos ϖ_n^2 . Isto implica que o

defeito é estável sobre perturbações angulares gerais.

3.1.5 Aspectos gerais das soluções radiais

Agora vamos retornar à busca das soluções explícitas para a dependência na dimensão radial dos campos escalares. Um caminho conveniente para resolver a Eq. (3.14) é realizar uma mudança de variáveis $d\xi = 1/r^{p-1}dr$, ou equivalentemente

$$\xi(r) = \ln(r/r_0), p = 2 \quad (3.32)$$

ou

$$\xi(r) = \frac{1}{p-2} \left(-\frac{1}{r^{p-2}} + \frac{1}{r_0^{p-2}} \right), p = 3, 4, \dots \quad (3.33)$$

Essa transformação de coordenada torna a Eq. (3.14) em

$$\frac{d\phi}{d\xi} = W_\phi. \quad (3.34)$$

Após resolver esta equação para $\phi(\xi)$, e voltar para a variável r , expressões explícitas para o campo escalar e densidade de energia podem ser facilmente alcançadas. Agora, para formar um defeito topológico devemos escolher uma função $W(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{\mathcal{M}})$ com $W(r \rightarrow \infty) \neq W(r = 0)$. Uma escolha conveniente é um campo ϕ^i com um perfil do tipo kink em r em torno de um valor finito r_0 e o restante outros campos $\phi^j, j \neq i$ com perfil kink ou forma de sino (*bell-shape*) em torno do mesmo valor de r . Em uma terminologia a partir da literatura podemos dizer que o campo ϕ^i forma o defeito enquanto os outros campos são responsáveis pela estrutura interna.

3.2 Localização de partículas de spin-0 em p -balls

Como vimos, a partir do espaço tempo $D + 1$ -dimensional, o defeito topológico vive em p -dimensões. Agora, queremos considerar como as partículas de spin-0 vivendo no espaço tempo completo $D + 1$ -dimensional podem ser efetivamente armadilhadas pelo defeito topológico na forma de estados ligados e/ou estados ressonantes. Então, consideramos um campo escalar Φ na região onde é formado um defeito radial construído com $\mathcal{M}$ campos escalares ϕ^i . Na presente análise, negligenciamos a *backreaction* no defeito topológico considerando que a interação entre os campos escalares é suficientemente pequena em comparação a auto-interação que gera o defeito. Em seguida, designamos Φ como o campo fraco e $\phi^i, i = 1, 2, \dots, \mathcal{M}$, os campos fortes.

Escrevemos a seguinte ação descrevendo o sistema

$$S_1 = \int dt d^D x \left(\frac{1}{2} \partial_\beta \Phi \partial^\beta \Phi - \frac{\eta}{2} F(\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}}) \Phi^2 \right). \quad (3.35)$$

com $\beta = 0, 1, \dots, D$. Aqui $F(\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}})$ é o acoplamento entre o campo fraco Φ e o defeito topológico. A equação de movimento do campo escalar Φ é

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi - \nabla_T^2 \Phi + \eta F(\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}}) \Phi = 0, \quad (3.36)$$

onde na expressão anterior, decompos o d'Alembertiano $D + 1$ -dimensional entre o $D - p$ -dimensional longitudinal e o p -dimensional transversal, ou seja, $\partial_\mu \partial^\mu = \square$, com $\mu = 0, \dots, D - p$ e ∇_T^2 é um laplaciano p -dimensional. Agora, considerando que os campos fortes $\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}}$ dependem somente da direção radial, nós temos o acoplamento $F(\phi^1, \dots, \phi^{\mathcal{M}}) = F(r)$. Restringimos nossa discussão para funções $F(r)$ finita para todos os valores de r , com $\eta \lim_{r \rightarrow 0} F(r) = 0$.

Decompomos o campo escalar Φ como

$$\Phi(t, x^1, x^2, \dots, x^D) = \sum_{nj} \xi_{nj}(t, x^1, \dots, x^{D-p}) \zeta_{n,j}(r) Y_j(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) = \sum_{nj} \Phi_{nj}, \quad (3.37)$$

onde j é relacionado ao autovalor do momento angular.

Mudamos as coordenadas transversas $(x^{D-p+1}, \dots, x^D)$ a partir das cartesianas para as coordenadas esféricas generalizadas $(r, \varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2})$, com r definido anteriormente e

$$\varphi = \tan^{-1}(x^{D-p+2}/x^{D-p+1}) \quad (3.38)$$

$$\theta^1 = \tan^{-1}(\sqrt{(x^{D-p+1})^2 + (x^{D-p+2})^2}/x^{D-p+3}) \quad (3.39)$$

$$\dots \quad (3.40)$$

$$\theta^{p-2} = \tan^{-1}(\sqrt{(x^{D-p+1})^2 + \dots + (x^{D-1})^2}/x^D). \quad (3.41)$$

O laplaciano p -dimensional é dado por

$$\nabla_T^2 = \frac{1}{r^{p-1}} \partial_r (r^{p-1} \partial_r) - \frac{1}{r^2} \widehat{L}_p^2, \quad (3.42)$$

onde $\widehat{L}_p$ é o operador momento angular p -dimensional, dado por (definimos $\theta^1 = \theta, \theta^2 = w$

para facilitar a notação)

$$\hat{L}_2^2 = -\partial_\varphi^2, \quad (3.43)$$

$$\hat{L}_3^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \partial^2 \varphi + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) \right], \quad (3.44)$$

$$\hat{L}_4^2 = -\frac{1}{\sin^2 w} \left[\partial_w (\sin^2 w \partial_w) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) \right]. \quad (3.45)$$

Em geral, para $p \geq 3$ temos

$$\hat{L}_p^2 = -\left[\sum_{i=2}^p \left(\prod_{j=i+1}^p \frac{1}{\sin^2 \theta_j} \right) \frac{1}{\sin^{i-2} \theta_i} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-2} \theta_i \partial_{\theta_i}) \right]. \quad (3.46)$$

Agora o campo $\xi_{n_j}(t, x^1, \dots, x^{D-p})$ satisfaz a equação de Klein-Gordon $(D-p)+1$ -dimensional

$$(\square + M_{n_j}^2) \xi_{n_j}(t, x^1, \dots, x^{D-p}) = 0, \quad (3.47)$$

e a amplitude $\varsigma_{n_j}(r)$ satisfaz a equação do tipo Schrödinger radial

$$-\varsigma_{n_j}''(r) - \frac{p-1}{r} \varsigma_{n_j}'(r) + V_{sch}(r) \varsigma_{n_j}(r) = M_{n_j}^2 \varsigma_{n_j}(r), \quad (3.48)$$

com o potencial de Schrödinger dado por

$$V_{sch}(r) = \frac{j(j+p-2)}{r^2} + \eta F(r). \quad (3.49)$$

Exigindo que a Eq. (3.48) defina um operador diferencial auto-adjunto em $r \in [0, +\infty)$, a teoria de Sturm-Liouville estabelece a condição de ortonormalidade para as componentes $\varsigma_{n,j}(r)$

$$\int dr r^{p-1} \varsigma_{n',j}(r) \varsigma_{n,j}(r) = \delta_{nn'}. \quad (3.50)$$

Os harmônicos esféricos de grau j satisfazem (veja Ref. [99] para um tratamento geral dos harmônicos esféricos com número geral de dimensões)

$$\hat{L}_p^2 Y_j(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) = j(j+p-2) Y_j(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) \quad (3.51)$$

e são polinômios de grau j com variáveis restritas na $(p-1)$ -esfera de raio unitário. Os

harmônicos esféricos generalizados satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\int_{S^{p-1}} Y_{j'}(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) Y_j(\varphi, \theta^1, \dots, \theta^{p-2}) = \delta_{jj'}, \quad (3.52)$$

o que significa que os harmônicos esféricos de diferentes ordens são ortogonais. Dado um valor particular de p , a Eq. (3.51) é resolvida por separação de variáveis. Alguns exemplos são

- Para $p = 2$, $j \equiv m = 0, 1, 2, \dots$ e $Y_m = e^{im\varphi}$. Isso significa que Y_m é associado com o autovalor m^2 e carrega momento angular m . O índice m rotula as representações irredutíveis de $SO(2)$.
- Para $p = 3$, $j \equiv \ell = 0, 1, 2, \dots$ e $Y_\ell(\varphi, \theta) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\varphi, \theta)$, com $Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \Theta_{\ell m}(\theta) \Psi_m(\varphi)$. Aqui $\Psi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ e $\Theta_{\ell m}(\theta)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\cot \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (3.53)$$

Isso significa que $Y_{\ell m}$ é associado com o autovalor $\ell(\ell+1)$ e carrega momento angular $\sqrt{\ell(\ell+1)}$. O índice ℓ rotula as representações irredutíveis de $SO(3)$ enquanto m rotula as correspondentes representações do subgrupo $SO(2)$. Para cada ℓ existem $2\ell+1$ harmônicos esféricos linearmente independentes correspondendo aos vários valores de m . Portanto, as representações irredutíveis de $SO(3)$ baseados em $Y_{\ell m}$ são $(2\ell+1)$ -dimensional [100].

Para o caso geral, as representações irredutíveis de $SO(p)$ baseados em harmônicos hipersféricos têm dimensão dada por [101]

$$\dim = \frac{(p+2j-2)(p+j-3)!}{j!(p-2)!} \quad (3.54)$$

e temos um conjunto ortonormal de harmônicos hipersféricos que têm índices extras rotulados de representações irredutíveis da seguinte cadeia de supergrupos $SO(p)$:

$$SO(p) \supset SO(p-1) \dots \supset SO(2). \quad (3.55)$$

Iremos ilustrar como isso funciona com mais um exemplo. A generalização para grandes valores pares de p exige trabalho adicional, mas segue esse mesmo roteiro.

- Para $p = 4$ um conjunto ortonormal de harmônicos hipersféricos têm índices extras que são rotulados de representações irredutíveis da seguinte cadeia de subgrupos $SO(4)$:

$$SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2). \quad (3.56)$$

Nós temos $Y_j(\varphi, \theta, w) = \sum_{\ell=0}^j \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{j\ell m}(\varphi, \theta, w)$, com as seguintes construções específicas:

- i) $j = 0 \implies \dim = 1$. Então $\ell = 0, m = 0$ que leva $Y_{j\ell m} = Y_{0,0,0}$.
- ii) $j = 1 \implies \dim = 4$. Então se $\ell = 0$ então $m = 0$. Se $\ell = 1$ então $m = 0, \pm 1$. Isso leva a quatro possibilidades para $Y_{j\ell m}$.
- iii) $j = 2 \implies \dim = 9$. Então se $\ell = 0$ então $m = 0$. Se $\ell = 1$ então $m = 0, \pm 1$. Se $\ell = 2$ então $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Isso leva a nove possibilidades para $Y_{j\ell m}$.
- iv) Em geral, dado j , temos $\ell = 0, 1, \dots, j$ ($j+1$ possibilidades) e $m = -\ell, \dots, \ell$ ($2\ell+1$ possibilidades), resultando em $\dim = (j+1)^2$ construções possíveis para $Y_{j\ell m}$.

Podemos fazer a decomposição $Y_{j\ell m} = \mathcal{W}_{j\ell}(w)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$, onde $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos usuais descritos no caso $p = 3$, e $\mathcal{W}_{j\ell}(w)$ satisfaz seguinte equação diferencial

$$2 \cot \mathcal{W}'_{j\ell}(w) + \mathcal{W}''_{j\ell}(w) - \ell(\ell+1)\mathcal{W}_{j\ell}(w) = j(j+1)\mathcal{W}_{j\ell}(w), \quad (3.57)$$

onde a linha significa derivada em relação ao argumento.

Agora, a ação dada pela Eq. (3.35) pode ser integrada nas $(x^{D-p+1}, \dots, x^D)$ -dimensões, resultando em

$$S_1 = \int dt dx^1 \dots dx^{D-p} \left(\sum_{n_j} \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_{n_j} \partial^\mu \Phi_{n_j} - M_{n_j}^2 \Phi_{n_j}^2 \right). \quad (3.58)$$

Isso mostra que Φ_{n_j} é um campo de Klein-Gordon massivo $(D-p+1)$ -dimensional com massa M_{n_j} .

De modo a investigar numericamente os estados massivos, primeiramente vamos considerar a região próxima a origem ($r \ll r_0$). Uma vez que estamos considerando apenas funções $\eta F(r)$ finitas, a equação do tipo Schrödinger para $j = 0$ fica

$$-\zeta''_{n0}(r) - \frac{p-1}{r} \zeta'_{n0}(r) = \left(M_{n0}^2 - V^{(0)} \right) \zeta_{n0}(r), \quad (3.59)$$

onde $V^{(0)} = \lim_{r \rightarrow 0} \eta F(r)$, cuja solução não-singular em $r = 0$ é

$$\varsigma_{n0}(r) = r^{1-\frac{p}{2}} J_{\frac{p}{2}-1} \left(r \sqrt{M_{n0}^2 - V^{(0)}} \right). \quad (3.60)$$

Por outro lado, para $j \geq 1$ o potencial do tipo Schrödinger é dominado pela contribuição do momento angular proporcional a $1/r^2$,

$$V_{sch}(r) = \frac{j(j+p-2)}{r^2}, r \ll r_0$$

e as soluções não-singulares em $r = 0$ são dadas por

$$\varsigma_{nj}^{(0)}(r) = r^{1-\frac{1}{2}p} J_{[\frac{1}{2}(2j+p-2)]}(M_{nj}r), \quad j \geq 1. \quad (3.61)$$

Ambas as funções (3.60) e (3.61) são usadas como um *input* para o método numérico. Por meio dessa aproximação podemos calcular $\varsigma(r_{min})$ e $d\varsigma/dr(r_{min})$, a fim de utilizarmos o método de Runge-Kutta para determinar $\varsigma(r)$ a partir da equação do tipo Schrödinger. Definimos a probabilidade de encontrarmos modos escalares com massa M_{nj} e momento angular dentro da p -ball de raio r_0 como [50]

$$P = \frac{\int_{r_{min}}^{r_0} dr r^{p-1} |\varsigma_{nj}(r)|^2}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr r^{p-1} |\varsigma_{nj}(r)|^2},$$

onde $r_{min} \ll r_0$ é usado como condição inicial e r_{max} é o comprimento característico da caixa usada no processo de normalização, sendo um valor onde os potenciais de Schrödinger são próximos a zero e onde os modos massivos $\varsigma(r)$ oscilam como ondas planas. Ressonâncias são caracterizadas por picos nos plots de P como função de M_{nj} . Quanto mais fino o pico, maior é o tempo de vida da ressonância

Isso finaliza a parte do formalismo geral. De agora em diante, iremos resolver alguns exemplos específicos com um, dois e três campos escalares.

O número de parâmetros envolvidos nos modelos considerados aqui nos levou a fazer algumas restrições na ordem de identificar melhor o efeito do número de dimensões transversais para a ocorrência de estados ligados e/ou ressonâncias. Por exemplo, identificamos que o aumento no j reduz a possibilidade de ocorrência de estados ligados. O caso $j = 0$ é especial, pois temos $\lim_{r \rightarrow 0} V_{sch}(r)$ é finito ou mesmo nulo, em oposição à $\lim_{r \rightarrow 0} V_{sch}(r) = \infty$ para $j \geq 1$. Então, sem perda de generalidade escolhemos estudar estados com $j = 0$ e $j = 2$.

3.3 Um modelo de um campo

Nesta seção iremos considerar o modelo [11]

$$W_\phi(\phi) = \lambda \left(\phi^{(q-1)/q} - \phi^{(q+1)/q} \right), \quad (3.62)$$

com $q = 1, 3, 5, \dots$. A equação de primeira ordem, descrita pela Eq. (3.34), tem solução dada por

$$\phi(\xi) = \tanh^q(\lambda \xi / q). \quad (3.63)$$

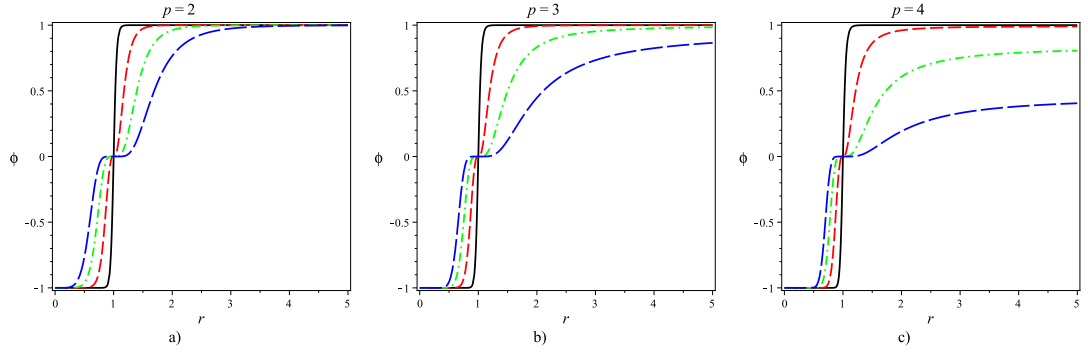


Figura 3.1: Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: função $\phi(r)$. Fixamos $r_0 = 1$, $\lambda = 30$. Temos a) $p = 2$, b) $p = 3$ e c) $p = 4$. Curvas são para $q = 1$ (linha preta), 3 (tracejado vermelho), 5 (traço-ponto verde) e 7 (traço longo azul).

O caso $q = 1$ corresponde a solução kink usual do modelo ϕ^4 na variável ξ . Retornando à variável r , expressões explícitas para o campo escalar e densidade de energia podem ser facilmente alcançadas:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \tanh^q(\eta_p), \\ \rho(r) &= \frac{\lambda^2}{r^{2p-2}} \tanh^{2q-2}(\eta_p) \operatorname{sech}^4(\eta_p), \end{aligned} \quad (3.64)$$

com

$$\eta_p = \frac{\lambda}{q} \xi(r) \quad (3.65)$$

com $\xi(r)$ dado pela Eq. (3.32), para $p = 2$ ou (3.33), para $p = 3, 4, \dots$

A Fig. 3.1 mostra o gráfico de $\phi(r)$ para λ , r_0 fixos e vários valores de q e p . O campo escalar $\phi(r)$ interpola entre -1 e ϕ_c , com i) $\phi_c = 1$ para qualquer $q = 1$ ou $p = 2$ e ii) $\phi_c = \tanh^q[\lambda/(q(p-2)r_0^{p-2})]$ para $q > 1$ e $p \neq 2$. Para $q \neq 1$ quanto maior é p , menor é ϕ_c .

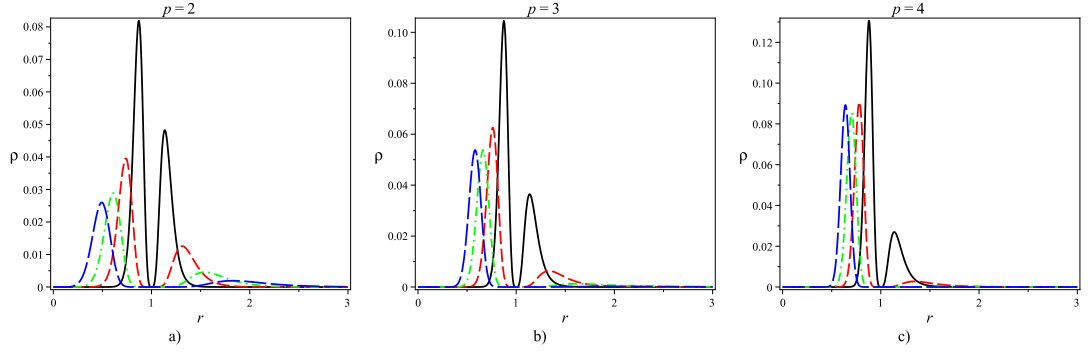


Figura 3.2: Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: função $\rho(r)$. Fixamos $r_0 = 1$, $\lambda = 30$. Temos a) $p = 2$, b) $p = 3$ e c) $p = 4$. Curvas são para $q = 3$ (linha preta), 5 (tracejado vermelho), 7 (traço-ponto verde) e 9 (traço longo azul).

Notamos a partir da figura que a configuração de $\phi(r)$ é agora de dois kinks conectados em $r = r_0$ com uma região plana em torno de r_0 que cresce com q . O kink interno vai de $r = 0$ à $r = r_0$ e tem um caráter compacton enquanto o kink externo vai desde $r = r_0$ à $r \rightarrow \infty$ e é um semi-compacton. Quando p cresce, observamos que o kink interno (para $r < r_0$) tem sua espessura reduzida enquanto o kink externo (para $r > r_0$) tem sua espessura aumentada.

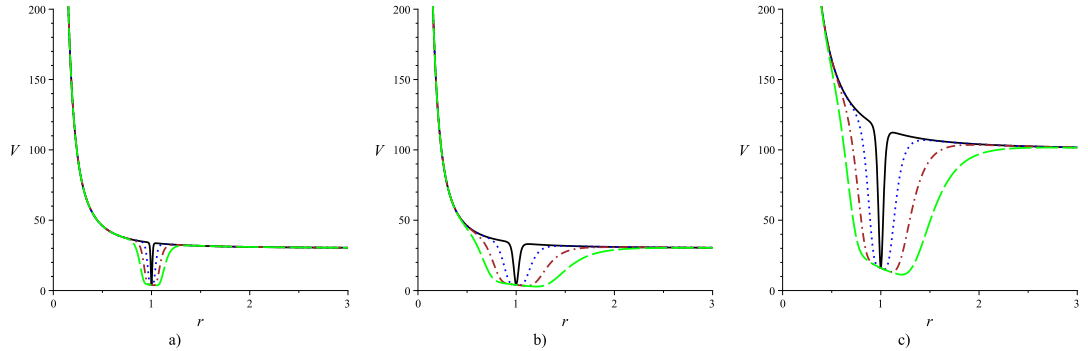


Figura 3.3: Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger V para $j = 2$, $r_0 = 1$, $p = 2$ e $q = 1$ (linha preta), $q = 3$ (ponto azul), $q = 5$ (tracejado-ponto marrom), $q = 7$ (traço longo verde). Plots são para a) $\eta = 30$, $\lambda = 100$, b) $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e c) $\eta = 100$, $\lambda = 30$.

A Fig. 3.2 mostra o gráfico da densidade de energia $\rho(r)$ para λ , r_0 fixos e vários valores de $q \geq 3$ e p . A partir das figuras, percebemos que a densidade de energia é caracterizada por dois picos: um maior e fino, centrado em $r < r_0$ e um menor e espesso, centrado em $r > r_0$. A distância entre os picos cresce com q , ampliando a região em torno de $r = r_0$ onde $\rho \sim 0$, e reduzindo a altura dos picos. Para q fixo, o efeito do crescimento de p é o crescimento da altura e espessura do pico em $r < r_0$ e um correspondente decréscimo do pico em $r > r_0$. A densidade de energia para $q = 1$ é caracterizada por um pico centrado em torno de $r = r_0$, e não depende sensivelmente em p . Aqui vamos considerar o acoplamento $F(\phi) = \phi^2$, que

corresponde ao potencial do tipo Schrödinger

$$V = \frac{j(j+p-2)}{r^2} + \eta \tanh^{2q}(\eta_p), p = 2, 3, \dots \quad (3.66)$$

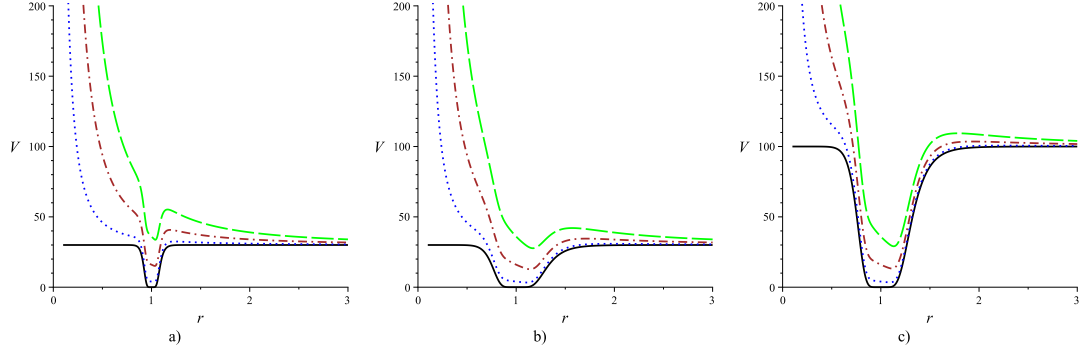


Figura 3.4: Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger V para $r_0 = 1$, $p = 2$, $q = 5$ e $j = 0$ (linha preta), $j = 2$ (ponto azul), $j = 4$ (traço-ponto marrom), $j = 6$ (traço longo verde). Plots são para a) $\eta = 30$, $\lambda = 100$, b) $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e c) $\eta = 100$, $\lambda = 30$.

A Fig. 3.3 mostra alguns gráficos para $V(r)$ para valores fixos de p , r_0 e j e vários valores de q , η e λ . Notamos que os potenciais são estritamente positivos, com $V(r \rightarrow 0) = \infty$ e um mínimo em torno de $r = r_0$. A estrutura do potencial mostra que existe a possibilidade de estados ligados, investigados numericamente. Comparando as Figs. 3.3a-c nós vemos que o aumento de q ou decrescimento de λ aumenta a região em torno do mínimo local, favorecendo o aparecimento de estados ligados. Além disso, o aumento de η torna o mínimo mais profundo, também favorecendo estados ligados. Isto é confirmado com os autovalores obtidos numericamente, apresentado na Tabela 3.1.

	$q = 1$		$q = 3$		$q = 5$		$q = 7$		n
	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	
$\eta = 30, \lambda = 100$	-	-	28.6227	-	24.8245	29.0266	20.5476	24.8500	1
$\eta = 30, \lambda = 30$	29.4788	-	19.5224	23.8051	11.4668	15.5708	7.1019	10.9721	1
	-	-	-	-	-	-	22.9866	27.0932	2
$\eta = 100, \lambda = 30$	90.8870	95.2469	41.9699	46.0534	20.1460	24.1420	11.2155	15.0803	1
	-	-	-	-	66.4764	70.7870	40.1402	44.4125	2
	-	-	-	-	99.3950	-	73.4681	77.6431	3
	-	-	-	-	-	-	95.9278	98.6800	4

Tabela 3.1: Modelo de um campo para p -balls em $(D, 1)$ -dimensões: autovalores M_{η}^2 , soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $p = 2$, com q, λ e η do potencial de Schrödinger para $j = 2$ que corresponde às Figs. 3.3 e 3.4.

A Fig. 3.4 mostra alguns gráficos para $V(r)$ para valores fixos de p , r_0 e q e vários valores de j , η e λ . Esta figura mostra que, para parâmetros fixos, um aumento em j decresce a possibilidade de ocorrência de estados ligados. Isto é confirmado a partir dos resultados nas Tabelas 3.1 e 3.2. O caso $j = 0$ é especial uma vez que não há possibilidade de ressonâncias. Para valores maiores de j , há um aumento do máximo local em torno de $r = r_0$, aumentando a possibilidade de ocorrência de estados ressonantes.

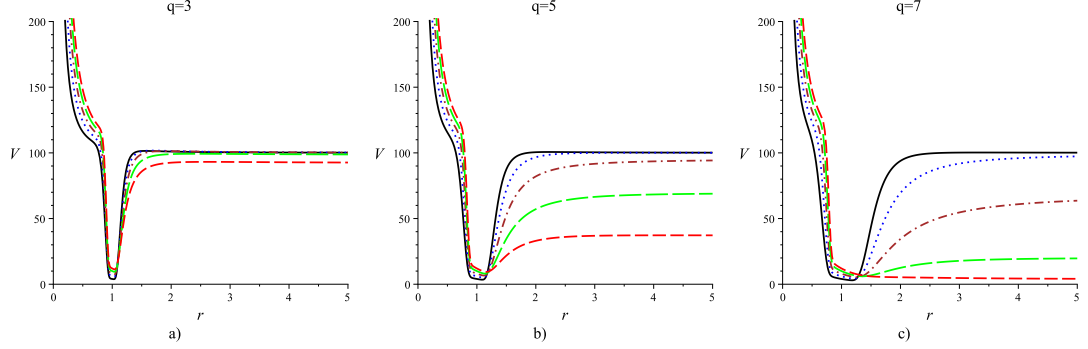


Figura 3.5: Modelo de um campo para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger V para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (ponto-traço marron), $p = 5$ (traço longo verde) e $p = 6$ (traço vermelho). Os gráficos são para a) $q = 3$, b) $q = 5$ e c) $q = 7$.

A Fig. 3.5 mostra $V(r)$ para valores fixos de η , λ , r_0 e j e vários valores de q e p . Comparando as Figs. 3.5a-c observamos que, para parâmetros fixos, o aumento de p reduz o valor de $V(r \rightarrow \infty)$. Por outro lado, isto ocorre simultaneamente com o aumento da região em torno do mínimo local (mais evidente para q grande). No que diz respeito à ocorrência de estados ligados, o caráter anterior reduz a probabilidade, enquanto este último, aumenta. Então, há uma competição entre ambos os efeitos. Em particular, a Fig. 3.5c mostra que para $q = 7$ e $p = 6$ o mínimo do potencial desaparece e não há possibilidade de estados ligados. Isto indica que para valores grandes de q (i.e., $q \sim 7$), valores intermediários de p são melhores para obtermos mais estados ligados. Esta ocorrência é confirmada na Tabela 3.2, que mostra que, para $q = 5$ a ocorrência de estados ligados é mais frequente para $p = 4$ e $p = 5$ enquanto que $q = 7$ isso ocorre para $p = 3$ e $q = 4$.

