UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Roger Melo do Nascimento

Uma Proposta Didática para o Cálculo no Ensino Médio

São Luís - MA
2024

Roger Melo do Nascimento

Uma Proposta Didática para o Cálculo no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Melo do Nascimento, Roger.
Uma Proposta Didática para o Cálculo no Ensino Médio / Roger Melo do Nascimento. - 2024.
88 f.

Orientador(a): Prof. Dr. José Santana Campos Costa.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. Limite. 2. Derivada. 3. Integral. 4. . 5. . I. Campos Costa, Prof. Dr. José Santana. II. Título.

Roger Melo do Nascimento

Uma Proposta Didática para o Cálculo no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 16 de Setembro de 2024.

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Orientador
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr.
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr.
Examinador Externo
Universidade

São Luís - MA
2024

A Emilly, Kevyn e Benício.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder força, saúde e perseverança para lutar cada batalha com maestria e superar as dificuldades que surgiram ao longo de minha vida escolar e, sobretudo, durante o mestrado.

Aos meus pais, Manoel Rosa do Nascimento e Izidoria Costa Melo, em especial, a minha mãe que fora sempre uma guerreira à frente do campo de batalha, enfrentando e vencendo as muitas dificuldades que a vida lhe impôs, para educar e criar eu e meus irmãos, Sandro e Tatiane.

Aos meus filhos Emilly Shopia, Kevym Rhawan e Benício por serem meus principais incentivadores para seguir lutando.

A todos os meus amigos do mestrado pela parceria e pelas horas de estudo, sobretudo, João e Derivaldo, que foram os que mais me ajudaram nos momentos de dificuldade. Agradeço à Deus por ter colocado todos vocês em meu caminho e por ter feito parte dessa turma maravilhosa. Vocês são os melhores!

Aos professores do programa PROFMAT/UFMA, Arlane, Anselmo, Flausino, José Santana, João de Deus, Valdiane e Valeska que dividiram conosco um pouco de seu conhecimento. Obrigado por sempre estarem disponíveis, pela parceria, dedicação e apoio de sempre.

Ao meu conterrâneo e orientador, Professor Dr. José Santana Campos Costa que durante todo o curso se mostrou muito acessível, e no período de orientação, sempre com muita paciência, me fez enxergar os caminhos para que pudesse alcançar os objetivos propostos nesta pesquisa. Sem dúvida foi um amigo que ganhei para a vida.

A professora Claudienne da Cruz Ferreira que foi a grande incentivadora para que eu fizesse o exame de acesso, retornasse a vida acadêmica e realizasse o sonho de cursar o mestrado.

A Maria Leocádia Cirne Coutinho minha professora da 1ª série do ensino fundamental, carinhosamente chamada de Dona Li, a responsável por eu me apaixonar pela matemática tão logo chegasse ao segundo degrau da educação básica, em nome de quem, agradeço a todos os professores que tive durante minha vida escolar.

"Todas as culturas foram iluminadas pela Geometria, cujas formas despertam no espírito um sentimento de exatidão e de evidência absoluta."

(Nadir afonso)

Resumo

Neste texto apresento Uma Proposta Didática para o Cálculo a ser aplicada junto aos alunos no Ensino Médio. Justifica-se tal proposta pela dificuldade enfrentada por discentes ao terem o primeiro contato com Cálculo apenas no Ensino Superior, uma vez que esta temática, não vem sendo trabalhada pelos professores por não fazer, oficialmente, parte do currículo da Educação Básica atualmente no Brasil. A proposta inicia apresentando um pouco da história da criação, criadores e desenvolvimento do Cálculo, seguido do estudo do conceito, propriedades e aplicação do Limite, Derivada e Integral na resolução de problemas e finalizando com a aplicação do Cálculo na obtenção da área sob gráficos de funções e Parametrização e Reparametrização de Curvas pelo Comprimento de Arco. Ressalta-se que o objetivo de tal estudo não é a promoção de um curso de Cálculo e sim proporcionar uma aprendizagem significativa acerca da definição e da aplicação da temática abordada, assim, deixo ao longo do texto propostas de atividades e nos apêndices, abordagens mais profundas dessas temáticas e as soluções das atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

Palavras-chave: limite, derivada, integral.

Abstract

In this text I present a Didactic Proposal for Calculus to be applied to high school students. This proposal is justified by the difficulty faced by students when having their first contact with Calculus only in Higher Education, since this topic has not been worked on by teachers as it is not officially part of the Basic Education curriculum currently in Brazil. The proposal begins by presenting a little of the history of the creation, creators and development of Calculus, followed by the study of the concept, properties and application of Limit, Derivative and Integral in solving problems and ending with the application of Calculus in obtaining the area under graphs of functions and Parameterization and Reparameterization of Curves by Arc Length. It should be noted that the objective of such a study is not to promote a Calculus course but to provide significant learning about the definition and application of the topic covered, therefore, I leave proposals for activities throughout the text and in the appendices, more these themes and the solutions for the activities to be developed by the students.

Keywords: limit, derivative, integral.

Sumário

1 Introdução

O declínio da presença do estudo do Cálculo no currículo da Educação Básica iniciou com o Movimento da Matemática Moderna - MMM da década de sessenta. Assim, a maioria dos estudantes brasileiros tem o primeiro contato com esta área da matemática apenas no Ensino Superior, onde acabam por sentir muita dificuldade, seja em cursos de graduação, mestrado ou doutorado, uma vez que não tiveram contato com a temática ao longo do Ensino Médio.

O estudo do Cálculo é base para a maioria dos cursos superiores de diversas áreas. É fundamental que ao longo da Educação Básica os alunos tenham contanto com alguns objetos de conhecimentos (conteúdos) fundamentais para a compreensão de conceitos introdutórios e para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa em relação ao estudo citado.

Para que o aluno possa consolidar uma aprendizagem das temáticas presentes no Cálculo, estudar geometria ao longo do Ensino Fundamental, mesmo que de forma introdutória, através da definição de Ponto, Reta, Plano, Figuras Planas, Sólidos Geométricos é fundamental. No Ensino Médio, estudar as funções, a trigonometria, a geometria espacial e a geometria analítica constituem base na busca pelo protagonismo dos alunos ao estudarem Cálculo, mesmo que apenas de forma intuitiva.

Ao ter contato com o estudo do Limite, Derivada e Integral já no Ensino Médio, o aluno adquire conhecimentos que lhe servirão como base para um estudo completo do Cálculo no Ensino Superior. Neste sentido, apresento *Uma Proposta Didática do Cálculo* para ser aplicada junto aos alunos da última etapa da Educação Básica. Justifica-se tal estudo pela dificuldade enfrentada por discentes do Ensino Superior ao terem o primeiro contato com o Cálculo somente nesta etapa da educação. Assim, com a efetivação da proposta didática apresentada, busca-se a promoção de uma aprendizagem significativa acerca da definição e da aplicação dos temas abordados, junto aos alunos do Ensino Médio, promovendo o primeiro contato dos futuros acadêmicos com o Cálculo.

Assim, iniciamos este estudo apresentando o contexto histórico da criação e criadores do Cálculo, remetendo a origem a Arquimedes de Siracusa, que viveu no século III a.C, perpassando pelos matemáticos Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a quem se credita a criação, em um período compreendido entre os anos de 1600 e 1799 (Séc. XVII e XVIII).

No Capítulo seguinte apresento um estudo do conceito, propriedades e aplicações do Limite, Derivada e Integral, através de exemplos simples, da interdisciplinaridade e da aplicação do Cálculo na solução de problemas. E, para finalizar o estudo proposto, apresento aplicações do Cálculo no Ensino Médio, através do cálculo de área limitada pelo gráfico de funções e da Parametrização e Reparametrização pelo Comprimento de Arco.

Espera-se que os professores de matemática entendam a importância dos alunos terem contato com o Cálculo ainda no Ensino Médio, mesmo que de forma intuitiva e com aplicações simples, fazendo o estudo dos temas já listados, afim de que os alunos tenham menos dificuldades ao terem contato no Ensino Superior com um estudo mais detalhado e completo desta temática.

2 Uma Proposta Didática para o Cálculo no Ensino Médio

A educação formal é divida em etapas. A primeira etapa é a educação básica, formada pela Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio e, em seguida, temos o Ensino Superior. Desde os primeiros dias de vida escolar, a criança, mesmo que de forma abstrata, tem os primeiros contatos com a geometria, base para o estudo proposto.

No Ensino Fundamental as aulas de geometria ganham mais sentido para os alunos com a implementação da definição geométrica de ponto, reta, plano, ângulo, área, perímetro, volume, o que permite ao estudante iniciar sua jornada no mundo fascinante da geometria e, consequentemente, dar os primeiros passos para a compreensão de conceitos relacionados ao Cálculo.

No Ensino Médio, última etapa da educação básica, o aluno consegue aprimorar os conhecimentos adquiridos e amplia seus conhecimentos geométricos estudando novas áreas como a geometria espacial, geometria analítica e por que não, geometria diferencial (área que tem o Cálculo como base). Esse novo universo permite ao aluno estudos mais aprofundados dessas temáticas e suas aplicações, a partir do conhecimento de novas definições, lemas, teoremas.

De acordo com a [10] "o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos[...]". Para que os discentes possam adquirir o conhecimento matemático que é de suma importância para sua vida pessoal e acadêmica, a educação matemática foi dividida em cinco unidades temáticas: "números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística"[10, p.265].

O objeto de estudo nesta proposta didática será a introdução de conceitos básicos para o estudo do Cálculo através da unidade temática geometria, mais especificamente a geometria diferencial, área onde utilizamos os conhecimentos geométricos adquiridos durante a educação básica e aplicamos o cálculo diferencial na resolução dos problemas propostos.

Para o alcance dos objetivos propostas, serão estudados temas como Limite, Derivada, Integral, Parametrização e Reparametrização pelo Comprimento de Arco, além da aplicação destes para a resolução de problemas, promovendo um processo de ensino e aprendizagem significativo, a partir do estudo do contexto histórico da criação e dos criadores da temática abordada, seguido do conceito, propriedades e aplicação de limite, derivada, integral.

Este deve ser um compromisso de todos os professores de matemática que trabalham nessa etapa da Educação Básica. Sei que a realidade é diferente em cada escola e em cada região deste país, mas, temos urgência em melhorar os índices de aprendizagem na matemática e em relação ao estudo de Cálculo não é diferente, uma vez que é grande o índice de reprovação e evasão em cursos superiores que tem o Cálculo presente em seu currículo, portanto, sugerimos aos professores que apresentem essa temática aos alunos logo no Ensino Médio para que estes possam desenvolver um processo de ensino e aprendizagem eficiente e assim construir a base necessária para o aprofundamento dessa temática no Ensino Superior.

2.1 Contexto Histórico da Criação do Cálculo

Sugiro aos professores que iniciem o estudo do Cálculo no Ensino Médio através da apresentação histórica de sua criação, criadores e desenvolvimento com o passar do tempo, tendo como objetivo a motivação dos alunos e aplicação de uma metodologia lúdica a partir de exemplos simples que possam evidenciar de forma clara o estudo proposto, dando ênfase a interdisciplinaridade e a promoção de forma significativa de um processo de ensino e aprendizagem.

Assim, vejamos um pouco sobre o princípio histórico do surgimento do Cálculo nas palavras de Domingues (apud [8, p.52]);

> Uma das primeiras manifestações do cálculo integral é devida a Antifon, um contemporâneo de Sócrates. Antifon argumentava que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a dos polígonos seria "ao fim" exaurida. E como sempre é possível construir um quadrado equivalente a qualquer polígono, a quadratura do círculo seria possível. Apesar de sua inconsistência, a argumentação de Antifon contém o gérmen do método de exaustão, creditado a Eudóxio, cuja base é a proposição: "Se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante outra parte não menor que sua metade, e assim por diante, numa determinada etapa do processo chega-se a uma grandeza menor que qualquer outra da mesma espécie fixada a priori". Esse método representa o expediente grego para evitar processos infinitos — dos quais desconfiavam. E ninguém o manejou com tanta elegância e mestria como Arquimedes (287-212 a.C.).

O Contexto histórico por trás da criação do Cálculo é de uma beleza tão grande quanto sua aplicação. Neste recorte, iremos apresentar um pouco da história que tem sua origem remetida a Arquimedes de Siracusa, que viveu no século III a.C., uma vez que suas "ideias sobre o cálculo da área sob um segmento parabólico anteciparam, em 2000 anos, o desenvolvimento do Cálculo Integral" [9, p.1] e criação e desenvolvimento creditados aos matemáticos Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em um período compreendido entre os anos de 1600 e 1799 (Séc. XVII e XVIII).

Segundo [6, p.176] foi "graças aos esforços de vários sábios, dentre os quais se destacam Jacques Bernoulli (1654-1705), Jean Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Euller (1707-1783)" que os métodos do Cálculo se desenvolveram e jamais deixaram de serem modernos. Mas, não apenas estes estudiosos colaboraram para que essa que é uma das maiores ferramentas da matemática já criada pelo homem, pudesse ser desenvolvida ao que conhecemos hoje e "parafraseando o próprio Newton, que tal só foi possível porque ambos se apoiaram sobre os ombros de gigantes como Arquimedes, Euclides, Viète, Galileu, Descartes, Fermat, dentre outros". [9, p.XI].

Assim, vejamos um pouco da história dos criadores do Cálculo;

> Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático e filósofo alemão do século XVII, é considerado juntamente com sir Isaac Newton, um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral. Algumas das notações que utilizamos até hoje no Cálculo foram criadas já por Leibniz, tendo resistido ao implacável teste do tempo[...].
>
> [...] O matemático e físico inglês Isaac Newton é considerado um dos maiores cientistas que a humanidade já conheceu, sendo difícil mensurar sua contribuição para o desenvolvimento da ciência. Considerado o pai da Física moderna, Newton criou, juntamente com G. W. Leibiz, os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, pedra angular do desenvolvimento científico e tecnológico vivenciado desde sua época, no final do século XVII, até os dias de hoje [9, p.4-5].

No século XVII, em virtude do surgimento da Peste Negra, as universidades também fecharam as portas e Newton se refugiou na fazenda de sua mãe, entre os anos de 1665 e 1666, período tido para muitos como os "anos de ouro" em virtude das muitas contribuições para a matemática, dentre as quais, o "Método Direto das Fluxões" (Cálculo Diferencial) e o "Método Inverso das Fluxões" (Cálculo Integral), que não foram publicados de imediato por ele.

Leibniz, por sua vez, foi o primeiro a fazer publicação sobre suas descobertas em relação ao Cálculo, um estudo com notação bem mais claras que a apresentada por Newton e muito próxima da que adotamos hoje, mas, este acabou sendo acusado por Newton de tê-lo plagiado. No entanto, foi Leibniz quem nomeou esse estudo que conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que Newton chamava tal estudo de Método das Fluxões. Hoje é possível sabermos que ambos criaram e provaram de maneira independente o que conhecemos como Teorema Fundamental do Cálculo.

2.2 O Cálculo no Ensino Médio do Brasil

No Brasil, a história do ensino de matemática se remete aos padres Jesuítas a partir da criação de uma escola no Rio de Janeiro em 1573, época em que a Matemática figurava nos cursos superiores de Ciência, Filosofia e Arte, que tinham como objetivo principal formar novos servos para a igreja. A expulsão dos Jesuítas do Brasil e o surgimento das chamadas "aulas regias" que não resolveram o problema do ensino, mas que introduziram disciplinas como Aritmética e Álgebra ao currículo e abriram portas para que anos mais tarde tivéssemos a primeira grande mudança no ensino de matemática no Brasil a partir da criação do colégio Pedro II no Rio de Janeiro e da inserção oficial da Aritmética, Álgebra e Geometria ao currículo da época.

