



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

CHRISTIAN DANNER RAMOS DE CARVALHO

**MODELAGEM E ALGORITMOS DE CONTROLE ROBUSTO
NEURO-ADAPTATIVO PARA FOGUETES DE COMBUSTÍVEL
SÓLIDO**

**ESTUDO DE CASO: CONTROLADOR BASEADO EM MODELO DE REFERÊNCIA COM RNA-RBF PARA
CONTROLE DE ALTITUDE**

SÃO LUÍS - MA

2024

Christian Danner Ramos de Carvalho

Modelagem e Algoritmos de Controle Robusto Neuro-Adaptativo para Foguetes de Combustível Sólido

Estudo de Caso: Controlador Baseado em Modelo de Referência com RNA-RBF para Controle de Altitude

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeroespacial (Área de Concentração: Ciências e Tecnologias Aeroespaciais), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Aeroespacial.

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeroespacial

Orientador: Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto

São Luís - MA

2024

Christian Danner Ramos de Carvalho

Modelagem e Algoritmos de Controle Robusto Neuro-Adaptativo para Foguetes de Combustível Sólido

Estudo de Caso: Controlador Baseado em Modelo de Referência com RNA-RBF para Controle de Altitude/ Christian Danner Ramos de Carvalho. – São Luís - MA, 2024-
135 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeroespacial, 2024.

1. Controle Robusto. 2. Foguete. 3. Controle Adaptativo de Referência de Modelo. 4. Controle Neuro-Adaptativo de Referência de Modelo. 5. Redes Neurais de Funções de Base Radial. I. da Fonseca Neto, João Viana. II. UFMA. III. PPGAERO.

CDU XX:XXX:XXX.X

Christian Danner Ramos de Carvalho

Modelagem e Algoritmos de Controle Robusto Neuro-Adaptativo para Foguetes de Combustível Sólido

Estudo de Caso: Controlador Baseado em Modelo de Referência com RNA-RBF para Controle de Altitude

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeroespacial (Área de Concentração: Ciências e Tecnologias Aeroespaciais), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Aeroespacial.

Dissertação submetida. São Luís - MA, ____ de _____ de 2024:

Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto
Orientador

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza
Membro Interno

Prof. Dr. Alex Oliveira Barradas Filho
Membro Interno

Prof. Dr. Antonio da Silva Silveira
Membro Externo

São Luís - MA
2024

À minha mãe por tudo que ela fez, vem fazendo e ainda fará por mim.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pela força e sabedoria para superar os desafios dessa jornada. À minha mãe, Eva Cruz Ramos, meu exemplo de vida e dedicação, que sempre me apoiou incondicionalmente e me ensinou o valor da perseverança. À minha irmã, Eva Alinne, pelo carinho, suporte e por acreditar em mim em todos os momentos.

Expresso minha profunda gratidão ao meu orientador, professor Dr. João Viana da Fonseca Neto, por sua orientação competente, paciência e apoio ao longo deste trabalho. Seu conhecimento e conselhos foram fundamentais para a conclusão desta dissertação.

Agradeço ao meu amigo de trabalho, Jonas de Jesus Barros, por sempre me ajudar e me incentivar, tornando essa caminhada mais leve e motivadora. Ao meu amigo de trabalho, Antônio Vitor Rodrigues Pereira, pelo apoio e colaboração essencial nesta jornada.

À Força Aérea Brasileira, sou profundamente grato pela oportunidade concedida e pela liberação parcial do serviço militar, permitindo-me assistir às aulas e me dedicar aos estudos. Agradeço também a todos os seus colaboradores civis e militares pelo suporte prestado.

Aos colegas discentes e docentes do Programa de Pós-graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal do Maranhão, agradeço pela convivência, troca de conhecimentos e apoio durante este período de estudos. Aos colegas do Laboratório de Controle de Processos e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, minha gratidão pelo ambiente de aprendizado e colaboração.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meu sincero muito obrigado.

“Não sei o que posso parecer para o mundo, mas, para mim mesmo, pareço ter sido apenas como um menino brincando à beira-mar e me divertindo de vez em quando, encontrando uma pedra mais lisa ou uma concha mais bonita do que o normal, enquanto o grande oceano da verdade estava totalmente desconhecido diante de mim.”
(Isaac Newton)

Resumo

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento de uma metodologia para projetar controladores robustos neuro-adaptativos, baseados em um modelo de referência associado a uma rede neural artificial de funções de base radial (RNA-FBR) para foguetes suborbitais de combustível sólido. A modelagem e os algoritmos de controle robusto neuro-adaptativo para esses foguetes são apresentados. Inicialmente, a metodologia é avaliada para um controlador robusto baseado em um modelo de referência com RNA-FBR para controle de altitude. O principal objetivo do controle é conseguir suprimir o efeito das incertezas não lineares inerentes ao processo. O método envolve modelagem matemática e computacional, juntamente com o projeto de controladores adaptativos para análise de estabilidade e desempenho. Os controladores considerados incluem técnicas com MRAC (*Model Reference Adaptive Control*), e uma abordagem de MRNAC (*Model Reference Neuro-Adaptive Control*). A análise, realizada por meio de simulações em computador, avalia o comportamento de cada controlador em relação à estabilidade e ao desempenho do sistema. O objetivo final é selecionar o controlador mais adequado para o foguete suborbital, levando em conta as restrições do sistema, os requisitos de desempenho robusto, a estabilidade robusta e a adaptabilidade ideal. Essa pesquisa promove o desenvolvimento de controladores adaptativos para foguetes suborbitais, com possíveis aplicações em pesquisa científica e lançamentos comerciais.

Palavras-chaves: Controle Robusto. Foguete. Controle Adaptativo de Referência de Modelo. Controle Neuro-Adaptativo de Referência de Modelo. Redes Neurais de Funções de Base Radial.

Abstract

This dissertation presents the development of a methodology for designing robust neuro-adaptive controllers, based on a reference model associated with an artificial neural network of radial basis functions (ANN-RBF) for solid fuel suborbital rockets. The modelling and neuro-adaptive robust control algorithms for these rockets are presented. Initially, the methodology is evaluated for a robust controller based on a reference model with ANN-RBF for altitude control. The main objective of the control is to be able to suppress the effect of non-linear uncertainties inherent in the process. The method involves mathematical and computational modelling, together with the design of adaptive controllers for stability and performance analysis. The controllers considered include MRAC (Model Reference Adaptive Control) techniques and an MRNAC (Model Reference Neuro-Adaptive Control) approach. The analysis, carried out using computer simulations, evaluates the behaviour of each controller in relation to system stability and performance. The final objective is to select the most suitable controller for the suborbital rocket, taking into account the system constraints, robust performance requirements, robust stability and optimal adaptability. This research promotes the development of adaptive controllers for suborbital rockets, with possible applications in scientific research and commercial launches.

Keywords: Robust Control. Rocket. Model Reference Adaptive Control. Model Reference Neuro-Adaptive Control. Radial Basis Functions Neural Networks.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Função candidata de Lyapunov e sua derivada.	43
Figura 2 – Vários sistemas avançados de controle de voo foram testados na aeronave experimental X-15.	46
Figura 3 – Linha do tempo do controle neuro-adaptativo robusto.	48
Figura 4 – Função de Base Radial Gaussiana	58
Figura 5 – Arquitetura de uma rede neural RBF.	60
Figura 6 – Aproximação de Curva usando RBFN	62
Figura 7 – Função Seno Aproximada por RN-FBR com 20 Neurônios	78
Figura 8 – Arquitetura do Controlador MRNAC	79
Figura 9 – Arquitetura do Controlador MRNAC com Governador de Comando	84
Figura 10 – Resposta do sistema controlado (DMRNAC)	102
Figura 11 – Erro de rastreamento do modelo de referência (DMRNAC)	102
Figura 12 – Erro de estimação da rede RBF (DMRNAC)	103
Figura 13 – Métricas de desempenho da rede RBF (DMRNAC)	103
Figura 14 – Rastreamento mais rápido do sinal de referência (DMRNAC)	104
Figura 15 – Resposta do sistema controlado (IMRNAC)	105
Figura 16 – Erro de rastreamento do modelo de referência (IMRNAC)	105
Figura 17 – Erro de estimação da rede RBF (IMRNAC)	106
Figura 18 – Métricas de desempenho da rede RBF (IMRNAC)	106
Figura 19 – Rastreamento mais rápido do sinal de referência (IMRNAC)	107
Figura 20 – Interface Gráfica Simulador DMRNAC	108
Figura 21 – Resposta do controlador DMRNAC com FK (1)	109
Figura 22 – Resposta do controlador DMRNAC com FK (2)	110
Figura 23 – Resposta do controlador DMRNAC com FK (3)	110
Figura 24 – Resposta do controlador DMRNAC com LQR e FK (1)	111
Figura 25 – Resposta do controlador DMRNAC com LQR e FK (2)	111
Figura 26 – Função candidata de Lyapunov DMRNAC	113
Figura 27 – Derivada da função candidata de Lyapunov DMRNAC	113
Figura 28 – Função candidata de Lyapunov IMRNAC	114
Figura 29 – Derivada da função candidata de Lyapunov IMRNAC	114

Lista de tabelas

Tabela 1	– Principais equações do controle DMRNAC	82
Tabela 2	– Métricas de avaliação da rede RBF no controle DMRNAC	104
Tabela 3	– Métricas de avaliação da rede RBF no controle IMRNAC	107
Tabela 4	– Parâmetros do controle por LQR	112
Tabela 5	– Parâmetros do Foguete	127

Lista de abreviaturas e siglas

AND	<i>Adaptive Neural Dynamics</i> (Dinâmica Neural Adaptativa)
ANN-RBF	<i>Artificial Neural Network of Radial Basis Function</i> (Rede Neural Artificial de Função de Base Radial)
CG	Centro de Gravidade
CP	Centro de Pressão
DMRNAC	<i>Direct Model Reference Neuro-Adaptive Control</i> (Controle Neuro-Adaptativo de Referência de Modelo Direto)
FK	Filtro de Kalman
IMRNAC	<i>Indirect Model Reference Neuro-Adaptive Control</i> (Controle Neuro-Adaptativo de Referência de Modelo Indireto)
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i> (Linear Quadrático Gaussiano)
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Linear Quadrático)
LTI	<i>Linear Time Invariant</i> (Linear Invariante no Tempo)
MAE	<i>Mean Absolute Error</i> (Erro Absoluto Médio)
MAPE	<i>Mean Absolute Percentage Error</i> (Erro Percentual Absoluto Médio)
MASV	<i>Multiple Actuator Stage Vectoring</i> (Vetorização de Estágio de Múltiplos Atuadores)
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i> (Instituto de Tecnologia de Massachusetts)
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> (Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas)

MLP	<i>Multi-Layer Perceptron</i> (Perceptron Multicamadas)
MRAC	<i>Model Reference Adaptive Control</i> (Controle Adaptativo de Referência de Modelo)
MRNAC	<i>Model Reference Neuro-Adaptive Control</i> (Controle Neuro-Adaptativo de Referência de Modelo)
M-MRAC	<i>Modified Model Reference Adaptive Control</i> (Controle Adaptativo de Referência de Modelo Modificado)
MPC	<i>Model Predictive Control</i> (Controle Preditivo de Modelo)
MSE	<i>Mean Squared Error</i> (Erro Quadrático Médio)
NN	<i>Neural Network</i> (Rede Neural)
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
RBF	<i>Radial Basis Function</i> (Função de Base Radial)
RNA	Rede Neural Artificial
RNA-FBR	Rede Neural Artificial de Funções de Base Radial
RN-FBR	Rede Neural de Funções de Base Radial
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i> (Raiz do Erro Quadrático Médio)
RMS	<i>Root Mean Square</i> (Raiz Quadrada Média)
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo
SLVT	Sistema Linear Variante no Tempo
SLS	<i>Space Launch System</i> (Sistema de Lançamento Espacial)
TSS	<i>Tethered Satellite System</i> (Sistema de Satélite Acoplado)

TVC	<i>Thrust Vector Control</i> (Controle Vetorial de Empuxo)
UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i> (Veículo Aéreo Não Tripulado)
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado
VLR	Veículo de Lançamento Reutilizável
VLS	Veículo Lançador de Satélites
VTOL	<i>Vertical Take-Off and Landing</i> (Decolagem e Aterrissagem Vertical)
ZOH	<i>Zero Order Holder</i> (Segurador de Ordem Zero)

Lista de símbolos

CG	Centro de gravidade.
CP	Centro de pressão.
$\overline{SM}$	<i>Static Margin</i> .
$\overline{X}_{CP}$	Distância entre a Ponta da Ogiva e o Centro de Pressão.
$\overline{X}_{CG}$	Distância entre a Ponta da Ogiva e o Centro de Gravidade.
D_{ref}	Diâmetro de referência do foguete.
m	Massa do foguete.
h_z	Posição do foguete no eixo Z.
$v_z, \dot{h}_z$	Velocidade do foguete no eixo Z.
$\dot{v}_z$	Aceleração do foguete no eixo Z.
C_d	Coefficiente de arrasto.
S	Área da seção frontal do foguete.
ρ	Densidade do ar.
T	Empuxo máximo.
$D(v)$	Força de arrasto aerodinâmico.
g	Aceleração da gravidade.
c_1	Constante aerodinâmica 1.
c_2	Constante aerodinâmica 2.
θ	Ângulo de elevação.
ϕ	Ângulo de rotação.
δ	Ângulo de deflexão da tubeira do motor.
A	Matriz de estado do sistema contínuo.
B	Matriz de entrada do sistema contínuo.

C	Matriz de saída do sistema contínuo.
D	Matriz de transmissão direta do sistema contínuo.
Λ	Matriz de eficácia do controle.
F	Matriz de estado do sistema contínuo.
G	Matriz de entrada do sistema contínuo.
H	Matriz de saída do sistema contínuo.
J	Matriz de transmissão direta do sistema contínuo.
F_d	Matriz de estado do sistema discreto.
G_d	Matriz de entrada do sistema discreto.
$w(k)$	Ruído de processo.
$\vartheta(k)$	Ruído de medição.
R_w	Matriz de covariância do ruído de processo.
R_ϑ	Matriz de covariância do ruído de medição.
$L(k)$	Ganho de Kalman (Estimação Ótima).
$\bar{x}(k)$	Estimativa de estado (antes da medição).
$\hat{x}(k)$	Estimativa de estado (depois da medição).
$M(k)$	Matriz de covariância do erro de estimativa (antes da medição).
$P(k)$	Matriz de covariância do erro de estimativa (depois da medição).
σ_w	Desvio padrão do ruído de posição (algoritmo FK).
σ_s	Desvio padrão do ruído de velocidade (algoritmo FK).
σ_ϑ	Desvio padrão do ruído de medição (algoritmo FK).
σ_w^2	Variância do ruído de posição (algoritmo FK).
σ_s^2	Variância do ruído de velocidade (algoritmo FK).
σ_ϑ^2	Variância do ruído de medição (algoritmo FK).
Q_K	Matriz de covariância do ruído de processo (algoritmo FK).
R_K	Matriz de covariância do ruído de medição (algoritmo FK).

x_K	Estimativa de estado (algoritmo FK).
P_K	Matriz de covariância do erro de estimativa (algoritmo FK).
K	Ganho de Kalman (algoritmo FK).
z	Esperança da saída do sistema (algoritmo FK).
e_K	Erro de predição entre o estado real e a estimativa (algoritmo FK).
$x(t)$	Vetor de estado do sistema.
$x_m(t)$	Vetor de estado do modelo de referência.
$x_{m_i}(t)$	Vetor de estado do modelo de referência inicial.
y	Saída do sistema.
y_m	Saída do modelo de referência.
$r(t)$	Sinal de referência.
$r_v(t)$	Sinal de referência total.
$u(t)$	Entrada de controle.
$u_n(t)$	Entrada de controle nominal.
$u_a(t)$	Entrada de controle adaptativo.
$u_t(t)$	Entrada de controle total.
$I_{n \times n}$	Matriz identidade de ordem n .
K_1	Ganho de realimentação de estados.
K_2	Ganho de alimentação direta.
A_m	Matriz de estado do sistema nominal.
B_m	Matriz de entrada do sistema nominal.
$\Delta(x)$	Incerteza não linear.
$\Phi(x)$	Vetor de funções de base.
$\xi(x)$	Perturbação no sistema (ruído de processo).
$\epsilon(x)$	Erro residual.
$\dot{\Psi}$	Dinâmica dos estados do governador de comando.

Ψ	Vetor de estados do governador de comando.
λ	Fator de recuperação de desempenho.
$g(t), v(t)$	Vetor de saída do governador de comando.
G_{gc}	Matriz do sinal governador de comando.
Ω	Matriz Omega do governador de comando.
Q_{lyap}	Matriz Q simétrica definida positiva.
$V(x)$	Função candidata de Lyapunov.
$\dot{V}(x)$	Derivada da função candidata de Lyapunov.
P	Matriz P solução da Equação Algébrica de Lyapunov.
$\Theta(x)$	Vetor de funções de base radial.
n	Número de neurônios na RNA.
b	Limite do domínio compacto D .
c	Distância entre os centros dos neurônios.
d_{max}	Distância máxima entre os centros dos neurônios.
$\widehat{W}$	Vetor de estimação dos pesos.
$\widetilde{W}$	Vetor do erro de estimação dos pesos.
$\dot{\widehat{W}}$	Dinâmica de estimação dos pesos (adaptação).
e	Erro de rastreamento do estado.
$\dot{e}$	Dinâmica do erro de rastreamento do estado.
γ	Taxa de aprendizagem (escalar).
Γ	Taxa de aprendizagem (vetorial).
σ	Fator de modificação sigma.
k	Tempo de simulação.
ft	Tempo total de simulação.
R^2	Coefficiente de Determinação.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	3
1.2	Objetivos	4
1.2.1	Objetivo Geral	4
1.2.2	Objetivos Específicos	4
1.3	Organização da Dissertação	5
2	ESTADO DA ARTE	7
2.1	Controle Adaptativo	7
2.2	Controle de Foguetes por TVC	9
I	PREPARAÇÃO DA PESQUISA	12
3	REFERENCIAL TEÓRICO	13
3.1	Dinâmica de Foguetes	13
3.1.1	Modelo Não Linear de um Foguete Suborbital	15
3.2	Sistemas Dinâmicos	17
3.2.1	Sistemas de Controle Robusto	19
3.3	Linearização de Sistemas Não-Lineares	20
3.4	Estimação Ótima	22
3.4.1	Método dos Mínimos Quadrados	23
3.4.2	Filtro de Kalman	24
3.5	Análise de Controle no Espaço de Estados	29
3.5.1	Autovalores de uma Matriz	29
3.5.2	Controlabilidade	29
3.5.3	Observabilidade	31
3.6	Projeto de Controle no Espaço de Estados	32
3.6.1	Alocação de Polos	33
3.6.2	Observadores de Estados	36
3.6.2.1	Observador de Estado de Ordem Plena	37
3.6.2.2	Condição Necessária e Suficiente para Observação de Estado	38
3.6.2.3	Determinação da Matriz de Ganho K do Observador com a Fórmula de Ackermann	38
3.6.3	Regulador Quadrático Linear	39
3.7	Teorema de Estabilidade de Lyapunov	42
3.7.1	Teorema de Lyapunov para SLITs	43

3.7.2	Lema de Barbalat	44
3.8	Controle Adaptativo	45
3.8.1	Controlador Adaptativo MRAC	49
3.9	Controlador Robusto Adaptativo	53
3.9.1	Modificações de Escape	55
3.9.1.1	Modificação- σ	56
3.10	Controle Neural	56
3.10.1	Funções de Base	57
3.10.2	Função de Base Radial	58
3.10.3	Rede Neural de Funções de Base Radial	59
3.10.4	Teorema da Aproximação Universal	61
3.10.5	Métricas de Avaliação	63
3.11	Recuperação de Desempenho	64
3.12	Controle Adaptativo Baseado em Aproximação	65
4	METODOLOGIA	67
II	PROPOSTA	70
5	CONTROLADOR ADAPTATIVO MRAC	71
5.1	Linearização do Modelo Não Linear	71
5.2	Formulação do Problema	71
5.3	Lei de Controle Adaptativo	72
5.4	Erro de Rastreamento do Modelo de Referência	73
5.5	Derivação da Lei de Atualização de Pesos	75
5.6	Estabilidade	76
6	CONTROLADOR NEURO-ADAPTATIVO DIRETO	78
6.1	Formulação do Problema	80
6.2	Algoritmos do Controlador Neuro-Adaptativo Direto	84
7	CONTROLADOR NEURO-ADAPTATIVO INDIRETO	90
7.1	Formulação do Problema	90
7.2	Algoritmos do Controlador Neuro-Adaptativo Indireto	93
III	PARTE FINAL	100
8	RESULTADOS E DISCUSSÕES	101
9	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	115

9.1	Conclusão	115
9.2	Trabalhos Futuros	117
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICES	126
	APÊNDICE A – LINEARIZAÇÃO DO MODELO NÃO LINEAR DO FOGUETE	127
	APÊNDICE B – VERIFICAÇÃO DA CONTROLABILIDADE E OB- SERVABILIDADE DO SISTEMA	129
	APÊNDICE C – ESTIMAÇÃO ÓTIMA DE ESTADOS - ALGO- RITMO DO FILTRO DE KALMAN	130
	ANEXOS	133
	ANEXO A – DERIVAÇÃO DA FUNÇÃO CANDIDATA DE LYA- PUNOV	134

1 Introdução

A área aeroespacial tem vivenciado uma rápida evolução tecnológica nas últimas décadas, impulsionada por uma crescente necessidade de aprimorar a eficiência, segurança e sustentabilidade das operações no espaço aéreo. Nesse contexto, os sistemas de controle são elementos-chave para garantir o desempenho adequado e a operação confiável de diversas aeronaves e veículos espaciais.

O desenvolvimento de veículos aeroespaciais reutilizáveis tem se destacado como uma das principais tendências da indústria espacial. Nesse cenário, os sistemas de controle de reentrada na atmosfera desempenham um papel fundamental para garantir a precisão e segurança do retorno dessas espaçonaves à Terra.

Um veículo de lançamento reutilizável (VLR) é um veículo aeroespacial que pode ter suas peças reutilizadas após o seu lançamento, evitando, assim, o lixo espacial. Esse aspecto positivo, bem como a redução de custos gerada em viagens e missões espaciais, tem promovido o desenvolvimento desses tipos de foguetes. As etapas de reentrada na atmosfera, para a posterior recuperação das peças, são gerenciadas por sistemas de controle de atitude ([ALVES; SICA, 2023](#)), que, por sua vez, têm como objetivo principal minimizar as perturbações de fora do veículo para que ele consiga manter a sua estabilidade ([SAMPAIO, 2006](#)).

Os satélites desempenham um papel crucial em diversas aplicações, desde telecomunicações até monitoramento ambiental. Portanto, garantir o controle preciso dessas espaçonaves em órbita é essencial para otimizar seu desempenho e prolongar sua vida útil. [Ji e Shi \(2023\)](#) propõe uma nova estratégia de controle de velocidade baseada em dinâmica neural adaptativa AND (*Adaptive Neural Dynamics*) para a recuperação do subsatélite estável do sistema de satélite conectado TSS (*Tethered Satellite System*).

Os veículos de decolagem e aterragem vertical VTOL (*Vertical Take-Off and Landing*) têm se destacado por sua capacidade de decolar e pousar sem a necessidade de pistas longas, tornando-os ideais para missões em ambientes urbanos ou regiões remotas. Esses sistemas de controle apresentam desafios únicos devido à sua complexidade operacional. Em um estudo recente [Qu et al. \(2023\)](#) aplica novos modelos de parâmetros de variação linear e métodos MPC (*Model Predictive Control*) a um processo de transição de inclinação com falha de rotor para aeronave elétrica de decolagem e pouso vertical de seis rotores elétricos distribuídos com asa fixa para vôo nivelado, onde dois rotores são inclináveis para gerar um vetor de empuxo variável durante a transição de inclinação de voo pairado para estado estacionário.

As tensões geopolíticas, como a Guerra Russo-Ucraniana, têm impulsionado o desen-

volvimento de tecnologias emergentes para fins de segurança e vigilância. Nesse contexto, os drones e VANTs (Veículos Aéreos Não Tripulados) com aplicações de técnicas de controle sofisticadas, têm ganhado destaque como ferramentas versáteis e estratégicas em operações militares e de inteligência. Segundo [Corrêa \(2023\)](#), desde 2014, forças militares ucraniana vêm combatendo, com o apoio intensificado de VANTs, forças militares e simpatizantes russos, nas regiões que se tornaram independentes da Ucrânia, em especial, em Donetsk. Em função dos atrasos nas entregas de VANTs solicitadas pelo governo ucraniano ao governo estadunidense, os ucranianos desmontaram, converteram e reconfiguraram drones basicamente recreativos para realizar missões de inteligência nas fronteiras.

As aeronaves modernas estão cada vez mais complexas e capazes de realizar manobras avançadas. Os sistemas de controle adaptativo desempenham um papel fundamental ao permitir que as aeronaves se adaptem a mudanças nas condições de voo e atendam aos requisitos de desempenho em tempo real. De acordo com [Yue et al. \(2023\)](#), o controle adaptativo tem sido um tópico bem pesquisado na teoria de controle ao longo de várias décadas. É um método promissor no campo do controle automático de voo, pois pode melhorar o desempenho dos sistemas de controle na presença de parâmetros de modelagem incertos, vários distúrbios externos e não linearidades em um amplo envelope de voo. Tais problemas são frequentemente encontrados no campo dos VANTs. Com o rápido desenvolvimento dos VANTs nos campos militar e civil, vários avanços na teoria de controle de voo adaptativo ajudaram a melhorar o desempenho e a robustez, de modo que as implementações de engenharia agora são possíveis.

No cenário de segurança global, a defesa aeroespacial tem sido uma prioridade para muitas nações. A evolução dos sistemas de defesa com controle multimísseis tem possibilitado respostas mais eficientes e precisas a ameaças aeroespaciais. Em [Gao et al. \(2023\)](#), é realizado um estudo sobre o problema de controle cooperativo de modo deslizante de aprendizado fuzzy distribuído para sistemas de orientação multimísseis não lineares, em seguida, é projetada uma abordagem de controle cooperativo de modo deslizante de aprendizado difuso distribuído.

Diante da rápida evolução tecnológica na área aeroespacial, fica evidente que os sistemas de controle desempenham um papel crucial no aprimoramento do desempenho, segurança e eficiência de aeronaves e veículos espaciais. Pesquisas e análises revelaram a importância do constante investimento em pesquisa e desenvolvimento de tecnologias de controle na área aeroespacial. Através da colaboração entre instituições de ensino, empresas do setor e entidades governamentais, será possível enfrentar os desafios complexos e abraçar as oportunidades proporcionadas pelas inovações em sistemas de controle.

Por meio deste trabalho, busca-se contribuir para o conhecimento e aprimoramento dos sistemas de controle na área aeroespacial, impulsionando o avanço tecnológico e a eficiência nas operações espaciais e aeronáuticas.

1.1 Motivação

O desenvolvimento de foguetes suborbitais representa um desafio fascinante e repleto de possibilidades. A busca pelo controle preciso da altitude dessas poderosas máquinas impulsiona a ciência e a exploração espacial a novos horizontes. Nesse contexto, surge a motivação para a realização deste trabalho de pesquisa.

O objetivo principal é projetar um controlador de altitude eficiente, capaz de garantir a estabilidade e o desempenho desejados em um foguete suborbital de combustível sólido, e que seja robusto, no sentido de ser capaz de suprimir o efeito das incertezas inerentes ao processo.

Um sistema como um foguete suborbital pode estar sujeito a várias fontes de incerteza, que podem afetar o desempenho e a operação do foguete. Alguns tipos comuns de incertezas em um sistema de foguete suborbital incluem:

- **Incertezas de Modelagem:** Modelar com precisão o comportamento do foguete requer conhecimento detalhado de parâmetros como massa, centro de gravidade, arrasto aerodinâmico, empuxo do motor, características da propulsão, entre outros. Incertezas na modelagem desses parâmetros podem levar a erros na previsão do desempenho do foguete;
- **Incertezas Ambientais:** As condições ambientais, como vento, temperatura e pressão atmosférica, podem variar durante o voo do foguete. Essas variações introduzem incertezas no comportamento do foguete, afetando sua trajetória e estabilidade;
- **Incertezas na Carga Útil:** Se o foguete carregar uma carga útil, como instrumentos científicos ou experimentos, as incertezas relacionadas ao funcionamento e ao peso da carga útil podem afetar o equilíbrio e a estabilidade do foguete;
- **Incertezas no Comportamento do Motor:** O desempenho do motor do foguete, incluindo a taxa de queima de combustível, pode variar. Essas variações introduzem incertezas na aceleração e velocidade do foguete;
- **Incertezas Estruturais:** A integridade estrutural do foguete, incluindo os materiais e a construção, pode ser afetada por incertezas. Falhas estruturais podem comprometer a segurança e o sucesso do voo.

A implementação de sistemas de controle adaptativo é uma prática importante para fortalecer a capacidade do foguete de lidar com situações imprevistas e desafios ao longo do voo.

Através da modelagem matemática e computacional, será possível explorar diferentes estratégias de controle, como controle adaptativo por modelo de referência (MRAC)

direto e indireto, e controle neuro-adaptativo por modelo de referência (MRNAC) direto e indireto. A análise minuciosa desses controladores permitirá identificar suas vantagens e limitações, com o intuito de selecionar a melhor abordagem para o controle de altitude.

Além disso, o trabalho contribuirá para avanços no campo da engenharia aeroespacial, abrindo portas para novas aplicações em pesquisas científicas e lançamentos comerciais. Com resultados promissores, o controle eficiente da altitude poderá viabilizar missões mais precisas, coleta de dados mais robusta e aprimoramento das capacidades de lançamento de satélites.

Em última análise, a pesquisa almeja contribuir para o progresso da tecnologia aeroespacial, fomentando descobertas e avanços que ampliem nossos horizontes além da Terra. O futuro da exploração espacial depende de projetos como este, que buscam alcançar novos patamares em precisão, controle e conhecimento.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma metodologia para o projeto de controlador robusto neuro-adaptativo por modelo de referência, para controle de altitude de um foguete suborbital de combustível sólido, utilizando uma rede neural com funções de base radial capaz de suprimir o efeito das incertezas inerentes ao processo.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Obter um modelo matemático para o foguete balístico suborbital a partir das características de projeto do foguete e das condições atmosféricas do momento do lançamento;
- Desenvolver métodos para o projeto de controladores adaptativos através do método direto e indireto, estimando os parâmetros do sistema;
- Desenvolver algoritmos do controlador para futuras aplicações;
- Validar o controlador através de simulações, baseadas em modelos matemáticos e dados reais de foguetes, visando o rastreamento da trajetória nominal e o cancelamento das incertezas inerentes ao processo.

1.3 Organização da Dissertação

Esta dissertação está estruturada em três partes principais, cada uma com seus respectivos capítulos. Abaixo, é apresentada uma visão geral do conteúdo de cada capítulo:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Este capítulo fornece uma visão geral do contexto da pesquisa, introduz a motivação por trás do estudo e estabelece os objetivos. Também são apresentadas as limitações do projeto e a organização da dissertação.
- **Capítulo 2 - Estado da Arte:** Neste capítulo, é explorado o estado da arte no domínio da pesquisa, concentrando-se em tópicos como controle adaptativo e controle de foguetes por TVC.

Parte I - Preparação da Pesquisa

- **Capítulo 3 - Referencial Teórico:** Este capítulo apresenta o referencial teórico para a pesquisa. Aborda conceitos de dinâmica de foguetes, sistemas dinâmicos, modelagem matemática de sistemas de controle e análise de controle no espaço de estados. Também explora tópicos como incertezas em sistemas dinâmicos, estimação ótima, projeto de controle no espaço de estados e controle adaptativo.
- **Capítulo 4 - Metodologia:** Neste capítulo é descrito o passo a passo da metodologia adotada neste trabalho seguindo uma abordagem estruturada para projetar e avaliar um controlador neuro-adaptativo para um foguete suborbital de combustível sólido, tendo como principais etapas: Obtenção de um Modelo Não-Linear do Foguete Suborbital, Linearização por Expansão de Série de Taylor, Criação de Incerteza com Parâmetros Não Lineares e Variantes no Tempo, Implementação de uma Rede Neural Artificial, Cálculo dos Ganhos da Lei de Controle Nominal, Cálculo da Lei de Adaptação, Cálculo do Sinal de Correção, Implementação de Algoritmos e Pseudo-códigos, Simulações e Análises.

Parte II - Proposta

- **Capítulo 5 - Projeto do Controlador Adaptativo MRAC:** Neste capítulo, é descrito o projeto do controlador adaptativo MRAC e sua aplicação à pesquisa. São discutidos tópicos como a linearização do modelo não linear, a formulação do problema, a lei de controle adaptativo, erro real do sistema, a lei de atualização dos pesos e a estabilidade do sistema.
- **Capítulo 6 - Projeto do Controlador Neuro-Adaptativo Direto:** Este capítulo explora o projeto do controlador neuro-adaptativo direto, abordando a formulação do

problema e detalhes do desenvolvimento dos algoritmos do controlador e simulador DMRNAC.

- **Capítulo 7 - Projeto do Controlador Neuro-Adaptativo Indireto:** Neste capítulo, é discutido o projeto do controlador neuro-adaptativo indireto, abordando a formulação do problema e detalhes do desenvolvimento dos algoritmos do controlador e simulador IMRNAC.

Parte III - Parte Final

- **Capítulo 8 - Resultados e Discussões:** Este capítulo apresenta os resultados das simulações dos algoritmos desenvolvidos e respectivas discussões no âmbito da pesquisa.
- **Capítulo 9 - Conclusão e Trabalhos Futuros:** Neste capítulo é apresentada a conclusão da pesquisa e trabalhos futuros relacionados com o tema abordado.

2 Estado da Arte

A exploração espacial sempre foi um dos grandes desafios enfrentados pela humanidade. E, dentre as inúmeras tecnologias cruciais para o sucesso das missões espaciais, os sistemas de controle para foguetes ocupam um papel central. O controle preciso e eficiente dessas poderosas máquinas é essencial para garantir trajetórias precisas, economia de combustível e, acima de tudo, a segurança tanto das missões tripuladas como das não tripuladas.

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um panorama abrangente do estado da arte em sistemas de controle para foguetes, com enfoque especial no controle neuroadaptativo de referência de modelo MRNAC. O TVC (*Thrust Vector Control*) é o método de controle que será que sugerido, e que se baseia no ajuste direcionado do vetor de empuxo, permitindo uma gama de vantagens significativas em relação aos sistemas de controle convencionais.

Ao longo deste estudo, serão abordados os princípios fundamentais dos sistemas de controle para foguetes, destacando suas principais características e desafios enfrentados. Serão discutidos os métodos tradicionais de controle utilizados até o momento e suas limitações.

Adicionalmente, serão apresentados os avanços recentes e as pesquisas mais relevantes no campo dos sistemas de controle para foguetes, demonstrando como a tecnologia tem evoluído ao longo do tempo e as inovações que têm impulsionado a exploração espacial. Por fim, esta dissertação almeja contribuir para o avanço contínuo dos sistemas de controle para foguetes. Através desse estudo, espera-se fomentar o interesse em pesquisas futuras e inspirar novas soluções para os desafios da Engenharia Aeroespacial, contribuindo para o progresso da humanidade na busca por explorar as fronteiras do espaço infinito.

2.1 Controle Adaptativo

O controle adaptativo é uma área de pesquisa ativa no campo da engenharia de controle, especialmente em sistemas não lineares. O objetivo do controle adaptativo é projetar controladores que possam se ajustar automaticamente às mudanças e incertezas do sistema em tempo real.

Em [Yue et al. \(2023\)](#), os autores propõem um sistema de controle adaptativo baseado em um modelo matemático para a dinâmica de arfagem de uma aeronave não tripulada UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*). O sistema de controle adaptativo é projetado para lidar com incertezas e variações no sistema, permitindo um desempenho de controle

preciso e robusto.

O sistema de controle adaptativo proposto utiliza uma arquitetura de controle L_1 *out-of-loop*, que combina um controlador de realimentação e um controlador adaptativo. O controlador de realimentação fornece um controle básico estável, enquanto o controlador adaptativo ajusta os parâmetros do controlador com base nas informações do sistema em tempo real.

Yue et al. (2023) também introduzem um método de projeção contínua para garantir que os parâmetros adaptativos permaneçam dentro de limites definidos. Além disso, é apresentada uma lei de adaptação baseada em autocorrelação modificada para minimizar o impacto do ruído no processo de adaptação.

Os resultados das simulações e testes de voo mostram que o sistema de controle adaptativo proposto é capaz de fornecer um desempenho de controle preciso e robusto, mesmo na presença de incertezas e variações no sistema. Esses resultados mostram que o controle adaptativo pode ser uma abordagem eficaz para lidar com incertezas e variações em sistemas não lineares, proporcionando um desempenho de controle preciso e robusto.

Em Farsana et al. (2023), é apresentado um estudo sobre o controle adaptativo de sistemas de atuação eletromecânica para veículos de lançamento. O objetivo é superar os principais desafios enfrentados por esses sistemas, como variações nos parâmetros, perturbações e falhas nos sensores. O controle adaptativo proposto utiliza o MRAC, que não requer informações precisas sobre a localização ou amplitude da falha. Além disso, é discutido o uso da regra modificada do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) para o projeto do MRAC. O estudo aborda a modelagem do sistema, incluindo a dinâmica do motor, a dinâmica da carga e a dinâmica do atuador. São apresentados os modelos matemáticos não lineares do sistema e as compensações clássicas para o controle do sistema linear. É mostrado que tanto a compensação clássica quanto o MRAC são capazes de rastrear a saída do modelo não linear do sistema. Além disso, o MRAC demonstra ser tolerante a variações nos parâmetros e falhas nos enrolamentos do motor. Em síntese, o MRAC é utilizado para superar os desafios do sistema, como variações nos parâmetros, perturbações e falhas nos sensores. Os resultados mostram a eficácia do controle proposto.

Em Wang et al. (2013), é proposto um novo esquema de controle tolerante a falhas que combina a estratégia de controle adaptativo MRAC com o método de alocação de controle para lidar com falhas severas nos atuadores, sob a suposição de que a redundância dos atuadores não está mais disponível no sistema com falha. O método de alocação de controle redistribui o sinal de controle para os atuadores restantes com base nas informações de falha. Além de alcançar a alocação de controle, o MRAC garante a estabilidade em malha fechada do sistema, reduzindo a deterioração de desempenho causada pela falha severa e rastreando bem o modelo de referência modificado. O modelo de referência modificado é utilizado para compensar o erro de saturação de entrada. Simulações de um

modelo de veículo lançador de satélites (VLS) são apresentadas para ilustrar a eficácia do esquema proposto.

Nair, Selvaganesan e Lalithambika (2016) apresentam um estudo sobre o controle adaptativo para sistemas de VLS. Os VLS são sistemas instáveis em malha aberta com dinâmicas não lineares e variáveis no tempo. Os autores discutem a modelagem dos sistemas VLS e apresenta duas leis de controle: controle de agendamento de ganho e controle adaptativo MRAC. O controle de agendamento de ganho é utilizado para linearizar o sistema não linear e variável no tempo, enquanto o controle adaptativo MRAC utiliza um modelo de referência para melhorar o desempenho de rastreamento. Também é discutido a verificação de robustez por meio de simulações e compara o desempenho dos controladores propostos. A pesquisa conclui que as técnicas de controle adaptativo podem ser usadas para melhorar a robustez e a segurança dos sistemas de transporte espacial.