	$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$		$p = 6$		$p = 7$		n
	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	
$q = 3$	41.9699	46.0534	41.5186	47.4958	40.6852	48.4558	39.4634	48.9136	37.8409	48.8321	35.8017	48.1530	1
	—	—	99.779	—	97.8555	—	93.7645	—	87.0198	—	77.3044	—	2
$q = 5$	20.1460	24.1420	19.3599	24.9835	17.9279	24.9191	15.8604	23.8675	13.1655	21.6049	9.8750	—	1
	66.4764	70.7870	62.7023	68.2819	55.8200	62.1088	45.5658	51.7269	31.8084	36.0979	—	—	2
	99.39.50	—	93.7420	97.2674	81.3528	85.2906	61.7843	65.0786	—	—	—	—	3
	—	—	—	—	91.2896	92.9968	67.7097	68.9111	—	—	—	—	4
$q = 7$	11.2155	15.0803	10.2061	15.2934	8.4188	14.1784	5.9333	11.3420	2.9698	—	—	—	1
	40.1402	44.4125	35.3980	40.5926	26.9721	32.1424	15.0591	18.0844	—	—	—	—	2
	73.4681	77.6431	61.9651	66.2717	42.8930	46.5882	19.0888	—	—	—	—	—	3
	95.9278	98.6800	81.1822	84.3789	53.5926	56.0433	—	—	—	—	—	—	4
	—	—	91.9072	93.7907	60.0097	61.5195	—	—	—	—	—	—	5
	—	—	96.7928	97.4313	—	64.5802	—	—	—	—	—	—	6

Tabela 3.2: Modelo de um campo para p -balls em $(D, 1)$ -dimensões: autovalores $M_{n\eta}^2$, soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$, com p e q dos potenciais de Schrödinger para $j = 2$ correspondendo à Fig. 3.5.

3.4 Um modelo de dois campos

Nesta seção vamos considerar o modelo

$$W(\phi, \chi) = \lambda \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 - s \phi \chi^2 \right). \quad (3.67)$$

Com a escolha de W , o potencial $\tilde{V}(\phi, \chi) = (1/2)(W_\phi^2 + W_\chi^2)$ foi introduzido na Ref. [52] para construir as paredes de Bloch. O limite $s \rightarrow 0.5$ transforma o problema de dois campos em apenas um campo, recuperando o modelo de parede de Ising. Isso pode ser melhor visto nas soluções explícitas $\phi(\xi)$ e $\chi(\xi)$ abaixo. A equação de movimento para os campos escalares, Eq. (3.14), é reescrita, após uma mudança de variável $d\xi = 1/r^{p-1}dr$, como

$$\frac{d\phi}{d\xi} = W_\phi, \quad (3.68)$$

$$\frac{d\chi}{d\xi} = W_\chi, \quad (3.69)$$

com solução

$$\phi(\xi) = \tanh(2\lambda s \xi), \quad (3.70)$$

$$\chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{s} - 2} \operatorname{sech}(2\lambda s \xi). \quad (3.71)$$

Retornando para a variável r , expressões explícitas para os perfis dos campos escalares e consequentemente para a densidade de energia podem ser facilmente obtidas. Temos, para $p \geq 2$,

$$\phi(r) = \tanh(\tau_p), \quad (3.72)$$

$$\chi(r) = \sqrt{\frac{1}{s} - 2} \operatorname{sech}(\tau_p), \quad (3.73)$$

$$\rho(r) = \frac{(2\lambda s)^2}{r^{2p-2}} \operatorname{sech}^4(\tau_p) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{s} - 2 \right) \sinh^2(\tau_p) \right\}.$$

onde

$$\tau_p = 2\lambda s \xi(r) \quad (3.74)$$

e $\xi(r)$ dado pela Eq. (3.32), para $p = 2$ e pela Eq. (3.33), para $p = 3, 4, \dots$

A Fig. 3.6 mostra o gráfico de $\phi(r)$ e $\chi(r)$ para λ, r_0 fixos e vários valores de s e p . O campo escalar $\phi(r)$ interpola entre -1 e ϕ_c , com $\phi_c = 1$ para $p = 2$ e $\phi_c = \tanh[2\lambda s / ((p-2)r_0^{p-2})]$

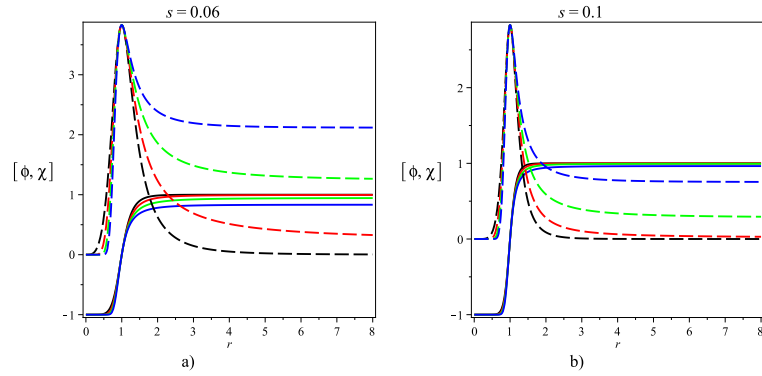


Figura 3.6: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: funções $\phi(r)$ (tipo kink, linhas sólidas) e $\chi(r)$ (tipo lump, tracejado). Fixamos $r_0 = 1$, $\lambda = 30$. Temos a) $s = 0.06$ e b) $s = 0.1$. Curvas são para $p = 2$ (preto), 3 (vermelho), 4 (verde) e 5 (azul).

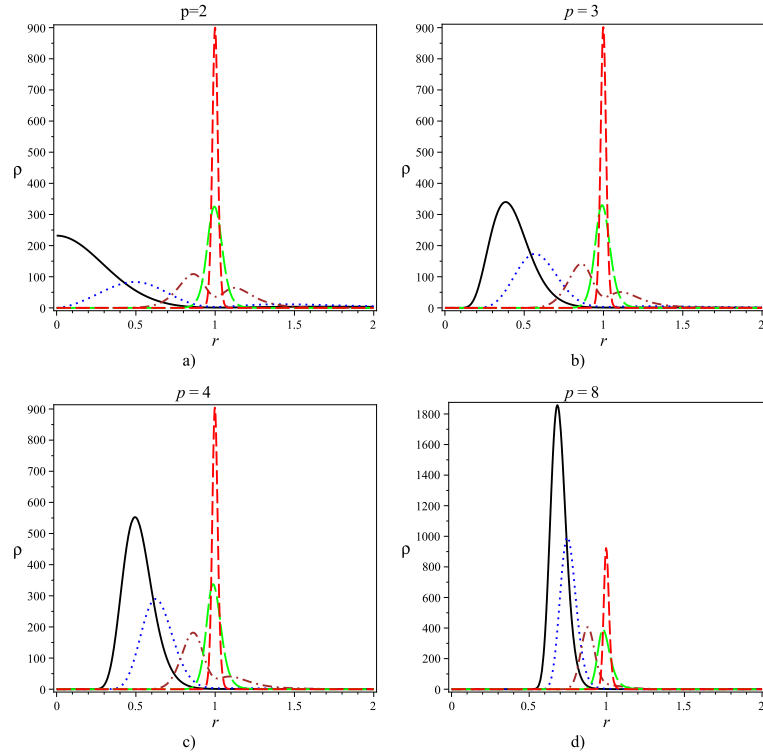


Figura 3.7: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: densidade de energia $\rho(r)$ para $r_0 = 1$ e $\lambda = 30$, $s = 1/60$ (linha preta), $s = 0.03$ (ponto azul), $s = 0.1$ (traço-ponto marrom), $s = 0.3$ (traço longo verde), $s = 0.5$ (tracejado vermelho). Plots são para a) $p = 2$, b) $p = 3$, c) $p = 4$ and d) $p = 8$.

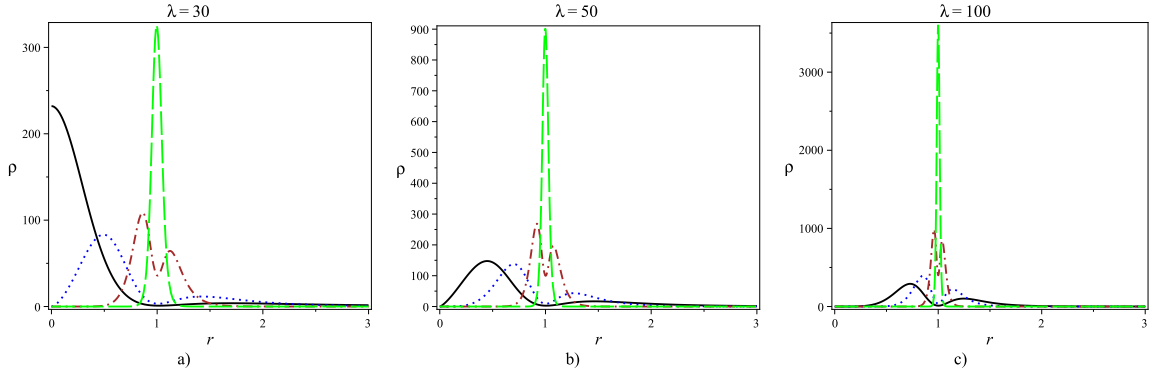


Figura 3.8: Modelo de dois campos para 2-balls em $(D,1)$ -dimensões: densidade de energia $\rho(r)$ para $r_0 = 1$, $p = 2$ e $s = 1/60$ (linha preta), $s = 0.03$ (ponto azul), $s = 0.1$ (traço-ponto marrom), $s = 0.3$ (traço longo verde). Plots são para a) $\lambda = 30$, b) $\lambda = 50$ e c) $\lambda = 100$.

para $p \neq 2$. O campo escalar $\chi(r)$ interpola entre zero e χ_c , com $\chi_c = 0$ para $p = 2$ e $\chi_c = \sqrt{(1/s) - 2\text{sech}[2\lambda s/((p-2)r_0^{p-2})]}$ para $p \neq 2$. Começando de $p = 2$, quanto maior p , menor é ϕ_c e maior é χ_c . Isso significa que com o aumento de p as configurações $\phi(r)$ e $\chi(r)$ são, respectivamente, mais afastadas das configurações kink e lump usuais em r , centrado em $r = r_0$. Comparando as Figs. 3.6a e 3.6b vemos que, para todos os outros parâmetros fixos, valores maiores de s fazem o perfil de $\phi(r)$ ser quase indistinguível de um defeito tipo kink fino centrado em $r = r_0$. Verificamos que valores maiores de λ tornam o defeito mais fino e também ϕ_c e χ_c próximos a 1 e 0, recuperando os perfis kink e lump para $\phi(r)$ e $\chi(r)$, respectivamente.

A Fig. 3.7 mostra o gráfico da densidade de energia $\rho(r)$ para λ, r_0 fixos e vários valores de s para $p = 2, 3, 4$ e 8. A partir da Fig. 3.7a notamos que para $p = 2$ o comportamento da densidade de energia muda de um lump centrado em $r = 0$ ($s = \frac{1}{2\lambda}$) para um pico centrado em torno de r_0 ($s = 0.5$). Comparando as Figs. 3.7a-d observamos que os picos para $s \simeq 0.5$ não dependem do número de dimensões transversas p . Contudo, para valores menores de s o comportamento de $\rho(r)$ altera sensivelmente. Além disso, para s pequeno o lump centrado em $r = 0$ ocorre somente para $p = 2$. Para $p \geq 3$ aparece um pico largo centrado em $0 < r < r_0$. Quanto maior p , maior e mais fino é este pico. Para $p \geq 6$, o pico para s pequeno passa a ser maior em comparação àqueles ocorrendo para valores maiores de s . A Fig. 3.7d mostra esse efeito para $p = 8$. A influência de λ na densidade de energia pode ser vista na Fig. 3.8 para $p = 2$. Note que o aumento de λ torna a densidade de energia mais centrada em $r = r_0$. Ao mesmo tempo isto reduz o máximo relativo da densidade de energia para valores menores de s em comparação com os níveis mais altos. Notamos um comportamento similar com a variação de λ para $p = 3$.

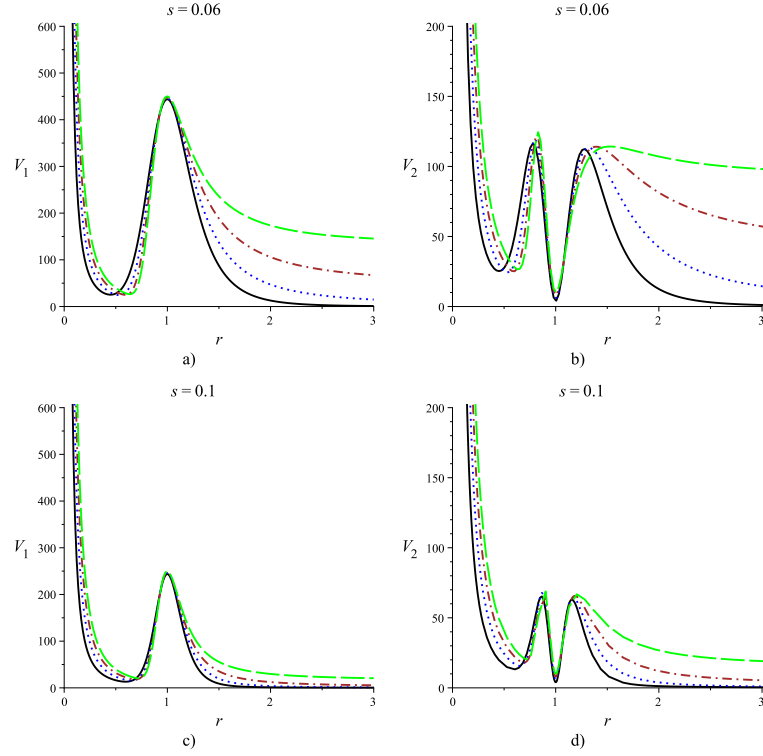


Figura 3.9: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger $V_1(r)$ (esquerda) e $V_2(r)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde). Plots são para $s = 0.06$ e $s = 0.1$.

A seguir, vamos considerar separadamente os acoplamentos $F_1(\chi) = \chi^2$ e $F_2(\phi, \chi) = (\phi\chi)^2$.

Os correspondentes potenciais do tipo Schrödinger são

$$V_1 = \frac{j(j+p-2)}{r^2} + \eta \left(\frac{1}{s} - 2 \right) \text{sech}^2(\tau_p), \quad p = 2, 3, \dots \quad (3.75)$$

$$V_2 = \frac{j(j+p-2)}{r^2} + \eta \left(\frac{1}{s} - 2 \right) \tanh^2(\tau_p) \text{sech}^2(\tau_p), \quad p = 2, 3, \dots \quad (3.76)$$

A Fig. 3.9 mostra alguns gráficos para $V_1(r)$ e $V_2(r)$ para valores fixos de η, λ, r_0, j e vários valores de p . Para todos os valores de p os potenciais são estritamente positivos. Também, para $p = 2$ temos $V_1(r \rightarrow \infty) = 0$ e $V_2(r \rightarrow \infty) = 0$, mostrando que estados ligados são ausentes. Para $p \geq 3$ temos $V_1(r \rightarrow \infty) = \eta F_1(\phi_c, \chi_c) \neq 0$ e $V_2(r \rightarrow \infty) = \eta F_2(\phi_c, \chi_c) \neq 0$ e podemos investigar a existência de estados ligados.

V	s	$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$		$p = 6$		$p = 7$		n
		$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	
V_1	0.06	-	-	-	-	18.4988	-	16.9502	65.5898	15.9269	68.9682	15.1955	72.4943	1
		-	-	-	-	-	-	66.3794	-	62.7636	149.3757	60.0992	153.8414	2
		-	-	-	-	-	-	-	-	137.6105	-	132.5581	254.5088	3
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	228.5419	-	4
V_1	0.10	-	-	-	-	-	-	13.3597	-	12.9701	-	12.6690	61.0235	1
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50.0838	-	2
V_2	0.06	-	-	-	-	17.6796	-	16.0810	57.2498	14.9927	58.2993	14.1899	59.1008	1
		-	-	-	-	-	-	51.6688	71.1128	49.2798	73.4513	47.0188	75.5898	2
		-	-	-	-	-	-	68.0193	-	65.5464	-	63.4274	-	3
		-	-	-	-	-	-	-	-	108.7936	-	100.9167	-	4
V_2	0.10	-	-	-	-	-	-	11.9547	-	11.4910	-	11.1174	48.1639	1
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38.0263	-	2

Tabela 3.3: Modelo de dois campos para p -balls em $(D, 1)$ -dimensões: autovalores M_{nj}^2 , soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, com potenciais de Schrödinger para $j = 2$ correspondendo à Fig. 3.9.

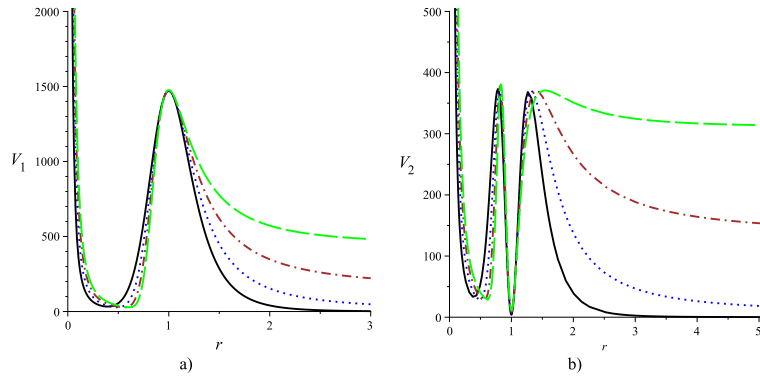


Figura 3.10: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: Potenciais de Schrödinger a) $V_1(r)$ (esquerda) e b) $V_2(r)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde).

Inicialmente, consideramos o caso $j = 2$. Para os potenciais mostrados na Fig. 3.9, e também para valores grandes de p , a existência de estados ligados foi investigada e alguns resultados podem ser encontrados de acordo com a Tabela 3.3. Para $s = 0.06$ e $s = 0.1$ não podemos encontrar estados ligados nem para V_1 nem para V_2 quando $p = 2, 3, 4$. Estados ligados aparecem para $p \geq 5$ para $s = 0.06$ e $p \geq 7$ para $s = 0.1$. Os resultados mostram que valores menores de s são melhores para a ocorrência de estados ligados. Como explicado acima, $s \rightarrow 0.5$ recupera o modelo de um campo ϕ . Então, a presença de um segundo campo escalar χ contribui para o armadilhamento de partículas de spin-0. Em outras palavras, p -balls com mais estrutura interna são mais capazes de armadilhar partículas escalares. Também, para s fixo e um número grande de dimensões transversais p , estados ligados ocorrem com valor de massa maior para o potencial V_1 em comparação com o potencial V_2 .

Isto mostra que, para o mecanismo de armadilhamento, o acoplamento de segundo grau χ^2 é melhor que o de quarta ordem $\phi^2\chi^2$. Além disso, um p -ball multidimensional com maior p é um mecanismo de melhor armadilhamento, como $V_1(r \rightarrow \infty)$ e $V_2(r \rightarrow \infty)$ cresce com p . Isso é confirmado na Tabela 3.3. Certamente, quanto maior é p , maior é o número de estados ligados. Também, os valores assintóticos $V_1(r \rightarrow \infty)$ e $V_2(r \rightarrow \infty)$ crescem com λ e η . Isto indica que para crescer a probabilidade de ocorrência de estados ligados, devemos ter $\eta, \lambda \gg 1$ e decrescer a razão λ/η . Isso pode ser visto na Fig. 3.10 onde $\lambda/\eta = 3/10$ (compare com a Fig. 3.9 onde $\lambda/\eta = 1$). Os correspondentes autovalores são descritos na Tabela 3.4. A partir dos resultados para $\lambda = 30$ vemos que para $\lambda/\eta = 3/10$ e $s = 0.06$ ocorrem estados ligados para $p \geq 4$ (compare com os resultados da Tabela 3.3 para $\lambda/\eta = 1$ onde estados ligados aparecem para $p \geq 5$).

V	$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$		$p = 6$		$p = 7$		n
	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	$j = 0$	$j = 2$	
V_1	—	—	—	—	21.5827	72.5884	19.3059	74.4329	17.8608	77.1262	16.8559	80.2321	1
	—	—	—	—	84.3439	166.9563	76.1917	166.9618	70.8185	168.9305	67.0053	171.9820	2
	—	—	—	—	—	—	167.7651	285.8629	157.0522	286.6631	149.2038	289.1227	3
	—	—	—	—	—	—	289.9211	427.9080	273.7365	427.8130	261.4261	429.7415	4
	—	—	—	—	—	—	438.2871	—	417.4132	589.5117	400.9835	591.3007	5
	—	—	—	—	—	—	—	—	584.4205	—	564.7141	770.9510	6
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	749.3110	—	7
V_2	—	—	—	—	21.3410	71.6610	19.0653	73.3757	17.6114	75.8862	16.5924	78.7597	1
	—	—	—	—	82.9807	127.0889	74.9047	127.4501	69.5199	127.3683	65.6502	126.8865	2
	—	—	—	—	119.3195	—	117.8118	163.8790	115.8253	165.8453	113.3861	168.7750	3
	—	—	—	—	—	—	164.1016	273.4499	153.9482	272.8946	146.5262	270.4678	4
	—	—	—	—	—	—	273.8062	310.4326	259.9589	300.8025	248.3106	290.6058	5
	—	—	—	—	—	—	304.4750	—	290.8448	—	275.0988	339.6651	6
	—	—	—	—	—	—	—	—	359.1479	—	332.6537	—	7
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	345.4081	—	8

Tabela 3.4: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: autovalores $M_{n,j}^2$, soluções da Eq. (3.48) para $j = 0$ e $j = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, $\eta = 100$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$, com potenciais de Schrödinger para $j = 2$ correspondendo a Fig. 3.10.

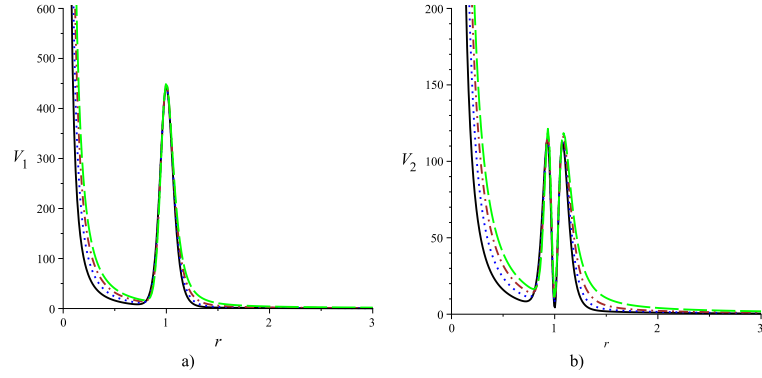


Figura 3.11: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger a) $V_1(r)$ (esquerda) e b) $V_2(r)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 100$, $s = 0.06$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde).

Note agora que os potenciais para o acoplamento F_1 são caracterizados pelo máximo local em $r = r_0$ enquanto que para F_2 há um mínimo local em $r = r_0$ cercado por dois máximos locais. O maior pico local para V_1 em comparação aos dois para V_2 sugere que, com o mesmo conjunto de parâmetros, estados ressonantes são mais prováveis com o acoplamento quadrático F_1 em relação ao acoplamento quártico F_2 . Isso está de acordo com o comportamento dos acoplamentos relativo a ocorrência dos estados ligados. Nós também vemos que a altura do máximo local cresce com o decrescimento de s , favorecendo o aparecimento de ressonâncias. Então, esperamos que a presença de um segundo campo escalar χ influencie o crescimento no número e tempo de vida das ressonâncias. Também encontramos que para todos os outros parâmetros fixos, a melhor escolha para reduzir o valor assintótico de V_1 e simultaneamente crescer a diferença entre o máximo e o mínimo local é manter $\eta, \lambda \gg 1$ e crescer a razão λ/η . Isso pode ser visto na Fig. 3.11, para $\lambda/\eta = 10/3$ (compare com a Fig. 3.9, onde $\lambda/\eta = 1$ e com a Fig. 3.10, onde $\lambda/\eta = 3/10$). Contudo, torna a barreira mais fina. Então, esperamos que um crescimento de λ/η aumente as chances para obtermos um número maior de ressonâncias, porém com menor tempo de vida.

A influência da variação do momento angular j pode ser vista na Fig. 3.12, onde apresentamos alguns gráficos para o potencial V_1 . Os potenciais para $j \geq 0$ são caracterizados por um mínimo e máximo local cuja separação decresce com j . Isso indica que o aumento de j reduz a possibilidade de ocorrência de estados ligados e ressonantes. O caso $j = 0$ é especial uma vez que temos $V_1 = 0$ em $r = 0$, sendo o caso com a maior possibilidade de ocorrência de tais estados. No que diz respeito aos estados ligados, é confirmado a partir dos resultados da Tabela 3.3 e 3.4, onde podemos comparar os casos $j = 0$ e $j = 2$. Assim, as análises anteriores

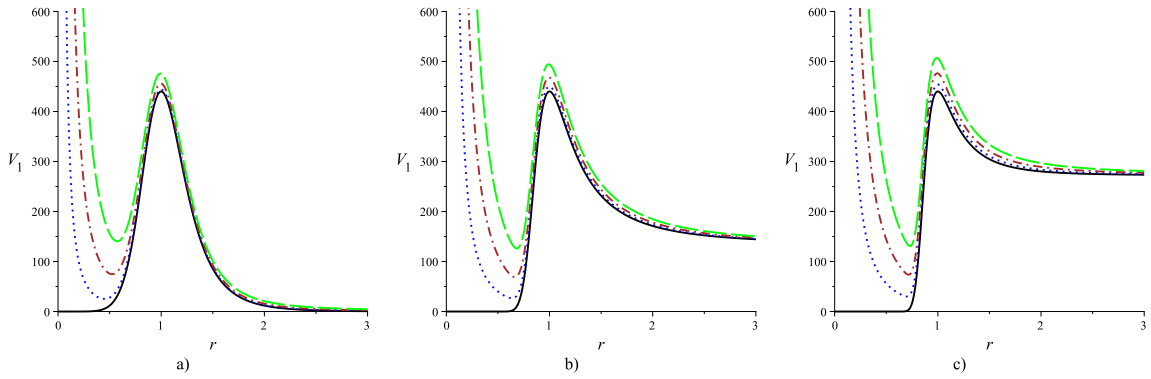


Figura 3.12: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: potenciais de Schrödinger $V_1(r)$ para a) $p = 2$, b) $p = 5$, c) $p = 7$ e $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$, $j = 0$ (linha preta), $j = 2$ (ponto azul), $j = 4$ (traço-ponto marrom), $j = 6$ (traço longo verde).

e conclusões do potencial de Schrödinger e estados ligados para $j = 2$ também se aplicam para valores gerais de j . Análises similares para o potencial V_2 levam a mesma conclusão: valores menores de j são favoráveis a ocorrência de estados ligados e ressonantes.

Agora, iremos considerar especificamente o efeito do número de dimensões longitudinais e transversais sobre o efeito de ressonâncias. Para os acoplamentos F_1 e F_2 , $\lambda s \geq 1/2$ e $j \geq 1$ os potenciais V_{sch} para $r \ll r_0$ são dominados pela contribuição do momento angular proporcional a $1/r^2$,

$$V(r) \approx \frac{j(j+p-2)}{r^2}, \quad (3.77)$$

e soluções não singulares em $r = 0$ são dadas pela Eq. (3.61), usada para calcular a probabilidade relativa P .

