UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Mauro Roberto Rosa dos Santos

O Uso da Lógica Booleana Matemática no Ensino Básico

São Luís - MA
2024

Mauro Roberto Rosa dos Santos

O Uso da Lógica Booleana Matemática no Ensino Básico

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Valdiane Sales Araújo

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

dos Santos, Mauro Roberto Rosa.
O Uso da Lógica Booleana Matemática no Ensino Básico / Mauro Roberto Rosa dos Santos. - 2024.
91 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Ensino Básico. 3. Lógica Booleana Matemática. I. Araújo, Valdiane Sales. II. Título.

Mauro Roberto Rosa dos Santos

O Uso da Lógica Booleana Matemática no Ensino Básico

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 8 de março de 2024:

Prof. Dra. Valdiane Sales Araújo
Orientador
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Antônio José da Silva
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Examinador Externo
Universidade Estadual do Maranhão

São Luís - MA
2024

À Deus por tudo.

Agradecimentos

Primeiramente a **Deus Pai**, pela saúde, compreensão e orientação em todos os instantes da minha vida, fazendo-me nunca desistir e acreditar sempre que os objetivos são possíveis.

Aos meus pais **Victal Ferreira dos Santos** e **Ana Maria Rosa dos Santos** (In memorian) pelo carinho, educação, ensinamentos, amor e toda dedicação prestada, meu eterno reconhecimento e gratidão.

A minha esposa **Claudia Silene Ramos Pereira dos Santos** pela companhia, amor e sincera amizade, minha eterna gratidão.

Aos meus **irmãos, sogros, tia, cunhados, sobrinhos, a Nina, Mel(In memorian) e Anastácia**, pelos momentos de alegria proporcionados e incentivo, muito obrigado.

A **Profª. Dra. Valdiane Sales Araújo**, pela prontidão em aceitar esse desafio, pela orientação, melhores direcionamentos na condução desse trabalho e conhecimentos transmitidos ao longo do curso; minha gratidão, admiração e respeito.

Ao diretor **Profº João Fonseca e meus amigos professores de trabalho da família C.E. Liceu Maranhense noturno**, pela humanidade e todo apoio, minha gratidão.

Aos meus **colegas e, amigos de turma do PROFMAT, professores Antônio Marcos, Derivaldo Gomes, Eudes Silva, Ezequiel Batista, João Batista, Jonilson, Luis Eduardo, Mário da Paixão, Roger Mello, Wellington Carlos, Willamys da Silva** , que pela união e solidariedade, permitiram que todas as dificuldades do caminho fossem amenizadas, muito obrigado.

Aos **professores do programa PROFMAT da UFMA**, por dedicação, disponibilização e compartilhamento de tanta aprendizagem e a **Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)** por promover um Mestrado com Excelência voltado para a valorização e qualificação do professor.

A todos aqueles que tiveram contribuição direta ou indireta na realização e concretização deste trabalho.

Muito Obrigado ...

"Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana seja apenas outra alma humana"

(Carl Gustav Jung)

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo principal explorar e inserir o uso da Lógica Booleana nas aulas de Matemática do Ensino Básico e sua contribuição para o desenvolvimento das habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas em estudantes nessa faixa etária. Para isso traz uma abordagem teórica do assunto e a implementação de um conjunto de tarefas formuladas de forma simples para ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e raciocínio lógico. Foi apresentado inicialmente uma breve história do surgimento da álgebra booleana matemática, em seguida abordou-se a lógica sentencial matemática explorando definições importantes tais como argumentos, proposições, os princípios básicos da lógica, construção de tabelas verdade, conectivos lógicos, equivalências lógicas, diagramas lógicos e validações de argumentos. Em seguida foi apresentada a Lógica Booleana Matemática, suas propriedades, identidades, teoremas e expressões lógicas. Finalizamos nosso estudo apresentando aplicações voltadas e orientadas para o Ensino Básico Médio e Fundamental.

Palavras-chave: Educação Matemática. Lógica Booleana Matemática. Ensino Básico.

Abstract

The main objective of this dissertation is to explore and insert the use of Logic Boolean in Basic Education Mathematics classes and its contribution to development of logical reasoning and problem-solving skills in students in this range age. To this end, it brings a theoretical approach to the subject and the implementation of a set of simply formulated tasks to help students develop communication skills critical thinking, problem solving and logical reasoning. It was initially presented a brief history of the emergence of mathematical Boolean algebra, then we discussed mathematical sentential logic exploring important definitions such as arguments, propositions, the basic principles of logic, construction of truth tables, connectives logic, logical equivalences, logical diagrams and argument validations. Right away Mathematical Boolean Logic was presented, its properties, identities, theorems and logical expressions. We conclude our study by presenting applications aimed at for Basic Secondary and Elementary Education.

Keywords: Mathematics Education. Boolean Logic Mathematics. Elementary School.

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

1 Introdução

O ensino de matemática desempenha um papel crucial na formação de alunos e no avanço da ciência. A ciência, por sua vez, é uma forma de saber, e com isso, procura justificar os fenômenos que ocorrem ou podem acontecer. Essa explicação é dada em forma de raciocínio lógico, através do qual chega-se a uma conclusão a partir de outras informações chamadas de premissas. O que caracteriza o estudo científico é o seu método, que é comum a todos os campos de conhecimento. Esse método é chamado método científico ou metodologia científica. De acordo com [4].

> Para o ensino de Ciências Naturais é necessária a construção de uma estrutura geral da área que favoreça a aprendizagem significativa do conhecimento historicamente acumulado e a formação de uma concepção de Ciência, suas relações com a Tecnologia e a Sociedade. Portanto é necessário considerar as estruturas de conhecimento envolvidas no processo de ensino e aprendizagem.
> **PCN's Ciências Naturais** (Brasil; 1997, p. 27)

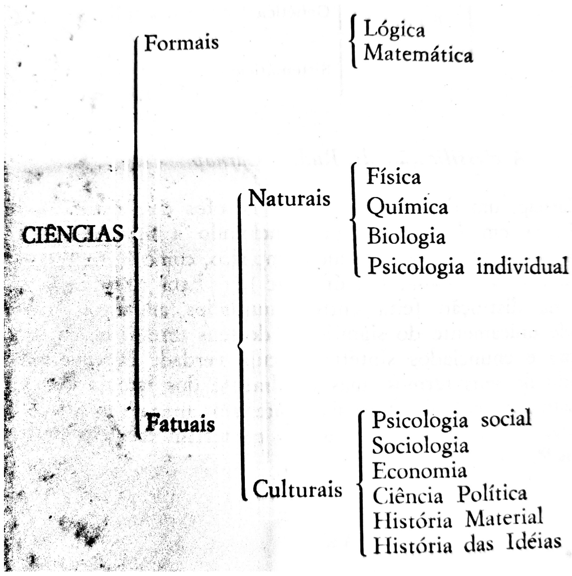
O método científico estuda os campos das ciências e as classifica segundo os seguintes métodos: indutivo, dedutivo e hipotético-dedutivo. É essencial que o ensino das Ciências Naturais seja realizado em diversas tarefas que promovam o aprendizado do aluno na fase inicial dos seus estudos para reduzir dificuldades no entendimento evitando o desinteresse e fragilidade com as disciplinas.

A matemática é uma ciência justificada através dos métodos dedutivo e indutivo, logo sua demonstração na maioria das vezes é feita através de manipulações de fórmulas lógicas das quais dão origem a outras fórmulas mediante aplicação de técnicas adequadas.

O diagrama abaixo, apresenta um exemplo de classificação das ciências baseado no método científico de **Mário Bunge**[1].

[1] BUNGE, Mario. A Investigação Científica, Barcelona, Ariel, 1972

Figura 1 – **Classificação científica segundo Mário Bunge.**



Fonte: **Livro Iniciação Á Lógica e À Metodologia da Ciência, p.17**

A busca por conhecimentos e o avanço de informações nos dias atuais nos mostram que o ensino se torna cada vez mais necessário e essencial. Sendo assim, é importante que o professor esteja a procura constante de ideias e aperfeiçoamento que o capacitem e o tornem mais apto para compreender como ocorre o processo de aprendizagem dos seus alunos.

O ensino da matemática estabelece desafios para o ensino básico, necessitando de métodos, técnicas que favoreçam o aprendizado e despertem o interesse dos discentes visando reduzir dificuldades e melhor satisfação do aluno.

Nessa perspectiva, buscando desenvolver a capacidade de aprendizagem do aluno, uma solução é a lógica matemática. O uso da lógica matemática no ensino básico (fundamental e médio) é um recurso importante que visa ensinar aos alunos os princípios fundamentais da lógica por meio de conceitos matemáticos. Esse método tem como objetivo desenvolver habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e raciocínio lógico desde os primeiros anos de escolaridade. Além disso, a lógica matemática também é importante no contexto da tomada de decisões, ensinando os docentes a avaliar situações, analisar informações e chegar a conclusões fundamentadas. Portanto, é um recurso valioso na aprendizagem e indispensável para aprendizagem matemática.

A lógica estuda as formas de pensamento, e é uma ciência que por meio de regras e técnicas, determina se um argumento é válido. A lógica é amplamente aplicada em algumas áreas, como por exemplo, física, computação e matemática. Na computação, a lógica permite revisar programas e implementá-los. Na matemática, serve para demonstrar teoremas e inferir resultados matemáticos que possam ser aplicados em análises ou investigações. Em geral, a lógica está presente no dia a dia sempre que qualquer trabalho que se realize tiver um procedimento lógico.

É importante ressaltar que essas regras e técnicas possuem uma base de estudo fundamentada em lógica matemática. Este tipo de lógica chamada lógica binária é fundamentada na álgebra booleana, também denominada lógica booleana que trata os sinais como variáveis e explica sua correspondência.

No sentido de explanar essa parte da álgebra e de introduzi-la de forma simplificada e acessível no Ensino Básico para ajudar os alunos, resolvi estruturar esse trabalho que mostra que o estudo da lógica de boole tem relevada importância para o desenvolvimento da aprendizagem, é um dos passos essenciais para a eficiência de sistemas eletrônicos atuais e retrata a importãncia que a lógica matemática exerce sobre os diversos tipos de métodos científicos.

Para isso, o presente trabalho divide-se em seis capítulos, de onde esta introdução é o primeiro destes. A seguir, no segundo capítulo, aborda-se a história da álgebra matemática e apresentam-se conceitos e exemplos gerais a respeito de argumentos lógicos que mostrarão as definições e os tipos de argumentos; conceitos esses que ajudarão na compreensão do assunto.

No capítulo três, é realizado um breve estudo sobre o método dedutivo; que fornece informações sobre o seu conceito e introduz a sua importância na álgebra booleana.

O capítulo quatro, trata sobre as definições da álgebra de Boole na lógica matemática, onde serão mostrados os métodos de obtenção, tabelas verdade, cálculo proposicional e a importância desse estudo.

O capítulo cinco, o mais importante desses, relaciona a lógica booleana com o ensino básico fundamental, apresentando algumas aplicações de atividades simples envolvendo o aluno com a lógica matemática.

Além dessas tarefas, conforme [13], [10] e [21], serão apresentados também jogos e atividades lógicas matemáticas que expressam dedutividade e que não utilizam variáveis lógicas booleanas. Essas atividades são de grande importância na estruturação da capacidade de desenvolvimento de raciocínio lógico no ensino básico de uma forma geral.

No sexto e último capítulo, apresenta-se a conclusão desse trabalho, enfatizando os pontos principais e discutindo os benefícios desse estudo para o universo da lógica matemática e a importância no processo de ensino aprendizagem.

2 A Álgebra e a Lógica Matemática

2.1 Breve Histórico da Álgebra

Segundo [8] [1] Por volta do ano 400 d.C., uma ideia audaciosa de um estudioso de Alexandria começou a mudar toda a história da matemática. Esse estudioso era chamado Diofante de Alexandria, que viveu de 325 a 409 e seus estudos se basearam no uso de símbolos para facilitar a escrita e os cálculos matemáticos. Os símbolos criados por Diofante fizeram com que expressões, até então escritas totalmente com palavras, pudessem ser representadas com abreviações.

Diofante viveu numa época muito tumultuada, presenciando, por exemplo, a queda do Império Romano, e isso, não foi nada bom para a matemática, que teve todo um processo de desenvolvimento interrompido devido ao clima de guerra que se criou e principalmente pela destruição de muitos centros de estudos, fazendo com que a simbologia de Diofante não saísse do estágio inicial.

Só por volta do ano de 650, com a ascenção do Império Árabe, é que houve uma retomada dos estudos matemáticos. De 786 a 809 no reinado do Califa Harun al-Raschid, os muçulmanos conquistaram vários territórios, fazendo surgir grandes cidades, centros de comércio e de artesanato. Todas essas atividades comerciais, as viagens marítimas e as viagens através do deserto, provocaram um grande desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos.

Com a morte de Al-Raschid, em 809, seu filho Al-Mamum assumiu o trono e governou até 833. Al-Mamum criou em Bagdá um centro de ensino e contratou os mais brilhantes sábios muçulmanos da época. Entre eles estava Mohamed Ibn Musa Al-Khowarizmi, grande matemático que escreveu um livro chamado al-jabr, que significa ***restauração*** e refere-se a uma mudança de termos de um lado para outro de uma equação. Muito provavelmente o termo Álgebra originou-se do título desse livro.

Assim como muitos matemáticos de diversas épocas, Al-Khowarizmi, não conseguiu expressar as equações totalmente em símbolos. Isso só ocorreu 700 anos depois, durante a guerra entre França e Espanha. Para evitar que seus planos fossem descobertos, tanto franceses quanto espanhóis utilizavam códigos em suas mensagens. Mas os espanhóis não foram bem sucedidos com essa estratégia, pois, sempre que um mensageiro de suas tropas era capturado, os franceses rapidamente descobriam seus planos militares.

“Os franceses tem um pacto com o diabo” diziam os espanhóis. Os planos e

[1] https://www.mat.uc.pt/ mat1206/histmat/historia_da_matematica.htm

códigos secretos espanhóis foram decifrados por François Viète, um advogado francês. Apaixonado por álgebra, ele viveu de 1540 a 1603 e é reconhecido historicamente como o principal responsável pela introdução dos símbolos no mundo da matemática. Por isso, ficou conhecido como o Pai da Álgebra.

Outros matemáticos da época também deram as suas contribuições para o aperfeiçoamento da álgebra, entre eles, Robert Record, inglês que criou o símbolo (=) para a expressão (igual a). Esse sinal foi usado por Thomas Harriot, outro matemático inglês, responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam na álgebra de Viète.

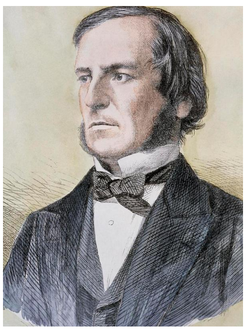
A transição para uma álgebra completamente simbólica foi obra de René Descartes, matemático e filósofo francês, que introduziu as seguintes inovações para aperfeiçoar a álgebra de Viète:

- criou o símbolo (**.**) para a operação de multiplicação;
- criou a notação que usamos hoje para os expoentes de uma potenciação;
- passou a usar as primeiras letras do alfabeto para os coeficientes da incógnita e os termos independentes e as últimas letras para representar as incógnitas.[8][2]

Nos dias atuais, a álgebra matemática segue presente sempre onde a tecnologia vem ganhando espaço nos mais variados campos, seja em estabelecimentos de ensino como nos ambientes de desenvolvimento de pesquisa. É essencial ressaltar que técnicas avançadas que constituem as linguagens de programação e sistemas de tomadas de decisões possuem a base de estudo fundamentada em lógica binária matemática.

Um tipo de lógica matemática que incorpora propriedades básicas da Teoria dos Conjuntos e do Cálculo Proposicional é denominada lógica booleana que fundamenta a lógica binária, trata os sinais como variáveis e explica o seu funcionamento.

Figura 2 – **George Boole.**



Fonte: **Wikipédia, site https://pt.m.wikipedia.org**

[2] Departamento Matemática Universidade Coimbra

A lógica booleana ou álgebra booleana foi criada pelo matemático inglês George Boole [3][3] (1815 - 1864). Seu conceito foi formulado por volta do ano de 1850. Ele construiu sua lógica a partir de símbolos, representando as expressões por letras e ligando-as através de conectivos (símbolos algébricos).

Boole abordou a lógica matemática de um modo novo até então, reduzindo esta lógica a álgebra, incorporando-a a matemática. Ele ressaltou a analogia entre os símbolos algébricos e aqueles que representam as formas lógicas e iniciou uma álgebra lógica denominado-a de álgebra Booleana que possui largas aplicações na construção de computadores, circuitos eletrônicos, linguagens de programação, projetos de computadores modernos, etc...; além disso, esse estudo é visto como um passo fundamental na atual revolução da informática. Na educação, esse estudo permite, de forma acessível, ajudar os alunos no raciocínio lógico dedutivo a desenvolver habilidades e minimizar dificuldades na resolução de problemas.