A história do ensino do Cálculo no Brasil tem seu início a partir das regulamentações trazidas pelo [1], a partir do qual se o ensino Primário e Secundário foram reorganizados e disciplinas como o Cálculo passaram a figurar no currículo. E Anos mais tarde, não menos importante, a chamada Reforma Francisco Campos, ocorrida em 1931, através de uma série de Decretos dos quais destaco o [2] que consolidou as disposições sobre a organização do ensino secundário e regulamentou a educação em âmbito nacional.

Outras reformas surgiram mais tarde, a exemplo, a Reforma Capanema durante a Era Vargas (1930-1945) que através do [3] determinou as finalidades do Ensino Secundário, como sendo:

> Formar, em prosseguimento da obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes; Acentuar a elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística; Dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial.

Em [4, p.1] afirma que "[...]fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos[...]", ou seja, o Cálculo já se fazia presente no currículo da época, mas, o MMM que surgiu na década de 1960 tendo como alicerce o rigor e a formalidade como pressupostos para o ensino e aprendizagem de matemática, foi um tanto controverso, uma que vez se pregava à época a necessidade de aplicação de uma matemática mais moderna ao ensino e no entanto, esse movimento é considerado marco inicial para o declínio da presença do Cálculo no currículo da Educação Básica brasileira.

O estudo do Cálculo é disciplina base para diversos cursos superiores, sobretudo, nas áreas de exatas e engenharia. Esse estudo além de ser muito importante em função de sua aplicação em diversas áreas (Física, Química, Medicina, Engenharias, Tecnologia e nas diversas Ciências), também figura como uma das disciplinas que mais reprova e colabora para os índices de evasão no Ensino Superior. Sem dúvida, a falta de conhecimentos básicos sobre a temática influência no desempenho negativo da maioria dos alunos que cursam Cálculo no Ensino Superior no Brasil e corrobora para os índices negativos.

A partir desse pressuposto, esta proposta didática possibilita o resgate do ensino de Cálculo no currículo do Ensino Médio no Brasil, tema outrora presente, mas que atualmente encontra-se ausente das aulas e livros didáticos de matemática a nível de Ensino Médio. Ressalta-se que é importante para os futuros acadêmicos dos diversos cursos superiores terem contato com conhecimentos básicos do Cálculo ao longo dessa etapa da

Educação Básica, podendo este estudo ser realizado de forma interdisciplinar, durante as aulas regulares de matemática e/ou das eletivas trazidas pelo novo modelo de Ensino Médio, o que permitirá uma base bem mais sólida e alunos mais preparados para os cursos de Cálculo presentes no Ensino Superior.

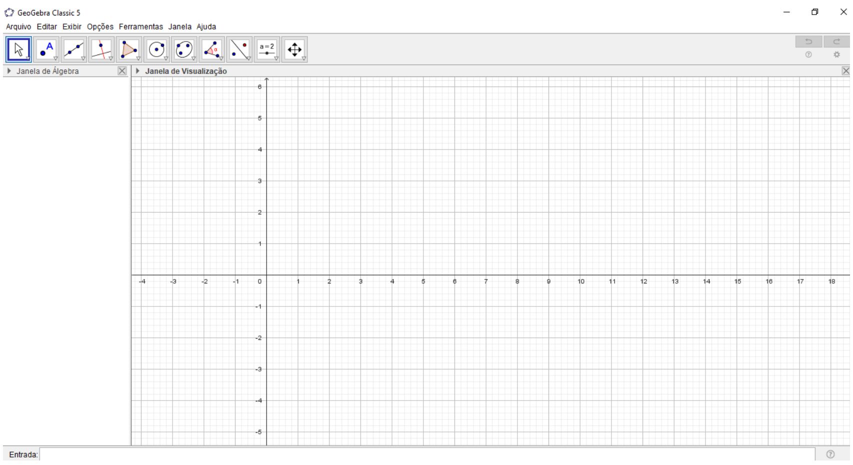
2.3 Recursos Computacionais Aplicados ao Ensino de Cálculo

O estudo de Cálculo ainda na Educação Básica é fundamental para a consolidação de conhecimentos prévios sobre essa temática e reduzir os índices negativos que essa disciplina apresenta no Ensino Superior. A realidade educacional vivenciada no Brasil é muito distinta, seja entre escolas da rede pública e privada de ensino, seja entre escolas públicas nas diferentes esferas de governo. Se analisarmos apenas a rede pública, a disparidade em termos educacional e estrutural já é alarmante. Muitas escolas não possuem computadores nem para uso dos professores, imagine laboratórios de informática para uso dos alunos, mas, mesmo esse não sendo o momento para discutirmos sobre essa temática, sabemos que essa triste realidade acaba influenciando na metodologia a ser aplicada.

Mesmo mediante tais problemáticas, o ensino de Cálculo, seja na Educação Básica ou Superior, com o auxílio das ferramentas tecnológicas disponíveis se torna mais dinâmico e de fácil compreensão.

Dentre os recursos disponíveis gratuitamente e que podem ser utilizados para este fim, apresento o GeoGebra por ser o recurso mais completo para o objetivo de momento.

Figura 1 – Interface do GeoGebra



Fonte: [15]

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo [...]. Com auxílio desse recurso tecnológico, o professor poderá criar as apresentações para que os alunos assimilem os conceitos propostos de forma mais dinâmica.

No Ensino Médio, ao estudar o conceito de limite, derivada e integral com o auxílio do GeoGebra, o aluno consegue assimilar com mais precisão a noção intuitiva dos conceitos a partir da análise gráfica, por meio das apresentações lúdicas que o professor pode fazer com uso desse recurso tecnológico.

Assim, sugiro aos professores que ao aplicarem esta proposta didática façam uso desse recurso tecnológico. Caso o professor não domine a ferramentas indicada, este poderá pesquisar por cursos de formação gratuitos que estão disponíveis na internet.

2.4 Processo de Avaliação no Desenvolvimento da Proposta Didática

A avaliação é o momento em que o professor verifica o nível de aprendizagem desenvolvida pelo alunos ao longo do desenvolvimento da proposta didática. O processo de avaliação deve ser de forma contínua, ou seja, precisa ser aplicado ao longo do desenvolvimento da proposta didática e não apenas mediante uma atividade avaliativa no final do processo, prática ainda adotada por muitos docentes, no entanto, de acordo com [11, p. 46] [...] à medida que acontecem os avanços tecnológicos, sociais e culturais, surge a necessidade eminente de mudanças na escola e, consequentemente, das práticas avaliativas que permeiam todo o trabalho pedagógico. Não é possível que os processos de aprender e ensinar, hoje, sejam os mesmos de dez ou vinte anos atrás. Vivemos em constante transformação, e isso tem impacto nas práticas escolares.

Assim, como proposta de avaliação, sugiro aos professores que adotem ao longo da aplicação desta proposta didática atividades individuais ou em grupo que permitam ao aluno demonstrar a aprendizagem desenvolvida em cada tópico estudado, aplicando os conceitos e propriedades do limite, derivada e integral de forma prática, a partir da resolução de problemas e de forma dinâmica através da apresentação da solução de problemas propostos, a partir da análise e construção gráfica, com auxílio do recurso tecnológico sugerido (GeoGebra).

O aluno precisa ser protagonista de sua aprendizagem e o professor deve apenas auxiliá-lo ao longo do processo, para que este possa construir sua aprendizagem. Sugiro ao professor que no momento da aplicação de atividades que tenham cunho avaliativo quantitativo, evite questões muito carregadas de conceitos e aplicações complexas para esta etapa de ensino. Lembre-se sempre que o objetivo da proposta didática não é a promoção de um curso de Cálculo no Ensino Médio, mas, tão somente apresentar as aplicações do Cálculo de forma lúdica, dinâmica e prazerosa, permitindo ao aluno a construção de aprendizagens previas em relação a temática abordada.

3 Limite, Derivada e Integral

Este capítulo apresenta a base de estudo do Cálculo. Recomenda-se ao professor que não transforme esta proposta didática em um curso completo de Cálculo, uma vez que os alunos do Ensino Médio ainda apresentam muitas limitações básicas e fazer desta proposta um curso, nesta etapa de ensino, tornaria o estudo cansativo e desmotivante.

Neste sentido, ressalto que nesta etapa da educação, os alunos precisam conhecer a noção intuitiva, algumas propriedades e desenvolver algumas aplicações em relação a temática (limite, derivada e integral), mas, caso os alunos consigam desenvolver uma boa aprendizagem, o professor pode, gradativamente, aumentar o nível das atividades. A proposta didática ora apresentada foi preparada pensando nesses possíveis cenários.

No entanto, sugiro aos professores de matemática do Ensino Médio que busquem sempre alternativas metodológicas que valorizem os conhecimentos prévios, o lúdico, a tecnologia disponível e a interdisciplinaridade para motivar e despertar o interesse dos alunos pelo estudo do Cálculo.

3.1 Limite: Contexto Histórico

Atualmente o Cálculo é ensinado em uma sequência didática que não corresponde à ordem como fora criado. De acordo com [5] "o limite assumiu relevante importância, no século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial".

> Durante todo esse século, e em boa parte do século seguinte, não havia o conceito de limite. Newton falava em quantidades evanescentes, ora tratadas como nulas e desprezíveis, ora tratadas como inferiores a qualquer quantidade positiva. Leibniz (1646-1716) fazia algo parecido, com notação mais apropriada. D'Alembert (1717-1783) foi o primeiro a interpretar a derivada como limite, isto lá pelos meados do século XVIII, quando os métodos do Cálculo já estavam bem desenvolvidos, graças aos esforços de vários sábios[...] [6, p.176]

Sem dúvida no início da criação do Cálculo, por não conhecerem o conceito de limite, muitos estudiosos criticaram essa ferramenta por desconhecerem a origem dos valores que eram tratados por Newton como *desprezíveis*, e que mais tarde foram chamados de infinitésimos, muitas vezes sumiam sem uma explicação que eles compreendessem como óbvia. Com o desenvolvimento do conceito de limite a compreensão e a ordem como o Cálculo é apresentado sofreu uma inversão em relação a sua criação, mas, essa ordem didática de certa forma é importante para que os alunos consigam assimilar de forma significativa as aplicações tanto da Derivada quanto da Integral

3.1.1 Noções Intuitivas de Limite

Para uma melhor compreensão da *definição do limite de uma função*, convém iniciarmos o estudo através de casos hipotéticos, como o descrito abaixo, onde o aluno tem a possibilidade de fazer uma análise e assim compreender melhor a noção intuitiva e, por conseguinte, a definição de limite.

Assim, vejamos alguns casos hipotético que facilitam a compreensão da noção de limite.

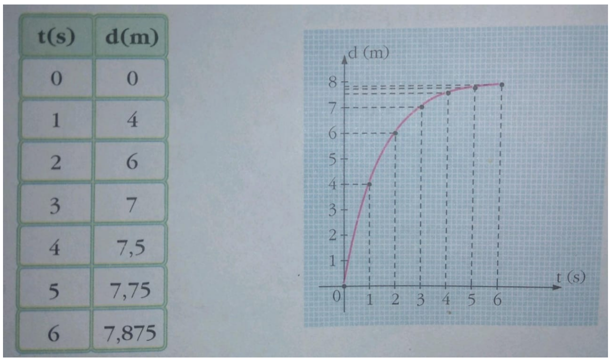
a) Vejamos o caso que segue apresentado por [5, p.190].

Imagine uma bola de boliche sendo jogada em uma pista de 8 m, sendo que em cada segundo percorre metade da distância que a separa do primeiro pino.

Agora considere a função $f(d)$ que faz corresponder a cada valor t de tempo ($t \in \mathbb{N}$), em segundo, um único valor d, em metros, da distância percorrida por essa bola.

Veja a imagem abaixo que descreve o fato narrado.

Figura 2 – Distância em função do tempo



t(s)	d(m)
0	0
1	4
2	6
3	7
4	7,5
5	7,75
6	7,875

fonte: [5, p.190]

Note que, a cada instante, a bola se aproxima mais e mais do 1º pino, assim como a distância percorrida se aproxima de 8, quanto maior o valor do tempo. Portanto, quando t tende a assumir valores cada vez maiores (t tende ao infinito), então, t tende a 8.

A notação fica:

$$\lim_{t \to \infty} d(t) = 8$$

Lemos: o limite de $d(t)$, quando t tende ao infinito é igual a 8.

b) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$.

Neste caso, vamos iniciar a análise a partir da construção gráfica. o Primeiro passo será encontrarmos valores para $f(x)$ a partir de valores atribuídos para x.

Assim:

a) Se $x = 0$, então: $y = f(0) = 2.0 + 1 = 1$

b) Se $x = 0,5$, então: $y = f(0,5) = 2.0,5 + 1 = 2$

c) Se $x = 1$, então: $y = f(1) = 2.1 + 1 = 3$

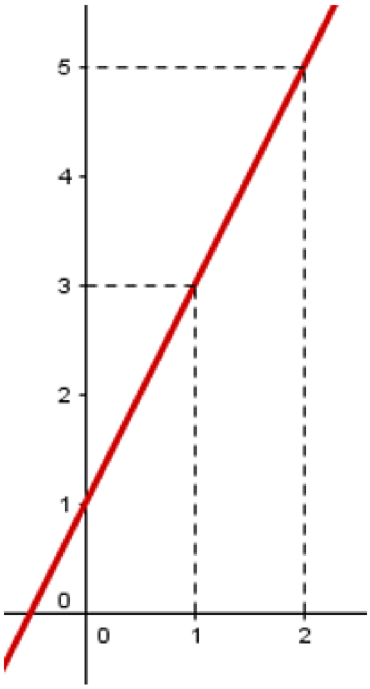
d) Se $x = 1,5$, então: $y = f(1,5) = 2.1,5 + 1 = 4$

e) Se $x = 2$, então: $y = f(2) = 2.2 + 1 = 5$

Observe esses valores dispostos em tabela abaixo:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	1	2	3	4	5

Figura 3 – Função Afim



Fonte: [13]

Analisando o gráfico, vemos que quando x se aproxima de *1*, por valores menores ou maiores que 1, temos x se aproximando cada vez mais de *3*.

A notação fica:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$, lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a 1 pela esquerda é 3.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$, lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a 1 pela direita é 3.

Por fim, em símbolo teremos: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Sendo os limites laterais iguais, dizemos que o limite quando $x = 1$ existe é igual a *3*.

Em notação:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Unicidade do Limite: O valor de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, se existir, é único.

Isso significa que:

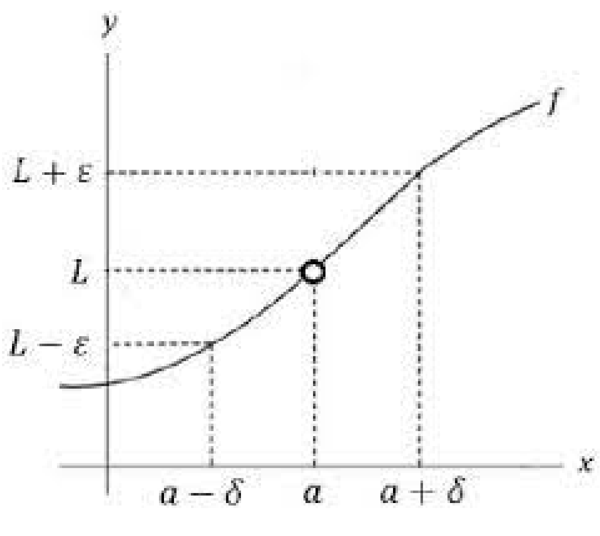
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \to a} f(x) = c, \text{ então } b = c$$

A propriedade descrita acima é chamada *Unicidade do Limite*. Você encontra a prova desta propriedade no apêndice deste texto.