A Fig. 3.13 representa P (reescalado para fácil comparação) em função de $M_{nj} \equiv M$ para vários valores de p e s , correspondendo aos potenciais de Schrödinger da Fig. 3.9. Os gráficos mostram vários picos de ressonâncias, seguidos por um *plateau* para grandes valores de massas onde $P = r_0/r_{max}$. Por meio da figura, notamos que massas menores correspondem a picos finos, ou ressonâncias de maior tempo de vida. As ressonâncias de menor massa são mais difíceis de serem obtidas numericamente, devido a exigência de um grande número de dígitos de precisão. Comparando as Figs. 3.13a e 3.13c ou Figs. 3.13b e 3.13d vemos que valores menores de s correspondem a um número maior de picos ressonantes. Além disso, a separação do pico é reduzida para valores menores de s . Isso mostra que para pequenos valores de s são mais efetivos para obter ressonâncias. O efeito do aumento no número de dimensões extras p é um deslocamento na posição do pico para maiores massas, mantendo a separação da massa entre os picos quase inalterada. As Figs. 3.13b e 3.13d mostram os picos

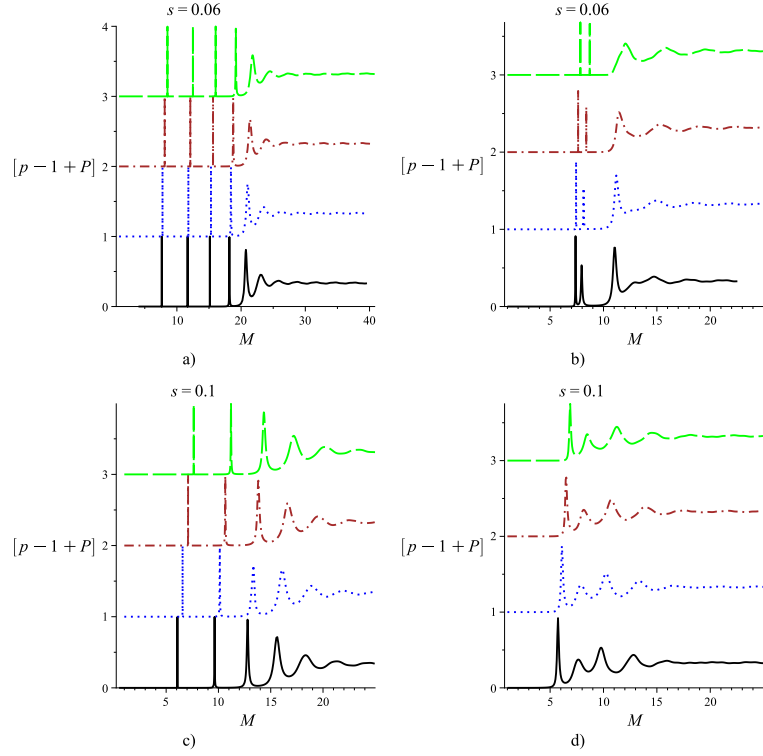


Figura 3.13: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: $(p-1)+P$ em função de M para o acoplamento $F_1(\chi)$ (esquerda) e $F_2(\phi, \chi)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto azul), $p = 5$ (traço longo verde). Os plots são para $s = 0.06$ e $s = 0.1$, e correspondentes potenciais da Fig. 3.9.

de ressonância para o acoplamento $F_2(\phi, \chi)$. Comparando isto com as Figs. 3.13a e 3.13c (relacionado à $F_1(\chi)$), observamos que para o acoplamento $F_2(\phi, \chi)$ o número e as massas das ressonâncias são fortemente reduzidos em comparação ao caso do acoplamento $F_1(\chi)$. Na verdade, mesmo para $s = 0.06$, a Fig. 3.13b mostra um par de picos vizinhos, com somente uma probabilidade relativa próxima a um. A sequência de picos quase igualmente espaçados para o acoplamento $F_1(\chi)$ (correspondendo à Fig. 3.13a) agora está ausente. Isso mostra que o acoplamento $F_2(\phi, \chi)$ é menos efetivo para ocorrência de ressonâncias.

A Fig. 3.14 mostra alguns picos de ressonâncias correspondendo a $\eta = 30$ e $\lambda = 100$. Comparando com as Figs. 3.13, notamos que as ressonâncias observadas são obtidas mais facilmente, mas também mais espessas, significando menor tempo de vida. Isto está de acordo com as análises da influência do razão λ/η para os potenciais do tipo Schrödinger.

Com relação ao setor de momento angular da decomposição do campo escalar fraco, o número de dimensões extras é o ponto chave. No restante desta seção, iremos considerar separadamente algumas escolhas específicas do número D de dimensões espaciais até $D = 5$. O procedimento para valores maiores de D é direto.

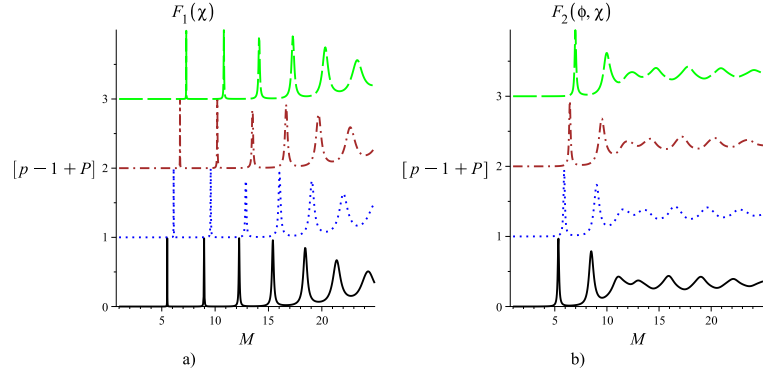


Figura 3.14: Modelo de dois campos para p -balls em $(D,1)$ -dimensões: $(p-1)+P$ em função de m para o acoplamento $F_1(\chi)$ (esquerda) e $F_2(\phi, \chi)$ (direita) para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 100$, $s = 0.06$ e $p = 2$ (linha preta), $p = 3$ (ponto azul), $p = 4$ (traço-ponto marrom), $p = 5$ (traço longo verde). Os plots correspondem aos potenciais da Fig. 3.11.

3.4.1 p -balls em $(3,1)$ -dimensões

A escolha mais simples é considerar p -balls em $(3,1)$ -dimensões. Neste caso, a única possibilidade é construir um defeito radial com $p = 2$ dimensões radiais. Este é um defeito do tipo tubo e foi estudado nas Refs. [88, 89]. A exigência de $\rho(r)$ finito em $r = 0$ restringe os parâmetros a satisfazer $\lambda s \geq 1/2$ quando $\lambda > 1$. Para grandes valores de λ , existe um valor s_0 de modo que para $\frac{1}{2\lambda} < s < s_0$, o efeito do campo χ é maior e o defeito aparece com uma estrutura do tipo tubo espesso cujo centro é localizado entre a origem e r_0 . A decomposição do campo escalar fraco $\Phi(t, x^1, x^2)$ é

$$\Phi(t, x^1, r, \varphi) = \sum_{n\ell} \xi_{n\ell}(t, x^1) \varsigma_{n,\ell}(r) Y_\ell(\varphi), \quad (3.78)$$

onde o harmônico esférico é $Y_\ell(\varphi) = e^{i\ell\varphi}$ e $\varsigma_{n,\ell}(r)$ satisfaz uma equação de Klein-Gordon $(2,1)$ -dimensional.

3.4.2 p -balls em $(4,1)$ -dimensões

Neste caso, temos duas possibilidades: i) construir um defeito radial com $p = 2$ dimensões transversas espaciais e $(2,1)$ dimensões longitudinais, ou ii) contruir um defeito radial com $p = 3$ dimensões transversas espaciais e $(1,1)$ dimensões longitudinais. Em seguida, consideraremos estas duas possibilidades separadamente.

p -balls em (4,1)-dimensões com $p = 2$ dimensões transversas

O defeito é caracterizado por um potencial que gera, respectivamente, soluções do tipo kink e lump para os campos escalares $\phi(r)$ e $\chi(r)$, bem como a densidade energia $T_{00}(r)$ com o mesmo perfil encontrado para o caso analisado na Sec. 3.4.1 para (3,1)-dimensões. Isso é esperado uma vez que nós temos o mesmo número (dois) de dimensões transversas. Deve-se seguir o mesmo como na Sec. 3.4.1: a decomposição dos harmônicos esféricos Y_ℓ , potenciais do tipo Schrödinger V_{sch} e probabilidade relativa P . A diferença é que no presente caso de (4,1)-dimensões temos (2,1) dimensões longitudinais. Isso se reflete na parte longitudinal $\xi_{n\ell}$ da decomposição do campo escalar fraco $\Phi(t, x^1, x^2)$,

$$\Phi(t, x^1, x^2, r, \varphi) = \sum_{n\ell} \xi_{n\ell}(t, x^1, x^2) \zeta_{n,\ell}(r) Y_\ell(\varphi), \quad (3.79)$$

que agora satisfaz uma equação de Klein-Gordon (2,1)-dimensional.

p -balls em (4,1)-dimensões com $p = 3$ dimensões transversas

O defeito é uma esfera 3-dimensional. Para valores maiores de λ e s , os defeitos aparecem como bolas finas em torno de r_0 e o campo ϕ têm forte contribuição para a densidade de energia. Por outro lado, quando temos valores maiores para λ e menores para s são formados picos entre a origem e o r_0 , que resulta em grande contribuição do campo χ e o defeito tem uma estrutura espessa. Os harmônico esférico é $Y_\ell(\varphi, \theta) = \sum_{-l}^l Y_{\ell m}(\varphi, \theta)$.

3.4.3 p -balls em (5,1)-dimensões

Nesse caso temos três possibilidades: i) contruir um defeito radial com $p = 2$ dimensões transversas espaciais e (3,1) dimensões longitudinais. O procedimento para as dimensões transversas é análogo a Sec. 3.4.1, com a exceção que agora a parte longitudinal $\xi_{n\ell}$ da decomposição do campo escalar fraco Φ satisfaz uma equação de Klein-Gordon (3,1)-dimensional. ii) construir um defeito radial com $p = 3$ dimensões transversas espaciais e (2,1) dimensões longitudinais. O resultado para as dimensões transversas é análogo à Sec. 3.4.2, com exceção que agora a parte longitudinal $\xi_{n\ell}$ da decomposição do campo escalar fraco Φ satisfaz uma equação de Klein-Gordon (2,1)-dimensional. iii) construir um defeito radial com $p = 4$ dimensões transversas espaciais e (1,1) dimensões longitudinais.

3.5 Modelos de três campos

Nessa seção vamos considerar alguns modelos de três campos. A análise numérica de estados ligados e ressonantes segue a mesma prescrição feita nas duas seções anteriores e não iremos prosseguir nesta direção aqui, focando principalmente nas análises dos potenciais do tipo Schrödinger. Começamos com uma simples extensão do modelo anterior, dado por [102]

$$W(\phi, \chi, \sigma) = \lambda \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 - s \phi (\chi^2 + \sigma^2) \right), \quad (3.80)$$

onde s é um parâmetro real. A equação de movimento para os campos escalares, Eq. (3.14) é reescrita, após uma mudança de variáveis $d\xi = 1/r^{p-1}dr$, como

$$\frac{d\phi}{d\xi} = W_\phi, \quad (3.81)$$

$$\frac{d\chi}{d\xi} = W_\chi, \quad (3.82)$$

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = W_\sigma. \quad (3.83)$$

Uma solução que conecta os mínimos $(\pm 1, 0, 0)$ do potencial [102]

$$\phi(\xi) = \tanh(2\lambda s \xi), \quad (3.84)$$

$$\chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{s} - 2 \cos(\vartheta)} \operatorname{sech}(2\lambda s \xi), \quad (3.85)$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{s} - 2 \sin(\vartheta)} \operatorname{sech}(2\lambda s \xi). \quad (3.86)$$

com $0 \leq s \leq 0.5$ e $0 \leq \vartheta < 2\pi$, onde agora ϑ é um novo parâmetro do modelo. Voltando à variável r , expressões explícitas para os perfis de campos escalar e consequentemente para densidade de energia podem ser obtidas facilmente. Nós temos, para $p \geq 2$,

$$\phi(r) = \tanh(\tau_p), \quad (3.87)$$

$$\chi(r) = \sqrt{\frac{1}{s} - 2 \cos(\vartheta)} \operatorname{sech}(\tau_p), \quad (3.88)$$

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{1}{s} - 2 \sin(\vartheta)} \operatorname{sech}(\tau_p), \quad (3.89)$$

$$\rho(r) = \frac{(2\lambda s)^2}{r^{2p-2}} \operatorname{sech}^4(\tau_p) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{s} - 2 \right) \sinh^2(\tau_p) \right\}.$$

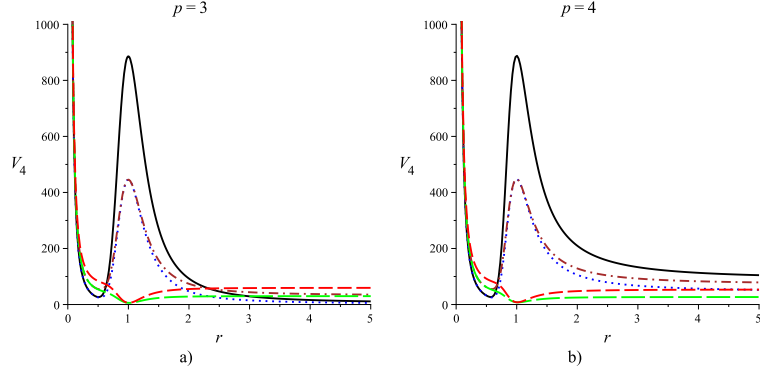


Figura 3.15: Potencial do tipo Schrödinger V_4 para $j = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, $s = 0.06$ e $a = 0, b = 2$ (linha preta), $a = 0, b = 1$ (ponto azul), $a = 1, b = 1$ (traço ponto marrom), $a = 1, b = 0$ (traço longo verde), $a = 2, b = 0$ (traço vermelho). Plots são para $p = 3$ (esquerda) e $p = 4$ (direita).

com τ_p dado pela Eq. (3.74). Podemos interpretar o campo ϕ com uma hipersfera, com os campos χ e σ dando sua estrutura interna. O equilíbrio dos campos internos é dado pelo parâmetro s . Podemos também considerar os campos escalares reais χ e σ como parte real e imaginária de um campo escalar complexo ζ , com o modelo dado por

$$W(\phi, \zeta) = \lambda \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 - s \phi |\zeta|^2 \right). \quad (3.90)$$

Um acoplamento simples é $F_3 = |\zeta|^2 = (\chi^2 + \sigma^2)$. As soluções explícitas $\chi(r), \sigma(r)$ mostram que este acoplamento recupera os resultados obtidos para $F_1(\chi)$ da Sec. 3.4. Outro acoplamento é $F_4 = a\phi^2 + b_1\chi^2 + b_2\sigma^2$, com $a, b_1, b_2 > 0$. Casos $a = b_2 = 0, b_1 = 1$ ou $a = 0, b_1 = b_2 = 1$ recuperam o acoplamento F_1 . Para o acoplamento F_4 , o potencial do tipo Schrödinger é

$$V_4 = \frac{j(j+p-2)}{r^2} + \eta a \tanh^2(\tau_p) + \eta b \left(\frac{1}{s} - 2 \right) \text{sech}^2(\tau_p), p = 2, 3, \dots, \quad (3.91)$$

com $b = b_1 \cos^2(\vartheta) + b_2 \sin^2(\vartheta)$. A Fig. 3.15 mostra o potencial V_4 para $p = 3$, $p = 4$ e vários valores de parâmetros a, b . A partir da figura observamos que um parâmetro $b \neq 0, a = 0$ resulta em um máximo local em torno de $r = r_0$ que cresce com b . Com $b \neq 0$, um valor $a \neq 0$ contribui para um pequeno aumento do pico de V_4 em torno de $r = r_0$. Para $b = 0, a \neq 0$ o máximo local desaparece e somente estados ligados são possíveis. As análises mostram que um parâmetro $b \neq 0$ (significando um acoplamento quadrático com campos χ ou σ) é crucial para a ocorrência de ressonâncias. Também um acoplamento quadrático com o campo ϕ é de importância secundária, quando comparado com o efeito de acoplamentos similares com os

outros dois campos que formam o defeito. Um acoplamento quadrático com apenas o campo ϕ não tem efeito no que diz respeito a ressonâncias. Isso ilustra a importância dos campos secundários χ, σ que dão ao defeito uma estrutura interna.

Comparando as Figs. 3.15a e 3.15b vemos que para $p = 3$ temos uma maior possibilidade de encontrarmos estados ressonantes em comparação à $p = 4$. O aumento de $V_4(r \rightarrow \infty)$ com p mostra que um valor intermediário de p é melhor para alcançar estados ligados, em uma conclusão similar à obtida na Sec. 3.3 para modelos de um campo. Para $p = 2$ o potencial V_4 é uma função monotonicamente decrescente, e não há nem estados ligados ou ressonantes.

Outros acoplamentos podem ser considerados, mas para ilustrar ainda mais a generalidade da construção das p -balls, aqui nós escolhemos considerar outro modelo, restrito a uma simetria $Z_2 \times Z_2$ nos eixos χ e σ [102]:

$$W(\phi, \chi, \sigma) = \lambda \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 - s \phi (\chi^2 + \sigma^2) + r g \sigma^2 \right). \quad (3.92)$$

Para $s > 0$ e $-1 < g < 1$ o potencial correspondente $V(\phi, \chi, \sigma)$ têm seis mínimos dados por (em unidades de ξ)

$$v_{1,2} = (\pm 1, 0, 0), \quad (3.93)$$

$$v_{3,4} = \left(0, \pm \sqrt{\frac{1}{s}}, 0 \right), \quad (3.94)$$

$$v_{5,6} = \left(g, 0, \mp \sqrt{\frac{1}{s}(1 - g^2)} \right). \quad (3.95)$$

Para $s \neq 0$ a única solução conectando o mínimo $v_{1,2}$ é o limite de um campo dado por $\chi = \sigma = 0$ e $\phi(\xi) = \tanh(\xi)$. Soluções não triviais para três campos escalares podem ser obtidas conectando os mínimos $v_{3,4}$ à $v_{5,6}$ e são dadas, com $sg^2 = 1$, por [102]

$$\phi(\xi) = \frac{g}{2}(1 + \tanh(\xi/g)), \quad (3.96)$$

$$\chi(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{s}} (1 - \tanh(\xi/g)), \quad (3.97)$$

$$\sigma(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{s}(1 - g^2)} (1 + \tanh(\xi/g)). \quad (3.98)$$

Retornando a variável r , e para $p \geq 2$, podemos obter as seguintes expressões para os campos

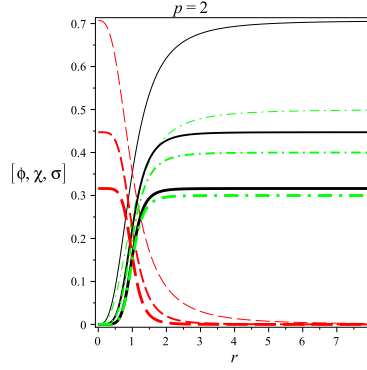


Figura 3.16: 2-balls em $(D,1)$ -dimensões para três campos escalares: funções $\phi(r)$ (linha preta), $\chi(r)$ (traço vermelho) e $\sigma(r)$ (traço-ponto verde). Fixamos $r_0 = 1$ e $\lambda = 30$ e acoplamentos $sg^2 = 1$. Temos $s = 1.01$ (linha fina), $s = 5$ e $s = 10$ (linha espessa).

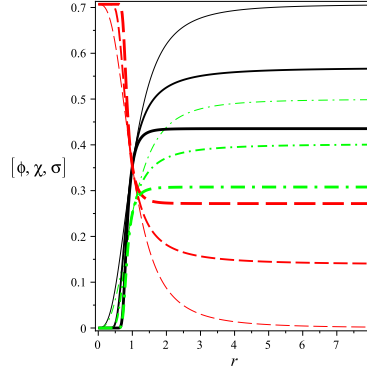


Figura 3.17: p -balls em $(D,1)$ -dimensões para três campos escalares: funções $\phi(r)$ (linha preta), $\chi(r)$ (traço vermelho) e $\sigma(r)$ (traço-ponto verde). Fixamos $r_0 = 1$ e $\lambda = 30$, $s = 2$ e $sg^2 = 1$. Temos $p = 2$ (linha fina), $p = 4$ e $p = 8$ (linha espessa).

escalares:

$$\phi(r) = \frac{g}{2}(1 + \tanh(\xi(r)/g)), \quad (3.99)$$

$$\chi(r) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{s}} (1 - \tanh(\xi(r)/g)), \quad (3.100)$$

$$\sigma(r) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{s} (1 - g^2)} (1 + \tanh(\xi(r)/g)), \quad (3.101)$$

com $\xi(r)$ dado por Eq. (3.32), para $p = 2$ ou (3.33), para $p = 2, 3, \dots$.

A Fig. 3.16 mostra gráficos de $\phi(r)$, $\chi(r)$ e $\sigma(r)$ para $p = 2$ e λ, r_0 fixos e vários valores de s . A partir da figura observamos que todos os três campos têm uma estrutura tipo kink em torno de $r = r_0$. Note que um aumento em s (e correspondentemente um decrescimento em g) resulta em um defeito fino. O mesmo efeito ocorre com o aumento de p , como pode ser visto a partir da Fig. 3.17.

Para o acoplamento $F_5 = a\phi^2 + b_1\chi^2 + b_2\sigma^2$, com $a, b_1, b_2 > 0$, o potencial tipo Schrödinger

é

$$\begin{aligned}
 V_5 = & \frac{j(j+p-2)}{r^2} + \eta a \frac{g^2}{4} (1 + \tanh(\xi(r)/g))^2 \\
 & + \eta b \frac{1}{4} \frac{1}{s} (1 - \tanh(\xi(r)/g))^2 + \eta c \frac{1}{4} \frac{1}{s} (1 - g^2) (1 + \tanh(\xi(r)/g))^2, p = 2, 3, \dots,
 \end{aligned}
 \tag{3.102}$$

que pode também ser investigado para uma possível ocorrência de estados ligados e ressonantes.

No capítulo a seguir iremos considerar a localização de férmions em p -balls em $(3,1)$ -dimensões.

Capítulo 4

Armadilhamento de férmions de Dirac em p -balls gerados por dois campos escalares em $(3,1)$ -dimensões

Cenários mundo-brana têm suas origens na tentativa de solucionar problemas importantes da Física teórica, a exemplo da constante cosmológica e hierarquia de gauge [71, 103]. Na formulação original de branas finas, os campos de matéria são por construção localizados na brana com a densidade de energia descrita pela função delta [104], enquanto a gravidade propaga-se em todas as dimensões. A lei de Newton usual pode ser reproduzida na brana dependendo do fator de deformação da métrica (*warp factor*), alcançado após resolver as equações de Einstein. Logo várias extensões surgiram, com branas espessas suaves construídas por dois campos escalares [73]-[82]. Uma compreensível revisão sobre este tópico pode ser encontrada na Ref. [82].

Em geral, branas espessas são possivelmente capazes de armadilhar *gravitons* e campos escalares. Para férmions, contudo, a introdução do acoplamento férmion-escalar é uma condição necessária para assegurar os modos zeros normalizáveis. Esta é uma propriedade conhecida e demonstrada por Jackiw e Rebbi na Ref. [105] para paredes de domínio. Para alguns modelos, há um vazamento dos estados fermiônicos massivos da brana, mas estes permanecem por um tempo suficiente onde são caracterizados como ressonâncias [90]-[92]. Em particular, na Ref. [9], foi analisada a localização de campos de matéria nas branas construídas a partir do campo escalar acoplado ao *dilaton*. Na Ref. [10], a localização e o espectro de massa de

vários campos de matéria em branas espessas AdS foram investigados. Para modos fermiônicos *Kaluza-Klein*, estados ligados para ambas as quiralidades foram encontrados. Na Ref. [23], os autores investigaram a presença de modos massivos para os férmions de mão direita e esquerda em branas com estrutura interna construída por dois campos escalares acoplados à gravidade pela introdução de um simples acoplamento de Yukawa.

Consideramos p -balls em (3,1)-dimensões com simetria axial, formados por dois campos escalares. Os defeitos formados têm a forma de um tubo cilíndrico infinito com $p = 2$ dimensões transversais. Estudamos aspectos de localização de campos fermiônicos nesse sistema, com particular interesse nos efeitos de ressonância.

4.1 Tubo em (3,1)-dimensões

Vimos na seção 3.4.1 que a realização mais simples de p -balls com dois campos escalares são tubos com $p = 2$ dimensões radiais em (3,1)-dimensões. As equações 3.1 e 3.2 para dois campos escalares ϕ, χ resultam em

$$S_{tube} = \int dt d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi + \frac{1}{2} \partial_B \chi \partial^B \chi - V(\phi, \chi) \right), \quad (4.1)$$

com

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2r^2} (W_\phi^2 + W_\chi^2). \quad (4.2)$$

Usamos as letras maiúsculas $A, B, \dots$ para todas as (3,1)-dimensions. A dependência explícita de $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ generaliza para dois campos a construção da Ref. [11, 87] para evadir do Teorema de Derrick-Hobarts [6, 17, 18].

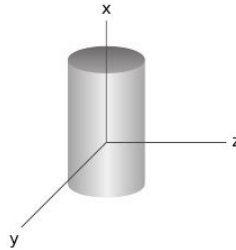


Figura 4.1: Defeito do tipo tubo.

Notamos que a construção quebra a invariância translacional, que é também presente nos

cenários da Cromodinâmica Quântica. Por exemplo, nas investigações que trabalham com supercondutividade de cor, o emparelhamento com *quarks* com diferentes potenciais químicos resulta em *quarks* cristalinos que quebram espontaneamente a invariância translacional e rotacional, e inclui pares de Cooper de *spin*-0 [106, 107]. Nas Refs. [108, 109], a densidade lagrangiana efetiva descrevendo *color-flavor locked* (CFL), simetria de fase da Cromodinâmica Quântica em altas densidades, tem campos dependendo da velocidade dos férmions não massivos de Dirac. Com o modelo lagrangiano efetivo *glueball*, a quebra de invariância de Lorentz induzida pelo potencial químico do *quark*, afeta a temperatura crítica para o início do estado de supercondutividade [110]. A quebra de invariância translacional também ocorre em problemas que lidam com intersecções de branas [111, 112], teoria de campo não comutativa [113, 114] e Física da matéria condensada [115, 116].

As equações de movimento para soluções estáticas são

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} (W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}), \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} (W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}). \quad (4.4)$$

A partir desse momento, nos restringimos a configurações com simetria radial, i.e., os campos $\phi = \phi(r)$ e $\chi = \chi(r)$ dependendo apenas de r . Podemos mostrar que as soluções das equações de primeira ordem [11]

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r} W_\phi, \quad \frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{r} W_\chi, \quad (4.5)$$

são também soluções das equações de segunda ordem (4.3) e (4.4). A mudança de variáveis $d\xi = (1/r)dr$ efetivamente transforma o modelo 2-dimensional em um modelo 1-dimensional, uma vez que as Eqs. (4.5) podem ser reescritas como

$$\frac{d\phi}{d\xi} = W_\phi, \quad \frac{d\chi}{d\xi} = W_\chi. \quad (4.6)$$

Assim, para gerar soluções tipo tubo consideramos [52]

$$W(\phi, \chi) = \lambda \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 - s \phi \chi^2 \right). \quad (4.7)$$

A escolha de $W(\phi, \chi)$ com o potencial $\tilde{V}(\phi, \chi) = (1/2)(W_\phi^2 + W_\chi^2)$ foi estudado na Ref. [52]. O potencial $\tilde{V}(\phi, \chi)$ tem mínimo em $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm \sqrt{1/s})$, com $s > 0$, e as equações de movimento

possuem soluções estáticas conectando o mínimo $(\pm 1, 0)$ como o defeito com estrutura interna conhecido como paredes de *Bloch*. O limite $s \rightarrow 0.5$ torna o problema de dois campos em um modelo de um campo com soluções conhecidas como paredes de *Ising*. Veja também nas Refs. [66, 117] para outras soluções. A extensão dessa construção para (4,1)-dimensões leva a branas de *Bloch* apresentadas em Ref. [80]. A rica estrutura das branas de *Bloch* críticas e degeneradas foram propostas em Ref. [118]. Na Ref. [80] foi mostrado que a presença do campo χ seria crucial para o aparecimento de estrutura interna à brana. Nesse capítulo a presença do campo χ também contribui para gerar uma estrutura interna no tubo formado. Veremos que isto é crucial para localizar férmions com um simples acoplamento de Yakawa.

A escolha dada pela Eq. (4.7) gera soluções 1-dimensionais para as Eqs. (4.6)

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \tanh(2\lambda s \xi), \\ \chi(\xi) &= \pm \sqrt{\frac{1}{s} - 2 \operatorname{sech}(2\lambda s \xi)},\end{aligned}\tag{4.8}$$

onde $0 < s < 1/2$. Retornando para a variável r , temos

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \tanh(2\lambda s \ln(r/r_0)), \\ \chi(r) &= \pm \sqrt{\frac{1}{s} - 2 \operatorname{sech}(2\lambda s \ln(r/r_0))},\end{aligned}\tag{4.9}$$

que tem um perfil tipo anel e r_0 identificado como o raio do anel da seção transversal do tubo.

A densidade de energia do defeito 2-dimensional é

$$\begin{aligned}T_{00} &= \frac{(2\lambda s)^2}{r^2} \operatorname{sech}^4 \left[2\lambda s \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(\frac{1}{s} - 2 \right) \sinh^2 \left[2\lambda s \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \right\}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Aqui consideramos T_{00} finito em $r = 0$, que restringe os parâmetros a satisfazer $\lambda s \geq 1/2$ quando $\lambda > 1$. As Figs. 4.2(a)-(b) mostram a densidade de energia $T_{00}(r)$ para $r_0 = 1$ fixo e alguns valores de λ e do acoplamento constante s . Notamos que para valores fixos $\lambda > 1$ e $\frac{1}{2\lambda} \leq s < \frac{1}{2}$, o comportamento da densidade de energia muda de um lump centrado em $r = 0$ ($s = 1/2\lambda$) para um pico centrado em r_0 ($s = 1/2$). Para s fixo, a amplitude máxima de T_{00} cresce com λ , então valores grandes de λ produzem resultados mais interessantes. Para valores

grandes de λ , existe um valor s_0 de modo que, para $\frac{1}{2\lambda} < s < s_0$, os efeitos do campo χ são fortes e o defeito aparece como uma estrutura de tubo espessa cujo centro é localizado entre a origem e r_0 . Por outro lado, para $s_0 \lesssim s < \frac{1}{2}$ é clara a predominância do campo ϕ e o defeito assemelha-se a um tubo fino centrado em torno de r_0 .