2.2 Argumentos Lógicos

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [1], [9], [11] e [12].

Dado um problema, ou um fato, procura-se explicá-lo ou justificá-lo. Essa explicação é dada em forma de raciocínio através do qual chega-se a uma afirmação (conclusão) a partir de outras afirmações (premissas). Quando esse raciocínio é empregado numa linguagem, tem-se o Argumento.

O argumento é definido como sendo um conjunto de enunciados dos quais um é a conclusão e os demais são as premissas. A conclusão enuncia o ponto de vista defendido ou o que está sendo justificado e as premissas compreendem as razões oferecidas em favor da conclusão.

A diferença entre conclusão e premissas para um argumento qualquer pode ser entendida levando-se em consideração a utilização de certos “vocabulários”, por exemplo, indicam premissas as expressões: *“porque”, “uma vez que”, “pois”, “porquanto”, “em virtude de”, “em vista de”, “posto que”*, etc.... Por outro lado, a conclusão pode ser identificada por: *“portanto”, “logo”, “assim”, “em consequência”, “então”, “segue-se que”*, entre outros. A seguir, apresenta-se os tipos de argumentos mais utilizados em lógica matemática.

[3] «George Boole (1815 - 1864)». Disponível em <https://www.ebiografia.com/george$_b$*oole* > .*Consultado em* 12 *de outubro de* 2023

- **Argumentos Lógicos Indutivos**

Antigamente o argumento indutivo era tradicionalmente visto como um enunciado geral, como conclusão, obtida a partir de premissas singulares. Atualmente, esse argumento é concebido como forma de argumento em que a verdade das premissas não basta ou não é suficiente para garantir a verdade da conclusão; ou seja, a conclusão não surge como consequência necessária das premissas, podendo-se, desta forma, ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Pode-se afirmar com certeza, em relação aos argumentos lógicos indutivos, que se as premissas são verdadeiras, a conclusão provavelmente também o será.

Abaixo, segue um exemplo mostrando um argumento indutivo:

Exemplo 2.1. ***Argumento Lógico Indutivo***

As aulas de Lógica, para a turma de matemática, vem sendo ministradas na sala 10.
Hoje terá aula de Lógica para a turma de matemática.

A aula de Lógica para a turma de matemática será ministrada, hoje, na sala 10.

- **Argumentos Lógicos Dedutivos**

Durante muito tempo era denominado como sendo aquele que se chegava a uma conclusão singular a partir de premissas gerais. No entanto, existem argumentos dedutivos que partem de premissas gerais para conclusão geral ou de premissas singulares para conclusão singular.

Definição 1. *Os argumentos lógicos dedutivos ou argumentos dedutivamente válidos são aqueles em que se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também será necessariamente verdadeira.*

Para que o argumento seja dedutivo, não se exige que as premissas e a conclusão sejam verdadeiras. É exigido que, se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também será. Pode-se afirmar que a validade de um argumento não depende do conteúdo dos seus enunciados, mas da forma como estes enunciados se relacionam.

O exemplo a seguir apresenta um argumento dedutivo:

Exemplo 2.2. ***Argumento Lógico Dedutivo***

Se Anastácia é professora, é educadora. (Verdadeiro)
Anastácia é professora. (Verdadeiro)

Anastácia é educadora. (Verdadeiro)

- ## Enunciados Simples e Compostos

Os enunciados ou sentenças que formam um argumento podem ser simples ou compostos.

Definição 2. *Um enunciado é dito simples quando é tomado como unidade, por si mesmo. Por outro lado, diz-se que o enunciado é composto se constituído por mais de um enunciado ou se consiste de negação de enunciado.*

Como exemplo de um enunciado simples, tem-se:

Exemplo 2.3. ***Enunciado Simples***

a) "Mateus é inteligente". O enunciado simples não possui conectivos.

Para enunciados compostos, tem-se:

Exemplo 2.4. ***Enunciados Compostos***

a) "Mateus não é inteligente". ***(negação de enunciado)***

b) "Mateus é inteligente e hábil". ***(conjunção de enunciado)***

c) "Mateus é inteligente ou hábil". ***(disjunção de enunciado)***

d) "Se Mateus é inteligente então é hábil". ***(enunciado condicional)***

e) "Mateus é inteligente se e só se é hábil". ***(enunciado bicondicional)***

A respeito destes enunciados, é importante considerar que *"Todo enunciado possui um, e somente um, valor verdade, isto é, se é verdadeiro (V) então não pode ser falso (F) ao mesmo tempo e vice-versa".*

No cálculo sentencial, cada enunciado simples é enunciado por qualquer letra maiúscula do alfabeto (de A a Z). A seguir, apresenta-se o cálculo sentencial, abordando os demais tipos de argumentos mencionados acima e mostrando a classificação dos tipos de lógica matemática utilizados.

• O Cálculo Proposicional

A lógica matemática tem seu estudo voltado para a análise dos argumentos lógicos, tendo formulado algumas técnicas capazes de auxiliar na construção dos argumentos dedutivamente válidos. A lógica simbólica oferece melhores condições de precisão, concisão e manipulação dos argumentos através do uso de uma linguagem artificial.

Definição 3. *Chama-se de Cálculo Sentencial (C.S.) ou* ***Cálculo Proposicional*** *à parte lógica simbólica que estuda as sentenças e seus diversos modos de combinação, através de expressões como "não", "e", "ou", "se ... então", "se e somente se", que são os conectivos, com o uso de um simbolismo específico.*

• Proposições

Definição 4. *Chamamos de proposições sentenças declarativas afirmativas, da qual tenha sentido afirmar que seja verdadeira ou que seja falsa, mas não ambas ao mesmo tempo. Uma proposição é uma afirmação que é clara, precisa e possui um significado específico.*

Na lógica matemática, as proposições são usadas para construir argumentos válidos e são a base para o raciocínio lógico dedutivo. Abaixo são mostrados alguns exemplos de proposições.

Exemplo 2.5. ***Proposições***

- ***A lua é quadrada***. *Essa é uma proposição falsa*
- ***Lógica é uma ciência***. *Essa é uma proposição verdadeira*
- ***O livro está na mesa***. *Essa proposição depende do contexto. Se houver um livro na mesa, é verdadeira; caso contrário, é falsa.*
- ***Se chover, então a fogueira apagará***. *Essa é uma proposição condicional, onde a verdade depende da relação entre a chuva e a fogueira apagar.*

• Simbologias da Linguagem do Cálculo Proposicional

No cálculo proposicional(sentencial), as variáveis envolvidas denominadas de variáveis de proposicionais são representadas por letras latinas minúsculas ***p,q,r,s,...*** para indicar as proposições (fórmulas atômicas). Como exemplo, tem-se:

Exemplo 2.6. ***Variáveis Proposicionais***

- *A neve é branca:* $\boldsymbol{p}$
- *A lua é quadrada:* $\boldsymbol{q}$

As fórmulas atômicas podem ser combinadas entre si, e para representar estas combinações são utilizados os conectivos lógicos: $\wedge$: **e**, $\vee$: **ou**, $\rightarrow$: **se ... então**, $\leftrightarrow$: **se e somente se**, $\neg$: **não** *ou* $\sim$: **não**.

Exemplificando, tem-se:

Exemplo 2.7. ***Conectivos Lógicos***

A lua é quadrada e a neve é branca: $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ (*p e q são chamados conjunctos*)

A lua é quadrada ou a neve é branca: $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ (*p e q são chamados disjunctos*)

Se a lua é quadrada então a neve é branca: $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ (*p* é *o antecedente e q* é *o consequente*)

A lua é quadrada se e somente se a neve é branca: $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$

A lua não é quadrada: $\sim \boldsymbol{p}$

Outra simbologia que serve para denotar o "alcance" dos conectivos são os parênteses, simbolizados por **( )**. Como exemplo, tem-se:

Exemplo 2.8. ***Linguagem Proposicional***

Se a lua é quadrada e a neve é branca, então a lua não é quadrada.

$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \sim \boldsymbol{p}$

A lua não é quadrada se e somente se a neve é branca

$((\sim \boldsymbol{p}) \leftrightarrow \boldsymbol{q})$

Toda proposição representa uma fórmula. Dessa forma, sejam **A** e **B** duas fórmulas, então $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$, $\sim \mathbf{A}$ *também são fórmulas.*

Os parênteses são utilizados conforme a seguinte ordem dos conectivos: $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Adota-se para estes conectivos a convenção pela **direita**. O exemplo a seguir mostra essa convenção.

Exemplo 2.9. ***Convenção da Linguagem***

A fórmula $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \wedge \sim \boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{p} \rightarrow \sim \boldsymbol{q}$

deve ser entendida ou convencionada como:

$(((\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\sim \boldsymbol{r})) \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow (\sim \boldsymbol{q})))$

- **Tabelas Verdade**

A lógica matemática apresenta normalmente duas classificações, estas são:

- Lógica Indutiva: aplicada no estudo das probabilidades.
- Lógica Dedutiva: que pode ser dividida em lógicas não-clássicas, lógicas complementares da clássica e lógica clássica.

A lógica clássica, considerada como o núcleo da lógica dedutiva, é o que se chama atualmente de **CÁLCULO DE PREDICADOS DE 1ª ORDEM** com ou sem igualdade. Esta lógica é regida por três princípios formulados como:

1. **Princípio da Identidade**: todo objeto é idêntico a si mesmo
2. **Princípio da Contradição**: dadas duas proposições contraditórias (uma é negação da outra), uma destas é falsa
3. **Princípio do Terceiro Excluído**: dadas duas proposições contraditórias, uma delas é verdadeira.

Baseado nestes princípios, as proposições simples são ou verdadeiras ou falsas, sendo mutuamente exclusivos os dois casos, decorre que a lógica clássica é bivalente. Para determinar o valor (verdade ou falsidade) das proposições compostas (também chamadas de fórmulas moleculares), utilizam-se os valores conhecidos das proposições simples (comumente chamadas de fórmulas atômicas). A seguir apresentam-se algumas dessas tabelas associadas às respectivas fórmulas.

Tabela verdade da "Negação": $\sim$ p
É *verdadeira*(*falsa*) *se e somente se* **p** é *falsa*(*verdadeira*).

Tabela 1 – **Tabela verdade da Negação**

p	**$\sim$ p**
V	**F**
F	**V**

Fonte: **própria autoria**

Tabela verdade da "Conjunção": p $\wedge$ q
A conjunção é verdadeira se e somente se os conjunctos são verdadeiros.

Tabela 2 – **Tabela verdade da Conjunção**

p	**q**	**p $\wedge$ q**
F	**F**	**F**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Tabela verdade da "Disjunção": p $\vee$ q

$A\ disjunção$ é $falsa\ se\ e\ somente\ se\ os\ disjunctos$ são $falsos.$

Tabela 3 – **Tabela verdade da Disjunção**

p	**q**	**p $\vee$ q**
F	**F**	**F**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
V	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Tabela verdade da "Implicação": p $\rightarrow$ q

$A\ implicação$ é $falsa\ se\ e\ somente\ se\ o\ antecedente$ é $verdadeiro\ e\ o\ consequente$ é $falso.$

Tabela 4 – **Tabela verdade da Implicação**

p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
F	**F**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Tabela verdade da "Bi-implicação": p $\leftrightarrow$ q

$A\ bi-implicação$ é $verdadeira\ se,\ e\ somente\ se\ os\ seus\ componentes$ são $ambos\ verdadeiros\ ou\ ambos\ falsos.$

Tabela 5 – **Tabela verdade da Bi-implicação**

p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
F	**F**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Tomando-se por exemplo a fórmula

$$((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \sim \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}).$$

Temos que esta representa uma proposição composta, logo para construção da sua tabela verdade é preciso que se faça a obtenção parcial das tabelas de suas subfórmulas, conforme ilustração abaixo:

Exemplo 2.10. ***Tabela Verdade de Proposições Compostas***

Tabela 6 – **Tabela verdade de uma Proposição Composta**

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\sim \mathbf{p}$	$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \sim \mathbf{p}$	$\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$	$((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \sim \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})$
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Em relação ao número de linhas de uma Tabela-verdade, cada proposição simples (atômica) tem dois valores **V** ou **F**, que se excluem. Para **n** proposições distintas, há tantas possibilidades quantos são os arranjos com repetição de **2 (V e F)** elementos n a n. Segue-se que o número de linhas da tabela verdade é igual a $\mathbf{2}^n$.

Assim, em relação ao número de variáveis (possibilidades), tem-se:

para 1 variável proposicional tem-se $\mathbf{2}^1 = 2$ *linhas*

para 2 variáveis proposicionais tem-se $\mathbf{2}^2 = 4$ *linhas*

para 3 variáveis proposicionais tem-se $\mathbf{2}^3 = 8$ *linhas*

$\vdots$

para n variáveis proposicionais tem-se $\mathbf{2}^n = n$ *linhas*

O exemplo a seguir, mostra um dimensionamento de tabela verdade com oito linhas.

Exemplo 2.11. ***Tabela Verdade para 3 Variáveis Proposicionais***

Tabela 7 – **Tabela verdade com 3 Variáveis**

p	q	r	$p \wedge q$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
F	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**V**	**V**	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Proposição: $((\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r})$
Variáveis: $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$
Nº de linhas: $2^3 = 8$ *linhas*

Uma observação importante a ser feita é em relação ao conectivo **"ou"** que pode ter dois sentidos na linguagem habitual: **inclusivo** (disjunção: $\vee$) *e* **exclusivo** ($\underline{\vee}$), *onde* $\mathbf{p} \underline{\vee} \mathbf{q}$ *significa* $((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \sim (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}))$.

No exemplo abaixo está representada a sua tabela verdade.

Exemplo 2.12. ***Tabela Verdade "Ou Exclusivo": p*** $\underline{V}$ ***q***

Tabela 8 – **Tabela Verdade "Ou Exclusivo"**

p	q	$p \vee q$	$(p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q)$	$((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**

Fonte: **própria autoria**

2.3 Álgebra dos Conjuntos e o Cálculo Proposicional

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [1].

O cálculo proposicional e a álgebra dos conjuntos possuem estruturas semelhantes. Toda fórmula (proposição) existente no cálculo proposicional determina uma operação correspondente com os conjuntos, ou seja;

- A **negação** ($\sim$) *corresponde* à **complementação** ($'$)
- A **conjunção** ($\wedge$) *corresponde* à **intersecção** ($\cap$)
- A **disjunção** ($\vee$) *corresponde* à **união** ($\cup$).

As variáveis proposicionais por sua vez, deverão ser colocadas em **maiúsculas**(por representarem agora conjuntos) e vão servir como variáveis que simbolizarão conjuntos em uma nova expressão. Dessa forma, por exemplo, uma expressão sentencial;

$((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \sim \mathbf{p})$ *será equivalente a* $((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \cap \mathbf{P'})$

Estas operações entre conjuntos podem ser expressadas através dos **DIAGRAMAS DE VENN** que são de utilidade nas verificações de propriedades de operações entre conjuntos. Em seguida, serão mostradas algumas tabelas verdade de proposições em analogia com os respectivos diagramas.

Diagrama da Complementação: **P'** que é correspondente à negação $\sim$ **p**

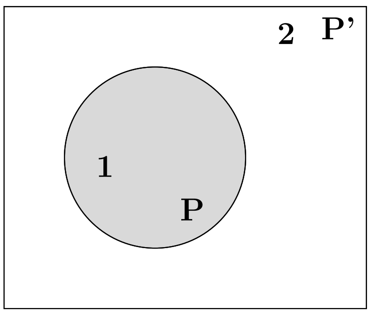


Tabela 9 – **Diagrama da Complementação**

Região no Diagrama	p	$\sim$ p
1	V	F
2	F	V

Fonte: **própria autoria**

As linhas **1** e **2** da tabela verdade correspondem respectivamente às regiões **1** e **2** do diagrama da Complementação.

Diagrama da União: $\mathbf{P \cup Q}$ *que* é *correspondente* à *disjunção* $\mathbf{p \vee q}$

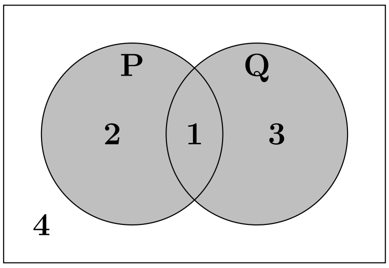


Tabela 10 – **Diagrama da União**

Região no Diagrama	p	q	p ∨ q
1	**V**	**V**	**V**
2	**V**	**F**	**V**
3	**F**	**V**	**V**
4	**F**	**F**	**F**

Fonte: **própria autoria**

As linhas **1, 2, 3 e 4** da tabela verdade correspondem respectivamente às regiões **1, 2, 3 e 4** do diagrama da União. A região destacada (hachurada) no diagrama corresponde às linhas da tabela onde a proposição $\mathbf{p \vee q}$ *assume valor* **V**.