3.1.2 Definição

Dizemos que o limite de uma função f, definida em um intervalo ao qual o ponto a pertence, é L se, para todo $\epsilon > 0$ existir em correspondência algum $\delta > 0$, tal que para todo x, $x \neq a$, temos:

Figura 4 – Limite de Funções



fonte: [14]

Ao analisar a imagem cuidadosamente, observe que quando $a - \delta$ tende a a, $L - \epsilon$ tende a L e quando $a + \delta$ tende a a, $L + \epsilon$ tende a L, assim:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) - L \mid< \epsilon$$

Notação: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Exemplo: Com o auxílio do GeoGebra, Construa o gráfico da função $f(x) = 3x - 1$ e faça a demonstração da definição de limite.

Para a solução do problema proposto, siga os passos descritos abaixo.

1) Construa a função afim $f(x) = 3x - 1$.

2) Escreva a equação da reta vertical $x = 3$.

3) Marque o ponto A, intersecção da reta $x = 3$ com o eixo horizontal.

4) Marque o ponto B, intersecção da reta $x = 3$ com a função afim.

5) Construa uma reta perpendicular ao eixo vertical passando por B.

6) Marque o ponto C, intersecção da perpendicular construída no item 5, com o eixo vertical.

7) Construa o controle deslizante "a".

8) Construa as retas horizontais $y = y(C) + a$ e $y = y(C) - a$.

9) Construa as intersecções (D e E) do eixo vertical e as intersecções (F e G) com a função afim.

10) Construa perpendiculares ao eixo horizontal com os pontos de intersecção construídos no item 9.

11) Construa as intersecções (H e I) do eixo horizontal com as perpendiculares.

12) Construa os segmentos DF, CB, EG, GH, BA, FI.

13) Esconda as retas horizontais e verticais. 14) Deixe os segmentos pontilhados (esconda os rótulos).

15) Renomeia o deslizante “a” de ϵ (Épsilon).

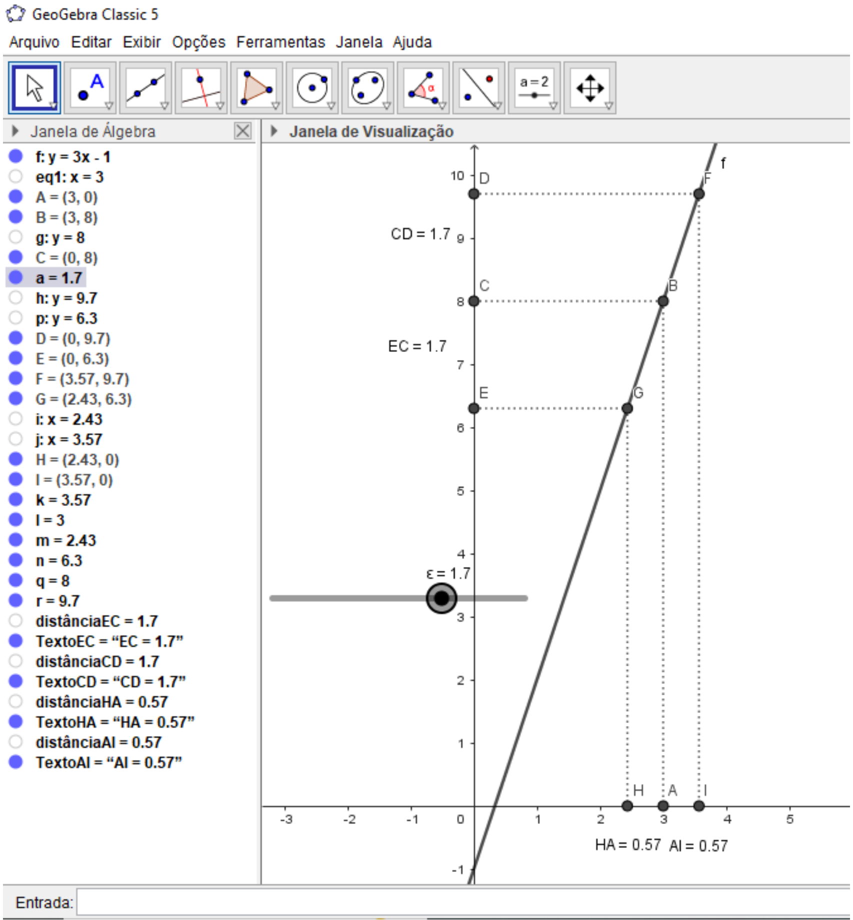
16) Calcule as distâncias CD, DE (ϵ) e AH, AL (δ).

Seguindo corretamente os passos descritos acima, os alunos poderão construir uma apresentação no GeoGebra, onde eles poderão assimilar de forma mais dinâmica a definição de limite.

O controle deslizante permitirá aos alunos aproximarem ou aumentarem a distância ϵ e observar o que acontece com a distância *delta* e consequentemente, o que acontece com o limite da função descrita em determinado ponto x, com $x \neq 3$.

Ao realizar todos os passos corretamente, o resultado da apresentação será o descrito na imagem abaixo.

Figura 5 – Gráfico da Função Afim



Fonte: O Autor

3.1.3 Propriedades dos Limites

O cálculo de limite usando apenas a formalidade presente na definição e a construção gráfica de uma função com o fim específico de determinar possível limite em relação a algum valor x, além de desgastante e trabalhoso, mesmo sendo essencial para a aprendizagem, não é atrativo e acaba desmotivando os alunos, sobretudo do Ensino Médio.

Neste sentido, tendo como pressuposto básico as propriedades dos limites e sabendo utilizá-las, não será necessário, na maioria dos casos, fazer o esboço gráfico para determinar o limite de uma função, caso exista, em determinado ponto. Assim, vejamos algumas dessas propriedades.

Limite de uma constante:

$$\lim_{x \to c} f(x) = c$$

As propriedades descritas até o momento, *unicidade e limite de uma constante*, estão relacionadas com uma única função. No entanto, algumas propriedades do limite estão relacionadas com mais de uma função.

Apresento abaixo as propriedades do *limite da soma*, *limite da diferença*, *limite do produto*, *limite do quociente*, *limite da potência* e *limite do logaritmo das funções*, adotando-as como *verdadeira*, mas, por entender que a prova é essencial para o aprimoramento do conhecimento por parte do aluno, apresento no apêndice, a demonstração de cada uma destas propriedades, deixando a cargo do aluno a apreciação de cada uma delas.

Agora, vejamos as propriedades do limite com duas funções.

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções tais:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

Teremos:

Propriedade 1: *Limite da soma das funções*:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

A propriedade descrita acima nos garante que o limite da soma é igual a soma dos limites. Assim, resolvo o exemplo abaixo apenas calculando o valor numérico da função, a partir da substituição do valor dado para a variável (veremos no próximo tópico que em casos em que há a presença de indeterminações, a simples substituição não será suficiente para solucionarmos tais problemas e, nestes casos, precisaremos de outros artifícios matemáticos).

Exemplo: Determinar o limite da função $\lim_{x\to 3}[(3x + 1) + (4x + 2)]$.

Fazendo uso da propriedade do limite da soma das funções, teremos:

$$\lim_{x\to 3}[(3x+1)+(4x+2)] = \lim_{x\to 3}(3x+1)+\lim_{x\to 3}(4x+2) = (3.3+1)+(4.3+2) = 10+14 = 24$$

Propriedade 2: *Limite da diferença das funções*:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

A propriedade descrita acima nos garante que o *limite da diferença* é igual a *diferença dos limites*.

Vamos solucionar o exemplo abaixo para melhor compreensão desta propriedade.

Exemplo: Determine o limite da função $\lim_{x\to 5}[(5x + 1) - (2x + 3)]$.

Fazendo uso da propriedade do limite da diferença das funções, teremos:

$$\lim_{x\to 5}[(5x+1)-(2x+3)] = \lim_{x\to 5}(5x+1)-\lim_{x\to 5}(2x+3) = (5.5+1)-(2.5+3) = 26-13 = 13$$

Propriedade 3: *Limite do produto das funções*:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = L_1.L_2$$

A propriedade descrita acima nos garante que o *limite do produto* é igual ao *produto dos limites.*

Assim, vamos resolver o exemplo abaixo para melhor compreensão da propriedade descrita.

Exemplo: Determine o limite da função $\lim_{x\to 2}[(x^2+1).(x+2)]$.

Fazendo uso da propriedade do limite do produto das funções, teremos:

$\lim_{x\to 2}\left[(x^2+1).(x+2)\right] = \lim_{x\to 2}(x^2+1). \lim_{x\to 2}(x+2) = (2^2+1).(2+2) = 5.4 = 20$

Propriedade 4: *Limite do quociente das funções*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (se\ L_2 \neq 0)$$

Essa propriedade nos mostra que o *limite do quociente* é igual ao *quociente dos limite*. Para melhor compreensão, resolvo o problema descrito abaixo.

Exemplo: Determinar o $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{3x-1}$.

Fazendo uso da propriedade do limite do quociente das funções, teremos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x-1} = \frac{\lim_{x\to 2}(2x+3)}{\lim_{x\to 2}(3x-1)} = \frac{(2.2+3)}{(3.2-1)} = \frac{7}{5}$$

Propriedade 5: *Limite da potência*:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

Essa propriedade nos mostra que o *limite da potência* é igual a *potência do limite*. Para melhor compreensão, resolvo o problema descrito abaixo.

Exemplo: Determinar o limite da função $\lim_{x\to 3}(2x-1)^3$.

Fazendo uso do limite da potência da função, teremos:

$$\lim_{x\to 3}(2x-1)^3 = \left[\lim_{x\to 3}(2x-1)\right]^3 = (2.3-1)^3 = (5)^3 = 125$$

Propriedade 6: *Limite do logaritmo*:

$$\lim_{x\to a} log f(x) = log[\lim_{x\to a} f(x)] = log L_1$$

Essa propriedade nos mostra que o *limite do logaritmo* é igual ao *logaritmo do limite*. Assim, para melhor compreensão, resolvo o problema descrito abaixo.

Exemplo: Determinar o limite da função $\lim_{x\to 3} log(x^2+1)$.

Fazendo uso do limite do logaritmo da função, teremos:

$$\lim_{x\to 3} log(x^2+1) = log\left[\lim_{x\to 3}(x^2+1)\right] = log(3^2+1) = log(10) = 1$$

Para colocar em prática as propriedades do limite descritas acima, deixo o exercício abaixo. A resolução das listas propostas são de suma importância para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Como sugestão, resolva as listas e ao final compare com a solução contida no apêndice.

Limite da função - Lista 01: Exercitando as propriedades do limite

Exercício 01: Utilizando as propriedades do limite, determine:

a) $\lim_{x\to 2} 3$

b) $\lim_{x\to 2} [(2x+1)+(4x+3)]$

c) $\lim_{x\to 1} [(2x+1)-(4x+3)]$

d) $\lim_{x\to -1} \left[(x-1).(x^2+1)\right]$

e) $\lim_{x\to 3} \frac{3x+1}{2x-5}$

f) $\lim_{x\to 2}(5x-4)^3$

g) $\lim_{x\to 2} log(x^2+6)$

h) $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2+8}{x+3}}$

Exercício 02: Utilizando os passos descritos no exemplo sobre uso do GeoGebra, construa o gráfico da função afim $f(x) = 2x-1$ e observe o que acontece nas proximidades do ponto $x = 4$.

3.1.4 Indeterminações no Cálculo do Limite

Ao realizarmos o cálculo do limite de uma função usando a apenas a substituição, como se estivéssemos calculando o valor numérico da expressão algébrica dada, muitas vezes iremos nos deparar com uma expressão do tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, o que significa que estamos diante de uma *indeterminação*.

Assim, "é importante ter sempre em mente no cálculo de $\lim_{x\to a} f(x)$ que interessa o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não o que ocorre com f quando $x = a$".[8, p.24]

Neste sentido, para eliminar a *indeterminação*, devemos utilizar conhecimentos algébricos para poder calcular o limite da função, caso exista.

Vejamos o exemplo que segue.

Exemplo: Vamos Calcular o limite da função $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

O que acontece se apenas substituirmos o número 3 no lugar do x?

Essa é uma pergunta muito pertinente, vejamos o que acontece!

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

(Trata-se de um caso de indeterminação do tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$)

Para eliminar a *indeterminação* na função do exemplo acima, faremos uso da *fatoração*, assim, sendo $x^2 - 9 = (x-3)\cdot(x+3)$,teremos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)\cdot(x-3)}{x-3} = x+3 = 3+3 = 6$$

Vejamos uma relação com mais algumas *indeterminações*.

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{x}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{\infty}{0}$
- $\infty - \infty$
- ∞^0

- $0 \cdot \infty$
- 0^0

É importante saber também que, para $n \neq 0$, teremos:

- $\dfrac{x}{0} = 0$
- $\dfrac{\infty}{n} = \infty$
- $\infty^n = \infty$
- $x \cdot \infty = \infty \quad \text{com } x > 0$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \cdot \infty = (-\infty)$
- $\infty \pm n = \infty$

Limite da função - Lista 02: Calculando limite de funções com indeterminação.

Exercício 01: Determine o limite das funções abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{8}{3}} \dfrac{9x^2 - 64}{3x - 8}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - 9}{h}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 1}$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 4}{2 - \sqrt{x-1}}$

3.1.5 Noções de Continuidade

Para iniciarmos o estudo desse tema, precisamos compreender que só existirá continuidade de uma função em um ponto, se esse ponto pertencer ao domínio da função.

Assim, teremos:

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é contínua em a, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Neste sentido, f será contínua no ponto a somente quando se verificarem as *três condições* abaixo:

1. Existe $f(a)$
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Vejamos alguns exemplos para ajudar na assimilação da definição:

Exemplo 01: Verifique se $f(x) = x^2$, é contínua no ponto 2.

Para a solução deste problema, precisamos verificar *as três condições*, assim teremos:

- Cálculo de $f(a)$;

$$f(2) = 2^2 = 4$$

- Cálculo do $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

- Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, então, $f(x)$ é *contínua* no ponto 2.

Exemplo 02: Seja f definida por f(x) = $\begin{cases} \dfrac{(2x+3) \cdot (x-1)}{x-1}, se & x \neq 1 \\ 2, \quad\quad se & x = 1 \end{cases}$, verifique se f é contínua em $x = 1$.

Para a solução deste problema, precisamos inicialmente verificar se a função satisfaz *as três condições*, assim teremos:

- Cálculo de $f(a)$;

$$f(1) = 2$$

- Cálculo do $\lim_{x \to 1} f(x)$;

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+3) \cdot (x-1)}{x-1} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

Observe que *as duas condições iniciais são satisfeitas*, porém:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

Assim, a última condição não é *satisfeita.*

Portanto, concluímos que *f é descontinua em 1.*

Propriedades das funções contínuas

Se as funções f e g são contínuas em um ponto x_0, então, as propriedades abaixo são válidas.

1. $f \pm g$ é contínua em x_0.

2. $f \cdot g$ é contínua em x_0.

3. $\frac{f}{g}$ é contínua em x_0.

Para melhor compreensão das propriedades estudas até agora, sugiro que responda a lista de questões que segue.

Limite da função - Lista 03: Calculando limite de funções contínuas.

