Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação de Mestrado

Beatriz Catarene Rabelo de Carvalho

Estabilidade Paramétrica em um Problema Restrito de $P + 1$ Corpos do Tipo Sitnikov

São Luís - MA

2020

Beatriz Catarene Rabelo de Carvalho

Estabilidade Paramétrica em um Problema Restrito de $P + 1$ Corpos do Tipo Sitnikov

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

São Luís - MA

2020

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Carvalho, Beatriz Catarene Rabelo de.
Estabilidade paramétrica em um problema restrito de p + 1 corpos do tipo Sitnikov / Beatriz Catarene Rabelo de Carvalho. - 2020.
68 f.

Orientador(a): Adecarlos Costa Carvalho.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

1. Estabilidade Paramétrica. 2. Problema de Sitnikov. 3. Problema Restrito. I. Carvalho, Adecarlos Costa. II. Título.

Beatriz Catarene Rabelo de Carvalho

Estabilidade Paramétrica em um Problema Restrito de $P + 1$ Corpos do Tipo Sitnikov

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 21 de Julho de 2020.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dra. Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias
(Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe - UFS

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por todas as boas coisas, foram muito mais do que pedi, e com certeza, bem mais do que mereci.

Agradeço à minha família: aos meus pais pelos sacrifícios e apoio, e às minhas irmãs pelo companheirismo.

Agradeço a todos os meus amigos da graduação e do mestrado, em especial: Arnando, Marcus e Marisa, pelos momentos divertidos que compartilhamos.

Agradeço a todos os meus professores do mestrado, entre eles destaco o professor Marcos, pelo apoio de sempre e pelas conversas bem humoradas, e o professor Ivaldo por, pacientemente, nos auxiliar durante o curso, como professor e coordenador.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA pelo apoio financeiro.

Agradeço ao meu amigo e orientador, Adecarlos, pela amizade, incentivo e paciência nos últimos anos.

"...a prolixidade tem sua dose de obscuridade, não menor do que a concisão. Esta escapa aos olhos da mente, aquela os confunde; esta carece de luz, aquela sofre de excesso de luminosidade; aqui a visão não se move, lá é ofuscada."

(Johann Kepler)

RESUMO

Neste trabalho, vamos estudar a estabilidade dos sistemas hamiltonianos lineares bem como alguns tópicos da Mecânica Celeste, como as configurações centrais e as soluções homográficas, com o objetivo de tratar da estabilidade paramétrica em um problema restrito do tipo Sitnikov. Vamos analisar essa estabilidade no plano dos parâmetros do problema e, com o auxílio do teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii e do método de Deprit-Hori, construir curvas nesse plano que separam as regiões de estabilidade e instabilidade.

Palavras-chave: Problema Restrito, Problema de Sitnikov, Estabilidade Paramétrica.

ABSTRACT

In this work, we will study the stability of linear hamiltonian systems such as some Celestial Mechanics topics, besides core settings and homographic solutions, in order to handle the parametric stability in a restricted problem in a kind of Sitnikov. We will analyze this stability in the plan of parameters of the problem and, with the aid of Krein-Gel'fand-Lidskii theorem and the Deprit-Hori method, we will create curves in this plan which separate the regions of stability and instability.

Keywords: Restricted Problem, Sitnikov Problem, Parametric Stability.

SUMÁRIO

Introdução **11**

1 Preliminares **13**

1.1 O Problema de Sitnikov 13

1.2 Configurações Centrais e Soluções Homográficas 16

1.3 Sistemas Hamiltonianos 20

1.3.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares 21

1.4 Matrizes Simpléticas 22

2 Sistema Linear e Estabilidade Paramétrica **26**

2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov 26

2.2 Sistemas Hamiltonianos Lineares com Coeficientes Constantes 27

2.2.1 Estabilidade 27

2.2.2 Forma Normal 28

2.3 Sistemas Hamiltonianos Lineares com Coeficientes Periódicos 30

2.4 O Problema da Ressonância Paramétrica 34

2.4.1 Teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii 35

3 Problema Restrito de $P + 1$ Corpos do Tipo Sitnikov **37**

3.1 Formulação do Problema 37

3.2 Ressonância Paramétrica no Problema 42

3.3 Método de Deprit-Hori 45

3.4 Regiões de Estabilidade e Instabilidade 47

3.4.1 Curvas que emanam de $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 51

3.4.2 Outros Pontos Ressonantes 54

4 Conclusão **59**

Referências **60**

A

A Função Geradora W **62**

B

Algumas Identidades **64**

Introdução

A Mecânica Celeste é um ramo da Astronomia e da Matemática que estuda a dinâmica dos corpos celestes utilizando as leis da mecânica. Essa área, como se conhece hoje, inicia-se no século XVII, com a publicação de *Philosophiae naturalis principia mathematica*, de Isaac Newton, em 1687. O interesse pelo movimento dos astros, porém, é bem mais antigo. Civilizações como a egípcia, grega e babilônica já construíam tabelas com informações do movimento diário dos corpos, e eram capazes de prever, por exemplo, a aparição de eclipses. Desde o surgimento da Mecânica Celeste muito se foi estudado e grandes nomes da Matemática, Física e Astronomia se dedicaram à ela, entre eles: Newton, Leibniz, Euler, Clairaut, D'Lambert, Cauchy, Lagrange, Laplace, Liouville, Weierstrass, Poincaré e Lyapunov [12].

O problema de P corpos é um problema clássico da Mecânica Celeste. Consiste no seguinte: são dadas as posições e as velocidades de P corpos num certo instante, e o objetivo é determinar a posição e a velocidade dos corpos para um outro instante qualquer, conhecendo-se as massas dos corpos e supondo que a única força agindo sobre eles é a atração gravitacional mútua. Então, num instante $t_0 \in \mathbb{R}$, dadas as posições $\mathbf{r}_j(t_0)$ e velocidades $\dfrac{d\mathbf{r}_j}{dt}(t_0)$ de todas as partículas, $j = 1, 2, \cdots, P$, com $\mathbf{r}_k(t_0) \neq \mathbf{r}_j(t_0)$ se $k \neq j$, o problema de P corpos consiste em estudar o sistema de equações:

$$m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2} = \sum_{k=1, k\neq j}^{P} G m_j m_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3}, \tag{1}$$

para $j = 1, 2, \cdots, P$, onde G é a constante de gravitação universal e m_j é a massa da j-ésima partícula. Observe que (1) é a combinação da Segunda Lei de Newton com a Lei da Gravitação Universal para a partícula j-ésima. Para o problema de dois corpos, quando o momento angular é não nulo, as órbitas descritas pelas partículas são conhecidas: elipses ou hipérboles ou parábolas. Para o problema de três corpos há vários estudos de casos particulares, e abordaremos neste trabalho um deles: o problema restrito de três corpos, com o intuito de apresentar o problema de Sitnikov.

Esta dissertação é uma pesquisa bibliográfica, que tem por objetivos principais estudar um problema da Mecânica Celeste e os resultados apresentados no artigo [2]. Entre as motivações para os estudos na Mecânica Celeste, podemos citar as aplicações desse ramo em diversas áreas. Buscando cumprir as metas do trabalho, foram consultados livros, artigos, notas de aula e trabalhos de conclusão de curso.

De maneira geral, vamos analisar a estabilidade de um sistema hamiltoniano relacionado a um problema restrito: um corpo de massa infinitesimal se move sob a ação de P primários de massas iguais, e ao longo de uma linha reta perpendicular ao plano de movimento deles; os P primários se movem em uma solução homográfica elíptica do problema de P corpos, e o corpo de massa infinitesimal passa pelo foco comum das elipses. Quando $P = 2$, o problema é conhecido como problema de Sitnikov. A dissertação foi organizada como segue.

O primeiro capítulo tem por objetivo expor alguns resultados introdutórios para o estudo do artigo [2]. Nele descrevemos o problema restrito de três corpos e o problema de Sitnikov e, além disso, apresentamos os conceitos de configuração central e solução homográfica. As definições de sistema hamiltoniano e matriz simplética também compõem esse capítulo.

O capítulo 2 trata da estabilidade dos sistemas lineares com coeficientes constantes e periódicos e do caso em que esses sistemas são hamiltonianos. Definimos forma normal de um sistema e fazemos algumas considerações a respeito da normalização para o caso de sistemas com um grau de liberdade. Por fim, apresentamos o problema da ressonância paramétrica, definimos sistema parametricamente estável e exibimos o teorema de Krei-Gel'fand-Lidskii.

No capítulo 3, apresentamos o problema presente no artigo [2], juntamente com seu hamiltoniano. Analisamos o sistema linear associado a esse hamiltoniano nos casos em que $\epsilon = 0$ e $\epsilon \neq 0$, mas próximo de zero. Calculamos os pontos ressonantes e, com o auxílio do teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii e do método de Deprit-Hori, construímos curvas que partem de alguns desses pontos e separam regiões de estabilidade e instabilidade.

O último capítulo é dedicado às considerações finais do trabalho.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos elementares que serão necessários no decorrer deste trabalho. Começamos com o problema restrito de três corpos e, tendo como referência o trabalho de Lhotka [3], falamos a respeito do problema de Sitnikov. Também apresentamos os conceitos de configuração central e solução homográfica, com base no trabalho de Silva [8]. Nas últimas duas seções, definimos sistemas hamiltonianos, mostramos resultados acerca dos sistemas hamiltonianos lineares, e falamos de transformações simpléticas, que tem grande importância por preservarem a estrutura hamiltoniana das equações, e, para a construção dessas seções, consultamos o trabalho de Vidal em [11].

1.1 O Problema de Sitnikov

O problema de Sitnikov foi formulado pelo matemático russo Kirill Alexandrovitch Sitnikov. Antes de o descrevermos, precisamos definir o problema restrito de três corpos. Para isso, consideremos a Equação (1). Fazendo $P = 3$, nós temos o seguinte sistema de equações:

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{Gm_1m_3}{r_{31}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \tag{1.1}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{Gm_2m_3}{r_{32}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \tag{1.2}$$

$$m_3 \frac{d^2\mathbf{r}_3}{dt^2} = \frac{Gm_3m_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_3m_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \tag{1.3}$$

O *problema restrito de três corpos* tem por objetivo estudar o movimento do corpo de massa infinitesimal m_3 (isto é, $m_3 \approx 0$), que não influencia o movimento dos corpos de massas m_1 e m_2, chamados *primários*, mas, de forma que ainda sofre influência deles.

De (1.3), nós temos que a equação do movimento do corpo de massa m_3 será:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_3}{dt^2} = \frac{Gm_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3).$$

Como o corpo de massa m_3 tem uma influência desprezível no movimento dos primários, podemos estudar tal movimento através do problema de dois corpos, que pode ser encontrado nos trabalhos de Rangel [7], Szebehely e Mark [9], e Meyer e Offin [6]. Se ρ é a distância entre os corpos de massas m_1 e m_2, temos

$$\rho = \frac{q}{1 + \epsilon\cos\theta}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{\rho^2}, \tag{1.4}$$

onde $q = \frac{c^2}{G(m_1+m_2)}$, c é a norma do momento angular, G é a constante de gravitação universal, ϵ é a excentricidade da cônica definida pelos primários, e θ é a anomalia verdadeira. Com algumas manipulações, que omitiremos nesse texto, conseguimos a seguinte expressão para c:

$$c = \sqrt{a(1-\epsilon^2)(G(m_1+m_2))}, \tag{1.5}$$

onde a é o semi-eixo maior da cônica.

Definição 1.1. O problema restrito é dito **elíptico** quando os primários se movem em órbitas elípticas.

Definição 1.2. Dizemos que o problema restrito de três corpos é **planar** se o corpo de massa infinitesimal m_3 permanece no plano de movimento dos primários para todo tempo. Se, para algum tempo, o corpo de massa m_3 sai desse plano, o problema restrito é chamado **espacial**.

O problema de Sitnikov é um problema restrito elíptico e espacial. Consiste no seguinte: um corpo de massa infinitesimal se movimenta ao longo de uma reta perpendicular ao plano de movimento dos primários, estes com massas iguais e se movimentando em órbitas elípticas antissimétricas.

Com a notação apresentada acima, considere como primários os corpos de massas m_1 e m_2, seu plano de movimento sendo o XY, o terceiro corpo se movimentando no eixo Z, e a origem coincidindo com o centro de gravidade. Sejam $m = m_1 = m_2$ e X o eixo que contém os focos (veja Figura 1.1).

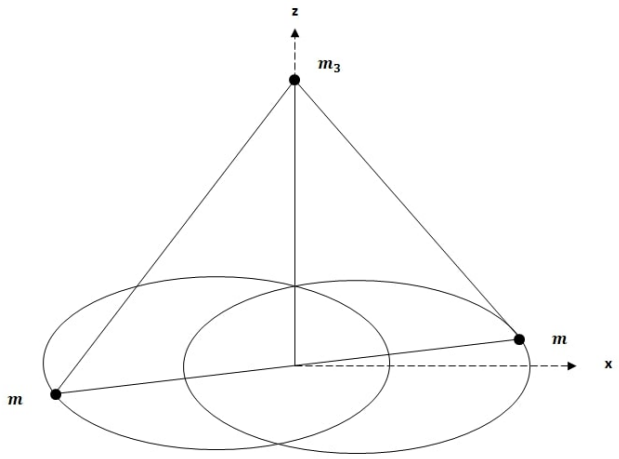

Figura 1.1: Problema de Sitnikov

Consideremos $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ o vetor posição do corpo de massa m_i, com $i = 1, 2, 3$. Como os primários se movem em órbitas antissimétricas, temos

$$\mathbf{r_1}(t) = -\mathbf{r_2}(t) = (x_1, y_1, 0),$$

para todo t, e por (1.1), (1.2) e (1.3), obtemos as equações

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gmx_1}{4(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{Gmy_1}{4(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que descrevem o movimento de um dos primários e,

$$\frac{d^2z_3}{dt^2} = -\frac{2Gmz_3}{(x_1^2 + y_1^2 + z_3^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.6}$$

que descreve o movimento do corpo de massa infinitesimal. A partir de agora, usaremos x, y, z para denotar x_1, y_1, z_3, respectivamente. Seja $r^2 = x^2 + y^2$. Temos

$$r = \frac{q}{1 + \epsilon\cos\theta}, \qquad q = \frac{c^2}{2mG} = a(1 - \epsilon^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} = \sqrt{\frac{2Gm}{a^3(1 - \epsilon^2)^3}}(1 + \epsilon\cos\theta)^2,$$

onde a é o semi-eixo maior de um dos primários, e as novas expressões que surgem são obtidas de (1.5).

Tendo em vista esse valor de $r = r(t)$, a Equação (1.6) do terceiro corpo é da forma

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{2Gmz}{(r(t)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.7}$$

O caso em que $\epsilon = 0$, conhecido como Problema de MacMillan, foi estudado por MacMillan em [5].

1.2 Configurações Centrais e Soluções Homográficas

Definição 1.3. Uma configuração $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_P)$ de P corpos, com as massas $m_1, m_2, \cdots, m_P$, é chamada **central** se existe um número real λ de forma que

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{P} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \lambda m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, P.$$

Nessa definição, consideramos o centro de massa na origem. Provaremos a seguir que o número λ acima é positivo. Para isso, vamos precisar de um lema e algumas definições.