Nos recentes desenvolvimentos de pesquisas envolvendo o Controle Adaptativo MRAC, têm sido testemunhados avanços notáveis. Essa área do controle automático tem como objetivo principal projetar sistemas de controle capazes de se adaptar a mudanças e incertezas nos sistemas dinâmicos que eles controlam. Recentemente, pesquisadores vêm se concentrando em aprimorar algoritmos MRAC para garantir uma adaptação mais rápida e precisa. Isso inclui o desenvolvimento de métodos mais robustos para lidar com incertezas estruturadas e não estruturadas, bem como a integração de técnicas de aprendizado de máquina para melhorar a capacidade de adaptação do controlador. Essas pesquisas têm aplicação em diversas áreas, desde controle de aeronaves não tripuladas até sistemas de controle industrial, onde a capacidade de se adaptar a mudanças nas condições do sistema é fundamental para o desempenho, estabilidade e segurança. À medida que os sistemas controlados se tornam mais complexos, o MRAC continua a ser uma área ativa de pesquisa, proporcionando soluções inovadoras para uma ampla gama de aplicações.

2.2 Controle de Foguetes por TVC

Pesquisas recentes investigam a utilização do método TVC para controle de foguetes, como abordado por Nitschke (2023) em sua tese de mestrado. O autor descreve o desenvolvimento de uma ferramenta de simulação numérica em Python para simular a trajetória de um foguete com TVC. O modelo implementa um controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) que ajusta o vetor de empuxo para alcançar uma precisão de $1,55 \times 10^{-5}$ rad na orientação vertical durante o lançamento em condições ideais. O objetivo é estudar o potencial do TVC em foguetes de sondagem, simulando trajetórias de foguetes em diferentes condições de vento, com e sem TVC, para determinar como o TVC afeta a precisão e estabilidade durante o lançamento em qualquer condição. As simulações mostram um aumento na precisão e estabilidade, mas é impossível concluir o aumento

exato devido à verificação limitada e imprecisões no modelo durante o lançamento. O documento também discute a comparação dos resultados com o software OpenRocket e apresenta considerações importantes ao implementar o TVC em um foguete de sondagem. O estudo conclui com especulações sobre o potencial do TVC em futuras missões de foguetes de sondagem e possíveis estudos futuros relacionados.

Em [Stuart e McEnulty \(2023\)](#), é apresentada uma visão geral do Sistema TVC do Estágio Central do Sistema de Lançamento Espacial SLS (*Space Launch System*). O TVC consiste em quatro sistemas hidráulicos independentes, cada um fornecendo energia hidráulica para um motor RS-25 e dois atuadores. O projeto do sistema TVC aproveita componentes herdados do Ônibus Espacial, como os atuadores hidráulicos e as bombas de circulação hidráulica. O estudo também aborda a arquitetura de controle do sistema TVC e o desempenho de voo do Estágio Central do SLS. O sistema TVC utiliza uma combinação de válvulas servo e válvulas de potência para controlar o movimento dos atuadores hidráulicos. O controle de posição dos atuadores é realizado por meio de feedback mecânico e de pressão dinâmica. Além disso, o sistema TVC é projetado para fornecer redundância de controle e energia hidráulica, garantindo a capacidade de controle de vetor de empuxo mesmo em caso de falha de um dos sistemas hidráulicos.

No estudo feito por [Orr et al. \(2023\)](#), o foco principal é no desenvolvimento e validação de modelos que representem com precisão a dinâmica estrutural e as trajetórias de carga associadas aos sistemas de TVC. O modelo tradicional, conhecido como modelo simplex, é uma representação compacta do sistema TVC, válido para uma faixa típica de condições de operação. Esse modelo simplificado é usado em análises de estabilidade linear para avaliar os efeitos da estabilidade do controle de voo e da servoelasticidade global. A pesquisa também apresenta o modelo de vetorização de estágios de múltiplos atuadores MASV (*Multiple Actuator Stage Vectoring*), que complementa a abordagem de corpo reduzido em nível de veículo para acoplar a dinâmica do motor-servo e os modos de flexão global do veículo. O MASV é usado para validar o desempenho do TVC usando dados de teste em condições ambientais e de disparo estático.

O método TVC também é abordado por [Sopegno et al. \(2023\)](#). Os autores apresentam um estudo comparativo sobre o sistema de controle de um lançador sem aletas durante sua fase de ascensão. O objetivo é selecionar o controlador mais adequado para manter a estabilidade do lançador ao longo de sua trajetória. O estudo aborda a técnica TVC como um método eficaz para gerenciar a atitude do lançador durante o voo. São discutidos diferentes tipos de atuadores de gimbal e são apresentados modelos matemáticos e simulações para avaliar o desempenho de diferentes abordagens de controle, como o Regulador Linear Quadrático LQR (*Linear Quadratic Regulator*) e o Regulador Linear Quadrático Gaussiano LQG (*Linear Quadratic Gaussian*).

Nos últimos anos, as pesquisas no campo do TVC têm se destacado significativa-

mente. Com a crescente demanda por sistemas de controle mais eficientes e precisos em aplicações aeroespaciais, o TVC emergiu como uma tecnologia crucial. As investigações recentes nesse campo estão focadas no aprimoramento da capacidade de controle e na otimização do desempenho dos veículos espaciais e mísseis. Pesquisadores têm explorado novos algoritmos de controle, materiais de bocais mais avançados e estratégias de TVC mais eficazes para garantir manobras precisas e estabilidade durante o voo. À medida que as missões espaciais se tornam mais complexas e diversificadas, o TVC continua a evoluir, desempenhando um papel fundamental na garantia de sucesso e segurança em operações aeroespaciais.

Parte I

Preparação da pesquisa

3 Referencial Teórico

Este capítulo apresenta uma revisão abrangente da literatura e os conceitos teóricos fundamentais necessários para o desenvolvimento da pesquisa. O capítulo está estruturado para fornecer uma base sólida sobre a qual a investigação subsequente será construída, abordando aspectos cruciais da dinâmica de foguetes, sistemas dinâmicos, modelagem matemática de sistemas de controle, linearização de sistemas não lineares e análise de controle no espaço de estados.

Também são explorados os conceitos de estabilidade, onde se discute a estabilidade assintótica segundo Lyapunov. A seguir, o capítulo avança para uma análise detalhada de sistemas dinâmicos, com ênfase em sistemas de controle adaptativo, robusto e controle neural. Essas seções são essenciais para entender as complexidades envolvidas no controle de sistemas dinâmicos com incertezas.

Além disso, o capítulo aborda técnicas de estimação ótima, incluindo o método dos mínimos quadrados e o filtro de Kalman, que são fundamentais para a estimativa precisa de estados em sistemas dinâmicos.

3.1 Dinâmica de Foguetes

A margem de estabilidade estática de um foguete é a medida da sua capacidade de manter uma trajetória estável durante o voo. Ela é importante para garantir que o foguete não desvie da sua trajetória pretendida, evitando a perda de controle ou acidentes.

Segundo um estudo feito por [Tun et al. \(2020\)](#), sobre a previsão do coeficiente de estabilidade estática, um foguete é considerado:

- Estaticamente instável se a perturbação manter o foguete fora do equilíbrio.
- Estaticamente estável se pequenas perturbações tendem a trazer o foguete de volta ao equilíbrio.

O centro de gravidade (CG) é o ponto onde o foguete gira quando perturbado. O centro de pressão (CP) é o ponto onde se supõe que as forças aerodinâmicas sintéticas atuem.

O centro de gravidade de um foguete pode ser facilmente calculado com antecedência ou determinado experimentalmente. O centro de pressão, por outro lado, tem sido bastante difícil de determinar analiticamente ou experimentalmente. Em 1966, [Barrowman e Barrowman \(1966\)](#) desenvolveram um método analítico para determinar o CP de um

foguete de corpo esguio em velocidades subsônicas e apresentaram seus resultados como um projeto de pesquisa e desenvolvimento no 8º Encontro Anual da Associação Nacional de Foguetes (NARAM-8), e mais tarde como parte da tese de mestrado de [Barrowman \(1967\)](#). Este método tornou-se conhecido como o método de Barrowman para determinar o CP de um foguete dentro da comunidade de foguetes modelo, e tem um papel importante na determinação das características aerodinâmicas de foguetes modelo.

Em [Nuñez-Quispe \(2021\)](#) é mostrado que:

$$\overline{SM} = \overline{X}_{CP} - \overline{X}_{CG} \quad (3.1)$$

Onde $\overline{SM}$ é margem estática (*static margin*), $\overline{X}_{CP}$ é a distância entre a ponta da ogiva e o CP dividido pelo diâmetro de referência (D_{ref}), e $\overline{X}_{CG}$ é a distância entre a ponta da ogiva e o CG dividido pelo diâmetro de referência.

Então se o valor de $\overline{SM}$ estiver acima de 0, será estável, mas se esse valor for maior significa uma melhor estabilidade estática longitudinal ([KARATOPRAK, 2019](#)).

Em outras palavras, se o CG estiver localizado na frente do CP , o foguete terá uma margem de estabilidade positiva, o que significa que ele terá a tendência de retornar à sua trajetória original, mesmo que seja desviado. Se o CG estiver localizado atrás do CP , o foguete terá uma margem de estabilidade negativa, o que significa que ele será instável e pode desviar facilmente da sua trajetória pretendida.

Para garantir uma margem de estabilidade positiva, os projetistas de foguetes geralmente procuram colocar o CG o mais próximo possível do CP , sem ultrapassá-lo. Eles podem alcançar isso fazendo ajustes no design do foguete, como aumentando ou diminuindo o tamanho das aletas, alterando a forma do corpo ou adicionando peso ao nariz do foguete.

Em resumo, a margem de estabilidade é um fator crítico na construção de foguetes, pois influencia diretamente na segurança e precisão do voo. É essencial que os projetistas levem em consideração a relação entre o CG e o CP e façam os ajustes necessários para garantir uma margem de estabilidade positiva.

Segundo [Barrowman \(1967\)](#), a equação diferencial não linear que modela a altitude de um foguete em relação ao tempo pode ser escrita como:

$$m \frac{dv}{dt} = T - D(v) - mg, \quad (3.2)$$

sendo:

- m : massa do foguete (Kg)
- dv/dt : taxa de variação da velocidade do foguete em relação ao tempo (m/s²)

- T : força de propulsão gerada pelos motores do foguete (N)
- $D(v)$: força de arrasto aerodinâmico, que depende da velocidade do foguete (N)
- v : velocidade do foguete em relação ao ar (m/s)
- g : aceleração da gravidade; (m/s²)

A equação acima é não linear devido à presença da função $D(v)$, que pode ser modelada de diferentes formas dependendo do modelo aerodinâmico escolhido. Além disso, a equação é uma equação diferencial de primeira ordem, pois envolve apenas a primeira derivada da velocidade em relação ao tempo.

A força de arrasto aerodinâmico é dada por

$$D(v) = \frac{C_d \rho S v^2}{2}, \quad (3.3)$$

sendo:

- $D(v)$: força de arrasto (N)
- C_d : coeficiente de arrasto aerodinâmico
- ρ : densidade do ar (kg/m³)
- S : área de referência do foguete (m²)
- v : velocidade do foguete (m/s)

O empuxo T pode ser modelado como uma função do tempo t escrita como:

$$T(t) = \begin{cases} T_{max}, & \text{se } t \leq t_b, \\ 0, & \text{se } t > t_b. \end{cases} \quad (3.4)$$

Nessa equação, T_{max} representa o valor máximo de empuxo e t_b é o tempo de queima. Quando t é menor ou igual a t_b , o valor de empuxo é igual a T_{max} . Para t maior que t_b , o valor de empuxo é igual a zero.

3.1.1 Modelo Não Linear de um Foguete Suborbital

Conforme [Hodel e Baginski \(1995\)](#), um modelo não linear que inclui o ângulo de elevação e o ângulo de rolamento é proposto em seu estudo, as equações aproximadas da dinâmica de foguetes foram derivadas e a dinâmica do foguete foi modelada aproximadamente como:

$$\dot{v}_z = \frac{T}{m} \cos(\theta) - g - \frac{c_1}{m} |v_z|^2 \cos(\phi) - \frac{c_2 \sin(\theta)}{m} |v_z|^2 \cos(\phi). \quad (3.5)$$

Para a trajetória nominal estudada o ângulo de elevação da plataforma de lançamento é 82° , considera-se o ângulo de elevação $\theta = 8^\circ$ como o ângulo entre a direção inicial de lançamento e a vertical, nesse caso $90^\circ - 82^\circ = 8^\circ$, e, para simplificação do modelo, o ângulo de rolamento pode ser $\phi = 0^\circ$. Nesse caso, a equação diferencial modificada para a componente z (altitude) é dada por

$$\dot{v}_z = \frac{T}{m} \cos(\theta) - g - \frac{c_1}{m} |v_z|^2 - \frac{c_2 \sin(\theta)}{m} |v_z|^2, \quad (3.6)$$

sendo c_1 e c_2 são constantes aerodinâmicas dadas por

$$c_1 = c_2 = \frac{C_d \rho S}{2}. \quad (3.7)$$

De acordo com [Wie, Du e Whorton \(2008\)](#), para acrescentar o ângulo δ de deflexão da tubeira do motor, divide-se o empuxo por $\cos(\delta)$. Nesse caso, o termo $1/\cos(\delta) = u(t)$ é a entrada de controle do sistema. Definindo a velocidade v_z como a derivada da posição $\dot{h}_z$, a equação do modelo resulta em:

$$\begin{cases} \dot{h}_z = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{T \cos(\theta)}{m \cos(\delta)} - g - \frac{c_1}{m} |v_z|^2 - \frac{c_2 \sin(\theta)}{m} |v_z|^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

sendo:

- m : massa do foguete
- h_z : posição na componente z (altitude)
- $v_z = \dot{h}_z$: velocidade na componente z
- g : aceleração da gravidade
- T : magnitude da força de empuxo
- θ : ângulo de elevação
- ϕ : ângulo de rolamento
- δ : ângulo de deflexão da tubeira do motor

3.2 Sistemas Dinâmicos

Segundo [Lavretsky e Wise \(2012\)](#), um sistema dinâmico pode ser pensado como uma coleção de um número finito ou infinito de componentes interconectados e dependentes do tempo. A evolução do sistema é impulsionada pelo ambiente no qual o sistema opera. Quando sujeito a uma entrada externa dependente do tempo $u(t)$, o sistema gera uma saída $y(t)$, que, por sua vez, pode depender explicitamente das propriedades internas do sistema, definidas pelos estados do sistema $x(t)$. Os estados descrevem as conexões entre os componentes internos do sistema, sua resposta dinâmica devido ao estímulo ambiental e suas contribuições para a resposta do sistema.

Considera-se uma classe especial de sistemas dinâmicos, que podem ser modelados por um número finito de equações diferenciais ordinárias escalares acopladas, na forma

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (3.9)$$

Na Equação (3.9), $t \in \mathbb{R}^+$ denota o tempo e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial. Chamamos (3.9) de dinâmica do sistema, referimos a $x \in \mathbb{R}^n$ como o estado do sistema no tempo t e definimos $u \in \mathbb{R}^m$ como a entrada de controle (um sinal fornecido externamente). O número de componentes do estado n é chamado de ordem do sistema.

Uma solução $x(t)$ de (3.9) (se existir) corresponde a uma curva no espaço de estado do sistema $\mathbb{R}^n$, à medida que t varia a partir de um tempo inicial t_0 em direção ao infinito. Essa curva é frequentemente referida como a trajetória do estado do sistema.

Além da dinâmica do sistema, um conjunto de equações algébricas também pode ser fornecido,

$$y = h(t, x, u), \quad (3.10)$$

sendo $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, uma função vetorial, e $y \in \mathbb{R}^p$, a saída do sistema. Em conjunto, as Equações (3.9) e (3.10) formam o modelo de espaço de estados do sistema.

Um caso especial das Equações (3.9) e (3.10) é o sistema linear em relação ao controle:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad (3.11)$$

$$y = h(t, x) + d(t, x)u, \quad (3.12)$$

sendo que as funções g e d têm dimensões correspondentes.

Definindo $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, uma classe particular de dinâmica contínua não linear é dada pelos sistemas na forma canônica de Brunovsky:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.14)$$

$$\vdots \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_n = f(x) + g(x)u \quad (3.16)$$

$$y = h(x) \quad (3.17)$$

Para sistemas lineares e variantes no tempo (SLVT), o modelo de espaço de estados das Equações (3.9) e (3.10) é escrito como:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (3.18)$$

$$y = C(t)x + D(t)u \quad (3.19)$$

Finalmente, a classe de sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT) é escrita na forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.20)$$

$$y = Cx + Du, \quad (3.21)$$

cujas propriedades dinâmicas podem ser completamente caracterizadas pelas matrizes (A, B, C, D) , sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada ou matriz de controle, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída ou matriz de observação e $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é matriz de transmissão direta.

Se o modelo da Equação (3.9) não contém o sinal de entrada de controle u :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.22)$$

então, a dinâmica resultante é chamada de “não forçada”. Se, além disso, a função f não depende explicitamente de t , ou seja, se

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.23)$$

então, a dinâmica não forçada do sistema é chamada de autônoma, ou invariante no tempo. Sistemas que dependem explicitamente do tempo são não autônomos (ou seja, variantes no tempo).

3.2.1 Sistemas de Controle Robusto

A teoria do controle robusto começa com a premissa de que os modelos usados para projetar sistemas de controle podem conter imprecisões. Em essência, essa teoria assume que sempre há alguma incerteza ou erro entre o comportamento real de um sistema e seu modelo matemático. Assim, durante o processo de projeto do sistema de controle, essa incerteza ou erro é considerado e incorporado para garantir que o sistema seja robusto o suficiente para lidar com variações e perturbações no ambiente de operação.

Sistemas projetados com base na teoria do controle robusto têm as seguintes propriedades:

1. **Estabilidade Robusta:** O sistema de controle projetado é estável na presença de distúrbios.
2. **Desempenho Robusto:** O sistema de controle manifesta características de resposta predeterminadas na presença de distúrbios (OGATA, 2010).

De acordo com Ogata (2010), o termo “incerteza” refere-se às diferenças ou erros entre o modelo da planta e a planta em si. Elementos de incerteza que podem surgir em sistemas práticos podem ser classificados como incerteza estruturada (paramétrica) e incerteza não estruturada (não paramétrica). Exemplos de incerteza estruturada são todas as variações de parâmetro na dinâmica da planta, como variações nos polos e zeros na função de transferência da planta. Exemplos de incerteza não estruturada incluem as incertezas dependentes de frequência, como modos de alta frequência que normalmente são negligenciados na modelagem da dinâmica das plantas. Por exemplo, na modelagem de um sistema de braço flexível, o modelo pode incluir um número finito de modos de oscilação. Os modos de oscilação que não são incluídos na modelagem se comportam como incerteza do sistema. Outro exemplo de incerteza ocorre na linearização de uma planta não linear. Se a planta real for não linear e o modelo for linear, a diferença atua como incerteza não estruturada.

Em certos casos, um erro de incerteza não estruturada pode ser considerado multiplicativo, o que resulta em uma dinâmica aproximada da planta real, $\tilde{G}$, expressa como $G(1 + \Delta_m)$, em que G é a dinâmica do modelo da planta e Δ_m representa a incerteza multiplicativa. Em outras situações, um erro de incerteza não estruturada pode ser considerado aditivo, resultando em uma dinâmica aproximada da planta real, $\tilde{G}$, expressa como $G + \Delta_a$, onde Δ_a representa a incerteza aditiva. Em ambos os casos, presume-se que a norma de Δ_m ou Δ_a é delimitada, ou seja, $\|\Delta_m\| < \gamma_m$ e $\|\Delta_a\| < \gamma_a$, onde γ_m e γ_a são constantes positivas.

3.3 Linearização de Sistemas Não-Lineares

Um sistema é não linear se o princípio da superposição não se aplicar a ele. Assim, para um sistema não linear, não se pode obter a resposta a duas entradas simultâneas considerando as entradas individualmente e somando os resultados. Embora muitas relações de grandezas físicas sejam representadas por equações lineares, na maioria dos casos a relação entre elas não é efetivamente linear. De fato, um estudo cuidadoso dos sistemas físicos revela que mesmo os chamados “sistemas lineares” são realmente lineares somente para intervalos limitados de operação. Na prática, muitos sistemas eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos e outros envolvem relações não lineares entre as variáveis. Por exemplo, a saída de um componente pode ser saturada para sinais de entrada de grande amplitude. Pode haver uma zona morta que afeta pequenos sinais. A zona morta de um componente é uma pequena gama de variações de entrada às quais o componente é insensível. Não linearidades quadráticas podem ocorrer em alguns componentes. Por exemplo, amortecedores utilizados em sistemas físicos podem ser lineares para operações de baixa velocidade, mas podem se tornar não lineares para velocidades elevadas e a ação de amortecimento pode se tornar proporcional ao quadrado da velocidade de operação (OGATA, 2010).

De acordo com Ogata (2010), o procedimento de linearização descrito a seguir utiliza uma abordagem na qual a função não linear é aproximada por meio de uma série de Taylor centrada em torno do ponto de operação, mas, neste caso, apenas o termo linear é considerado. Para que essa aproximação seja precisa, é necessário que os termos de ordem superior da expansão de Taylor sejam negligenciáveis, o que implica que as variáveis devem permanecer próximas das condições de operação. Se houver desvios significativos dessas condições, a precisão da aproximação será comprometida.

Para derivar um modelo matemático linear de um sistema não linear, supomos que as variáveis tenham desvios mínimos em relação a alguma condição de operação. Considerando um sistema em que a entrada é $x(t)$ e a saída é $y(t)$, conforme apresentado em Ogata (2010). A relação entre $y(t)$ e $x(t)$ é expressa por

$$y = f(x), \quad (3.24)$$

Se a condição normal de operação for denotada por $\bar{x}$, $\bar{y}$, então a Equação 3.24 pode ser expandida em uma série de Taylor em torno desse ponto, conforme a seguir:

$$y = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots, \quad (3.25)$$

sendo as derivadas $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, ... são avaliadas em $x - \bar{x}$. Se a variação de $x - \bar{x}$ for pequena, podemos negligenciar os termos de ordem superior em $x - \bar{x}$. Portanto, a Equação 3.25 pode ser reescrita como:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}), \quad (3.26)$$

sendo

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (3.27)$$

A Equação 3.26 pode ser reorganizada como:

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}), \quad (3.28)$$

indicando que $y - \bar{y}$ é linearmente proporcional a $x - \bar{x}$. A Equação 3.28 proporciona um modelo matemático linear para o sistema não linear representado pela Equação 3.24, nas proximidades do ponto de operação $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Agora, considerando um sistema não linear em que a saída y é uma função de duas variáveis, x_1 e x_2 , de tal forma que:

$$y = f(x_1, x_2). \quad (3.29)$$

Para obter uma aproximação linear desse sistema não linear, pode-se expandir a Equação 3.29 em uma série de Taylor em torno do ponto normal de operação $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. Assim, a Equação 3.29 se torna:

$$\begin{aligned} y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.30)$$

sendo que as derivadas parciais são avaliadas em $x_1 - \bar{x}_1$, $x_2 - \bar{x}_2$. Nas proximidades do ponto normal de operação, os termos de ordem superior podem ser desprezados. Portanto, o modelo matemático linear deste sistema não linear, nas proximidades das condições normais de operação, é dado por

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2), \quad (3.31)$$

sendo

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}, \quad (3.32)$$

$$K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}, \quad (3.33)$$

A técnica de linearização apresentada é aplicável apenas nas proximidades das condições de operação.

Segundo [Ogata \(2010\)](#), se as condições de operação variarem significativamente, essas equações linearizadas podem não ser adequadas, e as equações não lineares devem ser empregadas. É fundamental lembrar que um modelo matemático específico, utilizado para fins de análise e projeto, pode precisamente representar a dinâmica de um sistema real sob certas condições de operação, mas pode não ser preciso para outras.

3.4 Estimação Ótima

A estimação ótima é um conceito fundamental na teoria de controle e na teoria de sistemas, usado para determinar a melhor estimativa possível de um estado ou parâmetro desconhecido com base em informações disponíveis. A abordagem da estimação ótima visa minimizar o erro de estimativa de forma a obter a estimativa mais precisa possível, dado um conjunto de medições e um modelo do sistema.

Métodos de estimativa ótima são atraentes porque lidam facilmente com sistemas de múltiplas saídas e permitem que um projetista determine rapidamente muitos bons candidatos para a matriz L de ganho do estimador ([FRANKLIN et al., 1998](#)).

De acordo com [Franklin et al. \(1998\)](#), as equações para o estimador atual são

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (3.34)$$

e

$$\hat{x}(k+1) = F_d \hat{x}(k) + G_d u(k), \quad (3.35)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do sistema em tempo discreto, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle em tempo discreto, $F_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado em tempo discreto, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada em tempo discreto e $L \in \mathbb{R}^n$ é a matriz de ganho. A matriz L é baseada na minimização dos erros de estimação.

Nesta pesquisa será abordada a solução de estimação de mínimos quadrados para o caso estático, pois ela serve de base para a estimação ótima, em seguida, será abordada a solução de estimação ótima variável no tempo (comumente conhecida como “Filtro de Kalman”).

3.4.1 Método dos Mínimos Quadrados

Karl Friedrich Gauss formulou o Princípio dos Mínimos Quadrados no final do século XVIII e utilizou-o para determinar as órbitas de planetas e asteróides. Gauss afirmou que, de acordo com este princípio, os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático deveriam ser escolhidos de tal forma que a soma dos quadrados das diferenças entre os valores realmente observados e os calculados, multiplicada por números que medem o grau de precisão, é um mínimo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2013).

Segundo Franklin et al. (1998), supondo que tenhamos um processo estático linear dado por

$$y = Hx + \vartheta, \quad (3.36)$$

sendo y um vetor de medição de dimensão $p \times 1$, x é um vetor desconhecido de dimensão $n \times 1$, ϑ é um vetor de ruído de medição de dimensão $p \times 1$, e H é a matriz de saída do sistema. Queremos determinar a melhor estimativa de x dadas as medições y . Frequentemente, o sistema está superdeterminado; isto é, existem mais medições em y do que no vetor desconhecido x . Uma boa maneira de encontrar a melhor estimativa de x é minimizar a soma dos quadrados de ϑ , o erro de ajuste. Isso é chamado de solução de **Mínimos Quadrados**. Isso é sensato e muito conveniente analiticamente (FRANKLIN et al., 1998). A soma dos quadrados pode ser escrita como

$$J = \frac{1}{2} \vartheta^T \vartheta = \frac{1}{2} (y - Hx)^T (y - Hx), \quad (3.37)$$

e, para minimizar a função J , calcula-se a derivada parcial em relação à incógnita, ou seja

$$\frac{\partial J}{\partial x} = (y - Hx)^T (-H) = 0, \quad (3.38)$$

o que resulta em

$$H^T y = H^T H x, \quad (3.39)$$

de modo que

$$\hat{x} = [H^T H]^{-1} H^T y, \quad (3.40)$$

sendo $\hat{x}$ a “melhor estimativa” de x . Observa-se que a matriz a ser invertida tem dimensão $n \times n$ e que p deve ser $\geq n$ para que seja de posto completo e a inversa exista. Se houver menos medições do que incógnitas ($p < n$), haverá poucas medições para determinar um valor único de x .

A diferença entre a estimativa e o valor real de x é

$$\begin{aligned}\hat{x} - x &= [H^T H]^{-1} H^T (Hx + \vartheta) - x \\ &= [H^T H]^{-1} H^T \vartheta.\end{aligned}\tag{3.41}$$

A Equação (3.41) mostra que, se ϑ tiver média zero, o erro na estimativa, $\hat{x} - x$, também terá média zero, às vezes referido como uma **estimativa não tendenciosa**.

A **covariância** do erro de estimativa, P , é definida como

$$\begin{aligned}P &= E\{(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T\} \\ &= E\{(H^T H)^{-1} H^T \vartheta \vartheta^T H (H^T H)^{-1}\} \\ &= (H^T H)^{-1} H^T E\{\vartheta \vartheta^T\} H (H^T H)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.42}$$

Se os elementos do vetor de ruído, ϑ , forem não correlacionados entre si, $E\{\vartheta \vartheta^T\}$ é uma matriz diagonal, chamada de R . Além disso, se todos os elementos de ϑ tiverem a mesma incerteza, então todos os elementos diagonais de R são idênticos, e

$$E\{\vartheta \vartheta^T\} = R = I\sigma^2,\tag{3.43}$$

sendo σ o valor eficaz RMS (*Root Mean Square*) de cada elemento em ϑ . Nesse caso, a Eq. (3.42) pode ser escrita como

$$P = (H^T H)^{-1} \sigma^2\tag{3.44}$$

e é uma medida de quão bem podemos estimar o desconhecido x . A raiz quadrada dos elementos diagonais de P representam os valores eficazes quadráticos médios dos erros em cada elemento de x .

3.4.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman (FK) de ganho constante em estado estacionário é um algoritmo usado para estimar as variáveis de estado de um sistema LTI (*Linear Time Invariant*) de tempo contínuo, sujeito a perturbações estocásticas, com base em medições ruidosas de certas variáveis de saída. Assim, o algoritmo de filtragem de Kalman combina as informações referentes à dinâmica da planta, as informações probabilísticas referentes aos distúrbios estocásticos que influenciam as variáveis de estado da planta, bem como aquelas relativas ao ruído de medição que corrompe as medições do sensor, e os controles determinísticos. O crédito por “inventar” esse algoritmo geralmente é dado ao Dr. Rudolph E. Kalman, que apresentou as ideias principais no final dos anos 1950 e início dos anos 1960.

Milhares de artigos foram escritos sobre o filtro de Kalman e suas inúmeras aplicações para navegação, rastreamento e projeto de estimadores e controladores em aplicações industriais e de defesa. (LEVINE, 2011)

De acordo com Franklin et al. (1998), considerando um sistema dinâmico contínuo da seguinte forma:

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (3.45)$$

e

$$y = Hx + Ju, \quad (3.46)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída e $J \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é matriz de transmissão direta.

Assumindo que o controle é aplicado a partir do computador através de um Segurador de Ordem Zero ZOH (*Zero Order Holder*), portanto, as Equações (3.45) e (3.46) têm uma representação discreta exata conforme dada por

$$x(k+1) = F_d x(k) + G_d u(k) \quad (3.47)$$

$$y(k) = Hx(k) + Ju(k), \quad (3.48)$$

sendo

$$F_d = e^{FT} T, \quad (3.49)$$

$$G_d = \int_0^T e^{F\eta} d\eta G, \quad (3.50)$$

e T é o período de amostragem. Pode-se considerar agora o seguinte sistema dinâmico discreto dado por

$$x(k+1) = F_d x(k) + G_d u(k) + G_d w(k), \quad (3.51)$$

com medidas

$$y(k) = Hx(k) + \vartheta(k), \quad (3.52)$$

onde y é um vetor de medição de dimensão $p \times 1$, x é um vetor desconhecido de dimensão $n \times 1$, $\vartheta(k)$ é um vetor de ruído de medição de dimensão $p \times 1$, e H é a matriz que relaciona as medições com as incógnitas. Almeja-se determinar a melhor estimativa de x dadas as medições y . Frequentemente, o sistema está superdeterminado; isto é, existem mais medições em y do que no vetor desconhecido, x .

O ruído de processo $w(k)$ e o ruído de medição $\vartheta(k)$ são sequências aleatórias com média zero, ou seja,

$$E\{w(k)\} = E\{\vartheta(k)\} = 0, \quad (3.53)$$

não possuindo correlação temporal ou sendo considerados ruídos “brancos”, ou seja,

$$E\{w(i)w(j)^T\} = E\{\vartheta(i)\vartheta(j)^T\} = 0, \quad \text{se } i \neq j, \quad (3.54)$$

e têm covariâncias ou “níveis de ruído” médio quadrático definidos por

$$E\{w(k)w(k)^T\} = R_w, \quad E\{\vartheta(k)\vartheta(k)^T\} = R_\vartheta. \quad (3.55)$$

Se os elementos do vetor de ruído ϑ , não estão correlacionados entre si, $E\{\vartheta\vartheta^T(k)\}$ é uma matriz diagonal, definida por R_ϑ . Além disso, se todos os elementos de ϑ tiverem a mesma incerteza, então todos os elementos diagonais de R_ϑ são idênticos.

Permite-se que L na Eq. (3.34) (Estimação Ótima) varie com o passo do tempo, e deseja-se escolher $L(k)$ de modo que a estimativa de $x(k)$, dado todos os dados até e incluindo o tempo k , seja ótima.

Supondo temporariamente que, sem usar a medida atual $y(k)$, já tem-se uma estimativa anterior do estado no momento de uma medição, definida por $\bar{x}(k)$. O problema neste ponto é atualizar essa antiga estimativa com base na nova medição atual.

A equação de estimativa de medição, Eq. (3.52), relaciona as novas medições com x . As equações de solução são

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + L(k)(y(k) - H\bar{x}(k)) \quad (3.56)$$

Com a matriz de ganho do estimador L , dada por

$$L(k) = P(k)H^T R_\vartheta^{-1}, \quad (3.57)$$

sendo $\hat{x}$ a melhor estimativa de x , R_ϑ é a matriz de covariância do ruído de medição, e P é a matriz de covariância do erro de estimativa ($\hat{x} - x$), de acordo com a Eq. (3.58) dada abaixo

$$P(k) = [M^{-1} + H^T R_\vartheta^{-1} H]^{-1} \quad (3.58)$$

O tamanho da matriz a ser invertida na Eq. (3.58) é $n \times n$, onde n é a dimensão de x . Para o filtro de Kalman, y geralmente possui menos elementos do que x . Através de operações de inversão de matrizes, a Eq. (3.58) é convertida em

$$P(k) = M(k) - M(k)H^T(HM(k)H^T + R_{\vartheta})^{-1}HM(k). \quad (3.59)$$

$M(k)$ é a covariância (ou erro quadrático médio esperado) da estimativa de estado, $\bar{x}(k)$, antes da medição. A estimativa de estado após a medição, $\hat{x}(k)$, tem uma covariância de erro $P(k)$.

Segundo Franklin et al. (1998), a ideia de combinar a estimativa anterior com a medição atual com base na precisão relativa das duas quantidades (o conceito de mínimos quadrados recursivos) foi a origem das relações em Eq. (3.56) e Eq. (3.58) e é uma das ideias fundamentais do filtro de Kalman. A outra ideia chave tem a ver com o uso da dinâmica conhecida de x para prever seu comportamento entre amostras.

O uso da dinâmica na propagação da estimativa de x entre $k - 1$ e k não surgiu na estimativa estática de mínimos quadrados, mas aqui esse problema precisa ser abordado. A estimativa de estado em $k - 1$, dada a informação até $k - 1$, é chamada de $\hat{x}(k - 1)$, enquanto definimos $\bar{x}(k)$ como a estimativa em k dada a mesma informação até $k - 1$.

Especificamente, a estimativa $\bar{x}(k)$ é encontrada a partir de $\hat{x}(k - 1)$ usando a Eq. (3.51) com $w(k - 1) = 0$, porque sabemos que esse é o valor esperado de $x(k)$, uma vez que o valor esperado do ruído do sistema, $E\{w(k - 1)\}$, é zero (FRANKLIN et al., 1998). Assim,

$$\bar{x}(k) = F_d \hat{x}(k - 1) + G_d u(k - 1). \quad (3.60)$$

A mudança na estimativa de $\hat{x}(k - 1)$ para $\bar{x}(k)$ é chamada de “atualização de tempo”, enquanto a mudança na estimativa de $\bar{x}(k)$ para $\hat{x}(k)$ conforme fornecido pela Eq. (3.56) é uma “atualização de medição” que ocorre no tempo fixo k , mas expressa a melhoria na estimativa devido à medição $y(k)$. O mesmo tipo de atualizações de tempo e medição se aplica às covariâncias das estimativas, P e M : P representa a precisão da estimativa imediatamente após uma medição, enquanto M é o valor propagado de P e é válido imediatamente antes das medições. Da Eq. (3.51) e da Eq. (3.60) é visto que

$$x(k + 1) - \bar{x}(k + 1) = F_d(x(k) - \hat{x}(k)) + G_d w(k), \quad (3.61)$$

A Eq. (3.61) é usada para encontrar a covariância do estado no tempo $k + 1$ antes de levar em conta $y(k + 1)$

$$M(k+1) = E\{(x(k+1) - \bar{x}(k+1))(x(k+1) - \bar{x}(k+1))^T\}.$$

Se o ruído de medição ϑ , e o ruído de processo w , são não-correlacionados de forma que $x(k)$ e $w(k)$ também sejam não-correlacionados, os termos de produto cruzado desaparecem e encontra-se

$$M(k+1) = E\{F_d(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T F_d^T + G_d w(k) w^T(k) G_d^T\}. \quad (3.62)$$

Entretanto, como

$$P(k) = E\{(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T\} \quad \text{e} \quad R_w = E\{w(k)w^T(k)\},$$

a Eq. (3.62) se reduz a

$$M(k+1) = F_d P(k) F_d^T + G_d R_w G_d^T. \quad (3.63)$$

De acordo com Franklin et al. (1998), isso completa as relações necessárias para o ganho ótimo variável no tempo e a estimativa de estado, comumente referida como o filtro de Kalman. Um resumo das relações necessárias é o seguinte:

- No momento da medição (atualização de medição)

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + P(k) H^T R_\vartheta^{-1} (y(k) - H \bar{x}(k)), \quad (3.64)$$

sendo

$$P(k) = M(k) - M(k) H^T (H M(k) H^T + R_\vartheta)^{-1} H M(k). \quad (3.65)$$

- Entre as medições (atualização de tempo)

$$\bar{x}(k+1) = F_d \hat{x}(k) + G_d u(k) \quad (3.66)$$

e

$$M(k+1) = F_d P(k) F_d^T + G_d R_w G_d^T. \quad (3.67)$$

As condições iniciais para $\bar{x}(0)$ e $M(0) = E\{\bar{x}(0)\bar{x}^T(0)\}$ devem ser assumidas como algum valor para a inicialização.

Devido M ser variável no tempo, o ganho do estimador L também será, dado pela Eq. (3.57) (FRANKLIN et al., 1998).

3.5 Análise de Controle no Espaço de Estados

Nesta seção são apresentados os conceitos de controlabilidade e observabilidade. Eles têm papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados. De fato, as condições de controlabilidade e observabilidade podem ditar a existência de uma solução completa para o problema de projeto do sistema de controle. A solução desse problema pode não existir, se o sistema considerado é não controlável (OGATA, 2010).

3.5.1 Autovalores de uma Matriz

Segundo Ogata (2010), os autovalores de uma matriz A $n \times n$ são as raízes da equação característica

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (3.68)$$

Considerando a seguinte matriz A como exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante da equação característica e igualando a zero tem-se:

$$\begin{aligned} &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica, ou seja, -1 , -2 e -3 .

3.5.2 Controlabilidade

Um sistema será dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito (OGATA, 2010).

Considerando o sistema de tempo contínuo abaixo:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.69)$$

sendo x o vetor de estado, u é o sinal de controle (escalar), A é uma matriz constante de dimensões $n \times n$, B é uma matriz constante de dimensões $n \times m$,

O sistema descrito pela Equação (3.69) é considerado controlável em $t = t_0$ se for possível utilizar um sinal de controle ilimitado para levar o sistema de um estado inicial a qualquer estado desejado em um período de tempo finito, onde $t_0 \leq t \leq t_1$. Se for possível controlar todos os estados do sistema, ele é classificado como completamente controlável.

Estabelecendo a condição para a completa controlabilidade do sistema, pode-se assumir que o estado desejado é a origem do espaço de estados e o instante inicial é $t_0 = 0$.