Exercício 01: Verifique se as funções abaixo são contínuas nos pontos indicados.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, se \;\; x > 1 \\ \\ x^2, \quad se \;\; x < 1 \end{cases}$

b) $\lim_{x \to 0} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2, \quad se \;\; x < 0 \\ \\ \frac{x^2}{2}, \quad se \;\; x > 0 \end{cases}$

c) Sendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{8-2x}, & se \;\; x \neq 4 \\ \\ 2x-4, & se \;\; x = 4 \\ \end{cases}$, se $x_0 = 4$

d) Sendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x-1}}, & se \;\; x > 1 \\ \\ \dfrac{2x^2-2}{1-x}, & se \;\; x < 1 \\ \\ 1-5x, & se \;\; x = 1 \end{cases}$, se $x_0 = 1$

Exercício 02: A função f, definida por $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & se \;\; x \leq 1 \\ \\ x-1, & se \;\; 1 < x < 2 \\ \\ 1, & se \;\; x \geq 2 \end{cases}$, tem algum ponto de descontinuidade?

3.1.6 Limites Fundamentais

Dedico esse tópico ao estudo *introdutório* sobre os *limites fundamentais*. ‘Por se tratar de uma proposta didática para alunos do ensino médio, já iremos adotar como verdadeiras as *proposições* apresentadas, não sendo necessário apresentar a prova de cada uma delas aos alunos dessa etapa, mas, o professor, caso tenha domínio, pode realizar essas provas junto aos alunos ou indicar link de vídeo aula onde os mesmos possam encontrar.

Assim, teremos:

Proposição 3.1.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} = 1$

Proposição 3.1.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Proposição 3.1.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Vejamos alguns exemplos com aplicação destas proposições.

Exemplo 01: Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{10x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

Aplicando as propriedades do limite da função e as preposições estudadas acerca dos limites fundamentais, vamos resolver os problemas apresentados.

Solução

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{10}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{10}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot 3 = \lim_{x\to 0} \frac{3}{10}\cdot\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \frac{3}{10}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \frac{3}{10}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} = e^3$

Sugiro que o discente responda a lista abaixo para uma melhor fixação da temática.

Limites Fundamentais - Lista 04: Calculando o limite de funções a partir do uso dos limites fundamentais.

Exercício 01: Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^5$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-3}{2x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+6x+3}{x^2+5}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1 + x}{x}\right)^x$

Lista Complementar de limite de uma função

Exercício 01: Aplicando as propriedades dos limites, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 + 2x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 2}(3 + x).(x - 5)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 2}{x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Exercício 02: Dada a função $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 12x}{x^2 - 3x}$, determine:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$

Exercício 03: Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{4x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2 - 1000000)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x + 5)}{4}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

Exercício 04: Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{4x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{5x^2 + x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^2 + x - 3}{x^4 + x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{x}$

3.2 Derivada de uma Função

3.2.1 Um Pouco da História da Derivada

"O conceito de derivada é de maior importância na fundamentação de toda a Matemática que se originou no século XVII e que vem se desenvolvendo até os dias de hoje". [6, p.175]

Ainda segundo o mesmo autor;

> O ensino da derivada é da maior importância, pelo tanto que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções. E tem de ser feito logo na primeira série, quando pode integrar-se harmoniosamente com a Física no estudo dos movimentos [...], além de servir para o estudo dos polinômios e em outras aplicações científicas. [6, p.175]

O ensino de derivada é muito importante e deve ser apresentado no Ensino Médio, mesmo que de forma introdutória, já na primeira série, tendo como base matemática o estudo de funções e como atividade interdisciplinar, os professores de matemática e física podem apresentar esse tema para os alunos através das aulas do estudo dos movimentos (Cinemática).

Ressalta-se que a derivada '[...] juntamente com o conceito de integral, ela é o alicerce de toda a ciência e tecnologia dos últimos 300 anos" [6, p.175], o que nos mostra a importância de conhecer e aprender essa temática. O professor matemática deve fazer uso da interdisciplinaridade e juntamente com o professor de física, explorar a temática ao longo do estudo do movimento de um ponto material (Cinemática). Ainda segundo [6, p.178], o professor pode começar com exemplos que leve o aluno a observar que *"a derivada de uma função constante é zero"*.

Assim;

> Dada uma função constante, $y = f(x)$, o acréscimo Δy da variável dependente é sempre zero, qualquer que seja o acréscimo Δx da variável independente, o qual nunca é zero; em consequência, a razão incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é sempre zero, portanto também a derivada $f'(x)$. [...] a recíproca da propriedade anterior assim se formula: *Se a derivada de uma função é nula em todo um intervalo, então essa função é constante nesse intervalo.* O modo mais natural de ensinar os alunos do Ensino Médio a interpretarem essa propriedade consiste em observar que a reta tangente ao gráfico da função em qualquer de seus pontos é horizontal, o que nos leva a entender

> que esse gráfico só pode ser uma reta horizontal, donde a função ser constante [6, p.178-179].

E, em relação à Cinemática, a interdisciplinaridade pode ser facilmente integrada ao estudo da velocidade média, velocidade instantânea, movimento uniforme, movimento uniformemente variado tendo como foco a interpretação da presença da derivada nesse estudo.

3.2.2 Definição

Seja uma função real $y = f(x)$ uma curva e $P = (x_0, y_0)$ um ponto sobre o seu gráfico, se existe, finito, o limite de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quando x *tende a* p, ele é chamado **derivada de f no ponto $x = p$.**

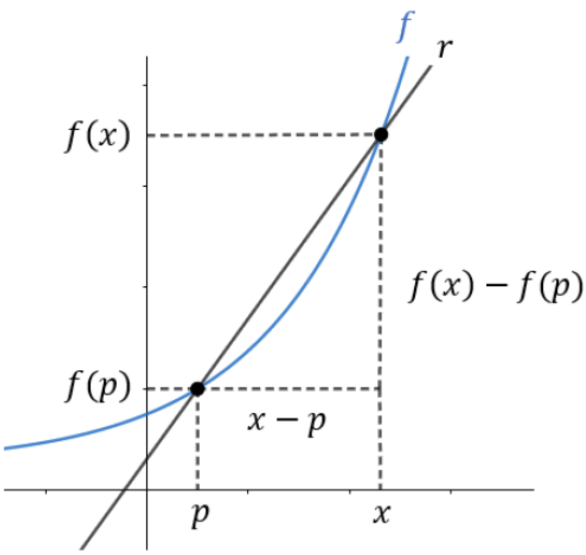
Indicamos a derivada por $f'(p)$. (lê-se: f **linha de** p).

Assim, definimos:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Analisemos a figura abaixo para melhor compreensão da definição.

Figura 6 – Derivada da função



Fonte: [13]

A função que a cada real x associa a derivada $f'(x)$, definida nos pontos em que existe a derivada é chamada *função derivada de* f.

Para obter $f'(x)$ aplicamos a definição para calcular $f'(p)$ e depois trocamos p por x.

Na definição de $f'(x)$, fazendo algumas manipulações algébricas, teremos:

$$x - p = \Delta x \to x = p + \Delta x,\ onde\ x \to p, \Delta x \to 0$$

.

Assim, podemos dizer que:

$$f'(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x}$$

Substituindo-se p por x, teremos uma fórmula alternativa, onde:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vejamos algumas outras **notações** para a derivada da função $y = f(x)$ em um ponto x qualquer:

- $y'(x)$ (lê-se: y linha de x)
- $D_x f$ (lê-se: derivada da função f em relação a x).
- $\dfrac{dy}{dx}$ (lê-se: derivada de y em relação a x)

Para uma melhor fixação da *definição de derivada* de uma função, vamos analisar a solução do exemplo abaixo, onde aplicaremos diretamente a definição.

Exemplo: Calcular $f'(x)$ da função $f(x) = x^2 + 4x$ usando diretamente a definição.

Fazendo uso direto da definição, teremos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sendo $f(x) = x^2 + 4x$, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 4 \cdot (x + \Delta x) - (x^2 + 4x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 4x + 4\Delta x - x^2 - 4x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + 4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

Colocando Δx em evidencia no numerador, temos:

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + 4 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 2x + 4 + \Delta x = 2x + 4$$

Agora, vejamos a solução desse mesmo problema sem o uso da definição.

Sendo $f(x) = x^2 + 4x$, teremos:

$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 2.x + 4$$

Observe que o cálculo se tornou bem mais simples, porém, precisamos dominar a aplicação de algumas *regras de diferenciação*. Assim, apresento uma lista com as principais *regras gerais de diferenciação*, adotando inicialmente todas como verdade e fazendo a aplicação, mas, deixo a prova de cada uma delas no apêndice.

Análise Geométrica da Definição de Derivada de uma Função com uso do GeoGebra

Vejamos o exemplo abaixo onde fazemos análise geométrica da definição de derivada de uma função.

Exemplo: Mostre a partir da análise geométrica com uso do GeoGebra que a função $f(x) = x^3$ tem como derivada $f'(x) = 3x^2$.

Para a solução do problema sugerido, vamos seguir os passos descritos abaixo:

1) Construa a função $f(x) = x^3$.

2) Adicione um ponto A sobre o gráfico da função $f(x) = x^3$.

3) Adicione uma reta tangente ao ponto A e o gráfico da função $f(x) = x^3$.

4) Insira uma inclinação "m"sobre a reta tangente "g"do item anterior.

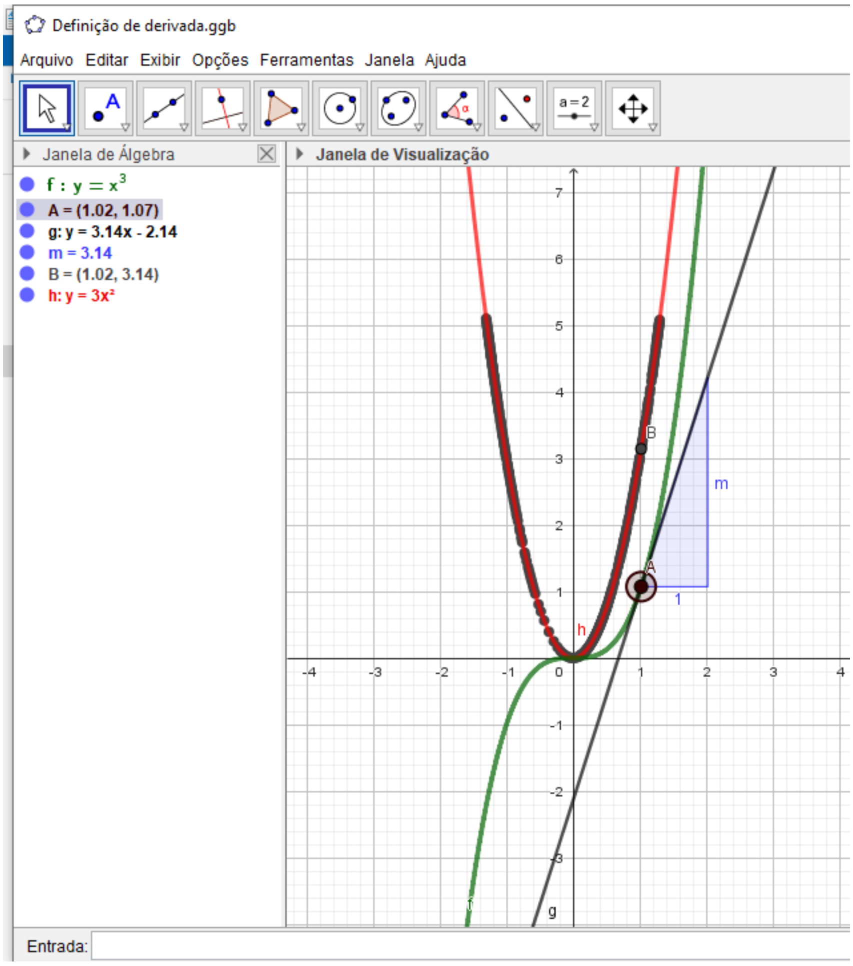
5) Adicione um ponto B de coordenadas (x_a, m) e ative o rastro do ponto B.

6) Observe ao movimentar o ponto B a construção do gráfico da derivada de $f(x) = x^3$.

7) Construa o gráfico da função $f(x) = 3x^2$ e observe como ele é exatamente o gráfico da derivada de $f(x) = x^3$.

Observe o resultado da construção a partir dos passos estabelecidos.

Figura 7 – Análise Geométrica da Derivada da Função



Fonte: O Autor

O objetivo da apresentação é permitir que o aluno compreenda de forma lúdica e dinâmica que a derivada é igual a inclinação da reta tangente ao ponto A, quando fazemos o ponto B se aproximar do ponto A, ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto B.

3.2.3 Derivada de Funções Elementares

Em um primeiro momento, apresento o cálculo da derivada das principais funções elementares, adotando as regras como verdade, de forma que a sistematização dos resultados facilite o estudo para o aluno, mas, a prova de cada uma das propriedades adotadas está disponível no apêndice desta proposta didática.

1. *A derivada de uma constante* é sempre igual a 0.

$$f(x) = b \to f'(x) = 0$$

Exemplos:

a) $f(x) = 2 \to f'(x) = 0$

b) $f(x) = \sqrt{6} \to f'(x) = 0$

2. *A derivada da Função Afim* é igual ao produto da constante pela derivada da função.

$$f(x) = ax + b \to f'(x) = a$$

Exemplos:

a) $f(x) = 2x \to f'(x) = 2$

b) $f(x) = 3x + 5 \to f'(x) = 3$

3. *A derivada de uma Função Potência de Expoente Natural* seguirá os passou descritos abaixo.

$$f(x) = x^n \to f'(x) = n.x^{n-1}, n \in N^*$$

Exemplos:

a) $f(x) = 2x^4 \to f'(x) = 4.2x^3 \to f'(x) = 8x^3$

b) $f(x) = \sqrt[5]{2x^3} \to f(x) = (2x)^{\frac{3}{5}} \to f'(x) = \frac{3}{5} \cdot 2x^{\frac{3}{5} - 1} = \frac{6}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}}$

4. *A derivada da Soma de Funções* é igual a soma das derivadas dessas funções.

$$f(x) = u(x) + u(x) \to f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Exemplo:

a) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3 \to f'(x) = 3.5x^2 + 2.2x + 0 \to f'(x) = 15x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^3 + 3x \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$

Observação: De maneira análoga, a derivada da diferença de funções é igual a diferença das derivadas dessas funções.

Assim:

$$f(x) = u(x) - u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Exemplo:

a) $f(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2 \rightarrow f'(x) = 5.4x^4 - 4.3x^3 - 0 \rightarrow f'(x) = 20x^4 - 12x^3$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3.2x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$

5. *Derivada do Produto de Funções* é igual à derivada da primeira multiplicada pela segunda mais a primeira multiplicada pela derivada da segunda.

   Assim:

$$f(x) = u(x).v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Exemplo:

$$f(x) = (2x^3 - 1).(x^4 + 2)$$

$$f'(x) = 6x^2.(x^4 + 2) + (2x^3 - 1).4x^3$$

$$f'(x) = 6x^6 + 12x^2 + 8x^6 - 4x^3$$

$$f'(x) = 14x^6 - 4x^3 + 12x^2$$

6. *A derivada do Quociente de Funções* é igual à derivada do numerador multiplicado pelo denominador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, sobre o quadrado do denominador.

   Assim, temos:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}; v(x) \neq 0$$

De onde:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v(x)^2}$$

Exemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x)'.(2x + 1) - (x^2 - 3x).(2x + 1)'}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3).(2x + 1) - (x^2 - 3x).2}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 2x - 6x - 3 - 2x^2 + 6x}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 3}{4x^2 + 4x + 1}$$

Para melhor compreensão e aprendizagem das regras gerais de diferenciação, vamos exercitar as regras estudadas respondendo a lista de exercício proposta.

