

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

CARLOS AUGUSTO FONSECA DIAS

**PROGRAMA MODELLUS COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DO  
LANÇAMENTO OBLÍQUO COM ATRITO DINÂMICO**

São Luís

2023

**CARLOS AUGUSTO FONSECA DIAS**

Área de Concentração: Física na Educação Básica

**PROGRAMA MODELLUS COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DO  
LANÇAMENTO OBLÍQUO COM ATRITO DINÂMICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional Nacional em Ensino de Física pelo UFMA, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Linha de Pesquisa: Processos de ensino e aprendizagem e tecnologias de informação e comunicação no Ensino de Física

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Moraes Diniz

São Luís

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Dias, Carlos Augusto Fonseca.

Programa Modellus Como Ferramenta Didática No Ensino do Lançamento Oblíquo Com Atrito Dinâmico / Carlos Augusto Fonseca Dias. - 2023.

153 f.

Orientador(a): Eduardo Moraes Diniz.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Ensino de Física em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2023.

1. Ensino de Física. 2. Modelagem Computacional. 3. Lançamento Oblíquo. 4. Resistência do Ar. 5. Modellus. I. Diniz, Eduardo Moraes. II. Título.

**CARLOS AUGUSTO FONSECA DIAS**

**PROGRAMA MODELLUS COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DO  
LANÇAMENTO OBLÍQUO COM ATRITO DINÂMICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física pelo UFMA, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Dr. Eduardo Moraes Diniz (Orientador)

Doutor em Física

Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Samir Silva Coutinho

Doutor em Física

Instituto Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Karl Marx Silva Garcez

Doutor em Física

Universidade Federal do Maranhão

“Triste época! É mais fácil desintegrar um átomo do que um preconceito”.

Albert Einstein

*A minha mãe, Maria Anastácia, que sempre me incentivou nos meus estudos e acreditou em mim.*

*A minha filha, Maria Luiza, que me trouxe uma enorme felicidade e alegria constante na minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, nosso Pai todo poderoso que será louvado eternamente por mim todos os dias.

A minha filha, Maria Luiza, minha razão de ser mais feliz.

A minha mãe, Maria Anastácia, por ter me incentivado em meus estudos.

Ao professor e orientador, Eduardo Diniz, pelas orientações neste trabalho.

Agradecimento especial aos Professores Pedro Fontes e Antônio Carlos por ter me ajudado neste trabalho e pela amizade que fizemos durante o curso.

Ao professor Éder Nascimento e aos professores Karl Max e Joerbed por suas contribuições na minha dissertação.

Ao secretário do PROFIS, Claudson Santos, pela amizade que fizemos durante o curso.

Aos meus colegas de curso da turma do Profis – 2018.1, pela amizade e auxílio nas tarefas desenvolvidas no curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos, código de financiamento 001.

Agradecimento especial a Sara Barros, José Roberto, que me ajudaram a realizar este trabalho.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste Trabalho.

Agradecimento especial ao meu amigo Albertinho Corrêa por ter me ajudado durante minha graduação e pelos conselhos.

Ao meu Pai, Raimundo Carlos Rodrigues Dias, com seu árduo trabalho nos sustentou toda nossa família.

Agradecimento especial a todos os meus amigos do bairro da matriz, especialmente Márcio, Josemar, Max Ney.

A todos, meu muito obrigado!

## RESUMO

Atualmente nos deparamos com a evolução cada vez mais rápida da tecnologia, e a introdução das tecnologias no âmbito educacional é uma realidade e a escola deve acompanhar esse desenvolvimento. Assim, destaca-se a importância do uso da tecnologia, principalmente com o uso de aplicativos e *softwares*, como uma ferramenta de trabalho útil e necessário para que haja uma aprendizagem significativa, e melhore a relação entre alunos e professores. Dessa forma, este trabalho possui o objetivo de utilizar as tecnologias educacionais para explicar conceitos físicos de lançamento oblíquo com força de atrito dinâmico, e assim, contribuir para melhorar o processo de ensino e aprendizagem, além de mostrar aos alunos e professores a viabilidade do uso da simulação e modelagem computacional no ensino de Física. No caminho para cumpri-los, surge o questionamento: os resultados obtidos são superiores ao método tradicional de ensino? Para verificar esta viabilidade foi elaborado um produto educacional. Este produto é um guia prático de como utilizar o *software* Modellus para simulação e também modelagem computacional. Foi aplicado um questionário avaliativo em ambas as turmas, teste (onde o produto educacional foi desenvolvido) e controle (onde não houve desenvolvimento do produto educacional), o questionário de satisfação foi aplicado apenas na turma teste, a fim de responder o questionamento: a satisfação dos alunos com o uso das simulações é maior do que com o método de ensino tradicional? Após a aplicação do produto, a maioria dos alunos da turma teste demonstrou compreender melhor os conceitos básicos para este tipo de movimento. Ao final foi possível observar que o uso de computadores, bem como o uso do *software* Modellus para simular e modelar eventos físicos, além de facilitar o processo de ensino e aprendizagem, também tornam as aulas mais divertidas e dinâmicas. Dessa forma o aluno passa a ser o construtor do seu conhecimento tornando o aprendizado mais significativo.

**Palavras-chaves:** Ensino de Física. Modelagem computacional. Lançamento oblíquo. Resistência do ar. *Modellus*.

## ABSTRACT

Currently, we are faced with the increasingly rapid evolution of technology, and the introduction of technologies in the educational field is a reality and the school must follow this development. Thus, the importance of using technology is highlighted, especially with the use of applications and software, as a useful and necessary work tool for meaningful learning and to improve the relationship between students and teachers. Thus, this work has the objective of using educational technologies to explain physical concepts of oblique launch with dynamic friction force, and thus, contribute to improving the teaching and learning process, in addition to showing students and teachers the feasibility of using simulation and computational modeling in Physics teaching. In the field of fulfilling them, the question arises: are the results obtained superior to the traditional teaching method? To verify this viability, an educational product was elaborated. This product is a practical guide on how to use Modellus software for simulation and also computational modeling. An evaluative questionnaire was applied in both groups, test (where the educational product was developed) and control (where there was no development of the educational product), the satisfaction questionnaire was applied only in the test group, in order to answer the question: Is student satisfaction with the use of simulations greater than with the traditional teaching method? After applying the product, most students in the test group demonstrated a better understanding of the basic concepts for this type of movement. In the end, it was possible to observe that the use of computers, as well as the use of Modellus software to simulate and model physical events, in addition to facilitating the teaching and learning process, also make classes more fun and dynamic. In this way, the student becomes the builder of his knowledge, making learning more meaningful.

**Keywords:** Physics teaching. Computational modeling. Oblique launching. Air resistance. *Modellus*.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Processos diferenciação progressiva e reconciliação integradora .....	22
Figura 2 - Mapa mental .....	36
Figura 3 - Ação das forças gravitacional e de arrasto linear sobre o lançamento de uma partícula .....	42
Figura 4 - Gráfico das posições em função do tempo .....	51
Figura 5 - Gráfico das velocidades em função do tempo .....	52
Figura 6 - Gráfico das acelerações em função do tempo.....	52
Figura 7 - Trajetória da partícula com resistência do ar .....	53
Figura 8 - Logística utilizada para expor o conteúdo. ....	59
Figura 9 - alunos respondendo os questionários de satisfação e avaliação .....	59
Figura 10 - Imagem do lançamento de uma partícula sem resistência do ar com ângulo de 60 graus e velocidade inicial de 100 m/s.....	60
Figura 11 - Imagem do lançamento oblíquo sem resistência do ar de cinco partículas sob ângulos de 15, 30, 45, 60 e 75 graus todas lançadas com mesma velocidade inicial de 80m/s	62
Figura 12 - Imagem do lançamento oblíquo com resistência do ar de uma partícula .....	63
Figura 13 - Imagem do lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob mesmo ângulo e velocidade inicial e coeficientes de atrito de 0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 s <sup>-1</sup> .....	64
Figura 14 - Lançamento de uma partícula sujeita a força gravitacional e a força de arraste linear .....	10
Figura 15 - lançamento de uma partícula sujeita a uma força gravitacional e força de arraste linear .....	16
Figura 16 - Tela de apresentação do Modellus X 0.4.05.....	19
Figura 17 - Tela de acesso ao software e download .....	19
Figura 18 - Gráfico das posições em função do tempo .....	32
Figura 19 - Gráfico das velocidades em função do tempo. ....	33
Figura 20 - Gráfico das acelerações em função do tempo.....	33
Figura 21 - trajetória da partícula com resistência do ar. ....	34
Figura 22 - Caixa modelo matemático. ....	38
Figura 23 - menu parâmetros.....	38
Figura 24 - Menu objetos. ....	39
Figura 25 - Faixa de configurações. ....	39
Figura 26 - Menu Animação.....	39
Figura 27 - Menu Variável Independente.....	40
Figura 28 - Menu Gráfico.....	40
Figura 29 - Vetor da velocidade resultante representado na partícula de animação. ....	41
Figura 30 - Vetor P acrescentado à partícula de animação.....	41
Figura 31 - Caixa modelo matemático. ....	42
Figura 32 - Aba de ferramentas “início”. ....	42
Figura 33 - Menu parâmetros. ....	43
Figura 34 - Faixa de configurações. ....	43
Figura 35 - Animação do mesmo modelo com as partículas partindo de uma mesma posição inicial. ....	44
Figura 36 - Caixa modelo matemático. ....	44
Figura 37 - Menu parâmetros. ....	45
Figura 38 - Menu objetos. ....	45
Figura 39 - Faixa de configurações. ....	45
Figura 40 - Menu Animação.....	46
Figura 41 - Menu Variável Independente.....	47
Figura 42 - Menu Gráfico.....	47

Figura 43 - vetor da força de arraste resultante representado na partícula de animação.....	48
Figura 44 - Barra de configuração do indicador de nível para Resistência do Ar.....	48
Figura 45 - Indicador de nível para Resistência do Ar da partícula. ....	49
Figura 46 - Barra de configuração do indicador de nível para Resistência do Ar.....	49
Figura 47 - Indicador de nível para massa da partícula. ....	50
Figura 48 - Caixa modelo matemático. ....	50
Figura 49 - Menu parâmetros. ....	51
Figura 50 - menu condições iniciais. ....	52
Figura 51 - Faixa de configurações. ....	52
Figura 52 - Animação do mesmo modelo com as partículas partindo de uma mesma posição inicial. ....	53

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Resultados da 1ª questão objetiva do questionário de satisfação.....	66
Gráfico 2 - Resultados da 2ª questão objetiva do questionário de satisfação.....	67
Gráfico 3 - Resultados da 3ª questão objetiva do questionário de satisfação.....	68
Gráfico 4 - Resultados da 4ª questão objetiva do questionário de satisfação.....	69
Gráfico 5 - Resultados da 5ª questão objetiva do questionário de satisfação.....	70
Gráfico 6 - Percentual de acertos da turma teste e controle em cada questão.....	71
Gráfico 7 - Percentual de acertos das questões teóricas a partir dos questionários de avaliação .....	72
Gráfico 8 - Percentual de acertos das questões de cálculo a partir dos questionários de avaliação .....	73
Gráfico 9 - Percentual de acertos das questões de gráficos a partir dos questionários de avaliação .....	74

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>17</b>
<b>3 SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE FÍSICA .....</b>	<b>28</b>
<b>4 O <i>SOFTWARE</i> MODELLUS .....</b>	<b>33</b>
<b>5 MODELO MATEMÁTICO DO LANÇAMENTO OBLÍQUO.....</b>	<b>35</b>
<b>5.1 Equações do lançamento oblíquo sem resistência do ar .....</b>	<b>35</b>
<b>5.2 Equações do lançamento oblíquo com resistência do ar .....</b>	<b>37</b>
<b>6 O MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES .....</b>	<b>40</b>
<b>7 GRÁFICOS DO LANÇAMENTO OBLÍQUO COM RESISTÊNCIA DO AR.....</b>	<b>43</b>
<b>7.1 Posição em função do tempo.....</b>	<b>43</b>
<b>7.2 Velocidade em função do tempo.....</b>	<b>44</b>
<b>7.3 Aceleração em função do tempo.....</b>	<b>44</b>
<b>7.4 Equação da trajetória.....</b>	<b>45</b>
<b>1 PRODUTO EDUCACIONAL .....</b>	<b>46</b>
<b>1.1 Proposta do Produto Educacional .....</b>	<b>46</b>
<b>1.2 Objetivos da Proposta do Produto Educacional.....</b>	<b>47</b>
<b>1.3 Metodologia de aplicação .....</b>	<b>48</b>
<b>1.4 Metodologia da Pesquisa.....</b>	<b>56</b>
<b>2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....</b>	<b>58</b>
<b>2.1 Análise e discussão dos dados do questionário de satisfação (questões objetivas) .....</b>	<b>58</b>
<b>2.2 Análise e discussão dos dados do Questionário de Avaliação.....</b>	<b>61</b>
<b>3 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>66</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>68</b>
<b>APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL .....</b>	<b>71</b>
<b>APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO DE SATISFAÇÃO .....</b>	<b>63</b>
<b>APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO .....</b>	<b>64</b>
<b>APÊNDICE D – TUTORIAL MODELLUS X 0.4.05 .....</b>	<b>69</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O novo modelo de Ensino Médio (BRASIL, 2017) proposto e homologado pelo Ministério da Educação no ano de 2021, inaugurou não somente mudanças nos referenciais curriculares da rede pública de ensino, mas trouxe novos desafios a serem enfrentados nas salas de aula. Entre eles, a elaboração de novos currículos, e a falta de alocação financeira para dar conta das mudanças que propõe, como escolha curricular por parte do estudante. Assim, embora mudanças técnicas sejam propostas, o processo de ensino-aprendizagem não é impactado por esse modelo, resultando em um “engessamento” da sala de aula.

Por força do art. 205 da nossa Constituição Federal, que determina que “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade” (BRASIL, 1988) o Estado, através de seus agentes e instituições, deve proporcionar o caminho através do qual os alunos sintam despertados seus desejos de aprendizado, na medida em que os aparatos e as ferramentas para tanto sejam disponibilizadas aos discentes. Embora, na prática, a realidade percebida não seja essa.

Mesmo com as mudanças, o ordinário desinteresse do alunato pelas disciplinas da área de Ciências Exatas, como Física, Química e Matemática, permanece, já que o novo modelo de Ensino Médio não oferece a eles o incentivo suficiente para a reversão desse quadro.

A realidade concreta nas salas de aula é que, ao não serem fornecidas as ferramentas adequadas para englobar as diferentes realidades do corpo discente, a frustração por não compreender o conteúdo repassado leva à perda do interesse por parte dos estudantes. Isso resulta na desmotivação do corpo docente, criando um ciclo de insatisfação e até mesmo aversão à escola, que deveria ser a imagem de um local acolhedor e de obtenção de conhecimento.

Na tentativa de enfrentar esses desafios e encontrar caminhos que levem os alunos a terem a Física como uma disciplina acessível, desenvolve-se aqui este trabalho, possuindo como objeto de estudo a tecnologia aplicada ao ensino da Física enquanto disciplina, mais especialmente o *software* Modellus (ANDRADE, 2016).

Enquanto objetivo geral pretendemos examinar a viabilidade da aplicação desse *software* como uma ferramenta didática e efetiva no ensino do lançamento oblíquo com atrito dinâmico. Quanto aos objetivos específicos, pretendemos possibilitar um processo de ensino-aprendizagem significativo, dinâmico e lúdico, assim como fomentar a mudança de perspectiva do alunato frente aos ensinamentos da Física, fazendo com que a disciplina seja vista não mais como um conjunto de extensos conteúdos inacessíveis ao aprendizado, mas como parte de seu cotidiano.

No caminho para cumprir tais objetivos, foi levado em consideração a influência do uso das mídias e da tecnologia no dia a dia da sociedade e na realidade das escolas. Uma

novidade no campo das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) surge a cada novo amanhecer, vinculando a atenção do público jovem a essa realidade tecnológica.

A pesquisa se propõe a analisar e entregar solução para as problemáticas apresentadas, isto é, reduzir o desinteresse do alunato, já que o acesso à educação consiste em parte do exercício da cidadania de cada um. Explorar outros métodos de ensino, principalmente voltados à tecnologia, é garantir que o processo de ensino-aprendizado continue evoluindo, de acordo com a sociedade e as necessidades do corpo discente; é garantir o acesso à educação de qualidade, que seja capaz de direcionar os jovens no caminho da transformação social.

Através da pesquisa que aqui se construiu para obtenção dos resultados apresentados, descartando estudos com metodologias didáticas baseadas em aulas expositivas e aproveitando ferramentas de ensino aliadas à tecnologia, – foi constatado que os recursos tecnológicos podem ser usados como instrumentos de ensino atrativos aos alunos. Aliando sempre essas ferramentas a uma metodologia pedagógica integradora. Quando utilizados dessa forma, esses recursos podem contribuir não somente para a compreensão do conteúdo analisado, mas no desenvolvimento de habilidades que o auxiliem no caminho para um pensamento crítico (VIDAL; MIGUEL, 2020).

Assim, delimitando o objeto de estudo e o redirecionando para as ferramentas tecnológicas, encontramos as simulações computacionais. Elas fazem parte da estratégia que pretende estreitar as relações entre conceitos e realidade, para que o conteúdo se torne mais visível e de fácil compreensão, resultando em uma aprendizagem significativa, referencial teórico central da elaboração desta pesquisa.

De acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa, proposta pelo pensador Ausubel, o processo de ensino-aprendizagem torna-se eficaz e relevante para o aluno quando o conteúdo exposto interage também com aquilo que ele já conhece.

As simulações computacionais, nesse contexto, podem ser consideradas experimentos nos quais os alunos possuem autonomia para controlar as condições dos sistemas, embora de forma virtual, promovendo a aprendizagem de forma mais lúdica e por isso fixando o conteúdo no conjunto de conhecimentos previamente adquiridos

Para o ensino da Física, através da pesquisa que aqui se desenvolve, foi constatado uma variedade de simuladores, como *Physion* (SILVEIRA, MELO JÚNIOR, SILVA, 2021) e o *Layar* (OLIVEIRA, MANZANO, 2016), tendo sido esses previamente analisados de acordo com critérios como facilidade de utilização e interface simples. Até que o *software* *Modellus* foi determinado como o mais viável para o cumprimento dos nossos objetivos. Além dessas razões, ele vale ser aqui explorado por apresentar-se em uma linguagem simples, que dispensa qualquer conhecimento prévio em programação, além de já estar disponível em português.

Portanto, o procedimento de pesquisa que mais se aproxima do cumprimento dos nossos objetivos é a metodologia voltada para análise e comparação de dados, e por isso, foi a

principal utilizada, através da coleta de informações das experiências realizadas em duas turmas distintas.

Quanto à natureza, a metodologia deste trabalho se caracteriza enquanto aplicada, uma vez que se preocupa não somente na obtenção de um novo conhecimento, mas na aplicação prática dos resultados que aqui serão obtidos (KÖCHE, 2011). Quanto aos objetivos, ela se caracteriza enquanto descritiva, uma vez que se preocupa com a identificação e descrição do objeto de estudo (VIDAL; MIGUEL, 2020), para tanto, utiliza o questionário como instrumento de coleta de dados.

Quanto aos procedimentos, esta pesquisa se caracteriza como experimental, uma vez que se propõe a analisar o objeto de estudo a partir da observação de variáveis que podem influenciá-lo (VIDAL; MIGUEL, 2020), ou seja, a partir dos dados obtidos na aplicação dos questionários.

Portanto, quanto à abordagem, esta pesquisa define-se enquanto quali-quantitativa, uma vez que a interpretação dos dados obtidos deve ser realizada em dois momentos; inicialmente com a atribuição de valores aos questionários de cada aluno, e posteriormente com interpretação desses dados atribuindo significado a cada valor (VIDAL; MIGUEL, 2020). Os questionários foram aplicados em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, na escola Colégio Pinheirense, localizada em Pinheiro – MA, com um total de 32 (trinta e dois) estudantes analisados. Uma turma foi denominada de turma teste e a outra turma controle, para que em seguida o estudo comparativo entre os dois grupos fosse realizado, a fim de averiguar a eficiência do *software* Modellus conforme propomos neste trabalho.

A ferramenta utilizada para aplicação de tais metodologias foi o computador, já que é o dispositivo que permite a utilização do *software* analisado, Modellus. Essa tecnologia nos permitiu simular situações quase que realísticas, em forma de comandos matemáticos e gráficos. Ressalta-se aqui, novamente, a importância dessa estratégia para estreitar as relações entre o processo de ensino-aprendizagem do aluno e seu dia a dia.

Por meio da aplicação desses métodos e procedimentos, a hipótese inicialmente levantada foi respondida de forma positiva; concluiu-se que a aplicação de tecnologias no ensino da Física, além de resultar em mais estímulos aos jovens a seguir o caminho do conhecimento, possibilitou a consolidação do conteúdo aplicado, fixando-o em suas mentes de forma efetiva.

Dessa forma, essa dissertação cumpriu os objetivos aos quais se propôs, na medida em que forneceu contribuição frente à necessidade de uma ferramenta que favorecesse o ensino significativo da disciplina de Física. Ainda, provou ser possível um processo de ensino-aprendizagem dinâmico e lúdico.

Por isso, enquanto parte da natureza metodológica deste trabalho, construiu-se aqui um produto educacional, trabalhado detalhadamente no capítulo 8. Esse resultado é composto

por roteiros que detalham quatro simulações, utilizando ferramentas do *software* Modellus, e que podem ser utilizados pelos professores da educação básica, como recurso didático no estudo do lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.

Vale ressaltar ainda que para trabalhar com o simulador virtual Modellus, não há necessidade de conhecimento avançado em programação, mas o professor(a) deve ter noções básicas de computação.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A educação é entendida por diversos autores, como Freire (1997), como algo fundamental para a liberdade e autonomia dos alunos enquanto cidadãos. Brandão (1985) concebe a educação como conhecimentos adquiridos a partir do empirismo, fora ou dentro da escola. Ele defende que ninguém pode escapar do ato educacional, já que ele pode acontecer de diversas formas e em diversos locais.

Em concordância, autores como Piletti (2004) e Libâneo (2001) definem a educação na mesma medida em que a diferenciam de outros atos. Para o primeiro, a educação e escolarização são conceitos diferentes, enquanto para o segundo, a educação é um “[...] fenômeno plurifacetado, ocorrendo em muitos lugares, institucionalizado ou não, sob várias modalidades” (LIBÂNEO, 2001, p.26).

Nesse contexto, a autora Gomes (2020, p. 35) ressalta a contribuição de uma educação pautada na Física, uma vez que essa atua enquanto geradora de saberes que “promovem avanços tecnológicos, [...] e é responsável pelo estudo de diferentes fenômenos que ocorrem na natureza e no cotidiano”.

No que diz respeito à importância do estudo e do ensino da Física enquanto disciplina, a mencionada autora defende que “em função da diversidade de aplicações é imprescindível que os conhecimentos científicos da área façam parte do rol de conteúdos científicos e tecnológicos da Educação Básica” (GOMES, 2020, p. 35).

No entanto, conforme Almeida (2002), boa parte do corpo discente entende a Física como um conjunto de códigos e fórmulas que só ficarão em sua mente por meio de memorização. Cria-se assim, um ciclo que se inicia com o desinteresse do aluno, que leva à desmotivação do docente, levando a mais desinteresse.

Portanto, surge a necessidade de superar essas dificuldades ao ensino, pautando-as em estudos que as discutem de maneira recorrente nos últimos anos, por autores como Santos, Almeida e Coelho. Gomes (2020, p. 50) analisa os estudos de Moreira (2011) e conclui que as principais causas desses desafios tem sido

[...] a inadequação das condições materiais e de infraestrutura, o desinteresse e a falta de envolvimento

dos alunos, a aparente incapacidade dos professores em utilizar os recursos tecnológicos que promovem uma melhor participação em sala de aula e a falta de uma metodologia moderna, tanto do ponto de vista pedagógico quanto tecnológico.

Ainda conforme Almeida (2002), a aplicação de tecnologias que fujam dos métodos tradicionais utilizados em aulas expositivas é fundamental para resolver esses dilemas. Mas para isso, a autora afirma que é necessário formar educadores que reflitam criticamente sobre a aplicação desses recursos em suas técnicas pedagógicas. Portanto, percebemos que a educação é um fenômeno que pode ocorrer em diferentes espaços, com diferentes agentes envolvidos, e que resulta em aprendizagem.

Para isso, os caminhos percorridos por educadores como Ausubel e Freire serão essenciais para traçar os próximos passos dessa construção. Ambos produziram estudos nos quais a aprendizagem significativa é o objeto central. Outros autores que contribuíram com significativo valor no campo das teorias de aprendizagem serão igualmente explorados na seção que se segue, como Moreira e Masini.

Antes de compreendermos a teoria, faz-se importante entender seu contexto de elaboração. O pensamento de Ausubel a respeito da aprendizagem significativa foi proposto em 1963, período em que, no campo do ensino, as tendências behavioristas eram as mais aplicadas, isto é, acreditava-se que as ideias dos estudantes anteriores ao conteúdo não eram relevantes para o ensino (MOREIRA; MASINI, 2006).

De acordo com Distler (2015), o interesse de Ausubel pelo processo de ensino foi fortemente influenciado pelas dificuldades enfrentadas nas escolas norte-americanas de sua época. Tendo nascido em 1918 na cidade de Nova York, nos Estados Unidos, seu desenvolvimento acadêmico foi conturbado principalmente pelo preconceito por sua origem judaica.

Vale lembrar que, nos Estados Unidos, aquele foi um período marcado por um intenso movimento migratório judaico, e que a educação ofertada aos menos abastados era precária (DISTLER, 2015). Assim, tendo sofrido com os métodos de ensino aplicados na época, Ausubel se preocupou em desenvolver teorias que, ao compreender os processos cognitivos de aprendizagem, contribuíram para um ensino mais efetivo do que aquele que recebeu.

Ao lado de pensadores renomados como Piaget, Bruner e Novak, Ausubel é considerado um representante da linha de pensamento que entende o processo de aprendizagem segundo uma perspectiva cognitivista, isto é, a metodologia de ensino como a organização dos conhecimentos de um indivíduo para ensiná-lo a partir daquilo que ele já possui na mente (MOREIRA; MASINI, 2006).

Nesse sentido, Ausubel preocupava-se no desenvolvimento de uma teoria que estudasse o processo de compreensão, armazenamento e utilização das informações, buscando

identificar a existência de padrões nesse processo (OSTERMANN; CALVACANTI, 2010). Essa compreensão da teoria é também explorada por Moreira e Masini (2006, p. 3), quando dizem que:

A psicologia cognitivista preocupa-se com o processo de compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição, e tem como objetivo identificar os padrões estruturados dessa transformação. É uma teoria particular, cuja asserção central é a de que ver, ouvir, cheirar etc., assim como lembrar, são atos de construção que podem fazer maior ou menor uso dos estímulos externos, dependendo da circunstância, isto é, das condições pessoais de quem realiza o processo (MOREIRA, MASINI, 2006, p. 3).

Contudo, “a teoria da aprendizagem significativa não se limita a prever somente a influência do ensino sobre às ideias já estabelecidas, mas compreende também a alteração da estrutura cognitiva assim que novos materiais são inseridos na mente do indivíduo” (MOREIRA; MASINI, 2006, p. 3).

Para isso, Ausubel propõe o conceito que denomina “ideia-âncora” ou “subsunçor”, que nomeia aquilo que já existe na mente do aluno e que lhe permite atribuir novos significados àquilo que observa. Percebemos aqui que, ao contrário dos pensamentos behavioristas, o indivíduo não passa mais a ser influenciado por seu contexto, mas a atribuir significados aquilo que está ao seu redor (MOREIRA. MASINI, 2006).

Ausubel identifica dimensões diferentes para explicar como é produzida a aprendizagem escolar. O primeiro conceito que explora é o de aprendizagem mecânica (MOREIRA. MASINI, 2006) determinando que esse método não valoriza a completa apreensão do conteúdo, mas visa apenas a memorização de conceitos que, por não serem assimilados com significados na mente dos estudantes, logo são deixados de lado e esquecidos.

De acordo com Ausubel, a metodologia de aprendizagem mecânica compromete o processo de ensino, uma vez que o conhecimento é construído gradualmente, à medida que novas ideias vão ganhando espaços na mente do aluno, para que ele possa entender aquelas que virão adiante. Moreira e Masini (1999, p. 152) ainda destacam como funciona essa parte do processo de aprendizagem ao afirmar:

Há, pois, um processo de interação pelo qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material, funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando o material novo e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem.

Assim, ele chega ao conceito da aprendizagem significativa, sendo esse o oposto de aprendizagem mecânica. Portanto, na medida em que o conteúdo interage com os

conhecimentos prévios do estudante, aquele aluno irá atribuir um significado lógico às ideias, sendo esse um conhecimento que será mais difícil de ser esquecido.

Para a compreensão total desse conceito, precisamos ainda conhecer o que Ausubel concebia enquanto assimilação obliteradora. Para ele, o processo de armazenamento de uma ideia ou conceito é resultado da assimilação e retenção desse conteúdo. Esse conceito nos faz compreender que Ausubel não concebia a aprendizagem significativa como uma estratégia para manter o conhecimento para sempre armazenado na mente do aluno, mas como um processo que contém um caminho natural percorrido pela mente humana: o esquecimento. Portanto, a assimilação obliteradora consiste nessa fase natural do caminho de retenção do conteúdo (MOREIRA. MASINI, 2006).

Por isso, caso a aprendizagem tenha sido realmente significativa, a assimilação obliteradora não consistirá no completo esquecimento daquilo que foi aprendido, mas permitirá que o conteúdo estudado seja aplicado posteriormente, não com exatidão, mas com familiaridade.

Assim, essa teoria expõe sozinha suas vantagens: com a aprendizagem significativa, o aluno é capaz de reter conhecimentos de forma que eles enriqueçam sua estrutura cognitiva e que possam ser utilizados posteriormente, ao invés de somente ouvir ideias e armazená-las por um curto período na mente. Por essa razão, aqui se propôs compreender e aplicar a teoria de Ausubel, uma vez que suas vantagens são notórias, e que a problemática levantada exija a utilização de ferramentas que fixem os conceitos da Física na mente do alunato.

Como o conteúdo estudado compreende conceitos de Movimento Uniforme e do Lançamento Oblíquo com e sem resistência do ar, os conhecimentos de função afim agirão neste estudo como subsunçores, ou ideias-âncoras. Caso os alunos não tenham esses conhecimentos pré-estabelecidos, é dever do professor suprir a deficiência do ensino que levou a isso, através de aulas com o método expositivo.

Conforme acima explorados, esses conceitos designam o arcabouço teórico presente na estrutura cognitiva daquele que aprende, sobre o qual serão integradas novas informações. A aplicação da aprendizagem significativa, portanto, depende da existência de uma estrutura cognitiva no aprendiz, que contenha conhecimentos específicos sobre aquele conteúdo, adquiridos previamente ao ensino do que está sendo trabalhado (MOREIRA. MASINI, 2006). Assim, o ensino que não se firme a partir de subsunçores é considerado por Ausubel como mera aprendizagem mecânica.

No entanto, esse autor não despreza totalmente a validade da aprendizagem mecânica em sua teoria. Afirma que esse é o método através do qual os subsunçores, necessários à aprendizagem significativa, serão adquiridos (HONORATO; DIAS; DIAS, 2018). Portanto, para ele, a memorização e repetição de conceitos são necessárias e inevitáveis quando o aluno ainda não possui nenhum conhecimento prévio do conteúdo.

É apenas na fase posterior do processo de ensino-aprendizagem que a esses conceitos serão atribuídos significados (HONORATO; DIAS; DIAS, 2018). Portanto, a relação entre aquilo que o aluno já sabe e aquilo que será lecionado para ele é o produto da aprendizagem significativa. Mas, para que isso ocorra, Ausubel determina que são necessários dois passos: a disposição do aprendiz de realmente compreender os conteúdos, e se tratar de uma temática relacionável aos conhecimentos prévios do aluno, o que ele chama de conteúdo “significativo” e “não arbitrário” (AUSUBEL; HANESIAN, 1980).

A predisposição é a condição que, embora pareça ser a mais difícil de ser alcançada, uma vez que parece fugir do controle do docente, pode ser cumprida na medida em que o professor se utilize de ferramentas diversas, que fujam das convencionais metodologias utilizadas em sala de aula (MOREIRA. MASINI, 2006).

Quando o aluno perceber que novos métodos estão sendo aplicados em seu ensino, o aprendizado da Física poderá lhe ser mais atraente do que antes. Conforme determinam Kochhann e Moraes (2014, p. 20):

[...] é preciso levar em conta os fatores cognitivos, no intuito de melhorar a forma de ensino e a dinâmica do processo de aprendizagem, visto que supostamente os alunos têm sede de curiosidade pelo aprender, e que muitas vezes, a escola e o professor com seus materiais didáticos e suas metodologias ou o pouco conhecimento teórico, diminui ou acaba com esse desejo do estudante.

Enquanto conteúdo significativo e não-arbitrário, entende-se aqueles conceitos que podem ser relacionados com os subsunçores do aluno, e não somente ideias aleatórias jogadas na mente dele. Portanto, a teoria da aprendizagem significativa depende da aplicação de estratégias que facilitem o processo de ensino-aprendizagem, sendo papel do professor possibilitar o intercâmbio dos alunos entre suas realidades e a sala de aula. A respeito disso, de acordo com Kochhann e Moraes (2014, p. 93), a ferramenta facilitadora para a aprendizagem significativa devem partir do

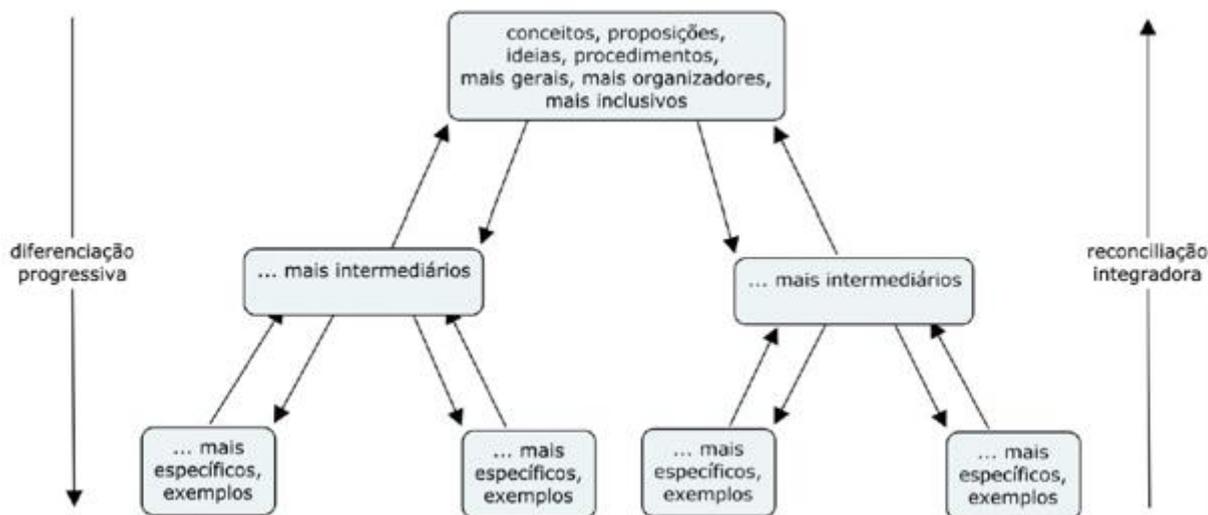
[...] princípio da descentralidade do livro de texto ou didático, ou seja, utiliza além do livro, também documentos, artigos, contos, poesias, obra de arte, também documento de músicas, jornais e todos os materiais didáticos possíveis para propiciar a elaboração de perguntas. Infelizmente é comum a utilização demasiada do livro didático (grifo nosso).

Ausubel também explora métodos que favoreçam a aprendizagem significativa. Para isso, ele determina que o conteúdo lecionado deve começar de ideias mais gerais para as mais específicas, o que ele chama de diferenciação progressiva (MOREIRA. MASINI, 2006).

Através desse processo, os conceitos mais amplos vão sendo detalhados, na medida em que o conteúdo vai se fixando na mente do aluno. O caminho inverso também deve ser

explorado, o que ele irá denominar de reconciliação integradora. A figura a seguir, proposta por Moreira (2013), mostra como ocorrem esses dois processos.

Figura 1 - Processos diferenciação progressiva e reconciliação integradora



Fonte: Moreira (2013).