Diagrama da Intersecção: $\mathbf{P \cap Q}$ *que* é *correspondente* à *conjunção* $\mathbf{p \wedge q}$

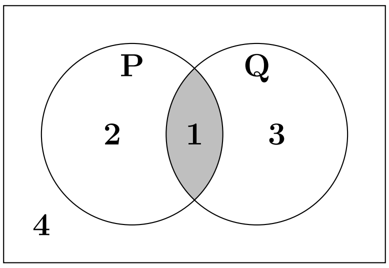


Tabela 11 – **Diagrama da Intersecção**

Região no Diagrama	p	q	p ∧ q
1	**V**	**V**	**V**
2	**V**	**F**	**F**
3	**F**	**V**	**F**
4	**F**	**F**	**F**

Fonte: **própria autoria**

Pode-se observar que a região **1** destacada no diagrama da Intersecção corresponde à linha **1** da tabela verdade, onde a proposição $\mathbf{p \wedge q}$ *assume valor* **V**.

2.4 Tautologias e Contra-Tautologias

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [1] e [22].

É chamada de **tautologia** a toda fórmula que é logicamente válida, ou seja, toda proposição que possui apenas o valor (**V**) em sua tabela verdade. Como exemplo de tautologia, tem-se: $\mathbf{p} \vee \sim \mathbf{p}$.

Exemplo 2.13. ***Taulologia*** $\boldsymbol{p} \vee \sim \boldsymbol{p}$

Tabela 12 – **Taulologia**

p	**$\sim$ p**	**p $\vee \sim$ p**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Contra-tautologia é definida a toda fórmula logicamente falsa, isto é, toda proposição que possui somente valor (**F**) em sua tabela verdade. A exemplo de contra-tautologia, tem-se: $\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{p}$.

Exemplo 2.14. ***Contra-tautologia*** $\boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{p}$

Tabela 13 – **Contra-tautologia**

p	**$\sim$ p**	**p $\wedge \sim$ p**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**

Fonte: **própria autoria**

Se a proposição não estiver representada como uma tautologia ou uma contra-tautologia, esta fórmula é chamada de **contingente** ou **indeterminada**. Neste caso, esta proposição apresenta em sua tabela verdade, tantos valores válidos (**V**) como valores falsos (**F**). Como exemplo de contingência, tem-se: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$

Exemplo 2.15. ***Contingência*** $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$

Tabela 14 – **Contingência**

p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
F	**F**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

As tautologias são infinitas e exercem um importante papel nos processos de dedução no Cálculo Proposicional. Estas podem também ser apresentadas em função de Regras de Inferências. No capítulo seguinte serão mostradas estas regras e suas utilidades na determinação da validade dos argumentos lógicos.

3 O Método Dedutivo

Foi visto que os argumentos lógicos constituem um conjunto de enunciados dos quais um é a conclusão e os demais são as premissas. Também abordou-se a existência de vários tipos de argumentos na lógica matemática, porém estes estão tradicionalmente divididos em dedutivos e indutivos.

Os argumentos dedutivos são válidos quando suas premissas, se verdadeiras, implicarem com que a conclusão também seja verdadeira. Nos argumentos indutivos, a verdade das premissas não basta para assegurar a verdade da conclusão, por esse motivo estes não serão abordados. Segundo [5].

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas. **PCN's: Matemática** (Brasil; 1997, p. 25)

O conhecimento destes argumentos dedutivos, de suas validades, é necessário para o estudo das disciplinas lógico-matemáticas, normalmente denominadas de ciências formais. Entretanto certas ciências não formais (ciências fatuais) também tem apresentado características de sistemas dedutivos. Este capítulo apresenta um estudo sobre o método dedutivo, introduzindo o seu efeito na lógica booleana matemática ou álgebra booleana.

3.1 Definição e Caracterização

Os resultados apontados nessa seção seguem de acordo com [11], [1] e [7].

O método dedutivo é um tipo de estrutura de raciocínio lógico que tem como função mostrar que a conclusão de um argumento é necessariamente consequência lógica das suas premissas. Seu principal objetivo vem ser a investigação da validade dos argumentos (argumentos dedutivos) a partir de demonstrações que envolvem lógica matemática.

Pode-se representar as investigações destes argumentos de modo formal. Para isso, chama-se ou caracteriza-se de argumento uma sequência
$A_1, A_2, A_3, ..., A_n,\ B\ (n \geq 0)$ *de fórmulas onde os* $A_i\ (0 \leq i \leq n)$ *chamam−se* ***premissas*** *e a última fórmula* B, *denomina − se de* ***conclusão***.

Um argumento $A_1, A_2, A_3, ..., A_n,\ B$ é *valido se e somente se, sendo as premissas verdadeiras a conclusão* B *também é verdadeira, ou ainda, se e só se, a fórmula*;

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$ é *uma* ***tautologia***, *onde lê − se que*
"$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge ... \wedge A_n$ implicam B" ou então que
"B decorre de $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge ... \wedge A_n$".

A seguir, serão mostradas demonstrações para validação dos argumentos dedutivos.

3.2 Validade de um argumento utilizando Tabela Verdade

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [7], [1] e [11].

Para saber se um argumento lógico dedutivo tem uma fórmula válida ou não, são simbolizados as premissas e a conclusão, e, em seguida testa-se o condicional correspondente ao argumento. O exemplo a seguir vem esclarecer essa validação.

Exemplo 3.1. ***Validação de argumento utilizando Tabela Verdade***

Se o salário for pago, então Nina pagará a sua conta.
Nina não pagou a conta. Portanto, o salário não foi pago.

Simbolizando o argumento, tem-se que:

$$((\boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{C}) \wedge \sim \boldsymbol{C}) \rightarrow \sim \boldsymbol{S} \quad (\textbf{\textit{tautologia}})$$

onde: ***S**: salário a ser recebido por Nina,*
***C**: conta a ser paga*

Essa ***tautologia*** *representa então o condicional equivalente ao argumento apresentado. Desta forma, a tabela de valores desta fórmula de acordo com as tabelas de proposições apresentadas é a seguinte:*

Tabela 15 – **Validação de argumento**

S	C	S → C	∼ C	(S → C) ∧ ∼ C	∼ S	((S → C) ∧ ∼ C) → ∼ S)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	F	V

Fonte: **própria autoria**

A tabela verdade lista todas as combinações possíveis de valores de verdade para as proposições envolvidas no argumento lógico. Cada linha da tabela representa uma combinação de valores de verdade para as proposições, as colunas adicionais mostram os resultados da aplicação das operações lógicas das proposições e a última coluna mostra o resultado final.

De acordo com o resultado obtido, obteve-se **V** em todas as linhas da tabela verdade constatando a tautologia, portanto verifica-se que a demonstração da fórmula acima é válida consequentemente, o argumento também é válido. Qualquer outro tipo de argumento que tiver esta forma também será válido.

3.3 Regras de Inferência e Equivalências Tautológicas

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [1], [11], [16] e [22].

Os argumentos baseados em tautologias representam métodos científicos universalmente corretos. A sua validade depende somente das proposições e dos valores verdade que a tabela possui. Estes argumentos podem ser estabelecidos por regras que inferem uma conclusão a partir de proposições, tais regras são denominadas de regras de inferência. As regras de inferência permitem relacionar através de demonstrações, tautologias e hipóteses.

Este teste de dedução consiste num conjunto de enunciados acompanhados dos números de hipóteses, ordenados em linhas numeradas, onde cada linha é obtida através da aplicação de uma regra de inferência ou regra de equivalência que a justifica. As hipóteses de uma linha indicam as premissas das quais o enunciado deduzido é consequência.

A seguir são apresentadas as regras de inferência e de equivalência utilizadas para validações dedutivas.

- **Regras de Inferência**

Introdução de Premissas (d.v) : Qualquer matriz pode ser introduzida numa linha com o número **Premissa** ou **Hipótese** idêntico ao número de linha. Se a matriz introduzida for um **Teorema**, então, o número de Hipótese será conjunto vazio. Esta regra é abreviadamente designada por **d.v.**(dado como verdadeiro); quando Teorema, por **TH**.

Exemplo 3.2. ***Introdução de Premissas***

Hipótese	***Nº linha***	***Matriz***	***Regra***
$\{1\}$	*(1)*	$\sim B$	***d.v.***
$\{2\}$	*(2)*	$A \vee B$	***d.v.***
	(3)	$A \rightarrow B$	***TH***

Modus Ponens (MP) : Se existir um condicional e por outro lado, o antecedente deste condicional aparece numa outra linha, pode-se concluir o seu consequente.

Exemplo 3.3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

Hipótese	*Nº linha*	*Matriz*	*Regra*
$\{1\}$	(1)	A	d.v.
$\{1\}$	(2)	$A \to B$	d.v.
$\{1,2\}$	(3)	B	1,2/MP

Modus Tolens (MT) : Se existir um condicional em uma linha e a negação do seu consequente aparece em uma outra linha, pode-se concluir a negação do seu antecedente.

Exemplo 3.4. $(A \to B) \wedge \sim B \Rightarrow \sim A$

Hipótese	*Nº linha*	*Matriz*	*Regra*
$\{1\}$	(1)	$\sim B$	d.v.
$\{2\}$	(2)	$A \to B$	d.v.
$\{1,2\}$	(3)	$\sim A$	1,2/MT

Silogismo Hipotético (SH) : Dadas duas matrizes condicionais, onde o consequente de uma é idêntico ao antecedente da outra, pode-se concluir um condicional em que o antecedente (diferente) de uma implica o consequente (diferente) de outra. Pode-se entender o silogismo hipotético como uma relação de transitividade entre três elementos condicionais, ou seja, se o primeiro implica o segundo e o segundo implica o terceiro então o primeiro elemento implica o terceiro. Abaixo seguem-se dois exemplos e suas representações matriciais.

Exemplo 3.5. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

Hipótese	*Nº linha*	*Matriz*	*Regra*
$\{1\}$	(1)	$A \to B$	d.v.
$\{2\}$	(2)	$B \to C$	d.v.
$\{1,2\}$	(3)	$A \to C$	1,2/SH

Exemplo 3.6. $(A \to \sim B) \wedge (C \to A) \Rightarrow (C \to \sim B)$

Hipótese	*Nº linha*	*Matriz*	*Regra*
$\{1\}$	(1)	$A \to \sim B$	d.v.
$\{2\}$	(2)	$C \to A$	d.v.
$\{1,2\}$	(3)	$C \to \sim B$	1,2/SH

Silogismo Disjuntivo (SD) : Se existir uma matriz disjuntiva em uma linha e a negação de um de seus elementos em outra linha, pode-se concluir o outro elemento.

Exemplo 3.7. $(A \vee B) \wedge \sim A \Rightarrow B$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$A \vee B$	d.v.
{2}	(2)	$\sim A$	d.v.
{1,2}	(3)	B	1,2/SD

Exemplo 3.8. $(A \vee B) \wedge \sim B \Rightarrow A$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$A \vee B$	d.v.
{2}	(2)	$\sim B$	d.v.
{1,2}	(3)	A	1,2/SD

Simplificação (SM) : A uma dada matriz com o símbolo da conjunção, esta pode ser simplificada por outra matriz formada por um de seus elementos.

Exemplo 3.9. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ *ou* $(A \wedge B) \Rightarrow B$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$A \wedge B$	d.v.
{1}	(2)	A	1/SM

Adição (AD) : A uma dada matriz qualquer, outra pode ser acrescentada com o símbolo da disjunção.

Exemplo 3.10. $A \Rightarrow (A \vee B)$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	A	d.v.
{1}	(2)	$A \vee B$	1/AD

Eliminação (EL) : Dada uma matriz condicional, tal qual o seu consequente possa formar uma outra inferência com essa matriz dada em outra linha, pode-se obter por eliminação uma nova condicional.

Exemplo 3.11. $(A \to (B \lor C)) \land \sim B \Rightarrow A \to C$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$(A \to (B \lor C))$	d.v.
{2}	(2)	$\sim B$	d.v.
{1,2}	(3)	$A \to C$	1,2/EL

Regra da Conjunção (Conj) : Dadas duas ou mais matrizes, pode-se concluir a sua conjunção.

Exemplo 3.12. $(A \to B) \mid (C \lor D) \Rightarrow (A \to B) \land (C \lor D)$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$(A \to B)$	d.v.
{2}	(2)	$(C \lor D)$	d.v.
{1,2}	(3)	$(A \to B) \land (C \lor D)$	1,2/Conj

Regra da Separação (Sep) : Dadas duas matrizes unidas por conjunção, pode-se concluir qualquer uma delas.

Exemplo 3.13. $(A \land B) \Rightarrow A \mid (A \land B) \Rightarrow B$

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$(A \land B)$	d.v.
{1}	(2)	A	1/Sep
{1}	(3)	B	1/Sep

Regra da Condicionalização (C) : Dada qualquer matriz, pode-se concluir um condicional em que esta matriz seja o consequente; o antecedente será qualquer outra matriz ou conjunção de matrizes.

Exemplo 3.14. ***Condicionalização entre a matriz A e outra qualquer M***

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	A	d.v.
{1}	(2)	$M \to A$	1/C

Exemplo 3.15. ***Condicionalização entre a matriz A e uma matriz dada B***

Hipótese	***Nº linha***	***Matriz***	***Regra***
{1}	(1)	A	d.v.
{2}	(2)	B	d.v.
{1,2}	(3)	$B \to A$	1,2/C

Exemplo 3.16. ***Condicionalização da matriz A e uma conjunção de matrizes***

Hipótese	***Nº linha***	***Matriz***	***Regra***
{1}	(1)	$A \to B$	d.v.
{2}	(2)	A	d.v.
{1,2}	(3)	B	1,2/MP
{1,2,3}	(4)	$((A \to B) \wedge A) \to B$	1,2,3/C

Prova por Casos (CS) : Dadas duas matrizes condicionais, onde os seus consequentes são iguais, pode-se concluir uma matriz em que a disjunção dos antecedentes (das duas matrizes) impliquem nesse consequente. Segue abaixo exemplo da prova por casos.

Exemplo 3.17. $(A \to B) \wedge (C \to B) \Rightarrow (A \vee C) \to B$

Hipótese	***Nº linha***	***Matriz***	***Regra***
{1}	(1)	$A \to B$	d.v.
{2}	(2)	$C \to B$	d.v.
{1,2}	(3)	$(A \vee C) \to B$	1,2/CS

- ## Regras de Equivalência

Duas proposições são equivalentes ou logicamente equivalentes, quando seus resultados coincidem para os mesmos resultados. Dessa forma, se uma matriz de proposições é equivalente ou correspondente a outra matriz, pode-se concluir em uma nova linha, que a matriz será equivalente a esta.

As regras de equivalência são um conjunto de leis lógicas que descrevem como as proposições podem ser manipuladas de forma equivalente, ou seja, como você pode transformar uma proposição lógica em outra que tem exatamente o mesmo valor de verdade. Elas são utilizadas para simplificar expressões lógicas e para provar a equivalência lógica entre diferentes proposições. Dizer que duas fórmulas são equivalentes por definição corresponde a afirmar que estas possuem os mesmos valores na tabela verdade.

A seguir, apresentam-se as regras de equivalência.

(DIM) Definição de Implicação Material

" $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$" é *equivalente por definição a* " $\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$".

" $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$" é *equivalente por definição a* " $\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$".

" $\sim (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$" é *equivalente por definição a* "$\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}$".

" $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$" é *equivalente por definição a* " $\sim (\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B})$".

(DEM) Definição de Equivalência Material

" $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$" é *equivalente por definição a* "$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$".

" $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$" é *equivalente por definição a* "$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\sim \mathbf{B} \wedge \sim \mathbf{A})$".

(DM) Leis de Morgan

$\sim (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$

$\sim (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B})$

$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Leftrightarrow \sim (\sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B})$

$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Leftrightarrow \sim (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B})$

(DN) Dupla Negação

$\sim\sim \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$

(COM) Leis da Comutação

$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})$

$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$

$(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{A})$

(ASS) Leis da Associação

$(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \Leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C})$

$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \Leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C})$

$(\mathbf{A} \leftrightarrow (\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C})) \Leftrightarrow ((\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow \mathbf{C})$

(DIST) Leis da Distribuição

$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \Leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$

$(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \Leftrightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$

(CONT) Princípio da Contraposição

$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\sim \mathbf{B} \rightarrow \sim \mathbf{A})$

$(\mathbf{A} \leftrightarrow \sim \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{B} \leftrightarrow \sim \mathbf{A})$

(ID) Lei da Identidade

Uma proposição **AND** com **verdadeiro** é equivalente à própria proposição.