Lema 1.1 (Euler)**.** *Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogênea de grau k, diferenciável, vale a identidade $\nabla f(x) \cdot x = k f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Sendo homogênea de grau k, temos $f(\alpha x) = \alpha^k f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Derivando em relação a α, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha x)}{\partial \alpha x_i} \frac{d(\alpha x_i)}{d\alpha} = k\alpha^{k-1} f(x)$$

e fazendo $\alpha = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot x_i = k f(x),$$

como queríamos. □

Definição 1.4. A **energia potencial** do sistema (1) é a aplicação $U : \mathbb{R}^{3P} \backslash \Delta \to (0, +\infty)$, dada por

$$U(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq P} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$

com $x = (\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_P)$ e $\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq P} \Delta_{ij}$, onde $\Delta_{ij} = \{(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_P) \in \mathbb{R}^{3P}; \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\}$.

Definição 1.5. O **momento de inércia** do sistema (1) é a aplicação $\mathcal{I} : \mathbb{R}^{3P} \to (0, +\infty)$ dada por

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{P} m_j |\mathbf{r}_j|^2,$$

onde $x = (\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_P)$.

Proposição 1.1. O número real λ da Definição 1.3 é da forma $\lambda = \dfrac{U}{2\mathcal{I}}$. Em particular, $\lambda > 0$.

Demonstração. Da Definição 1.3, temos

$$U_{\mathbf{r}_i} + \lambda \mathcal{I}_{\mathbf{r}_i} = 0, \;\; i = 1, 2, \cdots, P, \tag{1.8}$$

onde $U_{\mathbf{r}_i}$, $\mathcal{I}_{\mathbf{r}_i}$ são as derivadas das aplicações em relação a $\mathbf{r}_i$. De (1.8), temos

$$U_{\mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i + \lambda \mathcal{I}_{\mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i = 0, \;\; i = 1, 2, \cdots, P,$$

onde " $\cdot$ " denota o produto escalar. Então

$$\sum_{i=1}^{P} U_{\mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i + \lambda \sum_{i=1}^{P} \mathcal{I}_{\mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i = 0. \tag{1.9}$$

Observe que U e $\mathcal{I}$ são homogêneas de graus -1 e 2, respectivamente. Do Lema 1.1 e de (1.9), temos

$$-U + \lambda 2\mathcal{I} = 0, \tag{1.10}$$

ou seja, $\lambda = \frac{U}{2\mathcal{I}}$, o que encerra a demonstração.

□

Definição 1.6. Uma solução $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_P)$ do problema de P corpos é chamada **homográfica** se existem aplicações diferenciáveis $d : I \to \mathbb{R}_+$ e $\Omega : I \to SO(3)$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $SO(3)$ é o grupo de todas as rotações sobre a origem de $\mathbb{R}^3$ (com a operação de composição), tais que

$$\mathbf{r}_j(t) = d(t)\,\Omega(t)\,\mathbf{r}_j^0, \quad j = 1, 2, \cdots, P,$$

com $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_j(t_0)$. Nessa definição, consideramos o centro de massa na origem.

Observação 1.1. Como o produto de números complexos é uma rotação seguida de uma homotetia, uma solução homográfica no plano, considerando a identificação de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, pode ser escrita na forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \phi(t) a_i, i = 1, 2, \cdots, P, \tag{1.11}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $a_i \in \mathbb{C}$.

Observação 1.2. Mostremos agora um exemplo de solução homográfica. Consideremos 3 corpos no plano, com $\mathbf{r}_k(t) = e^{i\omega t} a_k$, onde a_1, a_2 e a_3 são vértices de um triângulo equilátero, $\omega^2 = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{l^3}$, e $l = |a_1 - a_2| = |a_1 - a_3| = |a_2 - a_3|$ é o comprimento do

lado do triângulo. Para provarmos que $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ é uma solução homográfica, basta mostrarmos que $\mathbf{r}$ é solução de (1), pois $\mathbf{r}_k$ já cumpre (1.11), para $k = 1, 2, 3$. Temos,

$$\frac{d^2\mathbf{r}_k(t)}{dt^2} = -\omega^2\phi(t)a_k = -\frac{m_1 + m_2 + m_3}{l^3}\phi(t)a_k,$$

onde $\phi(t) = e^{i\omega t}$. Então,

$$\frac{d^2\mathbf{r}_k(t)}{dt^2} = -\frac{\phi(t)a_k}{l^3}(m_1 + m_2 + m_3) = -\frac{\phi(t)a_k}{l^3}\sum_{j=1}^{3} m_j = \frac{\phi(t)}{l^3}\left(-\sum_{j=1}^{3} m_j a_k\right) =$$

$$\frac{\phi(t)}{l^3}\left(-m_k a_k - \sum_{j\neq k} m_j a_k\right) = \frac{\phi(t)}{l^3}\left(\sum_{j\neq k} m_j a_j - \sum_{j\neq k} m_j a_k\right) = \frac{\phi(t)}{l^3}\sum_{j\neq k} m_j(a_j - a_k) =$$

$$\frac{1}{l^3}\sum_{j\neq k} m_j(\phi(t)a_j - \phi(t)a_k) = \frac{1}{|a_j - a_k|^3|\phi(t)|^3}\sum_{j\neq k} m_j(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)) =$$

$$\frac{1}{|\phi(t)a_j - \phi(t)a_k|^3}\sum_{j\neq k} m_j(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)) = \sum_{j\neq k} m_j\frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)}{|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)|^3},$$

onde usamos o fato de $-m_k a_k = \sum_{j\neq k} m_j a_j$, pois $\sum_{j=1}^{3} m_j a_j = 0$, e $|\phi(t)| = 1$.

Definição 1.7. Uma solução do problema de P corpos é **planar** se existe um plano contendo os P corpos para todo instante t.

Definição 1.8. Uma solução do problema de P corpos é chamada **flat** se, para cada t, existe um plano contendo os P corpos.

Observação 1.3. Toda solução planar é uma solução flat.

Teorema 1.1. Uma solução homográfica flat do problema de P corpos é planar.

Demonstração. Veja [8], Teorema 1. □

Veremos a seguir resultados que relacionam as configurações centrais com as soluções homográficas.

Teorema 1.2. Seja $r^0 = (\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0, \cdots, \mathbf{r}_P^0)$, uma configuração central das massas m_j, $j = 1, \cdots, P$. Então, existem funções $d(t)$ e $\Omega(t)$ tais que $\mathbf{r}_j(t) = d(t)\Omega(t)\mathbf{r}_j^0$, $j = 1, \cdots, P$, é uma solução homográfica.

Demonstração. Veja [8], Proposição 8. □

Teorema 1.3. Se uma solução homográfica do problema de P corpos, $\mathbf{r}_j(t), j = 1, \cdots, P$, é planar, então $\mathbf{r}_i(t) = \phi(t)a_i$, com $i = 1, 2, \cdots, P$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_P)$ é uma configuração central e $\phi(t)$ é solução do Problema de Kepler

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi(t)) = -\lambda \frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|^3}.$$

Demonstração. Pela Observação 1.1, podemos escrever $\mathbf{r}_i(t) = \phi(t)a_i$, onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $a_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, 2, \cdots, P$. Sendo $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_P)$ solução do sistema (1), temos

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}(\phi(t))\, a_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{P} m_i m_j \frac{\phi(t)a_j - \phi(t)a_i}{\|\phi(t)a_j - \phi(t)a_i\|^3}$$

logo,

$$\|\phi(t)\|^3 \frac{d^2}{dt^2}(\phi(t))\, \phi^{-1}(t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{P} m_i m_j \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^3} m_i^{-1} a_i^{-1}. \tag{1.12}$$

Como o lado direito da equação não depende de t, a expressão no primeiro membro é constante, isto é, existe um λ tal que

$$\|\phi(t)\|^3 \frac{d^2}{dt^2}(\phi(t))\, \phi^{-1}(t) = -\lambda$$

ou seja,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi(t)) = -\lambda \frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|^3}.$$

De (1.12) temos,

$$-\lambda m_i a_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{P} m_i m_j \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|^3},$$

provando assim que $a = (a_1, a_2, \cdots, a_P)$ é uma configuração central. □

Neste trabalho, vamos utilizar uma solução homográfica planar. Nesse caso, cada corpo pode descrever uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Vamos trabalhar com uma solução homográfica planar elíptica. Abaixo mostraremos a geometria desse tipo de solução: as órbitas são coplanares, com a origem sendo o foco comum das elipses.

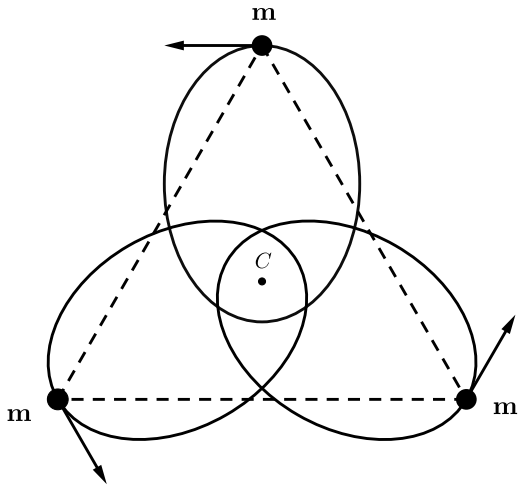

Figura 1.2: Solução homográfica para $P = 3$.

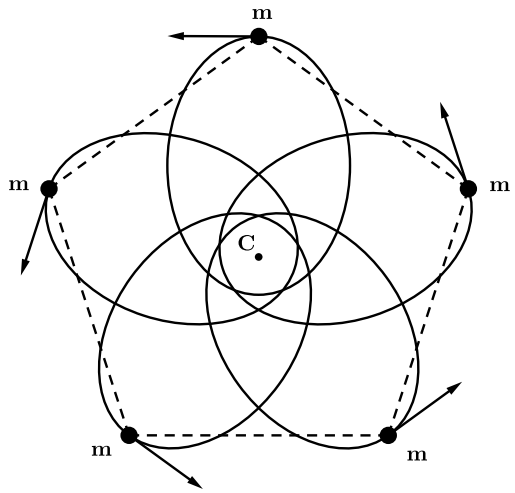

Figura 1.3: Solução homográfica para $P = 5$.

1.3 Sistemas Hamiltonianos

Definição 1.9. Um **sistema hamiltoniano** é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\frac{dq}{dt} = H_p \qquad \frac{dp}{dt} = -H_q, \tag{1.13}$$

onde $H = H(q, p, t)$ é uma aplicação diferenciável definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. H é chamada *hamiltoniano*, $q = (q_1, \cdots, q_n), p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ são ditas *variáveis conjugadas*. A variável t é o *tempo* e o inteiro n é o *número de graus de liberdade* do sistema.

Se considerarmos

$$z = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \qquad J = J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{bmatrix}$$

onde 0 é a matriz nula de ordem n e I_n é a matriz identidade $n \times n$, podemos reescrever (1.13) na forma

$$\frac{dz}{dt} = J\nabla H(z, t).$$

Observação 1.4. O determinante da matriz J é igual a 1. Além disso, J é antissimétrica e ortogonal, isto é, sua inversa é igual à sua transposta, portanto,

$$J^{-1} = J^T = -J,$$

onde J^T denota a matriz transposta de J.

Observação 1.5. Se H não depende de t, então, ao longo de uma solução, $H = c$, com c constante. De fato,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} H_{q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} H_{p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dq_i}{dt} \cdot \frac{dp_i}{dt} = 0,$$

para todo t.

1.3.1 Sistemas Hamiltonianos Lineares

Na definição abaixo, usaremos a notação $\mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{F})$ para representar o conjunto de todas as matrizes de ordem $2n$ com entradas em $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.10. Consideremos $z \in \mathbb{R}^{2n}$ e uma aplicação simétrica $S : I \to \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$, onde I é um intervalo da reta. Um **sistema hamiltoniano linear** é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dz}{dt} = J\nabla H(z,t) = JS(t)z = A(t)z \tag{1.14}$$

onde $H = H(z,t) = \frac{1}{2}z^T S(t)z$ e $A(t) = JS(t)$.

Definição 1.11. Dizemos que uma matriz $A \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ é **hamiltoniana** se $A^T J + JA = 0$. Denotamos o conjunto de todas as matrizes hamiltonianas de ordem $2n$ com entradas em $\mathbb{F}$ por $sp(2n, \mathbb{F})$.

Observação 1.6. A matriz $A(t)$ do sistema hamiltoniano linear (1.14) é hamiltoniana. De fato,

$$(JS)^T J + J(JS) = S^T J^T J - S = -SJJ - S = S - S = 0.$$

Proposição 1.2. As afirmações abaixo são equivalentes:

1. A é hamiltoniana;
2. $A = JS$, com S simétrica;
3. JA é simétrica.

Mais ainda: se A e B são hamiltonianas, então $A^T, \alpha A$ ($\alpha \in \mathbb{F}$), $A \pm B$, e $[AB] = AB - BA$ o são também.

Demonstração. Veja [11], Teoremas 2 e 3. □

Proposição 1.3. Se A é uma matriz hamiltoniana, então seu polinômio característico é uma função par.

Demonstração. Se A é hamiltoniana, então, pela Proposição 1.2, podemos escrever $A = JS$, com S simétrica. Considere I_{2n} a matriz identidade $2n \times 2n$. Temos,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(JS - \lambda I_{2n}) = \det(JS - \lambda I_{2n})^T &= \det(S^T J^T - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(-SJ - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(JJSJ + J^2 \lambda I_{2n}) \\ &= \det J(JS + \lambda I_{2n})J \\ &= \det J \det(JS + \lambda I_{2n}) \det J \\ &= \det(JS + \lambda I_{2n}) \\ &= p(-\lambda). \end{aligned}$$

□

1.4 Matrizes Simpléticas

Definição 1.12. Uma transformação de coordenadas $E : \mathbb{U} \times I \to \mathbb{R}^{2n}$ ($\mathbb{C}^{2n}$), onde $\mathbb{U}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$ (ou de $\mathbb{C}^{2n}$), é dita **simplética** ou **canônica** se, para cada $t \in I$ fixado, ela é um difeomorfismo e

$$[D_z E(z,t)]^T J D_z E(z,t) = J$$

onde $\zeta = E(z,t)$, $z = Z(\zeta, t)$. De maneira mais geral, podemos definir uma transformação μ-**simplética** ou transformação **simplética com multiplicador** μ como uma transformação difeomorfa que satisfaz

$$[D_z E(z,t)]^T J D_z E(z,t) = \mu J.$$

As transformações simpléticas (assim como as μ-simpléticas) têm grande importância por preservarem a estrutura hamiltoniana das equações. Vamos olhar a partir de agora para o caso particular em que a transformação de coordenadas é linear.

Definição 1.13. Dizemos que uma matriz $S \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ é **simplética com multiplicador** μ, ou μ-**simplética**, se

$$S^T J S = \mu J$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ constante. Quando $\mu = 1$, S é chamada **simplética**. Denotamos por $Sp(2n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes simpléticas em $\mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$.

Observação 1.7. Toda matriz simplética satisfaz $(\det S)^2 = 1$. De fato, $\det S^T = \det S$, $\det J = 1$, e $\det S^T J S = \det S^T \det J \det S$.

Proposição 1.4. Seja S uma matriz simplética com multiplicador η. Então, S é não singular e $S^{-1} = -\eta J S^T J$. Além disso, S^T e S^{-1} são simpléticas com multiplicadores η e η^{-1}, respectivamente. Mais ainda, se R é μ-simplética, então SR é $\eta\mu$-simplética.