Através da reconciliação integradora, as relações entre ideias, de forma a analisá-las quanto à similaridade ou diferenças, são exploradas. Isso permite à mente do aluno fazer associações, o que acaba por se tornar a segunda fase de uma aprendizagem por diferenciação progressiva. Portanto, para Ausubel, o professor é o responsável por encorajar a aprendizagem com ferramentas que estejam de acordo com os princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integradora. Esses métodos são necessários para que os conteúdos sejam assimilados mais facilmente pela mente do aprendiz, e realmente se fixem em sua estrutura cognitiva. Por isso, ao analisar a teoria de Ausubel, Gomes (2020, p. 36) ressalta que

É importante haver uma relação entre professor e aluno com o objetivo de compartilhar significados, principalmente quando se envolve os materiais educativos. Nessa dinâmica, o aluno oferece ao professor o seu conhecimento prévio baseado na tradição e experiência pessoal enquanto o professor oferece ao aluno o conhecimento subentendido, ou seja, os fundamentos e a metodologia propostos pelo ensino (GOMES, 2020, p. 36).

Podemos destacar que em qualquer um desses métodos é de suma importância que o educador aprecie o conhecimento anterior do aluno, organizando a aula de forma que lhe forneça as ferramentas para produzir seu próprio conhecimento, partindo de suas experiências cotidianas.

Enquanto o objeto de estudo foi delimitado a partir da perspectiva da teoria de Ausubel, a escolha da tecnologia de simuladores virtuais como método pedagógico foi influenciado por outras pesquisas renomadas e reconhecidas no campo acadêmico.

A partir dos resultados obtidos por pesquisadores como Carraro e Pereira (2014), pode-se afirmar que a escolha desse método representa uma “ferramenta de contemplação, de aperfeiçoamento e de possível mudança de ensino” (VALENTE, *apud* CARRARO; PEREIRA, 2014, p. 2).

A escolha da metodologia que se pretende explorar aqui se baseia também no questionamento levantado por educadores consagrados, como é o caso de Papert, que nos leva a pensar se a escola deve seguir impondo a todo o alunato uma única forma de alcançar o conhecimento, ou se deve adaptar-se ao que o autor chamou de “pluralismo epistemológico” (PAPERT, 1985).

De acordo com o mencionado autor, a educação como um todo precisa ser analisada e um dos problemas que levam à crise do sistema educacional é o próprio ensino. Para solucionar essa questão, ele sugere que os personagens que atuam no processo educacional devem buscar “metodologias e ideias que proporcionem um avanço tanto quantitativo como qualitativo nas questões educacionais” (PAPERT, *apud* CARRARO; PEREIRA, 2014, p. 7).

Partindo então do pressuposto de que é essencial a utilização de novas metodologias de ensino, esse é o momento da teoria da aprendizagem significativa que chegamos à utilização de simuladores no ensino da Física. Conforme explorado na introdução deste trabalho, a escolha dos simuladores virtuais como instrumentos a serem explorados foi necessária, já que esses permitem exatamente o cumprimento do objetivo geral que aqui se propõe, isto é, a construção de uma metodologia de ensino significativa da disciplina de Física.

Levando-se em consideração os ensinamentos de Ausubel, para que a aprendizagem significativa ocorra alguns desafios precisam ser enfrentados. O mais difícil deles é a predisposição do aluno frente ao aprendizado da disciplina, levando-se em conta os paradigmas existentes sobre ela. Por isso, os simuladores virtuais são ótimas ferramentas que podem ajudar a cumprir o mais importante requisito para que ocorra a aprendizagem significativa. Através deles, as aulas expositivas que são desmotivantes para os alunos são aliadas as aulas interativas, chamando a atenção e despertando seus interesses.

Com a ajuda dos simuladores, os modelos serão relacionados aos fenômenos reais, por meio da observação dos movimentos na tela do computador. Esse procedimento de interação e visualização pode ajudar ainda a acessar os subsunçores necessários para a compreensão daquele conteúdo, resultado que não são alcançados com meros desenhos no quadro branco expostos aos alunos.

De acordo com Carraro e Pereira (2014), as simulações virtuais podem ser divididas em estáticas e dinâmicas. Enquanto nas primeiras o aluno não tem controle sobre as propriedades da simulação, nas dinâmicas os critérios podem ser alterados para que o resultado demonstre as implicações de mudanças reais nos parâmetros de cada fenômeno. Assim, para os autores, esse recurso

[...] tem grande potencial ao serem empregados no ensino de Física, porém é importante salientar que as simulações devem ser usadas como uma complementação de experimentos de laboratório, mas, não de forma a substituí-los. Elas são especialmente úteis para abordar experiências difíceis de serem realizadas na prática no ambiente escolar ou até mesmo impossíveis, seja por falta de materiais, falta de tempo, custo alto, por serem perigosas, demasiadamente rápidas, entre outras (CARRARO; PEREIRA, 2014, p. 9).

Em concordância, Coelho (2002) apresenta ainda mais vantagens ao uso de simulações virtuais, especificamente nas aulas de Física. O autor diz que devem ser aplicados na disciplina por constituírem um caminho adequado entre o estudo do fenômeno e os experimentos em laboratório, já que possibilitam a visualização dos resultados quantas vezes forem necessárias e com mais variáveis envolvidas do que em uma aula expositiva que utiliza o quadro e giz para produzir exemplos.

Para Frota e Alves (2000) o computador pode ser uma ferramenta de suma relevância principalmente no ensino das ciências. Com essa vantagem, a desistência dos alunos que deixam de se empenhar à disciplina por dificuldades em compreender o conteúdo não seria mais um fator preocupante. Aqui notamos mais uma das vantagens na utilização dos simuladores: avanços significativos no desenvolvimento da estrutura cognitiva do corpo discente. Ainda de acordo com os autores Carrara e Pereira (2014), além das vantagens primárias acima citadas, como resultado da utilização da tecnologia no ensino, o alunato poderia alcançar a emancipação através da educação. Em outras palavras, o aprendiz não mais receberia o conhecimento “mastigado”, como fruto de outras mentes anteriores a ele, mas possuiria autonomia para além de compreender os conceitos, aplicá-los em seu cotidiano (CARRARA; PEREIRA, 2014).

E não há como se falar em educação emancipatória sem citar um dos grandes precursores, se não o maior, do pensamento pedagógico que defende a busca pela emancipação (RUBIO, 1997). Paulo Freire foi esse educador, e por meio dos seus inúmeros trabalhos, propôs teorias pedagógicas inovadoras para a época e influentes até os dias atuais, tendo sido reconhecido mundialmente por suas metodologias (SAUL; SAUL, 2016).

A concepção de aprendizagem segundo ele é aqui relevante uma vez que defendia o fim de uma “educação bancária”, aquela na qual o professor é apenas o agente responsável por depositar o conhecimento adquirido em sua formação na mente do aluno, para que ele armazene sem ter a necessidade de refletir a respeito (GOMES, 2020). Isso porque, para Freire, o aprendiz possui a mesma capacidade do professor de produzir conhecimento. Em sua concepção, o professor é o personagem responsável por, dentro do processo educacional, “refletir, dialogar, criar e recriar estratégias com as quais seus alunos possam construir sua

própria aprendizagem, sendo capazes de grandes transformações comportamentais” (GOMES, 2020, p. 14).

Nesse aspecto, a concepção freiriana se alia às teorias de Ausubel quanto aos resultados da aprendizagem significativa, isto é, o aluno possui autonomia para construir a própria trajetória, ao invés de trilhar um caminho pré-estabelecido. De acordo com Freire “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção” (FREIRE, 1997, p. 21). Dessa forma, o método de Freire se alia também aos objetivos almejados por este trabalho, na medida em que se baseia na premissa de que o aprendiz pode ser um sujeito ativo na construção do conhecimento.

Tendo em vista o aspecto recíproco dos métodos de Paulo Freire, isto é, na troca de experiências que fazem tanto aluno quanto professor aprenderem juntos, esse é mais um fator que une as teorias do educador à proposta aqui fomentada.

Outro ponto de encontro entre a teoria freiriana e a aprendizagem significativa é a perspectiva de que o aluno já possui um arcabouço de experiências e conhecimentos que devem ser utilizados se o objetivo do ensino for uma educação realmente efetiva. Portanto, conforme análise de Gomes a respeito da teoria de Freire, “[...] antes de qualquer coisa, é preciso conhecer o aluno enquanto indivíduo, inserido num contexto social, e valorizar os saberes que eles trazem para a sala de aula” (GOMES, 2020, p. 14).

A importância de uma educação que seja capaz de libertar consiste em ser a mesma um ato político (GOMES, 2020), uma vez que, para Freire, antes de aprender qualquer conteúdo, o aluno precisa antes aprender a ler o mundo (FREIRE, 1997). Da mesma maneira que a teoria de Ausubel, os ensinamentos de Freire previram a existência de uma aprendizagem pautada na repetição e memorização de conteúdo sem atribuição de significados, o que, conforme vimos, Ausubel denominou de aprendizagem mecânica.

No entanto, enquanto Ausubel considerava relevante para o ensino e para a criação de subsunçores, Freire desprezava completamente a aprendizagem mecânica. Ele afirmava que para a construção de uma educação libertadora, o ensino deve proporcionar a superação da simples repetição. Nesse aspecto, conforme discute Gomes (2020, p. 27):

A proposta de uma aprendizagem significativa orientada por Freire vai muito além do ato de codificação e decodificação descontextualizadas da realidade do aluno. É uma proposta educativa por meio da consciência crítica, de um posicionamento político, e de uma concepção de educação como uma forma de intervenção no mundo (GOMES, 2020, p. 27).

Por isso, suas teorias e aquelas correlacionadas não poderão ser aproveitadas por este trabalho, tendo em vista que aquilo que aqui se propõe é uma ferramenta integradora do ensino tradicional, e não substitutiva. Já Ausubel reconhecia a relevância de certa quantidade

de mecanicidade no processo pedagógico. Moreira (2012) ilustra isso ao afirmar que a aprendizagem significativa e a mecânica não devem ser consideradas antagônicas, mas interligadas. Embora a repetição seja uma estratégia necessária ao processo de criação de subsunçores na teoria de Ausubel, a aprendizagem significativa não se dá somente pela associação de conceitos subsunçores a outros, mas pela interação entre esses aspectos e novas relações, atribuindo significados e fazendo-os constituir parte da estrutura cognitiva do aluno (MOREIRA, 2012).

É a partir do diálogo entre o conteúdo lecionado e o conteúdo que o aluno já conhece, que o ensino poderá ser eficiente. Freire chamou esse conteúdo anterior de palavras geradoras (GOMES, 2020). Esse conceito é assim denominado porque será a partir dessas palavras que novas serão geradas. É também por meio delas que o professor, enquanto mediador do conhecimento, poderá construir um levantamento do conhecimento já possuído pelo aprendiz.

Portanto, Freire descarta a necessidade de aprendizagem mecânica, ainda que seja no início do processo da alfabetização. Sua premissa principal é que o processo de ensino deve estabelecer relações do conhecimento exposto ao aluno e suas experiências de vida, logo, não há como exigir dele respostas armazenadas em sua cognição por simples memorização (GOMES, 2020).

Para Ausubel, em suas condições para aprendizagem, o aluno deve primeiro entender que precisa aprender, para que receba o ensino de forma ativa e efetiva (GOMES, 2020).

Portanto, pode-se afirmar que ambos os educadores analisados reconhecem a relevância dos conhecimentos do discente sobre o contexto no qual se insere (GOMES, 2020), embora seja Freire o responsável por ampliar o resgate desse conhecimento para dentro do processo de ensino-aprendizagem, levando-o para uma esfera política e social.

Com base nessa premissa, e no que foi exposto até aqui, podemos inferir que o tipo de aprendizagem aplicado em nosso sistema educacional tem sido majoritariamente por recepção. Isso porque o que observamos na realidade em sala de aula é justamente o quadro que expomos no início dessa discussão: os discentes recebem do corpo docente um conhecimento pronto, por vezes sem necessidade de discussão ou reflexão.

No entanto, conforme ressalta Gomes (2020), não significa que não há aprendizagem significativa nessa forma, necessitando apenas que o aluno relacione as informações recebidas com os conhecimentos pré-estabelecidos. Além de classificar a aprendizagem quanto a sua forma de “entrada” na estrutura cognitiva, Ausubel também classifica três tipos de aprendizagem significativa, sendo elas: representacional, de conceitos e proposicional.

A primeira é o tipo mais básico, sendo ela a mais próxima da aprendizagem mecânica (GOMES, 2020). Acontece quando o aluno estabelece significados entre objetos, exemplos ou conceitos expostos em aula. Em outras palavras, é aquela que ocorre por meio de símbolos e imagens individuais.

Por outro lado, a aprendizagem de conceitos ocorre quando o aprendiz relaciona as ideias que recebe dando origens a novos significados. De acordo com Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), essa é a forma mais comum através da qual as crianças aprendem, sendo direcionadas a novos conhecimentos através das experiências, o que ele denominou de formação de conceitos. Esse tipo de aprendizagem também pode ocorrer através da assimilação de conceitos, quando não há necessidade de experiências para o aprendizado.

O terceiro tipo de aprendizagem é o oposto da representacional, já que possui como condição a existência de conhecimentos anteriores à exposição do conteúdo. O autor Moreira (2012) analisa as classificações de Ausubel e vai além ao determinar que a aprendizagem proposicional pode ser ainda subordinada, superordenada ou combinatória. Essa classificação é organizada quanto à forma de interação entre o conteúdo novo e os subsunçores.

Na forma subordinada, a informação nova não só é assimilada pela estrutura cognitiva do aprendiz, mas a modifica. Da mesma forma se classifica se o novo conteúdo for apenas exemplificativo de algum subsunçor, ou uma extensão dos conceitos já existentes.

Por outro lado, na aprendizagem superordenada, o novo conteúdo deve ser relacionável com subsunçores específicos que resultam em uma ideia geral. Neste tópico, Gomes nos auxilia com o exemplo de que “à medida que o aluno assimila os conceitos de carro, caminhão e ônibus, ele pode mais tarde aprender que todos estes são subordinados ao conceito de meio de transporte” (GOMES, 2020, p. 23).

Na forma combinatória, o novo conhecimento exposto não é amplo o suficiente para ser englobado pelos subsunçores, por isso, o aprendiz realiza em sua cognição uma combinação dos conceitos, unindo aqueles que ele já possui àqueles que está entrando em contato.

Concordando com a teoria proposta por Ausubel, Bonilla (1995) une esse pensamento à utilização dos *softwares* no ensino, na medida em que determina condições para a aplicação eficaz desse recurso, uma vez que:

[...] deve estar integrado ao currículo e às atividades de sala de aula, estar relacionado àquilo que o aluno já sabe e ser bem explorado pelo professor. O computador não atua diretamente sobre os processos de aprendizagem, mas apenas fornece ao aluno um ambiente simbólico onde este pode raciocinar, elaborar conceitos e estruturas mentais, derivando novas descobertas daquilo que já sabia (BONILLA, 1995, p. 68).

Conforme Coelho (2002), as simulações são ferramentas válidas quando utilizadas

com o objetivo de alternar as metodologias tradicionais. Para ele, esses recursos vão além de meras animações nas quais nenhuma interação é possível. A influência nos resultados nas simulações depende das decisões que serão tomadas no decorrer da atividade, permitindo com que o aluno interaja e atue de forma ativa no processo.

Conforme Gomes (2020, p. 52), as simulações

[...] podem ser bastante úteis, particularmente quando a experiência original for praticamente impossível de ser reproduzida. Elas possibilitam observar, em minutos, a evolução temporal de um fenômeno que demoraria muito para ser analisado em tempo real, além de permitir ao aluno repetir essa observação sempre que quiser (GOMES, 2020, p. 52).

Partindo dos pressupostos expostos, da relevância do estudo e ensino da Física e da necessidade de uma aprendizagem significativa, que tem como uma de suas condições a utilização de metodologias alternativas às tradicionais, chegamos à utilização de *softwares* no ensino da Física. Assim, vimos que as simulações são consideradas por diversos autores como uma ferramenta auxiliar que expõe um conjunto de soluções aproximadas que podem ajudar a reduzir os desafios enfrentados. Surge, por isso, a necessidade de criar um produto educacional que possa servir como diretriz para a aplicação das simulações, especificamente no estudo do lançamento oblíquo com e sem resistência do ar, conforme faremos no desenvolvimento deste trabalho.

### 3 SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE FÍSICA

As simulações são entendidas aqui, bem como pelos estudos explorados, como ferramentas capazes de fazer representações aproximadas da realidade a partir de modelos matemáticos. Através delas, o aluno (a) pode trocar significados ou modificar seus parâmetros conforme seus objetivos gerais ou específicos, seja com a apresentação de conceitos reais ou no relacionamento entre grandezas através de gráficos e referências. Assim, pode-se afirmar que as simulações auxiliam na construção de novas concepções e contextualização do conhecimento (REZENDE, 2000).

Um modelo matemático é uma simplificação da realidade que busca o entendimento de uma situação realística, assim como as metáforas, eles procuram trazer sentido por trás dos fenômenos naturais (VECCHIA, 2012). Quando um modelo matemático descreve a evolução temporal de um sistema, temos o que chamamos de modelo dinâmico.

Tentar representar modelos dinâmicos através de figuras estáticas, como acontece nos livros e na maioria das salas de aula, exige de quem observa uma grande capacidade de abstração. Capacidade essa que a maioria dos alunos não possuem. Entretanto, a maioria dos

conteúdos de Física abordados no ensino fundamental e médio trata-se de modelos dinâmicos que estabelecem a relação matemática entre o tempo e quantidades físicas. Nesse contexto, menciona-se que as simulações são poderosas ferramentas didáticas aliadas na explicação de fenômenos que dependem do tempo, tornando o processo de aprendizagem mais intuitivo e direto.

A escolha do conteúdo a ser trabalhado, isto é, Movimento Oblíquo com e sem resistência do ar, foi realizada considerando os motivos acima elencados, dentre eles o fato de a Física ser uma disciplina com fortes estigmas na percepção do alunato. As noções *matemáticas* e alguns conceitos básicos de Física bastam para que a pesquisa com o *software* escolhido cumpra o objetivo de facilitar o entendimento do assunto.

Assim, aplicaremos nesse caminho os conceitos fundamentais da teoria de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) e Freire (FREIRE, 1992), analisadas anteriormente. Ao utilizar o *software* como ferramenta pedagógica, pretendemos cumprir a mais difícil condição prevista nessa teoria, isto é, fomentar o interesse real dos alunos de compreenderem os conceitos da disciplina.

Acreditamos que ao utilizar essa abordagem metodológica, partindo dos subsunçores, conseguiremos capturar a atenção e o interesse dos alunos, cumprindo o objetivo de uma aprendizagem de Física significativa para suas formações.

As potencialidades do uso do computador como ferramenta auxiliar no ensino de Ciências em geral já vêm sendo discutidas há praticamente cinco décadas (VALENTE, 1999). Nos estudos desenvolvidos são analisadas as formas que esta ferramenta pode ser utilizada como recurso didático e pedagógico, ajudando a superar algumas dificuldades - ou pelo menos minimizá-las - no ensino de Física.

De acordo com Valente (1999), o computador deve ser considerado como um aliado das metodologias educacionais, como uma ferramenta tanto a ser integrada ao processo de ensino como para melhorá-lo.

Autores como Rosa (1995) e Araújo *et al.* (2004) produziram trabalhos de revisão da literatura referente ao uso de tecnologias computacionais no ensino de Física. O primeiro se dedicou a fazer um vasto levantamento de 182 (cento e oitenta e dois) artigos publicados entre 1979 e 1992 em revistas relacionadas ao Ensino de Física. Avançando na temática, Araújo *et al.* (2004), realizaram o mapeamento de 109 (cento e nove) artigos publicados pelas principais revistas especializadas da área no período de 1990 a 2003. A partir da análise desses estudos, notamos que as formas mais recorrentes do uso de simulações computacionais foram como ferramenta para coleta e/ou análise de dados em tempo real. Uma explicação para isto, segundo Coelho (2002), se dá pela óbvia vantagem que os *softwares* têm como ponte entre o estudo do fenômeno da maneira tradicional (quadro e giz) e os experimentos de laboratórios.

Para Tavares, as simulações computacionais, além de permitirem a modelagem de eventos reais que evoluem temporalmente, e de possibilitarem a inclusão de múltiplas representações de um determinado modelo, têm sido de grande valia no auxílio aos alunos com limitações na habilidade espacial de abstrair conceitos a partir de uma série de diagramas estáticos (TAVARES, 2008).

Os autores Yamamoto e Barbeta (2001) também analisaram o uso de simulações em salas e ressaltam que os fenômenos observados nos *softwares* possibilitam a visualização de condições que na realidade concreta seriam impossíveis de serem manipuladas. Por isso, os autores acrescentam que a utilização de laboratórios virtuais pode também ajudar a esclarecer aspectos, às vezes sutis, de um sistema físico.

Em estudos com a mesma temática, o autor Figueiras (2005) destaca que as simulações possibilitam a participação ativa dos alunos: sistemas interativos exigem respostas e tomadas de decisões, fazendo com que o aluno construa seu próprio conhecimento. Os autores Medeiros e Medeiros (2002, p. 80) ressaltam as principais vantagens percebidas em seus trabalhos com o uso das simulações virtuais, entre elas destacamos:

Fornece um *feedback* para aperfeiçoar a compreensão dos conceitos; permitir aos estudantes gerarem e testarem hipóteses; engajar os estudantes em tarefas com alto nível de interatividade; envolver os estudantes em atividades que explicitem a natureza da pesquisa científica; tornar conceitos mais abstratos mais concretos; desenvolver habilidades de resolução de problemas [...] (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002, p. 80).

Por outro lado, entre tantas vantagens e possibilidades educacionais que as simulações computacionais podem proporcionar na promoção da construção de conhecimentos, é sensato também destacar que as simulações computacionais, por serem construções baseadas em modelos de uma situação real, apresentam algumas limitações, que não podem ser negligenciadas, uma vez que podem passar concepções distorcidas da realidade. Nesse contexto, os autores supracitados enfatizam, frente aos riscos implícitos à adoção de forma acrítica das simulações no ensino de Física, que:

Seria primordial notar-se que um sistema real é frequentemente muito complexo e as simulações que o descrevem são sempre baseadas em modelos que contêm, necessariamente simplificações e aproximações da realidade. [...] É preciso estar alerta para o fato de que essa arma poderosa pode servir, paradoxalmente, também, para comunicar imagens distorcidas da realidade com eficiência igualmente maior do que a das figuras estáticas. [...] Se essa modelagem não estiver clara para professores e educando, se os limites de validade do modelo não forem tornados explícitos, os danos potenciais que podem ser causados por tais simulações são enormes. Tais danos tornar-se-ão ainda

maiores se o modelo contiver erros grosseiros (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002, p. 80-81).

Embora não seja o foco desta seção, é oportuno destacar em concordância com Araújo e Veit (2008), que os pertinentes comentários acima, acerca dos pressupostos contidos nas simplificações que fundamentam os modelos, nos quais as simulações estão baseadas, e que frequentemente passam despercebidos pelos estudantes e por muitos professores, são igualmente apropriados:

[...] às aulas tradicionais, que reduzem a Física à mera aplicação de fórmulas, empregadas sem qualquer discussão preliminar sobre pressupostos assumidos e o contexto de validade dos resultados, nem mesmo sobre o papel dos modelos e do processo de modelagem no desenvolvimento científico (ARAUJO; VEIT, 2008, p. 4).

Nesse contexto, os autores Araújo, Veit e Moreira (2004) destacam que, dentre as várias formas de uso do computador nas práticas de ensino, a modelagem computacional é a que melhor explora a interação dos estudantes com o processo de construção e análise do conhecimento científico, permitindo que compreendam melhor os modelos físicos e discutam o contexto de validade deles. Os autores acima mencionados acrescentam que a interação e o engajamento cognitivo dos aprendizes podem ser contemplados, tanto através da exploração de simulações computacionais (atividades exploratórias), quanto no processo de construção delas (atividades expressivas):

As atividades exploratórias caracterizam-se pela observação, análise e interação do sujeito com modelos já construídos, no intuito de permitir ao aluno a percepção e a compreensão das eventuais relações existentes entre a matemática subjacente ao modelo, e o fenômeno físico em questão. [...] As atividades expressivas, podem ser caracterizadas pelo processo de construção do modelo desde sua estrutura matemática até a análise dos resultados gerados por ele (ARAUJO; VEIT; MOREIRA, 2004, p. 181).

No mesmo viés, Arantes e seus colaboradores, destacam que em suas pesquisas o uso das simulações computacionais de experimentos de Física combinado à atividade experimental, ainda que não devam substituir experimentos reais, pode tornar mais eficiente o processo de aprendizagem dos alunos. E acrescentam que:

A principal função da simulação consiste em ser uma efetiva ferramenta de aprendizagem, fortalecendo bons currículos e os esforços de bons professores. A finalidade de uso pedagógico da simulação pode ajudar a introduzir um novo tópico, construir conceitos ou competências,

reforçar ideias ou fornecer reflexão e revisão final (ARANTES; MIRANDA; STUART, 2010, p. 29).

Dentro da sociedade digital, as metodologias educacionais estão passando por rápidas transformações, a fim de acompanhar os avanços tecnológicos. Esse fato pode ser percebido empiricamente, através da observação das salas de aula que utilizam recursos como o computador ou outros aparelhos de transmissão de imagens, tudo com o objetivo de facilitar a compreensão dos alunos acerca do conteúdo estudado.

Nesse contexto de mudanças, o educador antes visto como um agente responsável por transmitir o conhecimento, é visto como um facilitador do processo de aprendizagem, conforme trabalhado por pensadores aqui analisados como Freire (1997). Assim, o objetivo principal desse estudo é a aplicação do *software* de simulação Modellus para contextualização do ensino de grandezas físicas presentes nos problemas de lançamentos oblíquos com e sem resistência do ar, visando aproximar o ensino de conceitos das grandezas físicas à realidade vivenciado pelo aluno, propiciando assim o desenvolvimento de conceitos espontâneos, concordando com as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000).

#### 4 O SOFTWARE MODELLUS

Tendo analisado a importância de uma aprendizagem significativa, chegamos ao problema de explorar ferramentas aliadas ao tradicional ensino da Física, com aplicação prática para a vida cotidiana. Assim, para que o conteúdo lecionado tenha significado para o aprendiz, é imprescindível que o professor, na figura de mediador do conhecimento, facilite a transformação da teoria em prática.

Portanto, assim determinamos a relevância da utilização de metodologias pedagógicas alternativas, como os simuladores virtuais. Partimos então para a escolha do *software* a ser utilizado na pesquisa. Conforme acima trabalhado, diversos simuladores com esse intuito já estão disponíveis na rede mundial de computadores para *download* e livre utilização. Mas a escolha final de qual simulador seria usado se baseou em critérios como simples utilização, sendo essencial que dispensasse conhecimentos em programação, assim como compatibilidade para ser utilizado no *Windows*, *Linux* e *Ios*, principais sistemas operacionais que comportam o Java.

Assim, com a aplicação desses critérios, durante a pesquisa surgiu o Modellus, um *software* da categoria de simulação e modelagem, que permite a interação do usuário em diversas variáveis que interferem no resultado. Além disso, foi um simulador criado especialmente para funcionar enquanto ferramenta de ensino-aprendizagem.

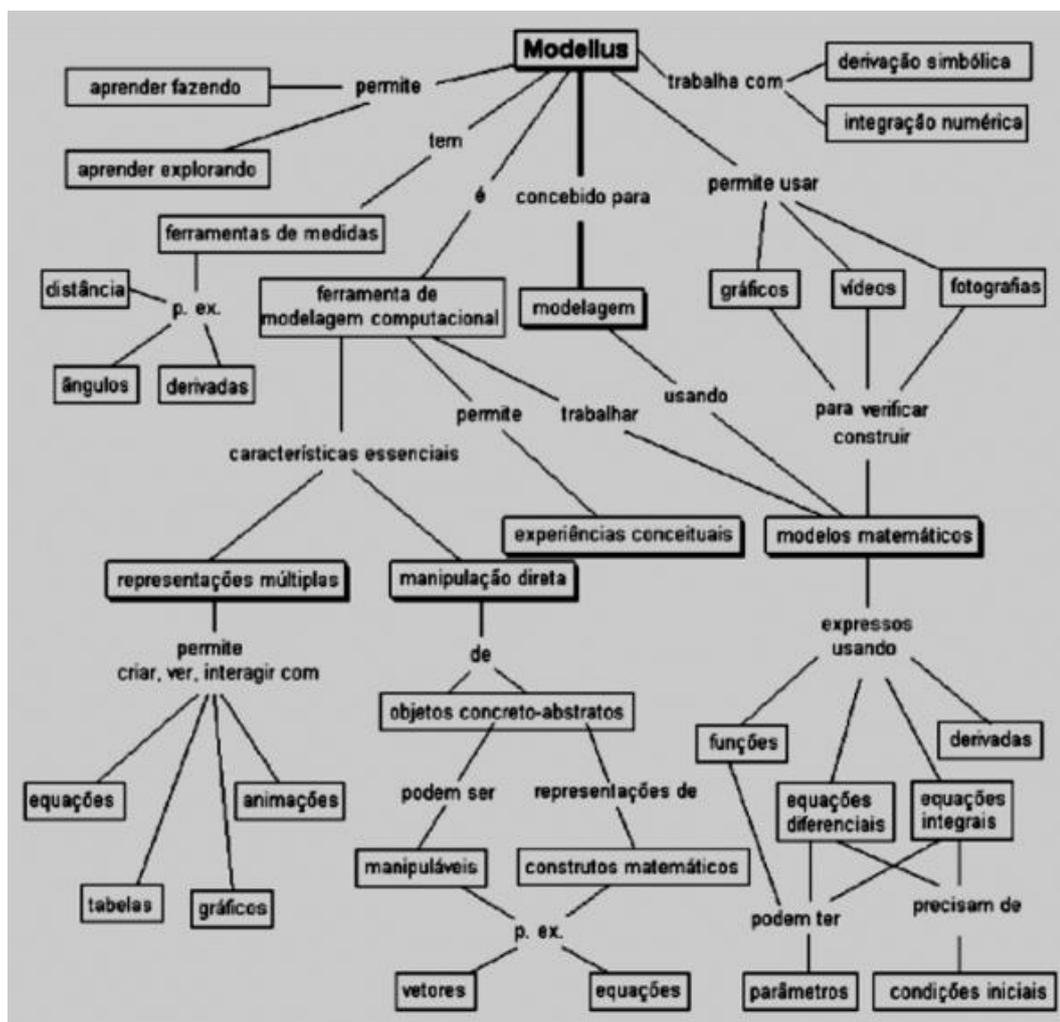
Portanto, ele possui ferramentas capazes de possibilitar a reflexão sobre cada tomada de decisão, tornando-o desafiador e provocativo para os alunos. O sistema ainda oferece descrição sobre os procedimentos e avisa sobre erros que possam estar sendo cometidos pelo utilizador. Por essas características, aquele que se aliou aos objetivos deste trabalho foi o Modellus, e por isso será utilizado como ferramenta para a solução das hipóteses inicialmente levantadas aqui.

O programa foi criado por professores da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, sendo o projeto liderado pelo físico Vitor Duarte Teodoro (REICHERT, BARCELOS, 2019). Conforme mencionado, é um sistema de fácil utilização, com recursos criados especialmente para consistir em uma ferramenta pedagógica.

Com o auxílio desse programa, os modelos matemáticos que simulam fenômenos materiais podem ser analisados de muitas maneiras.

A Figura 2, produzida pelos pesquisadores Veit e Teodoro (2002), representa as possibilidades de aplicações do Modellus. Os autores destacam como os objetos trabalhados no *software* são as representações concretas de ideias matemáticas abstratas.

Figura 2 - Mapa mental



Fonte: Veit e Teodoro (2002).

Assim, vemos que através desse *software*, o objeto ou fenômeno estudado pode ser examinado de várias formas, podendo ser representado por meio de fórmulas, gráficos, vetores ou animações em alguns casos. Antes de ser aplicado nas etapas seguintes desta pesquisa, suas funcionalidades foram testadas. Através de análise, foi notado que existem duas formas através das quais esse *software* pode ser utilizado: exploratória e expressiva (Veit; Teodoro, 2002), conforme denominações previstas pelos citados autores.

Na primeira, os alunos usam modelos desenvolvidos previamente; no contexto escolar, que aqui nos importa, são os professores os responsáveis por fornecer os dados e criar essas representações do conteúdo que está sendo lecionado. Assim, nessa forma, os educandos irão interagir somente com dados de entrada.

Já na forma expressiva, os modelos analisados serão produzidos pelos próprios estudantes, o que deve ocorrer em uma fase posterior à forma exploratória, quando os alunos irão primeiro se familiarizar com o sistema e conhecer suas ferramentas e recursos. Dessa forma os discentes podem também determinar como serão representados os resultados das simulações.

A partir da utilização desse programa, a aprendizagem de conceitos físicos se torna

mais dinâmica e, por isso, mais interessante ao alunato. De acordo com os resultados das pesquisas de educadores renomados, conforme investigado no referencial teórico, vimos que quando os alunos são estimulados através dessas ferramentas, a associação dos conteúdos lecionados em sala com os fenômenos do seu dia-a-dia é facilitada.

## 5 MODELO MATEMÁTICO DO LANÇAMENTO OBLÍQUO

O modelo matemático de lançamento oblíquo aplicado a simulação usada nesse trabalho possui duas situações distintas:

- (i) As equações do movimento desprezando a resistência do ar.
- (ii) As equações do movimento levando em conta a resistência do ar.

### 5.1 Equações do lançamento oblíquo sem resistência do ar

Analisando o movimento de uma partícula, após o lançamento de uma posição inicial  $y_0 = 0$  e com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$  a qual faz um ângulo  $\theta$  (em graus) com relação à horizontal, sob a influência somente da força gravitacional,  $m \cdot g$ , através da segunda Lei de Newton, obtém-se a seguinte equação de movimento:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg, \quad (1)$$

$$\therefore r(0) = r_0 = 0 \text{ e } \frac{dr}{dt}(0) = v_0, \quad (2)$$

que em termos das componentes cartesianas, tornam-se:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad (3)$$

$$x_0(0) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta, \quad (5)$$

e

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad (6)$$

$$y_0(0) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\theta. \quad (8)$$

Para o eixo  $x$  tem-se um movimento uniforme, logo a velocidade nesse eixo é constante e seu valor é  $v_x$ , e a equação diferencial que representa a variação do espaço em relação ao tempo é:

$$\frac{dx}{dt} = v_x. \quad (9)$$

Agora integrando a equação acima em ambos os lados da igualdade e impondo as condições iniciais da Eq. (4), obtemos:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_x \cdot dt). \quad (10)$$

Sendo  $v_x$  uma constante, pode-se retirá-la da integral, obtendo:

$$x(t) = v_x \cdot t. \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (9), temos:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t. \quad (12)$$

Para o eixo  $y$  tem-se um movimento variado, cuja aceleração do campo gravitacional é  $g$ , assim a velocidade  $v_y$  nesse eixo será dada pela equação diferencial:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g. \quad (13)$$

Integrando a equação acima em ambos os lados e impondo as condições iniciais da Eq. (5), temos:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = - \int_0^t g dt \quad (14)$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt. \quad (15)$$

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (15), temos:

$$v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt. \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (15) na equação  $dy = v_y dt$  e integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_{0y} - gt) dt. \quad (17)$$

Por fim, a equação da posição para o eixo  $y$  fica:

$$y(t) = v_{0y} t - g \frac{t^2}{2} \quad (18)$$

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (18), obtemos:

$$y(t) = v_0 \sin(\theta) t - g \frac{t^2}{2} \quad (19)$$

O tempo de subida ( $t_s$ ), que é obtido impondo-se à componente  $v_y(t) = 0$  no ponto mais alta da trajetória, da Eq. (16), temos:

$$0 = v_0 \sin(\theta) t - gt_s, \quad (20)$$

$$t_s = \frac{v_0 \text{sen}(\theta)}{g}. \quad (21)$$

Para encontrar a altura máxima ( $h_{max}$ ), substituímos o tempo de subida ( $t_s$ ) na Eq. (19), e fazendo algumas manipulações algébricas obtemos:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2(\theta)}{2g}. \quad (22)$$

Para encontrar o tempo de voo ( $t_v$ ), ou seja, o tempo que a partícula leva para atingir o solo é obtido substituindo  $y(t) = 0$  na Eq. (19), obtendo assim uma equação do 2º grau em  $t$ , em que uma das raízes é ( $t = 0$ , correspondendo ao ponto de lançamento, e a outra é:

$$0 = v_0 \text{sen}(\theta) t_v - g \frac{t_v^2}{2}, \quad (24)$$

$$t_v = \frac{2v_0 \text{sen}(\theta)}{g}. \quad (25)$$

Comparando a Eq. (21) com a Eq. (25), o tempo de voo é o dobro do tempo de subida. O alcance horizontal  $R$  da partícula é a distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar à altura inicial. Para determinar o alcance  $R$ , substituímos a Eq. (25) na Eq. (12) e fazendo as manipulações algébricas obtemos:

$$x(t = t_v) = R, \quad (26)$$

$$R = \frac{2v_0^2 \text{sen}\theta \cos\theta}{g}, \quad (27)$$

$$R = \frac{v_0^2 \text{sen}(2\theta)}{g}. \quad (28)$$

Na Eq. (28), o alcance ( $R$ ) é máximo quando  $\text{sen}(2\theta) = 1$ , o que corresponde a  $\theta = 45^\circ$ . Substituindo  $\text{sen}(2\theta) = 1$  na Eq. (28), obtemos:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (29)$$

Para obter a equação do caminho percorrido pela partícula (ou seja, da trajetória) isolamos o tempo  $t$  na Eq. (12) e substituímos o resultado na Eq. (19), após fazer algumas manipulações algébricas temos:

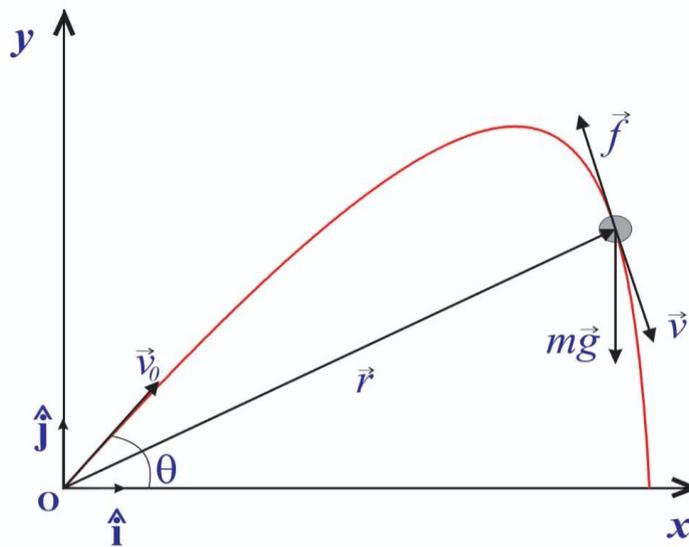
$$y(x) = tg(\theta)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos(\theta))^2}. \quad (30)$$

## 5.2 Equações do lançamento oblíquo com resistência do ar

Vamos considerar o problema de uma partícula de massa  $m$  lançada obliquamente com velocidade inicial de módulo  $v_0 > 0$  segundo um ângulo  $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$  em relação ao solo suposto inercial.