A solução da Equação (3.69) é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.70)$$

Aplicando a definição de controlabilidade completa de estado

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (3.71)$$

ou

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.72)$$

O termo $e^{-A\tau}$ pode ser escrito como:

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k. \quad (3.73)$$

Substituindo a Equação (3.73) na Equação (3.72), obtém-se:

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (3.74)$$

Se o sistema for completamente controlável, então, para qualquer estado inicial $x(0)$, a equação anterior deve ser atendida. Isso implica que o posto da matriz $n \times n$:

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.75)$$

seja n . A matriz da Equação (3.75) é denominada Matriz de Controlabilidade.

Assim, podemos estabelecer as condições para a controlabilidade completa de estado: o sistema descrito pela Equação (3.69) é completamente controlável se, e somente se, os vetores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ forem linearmente independentes, ou seja, se a matriz de controlabilidade da Equação (3.75) tem posto n .

3.5.3 Observabilidade

Um sistema será dito observável no instante t_0 se, com o sistema no estado $x(t_0)$, for possível determinar esse estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito (OGATA, 2010).

Segundo Ogata (2010), um sistema é completamente observável se, durante um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$, cada transição do estado puder influenciar cada elemento do vetor de saída. Esse conceito é fundamental para estimar variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis, o que é essencial para o controle por realimentação de estado. Em resumo, um sistema linear e invariante no tempo é completamente observável se todas as variáveis de estado podem ser estimadas a partir das variáveis medidas.

Considerando um sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}\tag{3.76}$$

Então,

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\tag{3.77}$$

e a saída $y(t)$ é definida como

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).\tag{3.78}$$

Nas equações acima, as matrizes A , B , C e D são conhecidas, bem como o sinal de controle $u(t)$. Portanto, podemos subtrair os termos conhecidos do valor observado de $y(t)$. Assim, para investigar a observabilidade completa, basta considerar o sistema descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax,\tag{3.79}$$

$$y = Cx.\tag{3.80}$$

A saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = Ce^{At}x(0). \quad (3.81)$$

Se $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$, onde n é o grau do polinômio característico, obtém-se:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)CA^kx(0), \quad (3.82)$$

ou

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0). \quad (3.83)$$

A observabilidade completa é alcançada quando, dada a saída $y(t)$ em um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$, podemos determinar o estado inicial $x(0)$ de maneira única a partir desta saída. Isso requer que o posto da matriz $nm \times n$

$$\begin{bmatrix} C \\ - - - \\ CA \\ - - - \\ \vdots \\ - - - \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

seja n . Esta matriz, representada pela Equação (3.84), é chamada de matriz de observabilidade.

Portanto, a condição necessária e suficiente para a observabilidade completa em sistemas de tempo contínuo é que o posto da matriz de observabilidade seja n , o que implica que os n vetores-coluna sejam linearmente independentes.

3.6 Projeto de Controle no Espaço de Estados

Esta seção explora os métodos de alocação de polos e a implementação de observadores de estados, destacando a importância da controlabilidade e observabilidade do sistema para garantir uma resposta adequada e a estabilidade desejada. Além disso, apresenta-se a aplicação da Fórmula de Ackermann para determinar a matriz de ganho de realimentação de estado, essencial para posicionar os polos de malha fechada em locais específicos, assegurando um desempenho ideal do sistema. Por fim, é discutido o Regulador Quadrático Linear (LQR), que oferece uma solução sistemática para a síntese de

controladores ótimos, balanceando entre a minimização do erro e o esforço de controle, contribuindo para a robustez e eficiência do sistema de controle.

3.6.1 Alocação de Polos

De acordo com Ogata (2010), na abordagem convencional de projeto de sistemas de controle com uma entrada e uma saída, é projetado um controlador de forma a garantir que os polos dominantes do sistema de malha fechada tenham um coeficiente de amortecimento ζ desejado e uma frequência natural não amortecida ω_n . Sob essa abordagem, a ordem do sistema pode ser aumentada em uma ou duas unidades, a menos que ocorram cancelamentos de polos e zeros. É importante notar que, sob essa abordagem, os efeitos dos polos não dominantes na resposta do sistema são considerados insignificantes.

Em contraste com a abordagem convencional, a abordagem aqui apresentada especifica todos os polos do sistema de malha fechada, não apenas os polos dominantes. No entanto, essa abordagem exige que todas as variáveis de estado possam ser medidas com sucesso ou que um observador de estado seja incluído no sistema. Além disso, é imposta a condição de que os polos do sistema de malha fechada possam ser arbitrariamente alocados em posições escolhidas. A condição fundamental para isso é que o sistema seja completamente controlável.

Considerando o sistema representado pelas equações de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{3.85}$$

sendo x o vetor de estado (com n componentes), y é o sinal de saída (escalar), $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, A é uma matriz constante de dimensões $n \times n$, B é uma matriz constante de dimensões $n \times m$, C é uma matriz constante de dimensões $m \times n$, D é uma constante (escalar).

Neste cenário, é escolhido o sinal de controle da seguinte maneira:

$$u = -Kx. \tag{3.86}$$

Isso significa que o sinal de controle u é determinado com base em uma observação instantânea do estado do sistema. Esse método é conhecido como realimentação de estado, e a matriz K de dimensões $m \times n$ é chamada de matriz de ganho de realimentação de estado. Supomos que todas as variáveis de estado são acessíveis para realimentação.

Nas análises do presente trabalho, não são impostas restrições à magnitude de u .

O sistema de malha fechada resultante não possui entradas adicionais; sua tarefa é manter a saída igual a zero. No entanto, devido a possíveis distúrbios, a saída pode

desviar-se de zero. O sistema é projetado de forma que a saída volte a zero quando a entrada de referência também é zero, graças à estratégia de realimentação de estado. Um sistema em que a entrada de referência é mantida constantemente em zero é chamado de sistema regulador. Observe que, se a entrada de referência do sistema for uma constante não nula, o sistema ainda pode ser chamado de sistema regulador.

A substituição da Equação (3.86) na Equação (3.85) leva a:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (3.87)$$

A solução dessa equação é dada por

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0), \quad (3.88)$$

sendo $x(0)$ o estado inicial do sistema, que pode ser afetado por distúrbios externos. A estabilidade e a resposta temporal do sistema são determinadas pelos autovalores da matriz $A - BK$. Se a matriz K for selecionada adequadamente, a matriz $A - BK$ pode ser tornada assintoticamente estável, garantindo que, para qualquer $x(0)$ diferente de zero, $x(t)$ tenda a zero à medida que t se aproxima do infinito. Os autovalores da matriz $A - BK$ são chamados de polos reguladores. Posicioná-los no semiplano esquerdo do plano complexo s garantirá que $x(t)$ tenda a zero quando t tende a infinito. O problema de posicionar os polos reguladores em locais desejados é conhecido como o problema de alocação de polos.

Observação: A alocação arbitrária de polos para dado sistema é possível se, e somente se, o sistema for de estado completamente controlável. (OGATA, 2010).

Segundo Ogata (2010), para determinar a matriz K , pode-se utilizar a fórmula de Ackermann.

Considerando o sistema dado pela Equação (3.85), o controle por realimentação de estado da Equação (3.86), e que o sistema seja de estado completamente controlável. Supondo também que os polos desejados de malha fechada estejam em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$.

Define-se

$$\tilde{A} = A - BK. \quad (3.89)$$

A equação característica desejada para os polos de malha fechada é:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = 0 \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton, $\tilde{A}$ satisfaz sua própria equação característica:

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0. \quad (3.91)$$

A Equação (3.91) é utilizada para obter a fórmula de Ackermann. Para simplificar, considera-se o caso em que $n = 3$.

Considerando as identidades:

$$\begin{aligned} I &= I, \\ \tilde{A} &= A - BK, \\ \tilde{A}^2 &= (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\tilde{A}, \\ \tilde{A}^3 &= (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações, na mesma ordem, respectivamente por α_3 , α_2 , α_1 , e α_0 (onde $\alpha_0 = 1$) e somando os resultados, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK) + \alpha_1 (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) \\ &\quad + A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK \\ &\quad - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Em relação à Equação (3.91), tem-se

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0, \quad (3.93)$$

e

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 = \phi(A) \neq 0. \quad (3.94)$$

Substituindo as Equações (3.93) e (3.94) na Equação (3.92), obtém-se:

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2BK. \quad (3.95)$$

Como $\phi(\tilde{A}) = 0$, então:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^2BK \\ &= [B \quad AB \quad A^2B] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Tendo em vista que o sistema é completamente controlável, a inversa da matriz de controlabilidade $[B \mid AB \mid A^2B]$ existe. Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (3.96) pela inversa da matriz de controlabilidade, e realizando todo o cálculo algébrico para isolar a matriz K , obtém-se:

$$K = [0 \ 0 \ 1][B \mid AB \mid A^2B]^{-1}\phi(A). \quad (3.97)$$

A Equação (3.97) fornece a matriz de ganho K de realimentação de estado. Para um n inteiro, positivo e arbitrário, tem-se:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]^{-1}\phi(A). \quad (3.98)$$

A Equação (3.98) é conhecida como fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho K de realimentação de estado (OGATA, 2010).

3.6.2 Observadores de Estados

De acordo com Ogata (2010), a determinação das variáveis de estado que não podem ser diretamente medidas é conhecida como processo de observação. Um dispositivo ou software projetado para efetuar essa estimativa é chamado observador de estado. Quando esse observador de estado monitora todas as variáveis do sistema, mesmo que algumas delas possam ser medidas diretamente, ele é referido como um observador de estado de ordem completa. No entanto, em certas situações, essa abordagem pode ser excessiva, particularmente quando nosso foco está apenas nas variáveis de estado que não podem ser medidas diretamente, em vez de todas as variáveis. Dado que as variáveis de saída podem ser observadas e têm uma relação linear com as variáveis de estado, não é necessário observar todas as variáveis de estado. Em vez disso, precisa-se apenas observar $n - m$ dessas variáveis, onde n é o número de dimensões do vetor de estado e m é o número de dimensões do vetor de saída.

Um observador que estima menos que n variáveis de estado, onde n é a dimensão do vetor de estado, é denominado observador de estado de ordem reduzida ou, simplesmente, observador de ordem reduzida. Se a ordem do observador de estado de ordem reduzida for a menor possível, o observador será denominado observador de estado de ordem mínima ou observador de ordem mínima (OGATA, 2010).

Um observador de estado é um componente que estima as variáveis de estado com base nas medições das variáveis de saída e de controle. Observadores de estado podem ser projetados somente quando a condição de observabilidade é atendida.

Considerando um sistema com as equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.99)$$

$$y = Cx. \quad (3.100)$$

O observador age como um reconstrutor do vetor de estado do sistema. Seu modelo é semelhante ao modelo da sistema, mas inclui um termo adicional para lidar com erros de estimativa e a falta de informações iniciais. Esse erro de estimativa é a diferença entre a saída medida e a saída estimada, e o erro inicial é a diferença entre o estado inicial real e o estado inicial estimado.

O modelo do observador pode ser representado por

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) = (A - K_eC)\hat{x} + Bu + K_ey. \quad (3.101)$$

Nesse modelo, $\hat{x}$ representa o estado estimado, e $C\hat{x}$ é a saída estimada. O observador usa as saídas y e as entradas de controle u para realizar sua estimativa. A matriz K_e , conhecida como matriz de ganho do observador, é uma matriz que ajusta o termo de correção que compara a saída medida y e a saída estimada $C\hat{x}$. Esse termo de correção melhora continuamente o desempenho do observador.

Conforme abordado em Ogata (2010), nas subseções a seguir é apresentado um exemplo de observador de ordem plena, a condição necessária e suficiente para observação de estado e um método de determinação da matriz de ganho K do observador de estado através da utilização da fórmula de Ackermann.

3.6.2.1 Observador de Estado de Ordem Plena

Nesse tipo de observador, a ordem do observador de estado é a mesma da planta.

Para obter a equação de erro de observação, subtraímos a Equação (3.101) da Equação (3.99):

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} - K_e(Cx - C\hat{x}) = (A - K_eC)(x - \hat{x}). \quad (3.102)$$

Definindo a diferença entre x e $\hat{x}$ como o vetor de erro e , ou seja, $e = x - \hat{x}$, a Equação (3.102) torna-se:

$$\dot{e} = (A - K_eC)e. \quad (3.103)$$

Observa-se que o comportamento dinâmico do vetor de erro é determinado pelos autovalores da matriz $A - K_eC$. Se essa matriz for estável, o vetor de erro convergirá para zero, independentemente do valor inicial do erro $e(0)$. Em outras palavras, $\hat{x}(t)$ convergirá

para $x(t)$ independentemente de $x(0)$ e $\hat{x}(0)$. Se escolhermos os autovalores da matriz $A - K_e C$ de forma a ter um comportamento dinâmico do erro estável e rápido o suficiente, qualquer erro tenderá a zero (a origem) a uma velocidade adequada.

Se o sistema for completamente observável, é possível escolher a matriz K_e de modo que os autovalores de $A - K_e C$ sejam arbitrários. Em outras palavras, a matriz de ganho K_e do observador pode ser determinada para obter a matriz $A - K_e C$ desejada. Vamos discutir esse assunto a seguir.

3.6.2.2 Condição Necessária e Suficiente para Observação de Estado

A condição de observabilidade completa do sistema é que o posto da matriz

$$[C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T], \quad (3.104)$$

seja igual a n . Essa condição é necessária e suficiente para a observação do estado do sistema definido pelas Equações (3.99) e (3.100), o que significa que o sistema é completamente observável.

Uma vez que os autovalores desejados tenham sido escolhidos, o projeto de um observador de estado de ordem plena é possível, contanto que a planta seja completamente observável. Os autovalores desejados devem ser selecionados de modo que o observador responda duas a cinco vezes mais rápido do que o sistema de malha fechada considerado.

As matrizes A , B e C do observador precisam ser idênticas às do sistema físico. No entanto, se houver discrepâncias entre essas matrizes, as dinâmicas do erro do observador não seguirão mais a Equação (3.103). Isso implica que o erro pode não convergir para zero conforme o esperado. Portanto, é importante escolher K_e de forma que o observador seja estável e o erro permaneça pequeno, mesmo na presença de erros de modelagem pequenos.

3.6.2.3 Determinação da Matriz de Ganho K do Observador com a Fórmula de Ackermann

Considerando o sistema definido pelas Equações (3.99) e (3.100). A fórmula de Ackermann para o problema de alocação de polos do sistema, dada pela Equação (3.98), é modificada para:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]^{-1} \phi(A^T). \quad (3.105)$$

Utilizando a matriz K determinada pela abordagem de alocação de polos no sistema, a matriz de ganho K_e do observador do sistema original pode ser determinada utilizando-se a relação:

$$K_e = K^T, \quad (3.106)$$

então,

$$K_e = K^T = \phi(A^T)^T \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.107)$$

sendo $\phi(s)$ o polinômio característico desejado do observador de estado, ou $\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n)$, e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ são os autovalores desejados. A Equação (3.107) é denominada fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho K_e do observador.

3.6.3 Regulador Quadrático Linear

Segundo Ogata (2010), uma vantagem do método de controle por regulador quadrático linear sobre o método de alocação de polos é que o LQR fornece um modo sistemático de cálculo da matriz de ganho de controle por realimentação de estado.

O autor considera o problema do regulador quadrático linear da forma que, dado o sistema dinâmico:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.108)$$

pode-se determinar a matriz K da entrada de controle ótimo

$$u(t) = -Kx(t), \quad (3.109)$$

para minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (3.110)$$

sendo Q uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e R é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica. Observa-se que o segundo termo do lado direito da Equação (3.110) representa o esforço dos sinais de controle. As matrizes Q e R determinam a importância relativa do erro e o esforço de controle.

A lei de controle linear dada pela Equação (3.109) é a lei de controle ótimo. Portanto, se os elementos não conhecidos da matriz K forem determinados para minimizar o índice de desempenho, então $u(t) = -Kx(t)$ será ótimo para qualquer estado inicial $x(0)$ (OGATA, 2010).

Para resolver o problema de otimização, substitui-se a Equação (3.109) na Equação (3.108), obtendo

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x. \quad (3.111)$$

Nas próximas deduções, é admitido que a matriz $(A - BK)$ seja estável, ou que os autovalores de $(A - BK)$ tenham partes reais negativas.

Substituindo a Equação (3.109) na Equação (3.110),

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\ &= \int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x dt. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Resolvendo

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt}(x^T P x),$$

sendo P uma matriz definida positiva ou simétrica real, obtem-se:

$$-\frac{d}{dt}(x^T P x) = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]x. \quad (3.113)$$

Essa igualdade deve valer para qualquer vetor de estado x , o que nos leva a:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K). \quad (3.114)$$

Se a matriz $(A - BK)$ for estável, é possível encontrar uma matriz P definida positiva que satisfaça a Equação (3.114).

O índice de desempenho J pode ser calculado como:

$$J = \int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x dt = -x^T P x \Big|_0^\infty = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0).$$

Uma vez que assumimos que todas as partes reais dos autovalores de $A - BK$ são negativas, podemos concluir que à medida que o tempo tende ao infinito, o estado x converge para zero. Portanto, obtem-se:

$$J = x^T(0) P x(0). \quad (3.115)$$

Assim, o valor de J depende das condições iniciais $x(0)$ e da matriz P .

Para resolver o problema de controle quadrático ótimo, pode-se seguir estas etapas. Primeiro, assume-se que R é uma matriz definida positiva ou real simétrica e pode ser representada como $R = T^T T$, onde T é uma matriz não singular. Em seguida, a Equação (3.114) pode ser escrita como:

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0, \quad (3.116)$$

que pode ser reescrita como:

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} + Q = 0. \quad (3.117)$$

Para minimizar a função de custo J em relação a K , deve-se minimizar a expressão:

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x. \quad (3.118)$$

Essa expressão é não negativa, e o mínimo ocorre quando ela é zero ou quando:

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P, \quad (3.119)$$

portanto, obtem-se a matriz ótima K através da equação:

$$K = R^{-1} B^T P. \quad (3.120)$$

Com essa matriz K , a lei de controle ótimo é linear, representada por

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T Px(t). \quad (3.121)$$

A matriz P deve satisfazer a equação matricial reduzida de Riccati, que é:

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (3.122)$$

O processo de projeto envolve a resolução da equação matricial reduzida de Riccati para a matriz P e, em seguida, substituir essa matriz P na Equação (3.120) para obter a matriz ótima K . Se existir uma matriz P definida positiva o sistema será estável ou a matriz $(A - BK)$ será estável.

Por último, é importante notar que se estivermos avaliando o desempenho do sistema com base na saída em vez do estado, ou seja, se o índice de desempenho for definido como:

$$J = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u) dt.$$

Então, pode-se ajustar a expressão do índice fazendo uso da relação de saída, onde $y = Cx$, resultando em:

$$J = \int_0^\infty (x^T C^T Q C x + u^T R u) dt. \quad (3.123)$$

3.7 Teorema de Estabilidade de Lyapunov

Na teoria de controle não linear, é uma prática comum iniciar a análise pela avaliação da estabilidade de um sistema em relação aos seus pontos de equilíbrio. Existem várias definições de estabilidade, mas, no contexto atual, estamos particularmente interessados na abordagem desenvolvida por Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1917), um matemático russo. Em 1892, ele publicou a principal teoria de estabilidade amplamente utilizada no controle de sistemas dinâmicos não lineares. Essa teoria de estabilidade de Lyapunov fornece uma estrutura essencial para a análise de sistemas complexos, permitindo determinar se os pontos de equilíbrio de um sistema são estáveis ou instáveis.

Segundo [Khalil \(2002\)](#), o Método Direto de Lyapunov para Sistemas Autônomos é dado por:

Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, em que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio contendo $x = 0$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que

$$V(0) = 0; V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\} \quad (3.124)$$

e

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D, \quad (3.125)$$

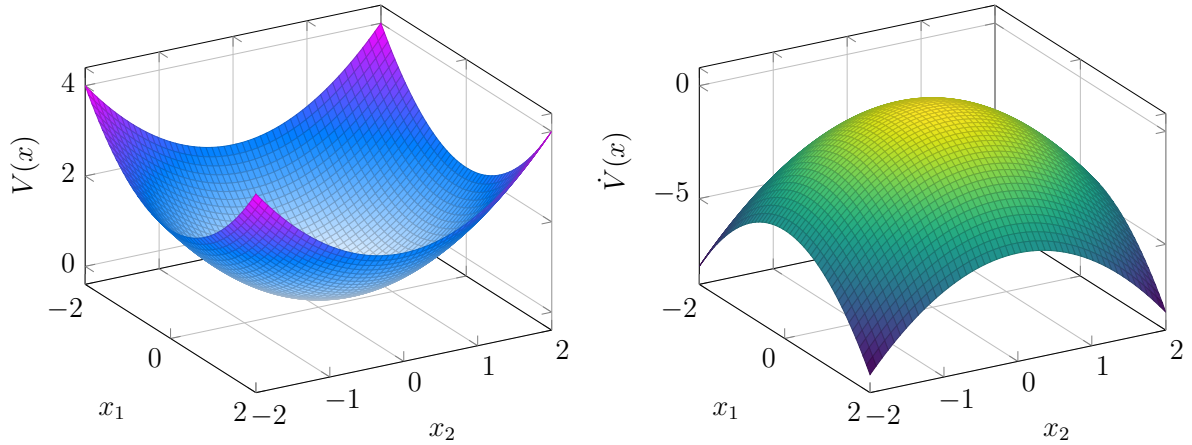
então o ponto de equilíbrio é estável. Além disso, se:

$$\dot{V} < 0, \forall x \in D - \{0\}, \quad (3.126)$$

então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. A representação geométrica da Função Candidata de Lyapunov e sua derivada é ilustrada pela Figura 1.

Quando se trata de sistemas dinâmicos que são tanto Lineares quanto Invariantes no Tempo (SLIT), podemos alcançar resultados particularmente sólidos.

Figura 1 – Função candidada de Lyapunov e sua derivada.



Fonte: O autor (2024).

3.7.1 Teorema de Lyapunov para SLITs

De acordo com [Khalil \(2002\)](#), a abordagem de estabilidade assintótica no sentido de Lyapunov, para um sistema SLIT autônomo dado por

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.127)$$

é alcançada se, e somente se, existe uma matriz simétrica definida positiva $Q = Q^T$ que satisfaça a seguinte equação de Lyapunov:

$$A^T P + PA = -Q. \quad (3.128)$$

A solução para esta equação é uma matriz $P = P^T$ também definida positiva.

Observação: A matriz Q , que é definida como simétrica e positiva, é uma entrada dada, e a matriz P é calculada de forma a satisfazer a equação (3.128).

Para um sistema descrito pela Equação (3.127) pode-se adotar a função candidada de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, onde P satisfaz a Equação (3.128) previamente mencionada. Agora, calculando a derivada de $V(x)$ em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + PA) x. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Dado que $A^T P + PA = -Q$, e substituindo na Equação (3.129):

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T(-Q)x \\ &= -x^T Q x,\end{aligned}\tag{3.130}$$

sendo Q uma matriz simétrica definida positiva. Agora, como Q é definida positiva, o termo $-x^T Q x$ será sempre menor que zero, a menos que $x = 0$. Portanto, conclui-se que:

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0; \quad \forall x \neq 0.\tag{3.131}$$

Garantindo a estabilidade do sistema linear invariante no tempo.

3.7.2 Lema de Barbalat

Outras possíveis extensões do Método Direto de Lyapunov podem ser desenvolvidas. Uma dessas extensões se baseia no conceito de Continuidade Uniforme de funções candidatas de Lyapunov e oferece uma alternativa ao Teorema de Estabilidade de Lyapunov, especialmente aplicável a sistemas não autônomos. Essa alternativa é conhecida como Lema de Barbalat. No contexto de sistemas não autônomos, o uso direto do Princípio de Invariância de LaSalle não é viável, tornando o Lema de Barbalat uma ferramenta valiosa na análise de estabilidade.

Em [Lavretsky e Wise \(2012\)](#), é apresentada a seguinte abordagem do Lema de Barbalat:

Para sistemas não autônomos de n -dimensões da forma

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad f(t, 0) = 0,\tag{3.132}$$

com o campo vetorial $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$. Para garantir a existência e a unicidade das soluções do sistema, assumimos que $f(t, x)$ é contínuo por partes em t e localmente Lipschitz-contínua em x , uniformemente em t .

Supondo que exista uma função candidata de Lyapunov $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$, cuja derivada temporal ao longo das trajetórias de (3.132) satisfaça

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)f(t, x) \leq -W(x) \leq 0,\tag{3.133}$$

para todo $x \in D$, sendo $W(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva semidefinida contínua em D . De acordo com o método direto de Lyapunov, a origem é estável, mas não necessariamente assintoticamente estável, uma vez que $W(x)$ não é estritamente positiva definida.

Seja

$$E = \{x \in D : W(x) = 0\}, \quad (3.134)$$

um conjunto de pontos em D onde W é zero. Fora de E , $\dot{V}(x) < 0$. Assim, pode-se conjecturar que as trajetórias do sistema que começam fora de E devem se aproximar de E à medida que o tempo tende ao infinito. Essa propriedade (se for verdadeira) seria equivalente ao teorema de invariância de LaSalle, que é válido apenas para sistemas autônomos. Além disso, se a conjectura for verdadeira e se $E = 0$, então a origem se tornaria assintoticamente estável.

O lema de Barbalat é dado por

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua em $[0, \infty)$. Suponha que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ existe e é finito. Então, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Para funções continuamente diferenciáveis, o lema de Barbalat pode ser reformulado da seguinte maneira:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável em $[0, \infty)$ e suponha que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe e é finito. Se a derivada da função $\dot{f}(t)$ for uniformemente contínua em $[0, \infty)$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$.

Observação: Em geral, o fato da derivada de uma função tender a zero não implica que a própria função tenha um limite. Além disso, o inverso não é verdadeiro. Na verdade, não existem relações genéricas entre funções e suas derivadas.

As bases teóricas da teoria de estabilidade para uma classe geral de equações diferenciais não lineares foram desenvolvidas e publicadas por Alexander Mikhailovich Lyapunov em sua tese de doutorado sobre “O Problema Geral da Estabilidade do Movimento”, que ele defendeu na Universidade de Moscou em 1892. A estabilidade de Lyapunov, juntamente com suas extensões de LaSalle, Yoshizawa, Barbashin e Krasovskii, forneceu o arcabouço necessário para o desenvolvimento do controle adaptativo (LAVRETSKY; WISE, 2012).

3.8 Controle Adaptativo

De acordo com Åström e Wittenmark (2013), no início da década de 1950, houve extensas pesquisas sobre controle adaptativo em conexão com o projeto de pilotos automáticos para aeronaves de alto desempenho, como o *North American X-15*, desenvolvido em 1954 pela empresa *North American Aviation* (atual *Rockwell International*), Figura 2. Essas aeronaves operam em uma ampla gama de velocidades e altitudes. Verificou-se que o controle de *feedback* linear comum de ganho constante poderia funcionar bem em uma condição de operação, mas não durante todo o regime de voo. Portanto, era necessário um controlador mais sofisticado que pudesse funcionar bem em uma ampla gama de condições operacionais. Após um esforço significativo de desenvolvimento, descobriu-se que a progra-

mação de ganhos era uma técnica adequada para sistemas de controle de voo. O interesse no controle adaptativo diminuiu em parte, porque, o problema do controle adaptativo era muito difícil de resolver, usando as técnicas disponíveis na época. Na década de 1960, houve muitas pesquisas em teoria de controle que contribuíram para o desenvolvimento do controle adaptativo. O espaço de estados e a teoria da estabilidade foram introduzidos. Houve também resultados importantes na teoria do controle estocástico. A programação dinâmica, introduzida por Bellman, aumentou a compreensão dos processos adaptativos. Contribuições fundamentais também foram feitas por Tsypkin, que mostrou que muitos esquemas de aprendizagem e controle adaptativo poderiam ser descritos em uma estrutura comum. Houve também grandes desenvolvimentos na identificação de Bystem. Um renascimento do controle adaptativo ocorreu na década de 1970, quando diferentes esquemas de estimativa foram combinados com vários métodos de projeto. Muitas aplicações foram relatadas, mas os resultados teóricos foram muito limitados.

Figura 2 – Vários sistemas avançados de controle de voo foram testados na aeronave experimental X-15.



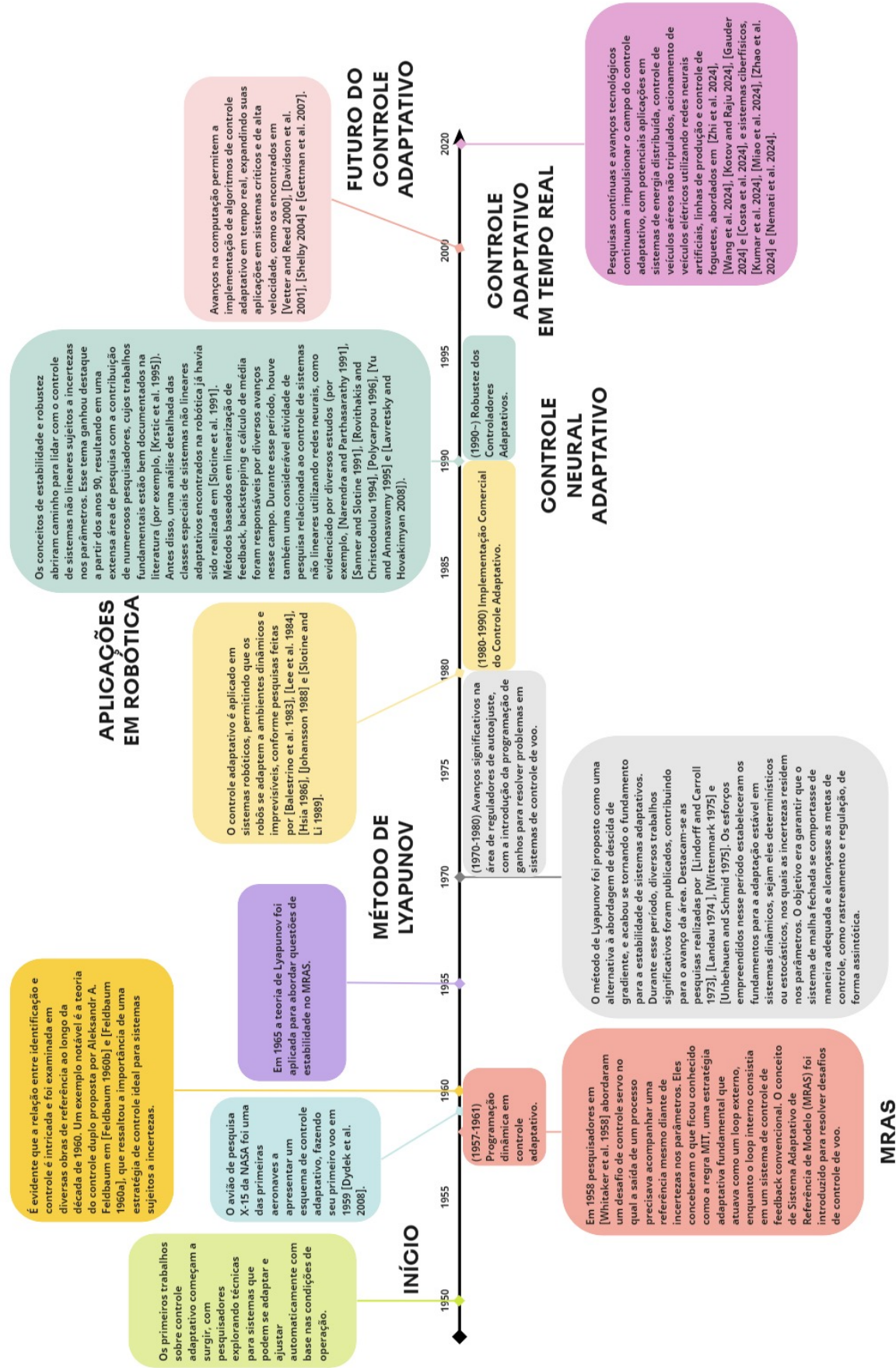
Fonte: [Site Cultura Aeronáutica](http://www.culturaaeronautica.blogspot.com/2018/02/north-american-x-15-o-aviao-mais-veloz.html)¹(2018).

No final da década de 1970 e início da década de 1980, surgiram provas da estabilidade dos sistemas adaptativos, embora sob pressupostos muito restritivos. Os esforços para fundir ideias de controle robusto e identificação de sistema são de particular relevância. A investigação da necessidade dessas suposições desencadeou novas e interessantes pesquisas sobre a robustez do controle adaptativo, bem como sobre controladores que são

¹ Disponível em: www.culturaaeronautica.blogspot.com/2018/02/north-american-x-15-o-aviao-mais-veloz.html. Acessado em: 11 nov. 2023.

universalmente estabilizadores. Pesquisas no final da década de 1980 e início da década de 1990 forneceram novos insights sobre a robustez dos controladores adaptativos. As investigações de sistemas não lineares levaram a um aumento significativo da compreensão do controle adaptativo. Ultimamente, também foi estabelecido que o controle adaptativo tem fortes relações com ideias sobre aprendizagem que estão surgindo no campo da ciência da computação. Tem havido muitos experimentos sobre controle adaptativo em laboratórios e na indústria. O rápido progresso na microeletrônica foi um forte estimulante. A interação entre teoria e experimentação resultou num desenvolvimento vigoroso do campo. Como resultado, de acordo com (ANAVATTI; SANTOSO; GARRATT, 2015), os controladores adaptativos começaram a aparecer comercialmente no início da década de 1980. No início dos anos 1990, o foco mudou para a robustez dos controladores adaptativos, buscando torná-los mais resilientes em face de incertezas e variações no sistema. A Fig. 3 descreve a linha do tempo da evolução do controle neuro-adaptativo robusto ao longo da história, juntamente com a contribuição das principais pesquisas até os dias atuais.

Figura 3 – Linha do tempo do controle neuro-adaptativo robusto.



Fonte: O autor (2024).

A principal razão para a introdução do controle adaptativo foi a obtenção de controladores que pudessem se adaptar às mudanças na dinâmicas do processo e nas características dos distúrbios. Verificou-se que técnicas adaptativas também podem ser utilizadas para proporcionar sintonia automática de controladores ([ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2013](#)).

De acordo [Landau et al. \(2011\)](#) um Controle Adaptativo abrange um conjunto de técnicas que fornecem uma abordagem sistemática para o ajuste automático de controladores em tempo real, a fim de atingir ou manter um nível desejado de desempenho do sistema de controle quando os parâmetros do modelo dinâmico da planta são desconhecidos e/ou mudam no tempo.

3.8.1 Controlador Adaptativo MRAC

MRAC é uma técnica para projetar um controlador adaptativo que ajusta os parâmetros do controlador de forma que a saída da planta real rastreie a saída do modelo de referência com a mesma entrada de referência ([SINGH; PAL, 2019](#)).

Em resumo, o interesse está no problema de regulação de saída com realimentação de estado para uma classe genérica de sistemas dinâmicos MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) com incertezas. Considerando o sistema MIMO dado em [Lavretsky e Wise \(2012\)](#):

$$\dot{x} = Ax + B\Lambda(u + f(x)), \quad (3.135)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o estado do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de controle conhecida, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são matrizes constantes conhecidas. Além disso, é assumido que Λ é diagonal, seus elementos λ_i são estritamente positivos, e o par $(A, B\Lambda)$ é controlável. A matriz Λ é introduzida para modelar falhas no controle ou erros de modelagem, significando que ganhos de controle incertos podem existir ou o projetista pode ter estimado incorretamente a eficácia do controle do sistema.

Na Equação (3.135), a função desconhecida e possivelmente não linear, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, representa a incerteza do sistema. É assumido que cada componente individual $f_i(x)$ de $f(x)$ pode ser expresso como uma combinação linear de N funções de base conhecidas localmente Lipschitz-contínuas $\phi_i(x)$ com coeficientes constantes desconhecidos ([LAVRETSKY; WISE, 2012](#)). Assim, a combinação linear, correspondente à incerteza do sistema, é representada na forma:

$$f(x) = \Theta^T \Phi(x), \quad (3.136)$$

sendo $\Theta \in \mathbb{R}^{N \times m}$ a matriz de parâmetros adaptativos a ser determinada e $\Phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_N(x))^T \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de funções de base conhecido.

O objetivo é projetar uma lei de controle adaptativo de retroalimentação de estado MIMO de modo que o estado do sistema x siga assintoticamente o estado $x_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^n$ do modelo de referência

$$\dot{x}_{\text{ref}} = A_{\text{ref}}x_{\text{ref}} + B_{\text{ref}}r(t), \quad (3.137)$$

sendo $A_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz Hurwitz, $B_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $r(t) \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de comando externo limitado.

Também é necessário que durante o rastreamento, todos os sinais no sistema de malha fechada permaneçam uniformemente limitados. Assim, dado um comando limitado $r(t)$, a entrada de controle u precisa ser escolhida de forma que o erro de rastreamento do estado

$$e(t) = x(t) - x_{\text{ref}}(t), \quad (3.138)$$

tenda uniformemente assintoticamente para zero, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_{\text{ref}}(t)\| = 0. \quad (3.139)$$

Se as matrizes A e B fossem conhecidas, seria possível calcular e aplicar a lei de controle ideal de ganho fixo

$$u = K_x^T x + K_r^T r - \Theta^T \Phi(x), \quad (3.140)$$

e obter o sistema de malha fechada:

$$\dot{x} = (A + B\Lambda K_x^T)x + B\Lambda K_r^T r. \quad (3.141)$$

Comparando a Equação (3.141) com a dinâmica de referência desejada da Equação (3.137), segue-se que para a existência de um controlador na forma da Equação (3.140), os ganhos de controle ideais desconhecidos, K_x e K_r , devem satisfazer as condições de correspondência

$$A + B\Lambda K_x^T = A_{\text{ref}}, \quad (3.142)$$

$$B\Lambda K_r^T = B_{\text{ref}}. \quad (3.143)$$

Supondo que essas condições de casamento sejam satisfeitas, é fácil perceber que o uso da Equação (3.140) resulta em um sistema de malha fechada exatamente igual ao modelo de referência. Consequentemente, para qualquer sinal de entrada de referência

limitado $r(t)$, o controlador de ganho fixo da Equação (3.140) proporciona um desempenho global de rastreamento assintótico uniforme.

Vale notar que, dado $(A, B, \Lambda, A_{\text{ref}}, B_{\text{ref}})$, não há garantia de que os ganhos ideais K_x e K_r existam de forma que as condições de correspondência das Equações (3.142) e (3.143) sejam satisfeitas. Em outras palavras, a lei de controle da Equação (3.140) pode não ser capaz de atender ao objetivo de projeto. No entanto, frequentemente na prática, a estrutura de A é conhecida, e as matrizes de modelo de referência $A_{\text{ref}}, B_{\text{ref}}$ são escolhidas de forma que o sistema das Equações (3.142) e (3.143) tenha pelo menos um par de soluções ideais (K_x, K_r) .