Demonstração. Veja [11], Teorema 7. □

Do resultado acima segue que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é um grupo e, além disso, é um subgrupo de $Gl(2n, \mathbb{R})$, que é o conjunto de todas as matrizes não singulares $2n \times 2n$ com entradas em $\mathbb{R}$.

Proposição 1.5. A mudança $\zeta = T^{-1}(t)z$, com T^{-1} μ-simplética, transforma o sistema (1.14) no sistema hamiltoniano linear

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(T^{-1} A T - T^{-1} \frac{dT}{dt} \right) \zeta.$$

Em outras palavras, uma mudança de coordenadas induzida por uma matriz μ-simplética T^{-1} leva sistemas hamiltonianos lineares em sistemas hamiltonianos lineares.

Demonstração. Consideremos o sistema hamiltoniano linear $\dfrac{dz}{dt} = A(t)z$ e a mudança $\zeta = T^{-1}z$. Provemos que

$$T^{-1} A T - T^{-1} \frac{dT}{dt}$$

é hamiltoniana. Como T^{-1} é μ-simplética, T é μ^{-1}-simplética, logo, pela Proposição 1.4, T^T também, isto é, $TJT^T = \mu^{-1}J$, para todo t. Derivando essa última expressão em relação a t, temos

$$\frac{dT}{dt}JT^T + TJ\frac{dT^T}{dt} = 0,$$

daí,

$$\frac{dT^T}{dt} = -J^{-1}T^{-1}\frac{dT}{dt}JT^T,$$

e então

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\frac{dT}{dt}\right)^T J + J\left(T^{-1}\frac{dT}{dt}\right) &= \left(\frac{dT}{dt}\right)^T (T^{-1})^T J + JT^{-1}\frac{dT}{dt} \\ &= JT^{-1}\frac{dT}{dt}JT^T(T^{-1})^T J + JT^{-1}\frac{dT}{dt} \\ &= -JT^{-1}\frac{dT}{dt} + JT^{-1}\frac{dT}{dt} \\ &= 0,\end{aligned}$$

logo, $T^{-1}\dfrac{dT}{dt}$ é hamiltoniana. Mostraremos agora que $T^{-1}AT$ é hamiltoniana. Como T^{-1} é μ-simplética, temos $T^{-1} = -\mu JT^T J$, assim

$$\begin{aligned}(T^{-1}AT)^T J + J(T^{-1}AT) &= T^T A^T(-\mu JT^T J)^T J + J(-\mu JT^T J)AT \\ &= \mu T^T A^T JT + \mu T^T JAT \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde a última igualdade deve-se ao fato da matriz A ser hamiltoniana, pois dessa forma é válida a identidade: $A^T J = -JA$. Logo, a matriz $T^{-1}AT$ é hamiltoniana. Segue portanto da Proposição 1.2 que é hamiltoniana a matriz $T^{-1}AT - T^{-1}\dfrac{dT}{dt}$. □

Teorema 1.4. Para todo $t, t_0 \in I$, a matriz fundamental $Z(t, to)$ do sistema (1.14) é simplética. Reciprocamente, se $Z(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então Z é uma matriz fundamental de um sistema hamiltoniano linear, com $Z(t_0, t_0) = I$.

Demonstração. Veja [11], Teorema 8. □

Corolário 1.1. Se a matriz A do sistema (1.14) é constante, então A é hamiltoniana se, somente se, e^{At} é simplética, para todo t.

Demonstração. Sendo A constante, a solução fundamental de (1.14) é $Z(t) = e^{At}$. Pelo Teorema 1.4, $Z(t)$ é simplética. □

Proposição 1.6. Se T é uma matriz simplética e λ é um autovalor de T, então $\frac{1}{\lambda}$ também é um autovalor de T, com a mesma multiplicidade algébrica.

Demonstração. Sendo T simplética vale $T^T = -JT^{-1}J$. Supondo que λ é um autovalor de T,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(T - \lambda I_{2n}) = \det(T - \lambda I_{2n})^T &= \det(T^T - \lambda I_{2n}) \\ &= \det(-JT^{-1}J + \lambda JJ) \\ &= \det J \det(-T^{-1} + \lambda I_{2n}) \det J \\ &= \det\left[\lambda T^{-1}\left(-\frac{1}{\lambda} I_{2n} + T\right)\right] \\ &= \lambda^{2n} \det T^{-1} \det\left(-\frac{1}{\lambda} I_{2n} + T\right) \\ &= \pm\lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade que $\det T^{-1} = \pm 1$, como visto na Observação 1.7. □

Corolário 1.2. O determinante de uma matriz simplética é 1.

Demonstração. A Proposição 1.6 implica que se λ é um autovalor de uma matriz simplética T, então $\frac{1}{\lambda}$ também é. Disso e do fato do determinante de uma matriz ser igual ao produto de seus autovalores, segue o resultado. □

2 Sistema Linear e Estabilidade Paramétrica

O presente capítulo tem por objetivo apresentar o teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii, que nos auxiliará no estudo da estabilidade paramétrica do problema apresentado no artigo [2], tratado no próximo capítulo. Para a consulta dos resultados referentes à estabilidade dos sistemas lineares com coeficientes constantes e periódicos, utilizamos o trabalho de Vidal em [10]. Para tratar da estabilidade dos sistemas hamiltonianos lineares, forma normal, ressonância paramétrica e o teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii, consultamos o livro do Markeev [4].

2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Vamos definir uma solução estável no sentido de Lyapunov, e verificar que esse conceito reduz-se ao de estabilidade de uma solução de equilíbrio. Para isso, consideremos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{2.1}$$

com $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sendo uma aplicação de classe C^1 definida no aberto O.

Definição 2.1. Seja $\bar{x}(t)$ uma solução de (2.1), com $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. A solução $\bar{x}(t)$ é dita:

- **estável** no sentido de Lyapunov, se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que para qualquer solução $x(t)$, com $x(t_0) \in B_\delta(\bar{x}_0)$, $x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$ e $|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \epsilon$, para todo $t \geq t_0$;
- **assintoticamente estável** se é estável e existe $\delta_1 > 0$, com $\delta_1 < \delta$, tal que $|x(t_0)| < \delta_1$ implica $\lim_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0$.
- **instável** se não é estável.

Definição 2.2. Uma solução $x(t) = x^*$ de (2.1), com x^* constante, $f(x^*, t) = 0$, para todo t, é chamada **solução de equilíbrio**.

Observação 2.1. Na Definição 2.1, tratamos da estabilidade para uma solução qualquer de (2.1). Mostraremos agora que essa definição reduz-se à de estabilidade de um equilíbrio. Consideremos $\bar{x}(t)$ uma solução de (2.1) e definamos $x(t) = z(t) + \bar{x}(t)$. Se $x(t)$ é solução de (2.1), então

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f(z + \bar{x}, t) - f(\bar{x}, t),$$

e, reciprocamente, se $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ é solução de

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t) = f(z + \bar{x}, t) - f(\bar{x}, t),$$

temos,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{d\bar{x}}{dt} = f(z + \bar{x}, t)$$

logo,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

e portanto, $x(t)$ é solução de (2.1) se, e somente se, $z(t)$ é solução do sistema

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t), \tag{2.2}$$

onde $g(z, t) = f(z+\bar{x}, t)-f(\bar{x}, t)$. Note agora que $\bar{x}(t)$ corresponde à solução de equilíbrio $\bar{z} = 0$ de (2.2).

2.2 Sistemas Hamiltonianos Lineares com Coeficientes Constantes

2.2.1 Estabilidade

Vamos relembrar um resultado a respeito da estabilidade dos sistemas lineares com coeficientes constantes, e a partir dele discutir a estabilidade para o caso em que esses sistemas são hamiltonianos. Seja dado o sistema linear homogêneo

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2.3}$$

Teorema 2.1. Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ autovalores da matriz A e J_λ o bloco de Jordan, em $\mathbb{C}$, com respeito a λ. Para a solução nula do sistema (2.3), temos:

- Sendo A não singular:

  - assintoticamente estável se, e somente se, para todo autovalor λ de A, $Re(\lambda) < 0$;
  - estável, mas não assintoticamente estável, se, e somente se, A tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros, cada bloco de Jordan J_λ, em $\mathbb{C}$, associado a cada autovalor imaginário puro λ é diagonal, e o resto dos autovalores possui parte real negativa.

- Sendo A singular:
  - estável se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan com respeito ao autovalor nulo é diagonal;
  - estável quando A tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros, cada bloco de Jordan, em $\mathbb{C}$, associado a cada autovalor imaginário puro e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo sejam diagonais e o resto dos autovalores possui parte real negativa;
  - instável nos outros casos.

Como dissemos, utilizando o teorema acima vamos analisar a estabilidade do sistema hamiltoniano linear

$$\frac{dx}{dt} = JSx \tag{2.4}$$

onde $x^T = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n})$ e S é uma matriz simétrica e constante. Pela Observação 1.6, a matriz JS é hamiltoniana, assim, pela Proposição 1.3, $p(\lambda) = \det(JS - \lambda I_{2n})$ é uma função par. Logo, se $\lambda = a+ib$, com $a < 0$, é um autovalor, então $-\lambda = -a-ib$ também é. Pelo Teorema 2.1, o sistema (2.4), nessas condições, é instável.

Portanto, para a estabilidade de (2.4), é necessário que todos os autovalores sejam números imaginários puros. Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.4) é que todas as raízes da equação característica sejam números imaginários puros e JS diagonalizável.

2.2.2 Forma Normal

Vamos supor que a equação característica associada ao sistema (2.4) tenha apenas raízes imaginárias puras simples, da forma $\lambda_k = i\omega_k$ e $\lambda_{n+k} = -i\omega_k$, com $\omega_k > 0$, $k =$

$1, 2, \cdots, n$.

Definição 2.3. Dizemos que o sistema (2.4) está em sua **forma normal** quando, por meio de uma transformação real linear simplética, seu hamiltoniano é da forma

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \delta_k \omega_k (y_k^2 + y_{n+k}^2), \tag{2.5}$$

onde $\delta_k = 1$ ou $\delta_k = -1$, e $y = (y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{2n})$ é a nova coordenada.

Vamos analisar agora a normalização para o caso em que $n = 1$. Considere que o sistema (2.4) tenha um grau de liberdade. Sua função hamiltoniana é da forma

$$H = h_{20}x_1^2 + h_{11}x_1x_2 + h_{02}x_2^2, \tag{2.6}$$

com

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 2h_{20} & h_{11} \\ h_{11} & 2h_{02} \end{bmatrix}, \qquad JS = \begin{bmatrix} h_{11} & 2h_{02} \\ -2h_{20} & -h_{11} \end{bmatrix},$$

e a equação característica associada ao sistema é

$$0 = p(\lambda) = \det(JS - \lambda I_1) = \lambda^2 + 4h_{02}h_{20} - h_{11}^2,$$

logo, $\lambda = \pm i\sqrt{4h_{02}h_{20} - h_{11}^2} = \pm i\sqrt{\Delta} = \pm i\omega$. Como estamos interessados em autovalores imaginários puros, temos que ter $4h_{02}h_{20} - h_{11}^2 > 0$. A respeito da transformação que leva (2.4) à sua forma normal, vale o seguinte resultado:

Proposição 2.1. A mudança de coordenadas linear

$$x = Ny \text{ com } N = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{2|h_{02}|}{\omega}} \\ \sqrt{\frac{\omega}{2|h_{02}|}} & \frac{h_{11}}{h_{02}}\sqrt{\frac{|h_{02}|}{2\omega}} \end{bmatrix}$$

onde $y = (y_1, y_2)$, é simplética e leva o hamiltoniano (2.6) no hamiltoniano normalizado

$$H = \frac{\delta\omega}{2}(y_1^2 + y_2^2), \quad \delta = \text{sinal } (h_{02}).$$

Demonstração. Vale a identidade $N^T J N = J$. Fazendo a substituição:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2|h_{02}|}{\omega}}y_2 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{\omega}{2|h_{02}|}}y_1 + \sqrt{\frac{|h_{02}|}{2\omega}}y_2$$

temos,

$$\begin{aligned} H &= h_{20}x_1^2 + h_{11}x_1x_2 + h_{02}x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{h_{02}\omega}{|h_{02}|}y_1^2 + \left(\frac{h_{11}^2|h_{02}|}{2h_{02}\omega} - \frac{h_{11}^2|h_{02}|}{h_{02}\omega} + \frac{2h_{20}|h_{02}|}{\omega}\right)y_2^2 \\ &= \frac{\delta\omega}{2}y_1^2 + \left(-\frac{h_{11}^2\delta}{2\omega} + \frac{4h_{20}h_{02}|h_{02}|}{2h_{02}\omega}\right) \\ &= \frac{\delta\omega}{2}y_1^2 + \frac{\delta}{2}\left(\frac{4h_{20}h_{02} - h_{11}^2}{\omega}\right)y_2^2 \\ &= \frac{\delta\omega}{2}(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

□

A construção da matriz N para um sistema de n graus de liberdade pode ser encontrada no livro do Markeev [4]. Observe que dependendo da forma do hamiltoniano, a determinação da matriz de transformação pode ser algo simples. É o caso da função quadrática que vamos normalizar neste trabalho. Ela é da forma

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(\omega^2x^2 + X^2).$$

Sem o auxílio de algoritmos, podemos ver que uma mudança do tipo

$$x = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\bar{x} \qquad X = \sqrt{\omega}\bar{X} \tag{2.7}$$

leva $\mathcal{H}_0$ na função

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\omega\left(\bar{x}^2 + \bar{X}^2\right).$$

A mudança (2.7) será a que faremos mais adiante para normalizar o hamiltoniano do problema que vamos estudar. É importante observar que essa mudança é simplética, e é necessário que seja assim pois isso possibilita preservar o caráter hamiltoniano do sistema de equações.

2.3 Sistemas Hamiltonianos Lineares com Coeficientes Periódicos

Como feito na seção anterior, vamos relembrar um resultado acerca da estabilidade dos sistemas lineares com coeficientes periódicos, e em seguida discutir a estabilidade

no caso em que esses sistemas são hamiltonianos. Consideremos o sistema de equações

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2.8}$$

onde $x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $A(t)$ é uma matriz real contínua, 2π-periódica em t. Abaixo seguem alguns lemas que irão nos auxiliar na prova do teorema de Floquet.

Lema 2.1. *Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de (2.8), com $X(0) = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Então,*

$$X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi)$$

para todo t.

Demonstração. Basta definir $U(t) = X(t + 2\pi)$ e $V(t) = X(t)X(2\pi)$, e notar que ambas são soluções do problema de valor inicial

$$\frac{dZ}{dt} = A(t)Z \quad Z(0) = X(2\pi).$$

A igualdade $U(t) = V(t)$, para todo t, segue então do teorema de Existência e Unicidade. □

Lema 2.2 (Liouville). *Seja $X(t)$ uma matriz fundamental do sistema (2.8) em um intervalo real I. Se $t_0 \in I$, então*

$$\det X(t) = \det X(t_0)\ e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(t))dt},$$

para todo $t \in I$, onde $tr(A(t))$ é o traço de $A(t)$.

Demonstração. Veja [10], Teorema 23. □

Lema 2.3. *Se uma matriz C é tal que $\det C \neq 0$, então existe uma matriz B, de mesma ordem, tal que $e^B = C$. Dizemos nesse caso que a matriz C tem um logaritmo.*

Demonstração. Veja [10], Lema 8. □

Teorema 2.2 (Floquet). Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de (2.8), com $X(0) = I_n$, então existe uma matriz constante B e uma matriz Y continuamente diferenciável e 2π-periódica em t tal que $X(t) = Y(t)e^{Bt}$.