A resistência do ar, em geral, é uma força complexa no sentido de uma força complicada de modelar, no presente trabalho foi utilizado uma modelagem simples, essa força funciona bem para objetos com alta simetria, como uma bola, uma esfera. De acordo com a Figura 3, o objeto vai estar sujeito a duas forças, a força gravitacional ( $m \cdot g$ ) e a força de arrasto linear ( $-bv$ ).

Figura 3 - Ação das forças gravitacional e de arrasto linear sobre o lançamento de uma partícula



Fonte: Próprio autor (2023).

A força de resistência do ar se opõe ao vetor velocidade  $\vec{v}$  e aumenta com o módulo da velocidade.

$$\vec{f} = -bv\hat{v} = -b\vec{v} \quad (31)$$

onde,  $b > 0$  é uma constante de proporcionalidade estar relacionada com a viscosidade do ar e a dimensão linear do objeto, nesse caso, o sinal negativo indica que a força de arrasto é sempre contrária ao movimento. Considerando que a partícula seja lançada da posição inicial  $y_0=0$  com relação a horizontal, através da segunda Lei de Newton, obtêm-se as seguintes equações diferenciais do movimento:

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = (F + f), \quad (32)$$

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = -mg = -b \frac{dr}{dt}, \quad (33)$$

onde  $k = \frac{b}{m}$ . As condições iniciais em questão são dadas por:

$$r(t = 0) = 0, \frac{dr}{dt} = v_0, v(t = 0) = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}. \quad (34)$$

Que, em termos das componentes cartesianas, tornam-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad (35)$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad (36)$$

$$v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad (37)$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g - k \frac{dy}{dt} = -g - kv_y, \quad (38)$$

$$v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin\theta. \quad (39)$$

A componente da velocidade horizontal é obtida por uma integração da Eq. (35) e usando as condições iniciais da Eq. (37) dadas por:

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad (40)$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -k \int_0^t dt \quad (41)$$

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-kt}, \quad (42)$$

$$v_x(t) = (v_0 \cos\theta) e^{-kt}. \quad (43)$$

A componente da velocidade vertical é obtida integrando a Eq. (38) e usando as condições iniciais da Eq. (39), dadas por:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y, \quad (44)$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{(g + kv_y)} = - \int_0^t dt, \quad (45)$$

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}, \quad (46)$$

$$v_y(t) = \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}. \quad (47)$$

A componente da posição horizontal é obtida integrando a Eq. (43) e usando as condições iniciais da Eq. (36), dadas por:

$$v_x(t) = (v_0 \cos\theta) e^{-kt}, \quad (48)$$

$$\frac{dx}{dt} = (v_0 \cos\theta) e^{-kt}, \quad (49)$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 \cos\theta) e^{-kt} dt, \quad (50)$$

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\theta}{k} (1 - e^{-kt}). \quad (51)$$

A componente da posição vertical é obtida integrando a Eq. (47) e usando as condições iniciais da Eq. (36), dadas por:

$$v_y(t) = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}, \quad (52)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}, \quad (53)$$

$$\int_0^y dy = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) \int_0^t e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int_0^t dt \quad (54)$$

$$y(t) = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) \left(\frac{1 - e^{-kt}}{k}\right) - \frac{g}{k} t. \quad (55)$$

Derivando a Eq. (48), obtemos a componente da aceleração na direção  $x$ , dada por:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}, \quad (56)$$

$$a_x(t) = -(v_0 \text{cos}\theta) k e^{-kt}, \quad (57)$$

Derivando a Eq. (52), obtemos a componente da aceleração na direção  $y$ , dada por:

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}, \quad (58)$$

$$a_y(t) = -\left(v_0 \text{cos}\theta + \frac{g}{k}\right) k e^{-kt}, \quad (59)$$

Isolando o tempo  $t$  na Eq. (51), obtemos  $t = \frac{-1}{k} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0 \text{cos}\theta}\right)$  e substituindo na Eq. (55) e realizando as manipulações algébricas, obtemos a equação da trajetória, dada por:

$$y(x) = \left(\tan\theta + \frac{g}{kv_0 \text{cos}\theta}\right) x + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0 \text{cos}\theta}\right), \quad (60)$$

Chamando as  $U = v_{0x} = v_0 \text{cos}\theta$  e  $V = v_{0y} = v_0 \text{sen}\theta$  e substituindo  $U$  na Eq. (51) e  $V$  na Eq. (55), temos:

$$x(t) = \frac{U}{k} (1 - e^{-kt}), \quad (61)$$

$$y(t) = \frac{-gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kt}), \quad (62)$$

Para obtermos o alcance, que chamaremos de  $R'$ , fazemos  $y(t) = 0$  e assim teremos o tempo necessário ( $T$ ) para a partícula retornar ao solo. Assim da Eq. (62),  $y(t = T) = 0 = \frac{-gT}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kT})$ , obtemos:

$$T = \frac{kV + g}{gk} (1 - e^{-kT}). \quad (63)$$

## 6 O MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES

Para utilizar o método das perturbações, devemos encontrar um parâmetro de expansão ou constante de acoplamento, que normalmente é muito pequena. Neste problema, este parâmetro é a constante de retardamento  $k$ , para valores pequenos. Desta forma, podemos expandir em série de Taylor o termo que contém a exponencial  $e^{-kT}$  na Eq. (63), isto é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (64)$$

Aplicando ao nosso caso temos:

$$e^{-kT} = 1 - kT + \frac{k^2 T^2}{2} - \frac{k^3 T^3}{6} + \frac{k^4 T^4}{24} + \dots \quad (65)$$

Considerando que  $k < 1$ , ou que  $k \approx 10^{-2}$ , então  $k^2 \approx 10^{-4}$ ,  $k^3 \approx 10^{-6}$  e  $k^4 \approx 10^{-8}$ . Desprezando os termos a partir da ordem  $k^4$ . Substituindo a Eq. (65) na Eq. (63), para o tempo  $T$  e fazendo os cálculos algébricos, terá a forma:

$$T = \frac{2V}{kV + g} + \frac{k}{3} T^2. \quad (66)$$

O primeiro termo da Eq. (66), após a igualdade, pode ser manipulado como:

$$T = \frac{2V}{g} \left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} + \frac{k}{3} T^2. \quad (67)$$

Assim, o termo

$$\left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1}, \quad (68)$$

pode ser expandido em séries de Taylor (ou expansão binomial), da seguinte forma:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (69)$$

Expandindo a Eq. (68), temos:

$$\left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} = 1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2 V^2}{g^2} - \frac{k^3 V^3}{g^3} + \dots \quad (70)$$

Substituindo a Eq. (70) na Eq. (67), temos:

$$T = \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2 V^2}{g^2} - \frac{k^3 V^3}{g^3} + \dots\right) + \frac{k}{3} T^2. \quad (71)$$

Desprezando os termos de ordem de  $k^2$  e superiores, resultando em:

$$T \cong \frac{2V}{g} + \left[\frac{T^2}{3} - \frac{2V^2}{g^2}\right] k. \quad (72)$$

A Eq. (72) representa o tempo de voo da partícula, calculando o limite quando  $k \rightarrow 0$ , temos:

$$\lim_{k \rightarrow 0} T = T_0 = \frac{2V}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}. \quad (73)$$

O resultado reproduz o caso sem resistência do ar, o que mostra que as aproximações estão corretas, nos levando para uma solução do caso do movimento oblíquo com resistência do ar. Substituindo a Eq. (73) no lado direito da Eq. (72), teremos:

$$T \cong \frac{2V}{g} \left[1 - \frac{kV}{3g}\right]. \quad (74)$$

O tempo de subida ( $T_s$ ), para a partícula atingir a altura máxima é quando a componente vertical da velocidade se anula, ou seja,  $v_y(t) = 0$  usando a Eq. (52), temos:

$$0 = \left( v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k} \right) e^{-kT_s} - \frac{g}{k}, \quad (75)$$

e, chamando  $V = v_{0y} = v_0 \text{sen}\theta$ , a Eq. (75), torna-se:

$$T_s = \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right). \quad (76)$$

Desta forma podemos expandir em série de Taylor o termo  $\left( 1 + \frac{kV}{g} \right)$  que contém a Eq. (76), isto é:

$$\ln(1+x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (77)$$

para  $|x| < 1$ . Fazendo a expansão na Eq. (76), temos:

$$\ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right) = \frac{kV}{g} - \frac{1}{2} \left( \frac{kV}{g} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{kV}{g} \right)^3 + \dots \quad (78)$$

Substituindo a Eq. (78) na Eq. (76), temos:

$$T_s = \frac{1}{k} \left( \frac{kV}{g} - \frac{1}{2} \frac{k^2 V^2}{g^2} - \frac{1}{3} \frac{k^3 V^3}{g^3} + \dots \right). \quad (79)$$

Desprezando os termos de ordem  $k^2$  e superiores, temos:

$$T_s \cong \frac{V}{g} \left[ 1 - \frac{kV}{2g} \right]. \quad (80)$$

Calculando o  $\lim_{k \rightarrow 0} T_s = \frac{V}{g} = \frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}$ , que reproduz o tempo de subida sem resistência, comprovando que a solução está correta.

Para o cálculo da altura máxima, substituímos a Eq. (76) na Eq. (62) e o termo  $e^{-kT_s} = \frac{g}{(kV+g)}$  tirado da Eq. (47), quando fazemos  $v_y(t) = 0$  substituindo na Eq. (62), temos:

$$y(t = T_s) = H_{\text{máx}} = \frac{-gT_s}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kT_s}), \quad (81)$$

$$y(t = T_s) = H_{\text{máx}} = \frac{-g}{k^2} \ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right) + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kT_s}). \quad (82)$$

Substituindo a Eq. (78) na Eq. (82) temos:

$$H_{\text{máx}} = \frac{-g}{k^2} \left( \frac{kV}{g} - \frac{1}{2} \frac{k^2 V^2}{g^2} - \frac{1}{3} \frac{k^3 V^3}{g^3} + \dots \right) + \frac{kV + g}{k^2} \left( 1 - \frac{g}{(kV + g)} \right). \quad (83)$$

Desprezando os termos de ordem  $k^2$  e superiores, temos:

$$H_{\text{máx}} \cong \frac{V^2}{2g} \left[ 1 - \frac{2kV}{3g} \right]. \quad (84)$$

Calculando o  $\lim_{k \rightarrow 0} H_{\text{máx}} = \frac{V^2}{2g}$ , que reproduz a altura máxima do caso sem resistência do ar, o que comprova que a solução está correta.

Para calcular o alcance horizontal ( $R'$ ), fazemos a mesma aproximação usando a Eq. (65) e substituindo na Eq. (61), resultando em:

$$x(t) = \frac{U}{k} \cdot (1 - e^{-kt}) = x(t = T) = \frac{U}{k} \cdot (1 - e^{-kT}), \quad (85)$$

$$x(t = T) = R' = \frac{U}{k} \left( 1 - 1 + kT - \frac{k^2 T^2}{2} - \frac{k^3 T^3}{6} + \dots \right). \quad (86)$$

E substituindo a Eq. (74) na Eq. (86), e desprezando os termos de ordem  $k^2$  e superiores têm:

$$R' \cong \frac{2UV}{g} \left( 1 - \frac{4kV}{3g} \right). \quad (87)$$

Fazendo  $\lim_{k \rightarrow 0} R' = \frac{2UV - v_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g} = R$ , que é alcance sem resistência do ar, o que indica que Eq. (87) está correta. O alcance da Eq. (87) fica:

$$R' \approx R \left( 1 - \frac{4kV}{3g} \right). \quad (88)$$

Na Eq. (70) a série converge para  $\frac{kV}{g} < 1$  ou  $k < \frac{g}{V}$  para a validade do método usando no presente trabalho.

O tempo de voo  $T_v$  da partícula é a soma do tempo de subida  $T_s$  e o tempo de descida  $T_d$ , logo:

$$T_v \cong T_s + T_d. \quad (89)$$

Substituindo a Eq. (74) e Eq. (80) na Eq. (89), obtemos o tempo de descida, dado por:

$$T_d \cong \frac{V}{g} \left[ 1 - \frac{kV}{6g} \right]. \quad (90)$$

Comparando a Eq. (80) com a Eq. (90), constatamos que o tempo de subida é menor que o tempo de descida, logo:

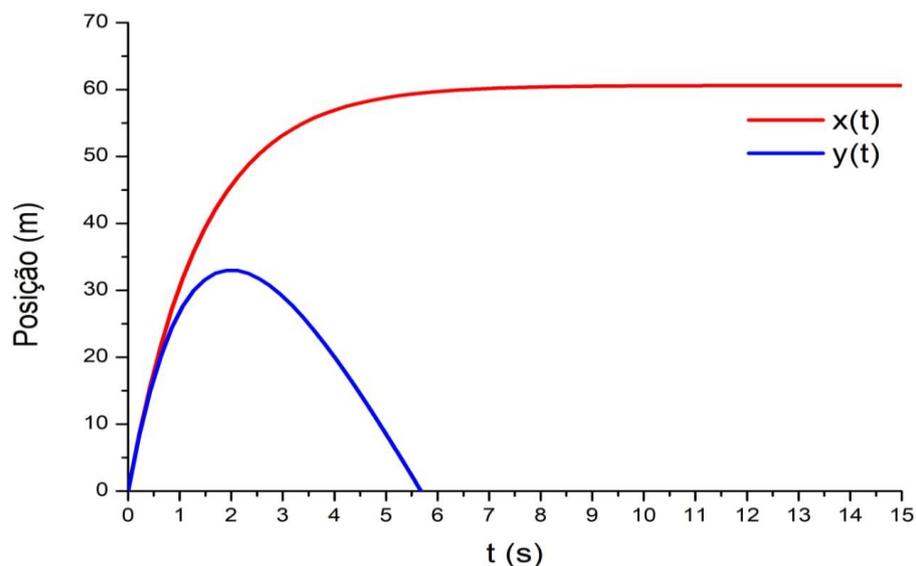
$$T_s < T_d. \quad (91)$$

## 7 GRÁFICOS DO LANÇAMENTO OBLÍQUO COM RESISTÊNCIA DO AR

### 7.1 Posição em função do tempo

As Eqs. (51) e (55) representam funções exponenciais em função do tempo. O gráfico do comportamento das posições em função do tempo é uma curva. A Figura 4 ilustra o comportamento da posição para duas situações específicas:  $x(t)$  e  $y(t)$ .

Figura 4 - Gráfico das posições em função do tempo

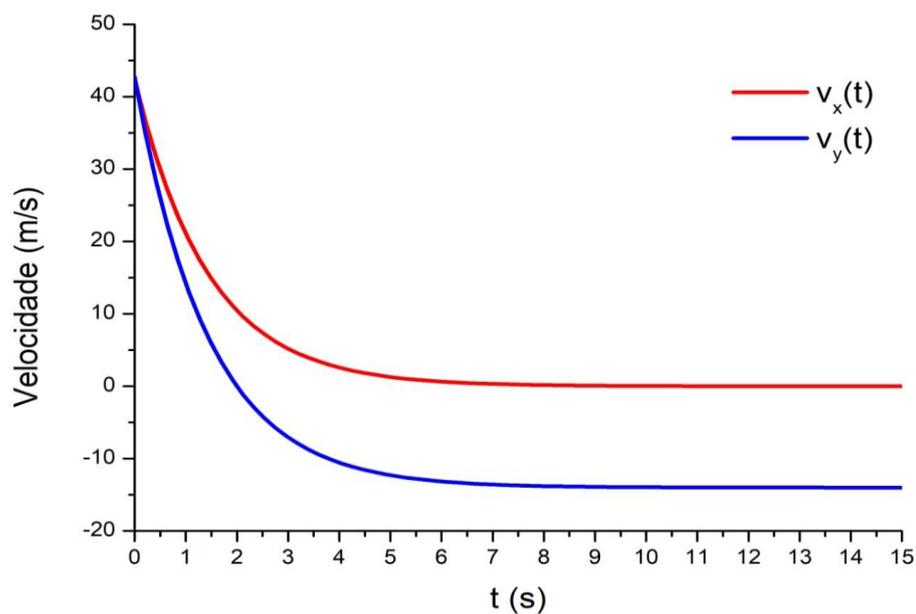


Fonte: Próprio autor (2023).

## 7.2 Velocidade em função do tempo

As Eqs. (43) e (47) representam funções exponenciais em função do tempo. O gráfico das componentes horizontal e vertical das velocidades é representado por curvas, como ilustra a Figura 5.

Figura 5 - Gráfico das velocidades em função do tempo

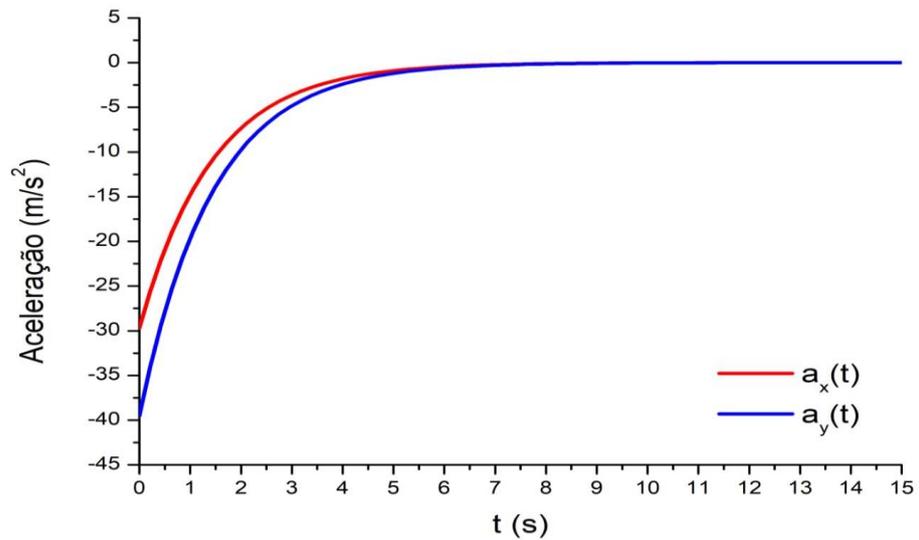


Fonte: Próprio autor (2023).

## 7.3 Aceleração em função do tempo

As Eqs. (57) e (59) representam funções exponenciais em função do tempo. O gráfico das componentes horizontal e vertical das acelerações é representado por curvas, como ilustra a Figura 6.

Figura 6 - Gráfico das acelerações em função do tempo

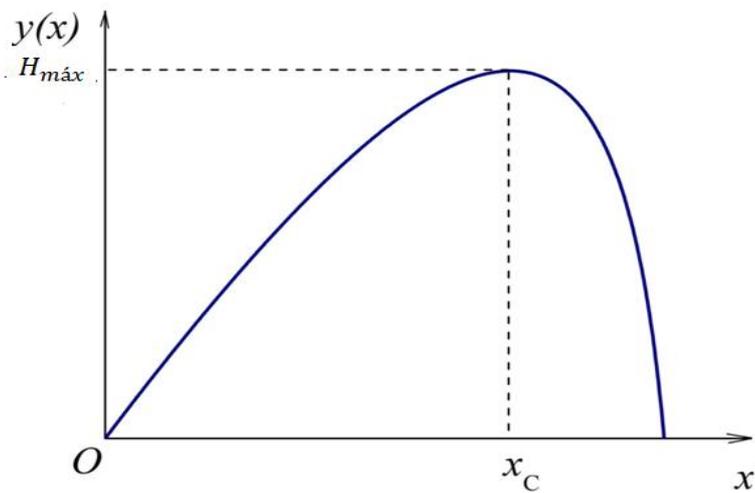


Fonte: Próprio autor (2023).

#### 7.4 Equação da trajetória

É obtida através das Eqs. (51) e (55), é uma curva que representa o trajeto feito pela partícula, tem um ponto crítico  $x_c$  de máximo global, onde a partícula atinge a altura máxima  $H_{máx}$ , como ilustra a Figura 7.

Figura 7 - Trajetória da partícula com resistência do ar



Fonte: Próprio autor (2023).

## 1 PRODUTO EDUCACIONAL

A proposta do produto educacional deste trabalho é um material didático, categoria que apresenta produtos que tem a finalidade de proporcionar a aprendizagem de um determinado conteúdo, bem como servir de apoio ao professor no processo de ensino-aprendizagem, para o ensino do lançamento oblíquo com e sem resistência do ar utilizando o *software* Modellus.

O produto educacional disponibilizado é dirigido a professores do segundo ano do ensino médio para que possam apresentar por meio de simulações computacionais, o conteúdo programático sobre Lançamento oblíquo com e sem resistência do ar, sobre os conceitos associados ao movimento oblíquo com e sem resistência do ar. Isso porque os alunos do primeiro ano ainda não possuem os subsunçores suficientes para que seja trabalhado com eles esse conteúdo.

Com a utilização do *software* Modellus, desenvolvemos um módulo didático contendo quatro simulações computacionais que podem ser utilizados como um material instrucional complementar que permite a visualização do movimento de uma partícula lançada obliquamente com e sem resistência do ar, simultaneamente com as suas representações gráficas e tabelas. Cada uma dessas simulações tem por objetivo facilitar o processo ensino-aprendizagem por meio de estímulos a curiosidade do aluno, despertando o interesse desse aluno, pelo conteúdo ministrado, através da utilização da tecnologia. Aqui, salientamos que o nosso produto educacional, enquadra-se na categoria de material didático, que visa esses objetivos: o de facilitar o processo de aprendizagem, criando ambientes com maior participação ativa dos alunos e com a construção de um aprendizado mais significativo.

### 1.1 Proposta do Produto Educacional

Este produto educacional se propõe a auxiliar professores do segundo ano do ensino médio a trabalhar com simulações computacionais, com intuito de despertar o interesse do estudante através do uso de tecnologias e, facilitar a compreensão de conceitos físicos por esses estudantes.

O presente trabalho foi feito numa formatação simples para facilitar o ensino utilizando captura da imagem da tela do *software* Modellus versão 4.01 em quatro situações de simulações dos movimentos analisados, observando as equações, movimentos, gráficos, tabelas e em algumas situações de vetores para melhor visualização e entendimento das grandezas, bem como as ferramentas que são necessárias para sua construção.

O presente produto é constituído por quatro simulações desenvolvidas no *software* Modellus, a saber:

- ✓ Lançamento oblíquo sem resistência do ar de uma partícula com ângulo de 60 graus e velocidade inicial de 100m/s;
- ✓ Lançamento oblíquo sem resistência do ar de cinco partículas sob ângulos de 15, 30, 45,60 e 75 graus todas com a mesma velocidade inicial de 80 m/s;
- ✓ Lançamento oblíquo com resistência do ar de uma partícula;
- ✓ Lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob o mesmo ângulo e velocidade inicial e coeficientes de atrito de 0,0; 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4  $s^{-1}$ ;

Essas simulações interativas deverão ser apresentadas aos alunos do segundo ano do ensino médio quando esses conteúdos estiverem sendo abordados teoricamente em sala de aula. Além de ilustrar os movimentos que estão sendo estudados através do uso dessas simulações, devem-se explorar os conceitos e as características dos movimentos visualizados nas simulações computacionais.

Após a utilização dessas simulações, deve-se avaliar a aprendizagem dos alunos. Os resultados obtidos serão analisados em comparação com uma turma na qual as simulações não serão aplicadas. Espera-se que as simulações, além de ajudarem na fixação dos conceitos abordados, possam despertar ou ampliar o interesse dos alunos pelo aprendizado de Física. As análises dos resultados dar-se-ão por meio de questionários aplicados aos alunos da turma teste (onde o produto foi aplicado) e da turma controle (onde não houve aplicação do produto).

## **1. 2 Objetivos da Proposta do Produto Educacional**

O trabalho do professor tem como objetivo organizar um meio que possibilite a aprendizagem de conteúdos disciplinares e o desenvolvimento de capacidades específicas dos alunos. O professor deve estimular a aprendizagem e suas orientações devem possibilitar a criação de ambientes de participação, colaboração e constantes desafios.

O professor, que já foi considerado um transmissor do conhecimento, hoje deve se tornar um facilitador no processo de aprendizagem do aluno que é esperado neste trabalho usando o Modellus como ferramenta potencialmente significativa. Mas para que essa transição ocorra se faz necessárias mudanças na formação do professor, de forma que possa incluir em sua prática diária ferramentas pedagógicas mais modernas, assim essas ferramentas pedagógicas ajudarão a vencer os desafios que o ensino de Física encontra no ensino médio.

O objetivo deste produto é fazer das simulações uma representação aproximada da realidade a partir de modelos matemáticos, onde o aluno poderá trocar significados ou modificar a simulação no decorrer da aula para atender seus objetivos gerais ou específicos, seja com a apresentação de reais conceitos ou no relacionamento entre grandezas através de

gráficos. Assim o *software* Modellus auxilia na construção de novas concepções e contextualização do conhecimento.

O uso de simulações com a utilização do *software* Modellus, busca alcançar esse objetivo de forma pragmática. Cada uma das simulações apresentada no Produto Educacional tem por objetivo facilitar o processo de ensino-aprendizagem por meio de estímulos a curiosidade do aluno, despertando o interesse desse aluno, pelo conteúdo ministrado, por meio do uso do computador. Os roteiros desenvolvidos no Produto Educacional têm como objetivo auxiliar o professor de Física a trabalhar com simulações computacionais, com intuito de facilitar a compreensão de conceitos físicos pelos estudantes.

São objetivos específicos do Produto Educacional:

- ✓ Despertar o interesse do aluno, pelo conteúdo ministrado, através da utilização do *software* Modellus.
- ✓ Organizar um meio que possibilite a aprendizagem de conteúdos através de observações nas simulações.
- ✓ Estimular aprendizagem do aluno através simulações desenvolvidas com o *software* Modellus.
- ✓ Utilizar as simulações desenvolvidas no *software* Modellus como ferramenta didática no processo de ensino aprendizagem.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo sem resistência do ar.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo com resistência do ar.
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.
- ✓ Compreender, que no lançamento oblíquo sem resistência do ar, o alcance ocorre com ângulo de 45 graus.
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com diferentes coeficientes de atritos.
- ✓ Observar a trajetória descrita de uma partícula em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.

### 1.3 Metodologia de aplicação

Este trabalho fundamenta-se no estudo comparativo entre duas turmas do segundo ano do ensino médio da escola privada “Colégio Pinheirense”, localizada na Avenida Tarquínio Lopes, 465 na cidade de Pinheiro/MA. Em consequência da pandemia do novo

coronavírus, que assola o país, o produto foi aplicado tanto de forma remota quanto presencial. Na forma remota, foram realizadas aulas expositivas através da plataforma Zoom.

Em uma das turmas foi aplicado o produto educacional (turma teste), na outra o produto não foi aplicado (turma controle) para que a turma servisse como parâmetro de comparação e análise da evolução da turma onde o produto educacional foi aplicado.

Para aplicação do produto, foi selecionada uma turma regular dessa escola, constituída por 16 alunos. O produto foi apresentado aos alunos por meio de quatro simulações, uma de lançamento oblíquo, sem resistência do ar com ângulo de 60 graus e velocidade inicial de 100m/s; uma de lançamento sem resistência do ar de cinco partículas sob os ângulos de 15, 30, 45, 60 e 75 graus; uma com resistência do ar com dois niveladores um para massa e outro para o coeficiente de atrito e por último uma de lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob mesmo ângulo e com diferentes coeficientes de atrito.

Em cada simulação os conceitos de posição, trajetória, velocidade, eram abordados, e os alunos podiam observar os seus comportamentos em função do tempo, por meios das imagens geradas pelo programa. Em algumas das simulações, os alunos também puderam observar os gráficos, em construção durante a animação.

A preocupação em se utilizar recursos que envolvam simultaneamente a apresentação do fenômeno juntamente com a sua representação gráfica, vem da observação da dificuldade que alguns alunos possuem na interpretação gráfica dos problemas de Física (Yamamoto; Barbeta, 2001). Fato este, destacado em várias pesquisas no ensino de Física (Medeiros; Medeiros, 2002; Araújo; Veit; Moreira, 2004a). Segundo Yamamoto e Barbeta (2001), uma das principais dificuldades dos alunos, para esse assunto especificamente, é a falta do entendimento claro do significado dos gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo:

O conjunto de simulações e desenvolvimento teórico de um dado tópico pode, em princípio, melhorar o entendimento dos alunos nestas situações, pois permite que se visualize o movimento simultaneamente à construção do gráfico (Yamamoto; Barbeta, 2001, p. 218).

Além disso, as dificuldades enfrentadas pelos alunos são o reflexo de uma baixa noção de matemática básica, principalmente no que diz respeito ao estudo de funções. As simulações, os questionários de avaliação e satisfação foram apresentadas e abordadas em blocos de duas aulas de 50 (cinquenta) minutos cada, totalizando 100 (cem) minutos no segundo encontro para aplicação deste produto educacional totalizando 2 (duas) aulas, e uma aula de 50 (minutos) foi disponibilizada para fazer uma revisão na turma controle,

tivemos dois encontros, totalizando 3 (três) aulas, o que correspondeu a 2,5% da carga horária anual.

Ressaltamos aqui, que as atividades desenvolvidas com o Produto Educacional são atividades exploratórias, onde o aluno é levado a manusear um modelo previamente preparado pelo professor.

As simulações foram apresentadas aos alunos por meio de um aparelho de TV, conectado a um computador, onde as projeções eram levadas aos alunos através da plataforma zoom. Nas simulações os alunos podiam visualizar as trajetórias das partículas, os valores descritos nas tabelas, suas velocidades e sua aceleração, quando havia, também fizeram parte de algumas simulações, as construções dos gráficos de comportamento das grandezas físicas associada ao movimento descrito pela partícula, de modo que os alunos podiam acompanhar a evolução desses enquanto a partícula se deslocava.

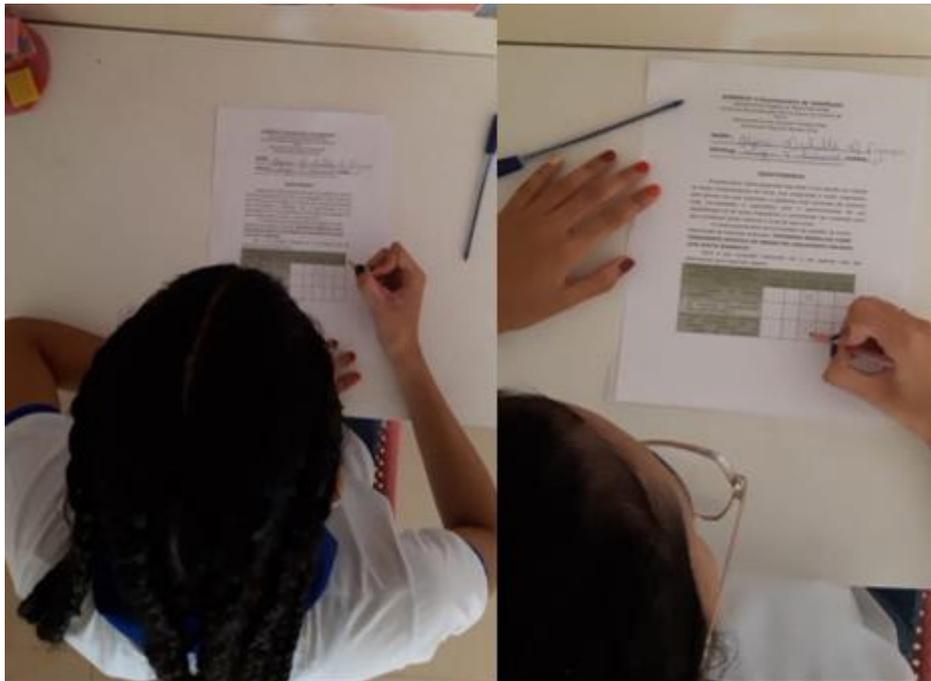
A Figura 8 exibe a logística utilizada para apresentar as simulações aos alunos, uma sala de ensino equipada com TV, computador e celular conectado à internet. Os alunos acompanhavam as simulações de forma remota através da plataforma zoom. A figura 9 exibe alunos acompanhando o estudo e respondendo os questionários de satisfação - a fim de que fossem medidos os fatores positivos e negativos da metodologia a partir da visão dos alunos, - e o de avaliação.

Figura 8 - Logística utilizada para expor o conteúdo.



Fonte: Próprio autor (2023).

Figura 9 - alunos respondendo os questionários de satisfação e avaliação

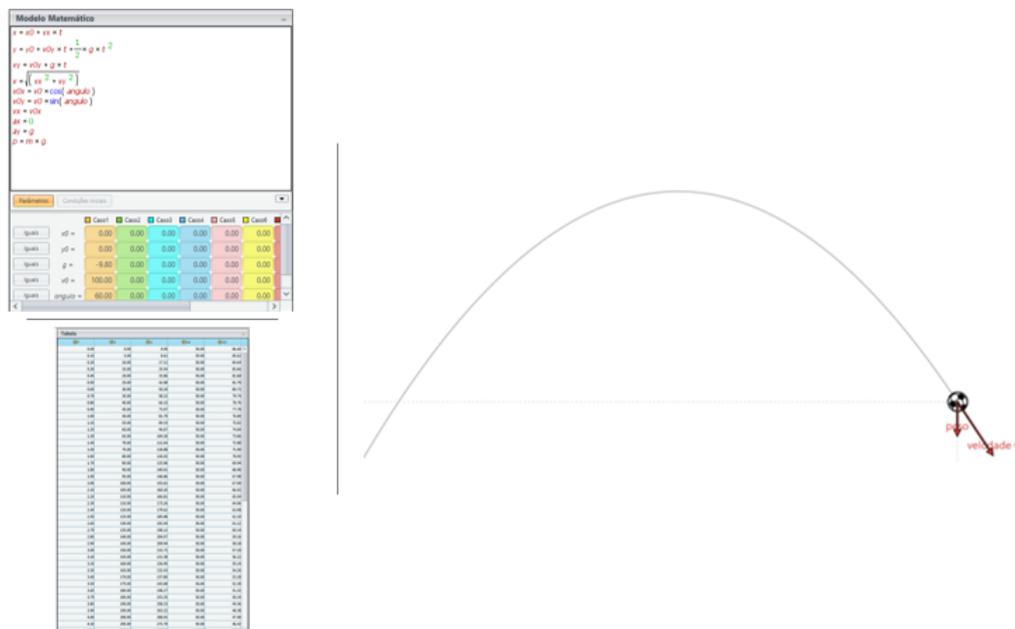


Fonte: Próprio autor (2023).

Durante a aula de apresentação do produto educacional foram apresentadas as seguintes simulações:

- ✓ Lançamento de uma partícula sem resistência do ar.

Figura 10 - Imagem do lançamento de uma partícula sem resistência do ar com ângulo de 60 graus e velocidade inicial de 100 m/s



Fonte: Próprio autor (2023).

O conteúdo de lançamento oblíquo sem resistência do ar foi explanado, explicando os aspectos e características desse tipo de movimento, de modo que os alunos pudessem visualizá-los. Também foram evidenciados os gráficos construídos pelo aplicativo, os

gráficos das posições  $x(t)$  e  $y(t)$  em função do tempo e das velocidades vertical e horizontal em função do tempo.