Assumindo que K_x e K_r existam, consideramos a seguinte lei de controle:

$$u = \hat{K}_x^T x + \hat{K}_r^T r - \hat{\Theta}^T \hat{\Phi}(x), \quad (3.144)$$

sendo $\hat{K}_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\hat{K}_r \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ as estimativas das matrizes desconhecidas ideais K_x , K_r e Θ , respectivamente. Esses parâmetros estimados serão gerados online por meio da análise inversa de Lyapunov. Substituindo a Equação (3.144) na Equação (3.135), a dinâmica do sistema de malha fechada pode ser escrita como

$$\dot{x} = (A + B\Lambda\hat{K}_x^T)x + B\Lambda\left(\hat{K}_r^T r - (\hat{\Theta} - \Theta)^T \Phi(x)\right). \quad (3.145)$$

Subtraindo a Equação (3.137) da Equação (3.145), é calculada a dinâmica de malha fechada do vetor do erro de rastreamento n -dimensional $e(t) = x(t) - x_{\text{ref}}(t)$:

$$\dot{e} = (A + B\Lambda\hat{K}_x^T)x + B\Lambda\left(\hat{K}_r^T r - (\hat{\Theta} - \Theta)^T \Phi(x)\right) - A_{\text{ref}}x_{\text{ref}} - B_{\text{ref}}r. \quad (3.146)$$

Com as condições de correspondência das Equações (3.142) e (3.143) em vigor, obtemos ainda

$$\dot{e} = A_{\text{ref}}e + B\Lambda\left[(\hat{K}_x - K_x)^T x + (\hat{K}_r - K_r)^T r - (\hat{\Theta} - \Theta)^T \Phi(x)\right]. \quad (3.147)$$

Seja $\Delta K_x = \hat{K}_x - K_x$, $\Delta K_r = \hat{K}_r - K_r$ e $\Delta\Theta = \hat{\Theta} - \Theta$ representando os erros de estimação de parâmetros. Em termos desses erros, a dinâmica do erro de rastreamento se torna

$$\dot{e} = A_{\text{ref}}e + B\Lambda[\Delta K_x^T x + \Delta K_r^T r - \Delta\Theta^T \Phi(x)]. \quad (3.148)$$

Introduzindo as taxas de adaptação: $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0$, $\Gamma_r = \Gamma_r^T > 0$, $\Gamma_\Theta = \Gamma_\Theta^T > 0$, e voltando para a análise de estabilidade da dinâmica do erro de rastreamento da Equação

(3.148), considera-se uma função de Lyapunov quadrática globalmente radialmente ilimitada no formato

$$V(e, \Delta K_x, \Delta K_r, \Delta \Theta) = e^T P e + \text{tr} \left[(\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta K_x + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \Delta K_r + \Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \Delta \Theta) \Lambda \right], \quad (3.149)$$

sendo $P = P^T > 0$ a solução da equação algébrica de Lyapunov:

$$P A_{\text{ref}} + A_{\text{ref}}^T P = -Q, \quad (3.150)$$

para algum $Q = Q^T > 0$. Então, a derivada temporal de V , avaliada ao longo das trajetórias da Equação (3.148), pode ser calculada:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2 \text{tr} \left[(\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\hat{K}}_r + \Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\hat{\Theta}}) \Lambda \right]. \quad (3.151)$$

Realizando as devidas substituições e selecionando as leis adaptativas de acordo com

$$\dot{\hat{K}}_x = -\Gamma_x x e^T P B, \quad (3.152)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = -\Gamma_r r(t) e^T P B, \quad (3.153)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma_\Theta \Phi(x) e^T P B. \quad (3.154)$$

Assim, a derivada da função candidata de Lyapunov $\dot{V}$, conforme apresentada na Equação (3.151), torna-se globalmente semidefinida negativa.

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0. \quad (3.155)$$

O desenvolvimento completo do cálculo algébrico de $\dot{V}$ pode ser encontrado no Anexo A.

Portanto, a dinâmica do erro de malha fechada é uniformemente estável. Assim, o erro de rastreamento $e(t)$ e os erros de estimação de parâmetros $\Delta K_x(t)$, $\Delta K_r(t)$ e $\Delta \Theta(t)$ são uniformemente limitados, assim como as estimativas de parâmetros $\hat{K}_x(t)$, $\hat{K}_r(t)$ e $\hat{\Theta}(t)$. Dado que $r(t)$ é limitado e A_{ref} é Hurwitz, então $x_{\text{ref}}(t)$ e $\dot{x}_{\text{ref}}(t)$ são limitados. Logo, o estado do sistema $x(t)$ é uniformemente limitado, e a entrada de controle $u(t)$ na Equação (3.144) também é limitada. Isso implica que $\dot{x}(t)$ é limitado e, portanto, $\dot{e}(t)$ é limitado. Além disso, a segunda derivada temporal de $V(t)$:

$$\ddot{V} = -2e^T Q \dot{e}, \quad (3.156)$$

é limitada, e assim $\dot{V}(t)$ é uniformemente contínua. Além disso, dado que $V(t)$ é limitado inferiormente e $\dot{V}(t) \leq 0$, então o uso do lema de Barbalat leva a $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$. Formalmente, é provado que o erro de rastreamento $e(t)$ converge global, uniforme e assintoticamente para a origem, conforme Equação (3.139). Dessa forma, o problema de rastreamento de comando MIMO para as dinâmicas do sistema, dado pela Equação (3.135), está resolvido (LAVRETSKY; WISE, 2012).

3.9 Controlador Robusto Adaptativo

Para um projeto de controlador MRAC na presença de perturbações limitadas, podemos considerar o seguinte sistema dinâmico MIMO dado em Lavretsky e Wise (2012):

$$\dot{x} = A_{ref}x + B\Lambda(u + \Theta^T\Phi(x)) + B_{ref}y_{cmd} + \xi(t), \quad (3.157)$$

cujas saída regulada é

$$y = C_{ref}x. \quad (3.158)$$

O sistema está operando na presença de uma perturbação dependente do tempo uniformemente limitada $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, dada por

$$\|\xi(t)\| \leq \xi_{\max}, \quad (3.159)$$

com seu limite superior conhecido e constante $\xi_{\max} > 0$. $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz de eficácia de controle desconhecida e $\Theta \in \mathbb{R}^{N \times m}$ é uma matriz de parâmetros adaptativos. Supondo que as matrizes constantes (A_{ref} , B , B_{ref} , C_{ref}) são conhecidas, o par (A_{ref} , $B\Lambda$) é controlável, e A_{ref} é Hurwitz.

O objetivo de controle é projetar um sistema MRAC de realimentação de estados para permitir o rastreamento limitado da dinâmica do modelo de referência que é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ref} &= A_{ref}x_{ref} + B_{ref}y_{cmd}, \\ y_{ref} &= C_{ref}x_{ref}, \end{aligned} \quad (3.160)$$

com a saída y_{ref} . O modelo de referência é conduzido por um comando dependente do tempo e limitado $y_{cmd} \in \mathbb{R}^m$, e o objetivo de controle consiste em encontrar um controlador de realimentação de estados u para forçar a saída do sistema y a rastrear um comando y_{cmd} , na presença das incertezas paramétricas do sistema e mantendo o restante dos sinais uniformemente limitados no tempo.

Com base na Equação (3.157), escolhemos a entrada de controle como

$$u = -\hat{\Theta}^T \Phi(x), \quad (3.161)$$

sendo $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ a matriz de parâmetros adaptativos a ser determinada posteriormente. Substituindo a Equação (3.161) na Equação (3.157), obtém-se

$$\dot{x} = A_{\text{ref}}x - B\Lambda\Delta\Theta^T\Phi(x) + B_{\text{ref}}y_{\text{cmd}} + \xi(t), \quad (3.162)$$

em que

$$\Delta\Theta = \hat{\Theta} - \Theta, \quad (3.163)$$

é a matriz dos erros de estimativa dos parâmetros. Seja

$$e = x - x_{\text{ref}}, \quad (3.164)$$

o erro de rastreamento de estados. Subtraindo a dinâmica do modelo de referência, dada pela Equação (3.160), da dinâmica do sistema da Equação (3.162), obtém-se a dinâmica do erro de rastreamento:

$$\dot{e} = A_{\text{ref}}e - B\Lambda\Delta\Theta^T\Phi(x) + \xi(t). \quad (3.165)$$

Uma função quadrática de Lyapunov radialmente ilimitada é escolhida na forma:

$$V(e, \Delta\Theta) = e^T P e + \text{traço}(\Delta\Theta^T \Gamma_{\Theta}^{-1} \Delta\Theta \Lambda), \quad (3.166)$$

sendo $\Gamma_{\Theta} = \Gamma_{\Theta}^T > 0$ as taxas constantes de adaptação e $P = P^T > 0$ é a única solução simétrica definida positiva da equação algébrica de Lyapunov

$$P A_{\text{ref}} + A_{\text{ref}}^T P = -Q, \quad (3.167)$$

com $Q = Q^T > 0$. Diferenciando o tempo de V , ao longo das trajetórias da Equação (3.165), obtém-se

$$\dot{V}(e, \Delta\Theta) = -e^T Q e - 2e^T P B \Lambda \Delta\Theta^T \Phi(x) + 2e^T P \xi(t) + 2 \text{traço} \left(\Delta\Theta^T \Gamma_{\Theta}^{-1} \dot{\Delta\Theta} \Lambda \right). \quad (3.168)$$

Aplicando a identidade de traço vetorial

$$a^T b = \text{traço}(b a^T), \quad (3.169)$$

obtém-se

$$\dot{V}(e, \Delta\Theta) = -e^T Q e + 2 \operatorname{traço} \left(\Delta\Theta^T \left\{ \Gamma_{\Theta}^{-1} \dot{\Theta} - \Phi e^T P B \right\} \Lambda \right) + 2e^T P \xi(t), \quad (3.170)$$

e a lei adaptativa

$$\dot{\Theta} = \Gamma_{\Theta} \Phi(x) e^T P B. \quad (3.171)$$

Então,

$$\dot{V}(e, \Delta\Theta) = -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\|e\| \lambda_{\max}(P) \xi_{\max}, \quad (3.172)$$

e consequentemente, $\dot{V} < 0$ fora do conjunto

$$E_0 = \left\{ (e, \Delta\Theta) : \|e\| \leq 2 \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \xi_{\max} = e_0 \right\}. \quad (3.173)$$

De acordo [Lavretsky e Wise \(2012\)](#), as trajetórias $e(t)$ da dinâmica do erro (Equação (3.165)) entram em um conjunto compacto $(\Omega_0 \supset E_0) \subset \mathbb{R}^n$ em um tempo finito e permanecerão lá para todo o tempo futuro. No entanto, Ω_0 não é compacto no espaço $(e, \Delta\Theta)$. Na verdade, Ω_0 é ilimitado, pois os erros de estimativa de parâmetros $\Delta\Theta$ não têm restrições. Portanto, dentro de Ω_0 , $\dot{V}$ pode se tornar positivo e, como consequência, os erros de parâmetros $\Delta\Theta$ podem crescer ilimitadamente, mesmo que a norma do erro de rastreamento permaneça finita em todos os momentos. Esse fenômeno é conhecido como “desvio de parâmetro”. Ele é causado pelo termo de perturbação $\xi(t)$. Esse argumento mostra que as leis MRAC (Equação (3.171)) não são robustas em relação a perturbações limitadas, não importando quão pequenas elas sejam.

3.9.1 Modificações de Escape

Uma “modificação de escape” (*leakage modification*) em sistemas adaptativos pode se referir a um processo pelo qual informações ou parâmetros são permitidos a vazarem, escapar ou serem gradualmente esquecidos de um sistema adaptativo. Isso pode ser relevante em sistemas onde é importante equilibrar a adaptação às mudanças nas condições do sistema com a estabilidade e a capacidade de rastrear mudanças.

A modificação de escape pode se referir a uma estratégia onde os algoritmos adaptativos são projetados de forma que eles “vazem” ou esqueçam gradualmente informações passadas ou ajustem suas taxas de adaptação com o tempo para evitar respostas excessivamente sensíveis a variações temporárias. Isso pode ajudar a manter a estabilidade do sistema e garantir que a adaptação ocorra de maneira mais suave e equilibrada.

De acordo com [Yang et al. \(2009\)](#), os únicos resultados de estabilidade garantidos para controle adaptativo são convergência assintótica do erro de rastreamento e limitação da estimativa de peso, que é muito mais fraca do que a estabilidade exponencial. Uma consequência é que os sistemas de controle adaptativo não têm garantia de permanecer limitados quando perturbados. Enquanto os sistemas lineares estáveis permanecem limitados na presença de distúrbios limitados, os sistemas de controle adaptativo podem exibir um desvio ilimitado de parâmetros mesmo para distúrbios limitados.

Isso levou a várias modificações para garantir a limitação de sinais de malha fechada ([IOANNOU; SUN, 1996](#)). Neste trabalho, será empregada a modificação- σ para analisar a estabilidade do sistema de controle adaptativo proposto.

3.9.1.1 Modificação- σ

Conforme [Lavretsky e Wise \(2012\)](#), a lei adaptativa com a modificação- σ é:

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma_{\Theta}(\Phi(x)e^T P B - \sigma \hat{\Theta}), \quad (3.174)$$

sendo σ uma constante estritamente positiva. Em essência, essa modificação adiciona amortecimento à lei adaptativa ideal.

O termo de modificação sigma na Equação (3.174) é usado para amortecer possíveis oscilações no sinal de controle que poderiam ser induzidas no caso de adaptação de alto ganho ([FRAVOLINI et al., 2015](#)).

De acordo com [Orłowski et al. \(2022\)](#), a modificação- σ não garante, em geral, que o estado alcance uma vizinhança arbitrariamente pequena da origem (para σ suficientemente pequeno) e permaneça lá indefinidamente, mesmo em contexto sem atraso.

Em [Stepanyan e Kalmanje \(2010\)](#), é apresentada uma análise completa de desempenho, contemplando análise assintótica e transitória da arquitetura de controle adaptativo de referência de modelo modificado (M-MRAC) com modificação- σ .

3.10 Controle Neural

Um projeto de controle típico começa com a modelagem, que é basicamente um procedimento de construção de uma descrição matemática (como um conjunto de equações diferenciais ordinárias) para o sistema físico a ser controlado. Este modelo selecionado precisa refletir as principais características do processo físico. Modelos precisos nem sempre são melhores. Eles podem exigir um projeto de controle desnecessariamente complexo e exigir cálculos excessivos. Do ponto de vista do controle, a chave na modelagem é capturar os efeitos essenciais na dinâmica do sistema dentro de uma faixa operacional de interesse. Além disso, um bom modelo também deve fornecer alguma caracterização

das incertezas do sistema – as chamadas incógnitas desconhecidas no processo físico. Tal caracterização pode ser usada posteriormente para executar um projeto robusto e/ou adaptativo ou para executar uma análise baseada em Monte Carlo, eventualmente levando à quantificação e avaliação da estabilidade, desempenho e robustez do sistema de malha fechada (LAVRETSKY; WISE, 2012).

De acordo com Levine (2011), As técnicas de identificação e controle de sistemas *online* desenvolvidas para sistemas não lineares podem ser classificadas em duas categorias, paramétricas e não paramétricas. As técnicas paramétricas assumem que a forma funcional da não linearidade desconhecida é conhecida, com base nos princípios de modelagem física, mas que os parâmetros do modelo são desconhecidos. Técnicas não paramétricas são necessárias quando a forma funcional da não linearidade desconhecida é ela mesma desconhecida. Neste caso, uma família geral de aproximadores de função é selecionada com base nas propriedades conhecidas da família de aproximação e nas características da aplicação. Semelhante às técnicas paramétricas, o objetivo da abordagem não paramétrica ainda é selecionar um conjunto de parâmetros para obter uma aproximação ótima da função desconhecida.

3.10.1 Funções de Base

Segundo Lavretsky e Wise (2012), uma rede neural artificial *feedforward* é um mapa estático de múltiplas entradas e múltiplas saídas composto por muitos elementos de processamento não lineares interconectados (neurônios) operando em paralelo. Os neurônios, os elementos básicos de processamento das redes neurais, possuem dois componentes principais: um peso e uma função de ativação não linear.

Para o presente trabalho, a função de ativação de interesse são as funções de base radial RBF (*Radial Basis Function*), devido a:

- **Universalidade Aproximadora:** As redes neurais RBF têm sido largamente utilizadas em problemas que envolvem aproximação de funções e classificação de padrões (SILVA; SPATTI; FLAUZINO, 2010a);
- **Adaptação Online e Robustez:** De acordo com Heidari, Navimipour e Unal (2023), as redes neurais RBF podem ser treinadas de forma *online*, o que significa que elas podem se adaptar continuamente às mudanças no ambiente ou no sistema em tempo real. Além disso, apresentam capacidade de generalização robusta e boa tolerância a ruídos. Mesmo se o sistema se desviar do comportamento esperado, a rede neural RBF pode ajustar seus parâmetros para se adequar à nova dinâmica do sistema;

- **Facilidade de Implementação:** As redes neurais RBF são relativamente simples de implementar e treinar, especialmente quando comparadas a outras arquiteturas de redes neurais como MLP (*Multi-Layer Perceptron*), o treinamento de redes RBF é normalmente muito mais rápido em relação à rede MLP (CHEN; COWAN; GRANT, 1991). Isso torna sua aplicação mais viável em sistemas de controle adaptativo.

3.10.2 Função de Base Radial

Uma RBF é uma função Gaussiana na forma:

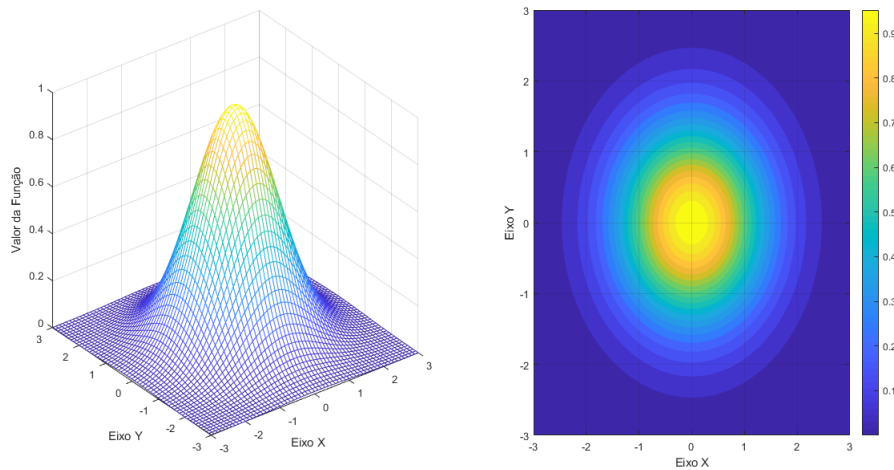
$$\varphi(x, x_c) = e^{-(x-x_c)^T W (x-x_c)} = e^{-\|x-x_c\|_W^2}, \quad (3.175)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ a entrada, $x_c \in \mathbb{R}^n$ é o centro, e $W = W^T > 0$ é uma matriz simétrica positiva definida. Na maioria das vezes, escreveremos $\varphi(x, x_i) = \varphi_i(x)$ para abreviar e denotar uma RBF que está centrada no i -ésimo centro x_i .

Uma RBF genérica pode ser definida como $\varphi(x) = \varphi(\|x - x_c\|_W)$, onde $\|x\|_W = \sqrt{x^T W x}$ denota a norma Euclidiana ponderada de um vetor x . Além disso, é necessário que $\varphi(x)$ seja integrável em $\mathbb{R}^n$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$. Essa função de ativação depende apenas da distância ponderada $r = \|x - x_c\|_W$ entre sua entrada atual x e o centro x_c (LAVRETSKY; WISE, 2012).

A RBF Gaussiana na Equação (3.175) é um exemplo desse tipo de função de ativação, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4 – Função de Base Radial Gaussiana



Fonte: O autor (2024).

Em Arabi et al. (2019), são utilizadas funções de base radial para garantir o desempenho de uma arquitetura neuro-adaptativa, para controle por modelo de referência de sistemas dinâmicos incertos.

3.10.3 Rede Neural de Funções de Base Radial

No campo da engenharia, os profissionais têm se dedicado à emulação das funções biológicas de nível elementar presentes no cérebro por meio das redes neurais artificiais. Essa abordagem visa aproveitar os princípios intrínsecos da atividade cerebral para enfrentar desafios complexos de controle e solucionar problemas que demandam soluções inovadoras. Ao imitar a forma como as redes neurais biológicas operam, os engenheiros estão explorando novas fronteiras no desenvolvimento de sistemas adaptativos e inteligentes, que podem se adaptar, aprender e otimizar o desempenho diante de cenários desafiadores e variados. Esse avanço promissor na engenharia permite explorar o potencial das redes neurais artificiais como ferramentas versáteis para aprimorar diversas aplicações, desde a automação industrial até a tomada de decisões autônomas em ambientes complexos.

Por exemplo, para alguns problemas de controle, uma rede neural pode ser treinada para lembrar como regular um sistema, fornecendo repetidamente exemplos de como realizar tal tarefa. Após esse aprendizado, a rede neural pode ser usada para recuperar a entrada de controle para cada valor da saída detectada (LEVINE, 2011).

De acordo com Lavretsky e Wise (2012), uma Rede Neural RBF (*Feedforward*) é um mapeamento de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$ na forma:

$$NN(x) = W^T \begin{bmatrix} \exp(-\|x - C_1\|^2 w_1) \\ \vdots \\ \exp(-\|x - C_n\|^2 w_n) \end{bmatrix} + b = \underbrace{\begin{bmatrix} W_0^T & b \end{bmatrix}}_{W^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Phi(x)} = W^T \Phi(x), \quad (3.176)$$

sendo $W = [W_0^T \quad b]^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}$ é o vetor de pesos, $C_i \in \mathbb{R}^n$ é o centro do i -ésimo campo receptivo, $w_i = w_i^T > 0$ é a matriz de ponderação de norma, $b \in \mathbb{R}^m$ é o bias da rede neural, e $\Phi(x) = [\varphi_1(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x) \quad 1]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor de funções de base, cujos componentes são as funções de base radial (funções de ativação) $\varphi_i(x)$ e a função unitária.

Frequentemente, em aplicações práticas, a matriz simétrica positiva definida w_i na Equação (3.176) é escolhida como diagonal e na forma:

$$w_i = \frac{1}{2\sigma_i^2}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.177)$$

sendo σ_i a largura da i -ésima função Gaussiana. Nesse caso, a expressão

$$\varphi_i(x) = e^{-\frac{\|x - C_i\|^2}{2\sigma_i^2}}, \quad (3.178)$$

torna-se o componente i -ésimo do vetor $\Phi(x)$ na Equação (3.176). Além disso, os componentes do regressor podem ser construídos usando a função Gaussiana:

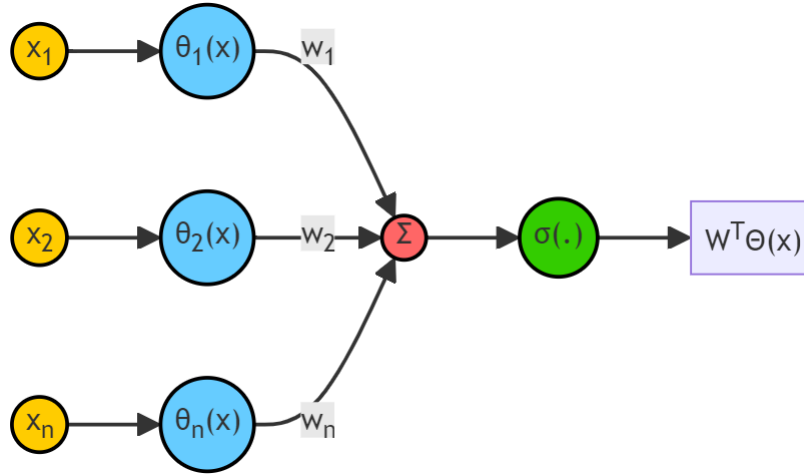
$$\varphi_i(x) = e^{-\left(\frac{n}{d_{\max}^2}\right)\|x - C_i\|^2}, \quad (3.179)$$

sendo o desvio padrão (largura) σ , fixado de acordo com a dispersão dos centros C_i , n é o número de centros e $d_{\max}$ é a distância máxima entre os centros escolhidos. Nesse caso, o desvio padrão σ de todos os componentes da RBF Gaussiana isotrópica é fixado em:

$$\sigma = \frac{d_{\max}}{\sqrt{2n}}. \quad (3.180)$$

Esta fórmula garante que as RBFs individuais não sejam muito pontiagudas nem muito planas, evitando ambas as condições extremas (LAVRETSKY; WISE, 2012). A Figura 5 ilustra a arquitetura de uma rede neural RBF.

Figura 5 – Arquitetura de uma rede neural RBF.



Fonte: O autor (2024).

As redes neurais tradicionais têm alguns problemas na seleção de parâmetros, como convergência lenta, fácil queda na otimização local e sobreajuste (*overfitting*). Nos últimos anos, a aplicação de meta-heurísticas no treinamento de redes neurais atraiu a atenção de muitos pesquisadores, e o desempenho das redes neurais foi bastante aprimorado. No entanto, muitas deficiências ainda precisam ser superadas, como baixa velocidade de convergência e baixa capacidade de pesquisa inteligente (WU et al., 2023).

As redes de funções de base radial oferecem uma arquitetura simples, generalização robusta, boa tolerância a ruídos e aprendizado online. Além disso, do ponto de vista da generalização, as redes RBF devem reagir de forma eficaz aos padrões não utilizados durante o treinamento (HEIDARI; NAVIMIPOUR; UNAL, 2023).

3.10.4 Teorema da Aproximação Universal

Demonstra-se que redes neurais *feedforward* são capazes de aproximar classes genéricas de funções em conjuntos compactos e dentro de qualquer tolerância pré-especificada. Esta propriedade das NNs (*Neural Networks*) *feedforward* é frequentemente chamada de aproximação universal, enquanto as próprias redes neurais são frequentemente chamados de aproximadores universais (LAVRETSKY; WISE, 2024).

Segundo Lavretsky e Wise (2024), o Teorema da Aproximação Universal para redes neurais RBF é dado por

Seja $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, limitada e contínua, e assuma que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0. \quad (3.181)$$

Então, para qualquer função contínua $f(x)$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma Rede Neural de Função de Base Radial (RN-FBR) com N neurônios, um conjunto de centros $\{C_i\}_{i=1}^N$, e uma largura comum $\sigma > 0$,

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^N W_i \underbrace{\varphi\left(\frac{x - C_i}{\sigma}\right)}_{\varphi_i(x)} = W^T \Phi(x), \quad (3.182)$$

tal que

$$\|f(x) - \text{NN}(x)\|_{L_2}^2 = \int_{\|x\| \leq r} (\varphi(x) - \text{NN}(x))^2 dx \leq \varepsilon = O\left(N^{-\frac{1}{n}}\right). \quad (3.183)$$

Além disso, o erro de aproximação da rede neural é medido pela norma L_2 na bola de raio r .

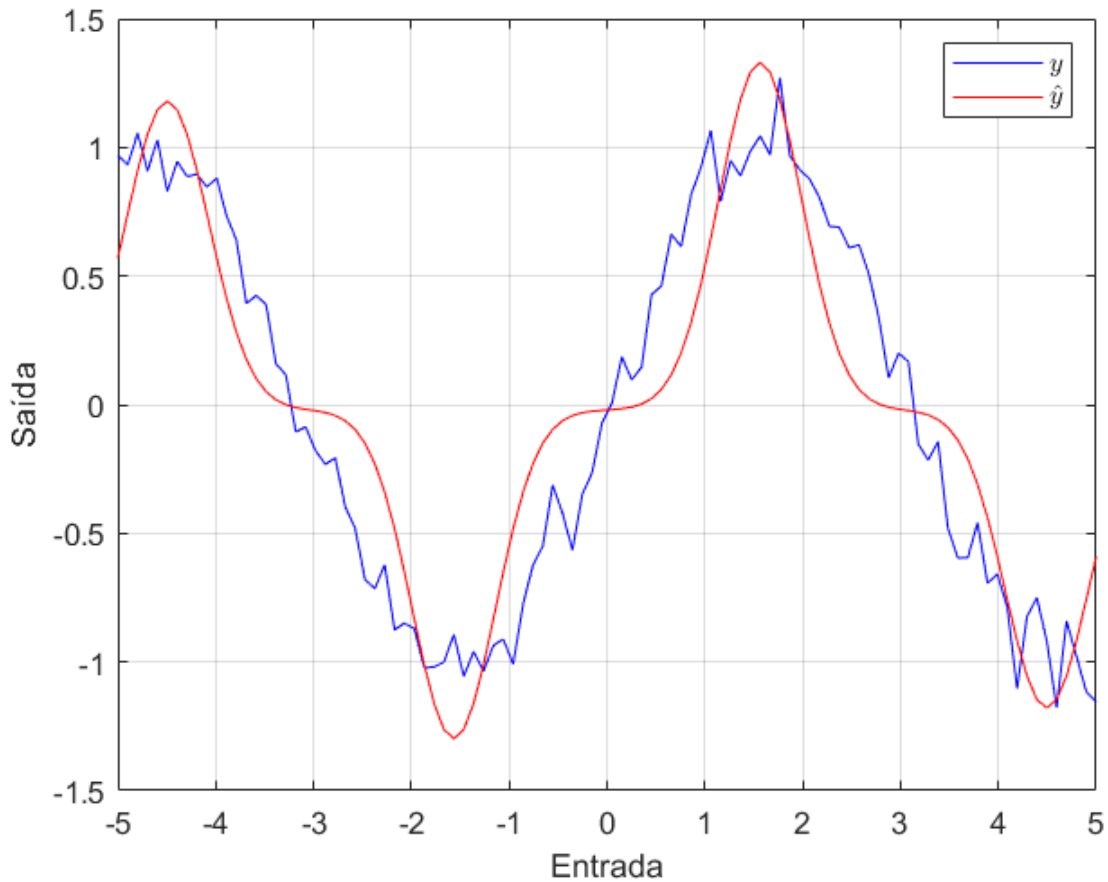
Em conclusão, Lavretsky e Wise (2024) apresentam as principais características e propriedades das redes neurais RBF:

- RN-FBR são aproximadores universais.
- Uma RN-FBR depende das distâncias euclidianas entre o vetor de entrada x e os centros C_i .
- A taxa de aproximação para as redes do tipo RN-FBR é da ordem $O\left(N^{-\frac{1}{2n}}\right)$, e consequentemente, diminui exponencialmente à medida que a dimensão do vetor de entrada x aumenta. Esse fenômeno é chamado de “maldição da dimensionalidade” (devido a R. E. Bellman).

- Uma RBF tem um suporte local, isso implica na capacidade de aprendizado e adaptação da rede.

A Figura 6 ilustra um exemplo de aproximação de curva através de uma RN-FBR com uma única camada oculta contendo 10 neurônios. A rede estima os pesos e, em seguida, gera uma curva aproximada $\hat{y}$ da função $f(x) = \sin(x) + \xi(x)$, usando as funções de base radial, sendo $\xi(x)$ um ruído gaussiano branco.

Figura 6 – Aproximação de Curva usando RBFN



Fonte: O autor (2024).

Para este exemplo, a entrada x é uma sequência de 100 pontos igualmente espaçados no intervalo de -5 a 5 . A saída y é a soma de $\sin(x)$ e um termo de ruído $\xi(x)$, onde $\xi(x)$ é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e desvio padrão 0.1 . Este ruído segue uma distribuição normal (ou gaussiana) $\mathcal{N}(0, 0.1^2)$, que é comumente usada para modelar incertezas e ruídos em dados devido às suas propriedades estatísticas desejáveis, como a média zero (indicando que o ruído não introduz viés) e a variância finita (permitindo controle sobre a intensidade do ruído). A RN-FBR é treinada com os dados de entrada x e saídas y , a meta de erro é definida como 0.1 e a largura das funções de base radial é 0.5 . O número de neurônios na camada oculta é definido como 10 , e há 1 neurônio na camada de saída.

3.10.5 Métricas de Avaliação

Projetos de *machine learning* e ciência de dados muitas vezes envolvem tarefas de classificação e regressão. A classificação agrupa dados em categorias, em contraste, a regressão foca na previsão de valores numéricos. Cada tipo de problema requer métricas específicas para avaliação. Nesta pesquisa, são exploradas as métricas R^2 , MAE, MAPE, MSE e RMSE, usadas para avaliar modelos de regressão. Apesar de alguns autores utilizarem apenas a métrica MSE para avaliar e comparar modelos de redes RBF e MLP, como em [Silva, Spatti e Flauzino \(2010b\)](#).

Em um estudo feito por [Carmo e Silva \(2023\)](#), os autores investigaram e identificaram um conjunto de métricas voltadas para o processo de análise da eficiência de algoritmos de previsão em geral, descrevendo as fórmulas de cálculo de algumas dessas métricas, como:

- Coeficiente de Determinação (R^2)

O coeficiente de determinação R^2 , mede quanta variabilidade nos dados é explicada pelo modelo. Seus valores variam de 0 a 1, onde 1 indica um modelo que explica perfeitamente os dados. A fórmula é:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (3.184)$$

sendo y_i os valores observados, $\hat{y}_i$ são os valores previstos e $\bar{y}$ é a média dos valores observados.

- Erro Médio Absoluto (MAE)

O MAE calcula a média das diferenças absolutas entre os valores previstos e os reais, refletindo o erro médio em unidades originais dos dados. A fórmula é:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (3.185)$$

- Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE)

O MAPE expressa o erro médio como uma porcentagem dos valores reais, facilitando a interpretação relativa ao tamanho dos valores previstos. A fórmula é:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|. \quad (3.186)$$

- Erro Quadrático Médio (MSE)

O MSE mede a média dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os previstos, penalizando mais fortemente grandes erros. Sua fórmula é:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3.187)$$

- Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)

A RMSE é a raiz quadrada do MSE, trazendo a métrica de volta à mesma unidade dos dados originais, o que facilita a interpretação. A fórmula é:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (3.188)$$

Essas métricas fornecem diferentes perspectivas sobre a performance dos modelos de regressão. O R^2 ajuda a entender a proporção da variância explicada pelo modelo, mas não deve ser usado isoladamente. O MAE e o MAPE são de fácil interpretação, enquanto o MSE e o RMSE são úteis para identificar grandes erros. Usar uma combinação dessas métricas oferece uma visão mais abrangente do desempenho do modelo.

3.11 Recuperação de Desempenho

De acordo com [Yucelen e Johnson \(2013\)](#), para recuperação de desempenho em estado estacionário do sistema controlado em malha fechada por métodos adaptativos, um sinal governador de comando é proposto.

O governador de comando é um sistema dinâmico que ajusta a trajetória de um comando dado para seguir um sistema de referência ideal, capturando um comportamento desejado do sistema dinâmico em malha fechada durante o tempo transitório. Especificamente, é demonstrado que o sistema dinâmico incerto não linear controlado pode se aproximar do sistema de referência ideal escolhendo o parâmetro de projeto do governador de comando ([YUCELEN; JOHNSON, 2013](#)). Além disso, um elemento adaptativo é usado para garantir assintoticamente que o erro entre o sistema dinâmico incerto controlado e o sistema de referência ideal seja reduzido a longo prazo.

A metodologia proposta pelo autor garante o desempenho em estado transitório e estacionário em malha fechada, e pode moldar a resposta transitória do sistema, ajustando a trajetória da referência com o governador de comando.

Segundo [Yucelen e Johnson \(2013\)](#), a arquitetura de controle que utiliza o governador de comando, para o problema de controle adaptativo com incerteza não paramétrica, é dada por

$$c(t) = c_a(t) + G_{gc}g(t), \quad (3.189)$$

sendo $c(t) \in \mathbb{R}^m$, o comando de referência total, $c_d(t) \in \mathbb{R}^m$ é o comando dado uniformemente contínuo e limitado, e $G_{gc}g(t) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal do governador de comando, com $G_{gc} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sendo a matriz definida por

$$G_{gc} = K_2^{-1}B^L = K_2^{-1}(B^TB)^{-1}B^T, \quad (3.190)$$

e $g(t) \in \mathbb{R}^n$ sendo a saída do governador de comando gerada por

$$\dot{\Psi}(t) = -\lambda\Psi(t) + \lambda e(t), \quad \Psi(0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.191)$$

$$g(t) = \lambda\Psi(t) + (A_r - \lambda I_n)e(t), \quad (3.192)$$

sendo $\Psi(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado do governador de comando e $\lambda \in \mathbb{R}^+$ é o ganho do governador de comando.

[Yucelen e Johnson \(2013\)](#) destacam a seguinte observação como importante:

Observação: A adição do sinal do governador de comando $G_{gc}g(t)$ ao comando dado $c_d(t)$ da Equação (3.189) não altera a dinâmica do erro do sistema dada pela Equação (3.165), pois $c(t)$ é utilizado tanto na Equação (3.137) quanto na Equação (3.140). Portanto, a lei de atualização da Equação (3.154) para $\hat{W}_\sigma(t)$ e $\hat{W}_{u_n}(t)$ permanece do mesmo modo. Nesse caso, entretanto, as Equações (3.137) e (3.145) tem a forma

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r c_d(t) + \Omega g(t), \quad (3.193)$$

$$\dot{x}(t) = A_r x(t) + B_r c_d(t) + \Omega g(t) - B\Lambda[\tilde{W}_\sigma^T(t)\sigma(x(t)) + \tilde{W}_{u_n}^T(t)u_n(t)], \quad (3.194)$$

e a matriz Ω é dada por

$$\Omega = BB^L = B(B^TB)^{-1}B^T. \quad (3.195)$$

Apesar dessa abordagem implicar na modificação do sistema de referência ideal com o sinal $\Omega g(t)$, é possível suprimir o efeito de $B\Lambda[\tilde{W}_\sigma^T(t)\sigma(x(t)) + \tilde{W}_{u_n}^T(t)u_n(t)]$ da Equação (3.194) através de $\Omega g(t)$ ao escolher adequadamente o ganho do governador de comando λ . Essa característica chave permitirá que o sistema real dado pela Equação (3.194) se aproxime do sistema de referência ideal (ou seja, com o sinal $r(t)$ da Equação (3.137) substituído pelo sinal $c(t)$ da Equação (3.189)) no tempo transitório.

3.12 Controle Adaptativo Baseado em Aproximação

Um projeto de controle típico começa com a modelagem, que consiste basicamente em um procedimento de construção de uma descrição matemática (como um conjunto

de equações diferenciais ordinárias) para o sistema físico a ser controlado. Esse modelo selecionado precisa refletir os principais aspectos do processo físico. Modelos precisos nem sempre são melhores. Eles podem exigir um projeto de controle desnecessariamente complexo e demandar cálculos excessivos. Do ponto de vista do controle, a chave na modelagem é capturar os efeitos essenciais na dinâmica do sistema dentro de uma faixa de operação de interesse. Além disso, um bom modelo também deve fornecer alguma caracterização das incertezas do sistema - as chamadas “variáveis desconhecidas” no processo físico. Essa caracterização pode ser posteriormente utilizada para realizar um projeto robusto e/ou adaptativo ou para executar uma análise baseada em Monte Carlo, levando eventualmente à quantificação e avaliação da estabilidade, desempenho e robustez do sistema em malha fechada (LAVRETSKY; WISE, 2012).

As incertezas nos parâmetros específicos do sistema são chamadas de “paramétricas”, enquanto todas as outras incertezas são “não paramétricas”.

Pode-se considerar um modelo escalar com dinâmicas incertas, tal como $\dot{x} = \Delta(x) + u + \xi(t)$, sendo x o estado do sistema, u é a entrada de controle, $\xi(t)$ é o ruído do processo e $\Delta(x)$ é a incerteza desconhecida, como é mostrado abaixo:

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i(x) + \epsilon(x) = \underbrace{\theta^T \Phi(x)}_{\text{Paramétrica}} + \underbrace{\epsilon(x)}_{\text{Não-Paramétrica}} \quad (3.196)$$

De acordo com Lavretsky e Wise (2012) é assumido que a incerteza desconhecida $\Delta(x)$ é aproximada por uma combinação linear finita de funções de base conhecidas $\varphi_i(x)$ e parâmetros constantes desconhecidos θ_i . Nesse caso, o erro de aproximação da função dependente do estado $\epsilon(x)$, e o ruído do processo $\xi(t)$, representam as incertezas não-paramétricas, enquanto os parâmetros constantes desconhecidos θ , constituem a incerteza paramétrica nas dinâmicas do sistema. A fim de caracterizar a incerteza paramétrica, é necessário ser capaz de encontrar um bom conjunto de funções de base $\Phi(x)$, de modo que o erro de aproximação $\epsilon(x)$ se torne pequeno em um conjunto compacto (fechado e limitado). Polinômios, expansões em séries de Fourier e redes neurais artificiais *feedforward* podem ser utilizados para representar e aproximar funções em conjuntos compactos.