$\mathbf{A} \wedge$ "**V**" $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$

Uma proposição **OR** com **falso** é equivalente à própria proposição.

$\mathbf{A} \vee$ "**F**" $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$

(DOM) Lei da Dominação

Uma proposição **AND** com **falso** é sempre falsa.

$\mathbf{A} \wedge$ "**F**" $\Leftrightarrow$ "**F**"

Uma proposição **OR** com **verdadeiro** é sempre verdadeira.

$\mathbf{A} \vee$ "**V**" $\Leftrightarrow$ "**V**".

(IDEM) Lei da Idempotência

Uma proposição **AND** com ela mesma é equivalente à própria proposição.

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}$

Uma proposição **OR** com ela mesma é equivalente à própria proposição.

$\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}$

(COMP) Lei da Complementação

Uma proposição **AND** com a sua negação é sempre falsa.

$\mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{A} \Leftrightarrow$ "**F**"

Uma proposição **OR** com a sua negação é sempre verdadeira.

$\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A} \Leftrightarrow$ "**V**".

- <u>**Validação de um argumento utilizando Inferências e Equivalências**</u>

Assim como um argumento pode ser provado através da construção de sua tabela verdade, o mesmo pode também ser demonstrado com o uso de regras de inferências e/ou regras de equivalências. A seguir é apresentado um exemplo que vem elucidar estas regras. Trata-se de um argumento válido, onde com o uso destas regras é possível provar que a conclusão é realmente consequência lógica das premissas.

Exemplo 3.18. *Validação de argumento com uso de Inferências e Equivalências*

1) ***Bento estava na sala de aula (S) ou foi de ônibus para casa (C); apesar disso Bento ou estava na sala de aula ou perdeu o ônibus (O)****.*

2) ***Se Bento estava na sala de aula, então Mel foi visitá-lo (V)****.*

3) ***Se Mel foi visitá-lo, então ele ganhou um lanche (L)****.*

4) ***Se Bento foi para casa e perdeu o ônibus, então, se ele ficou alegre (A), ele ganhou um lanche****.*

5) ***Ele não ganhou um lanche***

Logo Bento não ficou alegre*.*

Formalizando esse argumento, tem-se:

1) $(S \vee C) \wedge (S \vee O)$
2) $S \to V$
3) $V \to L$
4) $(C \wedge O) \to (A \to L)$
5) $\sim L$

$\sim A$

Demonstra-se a validade desse argumento através das regras de inferência e equivalência utilizadas no método dedutivo. Assim, trazendo esse argumento para matriz de proposições, tem-se:

Hipótese	Nº linha	Matriz	Regra
{1}	(1)	$(S \vee C) \wedge (S \vee O)$	d.v.
{2}	(2)	$S \to V$	d.v
{3}	(3)	$V \to L$	d.v
{4}	(4)	$(C \wedge O) \to (A \to L)$	d.v.
{5}	(5)	$\sim L$	d.v.
{2,3}	(6)	$S \to L$	2,3/SH
{2,3}	(7)	$\sim L \to \sim S$	6/CONT
{2,3,5}	(8)	$\sim S$	5,7/MP
{1}	(9)	$S \vee (C \wedge O)$	1/DIST
{1}	(10)	$\sim S \to (C \wedge O)$	9/DIM
{1,2,3,5}	(11)	$(C \wedge O)$	8,10/MP
{1,2,3,4,5}	(12)	$A \to L$	4,11/MP
{1,2,3,4,5}	(13)	$\sim L \to \sim A$	12/DIM
{1,2,3,4,5}	(14)	$\sim A$	13/MP

A validação destes argumentos tem grande importância na lógica booleana, pois a determinação dos argumentos ou obtenção da conclusão na lógica binária é fundamentada no processo lógico dedutivo. Os capítulos seguintes deste trabalho destinam-se a mostrar a definição da lógica booleana matemática ou álgebra booleana, seus teoremas, propriedades, funções e aplicações.

4 A Lógica Booleana Matemática

A lógica booleana é um ramo da lógica matemática que lida com valores de verdade, onde as variáveis são verdadeiras (representadas por 1 ou "verdadeiro") ou falsas (representadas por 0 ou "falso"). Ela é fundamentada na lógica clássica proposicional e na teoria dos conjuntos. A lógica booleana é essencial para a computação moderna e atualmente é a base sobre a qual muitos sistemas tecnológicos utilizados são construídos. Foi desenvolvida pelo matemático e filósofo George Boole no século XIX e tem sido uma parte essencial no processo de informações, tomadas de decisões e execução de tarefas computacionais de forma eficiente e precisa. Segundo [1];

> "Uma das características da investigação científica é procurar por padrões ou semelhanças entre fenômenos observados. O **Cálculo Proposicional** e a **Teoria dos Conjuntos** possuem algumas propriedades em comum, ou seja, são estruturas matemáticas que, juntamente com operações ou relações entre seus objetos obedecem certas regras. Pode-se comparar uma estrutura matemática a um esqueleto humano pois, apesar das aparências externas das pessoas serem diferentes, a forma e a disposição dos ossos são as mesmas." (ABAR, 2004,p.22)

Antes da abordagem sobre a utilização dessa lógica na educação básica e mostrar que esta pode ser ensinada de forma interativa e envolvente para alunos de todas as idades, este capítulo apresenta o conceito da álgebra booleana, suas funcionalidades e demonstrações.

4.1 Definição

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [1], [6] e [17].

Definição 5. Entende-se por Lógica booleana matemática um conjunto $\mathbf{B}$ juntamente com duas operações binárias $(+ \text{ e } \bullet)$ em $\mathbf{B}$, uma operação singular $(^{-})$ em $\mathbf{B}$ e dois elementos distintos ($\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$) de $\mathbf{B}$, tais que valem as seguintes propriedades para todo $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r} \in \mathrm{B}$.

Tabela 16 – **Propriedades da Lógica Booleana**

Propriedade	**Adição Booleana**	**Produto Booleano**
Comutatividade	$\mathbf{p + q = q + p}$	$\mathbf{p \bullet q = q \bullet p}$
Associatividade	$\mathbf{(p + q) + r = p + (q + r)}$	$\mathbf{(p \bullet q) \bullet r = p \bullet (q \bullet r)}$
Distributividade	$\mathbf{p + (q \bullet r) = (p + q) \bullet (p + r)}$	$\mathbf{p \bullet (q + r) = (p \bullet q) + (p \bullet r)}$
Idempotencia	$\mathbf{p + p = p}$	$\mathbf{p \bullet p = p}$
Absorção	$\mathbf{(p \bullet q) + p = p}$	$\mathbf{(p + q) \bullet p = p}$
Propriedade do 0	$\mathbf{p + 0 = p}$	$\mathbf{p \bullet 0 = 0}$
Propriedade do 1	$\mathbf{p + 1 = 1}$	$\mathbf{p \bullet 1 = p}$
Negação	$\mathbf{p} + \overline{p} = \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \bullet \overline{p} = \mathbf{0}$

Fonte: **própria autoria**

Cada uma dessas propriedades pode ser provada através do uso de tabelas verdade. Representa-se então a álgebra booleana por $[\,\mathbf{B}, +\,,\,\bullet\,,^{-}\,,\;\mathbf{0}\;,\;\mathbf{1}]$. A operação $\mathbf{p \bullet q}$ pode ser representada simplesmente por **pq** eliminando o operador $\bullet$.

Na lógica booleana, a seguinte terminologia é adotada:

$\mathbf{p \bullet q}$: encontro de **p** e **q**

$\mathbf{p + q}$: junção de **p** e **q**

p' ou $\overline{p}$: *complemento de* **p**

0 : elemento zero

1 : elemento um

A exemplo da definição da lógica booleana temos o conjunto $\{0,1\}$ *munido das seguintes operações, mostrado abaixo* :

Exemplo 4.1. ***Lógica booleana básica***

Tabela 17 – **Representação lógica booleana**

p	**q**	**p + q**	**p . q**
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

p	$\overline{\mathbf{p}}$
0	**1**
1	**0**

Fonte: **própria autoria**

Uma expressão lógica booleana, uma fórmula proposicional e uma expressão na álgebra dos conjuntos, são correspondentes se substituímos $(\;^{-}\;,\; +,\; \bullet,\; =,\; \mathbf{0},\; \mathbf{1})$

respectivamente por ($\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, **F**, **V**) *ou ainda por* (', $\cup$, $\cap$, $=$, $\emptyset$, **U**).
O exemplo abaixo mostra a compatibilidade entre essas estruturas :

Exemplo 4.2. ***Compatibilidade entre Estruturas Lógicas***

$\overline{(\overline{p} + (\boldsymbol{q}\boldsymbol{.}\boldsymbol{r}))}$ (*expressão booleana*) *correspondente a*;

$\sim (\sim \boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}))$ (*fórmula proposicional*)

$(\boldsymbol{P}' \cup (\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{R}))'$ (*álgebra dos conjuntos*)

Para formalizar as semelhanças entre o Cálculo Proposicional e a Álgebra de Boole, nota-se que o conjunto das proposições é uma lógica booleana em relação à conjunção **(e)**, à disjunção **(ou)** e à negação **(não)**.

4.2 Expressões e Variáveis Booleanas

Os resultados apontados nessa seção seguem de acordo com [6] e [17].

As variáveis booleanas são representadas através de letras e podem assumir apenas dois valores **0** e **1**. O exemplo a seguir mostra uma variável booleana:

Exemplo 4.3. ***Variável booleana***

A = *"Anastácia tem 4 anos"*

A proposição **"Anastácia tem 4 anos"** é representada pelo símbolo **A**, que é uma variável booleana, pois pode assumir dois valores lógicos: **F** (representado por **0**) ou **V** (representado por **1**). Além de **variável booleana**, **A** é também denominada de **variável lógica** ou **variável binária** (denominação designada às possibilidades lógicas que podem ser representadas).

Expressão booleana é uma expressão matemática cujas variáveis são booleanas, ou seja, seu resultado assumirá apenas dois valores; **0** ou **1**. Abaixo, segue um exemplo de expressão booleana:

Exemplo 4.4. ***Expressão booleana***

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$, *tanto **A** como **B** como **S** podem assumir os valores **0** ou **1**.*

4.3 Funções de Variáveis Lógicas Booleanas

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [6] e [17].

Uma função de variáveis lógicas booleanas ou simplesmente função booleana é definida por $\boldsymbol{Bool} = \{0, 1\}$.

Uma função booleana n-ária (que possui n argumentos) é uma função de ***Bool***^{n} *em* ***Bool***.

As funções booleanas são representadas por mapas que mostram suas respectivas associações. Esses mapas, nada mais são do que tabelas verdade, onde colocam-se todas as possíveis situações com seus resultados. Nessas tabelas, encontram-se os modos como a função se comporta perante todas as situações possíveis.

As tabelas verdade definem funções booleanas e, portanto, para cada expressão lógica pode-se associar uma função booleana. Dessa forma, dada uma variável lógica **A**, é possível construir uma função desta variável, $\mathbf{f(A)}$. Tomando-se como exemplo uma função $\mathbf{f(A)} = \overline{A}$, *ou seja, uma função da variável lógica* **A** *representando a sua negação. Sua tabela verdade* é *dada por* :

Exemplo 4.5. ***Função booleana*** $\overline{A}$

Tabela 18 – **Função** $\overline{A}$

A	$\mathbf{f(A)} = \overline{A}$
0	**1**
1	**0**

Fonte: **própria autoria**

Quando tem-se apenas uma variável, é possível construir apenas 4 funções, onde a primeira é a própria negação; a segunda é a função identidade; as duas últimas não tem uma denominação especial.

Exemplo 4.6. ***Funções booleanas para uma variável***

Tabela 19 – **Funções para uma variável**

A	$\mathrm{f}_1(A)$	$\mathrm{f}_2(A)$	$\mathrm{f}_3(A)$	$\mathrm{f}_4(A)$
0	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**

Fonte: **própria autoria**

Para duas ou mais variáveis, o número possível de funções que podem ser construídas é de $\mathbf{2}^{2n}$, *onde n* é *o número de variáveis.*

No caso de duas variáveis, tem-se $\mathbf{2}^{2 \cdot 2} = 2^4 = \mathbf{16}$.

Para três variáveis, tem-se $\mathbf{2}^{2 \cdot 3} = 2^6 = \mathbf{64}$ *e assim sucessivamente. O exemplo abaixo* é *uma representação para* 2 *variáveis.*

Exemplo 4.7. ***Funções booleanas para duas variáveis***

Tabela 20 – **Funções para duas variáveis**

A	**B**	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Fonte: **própria autoria**

Conforme essa tabela, **A** e **B** são as variáveis independentes e $\mathbf{f}_i(A, B)$ *são as variáveis dependentes, denominadas por* **funções de variáveis lógicas**, *funções combinatoriais ou ainda, funções combinacionais. Mais a seguir, serão apresentados os tipos de funções booleanas mais utilizadas nas aplicações do cotidiano.*

4.4 Postulados

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [6] e [17].

Definição 6. *Os postulados são afirmações ou proposições básicas que são aceitas como verdadeiras sem a necessidade de prova dentro de um determinado sistema ou teoria.*

Eles servem como pontos de partida fundamentais a partir dos quais outros resultados ou teoremas podem ser derivados. Os postulados são essenciais para a construção de teorias matemáticas e sistemas lógicos.

Os postulados são considerados verdades autoevidentes ou axiomas dentro do contexto específico de uma teoria ou sistema. Eles não são demonstrados a partir de outros princípios; ao contrário, eles são assumidos como verdadeiros para construir um sistema lógico ou matemático coerente. Os postulados booleanos, essencialmente estão mostrados a seguir.

- **Postulado da Complementação**

Este postulado mostra como são as regras de complementação. Chamando-se de $\overline{A}$ *o complemento de* **A**, *temos que*;

1) Se A $= 0 \;\Rightarrow\; \overline{A} = 1$

2) Se A $= 1 \;\Rightarrow\; \overline{A} = 0$

Tem-se também uma outra notação para o complemento $\overline{A} = A'$.

Através do postulado da complementação, é estabelecida a seguinte identidade:

$\overline{\overline{A}} = A. \ Dessa \ forma;$

- Se A = 1, tem-se: $\overline{A} = 0 \quad e \quad se \quad \overline{A} = 0 \ \Rightarrow \ (\overline{\overline{A}}) = 1$

- Se A = 0, tem-se: $\overline{A} = 1 \quad e \quad se \quad \overline{A} = 1 \ \Rightarrow \ (\overline{\overline{A}}) = 0$

- **Postulado da Adição**

Esse postulado apresenta como são as regras da adição dentro da Álgebra booleana.

1) $0 + 0 = 0$

2) $0 + 1 = 1$

3) $1 + 0 = 1$

4) $1 + 1 = 1$

Através deste postulado é possível estabelecer as seguintes identidades:

1) $\boxed{\mathbf{A + 0 = A}}$ Como A pode ser 0 ou 1, verificando-se as possibilidades tem-se que:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $0 + 0 = 0$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $1 + 0 = 1$

2) $\boxed{\mathbf{A + 1 = 1}}$ Desta forma:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $0 + 1 = 1$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $1 + 1 = 1$

3) $\boxed{\mathbf{A + A = A}}$ (Idempotência na adição) . Dessa forma:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $0 + 0 = 0$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $1 + 1 = 1$

4) $\boxed{\mathbf{A +} \overline{A} = 1}$ Dessa forma:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $\overline{A} = 1 \ \Rightarrow \ 0 + 1 = 1$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $\overline{A} = 0 \ \Rightarrow \ 1 + 0 = 1$

- **Postulado da Multiplicação**

Este postulado determina como são as regras da multiplicação booleana.

1) $0 \cdot 0 = 0$

2) $0 \bullet 1 = 0$

3) $1 \bullet 0 = 0$

4) $1 \bullet 1 = 1$

Baseando-se nesse postulado é possível estabelecer as seguintes identidades:

1) $\boxed{\mathbf{A \bullet 0 = 0}}$ Toda variável multiplicada por zero será zero. Verificando-se suas possibilidades, tem-se que:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $0 \bullet 0 = 0$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $1 \bullet 0 = 0$

2) $\boxed{\mathbf{A \bullet 1 = A}}$ Desta forma, analizando-se as suas possibilidades, tem-se que:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $0 \bullet 1 = 0$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $1 \bullet 1 = 1$

3) $\boxed{\mathbf{A \bullet A = A}}$ (Idempotência na multiplicação). Desta forma:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $0 \bullet 0 = 0$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $1 \bullet 1 = 1$

4) $\boxed{\mathbf{A} \bullet \overline{A} = 0}$. Desta forma:

- Se A = 0 $\Rightarrow$ $\overline{A} = 1$ $\Rightarrow$ $0 \bullet 1 = 0$

- Se A = 1 $\Rightarrow$ $\overline{A} = 0$ $\Rightarrow$ $1 \bullet 0 = 0$

4.5 Tipos de Funções Booleanas

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [6] e [17].