Regras Básicas de Diferenciação - lista 01: Calculando a derivada de uma função com uso das regras básicas para a diferenciação.

Exercício 01: Diferencie cada função aplicando as regras básicas para diferenciação.

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 5x^3$

c) $h(x) = x^5 - 3x^3 + 1$

d) $h(x) = \dfrac{x^{10}}{2} + \dfrac{x^5}{5} + 1$

e) $f(x) = x^2.(3x^3 - 1)$

f) $f(x) = (x^2 + 3x).(x^3 - 9x)$

g) $g(x) = (x^3 - 8).\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)$

h) $g(x) = \dfrac{2x + 7}{3x - 1}$

i) $q(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 8}$

j) $r(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x^2 - 1}$

Lista de exercícios de derivada de uma função

Exercício 01: Determine a derivada primeira das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{6}$

b) $f(x) = \dfrac{-2}{5}$

c) $f(x) = 7x$

d) $g(x) = 3x + 5$

e) $g(x) = x^5$

f) $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Exercício 02: Considere as funções f e g dadas por $f(x) = x^2 - \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x + x$. Calcular o valor da expressão $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + g'(\pi)$.

Exercício 03: Conhecendo $f(x)$, determine $f'(x)$.

a) $f(x) = x^2 + x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 27 + 10$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

d) $f(x) = -7x^3 + 2x^2 + 5x + 6$

e) $f(x) = -4.\operatorname{sen} x$

f) $f(x) = 3.\cos x$

g) $f(x) = -x^3.\cos x$

h) $f(x) = -x^2.\operatorname{sen} x$

i) $f(x) = tgx$

Exercício 04: Determine $f''(x)$ em cada função abaixo.

a) $f(x) = 6x^2$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = -x^2 - x - 1$

d) $f(x) = -15x^4 - 20x^3$

e) $f(x) = -5x^4 - 2x^2 - x$

3.3 Integral

Ao longo dos estudos na Educação Básica fomos ensinados que algumas operações apresentam inversas, assim, aprendemos que são inversas: a Soma e a Subtração; a Multiplicação e a Divisão; a Potenciação e a Radiciação. Neste pressuposto aprenderemos agora que a operação inversa da *diferenciação* é a chamada *integração*.

Para uma melhor compreensão dessa temática na proposta didática apresentada, apresento uma introdução ao estudo de integral, tendo como base cálculo de área de figuras planas quando o contorno não são segmento de reta; as primitivas de uma função; as regras básicas de integração; a mudança de base (Substituição) e por fim, uma lista com questões para serem exercitadas.

3.3.1 Introdução ao Estudo da Integral

O Cálculo é um dos ramos mais importantes para a matemática, este tem suas bases em unidades temáticas como álgebra e geometria. O estudo de taxas da inclinação de uma reta, a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido, são alguns dos problemas que utilizam esse ramo como base para a solução de seus problemas, ou seja, essa ferramenta auxilia em várias áreas das ciências. Ao estudar Cálculo, o aluno necessita de alguns conhecimentos prévios em algumas áreas da matemática, assim, sugiro ao professor que utilize o ensino de funções, geometria, trigonometria, como base para o estudo do Cálculo no Ensino Médio.

Nesta seção, estudaremos a integral que é um processo que inverte a derivada de funções. A integral definida, inicialmente como uma introdução para a Soma de Riemann, as primitivas de uma função, as regras básicas para a integração e o Teorema Fundamental do Cálculo (nos possibilita calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem a necessidade de calculá-las como soma de limites).

O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. Gigantes como Newton, Barrow observaram que esses dois problemas estão estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Leibniz e Newton utilizaram essa relação para transformar o cálculo em um método matemático que mesmo como o passar dos séculos, nunca deixou de ser moderno.

.

3.3.2 A Integral Definida

Para que possamos estabelecer de modo geral a noção de integral de uma função f definida em um intervalo $[a, b]$, alguns conhecimentos prévios são fundamentais. Assim, vamos iniciar definindo a partição, norma e a função integrável.

Em [8, p.213] encontramos uma boa definição para os temas citados. Veja:

Partição: Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto $\rho = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, xi, ..., X_n\}$ com $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, ..., n$ e $a = x_0 < x_1 < x_2, ..., < x_{i-1} < xi <, ..., < x_n = b$

Norma: Chamamos norma da partição ρ o número μ, máximo do conjunto $\{\Delta_1 x, \Delta_2 x, ..., \Delta_i x, ..., \Delta_n x\}$ em que $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, ..., n$.

Soma de Riemann: Sendo $\bar{x_i}$ escolhido arbitrariamente no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i =1,2, ... n, a soma $f(\bar{x_1})\Delta_1 x + f(\bar{x_2})\Delta_2 x + ... + f(\bar{x_i})\Delta_i x + ... + f(\bar{x_n})\Delta_n x$ ou seja, $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i})\Delta_i x$ se chama soma de Riemann de f em $[a, b]$ relativa à partição ρ e à escolha feita dos $\bar{x_i}$.

Função Integrável: Sob certas condições bem gerais, que estabeleceremos a seguir, as somas de Riemann se aproximam arbitrariamente de um número fixo I, quando a norma μ da partição ρ se torna cada vez menor, independentemente das escolhas dos x_i. Quando isto ocorre, dizemos que a função f é **integrável** em $[a, b]$ e I é a integral de f em $[a, b]$.

De onde, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se existe um número real I satisfazendo a seguinte condição:

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que em toda partição ρ com norma $\mu < \delta$ temos $\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i})\Delta X i - | \right| < \epsilon$, qualquer que seja a escolha dos $\bar{x_i}$ em $[x_{i-1}, x_i]$.

Assim;

Teorema: Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

De onde:

Integral: Sendo f integrável em $[a, b]$, o número I é chamado integral de f em $[a, b]$ (ou integral definida de f em $[a, b]$) e é representado por $\int_a^b f(x)dx$; resulta que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\mu < \delta \Rightarrow \left| \sum f(\bar{x_i})\Delta_i x - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$

Teorema: Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) = f(b) - f(a)$.

De onde temos:

a) $f(x)$ é chamado de **integrando**;

b) "a" é chamado **limite inferior**;

c) "b" é chamado **limite superior**;

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 01: Calcular $\int_1^3 x^2dx$.

Solução:

$$\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Exemplo 02: $\int_{-1}^3 4dx$.

Solução.

$$\int_{-1}^3 4dx = \Big[4x\Big]_{-1}^3 = 12 - (-4) = 16$$

Exemplo 03: $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1)dx$

Solução:

$$\int_0^2 (x^3 + 3x - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} + \frac{12}{2} - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$$

Exemplo 04: Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{8}} sen2xdx$

Solução:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} sen2xdx = \left[-\frac{1}{2}cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

3.3.3 Primitiva de uma função

Sobre as primitivas de uma função, [7, p.356], nos mostra que: "Seja f uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que

$f'(x) = f(x)$,para todo x em I".

Exemplo 01: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$, pois para todo x em $\mathbb{R}$, temos:

$$F'(x) = \left[\frac{1}{3}x^2\right]' = x^2$$

Observe que para toda constate K, $G = \frac{1}{3}x^3 + K$, também é primitiva de $f(x) = x^2$.

■

Exemplo 02: Para toda constante k, $F(x) = 2x + k$ é primitiva, em $\mathbb{R}$, de $f(x) = 2$, assim,

$f'(x) = (2x + k)' = 2$, para todo x.

■

Sendo F uma primitiva de f em I, então, para toda constante k, $F(x) + k$ é, também, primitiva de f.

Se duas funções têm derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante.

Segue que as primitivas de f em I são as funções da forma $f(x) + k$, com k constante.

Diremos, então, que $y = f(x) + K$ é a família das primitivas de f em I. A notação $\int f(x)dx$ será usada para representar a família das primitivas de f:

$$\int f(x)dx = f(x) + K$$

De onde sabemos que:

a) Em $\int f(x)dx$, a função f denomina-se integrando.

b) Uma primitiva de f será, também, denominada uma integral indefinida de f.

c) $\int f(x)dx$ é a integral indefinida de f.

d) O domínio da função f de $\int f(x)dx$ é sempre um intervalo.

3.3.4 Regras Básicas para Integração

Por se tratar de uma Proposta Didática a ser apresentada de forma introdutória para alunos do ensino médio, não apresento a demonstração de cada uma das regras apresentada, vou adotá-las como verdade e utilizar na resolução de problemas.

No entanto, deixo no apêndice a apresentação de teoremas que justificam cada uma das propriedades de integração apresentadas para fins de pesquisa e estudo caso os alunos e professores assim desejem.

De acordo com [7], temos:

1. $\int f'(x)dx = f(x) + K$

2. $\int dx = x + K$

3. Regra da Potência: Se n é um número racional, então:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

4. Regra da Homogeneidade: Se a é uma constante, então:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

5. Regra de Adição:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

6. Regra da Linearidade:

$$\int [a_1 f(x) + a_2 g(x)]dx = a_1 \int f(x)dx + a_2 \int g(x)dx,$$ se a_1 e a_2 são constates.

3.3.5 Mudança de Variável

Para um melhor entendimento sobre a técnica de mudança de Variável, vejamos um exemplo abaixo:

Exemplo 01: Calcule:

$$\int x.(x^2 + 10)^{80} dx$$

Solução:

Para se calcular a $\int x.(x^2 + 10)^{80} dx$ usarei a técnica da mudança de variável. Primeiro trocarei a variável x por $u = x^2 + 10$.

Observe que se $u = x^2 + 10$, então teremos $du = 2xdx$.

Assim, podemos dizer que $dx = \dfrac{du}{2x}$.

Logo:

$$\int x.(x^2+10)^{80}dx = \int x.u^{80}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{80}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{81}}{81} + K = \frac{u^{81}}{162} + K$$

Agora, vamos substituir $u = x^2 + 10$ na expressão, assim teremos:

$$\int x.(x^2+10)^{80}dx = \frac{(x^2+10)^{81}}{162} + K$$

Agora é sua vez, tente solucionar a lista proposta abaixo:

Lista de Questões Integral

Exercício 01: Use as regras básicas de integração para calcular cada integral indefinida.

a) $\int (3x^2 - 4x - 5)dx$

b) $\int (2x^3 - 4x^2 - 5x + 6)dx$

c) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1}dx$

d) $\int \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}\right)dx$

e) $\int \frac{25x^3 - 1}{\sqrt{x}}dx$

Exercício 02: Resolva as seguintes integrais.

a) $\int \frac{x}{x^2 + 7}dx$

b) $\int \frac{(lnx)^2}{x}dx$

c) $\int \frac{x^2}{x^3 + 1}dx$

d) $\int \frac{1}{3 - 2x}dx$

e) $\int \frac{1}{xlnx}dx$

Exercício 03: Calcule.

a) $\int_1^3 3dx$

b) $\int_0^4 (x^3 - 1)dx$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$

d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2}dx$

e) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^2-1)dx$

4 Aplicações do Cálculo no Ensino Médio

Neste capítulo, deixo duas aplicações do Cálculo para a resolução de problemas. Essa é uma das muitas aplicações que o professor poderá utilizar para colocar em prática a aprendizagem desenvolvida pelos alunos durante o estudo das temáticas. Os problemas sugeridos para serem aplicados com os alunos são *o cálculo de área e a parametrização e reparametrização pelo comprimento de arco*, no entanto, cabe ao professor, antes de realizar as aplicações sugeridas, avaliar previamente se a proposta atende a realidade da turma.

Ressalto que se aplicados corretamente, os problemas sugeridos consolidarão as aprendizagens prévias adquiridas ao longo desta proposta didática.

4.1 Cálculo de Área

Uma boa aplicação da integral é o cálculo de área. Até este momento da vida escolar os alunos aprenderam sobre o cálculo de área de figuras planas, estudaram os gráficos das funções polinomiais, exponenciais, modulares, enfim. Agora, terão a oportunidade de aprender como calcular a área que se forma na região entre limitada pelo gráfico de funções.

Neste momento, o objetivo deste problema é aprofundar o estudo sobre a temática *integral*, através do *cálculo de área* que é uma dentre as muitas possibilidades de aplicação.

Ressalta-se que neste contexto, precisamos compreender as ideia básica da *Integral de Riemann*, mas, sem nos preocupar em fazer um estudo aprofundado dessa temática. No entanto, deixo no apêndice mais informações sobre esse tipo de integral, para que tanto professores quanto alunos, que desejarem conhecer mais sobre o tema, possam aprofundar seus estudos.

Visão Geral: Seja f contínua em $[a, b]$ e seja $S = \{(x, y); 0 < y < f\}$ uma região do plano sobre f e acima do intervalo $[a, b]$. O interesse é medir a área de S que será dada por:

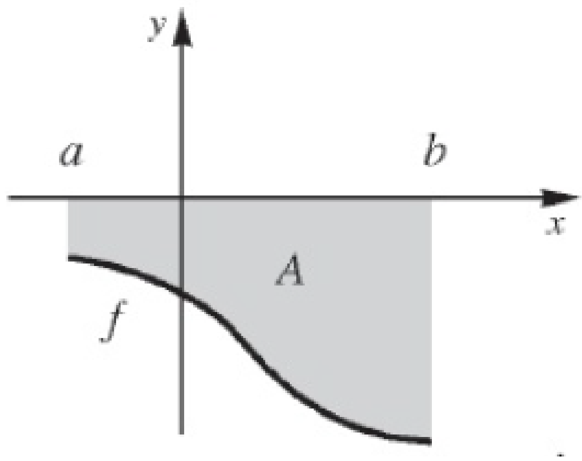
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ainda neste contexto, vejamos alguns casos especiais no cálculo de área onde estenderemos este conceito para classes mais amplas de subconjuntos do $\mathbb{R}^2$.

1º caso: Área de S limitada abaixo do eixo das abscissas.

Seja $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, assim $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, portanto:

Figura 8 – Cálculo de Área

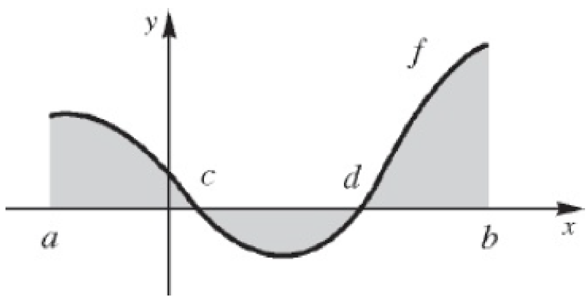


Fonte: [7]

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

2º caso: Área de S limitada, simultaneamente, abaixo e acima do eixo das abscissas.

Figura 9 – Cálculo de Área



Fonte: [7]

Neste caso, a área será dada pela soma do conjunto:

$$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

Assim;

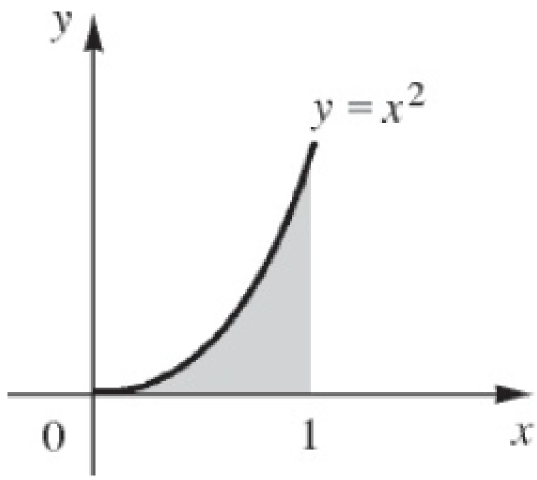
$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

Para aprender na prática, Vamos solucionar alguns exemplos.