4 Metodologia

Este capítulo detalha a metodologia empregada no desenvolvimento dos controladores neuro-adaptativos para dois métodos distintos: o Controlador Neuro-Adaptativo Direto (DMRNAC) e o Controlador Neuro-Adaptativo Indireto (IMRNAC). Ambos os métodos foram implementados, testados e comparados utilizando algoritmos específicos e simuladores projetados para avaliar seu desempenho em sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas e variações.

Para o DMRNAC, a abordagem é centrada na utilização de Redes Neurais de Função de Base Radial (RN-FBR) para ajustar diretamente os parâmetros do controlador com base na diferença entre a saída desejada e a saída real do sistema. O desenvolvimento do algoritmo do DMRNAC inclui os seguintes passos:

1. **Modelagem do Sistema:** Definição do sistema dinâmico a ser controlado, considerando suas variáveis de estado e as incertezas presentes.
2. **Estrutura do Controlador:** Implementação da estrutura do DMRNAC, onde a RN-FBR ajusta os parâmetros do controlador diretamente com base no erro de rastreamento.
3. **Lei de Adaptação:** Desenvolvimento da lei de adaptação para atualizar os pesos da rede neural, garantindo que o sistema siga a trajetória desejada.
4. **Simulação:** Criação de um simulador para testar o controlador em diferentes cenários, avaliando sua capacidade de lidar com incertezas e variações nos parâmetros do sistema.

Para o IMRNAC, a metodologia adotada envolve a identificação indireta dos parâmetros do sistema através da resposta ao sinal de controle, seguida do ajuste dos parâmetros do controlador. O desenvolvimento do algoritmo do IMRNAC inclui os seguintes passos:

1. **Identificação do Modelo:** Modelagem matemática do sistema dinâmico, incluindo todas as incertezas e variáveis desconhecidas.
2. **Estrutura do Controlador:** Implementação da estrutura do IMRNAC, onde a RN-FBR é utilizada para identificar os parâmetros do modelo e ajustar os parâmetros do controlador indiretamente.
3. **Parametrização das Incertezas:** Utilização de RN-FBR para parametrizar as incertezas do sistema, permitindo que sejam estimadas e compensadas pelo controlador.
4. **Lei de Adaptação:** Desenvolvimento da lei de adaptação para ajustar os parâmetros estimados pela rede neural, visando minimizar o erro entre a resposta real e a resposta desejada do sistema.
5. **Simulação:** Criação de um simulador para testar o controlador em diferentes condições, avaliando sua eficácia em lidar com variações nos parâmetros do sistema e com perturbações externas.

Além disso, é implementado o algoritmo do Filtro de Kalman para a estimação

dos estados do sistema, permitindo simulações do controlador na presença de ruídos e perturbações tanto no sistema real quanto nas medições. O Filtro de Kalman fornece uma estimativa ótima dos estados, mesmo quando há incertezas e ruídos nos sensores. A incorporação do Filtro de Kalman permite verificar a estabilidade e o desempenho dos controladores DMRNAC e IMRNAC nessas condições adversas, assegurando que os controladores possam manter a robustez necessária em ambientes ruidosos.

Em ambos os métodos, os simuladores desenvolvidos tiveram a capacidade de executar múltiplas simulações, variando os parâmetros do sistema e as condições iniciais para testar a robustez e a eficácia dos controladores. A comparação entre os métodos foi realizada com base em critérios como precisão de rastreamento, robustez contra incertezas e tempo de resposta. A análise dos resultados permitirá determinar as vantagens e limitações de cada abordagem, contribuindo para o avanço no campo dos controladores adaptativos baseados em redes neurais.

A metodologia descrita assegura uma abordagem sistemática e rigorosa para o desenvolvimento e avaliação dos controladores DMRNAC e IMRNAC, proporcionando uma compreensão abrangente de seu desempenho em sistemas dinâmicos reais.

Para o projeto de controle neuro-adaptativo, são adotadas as seguintes etapas, conforme ordenadas abaixo:

1. Obtenção de um Modelo Não-Linear do Foguete Suborbital: Inicialmente, a partir da revisão da literatura especializada, é levantado um modelo não linear representativo de um foguete suborbital.
2. Linearização por Expansão de Série de Taylor (Matriz Jacobiana): Em seguida, o modelo não linear é linearizado utilizando o método da expansão de série de Taylor, resultando na obtenção da matriz jacobiana que descreve a dinâmica do sistema linearizado.
3. Representação em Espaço de Estados: Com base na matriz jacobiana, o sistema linearizado é representado em sua forma de espaço de estados. Essa representação é fundamental para o projeto do controlador.
4. Construção de uma Incerteza com Parâmetros Não Lineares e Variantes no Tempo: Para avaliar a robustez do controlador, uma incerteza com parâmetros não lineares e variantes no tempo é introduzida no sistema. Isso permitirá testar a capacidade do controlador de lidar com situações adversas e garantir um desempenho sólido.
5. Implementação de uma Rede Neural Artificial: Para aprender e suprimir a dinâmica da incerteza introduzida, uma rede neural artificial composta por funções de base radial é implementada. A rede neural é projetada para adaptar-se às mudanças na incerteza ao longo do tempo.

6. Cálculo dos Ganhos da Lei de Controle Nominal: Os ganhos da lei de controle nominal são calculados com base no modelo de referência ideal, que é o comportamento desejado que o sistema real deve rastrear.
7. Cálculo da Lei de Adaptação: Uma lei de adaptação é calculada para estimar e ajustar continuamente os pesos da rede neural, garantindo que ela se adapte eficazmente à dinâmica da incerteza.
8. Cálculo do Sinal de Correção: Um sinal de correção é calculado para anular o erro em regime permanente, garantindo que o sistema alcance a referência de forma precisa.
9. Implementação de algoritmos e pseudo-códigos: Com base em todas as equações do controlador neuro-adaptativo, é feita a implementação dos códigos em MATLAB para os testes e dois pseudo-códigos são produzidos, um para o controlador e outro para o simulador.
10. Simulações e Análises no MATLAB: Todas as etapas do projeto são implementadas e simuladas no ambiente do MATLAB. Os resultados das simulações, incluindo gráficos de resposta, esforço de controle e convergência da rede neural, foram registrados para verificar a estabilidade, desempenho e robustez do controlador projetado.

Parte II

Proposta

5 Controlador Adaptativo MRAC

Este capítulo aborda a formulação matemática de um controlador adaptativo MRAC para servir de base no projeto do controlador neuro-adaptativo direto e indireto das seções posteriores.

5.1 Linearização do Modelo Não Linear

O modelo não linear dado pela Equação (3.8), foi linearizado por expansão da série de Taylor, conforme Seção 3.3, no ponto de operação ($x_1 = 2595$ m, $x_2 = 1136$ m/s), equivalente a posição e velocidade do final da fase propulsada do foguete suborbital ($t = 4$ s). A demonstração do cálculo de linearização está presente no Apêndice A.

O modelo linear do sistema a ser controlado é dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 373.31 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Os requisitos de controlabilidade e observabilidade para o sistema foram obedecidos utilizando as Equações (3.75) e (3.84), conforme apresentado nas Seções 3.5.2 e 3.5.3 respectivamente. O cálculo completo das matrizes de controlabilidade e observabilidade pode ser encontrado no Apêndice B.

5.2 Formulação do Problema

Considerando o sistema com a seguinte representação em espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.2)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle de entrada, e A e B são as matrizes de estado e entrada do sistema, respectivamente.

Conforme apresentado por Yucelen e Calise (2010), na presença de incertezas considera-se o seguinte modelo para o sistema dinâmico com incertezas:

$$\dot{x} = Ax + B[u + \Delta(x)], \quad (5.3)$$

sendo $\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma incerteza combinada. Além disso, é assumido que o par (A, B) é controlável, o estado completo está disponível para realimentação e a entrada de controle u é restrita à classe de controles admissíveis que consistem em funções mensuráveis.

Portanto, tem-se o modelo de referência do sistema, dado por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r, \quad (5.4)$$

sendo $x_m \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do modelo de referência, e $r \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de referência.

Suposição: A incerteza correspondente da Equação (5.3) pode ser linearmente parametrizada como:

$$\Delta(x) = W^T \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.5)$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{s \times m}$ a matriz de pesos constante desconhecida, $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ é um vetor conhecido de funções de base da forma $\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_s(x)]^T \in \mathbb{R}^s$.

Observação: Se $W^T \Phi(x)$ corresponder perfeitamente a $\Delta(x)$, esses dois termos serão cancelados e o sistema real seguirá o modelo de referência.

Encontrar o vetor de pesos W^T ideal é onde os métodos adaptativos entram em ação. Se tivermos um modelo nominal, um modelo de referência e um conjunto de funções de base $\Phi(x)$ definidas, podemos usá-lo junto com o sinal de erro e o sinal de referência para aprender W^T ao longo do tempo. Desta forma estamos convergindo para a dinâmica desconhecida para que possamos cancelá-la.

5.3 Lei de Controle Adaptativo

De acordo com Gruenwald et al. (2018), quando a dinâmica do atuador não está presente, esse problema pode ser facilmente resolvido considerando a lei de controle de realimentação dada por

$$u = u_n + u_a, \quad (5.6)$$

sendo u_n e u_a as leis de controle de nominal e adaptativa, respectivamente. Portanto, pode-se considerar, sem perda de generalidade, a lei de controle nominal dada por

$$u_n = -K_1 x + K_2 r. \quad (5.7)$$

Com $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sendo os ganhos de *feedback* e *feedforward* nominais, respectivamente, de modo que em malha fechada tem-se:

$$A_m = A - BK_1 \quad (5.8)$$

e

$$B_m = BK_2. \quad (5.9)$$

Se o par (A, B) é controlável, então, pode-se achar K_1 por alocação de polos ou por LQR.

Se a referência é constante, então, o sistema irá convergir para um estado estacionário.

Para encontrar o valor de K_2 no estado estacionário, então $\dot{x} = 0$, pois não existe variação de x (derivada de x constante é zero). Portanto, substituindo a Equação (5.7) na Equação (5.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_1)x + BK_2r, \quad t \rightarrow \infty \\ 0 &= x(\infty) + (A - BK_1)^{-1}BK_2r. \end{aligned}$$

Deseja-se principalmente que a saída siga a referência, então multiplica-se ambos os lados por C :

$$\begin{aligned} 0 &= Cx(\infty) + C(A - BK_1)^{-1}BK_2r \\ y(\infty) &= -C(A - BK_1)^{-1}BK_2r. \end{aligned}$$

Se o termo $-C(A - BK_1)^{-1}BK_2$ for igual a matriz identidade I , então a saída $y(\infty)$ irá convergir para a referência r , pois:

$$y(\infty) = Ir \Rightarrow y(\infty) = r.$$

Então para isso, K_2 pode ser calculado para tornar a expressão $-C(A - BK_1)^{-1}BK_2$ a matriz identidade, portanto:

$$\begin{aligned} -C(A - BK_1)^{-1}BK_2 &= I \\ K_2 &= -(C(A - BK_1)^{-1}B)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.4 Erro de Rastreamento do Modelo de Referência

Seleção do Sinal de Controle Adaptativo

Se a incerteza $\Delta(x) = W^T\Phi(x)$, pode-se selecionar o sinal de controle adaptativo que cancele a mesma, dado por

$$u_a = \widehat{W}^T \Phi(x). \quad (5.11)$$

Sinal de Controle Aumentado

Substituindo as Equações (5.7) e (5.11) na Equação (5.6), obtém-se:

$$\begin{aligned} u &= u_n - u_a \\ u &= -K_1 x + K_2 r - \widehat{W}^T \Phi(x). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Erro de Rastreamento

Segundo [Dogan et al. \(2020\)](#), o erro entre os estados do sistema real e do modelo de referência é dado por

$$e = x - x_m. \quad (5.13)$$

E a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m. \quad (5.14)$$

Substituindo as Equações (5.3), (5.4), (5.5) e (5.12) na Equação (5.14), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_m \\ \dot{e} &= Ax + B[u + \Delta(x)] - [A_m x_m + B_m r] \\ \dot{e} &= Ax + B[-K_1 x + K_2 r - \widehat{W}^T \Phi(x) + W^T \Phi(x)] - [A_m x_m + B_m r] \\ \dot{e} &= [A - BK_1]x + BK_2 r + B[-\widehat{W}^T \Phi(x) + W^T \Phi(x)] - [A_m x_m + B_m r]. \end{aligned}$$

Se $A_m = A - BK_1$ e $B_m = BK_2$, então

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m x + \cancel{B_m r} + B[-\widehat{W}^T \Phi(x) + W^T \Phi(x)] - [A_m x_m + \cancel{B_m r}] \\ \dot{e} &= A_m (x - x_m) + B[-\widehat{W}^T \Phi(x) + W^T \Phi(x)] \\ \dot{e} &= A_m e - B[\widehat{W} - W]^T \Phi(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

O termo $[\widehat{W} - W]$ é a matriz do erro de atualização de pesos, e pode ser representada por

$$\widetilde{W} = \widehat{W} - W. \quad (5.16)$$

Substituindo a Equação (5.16) na Equação (5.15), a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = A_m e - B\widetilde{W}^T \Phi(x). \quad (5.17)$$

5.5 Derivação da Lei de Atualização de Pesos

Deve-se escolher uma lei de atualização de pesos para levar o erro do sistema assintoticamente a zero. É escrita uma equação genérica para a dinâmica de estimativa de pesos, dada por:

$$\dot{\hat{W}} = \Gamma f_a(\cdot), \quad \Gamma > 0, \quad (5.18)$$

sendo $\Gamma \in \mathbb{R}^+$ uma taxa de aprendizado constante e positiva, e $f_a(\cdot)$ uma função de adaptação genérica.

A dinâmica do erro de estimativa de pesos é representada por

$$\dot{\tilde{W}} = \dot{\hat{W}} - \dot{W}. \quad (5.19)$$

Pontua-se que, assumindo que o vetor de pesos reais da incerteza $\Delta(x)$ são parâmetros invariantes no tempo, a variação de W é nula.

Substituindo a Equação (5.18) na Equação (5.19), e tomando o vetor de pesos real W como constante, tem-se:

$$\dot{\tilde{W}} = \Gamma f_a(\cdot). \quad (5.20)$$

De acordo com Gruenwald, Yucelen e Muse (2017), através do erro do sistema e do erro de atualização de pesos, é possível construir uma função candidata de Lyapunov dada por

$$V(e, \tilde{W}) = e^T P e + \text{tr} \tilde{W}^T \Gamma^{-1} \tilde{W}. \quad (5.21)$$

Observa-se que $V(0, 0) = 0$ e $V(e, \tilde{W}) > 0$ para todo $V(e, \tilde{W}) \neq (0, 0)$. E sua derivada é dada por

$$\dot{V}(e, \tilde{W}) = 2e^T P \dot{e} + 2\text{tr} \tilde{W}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{W}}. \quad (5.22)$$

Substituindo as Equações (5.17) e (5.20) na Equação (5.22), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{W}) &= 2e^T P [A_m e - B \tilde{W}^T \Phi(x)] + 2\text{tr} \tilde{W}^T \Gamma^{-1} [\Gamma f_a(\cdot)] \\ \dot{V}(e, \tilde{W}) &= 2e^T P A_m e - 2e^T P B \tilde{W}^T \Phi(x) + 2\text{tr} \tilde{W}^T f_a(\cdot) \\ \dot{V}(e, \tilde{W}) &= 2e^T P A_m e + 2\text{tr} \tilde{W}^T [f_a(\cdot) - \Phi(x) e^T P B]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

A partir da Equação (5.23), observa-se que se escolhida a função de adaptação genérica como

$$f_a(.) = \Phi(x)e^T PB, \quad (5.24)$$

o termo $[f_a(.) - \Phi(x)e^T PB]$ será zero, logo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{W}) &= 2e^T P A_m e \\ \dot{V}(e, \tilde{W}) &= e^T [A_m^T P + P A_m] e \\ \dot{V}(e, \tilde{W}) &= -e^T R e. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Segundo [Arabi et al. \(2020\)](#), $P \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ é uma solução da equação de Lyapunov dada por

$$0 = A_m^T P + P A_m + R. \quad (5.26)$$

Portanto, substituindo a Equação (5.24) na Equação (5.18), a dinâmica de estimativa de pesos (ou lei de atualização de pesos) é dada por

$$\dot{\hat{W}} = \Gamma \Phi(x) e^T P B. \quad (5.27)$$

5.6 Estabilidade

De acordo com [Khalil \(2002\)](#), se $\dot{V}(e, \tilde{W}) \leq 0$, há um sistema estável segundo Lyapunov, porém deve-se verificar a estabilidade assintótica do sistema.

Na teoria de equações diferenciais ordinárias, o Lema de Barbalat é um resultado matemático sobre as propriedades assintóticas de funções e suas derivadas. Quando usado corretamente para sistemas dinâmicos, pode levar à solução de muitos problemas de estabilidade assintótica, dentre os quais destacam-se os modelos epidemiológicos compartimentais. Em termos gerais, trata-se da convergência a zero de uma função suficientemente bem comportada cuja integral é limitada ([MONTEIRO; MAZORCHE, 2023](#)).

O Lema de Barbalat é uma ferramenta útil para provar que uma função vai para zero à medida que o tempo tende ao infinito, desde que essa função satisfaça certas propriedades. Em sistemas de controle adaptativo, o Lema de Barbalat pode ser útil para analisar a convergência de certas variáveis do sistema, como erros de rastreamento, estimadores de parâmetros ou adaptadores.

De acordo com [Slotine, Li et al. \(1991\)](#) e conforme demonstrado por [Lu, Deng e Liu \(2020\)](#), afirmar-se que:

1. Se $V(e, \widetilde{W})$ é limitada inferiormente e $\dot{V}(e, \widetilde{W}) = -e^T R e \leq 0$, então $V(e, \widetilde{W})$ se aproxima de um limite finito quando $t \rightarrow \infty$.

2. Além disso, se $\dot{V}(e, \widetilde{W})$ é uma função uniformemente contínua do tempo, então a sua derivada $\ddot{V}(e, \widetilde{W})$ é limitada.

3. Então, pelo Lema de Barbalat, conforme apresentado na Seção 3.7.2, segue que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(e, \widetilde{W}) = 0$, desde que a matriz R seja definida positiva, e portanto, o erro e converge assintoticamente a zero.

Logo, o estado $x(t)$ do sistema com incertezas se aproximará do estado $x_m(t)$ ideal desejado.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_m(t)] = 0 \quad (5.28)$$

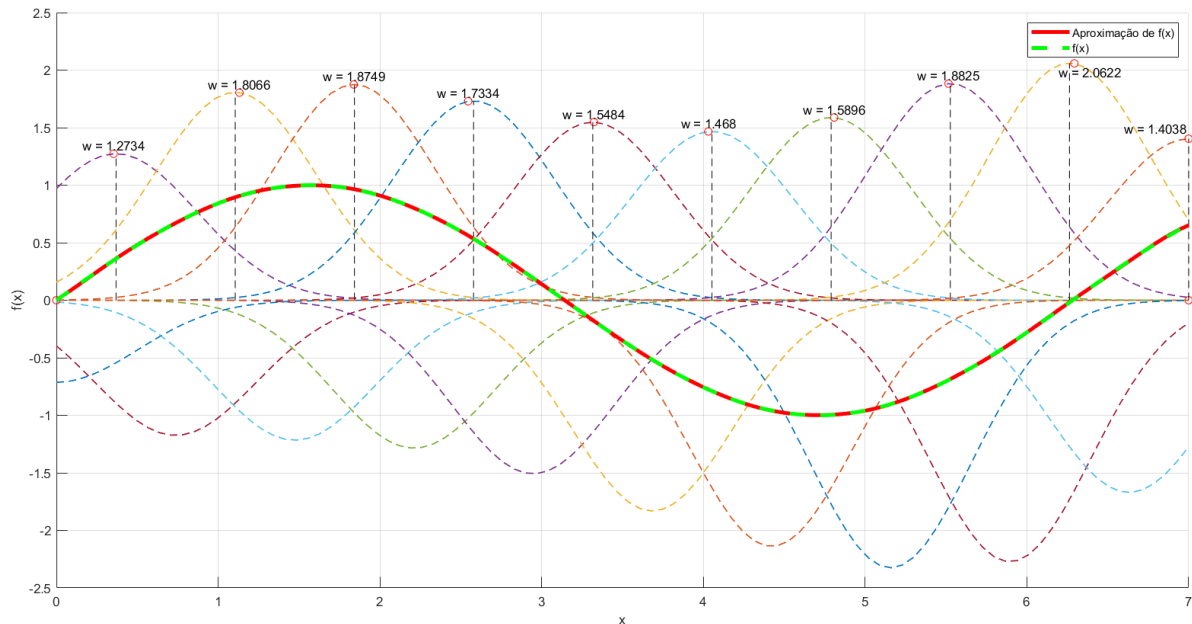
6 Controlador Neuro-Adaptativo Direto

O objetivo do desenvolvimento do Controlador Neuro-Adaptativo Direto por Modelo de Referência (DMRNAC) para o modelo de foguete suborbital de combustível sólido nasce da necessidade de cancelar incertezas não estruturadas (não paramétricas) variantes no tempo que não podem ser mensuradas ou determinadas com precisão, e que podem alterar significativamente a trajetória do veículo durante o voo. Dentre essas incertezas destacam-se: dinâmicas não modeladas do sistema real, força do vento e variação de parâmetros como massa do propelente, densidade do ar, força de arrasto e etc.

Uma RN-FBR é implementada para aproximar a dinâmica de uma incerteza complexa variante no tempo e estimar seus parâmetros, para que posteriormente o mecanismo de adaptação a cancele, fazendo o sistema convergir para o modelo de referência ideal.

Devido à aproximação da incerteza pela rede neural, um erro residual $\epsilon(x)$ é gerado. A estratégia é implementar uma rede neural com uma quantidade suficiente de neurônios (núcleos), para tornar o erro residual menor com rapidez, garantindo a exatidão da aproximação. Um exemplo de rede neural com 20 neurônios aproximando uma função $f(x)$ não-linear é ilustrada na Figura 7.

Figura 7 – Função Seno Aproximada por RN-FBR com 20 Neurônios

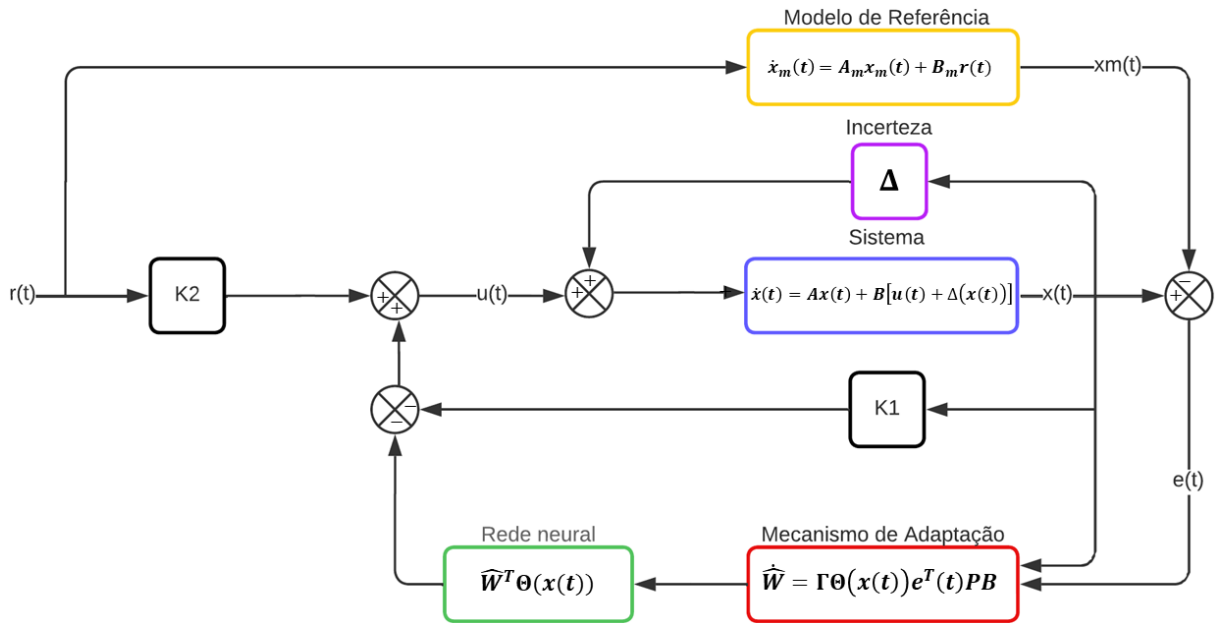


Fonte: O autor (2024).

Por causa de $\epsilon(x)$, não é possível ter $\dot{V} \leq 0$, ou seja, não se pode garantir a estabilidade do sistema ao longo do tempo, para isso, é utilizado um termo de modificação de escape na lei de adaptação.

Em malha fechada, para garantir o erro nulo em regime permanente, um sinal governador de comando (sinal de correção) é implementado para recuperação do desempenho do sistema. A Figura 8 ilustra o diagrama da arquitetura do controlador MRNAC desenvolvido.

Figura 8 – Arquitetura do Controlador MRNAC



Fonte: O autor (2024).

6.1 Formulação do Problema

De acordo com as formulações que foram apresentadas nas seções anteriores e estruturas de controle robusto adaptativo presentes na literatura como [Glushchenko e Lastochkin \(2022\)](#), [Arabi et al. \(2019\)](#) e [Gruenwald, Yucelen e Muse \(2017\)](#), este estudo aborda a seguinte estrutura e modelagem matemática para um controlador DMRNAC.

Considerando o seguinte modelo para o sistema dinâmico com incerteza:

$$\dot{x} = Ax + B[u + \Delta(x)], \quad x(0) = x_0. \quad (6.1)$$

A parametrização da incerteza não estruturada $\Delta(x)$ é dada por

$$\Delta(x) = W^T \Theta(x) + \varepsilon(x), \quad \|\varepsilon(x)\|_2 \leq \bar{\varepsilon}, \quad (6.2)$$

sendo W^T um vetor de pesos desconhecidos, a ser estimado pela lei de atualização de pesos, $\Theta(x)$ é um vetor e inclui funções de base radial nos seus elementos, e $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o erro residual.

Ressalta-se que o erro residual $\varepsilon(x)$ é vindo do Teorema da Aproximação Universal, incluindo mais neurônios na rede neural é possível reduzir esse erro. Além disso, nos casos de ordem 2 como este estudo, ou nos casos de alta ordem, é necessário incluir funções de base radial para cada estado, para cobrir todo o domínio compacto D referente a cada estado. Exemplo:

$$x = [x_1, x_2]^T. \quad (6.3)$$

Então o vetor $\Theta(x)$ é dado por

$$\Theta(x) = [\theta_1(x_1), \dots, \theta_n(x_1), \theta_{n+1}(x_2), \dots, \theta_{2n}(x_2), 1]^T. \quad (6.4)$$

Portanto, o sistema pode ser representado por

$$\dot{x} = Ax + B[u + W^T \Theta(x) + \varepsilon(x)]. \quad (6.5)$$

A lei de controle total é dada por

$$u = u_n + u_a, \quad (6.6)$$

sendo u_n e u_a as leis de controle nominal e adaptativa, respectivamente. Para tanto, a lei de controle nominal dada por

$$u_n = -K_1 x + K_2 r. \quad (6.7)$$

O par (A, B) do sistema é controlável, então, o ganho de realimentação de estados K_1 é calculado por alocação de polos. O ganho de alimentação direta K_2 é calculado conforme Equação (5.10).

Se $A_m = A - BK_1$ e $B_m = BK_2$, então o modelo de referência do sistema é:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r. \quad (6.8)$$

Se a incerteza é parametrizada como $\Delta(x) = W^T \Theta(x)$, então o sinal de controle adaptativo que cancele a mesma pode ser aproximado por uma RN-FBR, de acordo com a Equação (3.176), conforme foi apresentado nas Seções 3.10.3 e 3.10.4. O sinal de controle adaptativo u_a é representado por

$$u_a = -\widehat{W}^T \Theta(x). \quad (6.9)$$

Portanto, a dinâmica do erro do sistema é:

$$\dot{e} = A_m e - B \widetilde{W}^T \Theta(x) + B \varepsilon(x), \quad \widetilde{W} = \widehat{W} - W, \quad (6.10)$$

Por causa do termo $B \varepsilon(x)$ não é possível chegar a $\dot{V} \leq 0$. Nesse caso é necessário utilizar uma modificação de escape, em que se utiliza a modificação- σ . Essa abordagem é válida tanto quando W é constante, quanto para $W(t)$ variante no tempo.

De acordo com a Equação (3.174), a lei de adaptação é dada por

$$\dot{\widehat{W}} = \Gamma \left[\Theta(x) e^T P B - \sigma \widehat{W} \right], \quad \Gamma > 0, \quad (6.11)$$

sendo $\Gamma \in \mathbb{R}^+$ uma taxa de aprendizado constante e positiva, $-\sigma \widehat{W}$ o termo de modificação- σ , que garante a estabilidade do sistema ao longo do tempo, e $P \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ é a solução da equação de Lyapunov conforme a Equação (5.26) dada por

$$0 = A_m^T P + P A_m + R \quad (6.12)$$

Abaixo a Tabela 1 apresenta as principais equações do controle neuro-adaptativo direto DMRNAC:

Tabela 1 – Principais equações do controle DMRNAC

Descrição	Equações
Parametrização da incerteza	$\Delta(x) = W^T \Theta(x)$
Sistema em malha aberta	$\dot{x} = Ax + B(u + W^T \Theta(x))$ $y = Cx$
Ganho de realimentação de estado	$K_1 = lqr(A, B, Q, R)$
Ganho de alimentação direta	$K_2 = -(C(A - BK_1)^{-1}B)^{-1}$
Matriz de estado do modelo de referência	$A_m = A - BK_1$
Matriz de entrada do modelo de referência	$B_m = BK_2$
Modelo de referência	$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$ $y_m = C_m x_m$
Entrada de controle nominal	$u_n = -K_1 x + K_2 r$
Entrada de controle adaptativo	$u_a = -\widehat{W}^T \Theta(x)$
Entrada de controle total	$u_t = -K_1 x + K_2 r - \widehat{W}^T \Theta(x)$
Erro de rastreamento de estado	$e = x - x_r$
Dinâmica do erro de rastreamento	$\dot{e} = A_m e - B \widehat{W}^T \Theta(x)$
Erro de estimação dos pesos	$\widetilde{W} = \widehat{W} - W$
Função candidata de Lyapunov	$V(e, \widetilde{W}) = e^T P e + \Gamma^{-1} \text{tr} \widetilde{W}^T \widetilde{W}$
Equação de Lyapunov	$A_m^T P + P A_m = -Q$
Lei de adaptação sem modificação- σ	$\widehat{W} = \Gamma(\Theta(x) e^T P B)$
Lei de adaptação com modificação- σ	$\widehat{W} = \Gamma(\Theta(x) e^T P B - \sigma \widehat{W})$

Fonte: Lavretsky e Wise (2024).

De acordo com a Equação (3.189), a arquitetura de controle com governador de comando é dada por

$$r_v = r + Gv, \quad (6.13)$$

sendo $r_v \in \mathbb{R}^m$ o comando de referência total, $r \in \mathbb{R}^m$ é o comando dado uniformemente contínuo e limitado, e $Gv \in \mathbb{R}^m$ é o sinal do governador de comando, com $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sendo a matriz do sinal do governador de comando, conforme Equação (3.190), definida por

$$G = K_2^{-1} (B^T B)^{-1} B^T, \quad (6.14)$$

e $v \in \mathbb{R}^n$ é a saída do governador de comando, de acordo com as Equações (3.191) e (3.192) e gerada por

$$\dot{\Psi} = -\lambda \Psi + \lambda e, \quad \Psi(0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (6.15)$$

$$v = \lambda \Psi + (A_r - \lambda I_n) e, \quad (6.16)$$

sendo $\Psi \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado do governador de comando e $\lambda \in \mathbb{R}^+$ é o ganho do governador de comando.

Portanto, substituindo as Equações (6.7) e (7.9) na Equação (6.6) e adicionando o sinal de correção dado pela Equação (6.13), a lei de controle total é dada por

$$u = -K_1x + K_2(r + Gv) - \widehat{W}^T\Theta(x). \quad (6.17)$$

Substituindo o novo comando de referência da Equação (6.13) na Equação (6.8), resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_mx_m + B_mr_v \\ \dot{x}_m &= A_mx_m + B_m(r + Gv) \\ \dot{x}_m &= A_mx_m + B_mr + BK_2K_2^{-1}(B^TB)^{-1}B^Tv \\ \dot{x}_m &= A_mx_m + B_mr + B(B^TB)^{-1}B^Tv. \end{aligned}$$

Logo, o novo modelo de referência com adição do sinal de correção, de acordo com a Equação (3.193), é representado por

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_mr + \Omega v, \quad (6.18)$$

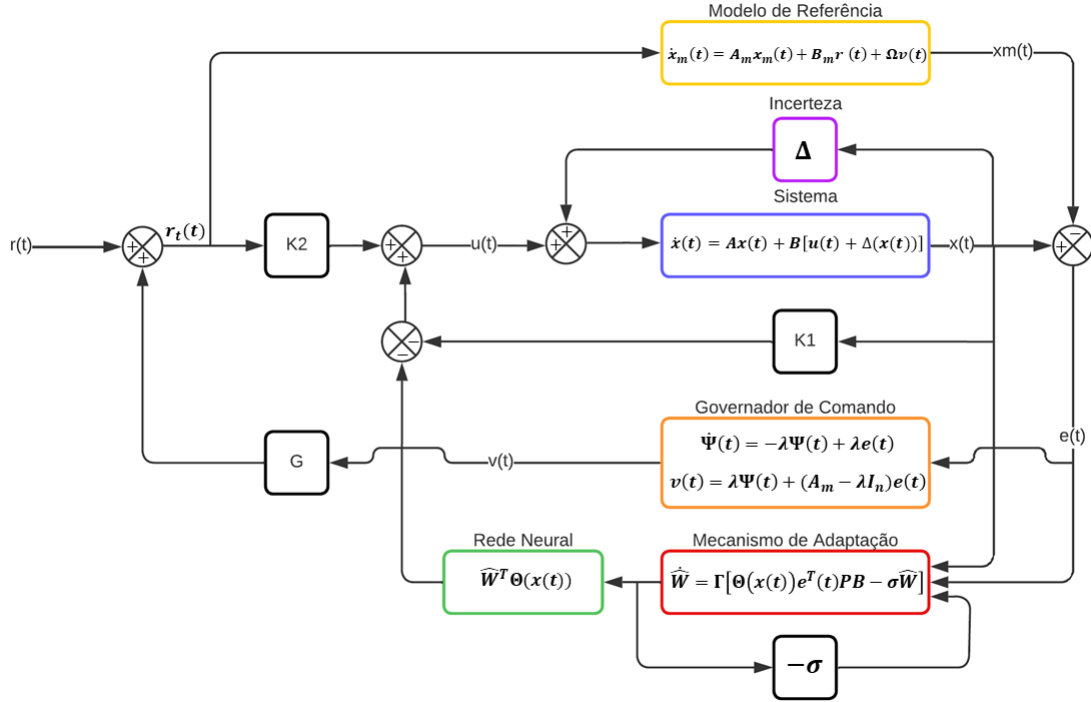
e Ω é a matriz do sinal de correção adicionado ao modelo de referência, de acordo com a Equação (3.195), dada por

$$\Omega = B(B^TB)^{-1}B^T. \quad (6.19)$$

Com essa técnica é possível fazer com que o sistema real rastreie o sistema de referência ideal em regime transitório e em regime permanente.

Após a implementação do sistema dinâmico do governador de comando para recuperação do desempenho do sistema e adição do termo de modificação- σ , o diagrama da arquitetura completa da malha de controle é representada pela Figura 9.

Figura 9 – Arquitetura do Controlador MRNAC com Governador de Comando



Fonte: O autor (2024).

6.2 Algoritmos do Controlador Neuro-Adaptativo Direto

Nesta seção são apresentados os algoritmos do Controle Neuro-Adaptativo Direto DMRNAC (Direct Model Reference Neuro-Adaptive Control). No Algoritmo 0 (zero) são inicializados os principais algoritmos, o Algoritmo 1 é o Controlador DMRNAC e o Algoritmo 2 é o Simulador.

ALGORITHM 0 - CONTROLE NEURO-ADAPTATIVO DMRNAC

ALGORITHM 1 - CONTROLADOR DMRNAC

1 $controlador_{DMRNAC} \leftarrow Alg_1(\quad)$

ALGORITHM 2 - SIMULADOR DMRNAC

2 $simulador_{DMRNAC} \leftarrow Alg_2(\quad)$

Fim do Algoritmo 0 - Controle NEURO-ADAPTATIVO DMRNAC

O Algoritmo 1 é constituído dos seguintes Blocos:

- Bloco 1 - Setup (Condições Iniciais)

Neste bloco, são definidas as condições iniciais para o sistema de controle. As matrizes do sistema dinâmico são inicializadas. Os estados iniciais para o sistema real x , para o modelo de referência x_m e para o modelo de referência inicial x_{m_i} , são definidos como zeros. O vetor de estado do governador de comando Ψ é inicializado como zeros.

1. Matrizes do Sistema Dinâmico

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 373.31 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

2. Estados Iniciais

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Vetor de Estado do Governador de Comando

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Bloco 2 - Projeto do Controlador Nominal

Neste bloco, é realizado o projeto do controlador nominal. O algoritmo calcula o ganho de realimentação de estados K_1 usando o método de alocação de polos (fórmula de Ackerman), com os polos desejados definidos em $[-1 \ -2]$. O ganho de alimentação direta K_2 é calculado conforme Equação (5.10).

- Bloco 3 - Modelo de Referência - Condições de Correspondência

Neste bloco, é definida a matriz dinâmica nominal do sistema (A_m) e a matriz de controle nominal (B_m). A dinâmica nominal A_m é calculada conforme a Equação (5.8). O controle nominal B_m é calculado de acordo com a Equação (5.9).

- Bloco 4 - Sinal de Correção (Recuperação de Desempenho)

Neste bloco, são calculadas as matrizes relevantes para o sinal de correção. A matriz do sinal governador de comando G é calculada conforme Equação (3.190). A matriz Ω é calculada de acordo com a Equação (6.19).

- Bloco 5 - Equação Algébrica de Lyapunov

Neste bloco, é resolvida uma equação algébrica de Lyapunov para determinar uma matriz P . A matriz Q_{lyap} simétrica e definida positiva, é atribuída como a matriz identidade. A solução da equação algébrica de Lyapunov P é calculada de acordo com a equação $A_m^T P + P A_m + Q_{lyap} = 0$.

- Bloco 6 - Rede Neural Artificial - RBF

Neste bloco, os parâmetros relacionados à RN-FBR conforme apresentada na Seção 3.10.3, são definidos. O número de neurônios na rede neural artificial (RNA) é definido como $n = 25$. O limite do domínio compacto D é definido como b e atribuído o valor 5. A matriz de pesos $\widehat{W}$ da RNA é inicializada como um vetor de zeros. A saída do sistema y é calculada como Cx . São definidos outros parâmetros, como a taxa de aprendizagem γ , fator de modificação σ , fator de recuperação de desempenho λ , distância entre os centros dos neurônios c , vetor de centros dos neurônios $centers$, distância máxima entre os centros dos neurônios d_{max} . O vetor de centros dos neurônios é inicializado em função de b e c . A largura dos neurônios $width$ é calculada com base em d_{max} e n , conforme Equações (3.177) e (3.180). O vetor regressor Θ da RNA é inicializado como um vetor de zeros.