Demonstração. A matriz $X(t+2\pi)$ é também uma matriz fundamental de (2.8). De fato,

$$\frac{d}{dt}\left(X(t+2\pi)\right) = A(t+2\pi)X(t+2\pi) = A(t)X(t+2\pi).$$

Pelo Lema 2.1, $X(t+2\pi) = X(t)X(2\pi)$, isto é, existe uma matriz constante $C = X(2\pi)$ tal que $X(t+2\pi) = X(t)C$. Considerando a matriz fundamental $X(2\pi)$ e fazendo $t_0 = 0$, o Lema 2.2 implica $\det C \neq 0$. Logo, pelo Lema 2.3, $C = X(2\pi)$ tem um logaritmo, ou seja, existe B tal que $X(2\pi) = e^{2\pi B}$. Considere $Y(t) = X(t)e^{-Bt}$. Afirmamos que $Y(t)$ é 2π-periódica. Com efeito,

$$\begin{aligned} Y(t+2\pi) = X(t+2\pi)e^{-B(t+2\pi)} &= X(t+2\pi)e^{-2\pi B - Bt} \\ &= X(t)X(2\pi)e^{-2\pi B}e^{-Bt} \\ &= X(t)X(2\pi)X^{-1}(2\pi)e^{-Bt} \\ &= X(t)e^{-Bt} \\ &= Y(t), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade deve-se ao fato de tB e $2\pi B$ comutarem. Da forma como foi definida, $Y(t)$ é continuamente diferenciável, o que encerra a demonstração. □

Corolário 2.1. A mudança de variáveis $x = Y(t)y$ transforma o sistema (2.8) no sistema $\dfrac{dy}{dt} = By$ de coeficientes constantes.

Demonstração. Veja [10], Teorema 35. □

Definição 2.4. Os autovalores χ da matriz B são chamados **expoentes característicos**, e os autovalores ρ da matriz $X(2\pi)$ são chamados **multiplicadores** do sistema (2.8).

Observação 2.2. Os autovalores de B e os de $X(2\pi)$ se relacionam da forma: $\rho_j = e^{2\pi\chi_j}$, com $j = 1, 2, \cdots, n$.

Segue do Corolário 2.1 que analisar a estabilidade de (2.8) é o mesmo que analisar a estabilidade de $\dfrac{dy}{dt} = By$, que é um sistema com coeficientes constantes. Logo, acerca da estabilidade deste sistema temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3. A solução nula de (2.8) é:

- assintoticamente estável se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real negativa;

- estável, segundo Lyapunov, se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real menor do que ou igual a 0, e, além disso, os com parte real nula possuem bloco de Jordan, sobre $\mathbb{C}$, diagonal;
- instável se, e somente se, existe algum expoente característico com parte real positiva.

Corolário 2.2. O sistema (2.8) é estável, no sentido de Lyapunov, se, e somente se, todos os seus multiplicadores têm módulo menor do que ou igual a 1, e quando $|\rho| = 1$ a matriz $X(2\pi)$ deve ser diagonalizável.

Demonstração. Segue da Observação 2.2. □

Utilizando o Corolário 2.2, vamos discutir a estabilidade do sistema hamiltoniano linear periódico

$$\frac{dx}{dt} = JS(t)x \tag{2.9}$$

com $x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n})$, $S(t)$ é simétrica, contínua e 2π-periódica em t.

Definição 2.5. A equação

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{2.10}$$

é chamada **recíproca** se $a_k = a_{m-k}$.

Proposição 2.2. A equação (2.10) é recíproca se, e somente se, vale $f(z) = z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Demonstração. Se (2.10) é recíproca, então, $a_k = a_{m-k}$. Logo,

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m &= z^m(a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}) \\ &= z^m(a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}) \\ &= z^m f\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da hipótese da equação (2.10) ser recíproca. Se supomos válida a expressão $f(z) = z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$, segue imediatamente que $a_0 = a_m, a_1 = a_{m-1}$, e mais geralmente, $a_k = a_{m-k}$. □

Observação 2.3. Se uma equação recíproca tem grau ímpar, então $z = -1$ é uma raiz.

Teorema 2.4 (Lyapunov-Poincaré). A equação característica associada ao sistema (2.9), dada por

$$f(z) = \det(X(2\pi) - zI_{2n}) = 0, \tag{2.11}$$

é recíproca.

Demonstração. Mostremos inicialmente que X é simplética. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(X^T JX\right) = \frac{dX^T}{dt}JX + X^T J\frac{dX}{dt} &= X^T S^T J^T JX + X^T JJSX \\ &= -X^T SJJX - X^T SX \\ &= X^T SX - X^T SX \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo, $X^T JX$ é uma matriz constante. Como em $t = 0$ temos $X^T JX = J$, segue que $X^T JX = J$ para todo t, isto é, X é simplética. Sendo simplética, $\det X = 1$, para todo t, e em particular, $\det X(2\pi) = 1$. Utilizando isso, e de maneira análoga à prova da Proposição 1.6, mostra-se que $f(z) = z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$, o que é suficiente para provar o resultado, de acordo com a Proposição 2.2. □

Corolário 2.3. O sistema (2.9) é estável se, e somente se, os multiplicadores ρ são tais que $|\rho| = 1$ e $X(2\pi)$ é diagonalizável.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4, se z é solução de (2.11), então $\frac{1}{z}$ também é. Logo, os multiplicadores não podem ter módulo menor que 1. Excluindo-se essa possibilidade do Corolário 2.2, segue o resultado. □

2.4 O Problema da Ressonância Paramétrica

Vamos agora considerar o caso em que a matriz do sistema hamiltoniano linear τ-periódico

$$\frac{dx}{dt} = JS(t)x, \quad x^T = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \tag{2.12}$$

depende de um parâmetro μ, $S = S(t, \mu)$. Nosso interesse se volta agora para os valores de μ que fazem com que a equação característica da matriz $JS(t)$ possua raízes de módulo maior que 1. A determinação desses valores é em que consiste o chamado **problema da ressonância paramétrica**.

Definição 2.6. Dizemos que o sistema hamiltoniano linear periódico (2.12) é **fortemente estável** se existe um $\epsilon > 0$ tal que o sistema

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x \tag{2.13}$$

é estável, para qualquer $B(t)$, matriz hamiltoniana periódica de mesmo período de $S(t)$, com $|S(t) - B(t)| < \epsilon$, para todo t.

2.4.1 Teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii

Seja H a função hamiltoniana associada ao sistema (2.12), e suponhamos que ela possa ser escrita na forma

$$H = H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \cdots \tag{2.14}$$

onde $H_0, H_1, \cdots$, são formas quadráticas nas variáveis $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}$, e mais, os coeficientes de H_0 são constantes e os coeficientes das formas $H_1, H_2, \cdots$, são funções reais contínuas de t, com período 2π.

Suponhamos que para $\epsilon = 0$ as raízes da equação característica de (2.12) sejam da forma $\pm i\omega_k$, $\omega_k > 0$, $k = 1, \cdots, n$, com ω_k distintas. Como comentamos, a função H_0, por uma mudança de variáveis, pode ser escrita na forma

$$H_0 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(y_k^2 + y_{n+k}^2\right) \tag{2.15}$$

onde $\sigma_k = \lambda_k \omega_k$, com $\lambda_k = 1$ ou $\lambda_k = -1$. Logo, podemos reescrever (2.14) como

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(y_k^2 + y_{n+k}^2\right) + \epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon^2 \mathcal{H}_2 + \cdots \tag{2.16}$$

onde $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2, \cdots$, são formas quadráticas nas variáveis $y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{2n}$, com coeficientes contínuos e 2π-periódicos em t. Analisar o problema de ressonância paramétrica no sistema com hamiltoniano (2.14) é o mesmo que analisar num sistema com hamiltoniano (2.16), sendo que neste os sinais de λ_k estão determinados.

No teorema abaixo temos uma condição necessária e suficiente para a estabilidade paramétrica do sistema (2.12).

Teorema 2.5 (Krein-Gel'fand-Lidskii). Para ϵ suficientemente pequeno, o sistema linear com hamiltoniano (2.16) é estável se, e somente se, não forem satisfeitas as relações

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1, \cdots, n; N = \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{2.17}$$

Observação 2.4. N é diferente de zero pois os valores de ω_k, com $k = 1, \cdots, n$, são distintos.

Definição 2.7. Vamos supor que σ_k, $k = 1, \cdots, n$, depende de algum parâmetro μ. Um valor μ_0 de μ para o qual pelo menos uma das relações em (2.17) é satisfeita é dito um **valor de ressonância paramétrica**. Chamamos **ressonância simples** ou **básica** quando se tem $k = l$, isto é, $2\sigma_k = N$, e **ressonância combinada** quando $k \neq l$.

Definição 2.8. Uma ressonância que satisfaz (2.17) é chamada **ressonância de Krein**.

3 Problema Restrito de $P+1$ Corpos do Tipo Sitnikov

Neste capítulo vamos estudar o problema e os resultados apresentados no artigo [2]. Na primeira seção, apresentamos o problema, objeto do estudo, e seu hamiltoniano. Na segunda seção, calculamos os pontos de equilíbrio do sistema dado na seção anterior e exibimos os valores do parâmetro μ para os quais o equilíbrio apresenta ressonâncias de Krein. Na seção seguinte, descrevemos o Método de Deprit-Hori, com base no livro do Markeev [4]. Na última seção, aplicamos o Método de Deprit-Hori no problema em questão, e para isso consultamos o trabalho de Cabral em [1].

3.1 Formulação do Problema

No primeiro capítulo estudamos o problema de Sitkinov. Agora vamos analisar o problema com uma modificação no número de primários, consideraremos uma quantidade P, isto é, analisaremos o movimento de um corpo $\mathbf{x}$ de massa infinitesimal m' que se move sob a ação gravitacional dos primários $m_0, \cdots, m_{P-1}$, ao longo de uma linha reta perpendicular ao plano de movimento destes, e que passa pelo foco comum das elipses, que são as órbitas de movimento dos primários.

Sobre os primários, suponhamos que as P massas são iguais e se movem em uma solução homográfica elíptica do Problema de P corpos no plano. Pela Observação 1.1, o movimento da j-ésima massa pode ser descrito da forma $z_j(t) = z(t)\zeta_j$, $j = 0, \cdots, P-1$, onde z é uma aplicação complexa e $\zeta_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \cdots, P-1$. Além disso, vamos considerar $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{P-1}$ localizados no vértice de um polígono regular, $m = m_0 = \cdots = m_{P-1}$, $\zeta_0 = (1, 0)$ e $\zeta_j = \omega^j$, com $j = 1, \cdots, P-1$, onde $\omega = e^{i\frac{2\pi}{P}}$ é a raiz P-ésima da unidade.

Sendo planar a solução, pelo Teorema 1.3, $z(t)$ é solução do Problema de Kepler

$$\frac{d^2(z(t))}{dt^2} = -\kappa \frac{z(t)}{|z(t)|^3}, \tag{3.1}$$

com condição inicial $z(0) = (1, 0)$, e $\dfrac{dz(0)}{dt}$ perpendicular a $z(0)$.

Ainda pelo Teorema 1.3, $(\zeta_0, \cdots, \zeta_{P-1})$ é uma configuração central, logo, pela Proposição 1.1, a constante κ é dada por

$$\kappa = \frac{V_P}{2I_P} = \frac{\displaystyle\sum_{i<j} \frac{m^2}{r_{ij}}}{\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i<j} m^2 r_{ij}^2},$$

onde $r_{ij} = |\zeta_i - \zeta_j|$, $M = Pm$ é a massa total, V_P é a energia potencial e I_P é o momento de inércia de P.

Observação 3.1. A expressão de I_P acima é diferente da que definimos na Proposição 1.1. Mostremos que

$$\sum_{j=0}^{P-1} m_j r_j^2 = 2I_P = \frac{1}{M}\sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

onde $r_j = |\zeta_j|$. Para a prova, vamos considerar o centro de massa na origem. Temos,

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 &= \sum_i \sum_j m_i m_j |\zeta_i - \zeta_j|^2 \\
&= \sum_i \sum_j m_i m_j |\zeta_i|^2 - 2\sum_i \sum_j m_i m_j \zeta_i \cdot \zeta_j + \sum_i \sum_j m_i m_j |\zeta_j|^2 \\
&= \sum_j m_j \sum_i m_i |\zeta_i|^2 - 2\sum_i m_i \left(\zeta_i \cdot \sum_j m_j \zeta_j\right) + \sum_i m_i \sum_j m_j |\zeta_j|^2 \\
&= 2MI_P - 0 + 2MI_P \\
&= 4MI_P,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$4I_P = \frac{1}{M}\sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 = \frac{2}{M}\sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

como queríamos mostrar.

Neste caso, $z(t)$ se move em uma órbita elíptica e sendo solução do Problema de Kepler (3.1), temos

$$\rho = |z(t)| = \frac{c^2}{\kappa}\frac{1}{1 + \epsilon\cos\nu}, \qquad \frac{d\nu}{dt} = \frac{c}{\rho^2}, \tag{3.2}$$

onde ϵ, ν e c são a excentricidade, a anomalia verdadeira e a norma do momento angular, respectivamente. As expressões em (3.2) já foram mencionadas neste trabalho, no primeiro capítulo, e naquele momento foram recomendados os trabalhos de Rangel [7], Mark e Szebehely [9], e Meyer e Offin [6] para mais detalhes.