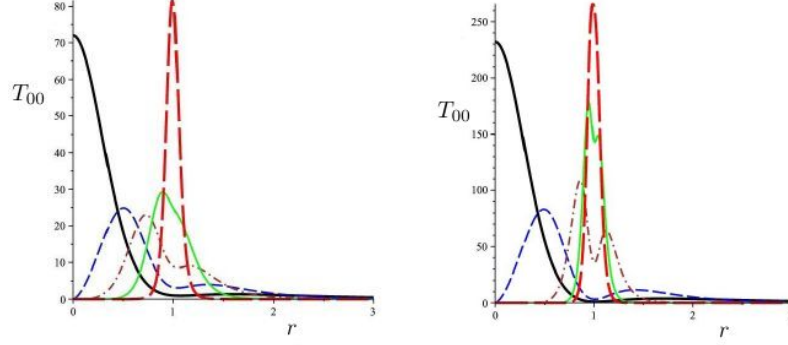


Figura 4.2: Densidade de energia $T_{00}(r)$ para $r_0 = 1$: (a) (esquerda) $\lambda = 10$, $s = 0.05$ (linha grossa preta), $s = 0.09$ (linha fina tracejada azul), $s = 0.15$ (linha fina ponto-tracejada marrom), $s = 0.25$ (linha fina verde), $s = 0.45$ (linha grossa tracejado longo vermelha); (b) (direita) $\lambda = 30$, $s = 1/60$ (linha grossa preta), $s = 0.03$ (linha fina tracejada azul), $s = 0.1$ (linha fina ponto-tracejada marrom), $s = 0.2$ (linha fina verde), $s = 0.27$ (linha grossa tracejado longo vermelha).

Isso significa que para valores largos de λ , podemos caracterizar o defeito como um anel em um plano- yz 2-dimensional, ou como um tubo cilíndrico em um espaço 3-dimensional, orientado ao longo do eixo x . A influência de grandes valores de s mostram que o campo χ é responsável pelo processo de geração do tubo espesso. A energia total no plano- yz é dado por $E = 8\pi\lambda/3$, que pode ser identificado com a massa do anel M_{anel} .

4.2 Localização de Férmions

Estamos interessados na localização de férmions (1,1)-dimensionais em um tubo infinito cuja seção transversal é um anel 2-dimensional. O tubo em questão foi analisado na seção anterior. Ao considerarmos estados fermiônicos em um defeito tipo tubo, devemos observar que as análises sobre a existência ou não dos modos zero fermiônicos foram também consideradas em outros contextos. Podemos citar férmions em um campo de soluções *vortex* abeliano e não abelianos [119]-[121] e, mais especificamente, modos zero de neutrinos em cordas eletrofracas [122]-[124].

Então, após negligenciar a *backreaction* no tubo, consideramos a ação fermiônica

$$S_{ferm} = \int dt dx dy dz \left[\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - \eta F(\phi, \chi) \bar{\Psi} \Psi \right], \quad (4.11)$$

onde Γ^0, Γ^1 são matrizes definidas como

$$\Gamma^0 = i\gamma^0 = i\sigma^1, \quad \Gamma^1 = i\gamma^1 = \sigma^2, \quad (4.12)$$

enquanto Γ^2, Γ^3 são convenientemente escolhidas com intuito de fornecer as equações de Schrödinger no plano- yz cujos potenciais são parceiros supersimétricos. Aqui $F(\phi(r), \chi(r)) = F(r)$ é uma função dos campos escalares $\phi(r)$ e $\chi(r)$ que rendem a solução do anel nas Eqs. (4.9) e η é a constante de acoplamento.

Um importante ponto a ser notado é que, em (3,1)-dimensões, usualmente os espinores de Dirac e as matrizes γ são objetos de quatro componentes. Contudo, devido à simetria cilíndrica do tubo, ocorre uma redução dimensional efetiva para uma teoria (2,1), e os espinores de Dirac e as matrizes podem ser tomadas por meio de duas componentes. Este processo é bem conhecido em problemas envolvendo vórtices desde o trabalho de Jackiw e Rossi [121]. Um processo similar foi realizado por Witten no contexto de cordas supercondutoras [125].

Após a transformação do plano- yz em coordenadas polares, a equação de movimento para Ψ é encontrada

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \begin{pmatrix} \partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta & 0 \\ 0 & -(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta) \end{pmatrix} \Psi - \eta F \Psi = 0, \quad (4.13)$$

onde as letras gregas $\mu, \nu, \dots$ representam as coordenadas (t, x) e escolhemos

$$\Gamma^r = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^\theta = i\mathbf{1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Desacoplamos as coordenadas (t, x) a partir de (r, θ) fazendo a seguinte decomposição

$$\Psi(t, x, y, z) = \sum_n \begin{pmatrix} R_n(r, \theta) \Psi_{Rn}(t, x) \\ L_n(r, \theta) \Psi_{Ln}(t, x) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Em seguida, consideramos as coordenadas do campo fermiônico como $(x^0, x^1) = (t, x)$ e as coordenadas do anel como $(x^2, x^3) = (y, z)$.

Impomos que Ψ_{Rn} e Ψ_{Ln} são as componentes do férmion massivo satisfazendo a equação de Dirac $(1+1)$ -dimensional

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_n) \psi_n = 0, \quad \psi_n = \begin{bmatrix} \Psi_{Rn} \\ \Psi_{Ln} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

podemos reescrever a Eq. (4.13) em um conjunto de equações para as amplitudes $L_n(r, \theta)$ e $R_n(r, \theta)$

$$\left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \right) L_n + \eta F L_n = M_n R_n, \quad (4.17)$$

$$-\left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta \right) R_n + \eta F R_n = M_n L_n. \quad (4.18)$$

Agora fazemos a decomposição

$$L_n(r, \theta) = \sum_{\ell} \Lambda_{n\ell}(r) e^{i\ell\theta}, \quad (4.19)$$

$$R_n(r, \theta) = \sum_{\ell} \varrho_{n\ell}(r) e^{i\ell\theta}, \quad (4.20)$$

onde $\ell \in \mathbb{Z}$ e as funções $\Lambda_{n\ell}$, $\varrho_{n\ell}$ são finitas em $r = 0$. Outras decomposições são usadas em outros contextos, veja por exemplo nas Refs. [126]-[128]. Combinando as Eqs. (4.17) e (4.18) alcançamos as equações de Schrödinger para os modos escalares $\Lambda_{n\ell}(r)$ e $\varrho_{n\ell}(r)$

$$-\frac{d^2 \Lambda_{n\ell}}{dr^2} + V_{sch}^L(r) \Lambda_{n\ell} = \hat{H}_{sch}^L \Lambda_{n\ell} = M_n^2 \Lambda_{n\ell}, \quad (4.21)$$

$$-\frac{d^2 \varrho_{n\ell}}{dr^2} + V_{sch}^R(r) \varrho_{n\ell} = \hat{H}_{sch}^R \varrho_{n\ell} = M_n^2 \varrho_{n\ell}, \quad (4.22)$$

onde os potenciais são dados por

$$V_{sch}^L(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + 2\eta\ell \frac{F}{r} - \eta(\partial_r F) + \eta^2 F^2, \quad (4.23)$$

$$V_{sch}^R(r) = \frac{\ell(\ell-1)}{r^2} + 2\eta\ell \frac{F}{r} + \eta(\partial_r F) + \eta^2 F^2. \quad (4.24)$$

Portanto, transformamos a equação para os férmions em um conjunto de equações de Schrödinger independentes para as amplitudes $\Lambda_{n\ell}$ e $\varrho_{n\ell}$, permitindo a obtenção do nosso objetivo, ou seja, encontrar os modos massivos e analisar suas propriedades de localização. As Eqs. (4.21) e (4.22) permite-nos adotar a interpretação probabilística de modo a encontrar

os modos massivos de ambas as componentes do tubo. No momento estamos interessados em estados ressonantes.

Os Hamiltonianos, definindo as equações de Schrödinger, (4.21) e (4.22), podem ser reescritos em termos dos operadores conjugados $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$

$$\hat{A} = \frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r} + \eta F, \quad \hat{A}^\dagger = -\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r} + \eta F, \quad (4.25)$$

como sendo $\hat{H}_{sch}^L = \hat{A}^\dagger \hat{A}$ e $\hat{H}_{sch}^R = \hat{A} \hat{A}^\dagger$, garantindo que os autovalores m_n^2 sejam não negativos. Dessa forma, é proibida a existência dos modos taquiônicos.

Uma vez que as Eqs. (4.21) e (4.22) formam um par do sistema de Sturm-Liouville, as autofunções $\Lambda_{n\ell}$ e $\varrho_{n\ell}$, respectivamente, estabelecem um conjunto completo de funções ortonormais satisfazendo

$$\int_0^\infty dr \Lambda_{m\ell} \Lambda_{n\ell} = \delta_{mn}, \quad (4.26)$$

$$\int_0^\infty dr \varrho_{m\ell} \varrho_{n\ell} = \delta_{mn}. \quad (4.27)$$

Além disso, note que a ação S_{ferm} dada pela Eq. (4.11) pode ser integrada em (y, z) -dimensões obtendo uma ação para as componentes de mão esquerda e de mão direita dos férmions de Dirac

$$\begin{aligned} S_{ferm} = & \int dt dx \sum_{m,n} C_{mn} \Psi_{Lm}^* [i(\partial_0 - \partial_1) \Psi_{Ln} - M_n \Psi_{Rn}] \\ & + \int dt dx \sum_{m,n} D_{mn} \Psi_{Rm}^* [i(\partial_0 + \partial_1) \Psi_{Rn} - M_n \Psi_{Ln}], \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde definimos as matrizes simétricas

$$C_{mn} = 2\pi \sum_\ell \int_0^\infty dr r \Lambda_{m\ell} \Lambda_{n\ell}, \quad (4.29)$$

$$D_{mn} = 2\pi \sum_\ell \int_0^\infty dr r \varrho_{m\ell} \varrho_{n\ell}. \quad (4.30)$$

Nesse caminho, a ação dada pela Eq. (4.28) fornece as equações de movimento para as com-

ponentes de mão esquerda e direita do espinor ψ_n

$$i(\partial_0 - \partial_1) \Psi_{Ln} - M_n \Psi_{Rn} = 0, \quad (4.31)$$

$$i(\partial_0 + \partial_1) \Psi_{Rn} - M_n \Psi_{Ln} = 0, \quad (4.32)$$

como exigido na Eq. (4.16).

Por outro lado, ao exigirmos hermiticidade da ação (4.28), obtemos $C_{mn} = D_{mn}$, levando a

$$S_{ferm} = \int dt dx \sum_{m,n} C_{mn} [\bar{\psi}_m i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n - M_n \bar{\psi}_m \psi_n], \quad (4.33)$$

que após a redefinição do campo fermiônico representa uma ação descrevendo uma torre de férmions massivos de Dirac.

Agora consideramos as questões de existência do modo zero χ_0 que é obtido a partir de

$$\hat{A}\chi_0 = 0. \quad (4.34)$$

Na Mecânica Quântica, e para valores fixos de ℓ , o hamiltoniano H_{sch}^R é um parceiro supersimétrico do hamiltoniano H_{sch}^L com superpotencial

$$\mathcal{W} = \frac{\ell}{r} + \eta F. \quad (4.35)$$

Assim, a solução para o modo zero é

$$\chi_0 \propto r^{-\ell} \exp \left\{ -\eta \int_0^r dr' F(r') \right\}. \quad (4.36)$$

Em nossas análises consideramos o acoplamento de Yukawa, $F(\phi, \chi) = \phi(r)\chi(r)$. Portanto, pelo fato da integral $\int_0^r dr' F(r')$ possuir caráter finito para todo r , o modo zero revela-se não normalizável para qualquer ℓ . Desde que o modo zero de H_{sch}^L é não normalizável, concluímos que os espectros de H_{sch}^L e H_{sch}^R são idênticos devido à quebra espontânea de supersimetria nesse sistema de Mecânica Quântica [129, 130].

4.3 Resultados Numéricos

Para nossa proposta consideramos o acoplamento de Yukawa, $F(\phi, \chi) = \phi\chi$. Interessantes considerações para este e outros acoplamentos em modelos de dois campos escalares podem ser encontrados na Ref. [131].

As soluções compatíveis com $\langle \hat{A}f|g \rangle = \langle f|\hat{A}^\dagger g \rangle$ devem ser nulas em $r = 0$. De modo a investigar os estados massivos numericamente, primeiramente consideramos a região próxima à origem, $r \ll r_0$, onde

$$F(r) \sim -2\sqrt{\frac{1}{s} - 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\lambda s}}. \quad (4.37)$$

Então para $\lambda s \geq 1/2$, as funções F/r , $\partial_r F$ e F^2 são finitas e os potenciais $V_{sch}^L(r)$ e $V_{sch}^R(r)$ são dominados pelas contribuições do momento angular proporcional a $1/r^2$. Dessa maneira, o potencial para a componente de mão esquerda é reduzido para

$$\tilde{V}_{sch}^L(r) \approx \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (4.38)$$

Isso resulta que, na vizinhança da origem, devemos ter

$$\Lambda_{n\ell}(r) = \sqrt{r}J_{\ell+\frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell \geq 0, \quad (4.39)$$

$$\Lambda_{n\ell}(r) = \sqrt{r}Y_{\ell+\frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell \leq -1. \quad (4.40)$$

Para a componente da direita, temos

$$\tilde{V}_{sch}^R(r) \approx \frac{\ell^2 - \ell}{r^2}, \quad (4.41)$$

e a partir do mesmo argumento das soluções nulas em $r = 0$, temos

$$\varrho_{n\ell}(r) = \sqrt{r}J_{\ell-\frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell \geq 1, \quad (4.42)$$

$$\varrho_{n\ell}(r) = \sqrt{r}Y_{\ell-\frac{1}{2}}(m_n r), \quad \ell \leq 0. \quad (4.43)$$

Consequentemente, para cada valor de ℓ , Eqs. (4.39)-(4.40) ou (4.42)-(4.43) são usadas como um *input* para o método de *Runge-Kutta-Fehlberg*, que produz uma solução precisa de quinta ordem.

Podemos definir a probabilidade de encontrar férmions dentro do tubo de raio r_0 como na

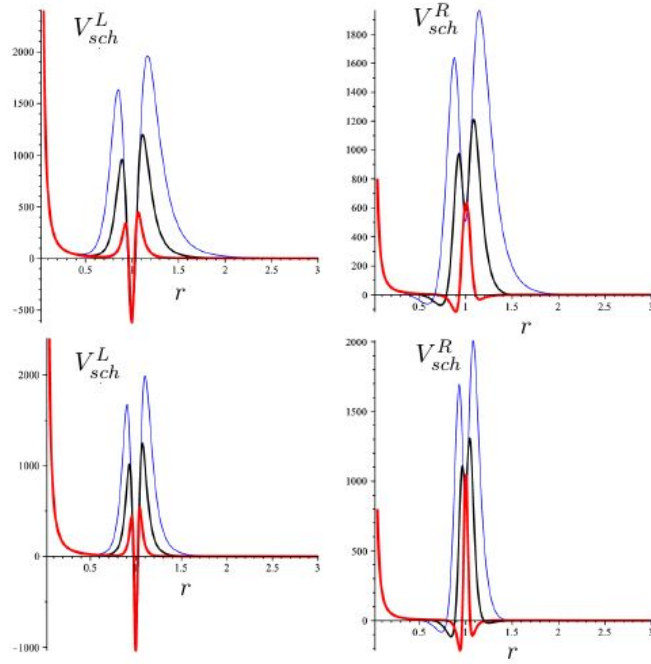


Figura 4.3: Potenciais de Schrödinger V_{sch}^L (esquerda) e V_{sch}^R (direita) para $\ell = 2$. Fixamos $r_0 = 1$, e $\eta = 30$. Nós temos (a) $\lambda = 30$ (figuras superiores) e (b) $\lambda = 50$ (figuras inferiores). Em todas as figuras $s = 0.1$ (linha fina azul), $s = 0.15$ (linha preta), $s = 0.3$ (linha grossa vermelha).

Ref. [50], ou seja

$$P_{tubo} = \frac{\int_{r_{min}}^{r_0} dr |\varphi_{n\ell}(r)|^2}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr |\varphi_{n\ell}(r)|^2}, \quad (4.44)$$

onde $\varphi_{n\ell} = \Lambda_{n\ell, \varrho_{n\ell}}$. Aqui $r_{min} \ll r_0$ é usado como condição inicial e r_{max} é o comprimento da caixa usado para o processo de normalização, sendo este o valor onde os potenciais de Schrödinger são próximos a zero e onde os modos massivos oscilam como ondas planas.

Por meio das considerações da densidade de energia nas Figs. 4.2(a)-4.2(b), grandes valores de λ favorecem a existência de um potencial de Schrödinger com estrutura similar a uma barreira em $r = r_0$. A Fig. 4.3 indica os potenciais de Schrödinger $V_{sch}^L(r)$ e $V_{sch}^R(r)$ para $\ell = 2$, $\lambda = 30, 50$, $\eta = 30$ fixo e $r_0 = 1$. Os potenciais em geral divergem em $r \rightarrow 0$, assumem a forma de uma barreira em torno de $r = r_0$ e assintotam a zero com $r \rightarrow \infty$, indicando a possível presença de ressonâncias. O incremento de η torna a barreira de potencial maior, enquanto o aumento de λ a torna mais fina. Notamos que ℓ influencia o comportamento do potencial para $r < r_0$, mas não tem influência sensível na barreira e, também observamos que o incremento de r_0 aumenta a largura da barreira de potencial.

As Figs. 4.4(a)-(f) mostram os resultados de P_{tubo} em função de m para os férmions

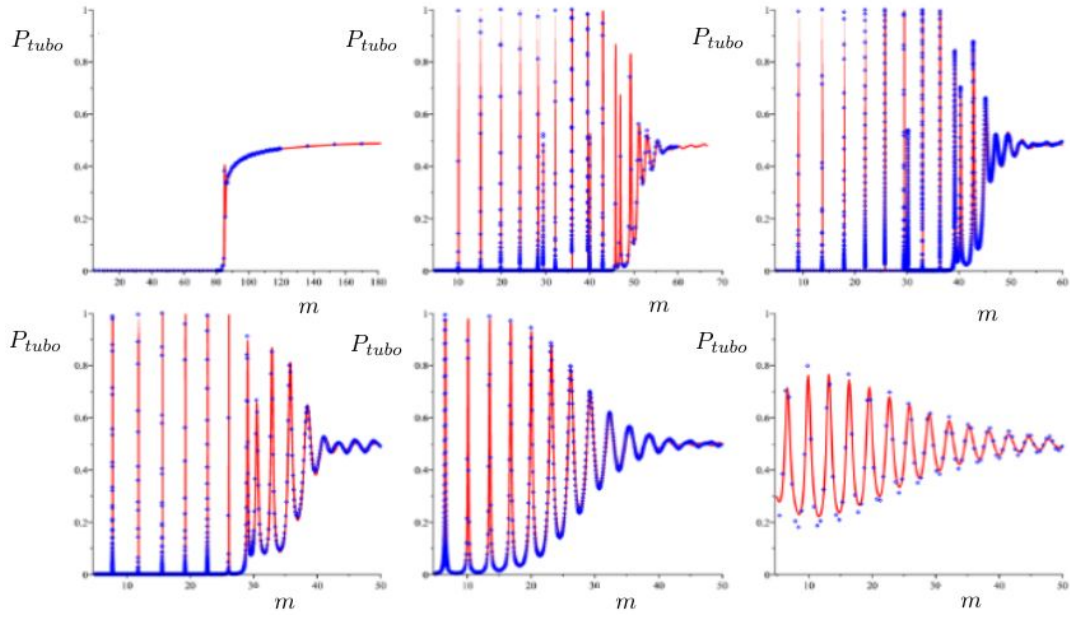


Figura 4.4: P_{tubo} como função de m para férmions de esquerda (linha vermelha) e direita (pontos) com $\ell = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$, (a) $s = 0.03$, (b) $s = 0.08$, (c) $s = 0.10$, (d) $s = 0.15$, (e) $s = 0.30$, (f) $s = 0.45$.

direita e esquerda. O comportamento de P_{tube} é caracterizado pela presença de alguns picos. Quanto mais fino é o pico, maior é o tempo de vida da correspondente ressonância. As massas das ressonâncias para as componentes de esquerda e direita são aproximadamente as mesmas (para o parâmetro usado, melhor do que uma parte em 10^8), como pode ser visualizado na figura. Os plots são para $\ell = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$ e $\lambda = 30$ e para vários valores de s . Usamos $r_{min} = 10^{-8}$, $r_{max} = 2$ e passo em r igual a $\Delta r = 10^{-3}$. Para o intervalo de massa considerado, nós verificamos que as posições dos picos não dependem da escolha do $r_{max} \gtrsim 2$. Os plots mostram picos finos de ressonâncias, seguidos por um *plateau* (valor em torno de $P_{tube} \sim r_0/r_{max}$) para massas grandes $m > m^*$ onde m^* é o valor de massa caracterizando o início do *plateau*. Notamos que o valor de m^* decresce com o aumento de s , reduzindo o intervalo válido das massas para o possível aparecimento das ressonâncias. Então, parece que os grandes valores de s favorecem o surgimento das ressonâncias com massas mais leves.

Notamos que para $s = 0.03$, não encontramos picos de ressonâncias. Enquanto que para $s = 0.08$, há mais picos ressonantes com maior tempo de vida, sendo igualmente espaçados, em comparação com $s = 0.1$. A mesma conclusão se aplica para o crescimento de s para 0.15 e para 0.3. Para $s > 0.3$, temos um regime menos nítido de ressonâncias em comparação com $s = 0.3$, ou seja, perda do completo caráter ressonante, como visto na Fig. 4.4(f) para $s = 0.45$.

Note também que para $s = 0.15$ e $s = 0.3$, as ressonâncias menos massivas com maior

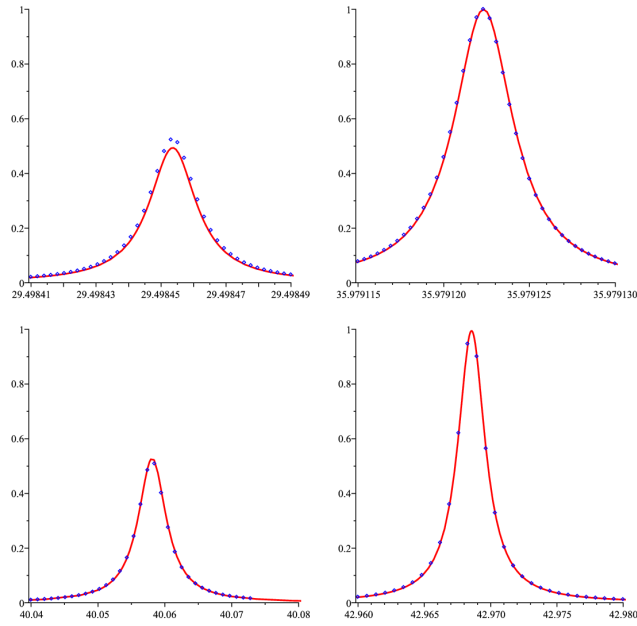


Figura 4.5: P_{tubo} como função de m para férmions de esquerda (linha vermelha) e direita (pontos) com $\ell = 2$, $r_0 = 1$, $\eta = 30$, $\lambda = 30$ e $s = 0.08$, correspondendo ao *zoom* de alguns picos da Figura 4.4(b).

probabilidade relativa possuem maior tempo de vida, que está de acordo com a literatura [50], [132]-[133] obtida em cenários de branas. Também, para $s = 0.08$ e $s = 0.1$ temos a presença de alguns picos com probabilidade relativa mais baixa que seguem o mesmo padrão quando comparados de forma separada. Como exemplo, representamos na Fig. 4.5 alguns *plots* para $s = 0.08$ que correspondem ao *zoom* a partir dos picos da Fig. 4.4(b). Note que os picos do lado direito têm $P_{tubo} \sim 1$, enquanto os picos do lado esquerdo apresentam probabilidade relativa menor $P_{tubo} \sim 0.5$. Desse modo, os resultados das Refs. [50], [132]-[133] devem ser interpretados separadamente para estes dois conjuntos de picos.

Isto pode ser explicado com base na discussão da seção 4.2. Nós observamos que valores menores de s contribuem a uma maior influência do campo χ . Da Fig. 4.2(b), constatamos que para $s \gtrsim 0.27$ temos uma densidade de energia característica de um tubo cilíndrico. Essa energia é continuamente deformada com a redução de s , e um efeito evidente de tal deformação para $s = 0.08$ e $s = 0.1$ é a perda de uma estrutura bem organizada de ressonâncias.

Outro ponto importante é que em geral as massas das ressonâncias m_{res} crescem gradualmente para valores menores de s , mas a relação $M_{ring} \ll m_{ress}$ foi sempre verificada, garantindo a condição de não *backreaction* dos férmions no tubo. O maior tempo de vida dos modos coincide com as correspondentes barreiras mais largas do potencial de Schrödinger em torno de $r = r_0$ (compare com a Fig. 4.3). Esta propriedade de V_{sch} também é responsável

pela presença dos modos ressonantes, em geral, mais massivos para os valores menores de s ($s \rightarrow \frac{1}{2\lambda}$) que são relacionados a grande influência do campo χ na estrutura interna do defeito. Contudo, neste limite o número de ressonâncias é reduzido pois as massas não podem ter valor superior ao da barreira do tubo. Dessa maneira, para encontrarmos ressonâncias com maior tempo de vida, deve haver um compromisso físico entre a espessura do tubo (valores maiores de s que prejudicam a presença do campo χ) e o acoplamento de Yukawa $\phi\chi$ (valores menores de s relacionado a maior influência do campo χ).

No capítulo seguinte faremos uma revisão sobre as características dos defeitos topológicos em teorias de campo escalar com termos cinéticos generalizados.

Capítulo 5

Defeitos topológicos em teorias de campo escalar com termo cinético geral

Neste capítulo estudaremos modelos descritos por um campo escalar com termo cinético geral. O estudo de tais teorias tem ganho força em diversas áreas da Física, como por exemplo, sua implementação em cenários cosmológicos, que tem como objetivo contribuir no entendimento da expansão acelerada do Universo [134]. Algumas dessas teorias podem gerar defeitos topológicos, nesse caso conhecido como k-defeitos. Após obter a equação de movimento e as componentes do tensor energia momento, distinguimos a estabilidade linear destas teorias. Finalizamos com a caracterização das chamadas teorias gêmeas.

5.1 Modelos com termo cinético geral

Partimos da ação

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, X), \quad (5.1)$$

onde $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ ($\mu, \nu = 0, 1$). A métrica considerada é $(+, -)$ e os campos são todos adimensionais.

As equações de movimento podem ser encontradas ao aplicarmos o princípio de Hamilton.

Temos [95]

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int dt dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \delta X + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi \right] \\
&= \int dt dx \left[\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial_\mu (\delta \phi) + \mathcal{L}_\phi \delta \phi \right] \\
&= \int dt dx \left[\partial_\mu \left(\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \right) \delta \phi + \mathcal{L}_\phi \delta \phi \right].
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A integral do primeiro termo da direita é nula. Assim o princípio de mínima ação nos fornece a equação de movimento do sistema [24, 135]

$$\partial_\mu \left(\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \right) = \mathcal{L}_\phi. \tag{5.3}$$

Podemos reescrevê-la explicitamente

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu X \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_X \partial_\mu \partial^\mu \phi = \mathcal{L}_\phi, \tag{5.4}$$

onde $\partial_\mu X = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) = \partial_\mu \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi$, de modo que temos

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\alpha \phi \partial_\mu \partial_\alpha \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi, \tag{5.5}$$

sendo $\mathcal{L}_X = \partial \mathcal{L} / \partial X$, $\mathcal{L}_\phi = \partial \mathcal{L} / \partial \phi$ e o $\square$ corresponde ao d'Alembertiano.

A procura por estruturas de defeitos nos leva a considerarmos configurações de campos estáticos, $\phi = \phi(x)$. Assim a equação de movimento pode ser reescrita como

$$(2X \mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_X) \phi'' = 2X \mathcal{L}_{X\phi} - \mathcal{L}_\phi. \tag{5.6}$$

Para configurações estáticas, utilizamos $X = -1/2\phi'^2$. A Eq. (5.6) pode ser escrita a partir de uma simples forma

$$(\mathcal{L} - 2X \mathcal{L}_X)' = 0. \tag{5.7}$$

O resultado da integração da equação de movimento rende

$$\mathcal{L} - 2X \mathcal{L}_X = C, \tag{5.8}$$

onde C é a constante de integração. Para configurações estáticas a Eq. (5.8) torna-se

$$\mathcal{L} + \phi'^2 \mathcal{L}_X = C.$$

Como veremos a seguir, a constante nada mais é do que a componente T_{11} do tensor energia momento.

O tenso de energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.9)$$

As suas componentes são dadas explicitamente por

$$T_{00} = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L}, \quad (5.10)$$

$$T_{11} = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L}, \quad (5.11)$$

$$T_{10} = T_{01} = \mathcal{L}_X \dot{\phi} \phi', \quad (5.12)$$

onde $T_{00} = \rho$ corresponde à densidade de energia e $T_{11} = p$ à pressão [24]. Comparando a constante de integração da equação de movimento com a pressão, verificamos que T_{11} é constante para configurações estáticas.

A partir da integração da densidade de energia com a configuração de campo descrevendo soluções estáticas, $\phi = \phi(x)$, podemos obter a expressão para a energia total

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_{00} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\phi, X) dx, \quad (5.13)$$

a qual se identifica como a massa de repouso da estrutura do defeito [24].