Em resumo, este algoritmo representa o projeto de controle robusto neuro-adaptativo direto por modelo de referência, usando a regra de Lyapunov, onde um controlador nominal é projetado e uma RN-FBR é utilizada para estimação e cancelamento da incerteza presente no sistema. Cada bloco do código descreve uma etapa específica do projeto, desde a configuração inicial até os cálculos de controle e implementação da RN-FBR.

ALGORITHM 1 - CONTROLADOR DMRNAC

▷ Bloco 1 - Setup (Condições Iniciais)

- 1 $A \leftarrow [0, 1; 0, -0.1190]; B \leftarrow [0; 373.31]; C \leftarrow [1, 0]; D \leftarrow 0$
- 2 $x; x_m; x_{mi} \leftarrow [0; 0]$
- 3 $\Psi \leftarrow [0; 0]$

▷ Bloco 2 - Projeto do Controlador Nominal

- 4 $polos_desejados \leftarrow [-1 - 2]$
- 5 $K_1 \leftarrow ackerman(A, B, polos_desejados)$
- 6 $K_2 \leftarrow -(C * (A - B * K_1)^{-1} * B)^{-1}$

▷ Bloco 3 - Modelo de Referência - Condições de Correspondência

- 7 $A_m \leftarrow A - B * K_1$
- 8 $B_m \leftarrow B * K_2$

▷ Bloco 4 - Sinal de Correção (Recuperação de Desempenho)

- 9 $G \leftarrow (K_2)^{-1} * (B^T * B)^{-1} * B^T$
- 10 $\Omega \leftarrow B * (B^T * B)^{-1} * B^T$

▷ Bloco 5 - Equação Algébrica de Lyapunov

- 11 $Q_{lyap} \leftarrow I_{n \times n}$
- 12 $P \leftarrow A_m^T * P + P * A_m + Q_{lyap} = 0$

▷ Bloco 6 - Rede Neural Artificial - RBF

- 13 $n \leftarrow 25$
- 14 $b \leftarrow 5$
- 15 $\widehat{W} \leftarrow 0_{(2*n+1) \times 1}$
- 16 $y \leftarrow C * x$
- 17 $\gamma \leftarrow 2$
- 18 $\sigma \leftarrow 500$
- 19 $\lambda \leftarrow 5$
- 20 $c \leftarrow 2 * b / (n - 1)$
- 21 $centers \leftarrow 0_{1 \times n}$
- 22 $centers(1) \leftarrow -b$
- 23 **for** $i \leftarrow 1 : n - 1$
- 24 **do** $centers(i + 1) \leftarrow -b + i * c$
- 25 **end for**
- 26 $d_{max} \leftarrow 2 * b$
- 27 $width \leftarrow 1 / (2 * (d_{max} / (2 * n)^{\frac{1}{2}})^2)$
- 28 $\Theta \leftarrow 0_{(2n+1) \times 1}$

Fim do Algoritmo 1 - CONTROLADOR DMRNAC

O Algoritmo 2 é constituído dos seguintes Blocos:

- Bloco 1 - Setup - Condições Iniciais do Simulador

Neste bloco, são definidas as condições iniciais para a simulação. O tempo total de simulação é definido como 20 unidades de tempo. O intervalo de amostragem é definido como 0.001 unidades de tempo. O contador de armazenamento é inicializado como 1.

O código do loop inicia na instrução 7 e termina na instrução 25, que itera no tempo de 0 a 20 com um passo de 0.001 unidades de tempo.

- Bloco 2 - Incerteza

Neste bloco, é atribuída uma função para incerteza $\Delta(x)$ com base nos valores atuais do estado x . A incerteza é uma função não linear dos componentes do estado x .

- Bloco 3 - Sinal de Referência

Neste bloco, é definido o sinal de referência r com base no tempo atual k . Se k for menor ou igual a 10, o valor de r é definido como 1, caso contrário, é definido como -1 .

- Bloco 4 - Montagem do Vetor Regressor da RNA

Neste bloco, o vetor de regressor Θ da RNA é montado com base nos valores atuais do estado x e nos centros dos neurônios. O loop itera sobre os neurônios (variável i) e calcula os elementos do vetor Θ usando RBFs. O último elemento do vetor regressor Θ é definido como 1, o que representa o bias, de acordo com a Equação (6.4).

- Bloco 5 - Sinal de Correção para Recuperação de Desempenho

O vetor de estado do governador de comando Ψ é atualizado com base na diferença entre o estado atual x e o estado desejado x_m , usando uma taxa de aprendizagem λ . O vetor v também é calculado com base em Ψ , A_m , x , x_m , e uma matriz identidade $I_{n \times n}$, conforme Equações (6.15) e (6.16)

- Bloco 6 - Atualizações - Sinal de Controle - Modelo de Referência - Lei de Adaptação

Neste bloco, o sinal de controle u é calculado com base nos ganhos de controle nominal K_1 e K_2 , no sinal de referência r , no sinal de correção Gv e na aproximação da incerteza obtida pela rede neural $\widehat{W}^T \Theta(x)$, de acordo com a Equação (6.17). A dinâmica do modelo de referência x_m com adição do sinal de correção é atualizada, conforme Equação (6.18), juntamente com o modelo de referência inicial x_{m_i} , somente para questões de comparação. É calculada também a lei de adaptação para estimar W de acordo com a Equação (7.11).

- Bloco 7 - Sistema Real com Incerteza - Medição da Saída

Neste bloco, o estado x é atualizado com base nas equações de dinâmica do sistema e no sinal de controle u , incluindo a contribuição da incerteza $\Delta(x)$. A saída y do sistema é calculada multiplicando o estado x pela matriz C .

O código continua a iterar até o tempo total de simulação (ft) e depois termina com o encerramento do algoritmo.

ALGORITHM 2 - SIMULADOR DMRNAC

```

  ▷ Bloco 1 - Setup - Condições Iniciais do Simulador
1  Tempo Total de Simulação  $ft \leftarrow 20$ 
2  Intervalo de Amostragem  $dt \leftarrow 0.001$ 

```

```

3  ▷ Iterative Process
4  for  $k \leftarrow 0 : dt : ft$ 
5      do

```

```

        ▷ Bloco 2 - Incerteza
6         $\Delta(x) \leftarrow 1 + x(1) + x(2) + x(1)^2 + \sin(x(1)) + \cos(x(1)) + \sin(x(2)) + \cos(x(2))$ 

```

```

        ▷ Bloco 3 - Sinal de Referência
7        if  $k \leq 10$ 
8            then  $r = 1$ 
9        else if  $k > 10$ 
10           then  $r = -1$ 
11           end if
12        end if

```

```

        ▷ Bloco 4 - Montagem do Vetor Regressor da RNA
13        for  $i \leftarrow 1 : n$ 
14            do  $\Theta(i) \leftarrow \exp(-width * |x(1) - centers(i)|^2)$ 
15             $\Theta(i + n) \leftarrow \exp(-width * |x(2) - centers(i)|^2)$ 
16        end for
17         $\Theta(2 * n + 1) \leftarrow 1$ 

```

```

        ▷ Bloco 5 - Sinal de Correção para Recuperação de Desempenho
18         $\Psi \leftarrow \Psi + dt * (-\lambda * (\Psi - (x - x_m)))$ 
19         $v \leftarrow \lambda * \Psi + (A_m - \lambda * I_{n \times n} * (x - x_m))$ 

```

```

        ▷ Bloco 6 - Atualizações - Sinal de Controle - Modelo de Referência - Lei de Adaptação
20         $u \leftarrow -K_1 * x + K_2 * (r + G * v) - \widehat{W}^T * \Theta$ 
21         $x_m \leftarrow x_m + dt * (A_m * x_m + B_m * r + \Omega * v)$ 
22         $x_{mi} \leftarrow x_{mi} + dt * (A_m * x_{mi} + B_m * r)$ 
23         $\widehat{W} \leftarrow \widehat{W} + dt * (\gamma * (\Theta * (x - x_m)^T * P * B - \sigma * \widehat{W}))$ 

```

```

        ▷ Bloco 7 - Sistema Real com Incerteza - Medição da Saída
24         $x \leftarrow x + dt * (A * x + B * (u + \Delta(x)))$ 
25         $y \leftarrow C * x$ 

```

```

26 end for
    Fim do Algoritmo 2 - SIMULADOR DMRNAC

```

7 Controlador Neuro-Adaptativo Indireto

O Controlador Adaptativo de Referência de Modelo (MRAC), utilizando o método indireto, representa uma abordagem sofisticada e eficaz para o controle de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas e variações, diferenciando-se por sua capacidade de ajustar dinamicamente seus parâmetros com base na resposta real do sistema.

Ao empregar a metodologia indireta, o MRAC se baseia na identificação do modelo dinâmico do sistema, utilizando a resposta ao sinal de controle para ajustar os parâmetros adaptativos. Esta abordagem se destaca em ambientes nos quais as características do sistema estão sujeitas a mudanças, oferecendo a flexibilidade necessária para lidar com incertezas, não linearidades e variações temporais.

7.1 Formulação do Problema

De acordo com as estruturas de controle adaptativo presentes em [Arabi et al. \(2018\)](#) e [Arabi e Yucelen \(2019\)](#), a abordagem do método indireto consiste na modelagem matemática do sistema real quando seus parâmetros são desconhecidos, e também uma nova estrutura em espaço de estados é montada, visando a parametrização de uma incerteza completa, contendo não apenas os distúrbios externos inerentes ao processo, mas também, os parâmetros desconhecidos do sistema. Portanto, todos os parâmetros desconhecidos serão estimados pela RN-FBR e, conseqüentemente, cancelados como incertezas. Através dessa nova estrutura em espaço de estados outras matrizes contantes A e B aparecerão e serão usadas no modelo de referência.

Considerando o sistema da equação [\(A.2\)](#)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{T \cos(\theta)}{m} u - g - \frac{c_1}{m} x_2^2 - \frac{c_2 \sin(\theta)}{m} x_2^2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Substituindo os parâmetros com incertezas pelos coeficientes α_1 , α_2 , α_3 , e α_4 , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \underbrace{\frac{1}{m}}_{\Lambda} \left(\underbrace{T \cos(\theta)}_{\alpha_1} u - \underbrace{mg}_{\alpha_2} - \underbrace{c_1}_{\alpha_3} x_2^2 - \underbrace{c_2 \sin(\theta)}_{\alpha_4} x_2^2 \right). \end{cases} \quad (7.2)$$

Assumindo que nenhum dos parâmetros do sistema real são conhecidos, o modelo do sistema é representado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \Lambda (\alpha_1 u - \alpha_2 - \alpha_3 x_2^2 - \alpha_4 x_2^2). \end{cases} \quad (7.3)$$

Observa-se que uma lei de controle u pode ser escolhida, que cancela todos os parâmetros com incertezas presentes no sistema, na forma:

$$u = \frac{\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)x_2^2}{\alpha_1}. \quad (7.4)$$

Portanto, é possível representar o sistema em espaço de estados com o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\left[\frac{1}{m} \right]}_{\Lambda} \left(u + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_2/\alpha_1 \\ \alpha_3/\alpha_1 \\ \alpha_4/\alpha_1 \end{bmatrix}^T}_{W_0^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x_2^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}}_{\Theta_0(x)} \right). \quad (7.5)$$

Organizando os termos, o sistema em espaço de estados é representado desta forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Lambda [u + W_0^T \Theta_0(x)], \quad (7.6)$$

sendo W_0^T o vetor de pesos inicial e $\Theta_0(x)$ é o vetor de funções de base inicial.

A equação da lei de controle nominal é a mesma apresentada na Seção 6.1 com a Equação (6.7), assim como os cálculos dos ganhos de realimentação de estado e alimentação direta, K_1 e K_2 , respectivamente.

O modelo de referência utilizado é apresentado na Equação (6.8).

Portanto, o sistema pode ser representado por

$$\dot{x} = Ax + B\Lambda[u + W_0^T \Theta_0(x)]. \quad (7.7)$$

Substituindo a entrada de controle total da Equação (6.6) e acrescentando os termos Bu_n e $-Bu_n$ na Equação (7.7), tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\Lambda[u_n + u_a + W_0^T \Theta_0(x)] + Bu_n - Bu_n \\
&= \underbrace{Ax + Bu_n}_{A_mx + B_mr} + B\Lambda \underbrace{[u_n - \Lambda^{-1}u_n + u_a + W_0^T \Theta_0(x)]}_{(I - \Lambda^{-1})u_n} + Bu_n - Bu_n \\
&= A_mx + B_mr + B\Lambda \left(\underbrace{\begin{bmatrix} W_0 \\ I - \Lambda^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta_0(x) \\ u_n \end{bmatrix}}_{W^T \Theta(x)} \right) \\
\dot{x} &= A_mx + B_mr + B\Lambda[u_a + W^T \Theta(x)]. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Se a incerteza $\Delta(x)$ pode ser parametrizada como $W^T \Theta(x)$, então o sinal de controle adaptativo que cancele a mesma, pode ser aproximado por uma RN-FBR, de acordo com a Equação (3.176), conforme foi apresentado nas Seções 3.10.3 e 3.10.4. O sinal de controle adaptativo u_a é representado por

$$u_a = -\widehat{W}^T \Theta(x). \tag{7.9}$$

A dinâmica do erro entre os estados do sistema é dada por

$$\begin{aligned}
e &= x - x_m \\
\dot{e} &= A_me + B\Lambda \underbrace{[u_a + W^T \Theta(x)]}_{-\widetilde{W}^T \Theta(x)} \\
\dot{e} &= A_me - B\Lambda \widetilde{W}^T \Theta(x) \quad \because \quad \widetilde{W} = \widehat{W} - W. \tag{7.10}
\end{aligned}$$

A lei de adaptação é dada por

$$\dot{\widehat{W}} = \Gamma \Theta(x) e^T P B, \quad \Gamma > 0, \tag{7.11}$$

sendo $\Gamma \in \mathbb{R}^+$ uma taxa de aprendizado constante e positiva, e $P \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ é a solução da equação de Lyapunov conforme a Equação (5.26) dada por

$$0 = A_m^T P + P A_m + R. \tag{7.12}$$

7.2 Algoritmos do Controlador Neuro-Adaptativo Indireto

Nesta seção são apresentados os algoritmos do Controle Neuro-Adaptativo Indireto IMRNAC (Indirect Model Reference Neuro-Adaptive Control). No Algoritmo 0 (zero) são inicializados os principais algoritmos, o Algoritmo 3 é o Controlador IMRNAC e o Algoritmo 4 é o Simulador.

ALGORITHM 0 - CONTROLE NEURO-ADAPTATIVO IMRNAC

ALGORITHM 3 - CONTROLADOR IMRNAC

1 $controlador_{IMRNAC} \leftarrow Alg_3(\quad)$

ALGORITHM 4 - SIMULADOR IMRNAC

2 $simulador_{IMRNAC} \leftarrow Alg_4(\quad)$

Fim do Algoritmo 0 - Controle NEURO-ADAPTATIVO IMRNAC

O Algoritmo 3 é constituído dos seguintes Blocos:

- **Bloco 1 - Setup (Condições Iniciais)**

Neste bloco, são definidas as condições iniciais para o sistema de controle. As matrizes do sistema dinâmico são inicializadas. Os estados iniciais para o sistema real x , para o modelo de referência x_m e para o modelo de referência inicial x_{m_i} são definidos como zeros. O vetor de estado do governador de comando Ψ é inicializado como zeros.

– Matrizes do Sistema Dinâmico

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

– Estados Iniciais

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

– Vetor de Estado do Governador de Comando

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Bloco 2 - Parâmetros Reais do Sistema**

Neste bloco, são definidos os parâmetros reais do sistema.

- Parâmetros

$$a1 = 2.5497e+04, \quad a2 = 670.0230, \quad a3 = 0.0031, \quad a4 = 4.3688e-04, \quad \Lambda = 0.0146$$

- Vetor de Parâmetros Iniciais

$$W_0 = \begin{bmatrix} \frac{a2}{a1} \\ \frac{a3}{a1} \\ \frac{a4}{a1} \end{bmatrix}$$

- **Bloco 3 - Projeto do Controlador Nominal**

Neste bloco, é realizado o projeto do controlador nominal. O algoritmo calcula o ganho de realimentação de estados K_1 usando o método de alocação de polos (fórmula de Ackerman) ou LQR, com os polos desejados definidos em $[-1, -2]$. O ganho de alimentação direta K_2 é calculado conforme a equação fornecida.

- Polos desejados

$$polos_desejados = [-1, -2]$$

- Ganhos de controle nominal K_1 e K_2

$$K_1 = \text{ackerman}(A, B, polos_desejados), \quad K_2 = -(C(A - BK_1)^{-1}B)^{-1}$$

- **Bloco 4 - Modelo de Referência - Condições de Correspondência**

Neste bloco, é definida a matriz dinâmica nominal do sistema (A_m) e a matriz de controle nominal (B_m).

- Matrizes do Modelo de Referência

$$A_m = A - BK_1, \quad B_m = BK_2$$

- **Bloco 5 - Governador de Comando (Recuperação de Desempenho)**

Neste bloco, são calculadas as matrizes relevantes para o sinal de correção.

- Matrizes para Sinal de Correção

$$G = (K_2)^{-1}(B^T B)^{-1}B^T, \quad \Omega = B(B^T B)^{-1}B^T$$

- **Bloco 6 - Equação Algébrica de Lyapunov**

Neste bloco, é resolvida uma equação algébrica de Lyapunov para determinar uma matriz P . A matriz Q_{lyap} simétrica e definida positiva é atribuída como a matriz identidade.

– Equação de Lyapunov

$$Q_{lyap} = I_{n \times n}, \quad A_m^T P + P A_m + Q_{lyap} = 0$$

- **Bloco 7 - Rede Neural Artificial - RBF**

Neste bloco, os parâmetros da RN-FBR são definidos. Isso inclui o número de neurônios na rede, o limite do domínio compacto, a matriz de pesos inicializada como vetor de zeros, a taxa de aprendizagem, o fator de modificação, o fator de recuperação de desempenho e as distâncias entre os centros dos neurônios. Os centros dos neurônios são inicializados em função do limite do domínio compacto e da distância entre eles, enquanto a largura dos neurônios é calculada com base na distância máxima entre os centros e o número de neurônios. Além disso, é definido o vetor de funções de base radial da RNA para ser utilizado nos cálculos subsequentes.

ALGORITHM 3 - CONTROLADOR IMRNAC

▷ Bloco 1 - Setup (Condições Iniciais)

- 1 $A \leftarrow [0, 1; 0, 0]; B \leftarrow [0; 1]; C \leftarrow [1, 0]; D \leftarrow 0$
- 2 $x; x_m; x_{mi} \leftarrow [0; 0]$
- 3 $\Psi \leftarrow [0; 0]$

▷ Bloco 2 - Parâmetros Reais do Sistema

- 4 $a1 \leftarrow 2.5497e + 04$
- 5 $a2 \leftarrow 670.0230$
- 6 $a3 \leftarrow 0.0031$
- 7 $a4 \leftarrow 4.3688e - 04$
- 8 $\Lambda \leftarrow 0.0146$
- 9 $W_0 \leftarrow [a2/a1; a3/a1; a4/a1]$

▷ Bloco 3 - Projeto do Controlador Nominal

- 10 $polos_desejados \leftarrow [-1 - 2]$
- 11 $K_1 \leftarrow ackerman(A, B, polos_desejados)$
- 12 $K_2 \leftarrow -(C * (A - B * K_1)^{-1} * B)^{-1}$

▷ Bloco 4 - Modelo de Referência - Condições de Correspondência

- 13 $A_m \leftarrow A - B * K_1$
- 14 $B_m \leftarrow B * K_2$

▷ Bloco 5 - Governador de Comando (Recuperação de Desempenho)

- 15 $G \leftarrow (K_2)^{-1} * (B^T * B)^{-1} * B^T$
- 16 $\Omega \leftarrow B * (B^T * B)^{-1} * B^T$

▷ Bloco 6 - Equação Algébrica de Lyapunov

- 17 $Q_{lyap} \leftarrow I_{n \times n}$
- 18 $P \leftarrow A_m^T * P + P * A_m + Q_{lyap} = 0$

▷ Bloco 7 - Rede Neural Artificial - RBF

- 19 $n \leftarrow 50$
- 20 $b \leftarrow 10$
- 21 $\widehat{W} \leftarrow 0_{(2*n+2) \times 1}$
- 22 $y \leftarrow C * x$
- 23 $\gamma \leftarrow 0.1$
- 24 $\sigma \leftarrow 10$
- 25 $\lambda \leftarrow 50$
- 26 $c \leftarrow 2 * b / (n - 1)$
- 27 $centers \leftarrow 0_{1 \times n}$
- 28 $centers(1) \leftarrow -b$
- 29 **for** $i \leftarrow 1 : n - 1$
- 30 **do** $centers(i + 1) \leftarrow -b + i * c$
- 31 **end for**
- 32 $d_{max} \leftarrow 2 * b$
- 33 $width \leftarrow 1 / (2 * (d_{max} / (2 * n)^{\frac{1}{2}})^2)$
- 34 $\Theta \leftarrow 0_{(2n+1) \times 1}$

Fim do Algoritmo 3 - CONTROLADOR IMRNAC

O Algoritmo 4 é constituído dos seguintes Blocos:

Bloco 1 - Setup - Condições Iniciais do Simulador

Neste bloco, são definidas as condições iniciais para a simulação. O tempo total de simulação é definido como 20 unidades de tempo. O intervalo de amostragem é definido como 0.001 unidades de tempo. O código do loop inicia na instrução 7 e termina na instrução 25, que itera no tempo de 0 a 20 com um passo de 0.001 unidades de tempo.

Bloco 2 - Incerteza

Neste bloco, é atribuída uma função para incerteza $\Delta(x)$ com base nos valores atuais do estado x . A incerteza é uma função não linear dos componentes do estado x . Inicialmente, um vetor regressor Θ_0 é definido como $[1; x(2)^2; x(2)^2]$. A incerteza $\Delta(x)$ é então calculada como a soma do produto do vetor de pesos W_0 transposto com Θ_0 e de uma série de termos não lineares envolvendo $x(1)$ e $x(2)$.

Bloco 3 - Sinal de Referência

Neste bloco, é definido o sinal de referência r com base no tempo atual k . Se k for menor ou igual a 10, o valor de r é definido como 1, caso contrário, é definido como -1 . Isso cria uma mudança no sinal de referência após a metade do tempo total de simulação, permitindo avaliar a resposta do sistema a essa alteração.

Bloco 4 - Montagem do Vetor Regressor da RNA

Neste bloco, o vetor de regressor Θ da RNA é montado com base nos valores atuais do estado x e nos centros dos neurônios. O primeiro elemento do vetor Θ é definido como 1, representando o bias. Em seguida, um loop itera sobre os neurônios, calculando os elementos do vetor Θ usando RBFs aplicadas aos componentes do estado x e aos centros dos neurônios.

Bloco 5 - Sinal de Correção para Recuperação de Desempenho

O vetor de estado do governador de comando Ψ é atualizado com base na diferença entre o estado atual x e o estado desejado x_m , usando uma taxa de aprendizagem λ . O vetor v é calculado como uma combinação linear de Ψ , A_m , x , x_m e uma matriz identidade $I_{n \times n}$. Isso permite a geração de um sinal de correção que auxilia na recuperação de desempenho do sistema.

Bloco 6 - Atualizações - Sinal de Controle - Modelo de Referência - Lei de Adaptação

Neste bloco, o sinal de controle u é calculado com base nos ganhos de controle nominal K_1 e K_2 , no sinal de referência r , no sinal de correção Gv e na aproximação da incerteza obtida pela rede neural $\widehat{W}^T \Theta(x)$. A dinâmica do modelo de referência x_m é atualizada com adição do sinal de correção, juntamente com o modelo de referência inicial x_{mi} , somente para questões de comparação. A lei de adaptação é utilizada para ajustar os pesos $\widehat{W}$ com base no erro entre o estado real e o modelo de referência.

Bloco 7 - Sistema Real com Incerteza - Medição da Saída

Neste bloco, o estado x é atualizado com base nas equações de dinâmica do sistema e no sinal de controle u , incluindo a contribuição da incerteza $\Delta(x)$. A saída y do sistema é calculada multiplicando o estado x pela matriz C . Este processo continua iterando até o tempo total de simulação ser alcançado, após o qual o algoritmo é encerrado.

ALGORITHM 4 - SIMULADOR IMRNAC

```

  ▷ Bloco 1 - Setup - Condições Iniciais do Simulador
1  Tempo Total de Simulação  $ft \leftarrow 20$ 
2  Intervalo de Amostragem  $dt \leftarrow 0.001$ 

```

```

3  ▷ Iterative Process
4  for  $k \leftarrow 0 : dt : ft$ 
5      do

```

```

        ▷ Bloco 2 - Incerteza
6         $\Theta_0 \leftarrow [1; x(2)^2; x(2)^2]$ 
7         $\Delta(x) \leftarrow W_0^T * \Theta_0 + 1 + x(1) + x(2) + x(1)^2 + \sin(x(1)) + \cos(x(1)) + \sin(x(2)) + \cos(x(2))$ 

```

```

        ▷ Bloco 3 - Sinal de Referência
8        if  $k \leq 10$ 
9            then  $r = 1$ 
10           else if  $k > 10$ 
11               then  $r = -1$ 
12           end if
13        end if

```

```

        ▷ Bloco 4 - Montagem do Vetor Regressor da RNA
14         $\Theta(1) \leftarrow 1$ 
15        for  $i \leftarrow 1 : n$ 
16            do  $\Theta(i+1) \leftarrow \exp(-width * |x(1) - centers(i)|^2)$ 
17             $\Theta(i+n+1) \leftarrow \exp(-width * |x(2) - centers(i)|^2)$ 
18        end for

```

```

        ▷ Bloco 5 - Sinal de Correção para Recuperação de Desempenho
19         $\Psi \leftarrow \Psi + dt * (-\lambda * (\Psi - (x - x_m)))$ 
20         $v \leftarrow \lambda * \Psi + (A_m - \lambda * I_{n \times n} * (x - x_m))$ 

```

```

        ▷ Bloco 6 - Atualizações - Sinal de Controle - Modelo de Referência - Lei de Adaptação
21         $u_n \leftarrow -K_1 * x + K_2 * (r + G * v)$ 
22         $u_a \leftarrow -\widehat{W}^T * [\Theta; u_n]$ 
23         $u \leftarrow u_n + u_a$ 
24         $x_m \leftarrow x_m + dt * (A_m * x_m + B_m * r + \Omega * v)$ 
25         $x_{mi} \leftarrow x_{mi} + dt * (A_m * x_{mi} + B_m * r)$ 
26         $\widehat{W} \leftarrow \widehat{W} + dt * (\gamma * ([\Theta; u_n] * (x - x_m)^T * P * B - \sigma * \widehat{W}))$ 

```

```

        ▷ Bloco 7 - Sistema Real com Incerteza - Medição da Saída
27         $x \leftarrow x + dt * (A * x + B * \Lambda * (u + \Delta(x)))$ 
28         $y \leftarrow C * x$ 

```

```

29 end for
    Fim do Algoritmo 4 - SIMULADOR IMRNAC

```

Parte III

Parte Final

8 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados das simulações dos controladores com os algoritmos desenvolvidos, e uma análise detalhada da resposta do sistema controlado e do modelo de referência ao longo do tempo, fornecendo uma comparação numérica e visual da performance do controle. Além disso, são exibidos gráficos que ilustram o erro de rastreamento entre o sistema controlado e o modelo de referência ao longo do tempo, permitindo uma avaliação precisa da precisão do controle e da capacidade do sistema em seguir a referência. Os sinais de controle gerados pelo controlador adaptativo são representados em gráficos separados, oferecendo insights sobre como o controlador responde às mudanças no sistema.

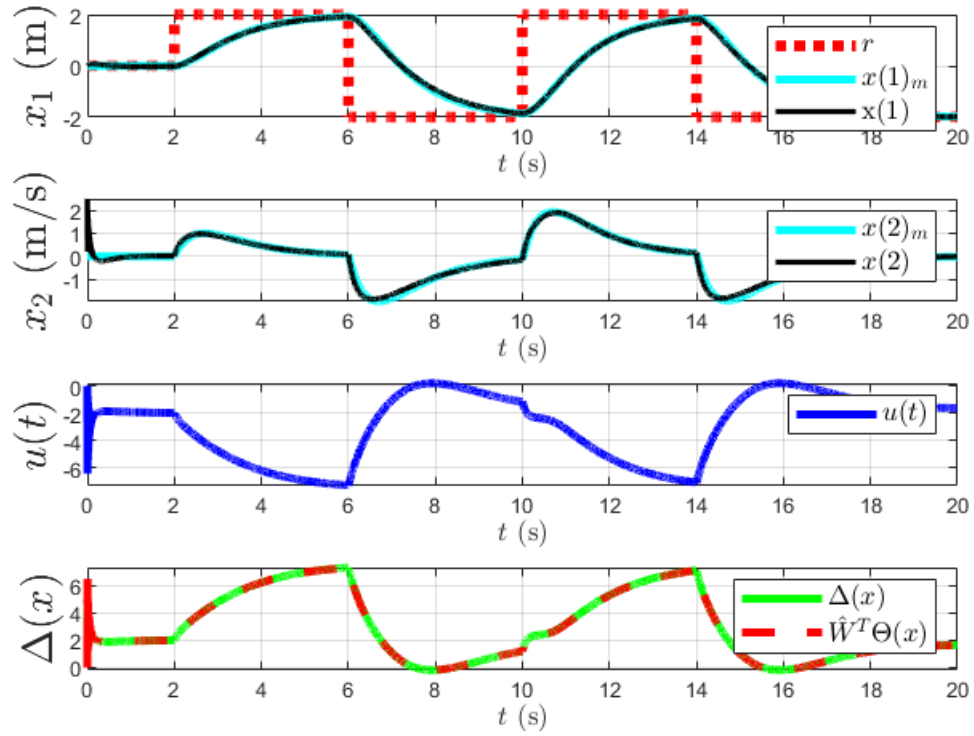
São apresentadas em tabelas e gráficos as métricas de desempenho, como erro médio absoluto MAE (*Mean Absolute Error*), erro quadrático médio MSE (*Mean Squared Error*), raiz do erro quadrático médio RMSE (*Root Mean Squared Error*), coeficiente de determinação (R^2), e erro percentual absoluto médio MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), proporcionando uma avaliação quantitativa do desempenho do controlador.

Adicionalmente, os resultados da robustez do controlador em relação a incertezas no sistema são discutidos, como variações nos parâmetros do sistema ou distúrbios externos, por meio de gráficos ou tabelas específicas. Por fim, uma comparação entre os métodos direto e indireto é realizada, destacando suas respectivas vantagens e limitações no contexto do controle adaptativo. Os controladores e os simuladores desenvolvidos no estudo são apresentados nas Seções 6.2 e 7.2, para os Algoritmos 1 e 2 (DMRNAC), e para os Algoritmos 3 e 4 (IMRNAC), respectivamente.

Em relação aos testes dos controladores as seguintes observações são feitas:

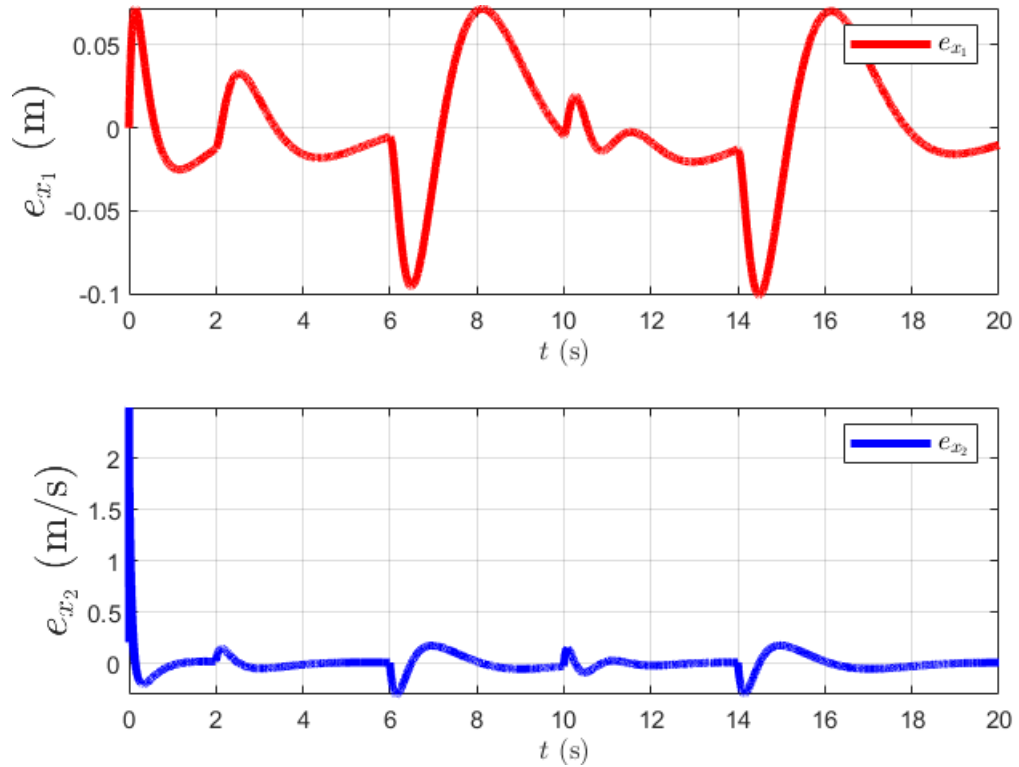
1. A Fig. 10 descreve a resposta do sistema em malha fechada com o controle DMRNAC para ambos os estados x_1 e x_2 que seguem o modelo de referência, o esforço de controle $u(t)$ que apresenta oscilações limitadas, e o desempenho da rede neural RBF $\widehat{W}^T \Theta(x)$ para estimar a incerteza $\Delta(x)$. Os erros entre os estados do sistema real e o modelo de referência (e_{x_1} e e_{x_2}) são limitados e convergem a zero, $e_{x_1} \rightarrow 0$ e $e_{x_2} \rightarrow 0$ (Fig. 11). O erro de estimação da rede RBF converge a zero $e_{RBF} \rightarrow 0$ (Fig. 12).

Figura 10 – Resposta do sistema controlado (DMRNAC)



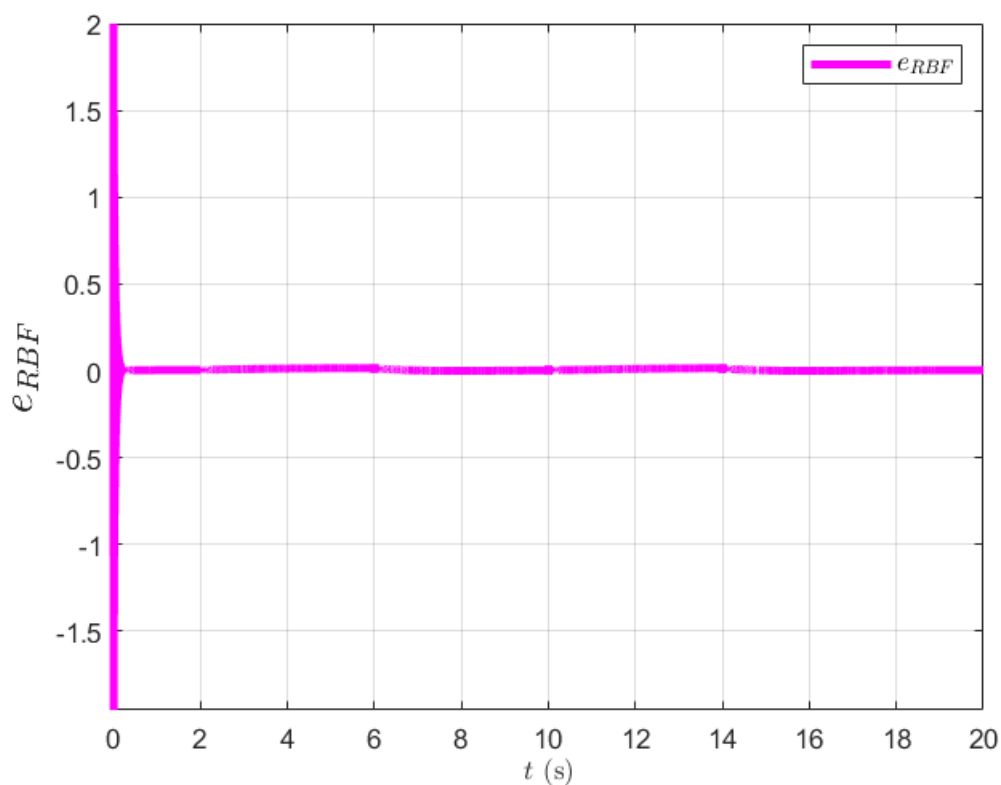
Fonte: O autor (2024).

Figura 11 – Erro de rastreamento do modelo de referência (DMRNAC)



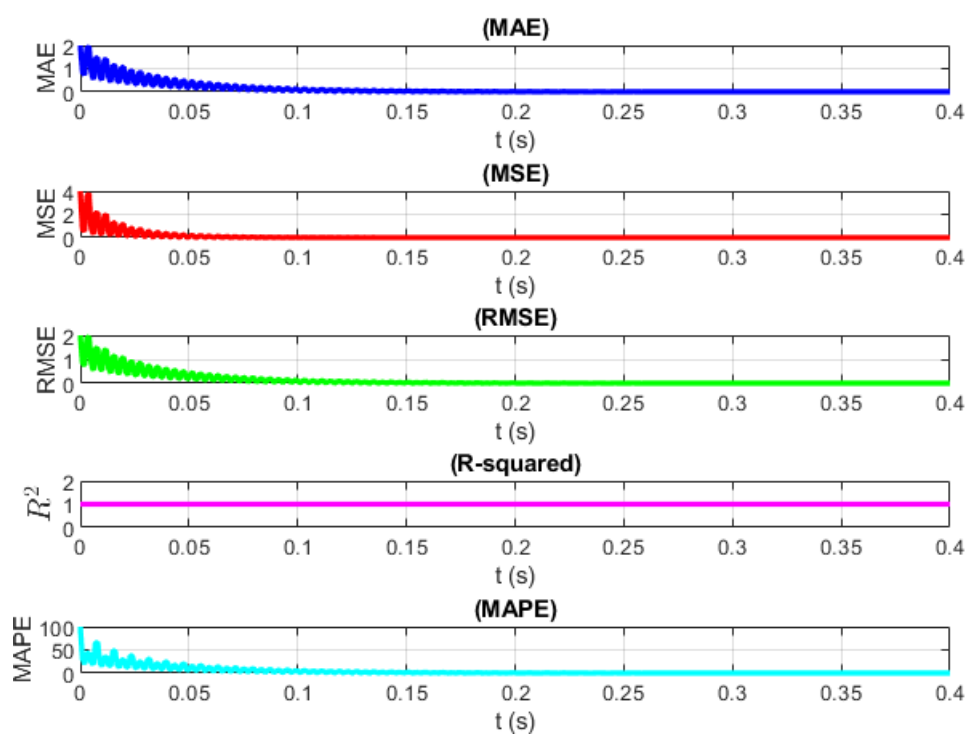
Fonte: O autor (2024).

Figura 12 – Erro de estimação da rede RBF (DMRNAC)



Fonte: O autor (2024).

Figura 13 – Métricas de desempenho da rede RBF (DMRNAC)



Fonte: O autor (2024).