As funções booleanas possuem apenas dois estados, ou seja, assumem somente duas situações distintas:

- O estado **0** (zero) ou nível lógico zero.

- o estado **1** (um) ou nível lógico um.

O estado **um** pode representar uma situação normal, enquanto que o estado **zero** representará uma situação contrária, ou seja, uma negação do estado um. Por exemplo, ao chamar um estado **um** de, por exemplo, **sim**, representa-se o estado **zero** como um

não e vice-versa. É exatamente dessa forma como devem ser tratadas as variáveis lógicas booleanas. A seguir, apresentam-se os tipos de funções lógicas de Boole.

- ## Função "NOT" ou "NÃO".

Essa função é também denominada de função complemento. Esta tem a seguinte característica; inverte o estado da variável lógica, ou seja, se a variável contiver **1**, a saída apresentará **0**, e se a variável tiver valor lógico **0**, a saída assumirá valor **1**. Em relação ao cálculo proposicional, essa função representa uma negação de variáveis lógicas.

Abaixo, estão representadas a tabela verdade e a notação desta função:

Tabela 21 – **Função NOT**

A	S
0	**1**
1	**0**

Fonte: **própria autoria**

$$\mathbf{S} = \overline{A}$$

Função NOT (lê-se: A barra)

- ## Função "OR" ou "OU".

Essa função tem as seguintes características; assumirá valor **1** quando uma ou mais variáveis de entrada forem iguais a **1**, e assume valor **0** se, e somente se, todas as variáveis de entrada forem iguais a **0**. Comparando-se com o cálculo sentencial, esta função representa uma disjunção entre variáveis booleanas.

Abaixo, seguem a representação da tabela verdade e da notação dessa função:

Tabela 22 – **Função OR**

A	B	S
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

$$\mathbf{S = A + B}$$

Função OR (lê-se: A ou B)

- ## Função "AND" ou "E".

Essa função executa a multiplicação de duas ou mais variáveis binárias, logo assumirá valor **1** se e somente se, todas as variáveis forem iguais a **1**, e assumirá valor **0** quando pelo menos uma das variáveis for igual a **0** . Fazendo-se uma analogia com o cálculo proposicional, esta função representa uma conjunção entre variáveis lógicas.

Abaixo, encontra-se representada a notação e a tabela verdade da função E:

Tabela 23 – **Função AND**

A	B	S
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

S = A • B
Função AND (lê-se: A e B)

- ## Função "NOR", "NÃO OU" ou "NOU".

Esta função representa uma composição entre as funções **NOR** e **OR**; a sua saída é o inverso da função OR. A seguir é mostrado a notação desta função e também a sua tabela verdade:

Tabela 24 – **Função NOR**

A	B	S
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

Fonte: **própria autoria**

S $= \overline{A + B}$
Função NOR (lê-se: A não ou B)

- ## Função "NAND", "NÃO E" ou "NE".

Essa função representa uma junção da função **NOT** com a função **E**, ou seja, a sua saída é a função E invertida. A seguir estão ilustrados sua tabela verdade e a sua notação:

Tabela 25 – **Função NAND**

A	**B**	**S**
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Fonte: **própria autoria**

$$\mathbf{S} = \overline{A \bullet B}$$

Função NAND (lê-se: A não e B)

Basicamente, definem-se outras funções lógicas que se podem exprimir em termos das operações de conjunção, disjunção ou negação. Entre as mais importantes destas, destacam-se as funções **OU Exclusivo**, **Coincidência**, **Equivalência** e **Implicação**.

- ## Função "OU Exclusivo".

A função OU Exclusivo fornece **1** à saída quando as variáveis de entrada forem diferentes entre si. A sua tabela verdade e sua notação estão apresentadas abaixo:

Tabela 26 – **Função OU Exclusivo**

A	**B**	**S**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Fonte: **própria autoria**

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \overline{A}B + A\overline{B}$$

Função OU Exclusivo (lê-se: A Ou Exclusivo B)

- ## Função "Coincidência".

Para a função Coincidência, a situação é analogicamente contrária a função Ou Exclusivo, ou seja, a saída assumirá **1** quando as variáveis de entrada forem iguais, isto é, quando houver coincidência nos seus valores. A sua tabela verdade e sua notação estão apresentadas abaixo:

Tabela 27 – **Função Coincidência**

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: **própria autoria**

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \overline{A}\overline{B} + AB$$

Função Coincidência (lê-se: A Coincidência B)

As funções lógicas booleanas de **Equivalência** e **Implicação** possuem as seguintes designações correspondentes do cálculo proposicional:

Tabela 28 – **Correspondência cálculo proposicional e lógica booleana**

Designação	Operação sentencial	Expressão booleana correspondente
Implicação	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\overline{A} + B$
Equivalência	$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$	$(\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$

Fonte: **própria autoria**

Com base nestas funções é possível construir a tabela verdade de qualquer expressão lógica. Por exemplo, a tabela verdade da expressão lógica correspondente a operação sentencial **Equivalência** mostrada acima é representada da seguinte forma;

Exemplo 4.8. ***Construção da Tabela da Função Equivalência***

Tabela 29 – **Função Equivalência**

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \mathbf{B}$	$\mathbf{A} + \overline{B}$	$\mathbf{S} = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

Além dessas, existem várias outras funções combinacionais que são derivadas destas, em geral são expressões booleanas que podem ser simplificadas ou representadas adequadamente, mais a seguir serão apresentados estes processos de obtenção e simplificação das expressões booleanas.

4.6 Propriedades da Álgebra Booleana

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [6] e [17].

Para determinar validade das propriedades é necessário analisar todas as suas possibilidades, formalizar essas expressões em tabelas e verificar se para cada possibilidade, estas expressões são equivalentes. A seguir estão mostradas essas propriedades e algumas delas demonstradas através da construção de tabelas verdade.

- **Identidade Aditiva.**

  $\mathbf{A + 0 = A}$

  A soma (OU lógico) de uma variável com zero é igual à variável original.

- **Identidade Multiplicativa.**

  $\mathbf{A \bullet 1 = A}$

  O produto (E lógico) de uma variável com um é igual à variável original.

- **Comutatividade na Adição**

  $\mathbf{A + B = B + A}$

Tabela 30 – **Propriedade Comutativa na Adição**

A	B	A + B	B + A
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

- **Comutatividade na Multiplicação**

  $\mathbf{A \bullet B = B \bullet A}$

Tabela 31 – **Propriedade Comutativa na Multiplicação**

A	B	A • B	B • A
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

- **Associatividade na Adição**

A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C

Tabela 32 – **Propriedade Associativa na Adição**

A	B	C	B + C	A + B	A + (B + C)	(A + B) + C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

- **Associatividade na Multiplicação**

A • (B • C) = (A • B) • C = A • B • C

Tabela 33 – Propriedade Associativa na Multiplicação

A	B	C	B • C	A • B	A • (B • C)	(A • B) • C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

- **Leis de Absorção**

A + (A • B) = A

A • (A + B) = A

Essas leis indicam que uma variável combinada com a outra em uma operação específica pode ser "absorvida" pela primeira variável.

- **Leis do Complemento**

$\mathbf{A} + \overline{A} = 1$

$\mathbf{A} \bullet \overline{A} = 0$

A soma de uma variável com sua negação é sempre verdadeira **(1)**, enquanto o produto de uma variável com sua negação é sempre falso **(0)**.

- **Distributividade**

$\mathbf{A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)}$

$\mathbf{A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)}$

Tabela 34 – **Propriedade Distributiva**

A	B	C	B + C	AB	AC	A(B + C)	AB + AC
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

De acordo com a análise de cada uma das possibilidades, pode-se observar que as expressões nas duas últimas colunas possuem de fato os mesmos valores, o que mostra que são equivalentes. A tabela verdade é um excelente instrumento para validar funções lógicas matemáticas, em geral. Mas não é o único. Uma outra ferramenta importante para validação da lógica binária são as **equações booleanas**.

As equações ou expressões booleanas utilizam os conectivos lógicos incorporados do **Cálculo Proposicional**, são estes os símbolos **não** (negação), **e** (conjunção), **ou** (disjunção), **implicação** e **equivalência**.

George Boole, baseado em estudos na lógica clássica, reestabeleceu os princípios lógicos apresentados anteriormente e fundamentou a lógica booleana em dois destes, que são:

- **Princípio da não contradição:** "uma possibilidade não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa".

- **Princípio do terceiro excluído:** "uma possibilidade só pode tomar um dos dois valores, ou é verdadeira, ou é falsa, não sendo possível uma terceira hipótese".

Assim como na matemática clássica, com os valores e variáveis numéricas, é possível definir operações e funções numéricas, também na lógica booleana são definidas operações lógicas e estabelecidas funções (**equações**) booleanas. A seguir são apresentados os teoremas da Álgebra booleana, teoremas esses que juntamente com os postulados, identidades e as propriedades são determinantes nas demonstrações lógicas das expressões booleanas.

4.7 Teoremas da Álgebra Booleana

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [6] e [17].

Uma função combinacional pode ser escrita de várias formas, sem ser alterada, fazendo-se o uso dos Teoremas da Álgebra de Boole. Dentre esses teoremas destacam-se os chamados **teoremas de De Morgan** e as **Identidades booleanas**. A seguir apresentam-se estes teoremas.

- **Teoremas de De Morgan.**

Existem dois teoremas conhecidos como **Leis de De Morgan**[1] . São estes:

Teorema 4.9. 1ª Lei de De Morgan: O complemento do produto é igual à soma dos complementos.

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$$

Para provar esse teorema, monta-se a tabela verdade de cada membro e comparam-se os resultados.

Tabela 35 – **1ª Lei de De Morgan**

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Fonte: **própria autoria**

[1] ([15]) Augustus De Morgan (Madura, Índia, 27 de junho de 1806 — Londres, 18 de março de 1871) foi um matemático e lógico britânico. Formulou as leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustus$_{De_M}organ$ >

Teorema 4.10. 2ª Lei de De Morgan: O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \bullet \overline{\mathbf{B}}$$

Para provar esse teorema utiliza-se o primeiro. Dessa forma, tem-se que:

$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} \quad \rightarrow$ 1^o *teorema de De Morgan*

Pode-se representar essa igualdade da seguinte maneira, complementando ambos os membros da igualdade. Assim:

$\overline{\overline{\mathbf{AB}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{AB} = \overline{\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}}$

Como $\overline{\mathbf{A}}$ é *o complemento de* **A** *e* $\overline{\mathbf{B}}$ é *o complemento de* **B**. *Chamando* $\overline{\mathbf{A}}$ *de* **X** *e* $\overline{\mathbf{B}}$ *de* **Y** *temos então que* :

$$\overline{\mathbf{X}} \bullet \overline{\mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{X} + \mathbf{Y}}$$

- <u>**Identidades Booleanas.**</u>

Além das leis de De Morgan, existem também vários teoremas que são de fundamental importância na simplificação de expressões e nas aplicações da álgebra booleana de um modo geral. Esses teoremas são também conhecidos como identidades booleanas. As principais identidades da lógica booleana estão apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 36 – **Identidades Booleanas**

Ordem	Identidade
1	$\mathbf{A + 0 = A}$
2	$\mathbf{A + 1 = 1}$
3	$\mathbf{A + A = A}$
4	$\mathbf{A + \overline{A} = 1}$
5	$\mathbf{A \bullet 1 = A}$
6	$\mathbf{A \bullet 0 = 0}$
7	$\mathbf{A \bullet A = A}$
8	$\mathbf{A \bullet \overline{A} = 0}$
9	$\mathbf{A + AB = A}$
10	$\mathbf{A \bullet (A + B) = A}$
11	$\mathbf{AB + A\overline{B} = A}$
12	$\mathbf{(A + B) \bullet (A + \overline{B}) = A}$
13	$\mathbf{A + \overline{A}B = A + B}$
14	$\mathbf{A \bullet (\overline{A} + B) = AB}$
15	$\mathbf{A + BC = (A + B) \bullet (A + C)}$
16	$\mathbf{A \bullet (B + C) = AB + AC}$
17	$\mathbf{AB + \overline{A}C = (A + C) \bullet (\overline{A} + B)}$
18	$\mathbf{(A + B) \bullet (\overline{A} + C) = AC + \overline{A}B}$
19	$\mathbf{AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C}$
20	$\mathbf{(A + B)(\overline{A} + C)(B + C) = (A + B)(\overline{A} + C)}$

Fonte: **própria autoria**

Como qualquer prova de teorema, a cada passo em direção a prova, tem-se que mostrar o porquê desse passo. Pode-se provar qualquer teorema da Álgebra de Boole, baseando-se nas definições apresentadas e nas próprias identidades. Abaixo é mostrado um exemplo de demonstração dessas identidades, trata-se da prova do teorema(identidade) 10 (ilustrado na tabela anterior);

Exemplo 4.11. *Demonstração da Identidade booleana* $\boldsymbol{A \bullet (A + B) = A}$

$\boldsymbol{A \bullet (A + B)}$ $\rightarrow$ (*pelo teo.* 16 $-$ *propriedade distributiva*)

$\underbrace{\boldsymbol{A \bullet A}} \boldsymbol{+ A \bullet B}$ $\rightarrow$ (*pelo teo.* 17 $-$ *identidade booleana*)

$\boldsymbol{A + AB}$ $\rightarrow$ (*pelo teo.* 5)

$\boldsymbol{A \bullet 1 + A \bullet B}$ $\rightarrow$ (*pelo teo.* 16)

$\boldsymbol{A}\underbrace{\boldsymbol{(1 + B)}}$ $\rightarrow$ (*pelo teo.* 2)

$\underbrace{\boldsymbol{A \bullet 1}}$ $\rightarrow$ (*pelo teo.* 5)

$\boldsymbol{A}$

Logo, de fato; $\boldsymbol{A \bullet (A + B) = A}$

4.8 Obtenção de Expressões Booleanas a partir de tabelas verdade

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [1] e [6].

Até então mostrou-se como obter tabelas verdades a partir de expressões booleanas utilizando os postulados e suas funções. O propósito agora é mostrar como obter expressões lógicas, conhecendo-se apenas as tabelas verdade destas expressões. As tabelas verdade apresentam todas as situações possíveis de combinações das variáveis lógicas. Esse processo para determinar estas expressões é conhecido do cálculo sentencial como **Problema de POST**[2] e incorporado na álgebra lógica.

A seguir é apresentado um exemplo com duas variáveis que mostra a resolução de um Problema de Post, em seguida, esse mesmo exemplo formalizado será utilizado para a obtenção de uma expressão booleana.

Tabela 37 – **Exemplo de Post para 2 variáveis proposicionais**

A	**B**	**S**
F	**F**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

Fonte: **própria autoria**

Primeiramente deve-se obter a "**FND**"[3] que satisfaça essa tabela verdade. Para a obtenção desta FND, procede-se do seguinte modo:

1. Observa-se todas as linhas que possuem **V** na última coluna;
2. Constroe-se para cada uma dessas linhas as **conjunções** correspondentes (**FNC**[4]);
3. Efetua-se a **disjunção** dessas **conjunções** obtendo uma fórmula em **FND** que satisfaz a tabela verdade.

Para a tabela apresentada, tem-se então que;

Exemplo 4.12. ***O Problema de POST***

[2] ([20]) Emil Leon Post (nascido em 11 de fevereiro de 1897 em Augustów e morreu em 21 de abril de 1954 em Nova York) foi um matemático americano nascido no território da atual Polônia em uma família judia. Ele publicou em 1921 um estudo exaustivo dos clones de álgebras de dois elementos e ele é a fonte do problema de correspondência de Post. Disponível em <https://pt.frwiki.wiki/wiki/Emil$_{Post}$ >

[3] FND: Forma Normal Disjuntiva.

[4] FNC: Forma Normal Conjuntiva.