5.2 Estabilidade Linear

Nesta seção será discutido a estabilidade linear. Essa análise demonstra que soluções topológicas, mesmo após uma pequena perturbação, não perdem seu caráter topológico [47]. Consideramos flutuações ao campo escalar $\phi(x, t) = \phi_s(x) \eta(x, t)$, onde $\phi_s(x)$ constitui o campo estático e $\eta(x, t)$ representa uma pequena flutuação em torno da solução [24]. Dessa maneira,

X também será alterado da seguinte forma

$$X \rightarrow \frac{1}{2}\partial_\mu(\phi_s + \eta)\partial^\mu(\phi_s + \eta) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_s\partial^\mu\phi_s + \partial_\mu\phi_s\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta = X_s + X(x,t), \quad (5.14)$$

onde X_s corresponde a X para a solução estática. Com isso geramos a ação

$$S_1 = \int d^2x \mathcal{L}(\phi_s + \eta, X_s + X(x,t)).$$

Expandindo em série de Taylor:

$$S_1 = \int d^2x \left[\mathcal{L}(\phi_s, X_s) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \Big|_{X=X_s} (X - X_s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial X^2} \Big|_{X=X_s} (X - X_s)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi \partial X} \Big|_{\phi=\phi_s} (\phi - \phi_s)(X - X_s) \right],$$

ou

$$S_1 = \int d^2x \left[\mathcal{L}(\phi_s, X_s) + \mathcal{L}_\phi \eta + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \eta^2 + \mathcal{L}_X \left(\partial_\mu \phi_s \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{XX} \left(\partial_\mu \phi_s \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi X} \left(\partial_\mu \phi_s \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \right) \right].$$

Mantendo apenas as contribuições de segunda ordem em η e realizando uma pequena álgebra, obtemos

$$S_1 = \int d^2x \mathcal{L} + \int d^2x \left[\mathcal{L}_\phi - \partial^\mu \left(\mathcal{L}_X \partial_\mu \phi \right) \right] \eta + \int d^2x \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} \eta^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu \phi \partial^\mu \eta \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \eta + \frac{1}{2} \eta \mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \partial^\mu \eta \right].$$

O último termo da equação acima satisfaz

$$\int d^2x \left[\eta \mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \partial^\mu \eta \right] = - \int d^2x \left[\partial^\mu \left(\mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \right) \eta^2 \right], \quad (5.15)$$

implicando em

$$S_1 = \int d^2x \mathcal{L} + \int d^2x \left[\mathcal{L}_\phi - \partial^\mu \left(\mathcal{L}_X \partial_\mu \phi \right) \right] \eta + \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial^\mu \left(\mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \right) \right] \eta^2 + \right. \\ \left. + \mathcal{L}_X \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu \phi \partial^\mu \eta \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \eta \right\}.$$

O segundo termo de S_1 corresponde à equação de movimento, dessa maneira podemos reescrever a ação

$$S_1 = S + \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial^\mu \left(\mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \right) \right] \eta^2 - \partial^\mu \left[\mathcal{L}_X \partial_\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu \phi \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \eta \right] \eta \right\}.$$

Impondo $S_1 = S$, obtemos a equação de movimento para η [24]

$$\partial^\mu \left[\mathcal{L}_X \partial_\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial_\mu \phi \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \eta \right] = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial^\mu \left(\mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \right) \right] \eta. \quad (5.16)$$

Uma vez que ϕ seja uma solução estática, reescrevemos a Eq. (5.16)

$$\mathcal{L}_X \ddot{\eta} - \left(\mathcal{L}_X \eta' \right)' + \left(\mathcal{L}_{XX} \phi'^2 \eta' \right)' = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \left(\mathcal{L}_{\phi X} \phi' \right)' \right] \eta.$$

Usando $\phi'^2 = -2X$, temos

$$\mathcal{L}_X \ddot{\eta} - \left[\left(\mathcal{L}_X + 2X \mathcal{L}_{XX} \right) \eta' \right]' = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \left(\mathcal{L}_{\phi X} \phi' \right)' \right] \eta. \quad (5.17)$$

Supomos a seguinte expansão $\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t)$. Substituindo na Eq. (5.17)

$$- \left[\left(\mathcal{L}_X + 2X \mathcal{L}_{XX} \right) \eta'_n \right]' = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \left(\mathcal{L}_{\phi X} \phi' \right)' + \omega_n^2 \mathcal{L}_X \right] \eta_n, \quad (5.18)$$

$$- \left[A^2 \mathcal{L}_X \eta'_n \right]' = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \left(\mathcal{L}_{\phi X} \phi' \right)' + \omega_n^2 \mathcal{L}_X \right] \eta_n, \quad (5.19)$$

onde

$$A^2 = \frac{2X \mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_X}{\mathcal{L}_X}, \quad (5.20)$$

a Eq. (5.18) pode ser escrita de uma forma mais simplificada

$$- [a(x)\eta']' = b(x)\eta, \quad (5.21)$$

com

$$a(x) = \mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX}, \quad (5.22)$$

$$b(x) = \mathcal{L}_{\phi\phi} + \left(\mathcal{L}_{\phi X} \phi' \right)' + \omega_n^2 \mathcal{L}_X. \quad (5.23)$$

Com o objetivo de tornar a investigação mais simples, fazemos uma mudança de variáveis [24, 25]

$$dx = A dz \quad e \quad \eta = \frac{u}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}}, \quad (5.24)$$

a contribuição dessa alteração para o campo pode ser vista como

$$\phi' = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{A} \phi_z, \quad (5.25)$$

implicando em

$$b(x) = \mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\frac{\mathcal{L}_{\phi X} \phi_z}{A} \right)_z + \omega_n^2 \mathcal{L}_X. \quad (5.26)$$

então, a Eq. (5.21) pode ser vista como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A} \left(a(x)\eta' \right)_z &= b(x)\eta, \\ -\frac{a_z}{A} \frac{\eta_z}{A} - \frac{a}{A} \left[\frac{1}{A} \eta_z \right]_z &= b(x)\eta, \\ -\frac{1}{A^2} \left(a_z - \frac{aA_z}{A} \right) \eta_z - \frac{1}{A^2} a \eta_{zz} &= b(x)\eta, \end{aligned}$$

derivando a Eq. (5.24) em termos de z , temos

$$\eta_z = \frac{u_z}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} - \frac{u}{\mathcal{L}_X A} (\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z, \quad (5.27)$$

e sua derivada segunda

$$\eta_{zz} = \frac{u_{zz}}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} - \frac{u_z(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z}{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^2} - \frac{u(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z}{[(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^2]_z} - \frac{u_z(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z}{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^2} - \frac{u(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_{zz}}{(\sqrt{(\mathcal{L}_X A)^2}} ,$$

portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{A^2} \left[\frac{u_{zz}}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} - \frac{2u_z(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z}{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^2} + \frac{2u[(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z]^2}{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^3} - \frac{u(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_{zz}}{(\sqrt{(\mathcal{L}_X A)^2}} \right] a \\ & - \frac{1}{A^2} \left(a_z - \frac{aA_z}{A} \right) \left[\frac{u_z}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} - \frac{u}{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^2} (\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z \right] = b\eta, \end{aligned} \quad (5.28)$$

sendo

$$A^2 = \frac{a(x)}{\mathcal{L}_X} \Rightarrow \sqrt{\mathcal{L}_X A} = \sqrt{\frac{a}{A}}, \quad (5.29)$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\mathcal{L}_X A} \right)_z &= \frac{1}{2} \frac{a_z}{\sqrt{aA}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a} A_z}{\sqrt{A^3}}, \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{a}} \left\{ \frac{a_z}{a} - \frac{aA_z}{A^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Assim temos

$$\frac{\left(\sqrt{\mathcal{L}_X A} \right)_z}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{a}} \left\{ \frac{a_z}{a} - \frac{aA_z}{A^2} \right\}}{\sqrt{\frac{a}{A}}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_z}{a} - \frac{A_z}{A} \right\}. \quad (5.31)$$

A partir disso, o segundo e quinto termos da Eq. (5.28) cancelam-se mutuamente, como pode ser visto abaixo:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{A^2} a \left[-\frac{2u_z(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_z}{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})^2} \right] - \frac{1}{A^2} \left(a_z - \frac{aA_z}{A} \right) \frac{u_z}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} = 0, \\ & 2a \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{a_z}{a} - \frac{A_z}{A} \right\} \right) - \left(a_z - \frac{aA_z}{A} \right) = 0 \Rightarrow \left(a_z - \frac{aA_z}{A} \right) = \left(a_z - \frac{aA_z}{A} \right). \end{aligned}$$

Então, a Eq. (5.28) multiplicada por $\sqrt{\mathcal{L}_X A}$ resulta em

$$-\frac{1}{A^2} a \left[u_{zz} - \frac{u(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_{zz}}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} \right] = \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\frac{\mathcal{L}_{\phi X} \phi_z}{A} \right)_z + \omega^2 \mathcal{L}_X \right] u.$$

Fazendo uso novamente de $\frac{a}{A^2} = \mathcal{L}_X$, encontramos

$$-u_{zz} + U(z)u = \omega^2 u, \quad (5.32)$$

com o potencial

$$U(z) = \frac{(\sqrt{\mathcal{L}_X A})_{zz}}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\frac{\mathcal{L}_{\phi X} \phi_z}{A} \right)_z \right]. \quad (5.33)$$

A Eq. (5.32) é uma equação do tipo Schrödinger independente do tempo com potencial quântico $U(z)$. Soluções estáveis são caracterizadas por $\omega^2 \geq 0$. Essa análise, contudo, depende da forma do potencial $U(z)$ para cada modelo específico considerado.

5.3 O modelo ALTW

Na Ref. [26], foi introduzido um modelo (conhecido como ALTW) com termo cinético modificado. A ideia do artigo se baseia na investigação dos defeitos topológicos em teorias com campos escalares com termos cinéticos não canônicos, conhecido como k-defeito. A partir disso, vários trabalhos foram desenvolvidos, como é o caso da Ref. [25]. Ao longo da seção será introduzido o modelo ALTW e investigações a respeito das características topológicas serão analisadas. A principal característica, como veremos, no estudo das teorias com termo cinético não canônico, é a analogia com as teorias com termo cinético canônico, i.e., podemos obter as mesmas propriedades físicas descritas por diferentes modelos. Na literatura esse tipo de semelhança é conhecida como teoria gêmea, quando possuímos duas teorias distintas com potenciais diferentes, no entanto, obtemos a mesma solução e densidade de energia.

O modelo modificado introduzido em Ref. [26] é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = M^2 - M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}, \quad (5.34)$$

onde M^2 é o parâmetro de massa. A lagrangiana pode ser modificada quando a escala de massa M^2 tende ao infinito

$$\mathcal{L} = X - U(\phi) + \frac{1}{M^2} \left(\frac{1}{2} X^2 + U(\phi) X \right). \quad (5.35)$$

Um ponto que merece destaque é que, quando $1/M^2 \rightarrow 0$, retornamos a densidade lagrangiana da teoria padrão. Com base no que foi apresentado na última seção, a equação de movimento pode ser vista como

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} \right) \right] + U_\phi \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}} = 0, \quad (5.36)$$

ou ainda de forma mais explícita

$$\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi}{1 - \frac{2X}{M^2}} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi = - \frac{U_\phi}{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}. \quad (5.37)$$

Considerando o caso das configurações estáticas, $\phi = \phi(x)$, a equação de movimento pode ser escrita por

$$\left(-1 + \frac{1}{M^2} \frac{\phi'^2}{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}} \right) \phi'' = - \frac{U_\phi}{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}, \quad (5.38)$$

Integrando a equação acima, temos

$$1 - \frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{\sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}} = C, \quad (5.39)$$

onde C é uma constante de integração. Esta última equação pode ser reescrita fornecendo a equação de primeira ordem

$$\phi'^2 = -M^2 + M^2 \left(\frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{1 - C} \right)^2. \quad (5.40)$$

O tensor energia momento tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \left[M^2 - M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}} \right], \quad (5.41)$$

e a densidade de energia T^{00} pode ser escrita

$$T^{00} = \rho(x) = -M^2 + M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}. \quad (5.42)$$

A Eq. (5.39) nos ajuda a reescrever a equação da densidade de energia

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \left(1 - C \right) \left(1 + \frac{\phi'^2}{M^2} \right). \quad (5.43)$$

Uma vez que estamos trabalhando com campos estáticos, a componente T^{11} do tensor é igual a constante C . Além disso, segundo a Ref. [24], a obtenção de soluções estáveis necessita que a constante seja nula ($C = 0$). Dessa forma temos

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right)^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2}{M^2}. \quad (5.44)$$

Fazendo também $C = 0$ na equação de primeira ordem (5.40), temos

$$\phi'^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2}{M^2}, \quad (5.45)$$

como pode ser observado, as expressões da densidade de energia e da equação de primeira ordem são idênticas. A analogia entre as teorias, a ϕ^4 com a lagrangiana padrão e o modelo ALTW, caracteriza essas teorias como gêmeas.

A explicação em torno da condição necessária para estabilidade da solução estática ($C = 0$) é entendida pelo Teorema de Derrick. A partir de uma redefinição da solução estática $\phi^\lambda(x) = \phi(\lambda x)$, chega-se a seguinte expressão para a energia

$$E^\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} d^D x \mathcal{L}(\phi(\lambda x), \lambda^2 X(\lambda x)), \quad (5.46)$$

ainda, fazendo $y = \lambda x$, temos

$$E^\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} d^D y \lambda^{-D} \mathcal{L}(\phi, \lambda^2 X). \quad (5.47)$$

É fácil observar que $E^\lambda|_{\lambda=1} = E$, portanto $\partial E^\lambda / \partial \lambda$ é minimizada com $\lambda = 1$, assim

$$\left. \frac{\partial E^\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int_{-\infty}^{\infty} d^D y (D\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X) = 0. \quad (5.48)$$

Com $D = 1$, têm-se $\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X = 0$, dessa maneira, apenas configurações estáticas e sem pressão são estáveis.

O potencial do k-defeito também pode ser obtido da Eq. (5.39). Então o correspondente potencial é dado por [25]

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}. \quad (5.49)$$

Mediante a discussão realizada sobre teorias gêmeas, vamos supor que o modelo padrão possua a mesma solução do modelo k-defeito. Dessa forma, os potenciais seriam relacionados da seguinte maneira [26]

$$V(\phi) = U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{U^2}{M^2}, \quad (5.50)$$

onde $V(\phi)$ corresponde ao potencial da teoria padrão e $U(\phi)$ é relacionado ao potencial do modelo modificado. A equação de movimento para o termo cinético canônico é dada na forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + U_\phi + \frac{UU_\phi}{M^2} = 0. \quad (5.51)$$

Para soluções estáticas, a equação de movimento se reduz a

$$\phi'' = \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2}\right) U_\phi. \quad (5.52)$$

Substituindo o potencial acima no tensor energia momento, temos

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \left(X - U(\phi) - \frac{1}{2} \frac{U^2}{M^2} \right), \quad (5.53)$$

podemos agora escrever a densidade de energia para configurações de campos estáticos e o tensor T^{11}

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{U^2}{M^2}, \quad (5.54)$$

$$T^{11} = \frac{1}{2} \phi'^2 - U(\phi) - \frac{1}{2} \frac{U^2}{M^2}. \quad (5.55)$$

Sabemos que quando trabalhamos com campos estáticos estáveis, $T^{11} = C = 0$, assim a equação acima torna-se

$$\phi'^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2}{M^2}, \quad (5.56)$$

ou seja, a equação obtida é a mesma Eq. (5.45). Portanto, o resultado obtido entre os modelos padrão e ALTW indica que ambos possuem a mesma estrutura de defeito e a mesma densidade de energia [25, 26].

A equação de primeira ordem (Eq.(5.56)) possui soluções as quais também são soluções da equação de movimento. As equações diferenciais de segunda ordem possuem uma dificuldade maior na busca pelas soluções dos modelos em consideração, e em muitos casos as soluções não podem ser encontradas analiticamente. De fato, a redução na ordem da equação diferencial proporciona a obtenção de algumas soluções. O procedimento utilizado para o decrescimento da ordem das equações diferenciais é denominado formalismo de primeira ordem e foi apresentado na Ref. [135].

A equação de primeira ordem no caso geral tem a forma [135]

$$\mathcal{L}_X \phi' = W_\phi. \quad (5.57)$$

Quando trabalhamos com o caso padrão, temos a densidade lagrangiana da forma $\mathcal{L} = X - V(\phi)$. Assim, a derivada de $\mathcal{L}$ em função de X nos fornece a seguinte equação de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi. \quad (5.58)$$

Além disso, observamos o caso com termo cinético modificado

$$\mathcal{L}_X = \frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{\sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}}. \quad (5.59)$$

Substituindo na equação de primeira ordem, ficamos com

$$\frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{\sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}} \phi' = W_\phi, \quad (5.60)$$

elevando ao quadrado a expressão acima, obtemos

$$\phi'^2 = \frac{W_\phi^2}{\left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2}\right)^2 - \frac{W_\phi^2}{M^2}}. \quad (5.61)$$

Para que essa equação seja compatível com a Eq. (5.40), com $C = 0$, reescrevemos o potencial como segue

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}}, \quad (5.62)$$

a substituição do potencial na Eq. (5.40) resulta em

$$\phi'^2 = W_\phi^2. \quad (5.63)$$

Dessa forma, fica fácil o tratamento da energia total, a qual é obtida a partir da integração da densidade de energia. Em relação a isso, podemos notar um interessante detalhe: a densidade pode ser escrita em termos da derivada do campo, ou seja, $\rho(x) = \phi'^2$, isso nos leva a [25]

$$\phi'^2 = \rho(x) = \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dW}{dx}, \quad (5.64)$$

portanto, a energia total pode ser vista como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = |W(+\infty) - W(-\infty)| = |\Delta W|. \quad (5.65)$$

Como comentado no Cap. 2, a energia depende dos valores assintóticos da solução de campo e não da forma explícita de $\phi(x)$.

Para finalizar, é importante salientar a expansão do potencial para o termo $1/M^2 \ll 1$. Com isso, o potencial se torna o mesmo potencial do modelo padrão

$$U(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 = V(\phi), \quad (5.66)$$

a partir disso, chega-se à conclusão que mesmo com formas diferentes para os potenciais, há um superpotencial que controla ambos os modelos, o usual e o modelo k-defeito [25].

Nesse capítulo abordamos defeitos topológicos em teorias de campo escalar em (1+1)-D com

termos cinéticos não canônicos (k-defeito). Investigamos a estabilidade linear após introdução de pequenas flutuações em torno da solução, que nos levou a uma equação de autovalores com potencial quântico. Por fim, foram analisadas as principais características topológicas do modelo com termo cinético modificado (modelo ALTW).

No próximo capítulo abordaremos o estudo sobre as colisões kink-antikink.

Capítulo 6

Colisões *kink-antikink*

Neste capítulo são discutidas algumas das principais características sobre a dinâmica dos *kinks*. Ao longo das últimas décadas percebeu-se um crescente estudo sobre as soluções sólitons em teorias de campo não linear, nas quais tais defeitos são conhecidos por possuírem soluções estáveis localizadas.

Ao abordarmos a colisão de defeitos, podemos perceber que *solitons* são estáveis mesmo após colisões. Esse comportamento é denominado de colisão elástica, e um bom exemplo é fornecido pelo modelo *sine-Gordon*. Este modelo possui uma solução da equação de Bogomol'nyi cuja energia total é localizada e permanece estável mesmo com introdução de pequenas flutuações em torno da solução [27]. Além do modelo *sine-Gordon*, a equação de *Korteweg – de Vries* e a equação cúbica de Schrödinger, também admitem soluções tipo *soliton*. No entanto, há tipos de soluções que representam colisões inelásticas, ou seja, a colisão entre os defeitos topológicos apresenta diferentes resultados. O modelo ϕ^4 é um exemplo no qual o espalhamento é inelástico.

O desenvolvimento desse capítulo constituirá de uma revisão sobre o processo de colisão dos principais modelos existentes na literatura. O primeiro modelo que iremos tratar será o *sine-Gordon* (SG) [30]. A principal diferença em relação aos demais modelos está em sua integrabilidade. Somado a isso, ainda podemos destacar a presença de um único estado, o estado fundamental, conhecido como modo translacional. A ausência de mais modos ligados influencia diretamente no comportamento dos *kinks* ao abordarmos o processo de colisão. Além desse modelo estudaremos o modelo ϕ^4 [27, 28], o qual possui um estado ligado extra capaz de armazenar certa quantidade de energia durante a colisão, fornecendo comportamentos interessantes. Os sistemas não integráveis possuem o modo trivial e ainda o modo vibracional,

também conhecidos como modo interno.

6.1 Modelo Sine-Gordon

Dentre alguns sistemas que possuem equações do tipo Klein-Gordon não linear se destaca o modelo sine-Gordon, o qual foi foco de algumas investigações [30].

Para iniciarmos a análise, consideramos a teoria de um campo escalar 1-dimensional com o potencial dado por

$$V(\phi) = 1 - \cos(\phi). \quad (6.1)$$

Podemos observar que o potencial possui uma quantidade infinita de mínimos. A densidade lagrangiana que define o sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (6.2)$$

A partir disso, obtemos a equação de movimento

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \sin(\phi) = 0. \quad (6.3)$$

Utilizando os procedimentos do Cap. 2, a solução para o modelo SG pode ser encontrada

$$\phi(x) = 4 \arctan(e^x). \quad (6.4)$$

É importante salientar a solução para o *kink* em movimento com velocidade v ao longo da direção x

$$\phi(x) = 4 \arctan(e^{\gamma(x-x_0-vt)}), \quad (6.5)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ corresponde ao fator de Lorentz e o x_0 a posição do defeito. Uma solução *antikink* é obtida através da reflexão espacial $x \rightarrow -x$, e assim, temos $\phi_{\bar{K}} = -\phi_K$.

Como caracterizado acima, o modelo integrável SG é constituído por apenas um estado ligado também chamado de modo trivial ou translacional. A busca pelos modos internos do *kink* envolve a introdução de pequenas perturbações dependentes do tempo em torno da solução

estática

$$\phi(x) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (6.6)$$

onde $\phi_s(x)$ corresponde a solução de onda estática e $\eta(x, t)$ a perturbação. Substituindo a expressão na equação de movimento e mantendo apenas termos lineares em η , obtemos

$$\left. \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + \eta \frac{d^2U}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (6.7)$$

Definimos ainda, $\eta(x, t) = \eta(x)e^{i\omega t}$, obtendo uma equação de autovalores

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} + V(x)\eta = \omega^2\eta, \quad (6.8)$$

que é uma equação do tipo Schrödinger. O autovalor é representado por ω^2 e o potencial tipo Schrödinger $V(x)$ é dado por

$$V(x) = \frac{d^2U}{d\phi_s^2} = \cos\left(4 \arctan(e^x)\right), \quad (6.9)$$

O modelo abordado apresenta apenas um simples estado de frequência nula, caracterizado por $\omega^2 = 0$. Dessa forma, resolvendo a equação de Schrödinger para $\omega^2 = 0$, encontramos a expressão para o modo zero

$$\eta(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}. \quad (6.10)$$

A Fig. 6.1 faz referência ao potencial juntamente com seu estado trivial associado.

Iremos agora trabalhar de fato com o processo de colisão entre os solitons encontrados. A premissa garante que a ausência dos estados internos impossibilita a troca de energia entre os modos [32]. A explicação em torno da troca de energia será feita com mais abrangência na próxima seção ao tratarmos o modelo ϕ^4 .

As simulações necessitam de suas condições iniciais, que por sua vez, correspondem aos *kinks* separados por uma distância razoável no intuito de que nenhuma interação seja sentida por eles no início da evolução temporal. As condições iniciais utilizadas são dadas por

$$\phi(x, 0) = \phi_K(x + x_0, v_{ini}, 0) - \phi_K(x - x_0, -v_{ini}, 0), \quad (6.11)$$

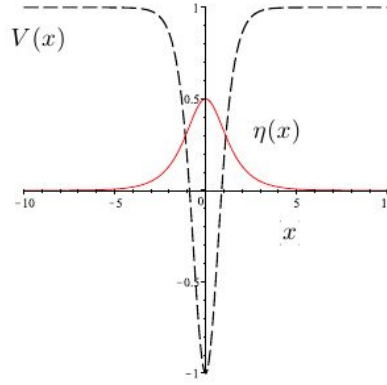


Figura 6.1: Potencial de Schrödinger (tracejado preto) e o modo zero (linha vermelha).

e a derivada de $\phi(x,t)$ em função do tempo

$$\dot{\phi}(x,0) = \dot{\phi}_K(x + x_0, v_{ini}, 0) - \dot{\phi}_K(x - x_0, -v_{ini}, 0). \quad (6.12)$$

A expressão acima é responsável pela configuração inicial, onde K (*kink*) e $\bar{K}$ (*antikink*) irão se mover um em direção ao outro até um ponto de colisão. A evolução temporal foi estudada numericamente invocando o método *pseudospectral* em uma grade com 2048 nós e condições de fronteiras periódicas. A posição inicial é dada por $x_0 = 15$ e definimos um $x_{max} = 120$.

A Fig. 6.2 é identificada como o resultado da colisão entre os *kinks* do modelo SG . Os *kinks* se deslocam em direção a um ponto de colisão, e após uma batida, as ondas solitárias retrocedem com uma mudança de fase, o que é característica de sólitons. Outro ponto de destaque, a velocidade dos *kinks* nesse modelo é constante, ou seja, a mesma velocidade inicial dos *kinks* é observada durante sua separação. A Fig. 6.2 mostra $\phi(x,t)$ para uma velocidade inicial de valor 0.20 ($v_{ini} = 0.20$).

6.2 Modelo ϕ^4

Talvez o modelo ϕ^4 seja o de maior destaque dentro do quadro das colisões de defeitos. Por ser não integrável e ainda possuir um estado ligado discreto, o modelo ϕ^4 diferencia-se do sistema SG , proporcionando um comportamento mais complexo. A estrutura formada em função da colisão depende diretamente da velocidade inicial dos *kinks*, destacando-se os estados *bion* e as colisões seguidas de reflexão dos pares conhecidas como *bounces*.

Na presente seção será abordado o estudo das principais características do processo de

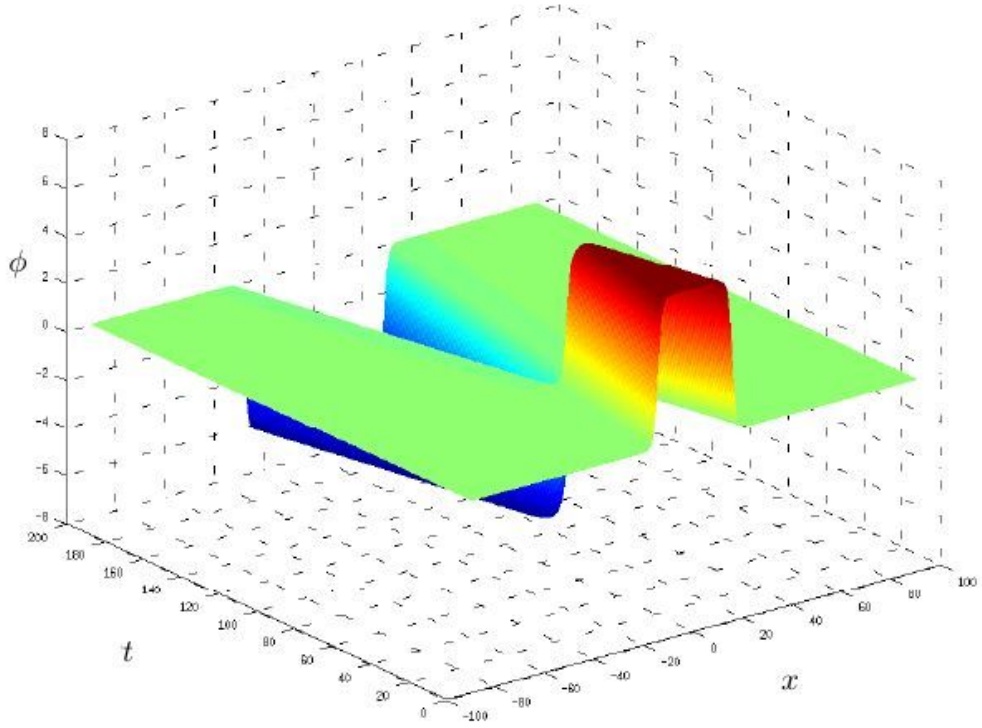


Figura 6.2: Colisão do modelo SG com $v_{ini} = 0.20$.

colisão do modelo ϕ^4 com base nas Refs. [28] e [31]-[34]. Campbell e seus colaboradores foram os primeiros a iniciarem os estudos dessa interação. Além desses autores, também merece destaque o de Peter Anninos e seus colaboradores. O potencial do sistema, com o objetivo de iniciarmos a análise das interações da teoria ϕ^4 não integrável em 1-dimensão, é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (6.13)$$

Esse potencial possui limite inferior e mínimos localizados em ± 1 , que correspondem aos vácuos do potencial. A densidade lagrangiana resulta na equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\lambda\phi(1 - \phi^2) = 0. \quad (6.14)$$

Utilizando o procedimento do Cap. 2, a equação de primeira ordem fornece a solução que também será solução da equação de segunda ordem. Então a partir da equação de Bogomol'nyi

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi = \pm \sqrt{\lambda}(1 - \phi^2), \quad (6.15)$$

podemos encontrar as soluções estáticas

$$\phi(x) = \pm \tanh(\sqrt{\lambda}x), \quad (6.16)$$

onde o sinal positivo corresponde ao *kink* K e o sinal negativo ao *antikink* $\bar{K}$. A solução movendo-se com velocidade v ao longo do eixo x é alcançada após um *boost* da Eq. (6.16)

$$\phi(x,t) = \pm \tanh(\sqrt{\lambda}\gamma(x - vt)), \quad (6.17)$$

com $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ representando o fator de Lorentz.