2. As métricas utilizadas para mensurar o erro de estimação da rede RBF no controle DMRNAC (Fig. 13) tem resultados satisfatórios (Tabela 2):

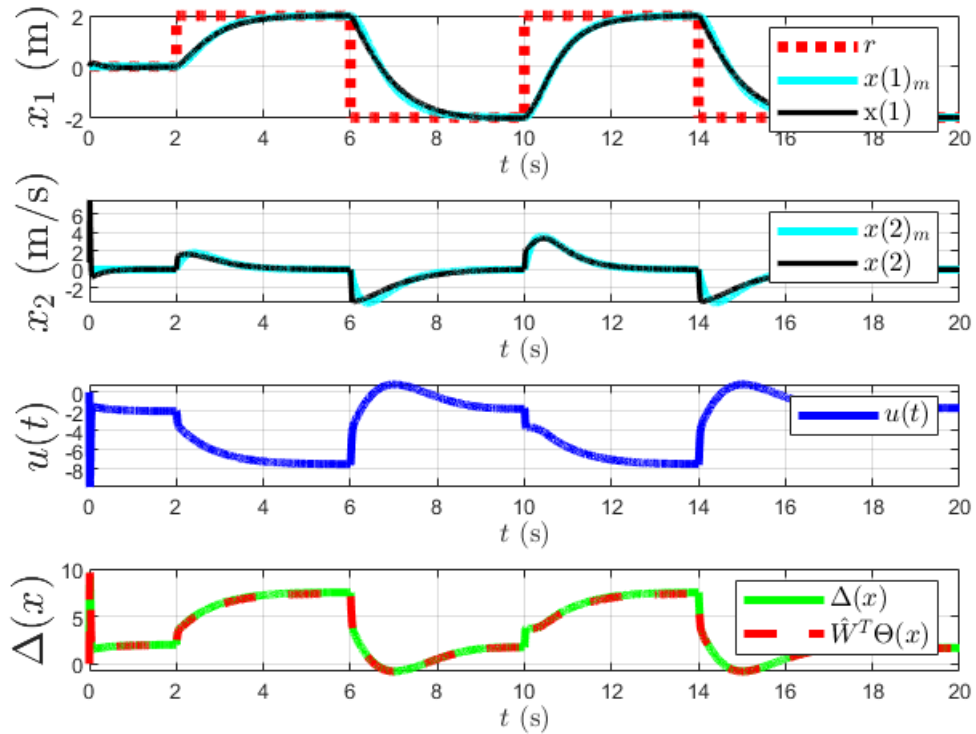
Tabela 2 – Métricas de avaliação da rede RBF no controle DMRNAC

Métrica	Valor
Erro Médio Absoluto (MAE)	0.00864
Erro Quadrático Médio (MSE)	0.00198
Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)	0.04459
Coefficiente de Determinação (R-squared)	0.99967
Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE)	0.30919

Fonte: O autor (2024).

3. No controle DMRNAC, para um rastreamento mais rápido do sinal de referência, polos em $[-3 - 2]$ são escolhidos resultando na resposta da Fig. 14.

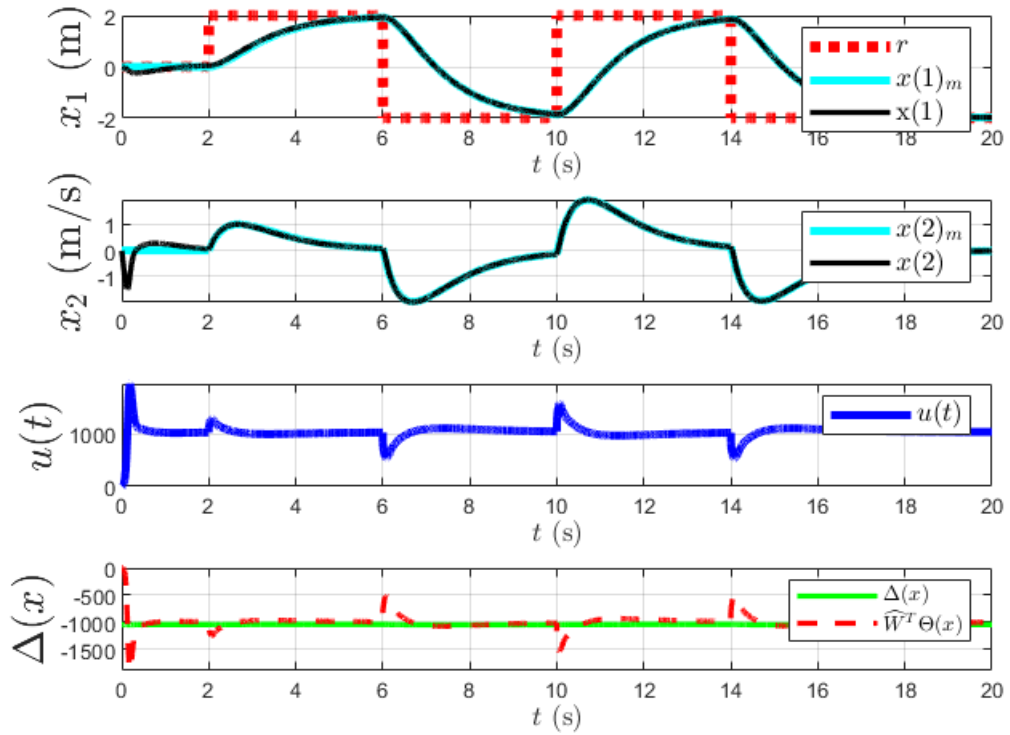
Figura 14 – Rastreamento mais rápido do sinal de referência (DMRNAC)



Fonte: O autor (2024).

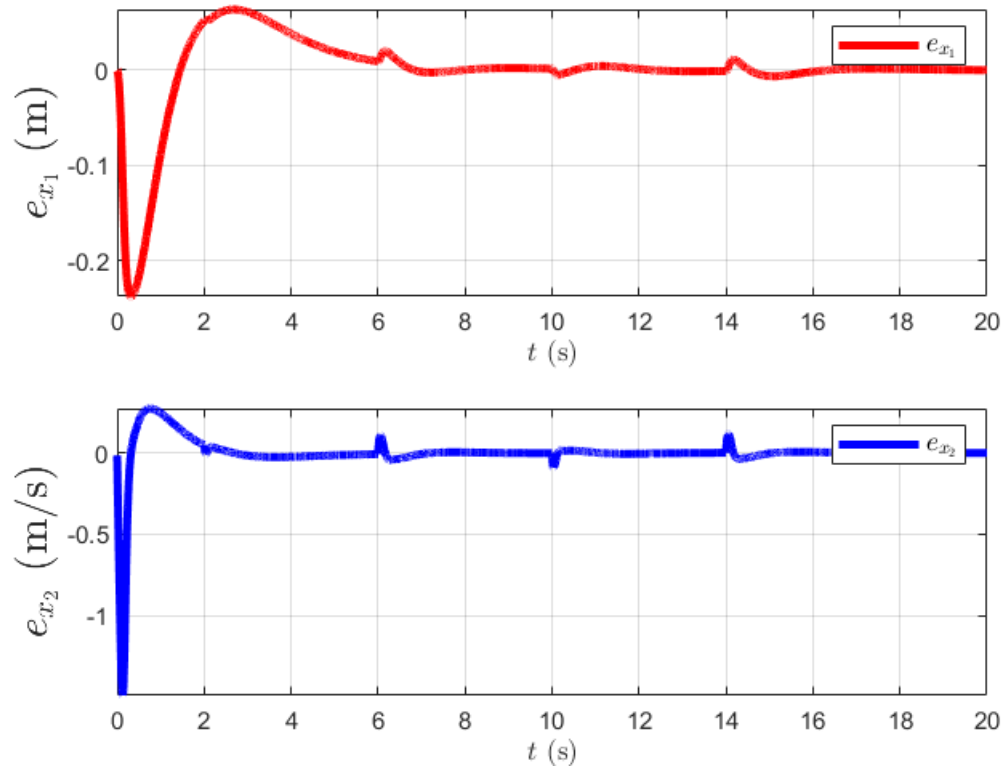
4. A Fig. 15 descreve a resposta do sistema em malha fechada com o controle IMRNAC para ambos os estados x_1 e x_2 que seguem o modelo de referência, o esforço de controle $u(t)$ que apresenta oscilações limitadas, e o desempenho da rede neural RBF $\hat{W}^T \Theta(x)$ para estimar a incerteza $\Delta(x)$. Os erros entre os estados do sistema real e o modelo de referência (e_{x_1} e e_{x_2}) são limitados e convergem a zero, $e_{x_1} \rightarrow 0$ e $e_{x_2} \rightarrow 0$ (Fig. 16). O erro de estimação da rede RBF converge a zero $e_{RBF} \rightarrow 0$, porém com oscilações nos instantes da mudança do sinal de referência (Fig. 17).

Figura 15 – Resposta do sistema controlado (IMRNAC)



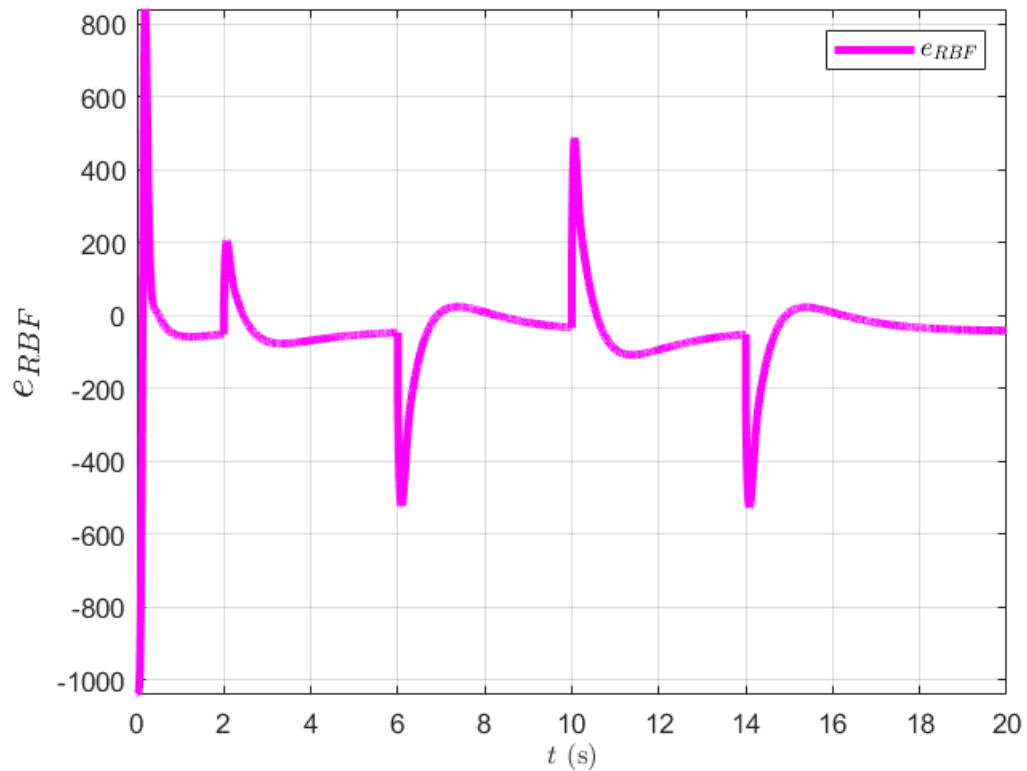
Fonte: O autor (2024).

Figura 16 – Erro de rastreamento do modelo de referência (IMRNAC)



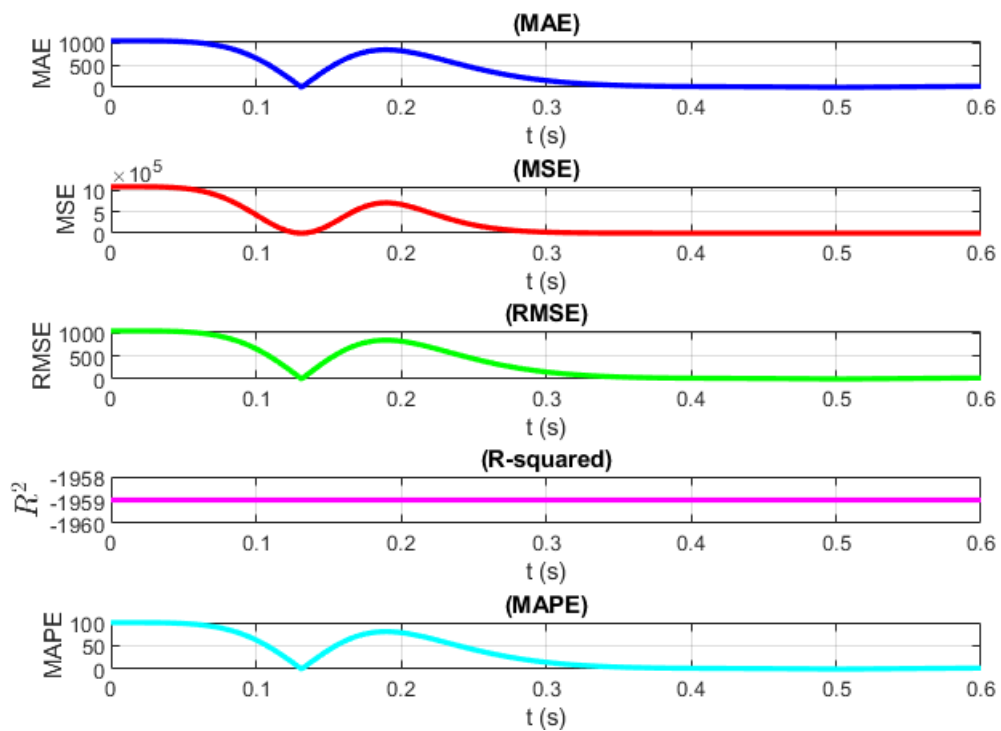
Fonte: O autor (2024).

Figura 17 – Erro de estimação da rede RBF (IMRNAC)



Fonte: O autor (2024).

Figura 18 – Métricas de desempenho da rede RBF (IMRNAC)



Fonte: O autor (2024).

5. Os erros das métricas de avaliação do controlador IMRNAC (Fig. 18) também são satisfatórios, apresentando valores maiores que o DMRNAC (Tabela 3), porém é justificado, pois a variação da incerteza é maior devido às não linearidades do modelo estarem inseridas na incerteza que foi estimada. A incerteza $\Delta(x)$ apresenta um valor numérico maior em módulo, com uma variação entre -1044.20 e -1034.90, refletindo em um erro de estimação da rede RBF maior nos instantes iniciais, com uma variação entre -1040.70 e 840.19, oscilando nas alterações do sinal de referência e tendendo a zero em regime permanente (Fig. 17):

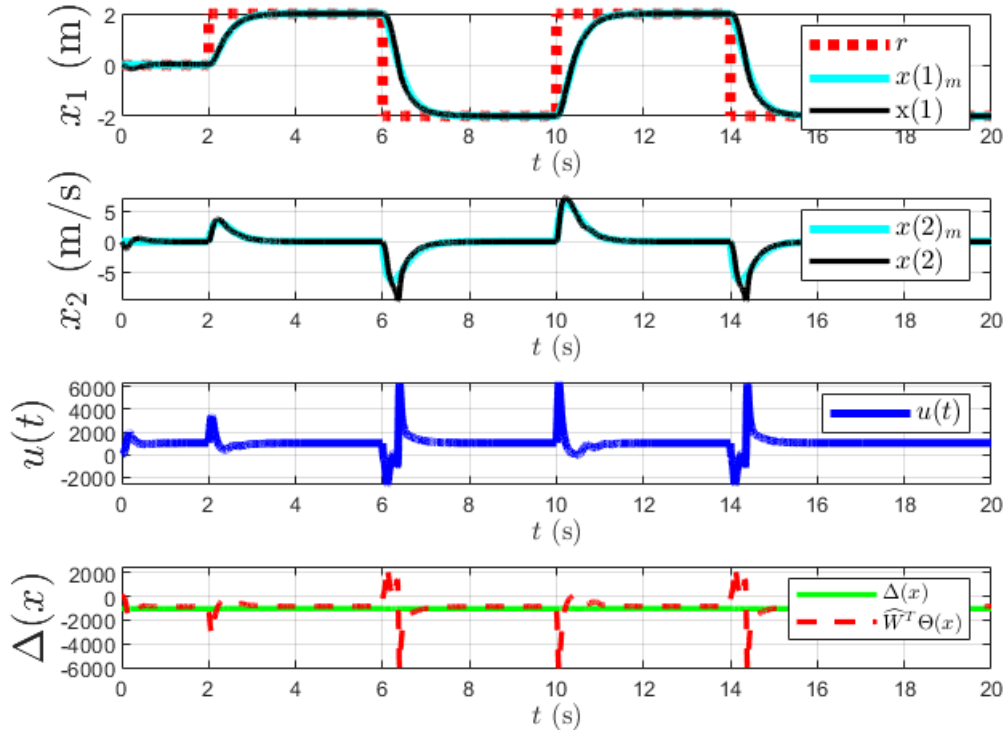
Tabela 3 – Métricas de avaliação da rede RBF no controle IMRNAC

Métrica	Valor
Erro Médio Absoluto (MAE)	71.87
Erro Quadrático Médio (MSE)	17761.15
Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)	133.27
Coefficiente de Determinação (R-squared)	-1958.99
Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE)	6.91

Fonte: O autor (2024).

6. No controle IMRNAC, para um rastreamento mais rápido do sinal de referência, polos em $[-4 - 5]$ são escolhidos resultando na resposta da Fig. 19.

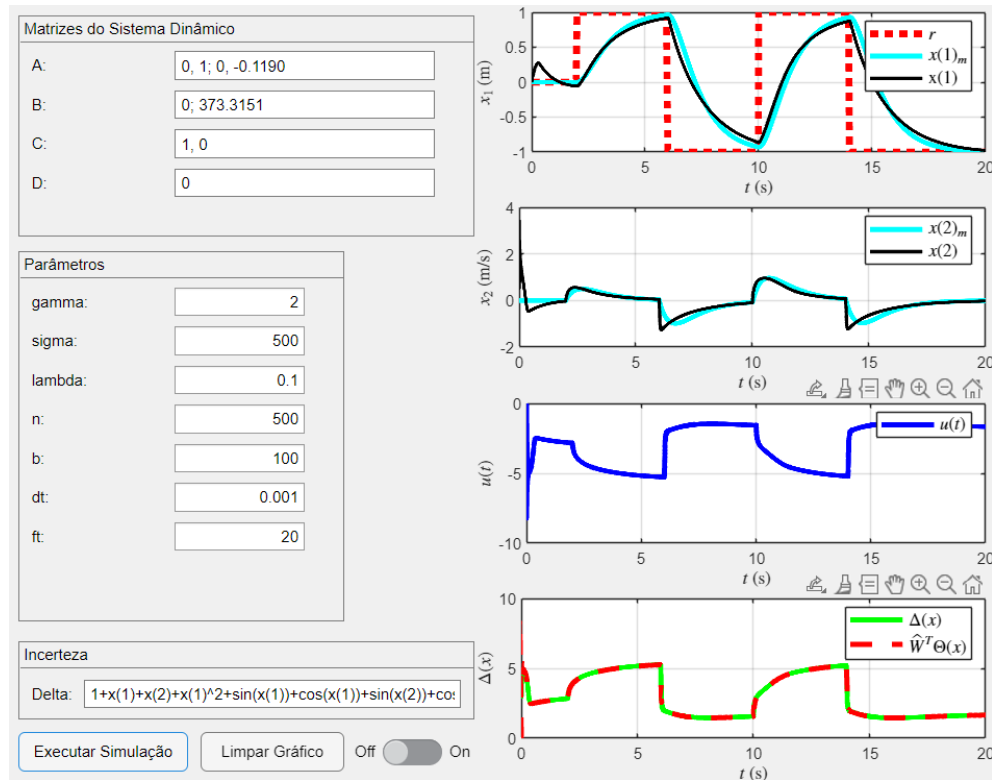
Figura 19 – Rastreamento mais rápido do sinal de referência (IMRNAC)



Fonte: O autor (2024).

7. O controle IMRNAC apresentou robustez em todos os testes, com incertezas não lineares senoidais e quadráticas, isoladas ou somadas.
8. Para todos os testes ambos os controles DMRNAC e IMRNAC se mostraram estáveis, mesmo na presença de incertezas.
9. Com base nos algoritmos 1 e 2 é desenvolvida uma aplicação com interface gráfica, conforme ilustra a Fig. 20, para simulações com mais rapidez e praticidade do controlador, com informações como desempenho de ambos os estados no seguimento do modelo de referência, comportamento da entrada de controle e comparação da incerteza simulada com a incerteza estimada pela rede neural RBF.

Figura 20 – Interface Gráfica Simulador DMRNAC



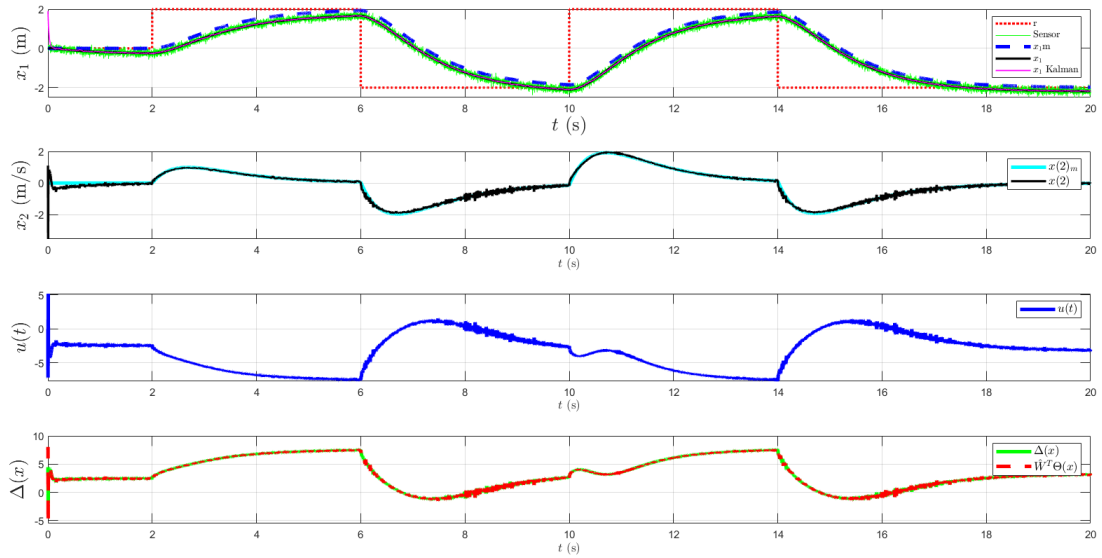
Fonte: O autor (2024).

10. Os resultados da simulação do controle neuro-adaptativo utilizando a estimação ótima do estado $x(t)$ pelo Filtro de Kalman mostraram-se satisfatórios. O filtro de Kalman foi essencial para proporcionar uma estimativa adequada do estado do sistema. Através da combinação do filtro de Kalman com a Rede Neural FBR, o sistema foi capaz de lidar eficazmente com incertezas e ruídos presentes no processo e na medição.
11. A rápida convergência do filtro de Kalman para a estimativa correta do estado $x(t)$ foi adequada. Mesmo com uma condição inicial diferente do estado real do

sistema, o filtro de Kalman ajustou rapidamente suas estimativas, permitindo ao controlador reagir de maneira adequada às mudanças e incertezas do sistema. Essa rápida adaptação é importante para sistemas dinâmicos onde condições iniciais podem não ser perfeitamente conhecidas.

12. O erro entre o estado real e o estado estimado pelo filtro de Kalman permaneceu dentro de limites aceitáveis ao longo da simulação, demonstrando a eficácia do filtro em fornecer estimativas confiáveis. A integração do vetor de funções de base radial $\Theta(x)$, baseado nas estimativas do estado x_K , contribuiu para uma boa adaptação e estimação dos pesos $\hat{W}$ (Fig. 21).

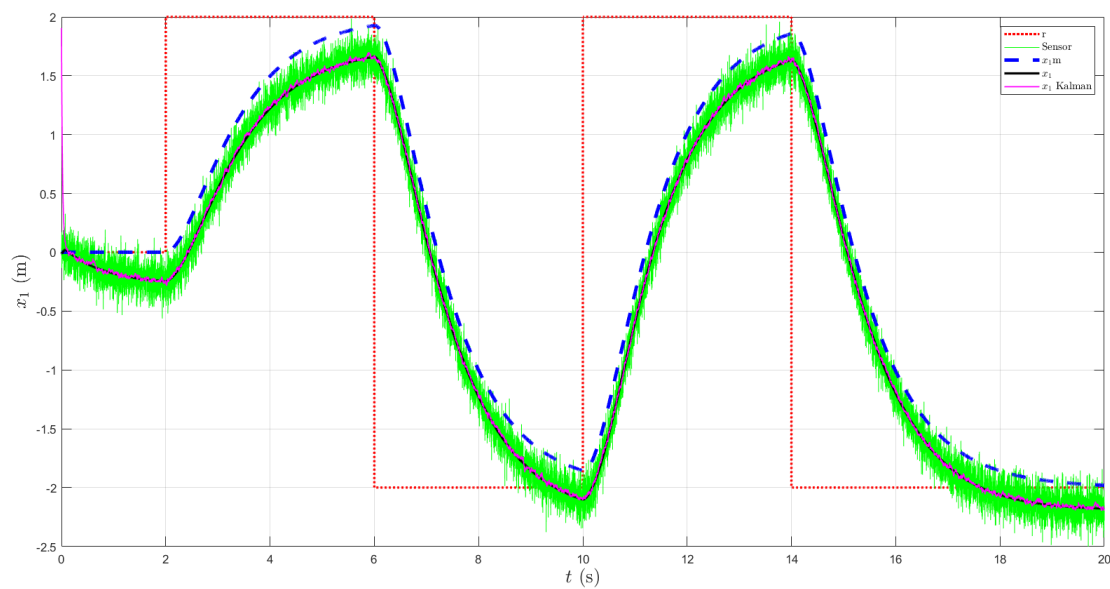
Figura 21 – Resposta do controlador DMRNAC com FK (1)



Fonte: O autor (2024).

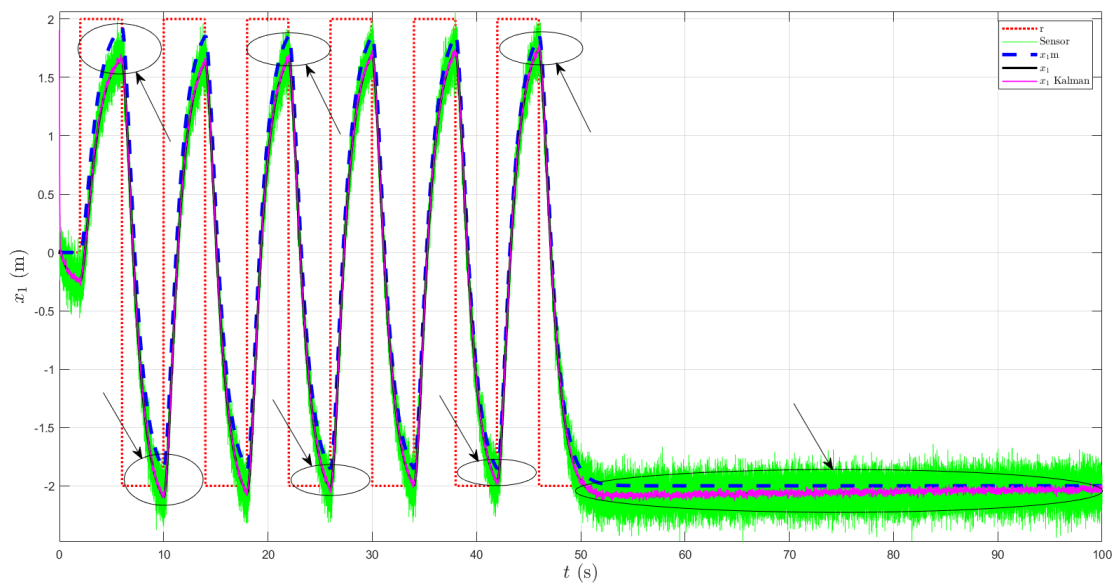
13. Conforme ilustra a Fig. 22, o filtro de Kalman iniciou com condição inicial $[2; 0]$, logo o erro e_K entre o estado real x_1 e sua estimativa z atingiu valor máximo de 2 m e mínimo de 7×10^{-7} m. Observou-se que houve um erro de rastreamento dos estados do modelo de referência $e(t)$ maior nas alterações do sinal de referência, com valores máximos absolutos de $[0.30; 3.55]$ e mínimos absolutos de $[0.8 \times 10^{-5}; 0.1 \times 10^{-5}]$. Aumentando o tempo de simulação para 100 segundos, esse erro diminuiu e tende a zero a cada alteração do sinal de referência, e também em regime permanente, conforme apontam as setas na Fig. 23.

Figura 22 – Resposta do controlador DMRNAC com FK (2)



Fonte: O autor (2024).

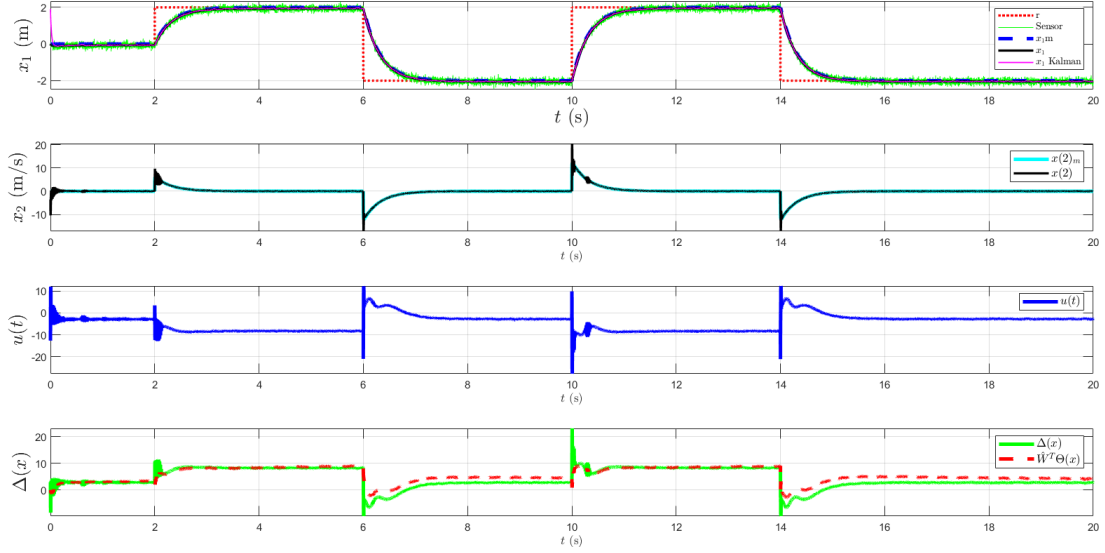
Figura 23 – Resposta do controlador DMRNAC com FK (3)



Fonte: O autor (2024).

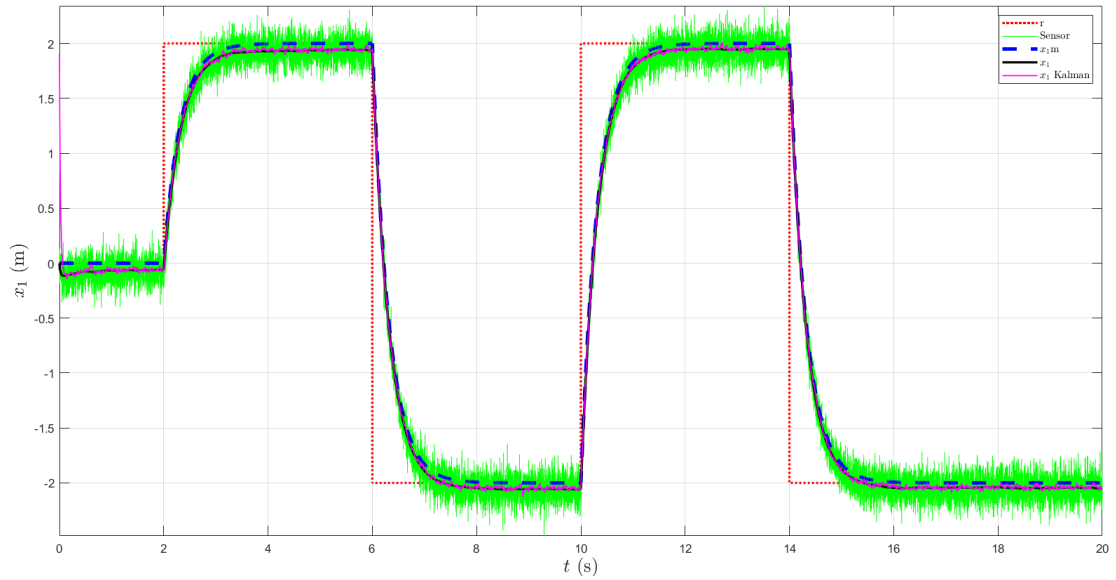
14. Um melhor desempenho de rastreamento do modelo de referência é alcançado calculando o ganho de realimentação K_1 por LQR, conforme Figs. 24 e 25.

Figura 24 – Resposta do controlador DMRNAC com LQR e FK (1)



Fonte: O autor (2024).

Figura 25 – Resposta do controlador DMRNAC com LQR e FK (2)



Fonte: O autor (2024).

15. A configuração do LQR foi feita de acordo com a Tabela 4. O erro de rastreamento dos estados do modelo de referência $e(t)$ apresentou valores máximos absolutos de $[0.12; 10.39]$ e mínimos absolutos de $[0.1 \times 10^{-4}; 0.02 \times 10^{-4}]$ (Fig. 25).

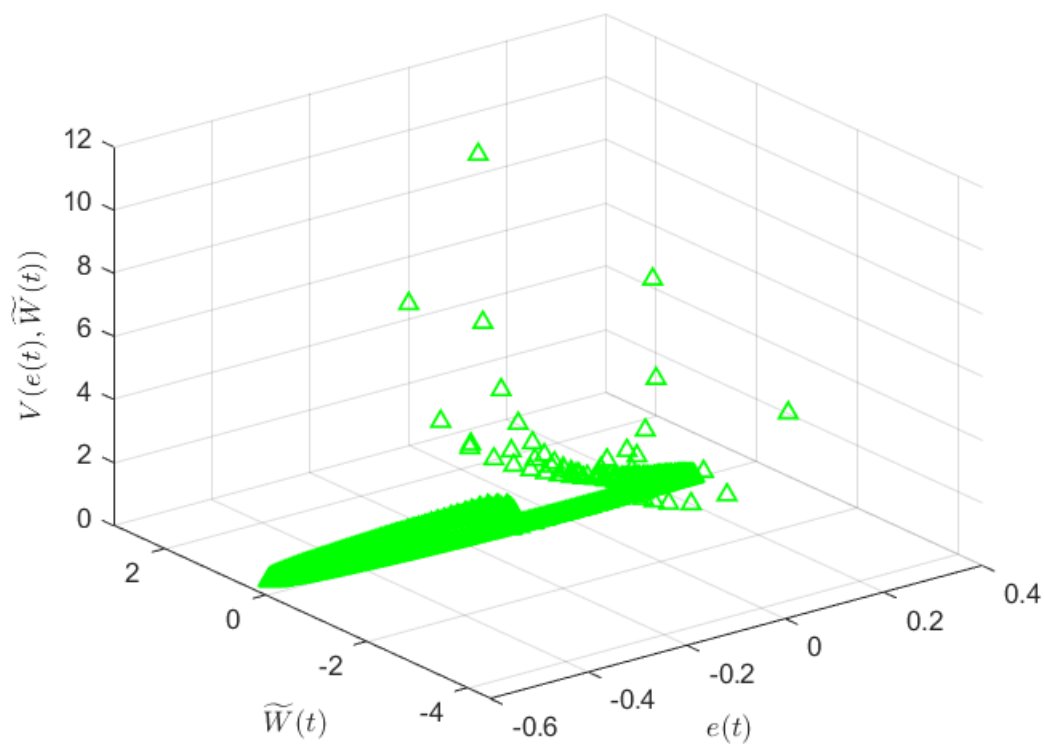
Tabela 4 – Parâmetros do controle por LQR

Parâmetro	Valor
Matriz Q	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$
Matriz R	0.1
Taxa de aprendizagem γ	3
Modificação σ	0.01
Recuperação de desempenho λ	10

Fonte: O autor (2024).

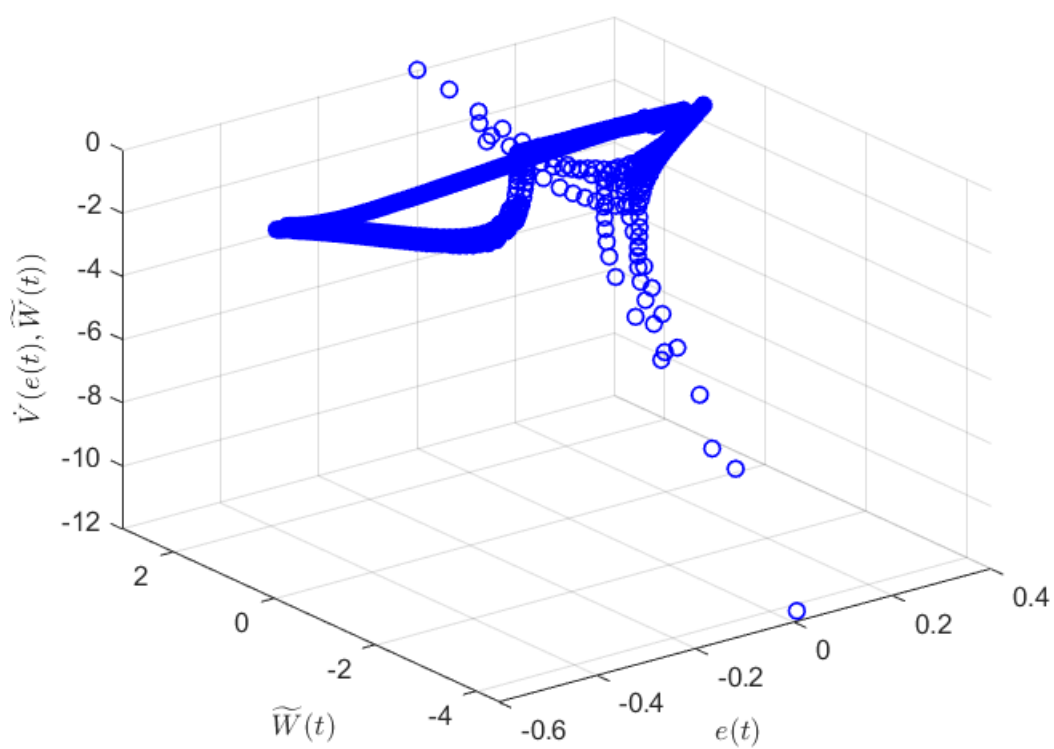
16. Além disso, a recuperação de desempenho, representada pela dinâmica do governador de comando $\dot{\Psi}$ e pelo sinal de correção Gv , mostrou-se eficiente em ajustar o controle em resposta às diferenças entre o modelo de referência e o sistema real. Mesmo com a introdução de um ruído de processo no sistema real e um ruído de medição na saída, o controle manteve um desempenho estável, confirmando a eficácia do filtro de Kalman em mitigar os efeitos desses ruídos.
17. A estabilidade do sistema também pode ser verificada por meio do gráfico da função candidata de Lyapunov $V(e(t), \tilde{W}(t))$ e sua derivada $\dot{V}(e(t), \tilde{W}(t))$, ponto a ponto em relação aos valores do erro de rastreamento do modelo de referência $e(t)$ e do erro de estimação de pesos $\tilde{W}(t)$ obtidos na simulação dos controladores, conforme Figs. 26 e 27 para o controle DMRNAC, e Figs. 28 e 29 para o controle IMRNAC.