Sejam $\mathbf{x} = (0, 0, \xi)$ e $\omega = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, com $\theta = \dfrac{2\pi}{P}$. Considerando as coordenadas polares (ρ, ν) no plano de movimento dos primários, com origem no foco comum das elipses e eixo polar definido pelo vetor de Laplace e, temos $z(t) = (\rho\cos\nu, \rho\operatorname{sen}\nu, 0)$. Como $\zeta_j = \omega^j = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, com $\theta = \frac{2\pi}{P}j$, temos o produto complexo

$$z(t)\zeta_j = (\rho\cos\nu\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\nu\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\nu\operatorname{sen}\theta + \rho\operatorname{sen}\nu\cos\theta, 0),$$

e assim, o vetor $\mathbf{x} - z_j(t)$ é dado por

$$\mathbf{x} - z_j(t) = (-\rho\cos\nu\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\nu\operatorname{sen}\theta, -\rho\cos\nu\operatorname{sen}\theta - \rho\operatorname{sen}\nu\cos\theta, \xi).$$

Então, $|\mathbf{x} - z_j(t)| = \sqrt{\rho(t)^2 + \xi^2}$ e portanto, o potencial da massa infinitesimal é da forma

$$V(\xi, t) = \sum_{j=0}^{P-1} \frac{m_j}{|\mathbf{x} - z_j(t)|} = \frac{m_0}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} + \cdots + \frac{m_{P-1}}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} = \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}}.$$

Como vimos, a equação de movimento do terceiro corpo no Problema de Sitnikov ($P = 2$) é dada por (1.7). Para um número P de primários, temos

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \xi}. \tag{3.3}$$

Faremos agora uma mudança de variáveis. Considere $\xi = \rho x$. Se supomos ν como o tempo, obtemos

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\kappa}{\rho^2}[(1 + \epsilon\cos\nu)x'' + \epsilon x\cos\nu], \tag{3.4}$$

onde usamos a notação $(')$ para representar a derivada em relação a ν. De fato, se $\xi = \rho x$, segue a expressão

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\rho}{dt}x + \rho\frac{dx}{dt},$$

e por (3.2),

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \frac{c^2}{\kappa}\left(\epsilon\operatorname{sen}\nu\frac{d\nu}{dt}\right)\frac{1}{(1 + \epsilon\cos\nu)^2} \\
&= \frac{c^2}{\kappa}\left(\epsilon\operatorname{sen}\nu\frac{c}{\rho^2}\right)\frac{1}{(1 + \epsilon\cos\nu)^2} \\
&= \frac{c^2}{\kappa}\epsilon(\operatorname{sen}\nu)c\left[(1 + \epsilon\cos\nu)\frac{\lambda}{c^2}\right]^2\frac{1}{(1 + \epsilon\cos\nu)^2} \\
&= \frac{\kappa}{c}\epsilon\operatorname{sen}\nu.
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\nu}\frac{d\nu}{dt},$$

temos,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\kappa}{c}\epsilon(\operatorname{sen}\nu)x + \frac{dx}{d\nu}\frac{d\nu}{dt}\rho = \frac{\kappa}{c}\epsilon(\operatorname{sen}\nu)x + x'\frac{c}{\rho^2}\rho = \frac{\kappa}{c}\epsilon(\operatorname{sen}\nu)x + x'\frac{c}{\rho},$$

e derivando outra vez em relação a t,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{\kappa}{c}\epsilon\cos\nu\frac{d\nu}{dt}x + \frac{\kappa}{c}\epsilon\operatorname{sen}\nu\frac{dx}{dt} + \left[c\frac{d^2x}{d\nu^2}\frac{d\nu}{dt}\rho - \epsilon(\operatorname{sen}\nu)cx'\right]\frac{1}{\rho^2} \\
&= \frac{\kappa}{c}\epsilon\cos\nu\frac{c}{\rho^2}x + \frac{\kappa}{c}\epsilon\operatorname{sen}\nu x'\frac{d\nu}{dt} + cx''\frac{c}{\rho^2}\rho\frac{1}{\rho^2} - \epsilon(\operatorname{sen}\nu)\kappa x'\frac{1}{c}\frac{d\nu}{dt} \\
&= \epsilon\kappa\cos\nu\frac{1}{\rho^2}x + c^2x''\frac{1}{\rho^3} \\
&= \epsilon\kappa\cos\nu\frac{1}{\rho^2}x + c^2x''(1+\epsilon\cos\nu)\frac{\kappa}{c^2}\frac{1}{\rho^2} \\
&= \frac{\kappa}{\rho^2}\left[(1+\epsilon\cos\nu)x'' + \epsilon x\cos\nu\right],
\end{aligned}$$

como afirmamos. Da mudança de variáveis segue que

$$V(\xi,t) = \frac{M}{\rho\sqrt{1+x^2}},$$

e definindo $U(x,t) = V(\xi,t)$, temos

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Tendo em vista as relações em (3.3), (3.4) e (3.5), obtemos a equação de movimento da massa infinitesimal,

$$(1+\epsilon\cos\nu)x'' + \epsilon x\cos\nu = \frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{3.6}$$

A equação (3.6) pode ser vista como um sistema hamiltoniano. Fazendo $X = x'$, conseguimos o sistema

$$H_X = \frac{dx}{d\nu} = x' \qquad -H_x = \frac{dX}{d\nu} \tag{3.7}$$

com função hamiltoniana

$$H(x,X,\nu,\epsilon) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{1+\epsilon\cos\nu}\left(\frac{x^2}{2}\epsilon\cos\nu - \frac{\rho}{\kappa}U\right). \tag{3.8}$$

Por fim, sabendo que $\kappa = M\dfrac{S_1}{S_2}$, onde $S_1 = \displaystyle\sum_{i<j}\frac{1}{r_{ij}}$ e $S_2 = \displaystyle\sum_{i<j} r_{ij}^2$, podemos reescrever o hamiltoniano (3.8) na forma

$$H(x,X,\nu,\epsilon) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{1+\epsilon\cos\nu}\left(\frac{x^2}{2}\epsilon\cos\nu - \frac{S_2}{S_1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right). \tag{3.9}$$

A partir de agora, vamos olhar para a família discreta de funções hamiltonianas acima como uma família contínua de funções hamiltonianas, considerando $\frac{S_2}{S_1}$ como um parâmetro contínuo, que denotaremos por μ. Abaixo segue um resultado a respeito desse quociente, e que nos será útil mais adiante.

Proposição 3.1. O quociente $\frac{S_2}{S_1}$ é uma função de P decrescente e tal que

$$\lim_{P\to\infty} \frac{S_2}{S_1} = 0.$$

Demonstração. Consideremos $S_2 = \sum_{i<j} |r_j - r_i|^2$, com $r_j = \omega^j$, onde $\omega = e^{i\frac{2\pi}{P}}$. No Apêndice B, nós provamos a validade das igualdades

$$\begin{aligned} 2S_2 &= P\left(|\omega^1-\omega^0|^2 + |\omega^2-\omega^0|^2 + \cdots + |\omega^{P-1}-\omega^0|^2\right) && (3.10)\\ &= 4P\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{P}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{P}\right) + \cdots + \operatorname{sen}^2\left(\frac{(P-1)\pi}{P}\right)\right), && (3.11)\end{aligned}$$

e da equação,

$$\sum_{j=1}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = \frac{P}{2}. \qquad (3.12)$$

De (3.10), (3.11) e (3.12) temos $S_2 = P^2$. De maneira análoga, é válido que

$$S_1 = \sum_{i<j} \frac{1}{|r_j - r_i|} = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{|\omega^1-\omega^0|} + \frac{1}{|\omega^2-\omega^0|} + \cdots + \frac{1}{|\omega^{P-1}-\omega^0|}\right) = \frac{P}{4}\sum_{j=1}^{P-1} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}.$$

Das novas expressões de S_1 e S_2 segue que

$$0 \le \frac{S_2}{S_1} = \frac{P^2}{\frac{P}{4}\sum_{j=1}^{P-1} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}} \le \frac{P^2}{\frac{P}{4}\left(\frac{P}{\pi}\sum_{P-1}^{j=1} \frac{1}{j}\right)} = \frac{4\pi}{\sum_{j=1}^{P-1} \frac{1}{j}},$$

onde a segunda desigualdade vem do fato de $\operatorname{sen} x \le x$, para todo real $x \ge 0$. Como

$$\lim_{P\to\infty} \frac{4\pi}{\sum_{j=1}^{P-1} \frac{1}{j}} = 0,$$

do teorema do Confronto temos $\lim_{P\to\infty} \frac{S_2}{S_1} = 0$. Provaremos agora que $F(P) = \frac{S_2}{S_1}$ é uma função decrescente. Ainda no Apêndice B, mostramos que, ao reduzirmos os ângulos ao primeiro quadrante, obtemos:

$$F(P) = 8\frac{1+2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{1+2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}}, \text{ se } P \text{ é par} \qquad F(P) = 8\frac{2\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{2\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}}, \text{ se } P \text{ é ímpar.}$$

Assim,

$$F'(P) = \frac{-4\left(\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{j\pi}{P^2} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)\cos\left(\frac{j\pi}{P}\right)\right) B(P) - A(P)\left(2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{j\pi}{P^2}\frac{\cos\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}\right)}{B(P)^2}$$

se P é par, e

$$F'(P) = \frac{-4\left(\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{j\pi}{P^2} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)\cos\left(\frac{j\pi}{P}\right)\right) D(P) - C(P)\left(2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{j\pi}{P^2}\frac{\cos\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}\right)}{D(P)^2}$$

se P é ímpar, onde

$$\begin{aligned} A(P) &= 1+2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right), \quad C(P) = 2\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) \\ B(P) &= 1+2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}, \quad D(P) = 2\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}. \end{aligned}$$

Como os ângulos estão no primeiro quadrante, temos que os valores dos senos e cossenos são positivos, logo, $F'(P) < 0$, para todo P real positivo. Portanto, F é uma função decrescente.

□

3.2 Ressonância Paramétrica no Problema

Calculemos os pontos de equílibrio do sistema (3.7). Esses são os pontos críticos do hamiltoniano

$$H(x, X, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{1+\epsilon\cos\nu}\left(\frac{x^2}{2}\epsilon\cos\nu - \mu\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right), \ \mu \geq 0, \tag{3.13}$$

ou seja, os pontos tais que

$$H_x = 0 \qquad H_X = 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} 0 &= H_x = \frac{1}{1+\epsilon\cos\nu}\left(x\epsilon\cos\nu + \frac{\mu x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ 0 &= H_X = X. \end{aligned}$$

Vemos que $x = 0$ e $X = 0$ satisfazem as equações acima. Portanto, $x = 0$, $X = 0$ é um equilíbrio do sistema hamiltoniano, para quaisquer valores de ν, μ e ϵ.

O sistema linear associado ao hamiltoniano (3.13) é dado por

$$\mathbf{x}' = JD^2H(\mathbf{0})\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x, X), \tag{3.14}$$

com hamiltoniano

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{x}D^2H(\mathbf{0})\,\mathbf{x}^T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\epsilon\cos\nu}{1+\epsilon\cos\nu} + \frac{\mu}{1+\epsilon\cos\nu}\right)x^2 + X^2\right], \tag{3.15}$$

onde $D^2H(\mathbf{0})$ é a matriz Hessiana de H no equilíbrio $\mathbf{0} = (0, 0)$, isto é, como

$$D^2H = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xX} \\ H_{Xx} & H_{XX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\epsilon\cos\nu}\left(\epsilon\cos\nu + \frac{\mu}{(1+x^2)^2} - \frac{3\mu x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos

$$D^2H(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\epsilon\cos\nu}{1+\epsilon\cos\nu} + \frac{\mu}{1+\epsilon\cos\nu}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema não perturbado ($\epsilon = 0$), o hamiltoniano (3.15) torna-se

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{x}D^2H(\mathbf{0})\,\mathbf{x}^T = \frac{1}{2}\left(\mu x^2 + X^2\right), \ \ \mu \geq 0, \tag{3.16}$$

e a matriz Hessiana no equilíbrio é dada por

$$D^2H(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$JD^2H(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico dado por

$$0 = p(\lambda) = \det(JD^2H - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mu,$$

donde, $\lambda = \pm\, i\sqrt{\mu} = \pm\, i\omega$. Então, as raízes são números imaginários puros, $JD^2H(\mathbf{0})$ é diagonalizável, e assim o sistema associado a (3.16) é estável.

Vamos analisar a partir de agora o que acontece com o sistema linear quando ϵ está nas proximidades de zero, mas é diferente de zero. Observe que para um grau de liberdade só podemos ter ressonância básica, ou seja, $\sigma_1 + \sigma_1 = N$, $N \in \mathbb{Z}$, isto é, $2\omega_1 = N$. E então, sendo $\omega_1 = \sqrt{\mu}$, temos $2\omega_1 = N$ quando μ satisfaz

$$\mu = \frac{N^2}{4}, \qquad N \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

Logo, o equilíbrio apresenta ressonâncias de Krein para os valores de $\mu = \mu_0$ dados em (3.17). O teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii nos diz que para pequenos valores de ϵ, onde μ não satisfaz (3.17), o equilíbrio continua estável. Vamos construir curvas no plano dos parâmetros μ e ϵ, que emanam dos pontos ressonantes de Krein (ou seja, pontos da forma $(\mu_0, 0)$), e separar regiões de estabilidade e instabilidade, como na Figura 3.1.

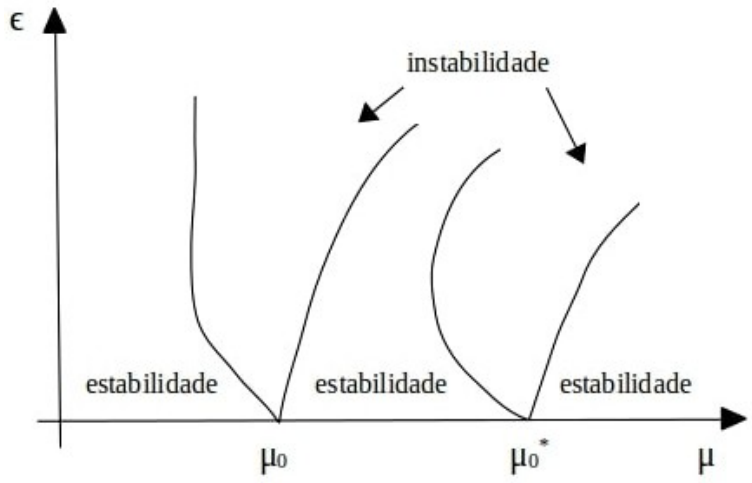

Figura 3.1: Regiões de estabilidade e instabilidade. Os valores μ_0 e $\mu_0{}^*$ satisfazem (3.17).

A Proposição 3.1 nos diz que $\dfrac{S_1}{S_2}$ é uma função decrescente de P, e como o valor máximo atingido é 5.19 (para $P = 3$), não faz sentido para o problema analisado considerarmos qualquer valor de N em (3.17). Por exemplo, para $N = 6$, teríamos $\mu = 9$. Então, para a construção das curvas, vamos considerar apenas os valores de μ para os quais $N = 1, 2, 3, 4, 5$, e, para nos auxiliar nessa construção, precisaremos de um método conhecido como **método de Deprit-Hori**, que veremos na próxima seção.

3.3 Método de Deprit-Hori

Vamos descrever agora o Método de Deprit-Hori, que pode ser encontrado no livro do Markeev [4]. Consideremos o sistema hamiltoniano

$$\frac{dx}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial X}, \qquad \frac{dX}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

com hamiltoniano,

$$H(x, X, \nu, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x, X, \nu) \tag{3.18}$$

e x, X sendo as coordenadas e momentos vetoriais, respectivamente, e ϵ um pequeno parâmetro, $0 < \epsilon \ll 1$.