Exemplo 1: Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Solução:

Figura 10 – Cálculo de Área



Fonte: [7]

Assim, teremos:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2:

a) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

Para a solução deste problema, analise inicialmente o gráfico da função. Vejamos:

Assim, teremos:

$A_1 = -\int_{-1}^0 x^3 dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^0 = -\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

logo:

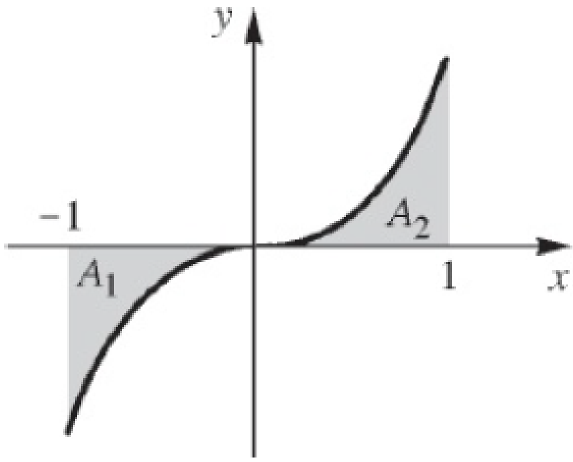
$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2: Assinale corretamente a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ que se encontra no 1º quadrante, o eixo x e a reta $x = 2$.

Solução:

$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

Figura 11 – Cálculo de Área



Fonte: [7]

Agora é sua vez!

Resolva os problemas abaixo:

1º) Calcule a área do conjunto limitado pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e o gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$.

2º) Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pelo gráfico de $y = x^2$.

3º) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo 0x e pelo gráfico de $y = x^3$.

4.2 Curvas Diferenciáveis Parametrizadas

Uma forma lúdica de apresentar a ideia de curva no $\mathbb{R}^2$ para os alunos é a partir da movimentação dos veículos no trânsito, ao realizar curvas e ao decorrer do percurso, onde o professor trabalha a velocidade, o espaço, enfim, toda a movimentação deste no decorrer do espaço.

Já em $\mathbb{R}^3$, onde temos o surgimento de uma terceira dimensão, de forma análoga ao exemplo anterior, o professor pode utilizar a movimentação dos pássaros ao sobrevoarem no espaço para trabalhar as ideias e conceitos de parâmetro, traço de uma curva e vetor tangente.

Parâmetro: Em matemática, um parâmetro é uma variável que podemos encontrar em equações ou funções.

Traço de uma curva: Pode ser definido como a imagem da curva parametrizada, ou, simplesmente, o caminho da curva.

Vetor Tangente: É o vetor que toca a curva em um determinado ponto e tem a mesma direção do movimento.

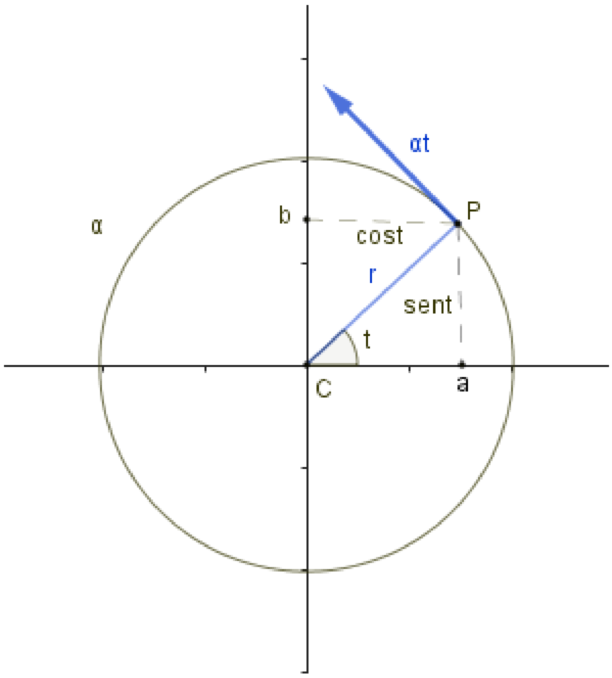
Matematicamente, temos as seguintes definições para curva diferenciável:

Definição 01: Uma curva diferenciável parametrizada no $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável $\alpha : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) : (x(t), y(t))$, de classe C^∞, de um intervalo aberto $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Neste sentido, dizemos que suas funções coordenadas $x, y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ tem derivadas de todas as ordens e que t é o parâmetro da curva,$\alpha(t)$ é o traço de α e $\alpha'(t) : (x'(t), y'(t))$ é o vetor tangente a α em $t \in \mathbb{I}$.

Exemplo 01: A curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, onde $\alpha(t) : (r\cos t, r\text{sen}\, t)$, com $r > 0$.

Figura 12 – Círculo



Fonte: O Autor

Observe que no exemplo temos uma curva diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são $(r\cos t, r\text{sen}\, t)$ que são de classe C^∞. O traço de α é um circulo de centro na origem e raio r. Além disto $\alpha'(t) : (-r\text{sen}\, t, r\cos t)$ é o vetor tangente de α em $t \in \mathbb{R}$

E as curvas no espaço tridimensional?

As curvas em $\mathbb{R}^3$ seguem definição análoga as curvas em $\mathbb{R}^2$, onde a diferença fica por conta do surgimento de uma terceira dimensão, vejamos:

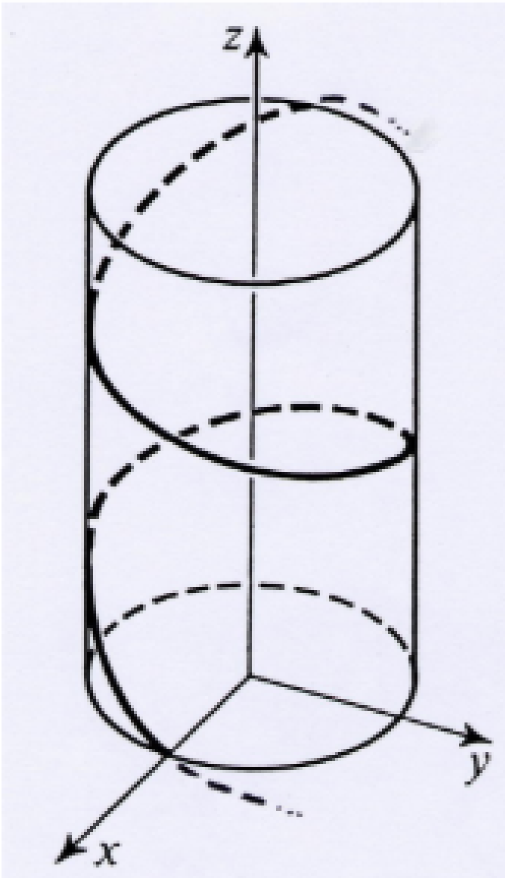
Definição 02: Uma curva diferenciável parametrizada no $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\alpha : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) : (x(t), y(t), z(t))$, de classe C^∞, de um intervalo aberto

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Assim, dizemos que suas funções coordenadas $x, y, z : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ tem derivadas de todas as ordens e que t é o parâmetro da curva,$\alpha(t)$ é o traço de α e $\alpha'(t) : (x'(t), y'(t), z'(t))$ é o vetor tangente a α em $t \in \mathbb{I}$.

Exemplo 02: A curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, onde $\alpha(t) : (m \cos t, m \mathrm{sen}\, t, nt)$, com $m > 0$ e $n \neq 0$.

Figura 13 – Hélice Circular



Fonte: [16]

Neste exemplo temos uma curva diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são $(m \cos t, m \mathrm{sen}\, t, nt)$ de classe C^∞. O traço de α é uma hélice circular. Além disto $\alpha'(t) : (-m \mathrm{sen}\, t, m \cos t, n)$ é o vetor tangente de α em $t \in \mathbb{R}$

A partir das definições apresentadas acima e buscando evitar alguns problemas que surgem ao trabalharmos com curvas que não são regulares, ou seja, curvas que apresentam os famosos "bicos", vejamos a definição de Curvas Diferenciáveis Parametrizadas Regulares.

Definição 03: Dizemos que uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é regular se $|\alpha'(t)| \neq 0$.

Assim, o que queremos são curvas *"sem bico"*, ou seja, curvas regulares, onde somente a existência da derivada não é característica suficiente, assim, precisamos que a norma da derivada em um ponto t seja $|\alpha'(t)| \neq 0$.

No entanto, existem curvas que em determinado ponto t, apresenta $|\alpha'(t)| = 0$.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 03: A cúspide em que $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, para $t = 0$, teremos:

$$\alpha(t) = (t^2, t^3)$$

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2) \qquad t = 0$$

$$\alpha'(0) = (0, 0)$$

$$|\alpha'(0)| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$$

E neste caso, o que podemos fazer para resolver esse problema?

A saída para situações como essa é a reparametrização, mas, esse é um tema para o tópico seguinte.

4.2.1 Parametrização e Reparametrização pelo Comprimento de Arco

Existe uma parametrização especial chamada de *parametrização pelo comprimento de arco*.

Definição: Dizemos que uma curva $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ está *parametrização pelo comprimento de arco* se $|\delta'(x)| = 1$ para todo $x \in [a, b]$

Exemplo 01: Verifique se o círculo $\delta(x) : (\cos x, \operatorname{sen} x)$ está parametrizado pelo comprimento de arco.

Para solucionar esse problema precisamos seguir alguns passos:

- Calcular a $\delta'(x)$
- Calcular a $|\delta'(x)|$
- Mostrar que a norma da derivada primeira da curva dada é igual a 1.

Vejamos:

$$\delta(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

$$\delta'(x) = (-\operatorname{sen} x, \cos x)$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2}$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{1}$$

$$|\delta'(x)| = 1$$

Assim, $|\delta'(x)| = 1$ para todo x. De onde concluímos que o círculo $\delta(x) : (\cos x, \operatorname{sen} x)$ está parametrizado pelo comprimento de arco.

Exemplo 02: Verifique se a curva $\delta(x) : [0,3] \to \mathbb{R}^3$, definida por $\delta(x) = (2x+1, 3, x+4)$ está parametrizada pelo comprimento de arco.

Para a solução deste exemplo, seguiremos os passos análogos aos seguidos para a resolução do *exemplo 02*, assim, teremos:

$$\delta(x) = (2x+1, 3, x+4)$$

$$\delta'(x) = (2, 0, 1)$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{5}$$

Assim $|\delta'(x)| \neq 1$ para todo x, portanto a curva $\delta(x) : [0,3] \to \mathbb{R}^3$, $\delta(x) = (2x+1, 3, x+4)$ não está parametrizada pelo comprimento de arco.

De acordo com os exemplos listados acima, precisamos seguir alguns passos para verificar se uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Em caso negativo, fica a pergunta:

"Como parametrizar uma curva $\delta(x)$ pelo comprimento de arco?"

Para responder a essa pergunta, vamos citar os passos a serem seguidos na *parametrização pelo comprimento de arco* e em seguida iremos parametrizar a curva dada no *exemplo 02* deste tópico, utilizando os passos mencionados.

Vejamos os passos a serem seguidos na parametrização pelo comprimento de arco.

1. Definimos a função comprimento de arco $S(t) = \displaystyle\int_a^t |\delta'(x)|\, dx$

2. Encontre a inversa da função comprimento de arco $\varphi(x)$

3. Faça a composição $\delta(\varphi(x))$

Uma vez definidos os passos a serem seguidos, vamos retomar o *exemplo 02* e fazer a reparametrização da curva citada pelo comprimento de arco.

Retomando o exemplo 02: Reparametrize a curva $\delta(x) : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}^3, \delta(x) = (2x+1, 3, x+4)$ pelo comprimento de arco.

Vamos solucionar essa questão especificando o passo a passo na resolução. Assim, teremos:

1º passo: Definir a função comprimento.

$$\delta(x) = (2x+1, 3, x+4)$$

$$\delta'(x) = (2, 0, 1)$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Conhecendo a norma de $\delta'(x)$, vamos definir a função comprimento.

$$S(t) = \int_a^t |\delta'(x)| \; dx$$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{5} \; dx$$

$$S(t) = \sqrt{5}\Big|_0^t \; dx$$

$$S(t) = \sqrt{5} \;\; t$$

$$S(3) = 3\sqrt{5} \quad \text{é o comprimento de arco de } \delta.$$

O domínio que era $[0,3]$, agora será $[0, 3\sqrt{5}]$.

2º passo: Encontre a inversa da função comprimento de arco $S(t) = \sqrt{5} \;\; t$

.

$$S(t) = \sqrt{5} \;\; t.$$

Trocando $S(t)$ por y e calculando a inversa, temos que:

$$y = \sqrt{5}t$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5}y$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \varphi(S) = \frac{S}{\sqrt{5}}$$

3º passo: A função $\varphi(S) = \dfrac{S}{\sqrt{5}}$ é a inversa da função comprimento de arco. Agora, vamos fazer a composição $\delta(\varphi(x))$.

$$\delta(x) = (2x + 1,\ 3,\ x + 4)$$

$$\delta(\varphi(x)) = (2\varphi(x) + 1,\ 3,\ \varphi(x) + 4)$$

Agora, vamos substituir $\varphi(x)$ por $\dfrac{S}{\sqrt{5}}$ na curva.

$$\delta(\varphi(x)) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}S + 1,\ 3,\ \frac{1}{\sqrt{5}}S + 4\right)$$

Assim,

$\delta : [0, 3\sqrt{5}] \to \mathbb{R}^3$, $\delta(\varphi(x)) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}S + 1,\ 3,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}S + 4\right)$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Uma vez realizada a reparametrização pelo comprimento de arco, podemos realizar uma verificação para comprovar que de fato a curva encontrada representa uma parametrização pelo comprimento de arco da curva dada inicialmente. Vejamos:

Verificação:

$$\delta(\varphi(x)) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}S + 1,\ 3,\ \frac{1}{\sqrt{5}}S + 4\right)$$

$$\delta'(\varphi(x)) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$|\delta'(\varphi(x))| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{5}} \Rightarrow \sqrt{1} = 1$$

Assim, sendo $|\delta'(\varphi(x))| = 1$, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

Para uma melhor compreensão da temática, sugiro que o aluno resolva a lista de exercícios ao final do capítulo.

Observação: Para a solução da lista proposta no final do capítulo, siga os passos indicados abaixo.

- Calcular a derivada da função $\varphi(x)$, definir a função comprimento $S(t)$ e calcular o comprimento do arco de $\varphi(x)$.
- Calcular a inversa de $S(t)$.
- Fazer a composição de $\delta(\varphi(x))$.

4.2.2 Curvatura

Estratégia: Analisar a variação de direção do vetor tangente da curva.

- $r(t) = \dfrac{\delta'(t)}{||\delta'(t)||}$
- Assim não nos preocupamos com a variação de tamanho, só da direção.
- A velocidade é um problema!

Como resolver o problema da velocidade?

Segundo [12], reparametrizamos pelo comprimento de arco. Assim, a curvatura será a variação do vetor tangente.

Definição: Seja $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Chamamos de curvatura de δ no ponto $p \in [a, b]$ ao número

$$K(p) = |\delta''(p)|$$

Exemplo 01: Calcule a curvatura de $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\delta(x) = (x, 3)$, no ponto $x = 5$.

Observe que essa reta está parametrizada pelo comprimento de arco.