Na janela de modelo matemático (Figura 10) foi explicado as equações do movimento, a mesma vista nos livros didáticos e também foi observado durante a simulação que a única força que atua na partícula é a força gravitacional, foi explicado que os movimentos são independentes podendo separá-los, um movimento na horizontal e outro na vertical, e analisar separadamente, o movimento da partícula na horizontal se processa com velocidade constante, ou seja, movimento uniforme e o movimento na vertical com velocidade que varia com o tempo, chamado movimento uniformemente variado.

Na direção horizontal os alunos observaram através de uma tabela que a posição  $x(t)$  aumenta no decorrer do tempo e a velocidade  $v_x(t)$  é constante, evidenciando o movimento uniforme. Na direção vertical a posição  $y(t)$  vai aumentando até a altura máxima  $y_{máx}$  e a partir daí vai diminuindo com o tempo, a velocidade  $v_y(t)$  vai diminuindo até  $y_{máx}$  com movimento retardado e após um certo tempo aumenta em módulo descendo com movimento acelerado. Também foi observado numa tabela o tempo que a partícula chega à altura máxima, o valor de  $y_{máx}$ , e a  $v_y(t)$  que se aproxima de zero. As acelerações  $a_x(t) = 0$  e  $a_y(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$ , o sinal negativo indica que o sentido positivo do eixo  $y$  é para cima.

Foi explicado que os gráficos das velocidades  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$  é uma reta, sendo que o gráfico de  $v_x(t)$  é uma função constante, logo é uma reta paralela ao eixo dos  $x$ ; o gráfico da posição  $x(t)$  é uma reta, já que sua função horária é do primeiro grau, já o gráfico da posição  $y(t)$  é uma parábola com concavidade para cima.

O gráfico da  $a_x(t)$  é uma reta coincidente com o eixo  $x$ , como já foi mostrado que  $a_x(t) = 0$ , o gráfico da aceleração  $a_y(t)$  é uma reta paralela ao eixo dos  $x$ , já que  $a_y(t)$  é constante.

Durante as aulas, simulações como esta, como para outras, foram repetidas várias vezes durante a aula, para que os alunos alcançassem os objetivos desejados. Segundo Yamamoto e Barbeta (2001, p.218), nas aulas de teoria, em que a quantidade de alunos é maior do que no laboratório, as intervenções ilustrativas com o emprego das simulações devem ser realizadas pelo próprio professor, com o uso de computador conjugado com projetor multimídia. Desta forma, pode-se com estas demonstrações, repetir várias vezes o experimento, com modificação de vários parâmetros, buscando auxiliar o aluno na visualização dos movimentos discutidos.

- Lançamento oblíquo sem resistência do ar com ângulos diferentes.

Figura 11 - Imagem do lançamento oblíquo sem resistência do ar de cinco partículas sob ângulos de 15, 30, 45, 60 e 75 graus todas lançadas com mesma velocidade inicial de 80m/s



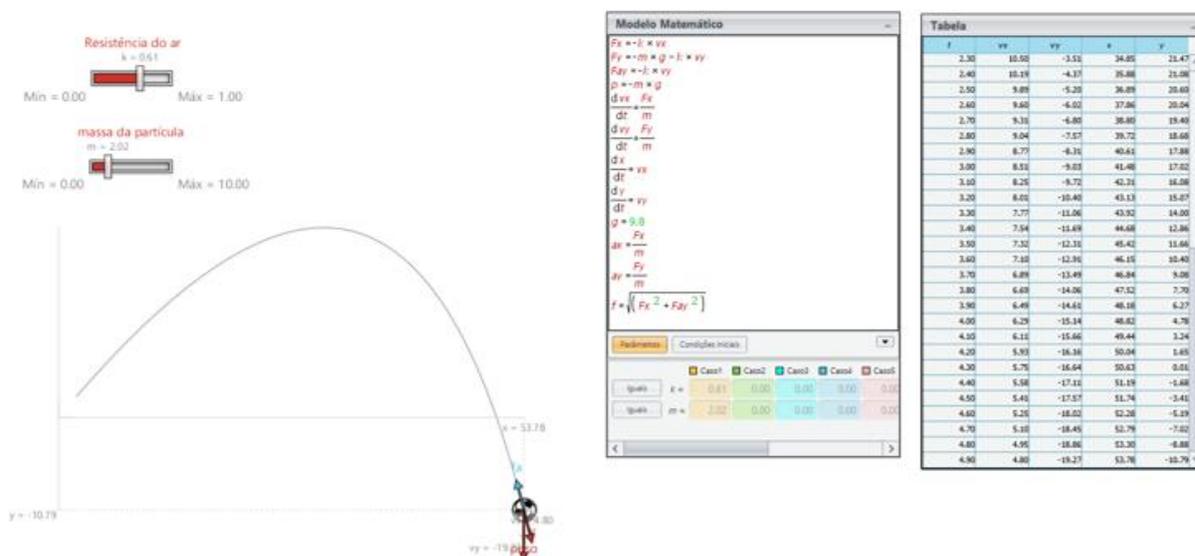
Fonte: Próprio autor (2023).

Na apresentação da simulação foi mostrado na janela de modelo matemático (Figura 11) as equações do movimento  $x(t)$  e  $y(t)$  em função do seno e cosseno do ângulo. No ícone parâmetros foi atribuído valores dos ângulos e da velocidade inicial da partícula.

Nessa simulação os alunos visualizaram o lançamento simultâneo de cinco partículas saindo da origem com mesma velocidade inicial e cinco ângulos diferentes, durante o lançamento das partículas foi observado que a partícula atinge o alcance máximo quando o ângulo for de 45 graus, como foi demonstrado na aula expositiva e dialogado, foi visualizado que as partículas com os ângulos de 60 e 75 graus tiveram maior tempo de voo.

- ✓ Lançamento oblíquo de uma partícula com resistência do ar.

Figura 11 - Imagem do lançamento oblíquo com resistência do ar de uma partícula



Fonte: Próprio autor (2023).

O conteúdo de lançamento oblíquo com força de resistência do ar (força de arraste linear) foi apresentado explicando os aspectos e características desse movimento. Na janela de modelo matemático (Figura 12) foi explicado que as forças que atuam na partícula são a força de arraste  $\vec{f}$  e a força gravitacional  $m\vec{g}$ , no caso da força  $b$  foi explicado que ela é composta por uma constante de retardamento  $k$ , e essa força é proporcional à velocidade  $v$  e contrária ao vetor velocidade  $\vec{v}$ . Limitamo-nos a explicar as equações com taxas de variações e equações diferenciais porque não estão no nível dos alunos do ensino médio, assunto visto só nos cursos universitários, foi apenas explicado os aspectos qualitativos desse tipo de movimento.

Foram mostrados na simulação dois niveladores, um para resistência do ar chamado  $k$  e outro para massa chamado  $m$ , os alunos observaram que quando aumentava a constante  $k$  o alcance da partícula diminuía e quando diminuía a constante  $k$  o alcance aumentava, eles também observaram que a trajetória descrita pela partícula não é parabólica. No nivelador de massa quando este era aumentado o alcance da partícula aumentava, fato este explicado porque aumentava a força na partícula e diminuía o valor da constante de retardamento  $k$ .

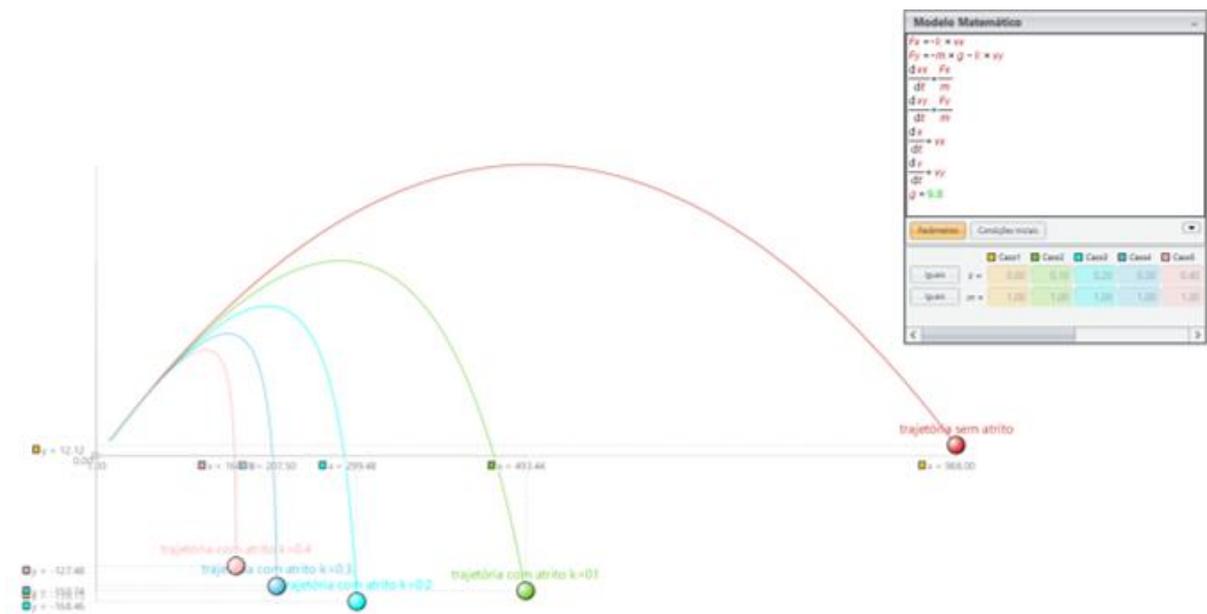
Foi explicado que os movimentos são independentes podendo separá-los, um movimento na horizontal e outro na vertical, no movimento na horizontal a componente  $x(t)$  tende a um valor constante a partir de um determinado tempo visto na tabela (Figura 12), e que a partícula parava em virtude da força de arraste, a componente  $v_x(t)$  da velocidade diminui exponencialmente até tender a zero. No movimento na vertical, a

componente  $v_y(t)$  da velocidade vai diminuindo até altura máxima e quando atinge essa altura seu valor é aproximadamente zero  $v_y(t) = 0$  e após certo tempo a componente  $v_y(t)$  vai aumentando em módulo até que a força gravitacional iguale-se a força de arraste, tornando a aceleração na vertical igual a zero, nesse momento a partícula atinge a velocidade terminal ou limite, a partir daí seu valor permanece inalterado ou seja velocidade constante. Através da tabela (Figura 12) foi observado que a componente da posição  $y(t)$  vai aumentando de valor até a altura máxima e depois diminui de valor com o tempo.

As acelerações  $a_x(t)$  e  $a_y(t)$  são negativas, pois a partícula é desacelerada, os gráficos das componentes  $x(t), y(t), a_x(t), a_y(t), v_x(t)$  e  $v_y(t)$  foram mostrado de maneira não aprofundada, e todos são curvas representando funções exponenciais.

- ✓ Lançamento oblíquo com diferentes coeficientes de atrito.

Figura 12 - Imagem do lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob mesmo ângulo e velocidade inicial e coeficientes de atrito de 0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4  $s^{-1}$



Fonte: Próprio autor (2023).

Na apresentação da simulação no ícone parâmetros foram mostrados cinco casos para a constante de retardamento, onde um dos casos tinha constante  $k = 0,00$  indicando que a partícula não está sujeita a resistência do ar, as demais têm constantes diferentes de zero, sujeitas a força de resistência do ar.

As partículas têm a mesma massa e as velocidades das partículas nas direções horizontal e vertical  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$  são iguais, no lançamento simultâneo das cinco partículas os alunos observaram que a partícula com trajetória sem atrito  $k = 0,00$  se diferenciava por

ser uma trajetória parabólica com maior alcance, enquanto as outras com trajetória com atrito apresentava alcances menores.

A escola onde o Produto Educacional foi aplicado não dispunha de laboratório de informática, para que os alunos pudessem alterar os parâmetros (dados de entrada) para as simulações, de forma individual (cada um em seu computador). Por isso, de forma remota, com a propriedade de compartilhamento de tela permitida pela plataforma Zoom, várias simulações foram exibidas aos alunos, com diferentes dados de entrada propostos pelos próprios alunos.

Na modalidade presencial, esse mesmo processo ocorreu, dessa vez sem necessidade do intermédio da plataforma Zoom. Para demonstrar as simulações, o computador do professor foi conectado a um aparelho de televisão, o que permitiu maior visibilidade das simulações pela turma. Os dados de entrada também foram propostos pelos próprios alunos nesse caso.

#### **1.4 Metodologia da Pesquisa**

Para esta pesquisa foram criados dois tipos de questionários, que foram aplicados aos alunos de uma turma do segundo ano do ensino médio, dividida em dois grupos (turma teste e controle) da escola privada “Colégio Pinheirense”, localizada na cidade de Pinheiro/MA. Em uma dessas turmas foi aplicado o produto educacional (turma teste), e na outra não (turma controle); a não aplicação do produto educacional em uma das duas turmas ocorreu para que pudessemos comparar a eficácia do produto educacional no desenvolvimento da aprendizagem em relação a uma turma onde este produto não tivesse sido aplicado.

O primeiro questionário, intitulado questionário de avaliação, objetivava-se à avaliação da aprendizagem dos alunos onde o Produto Educacional foi aplicado em comparação com os alunos onde não houve aplicação do Produto Educacional. Este questionário foi aplicado na turma teste depois da execução do Produto Educacional. O questionário de avaliação consta de 10 (dez) questões subdivididas em três tipos, questões teóricas, questões de cálculo e questões de gráficos.

As duas turmas já haviam tido aulas teóricas sobre os conteúdos abordados no Produto Educacional. O produto educacional foi aplicado na turma teste, enquanto a turma controle fez apenas revisão teórica do conteúdo. Logo após a aplicação do produto na turma teste e a revisão na turma controle, um questionário foi aplicado nas duas turmas, desta forma foi possível comparar os avanços dos alunos onde o Produto Educacional foi aplicado, com os avanços dos outros alunos, ou seja, se o produto educacional foi eficaz ao que se propôs.

Os resultados obtidos, a partir do questionário de avaliação, estão apresentados em detalhes no capítulo 9 desta dissertação, que trata da análise e discussão dos dados obtidos.

O segundo questionário, intitulado questionário de satisfação, consta de uma avaliação qualitativa sobre a utilização da tecnologia no ensino de Física, com destaque para as simulações computacionais que são o objeto do nosso Produto Educacional. Este questionário foi aplicado apenas na turma teste, onde o produto foi aplicado, pois tem por objetivo verificar se o uso das tecnologias (simulações) despertou maior interesse pela disciplina.

O questionário de satisfação consta de 5 (cinco) questões de múltiplas escolhas onde foi aplicado no final da aula e buscava saber como o aluno avaliava 5 pontos da aplicação do *software* Modellu se eles deveriam classificá-los como excelente, bom, regular, ruim e péssimo. Os resultados obtidos estão apresentados em detalhes no capítulo 9.1 desta dissertação, que trata da análise e discussão dos dados obtidos.

## 2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

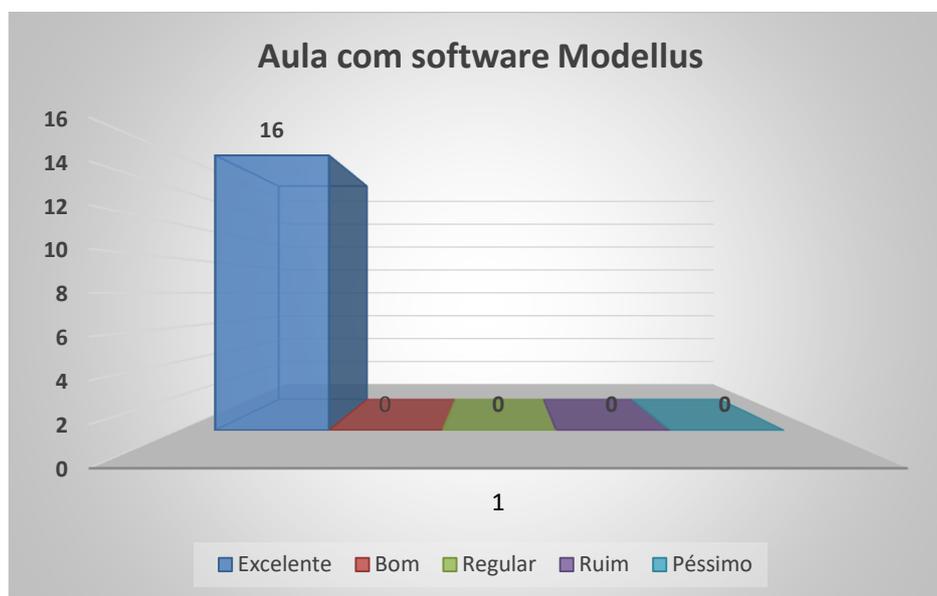
### 2.1 Análise e discussão dos dados do questionário de satisfação (questões objetivas)

O questionário de satisfação foi aplicado na turma (turma teste), onde o Produto Educacional foi trabalhado, depois da exposição do Produto Educacional. Este questionário tem por objetivo, analisar de forma qualitativa, a utilização da tecnologia no ensino de Física, com destaque para as simulações computacionais que são o objeto do nosso Produto Educacional.

Os resultados obtidos a partir do questionário de satisfação aplicado aos alunos do segundo ano do ensino médio do Colégio Pinheirense são mostrados a seguir.

1. Como você avaliou a aula com a utilização do *software* Modellus?

Gráfico 1 - Resultados da 1ª questão objetiva do questionário de satisfação

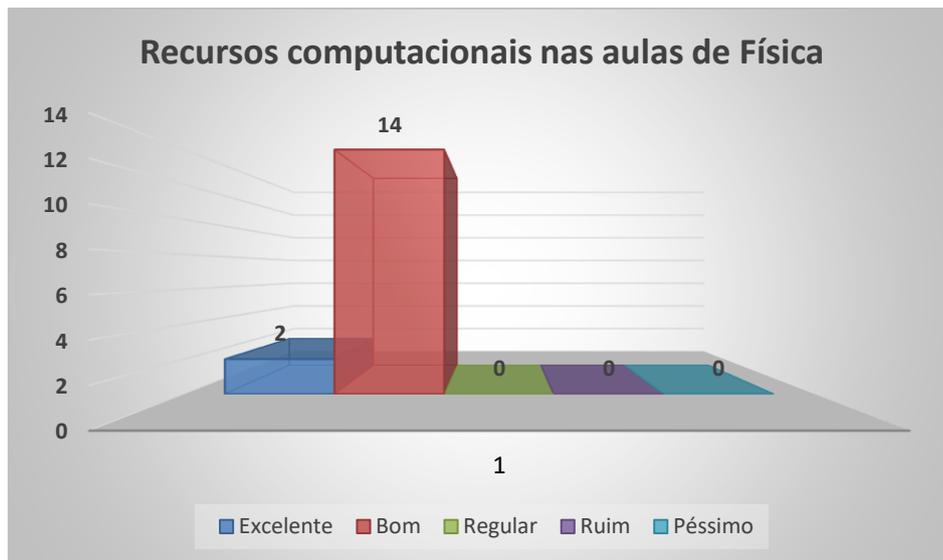


Fonte: Próprio autor (2023).

Observa-se que todos os estudantes apresentaram uma avaliação positiva em relação à aula. Essa avaliação demonstra que além do uso da ferramenta computacional, a metodologia como um todo foi relevante e significativa para os estudantes.

2. Como você avalia a utilização de recursos computacionais nas aulas de Física?

Gráfico 2 - Resultados da 2ª questão objetiva do questionário de satisfação

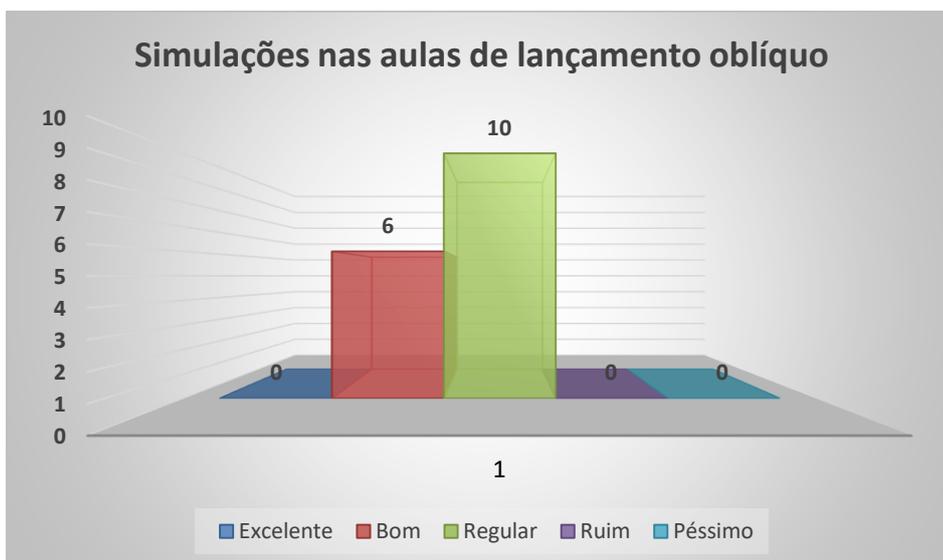


Fonte: Próprio autor (2023).

Os estudantes avaliaram de forma positiva o uso de tecnologias educacionais no ensino de física, mas vale perceber que existem lacunas que podem ser melhoradas uma vez que o pico da avaliação oscilou entre bom e excelente, o que mostra que há algumas melhorias ou correções que podem ser feitas no processo de ensino, a fim de que os aprendizes sintam-se mais confiantes no uso de recursos computacionais no ensino de física. Outra reflexão que é necessária, a partir desse gráfico, é sobre até que ponto o ensino de física tradicional (pouca conceituação, quase nenhuma experimentação e muitos exercícios carregados de problemas repetitivos e com forte ênfase no método matemático de resolução) não influencia a forma dos alunos em ver mudanças metodológicas em seu cotidiano.

3. Como você avalia a utilização das simulações com o *software* Modellus nas aulas de lançamento oblíquo com atrito dinâmico e sem resistência do ar?

Gráfico 3 - Resultados da 3ª questão objetiva do questionário de satisfação

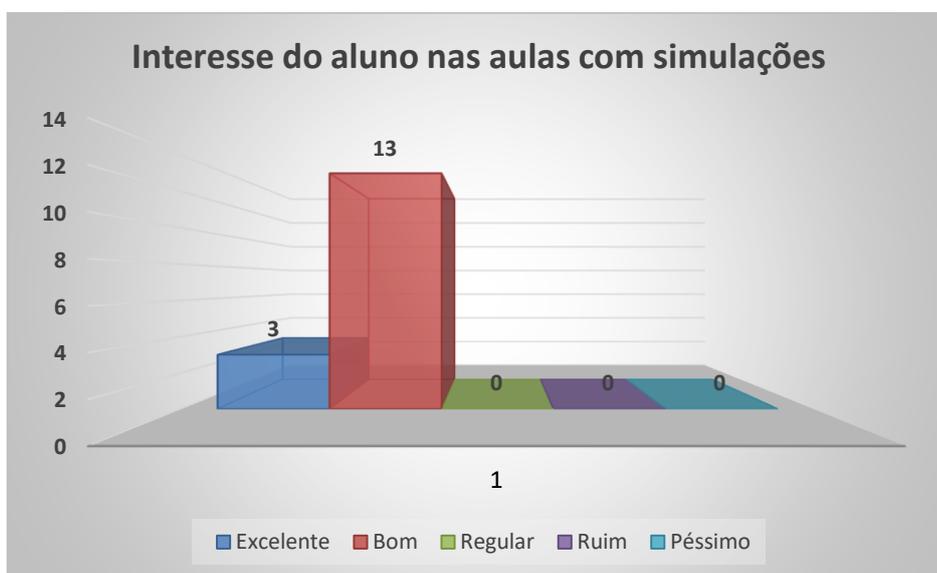


Fonte: Próprio autor (2023).

O gráfico acima mostra que apesar dos estudantes terem interesse na metodologia aplicada (conforme visto nos gráficos 01 e 02) apresenta um perfil menos otimista no seu processo de aprendizagem em relação ao tema de estudo. Essa desconfiança pode ser explicada por vários aspectos, metodologia nova em relação ao ensino de física, necessidade de adaptação ao novo método que por sua vez os obriga a sair da região de conforto em que estão imersos, a presença de um professor aplicador diferente do professor regente da turma, ou mesmo o processo de readaptação ao ambiente escolar, em virtude de todo o período em que estiveram distantes da sala de aula.

4. Como você avalia o seu interesse nas aulas com utilização de simulações?

Gráfico 4 - Resultados da 4ª questão objetiva do questionário de satisfação

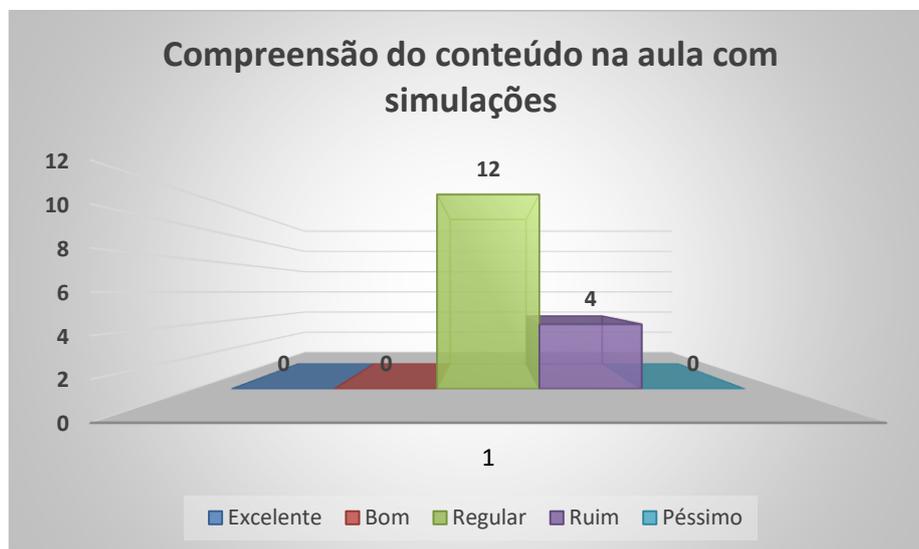


Fonte: Próprio autor (2023).

Os estudantes apresentam forte interesse por aulas que apresentam simulações, conforme o gráfico 04, possivelmente em virtude da metodologia diferenciada e por ser uma metodologia que se aproxima de ambientes comuns para a maior parte dos alunos, o ambiente virtual, que é presente na vida de muitos, quer por meio de games, redes sociais e espaços educacionais, como tem sido amplamente utilizado nos últimos meses. Esse interesse pode ser usado por docentes para tornar o ambiente de ensino mais próximo da realidade do estudante, de modo a torna a aprendizagem, mais afetiva e, por conseguinte, mais significativa, de modo a motivar os estudantes no processo de retorno às aulas no ambiente real, mas ao mesmo tempo, pode fornecer ainda mais elementos para a otimização das aulas em ambientes virtuais, ou no ensino remoto.

5. Como você avalia sua compreensão do conteúdo nesta aula?

Gráfico 5 - Resultados da 5ª questão objetiva do questionário de satisfação



Fonte: Próprio autor (2023).

Como vimos nos gráficos anteriores, as simulações computacionais são uma ótima ferramenta para o despertar do interesse dos alunos pela temática, o que conseqüentemente pode lhes proporcionar maior aprendizagem de conteúdos específicos, embora esse não seja o maior objetivo alcançado de acordo com os gráficos 03 e 05, as simulações tornaram as aulas mais atrativas.

## 2.2 Análise e discussão dos dados do Questionário de Avaliação

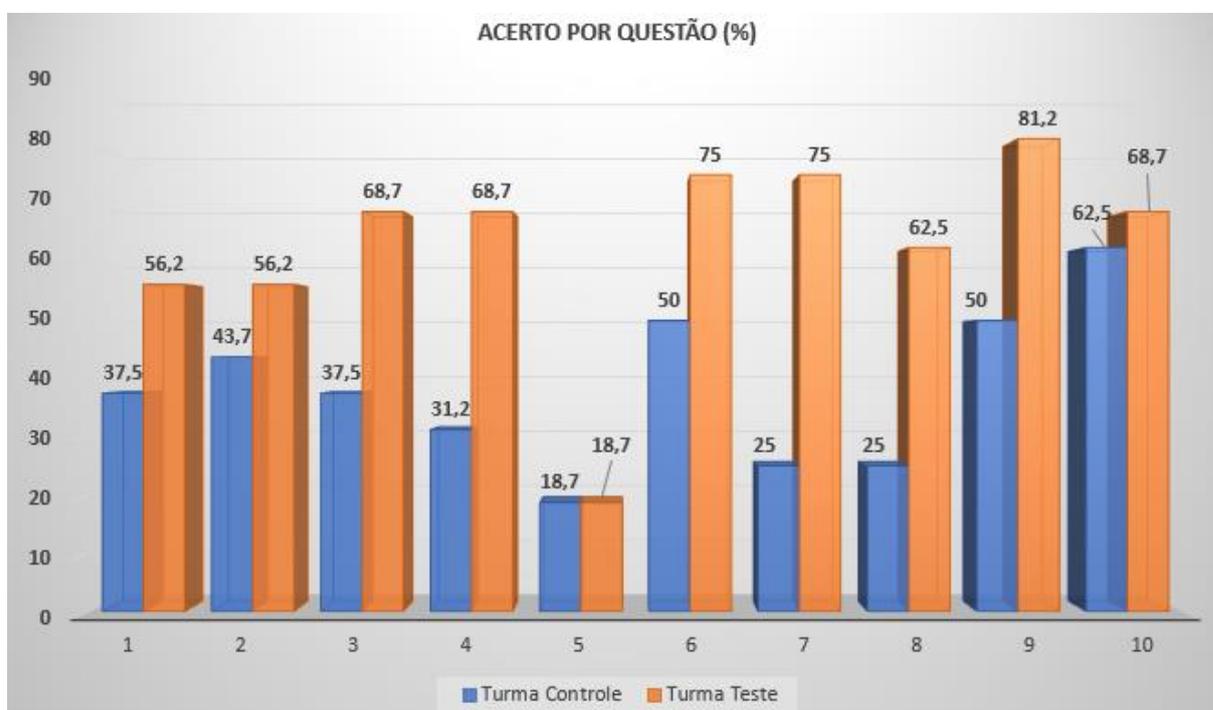
Os questionários de avaliação foram aplicados nas duas turmas teste e controle. Os dois questionários constam das mesmas questões, a aplicação ocorreu no dia 18 de março de 2021, e nesta altura do ano letivo os conteúdos já haviam sido estudados pelos alunos do

segundo ano do ensino médio, logo podemos observar que os alunos poderiam ter algum conhecimento prévio do conteúdo na sua estrutura cognitiva. Assim nosso objetivo é observar se o uso da simulação pode ajudar a melhorar a aprendizagem do aluno fazendo assim que ele tenha uma aprendizagem mais significativa.

A aplicação dos questionários de avaliação foi disponibilizada presencialmente, e os alunos da turma teste tiveram um tempo de 50 (cinquenta) minutos para responder os questionários de avaliação e o mesmo tempo para responder o de satisfação.

A turma teste foi a turma onde o Produto Educacional foi aplicado. Na turma controle não houve aplicação do produto educacional, mas os dados obtidos a partir desta turma servem como parâmetro de comparação para verificação do aprendizado. A seguir apresentaremos o percentual de acerto por questões entre a turma teste e a turma controle.

Gráfico 6 - Percentual de acertos da turma teste e controle em cada questão



Fonte: Próprio autor (2023).

Neste gráfico podemos perceber que os alunos da “turma teste” acertaram mais questões que os alunos da turma controle, somente a questão 05 se manteve com o mesmo número de acertos, este resultado se dá pelo fato de que as simulações foram eficazes para a resolução das questões teóricas e de gráficos, isto devido ao fato que as simulações não apresentam desenvolvimento de cálculos e suas características, como também a construção de gráfico dos diferentes tipos de movimento.

De modo geral, podemos perceber que houve maior aprendizagem pelos alunos da turma teste que deque da turma controle, e o uso do recurso didático para a utilização do *software* em sala de aula pode ter contribuído para esse aprendizado.

Analisaremos agora a evolução entre as duas turmas por grupo de questões, classificadas em questões teóricas (questão 01, 02, 03,06 e 10), questões de cálculo (questão 05) e questões de gráficos (04, 07, 08 e 09).

Gráfico 7 - Percentual de acertos das questões teóricas a partir dos questionários de avaliação



Fonte: Próprio autor (2023).

Neste grupo de questões o número de acertos pelos alunos da turma teste, foi 18,72 % maior que o número de acertos pelos alunos da turma controle, o que demonstra que as simulações tiveram eficácia para este tipo de questões, pois, embora as simulações tenham como foco demonstrar as trajetórias e os gráficos dos movimentos, as características teóricas desses movimentos também são evidenciadas, podendo os alunos visualizar o movimento, o que dá mais sentido ao conteúdo estudado e conseqüentemente melhora o aprendizado.

Neste grupo de questões, também podemos verificar que as questões teóricas estão relacionadas com o que foi visto na explanação das simulações, isto se deu ao fato que as simulações não apresentam desenvolvimento de cálculos, e sim os movimentos dos corpos e suas características, como também a construção dos gráficos dos diferentes tipos de movimento, o que favoreceu um bom desempenho dos alunos no acerto das questões.

Gráfico 8 - Percentual de acertos das questões de cálculo a partir dos questionários de avaliação

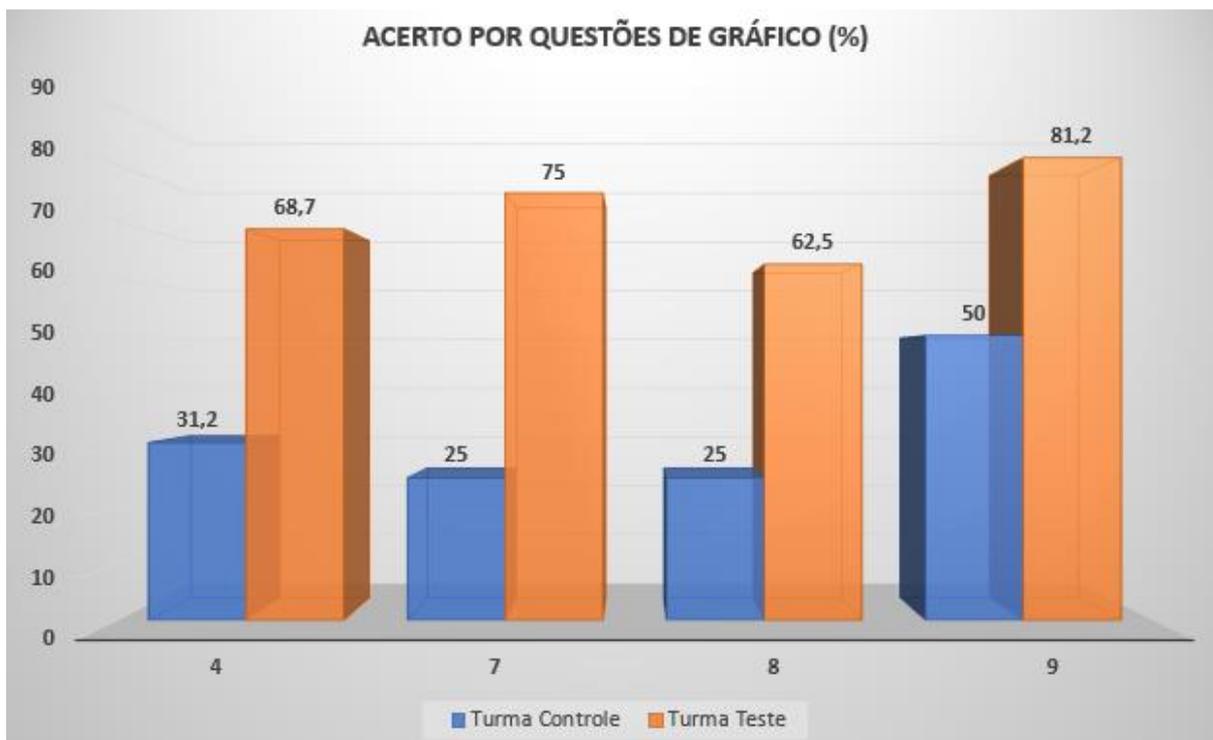


Fonte: Próprio autor (2023).

O questionário de avaliação continha apenas 01 (uma) questão de cálculo, nesta questão o número de acertos entre os alunos da turma teste e da turma controle foi igual. Esse resultado não nos surpreendeu, pois, as simulações não desenvolvem ou demonstram técnicas para o cálculo das equações de movimento, sendo assim, ambas as turmas estariam em igualdade, no que tange o ensino durante as aulas, para resolve esta questão em específico.

Esta questão de cálculo, também pode servir como parâmetro para analisarmos os aspectos pedagógicos onde as simulações podem ser melhor aproveitadas no processo ensino aprendizagem, visto que essas simulações contribuíram mais efetivamente para resoluções de questões teóricas e de gráficos, como veremos mais à frente.