Para a construção da configuração inicial, os *kinks* partem de uma certa distância um do outro. Essa separação corresponde aos dados iniciais que são implementados no programa, e são dados pelo perfil do campo dados por

$$\phi(x,0) = \phi_K(x + x_0, v_{ini}, 0) - \phi_K(x - x_0, -v_{ini}, 0) - 1, \quad (6.18)$$

e a derivada do campo em função de t

$$\dot{\phi}(x,0) = \dot{\phi}_K(x + x_0, v_{ini}, 0) - \dot{\phi}_K(x - x_0, -v_{ini}, 0), \quad (6.19)$$

onde o parâmetro x_0 representa a distância inicial dos defeitos do ponto de colisão $x = 0$. Em seguida, a equação que descreve a dinâmica da colisão deve ser aproximada numericamente. Utilizamos novamente o método *pseudospectral* (Apêndice A) com condições de fronteiras periódicas. Nas simulações utilizamos a posição do *kink* com valor igual a 15 ($x_0 = 15$), a grade possuindo tamanho de 2048 nós e definimos $x_{max} = 120$.

Em seguida, mostraremos o *output* dos principais resultados obtidos baseados na análise das interações entre os defeitos. Como destacado anteriormente, o comportamento das colisões tem grande sensibilidade com a velocidade inicial dos defeitos. Essa evidência fez com que fossem considerados muitos valores para este parâmetro, de modo a ganhar um entendimento geral das colisões.

Nesse sentido, para alguns valores de velocidade, o par $K\bar{K}$ apresenta um comportamento final de reflexão dos defeitos, enquanto que para outra faixa de velocidades, observamos apenas o seu armadilhamento. O estado armadilhado pode ser formado se os *kinks* tiverem tempo

suficiente para perder energia durante a colisão, por isso, espera-se a captura dos *kinks* para baixos valores de velocidade. Em contrapartida, velocidades altas geram interações inelásticas, ou seja, a velocidade inicial possui valor superior em relação a velocidade final. De fato, por si só a natureza não integrável da teoria implica na diferença entre as velocidades final e inicial ($v_f \neq v_{ini}$) [28].

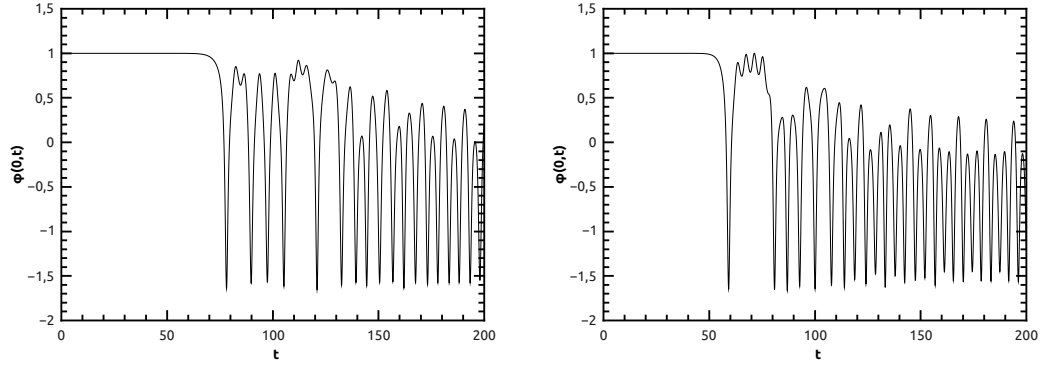


Figura 6.3: Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ em função do tempo t para a) $v_{ini} = 0.18$ (*bion*) e b) $v_{ini} = 0.2411$ (*bion*) .

O fenômeno conhecido como *two-bounces* é observado em alguns sistemas não integráveis, onde o par $K\bar{K}$ escapa para o infinito após baterem por duas vezes. O comportamento *bion* é representado pelas oscilações que perduram indefinidamente após a colisão. Após a colisão, há um vazamento de energia por radiação, e desse modo os estados *bion* são formados. Como demonstrado na Fig. 6.3, podemos visualizar que após o impacto inicial os *kinks* imediatamente voltam a colidir infinitamente, não sendo capazes de recuperar a configuração inicial.

As Figs. 6.4 demonstram os comportamentos de reflexão e *two-bounce* respectivamente. Primeiramente os *kinks* se aproximam, logo em seguida uma colisão é sentida, sendo representada pelo salto na figura e por fim, os *kinks* se separam. Observe que durante a aproximação do par, eles se encontram em um dos mínimos do potencial (+1) e já na colisão, eles passam pelo outro vácuo (-1). A Fig. 6.4(b) representa a dupla interação dos defeitos.

As simulações são colocadas na Fig. 6.5 para valores de velocidade $0.17 \leq v_{ini} \leq 0.28$. Para $v_{ini} < 0.1926$, estados armadilhados são sempre encontrados, já para $v_{ini} > v_c = 0.2598$ (v_c representa a velocidade crítica), os *kinks* interagem apenas uma única vez seguido de uma reflexão para o infinito. O principal comportamento está entre as regiões citadas, onde são formados estados *bion* alternando com *two-bounces*. A região com valor inferior a v_c é conhecida como janelas de reflexão. Essas janelas de escape representam uma faixa de velocidades as quais os *kinks* se separam após a segunda colisão.

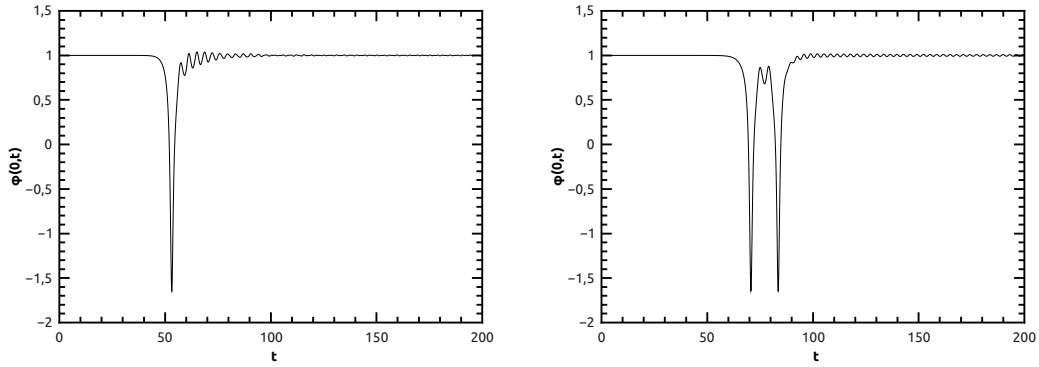


Figura 6.4: Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0,t)$ em função do tempo t para a) $v_{ini} = 0.27$ (*one - bounce*) e b) $v_{ini} = 0.20$ (*two - bounce*).

Os dados alcançados nessa seção confirmam os resultados obtidos na literatura [28], [31]-[36]. De fato, para velocidades com valor inferior à velocidade crítica, observa-se janelas de ressonâncias, enquanto que velocidades superiores a v_c , os pares refletem-se. Esse comportamento pode ser verificado na Fig. 6.5, a qual mostra o número de bounces em relação a velocidade inicial.

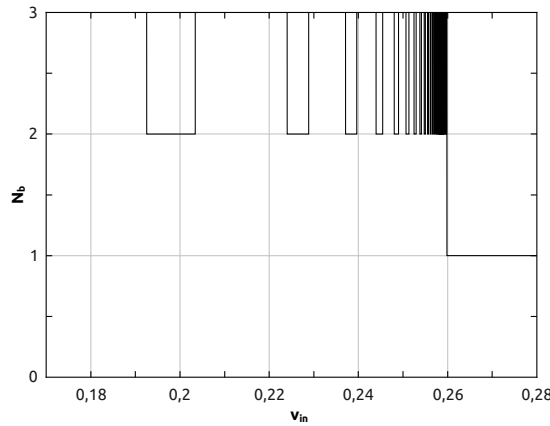


Figura 6.5: Número de *bounces* em função da velocidade inicial para o modelo ϕ^4 .

A explicação desse comportamento é dividida em duas partes. Durante a primeira colisão parte da energia cinética é removida e armazenada no modo vibracional dos *kinks*. Com a segunda colisão, uma parte da energia armazenada retorna ao modo translacional, permitindo assim o escape do par. Este processo é denominado de mecanismo de troca de energia ressonante. Para o alcance desse mecanismo, é necessário obtermos os modos internos do modelo através da introdução de pequenas oscilações dependentes do tempo $\eta(x,t)$ ($\phi(x,t) = \phi_s(x) + \eta(x,t)$), onde $\phi_s(x)$ indica a solução estática. Substituindo essa equação na Eq. (6.14) e coletando

apenas os termos lineares de η , a expressão obtida tem a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (6.20)$$

Introduzimos ainda $\eta(x,t) = \eta(x)e^{i\omega t}$, assim é obtida uma equação do tipo-Schrödinger, dada por

$$-\frac{d^2 \eta}{dx^2} + V(x)\eta = \omega^2 \eta, \quad (6.21)$$

onde o potencial da equação de autovalor é

$$V(x) = \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} = 6\phi^2 - 2\phi = 4 - 6\text{sech}^2(x), \quad (6.22)$$

com $\lambda = 1$. Como já discutido no Cap. 2, o espectro da equação de Schrödinger possui dois modos discretos com frequência $\omega_0 = 0$ e $\omega_1 = \sqrt{3}$ e ainda um contínuo com autofunções que se comportam como ondas planas dispersivas no infinito com frequência angular $\omega_k = \sqrt{k^2 + 2}$ [28].

O modo de frequência nulo corresponde ao modo translacional do *kink*, e o modo ω_1 é identificado como a deformação em volta do *kink* sendo conhecido fisicamente como *internal shape mode oscillation*, ou seja, modo de oscilação interna do *kink* ou ainda simplesmente como modo vibracional [31], sendo este último responsável pelo armazenamento da energia cinética durante o processo de colisão [27].

Portanto, o mecanismo de troca de energia pode ser melhor elucidado. Com o primeiro impacto, os modos internos possuem mais energia em comparação ao modo trivial, por isso o par $K\bar{K}$ forma um estado ligado. A partir da segunda colisão, há um caminho inverso da energia, e então o modo translacional tem energia suficiente para que os *kinks* se separem da atração mútua. Quantitativamente, tal mecanismo obedece a seguinte relação

$$\omega_1 T = 2\pi n + \delta, \quad (6.23)$$

que corresponde à condição de restauração da energia cinética do *kink-antikink* entre os modos trivial e interno após as duas colisões [28], [31]-[36], onde T corresponde ao período entre as duas colisões, ω_1 é a frequência, e tem-se uma mudança de fase δ e um número inteiro n que

representa as janelas de *two-bounces*. A energia é armazenada no modo discreto ω_1 durante o primeiro impacto, consequentemente os *kinks* não escapam, mas na verdade voltam a colidir. A partir disso, caso a Eq. (6.23) seja satisfeita, uma porção da energia do modo vibracional retorna ao trivial, libertando o par de novas interações.

Outro ponto que merece destaque são as janelas de ressonâncias, assunto que foi brevemente comentado acima. Na Fig. 6.5, onde são colocadas várias simulações em relação a velocidade inicial, é notória a diminuição da largura das janelas de *two – bounces* a medida que essa velocidade aumenta, porém ao alcançar a velocidade crítica, o seu comportamento é alterado para apenas *one – bounce*. Na Tabela 6.1 podemos observar, a partir do trabalho numérico realizado, a informação referente às janelas de *two – bounces*. Implementamos os valores das oito primeiras janelas, onde tais valores estão em acordo com Ref. [33]. As colunas da tabela são definidas por m , o número inteiro indicando o número das janelas, v_1 e v_2 respectivamente o primeiro e último pontos de velocidade e Δv representa a largura, ou seja, $\Delta v = v_2 - v_1$.

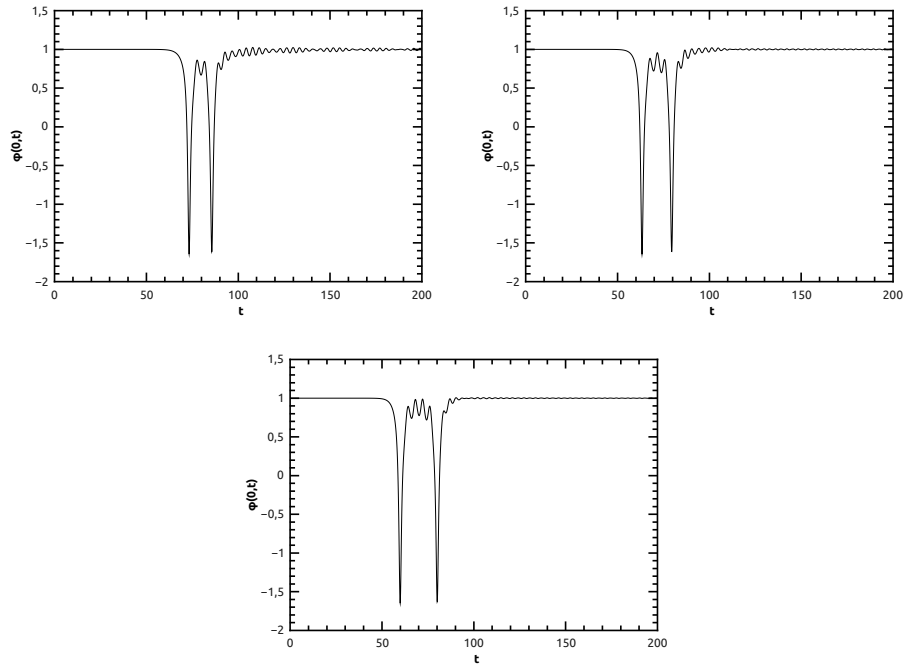


Figura 6.6: Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ em função do tempo t para a) $v_{ini} = 0.1926$ (*two – bounce*), b) $v_{ini} = 0.2245$ (*two – bounce*) e c) $v_{ini} = 0.238$ (*two – bounce*).

O papel da velocidade de impacto possui um grau elevado de importância dentro do panorama das colisões de defeito, onde a mudança desse valor contribui para um comportamento diferente, que por sua vez, acarreta em uma complicada transição entre os estados armadilhados e as reflexões. Por meio desse caminho, as janelas de duas interações são formadas, e

m	v_1	v_2	$\Delta v = v_2 - v_1$
1	0.1926	0.2034	0.0108
2	0.2241	0.2288	0.0047
3	0.2372	0.2396	0.0024
4	0.2440	0.2454	0.0014
5	0.2481	0.2489	0.0008
6	0.2507	0.2513	0.0006
7	0.2525	0.2529	0.0004
8	0.2538	0.2541	0.0003

Tabela 6.1: As colunas v_1 e v_2 correspondem ao primeiro e último pontos da velocidade da janela, o inteiro m faz referência a janela e Δv corresponde a largura da janela. Os dados representam as 8 primeiras janelas de *two-bounces* e estão de acordo com a Ref. [33].

precisou-se introduzir algum mecanismo que pudesse diferenciá-las. A maneira descrita pela Ref. [28], foi definir o número da janela pela quantidade de oscilações entre os picos de *bounces*. Por exemplo, na Fig. 6.6(a), apenas verificou-se uma pequena oscilação entre os picos de colisão, portanto, esta figura refere-se a primeira janela de ressonâncias, de acordo com a Tabela 6.1. As Figs. 6.6(b) e (c), correspondem as segunda ($m = 2$) e terceira ($m = 3$) janelas de *two-bounces*, respectivamente. Dessa maneira, os *plots* são diferenciados apenas pelo maior intervalo de tempo entre as colisões, onde m caracteriza essa diferença e pode ser relacionado ao número de oscilações M , da seguinte maneira, $M = m + 2$, ou seja, o valor de $m = 1$ da Fig. 6.6(a) equivale a $M = 3$, o que caracteriza três oscilações, sendo dois largos picos e um outro de menor amplitude.

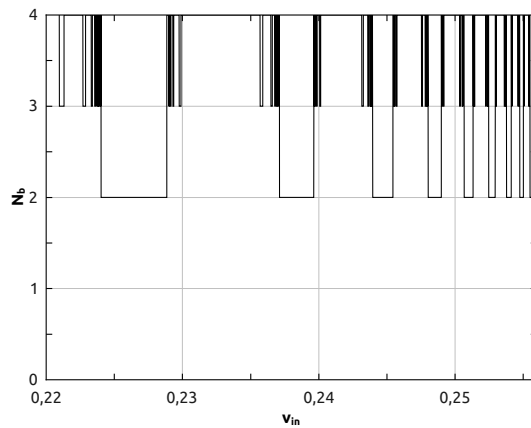


Figura 6.7: Janelas de *three-bounces* observadas após um *zoom* em uma faixa de velocidades para o modelo ϕ^4 .

Além disso, podemos ainda fazer um breve comentário sobre a estrutura fractal obtida nesse modelo. A Fig. 6.7 mostra que entre as janelas de *two-bounces* existem colisões com

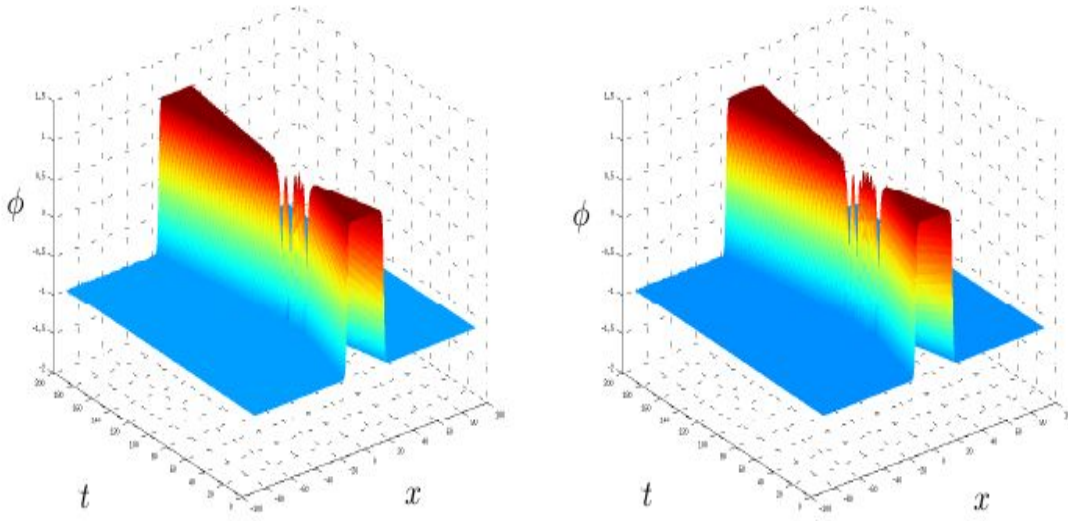


Figura 6.8: Colisão *three-bounces* para o modelo ϕ^4 com velocidades (a) $v_{ini} = 0.2298$ e (b) $v_{ini} = 0.24325$.

três interações. Um *zoom* obtido em uma certa faixa de velocidade apresenta uma estrutura auto-similar caracterizando a conhecida estrutura fractal. Perceba que da mesma maneira que as janelas de *two-bounces* decrescem com o aumento da velocidade, as janelas de *three-bounces* também sofrem a mesma diminuição em sua largura, isso pode ser observado nas vizinhanças das colisões de *two-bounces*. Portanto, a ideia básica do comportamento fractal é descrito como uma sucessão infinita de janelas de n -*bounces* de alta ordem com diminuição da largura e separações convergindo para as bordas das janelas de $(n - 1)$ -*bounces* [28]. Colocamos ainda alguns *plots* referente as janelas de *three-bounces*. As Figs. 6.8(a)-(b) ilustram esse perfil para as velocidades $v_{ini} = 0.2298$ e $v_{ini} = 0.24325$, respectivamente. Para essas velocidades, nota-se que os *kinks* colidem por três vezes até a sua completa separação.

Discutimos nesse capítulo a colisão de alguns modelos que são destaque na literatura. Foram abordadas as diferenças entre os modelos, como por exemplo, integrabilidade do modelo *sine-Gordon* nos leva a um comportamento trivial de mudança de fase após o processo de interação. Contrário a esse caso, o modelo não integrável ϕ^4 possui um resultado complexo baseado no mecanismo de troca de energia ressonante, o que proporciona as janelas de *two-bounces*.

No capítulo seguinte consideramos um estudo das colisões kink-antikink para modelos gêmeos.

Capítulo 7

Colisões *kink-antikink* para Modelos Gêmeos

Neste capítulo consideramos colisões *kink-antikink* para algumas classes de modelos não integráveis (1,1)-dimensional. Como sabemos, o processo de colisão para sistemas integráveis tem uma simplicidade intrínseca, com as ondas solitárias colidindo com apenas uma mudança de fase. Apesar da simplicidade, resultados analíticos para a maior parte dos modelos integráveis é não trivial. Como exemplo, os estudos do espalhamento *kink-antikink* para modelos integráveis usando análises perturbativas podem ser encontrados nas Refs. [136, 137]. Para resultados recentes nessa direção, ver Refs. [138]-[140]. O efeito de uma troca de fase no processo de colisão de um modelo integrável pode ser confrontado com a riqueza dos modelos não integráveis, onde a maior parte da análise é feita numericamente. Como mostrado na Ref. [28] para a teoria $\lambda\phi^4$, para velocidades iniciais suficientemente pequenas, o par de *kinks* é capturado e um estado *bion* é armadilhado. Por outro lado, para velocidades maiores, uma simples interação ocorre, e após o contato, o par de defeitos refletem-se em direção ao infinito. Para velocidades intermediárias, a estrutura de colisão é mais complexa, com janelas de *two-bounces* aparecendo no final da sequência entre a larga região de *bion* e a de *one-bounce*. Uma estrutura auto-similar é revelada se é feito um *zoom* próximo as regiões de *two-bounces*. De fato, ao refinarmos a velocidade inicial próximo a interface entre as janelas de *two-bounces* e *bion*, observamos o surgimento de uma sequência de janelas de *three-bounces*. Este processo continua com um número alto de *bounces* sendo observados, porém, um limite é alcançado devido a perda de energia por radiação. A enorme quantidade de *bounces* aparecem juntamente com o alto número de modos de oscilações internas. As diferentes janelas são relacionadas pela relação entre a espessura da

janela de velocidade e o número de modos de oscilações internas.

O caráter intrigante desta alternância de regiões conflita com a expectativa ingênua de que estados *bions* não podem ser formados para altas velocidades. A teoria semi-fenomenológica que conta com a presença de janelas de *two-bounces* é liderada por [31]. Também aqui, o comportamento de *two-bounces* é descrito por dois momentos. Na primeira interação, a energia é transferida a partir do modo translacional para o modo interno do *kink* (*internal shape mode oscillation*). Na segunda, se os *kinks* satisfazem um critério de ressonância [31, 33], a energia no modo vibracional volta ao modo fundamental, e o par de *kinks* é liberado de sua atração mútua. A equação que obedece essa simples relação já foi apresentada no Capítulo 6 pela Eq. (6.23). Dessa forma, quanto maior ω_1 , menor é o tempo de intervalo entre os *bounces*, indicando uma maior dificuldade na transferência de energia entre os modos.

O simples processo de espalhamento de uma interação ocorre em virtude da velocidade inicial do *kink* possuir valor maior que a velocidade crítica v_c . Uma expressão para a relação entre T e v para janelas de *two-bounces* é apresentada na Ref. [34], dada por

$$T \propto \sqrt{v_c - v}, \quad v < v_c, \quad (7.1)$$

a qual também pode ser usada para entender quantitativamente a variação de n [34], com a sucessiva diminuição da espessura das janelas acumulando próximo a $v = v_c$.

O escape do par *kink-antikink* de sua atração mútua é verificada quando a energia do modo vibracional é menor que a energia cinética dos *kinks* [34]. Frequentemente, usa-se coordenadas coletivas para obter o potencial $U_{K\bar{K}}$ de interação $K\bar{K}$ como função da separação do par [27, 35]. O potencial $U_{K\bar{K}}$ pode ser intuitivamente entendido como a energia de configuração do campo estático consistindo de um *kink* em $+Z$ e um *antikink* em $-Z$ [36]. Por sua vez, se o tempo de duração das oscilações internas for acompanhado pelo vazamento de energia por radiação maior que a energia cinética, um estado *bion* $K\bar{K}$ será formado [34].

As análises das colisões *kink-antikink* podem ser encontradas na literatura por meio de interessantes exemplos de modelos não integráveis. Na verdade, além do já citado modelo $\lambda\phi^4$ [28], existem ainda os modelos de *sine-Gordon* modificado [32] e o ϕ^6 [29]. A maior parte dos modelos não integráveis possuem modos internos de oscilações, responsáveis pelo espalhamento ressonante. Contudo, há uma exceção no modelo ϕ^6 , onde apesar da ausência do modo vibracional, o espalhamento ressonante foi encontrado [29]. Um potencial para perturbações lineares

têm um poço central largo e a energia pode ser transferida do modo fundamental para o estado *meson* residindo neste potencial [29]. Naturalmente, o poço central permite vários autovalores discretos que correspondem aos estados ligados [49]. Isto é contrário ao que acontece para os modelos ϕ^4 e *sine-Gordon*, onde os *mesons* podem passar através dos *kinks* sem reflexão, somente com uma mudança de fase [49]. No caso ϕ^6 , as janelas de *two-bounces* satisfazem a mesma relação dada pela Eq. (6.23), mas com ω_1 definido como a frequência do menor modo coletivo. Algumas interessantes discussões relacionadas a este tópico podem ser vistas na Ref. [56].

Nossa proposta aqui é investigar em que medida o processo de colisão $K\bar{K}$ pode ser usado para distinguir os modelos gêmeos, ou seja, uma classe de defeitos topológicos com o mesmo perfil de campo escalar e densidade de energia [26]. Para alguns resultados recentes nesse sentido, veja as Refs. [57, 58]. Estamos particularmente interessados em teorias *k-defects*, devido ao seu uso para explicar a expansão acelerada do Universo [134, 141]. O processo de colisão *kink-antikink* é útil para a Cosmologia em teorias com uma dimensão extra [142], como na proposta *ekpyrotic* para colisão de brana [59]. Igualmente, podemos citar as teorias no cenário mundo brana com dinâmica generalizada [60, 25]. O estudo de bolha cosmológica têm sido objeto de um renovado interesse uma vez que isto pode ser levado a possíveis caminhos para provar o panorama de cordas [61]. Colisão de bolhas cósmicas no regime de alta taxa de nucleação pode ser estudado ignorando a expansão e a curvatura do Universo [62]. Apesar da usual aproximação feita em redes de simulações em (3,1)-dimensões [63], em especial situações de bolhas com simetria $SO(2,1)$, uma colisão em velocidades altas de duas bolhas é equivalente, dependendo da configuração de vácuo, a uma colisão $K\bar{K}$ (1,1)-dimensional [64]. Isso mostra que o estudo da interação em teorias gêmeas pode ser interessante para cenários cosmológicos.

Nesse capítulo, como ponto de partida focamos em teorias de campos escalar (1,1)-dimensional no espaço-tempo de Minkowski. Apesar da simplicidade da proposta, mostraremos que nossos resultados levam a interessantes ideias sobre a influência das *k-dynamics* em algumas características de colisão, ou seja, a presença de *two-bounces*. No capítulo 5 foram avaliados o formalismo de primeira ordem para teorias gêmeas, bem como a análise de estabilidade. A seção 7.1 discute o modelo ϕ^4 e sua teoria gêmea. O espectro discreto de flutuações é obtido para o parâmetro de massa $1/M^2 \ll 1$ e em seguida comparado com os resultados conhecidos da teoria ϕ^4 . Será mostrado que o aumento do parâmetro $1/M^2$ cresce o *gap* entre os modos zero e excitado. Isso é confrontado com nossos resultados numéricos, apresentado na seção 7.2.

7.1 O Modelo ϕ^4 e sua parte Gêmea

Nessa parte será considerada a comparação de algumas propriedades dos dois modelos gêmeos específicos. O conjunto de estados ligados obtidos a partir da análise de estabilidade irá nos fornecer informações que serão confrontadas com a análise numérica das colisões. É importante notar que, para o modelo considerado, a ausência de modos taquiônicos é demonstrado na seção II da Ref. [25]. Além disso, a análise numérica discute seus automodos podendo ser encontrados de duas maneiras diferentes nas Refs. [25, 26]. Consideramos a densidade lagrangiana com um potencial ϕ^4 , onde

$$W_\phi = 1 - \phi^2. \quad (7.2)$$

A solução *kink* da equação de movimento de primeira ordem é

$$\phi_S(x) = \tanh(x - x_0) \quad (7.3)$$

onde x_0 é uma constante, indentificada como centro do *kink*. Note que como consequência da construção do modelo gêmeo, a expressão anterior também corresponde a solução $\phi_m(x)$ alcançada para a teoria *k-defect* modificada. O primeiro passo na investigação do processo de colisão *kink-antikink* é investigar o espectro de flutuações para ambos os modelos. Os modos de flutuações em torno do *kink* são descritos como $\phi(x, t) = \phi_S(x) + \sum_n a_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t)$. Para a lagrangiana padrão, uma equação de Schrödinger é obtida

$$-\eta_n''(x) + V_q(x)\eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \quad (7.4)$$

com o potencial

$$V_q(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} = 2(3\tanh^2(x) - 1). \quad (7.5)$$

Para o modelo *k-defect* gêmeo, uma equação de Schrödinger

$$-u_{zz} + U_q(z)u = \omega^2 u, \quad (7.6)$$

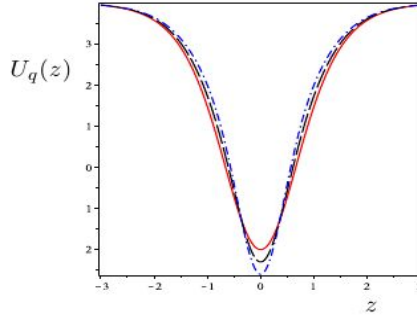


Figura 7.1: Potencial de Schrödinger $U_q(z)$ para $1/M^2 \rightarrow 0$ (linha vermelha), 0.1 (linha tracejada preta) e 0.2 (linha ponto-tracejada azul).