$\delta'(x) = (1, 0)$

$|\delta'(x)| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

Assim, sua curva é dada por $K(x) = |\delta''(x)|$:

$\delta''(x) = (0, 0)$

$|\delta''(x)| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$

Portanto, $K(x) = 0 \rightarrow K(5) = 0$

Exemplo 02: Calcule a curvatura do círculo de raio r.

Observação: Assim como a reta tem curvatura constante, é natural acreditar que o círculo também tem curvatura constante.

Sabemos que a parametrização de uma circunferência de raio r é dada por $\delta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$\delta(x) = r(\cos x, \text{sen}\, x) = (r\cos x, r\text{sen}\, x)$

Mas, esta curva não está parametrizada pelo comprimento de arco, veja:

$$\delta'(x) = (-r\text{sen}\, x, r\cos x)$$

$$|\delta'(x)| = \sqrt{(-r\text{sen}\, x)^2 + (r\cos x)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\text{sen}\,^2 x + r^2\cos^2 x)}$$

$$= \sqrt{r^2(\text{sen}\,^2 x + \cos^2 x)}$$

$$= \sqrt{r^2} = r$$

Agora, vamos reparametrizar!

$$S(t) = \int_0^t |\delta'(x)|\ dx$$

$$S(t) = \int_0^t r\ dx$$

$$S(t) rx\Big|_0^t = rt$$

Portanto,

$$S(t) = rt \rightarrow S(2\pi) = 2\pi r$$

onde, $2\pi r$ representa o comprimento de arco do círculo.

Agora, vamos encontra a *inversa de S(t) = rt.*

$$Y = rx$$

$$x = rY$$

$$Y = \frac{x}{r}$$

Portanto,

$$\varphi(x) = \frac{S}{r}$$

função inversa de S(t).

Para finalizar, vamos compor $\delta(x)$ *com* $\varphi(S)$.

$$\delta(x) = r(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

$$\delta(\varphi(S)) = (r\cos\varphi(S), r\operatorname{sen}\varphi(S))$$

$$\delta(\varphi(S)) = \left(r\cos\frac{S}{r}, r\operatorname{sen}\frac{S}{r}\right)$$

Assim, a curva $\delta : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}$, dada por $\delta(S) = \left(r\cos\frac{S}{r}, r\operatorname{sen}\frac{S}{r}\right)$ é o círculo de raio r parametrizada pelo comprimento de arco.

logo, calculando a curvatura, teremos:

Inicialmente, lembre-se que $K(s) = |\delta''(s)|$.

Calculando a derivada primeira de $\delta(S)$

$$\delta'(s) = \left(-r\operatorname{sen}\frac{S}{r}.\frac{1}{r}, r\cos\frac{S}{r}.\frac{1}{r}\right)$$

$$\delta'(s) = \left(-\operatorname{sen}\frac{S}{r}, \cos\frac{S}{r}\right)$$

Calculando a derivada segunda de $\delta(S)$

$$\delta'(s) = \left(-\operatorname{sen}\frac{S}{r}, \cos\frac{S}{r}\right)$$

$$\delta''(s) = \left(-\cos\frac{S}{r}.\frac{1}{r}, -\operatorname{sen}\frac{S}{r}.\frac{1}{r}\right)$$

$$\delta''(s) = \Big(-\frac{1}{r}\cos\frac{S}{r}, -\frac{1}{r}\text{sen}\,\frac{S}{r} \Big)$$

Agora, vamos calcular a norma da derivada segunda de $\delta(S)$.

$$|\delta''(S)| = \sqrt{\Big(-\frac{1}{r}\cos\frac{S}{r}\Big)^2 + \Big(-\frac{1}{r}\text{sen}\,\frac{S}{r}\Big)^2}$$

$$|\delta''(S)| = \sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{S}{r} + \frac{1}{r^2}\text{sen}^{\,2}\frac{S}{r}}$$

$$|\delta''(S)| = \sqrt{\frac{1}{r^2}\Big(\cos^2\frac{S}{r} + \text{sen}^{\,2}\frac{S}{r}\Big)}$$

$$|\delta''(S)| = \sqrt{\frac{1}{r^2}}$$

$$|\delta''(S)| = \frac{1}{r}$$

Assim,

$$K(s) = |\delta''(s)| = \frac{1}{r}$$

Observação: Note que quanto maior o círculo, menor será sua curvatura.

Nosso planeta Terra, por exemplo, é tão grande que praticamente não sentimos sua curvatura. Neste sentido, sempre será possível calcular a curvatura?

A resposta para a pergunta acima é *Não!*.

Calcularemos a curvatura apenas em pontos regulares onde:

$$|\delta'(x)| \neq 0$$

Dentre algumas aplicações interessantes em relação à curvatura que expressam bem a afirmação acima, posso citar, a cúspide no seu ponto não regular e a função módulo em (0,0). $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ onde $\delta(x) = (x, |x|)$.

Afirmação: Não podemos parametrizar qualquer curvas pelo comprimento de arco. Apenas as regulares.

Observação: É possível calcular a curvatura de uma curva sem reparametrizar pelo comprimento de arco.

Teorema: Seja $\delta : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, então a curvatura de δ é:

$$K(x) = \frac{|\delta'(x)X\delta''(x)|}{|\delta`(x)|^3}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo: Mostre que a curvatura do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que o ponto x é dado por:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Solução: Lembrando que a parametrização de um gráfico é dado por:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f : x \to (x, f(x))$$

colocar o gráfico da função

Para solucionar este problema, vamos utilizar a fórmula dada pelo teorema.

$$K(x) = \frac{|\delta'(x).\delta''(x)|}{|\delta'(x)|^3}$$

observe que:

$f : x \to (x, f(x))$

$\delta'(x) = (1, f'(x))$

$\delta''(x) = (0, f''(x))$

Assim, temos:

$$\delta'(x)X\delta''(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\vec{K} = (0, 0, f''(x))$$

$$\delta'(x)X\delta''(x)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + f''(x)^2} = \sqrt{f''(x)^2} = |f''(x)|$$

$$|\delta'(x)^3| = \left(\sqrt{1 + f'(x)^2}\right)^3 = \sqrt{\left(1 + f'(x)^2\right)^3} = \left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Logo:

$$K(x) = \frac{|\delta'(x)X\delta''(x)|}{|\delta'(x)|^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Portanto, a curvatura de um gráfico pode ser dada por $K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Para que se possa verificar a aprendizagem na temática abordada neste capítulo, deixo abaixo alguns exercícios retirados de [12] para que o discente possa praticar.

Exercício 01: Reparametrize pelo comprimento de arco a curva $\varphi(x) : [0, 10] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = (2t, 1 - 2t, t)$.

Exercício 02: Calcule a curvatura da hélice $\delta(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x, x)$ no ponto $x = 1$.

Exercício 03: Calcule a curvatura do gráfico da função $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ nos pontos $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

Exercício 04: Calcule a derivada das curvas abaixo:

a) $\alpha(t) = \left(t, t^2 + t^{-3} + \sqrt[3]{t^2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\right)$

b) $\alpha(t) = (2t^3, \operatorname{sen} t)$

c) $\alpha(t) = (t^2, t^3)$

d) $\alpha(t) = ((x^3 + x^2)^5, x^2 \operatorname{sen} x)$

5 Considerações Finais

A escolha da temática presente nesta Proposta Didática nasceu da inquietação de um aluno, que só teve contato com o Cálculo no Ensino Superior, e de um professor que encontra dificuldades de implementar o estudo do Cálculo junto aos seus alunos do Ensino Médio.

O estudo iniciou pela apresentação do contexto histórico da criação, criadores e desenvolvedores do Cálculo, tendo como propósito a motivação dos alunos, seguido da apresentação da temática sem transformar o estudo proposto em um curso completo de Cálculo. A Proposta Didática apresenta noções intuitivas e as propriedades do Limite, Derivada e Integral, com aplicação através do cálculo da área entre gráficos de funções e a Parametrização e Reparametrização de Curvas pelo Comprimento de Arco, já no Ensino Médio, buscando promover uma aprendizagem significativa em relação à essas temáticas, o que facilitará a vida dos acadêmicos ao ingressarem nos diversos cursos superiores, revertendo o atual cenário onde estes se sentem perdidos, muitas vezes por não terem conhecimentos prévios, ao iniciarem as disciplinas de Cálculo no Ensino Superior.

A aplicação do estudo do Cálculo no Ensino Médio não é uma tarefa fácil, uma vez que muitos professores que atuam nesta etapa da educação não possuem domínio sobre a temática e por esse motivo acabam não apresentando essa temática aos alunos, amparados, muitas vezes, pela exclusão do Cálculo do currículo da Educação Básica e no fato da maioria dos alunos chegarem a esta etapa da Educação apresentando muitas dificuldades básicas em matemática. Mas, mesmo diante de inúmeros fatores contrários à nossa proposta, ainda assim, acredito que o estudo aqui apresentado é a solução para o problema vivenciado tanto na última etapa da Educação Básica quanto no início dos estudos desses temas a nível superior.

Ao longo da apresentação desta proposta didática, tomamos muitas propriedades do Limite, Derivada e Integral como verdade absoluta, deixando as provas das mesmas para serem apresentadas no apêndice, afim de não tornar o estudo proposto cansativo e desestimulante aos alunos. No entanto, fica a cargo do professor, mediante o nível de sua turma, a escolha de ensinar as provas à medida que apresentar cada propriedade. Ainda neste sentido, ressalto que a implementação desta proposta didática, sobretudo de forma interdisciplinar, pode ocorrer ora durante as aulas regulares ora na promoção de eletivas de componentes como física, química, matemática.

O estudo aqui apresentado é fruto de experiências próprias e uma longa pesquisa em fontes que estão disponíveis e acessíveis a todos que desejarem ampliar seus conhecimentos sobre a temática abordada. A base do estudo está presente nas obras de renomados autores, onde destaco, os professores Benigno Barreto Filho, Hamilton Luís Guidorrizi e as Notas de Aulas do professor José Santana Campos Costa, durante o curso do mestrado, disciplina de Tópicos de Matemática. Sem dúvida este estudo pode ser muito proveitoso.

A Apêndice

A.1 Resposta das Listas de Exercícios Proposto: Limite

Utilizando as propriedades do limite:

Resposta do Exercício 01

a) 3

b) 16

c) -4

d) -4

e) 10

f) 216

g) 1

h) $\frac{3}{2}$

Calculando limite de funções com indeterminação

Resposta do Exercício 01

a) 2

b) 14

c) 16

d) $\frac{1}{4}$

e) 6

f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

g) $\frac{2}{3}$

h) $\frac{-3}{2}$

Limites Fundamentais: Calculando o limite de funções a partir do uso dos limites fundamentais.

Resposta do exercício 01

a) $+\infty$

b) 2

c) 2

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

f) e^2

g) $\sqrt{e}$

h) $\sqrt[3]{e}$

i) e

Lista complementar de limite de uma função

Resposta do Exercício 01:

a) 4

b) -15

c) $\dfrac{8}{3}$

d) 6

Resposta do Exercício 02:

a) 6

b) 4

c) $\dfrac{9}{2}$

d) $\dfrac{7}{2}$

Resposta do Exercício 03:

a) $\dfrac{1}{4}$

b) 3

c) $\dfrac{-1}{2}$

d) $+\infty$

e) $+\infty$

f) 1

Resposta do Exercício 04:

a) $+\infty$

b) $\frac{1}{5}$

c) 0

d) e^2

e) e^3

A.2 Resposta da Lista de Exercícios Propostos: Derivada

Regras Básicas de Derivação - Lista 01: Calculando a derivada de funções com uso das regras básicas de diferenciação.

Resposta do exercício 01

a) 0

b) $15x^2$

c) $h'(x) = 5x^4 - 9x^2$

d) $h'(x) = 5x^9 + x^4$

e) $f'(x) = 15x^4 - 2x$

f) $f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 27x^2 - 54x$

g) $g'(x) = \frac{16}{x^2} - 3x^2 + 4x$

h) $g'(x) = \frac{-23}{(3x-1)^2}$

i) $q'(x) = \frac{48x^2}{(x^3+8)^2}$

j) $r'(x) = \frac{-20x}{(x^2-1)^2}$

Lista de exercícios de derivada de uma função

Exercício 01

a) 0

b) 0

c) 7

d) 3

e) $5x^4$

f) x^2

Exercício 02

$\pi + 1$

Exercício 03

a) $2x + 1$

b) $3x^2 - 27$

c) $4x - 8$

d) $-21x^2 + 4x + 5$

e) $-4\cos x$

f) $-3\text{sen}\, x$

g) $x^3\text{sen}\, x - 3x^2\cos x$

h) $x^2\cos x + 2x\text{sen}\, x$

i) $\sec^2 x$

Exercício 04

a) $\dfrac{1}{x.ln3}$

b) $log_5(e.x^2)^x$

c) $\dfrac{1}{4.\sqrt[4]{x^3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

A.3 Resposta da Lista de Exercícios Propostos: Integral

Exercício 01

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + k$

b) $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x + k$

c) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + k$

d) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + k$

e) $\dfrac{50}{7}x^{\frac{7}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + k$

Exercício 02

a) $\frac{1}{2}ln(x^2+7)+k$

b) $\frac{(lnx)^3}{3}+k$

c) $\frac{1}{3}ln|x^3+1|+k$

d) $\frac{-1}{2}ln|3-2x|+k$

e) $ln|lnx|+k$

Exercício 03

a) $\operatorname{sen} lnx + k$

b) $ln|1-\cos x|+k$

c) $-e^{\cos x}+k$

d) $\cos(cosx)+k$

e) $\frac{-1}{2}\cos 6x+k$

Exercício 04

a) 6

b) 60

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 0

A.4 Resposta da Lista de Exercícios Propostos Parametrização

Solução dos problemas propostos.

1º) $\delta(S) : [0,30] \to \mathbb{R}^3$

$\delta(S) = \left(\frac{2}{3}S, 1-\frac{2}{3}S, \frac{S}{3}\right)$

2º) $K(1) = \frac{1}{2}$

3º)

$K(0) = 8$

$k(1) = \frac{7\sqrt{122}}{61}$

$K(-1) = \frac{\sqrt{26}}{13}$

4º)

a) $\alpha'(t) = \left(1, 2t - 3t^{-4} + \frac{2}{3}t^{\frac{-1}{3}} - \frac{2}{3}t^{\frac{-5}{3}}\right)$

b) $\alpha'(t) = (6t^2, \cos t)$

c) $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$

d) $\alpha'(t) = (5(x^3 + x^2)^4.(3x^2 + 2x), 2x\text{sen}\, x + x^2 \cos x)$

A.5 Produtos Notáveis e Fatoração

O domínio de alguns conhecimentos algébricos são essenciais durante o estudo do limite, derivada e integral. Apresento alguns *Produtos Notáveis* e casos da *Fatoração* que serão úteis ao estudo proposto.

1. Produtos Notáveis.

   a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

   b) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

   c) $(x + y).(x - y) = x^2 - y^2$

   d) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

   e) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

   f) $x^3 + y^3 = (x + y).(x^2 - xy + y^2)$

   g) $x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$

   h) $x^n - y^n = (x - y).(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

2. Fatoração.

   a) Fatoração por um fator em evidência:

   $$ab + ac - ad = a.(b + c - d)$$

   b) fatoração por agrupamento.

   $$x^2 + ax + bx + ab = x.(x + a) + b.(x + a) = (x + b).(x + a)$$

A.6 Prova das Propriedades do Limite de Funções

Limite da Soma(diferença): O limite da soma (diferença) de duas funções é a soma (diferença) dos limites dessas funções.