Tabela 38 – **Obtenção da Expressão Proposicional**

A	B	S	FND
F	**F**	**V**	$\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}$
F	**V**	**F**	
V	**F**	**F**	
V	**V**	**V**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$

Fonte: **própria autoria**

$\boxed{\mathbf{S} = (\sim \mathbf{A} \wedge \sim \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge\ \mathbf{B})}$ (fórmula proposicional obtida da tabela verdade)

No caso da expressão booleana, o raciocínio é o mesmo, porém devem-se alterar todos os conectivos proposicionais para conectivos lógicos, dessa forma, tem-se que;

Tabela 39 – **Exemplo de Post para 2 variáveis booleanas**

A	B	S
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

A saída apresentará conjunções lógicas das variáveis de entrada apenas onde tiver nível lógico **1**. Dessa forma, tem-se que:

Tabela 40 – **Obtenção da Expressão Booleana**

A	B	S	FND
0	**0**	**1**	$\overline{\mathbf{A}} \bullet \overline{\mathbf{B}}$
0	**1**	**0**	
1	**0**	**0**	
1	**1**	**1**	$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$

Fonte: **própria autoria**

A saída correspondente a essa tabela verdade será então dada por;

$$\boxed{\mathbf{S} = \overline{\mathbf{A}} \bullet \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}$$

4.9 Simplificação de Expressões Booleanas

Os resultados apontados nessa seção seguem conforme [6].

Utilizando os conceitos da lógica booleana apresentados é possível simplificar expressões booleanas. Para efetuar as simplificações de uma expressão booleana pode-se utilizar o processo algébrico que consiste em fatoração utilizando as identidades, propriedades e postulados da álgebra de Boole. Simplificar uma expressão booleana corresponde a obter uma identidade booleana onde um dos membros possui sua forma reduzida. Os exemplos a seguir mostram esse processo.

Exemplo 4.13. *: Obtenção da identidade* $\boldsymbol{\overline{A}\centerdot\overline{B} + \overline{A}\centerdot B = \overline{A}}$

$$S = \overline{A}\centerdot\overline{B} + \overline{A}\centerdot B \quad (\textit{expressão booleana com duas variáveis})$$

$$S = \overline{A}\centerdot(\overline{B} + B) \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade distributiva}$$

$$S = \overline{A}\centerdot\underbrace{(\overline{B} + B)} \quad \rightarrow \quad \textit{identidade } \overline{X} + X = 1$$

$$S = \overline{A}\centerdot 1 \quad \rightarrow \quad \textit{identidade } X\centerdot 1 = X$$

$$\boldsymbol{S = \overline{A}}$$

Portanto; $\boldsymbol{\overline{A}\centerdot\overline{B} + \overline{A}\centerdot B = \overline{A}}$

Exemplo 4.14. *: Obtenção da identidade* $\boldsymbol{ABC + A\bullet\overline{C} + A\bullet\overline{B} = A}$

$$S = ABC + A\centerdot\overline{C} + A\centerdot\overline{B} \quad (\textit{expressão booleana com três variáveis})$$

$$S = A\centerdot(BC + \overline{C} + \overline{B}) \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade distributiva}$$

$$S = A\centerdot[BC + (\overline{C} + \overline{B})] \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade associativa}$$

$$S = A\centerdot[BC + (\overline{B} + \overline{C})] \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade comutativa}$$

Utilizando o 1º teorema de De Morgan $(\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}),\ tem-se\ que:$

$$S = A\centerdot[BC + (\overline{BC})]$$

Chamando BC de, por exemplo, Z, tem-se BC = Z, consequentemente

$\overline{BC} = \overline{Z}, tem-se\ então;$

$$S = A\centerdot\underbrace{(Z + \overline{Z})} \quad \rightarrow \quad \textit{identidade } \overline{Z} + Z = 1$$

$$S = A\centerdot 1 \quad \rightarrow \quad \textit{identidade } Z\centerdot 1 = Z$$

$$\boldsymbol{S = A}$$

Logo; $\boldsymbol{ABC + A\bullet\overline{C} + A\bullet\overline{B} = A}$

5 Aplicações da Lógica Booleana no Ensino Básico

A álgebra de Boole ou lógica booleana é um tratamento matemático da lógica, fundindo a álgebra à lógica. Atualmente é a base de muitos desenvolvimentos lógicos, algébricos e geométricos. Este capítulo mostra, com algumas aplicações, como são utilizados os conceitos da lógica booleana na prática e relata a importância exercida no ensino básico. Para isso serão resolvidas algumas tarefas que podem ser realizadas por alunos do ensino básico com observação de resultados. De acordo com [19].

> Os alunos se deparam dia a dia com um conjunto de ações cognitivas que fazem parte do raciocinar, como por exemplo: reconhecer que algo está sendo questionado; relacionar uma informação com conhecimentos pré-existentes; elaborar uma conjectura; argumentar; generalizar; validar; refletir e interpretar, ou seja, uma reação do pensamento de natureza complexa. (Negreiros, 2015, p.29 apud Pilate, 2021, p.22)

Algumas tarefas que podem ser utilizadas nas salas de aulas do Ensino Médio, podem também ser utilizadas nas salas de aula do Ensino Técnico e Ensino Fundamental. Essa aplicação das tarefas pode ser realizada através de encontros ou aulas práticas com grupos de alunos do ensino básico durante as aulas de matemática. Durante esses encontros o professor apresentará as tarefas aos alunos e realizará a leitura e a explicação destas. Em seguida cada aluno deverá pensar e produzir suas respostas e seus significados, escrevendo em uma folha e apresentar sua interpretação ao final de cada tarefa.

Cada tarefa trará um conceito de lógica e o seu enunciado será composto por definições e exemplos de cada um desses conceitos. A cada leitura dessas definições, o professor questionará se os alunos entenderam e quando houver dúvidas os participantes deverão se pronunciar.

A orientação do professor ocorrerá em vários momentos, mas todas as vezes para esclarecer as dúvidas que os alunos participantes venham a ter durante a realização das tarefas, sendo que os esclarecimentos se darão da forma mais sucinta possível para não influenciar na forma de raciocínio dos alunos, bem como no desenvolvimento e conclusão de cada atividade.

No decorrer da aplicação das tarefas, sempre após os alunos apresentarem seus resultados, serão observados se os participantes falaram mais do que haviam escrito em algumas de suas respostas. Para analisar os resultados observa-se as anotações enviadas por cada participante.

Conforme mencionado anteriormente a lógica booleana é amplamente usada em circuitos eletrônicos e computação, mas a sua base de raciocínio é fundamentada na lógica clássica dedutiva, dessa forma atividades simples podem ser trabalhadas no ensino básico. A seguir serão apresentadas algumas tarefas e questões relacionando a lógica de boole com a lógica clássica de forma a obter conclusões a partir das informações apresentadas.

- ## Tarefa 1: Lógica de Circuitos.

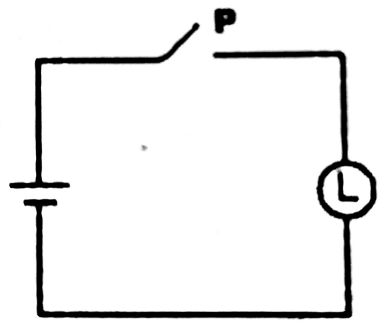
De um modo breve e simples, apresenta-se esse tipo de relacionamento entre o Cálculo proposicional e a Lógica booleana.

Um interruptor é um dispositivo ligado a um ponto de um circuito, que pode assumir um dos dois estados, "**fechado**" ou "**aberto**". No estado fechado (que indica-se por **1**) o interruptor permite que a corrente passe através do ponto, enquanto no estado aberto (que indica-se por **0**) nenhuma corrente pode passar pelo ponto.

Os exemplos a seguir mostram simples funcionamentos de circuitos constituídos por uma bateria, uma lâmpada e interruptores (chaves).

Exemplo 5.1. *Circuito com um interruptor **p***

Figura 3 – **Circuito Simples com 1 chave.**



Fonte: **ABAR (2004)**

A indicação "**fechado**" ou "**aberto**" do interruptor é interpretada com a indicação de $\mathbf{p = 1}$ ou $\mathbf{p = 0}$ respectivamente e a lâmpada **"L"** representa a saída **S**. No caso, se $p = 1$, indica que a chave está fechada e que a lâmpada acenderá e quando $p = 0$, indica que a chave está aberta e consequentemente a lâmpada ficará apagada.

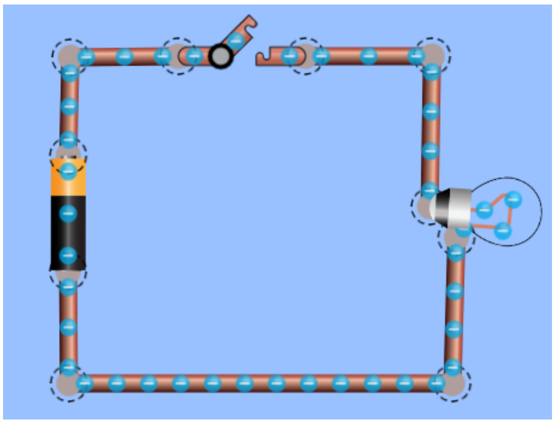
- **Questão 1:** Analisar o estado da saída quando $p = 0$ e quando $p = 1$.

Análise e resultado observado:

Para análise dessa tarefa, utilizaremos o site **<https://phet.colorado.edu/pt_BR/>** ([18]) que é um aplicativo que oferece aplicações diversas em ciências e matemática, através de observações práticas permitindo análise dos resultados de forma eficiente.

Dessa forma, de acordo com a figura 3, tem-se que quando a chave estiver aberta $\mathbf{p = 0}$, não haverá fluxo de corrente vindo da bateria para permitir o acendimento da lâmpada, indicando assim a saída $\mathbf{S = 0}$ **(lâmpada apagada)**.

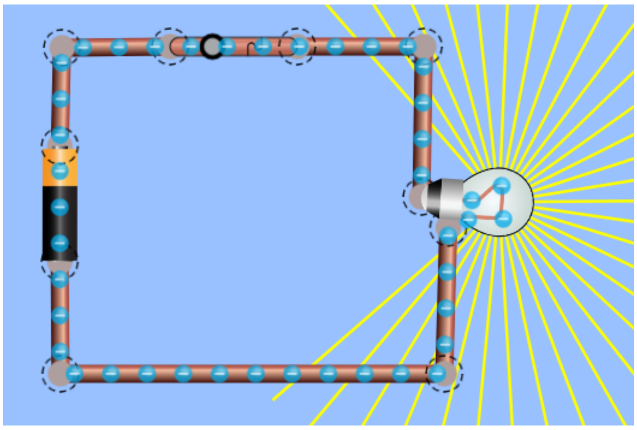
Figura 4 – **Simulação 1 - Circuito com chave aberta.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

Quando a chave estiver fechada **p = 1**, haverá um caminho fechado permitindo o fluxo de corrente vindo da bateria e consequentemente acionando o acendimento da lâmpada, indicando assim a saída **S = 1 (lâmpada acesa)**.

Figura 5 – **Simulação 2 - Circuito com chave fechada.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

Dessa forma, tem-se:

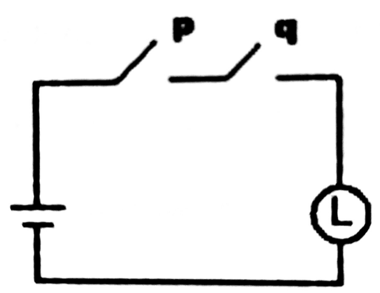
Tabela 41 – **Análise circuito simples com 1 chave**

p	S	Estado da Saída
0	0	lâmpada apagada
1	1	lâmpada acesa

Fonte: **própria autoria**

Exemplo 5.2. *Circuito com dois interruptores **p** e **q** em série*

Figura 6 – **Circuito em série com 2 chaves.**



Fonte: **ABAR (2004)**

Pelo fato do circuito ser em série com dois interruptores, é indicado por **p • q** ou **pq**. Neste caso passa corrente se e somente se $\mathbf{p = 1}$ e $\mathbf{q = 1}$, ou seja, estão ambos "**fechados**" o que corresponde no Cálculo proposicional à tabela verdade da conjunção
$\mathbf{p \wedge q}$.

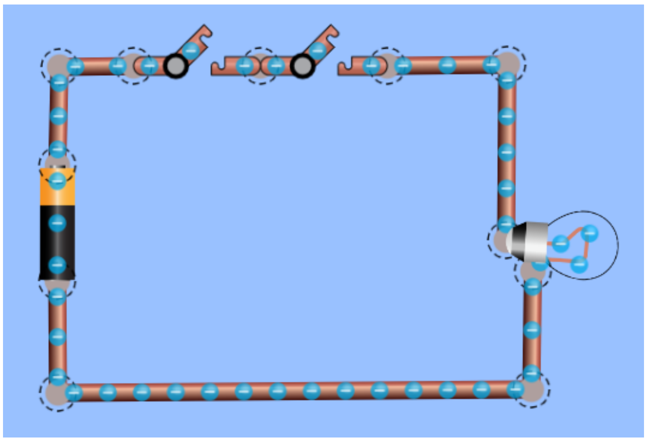
Portanto a saída **S**(lâmpada) estará apagada (S = 0), sempre que $\mathbf{p = 1}$ e $\mathbf{q = 0}$; ou $\mathbf{p = 0}$ e $\mathbf{q = 1}$; ou ainda $\mathbf{p = 0}$ e $\mathbf{q = 0}$. Por outro lado, a saída **S**(lâmpada) estará acesa (S = 1), sempre que $\mathbf{p = 1}$ e $\mathbf{q = 1}$.

- **Questão 2:** Analisar o estado da saída para todas as possíveis combinações das chaves **p E q**.

Análise e resultado observado:

De acordo com a figura 6, tem-se que:
- Quando as chaves p e q estiverem abertas $\mathbf{p = 0}$ e $\mathbf{q = 0}$, não haverá fluxo de corrente elétrica circulando, fazendo com que a saída $\mathbf{S = 0}$ **(lâmpada apagada)**.

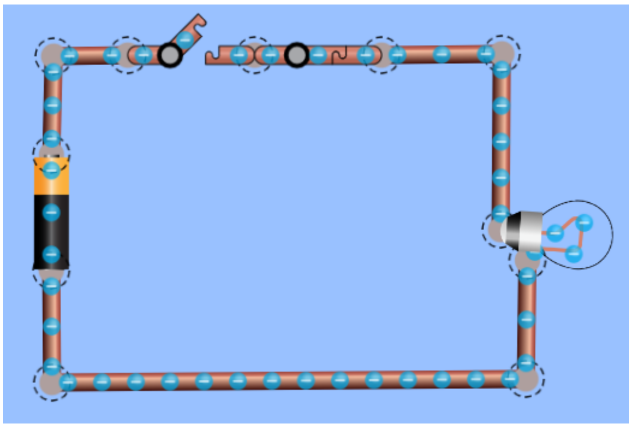
Figura 7 – **Simulação 3 - Circuito em série com chave p e q abertas.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

- Quando a chave p estiver aberta **p = 0** e a chave q estiver fechada **q = 1**, não haverá circulação de corrente e a saída indicará **S = 0 (lâmpada apagada)**.

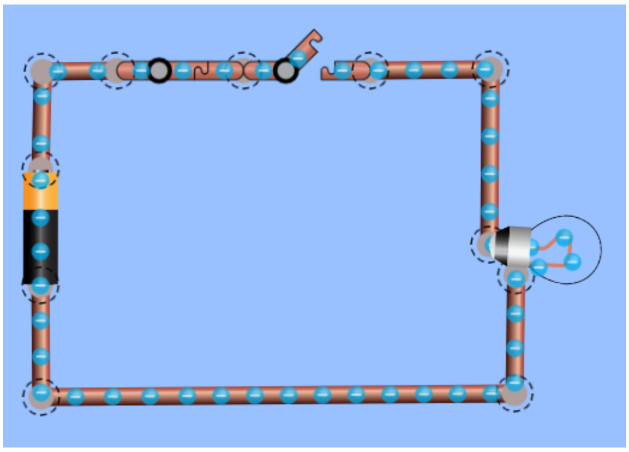
Figura 8 – **Simulação 4 - Circuito em série com chave p aberta e q fechada.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

- Quando a chave p estiver fechada **p = 1** e a chave q estiver aberta **q = 0**, novamente não haverá circulação de corrente e daí a saída indicará **S = 0 (lâmpada apagada)**.