Figura 26 – Função candidata de Lyapunov DMRNAC



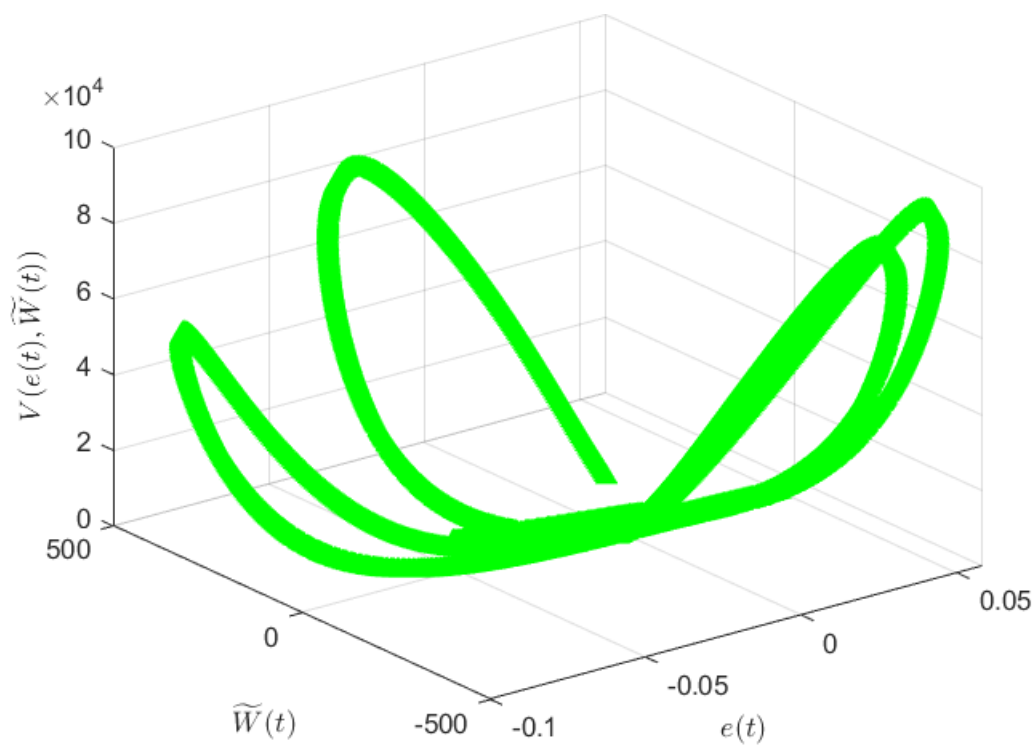
Fonte: O autor (2024).

Figura 27 – Derivada da função candidata de Lyapunov DMRNAC



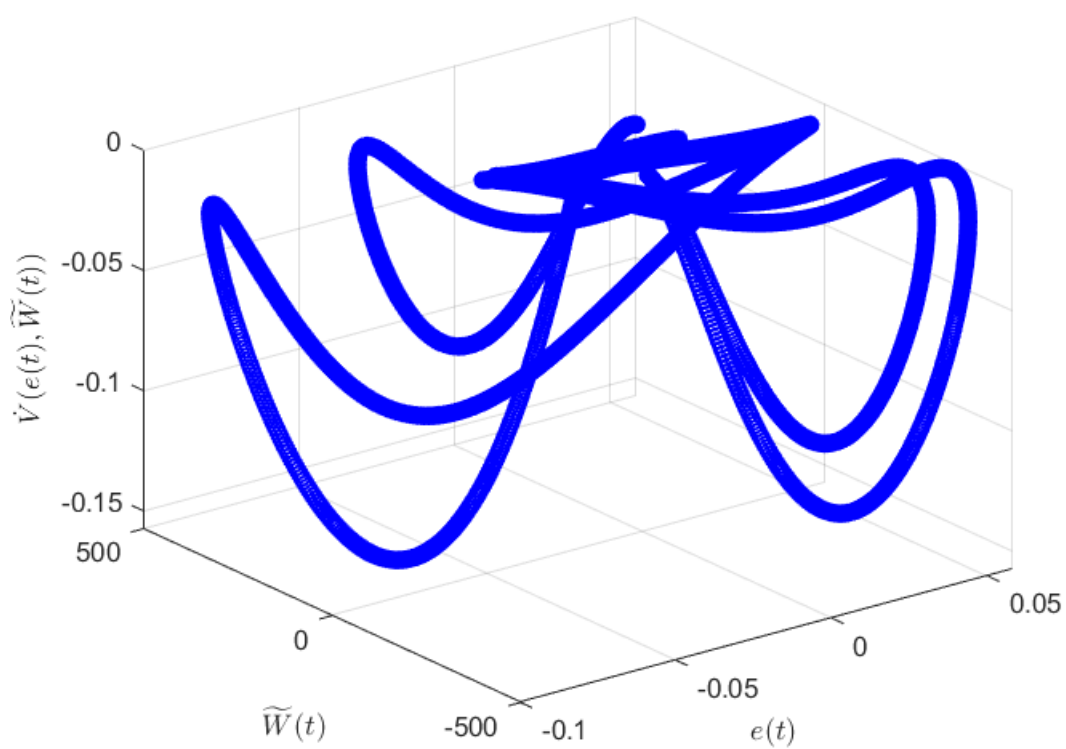
Fonte: O autor (2024).

Figura 28 – Função candidata de Lyapunov IMRNAC



Fonte: O autor (2024).

Figura 29 – Derivada da função candidata de Lyapunov IMRNAC



Fonte: O autor (2024).

9 Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste capítulo, são apresentados os principais resultados e contribuições desta dissertação, além de sugestões para trabalhos futuros que podem aprimorar e expandir a pesquisa realizada. Na seção de Conclusão, são discutidas as implicações dos achados, destacando a relevância e a eficácia dos algoritmos de controle neuro-adaptativo desenvolvidos. Na seção de Trabalhos Futuros, são propostas várias direções de pesquisa que visam otimizar e validar ainda mais os algoritmos de controle, com potencial para aplicações práticas em diversas áreas da Engenharia de Controle.

9.1 Conclusão

Esta dissertação de mestrado apresenta a modelagem matemática de foguetes e uma metodologia para o desenvolvimento de algoritmos para o projeto de controladores neuro-adaptativos robustos. Os algoritmos para os controladores propostos foram avaliados em simuladores que se baseiam em modelos matemáticos e podem ser aplicados a uma classe de sistemas alterando os valores de suas matrizes, os parâmetros de configuração e a ordem dos modelos.

Com base nas discussões apresentadas, pode-se concluir que esta proposta oferece uma contribuição significativa para o setor aeroespacial. Especificamente, no campo do controle adaptativo no contexto do controle de altitude de foguetes de combustível sólido. Ao longo desta pesquisa, a modelagem e o projeto dos controladores foram baseados em uma rede neural FBR, atendendo aos requisitos específicos desse desafio de engenharia. Os resultados obtidos mostraram que os dois controladores desenvolvidos, DMRNAC e IMRNAC, demonstraram estabilidade e robustez mesmo na presença de incertezas.

O desempenho dos controladores em resposta a mudanças no sinal de referência foi avaliado, destacando a capacidade de rastrear e regular os sistemas controlados. Além disso, a implementação prática do controlador e do simulador desenvolvidos mostrou-se viável e promissora para aplicações em sistemas do mundo real, oferecendo uma plataforma flexível e adaptável para pesquisa e desenvolvimento futuros.

A combinação do filtro de Kalman com o controle neuro-adaptativo resultou em um sistema de controle capaz de lidar com incertezas, mesmo quando o estado do sistema real não está disponível diretamente para os cálculos, demonstrando rápida convergência e robustez em situações de ruído e perturbações. Esses resultados validam a abordagem proposta e destacam o potencial do uso de filtros de Kalman em sistemas de controle adaptativo.

Como conclusão geral, esta pesquisa fornece uma base sólida para futuras investigações no campo do controle adaptativo, abrindo caminho para o aprimoramento contínuo de técnicas e metodologias nesse domínio da Engenharia de Controle e da Engenharia Aeroespacial.

9.2 Trabalhos Futuros

Embora o controle MRAC neuro-adaptativo robusto tenha mostrado resultados promissores em várias aplicações, há várias direções que podem ser exploradas em trabalhos futuros para aprimorar ainda mais essa tecnologia.

Primeiramente, a implementação de algoritmos de controle adaptativo em sistemas de tempo real apresenta desafios significativos. Portanto, futuros estudos devem focar na otimização do desempenho computacional dos algoritmos MRAC neuro-adaptativos robustos, garantindo que possam ser executados eficientemente em plataformas embarcadas com recursos limitados. A incorporação de técnicas de aprendizado de máquina para a otimização de parâmetros em tempo real pode ser uma área promissora, conforme discutido por [Abbass, Saleh e Mezher \(2024\)](#).

Além disso, a robustez dos controladores adaptativos pode ser aumentada através da integração de métodos de controle preditivo. A combinação de controle preditivo com MRAC pode permitir uma antecipação de perturbações e incertezas, resultando em um sistema de controle com maior capacidade de se adaptar e continuar operando eficientemente apesar de condições adversas, como falhas de componentes, variações nos parâmetros do sistema ou distúrbios externos. Pesquisas como a de [Bhardwaj, Sharma e Kumar \(2023\)](#) sugerem que a fusão de diferentes técnicas de controle adaptativo pode levar a melhorias significativas no desempenho.

Outra área importante de pesquisa futura é a aplicação de MRAC neuro-adaptativo robusto em sistemas multi-robóticos e sistemas de veículos autônomos. Estudos, como o de [Hussain, Ahmed e Malik \(2023\)](#) e [Luo, Zhang e Chen \(2023\)](#), demonstram o potencial dos controladores adaptativos em sistemas complexos e dinâmicos, onde a coordenação entre múltiplos agentes é essencial. A exploração dessas aplicações pode abrir novos horizontes para o uso de MRAC em ambientes altamente dinâmicos e interconectados.

Além disso, a integração de redes neurais profundas para a modelagem e controle de sistemas não-lineares complexos é uma área de grande potencial. O uso de redes neurais pode melhorar a capacidade dos controladores MRAC de lidar com dinâmicas complexas e não-lineares, proporcionando uma maior precisão e adaptabilidade. O trabalho de [Pan, Li e Zhou \(2024\)](#) destaca a eficácia de técnicas baseadas em redes neurais na melhoria do desempenho de controladores adaptativos.

Finalmente, a validação experimental e a implementação prática dos controladores MRAC neuro-adaptativos robustos em aplicações reais continuam sendo uma área crítica de pesquisa. Testes em ambientes reais, como sistemas de próteses robóticas para reabilitação [Abbass, Saleh e Mezher \(2024\)](#), e controle de UAVs como abordado por [Names \(2024\)](#), são essenciais para garantir que as técnicas desenvolvidas sejam efetivas fora de ambientes simulados.

A evolução contínua dessas áreas de pesquisa contribuirá significativamente para o avanço dos controladores MRAC neuro-adaptativos robustos, ampliando suas aplicações e melhorando seu desempenho em diversos cenários.

Referências

- ABBASS, A. M.; SALEH, B. J.; MEZHER, L. S. Design of optimized desired optimal controller (doc)-based multivariable model reference adaptive control (mrac) algorithm for robotic human knee flexion during gait. *Revue d'Intelligence Artificielle, IIETA*, v. 38, n. 2, p. 541–550, 2024.
- ALVES, T. C. D. S.; SICA, F. C. O estado da arte dos sistemas de controle de reentrada na atmosfera para veículos aeroespaciais reutilizáveis. *12 Workshop em Engenharia e Tecnologia*, 2023.
- ANAVATTI, S. G.; SANTOSO, F.; GARRATT, M. A. Progress in adaptive control systems: past, present, and future. In: IEEE. *2015 International Conference on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA)*. [S.l.], 2015. p. 1–8.
- ARABI, E. et al. A set-theoretic model reference adaptive control architecture for disturbance rejection and uncertainty suppression with strict performance guarantees. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 91, n. 5, p. 1195–1208, 2018.
- ARABI, E. et al. Model reference adaptive control of uncertain dynamical systems subject to high-order actuator dynamics with performance guarantees. In: *AIAA Scitech 2020 Forum*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 0591.
- ARABI, E.; YUCELEN, T. Set-theoretic model reference adaptive control with time-varying performance bounds. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 92, n. 11, p. 2509–2520, 2019.
- ARABI, E. et al. A neuroadaptive architecture for model reference control of uncertain dynamical systems with performance guarantees. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 125, p. 37–44, 2019.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control: Second Edition*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- BALESTRINO, A.; MARIA, G. D.; SCIAVICCO, L. An adaptive model following control for robotic manipulators. 1983.
- BARROWMAN, J. S. *The practical calculation of the aerodynamic characteristics of slender finned vehicles*. [S.l.], 1967.
- BARROWMAN, J. S.; BARROWMAN, J. A. The theoretical prediction of the center of pressure. *National Association of Rocketry*, 1966.
- BHARDWAJ, A.; SHARMA, R.; KUMAR, P. Performance enhancement of mrac systems using hybrid adaptive control strategies. *Journal of Control Engineering and Technology*, v. 5, n. 3, p. 245–257, 2023.
- CARMO, C. R. S.; SILVA, J. R. de M. Aprendizado de máquina e prestação de serviços de armazenamento de dados: Métricas para análise e validação de algoritmos previsores. *Revista GeTeC*, v. 12, n. 38, 2023.

- CHEN, S.; COWAN, C.; GRANT, P. Orthogonal least squares learning algorithm for radial. *IEEE Trans. Neural Netw.*, v. 2, n. 2, p. 302–309, 1991.
- CORRÊA, F. d. G. Guerra russo-ucraniana: Grande laboratório para ensaios destrutivos e não destrutivos de tecnologias emergentes e disruptivas. *Centro de Estudos Estratégicos do Exército: Análise Estratégica*, v. 28, n. 1, p. 47–58, 2023.
- COSTA, B. A. et al. A reinforcement learning approach for adaptive tracking control of a reusable rocket model in a landing scenario. *Neurocomputing*, Elsevier, p. 127377, 2024.
- DAVIDSON, J. B.; LALLMAN, F. J.; BUNDICK, W. T. Real-time adaptive control allocation applied to a high performance aircraft. In: *2001 5th SIAM Conference on Control and its Applications*. [S.l.: s.n.], 2001.
- DOGAN, K. M. et al. Improving transient performance of discrete-time model reference adaptive control architectures. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 34, n. 7, p. 901–918, 2020.
- DYDEK, Z. T.; ANNASWAMY, A. M.; LAVRETSKY, E. Adaptive control and the nasa x-15 program: A concise history, lessons learned, and a provably correct design. In: *2008 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 2957–2962.
- FARSANA, N. et al. Fault tolerant model reference adaptive controller for launch vehicle electromechanical actuation system. In: IEEE. *2023 International Conference on Control, Communication and Computing (ICCC)*. [S.l.], 2023. p. 1–6.
- FELDBAUM, A. Dual control theory. ii. *Avtomatika i Telemekhanika*, v. 21, n. 11, p. 1453–1464, 1960.
- FELDBAUM, A. A. Dual control theory. i. *Avtomatika i Telemekhanika*, v. 21, n. 9, p. 1240–1249, 1960.
- FRANKLIN, G. F. et al. *Digital Control of Dynamic Systems*. [S.l.]: Addison-wesley Menlo Park, CA, 1998. v. 3.
- FRAVOLINI, M. L. et al. Analysis and design of adaptive control systems with unmodeled input dynamics via multiobjective convex optimization. In: IEEE. *2015 American Control Conference (ACC)*. [S.l.], 2015. p. 1579–1584.
- GAO, Y. et al. Distributed fuzzy learning sliding mode cooperative control for non-affine nonlinear multi-missile guidance systems via a prescribed performance observer. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, 2023.
- GAUDER, D. S. Adaptive in-line qualitätsregelung in der mikro-verzahnungsfertigung. 2024.
- GETTMAN, D. et al. Data-driven algorithms for real-time adaptive tuning of offsets in coordinated traffic signal systems. *Transportation Research Record*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 2035, n. 1, p. 1–9, 2007.
- GLUSHCHENKO, A.; LASTOCHKIN, K. Neural network-based direct model reference adaptive control of quadrotor attitude. In: IEEE. *2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*. [S.l.], 2022. p. 1–4.

- GRUENWALD, B. C. et al. An adaptive architecture for control of uncertain dynamical systems with unknown actuator bandwidths. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 51, n. 12, p. 130–135, 2018.
- GRUENWALD, B. C.; YUCELEN, T.; MUSE, J. A. Direct uncertainty minimization framework for system performance improvement in model reference adaptive control. *Machines*, MDPI, v. 5, n. 1, p. 9, 2017.
- HEIDARI, A.; NAVIMIPOUR, N. J.; UNAL, M. A secure intrusion detection platform using blockchain and radial basis function neural networks for internet of drones. *IEEE Internet of Things Journal*, IEEE, 2023.
- HODEL, A. S.; BAGINSKI, T. A. An interdisciplinary senior design course utilizing electronically guided model rockets. *IEEE Transactions on Education*, IEEE, v. 38, n. 4, p. 321–327, 1995.
- HSIA, T. Adaptive control of robot manipulators-a review. In: IEEE. *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.], 1986. v. 3, p. 183–189.
- HUSSAIN, A.; AHMED, K.; MALIK, A. Model reference adaptive control for multi-robot systems: A survey. *International Journal of Robotics Research*, v. 42, n. 4, p. 321–340, 2023.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust adaptive control*. [S.l.]: PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1996. v. 1.
- JI, Z.; SHI, G. Adaptive neural dynamics-based speed control strategy for stable retrieval of tethered satellite system. *Advances in Space Research*, Elsevier, v. 71, n. 12, p. 4987–4994, 2023.
- JOHANSSON, R. Adaptive control of robot manipulator motion. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH), 1988.
- KARATOPRAK, S. *Sizing and optimization of the horizontal tail of a jet trainer*. Dissertação (Mestrado) — Middle East Technical University, 2019.
- KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002. (Pearson Education). ISBN 9780130673893. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=t_d1QgAACAAJ>.
- KOTOV, E. V.; RAJU, K. M. Real-time adaptive control of electric vehicle drives using artificial neural networks. In: EDP SCIENCES. *MATEC Web of Conferences*. [S.l.], 2024. v. 392, p. 01178.
- KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P. V.; KANELAKOPOULOS, I. *Nonlinear and adaptive control design*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- KUMAR, R. et al. Adaptive control for cyber-physical systems under man-in-the-middle attacks with false data injections. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, p. 106661, 2024.
- LANDAU, I. A survey of model reference adaptive techniques—theory and applications. *Automatica*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 353–379, 1974.

- LANDAU, I. D. et al. *Adaptive control: algorithms, analysis and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- LAVRETSKY, E.; HOVAKIMYAN, N. Adaptive dynamic inversion for nonaffine-in-control uncertain systems via time-scale separation. part ii. *Journal of Dynamical and Control Systems*, Springer, v. 14, p. 33–41, 2008.
- LAVRETSKY, E.; WISE, K. *Robust and Adaptive Control: With Aerospace Applications*. Springer International Publishing, 2024. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9783031383137. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=B84C0AEACAAJ>>.
- LAVRETSKY, E.; WISE, K. A. Robust adaptive control. In: *Robust and adaptive control: With aerospace applications*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 317–353.
- LEE, C.; CHUNG, M.-J.; LEE, B. H. An approach of adaptive control for robot manipulators. *Journal of Robotic Systems*, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 27–57, 1984.
- LEVINE, W. S. *Control system advanced methods*. [S.l.]: CRC Press, 2011.
- LINDORFF, D.; CARROLL, R. Survey of adaptive control using liapunov design. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 18, n. 5, p. 897–914, 1973.
- LU, M.; DENG, F.; LIU, L. An extension of barbalat’s lemma with its application to synchronization of a class of switched networked nonlinear systems . *IFAC-PapersOnLine*, v. 53, n. 2, p. 9778–9783, 2020. ISSN 2405-8963. 21st IFAC World Congress. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320334194>>.
- LUO, J.; ZHANG, W.; CHEN, L. Design and implementation of mrac for autonomous vehicle path tracking. *Journal of Autonomous Systems*, v. 12, n. 2, p. 120–130, 2023.
- MIAO, B.; LI, S.; LIU, L. Nussbaum gain adaptive control for full-state constrained cyber-physical system under network attacks and actuator failures. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 34, n. 4, p. 2515–2531, 2024.
- MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Limitations and applications in a fractional barbalat’s lemma. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Springer, v. 26, n. 1, p. 253–275, 2023.
- NAIR, A. P.; SELVAGANESAN, N.; LALITHAMBIKA, V. Lyapunov based pd/pid in model reference adaptive control for satellite launch vehicle systems. *Aerospace Science and Technology*, v. 51, p. 70–77, 2016. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963816300281>>.
- NAMES, A. Robust tracking control for quadrotor uav with external disturbances and uncertainties using neural network based mrac. *Journal of Aerospace Engineering*, 2024.
- NARENDRA, K. S.; PARTHASARATHY, K. Gradient methods for the optimization of dynamical systems containing neural networks. *IEEE Transactions on Neural networks*, IEEE, v. 2, n. 2, p. 252–262, 1991.
- NEMATİ, A. et al. Design of nonsingular second-order terminal sliding mode controller for cyber-physical systems with time-delays and cyber-attack on actuators. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 55, n. 5, p. 876–893, 2024.

- NITSCHKE, M. S. *Development of a numerical simulation tool to explore thrust vector control on sounding rockets*. Dissertação (Mestrado), 2023.
- NUÑEZ-QUISPE, J. J. Design and simulation of a rover cansat non-pneumatic wheel: Preliminary study for a certain test obstacle path. In: IEEE. *2021 12th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE)*. [S.l.], 2021. p. 484–488.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno, São Paulo-SP, 5. Ed.* [S.l.]: Pearson, 2010.
- ORŁOWSKI, J. et al. Adaptive control of lipschitz time-delay systems by sigma modification with application to neuronal population dynamics. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 159, p. 105082, 2022.
- ORR, J. S. et al. Advanced modeling of control-structure interaction in thrust vector control systems. In: *45th Annual AAS Guidance, Navigation and Control (GN&C) Conference*. [S.l.: s.n.], 2023.
- PAN, Y.; LI, M.; ZHOU, J. Adaptive neural network-based control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 35, n. 1, p. 45–57, 2024.
- POLYCARPOU, M. M. Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, Ieee, v. 41, n. 3, p. 447–451, 1996.
- QU, S. et al. Lpv model-based adaptive mpc of an evtol aircraft during tilt transition subject to motor failure. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 21, n. 2, p. 339–349, 2023.
- ROVITHAKIS, G. A.; CHRISTODOULOU, M. A. Adaptive control of unknown plants using dynamical neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 24, n. 3, p. 400–412, 1994.
- SAMPAIO. Sistema de controle de atitude embarcado para voo autônomo de aviões em escala. *Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica, Escola Politécnica e Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia – UFBA*, 2006.
- SANNER, R. M.; SLOTINE, J.-J. E. Gaussian networks for direct adaptive control. In: IEEE. *1991 American control conference*. [S.l.], 1991. p. 2153–2159.
- SHELBY, S. G. Single-intersection evaluation of real-time adaptive traffic signal control algorithms. *Transportation Research Record*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 1867, n. 1, p. 183–192, 2004.
- SILVA, I. N. d.; SPATTI, D. H.; FLAUZINO, R. A. *Redes neurais artificiais para engenharia e ciências aplicadas*. 2010.
- SILVA, I. N. D.; SPATTI, D. H.; FLAUZINO, R. A. *Redes neurais artificiais para engenharia e ciências aplicadas-curso prático*. [S.l.]: Editora Artliber, 2010.
- SINGH, U.; PAL, N. S. Roll angle control of an aircraft using adaptive controllers. In: IEEE. *2019 International Conference on Automation, Computational and Technology Management (ICACTM)*. [S.l.], 2019. p. 143–147.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. Composite adaptive control of robot manipulators. *Automatica*, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 509–519, 1989.

- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.
- SOPEGNO, L. et al. Thrust vector controller comparison for a finless rocket. *Machines*, MDPI, v. 11, n. 3, p. 394, 2023.
- STEPANYAN, V.; KALMANJE, K. Input and output performance of m-mrac in the presence of bounded disturbances. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 7688.
- STUART, B.; MCENULTY, J. Overview of the sls core stage thrust vector control system design. In: *45th Annual AAS Guidance, Navigation and Control (GN&C) Conference*. [S.l.: s.n.], 2023.
- TUN, N. et al. Aerodynamic coefficients prediction for 122 mm rocket by using computational fluid dynamics. In: IOP PUBLISHING. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. [S.l.], 2020. v. 816, n. 1, p. 012010.
- UNBEHAUEN, H.; SCHMID, C. Status and industrial application of adaptive control systems. *Automatic Control Theory and Applications*, v. 3, 1975.
- VETTER, J. S.; REED, D. A. Real-time performance monitoring, adaptive control, and interactive steering of computational grids. *The International Journal of High Performance Computing Applications*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 14, n. 4, p. 357–366, 2000.
- WANG, M. et al. Fault-tolerant control for flight systems in the presence of severe actuator failures and input constraints. In: *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 6100–6105.
- WANG, Z.; HAN, Z.; TAYYABA, S. Adaptive control for uncrewed aerial vehicles based on communication information optimization in complex environments. *PeerJ Computer Science*, PeerJ Inc., v. 10, p. e1920, 2024.
- WHITAKER, H. P.; YAMRON, J.; KEZER, A. *Design of model-reference adaptive control systems for aircraft*. [S.l.]: Massachusetts Institute of Technology, Instrumentation Laboratory, 1958.
- WIE, B.; DU, W.; WHORTON, M. Analysis and design of launch vehicle flight control systems. In: *AIAA guidance, navigation and control conference and exhibit*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 6291.
- WITTENMARK, B. Stochastic adaptive control methods: a survey. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 21, n. 5, p. 705–730, 1975.
- WU, J. et al. State of health estimation of lithium-ion battery with improved radial basis function neural network. *Energy*, Elsevier, v. 262, p. 125380, 2023.
- YANG, B.-J. et al. An lmi-based stability analysis for adaptive controllers. In: *IEEE. 2009 American Control Conference*. [S.l.], 2009. p. 2593–2598.
- YU, S.-H.; ANNASWAMY, A. M. Neural control for nonlinear dynamic systems. In: *Neural Information Processing Systems*. [s.n.], 1995. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16140638>>.

YUCELEN, T.; CALISE, A. Derivative-free model reference adaptive control of a generic transport model. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 8402.

YUCELEN, T.; JOHNSON, E. A new command governor architecture for transient response shaping. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 27, n. 12, p. 1065–1085, 2013.

YUE, F. et al. Nonlinear adaptive flight control system: Performance enhancement and validation. *Chinese Journal of Aeronautics*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 354–365, 2023.

ZHAO, N. et al. Fuzzy-based adaptive event-triggered control for nonlinear cyber-physical systems against deception attacks via a single parameter learning method. *Information Sciences*, Elsevier, v. 657, p. 119948, 2024.

ZHI, Q. et al. Research on adaptive control strategy for distributed new energy. In: SPIE. *Ninth International Conference on Energy Materials and Electrical Engineering (ICEMEE 2023)*. [S.l.], 2024. v. 12979, p. 640–645.

Apêndices

APÊNDICE A – Linearização do Modelo Não Linear do Foguete

Conforme apresentado na Seção 3.3 a linearização do modelo não linear do foguete é calculada utilizando o método de expansão da série de Taylor, conforme Equação (3.30).

A Tabela 5 abaixo apresenta os valores dos parâmetros de um foguete de treinamento e valores de algumas constantes calculadas.

Tabela 5 – Parâmetros do Foguete

Parâmetros	Valor
Massa (m)	68.3 kg
Coefficiente de Arrasto (C_d)	0.43
Diâmetro do Foguete (d)	0.13 m
Área da Seção Frontal (S)	$\pi \left(\frac{d^2}{4}\right) = 0.0133 \text{ m}^2$
Densidade do Ar (Superfície) (ρ)	1.1 kg/m ³
Empuxo Máximo (T)	25748 N
Aceleração devido à Gravidade (g)	9.81 m/s ²
Constante Aerodinâmica (Superfície) ($c_1 = c_2$)	$0.5C_d\rho S = 0.0031$
Ângulo de Elevação (θ)	8°
Ângulo de Rotação (ϕ)	0°

Fonte: O autor (2024).

Considerando o modelo não linear da Equação (3.8) dada por

$$\begin{cases} \dot{h}_z = v \\ \dot{v}_z = \frac{T \cos(\theta)}{m \cos(\delta)} - g - \frac{c_1}{m} |v|^2 - \frac{c_2 \sin(\theta)}{m} |v|^2, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

e utilizando a entrada de controle como sendo $\frac{1}{\cos(\delta)} = u$, tem-se

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{T \cos(\theta)}{m} u - g - \frac{c_1}{m} x_2^2 - \frac{c_2 \sin(\theta)}{m} x_2^2. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Agora, o sistema é linearizado por expansão da série de Taylor. A expansão de Taylor até a primeira ordem é dada por

$$f(x, u) \approx f(\bar{x}_0, \bar{u}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}_0, \bar{u}_0} (x - \bar{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}_0, \bar{u}_0} (u - \bar{u}_0), \quad (\text{A.3})$$

sendo $f(\bar{x}_0, \bar{u}_0)$ o valor da função no ponto de equilíbrio, $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{\bar{x}_0, \bar{u}_0}$ é o gradiente em relação a x , e $\frac{\partial f}{\partial u}\big|_{\bar{x}_0, \bar{u}_0}$ é o gradiente em relação a u .

Realizando o cálculo passo a passo:

Derivadas parciais de f em relação a x_1 , x_2 e u :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2c_1x_2}{m} - \frac{2c_2\sin(\theta)x_2}{m} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T\cos(\theta)}{m} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Em torno dos pontos de equilíbrio $\bar{x}_1 = 2595$, $\bar{x}_2 = 1136$, e substituindo os parâmetros dados na Tabela 5 tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{x}_0, \bar{u}_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\bar{x}_0, \bar{u}_0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 373.3151 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{A.5}$$

O modelo do sistema linearizado em espaço de estados é dado por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 373.31 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{A.6}$$

APÊNDICE B – Verificação da Controlabilidade e Observabilidade do Sistema

Para as matrizes A e B do sistema, o cálculo da matriz de controlabilidade M e sua verificação de posto completo é feito da seguinte maneira:

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 373.3151 \end{bmatrix}.$$

Calculando AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 373.3151 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 373.3151 \\ -44.4245 \end{bmatrix}.$$

A matriz de controlabilidade M é construída como:

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 373.3151 \\ 373.3151 & -44.4245 \end{bmatrix}.$$

O posto de M é 2, portanto, o sistema é controlável.

Para as matrizes A e C do sistema, o cálculo da matriz de observabilidade N e sua verificação de posto completo é feito da seguinte maneira:

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0].$$

Calculando CA :

$$CA = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix} = [0 \quad 1].$$

A matriz de observabilidade N é construída como:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O posto de N é 2, portanto, o sistema é observável.

APÊNDICE C – Estimação Ótima de Estados - Algoritmo do Filtro de Kalman

A configuração do algoritmo do Filtro de Kalman para as simulações do controlador DMRNAC com estimação de estados, começa com a definição das matrizes A , B , C e D , que descrevem a dinâmica do sistema em espaço de estados. Neste caso, as matrizes são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1190 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 373.3151 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \quad (\text{C.1})$$

A matriz de covariâncias do processo Q_K é configurada com base nos desvios padrão dos ruídos do sistema: $\sigma_w = 0.01$ para o ruído de posição e $\sigma_s = 0.02$ para o ruído da velocidade. A correlação dos ruídos de posição e velocidade é igual zero (não correlacionados). Isso resulta em:

$$Q_K = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0004 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

sendo σ_w^2 e σ_s^2 , as variâncias dos ruídos de posição e velocidade, respectivamente, e a matriz Q_K é a matriz de covariâncias dos ruídos de processo.

Para o ruído de medição, o desvio padrão σ_ϑ é definido como 0.1 para a medição da posição. Assim, a matriz de covariância do ruído de medição R_K é:

$$R_K = \sigma_\vartheta^2 = 0.01. \quad (\text{C.3})$$

O primeiro passo do filtro de Kalman envolve a leitura inicial do sensor, que é perturbada por ruído gaussiano:

$$y = Cx + \vartheta, \quad (\text{C.4})$$

sendo ϑ o ruído de medição.

Os estados iniciais estimados pelo filtro de Kalman (x_K) são definidos como $[2; 0]$, para mostrar a convergência do filtro mesmo partindo de uma condição inicial diferente da do sistema real, e a matriz de covariância da estimativa inicial (P_K) é inicializada como a matriz de covariâncias do processo Q_K :

$$x_K = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_K = Q_K. \quad (\text{C.5})$$

O ganho de Kalman inicial K é calculado como:

$$K = P_K C^T (C P_K C^T + R_K)^{-1}. \quad (\text{C.6})$$

Este cálculo combina a incerteza na estimativa do estado (P_K) e a incerteza na medição (R_K) para determinar o quanto a medição deve corrigir a estimativa do estado.

Durante cada iteração do filtro de Kalman, a predição dos estados é feita utilizando a dinâmica do sistema:

$$x_K = x_K + dt \cdot (Ax_K + Bu). \quad (\text{C.7})$$

A covariância da estimativa é atualizada com base na dinâmica do sistema e na matriz de covariâncias do processo:

$$P_K = AP_K A^T + Q_K. \quad (\text{C.8})$$

A esperança da saída do sistema z é calculada como:

$$z = Cx_K. \quad (\text{C.9})$$

O erro de predição e_K entre o estado real e a estimativa é:

$$e_K = |x - z|. \quad (\text{C.10})$$

O ganho de Kalman K é recalculado a cada iteração para ajustar a correção da estimativa:

$$K = P_K C^T (C P_K C^T + R_K)^{-1}. \quad (\text{C.11})$$

A correção da estimativa do estado é feita utilizando a diferença entre a medição real e a predição da saída:

$$x_K = x_K + K(y - z). \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, a covariância da estimativa é ajustada para refletir a incorporação da nova medição:

$$P_K = (I - KC)P_K. \quad (C.13)$$

Observação: Nos Algoritmos 1 e 2, onde são realizados os cálculos para o sinal de correção Ψ , o saída do governador de comando v , o sinal de controle u , a atualização dos pesos $\widehat{W}$ e o vetor de FBRs Θ , é importante destacar que para utilizar o estado estimado em vez do estado real, todas as variáveis de estado $\mathbf{x}$ devem ser substituídas por $\mathbf{x}_K$.

A construção do vetor de funções de base radial Θ , é realizada da seguinte maneira:

$$\Theta(i) = \exp \left(-0.25 (|\mathbf{x}_K(1) - \text{centers}(i)|)^2 \right) \quad (C.14)$$

$$\Theta(i+n) = \exp \left(-0.25 (|\mathbf{x}_K(2) - \text{centers}(i)|)^2 \right). \quad (C.15)$$

O cálculo da dinâmica do governador de comando para o sinal de correção Ψ é dado por

$$\Psi = \Psi + dt \left(-\lambda(\Psi - (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_m)) \right). \quad (C.16)$$

O saída do governador de comando v é calculada como:

$$v = \lambda\Psi + (A_m - \lambda I)(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_m). \quad (C.17)$$

Para o cálculo do sinal de controle u , tem-se:

$$u = -K_1\mathbf{x}_K + K_2(r + Gv) - \widehat{W}^T\Theta. \quad (C.18)$$

Os pesos $\widehat{W}$ são atualizados com:

$$\widehat{W} = \widehat{W} + dt \left(\gamma(\Theta(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_m)^T P B - \sigma \widehat{W}) \right). \quad (C.19)$$

Na equação do sistema real, é acrescentado o ruído de processo, representado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + dt (A\mathbf{x} + B(u + \Delta) + \xi), \quad (C.20)$$

sendo ξ o ruído de processo, com covariância Q_K . Os ruídos de processo e de medição são ruídos gaussianos brancos, com média zero e variância limitada.

Esta configuração permite que o filtro de Kalman adapte continuamente a estimativa do estado do sistema à medida que novas medições são recebidas, proporcionando uma estimativa mais precisa do estado verdadeiro do sistema ao longo do tempo.

Anexos

ANEXO A – Derivação da Função Candidata de Lyapunov

De acordo com [Lavretsky e Wise \(2012\)](#), a derivação da função candidata de Lyapunov é demonstrada a seguir. Escolhendo uma função candidata de Lyapunov dada por

$$V(e, \Delta K_x, \Delta K_r, \Delta \Theta) = e^T P e + \text{tr}([\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta K_x + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \Delta K_r + \Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \Delta \Theta] \Lambda), \quad (\text{A.1})$$

sendo $P = P^T > 0$ satisfaz a equação algébrica de Lyapunov

$$P A_{\text{ref}} + A_{\text{ref}}^T P = -Q, \quad (\text{A.2})$$

para algum $Q = Q^T > 0$. Então, a derivada temporal de V , pode ser calculada:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2\text{tr}([\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\hat{K}}_r + \Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\hat{\Theta}}] \Lambda) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &= (A_{\text{ref}} e + B \Lambda (\Delta K_x^T x + \Delta K_r^T r - \Delta \Theta^T \Phi(x)))^T P e \\ &\quad + e^T P (A_{\text{ref}} e + B \Lambda (\Delta K_x^T x + \Delta K_r^T r - \Delta \Theta^T \Phi(x))) \\ &\quad + 2\text{tr} \left(\left[\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\hat{K}}_r + \Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\hat{\Theta}} \right] \Lambda \right) \\ &= e^T (A_{\text{ref}}^T P + P A_{\text{ref}}) e + 2e^T P B \Lambda (\Delta K_x^T x + \Delta K_r^T r - \Delta \Theta^T \Phi(x)) \\ &\quad + 2\text{tr} \left(\left[\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\hat{K}}_r + \Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\hat{\Theta}} \right] \Lambda \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando [\(A.2\)](#), obtém-se adicionalmente

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + \left[2e^T P B \Lambda \Delta K_x^T x + 2\text{tr} \left(\Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x \Lambda \right) \right] \\ & + \left[2e^T P B \Lambda \Delta K_r^T r + 2\text{tr} \left(\Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{\hat{K}}_r \Lambda \right) \right] \\ & + \left[-2e^T P B \Lambda \Delta \Theta^T \Phi(x) + 2\text{tr} \left(\Delta \Theta^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\hat{\Theta}} \Lambda \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Por meio da identidade do traço vetorial,

$$\begin{aligned}
\underbrace{e^T P B \Lambda}_{a^T} \underbrace{\Delta K_x^T x}_b &= \text{tr} \left(\underbrace{\Delta K_x^T x}_b \underbrace{e^T P B \Lambda}_{a^T} \right) \\
\underbrace{e^T P B \Lambda}_{a^T} \underbrace{\Delta K_r^T x}_b &= \text{tr} \left(\underbrace{\Delta K_r^T r}_b \underbrace{e^T P B \Lambda}_{a^T} \right) \\
\underbrace{e^T P B \Lambda}_{a^T} \underbrace{\Delta \Theta^T \Phi(x)}_b &= \text{tr} \left(\underbrace{\Delta \Theta^T \Phi(x)}_b \underbrace{e^T P B \Lambda}_{a^T} \right).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Substituindo (A.6) em (A.5):

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -e^T Q e + 2 \text{tr} \left(\Delta K_x^T \left[\Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x + x e^T P B \right] \Lambda \right) \\
&\quad + 2 \text{tr} \left(\Delta K_r^T \left[\Gamma_r^{-1} \dot{\hat{K}}_r + r e^T P B \right] \Lambda \right) \\
&\quad + 2 \text{tr} \left(\Delta \Theta^T \left[\Gamma_\Theta^{-1} \dot{\hat{\Theta}} - \Phi(x) e^T P B \right] \Lambda \right).
\end{aligned} \tag{A.7}$$