é possível após uma mudança de variáveis [135]:

$$dx = \left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz, \quad (7.7)$$

$$\eta = \left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{4}} u. \quad (7.8)$$

Expressões analíticas para o potencial $U_q(z)$ podem ser obtidas no regime $1/M^2 \ll 1$. Para o caso particular $W_\phi = 1 - \phi^2$ considerado, tem-se [25]

$$U_q(z) = 4 - 6\text{sech}^2(z) + \frac{1}{M^2}[4\text{sech}^2(z) + 14\text{sech}^4(z) - 21\text{sech}^6(z)]. \quad (7.9)$$

Vemos que para $1/M^2 \rightarrow 0$ temos potenciais idênticos $V_{(q)}(z) = U_{(q)}(z)$ para as teorias padrão e k -defect, com potencial de Schrödinger sendo um Pösh-Teller modificado. Este potencial, analisado em Sugiyama [27] no contexto das colisões $K\bar{K}$, têm dois autovalores discretos ω_i^2 com a correspondente autofunção $u_i(z)$:

$$\omega_0^2 = 0, \quad u_0(z) = \sqrt{\frac{3}{4}}\text{sech}(z)^2 \quad (7.10)$$

e

$$\omega_1^2 = 3, \quad u_1(z) = \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh(z)\text{sech}(z), \quad (7.11)$$

seguido pelos modos contínuos. O primeiro estado excitado é uma excitação armadilhada no $kink$, crucial para a formação dos estados de *two-bounces* [27].

Agora, a partir da Fig. 7.1 observamos que o aumento de $1/M^2$ leva aos potenciais $V_q(z)$ e $U_q(z)$ a se diferenciarem um do outro, com o potencial de Schrödinger da teoria k -defect

$1/M^2$	$(\omega_1^{(1)})^2$	$(\omega_1^{(1)})_{num}^2$	relative error
0	3	3.0000013	-4.3×10^{-7}
0.01	3.016	3.0159773	7.5×10^{-6}
0.1	3.16	3.1574820	8.0×10^{-4}

Tabela 7.1: Energia do primeiro estado excitado. Na segunda coluna comparamos $(\omega_1^{(1)})^2$, dado pela Eq. (7.14) obtida com a teoria de perturbação independente do tempo. A terceira coluna mostra a energia obtida numericamente com o método de elementos finitos. A quarta coluna nos indica o erro relativo entre os resultados das segunda e terceira colunas.

com potencial mais profundo e fino. A teoria de perturbação não degenerada em primeira ordem no parâmetro $1/M^2 \ll 1$ pode ser usada para alcançarmos a energia dos autovalores e as autofunções da teoria *k-defect* gêmea. A Eq. (7.9) pode ser escrita como $U_q(z) = V_q(z) + U_{pert}(z)/M^2$, onde o potencial de perturbação é

$$U_{pert} = 4\text{sech}^2(z) + 14\text{sech}^4(z) - 21\text{sech}^6(z). \quad (7.12)$$

A energia do estado fundamental é invariante sobre tal perturbação

$$(\omega_0^{(1)})^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz |u_0(z)|^2 U_{pert}(z) = 0. \quad (7.13)$$

Isso significa a presença do modo translacional para o correspondente modelo. A energia do primeiro modo excitado é alterada para

$$(\omega_1^{(1)})^2 = \omega_1^2 + \frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz |u_1(z)|^2 U_{pert}(z) = 3 + \frac{8}{5} \frac{1}{M^2}. \quad (7.14)$$

A tabela 7.1 mostra, para alguns valores de $1/M^2$, o autovalor do modo interno a partir da Eq. (7.14) e a solução numérica correspondente da equação de Schrödinger. Nós vimos na tabela que o erro relativo cresce com $1/M^2$, com um aceitável valor $\sim 10^{-5}$ para $1/M^2 = 0.01$. O aumento de $1/M^2$ por uma ordem de grandeza cresce o erro relativo 100 vezes. Então, $1/M^2 = 0.1$ parece ser um valor muito grande para a que aproximação seja válida. Além disso, a partir das Eqs. (7.13) e (7.14), observamos que há um grande *gap* entre o modo zero e o primeiro estado excitado por meio do aumento do parâmetro $1/M^2$. Essa propriedade é muito importante para o processo de interação, uma vez que a transferência de energia translacional para o modo vibracional ocorre no núcleo da colisão. Se o *gap* cresce, como consequência, mais difícil se torna a troca de energia entre os dois modos, desfavorecendo a existência dos estados

bion e as colisões *n-bounces* com $n \geq 2$ e o alargamento da taxa de velocidades com colisões de *one-bounces*.

7.2 Resultados Numéricos

Aqui será descrito nossos principais resultados a respeito do número de *bounces* como função da velocidade inicial do *kink* em uma colisão $K\bar{K}$ simétrica. Iremos considerar a teoria padrão ϕ^4 e as teorias gêmeas com crescimento do parâmetro $1/M^2$. Nossos resultados serão confrontados com as previsões teóricas realizadas nas seções anteriores.

7.2.1 Teoria $\lambda\phi^4$

Primeiramente revisamos a teoria $\lambda\phi^4$. A equação de movimento é

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0 \quad (7.15)$$

onde os pontos e as aspas significam as derivadas com respeito a t e x , respectivamente. Estudamos uma colisão $K\bar{K}$ simétrica, com uma configuração inicial onde o par de *kinks* está separado suficientemente para que a solução livre seja útil como condição inicial (*kink* com velocidade v_{in} , *antikink* com velocidade $-v_{in}$).

Usamos o método *pseudospectral* (Apêndice A) em uma grade com 2048 nós e condições de fronteira periódicas. Nós fixamos $x_0 = 15$ como posição inicial do *kink* e definimos o limite da grade em $x_{max} = 120$. Reproduzimos alguns resultados do modelo ϕ^4 a partir da literatura [28] relacionado ao surgimento das janelas de *two-bounces*. Para uma particular velocidade inicial v_{in} , a estrutura de *bounces* pode ser facilmente verificada com um plot do campo escalar no centro de massa $\phi(0,t)$ como uma função de t . Alguns exemplos podem ser vistos nas Figs. 7.2, onde nós temos um *bion* (7.2)(a), *two-bounces* (7.2)(b) e *one-bounce* (7.2)(c). Como é conhecido, a dependência do número de *bounces* com o módulo da velocidade inicial v_{in} do par é intrincado. Para v_{in} baixas, um estado *bion* é formado, enquanto que para altas v_{in} , têm-se um espalhamento *one-bounce*. Para velocidades intermediárias, aparecem janelas de *two-bounces* separadas por regiões de estados *bion*.

Construímos um processo para identificar o número de *bounces* N_b para o processo de interação no intervalo de tempo $0 < t < T = 200s$. Nós definimos um *bounce* conectado a mudança de sinal da solução centro de massa $\phi(0,t)$. Desse modo, Fig. 7.2(b) e 7.2(c)

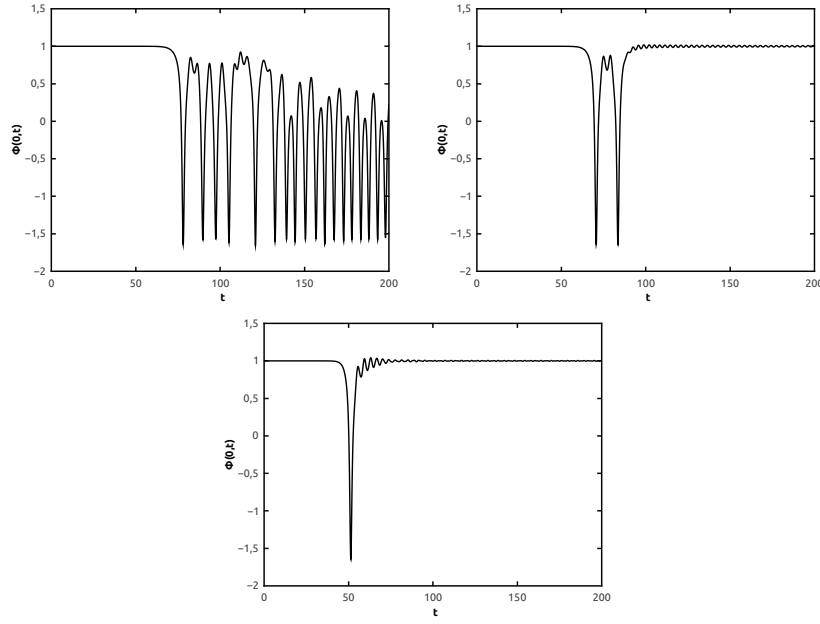


Figura 7.2: Campo escalar $\phi(0,t)$ no centro de massa em função do t para a) $v_{in} = 0.18$ (estado *bion*), b) $v_{in} = 0.20$ (colisão *two-bounces*) e c) $v_{in} = 0.28$ (colisão *one-bounce*).

mostram colisões com $N_b = 2$ e $N_b = 1$, respectivamente e 7.2(a) mostra o estado *bion*. Em nossa análise, um valor muito grande de N_b corresponde ao estado *bion*. A Fig. 7.3(a) revela o comportamento de N_b como função de v_{in} . Note a partir dessa figura a mudança do padrão para colisões em torno de $v_{in} \sim 0.26$. A presença de grande número de *bounces* para $v_{in} \lesssim 0.26$ caracteriza estados *bion*, enquanto que há regiões intermediárias com $N_b = 2$. Estados com $N_b = 1$ aparecem para $v_{in} \gtrsim 0.26$. A estrutura de janelas de *two-bounces* podem ser caracterizadas pelo inteiro m rotulado pelo número de oscilações em $\phi(0,t)$ entre *bounces*. Por exemplo, na Fig. 7.3(a) a primeira janela corresponde a $m = 1$ (ver detalhes em Ref. [28]). A espessura decresce com m acumulando em torno de $v_{in} \simeq 0.26$, o limite acima da qual a velocidade inicial é suficientemente maior para o espalhamento com uma interação. A tabela 7.2 mostra algumas características da espessura das primeiras quatro janelas de *two-bounces*. Essa tabela mostra como o aumento em m reflete na redução das janelas. Isto pode ser melhor visto na Fig. 7.4 (Ref. [34]).

Também refinamos os dados de entrada das velocidades iniciais em torno da borda entre as janelas de *two-bounces* e *bion*, assim, vê-se uma cascata de janelas de *three-bounces*, como visto na Fig. 7.3(d). Note que as janelas de *three-bounces* se acumulam em torno da borda das janelas de duas interações, repetindo o efeito de redução de espessura e separação das janelas que ocorre na Fig. 7.3(a), e mostrando o padrão fractal das colisões $K\bar{K}$ para o modelo ϕ^4 .

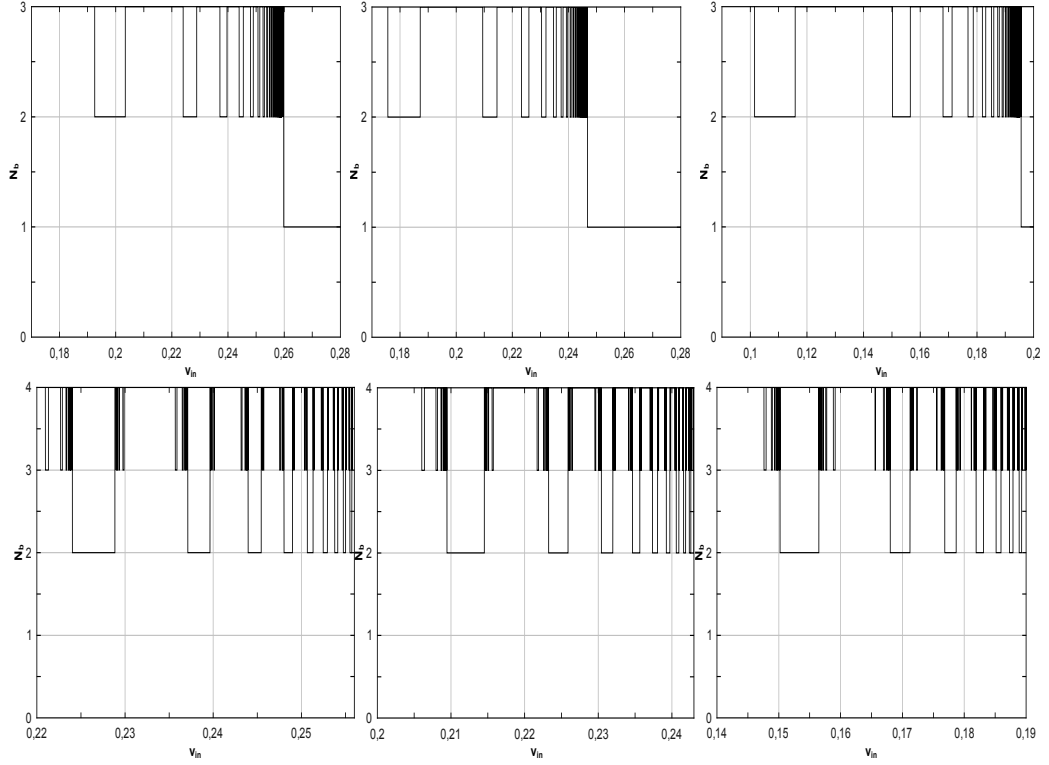


Figura 7.3: Número de *bounces* em função da velocidade inicial v_{in} , a) para o modelo ϕ^4 (superior esquerdo) e b) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$ (superior centro) e $1/M^2 = 0.05$ (superior direito), mostrando a presença das janelas de *two-bounces*. Após o *zoom* no intervalo, janelas de *three-bounces* podem ser vistas, para d) o modelo ϕ^4 (inferior esquerdo), e) modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$ (inferior centro) e f) modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.05$ (inferior direito).

m	v_1	v_2	Δv	v_{1T}	v_{2T}	Δv_T	
1	0.1926	0.2034	0.0108	0.1757	0.1872	0.0115	
2	0.2241	0.2288	0.0047	0.2095	0.2145	0.005	
3	0.2372	0.2396	0.0024	0.2233	0.2259	0.0026	
4	0.2440	0.2454	0.0014	0.2305	0.2320	0.0015	

Tabela 7.2: Separação em velocidades das primeiras quatro janelas de *two-bounces*. m corresponde a janela de *two-bounces* (igual ao número de oscilações de $\phi(0,t)$ entre os *bounces*). Para o modelo ϕ^4 , as colunas v_1 e v_2 correspondem aos primeiro e último pontos da velocidade da janela e Δv corresponde a largura (os resultados numéricos estão de acordo com a tabela II da Ref. [33]). Para o modelo *twin k-defect* com $1/M^2 = 0.01$, colunas a direita mostram informações similares identificadas por v_{1T} , v_{2T} e Δv_T .

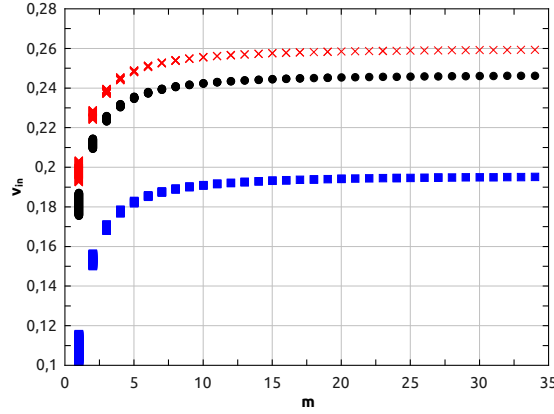


Figura 7.4: Intervalo de velocidades dentro do qual o par $K\bar{K}$ escapa após uma colisão *two-bounces* como função de m , o número de pequenas oscilações de $\phi(0,t)$ entre as duas interações a) para o modelo ϕ^4 (cruz vermelha), b) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$ (bola preta) e c) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.05$ (quadrado azul).

7.2.2 Teoria Gêmea

A teoria gêmea no regime $1/M^2 \ll 1$ têm a seguinte equação de movimento

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{1}{M^2}(\dot{\phi}^2 \ddot{\phi} + \phi'^2 \phi'' - 2\dot{\phi}\phi'\dot{\phi}') + U_\phi - \frac{1}{M^2}UU_\phi = 0. \quad (7.16)$$

No regime $1/M^2 \ll 1$, e negligenciando os termos de $\mathcal{O}(1/M^4)$ nós temos

$$U(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{1}{8}\frac{W_\phi^4}{M^2}. \quad (7.17)$$

Substituindo esta na Eq. (7.16), podemos facilmente verificar que $\phi_K(x,t) = \tanh(\gamma(x-vt))$ é a solução para o *kink* propagando livremente. Como esperado, essa é a mesma solução já mostrada para o modelo ϕ^4 . Isto significa que as condições iniciais utilizadas serão as mesmas. De fato, somente o processo de colisão distinguirá ambas as teorias. Além disso, como feito anteriormente para a teoria ϕ^4 , essa solução analítica também pode ser utilizada como primeiro teste para a solução numérica das teorias gêmeas. Nas Figs. 7.5 apresentamos alguns resultados para $\phi(0,t)$ da teoria gêmea com $1/M^2 = 0.01$. Comparando essas figuras com a Fig. 7.2, vemos que mesmo para valores pequenos de $1/M^2$ o comportamento é alterado sensivelmente. Por exemplo, para $v_{in} = 0.2$, temos colisões de *two-bounces* com $m = 1$ para o modelo ϕ^4 (Fig. 7.2)(b) e *bion* para o modelo gêmeo (Fig. 7.5)(b). Igualmente, para $v_{in} = 0.18$ observamos *bion* para o modelo ϕ^4 (Fig. 7.2)(a) e *two-bounces* com $m = 1$ para modelo gêmeo (Fig. 7.5)(a). Nossos resultados de N_b em função de v_{in} para $1/M^2 = 0.01$ são colocados na Fig.

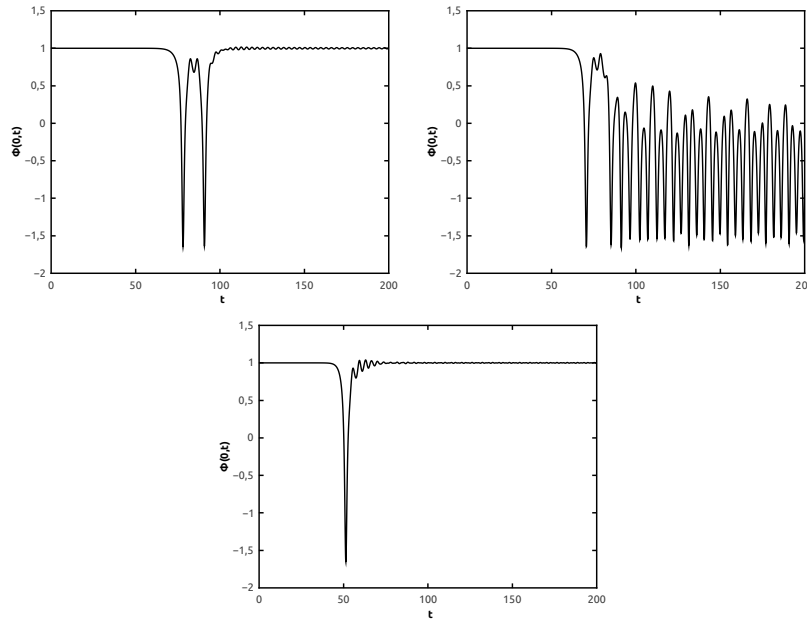


Figura 7.5: Campo escalar $\phi(0,t)$ no centro de massa em função de t para a) $v_{in} = 0.18$ (colisão *two-bounces*), b) $v_{in} = 0.20$ (estado *bion*) e c) $v_{in} = 0.28$ (colisão *one-bounce*) para o modelo gêmeo com $1/M^2 = 0.01$.

7.3(b). O mesmo efeito de aparecimento de janelas de duas interações conhecido na teoria ϕ^4 é apresentado para o modelo gêmeo. Na teoria gêmea, contudo, colisão de *one-bounce* ocorre para $v_{in} \gtrsim 0.246$, inferior ao modelo ϕ^4 que acontece em torno de $v_{in} \gtrsim 0.26$. Um crescimento de $1/M^2$ mostra o mesmo padrão, como pode ser visto na Fig. 7.3(c) para $1/M^2 = 0.05$, onde agora colisões *one-bounces* ocorrem para $v_{in} \simeq 0.20$. Essa ampliação da região onde ocorre apenas uma única interação está diretamente relacionado ao crescimento do *gap* entre os modos translacional e vibracional, como discutido no fim da seção anterior.

A tabela 7.2 mostra a separação das velocidades das primeiras quatro janelas de *two-bounces* para os modelos ϕ^4 e gêmeo para $1/M^2 = 0.01$. Podemos ver uma diferença mínima na espessura das janelas, ocorrendo para velocidades menores no modelo gêmeo em comparação ao ϕ^4 . Isso pode ser melhor entendido na Fig. 7.4, onde também é incluído o caso $1/M^2 = 0.05$. Ainda podemos observar que similarmente a ϕ^4 , para o modelo gêmeo, a espessura da velocidade é reduzida continuamente com m , enquanto que v_{in} cresce e assintota a uma velocidade mínima v_{in}^* para ocorrência de colisão de *one-bounce*. Também percebemos a partir da figura que quanto maior $1/M^2$, menor é a v_{in}^* .

Para o modelo gêmeo, refinamos os dados de entrada das velocidades iniciais em torno da borda entre a janela de *two-bounces* e *bion*, obtendo os resultados das Figs. 7.3(e) e 7.3(f). Novamente identificamos a presença de uma cascata de janelas de *three-bounces*, acumulando

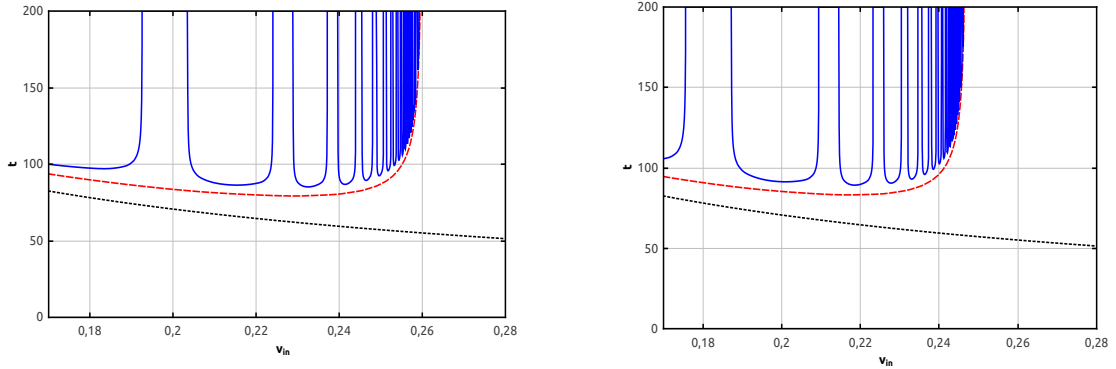


Figura 7.6: Tempo para a primeiro (linha preta), segundo (traço longo vermelho) e terceiro (traço curto azul) *bounces* em uma colisão $K\bar{K}$, como função da velocidade inicial para a) ϕ^4 e b) gêmeo com $1/M^2 = 0.01$.

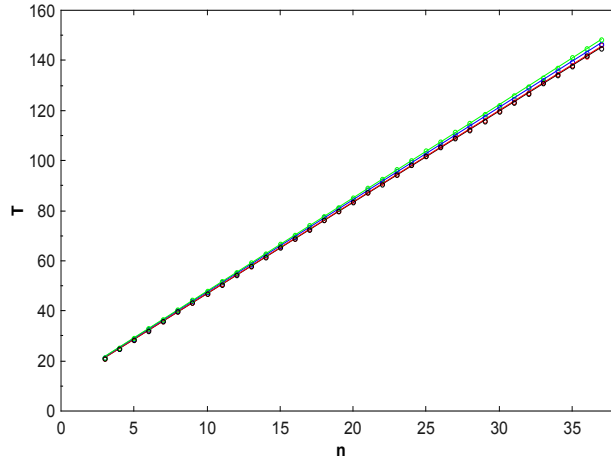


Figura 7.7: Tempo entre os *bounces* em função de $n = m + 2$, onde m é o número das janelas para a) $1/M^2 = 0$ (preta), b) $1/M^2 = 0.01$ (vermelha), c) $1/M^2 = 0.05$ (azul) e d) $1/M^2 = 0.08$ (verde). Para fixos $1/M^2$, círculos representam os resultados numéricos, enquanto que a linha é um ajuste por meio dos mínimos quadrados.

em volta da borda das janelas de *two-bounces*, repetindo o efeito de redução da espessura e separação das janelas que ocorrem nas Figs. 7.3(b) e 7.3(c), demonstrando que há o padrão fractal das colisões $K\bar{K}$ para o modelo gêmeo de forma similar ao já verificado ϕ^4 (compare com as Figs. 7.3(a) e 7.3(d)).

As Fig. 7.6(a)-(b) mostram o tempo t dos primeiros três *bounces* como função da velocidade inicial v_{in} . Nossos resultados com $1/M^2 = 0.01$ (Fig. 7.6)(b) apresentam claramente que existe um deslocamento das janelas para as regiões de menores velocidades em comparação com a Fig. 7.6)(a) (modelo ϕ^4). Isso pode ser interpretado como um sinal de fraqueza da interação $K\bar{K}$ para o modelo gêmeo, em comparação com a teoria ϕ^4 .

Ainda investigamos se a relação fundamental dada pela Eq. (6.23) é sustentada no modelo

$1/M^2$	$2\pi/(\omega_1^{(1)})$	a	relative error
0	3.63	3.65	0.55%
0.01	3.62	3.66	1.1%
0.05	3.58	3.69	3.0%

Tabela 7.3: Coeficiente angular teórico $2\pi/(\omega_1^{(1)})$ versus coeficiente angular a obtido pelo método dos mínimos quadrados a partir da Fig. 7.7.

gêmeo modificado. Na Fig. 7.7 plotamos o tempo entre os *bounces* em função de $n = m + 2$, onde m é o número da janela. O inteiro n é construído na ordem para obtermos uma mudança de fase δ entre 0 e 2π . Notamos por meio da figura que os pontos numéricos podem ser descritos com boa aproximação pela linha reta. A tabela 7.3 compara os coeficientes angulares pelos mínimos quadrados (*least-squares*) com o teórico $2\pi/\omega_1$, previsto pela Eq. (6.23). Pela tabela, observa-se que para $1/M^2 = 0$ o coeficiente angular $2\pi/(\omega_1^{(1)})$ é menor, mas comparável ao valor numérico obtido pelo método dos mínimos quadrados, como já notados na Ref. [28]. Ainda na tabela 7.3, mostramos que o coeficiente angular numérico cresce com o aumento de $1/M^2$. Este é um caráter intrigante, uma vez que pela Eq. (6.23) era esperado um decrescimento desse coeficiente, como mostrado na segunda coluna da tabela 7.3. Visto que não encontramos nenhuma explicação física para tal comportamento, devemos tratar esses resultados numéricos de forma mais cautelosa, pelas seguintes razões: i) deve-se notar que a Fig. 7.7 considera número muito grande de janelas ($m \sim 35$). A medida que cresce o número de janelas, também aumenta o erro numérico das simulações. Em outras palavras, uma análise numérica consistente das janelas de *two-bounces* é mais fácil do ponto de vista computacional. ii) A Eq. (6.23) foi proposta por Campbell et al na Ref. [31], como uma boa simplificação de um processo intrincado de interação entre dois objetos estensos. Se quisermos testar uma expressão de forma qualitativa, não devemos ser tão rigorosos na concordância quantitativa. iii) Não podemos considerar um valor tão grande de $1/M^2$ como uma aproximação válida de uma teoria gêmeo. Poderíamos assumir $1/M^2 = 0.05$ como um limite superior para a análise de uma janela de *two-bounces*, mas esse valor pode ser ainda menor para um maior número de *bounces*. Neste capítulo, todas as análises e resultados numéricos a respeito das janelas de *two-bounces* mostraram ser compatível com a interpretação da Eq. (6.23). A aplicabilidade dessa equação pode ser confirmada também pela Fig. 7.7 e tabela 7.3 no sentido que o comportamento da linha reta foi verificado e os coeficientes angulares são em linhas gerais comparáveis, como feito na Ref. [28] para o modelo ϕ^4 .

Capítulo 8

Conclusão

O foco central desse trabalho se baseia no estudo dos defeitos topológicos. Destacamos a localização de campos em defeitos com simetria radial construídos a partir da dependência explícita da distância na lagrangiana e a colisão entre defeitos do tipo *kink*.