Iremos construir uma transformação simplética $x, X \to y, Y$ que leve o hamiltoniano (3.18) em um hamiltoniano autônomo

$$K(y, Y, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} K_m(y, Y),$$

e iremos, para este fim, utilizar o método de Deprit-Hori. O método tem por objetivo encontrar uma função geradora W tal que

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\partial W(x, X, \nu, \eta)}{\partial X} \quad \frac{dX}{d\eta} = -\frac{\partial W(x, X, \nu, \eta)}{\partial x}$$
$$\frac{d\nu}{d\eta} = 0 \quad \frac{dR}{d\eta} = -\frac{\partial W(x, X, \nu, \eta)}{\partial \nu}$$

com condição inicial, $\eta = 0$,

$$x = y, \quad X = Y, \quad \nu = \nu, \quad R = 0,$$

onde $R = K(y, Y, \nu, \epsilon) - H(x, X, \nu, \epsilon)$ é a função resto e η é um pequeno parâmetro variável, $0 \leq \eta \leq \epsilon$. Vamos escrever W da forma

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} W_{m+1}(x, X, \nu).$$

Usaremos as seguintes relações para o cálculo de W e K:

$$\begin{aligned} K_0 &= H_0 \\ K_m &= H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} + C_{m-1}^{j} K_{j,m-1}) - \frac{DW_m}{D\nu} \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}\frac{DW_m}{D\nu} &= \frac{\partial W_m}{\partial \nu} - L_m H_0 \\ K_{j,i} &= L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,i} \\ C_r^k &= \frac{r!}{k!(r-k)!},\end{aligned}$$

onde $L_i f$ é o colchete de Poisson de f e W_i:

$$L_i f = \{f, W_i\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial W_i}{\partial Y_j} - \frac{\partial f}{\partial Y_j}\frac{\partial W_i}{\partial y_j} \right).$$

Mostraremos como ficam as relações para os valores de m de 0 a 5. Inicialmente temos

$$K_0 = H_0$$

e para $m = 1$,

$$K_1 = H_1 - \frac{DW_1}{D\nu},$$

onde impomos à K_1 que seja autônoma, em seguida calculamos W_1 e depois K_1. Para $m = 2$,

$$K_2 = H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \frac{DW_2}{D\nu}$$

com $K_{1,1} = L_1 K_1$. Impondo à K_2 que seja autônoma, calculamos W_2 e após isso, K_2. Para $m = 3$ temos

$$K_3 = H_3 + L_1 H_2 + L_2 H_1 + 2K_{1,2} + K_{2,1} - \frac{DW_3}{D\nu}$$

em que $K_{1,2} = L_1 K_2$, $K_{2,1} = L_2 K_1 - L_1 K_{1,1}$. Para $m = 4$, obtemos

$$K_4 = H_4 + L_1 H_3 + 3K_{1,3} + 3L_2 H_2 + 3K_{2,2} + 3L_3 H_1 + K_{3,1} - \frac{DW_4}{D\nu}$$

com

$$\begin{aligned}K_{1,3} &= L_1 K_3 \\ K_{2,2} &= L_2 K_2 - L_1 K_{1,2} \\ K_{3,1} &= L_3 K_1 - L_1 K_{2,1} - 2L_2 K_{1,1}.\end{aligned}$$

E para $m = 5$,

$$K_5 = H_5 + L_1 H_4 + 4K_{1,4} + 4L_2 H_3 + 6K_{2,3} + 6L_3 H_2 + 4K_{3,2} + 4L_4 H_1 + K_{4,1} - \frac{DW_5}{D\nu},$$

onde

$$\begin{aligned} K_{1,4} &= L_1 K_4 \\ K_{2,3} &= L_2 K_3 - L_1 K_{1,3} \\ K_{3,2} &= L_3 K_2 - L_1 K_{2,2} - 2L_2 K_{1,2} \\ K_{4,1} &= L_4 K_1 - L_1 K_{3,1} - 3L_2 K_{2,1} - 3L_3 K_{1,1}. \end{aligned}$$

Tendo em vista essas relações, podemos obter análogas de ordens maiores.

3.4 Regiões de Estabilidade e Instabilidade

Quando $\epsilon \neq 0$, o sistema hamiltoniano (3.14) é periódico no novo tempo ν. Analisaremos nesta seção a estabilidade paramétrica desse sistema. Para isso, vamos escrever μ na forma de uma série de potência de ϵ

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \cdots .$$

Expandindo o hamiltoniano (3.15) em ϵ, em torno de $\epsilon = 0$, substituindo μ pela expressão acima e reordenando o hamiltoniano, obtemos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon\mathcal{H}_1 + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathcal{H}_2 + \cdots \tag{3.19}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2}(\mu x^2 + X^2) \\ \mathcal{H}_1 &= (\mu_1 - (-1+\mu_0)\cos\nu)\frac{x^2}{2} \\ &\vdots \\ \mathcal{H}_{2l} &= (2l)!(\mu_{2l} + (-1+\mu_0)\cos^{2l}\nu - \mu_1\cos^{2l-1}\nu + \cdots - \mu_{2l-1}\cos\nu)\frac{x^2}{2} \\ \mathcal{H}_{2l+1} &= (2l+1)!(\mu_{2l+1} - (-1+\mu_0)\cos^{2l+1}\nu + \mu_1\cos^{2l}\nu + \cdots - \mu_{2l}\cos\nu)\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Iremos transformar o hamiltoniano (3.19) em um hamiltoniano autônomo para discutir a estabilidade. Para isso, normalizaremos primeiramente $\mathcal{H}_0$, e aplicaremos o método de Deprit-Hori no hamiltoniano normalizado H, descrito abaixo, a fim de obtermos o hamiltoniano autônomo K, mencionado na seção anterior. Na sequência daremos

mais detalhes de como isso é realizado. Na Seção 2.2.2, discutimos a respeito da forma normal de um sistema para um grau de liberdade e sobre a mudança que vamos utilizar: $x = a\bar{x}$, $X = \frac{1}{a}\bar{X}$, onde $a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\mu_0}}$. Note que a matriz da mudança de variável

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

é uma matriz simplética, ou seja,

$$A^T J A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J.$$

Logo, pela Proposição 1.5, o hamiltoniano (3.19) é levado no hamiltoniano normalizado

$$H(\bar{x}, \bar{X}, \nu, \mu, \epsilon) = H_0 + \epsilon H_1 + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2 + \cdots$$

onde,

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\mu_0}(\bar{x}^2 + \bar{X}^2) \\
H_1 &= (\mu_1 - (-1+\mu_0)\cos\nu)\frac{\bar{x}^2}{2\sqrt{\mu_0}} \\
H_2 &= 2(\mu_2 + (-1+\mu_0)\cos^2\nu - \mu_1\cos\nu)\frac{\bar{x}^2}{2\sqrt{\mu_0}} \\
&\vdots \\
H_{2l} &= (2l)!(\mu_{2l} + (-1+\mu_0)\cos^{2l}\nu - \mu_1\cos^{2l-1}\nu + \cdots - \mu_{2l-1}\cos\nu)\frac{\bar{x}^2}{2\sqrt{\mu_0}} \\
H_{2l+1} &= (2l+1)!(\mu_{2l+1} + (1-\mu_0)\cos^{2l+l}\nu + \mu_1\cos^{2l}\nu + \cdots - \mu_{2l}\cos\nu)\frac{\bar{x}_2}{2\sqrt{\mu_0}}.
\end{aligned}$$

Agora faremos uma nova mudança de variáveis. Considere a rotação

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) q + \operatorname{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) p \\
\bar{X} &= -\operatorname{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) q + \cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) p,
\end{aligned}$$

com $2\sqrt{\mu_0} = N$. Essa rotação é uma transformação simplética que depende do tempo, tem função geradora com derivada em relação a ν dada por $W_\nu = -\frac{\sqrt{\mu_0}}{2}(q^2+p^2)$, e elimina o termo H_0 (veja Apêndice A). Assim, o hamiltoniano nas novas variáveis é dado por

$$H(q, p, \nu, \mu, \epsilon) = H_0 + \epsilon H_1 + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2 + \cdots$$

onde,

$$\begin{aligned}
H_0 &= 0 \\
H_1 &= (\mu_1 - (-1+\mu_0)\cos\nu)F \\
H_2 &= 2(\mu_2 + (-1+\mu_0)\cos^2\nu - \mu_1\cos\nu)F \\
&\vdots \\
H_{2l} &= (2l)!(\mu_{2l} + (-1+\mu_0)\cos^{2l}\nu - \mu_1\cos^{2l-1}\nu + \cdots - \mu_{2l-1}\cos\nu)F \\
H_{2l+1} &= (2l+1)!(\mu_{2l+1} + (1-\mu_0)\cos^{2l+l}\nu + \mu_1\cos^{2l}\nu + \cdots - \mu_{2l}\cos\nu)F
\end{aligned}$$

com

$$F = \frac{1}{N}\left(q\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{N\nu}{2}\right)\right)^2.$$

Observação 3.2. As novas funções H_i são τ-periódicas, onde $\tau = 2\pi$ se N for par, e $\tau = 4\pi$ se N for ímpar.

Agora podemos utilizar o método de Deprit-Hori. Com as mesmas notações da seção anterior, o fato de $H_0 = 0$ implica $\{H_0, W_m\} = 0$, para todo m, então, para todo m, $\dfrac{DW_m}{D\nu} = \dfrac{\partial W_m}{\partial\nu}$. Logo, para $m = 1$,

$$K_1 = H_1 - \frac{\partial W_1}{\partial\nu}$$

e como queremos que K_1 seja autônoma e W_1 τ-periódica, temos

$$K_1 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau H_1 d\nu \qquad W_1 = \int (H_1 - K_1)d\nu. \tag{3.20}$$

Calculados K_1 e W_1, sabendo-se que $\dfrac{DW_2}{D\nu} = \dfrac{\partial W_2}{\partial\nu}$, e supondo K_2 autônoma e W_2 τ-periódica, temos

$$K_2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (H_2 + L_1H_1 + L_1K_1)d\nu \qquad W_2 = \int (H_2 + L_1H_1 + L_1K_1 - K_2)d\nu, \tag{3.21}$$

e assim sucessivamente. Considere as notações

$$\begin{aligned}
H_i &= h_{20}^{(i)}y^2 + h_{11}^{(i)}yY + h_{02}^{(i)}Y^2 \\
K_i &= k_{20}^{(i)}y^2 + k_{11}^{(i)}yY + k_{02}^{(i)}Y^2 \\
W_i &= w_{20}^{(i)}y^2 + w_{11}^{(i)}yY + w_{02}^{(i)}Y^2
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \cdots$. Se $i = 0$, temos $k_{20}^{(0)} = k_{11}^{(0)} = k_{02}^{(0)} = 0$, pois $K_0 = H_0 = 0$. De (3.20), temos, para $i = 1$,

$$k_{20}^{(1)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau h_{20}^{(1)} d\nu, \quad k_{11}^{(1)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau h_{11}^{(1)} d\nu, \quad k_{02}^{(1)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau h_{02}^{(1)} d\nu$$

$$w_{20}^{(1)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (h_{20}^{(1)} - k_{20}^{(1)}) d\nu, \quad w_{11}^{(1)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (h_{11}^{(1)} - k_{11}^{(1)}) d\nu, \quad w_{02}^{(1)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (h_{02}^{(1)} - k_{02}^{(1)}) d\nu,$$

e expressões análogas seguem para $i = 2, 3, \cdots$. Pelo método de Deprit-Hori, obtemos o hamiltoniano da forma

$$K(y, Y, \epsilon) = K_0 + \epsilon K_1 + \frac{\epsilon^2}{2!} K_2 + \cdots = k_{20}\, y^2 + k_{11}\, yY + k_{02}\, Y^2 \tag{3.22}$$

com $k_{ij} = \sum_{m=1}^{L} k_{ij}^{(m)}$, $L \in \mathbb{N}$, onde cada $k_{ij}^{(m)}$ é constante e depende dos coeficientes $\mu_1, \cdots, \mu_m$.

Para o hamiltoniano (3.22) temos associado o sistema linear com matriz hamiltoniana

$$JD^2K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k_{20} & k_{11} \\ k_{11} & 2k_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 2k_{02} \\ -2k_{20} & -k_{11} \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é dado por

$$0 = p(\lambda) = \det(JD^2K - \lambda I) = \begin{vmatrix} k_{11} - \lambda & 2k_{02} \\ -2k_{20} & -k_{11} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (k_{11}^2 - 4k_{02}k_{20}),$$

e desconsiderando a região de instabilidade, isto é, aquela em que λ é um número real não nulo, temos $(-k_{11}^2 + 4k_{02}k_{20}) \geq 0$, ou seja, $4k_{02}k_{20} \geq k_{11}^2$. Então, a fronteira da região de estabilidade e instabilidade é dada pela expressão

$$4k_{02}k_{20} = k_{11}^2. \tag{3.23}$$

Como

$$\begin{aligned} k_{11} &= \epsilon k_{11}^{(1)} + \frac{1}{2!}\epsilon^2 k_{11}^{(2)} + \frac{1}{3!}\epsilon^3 k_{11}^{(3)} + \cdots \\ k_{20} &= \epsilon k_{20}^{(1)} + \frac{1}{2!}\epsilon^2 k_{20}^{(2)} + \frac{1}{3!}\epsilon^3 k_{20}^{(3)} + \cdots \\ k_{02} &= \epsilon k_{02}^{(1)} + \frac{1}{2!}\epsilon^2 k_{02}^{(2)} + \frac{1}{3!}\epsilon^3 k_{02}^{(3)} + \cdots \end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned} k_{11}^2 &= \epsilon^2 k_{11}^{(1)2} + \epsilon^3 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} + \cdots \\ 4k_{20}k_{02} &= 4\epsilon^2 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)} + \frac{4}{2!}\epsilon^3 \left(k_{20}^{(1)} k_{02}^{(2)} + k_{02}^{(1)} k_{20}^{(2)} \right) + \cdots , \end{aligned}$$

e então, igualando os coeficientes de mesmo grau em ϵ na igualdade (3.23), obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)2} &= 4k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)} \\ k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} &= 2\left(k_{20}^{(1)} k_{02}^{(2)} + k_{20}^{(2)} k_{02}^{(1)} \right) \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Por meio dessas igualdades, iremos calcular os valores de $\mu_1, \mu_2, \cdots$. Como já mencionamos, vamos analisar os valores de μ_0 onde $N = 1, 2, 3, 4, 5$, e encontraremos os gráficos das curvas como mostrado abaixo.

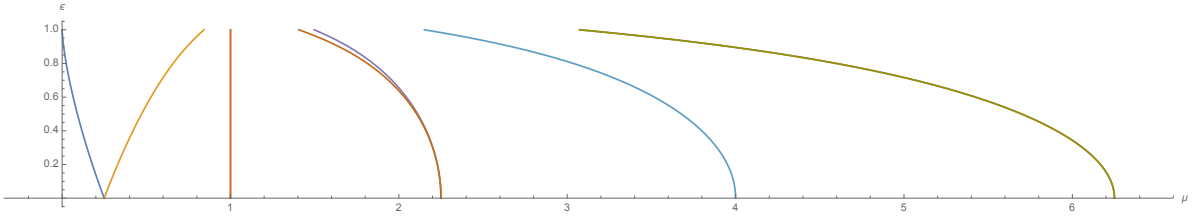

Figura 3.2: Curvas: N = 1, 2, 3, 4, 5

3.4.1 Curvas que emanam de $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

Consideremos $N = 1$. Como $\mu_0 = \dfrac{N^2}{4}$, temos $\mu_0 = \dfrac{1}{4}$. Da expansão