Gráfico 9 - Percentual de acertos das questões de gráficos a partir dos questionários de avaliação



Fonte: Próprio autor (2023).

Este grupo de questões apresentou a maior discrepância entre o número de acertos dos alunos da turma teste em relação aos alunos da turma controle, o que já era esperado, pois, como já foi dito o foco das simulações é evidenciar a trajetória e a construção de gráficos dos movimentos.

Neste grupo de questões o número de acertos dos alunos da turma teste foi 39,05% maior que o número de acertos dos alunos da turma controle, ou seja, foi onde se obteve maior variação, o que demonstra que as simulações possuem maior eficácia no aprendizado de leitura de gráfico, desta forma percebe-se que as simulações se mostraram um bom recurso didático no processo ensino aprendizagem, principalmente no aprendizado de construção e análise de gráfico.

De modo geral, as simulações se mostraram uma ferramenta importante no auxílio ao processo de ensino aprendizagem, pois permite a visualização do movimento de corpos além da construção de gráficos desse movimento, isso pode ser verificada na análise do questionário de avaliação que mostrou que os alunos da turma onde houve a aplicação das simulações acertaram mais questões que os alunos onde não houve a aplicação dessas simulações.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme exposto, como fruto deste trabalho e exigência básica para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física, foi aqui desenvolvido um Produto Educacional. Este resultado classifica-se enquanto material didático, sendo constituído por simulações computacionais produzidas por intermédio do *software* Modellus.

Ademais, conforme mencionado na fundamentação teórica deste trabalho, a criação desse produto foi necessária uma vez que a metodologia aplicada para solução das problemáticas fomentadas prescindia a criação de uma diretriz que auxiliasse professores do ensino médio no processo ensino-aprendizagem na disciplina Física.

Para o alcance desses resultados, foram utilizadas na pesquisa duas turmas do segundo ano do ensino médio, das quais somente em uma fora aplicado o Produto Educacional (turma teste), enquanto na outra (turma controle) não foi. As ferramentas utilizadas a fim de medir o resultado do aprendizado dos alunos durante a aplicação da metodologia aqui proposta foram dois tipos de questionários, o de avaliação e o diagnóstico.

A partir da análise dos resultados desses questionários, foi possível inferir que os alunos da “turma teste” tiveram um rendimento acima daqueles alunos da outra turma, conforme pode ser verificado no tópico Análises e discussões dos dados. Nas questões teóricas, o número de questões corretas optadas pelos alunos da turma teste podem ser lidas como 18,72% maior que o número de acertos da turma controle.

O questionário de avaliação continha apenas 01 (uma) questão de cálculo, nesta questão o número de acertos entre os alunos da turma teste e da turma controle foi igual. Esse resultado não nos surpreendeu, pois, as simulações não desenvolvem ou demonstram técnicas para o cálculo das equações de movimento, sendo assim, isso não impactaria no resultado das avaliações; ambas as turmas apresentariam os mesmos resultados, já que tiveram o mesmo embasamento teórico para resolução dessa questão em específico.

Nas questões que continham gráficos o número de acertos dos alunos da turma teste foi 39,05% maior que o número de acertos dos alunos da turma controle. Aqui, percebemos a maior variação, o que demonstra que as simulações possuem mais eficácia no aprendizado de leitura de gráfico.

Além disso, os resultados do questionário diagnóstico mostraram que após os alunos terem acompanhado as simulações o seu interesse pela disciplina aumentou; os discentes passaram a achar a disciplina muito mais interessante, sem contar que a participação dos alunos nas aulas em que as simulações foram trabalhadas foi muito maior que nas aulas anteriores, quando não havia interação por meio de simulações.

Analisando os relatos dos estudantes, podemos afirmar que as simulações contribuíram imensamente no processo ensino-aprendizagem, e mostraram a real potencialidade do *software*

Modellus como um recurso didático no processo de ensino-aprendizagem no ensino de Física. Ainda que o foco das simulações tenha sido a demonstração de trajetórias e gráficos dos movimentos, as características teóricas desses movimentos também foram evidenciadas, permitindo aos alunos visualizar o movimento, o que dá mais sentido ao conteúdo estudado e consequentemente melhora o aprendizado.

Assim, a hipótese inicialmente levantada foi aqui respondida de forma positiva. Isso nos permite concluir que a utilização das tecnologias no ensino, em especial das simulações computacionais, se configura como uma ferramenta importantíssima no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. Além de contribuir para uma aprendizagem significativa, e, portanto, um ensino libertador, auxilia de forma positiva no cumprimento dos objetivos aos quais nos propomos, isto é, fomentar uma educação lúdica que englobe os diversos tipos de saberes já possuídos pelos estudantes, tornando-os sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, conforme o exposto, convém ressaltar que aqui foi comprovado a relevância das simulações computacionais como recursos didáticos complementares, que devem ser inseridos no processo de ensino a fim de ampliar as condições para uma aprendizagem mais eficiente e significativa, capaz de posicionar os estudantes como sujeitos ativos na busca pelo conhecimento e por isso contribuindo para a transformação da realidade social.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M.E.B. Incorporação da tecnologia de informação na escola: vencendo desafios, articulando saberes, tecendo a rede. *In: Moraes, M. C. Educação a Distância: fundamentos e práticas*. Campinas: Nied, 2002.

ARAÚJO, I. S; VEIT, E. A. Interatividade em recursos computacionais aplicados ao ensino aprendizagem de Física. *In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO: A Educação na Sociedade dos Meios Virtuais*, 14., 2008, Santa Maria. **Anais [...]**. Rio Grande do Sul: Unifra, 2008. p. 1-10.

ARAÚJO, I. S; VEIT, E. A; MOREIRA, M. A. Atividades de Modelagem Computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. v. 26, n. 2, p. 179-184, 2004a.

ARAÚJO, I. S; VEIT, E. A; MOREIRA, M. A. Uma Revisão da Literatura sobre Estudos Relativos a Tecnologias Computacionais no Ensino de Física. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 4, n. 3, p. 5-18, 2004b.

ARAÚJO, M.S.T.; ABIB, M.L.V.S. Atividades Experimentais no Ensino de Física: diferentes enfoques, diferentes finalidades. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 25, n. 2, p. 176-194, 2003.

ARANTES, A. R.; MIRANDA, M. S.; STUDART, N. Objetos de aprendizagem no ensino de física. **Física na Escola**, v. 11, n. 1, 2010, p. 29. Disponível em: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol11-Num1/a081.pdf>. Acesso em: mai. de 2022.

ANDRADE, M. E. de. **Simulação e modelagem computacional com o software Modellus: aplicações práticas para o ensino de física**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Trad. Eva Nick e outros. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, D.P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton, 1963.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988.

BRASIL. **Lei 13.415 de 16 de fevereiro de 2017**. Altera as Leis n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei n.º 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei n.º 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei n.º 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 2017. Disponível em: <[https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/lei/113415.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/113415.htm)>. Acesso em 05 jul. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, DF: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

COELHO, R. O. **O uso da informática no ensino de física de nível médio**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2002. Disponível em: [http://www2.pelotas.ifsul.edu.br/coelho/inf\\_ens\\_fis\\_med.pdf](http://www2.pelotas.ifsul.edu.br/coelho/inf_ens_fis_med.pdf). Acesso em: mai. de 2022.

CARRARO, F. L.; PEREIRA, R. F. O uso de simuladores virtuais do PHET como metodologia de ensino de eletrodinâmica. *In. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. Paraná, 2014. Disponível em: [http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes\\_pde/2014/2014\\_uem\\_fis\\_artigo\\_francisco\\_luiz\\_carraro.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uem_fis_artigo_francisco_luiz_carraro.pdf). Acesso em: mai. de 2022.

DISTLER, R. R. Contribuições de David Ausubel para a intervenção psicopedagógica. **Revista psicopedagógica**, v.32, n. 98, p. 191-199, 2015. Disponível em: [http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S010384862015000200009&lng=pt&nrm=iso](http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S010384862015000200009&lng=pt&nrm=iso). Acesso em: mai. de 2022.

GOMES, E. C.; FRANCO, X. L. DE S. O.; ROCHA, A. S. **Uso de simuladores para potencializar a aprendizagem no ensino da física**. Araguaína: EDUFT, 2020. Disponível em: <https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/2431>. Acesso em: mai. de 2022.

HONORATO, C. A.; DIAS, K. K. B.; DIAS, K. C. B. Aprendizagem Significativa: uma introdução à teoria. **Mediação**, v. 13, n. 1, p. 22-37, 2018. Disponível em: <https://www.revista.ueg.br/index.php/mediacao/article/view/6728/5436>. Acesso em: mai. de 2022.

KÖCHE, J. C. **Fundamentos de Metodologia Científica**: teoria da ciência e iniciação à pesquisa. 29. ed. Petrópolis: Vozes, 2011.

KOCHHANN, A.; MORAES, A. C. **Aprendizagem significativa na perspectiva de David Ausubel**. Anápolis: UEG, 2014.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. Possibilidades e Limitações das Simulações Computacionais no Ensino da Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 77-86, 2002.

MOREIRA, M.A. **A aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

MOREIRA, M. A; MASINI, E.F.S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2006.

OSTERMANN, F.; CAVALCANTI, C. J. de H. **Teorias de aprendizagem**. Porto Alegre: Ev angraf, 2010. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/tri/sead/publicacoes/documentos/livro-teorias-de-aprendizagem>. Acesso em: mai. de 2022.

REICHERT, J. T.; BARCELOS, S. R. *Software* Modellus e Modelagem Matemática: Relacionando Conceitos Matemáticos com Fenômenos da Física. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 10, n. 2, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/239878/pdf>. Acesso em: mai. de 2022.

REZENDE, F. As novas tecnologias na prática pedagógica sob a perspectiva construtivista. **Revista Ensaio**, v.2, n.1, p.70-87, 2000. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/epec/a/qpwpgZ59xcxP9VNWNmkzc4K/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: mai. de 2022.

ROSA, P. R. S. O Uso de Computadores no Ensino de Física. Parte I: Potencialidades e Uso Real. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 17, n. 2, p. 182-195, 1995.

RUBIO, E. M. Freire: consciência e libertação (a pedagogia perigosa). **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 23, n. 1, p.25-28, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0102-25551997000100003>. Acesso em: mai. de 2022.

SAUL, Ana Maria; SAUL, Alexandre. **Contribuições de Paulo Freire para a formação de educadores**: fundamentos e práticas de um paradigma contra-hegemônico. *Educar em Revista*, n. 61, p. 19-35, jul./set. Curitiba, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/er/a/TwJbgsR75ttGMwYnjJ4mc9B/?lang=pt>. Acesso em 05 jul. 2023.

SILVA, W. da. **Mapa Conceitual e Aprendizagem Significativa**. [S. l.], 2015. Disponível em: <https://youtube.com/watch?v=RoVyXgWlfk>. Acesso em: jan. de 2021.

TAVARES, R. Animações interativas e mapas conceituais: uma proposta para facilitar a aprendizagem significativa em ciências. **Revista Ciência & Cognição**, v. 13, n. 2, p. 99-18, 2008. Disponível em: <http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/222>. Acesso em: mai. de 2022.

VALENTE, José Armando. Informática na Educação no Brasil: análise e contextualização histórica. Núcleo de Informática Aplicada. Educação. *In: O Computador na Sociedade do Conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. Disponível em: [http://penta3.ufrgs.br/MEC-CicloAvan/integracao\\_midias/textos/cap1.pdf](http://penta3.ufrgs.br/MEC-CicloAvan/integracao_midias/textos/cap1.pdf). Acesso em: mai. de 2022.

VIDAL, A. S.; MIGUEL, J. R. As Tecnologias Digitais na Educação Contemporânea. **Id on Line Revista Multidisciplinar e Psicologia**, v.14, n.50, p. 366-379, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.14295/idonline.v14i50.2443>. Acesso em: jul. de 2020.

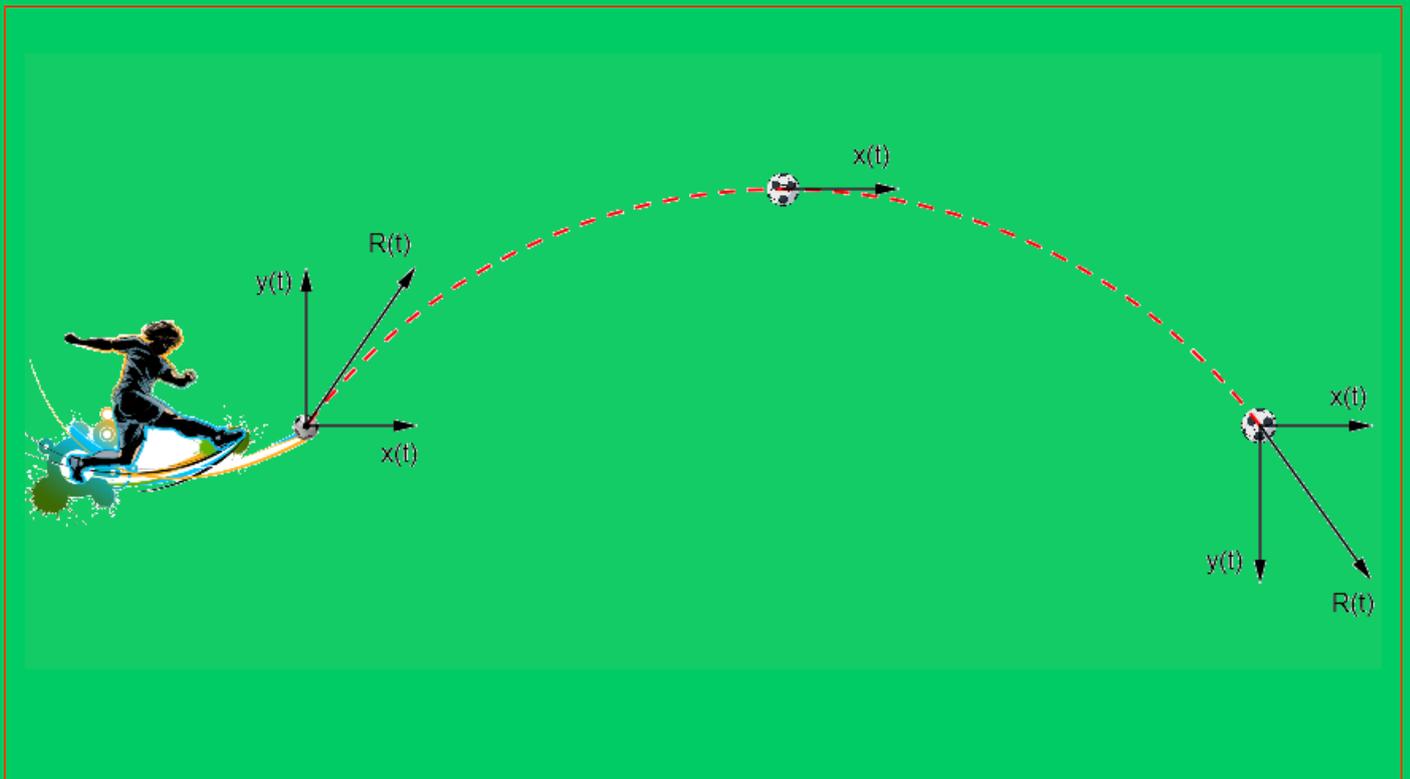
YAMAMOTO, I; BARBETA, V. B. Simulações de Experiências como Ferramenta de Demonstração Virtual em Aulas de Teoria de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 23, n. 2, p. 215-225, 2001.

## **APÊNDICE A – Produto Educacional**

# MODELLUS

## UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA O ENSINO DO LANÇAMENTO OBLÍQUO

Carlos Augusto



Polo 47  
Mestrado em Ensino de Física

Autor:

**Carlos Augusto Fonseca Dias**

Orientador:

**Prof. Dr. Eduardo Moraes Diniz**

Capa e contracapa:

**Pedro Fontes**

Figura da capa e contracapa:

**Disponível em:** <https://www.pngwing.com/pt/free-png-bepez/download>

São Luís

2022

© Carlos Augustos Fonseca Dias e Eduardo Moraes Diniz – 2022.

O material apresentado neste documento pode ser reproduzido livremente desde que citada a fonte. As imagens apresentadas são de propriedade dos respectivos autores e utilizadas para fins didáticos. Por favor, contate os autores caso constate que houve violação de seus direitos autorais. Este documento é veiculado gratuitamente, sem nenhum tipo de retorno comercial a nenhum dos autores, e visa apenas a divulgação do conhecimento científico.

**Caro Professor,**

Este produto é resultado de uma pesquisa realizada como requisito obrigatório do programa de Mestrado Profissional no Ensino de Física-MNPEF, promovido pela Sociedade Brasileira de Física-SBF.

Desse modo, o presente trabalho trata-se de um produto educacional, no qual está descrita na dissertação intitulada: “PROGRAMA *MODELLUS* COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DO LANÇAMENTO OBLÍQUO COM ATRITO DINÂMICO”, do mestrando Carlos Augusto Fonseca Dias, sob orientação do professor Dr. Eduardo Moraes Diniz, pela Universidade Federal do Maranhão – UFMA.

Este produto educacional aqui disponibilizado trata-se de um recurso didático constituído de quatro simulações desenvolvidas por intermédio do *software* *Modellus* que podem ser utilizadas por professores do primeiro ano do ensino médio como um material instrucional complementar nas intervenções didáticas de ensino de Física nos níveis do ensino da educação básica, especificamente, no estudo Cinemática Escalar e Vetorial.

Com a finalidade de melhorar e aumentar as opções do professor do ensino médio, na preparação e execução de uma aula que irá abordar algum tópico de física, este produto vem contribuir com quatro simulações desenvolvidas no *software* *Modellus* com a intenção de inovar a forma de como alguns tópicos possam ser apresentados aos alunos.

Diferentemente dos métodos tradicional quadro/giz, onde o aluno recebe os conceitos de uma maneira estática e ele deve vislumbrar esses conceitos de uma maneira dinâmica, ou seja, o aluno é que tem que abstrair e gerar mentalmente os movimentos relacionados ao tema abordado, o *software* *Modellus* facilita abordagem de vários tópicos da física por meio de gráficos e tabelas, sem deixar de lado o uso/emprego das fórmulas e animações do assunto escolhido e fazer com que o aluno abstraia sobre o assunto abordado dinamicamente.

Este produto educacional apresenta instruções passo a passo de geração das simulações, para auxiliar professores, este guia de uso do presente trabalho contém algumas sugestões e dicas de utilização das simulações computacionais criadas para trabalhar com os alunos os conteúdos sobre movimentos bidimensionais, a saber, lançamento oblíquo sem resistência do ar de uma partícula, lançamento oblíquo sem resistência do ar de cinco partículas com diferentes ângulos, lançamento oblíquo com resistência do ar de uma partícula e lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob o mesmo ângulo e velocidade inicial e coeficientes de atrito diferente.

A seguir, apresentamos as orientações básicas sobre a aquisição/instalação do *software* *Modellus*, das principais ferramentas do *software* *Modellus*, e as atividades que podem ser desenvolvidas com a ajuda das simulações computacionais desenvolvidas por intermédio do *Modellus*.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Lançamento Oblíquo com Força de Arraste Linear: uma análise qualitativa</b>	<b>9</b>
		9
		12
		13
		14
		15
<b>2</b>	<b>Software Modellus: aquisição do software</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Software Modellus: instalação do software</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Modelo Matemático do Lançamento Oblíquo</b>	<b>20</b>
<b>3.1</b>	<b>Equações matemática do lançamento oblíquo que despreza a resistência do ar</b>	<b>20</b>
<b>3.2</b>	<b>Equações matemáticas do lançamento oblíquo que considera a resistência do ar</b>	<b>23</b>
<b>3.3</b>	<b>O método das perturbações</b>	<b>26</b>
<b>3.4</b>	<b>Gráficos do lançamento oblíquo com resistência do ar</b>	<b>30</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Velocidade em função do tempo:</b> $v_x = v_x t$ $v_y = v_y t$	<b>30</b>
<b>3.4.3</b>	<b>Aceleração em função do tempo:</b> $a_x = a_x t$ $a_y = a_y t$	<b>31</b>
<b>3.4.4</b>	<b>Equação da trajetória:</b> $y = y(x)$	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Simulações Modellus do Produto Educacional</b>	<b>33</b>
		33
		34
<b>5</b>	<b>Roteiro da Criação das Simulações</b>	<b>36</b>
<b>5.1</b>	<b>Primeira simulação: lançamento oblíquo sem resistência do ar de uma partícula de 60 graus e velocidade 100 metros por segundo</b>	<b>36</b>
<b>5.2</b>	<b>Segunda simulação: lançamento oblíquo sem resistência do ar de cinco partículas sob ângulos de 15, 30, 45, 60 e 75 graus todas com a mesma velocidade inicial de 80 m/s</b>	<b>39</b>
<b>5.3</b>	<b>Terceira simulação: lançamento oblíquo com resistência do ar de uma partícula</b>	<b>42</b>
<b>5.4</b>	<b>Quarta simulação: lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob o mesmo ângulo e velocidade inicial e coeficientes de atrito de 0,0; 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4 s<sup>-1</sup></b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Planos de Atividades</b>	<b>51</b>
		51
		54
	<b>Considerações Finais</b>	<b>60</b>
	<b>Referências</b>	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>





## 1 Lançamento oblíquo com força de arraste linear: uma análise qualitativa

Consideramos o movimento de uma partícula lançada obliquamente sob ação da gravidade e de uma força de arraste linear proporcional à velocidade. Obtemos, via cálculo diferencial, informações de caráter geral sobre a trajetória da partícula como intervalos de crescimento (subida) e decréscimo (queda), ponto de máximo (altura máxima), concavidade, comportamento assintótico, alcance horizontal etc., o que nos permite traçar o perfil desta trajetória sem a utilização de tabelas numéricas e sem a necessidade de fazer aproximações.

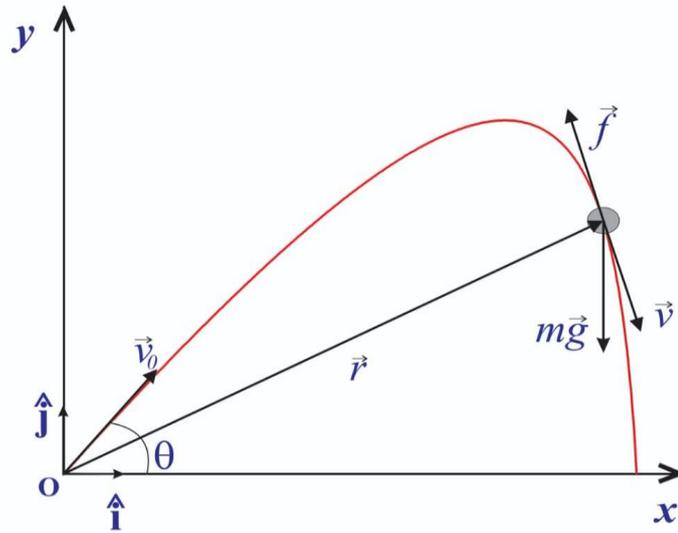
Este trabalho é uma tentativa de apresentar uma proposta didática auxiliar ou complementar de abordagem do lançamento oblíquo com atrito do ar proporcional à velocidade. Embora abordado em vários livros-textos de mecânica clássica e outros trabalhos, nossa análise tem como foco informações gerais sobre o movimento. A partir da equação da trajetória, que advém da solução das equações de movimento da partícula, investigamos ponto de máximo, intervalos de crescimento e decréscimo, concavidade, assíntota etc. isto nos permitirá esboçar a trajetória da partícula sem a necessidade de fazer tabelas numéricas ou aproximações.

Neste trabalho, veremos por exemplo que, mesmo sem haver uma Expressão exata para o alcance horizontal da partícula, podemos mostrar, com o uso da derivada de funções implícitas, que o alcance é menor quanto maior for o atrito, o que é fisicamente esperado.

### 1.1 Equações de movimento

Vamos considerar uma partícula de massa  $m$  lançada obliquamente com velocidade inicial de módulo  $v_0 > 0$  segundo um ângulo  $\theta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , em relação ao solo suposto inercial (Figura 13).

Figura 13 - Lançamento de uma partícula sujeita a força gravitacional e a força de arraste linear.



Fonte: Próprio autor (2023).

Vamos considerar que a partícula, uma vez lançada, estará sob ação da força peso

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \quad (g = \text{constante}) \quad (1)$$

e de uma força de arraste linear, que é proporcional à velocidade

$$\vec{f} = -b\vec{v} \quad (b > 0 = \text{constante}) \quad (2)$$

A equação de movimento Newtoniana desta partícula é dada por

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{F} + \vec{f}) \quad (3)$$

da Eq. (3), podemos escrever ainda

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{j} - b\vec{v} = -g - \frac{b}{m}\vec{v} \quad (4)$$

de onde  $\frac{d\vec{v}}{dt} = -g - \beta\vec{v}$  e  $\beta = \frac{b}{m}$  é o parâmetro de atrito.

As condições iniciais em questão são dadas por

$$\vec{r}(0) = \vec{0} \quad \vec{v}(0) = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} = v_0 \cos\theta\hat{i} + v_0 \sin\theta\hat{j} \quad (5)$$

Este problema pode ser reescrito em termos das componentes cartesianas do seguinte modo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g - \beta v_y \quad (7)$$

$$v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos \theta, v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin \theta \quad (8)$$

$$x(0) = y(0) = 0 \quad (9)$$

As componentes da velocidade podem ser obtidas por uma primeira integração das Eqs. (6) e (7) com as condições iniciais da Eq. (8), logo

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\beta \int_0^t dt \Rightarrow v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t} \quad (10)$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{(g + kv_y)} = - \int_0^t dt \Rightarrow v_y(t) = \left( v_0 \sin \theta + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \quad (11)$$

Na ausência de atrito do ar ( $\beta \rightarrow 0$ ), a Eq. (11) torna-se

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} v_x(t) = v_0 \cos \theta, v_x(t) = v_0 \cos \theta \quad (12)$$

Mas Eq. (11) requer algum cuidado pois  $\beta \neq 0$  se apresenta nos denominadores. No entanto, podemos proceder como segue

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} v_y(t) = v_0 \sin(\theta) + g \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta}, \quad (13)$$

Usando a regra de L' Hospital, pois temos uma indeterminação no limite, temos

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} v_y(t) = v_0 \sin(\theta) + g \frac{\lim_{\beta \rightarrow 0} (-te^{-\beta t})}{1}, v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt \quad (14)$$

Agora integrando as Eqs. (10) e (11) com as condições iniciais da Eq. (9), temos

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t} dt \Rightarrow x(t) = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \quad (15)$$

$$\int_0^y dy = \left( v_0 \text{sen}(\theta) + \frac{g}{\beta} \right) \int_0^t e^{-\beta t} dt - \frac{g}{\beta} \int_0^t dt$$

$$y(t) = \left( v_0 \text{sen}(\theta) + \frac{g}{\beta} \right) \left( \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right) - \frac{g}{\beta} t \quad (16)$$

Calculando o limite com  $\beta \rightarrow 0$  mediante o uso da regra de L'Hospital temos para a componente  $x(t)$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} x(t) = v_0 \cos(\theta) \left( \frac{\lim_{\beta \rightarrow 0} 1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right) = v_0 \text{sen}(\theta) \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{te^{-\beta t}}{1}$$

$$x(t) = v_0 \text{sen}(\theta) t \quad (17)$$

e para a componente  $y(t)$ , temos

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} y(t) (v_0 \text{sen} \theta) \left( \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right) - g \left( \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{-1 + e^{-\beta t} + t\beta}{\beta^2} \right) =$$

$$(v_0 \text{sen} \theta) t - g \left( \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{-te^{-\beta t} + t}{2\beta} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = (v_0 \text{sen} \theta) t - \frac{g}{2} t^2 \quad (18)$$

Note que as Eqs. (12), (14), (17) e (18), refere-se ao caso sem resistência do ar.

## 1.2 Equação da trajetória

Para encontrar a equação da trajetória da partícula isolamos o tempo  $t$  na Eq. (15), temos

$$t = \frac{-1}{\beta} \ln \left( 1 - \frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} \right)$$

e substituindo na Eq. (16) e fazendo as manipulações algébricas, obtemos

$$y(x) = \left( tg\theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 - \frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} \right) \quad (19)$$

Podemos esboçar o perfil desta trajetória sem fazer tabelas numéricas nem aproximações. Inicialmente notemos que, pela Eq. (10),

$$\dot{x}(t) = v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t} > 0$$

Logo  $x(t)$  é estritamente crescente, além disso,

$$x(0) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta}.$$

Assim, os valores da coordenada  $x$  cresce no intervalo  $0 \leq x < \xi \equiv \frac{(v_0 \cos \theta)}{\beta}$  é essencial para que o logaritmo em  $y(x)$  dada pela Eq. (19) faça sentido. Além do mais, tomando o limite de  $y(x)$  com  $x \rightarrow \xi^-$  na Eq. (19) temos,

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} y(x) = -\infty \quad (20)$$

Logo a trajetória da partícula tende a uma assíntota vertical dada por

$$x = \xi = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta} \quad (21)$$

Caso não haja colisão da partícula com o solo no nível  $y = 0$ . Notemos também que no caso sem atrito temos  $0 \leq x < +\infty$  e não haveria tal assíntota.

### 1.3 Intervalos de subida e de queda

Derivando a equação da trajetória Eq. (19) em relação a  $x$  obtemos

$$y'(x) = \left( tg \theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g}{\beta} \frac{1}{v_0 \cos \theta - \beta x} \quad (22)$$

Os intervalos de subida e de queda da partícula correspondem aos intervalos de crescimento e decrescimento da função  $y(x)$ , os quais correspondem respectivamente as condições  $y'(x) > 0$  e  $y'(x) < 0$ .

Considerando a Eq. (20), a condição  $y'(x) > 0$  implica em

$$\left( tg \theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g}{\beta} \frac{1}{v_0 \cos \theta - \beta x} > 0 \Rightarrow \frac{\beta v_0 \sin \theta}{v_0 \cos \theta} > \frac{g}{v_0 \cos \theta - \beta x}$$

E, como  $v_0 \cos \theta - \beta x > 0$  (pois pela Eq.(13),  $v_0 \cos \theta - \beta x = (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t} > 0$ , então,  $(\beta v_0 \sin \theta + g)(v_0 \cos \theta - \beta x) > g v_0 \cos \theta$  de modo que

$$x < \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta}$$

Assim a função  $y(x)$  que descreve a trajetória da partícula é crescente (partícula subindo) para

$$0 \leq x < \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta}$$

De forma análoga obtemos que  $y(x)$  é decrescente (partícula caindo) para

$$\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta} < x < \xi = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta}$$

Também não é difícil obter o ponto

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta}$$

Anula a derivada  $y'(x)$ , ou seja,  $y'(x_c) = 0$ . Logo  $x_c$  corresponde ao ponto crítico de máximo global da trajetória da partícula, visto que ela sobe até este ponto e depois segue caindo. A concavidade da trajetória pode ser determinada pela segunda derivada de  $y(x)$  da Eq. (22) obtemos

$$y''(x) = \frac{-g}{(v_0 \cos \theta - \beta x)^2} < 0,$$

que, além de reconfirmar a maximalidade do ponto do ponto crítico  $x_c$ , nos diz que a trajetória é côncava para baixo, conforme fisicamente esperado.

#### 1.4 Perfil da trajetória

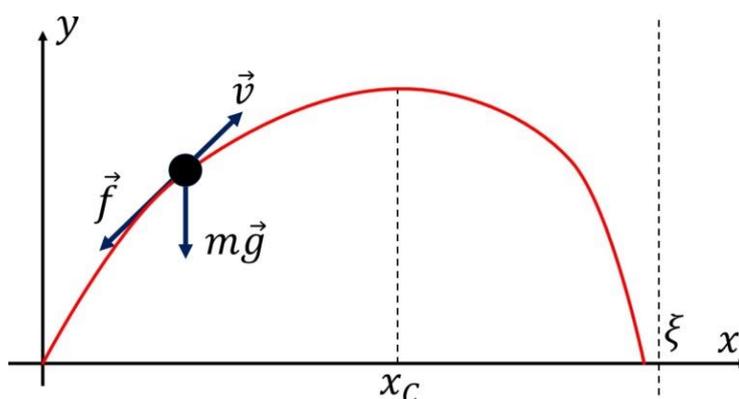
Podemos esboçar o perfil da trajetória  $y(x)$  da partícula com base nas informações anteriormente obtidas temos que  $y(x)$

- ✓ É crescente para  $0 \leq x < x_c$ ;
- ✓ Tem um máximo para  $x = x_c$ ;

- ✓ É decrescente para  $x_C < x < \xi$ ;
- ✓ Possui assíntota vertical  $x = \xi$ ;
- ✓ É sempre côncava para baixo.

A trajetória da partícula tem então perfil esquematizado na Figura 15.

Figura 14 - lançamento de uma partícula sujeita a uma força gravitacional e força de arraste linear.



Fonte: Próprio autor (2023).

### 1.5 Alcance da partícula

Neste contexto, podemos mostrar que existe um único  $A \in (x_C; \xi)$ , chamado alcance horizontal, tal que  $y(A) = 0$ . De fato, temos que:  $y(x)$  cresce no intervalo  $0 \leq x < x_C$  de modo que  $0 \leq y(x) < y(x_C)$  e então  $y(x_C) > 0$ . Além disso  $y(x)$  decresce para  $x_C < x < \xi$  de modo que, tendo em vista a Eq. (20), há valores de  $x$  neste intervalo tal que  $y(x) < 0$ . Como  $y(x)$  é contínua (e derivável) em  $(0; \xi)$  então, pelo teorema do valor intermediário, existe um  $A \in (x_C; \xi)$  tal que  $y(A) = 0$ . A unicidade deste  $A$  vem do fato de que toda função estritamente decrescente num intervalo aberto é injetiva neste intervalo. Assim a partícula atinge o solo (nível  $y = 0$ ) no ponto  $x = A$  em  $(x_C; \xi)$ . Entretanto não há uma expressão geral fechada para o alcance horizontal  $A$ . Ela deve satisfazer a seguinte condição  $y(A) = 0$  da Eq. (19) temos

$$\left( tg\theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos\theta} \right) A + \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 - \frac{\beta A}{v_0 \cos\theta} \right) = 0 \quad (23)$$

Mesmo assim, um fato físico que pode ser deduzido daqui, de forma geral, é que quanto maior o parâmetro de atrito  $\beta$  menor será o alcance  $A$ . Ou seja, a função implícita  $A = A(\beta)$  dada pela Eq. (23) é decrescente, isto é, satisfaz a condição  $\frac{dA}{d\beta} < 0$ .

Para mostrar isso recorreremos a regra de derivação de funções implícitas. Aplicando esta regra a Eq. (23), e fazendo as manipulações algébricas, obtemos

$$\frac{Ag}{\beta^2} \left[ \frac{1}{v_0 \cos \theta} + \frac{1}{v_0 \cos \theta - \beta A} \right] + \frac{2g}{\beta^3} \ln \left( 1 - \frac{\beta A}{v_0 \cos \theta} \right) \quad (24)$$

Resta mostrar que expressão entre chaves no lado esquerdo e a expressão do lado direito desta equação possuem sinais contrários. Podemos notar sem dificuldades que a expressão entre chaves é menor do que zero. De fato, ela corresponde à expressão de  $y'(A)$  dada pela Eq. (22): como  $A > x_c$  temos  $y'(A) < 0$  visto que  $y(x) < 0$  é decrescente para  $x > x_c$ .

Para mostrar que o lado direito da Eq. (24) é positivo vamos recorreremos a seguinte desigualdade logarítmica

$$\ln(1 - w) \geq -\frac{12w - 12w^2 + w^3}{6(1 - w)(2 - w)}.$$

Válida para  $0 \leq w < 1$ . Pondo  $w = \frac{\beta A}{v_0 \cos \theta}$  nesta desigualdade e multiplicando o resultado por  $\frac{2g}{\beta^3}$ , temos

$$\frac{2g}{\beta^3} \ln \left( 1 - \frac{\beta A}{v_0 \cos \theta} \right) \geq -\frac{Ag}{\beta^2}$$

Adicionando a esta desigualdade a Expressão

$$\frac{Ag}{\beta^2} \left[ \frac{1}{v_0 \cos \theta} + \frac{1}{v_0 \cos \theta - \beta A} \right],$$

obtemos

$$\frac{Ag}{\beta^2} \left[ \frac{1}{v_0 \cos \theta} + \frac{1}{v_0 \cos \theta - \beta A} \right] + \frac{2g}{\beta^3} \ln \left( 1 - \frac{\beta A}{v_0 \cos \theta} \right) \geq$$

$$\frac{Ag}{\beta^2}$$

A partir da solução da equação de movimento de uma partícula lançada obliquamente considerando atrito do ar proporcional a velocidade mostramos como esboçar a trajetória da partícula sem recorrer a tabelas ou valores numéricos ou aproximações, não obstante a notável importância de se fazer aproximações em física.