No capítulo 3 foram introduzidas p -balls como defeitos topológicos em $(D,1)$ -dimensões construídas com $\mathcal{M} \geq 1$ campos escalares que dependem radialmente de $2 \leq p \leq D - 1$ dimensões espaciais. Tais defeitos são inspirados em física de branas com $D - p$ dimensões extras e p dimensões espaciais transversais. Foram encontradas soluções BPS em torno das p dimensões transversais e foi provado sua estabilidade. Em seguida, considerou-se uma classe de modelos onde as p -balls são formadas com um, dois e três campos escalares. Para modelos de um campo, foi considerado uma região de parâmetros onde um grande número de estados ligados são formados. O modelo de dois campos escolhido se assemelha ao modelo de brana de Bloch, onde são considerados dois tipos de acoplamentos, um de segunda χ^2 e outro de quarta ordem $\phi^2\chi^2$. Importante destacar que a presença do segundo campo escalar contribui com o aumento do armadilhamento de partículas de spin-0. Observa-se ainda em modelos de dois campos, que o aumento no valor do parâmetro p contribui para um maior número de estados ligados; em contrapartida, a quantidade de picos ressonantes é aproximadamente a mesma. No que diz respeito à influência de j , a probabilidade de ocorrência dos estados ligados com $j = 0$ é maior em comparação aos estados com valores maiores de j . Quanto às ressonâncias, o potencial de Schrödinger mostra que o comportamento depende do modelo. Por exemplo, no modelo de um campo, a ocorrência de tais estados aumenta a medida que cresce o valor de j . Por sua vez, para o modelo de dois campos, o número de ressonâncias parece acompanhar a tendência dos estados ligados, com uma diminuição em número com o aumento de j . Por fim,

é importante observar que o número de codimensões está diretamente ligado ao processo de localização, uma vez que o aumento das dimensões totais D reflete apenas na parte longitudinal da decomposição do campo escalar.

O capítulo 4 estudou a localização de campos fermiônicos p -balls construídas a partir de dois campos escalares em $(3,1)$ -dimensões. Consideramos um acoplamento geral entre o defeito e o campo fermiônico, capaz de fornecer uma descrição quântica supersimétrica das amplitudes relacionadas às componentes de mão esquerda e direita do fermion. Consequentemente, os hamiltonianos descrevendo tais amplitudes são parceiros supersimétricos proibindo a presença de modos taquiônicos. Para um acoplamento de Yukawa, foi mostrado que o modo zero é não normalizável e o espectro de ambas as componentes são idênticos devido à quebra espontânea de supersimetria. Importante destacar ainda, que a presença do campo escalar adicional colabora para um melhor processo de localização de férmions no defeito, sendo este responsável pelo surgimento de estrutura interna no defeito.

No capítulo 7 consideramos as colisões *kink-antikink* para teorias gêmeas. Estávamos particularmente interessados na diferença de comportamento que a presença de um termo cinético geral na lagrangiana poderia revelar no processo de colisão. Partimos de uma lagrangiana geral $\mathcal{L}(X, \phi)$ e consideramos uma decomposição conveniente das flutuações. Após a revisão do formalismo de primeira ordem das teorias gêmeas, consideramos a teoria ϕ^4 e uma classe de teorias gêmeas dependendo do parâmetro de massa M . No regime onde $1/M^2 \ll 1$, obtivemos o espectro de excitações com dois estados ligados: um modo zero que corresponde ao modo translacional e um modo vibracional, crucial para colisões com *two-bounces*. Mostramos que o *gap* entre os estados ligados é maior para o modelo *twin*, e cresce com o aumento de $1/M^2$. Uma análise numérica detalhada reproduziu os resultados da colisão $K\bar{K}$ da teoria ϕ^4 , sendo confrontados com os resultados do modelo *twin*. Os resultados numéricos estão de acordo com a expectativa teórica de que, no processo de colisão, o aumento de $1/M^2$ reduz a possibilidade de formação de um estado *bion*.

Podemos destacar aqui as principais perspectivas. A primeira delas está relacionada a questão do armadilhamento de campos escalares e fermiônicos em defeitos topológicos. A inclusão de férmions em defeitos p -balls corresponde a uma motivação direta. Outro ponto que merece destaque, são as colisões de defeitos topológicos devido a presença de mais estados vibracionais, que consequentemente, nos leva a resultados bem mais complexos. Assim, espera-se que o aumento do número dos estados ligados possa nos fornecer uma mudança no comportamento

das janelas de two-bounces.

Apêndice A

Método *Pseudospectral*

A solução das equações diferenciais parciais surgem como um grande problema encontrado pelos cientistas em quase todas as áreas da engenharia, ciência e modelagem climática. A maior parte dessas equações não possuem soluções analíticas; assim, os pesquisadores são levados a realizar cálculos numéricos. Dentre os métodos mais utilizados, podemos destacar os Métodos de Diferenças Finitas, Volumes Finitos, Elementos Finitos e os Métodos Espectrais [143].

Os métodos clássicos, por exemplo, diferenças finitas, não são suficientes para resolver problemas com alta ordem de precisão devido aos seus erros de truncamento. Entretanto, nos métodos espectrais, essa alta precisão se caracteriza como uma das principais razões pela qual são altamente atrativos. Por exemplo, os métodos espectrais provêm soluções convergentes para casos suaves com um vantagem adicional de praticamente nenhum erro de fase [144].

Em meados dos anos 70, o desenvolvimento dos métodos transformados (transformações entre os espaços físico e espectral - Fast Fourier Transform-FFT) proporcionaram o surgimento dos métodos espectrais. Dois elementos-chave para o desenvolvimento desse método são as funções de aproximação e as funções teste. Desse modo, tais métodos são caracterizados pela expansão da solução em termos de uma série truncada de funções de aproximações globais, por exemplo, séries de Fourier, polinômios de Chebyshev ou Legendre [145]. Assim, esses métodos numéricos aproximam as derivadas espaciais por meio de expressões algébricas relacionando a solução global em uma malha. Os métodos espectrais podem ser diferenciados a partir da escolha das funções teste, onde os mais comuns são: Galerkin, Tau e Colocação (também conhecido como *pseudospectral*). O objetivo principal dessas funções é o de assegurar que a equação diferencial seja aproximada com enorme exatidão pela série truncada.

A.1 Método de Colocação

A procura por soluções de equações diferenciais parciais e ordinárias pode ser desenvolvida por meio dos métodos espectrais. Esse método é baseado por uma expansão da solução $u(x)$ em termos de uma série truncada de funções de base ortogonais globais $\phi_k(x)$

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \phi_k(x), \quad (\text{A.1})$$

onde $\phi_k(x)$ são ainda conhecidas como funções de aproximação [146]. Os coeficientes $\hat{u}_k$ devem ser calculados de modo que a equação diferencial seja satisfeita nos pontos de colocação x_i . Alguns autores rotulam o método de colocação espectral de método *pseudospectral* [147].

Uma vez que sejam tratados problemas periódicos, é natural aproximarmos as soluções com um polinômio de Fourier. Para derivar o método de colocação, aproximamos as soluções usando os interpoladores, os quais satisfazem as equações exatamente nos pontos de colocação. Ou seja, encontramos as equações necessárias para determinar as N incógnitas exigindo que a solução aproximada satisfaça a equação diferencial em cada um dos N pontos da grade. Por exemplo, considerando uma equação

$$\mathcal{L}u = f, \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathcal{L}$ é o operador diferencial. Exigimos que o residual [144]

$$R_N(x_i) = \mathcal{L}u_N(x_i) - f(x_i), \quad (\text{A.3})$$

decai nos pontos da grade, $R_N(x_i) = 0$. Então, temos

$$\mathcal{L}u_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 \dots N - 1. \quad (\text{A.4})$$

A escolha dos pontos de colocação x_i e a funções bases ϕ_k influenciam de maneira direta os resultados de aproximação pelo método de colocação. Por exemplo, para problemas periódicos, as funções trigonométricas de Fourier são as mais apropriadas, enquanto que em problemas não periódicos, utiliza-se os polinômios de Chebyshev ou de Legendre.

Para exemplificar, vamos utilizar o método de colocação espectral de Fourier. Caso $u(x)$ seja uma função periódica $[0, 2\pi]$, então satisfaz $u(x_0 = 0) = u(x_N = 2\pi)$. Para o polinômio

de Fourier, temos o seguinte ponto de colocação associado [146]-[148]

$$x_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (\text{A.5})$$

A função $u(x, t)$ é representada por

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n(x) u_n(t), \quad (\text{A.6})$$

onde $u_n(t) = u(x_n, t)$ e $g_n(x)$ é o polinômio trigonométrico de ordem N , sendo definido por

$$g_n(x) = \frac{1}{N} \sin \left[\frac{N}{2} (x - x_n) \right] \cot \left[\frac{x - x_n}{2} \right], \quad (\text{A.7})$$

dessa forma, a derivada segunda de $u(x, t)$ nos pontos de colocação de Fourier é calculada derivando analiticamente o polinômio trigonométrico. Assim temos

$$u''(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n''(x_j) u_n(t) = \mathbf{D}^2 u_j. \quad (\text{A.8})$$

As expressões para as derivadas $\mathbf{D}$ podem ser encontradas nas Refs. [147, 148]

$$D_{ij}^p = \begin{cases} \frac{p}{x_i - x_j} \left(\frac{(-1)^i c_i}{(-1)^j c_j} D_{ii}^{p-1} - D_{ij}^{p-1} \right), & i \neq j, \\ -\sum_{j=0, j \neq i}^N D_{ij}^{(p)}, & i = j, \end{cases}$$

onde $D_{ij}^{(0)}$ é a matriz identidade. Agora, iremos ilustrar a aproximação da equação de *sine-Gordon* como exemplo da aplicação do método

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin u. \quad (\text{A.9})$$

A preparação da equação para a solução numérica requer a introdução de uma variável auxiliar $v = u_t$. Assim, obtemos um sistema de equações de primeira ordem

$$u_t = v, \quad (\text{A.10})$$

$$v_t = u_{xx} - \sin u, \quad (\text{A.11})$$

utilizando a Eq. (A.8) para a derivada segunda em x na equação acima, obtemos uma equação

diferencial para ser integrada no tempo para cada ponto da grade u_j , onde as somas representam multiplicações matriz-vetor, assim podemos escrever

$$\dot{u}_j = v_j, \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{v}_j = \mathbf{D}^2 u_j - \sin u_j. \quad (\text{A.13})$$

Por fim, basta integrarmos no tempo o sistema de equações diferenciais.

Referências Bibliográficas

- [1] Coleman, Aspects of Symmetry, Harvard University, Cambridge University Press, 1988.
- [2] T. Vachaspati, *Kink and Domain Walls - An introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, New York, (2006).
- [3] Lewis Ryder, Quantum Field Theory, University of Kent at Canterbury, Cambridge University Press, 1996.
- [4] Goldstone, J., Salam, A. e Weinberg, S., *Broken Symmetries*, Phys. Rev. 127, 965-970 (1962).
- [5] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge, Cambridge, 1994).
- [6] R. Rajaraman , *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [7] Y.-X. Liu, Chun-E Fu, L. Zhao, and Y.-S. Duan, Phys. Rev. D 80, 065020 (2009).
- [8] Y.-X. Liu, Chun-E Fu, H. Guo, S.-W. Wei, and Z.-H. Zhao, JCAP 1012 (2010) 031.
- [9] Chun-E Fu, Yu-Xiao Liu, Heng Guo, Phys. Rev. D 84, 044036 (2011).
- [10] Yu-Xiao Liu, Heng Guo, Chun-E Fu and Ji-Rong Ren, JHEP 02 (2010) 080.
- [11] D. Bazeia, J. Menezes, and R. Menezes, Phys. Rev. Lett. 91, 241601 (2003).
- [12] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 38, 511 (2005).
- [13] R. Casana, E. S. Carvalho, M. M. Ferreira Jr, Phys. Rev. D 84, 045008 (2011).
- [14] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, Phys. Rev. B 77, 195430 (2008).
- [15] X. Zhou, C. Fang, W. Tsai, and J. Hu, Phys. Rev. B 80, 245317 (2009).

- [16] T. D. Lee, *Examples of four-dimensional soliton solutions and abnormal nuclear states*, Phys. Rep. 23, 254 (1976).
- [17] R. Hobart, Proc. Phys. Soc. Lond. 82, 201 (1963).
- [18] G. H. Derrick J. Math. Phys. 5, 1252 (1964).
- [19] H. Aratyn, L. A. Ferreira e A. H. Zimerman, *Exact static soliton solutions of 3+1-dimensional integrable theory with nonzero Hopf numbers*, Phys. Rev. Lett. 83, 1723 (1999).
- [20] Gerard 't Hooft, Nucl. Phys. B 79, 276 (1974); A. M. Polyakov, JETP Lett. 20, 194 (1974).
- [21] A. A. Belavin e A. M. Polyakov, *Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*, JETP Lett. 22, 245 (1975).
- [22] M. Barriola e A. Vilenkin, *Gravitational Field of a Global Monopole*, Phys. Rev. Lett. 63, 341 (1989). D. Harari e C. Loustó, *Repulsive gravitational effects of global monopoles*, Phys. Rev. D 42, 2626 (1990). I. Cho e A. Vilenkin, *Gravitational field of vacuumless defects*, Phys. Rev. D 59, 063510 (1999). I. Cho e A. Vilenkin, *Gravity of superheavy higher-dimensional global defects*, Phys. Rev. D 68, 025013 (2003).
- [23] C. A. S. Almeida, R. Casana, M. M. Ferreira and A. R. Gomes, Phys. Rev. D 79, 125022 (2009).
- [24] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes e J.C.R.E. Oliveira, Eur. Phys. J. C. 51, 953-962, (2007).
- [25] D. Bazeia, J. D. Dantas, A. R. Gomes, L. Losano e R. Menezes, Phys. Rev. D 84, 045010 (2011).
- [26] M. Andrews, M. Lewandowski, M. Trodden, and D. Wesley, Phys. Rev. D 82, 105006 (2010).
- [27] T. Sugiyama, *Kink-Antikink Collisions in the Two-Dimensional ϕ^4 Model*, Prog. Theor. Physics vol. 61, N^o 5, (1979).
- [28] P. Aninos, S. Oliveira e R. A. Matzner, Phys Rev. D 44, 1147, (1991).
- [29] P. Dorey, K. Mersh, T. Romanczukiewicz e Y. Shnir, Phys. Rev. Lett. 107, 091602, (2011).
- [30] L. M. Widrow, Phys. Rev. D 40, 4 (1989).

- [31] D. K. Campbell, J. F. Shonfeld, C. A. Wingate, *Physica D* 9, 1 (1983).
- [32] M. Peyrard, D.K. Campbell, *Physica D* 9, 33 (1983).
- [33] D.K. Campbell, M. Peyrard, *Physica D* 18, 47 (1986)
- [34] T. Belova and A. Kudryavtsev, *Physica D* 32, 18 (1988).
- [35] A.E. Kudryavtsev, *JETP Lett.* 22, 82 (1975).
- [36] D. K. Campbell, M. Peyrard, P. Sodano, *Physics D* 19, 165 (1986).
- [37] M. A. M. Souza, D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* Vol. 6, No. 1, March 2012.
- [38] Fred, C., Avinash, K. e Uday, S., *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, New Jersey, (2001).
- [39] Morris, J. e Bazeia, D., *Supersymmetry breaking and Fermi balls*, *Phys. Rev. D* 54, 5217-5222, (1996).
- [40] D. Bazeia, L. Losano e J. M. C. Malbouisson, *Phys. Rev. D* 66, 101701, (2002).
- [41] E. B. Bogomol'nyi, *J. Nucl. Phys.* 24, 449 (1977).
- [42] D. Bazeia, J. Menezes e M. Santos, *Complete factorization of equations of motion in Wess-Zumino theory*, *Lett. B* 521, 418-420 (2001).
- [43] R. Jackiw, *Phys. Rev.* 49, 681 (1977)
- [44] Griffiths David J., *Introduction to quantum mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, (1995).
- [45] Leonard I. Schiff, *Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, (1949).
- [46] D. Bazeia e M. M. Santos, *Phys. Lett. A* 217 28 (1996).
- [47] N. Manton e P. Sutcliffe, *Topological Soltions*, Cambridge Universtiy Press, New York, (2004).
- [48] Morse, P. e Feshbach, H., *Methods of Mathematical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [49] M. A. Lohe, *Phys. Rev. D* 20, 3120 (1979).

- [50] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, Chun-E Fu and Y. S. Duan, Phys. Rev. D 80, 065019 (2009); Y. X. Liu, H. T. Li, Z. H. Zhao, J. X. Li and J. R. Ren, JHEP 0910, 091 (2009); I. Oda, Phys. Lett. B 496, 113 (2000);
- [51] R. Rajaraman e E. Weinberg, Phys. Rev. D 11, 2950 (1975); R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett. 42, 200 (1979).
- [52] D. Bazeia, M. J. dos Santos e R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A 208, 84 (1995); D. Bazeia, R. F. Ribeiro e M. M. Santos, Phys. Rev. D 54, 1852 (1996); D. Bazeia, R. F. Ribeiro e M. M. Santos, Phys. Rev. E 54, 2943 (1996).
- [53] Antônio da Silva Inácio, *Defeitos Topológicos em Modelos de Campos Escalares*, Universidade Federal da Paraíba, (2003).
- [54] Carlos Alberto Gomes de Almeida, *Deformação de Defeitos em Modelos de Campos Escalares*, (2004).
- [55] V. M. Pereira, J. M. B. Lopes dos Santos, A. H. Castro Neto, Phys. Rev. B 77, 115109 (2008).
- [56] H. Weigel, J. Phys. Conf. Series, 482 (2014) 012045.
- [57] D. Bazeia, R. Menezes, Phys.Rev. D 84, 125018 (2011).
- [58] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, Phys.Rev. D85, 045005 (2012).
- [59] J. Khoury, B.A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys. Rev. D 64, 123522 (2001); J. Khoury, B.A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt, and N. Turok, ibid. 65, 086007 (2002); J. Khoury, B.A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, ibid. 66, 046005 (2002); A. J. Tolley and N. Turok, ibid. 66, 106005 (2002).
- [60] D. Bazeia, A.S. Lobao, Jr., R. Menezes, Phys.Rev. D 86, 125021 (2012).
- [61] R. Bousso and J. Polchinski, J. High Energy Phys. 06, 006 (2000).
- [62] S. W. Hawking, I. G. Moss, J. M. Stewart, Phys. Rev. D 26, 2681 (1982).
- [63] R. Easther, J. T. Giblin Jr., Lam Hui, E. A. Lim, Phys. Rev. D 80, 123519 (2009).
- [64] J. T. Giblin Jr., Lam Hui, E. A. Lim, I-Sheng Yang, Phys. Rev. D 82, 045019 (2010).

- [65] D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and D. Toledo, J. Phys. A 30, 8157 (1997);
D. Bazeia, H. Boschi-Filho and F. A. Brito, JHEP 9904 (1999) 028.
- [66] A. A. Izquierdo, M. A. G. Leon and J. M. Guilarte, Phys. Rev. D 65, 085012 (2002).
- [67] J. Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. 51 (2003) 1; T. Suzuki, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 30 (1993) 176; M. N. Chernodub, M. I. Polikarpov, in *Confinement, Duality, and Nonperturbative Aspects of QCD*, p. 387; M. N. Chernodub, V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 082002; M. N. Chernodub, K. Ishiguro, A. Nakamura, T. Sekido, T. Suzuki, V.I. Zakharov, PoSLAT2007, 174 (2007); M.N. Chernodub, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov, Phys.Rev.D78, 074021 (2008).
- [68] A. Anabalón, S. Willison, J. Zanelli, Phys.Rev.D77, 044019 (2008); P. Mukherjee, J. Urrestilla, M. Kunz, A. R. Liddle, N. Bevis, M. Hindmarsh, Phys.Rev.D83, 043003 (2011); M. Sakellariadou, Lect.NotesPhys.738, 359 (2008); P.P. Avelino, C.J.A.P. Martins, C. Santos, E.P.S. Shellard, Phys.Rev.Lett. 89, 271301 (2002); Erratum-ibid. 89, 289903 (2002); P.P. Avelino, L. Sousa, Phys.Rev.D83, 043530 (2011).
- [69] J.C.Y. Teo and C.L. Kane, Phys. Rev. B 82, 115120 (2010); M.A. Silaev and G.E. Volovik, J. Low Temp. Phys, 161, 460 (2010); T. Fukui and T. Fujiwara, *Z2 index theorem for Majorana zero modes in a class D topological superconductor*, arXiv:1009.2582; T.Sh. Misirpashaev and G.E. Volovik, Physica, B 210, 338 (1995); G.E. Volovik, Pis'ma ZhETF 93, 69 (2011).
- [70] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B 61, 45 (1973).
- [71] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 125, 136 (1983); V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 125, 139 (1983); E.J. Squires, Phys. Lett. B 167, 286 (1986); M. Visser, Phys. Lett. B 159, 22 (1985); K. Akama, Lect. Notes Phys. 176, 267 (1982); I. Antoniadis, Phys. Lett. B 246, 377 (1990).
- [72] D. Finkelstein, J. Math. Phys. 7 (1966) 1218.
- [73] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. D 62, 046008 (2000).
- [74] M. Gremm, Phys. Rev. D 62, 044017 (2000).
- [75] A. Kehagias and K. Tamvakis, Mod. Phys. Lett. A 17, 1767 (2002).

- [76] C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, Nucl. Phys. B 581, 309 (2000).
- [77] A. Campos, Phys. Rev. Lett. 88, 141602 (2002).
- [78] R. Guerrero, A. Melfo and N. Pantoja, Phys. Rev. D 65, 125010 (2002).
- [79] D. Bazeia, C. Furtado and A. R. Gomes, J. Cosmol. Astropart. Phys. 0402 (2004) 002.
- [80] D. Bazeia and A. R. Gomes, J. High Energy Phys. 05 (2004) 012.
- [81] D. Bazeia, F. A. Brito and A. R. Gomes, J. High Energy Phys. 0411 (2004) 070.
- [82] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev and M. Minamitsuji, Rep. Prog. Phys. 73, 066901 (2010).
- [83] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. B 470, 52 (1999). R. Gregory, Phys. Rev. Lett. 84, 2564 (2000). T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. 85, 240 (2000). M. Giovannini, H. Meyer, and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B 619, 615 (2001). C. Ringeval, P. Peter, and J. P. Uzan, Phys. Rev. D 71, 104018 (2005). M. Giovannini, H. Meyer, M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B 619 (2001) 615. O. Corradini and Z. Kakushadze, Phys. Lett. B 506, 167 (2001).
- [84] Y. Kodama, K. Kokubu, N. Sawado, Phys. Rev. D 79, 065024 (2009). Y. Brihaye, T. Delsate, N. Sawado, Y. Kodama, Phys. Rev. D 82, 106002 (2010).
- [85] O. Corradini, A. Iglesias, Z. Kakushadze and P. Langfelder, Phys. Lett. B 521, 96 (2001). M. Giovannini, Phys. Rev. D 75, 064023 (2007). Z. Horvath, L. Palla, Nucl. Phys. B 142 (1978) 327. G.W. Gibbons, P.K. Townsend, Class. Quant. Grav. 23 (2006) 4873.
- [86] E. B. Bogomolny, Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 449; Yad. Fiz. 24 (1976) 861. M. K. Prasad, C. M. Sommerfeld, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 760.
- [87] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, Mod. Phys. Lett. B19, 801 (2005).
- [88] R. Casana, A.R. Gomes, R. Menezes, F.C. Simas, Phys. Lett. B 730 (2014) 8.
- [89] R. Casana, A. R. Gomes, G. V. Martins, F. C. Simas, Phys. Rev. D 89, 085036 (2014).
- [90] C. Ringeval, P. Peter, and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D 65, 044016 (2002).
- [91] R. Davies and D. P. George, Phys. Rev. D 76, 104010 (2007).
- [92] W.T. Cruz, A.R. Gomes, C.A.S. Almeida, Eur.Phys.J. C71, 1790 (2011).

- [93] D. Bazeia, F. A. Brito, Phys. Rev. Lett 84, 1094 (2000).
- [94] A. de Souza Dutra, M. Hott, C. A. S. Almeida, Europhys. Lett. 62, 8 (2013).
- [95] D. Bazeia, C. B. Gomes, L. Losano e R. Menezes, Phys. Lett. B 633, 415, (2006).
- [96] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, Class. Quant. Grav. **26**, 163001 (2009).
- [97] B. Wang, Chi-Yong Lin, C. Molina, Phys. Rev. D **70**, 064025 (2004).
- [98] S. Hashi, A. Sandovici, H.S.V. de Snoo, H. Winkler, Acta Math. Hungar, 111, 81 (2006).
- [99] C. R. Frye, C. Efthimiou, “ *Spherical harmonics in p dimensions*”, arXiv: 1205.3548 [math.CA].
- [100] J. S. Avery, Journ. Comp. Appl. Math. 233 (2010) 1366.
- [101] J. S. Avery, “*Hyperspherical Hermonics: Applications in Quantum Theory*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [102] D. Bazeia, L. Losano, C. Wotzasek, Phys.Rev. D 66 (2002) 105025.
- [103] K. Akama, *Gauge Theory and Gravitation*, Proceedings, edited by K. Kikkawa, N. Nakanishi, and H. Nariai, Springer-Verlag, Nara, Japan (1983).
- [104] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999).
- [105] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D 13, 3398 (1976).
- [106] M. Alford, J.A. Bowers, and K. Rajagopal, Phys. Rev. D 63, 074016 (2001).
- [107] M. G. Alford, K. Rajagopal, T. Schaefer, A. Schmitt, Rev.Mod.Phys.80, 1455 (2008).
- [108] R.Casalbuoni, R. Gatto, M. Mannarelli and G. Nardulli, Phys. Lett. B 511, 218 (2001);
- [109] R.Casalbuoni, R. Gatto, M. Mannarelli and G. Nardulli, Phys.Rev. D66 (2002) 014006.
- [110] F. Sannino, N. Marchal, W. Schäfer, Phys.Rev. D66 (2002) 016007.
- [111] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, and N. Kaloper, Phys. Rev. Lett. 84, 586 (2000);
- [112] N. Kaloper, Phys. Lett. B 474, 269 (2000).

- [113] P.-M. Ho and Y.-T. Yeh, Phys. Rev. Lett. 85, 5523 (2000).
- [114] O. Bertolami and L. Guisado, J. High Energy Phys. 12, 013 (2003).
- [115] R.L. Dobrushin, Theor. Prob. Appl.17, 582 (1972).
- [116] C. Borgs, Commun. Math. Phys.96, 251 (1984).
- [117] M.A. Shifman and M.B. Voloshin, Phys. Rev. D 57, 2590 (1998).
- [118] A. de Souza Dutra, A. C. Amaro de Faria Jr, and M. Hott, Phys. Rev. D 78, 043526 (2008).
- [119] C. Nohl, Phys. Rev. D12, 1840 (1975).
- [120] H. deVega, Phys. Rev. D18, 2932 (1978).
- [121] R. Jackiw and P. Rossi, Nucl. Phys. B190, 681 (1981).
- [122] G. D. Starkman, D. Stojkovic, T. Vachaspati, Phys.Rev.D63, 085011 (2001).
- [123] D. Stojkovic, Int. J. Mod. Phys. A16, 1034 (2001).
- [124] G. Starkman, D. Stojkovic, T. Vachaspati, Phys.Rev.D65, 065003 (2002).
- [125] E. Witten, Nuclear Physics B 249, 557 (1985).
- [126] I. Oda, Phys.Rev. D62 (2000) 126009.
- [127] M. Gogberashvili, D. Singleton, Phys.Rev. D69 (2004) 026004.
- [128] E. R. Bezerra de Mello, J. High Energy Phys. 06 (2004) 016.
- [129] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, C. Rasinariu, Supersymmetric Quantum Mechanis, World Scient. Publ., Singapore, 2011.
- [130] N. Fernández-García, O. Rosas-Ortiz, Int. J. Theor. Phys. 50, 2057 (2011).
- [131] R. A. C. Correa, A. de Souza Dutra, M. B. Hott, Class.Quant.Grav. 28, 155012 (2011).
- [132] Hai-Tao Li, Yu-Xiao Liu, Zhen-Hua Zhao, Heng Guo, Phys. Rev. D83, 045006 (2011).
- [133] Qun-Ying Xie, Jie Yang, Li Zhao, Phys. Rev. D 88, 105014 (2013).
- [134] J. Garriga e V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B 458, 219 (1999).

- [135] D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes, Phys. Lett. B 668, 246, (2008).
- [136] B. A. Malomed, Physica D: Nonlinear Phenomena 15, 385 (1985).
- [137] D. W. McLaughlin and A. C. Scott, Phys. Rev. A 18, 1652 (1978).
- [138] M. A. Amin, Phys. Rev. D 87 (2013)
- [139] M. A. Amin, E. A. Lim, I-Sheng Yang, Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 224101
- [140] M. A. Amin, E. A. Lim, I-Sheng Yang, Phys. Rev. D 88 (2013) 105024.
- [141] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B 458, 209 (1999);
T. Chiba, T. Okabe, and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D 62, 023511 (2000).
- [142] Y. Takamizu and K. Maeda, Phys. Rev. D 70, 123514 (2004).
- [143] Boyd, Jonh P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Edition (revised). 2^o
ed. Dover Books on Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (2001).
- [144] Hesthaven, Jan S.; Gottlieb, Sigal; Gottlieb, David. Spectral Methods for Time-
Dependent Problems. Cambridge University Press, New York (2007).
- [145] Shen, Jie; Tang, Tao; Wang, Li-Lian. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Ap-
plications. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin (2011).
- [146] Canuto, C.; Quarteroni, A.; Hussaini, M.; Zang, T. Spectral Methods: Fundamentals in
Single Domains. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin (2006).
- [147] Fornberg, Bengt. A Practical Guide to Pseudospectral Methods. Cambridge University
Press, New York (1996).
- [148] Kopriva, David. Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations: Al-
gorithms for Scientists and Engineers. Springer Science, Business Media B.V. (2009).