Prova:

Considerando que se x tende para a, $f(x)$ tende para L, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $g(x)$ tende para M, ou seja,$\lim_{x\to a} g(x) = M$, afirmamos que $f(x) + g(x)$ tende para $L + M$. Assim:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$$

■

Por consequência:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$$

■

Limite do Produto: O limite do produto de duas funções é o produto dos limites dessas funções.

Prova:

Considerando que se x tende para a, $f(x)$ tende para L, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $g(x)$ tende para M, ou seja,$\lim_{x\to a} g(x) = M$, afirmamos que $f(x).g(x)$ tende para $L.M$, Assim:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = L.M$$

■

Por consequência, temos:

Limite de uma Potência

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Sendo $f(x) = K$ (K é uma constante), temos:

$$\lim_{x\to a}(K.g(x)) = K. \lim_{x\to a} g(x) = K.M$$

Limite do logaritmo

$$\lim_{x\to a}(log.g(x)) = log. \lim_{x\to a} g(x) = log.M$$

■

Limite do Quociente: O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções.

Prova:

De forma análoga, sendo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, teremos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

■

A.7 Derivadas Superiores:

A segunda, a terceira e as demais derivadas superiores são definidas como:

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

A.8 Prova das Regras de Diferenciação

As propriedades operatórias nos permitem a obtenção de novas funções derivadas: derivada da soma, da diferença, do produto, do quociente das funções $u(x)$ e $v(x)$, deriváveis no ponto x. Elas estão fundamentadas nas propriedades dos limites.

De acordo com [5] e [7], vejamos algumas provas abaixo:

Derivadas de uma constante

Considerando a função constante $f(x) = b$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{b - b}{\Delta x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$f(x) = b \Rightarrow f'(x) = 0$$

Derivadas de uma potência:

a) $\dfrac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$

b) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt[n]{u}) = \dfrac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \cdot (u)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot \dfrac{d}{dx}$

em que $u > 0$; se n for par e $u \neq 0$; se n for ímpar $(n \geq 2)$

Demonstração: Na demonstração das regras básicas de diferenciação, faremos uso da definição de derivada de uma função, assim:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(u+h)^n - u^n}{h}$

Fazendo $(u + h) = t \quad (t \to u, \quad \text{quando } h \to 0)$

$f'(x) = \lim\limits_{t \to u} \dfrac{t^n - u^n}{t - u} = \lim\limits_{t \to u} \left[t^{n-1} + t^{n-2}u + t^{n-3}u^2 + ... + u^{n-1}\right] = n.u^{n-1}$

Observe que temos n *parcelas*. De onde, concluímos que:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(u+h)^n - u^n}{h}$

Sendo $\dfrac{d}{dx}(\sqrt[n]{u}) = \dfrac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}}$

Temos:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{u+h} - \sqrt[n]{u}}{h} = \lim\limits_{t \to u} \dfrac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{u}}{t - u}$

Fazendo: $x = \sqrt[n]{t}$ e $v = \sqrt[n]{u} \quad (t \to u, \text{ quando } x \to v)$

$f'(x) = \lim\limits_{x \to v} \dfrac{x - v}{x^n - v^n} = \lim\limits_{x \to v} \dfrac{1}{\dfrac{x^n - v^n}{x - v}} = \dfrac{1}{n.v^{n-1}}$

Assim, para $u \neq 0$ e u no domínio de t, logo: $f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Portanto, $\dfrac{d}{dx}(\sqrt[n]{u}) = \dfrac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \cdot (u)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot \dfrac{d}{dx}$

$\blacksquare$

Derivada da Soma (da diferença) de Funções

a) $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

b) $\dfrac{d}{dx}(u-v) = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$

Observação: A prova para o caso da derivada da diferença de funções é análogo.

Aplicando a definição de derivada, temos:

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)] + [g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

■

Derivada de Produto de Funções: $f(x) = u(x).v(x)$

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x) - u(x+\Delta x).v(x) + u(x+\Delta x).v(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x).[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x).[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x} =$$

Assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

De onde:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x). \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v(x). \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

observe que:

$$\lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x) = v(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$$

logo:

$$f(x) = u(x).g(x) \Rightarrow f'(x) = u(x).v'(x) + u'(x).v(x)$$

■

Derivada do quociente de funções:

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}; v(x) \neq 0$

Procedendo de modo análogo ao desenvolvimento das derivadas do produto de funções, chegamos a:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

■

Regra da Cadeia

Demonstração:

Considere a função $h(x) = f(g(x))$, sendo $g(x)$ diferenciável em a e $f(x)$ diferenciável em $g(a)$. Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$. Façamos $\Delta x = x - a$, $\Delta u = g(x) - g(a)$ e $\Delta y = f(g(x)) - f(g(a))$.

Por definição, temos:

$$h'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Da hipótese de g ser diferenciável em a, temos que:

$$\Delta u = (g'(a) + E_1)\Delta x, \quad com \quad E_1 \to 0, \ quando \quad \Delta x \to 0.$$

Da hipótese de f ser diferenciável em $g(a)$, temos que:

$$\Delta y = (f'(g(a)) + E_2)\Delta u, \quad com \quad E_2 \to 0, \ quando \quad \Delta u \to 0.$$

Substituindo a expressão de Δu em Δy, temos que:

$\Delta y = (f'(g(a)) + E_2)(g'(a) + E_1)\Delta x, \quad com \quad E_1 \to 0; E_2 \to 0, \; quando \quad \Delta x \to 0.$

Assim:

$\Delta y = (f'(g(a)) + E_2)(g'(a) + E_1)\Delta x.$

Dividindo toda a expressão por Δx (o que sempre poderemos fazer já que ($\Delta x \neq 0$).

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(g(a)) + E_2)(g'(a) + E_1)$

Tomando o limite quando $\Delta x \to 0$ em ambos os lados da equação, temos:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(f'(g(a)) + E_2)(g'(a) + E_1) = f'(g(a)).g'(a)$

Portanto,

$$h'(a) = f'(g(a)).g'(a)$$

$\blacksquare$

Derivada de Funções Trigonométricas

Para a consolidação de uma aprendizagem significativa, deixo a demonstração da derivada de algumas funções trigonométricas.

a) $\operatorname{sen}' x = \cos x$

$\operatorname{sen}' x = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2sen\dfrac{h}{2}.\cos\dfrac{2x+h}{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}.\cos\dfrac{2x+h}{h} = \cos x$

$\blacksquare$

b) $\cos' x = \operatorname{sen} x$

$\cos' x = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}.\operatorname{sen}\dfrac{2x+h}{2}h}{=} - \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}.\operatorname{sen}\dfrac{2x+h}{h} = -\operatorname{sen} x$

$\blacksquare$

c) $\operatorname{tg}'x = \sec^2 x$

$\operatorname{tg}'x = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h}$

Fazendo $t = x + h$ ($t \to x$ *quando* $h \to 0$), temos:

$$\operatorname{tg}'x = \lim_{t\to x} \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} x}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{\operatorname{sen} t.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos t}{t - x} . \frac{1}{\cos t.\cos x}$$

Como:

$$\lim_{t\to x} \frac{\operatorname{sen} t.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos t}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{\operatorname{sen}(t - x}{t - x} = 1$$

$$\lim_{t\to x} \frac{1}{\cos t.\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Assim, substituindo temos:

$$\operatorname{tg}'x = \sec^2 x$$

■

A.9 Fórmulas de Integração

1. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = ln|x| + k$
2. $\int e^x dx = e^x + k$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + k$
4. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$
5. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$
6. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + k$
7. $\int cossec^2 x dx = -ctgx + k$
8. $\int \sec x.\operatorname{tg} x dx = \sec x + k$

9. $\int cossecx.ctgxdx = -cossecx + k$

Façamos alguns exemplos para fixarmos a aprendizagem.

Exemplo 01: Calcule.

a) $\int \dfrac{dx}{x+3} =$

Solução: Faça $u = x + 3$, assim teremos, $du = dx$, então:

$\int \dfrac{dx}{x+3} = \int \dfrac{du}{u} = ln|u| + K$

Agora, vamos substituir $u = x + 3$ na expressão, assim teremos:

$$\int \frac{dx}{x+3} = ln|x+3| + K$$

b) $\int sen10xdx =$ Solução: Faça $u = 10x$, de modo que $du = 10x$ e $dx = \dfrac{du}{10}$, portanto:

$\int sen10xdx = \int senu.\dfrac{du}{10} = \dfrac{1}{10}\int senudu = -\dfrac{cosu}{10} + k$

Agora, vamos substituir $u = 10x$ na expressão, assim teremos:

$\int sen10xdx = -\dfrac{cos10x}{10} + k$

c) $\int xsec^2x^2dx =$

Solução:

Faça $u = x^2$, de modo que $du = 2xdx$ e $dx = \dfrac{du}{2x}$, então:

$\int xsec^2x^2dx = \int xsec^2u.\dfrac{du}{2x} = \dfrac{1}{2}\int sec^2udu = \dfrac{tgu}{2} + k$

Agora, vamos substituir $u = x^2$ na expressão, assim teremos:

$\int xsec^2x^2dx = \dfrac{tgx^2}{2} + k$

d) $\int sec10x.tg10xdx =$

Solução:

Faça $u = 10x$, de modo que $du = 10x$ e $dx = \dfrac{du}{10}$, então:

$$\int sec10x.tg10xdx = \int secu.tgu\frac{du}{10} = \frac{1}{10}\int secu.tgu.du = \frac{secu}{10} + k$$

Agora, vamos substituir $u = 10x$ na expressão, assim teremos:

$\int sec10x.tg10xdx = \dfrac{sec10x}{10} + k$

Exercício 01: Resolva as seguintes integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(lnx)}{x}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x.e^{\cos x}dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x.\operatorname{sen}(\cos x)dx$

e) $\displaystyle\int 3\operatorname{sen} 6xdx$

A.10 Demonstração das Propriedades da Integração

A demonstração das propriedades da integração exigem alguns conhecimentos prévios que não foram estudados nesta proposta pedagógica, uma vez que o objetivo desta é um estudo introdutório para que os alunos já no Ensino Médio tenham acesso à essa área do conhecimento matemático e tenham menos dificuldade quando tiverem acesso a um estudo completo do Cálculo no Ensino Superior.

No entanto, anuncio alguns teoremas e propriedades que nesse momento são fundamentais para que os alunos e professores possam compreender a aplicação dos mesmos na resolução de problemas e deixo a prova de algumas propriedades.

Teorema: Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então:

a) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

b) $k.f$ é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$$

c) se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

d) Se $a \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

1°.Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde:

A diferença $F(b) - F(a)$ será indicada por $\Big[f(x)\Big]_b^a$, assim:

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[f(x)\Big]_b^a = F(b) - F(a)$$

Mudança de Variável na Integral

Teorema: Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais qualquer em I. Seja $g : [c, d] \to I$, com g' contínua em $[c, d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nessas condições

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

Demonstração:

Como f é contínua em I, segue que f admite uma primitiva F em I. Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A função $H(u) = F(g(u))$, $u \in [c, d]$, é uma primitiva de $f(g(u))g'(u)$. Assim;

$$H'(u) = [F(g(u))]' = F'(g(u))g'(u)$$

ou seja,

$$H'(u) = f(g(u))g'(u)$$

Sendo $F' = f$, temos que:

$$\int_c^d f(g(u))g'(u)du = \Big[F(g(u)\Big]_c^d = F(g(d)) - F(g(c))$$

Por hipótese, $g(d) = b$ e $g(c) = a$. Assim,

$$\int_c^d f(g(u))g'(u)du = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)du$$

■

A.11 Noções Básicas sobre a Integral de Riemann

A integral de Riemann tem muitas aplicações na geometria, física, etc. Vejamos alguns informações importantes e básicas nesse estudo.

Partição de um intervalo: A ideia é dividir um intervalo em pedações cada vez menores, tantos quanto sejam necessários, assim, teremos:

a) Uma partição ρ de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $\rho = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ em que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$

b) Uma partição ρ de $[a, b]$ divide $[a, b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.

c) A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Assim, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, etc.

d) Os números Δx_1,Δx_2,...,Δx_n não são necessariamente iguais e o maior deles é chamado de *amplitude da partição* e é representado por $máx \Delta x_i$

e) Uma partição $\rho = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ será indicado por:

$$\rho : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$$

Soma de Riemann: Para uma melhor compreensão, vejamos uma explicação passo a passo:

a) Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e $\rho : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$ uma partição de $[a, b]$.

b) Seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente para cada $i(1, 2, 3, .., n)$.

Assim, o número:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n$$

é denominado soma de Riemann de f, relativo a partição ρ e aos números c_i.

c) Geometricamente podemos interpretar a soma de Riemann como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Definição da Integral de Riemann

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando $máx\Delta x_i \to 0$.

Assim:

$$\lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

Tal número L quando existe é único, denomina-se integral de Riemann e indicamos por: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Então, por definição temos:

$$\lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Aplicação no Cálculo de Área

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em [a,b]. queremos definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Sejam ainda:

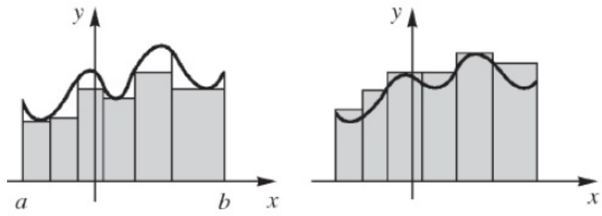
a) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_{i_0}$ uma aproximação por falta da área;

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_{i_1}$ uma aproximação por excesso da área;

Assim, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_{i_0} \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_{i_1}$$

Figura 14 – Cálculo de Área



fonte: [7]

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx$, quando o máx $\Delta x_i \to 0$, podemos definir a área dado como:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Da mesma forma defini-se a área A no caso em que f é uma função integrável qualquer, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

Bibliografia

[1] BRASIL. "Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal". Em: *Coleção de Leis do Brasil* 11 (1890), p. 3474.

[2] BRASIL. *Decreto Nº 21.241, de 4 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências.* 1932.

[3] BRASIL. Presidência da República. "Decreto nº 4.244, de 9 de abril de 1942". Em: *Lei Orgânica do Ensino Secundário* (1942).

[4] Geraldo Ávila. "O ensino do Cálculo no segundo grau". Em: *Revista do Professor de Matemática* 18 (1991), pp. 1–9.

[5] Benigno Barreto Filho e Cláudio X SILVA. *Matemática aula por aula.* São Paulo, 2003.

[6] Geraldo Ávila. *Várias faces da Matemática–Tópicos para Licenciatura e Leitura Geral.* São Paulo: Blucher, 2010.

[7] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição.* LTC, Rio de Janeiro, 2012.

[8] Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson Jose Machado. *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral.* Atual, 2013.

[9] Antonio Caminha Muniz Neto. *Fundamentos de Cálculo.* Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[10] MEC BRASIL. *BNCC Ensino Fundamental.* Brasília: MEC, 2018.

[11] MARANHÃO. SEDUC. *DCTMA Ensino Médio.* São Luís, 2022.

[12] José Santana Campos COSTA. "Tópicos de Matemática, notas de aulas". Em: *UFMA, São Luís* (2023).

[13] GoGebra.org. "O que é o GeoGebra?" Em: *https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT, acesso em* (20 set, 2024).

[14] InfoEscola. "Limite de uma função". Em: *https://www.infoescola.com/matematica/limites/, acesso em* (5 mar, 2024).

[15] Escola Kids. "Função Afim". Em: *https://escolakids.uol.com.br/matematica/funcao-afim.htm, acesso em* (5 mar, 2024).

[16] Renata Melo NASCIMENTO. "A HÉLICE: Uma curva importânte no código da vida". Em: *http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/p5.pdf, acesso em* (15 jul, 2024).