Com este trabalho procuramos apresentar uma proposta didática auxiliar de estudo sobre lançamento oblíquo com resistência do ar ilustrando como conceitos e teoremas matemáticos podem ser usados para deduzir fatos gerais relevantes de um problema físico.

## **2 Software Modellus: Aquisição do Software**

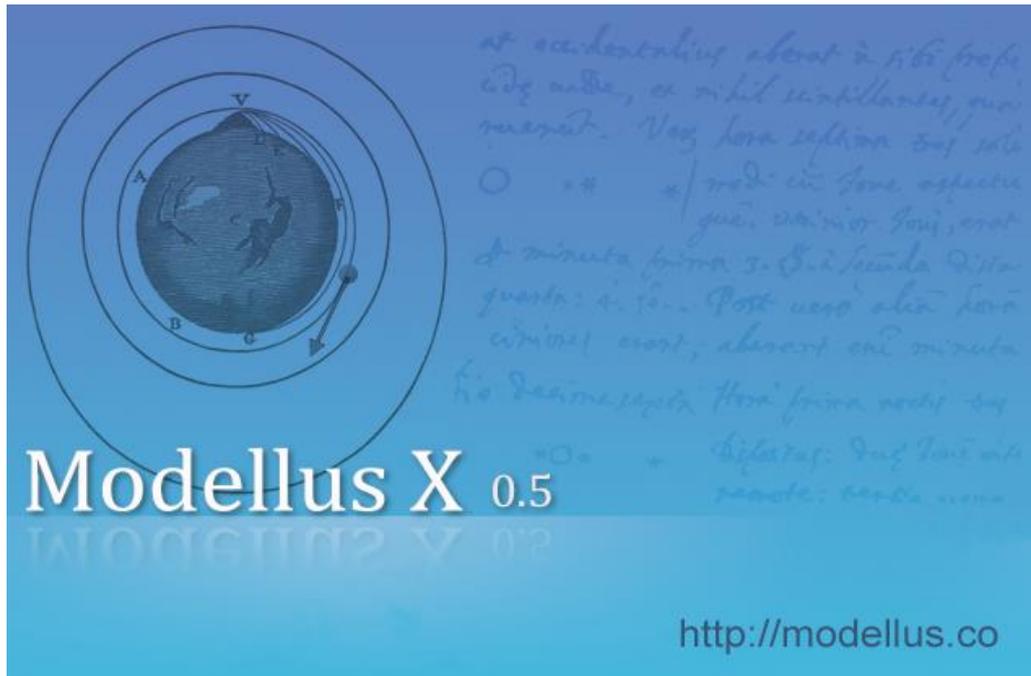
O *software* Modellus é um ambiente educacional desenvolvido por um grupo liderado pelo professor Victor Duarte Teodoro da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova Lisboa. No site do Modellus você irá baixar a versão compatível com a configuração de seu computador. O *software* Modellus é um *software* de livre acesso, criado para educadores das áreas específicas, como física, química, matemática e ciências, que desejam uma ferramenta a mais para incrementar suas aulas com o uso de tecnologia, mas para que o computador execute o *software* é necessário que tenha a versão do programa Java<sup>1</sup> instalado. Na página do Modellus, também é possível encontrar outras informações sobre o programa, além de alguns exemplos de modelos prontos para aplicações. A versão utilizada no presente trabalho é Modellus X 0.4.05<sup>2</sup>, que é a versão mais atual e veremos a seguir sua interface na Figura 16.

---

1 Disponível em: [www.java.com/ptBR/download/](http://www.java.com/ptBR/download/).

2 Disponível em: <https://modellus-x.software.informer.com/0.4/>.

Figura 15 - Tela de apresentação do Modellus X 0.4.05.



Fonte: Próprio autor (2023).

## 1.2 Software Modellus: instalação do software

A primeira coisa a ser feita para se ter o Modellus X 0.4.05 no seu computador é instalar uma versão do *Java* que seja 7 ou superior. Abaixo você verá onde fazer gratuitamente o download do *Java*.

Figura 16 - Tela de acesso ao software e download



Fonte: [http://www.java.com/pt\\_BR/download/](http://www.java.com/pt_BR/download/)

Uma vez instalado o *Java* em seu computador agora é a vez de instalar o Modellus X que você poderá encontrar no link a seguir. Ao lado podemos ver parte da página oficial onde

podemos baixar o *software* e indicado com uma seta vermelha a variação do Modulus *X* que utilizaremos. Podemos também ver as variações disponíveis para os sistemas operacionais Linux e Mac OS. Clique no ícone “baixar” para fazer o download do instalador. Ao clicar no instalador clique em “Executar” e depois em “Avançar” até concluir a instalação.

### 3 Modelo matemático do lançamento oblíquo

O modelo matemático de lançamento oblíquo aplicado a simulação usada nesse trabalho possui duas situações distintas:

- (iii) As equações do movimento desprezando a resistência do ar.
- (iv) As equações do movimento levando em conta a resistência do ar.

#### 3.1 Equações do lançamento oblíquo sem resistência do ar

Analisando o movimento de uma partícula, após o lançamento de uma posição inicial  $y_0=0$  e com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$  a qual faz um ângulo  $\theta$  (em graus) com relação à horizontal, sob a influência somente da força gravitacional  $m\vec{g}$ , através da segunda Lei de Newton, obtém-se a seguinte equação de movimento:  $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \cdot \vec{g}$ ,  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}_0$ , que em termos das componentes cartesianas, tornam-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad (25)$$

$$x_0(0) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad (27)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad (28)$$

$$y_0(0) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = v_{0y} = v_0 \sin\theta, \quad (30)$$

Para o eixo x tem-se um movimento uniforme, logo a velocidade nesse eixo é constante e seu valor é  $v_x$ , e a equação diferencial que representa a variação do espaço em relação ao tempo é:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (31)$$

Agora integrando a Eq. (31) em ambos os lados da igualdade e impondo as condições iniciais da Eq. (26), obtemos:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_x \cdot dt).$$

Sendo  $v_x$  uma constante, pode-se retirá-la da integral, obtendo:

$$x(t) = v_x t. \quad (32)$$

Substituindo a Eq. (27) na Eq. (32), temos:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t. \quad (33)$$

Para o eixo  $y$  tem-se um movimento variado, cuja aceleração do campo gravitacional é  $(\vec{g})$ , assim a velocidade  $v_y$  nesse eixo será dada pela equação diferencial:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g. \quad (34)$$

Integrando a Eq. (34) em ambos os lados e impondo as condições iniciais da Eq. (28), temos:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t (-g \cdot dt) \Rightarrow v_y(t) = v_{0y} - gt. \quad (35)$$

Substituindo a Eq. (28) na Eq. (33), temos:

$$v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt \quad (36)$$

Substituindo a Eq. (35) na equação  $dy = v_y dt$  e integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_{0y} - gt) dt.$$

Por fim, a equação da posição para o eixo  $y$  fica:

$$y(t) = v_{0y} t - g \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (37)$$

Substituindo a Eq. (30) na Eq. (37), obtemos:

$$y(t) = v_0 \text{sen}(\theta)t - g \frac{t^2}{2} \quad (38)$$

O tempo de subida ( $t_s$ ), que é obtido impondo-se à componente  $v_y(t) = 0$  no ponto mais alta da trajetória, da Eq. (38), temos:

$$0 = (v_0 \text{sen}\theta) - g \cdot t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\theta}{g}. \quad (39)$$

Para encontrar a altura máxima ( $h_{max}$ ), substituímos o tempo de subida ( $t_s$ ) na Eq. (38), e fazendo algumas manipulações algébricas obtemos:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2(\theta)}{2g}. \quad (40)$$

Para encontrar o tempo de voo ( $t_v$ ), ou seja, o tempo que a partícula leva para atingir o solo é obtido substituindo  $y(t) = 0$  na Eq. (38), obtendo assim uma equação do 2º grau em  $t$ , em que uma das raízes é  $t = 0$ , correspondendo ao ponto de lançamento, e a outra é:

$$0 = v_0 \text{sen}(\theta)t_v - g \frac{t_v^2}{2} \Rightarrow t_v = \frac{2v_0 \text{sen}(\theta)}{g}. \quad (41)$$

Comparando a Eq. (39) com a Eq. (41), o tempo de voo é o dobro do tempo de subida. O alcance horizontal  $R$  da partícula é a distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar a altura inicial. Para determinar o alcance  $R$ , substituímos a Eq. (41) na Eq. (38) e fazendo as manipulações algébricas obtemos:

$$x(t = t_v) = R \Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \text{sen}(2\theta)}{g}. \quad (42)$$

Na Eq. (42), o alcance ( $R$ ) é máximo quando  $\text{sen}(2\theta) = 1$ , o que corresponde a  $\theta = 45^\circ$ . Substituindo  $\text{sen}(2\theta) = 1$  na Eq. (42), obtemos:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (43)$$

Para obter a equação do caminho percorrido pela partícula (ou seja, da trajetória) isolamos o tempo  $t$  na Eq. (33) e substituímos o resultado na Eq. (38), após fazer algumas manipulações algébricas temos:

$$y(x) = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos(\theta))^2}. \quad (44)$$

### 3.2 Equações do lançamento oblíquo com resistência do ar

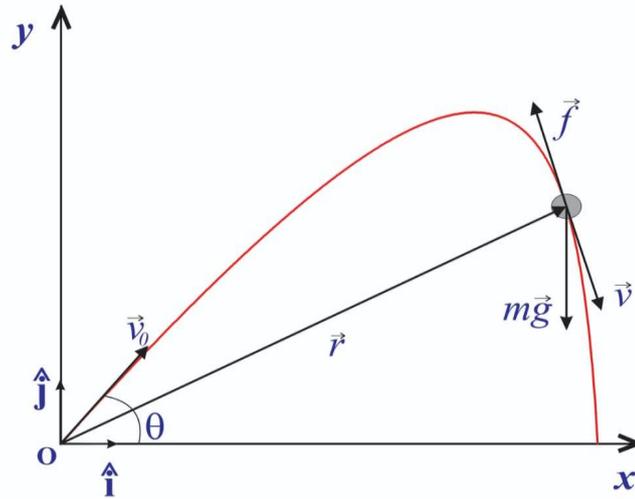
Vamos considerar o problema de uma partícula de massa  $m$  lançada obliquamente com velocidade inicial de módulo  $v_0 > 0$  segundo um ângulo  $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ , em relação ao solo suposto inercial.

A resistência do ar em geral é uma força complexa sendo esta uma força complicada de modelar, no presente trabalho usou uma modelagem simples, essa força funciona bem para objetos com alta simetria, como uma bola, uma esfera. De acordo com a figura 18, o objeto vai estar sujeito a duas forças, a força gravitacional ( $m\vec{g}$ ) e a força de arrasto linear ( $-b\vec{v}$ ). A força de resistência do ar se opõe ao vetor velocidade  $\vec{v}$  e aumenta com o módulo da velocidade,

$$\vec{f} = -bv\hat{v} = -b\vec{v}, \quad (45)$$

onde,  $b > 0$  é uma constante de proporcionalidade e tem a ver com a viscosidade do ar e a dimensão linear do objeto, nesse caso, o sinal negativo indica que a força de arrasto é sempre contrária ao movimento. Considerando que a partícula seja lançada da posição inicial  $y_0 = 0$  com relação a horizontal, Figura 18, através da segunda Lei de Newton, obtêm-se as seguintes equações diferenciais do movimento:

Figura 18 - Lançamento de uma partícula sujeita a força gravitacional e a força de arrasto linear.



Fonte: Próprio autor (2023).

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{F} + \vec{f}) \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \cdot \vec{g} - b \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (46)$$

onde  $k = \frac{b}{m}$ . As condições iniciais em questão são dadas por:  $\vec{r}(t=0) = 0$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$ ,  $\vec{v}(t=0) = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ . Que, em termos das componentes cartesianas, tornam-se:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad (47)$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad (48)$$

$$v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad (49)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g - k \frac{dy}{dt} = -g - kv_y, \quad (50)$$

$$v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin \theta. \quad (51)$$

A componente da velocidade horizontal é obtida por uma integração da Eq. (47) e usando as condições iniciais da Eq. (49) dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = -kv_x &\Rightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -k \int_0^t dt \Rightarrow v_x(t) = v_{0x} \cdot e^{-kt} \\ &\Rightarrow v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-kt}. \end{aligned} \quad (52)$$

A componente da velocidade vertical é obtida integrando a Eq. (50) e usando as condições iniciais da Eq. (51), dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y &\Rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{(g + kv_y)} = -\int_0^t dt \Rightarrow v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ &\Rightarrow v_y(t) = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}.\end{aligned}\quad (53)$$

A componente da posição horizontal é obtida integrando a Eq. (52) e usando as condições iniciais da Eq. (48), dadas por:

$$\begin{aligned}v_x(t) = (v_0 \text{cos}\theta) e^{-kt} &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (v_0 \text{cos}\theta) e^{-kt} \\ &\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (v_0 \text{cos}\theta) e^{-kt} dt \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{v_0 \text{cos}\theta}{k} (1 - e^{-kt}).\end{aligned}\quad (54)$$

A componente da posição vertical é obtida integrando a Eq. (53) e usando as condições iniciais da Eq. (48), dadas por:

$$\begin{aligned}v_y(t) = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ &\Rightarrow \int_0^y dy = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) \int_0^t e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int_0^t dt \\ &\Rightarrow y(t) = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) \left(\frac{1 - e^{-kt}}{k}\right) - \frac{g}{k} t.\end{aligned}\quad (55)$$

Derivando a Eq. (52), obtemos a componente da aceleração na direção  $x$ , dada por:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \Rightarrow a_x(t) = -(v_0 \text{cos}\theta) k e^{-kt}.\quad (56)$$

Derivando a Eq. (53), obtemos a componente da aceleração na direção  $y$ , dada por:

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \Rightarrow a_y(t) = -\left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k}\right) k e^{-kt}.\quad (57)$$

Isolando o tempo  $t$  na Eq. (54), obtemos:  $t = \frac{-1}{k} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0 \text{cos}\theta}\right)$  e substituindo na Eq. (55) e fazendo a manipulação algébricas, obtemos a equação da trajetória:

$$y(x) = \left( \tan\theta + \frac{g}{kv_0 \cos\theta} \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left( 1 - \frac{kx}{v_0 \cos\theta} \right). \quad (58)$$

Chamando as  $U = v_{0x} = v_0 \cos\theta$  e  $V = v_{0y} = v_0 \sin\theta$  e substituindo  $U$  na Eq. (54) e  $V$  na Eq. (55), temos:

$$x(t) = \frac{U}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (59)$$

$$y(t) = \frac{-1}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kt}). \quad (60)$$

Para obtermos o alcance, que chamaremos de  $R'$ , fazemos  $y(t) = 0$  e assim teremos o tempo necessário ( $T$ ) para a partícula retornar ao solo. Assim da Eq. (60),  $y(t = T) = 0 = \frac{-1}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kT})$ , obtemos:

$$T = \frac{kV + g}{gk} (1 - e^{-kT}). \quad (61)$$

### 3.3 O método das perturbações

Para utilizar o método das perturbações, devemos encontrar um parâmetro de expansão ou constante de acoplamento, que normalmente é muito pequena. Neste problema, este parâmetro é a constante de retardamento  $k$ , para valores pequenos. Desta forma, podemos expandir em série de Taylor o termo que contém a exponencial  $e^{-kT}$  da Eq. (61), isto é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (62)$$

Aplicando ao nosso caso temos:

$$e^{-kT} = 1 - kT + \frac{k^2 T^2}{2} - \frac{k^3 T^3}{6} + \frac{k^4 T^4}{24} + \dots \quad (63)$$

Considerando que  $k < 1$ , ou que  $k \approx 10^{-2}$ , então  $k^2 \approx 10^{-4}$ ,  $k^3 \approx 10^{-6}$  e  $k^4 \approx 10^{-8}$ . Desprezando os termos a partir da ordem  $k^4$ . Substituindo a Eq. (63) na Eq. (61), para o tempo  $T$  e fazendo os cálculos algébricos, terá a forma:

$$T = \frac{2V}{kV + g} + \frac{k}{3}T^2. \quad (64)$$

O primeiro termo da Eq. (64), após a igualdade, pode ser manipulado como:

$$T = \frac{2V}{g} \left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} + \frac{k}{3}T^2. \quad (65)$$

O termo,

$$\left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1}, \quad (66)$$

pode ser expandido em séries de Taylor (ou expansão binomial), da seguinte forma:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Expandindo a Eq. (66), temos:

$$\left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} = 1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2V^2}{g^2} - \frac{k^3V^3}{g^3} + \dots \quad (67)$$

Substituindo a Eq. (67) na Eq. (65), temos:

$$T = \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2V^2}{g^2} - \frac{k^3V^3}{g^3} + \dots\right) + \frac{k}{3}T^2. \quad (68)$$

Desprezando os termos de ordem de  $k^2$  e superiores, resultando em:

$$T \cong \frac{2V}{g} + \left[\frac{T^2}{3} - \frac{2V^2}{g^2}\right]k. \quad (69)$$

A Eq. (69) representa o tempo de voo da partícula, calculando o limite quando  $k \rightarrow 0$ , temos:  $\lim_{k \rightarrow 0} T = T_0 = \frac{2V}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ , Eq. (41), o resultado reproduz o caso sem resistência do ar, o que mostra que as aproximações estão corretas, nos levando para uma solução do caso do movimento oblíquo com resistência do ar. Substituindo a Eq. (41) no lado direito da Eq. (69), teremos:

$$T \cong \frac{2V}{g} \left[ 1 - \frac{kV}{3g} \right]. \quad (70)$$

O tempo de subida ( $T_s$ , para a partícula atingir a altura máxima é quando a componente vertical da velocidade se anula, ou seja,  $v_y(t) = 0$  usando a Eq. (53), temos:  $0 = \left( v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{k} \right) e^{-kT_s} - \frac{g}{k}$  e chamando  $V = v_{0y} = v_0 \text{sen}\theta$ , a Eq. (53), torna-se:

$$T_s = \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right). \quad (71)$$

Desta forma podemos expandir em série de Taylor o termo  $\left( 1 + \frac{kV}{g} \right)$  que contém a Eq. (71), isto é:

$$\ln(1+x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (72)$$

para  $|x| < 1$ . Fazendo a expansão na Eq. (71), temos:

$$\ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right) = \frac{kV}{g} - \frac{1}{2} \left( \frac{kV}{g} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{kV}{g} \right)^3 + \dots \quad (73)$$

Substituindo a Eq. (73) na Eq. (71), temos:

$$T_s = \frac{1}{k} \left( \frac{kV}{g} - \frac{1}{2} \frac{k^2 V^2}{g^2} - \frac{1}{3} \frac{k^3 V^3}{g^3} + \dots \right).$$

Desprezando os termos de ordem  $k^2$  e superiores, temos:

$$T_s \cong \frac{V}{g} \left[ 1 - \frac{kV}{2g} \right]. \quad (74)$$

Calculando o  $\lim_{k \rightarrow 0} T_s = \frac{V}{g} = \frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}$ , que reproduz o tempo de subida sem resistência, comprovando que a solução está correta.

Para o cálculo da altura máxima), substituímos a Eq. (74) na Eq. (60) e o termo  $e^{-kT_s} = \frac{g}{(kV+g)}$  tirado da Eq. (53), quando fazemos  $v_y(t) = 0$  substituindo na Eq. (60), temos:

$$y(t = T_s) = H_{max} = \frac{-gT_s}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kT_s})$$

$$\Rightarrow y(t = T_s) = H_{max} = \frac{-g}{k^2} \ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right) + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kT_s}). \quad (75)$$

Expandindo o termo  $\ln \left( 1 + \frac{kV}{g} \right)$  da Eq. (75) temos:

$$H_{max} = \frac{-g}{k^2} \left( \frac{kV}{g} - \frac{1}{2} \frac{k^2 V^2}{g^2} - \frac{1}{3} \frac{k^3 V^3}{g^3} + \dots \right) + \frac{kV + g}{k^2} \left( 1 - \frac{g}{(kV + g)} \right).$$

Desprezando os termos de ordem  $k^2$  e superiores, temos:

$$H_{max} \cong \frac{V^2}{2g} \left[ 1 - \frac{2kV}{3g} \right]. \quad (76)$$

Calculando o  $\lim_{k \rightarrow 0} H_{max} = \frac{V^2}{2g}$ , que reproduz a altura máxima do caso sem resistência do ar, o que comprova que a solução está correta.

Para calcular o alcance horizontal ( $R'$ ), fazemos a mesma aproximação usando a Eq. (63) e substituindo na Eq. (59), resultando em:

$$x(t) = \frac{U}{k} \cdot (1 - e^{-kt}) \Rightarrow x(t = T) = \frac{U}{k} \cdot (1 - e^{-kT}), \quad (77)$$

$$x(t = T) = R' = \frac{U}{k} \left( 1 - 1 + kT - \frac{k^2 T^2}{2} - \frac{k^3 T^3}{6} + \dots \right). \quad (78)$$

E substituindo a Eq. (70) na Eq. (77), e desprezando os termos de ordem  $k^2$  e superiores têm:

$$R' \cong \frac{2UV}{g} \left( 1 - \frac{4kV}{3g} \right). \quad (79)$$

Fazendo  $\lim_{k \rightarrow 0} R' = \frac{2UV}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g} = R$ , que é alcance sem resistência do ar, o que indica que Eq. (79) está correta. O alcance da Eq. (79) fica:

$$R' \cong R \left( 1 - \frac{4kV}{3g} \right). \quad (80)$$

Na Eq. (67) a série converge para  $\frac{kV}{g} < 1$  ou  $k < \frac{g}{V}$  para a validade do método usando no presente trabalho.

O tempo de voo ( $T_v$ ) da partícula é a soma do tempo de subida ( $T_s$ ) e o tempo de descida ( $T_d$ ), logo:

$$T_v \cong T_s + T_d. \quad (81)$$

Substituindo a Eq. (70) e Eq. (71) na Eq. (81), obtemos o tempo de descida, dado por:

$$T_d \cong \frac{V}{g} \left[ 1 - \frac{kV}{6g} \right]. \quad (82)$$

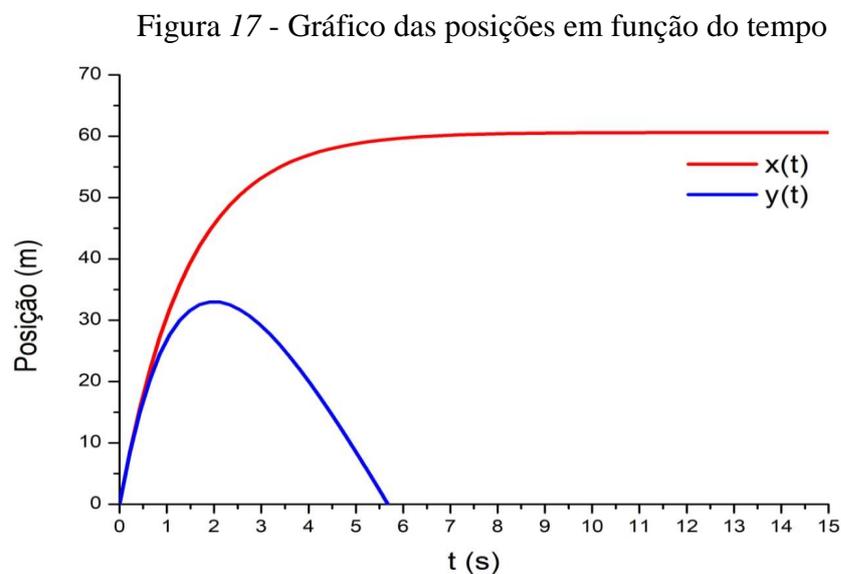
Comparando a Eq. (74) com a Eq. (82), constatamos que o tempo de subida é menor que o tempo de descida, logo:

$$T_s < T_d. \quad (83)$$

### 3.4 Gráficos do lançamento oblíquo com resistência do ar

#### 3.4.1 Posição em função do tempo: $x = x(t)$ e $y = y(t)$

As eq. (54) e (55) representam funções exponenciais em função do tempo. O gráfico do comportamento das posições em função do tempo é uma curva. A Figura 19, ilustra o comportamento da posição para duas situações específicas:  $x(t)$  e  $y(t)$ .

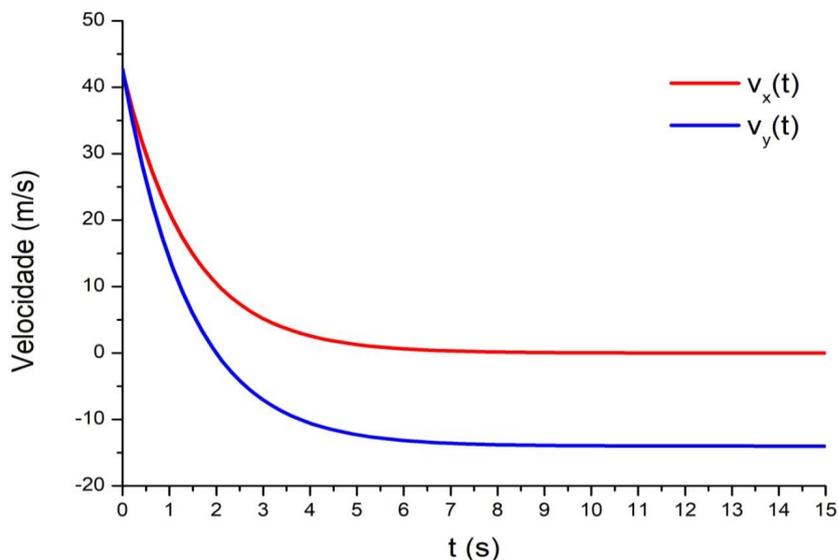


Fonte: Próprio autor (2023).

#### 3.4.2 Velocidade em função do tempo: $v_x = v_x(t)$ e $v_y = v_y(t)$

As Eqs. (52) e (53) representam funções exponenciais em função do tempo. O gráfico das componentes horizontal e vertical das velocidades é representado por curvas, como ilustra a Figura 20.

Figura 18 - Gráfico das velocidades em função do tempo.

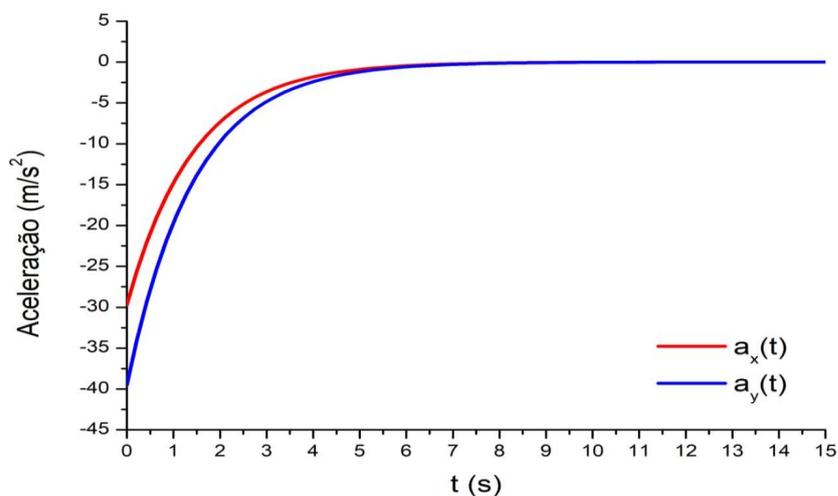


Fonte: Próprio autor (2023).

### 3.4.3 Aceleração em função do tempo: $a_x = a_x(t)$ e $a_y = a_y(t)$ .

As Eqs. (56) e (57) representam funções exponenciais em função do tempo. O gráfico das componentes horizontal e vertical das acelerações é representado por curvas, como ilustra na Figura 21.

Figura 19 - Gráfico das acelerações em função do tempo.

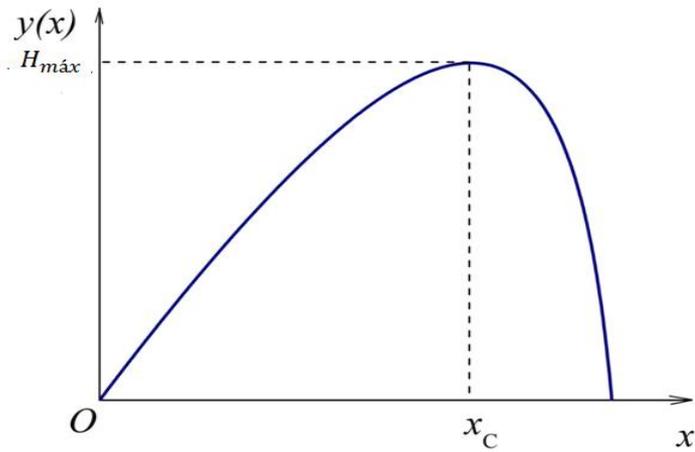


Fonte: Próprio autor (2023).

### 3.4.4 Equação da trajetória: $y = y(x)$

É obtida através das Eqs. (54) e (55), é uma curva que representa o trajeto feito pela partícula, tem um ponto crítico ( $x|c$ ) de máximo global, onde a partícula atinge a altura máxima ( $H_{max}$ , como ilustra a Figura 22.

Figura 20 - trajetória da partícula com resistência do ar.



Fonte: Próprio autor (2023).

## **4 Simulações Modellus do Produto Educacional**

Com a utilização do *software* Modellus, desenvolvemos um módulo didático constituído por quatro simulações computacionais (simuladores virtuais) que podem ser utilizadas como um material instrucional complementar que permite a visualização de um movimento de uma partícula lançada obliquamente, especificamente do Movimento da mesma lançada com uma força de resistência do ar e de outra lançada sem resistência do ar, simultaneamente com as suas representações gráficas.

Cada uma dessas simulações (simuladores virtuais) tem por objetivo facilitar o processo ensino-aprendizagem por meio de estímulos a curiosidade do aluno, despertando o interesse desse aluno, pelo conteúdo ministrado, através da utilização da tecnologia. Aqui, salientamos que o nosso produto educacional, segundo as classificações da literatura (Souza et al, 2015), enquadra-se na categoria de material didático, que visa esses objetivos: o de facilitar o processo de ensino-aprendizagem, criando ambientes de ensino e de aprendizagem com maior participação ativa dos alunos e com a construção de um aprendizado mais significativo.

### **4.1 Estratégias e sugestões de utilização dos simuladores virtuais**

Essas simulações virtuais (animações interativas) deverão ser apresentadas aos estudantes do segundo ano do ensino médio quando esses conteúdos estiverem sendo abordados teoricamente em sala de aula. Além de ilustrar os movimentos que estão sendo estudados através do uso desses simuladores virtuais, devem-se explorar e discutir os conceitos e as características dos movimentos visualizados nas simulações computacionais.

Acreditamos que estes aplicativos possam ser utilizados em atividades com enfoques qualitativos e quantitativos, uma vez que, ambos os enfoques são capazes de fornecer contribuições significativas para a aprendizagem conceitual dos alunos.

Segundo Elias e colaboradores (2009), para que os recursos computacionais possam ser adequadamente inseridos nesses ambientes devem ser adotadas metodologias de ensino que impeçam a utilização dos computadores como meros instrumentos para expor conteúdos substituindo o giz e a lousa, reproduzindo, assim, o ensino tradicional. Desse modo, é necessário considerar os objetivos educacionais que deverão ser atingidos, de acordo com cada conteúdo e momento vivenciado, levando em conta o que preconizam os PCNEM a respeito das competências e habilidades a serem desenvolvidas nos alunos e, a partir disso, buscar usos adequados para o computador que propiciem o alcance desses objetivos.

Após a utilização desses simuladores virtuais, deve-se avaliar a aprendizagem dos alunos. Espera-se que as simulações, além de ajudarem na fixação dos conceitos abordados, possam despertar ou ampliar o interesse dos alunos pelo aprendizado de ciências.

E, como estratégia de utilização em sala de aula, consideramos que o uso desses simuladores virtuais de forma diluída, utilizando-se apenas uma aula (50 minutos), após ter sido feita a discussão teórica do assunto, ou até mesmo antes, como um organizador prévio segundo a teoria da aprendizagem significativa, seja a forma de uso considerada mais proveitosa (Yamamoto; Barbeta, 2001).

#### 4.2 Objetivos do produto educacional

O trabalho do professor tem como objetivo, organizar um meio que possibilite a aprendizagem de conteúdos disciplinares e o desenvolvimento de capacidades específicas dos alunos. O professor deve estimular a aprendizagem e diminuir a sensação de solidão do aluno, suas orientações devem possibilitar a criação de ambientes de participação, colaboração e constantes desafios. O uso de simulações com a utilização do aplicativo *Modellus*, busca alcançar esse objetivo de forma pragmática e sem altos custos financeiros.

Segundo Yamamoto e Barbeta (2001, p. 218), nas aulas de teoria, em que a quantidade de alunos é maior do que no laboratório, as intervenções ilustrativas com o emprego das simulações devem ser realizadas pelo próprio professor, com o uso de computador conjugado com projetor multimídia. Desta forma, pode-se com estas demonstrações, repetir várias vezes o experimento, com modificação de vários parâmetros, buscando auxiliar o aluno na visualização dos movimentos discutidos.

São objetivos específicos do Produto Educacional:

- ✓ Despertar o interesse do aluno, pelo conteúdo ministrado, através da utilização do *software* *Modellus*.
- ✓ Organizar um meio que possibilite a aprendizagem de conteúdos através de observações nas simulações.
- ✓ Estimular aprendizagem do aluno através simulações desenvolvidas com o *software* *Modellus*.
- ✓ Utilizar as simulações desenvolvidas no *software* *Modellus* como ferramenta didática no processo de ensino aprendizagem.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo sem resistência do ar.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo com resistência do ar.
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.
- ✓ Compreender, que no lançamento oblíquo sem resistência do ar, o alcance ocorre com ângulo de 45 graus.

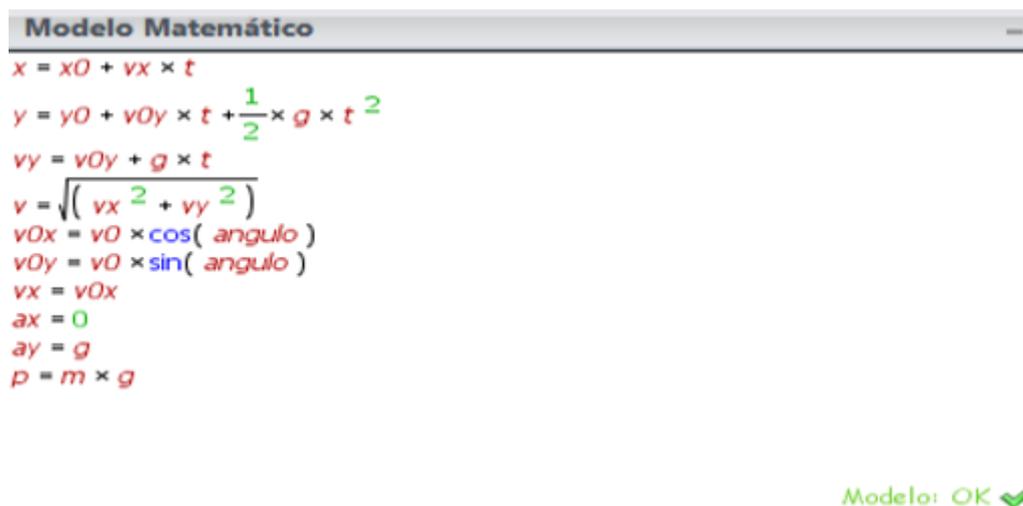
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com diferentes coeficientes de atritos.
- ✓ Observar a trajetória descrita de uma partícula em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.

## 5 ROTEIRO DA CRIAÇÃO DAS SIMULAÇÕES

### 5.1 Primeira simulação: lançamento oblíquo sem resistência do ar de uma partícula de 60 graus e velocidade 100 metros por segundo

1º) Na caixa “modelo matemático”, digite as equações horárias do movimento. Observação: para colocar o sinal de multiplicação (x) use a tecla de “espaço” no teclado, e em seguida clique em interpretar, para verificar se as equações estão corretas, e aparecerá “ok”.

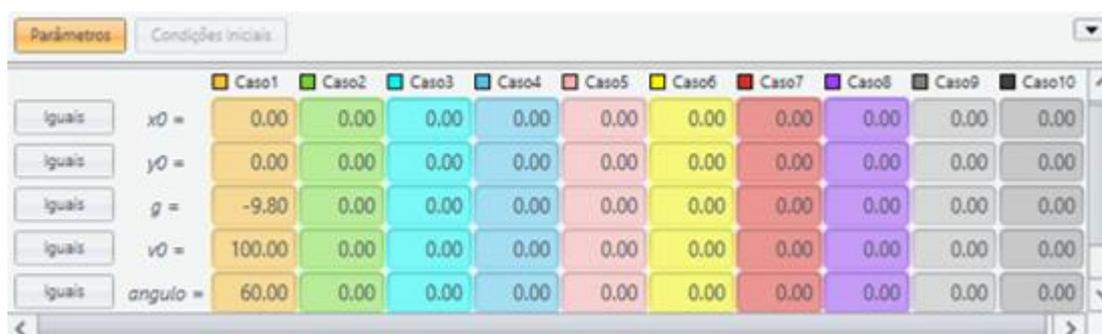
Figura 21 - Caixa modelo matemático.