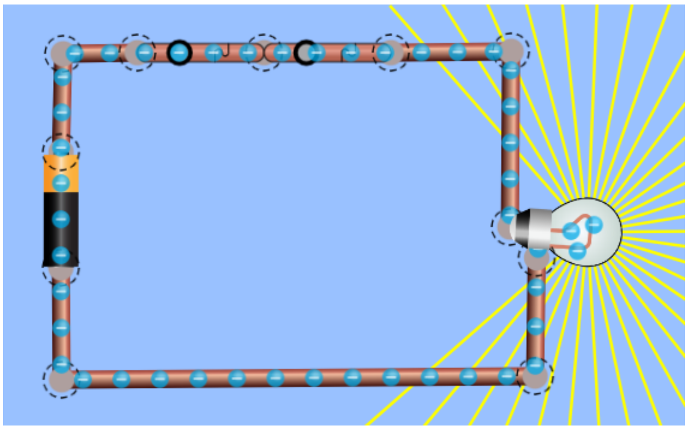
Figura 9 – **Simulação 5 - Circuito em série com chave p fechada e q aberta.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

- Quando as chaves p e q estiverem fechadas **p = 1** e **q = 1**, o circuito estará fechado permitindo que a corrente gerada pela bateria alimente a lâmpada e a saída indicará **S = 1 (lâmpada acesa)**.

Figura 10 – **Simulação 6 - Circuito em série com chave p e q fechadas.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

Dessa forma, tem-se:

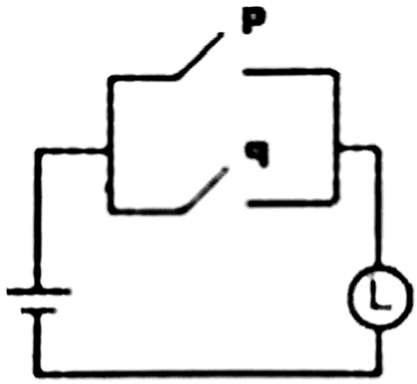
Tabela 42 – **Análise de circuito em série com 2 chaves**

p	q	S = p • q	Estado da Saída
0	0	0	lâmpada apagada
0	1	0	lâmpada apagada
1	0	0	lâmpada apagada
1	1	1	lâmpada acesa

Fonte: **própria autoria**

Exemplo 5.3. *Circuito com dois interruptores* ***p*** *e* ***q*** *em paralelo.*

Figura 11 – **Circuito em paralelo com 2 chaves.**



Fonte: **ABAR (2004)**

A configuração paralelo é indicada por $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. O que ocorre agora é que não passa corrente se e somente se $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, ou seja, se estão ambos "**abertos**" o que corresponde no Cálculo proposicional à tabela verdade da disjunção $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$.

Logo a saída **S**(lâmpada) ficará acesa (S = 1), nos casos em que $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{1}$; ou $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}$; ou ainda $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{1}$. Por outro lado, a saída **S**(lâmpada) ficará apagada (S = 0), sempre que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

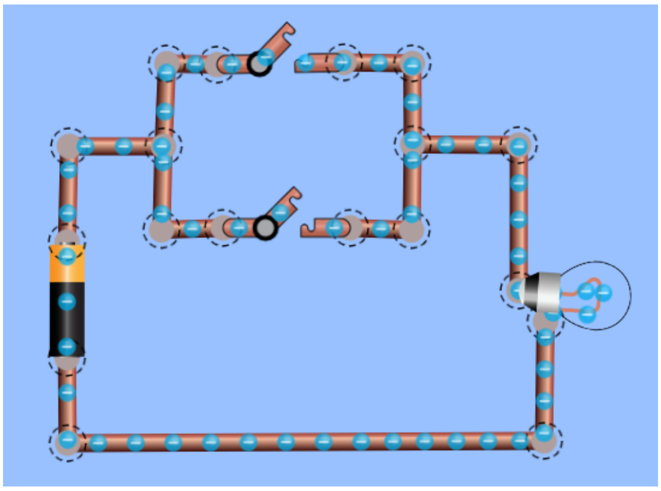
- **Questão 3:** Analisar o estado da saída para todas as possíveis combinações das chaves **p** **OU** **q**.

Análise e resultado observado:

Observando a figura 11, tem-se as seguintes possibilidades de entrada:

- Quando as chaves p e q encontram-se abertas $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, não haverá circulação de corrente vindo da bateria, logo a indicação de saída será $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ **(lâmpada apagada)**.

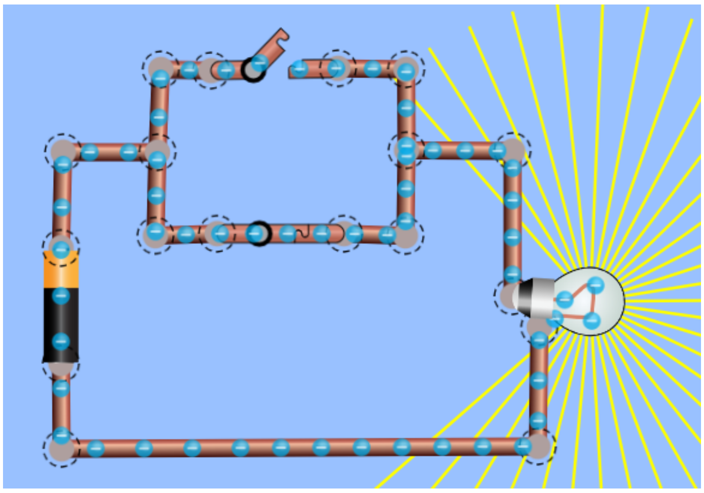
Figura 12 – **Simulação 7 - Circuito em paralelo com chave p e q abertas.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

- Quando a chave p estiver aberta **p = 0** e a chave q estiver fechada **q = 1**, pode-se observar que haverá circulação de corrente da bateria passando pela chave q até a lâmpada e permitindo o acendimento da lâmpada, assim **S = 1 (lâmpada acesa)**.

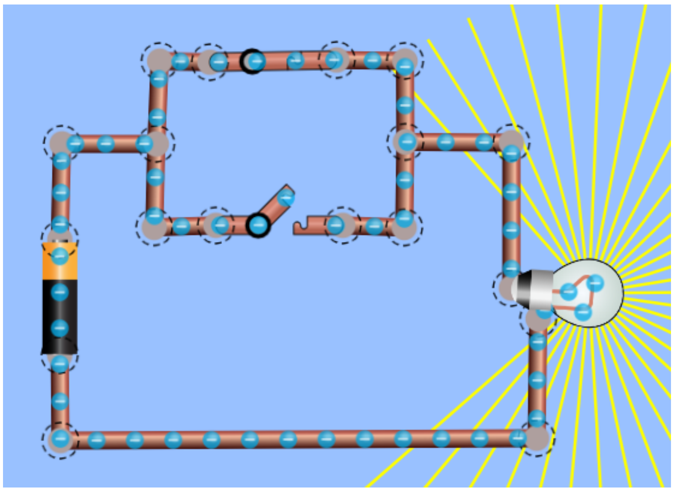
Figura 13 – **Simulação 8 - Circuito em paralelo com chave p aberta e q fechada.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

- De forma análoga, quando a chave p estiver fechada **p = 1** e a chave q estiver aberta **q = 0**, haverá circulação de corrente da bateria passando agora pela chave p até a lâmpada e permitindo o acendimento da lâmpada, assim **S = 1 (lâmpada acesa)**.

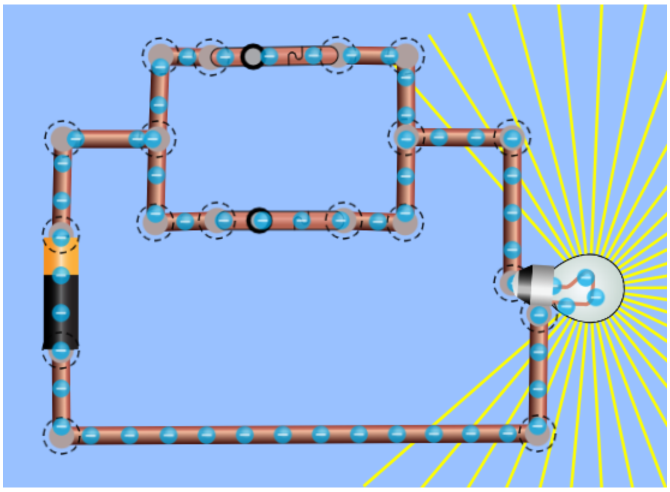
Figura 14 – **Simulação 9 - Circuito em paralelo com chave p fechada e q aberta.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

- Quando as chaves p e q estiverem fechadas **p = 1** e **q = 1**, tem-se que o fluxo de corrente ocorrerá por qualquer uma destas promovendo o estado de acendimento da lâmpada, logo **S = 1** **(lâmpada acesa)**.

Figura 15 – **Simulação 10 - Circuito em paralelo com chave p e q fechadas.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

Desta forma, tem-se:

Tabela 43 – **Análise de circuito em paralelo com 2 chaves**

p	**q**	**S = p + q**	**Estado da Saída**
0	**0**	**0**	**lâmpada apagada**
0	**1**	**1**	**lâmpada acesa**
1	**0**	**1**	**lâmpada acesa**
1	**1**	**1**	**lâmpada acesa**

Fonte: **própria autoria**

A seguir, apresenta-se um exemplo de obtenção de um circuito através de inferências lógicas.

Exemplo 5.4. *Circuito obtido por meio de Inferências lógicas.*

"Tem-se uma comissão formada por 3 membros. Um projeto é aprovado se e somente se o presidente vota a favor e obtém a maioria dos votos. Projetar um circuito simples de forma que cada membro vote a favor apertando um botão e tal que a luz acenda se o projeto for aprovado."

*Chamando de **P** o presidente e de **A** e **B** os outros dois membros. Monta-se a tabela verdade que corresponde as informações dadas, onde **1** representa a aprovação do projeto. Tem-se então;*

Tabela 44 – **Obtenção de inferências**

P	A	B	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

*Após analisar as aprovações marcadas e indicadas por **1**, obtem-se agora a **FND** (forma normal disjuntiva), que corresponde a seguinte expressão algébrica booleana;*

$\boldsymbol{S} = P.A.B + P.A.\overline{B} + P.\overline{A}.B$

Simplificando-se em seguida esta expressão, tem-se que:

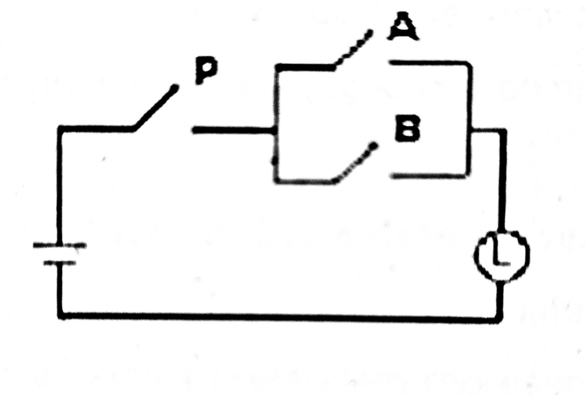
$$\begin{array}{ll}
P.A.B + P.A.\overline{B} + P.\overline{A}.B & \\
P.A.(\underbrace{B + \overline{B}}) + P.\overline{A}.B & \rightarrow \textit{ propriedade distributiva} \\
\underbrace{P.A.1} + P.\overline{A}.B & \rightarrow \textit{ identidade } X + \overline{X} = 1 \\
P.A.1 + P.\overline{A}.B & \rightarrow \textit{ identidade } X \cdot 1 = X \\
P.A + P.\overline{A}.B & \rightarrow \textit{ propriedade distributiva} \\
P.(\underbrace{A + \overline{A}.B}) & \rightarrow \textit{ identidade } A + \overline{A}.B = A + B
\end{array}$$

$$\boldsymbol{P.(A + B)}$$

Portanto $\boldsymbol{S = P.(A + B)}$

De acordo com as interpretações apresentadas nos exemplos 5.1, 5.2 e 5.3 de circuitos com interruptores, tem-se para a expressão P.(A + B), o seguinte circuito, onde P, A e B são interruptores e L(lâmpada) é a saída que representará aprovação sempre que estiver em nível 1(acesa).

Figura 16 – **Circuito obtido por meio de inferência lógica.**



Fonte: **ABAR (2004)**

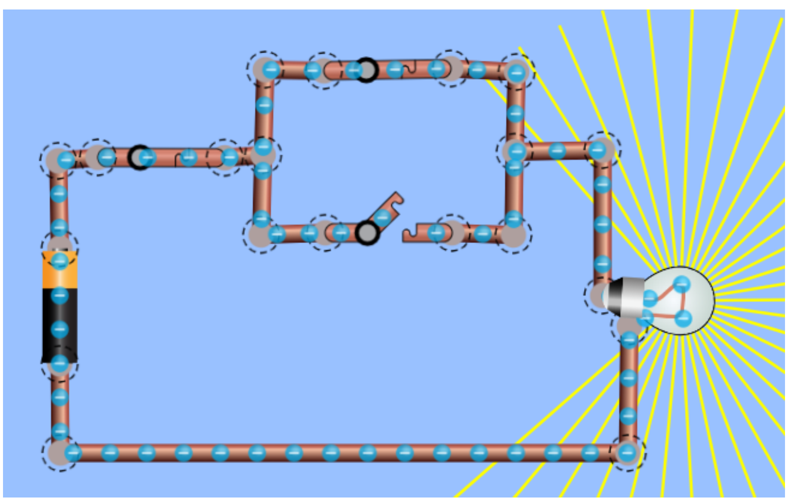
- **Questão 4:** Analisar o estado da saída para todas as possíveis combinações das chaves **P**, **A** e **B**.

Análise e resultado observado:

De acordo com o circuito obtido na figura 16, tem-se que:
- O acendimento da lâmpada L na saída só ocorrerá quando a chave P estiver fechada **P = 1** e pelo menos uma das chaves A e B estiver fechada. Isso ocorre quando:

1. chave **P = 1**, chave **A = 1** e chave **B = 0**. Assim a corrente circulará pelos interruptores P e A permitindo o acendimento da lâmpada **S = 1 (lâmpada acesa)**.

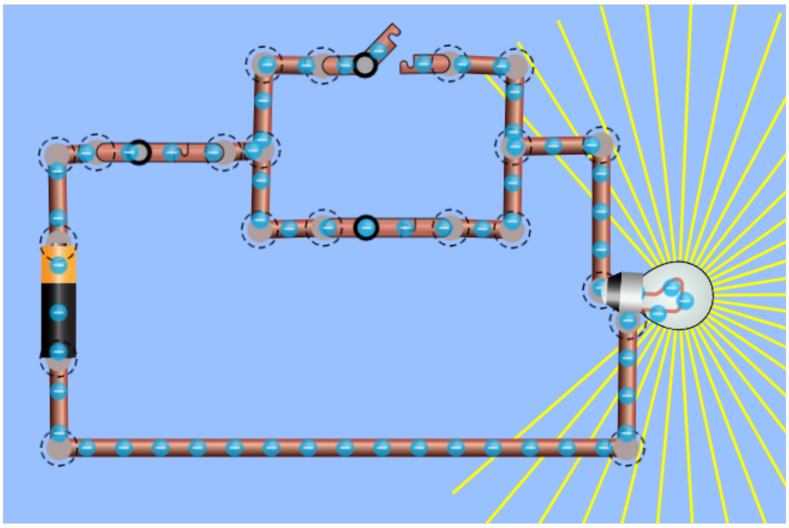
Figura 17 – **Simulação 11 - Inferência com chaves P e A fechadas e B aberta.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

2. chave **P = 1**, chave **A = 0** e chave **B = 1**. Tem-se que a corrente fluirá pelos interruptores P e B ocasionando o acendimento da lãmpada **S = 1 (lâmpada acesa)**.

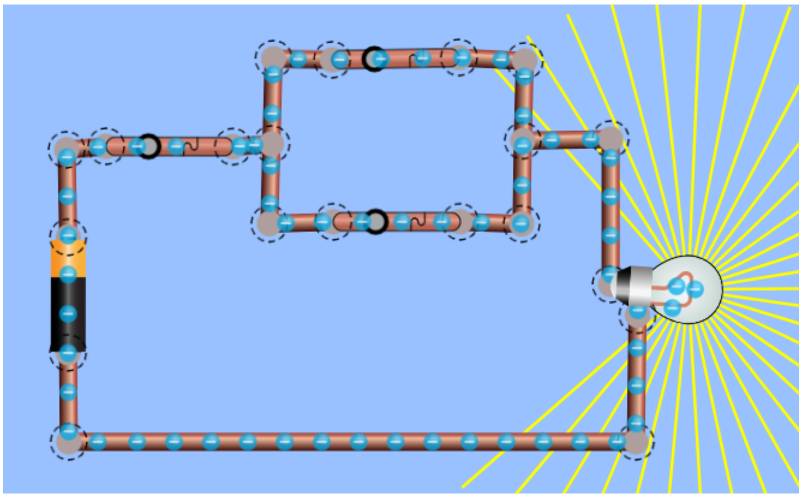
Figura 18 – **Simulação 12 - Inferência com chaves P e B fechadas e A aberta.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

3. chave **P = 1**, chave **A = 1** e chave **B = 1**. Dessa forma, a corrente poderá circular tanto pelos interruptores P e A quanto por P e B permitindo o acendimento da lâmpada **S = 1 (lâmpada acesa)**.