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \cdots$$

iremos determinar abaixo os valores de μ_1 e μ_2, e os cálculos nos darão a ideia de como obter os demais valores. Temos,

$$\begin{aligned} H_1 &= (\mu_1 - (-1 + \mu_0)\cos\nu) \left(\cos\left(\frac{\nu}{2}\right) q + \operatorname{sen}\left(\frac{\nu}{2}\right) p \right)^2 \\ &= \left(\mu_1 + \frac{3}{4}\cos\nu \right) \left[\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right) q^2 + 2\cos\left(\frac{\nu}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\nu}{2}\right) qp + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\nu}{2}\right) p^2 \right] \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\left(\mu_1+\frac{3}{4}\cos\nu\right)\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{2}+\frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} 2\left[\left(\mu_1+\frac{3}{4}\cos\nu\right)\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\left(\mu_1+\frac{3}{4}\cos\nu\right)\,\mathrm{sen}^{\,2}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{2}-\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Da expressão $k_{11}^{(1)2} = 4k_{20}^{(1)}k_{02}^{(1)}$, segue que

$$4\left(\frac{\mu_1}{2}+\frac{3}{16}\right)\left(\frac{\mu_1}{2}-\frac{3}{16}\right)=0,$$

então, $\mu_1^2 = \dfrac{9}{64}$, isto é, $\mu_1 = \pm\dfrac{3}{8}$. Para o cálculo de μ_2 vamos precisar determinar as expressões de $w_{20}^{(1)}$, $w_{11}^{(1)}$, $w_{02}^{(1)}$. Temos,

$$\begin{aligned} w_{20}^{(1)} &= \int (h_{20}^{(1)}-k_{20}^{(1)})d\nu = \int\left[\left(\mu_1+\frac{3}{4}\cos\nu\right)\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{\mu_1}{2}-\frac{3}{16}\right]d\nu \\ &= \frac{1}{16}(8\mu_1+3\cos\nu+6)\,\mathrm{sen}\,\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{11}^{(1)} &= \int (h_{11}^{(1)}-k_{11}^{(1)})d\nu = \int 2\left[\left(\mu_1+\frac{3}{4}\cos\nu\right)\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= -\frac{1}{8}(8\mu_1+3\cos\nu)\cos\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{02}^{(1)} &= \int (h_{02}^{(1)}-k_{02}^{(1)})d\nu = \int\left[\left(\mu_1+\frac{3}{4}\cos\nu\right)\,\mathrm{sen}^{\,2}\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{\mu_1}{2}+\frac{3}{16}\right]d\nu \\ &= -\frac{1}{16}(8\mu_1+3\cos\nu-6)\,\mathrm{sen}\,\nu. \end{aligned}$$

Iremos agora calcular os dois valores de μ_2. De (3.21), vemos que precisamos também das expressões de H_2, L_1H_1 e L_1K_1. Temos,

$$\begin{aligned} H_2 &= 2\left(\mu_2-\frac{3}{4}\cos^2\nu+\frac{3}{8}\cos\nu\right)\left(\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)q+\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\nu}{2}\right)p\right)^2 \\ &= 2\left(\mu_2-\frac{3}{4}\cos^2\nu+\frac{3}{8}\cos\nu\right)\left[\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right)q^2+2\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\nu}{2}\right)qp+\,\mathrm{sen}^{\,2}\left(\frac{\nu}{2}\right)p^2\right] \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} L_1H_1 &= 2\left(h_{20}^{(1)}\omega_{11}^{(1)} - h_{11}^{(1)}\omega_{20}^{(1)}\right)y^2 + 4\left(h_{20}^{(1)}\omega_{02}^{(1)} - h_{02}^{(1)}\omega_{20}^{(1)}\right)yY + 2\left(h_{11}^{(1)}\omega_{02}^{(1)} - h_{02}^{(1)}\omega_{11}^{(1)}\right)Y^2 \\ L_1K_1 &= 2\left(k_{20}^{(1)}\omega_{11}^{(1)}\right)y^2 + 4\left(k_{20}^{(1)}\omega_{02}^{(1)} - k_{02}^{(1)}\omega_{20}^{(1)}\right)yY - 2(k_{02}^{(1)}\omega_{11}^{(1)})Y^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$k_{20}^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[h_{20}^{(2)} + 2h_{20}^{(1)}\omega_{11}^{(1)} - 2h_{11}^{(1)}\omega_{20}^{(1)} + 2k_{20}^{(1)}\omega_{11}^{(1)}\right]d\nu$$

$$k_{02}^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[h_{02}^{(2)} + 2h_{11}^{(1)}\omega_{02}^{(1)} - 2h_{02}^{(1)}\omega_{11}^{(1)} - 2k_{02}^{(1)}\omega_{11}^{(1)}\right]d\nu,$$

e então,

- Para $\mu_1 = -\frac{3}{8}$, obtemos
$$k_{20}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4\mu_2 - \frac{15}{32}\right), \qquad k_{02}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4\mu_2 - \frac{135}{32}\right).$$
- Para $\mu_1 = \frac{3}{8}$, obtemos
$$k_{02}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4\mu_2 - \frac{15}{32}\right), \qquad k_{20}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4\mu_2 - \frac{135}{32}\right).$$

Usaremos a expressão $k_{11}^{(1)}k_{11}^{(2)} = 2\left(k_{20}^{(1)}k_{02}^{(2)} + k_{20}^{(2)}k_{02}^{(1)}\right)$ para o cálculo de μ_2. Como $k_{11}^{(1)} = 0$, não precisamos calcular $k_{11}^{(2)}$. Logo, da equação

$$k_{20}^{(1)}k_{02}^{(2)} + k_{20}^{(2)}k_{02}^{(1)} = 0,$$

obtemos

$$\mu_2 = \frac{15}{128}$$

tanto para $\mu_1 = -\frac{3}{8}$ quanto para $\mu_1 = \frac{3}{8}$.

Como visto, a determinação dos coeficientes de μ pode se tornar extremamente trabalhosa. Por conta disso, para o cálculo dos coeficientes até a ordem 10, utilizamos um *CAS (Computer Algebraic System)*, e obtemos assim as curvas

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\epsilon + \frac{15}{128}\epsilon^2 - \frac{45}{2048}\epsilon^3 + \frac{885}{32768}\epsilon^4 + \cdots + \frac{6281816055}{1099511627776}\epsilon^{10}$$

para $\mu_1 = -\frac{3}{8}$;

$$\mu = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\epsilon + \frac{15}{128}\epsilon^2 + \frac{45}{2048}\epsilon^3 + \frac{885}{32768}\epsilon^4 + \cdots + \frac{6281816055}{1099511627776}\epsilon^{10}$$

para $\mu_1 = \frac{3}{8}$, com os gráficos ilustrados abaixo.

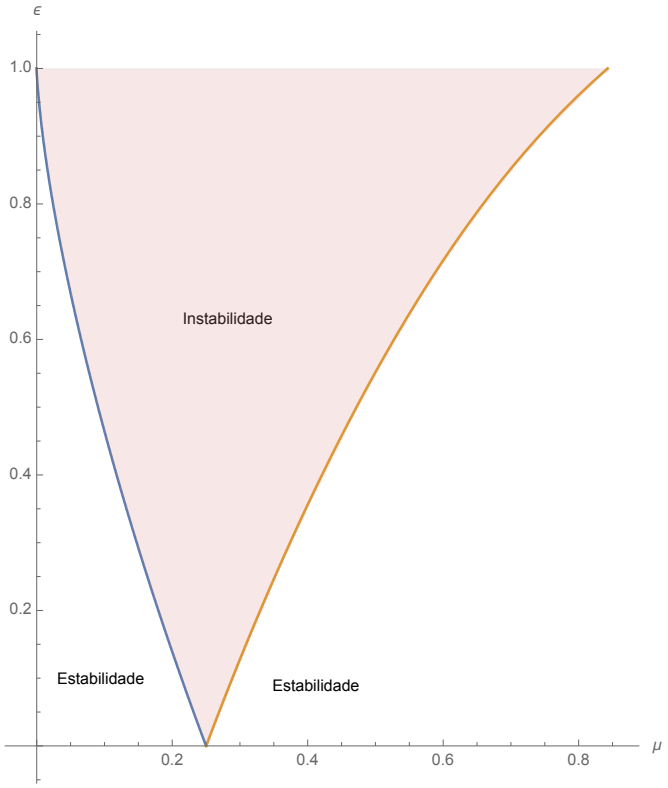

Figura 3.3: $N = 1$

3.4.2 Outros Pontos Ressonantes

Mostraremos agora as curvas obtidas para os valores de $N = 2, 3, 4, 5$. Nesta subseção é apresentado apenas o cálculo de μ_1, mas exibimos a(s) curva(s) com os outros valores da expansão de μ, calculados através de um software.

- **Curvas que emanam de (1, 0)**

  Consideremos $N = 2$. Temos então $\mu_0 = 1$ e,

$$\begin{aligned} H_1 &= (\mu_1 - (-1 + \mu_0))\frac{1}{2}(q\cos\nu + p\,\mathrm{sen}\,\nu)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu_1(q^2\cos^2\nu + qp\cos\nu\,\mathrm{sen}\,\nu + p^2\,\mathrm{sen}^2\nu) \end{aligned}$$

  logo,

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mu_1\cos^2\nu d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mu_1\cos\nu\,\text{sen}\,\nu d\nu \\ &= 0. \\ k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mu_1\,\text{sen}^{\,2}\nu d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{4}. \end{aligned}$$

Então, como $k^{(1)} = 4k_{20}^{(1)}k_{02}^{(1)}$, temos

$$4\frac{\mu_1}{4}\frac{\mu_1}{4} = 0$$

e portanto, $\mu_1 = 0$. Os demais coeficientes tem valor 0. Portanto, a curva é dada por $\mu = 1$, e o gráfico é mostrado a seguir.

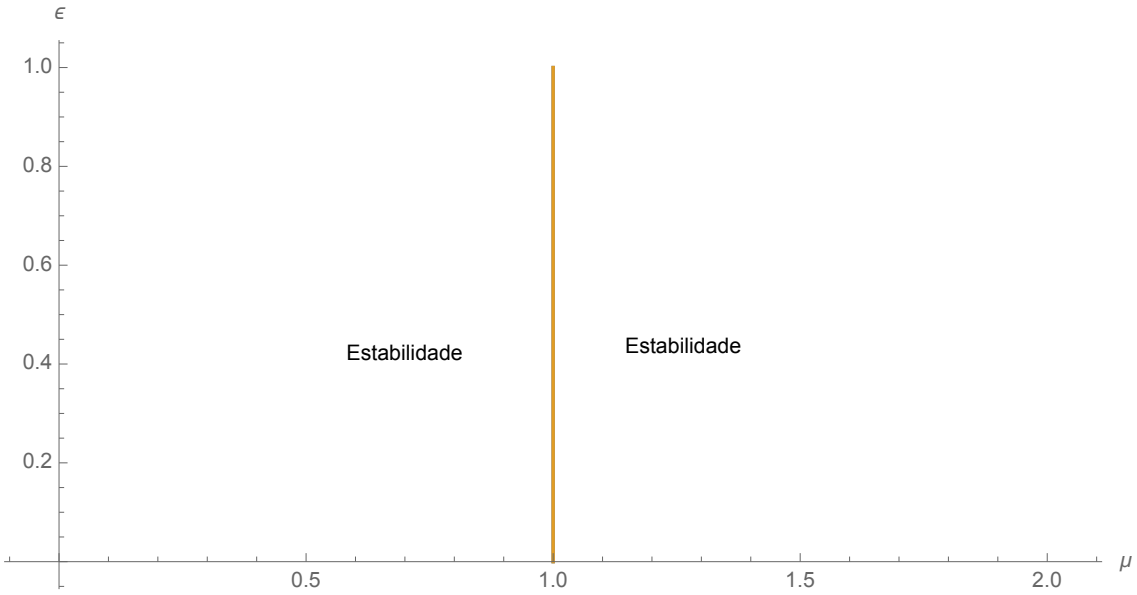

Figura 3.4: N = 2

- **Curvas que emanam de $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$**

  Consideremos $N = 3$. Temos então $\mu_0 = \frac{9}{4}$. Iremos determinar abaixo os valores de μ_1. Temos

$$\begin{aligned} H_1 &= (\mu_1 - (-1+\mu_0)\cos\nu)\frac{1}{3}\left(q\cos\left(\frac{3\nu}{2}\right) + p\,\text{sen}\,\left(\frac{3\nu}{2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(\mu_1 - \frac{5}{4}\cos\nu\right)\left(q^2\cos^2\left(\frac{3\nu}{2}\right) + qp\cos\left(\frac{3\nu}{2}\right)\,\text{sen}\,\left(\frac{3\nu}{2}\right) + p^2\,\text{sen}^{\,2}\left(\frac{3\nu}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\mu_1-\frac{5}{4}\cos\nu\right)\cos^2\left(\frac{3\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\mu_1-\frac{5}{4}\cos\nu\right)\cos\left(\frac{3\nu}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{3\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\mu_1-\frac{5}{4}\cos\nu\right)\,\mathrm{sen}^{\,2}\left(\frac{3\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{6}. \end{aligned}$$

Da expressão $k_{11}^{(1)2} = 4k_{20}^{(1)}k_{02}^{(1)}$, temos $\mu_1 = 0$. Após o cálculo dos demais coeficientes, obtemos os gráficos mostrados na figura a seguir

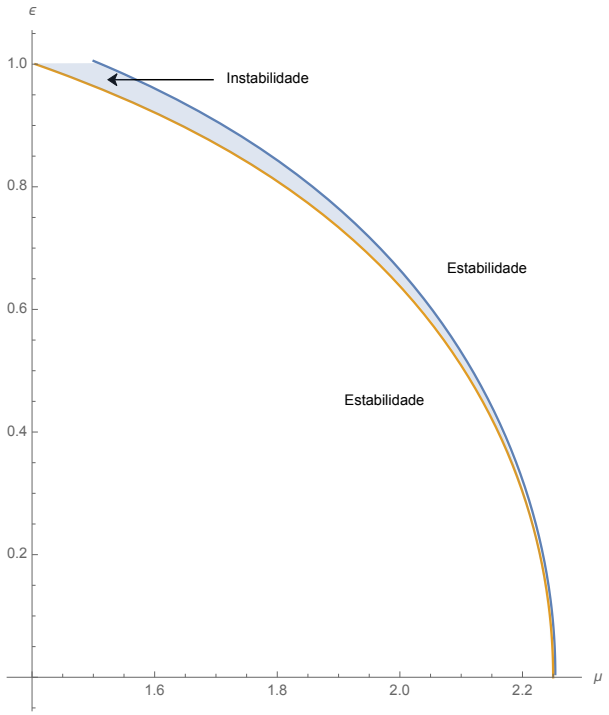

Figura 3.5: N = 3

onde as curvas são dadas por

$$\mu = \frac{9}{4} - \frac{135}{256}\epsilon^2 - \frac{45}{2048}\epsilon^3 - \frac{34695}{262144}\epsilon^4 + \cdots - \frac{15558075}{2147483648}\epsilon^7,$$

$$\mu = \frac{9}{4} - \frac{135}{256}\epsilon^2 + \frac{45}{2048}\epsilon^3 - \frac{34695}{262144}\epsilon^4 + \cdots + \frac{15558075}{2147483648}\epsilon^7.$$

- **Curvas que emanam de (4, 0)**

  Consideremos $N = 4$. Então, $\mu_0 = 4$, e

$$\begin{aligned} H_1 &= (\mu_1 - (-1+\mu_0)\cos\nu)\frac{1}{4}(q\cos 2\nu + p\,\mathrm{sen}\,2\nu)^2 \\ &= \frac{1}{4}(\mu_1 - 3\cos\nu)(q^2\cos^2 2\nu + qp\cos 2\nu\,\mathrm{sen}\,2\nu + p^2\,\mathrm{sen}^{\,2}2\nu). \end{aligned}$$

  Temos,

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}(\mu_1 - 3\cos\nu)\cos^2 2\nu\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}(\mu_1 - 3\cos\nu)\cos 2\nu\,\mathrm{sen}\,2\nu\right]d\nu \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}(\mu_1 - 3\cos\nu)\,\mathrm{sen}^{\,2}2\nu\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{4}, \end{aligned}$$

  e da relação $k_{11}^{(1)2} = 4k_{20}^{(1)}k_{02}^{(1)}$ segue que $\mu_1 = 0$. Após os cálculos, conseguimos a curva

$$\mu = 4 - \frac{6}{5}\epsilon^2 - \frac{39}{125}\epsilon^4 - \frac{7023}{43750}\epsilon^6$$

  com gráfico mostrado abaixo.