Fonte: Próprio autor (2023).

2º) No menu “parâmetros” digite os valores das posições iniciais ( $x_0, y_0$ ) e em seguida para gravidade  $g$  e velocidade inicial  $v_0$  e depois para o ângulo de lançamento.

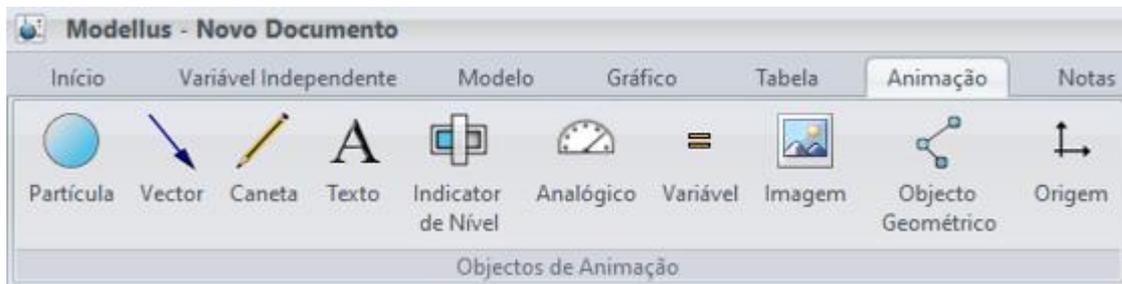
Figura 22 - menu parâmetros.



Fonte: Próprio autor (2023).

3º) Vá ao menu “Objetos” e clique em “partícula” em seguida na área principal da interface do programa.

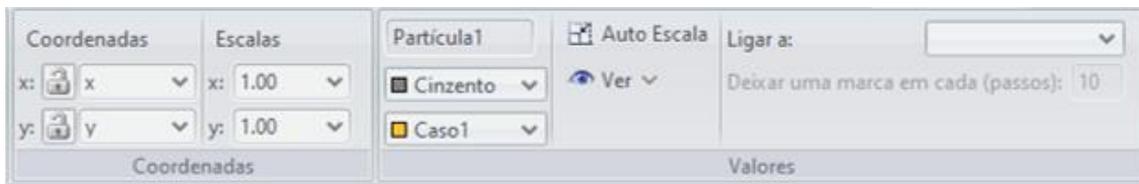
Figura 23 - Menu objetos.



Fonte: Próprio autor (2023).

4º) Com a partícula na área principal selecionada, localize as coordenadas Horizontal e Vertical. Em seguida, clique na seta da coordenada horizontal, selecione “x” na vertical “y”. E, logo ao lado em Escalas, coloque o número 1 para x e o número 2 para y.

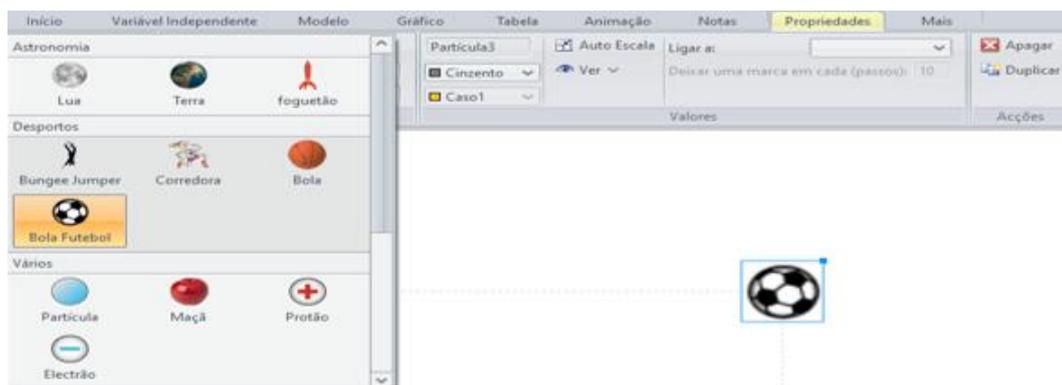
Figura 24 - Faixa de configurações.



Fonte: Próprio autor (2023).

5º) Com a partícula da área principal selecionada, clique na seta dupla do botão “Aparência” e procure “Bola Futebol”

Figura 25 - Menu Animação.



Fonte: Próprio autor (2023).

6º) Agora na barra de menu, procure “Variável Independente” e na caixa que abrirá: no Passo: digite 0.1000, no Mín:0,0000 e no Máx:50,0000.

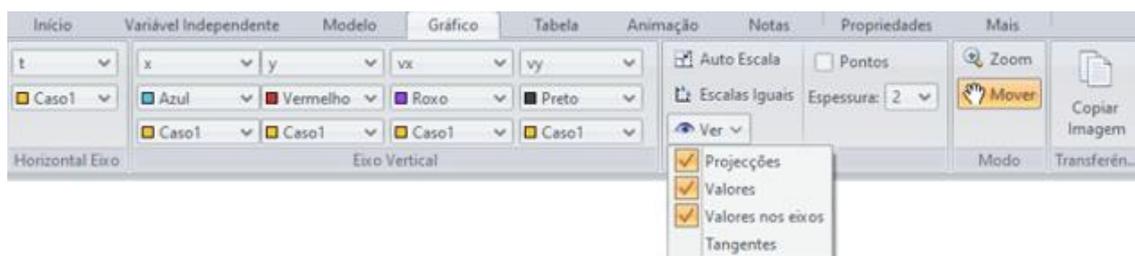
Figura 26 - Menu Variável Independente.



Fonte: Próprio autor (2023).

7º) No menu “Gráfico” do modelo, marque na seta de “Ver” selecione (Projeções, valores nos eixos e auto escala), mude espessura ao 2.

Figura 27 - Menu Gráfico.



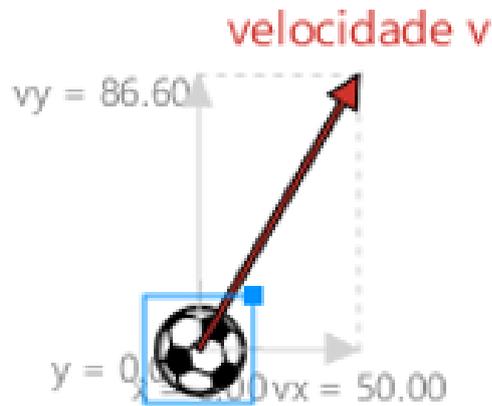
Fonte: Próprio autor (2023).

8º) Representando os vetores velocidade resultante  $v_e$  a força gravitacional  $\vec{P}$  na partícula

Para inserirmos o vetor velocidade  $v$ , na aba “Animação” clicamos no botão “Vetor” e em seguida em qualquer ponto da área de trabalho onde surgirá o vetor, a partir de então a barra de menus mudará para uma barra de controle de propriedades do objeto, onde associaremos o vetor à partícula.

No campo “coordenadas” selecionamos para a coordenada x o valor  $v_x$  e para coordenada y o valor  $v_y$ , em seguida colocamos o nome do vetor “velocidade  $v$  e escolhendo a cor “vermelha” em seguida ligamos o vetor na partícula na opção “ligar a”, ao final do processo obtemos então:

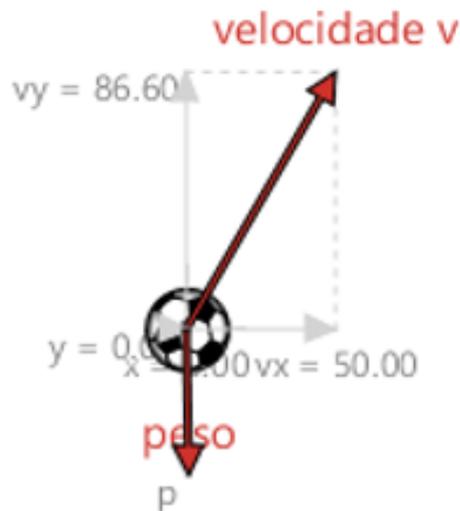
Figura 28 - Vetor da velocidade resultante representado na partícula de animação.



Fonte: Próprio autor (2023).

O vetor representativo da força peso é criado atribuindo para coordenada  $x$  o valor  $0$  e para coordenada  $y$  o valor  $P$  e alterando o valor da escala para 5, para aumentar a seta do vetor, selecionamos “a cor vermelha” e depois ligamos o vetor  $P$  à partícula na opção “ligar a”.

Figura 29 - Vetor  $P$  acrescentado à partícula de animação.



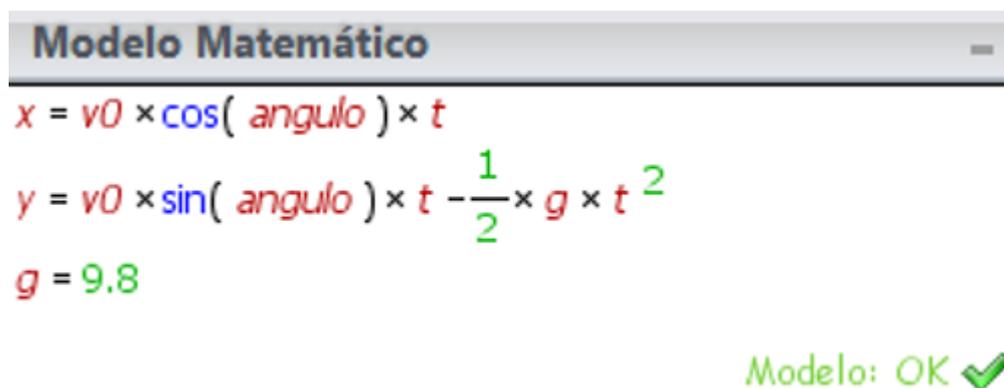
Fonte: Próprio autor (2023).

Agora podemos executar o movimento da partícula com um clique no comando “Play” na barra de execução de animação.

## 5.2 Segunda simulação: lançamento oblíquo sem resistência do ar de cinco partículas sob ângulos de 15, 30, 45, 60 e 75 graus todas com a mesma velocidade inicial de 80 m/s

1º) Na caixa “modelo matemático”, digite as equações horárias do movimento. Observação: para colocar o sinal de multiplicação ( $\times$ ) use a tecla de “espaço” no teclado, e em seguida clique em interpretar, pra verificar se as equações estão corretas, e aparecerá “ok”.

Figura 30 - Caixa modelo matemático.



Fonte: Próprio autor (2023).

2º) em seguida clique na aba de ferramentas “início” e coloque os ângulos em “graus”.

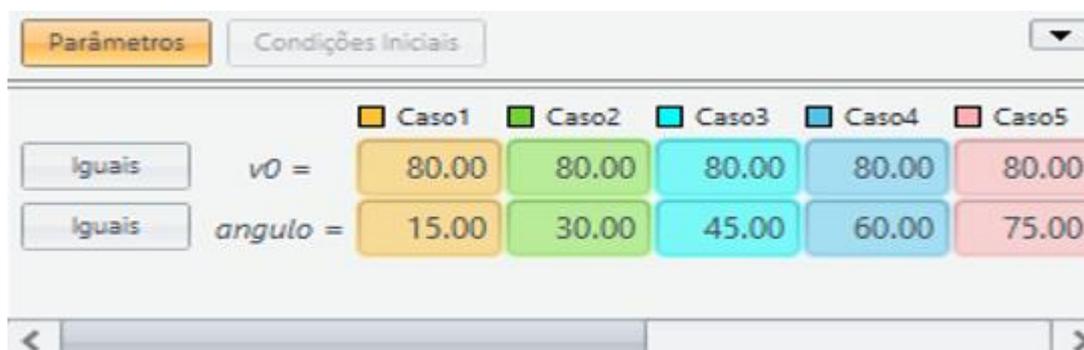
Figura 31 - Aba de ferramentas “início”.



Fonte: Próprio autor (2023).

3º) No menu “parâmetros” digite os valores dos cinco ângulos 15,30,45,60 e 75 graus para o “caso 1”, “caso 2”, “caso 3”, “caso 4” e “caso 5” respectivamente e 80 para a velocidade inicial  $v_0$  e depois selecione as cores das partículas em cada caso.

Figura 32 - Menu parâmetros.



Fonte: Próprio autor (2023).

4º) Vá ao menu “Objetos” e clique em “partícula” em seguida na área principal do programa com a partícula selecionada, localize as coordenadas Horizontal e vertical, em seguida na coordenada horizontal, selecione x e na vertical y, e em “escala, 1 unidade”, o mesmo procedimento é feito com as quatro partículas.

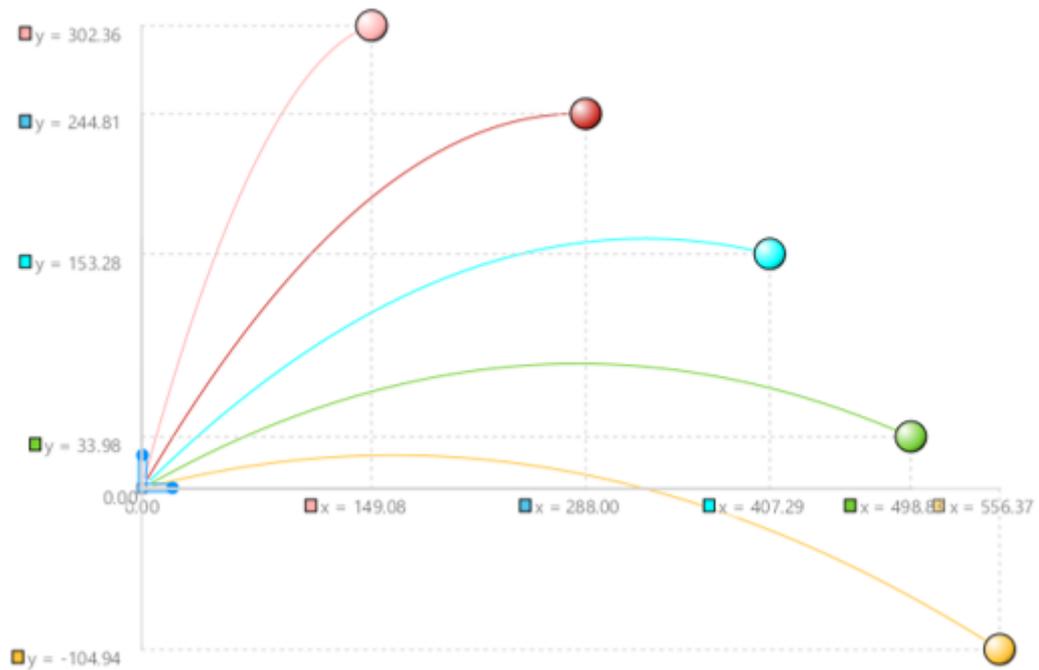
Figura 33 - Faixa de configurações.



Fonte: Próprio autor (2023).

5º) Para que as partículas saiam da mesma origem, clicamos sobre uma partícula e arrastando-a até que se sobreponha a outra, de forma que todas ocupem a mesma posição inicial. Feito todos os procedimentos acima clicamos em play e a simulação rodará:

Figura 34 - Animação do mesmo modelo com as partículas partindo de uma mesma posição inicial.

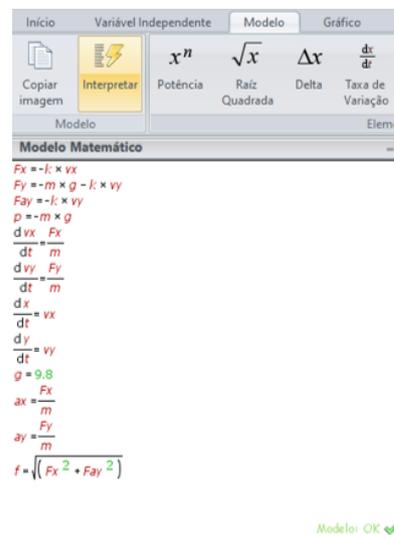


Fonte: Próprio autor (2023).

### 5.3 Terceira simulação: lançamento oblíquo com resistência do ar de uma partícula

1º) Na caixa “modelo matemático”, digite as equações horárias do movimento. Observação: para colocar o sinal de multiplicação (x) use a tecla de “espaço” no teclado, e em seguida clique no botão interpretar, para verificar se as equações estão corretas, e aparecerá “ok”.

Figura 35 - Caixa modelo matemático.



Fonte: Próprio autor (2023).

2º) No menu “parâmetros” digite os valores das condições iniciais da partícula,  $x_0$  e  $y_0$  e das velocidades  $v_x$  e  $v_y$ .

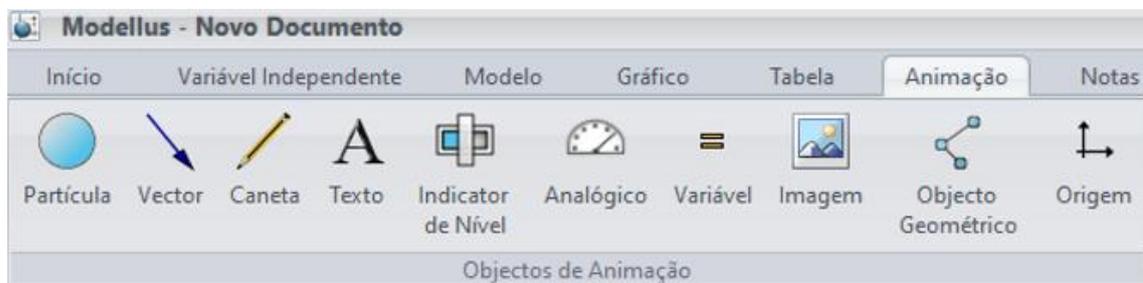
Figura 36 - Menu parâmetros.

		Caso1	Caso2	Caso3	Caso4	Caso5	Caso6	Caso7	Caso8	Caso9	Caso10
Iguais	$v_x =$	21.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais	$v_y =$	25.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais	$x =$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais	$y =$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: Próprio autor (2023).

3º) Vá ao menu “Objetos” e clique em “partícula” em seguida na área principal da interface do programa.

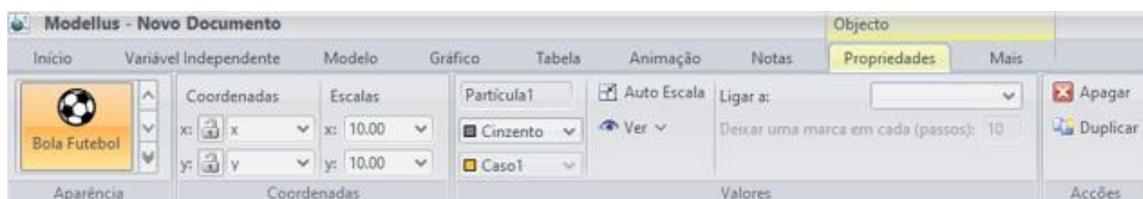
Figura 37 - Menu objetos.



Fonte: Próprio autor (2023).

3º) Vá ao menu “Objetos” e clique em “partícula” em seguida na área principal do programa com a partícula selecionada, localize as coordenadas Horizontal e vertical, em seguida na coordenada horizontal, selecione x e na vertical y, e em “escala, 10 unidade”.

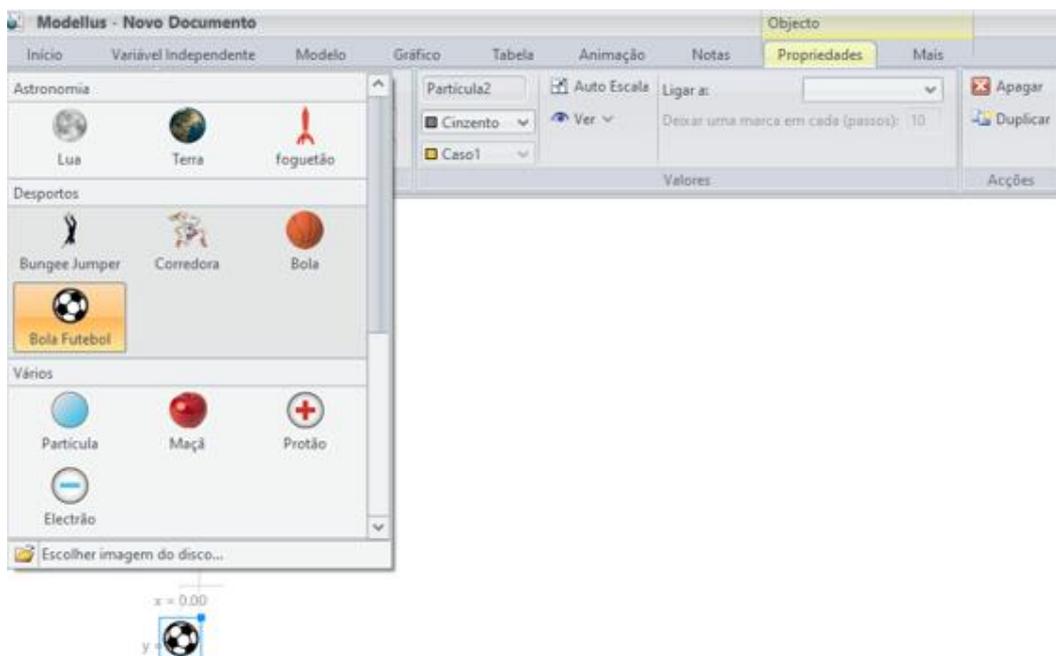
Figura 38 - Faixa de configurações.



Fonte: Próprio autor (2023).

4º) Com a partícula da área principal selecionada, clique na seta dupla do botão “Aparência” e procure “Bola Futebol”.

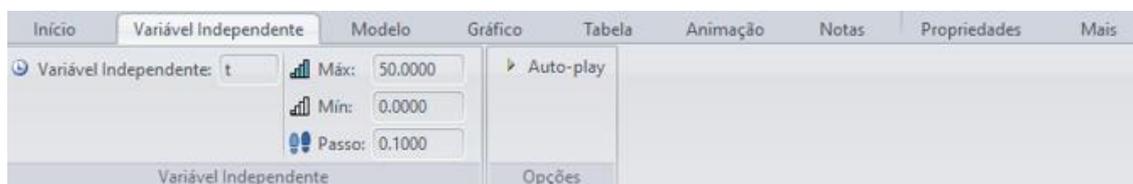
Figura 39 - Menu Animação.



Fonte: Próprio autor (2023).

5º) Agora na barra de menu, procure “Variável Independente” e na caixa que abrirá: no Passo: digite 0.1000, no Mín:0,0000 e no Máx:50,0000.

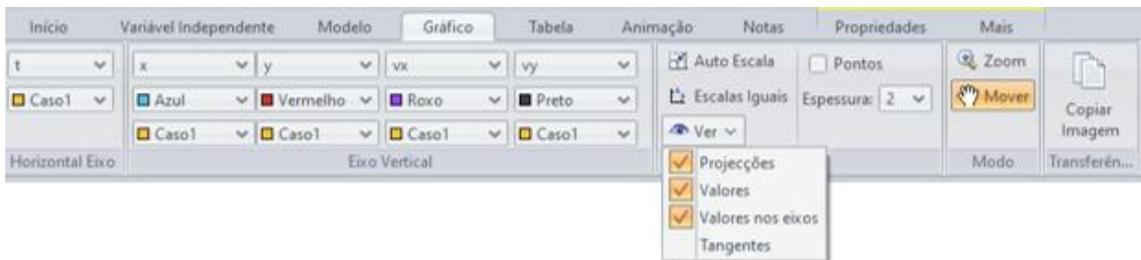
Figura 40 - Menu Variável Independente.



Fonte: Próprio autor (2023).

6º) No menu “Gráfico” do modelo, marque na seta de “Ver” e selecione (Projeções, valores nos eixos e auto escala), mude espessura ao 2.

Figura 41 - Menu Gráfico.



Fonte: Próprio autor (2023).

7º) Representando os vetores velocidade resultante  $\vec{v}_e$  a força gravitacional  $\vec{P}$  na partícula

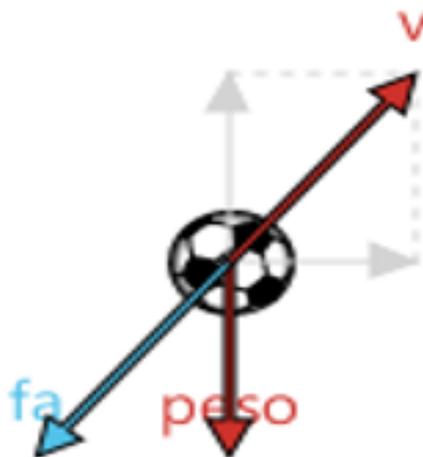
Os vetores representativos  $\vec{v}$  e  $\vec{P}$  é criado utilizando o mesmo procedimento da subseção (5.2) do lançamento sem resistência do ar.

8º) Representando o vetor força de arraste linear  $\vec{f}_a$

Para inserirmos o vetor força de arraste linear  $\vec{f}_a$ , na aba “Animação” clicamos no botão “Vetor” e em seguida em qualquer ponto da área de trabalho onde surgirá o vetor, a partir de então a barra de menus mudará para uma barra de controle de propriedades do objeto, onde associaremos o vetor à partícula.

No campo “coordenadas” selecionamos para a coordenada x o valor  $F_x$  e para coordenada y o valor  $F_{ay}$ , coloque para as coordenadas da partícula em “escala 4 unidades”, em seguida colocamos o nome do vetor “ $\vec{f}_a$ ” e escolhendo a cor “azul” em seguida ligamos o vetor na partícula na opção “ligar a”, ao final do processo obtemos então:

Figura 42 - vetor da força de arraste resultante representado na partícula de animação.



Fonte: Próprio autor (2023).

9º) Inserindo indicador de nível para Resistência do ar da partícula

Vamos agora à aba “Animação” e clicamos em “Indicador de Nível”, e em seguida na área de trabalho do Modellus. Ao mesmo tempo que será acrescentado à partícula à área de trabalho, a barra de menus se transformará em uma barra de controle das propriedades do indicador de nível. Neste campo atribuímos um nome ao indicador, em nosso caso “Resistência do Ar” escolher “a cor vermelha” e associá-lo ao caso 1, posicioná-lo de forma horizontal e por fim, associá-lo à variável  $k$  e definir os valores 0,00 para mínimo e 1,00 para o máximo, ou seja, estabelecer seus limites de 0 a 1 com passo 0,00.

Figura 43 - Barra de configuração do indicador de nível para Resistência do Ar.



Fonte: Próprio autor (2023).

O indicador de nível é controlado deslizando a barra entre os valores máximo e mínimo.

Figura 44 - Indicador de nível para Resistência do Ar da partícula.



Fonte: Próprio autor (2023).

10º) Inserindo indicador de nível para massa da partícula

Vamos agora à aba “Animação” e clicamos em “Indicador de Nível”, e em seguida na área de trabalho do Modellus. Ao mesmo tempo que será acrescentado à partícula à área de trabalho, a barra de menus se transformará em uma barra de controle das propriedades do indicador de nível. Neste campo atribuímos um nome ao indicador, em nosso caso “massa da partícula” escolher “a cor vermelha” e associá-lo ao caso 1, posicioná-lo de forma horizontal e por fim, associá-lo à variável  $m$  e definir os valores 0,00 para mínimo e 10,00 para o máximo, ou seja, estabelecer seus limites de 0 a 10 com passo 0,00.

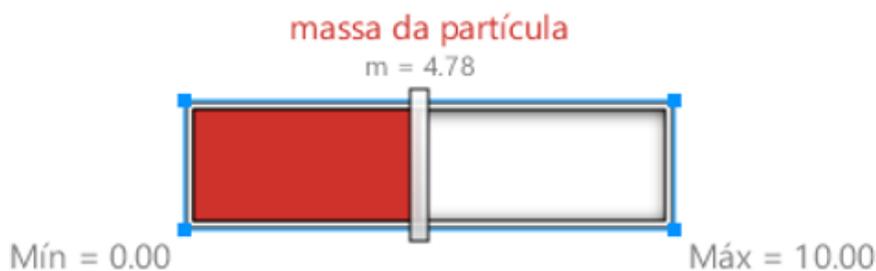
Figura 45 - Barra de configuração do indicador de nível para Resistência do Ar.



Fonte: Próprio autor (2023).

O indicador de nível é controlado deslizando a barra entre os valores máximo e mínimo.

Figura 46 - Indicador de nível para massa da partícula.



Fonte: Próprio autor (2023).

Após feito todos os procedimentos acima, clicamos em play e a simulação rodará.

#### 5.4 Quarta simulação: lançamento oblíquo com resistência do ar de cinco partículas sob o mesmo ângulo e velocidade inicial e coeficientes de atrito de 0,0; 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4 $s^{-1}$

1º) Na caixa “modelo matemático”, digite as equações horárias do movimento. Observação: para colocar o sinal de multiplicação (x) use a tecla de “espaço” no teclado, e em seguida clique em interpretar, para verificar se as equações estão corretas, e aparecerá “ok”.

Figura 47 - Caixa modelo matemático.

**Modelo Matemático**

$$F_x = -k \times v_x$$

$$F_y = -m \times g - k \times v_y$$

$$\frac{d v_x}{d t} = \frac{F_x}{m}$$

$$\frac{d v_y}{d t} = \frac{F_y}{m}$$

$$\frac{d x}{d t} = v_x$$

$$\frac{d y}{d t} = v_y$$

$$g = 9.8$$

Modelo: OK ✓

Fonte: Próprio autor (2023).

2º) No menu “parâmetros” digite os valores dos cinco coeficiente de arrasto 0,00;0,01;0,02;0,03 e 0,04 para o “caso 1”, “caso 2”, “caso 3”, “caso 4” e “caso 5” respectivamente e 60 para a velocidade inicial  $v_x$  e 80 para a velocidade inicial  $v_y$ , e para massa da partícula 1 unidade, e em seguida 10 para posição inicial x e 10 para posição inicial y, depois selecione as cores das partículas em cada caso.

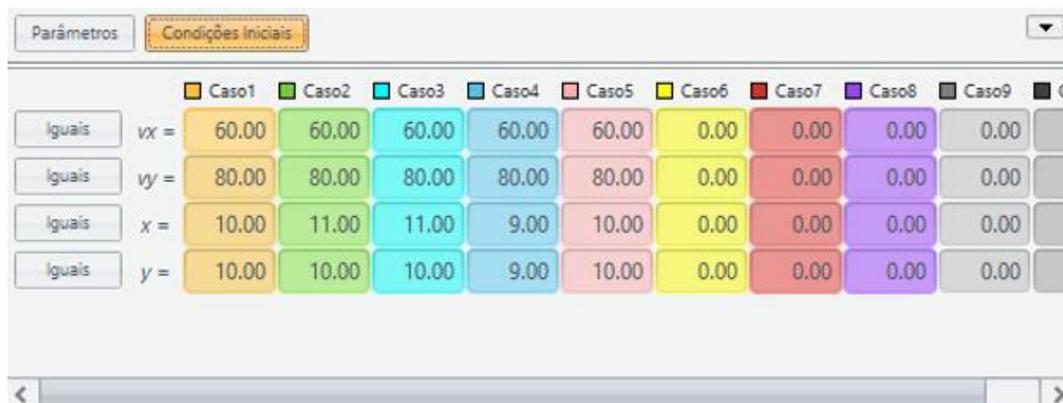
Figura 48 - Menu parâmetros.

Parâmetros      Condições Iniciais

	Caso1	Caso2	Caso3	Caso4	Caso5	Caso6	Caso7	Caso8	Caso9	Caso10
Iguais $k =$	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais $m =$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: Próprio autor (2023).

Figura 49 - menu condições iniciais.

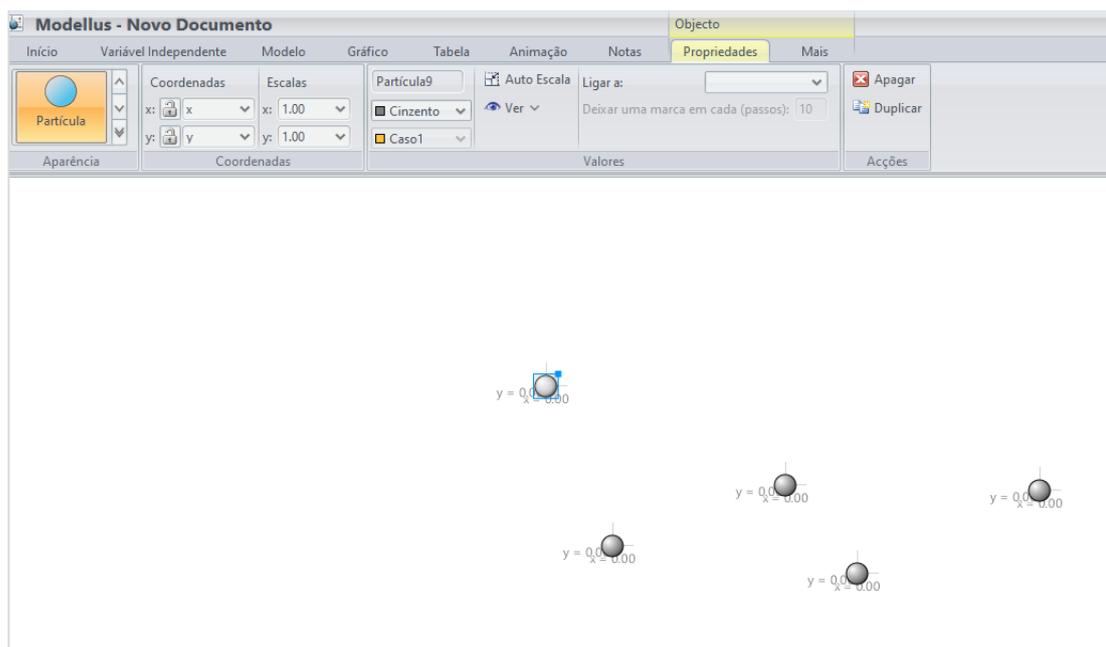


	Caso1	Caso2	Caso3	Caso4	Caso5	Caso6	Caso7	Caso8	Caso9
Iguais vx =	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais vy =	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais x =	10.00	11.00	11.00	9.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Iguais y =	10.00	10.00	10.00	9.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: Próprio autor (2023).

3º) Vá ao menu “Objetos” e clique em “partícula” em seguida na área principal do programa com a partícula selecionada, localize as coordenadas Horizontal e vertical, em seguida na coordenada horizontal, selecione x e na vertical y, e em “escala, 1 unidade”, o mesmo procedimento é feito com as quatro partículas.

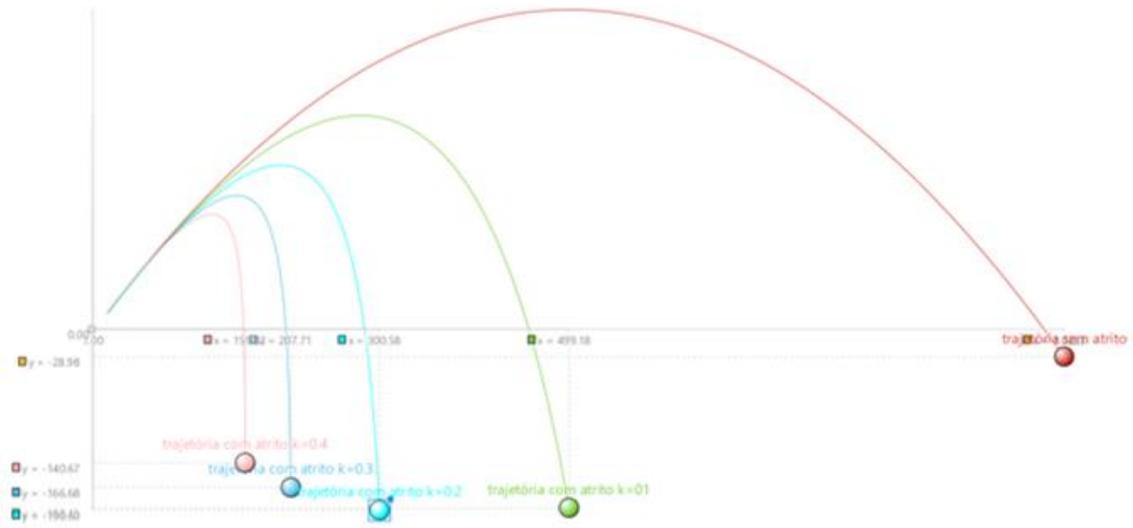
Figura 50 - Faixa de configurações.



Fonte: Próprio autor (2023).

4º) Para cada caso escreva o nome das partículas “trajetória sem atrito de valor  $k = 0,00$  e trajetória com atrito as demais”, para que as partículas saiam da mesma origem, clicamos sobre uma partícula e arrastando-a até que se sobreponha a outra, de forma que todas ocupem a mesma posição inicial. Feito todos os procedimentos acima clicamos em play e a simulação rodará.

Figura 51 - Animação do mesmo modelo com as partículas partindo de uma mesma posição inicial.



Fonte: Próprio autor (2023).

## 6 Planos de Atividades

### 6.1 Plano de Atividade: primeiro encontro (50 minutos)

Conteúdo: lançamento oblíquo com e sem resistência do ar

Objetivos:

- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo sem resistência do ar.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo com resistência do ar.
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.
- ✓ Construir e interpretar gráficos.
- ✓ Averiguar através do questionário de avaliação o conhecimento dos alunos da turma controle.

Materiais didáticos:

- ✓ Lousa e pincel
- ✓ Celular conectado à internet.

Nessa primeira aula expositiva e dialogada foi feita uma revisão do conteúdo, explicando as principais características desse tipo de movimento, para reforçar o conteúdo já visto pelos alunos. Também foi evidenciado os gráficos construídos do movimento da partícula.

#### Avaliação da Aprendizagem

- 1- Um canhão dispara uma bala com velocidade inicial igual a 500m/s (em módulo), a 45° com a horizontal. Desprezando o atrito e considerando  $g = 10\text{m/s}^2$ , determine o alcance máximo horizontal da bala.
- 2- Marque a alternativa incorreta a respeito do lançamento oblíquo.
  - a) O ângulo que fornecerá o maior alcance horizontal possível é de 45 graus.
  - b) Ao chegar na altura máxima a componente vertical da velocidade do móvel é nula.
  - c) A componente horizontal da velocidade mantém-se inalterada, uma vez que no eixo x o movimento é classificado como retilíneo e uniforme.
  - d) A componente vertical da velocidade diminui desde o solo até se tornar nula na altura máxima, o que classifica o movimento como sendo acelerado.

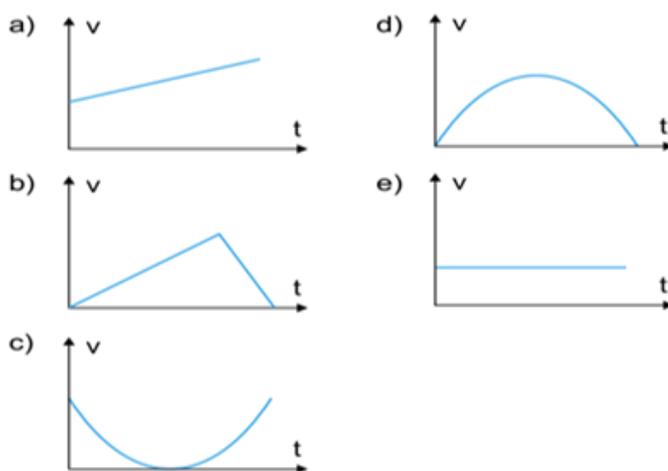
e) A componente horizontal da velocidade pode ser determinada pelo produto da velocidade do objeto como o cosseno do ângulo com o qual o corpo abandona o solo.

- 3- Na antiguidade, algumas pessoas acreditavam que, no lançamento oblíquo de um objeto, a resultante das forças que atuavam sobre ele tinha o mesmo sentido da velocidade em todos os instantes do movimento. Isso não está de acordo com as interpretações científicas atualmente utilizadas para explicar esse fenômeno.

Desprezando a resistência do ar, qual é a direção e o sentido do vetor força resultante que atua sobre o objeto no ponto mais alto da trajetória?

- Indefinido, pois ele é nulo, assim como a velocidade vertical nesse ponto.
- Vertical para baixo, pois somente o peso está presente durante o movimento.
- Horizontal no sentido do movimento, pois devido à inércia o objeto mantém seu movimento.
- Inclinado na direção do lançamento, pois a força inicial que atua sobre o objeto é constante.
- Inclinado para baixo e no sentido do movimento, pois aponta para o ponto onde o objeto cairá.

- 4- Num dia ensolarado, com Sol a pique, um jogador chuta uma bola, que descreve no ar uma parábola. O gráfico que melhor representa o valor da velocidade  $v$  da sombra da bola, projetada no solo, em função do tempo  $t$ , é:



- 5- Uma esfera de aço é lançada obliquamente com pequena velocidade, formando um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo horizontal. Durante sua trajetória, desprezando-se o atrito com o ar, pode-se afirmar que:

- a velocidade é zero no ponto de altura máxima
- a componente vertical da velocidade mantém-se constante em todos os pontos

- c) a componente horizontal da velocidade é variável em todos os pontos  
d) o vetor velocidade é o mesmo nos pontos de lançamento e de chegada  
e) a componente vertical da velocidade é nula no ponto de máxima altura.
- 6- Lança-se um projétil com velocidade de  $40 \text{ m/s}$ , formando um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Desprezando-se a resistência do ar, ele atingirá a altura máxima após:
- a) 1 s  
b) 2 s  
c) 3 s  
d) 4 s  
e) 5 s
- 7- Um corpo é lançado obliquamente do solo, atingindo a altura máxima igual  $10 \text{ m}$  realizando alcance horizontal igual  $40 \text{ m}$ . Podemos afirmar que o ângulo de tiro é:
- a)  $30^\circ$   
b)  $45^\circ$   
c)  $60^\circ$   
d)  $65^\circ$   
e)  $90^\circ$
- 8- Um objeto é lançado a partir da origem de um sistema de coordenadas, com velocidade inicial de  $8,0 \text{ m/s}$ , fazendo um ângulo de  $60^\circ$  em relação à horizontal. O alcance do objeto lançado, em metros, é de:
- Dados:  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ ;  $\sqrt{3} = 1,7$ ;  $\sqrt{2} = 1,4$
- a) 2,8  
b) 4,0  
c) 5,4  
d) 11,2  
e) 14,8
- 9- Num jogo de futebol, um jogador faz um lançamento oblíquo de longa distância para o campo adversário, e o atacante desloca-se abaixo da bola, em direção ao ponto previsto para o primeiro contato dela com o solo.
- Desconsiderando o efeito do ar, analise as afirmativas:
- I. Um observador que está na arquibancada lateral vê a bola executar uma trajetória parabólica.  
II. O atacante desloca-se em movimento retilíneo uniformemente variado para um observador que está na arquibancada lateral.  
III. O atacante observa a bola em movimento retilíneo uniformemente variado.
- Está (ao) correta(s):
- a) apenas I

- b) apenas II
- c) apenas I e II
- d) apenas I e III
- e) apenas II e III

## 6.2 Plano de Atividade: segundo encontro (100 minutos)

Conteúdo: lançamento oblíquo com e sem resistência do ar

Objetivos:

- ✓ Utilizar as simulações desenvolvidas no *software* Modellus como ferramenta didática no processo de ensino aprendizagem.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo sem resistência do ar.
- ✓ Compreender as características do movimento em um lançamento oblíquo com resistência do ar.
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.
- ✓ Compreender, que no lançamento oblíquo sem resistência do ar, o alcance ocorre com ângulo de 45 graus.
- ✓ Diferenciar as características do movimento em um lançamento oblíquo com diferentes coeficientes de atritos.
- ✓ Observar a trajetória descrita de uma partícula em um lançamento oblíquo com e sem resistência do ar.
- ✓ Averiguar através dos questionários de avaliação e satisfação o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo e o grau de satisfação do *software* Modellus da turma teste respectivamente.

Materiais didáticos:

- ✓ Celular conectado à internet.
- ✓ Computador
- ✓ *Software* Modellus
- ✓ Aparelho de TV.

Nessa aula o conteúdo foi trabalhado juntamente como aplicativo Modellus, explicando as principais características desse tipo de movimento, de modo que os alunos

pudessem visualizá-los. Também foi evidenciado os gráficos do movimento construídos pelo aplicativo.

### Avaliação da Aprendizagem:

1 - Um lançador de bolinhas é instalado em um laboratório para se estudar lançamento oblíquo. Um professor pede, então, que, desprezando os efeitos de resistência do ar e atrito, os alunos citem as grandezas que devem ser conhecidas para se obter a altura máxima atingida pela bolinha e o alcance dela.

Assinale a alternativa que apresenta as grandezas que devem ser conhecidas.

- a) Massa da bolinha, velocidade inicial da bolinha, ângulo de lançamento e aceleração da gravidade local.
- b) Peso da bolinha, aceleração da gravidade local, intervalo de tempo entre o lançamento e a queda da bolinha e a velocidade inicial da bolinha.
- c) Velocidade inicial da bolinha, ângulo de lançamento, aceleração da gravidade local e intervalo de tempo entre o lançamento e a queda da bolinha.
- d) Ângulo de lançamento e aceleração da gravidade local.

2 - Um objeto é lançado a partir da origem de um sistema de coordenadas com velocidade inicial de  $8 \text{ m/s}$  fazendo um ângulo de  $60^\circ$  em relação à horizontal. Determine:

- a) o tempo necessário para o objeto atingir o solo;
- b) o alcance do objeto.

3 - Uma bola é lançada verticalmente para cima a uma velocidade inicial  $v_0$ , sobe até uma altura máxima e retorna ao ponto de lançamento. Considerando a força de arraste, é correto afirmar que:

- a) a velocidade final da bola é igual à  $v_0$ , porém com direção invertida.
- b) o módulo da aceleração é máximo logo após o lançamento, sendo maior que  $g$ .
- c) a força de arraste aponta sempre na mesma direção e sentido em toda trajetória da bola.
- d) o módulo da aceleração é menor que  $g$  durante todo o trajeto.
- e) o valor máximo da força de arraste ocorre no ponto de altura máxima.

4 - Numa região em que  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , uma partícula é lançada a partir do solo com velocidade  $\vec{v}_0$ , formando um ângulo  $\theta_0$  com a horizontal, como ilustra a figura. Sabendo que  $|\vec{v}_0| = 40 \text{ m/s}$ , pede-se:

- a) Para que valor de  $\theta_0$  o alcance será máximo?
- b) Qual é o valor do alcance máximo?

5 - Ao bater um tiro de meta, um goleiro chuta a bola de forma que ela alcance a maior distância possível. No chute, a bola atinge o campo a uma distância de 40 m. Despreze a resistência do ar e considere  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ .

- a) Qual o ângulo de tiro do chute do goleiro?
- b) Qual a intensidade do vetor velocidade inicial da bola?

6 - Numa prova de lançamento de disco, um atleta lança o disco com velocidade  $\vec{v}_0$ , formando ângulo  $\theta$  com a horizontal. Supondo que o atleta consiga alcance máximo, é possível  $\theta$  ser maior que  $45^\circ$ ?

7 - Em uma partida de futebol, a bola é chutada a partir do solo descrevendo uma trajetória parabólica cuja altura máxima e o alcance atingido são, respectivamente,  $h$  e  $s$ . Desprezando o efeito do atrito do ar, a rotação da bola e sabendo que o ângulo de lançamento foi de  $45^\circ$  em relação ao solo horizontal, calcule a razão  $s/h$ .

$$\text{Dado: } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8 - Um canhão dispara uma bala com velocidade igual a  $500 \text{ m/s}$  (módulo), a  $45^\circ$  com a horizontal. Desprezando o atrito e considerando  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , determine o alcance máximo horizontal da bala.

9 - Uma bola cai sob a influência da gravidade. Há uma força  $F$  de arrasto atuando na bola com magnitude dada por  $|\vec{F}| = bv$  onde  $v$  é a velocidade da bola e  $b$  é uma constante positiva. A magnitude da aceleração da bola em qualquer momento, é igual a:

- a)  $bv/m$
- b)  $g - \frac{bv}{m}$
- c)  $g + \frac{bv}{m}$
- d)  $g/b$
- e)  $g$

10 - Um paraquedista salta de um avião e cai em queda livre até sua velocidade de queda se tornar constante.



Podemos afirmar que a força total atuando sobre o pára-quedista após sua velocidade se tornar constante é:

- a) vertical e para baixo.

- b) vertical e para cima.
- c) nula.
- d) horizontal e para a direita.
- e) horizontal e para a esquerda.

11 - Um pequeno corpo rígido, abandonado de determinada altura, cai verticalmente. Verifica-se que a aceleração desse corpo, inicialmente igual à da gravidade, se reduz rapidamente até se anular, quando a velocidade atinge um valor constante até o corpo chegar ao solo. Essa observação nos permite concluir que a resistência do ar ao movimento desse corpo:

- a) é desprezível.
- b) é constante.
- c) só atua no final do movimento.
- d) aumenta com o aumento da velocidade.
- e) diminui com o aumento da velocidade.

12 - Uma esfera de aço é solta de cima de um prédio. A força de arraste neste caso tem a forma, onde  $v$  é a velocidade da esfera. Qual deve ser a velocidade terminal desta partícula?

- a)  $mg\sqrt{b}$
- b)  $mg$
- c)  $mg/b$
- d)  $\sqrt{mgb}$

13 - Um objeto em queda sujeito à ação da gravidade experimenta uma força de arrasto devido à resistência do ar. Qual afirmação é falsa?

- a) a força de arrasto depende da velocidade do objeto
- b) quanto mais rápido a bola cai, mais intensa será a resistência ao ar
- c) a energia mecânica do objeto é conservada.
- d) a velocidade do objeto irá atingir um valor máximo e, em seguida, para de mudar.
- e) a força resultante do objeto poderá atingir o valor nulo.

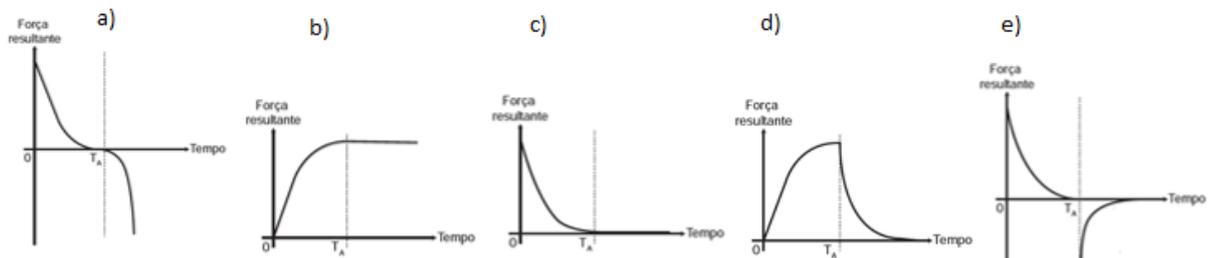
14 - Soltamos simultaneamente duas folhas de papel idênticas, uma amassada e a outra aberta. Então podemos afirmar que:

- a) ambas as folhas caem ao mesmo tempo, pois estão sujeitas à mesma força gravitacional e, portanto, à mesma aceleração da gravidade.
- b) a folha amassada cai primeiro, pois ela apresenta uma área menor que a folha aberta e, portanto, um atrito menor com o ar.

c) a folha aberta cai primeiro, pois seu peso está distribuído em uma área maior e, portanto, apresenta uma densidade menor.

d) ambos caem simultaneamente, pois ambas têm a mesma densidade e, portanto, devem possuir a mesma aceleração da gravidade.

15 - Em um dia sem vento, ao saltar de um avião, um paraquedista cai verticalmente até atingir a velocidade limite. No instante em que o paraquedas é aberto (instante  $T_A$ ), ocorre a diminuição de sua velocidade de queda. Algum tempo após a abertura do paraquedas, ele passa a ter velocidade de queda constante, que possibilita sua aterrissagem em segurança. Que gráfico representa a força resultante sobre o paraquedista, durante o seu movimento de queda?



### 3 Considerações Finais

Neste trabalho desenvolvemos um produto educacional constituído por quatro simulações computacionais produzidas por intermédio do aplicativo computacional Modellus. O produto educacional tem como objetivo auxiliar professores do ensino médio no processo ensino-aprendizagem na disciplina Física.

Este produto foi implementado em sala de aula durante minha pesquisa de Mestrado no curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, e como objetos de mensuração de sua eficácia como um material potencialmente significativo, questionários de avaliação e de satisfação se fizeram presentes. De acordo com os resultados obtidos a partir desses questionários, os alunos da turma testem, onde o Produto Educacional foi aplicado, tiveram um rendimento superior aos alunos da turma controle, onde não houve aplicação do Produto Educacional. Enquanto após a aplicação do Produto Educacional em uma das turmas, os alunos dessa turma acertaram um número muito maior de questões do que os alunos da turma onde o produto não foi aplicado. Além disso, segundo as respostas dos alunos no questionário diagnóstico, as respostas foram que eles ficaram mais interessados pela disciplina e que a aula se tornou mais interessante.

Podemos então concluir que o uso do *software* Modellus foi suficiente para garantir uma melhora na aprendizagem dos alunos, mas foi responsável por atrair o interesse dos alunos onde as mudanças promovidas por uma aula diferenciada prenderam a atenção do aluno e assim fez que ele participasse da aula e isto é um passo para que ele construa seu conhecimento, e este fator é um dos pontos chave para melhoramento.

Desta forma concluímos que a utilização das tecnologias do ensino, em especial as simulações constituem-se ferramenta importantíssima no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem, pois contribuem significativamente para a fixação dos conteúdos abordados em aulas de Física como também contribuem para despertar o interesse dos alunos pela disciplina.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. D. de. **Software Modellus como ferramenta potencialmente significativa no ensino de cinemática**. 2015.89f. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional de Ensino de Física) -Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

DELMA, A. **Utilização do Software Modellus como ferramenta no ensino de cinemática**. 2019.109f. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Fundação Universidade Federal de Rondônia, Rondônia, 2019.

FIQUEIRAS, J. S. Easy Java Simulations – Modelagem Computacional para o ensino de Física. **Rev. Bras. Ens. Física**. v. 27, n. 4, p.613-618, 2005.

LUIZ, José Sampaio Universo da Física 1: mecânica.2 Ed.São Paulo:Atual,2005.

TAYLOR, J. R. **Mecânica Clássica**. Tradução: Valdir Leite Roque.Porto Alegre: Bookman,2013.

THORNTON, S. T. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. Tradução: All Tasks. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

YAMAMOTO, I.; BARBETA, V. B.Simulações de Experiências como Ferramenta de Demonstração Virtual em Aulas de Teoria de Física.**Rev. Bras. Ens. Física**. v. 23, n. 2, p 215-225, 2001.

Carlos Augusto Fonseca Dias  
Professor de Física e autor deste e-book  
e-mail: [fonseca-197412@hotmail.com](mailto:fonseca-197412@hotmail.com)



**Golaço do Ensino  
de Física!!!**

## APÊNDICE B - Questionário de Satisfação

*Universidade Federal do Maranhão-UFMA*  
*Curso de Pós-graduação Stricto sensu em Ensino de Física*  
*Mestrando: Carlos Augusto Fonseca Dias*  
*Orientador: Eduardo Moraes Diniz*

### QUESTIONÁRIO

Prezado aluno, estas perguntas visa obter a sua opinião em relação às aulas Computacionais de Física. Sua cooperação é muito importante, pois através de suas respostas, o professor terá condições de conhecer suas necessidades e aspirações, para o aprimoramento de sua aprendizagem. É de suma importância a sinceridade nas respostas para que o professor possa melhorar o nível de suas aulas.

O citado questionário servirá também de subsídio na minha dissertação de mestrado intitulada “**PROGRAMA MODELLUS COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DO LANÇAMENTO OBLÍQUO COM ATRITO DINÂMICO**”

Faça a sua avaliação marcando um X em apenas uma das alternativas para cada item abaixo.

<b>Avaliação sobre a utilização do <i>software</i> modellus como recurso didático no ensino de Física.</b>	<b>Excelente</b>	<b>Bom</b>	<b>Regular</b>	<b>Ruim</b>	<b>Péssimo</b>
1. Como você avaliou a aula com a utilização do <i>software</i> Modellus?					
2. Como você avalia a utilização de recursos computacionais nas aulas de Física?					
3. Como você avalia a utilização das simulações com o <i>software</i> Modellus nas aulas de lançamento oblíquo com atrito dinâmico e sem resistência do ar?					
4. Como você avalia o seu interesse nas aulas com utilização de simulações?					
5. Como você avalia sua compreensão do conteúdo nesta aula?					

## APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO

Universidade Federal do Maranhão-UFMA  
 Curso de Pós-graduação Stricto sensu em Ensino de Física  
 Mestrando: Carlos Augusto Fonseca Dias  
 Orientador: Eduardo Moraes Diniz

### QUESTIONÁRIO

#### INSTRUÇÕES

Em todo o questionário, para cada questão há apenas uma alternativa é correta;  
 O aluno deverá preencher apenas uma alternativa para cada questão;  
 O aluno terá 50 minutos para responder o questionário.

#### FOLHA DE RESPOSTAS

##### INSTRUÇÕES DE PREENCHIMENTO (não rasure esta folha):

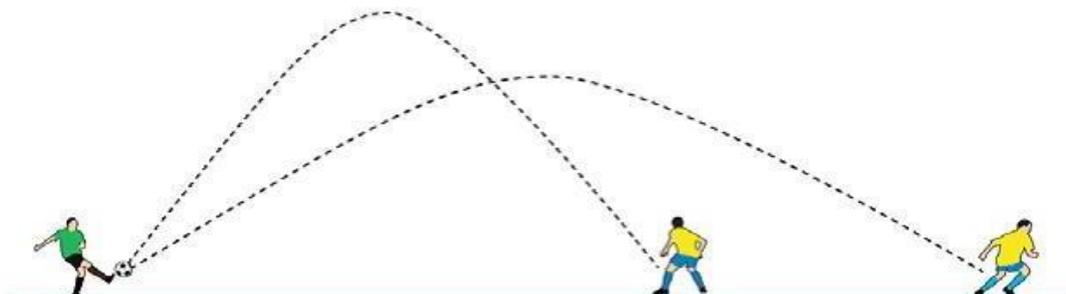
Não rabisque nas áreas de resposta.

Utilize somente caneta esferográfica de tinta azul ou preta.

Marque as respostas assim: ●

- |    |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 01 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 02 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 03 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 04 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 05 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 06 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 07 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 08 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 09 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| 10 | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |

- 1- Após um ataque frustrado do time adversário, o goleiro se prepara para lançar a bola e armar um contra-ataque. Para dificultar a recuperação da defesa adversária, a bola deve chegar aos pés de um atacante no menor tempo possível. O goleiro vai chutar a bola, imprimindo sempre a mesma velocidade, e deve controlar apenas o ângulo de lançamento. A figura mostra as duas trajetórias possíveis da bola num certo momento da partida.



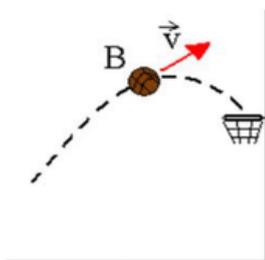
Assinale a alternativa que expressa se é possível ou não determinar qual destes dois jogadores receberia bola no menor tempo. Despreze o efeito da resistência do ar.

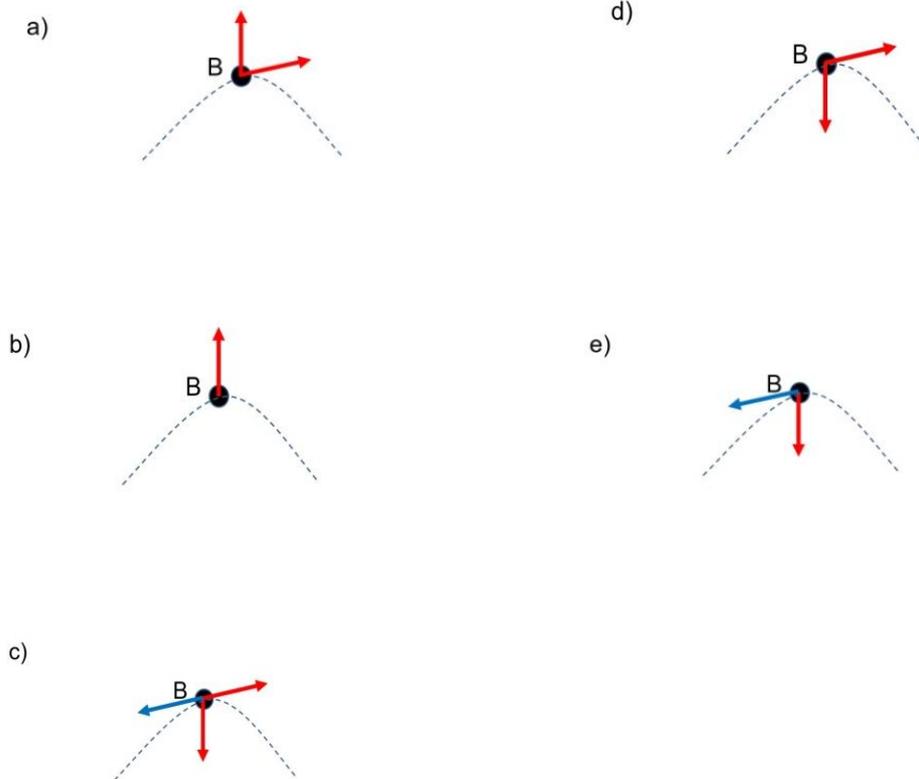
- a) Sim, é possível, e o jogador mais próximo receberia a bola no menor tempo.
- b) Sim, é possível, e o jogador mais distante receberia a bola no menor tempo.
- c) Os dois jogadores receberiam a bola em tempos iguais.
- d) Não, pois é necessário conhecer os valores da velocidade inicial e dos ângulos de lançamento.
- e) Não, pois é necessário conhecer o valor da velocidade inicial.

- 2- Suponha três partículas, A, B e C, lançadas, com iguais velocidades, obliquamente acima de um terreno plano e horizontal, segundo os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , respectivamente. Desconsiderando a resistência do ar, afirma-se que:
- I. A permanecerá menos tempo no ar.
  - II. B terá maior alcance horizontal.
  - III. C alcançará maior altura acima da horizontal.

Das afirmativas acima:

- a) somente I é correta;
  - b) somente II é correta;
  - c) somente I e II são corretas;
  - d) somente I e III são corretas;
  - e) I, II e III são corretas.
- 3- Marque a alternativa INCORRETA a respeito do lançamento oblíquo.
- a) O ângulo que fornecerá o maior alcance horizontal possível é o de  $45^\circ$ .
  - b) Ao chegar na altura máxima a componente vertical da velocidade da partícula é nula.
  - c) A componente horizontal da velocidade mantém-se inalterada, uma vez que no eixo x o movimento é classificado como retilíneo uniforme.
  - d) A componente vertical da velocidade diminui desde o solo até se tornar nula na altura máxima, o que classifica o movimento como sendo acelerado.
  - e) A componente horizontal da velocidade pode ser determinada por  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$  com o qual o corpo abandona o solo.
- 4- Uma jogadora de basquete arremessa uma bola tentando atingir a cesta, parte da trajetória seguida pela bola está representada na figura abaixo. Considerando a resistência do ar, assinale a alternativa cujo diagrama melhor representa as forças que atuam sobre a bola no ponto B dessa trajetória.

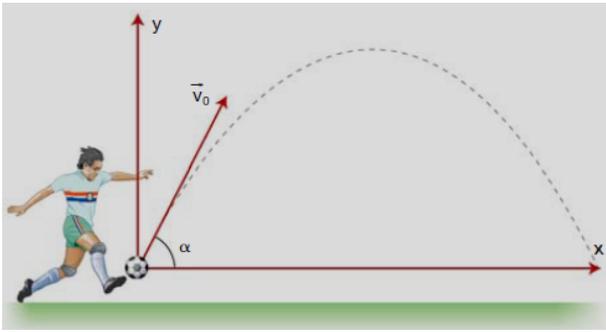




- 5- Uma bala de canhão, com massa de  $15\text{kg}$ , é lançada com velocidade de  $1080\text{ km/h}$ . Determine o alcance horizontal máximo do projétil para o caso de o ângulo formado entre o canhão e a horizontal ser de  $15^\circ$ .

Dados:  $\text{sen}30^\circ = 0,5$   $g = 10\text{ m/s}^2$ .

- a)  $2,5\text{km}$   
 b)  $3,5\text{km}$   
 c)  $4,5\text{km}$   
 d)  $5,5\text{km}$   
 e)  $6,0\text{km}$
- 6- Um canhão dispara uma bala, com ângulo de tiro  $40^\circ$ , em relação ao solo, que é plano e horizontal. Desprezando-se a resistência do ar, pode-se dizer que, durante o movimento do projétil:
- a) sua velocidade se mantém constante.  
 b) a componente horizontal de sua velocidade se mantém constante.  
 c) sua aceleração muda de sentido, pois a componente vertical da velocidade muda de sentido.  
 d) a componente horizontal de sua aceleração varia uniformemente.  
 e) a trajetória é percorrida com velocidade constante, em módulo, embora com direção variável.
- 7- Suponha que em uma partida de futebol, o goleiro, ao bater o tiro de meta, chuta a bola, imprimindo-lhe uma velocidade  $v_0$  cujo vetor forma, com a horizontal, um ângulo  $\alpha$ . Desprezando a resistência do ar, são feitas as seguintes afirmações.

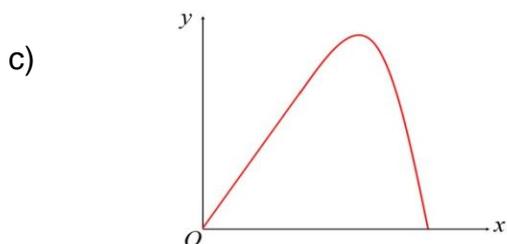
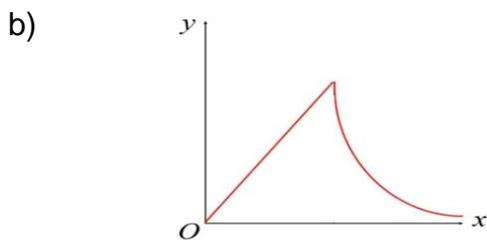
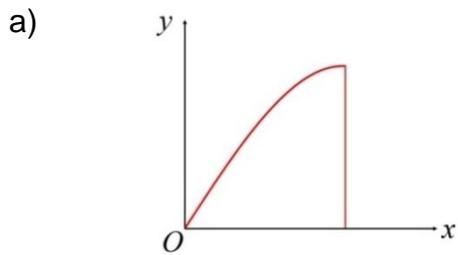


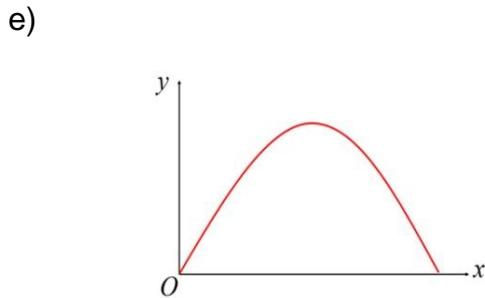
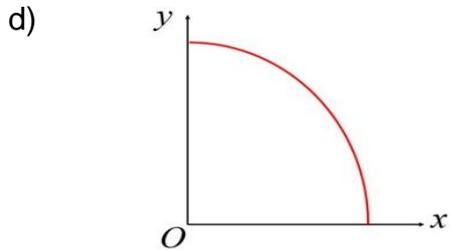
- I. No ponto mais alto da trajetória, a velocidade vetorial da bola é nula.
- II. A velocidade inicial  $v_0$  pode ser decomposta segundo a direção horizontal e vertical.
- III. No ponto mais alto da trajetória é nulo o valor da aceleração da gravidade.
- IV. No ponto mais alto da trajetória é nulo o valor  $v_y$  da componente vertical da velocidade.

Estão corretas:

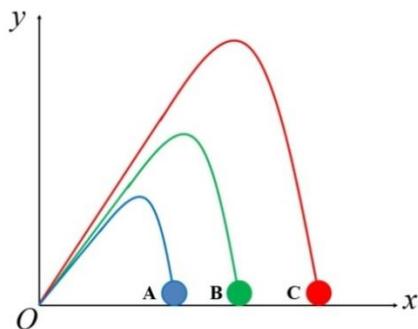
- a) I, II e III
- b) I, III e IV
- c) II e IV
- d) III e IV
- e) I e II

8- Qual das figuras abaixo melhor representa o lançamento de uma partícula lançada da origem sujeita a uma força de resistência do ar.





9- Três partículas,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , sujeitas à resistência do ar, são lançadas e suas trajetórias são representadas abaixo.



Sejam  $k_A, k_B$  e  $k_C$  os coeficientes de arrasto para as partículas  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Assim, é correto afirmar que:

- a)  $k_A k_B k_C$
- b)  $k_A k_B k_C$
- c)  $k_A k_B k_C$
- d)  $k_A k_B k_C$
- e)  $k_A k_B k_C$

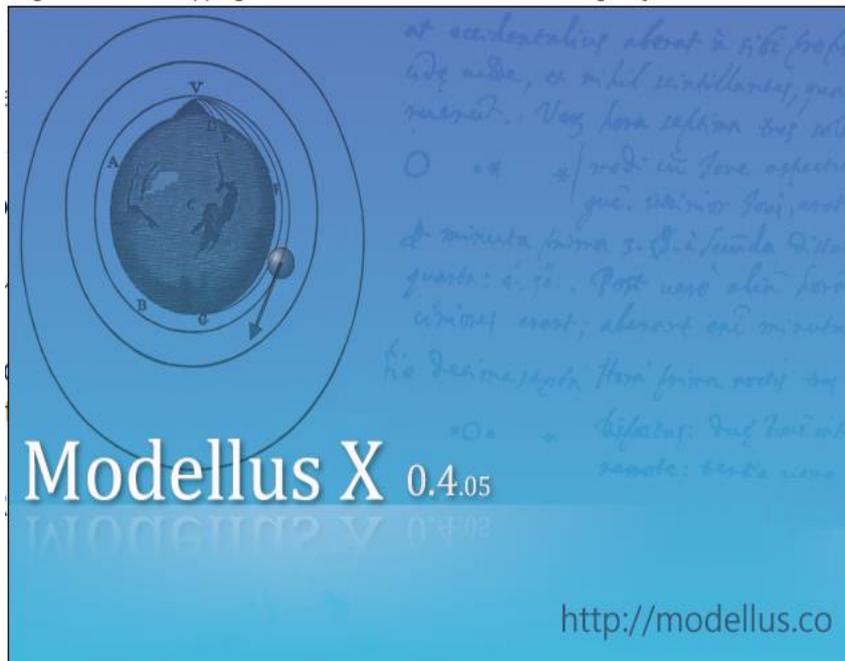
10- Um objeto é lançado obliquamente, após atingir a altura máxima ele começa a descer sujeito à força gravitacional e a uma força de resistência do ar, depois de um determinado tempo, as forças na vertical se igualam e o objeto atinge a velocidade terminal, Após esse momento a velocidade do objeto, na vertical:

- a) aumenta devido à força gravitacional
- b) diminui devido à força gravitacional
- c) aumenta devido à força de resistência do ar
- d) diminui devido à força de resistência do ar
- e) permanece constante

## APÊNDICE D – Tutorial Modellus X 0.4.05

A versão do *Modellus* que foi utilizada nas nossas atividades foi a versão X 0.4.05, que é a versão mais atual e foi produzida pelo engenheiro de *software* Pedro Duque Vieira e veremos agora interface e algumas de suas ferramentas.

Figura 1- Tela de apresentação do Modellus X 0.4.05



Fonte: Autor da pesquisa, 2022.

### **Instalando o Modellus X**

A primeira coisa a ser feita para se ter o Modellus X no seu computador é instalar uma versão do *Java™* que seja 7 ou superior. Abaixo você verá onde fazer gratuitamente o download do *Java™*.

**Figura 2-** tela de acesso ao *software* e download

Java

Pesquisar

Fazer Download Ajuda

Todos os Downloads do Java

Se você deseja fazer download do Java para outro computador ou Sistema Operacional, clique no link abaixo:  
[Todos os Downloads do Java](#)

Reportar um problema

Por que sou sempre redirecionado para esta página ao visitar uma página com uma aplicação Java?  
[Saiba mais](#)

## Download Gratuito do Java

Fazer o Download do Java para o seu computador desktop agora!

**Version 8 Update 201**  
 Data da release: 15 de janeiro de 2019

**Download Gratuito do Java**

[O que é o Java?](#)
[Eu tenho Java?](#)
[Precisa de Ajuda?](#)

### Por que fazer o download do Java?

A tecnologia Java permite trabalhar e se divertir em um ambiente de computação seguro. O upgrade para a versão mais recente do Java melhora a segurança do sistema, já que versões mais antigas não incluem as últimas atualizações de segurança.

O Java permite reproduzir jogos on-line, bater papo com pessoas de todo o mundo, calcular juros de hipoteca e exibir imagens em 3D, entre outras coisas.

Fonte: <http://www.java.com/pt BR/download/>

Quando instalado o *Java<sup>TM</sup>* em seu computador agora é a vez de instalar o Modellus X que você poderá encontrar no link a seguir. Ao lado podemos ver parte da página oficial onde podemos baixar o *software* e indicado com uma seta vermelha a variação do Modellus X que utilizaremos. Podemos também ver as variações disponíveis para os sistemas operacionais Linux e Mac OS. Clique no ícone “baixar” para fazer o download do instalador. Ao clicar no instalador clique em “Executar” e depois em “Avançar” até concluir a instalação. O Modellus X *está disponível em* <http://modellus.co/index.php/pt/baixar>.