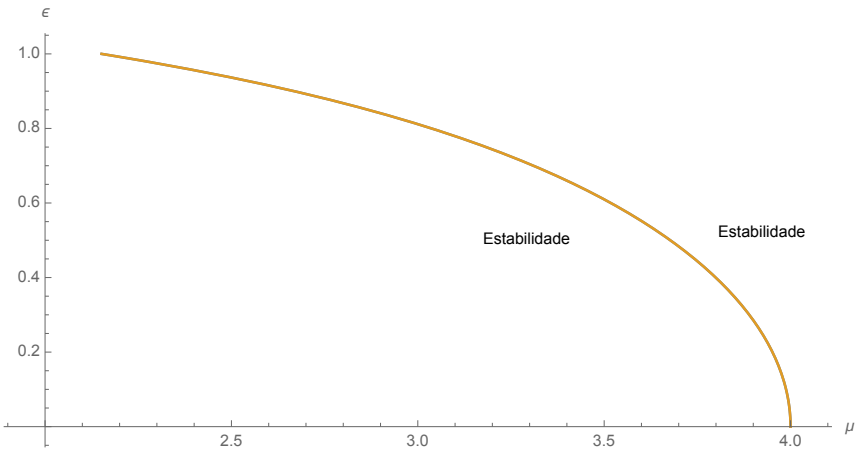

Figura 3.6: N = 4

- **Curvas que emanam de $\left(\frac{25}{4}, 0\right)$**

  Consideremos $N = 5$. Então, $\mu_0 = \dfrac{25}{4}$, e

$$\begin{aligned} H_1 &= (\mu_1 - (-1+\mu_0)\cos\nu)\frac{1}{5}\left(q\cos\left(\frac{5\nu}{2}\right) + p\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\nu}{2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{5}\left(\mu_1 - \frac{21}{4}\cos\nu\right)\left(q^2\cos^2\left(\frac{5\nu}{2}\right) + qp\cos\left(\frac{5\nu}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{5\nu}{2}\right) + p^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{5\nu}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

  Temos,

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{5}\left(\mu_1 - \frac{21}{4}\cos\nu\right)\cos^2\left(\frac{5\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{5}\left(\mu_1 - \frac{21}{4}\cos\nu\right)\cos\left(\frac{5\nu}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{5\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{5}\left(\mu_1 - \frac{21}{4}\cos\nu\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{5\nu}{2}\right)\right]d\nu \\ &= \frac{\mu_1}{10}, \end{aligned}$$

  e da expressão $k_{11}^{(1)2} = 4k_{20}^{(1)}k_{02}^{(1)}$ segue que $\mu_1 = 0$. Calculados os outros coeficientes, obtemos os gráficos

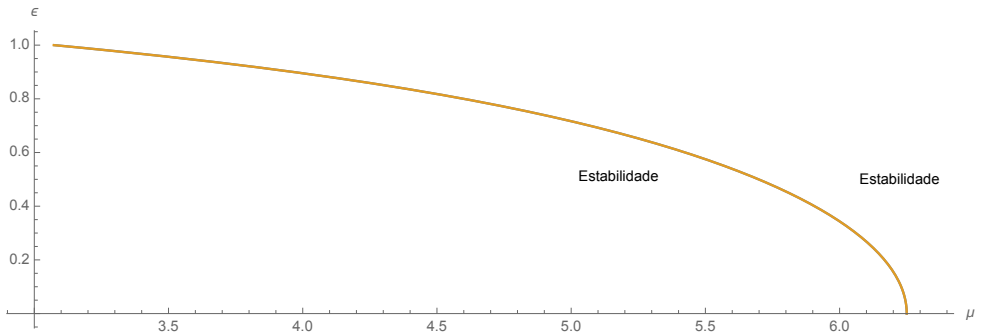

Figura 3.7: N = 5

das curvas abaixo

$$\mu = \frac{25}{4} - \frac{525}{256}\epsilon^2 - \frac{141225}{262144}\epsilon^4 - \frac{525}{2097152}\epsilon^5 - \frac{37465575}{134217728}\epsilon^6,$$

$$\mu = \frac{25}{4} - \frac{525}{256}\epsilon^2 - \frac{141225}{262144}\epsilon^4 + \frac{525}{2097152}\epsilon^5 - \frac{37465575}{134217728}\epsilon^6.$$

4 Conclusão

A Mecânica Celeste é uma importante área, responsável por diversos métodos e técnicas que foram essenciais no desenvolvimento da matemática, em áreas como o Cálculo e a Análise, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Teoria dos Números, Variáveis Complexas, entre outras [12].

Neste trabalho, tratamos de um problema da Mecânica Celeste. Estudamos a estabilidade paramétrica em um problema restrito de $P+1$ corpos, apresentado no artigo [2]: P primários de massas iguais se movem em uma solução homográfica elíptica do problema de P corpos, e uma partícula de massa infinitesimal se move sob a ação desses primários e ao longo de uma linha reta perpendicular ao plano de movimento deles e passa pelo foco comum das elipses.

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica que buscou principalmente estudar os resultados apresentados no artigo [2], utilizando, para essa finalidade, livros, trabalhos de conclusão de curso, notas de aula e artigos.

Visando responder a questão sobre a estabilidade paramétrica do sistema associado ao problema descrito acima, apresentamos o hamiltoniano do problema e o sistema linear associado. Em seguida, mostramos que se $\epsilon = 0$, o sistema linear é estável. Nos casos em que há ressonância de Krein, isto é, para os valores de $\mu = \mu_0$ tais que $2\sqrt{\mu_0} = N$, $N \in \mathbb{Z}$, separamos regiões de estabilidade e instabilidade no plano $\mu\ \epsilon$, construindo curvas que emanam dos pontos $(\mu_0, 0)$, para $N = 1, 2, 3, 4, 5$.

A Mecânica Celeste continua a contribuir com muitos trabalhos, e espera-se que problemas estudados hoje, sem aplicação no mundo físico, possam ser úteis em grandes situações, num futuro próximo.

Referências

[1] CABRAL, H. E. **Boundary curves of the stability/instability regions**. (Complemento ao livro do Markeev [4])

[2] DIAS, L. B.; CABRAL, H. E. Parametric Stability in a Sitnikov-Like Restricted P-Body Problem. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 30, p. 81–92, 2018.

[3] LHOTKA, C. Sitnikov's Planet. **La Matematica nella Società e nella cultura. Rivista Dell'Unione Matematica Italiana**, série 1, v. 8, p. 1–31, abr. 2015.

[4] MARKEEV, A. P. **Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass**. Moscow-Izhevsk: NITs Regular and Chaotics Dynamics, Institute of computational analysis, 2009. 396 p. Tradução feita por Hildeberto Cabral.

[5] MACMILLAN, W. Integrable case in the restricted problem of three bodies. **Astronomical Journal**, v. 27, p. 11–13, abr. 1911.

[6] MEYER, K. R.; OFFIN, D. C. **Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N - Body Problem**. 3. ed. Springer, 2017.

[7] RANGEL, A. P. C. M. S. **O movimento dos dois corpos**. 2001. 228f. Dissertação (Mestrado em Astronomia) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Universidade do Porto, Porto, 2001.

[8] SILVA, D. L. **Soluções homográficas e configurações centrais**. 2007. 76f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

[9] SZEBEHELY, V. G.; MARK, H. **Adventures in Celestial Mechanics**. 2. ed. Austin: Wiley - VCH, 2004.

[10] VIDAL, C. **Curso de Equações Diferenciais Ordinárias**. 2004. (Notas de aula).

[11] VIDAL, C. **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos**. 2003. (Notas de aula).

[12] VOLCHAN, S. B. **Uma introdução à Mecânica Celeste**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Publicações Matemáticas).

A

A Função Geradora W

Mostraremos neste apêndice que $H_0 = 0$. Para transformarmos o hamiltoniano do problema, precisamos de uma função geradora, como comentamos no método de Deprit-Hori. Seja $W(\bar{x}, p, \nu)$ a função geradora da rotação

$$\begin{aligned} \bar{x} &= q\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) \\ \bar{X} &= -q\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right). \end{aligned}$$

Mostremos, inicialmente, que

$$W_\nu = -\frac{N}{4}(q^2 + p^2).$$

Para isso, consideremos as relações $\bar{X} = W_{\bar{x}}$ e $q = W_p$, que implicam

$$\begin{aligned} W_{\bar{x}} &= -q\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) \\ &= -\left(\frac{\bar{x} - p\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) \\ &= \frac{-\bar{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\cos^2\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} \\ &= \frac{-\bar{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)}, \end{aligned}$$

e integrando em relação a $\bar{x}$, obtemos

$$W(\bar{x}, p, \nu) = -\frac{\bar{x}^2}{2}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} + \frac{\bar{x}p}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} + g(p). \tag{A.1}$$

De (A.1) e da igualdade $q = W_p$, temos

$$\left(\frac{\bar{x} - p\,\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)}\right) = W_p = \frac{\bar{x}}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} + g'(p),$$

onde $g'(p)$ é a derivada de g com respeito a p. Logo,

$$g'(p) = -p\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)}$$

donde,

$$g(p) = -\frac{p^2}{2}\frac{\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)}.$$

Segue então de (A.1) que

$$\begin{aligned} W(\bar{x}, p, \nu) &= -\frac{\bar{x}^2}{2}\frac{\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} + \frac{\bar{x}p}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} - \frac{p^2}{2}\frac{\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{x}^2 + p^2)\frac{\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)} + \frac{\bar{x}p}{\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right)}, \end{aligned}$$

portanto,

$$W_\nu = \frac{1}{2}\frac{N}{2}(\bar{x}^2 + p^2)\frac{1}{\cos^2\left(\frac{N\nu}{2}\right)} + \frac{N}{2}\bar{x}p\frac{\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{N\nu}{2}\right)},$$

e usando que $\bar{x} = q\cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) + p\,\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right)$, obtemos

$$W_\nu = -\frac{N}{4}(q^2 + p^2),$$

como queríamos. Vamos provar agora que $H_0 = 0$. Temos

$$\begin{aligned} K(q, p, \nu, \mu, \epsilon) &= H(\bar{x}, \bar{X}, \nu, \mu, \epsilon) + \frac{\partial W}{\partial \nu} \\ &= \frac{N}{4}(\bar{x}^2 + \bar{X}^2) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\epsilon^m}{m!}H_m(\bar{x}, \bar{X}, \nu, \mu, \epsilon) - \frac{N}{4}(q^2 + p^2) \\ &= \frac{N}{4}(q^2 + p^2) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\epsilon^m}{m!}H_m(\bar{x}, \bar{X}, \nu, \mu, \epsilon) - \frac{N}{4}(q^2 + p^2) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\epsilon^m}{m!}H_m(\bar{x}, \bar{X}, \nu, \mu, \epsilon) \end{aligned}$$

o que mostra que $H_0 = 0$ e encerra a demonstração.

B

Algumas Identidades

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados usados na demonstração da Proposição 3.1. Faremos isso através de algumas afirmações.

Afirmação 1: Valem as igualdades:

$$\begin{aligned} 2S_2 &= P\left(|\omega^1-\omega^0|^2+|\omega^2-\omega^0|+\cdots+|\omega^{P-1}-\omega^0|\right) \\ &= 4P\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{P}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{P}\right)+\cdots+\operatorname{sen}^2\left(\frac{(P-1)\pi}{P}\right)\right). \end{aligned}$$

Considere a matriz

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & r_{01}^2 & r_{02}^2 & \cdots & r_{0P-1}^2 \\ r_{10}^2 & 0 & r_{12}^2 & \cdots & r_{1P-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ r_{P-1\,0}^2 & r_{P-1\,1}^2 & r_{P-1\,2}^2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que a soma dos elementos do triângulo superior é igual a S_2, como também a soma dos elementos do triângulo inferior, pois A é simétrica. Se T é igual à soma dos elementos da matriz A, então $T = 2S_2$. Seja L_i a i-ésima linha da matriz A. Como as distâncias mútuas não mudam pela rotação, segue que

$$\left(|\omega^1-\omega^0|^2+|\omega^2-\omega^0|^2+\cdots+|\omega^{P-1}-\omega^0|^2\right)=L_0=L_1=\cdots=L_{P-1}=L,$$

então, $PL = T = 2S_2$. E provamos assim a primeira igualdade. Mostraremos agora que $|\omega^j-\omega^0|^2 = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Temos,

$$\begin{aligned} |\omega^j-\omega^0|^2=(\omega^j-\omega^0)\overline{(\omega^j-\omega^0)}=2-(\omega^j+\bar{\omega}^j) &= 2-2\cos\left(\frac{2\pi j}{P}\right) \\ &= 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Afirmação 2: Vale a igualdade

$$\sum_{j=1}^{P-1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)=\frac{P}{2}.$$

Como $\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) + \cos^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=0}^{P-1}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) + \cos^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)\right] = P.$$

Logo, basta provarmos que

$$\sum_{j=0}^{P-1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = \sum_{j=0}^{P-1}\cos^2\left(\frac{j\pi}{P}\right),$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^{P-1}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) - \cos^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)\right] = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{j=0}^{P-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{P}\right) = 0.$$

Com efeito, $\omega = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^{P-1} = 0$, e, em particular, Re $\omega = 0$, ou seja,

$$\sum_{j=0}^{P-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{P}\right) = 0,$$

como queríamos mostrar.

Afirmação 3: Temos,

$$F(P) = 8\frac{1 + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{1 + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}}, \qquad F(P) = 8\frac{2\displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{2\displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}},$$

conforme P seja par ou ímpar, respectivamente.

Temos

$$F(P) = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2P\displaystyle\sum_{j=1}^{P-1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{\frac{P}{4}\displaystyle\sum_{j=1}^{P-1}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}} = 8\ \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{P-1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{P-1}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}}$$

logo, para provarmos a expressão de F quando P é par, basta mostrarmos que

$$\sum_{j=1}^{P-1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)$$

e

$$\sum_{j=1}^{P-1} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)} = 1 + 2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{P}\right)}. \tag{B.1}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) &= \sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{(\frac{P}{2})\pi}{P}\right) + \sum_{j=\frac{P+2}{2}}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) + \sum_{j=\frac{P+2}{2}}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right),\end{aligned}$$

e como,

$$\begin{aligned}\sum_{j=\frac{P+2}{2}}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{(\frac{P+2}{2})\pi}{P}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{(\frac{P+3}{2})\pi}{P}\right) + \cdots + \operatorname{sen}^2\left(\frac{(P-1)\pi}{P}\right) \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{(\frac{P-2}{2})\pi}{P}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{(\frac{P-3}{2})\pi}{P}\right) + \cdots + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{P}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right),\end{aligned}$$

onde usamos na penúltima igualdade a identidade $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$, temos então,

$$\sum_{j=1}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\frac{P-2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right),$$

como queríamos. A igualdade (B.1) segue de maneira análoga. Como fizemos no caso em que P é par, mostraremos apenas uma das identidades para P ímpar, e a outra seguirá da mesma forma. Provaremos que,

$$\sum_{j=1}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = 2\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right).$$

Temos,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) &= \sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) + \sum_{j=\frac{P+1}{2}}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) \\ &= 2\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)\end{aligned}$$

já que,

$$\sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right) = \sum_{j=\frac{P+1}{2}}^{P-1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{P}\right)$$

pela identidade $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$, o que encerra a demonstração.