Figura 19 – **Simulação 13 - Inferência com chaves P , A e B fechadas.**



Fonte: **site <https://phet.colorado.edu/pt_ BR/>**

Qualquer outra combinação entre as chaves a saída será igual a **S = 0 (lâmpada apagada)**.

A saída **S = 1** caracteriza de fato que a aprovação de um projeto se dará obrigatoriamente pelo voto do presidente representado pela chave **P** e pelo menos um dos membros representados pelas chaves **A** e **B**.

Dessa forma;

Tabela 45 – **Análise de circuito série e paralelo com 3 chaves**

P	A	B	S = P.(A + B)	Estado da Saída
0	0	0	0	lâmpada apagada
0	0	1	0	lâmpada apagada
0	1	0	0	lâmpada apagada
0	1	1	0	lâmpada apagada
1	0	0	0	lâmpada apagada
1	0	1	1	lâmpada acesa
1	1	0	1	lâmpada acesa
1	1	1	1	lâmpada acesa

Fonte: **própria autoria**

- ## Tarefa 2: Portas Lógicas

O sistema binário é composto dos valores **0** e **1** que caracterizam níveis ou designações lógicas tais respectivamente como **falso e verdadeiro**, **sim e não**, **aberto e fechado** e assim por diante. Conforme mencionado anteriormente e segundo [8] e [14] este surgiu por volta de 1850 assim que George Boole publicou a lógica booleana(álgebra de Boole) com apenas três operadores lógicos **NOT(Não)**, **OR(Ou)** e **AND(E)**. Esses operadores, na lógica booleana, são aplicados, associados ou trabalhados sob a forma de **Portas Lógicas**.

As portas lógicas podem ser entendidas como salas que possuem entradas e saídas. As premissas ou informações de entrada são processados nessa sala e saem em forma de conclusão que são resultados ou saídas. Para compreender o funcionamento tem-se que:

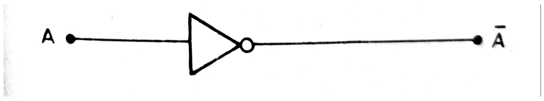
- “A” , “B” , "C" e "P" são entradas;
- “S” é a saída.

1. **Operador ou Porta NOT**

O operador NOT tem a função de inverter o valor lógico de entrada é representado por uma barra $\overline{\mathbf{A}}$.

A representação lógica do operador NOT é uma bolinha aberta, conforme figura a seguir;

Figura 20 – **Porta lógica NOT.**



Fonte: **CAPUANO (1984)**

A sua tabela verdade é caracterizada por:

Tabela 46 – **Operador NOT**

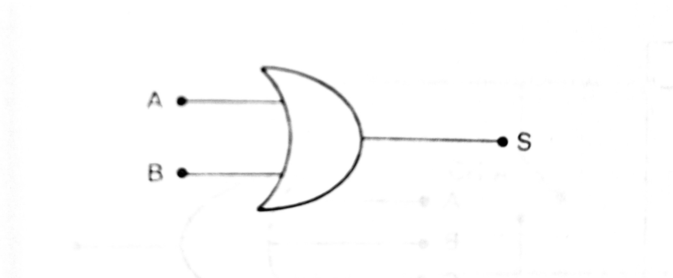
A	**S =** $\overline{\mathbf{A}}$
0	**1**
1	**0**

Fonte: **própria autoria**

2. **Operador ou Porta OR**

O operador lógico OR possui a saída **1** sempre que uma das entradas for 1. Sua operação consiste na soma booleana de 0 e 1 e sua expressão de saída $\mathbf{S = A + B}$ deve ser lida como S é igual a A ou B. A sua representação lógica é mostrada na figura a seguir:

Figura 21 – **Porta lógica OR.**



Fonte: **CAPUANO (1984)**

A sua tabela verdade é constituída da seguinte forma:

Tabela 47 – **Operador OR**

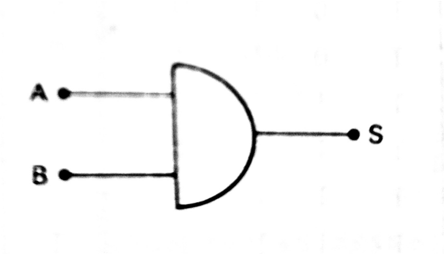
A	**B**	**S = A + B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

3. **Operador ou Porta AND**

O operador lógico AND possui a saída **1** somente quando todas as entradas forem iguais a 1. Sua operação consiste na multiplicação booleana de 0 e 1 e sua expressão de saída **S = A.B** deve ser lida como S é igual a A e B. A sua representação lógica é mostrada na figura a seguir:

Figura 22 – **Porta lógica AND.**



Fonte: **CAPUANO (1984)**

A sua tabela verdade é constituída da seguinte forma:

Tabela 48 – **Operador AND**

A	B	S = A.B
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

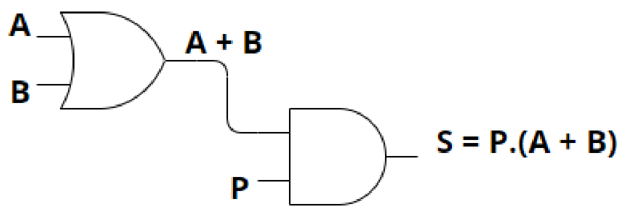
Como aplicação pode-se analisar o exemplo 5.4 que trata de inferência, mas agora utilizando portas lógicas. Desta forma, tem-se:

Exemplo 5.5. *"Tem-se uma comissão formada por 3 membros. Um projeto é aprovado se e somente se o presidente vota a favor e obtém a maioria dos votos. Desenhar um circuito simples com portas lógicas que satisfaça a condição dada"*

*A saída do circuito deverá possuir a entrada **P (presidente) "E" (A "OU"B) (membros)**. Logo a expressão lógica deverá ser **S = P.(A + B)**.*

*Trata-se de uma porta lógica OR (**A + B**) e de uma porta lógica AND (**P.(A+B)**). Dessa forma tem-se as seguintes portas lógicas:*

Figura 23 – **Obtenção de Portas lógicas.**



Fonte: **site <https://online.visual-paradigm.com/pt/diagrams/features/logic-diagram-software/>**

Para a construção da Tabela Verdade pode-se observar que existem três entradas **A**, **B** e **P**, logo, tem-se $\mathbf{2}^3 = 8\ linhas$.

Dessa forma;

Tabela 49 – **Inferências com portas lógicas**

A	B	P	A + B	S = P.(A + B)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Fonte: **própria autoria**

- **Questão 5:** Analisar as entradas **A**, **B** e **C** quando a saída for igual a 1 **(S = 1)**.

Análise e resultado observado:

De acordo com o circuito da figura 23 e com sua tabela verdade, pode-se observar que a saída **S = 1** ocorre quando;

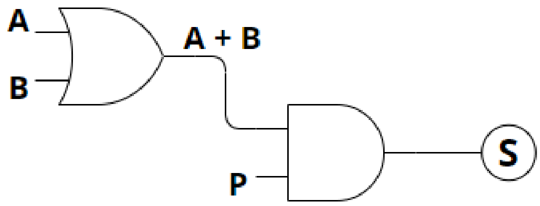
1. As entradas **A = 0, B = 1 e P = 1**. Na saída da porta OU **(A + B)**, tem-se **0 + 1 = 1** que será também uma entrada da porta AND juntamente com **P**. Daí, na saída da porta AND **P.(A +B)**, tem-se **1 . 1 = 1**, que será a saída **S = 1**.

2. As entradas **A = 1, B = 0 e P = 1**. Na saída da porta OU, tem-se **1 + 0 = 1** e na saída do circuito tem-se **1 . 1 = 1**, logo **S = 1**.

3. As entradas **A = 1, B = 1 e P = 1**. Na saída da porta OU, tem-se **1 + 1 = 1** e na saída do circuito tem-se **1 . 1 = 1**, logo novamente **S = 1**.

Em circuitos lógicos é possível colocar LED´s[1] na saída ou entrada para caracterizar em seu acendimento **nível 1** ou se ficar apagado **nível 0**. Logo;

Figura 24 – **Circuito lógico analisado**



Fonte: **site <https://online.visual-paradigm.com/pt/diagrams/features/logic-diagram-software/>**

Tabela 50 – **Análise de circuito lógico**

A	B	P	Estado da Saída
0	0	0	nível 0
0	0	1	nível 0
0	1	0	nível 0
0	1	1	nível 1
1	0	0	nível 0
1	0	1	nível 1
1	1	0	nível 0
1	1	1	nível 1

Fonte: **própria autoria**

Novamente é possível observar que a saída possui nível lógico verdadeiro **1** sempre que **P = 1** e **A = 1 ou B = 1** provando de fato que para o projeto ser aprovado é necessário o voto obrigatório do presidente e a maioria dos membros (no caso pelo menos um destes).

Exemplo 5.6. ***Jogo "ZERO ou UM"***

O objetivo desse jogo é determinar um ganhador sempre que um colocar um resultado diferente dos outros. Tem-se então um circuito para um jogo com três pessoas (número mínimo de participantes).

O circuito lógico então terá três LED´s na entrada e um na saída. Daí sempre que a saída for **1**, o nível diferente na entrada será o vencedor, ou seja, se na entrada tiver dois LED's apagados e um aceso este aceso será o vencedor, em caso contrário, se na entrada tiver dois LED's acesos e um apagado logo o apagado será o vencedor.

[1] LED significa "Light Emitting Diode" (Diodo Emissor de Luz, em português). Esse componente converte eletricidade em luz, e consome menos energia do que fontes de iluminação tradicionais, como lâmpadas incandescentes e fluorescentes. Disponível em <https://https://tecnoblog.net/responde/o-que-e-led/>

A partir das possibilidades de entrada, tem-se a seguinte tabela verdade para $\mathbf{2}^3 = 8$ *linhas. Assim para as entradas* **A, B e C**, *na saída* **S** *temos*;

Tabela 51 – **Implementação do jogo ZERO ou UM**

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Fonte: **própria autoria**

Conforme a tabela, para saída **S = 1**, tem-se a seguinte expressão booleana:

$$\mathbf{S} = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}$$

Simplificando-se agora esta expressão, tem-se que:

$$\overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}$$

$$\overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.(\underbrace{\overline{C} + C}) + A.\overline{B}.(\underbrace{\overline{C} + C}) + A.B.\overline{C} \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade distributiva}$$

$$\overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.1 + A.\overline{B}.1 + A.B.\overline{C} \quad \rightarrow \quad \textit{identidade } X + \overline{X} = 1$$

$$\overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B + A.\overline{B} + A.B.\overline{C} \quad \rightarrow \quad \textit{identidade } X \bullet 1 = X$$

$$\overline{A}.\,(\underbrace{\overline{B}.C + B}) + A.\,(\underbrace{B.\overline{C} + \overline{B}}) \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade distributiva}$$

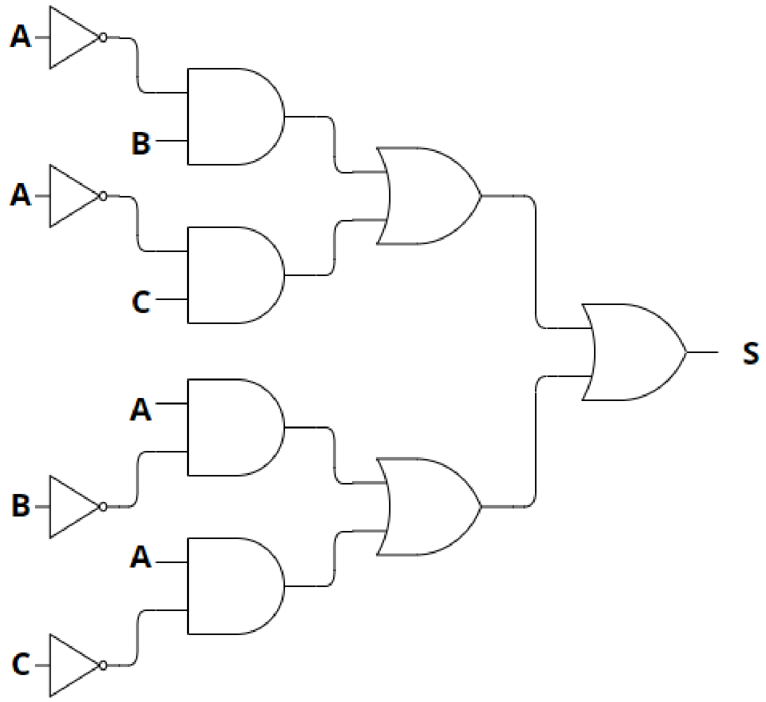
$$\overline{A}.(B + C) + A.(\overline{B} + \overline{C}) \quad \rightarrow \quad \textit{identidades}: \; B + \overline{B}.C = B + C \;\; e$$
$$\overline{B} + B.\overline{C} = \overline{B} + \overline{C}$$

$$\overline{A}.B + \overline{A}.C + A.\overline{B} + A.\overline{C} \quad \rightarrow \quad \textit{propriedade distributiva}$$

Portanto $\mathbf{S} = \overline{A}.B + \overline{A}.C + A.\overline{B} + A.\overline{C}$

Representando a expressão booleana simplificada de saída em função das portas lógicas NOT, OR e AND, tem-se o seguinte circuito lógico, onde A, B e C são as respectivas entradas e S o terminal de saída:

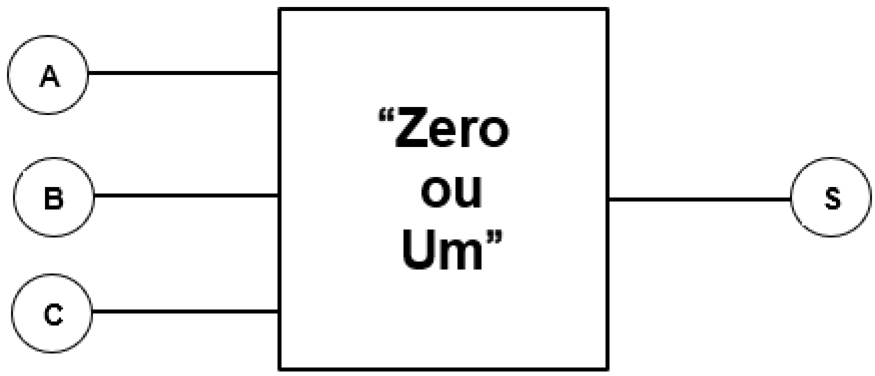
Figura 25 – **Circuito lógico Zero ou Um.**



Fonte: **site <https://online.visual-paradigm.com/pt/diagrams/features/logic-diagram-software/>**

Conforme falado anteriormente, tais circuitos lógicos (portas lógicas) podem ser entendidos por salas ou blocos que possuem premissas ou possibilidades de entradas e saída que representa a conclusão lógica dessas possibilidades. Dessa forma, para efeito de melhor assimilação, segue o circuito da figura 25 abaixo representado em forma de bloco simplificado, onde nas entradas A, B e C estão representadas por pequenos indicadores de luz (LED's) e também a saída S.

Figura 26 – **Circuito ZERO ou UM.**



Fonte: **própria autoria**

- **Questão 6:** Analisar as entradas **A**, **B** e **C** quando a saída for igual a 1 **(S = 1)** e explicar o funcionamento do Jogo ZERO ou UM.

Análise e resultado observado:

De acordo com o circuito da figura 25 e com sua tabela verdade de possibilidades, pode-se notar que a saída **S** só é igual a **1**, quando;

1. **Uma** das respectivas entradas A, B ou C for igual a **1** e as **outras duas** iguais a **0**. Essas combinações **001, 010 e 100**.
2. **Uma** das respectivas entradas A, B ou C for igual a **0** e as **outras duas** iguais a **1**. Tais possibilidades são **011, 101 e 110**.

• Tarefa 3: Demonstração por Argumentação Booleana

Conforme visto no capítulo 3, muitos problemas de lógica podem ser resolvidos utilizando o método dedutivo para validar os argumentos. Esse processo pode ser traduzido para linguagem booleana e trabalhado facilmente para obter níveis 1 na saída dos argumentos provando a tautologia. Seguem abaixo alguns exemplos de demonstrações lógicas utilizando lógica booleana.

Exemplo 5.7. ***Argumentação lógica 1***
*Vamos denotar por **p1, p2 e p3** as premissas e por **Q** a conclusão do argumento.*
***p1**: Anastácia vai estudar matemática ou vai jogar futebol.*
***p2**: Se Anastácia for jogar futebol então Nina também irá jogar futebol.*
***p3**: Nina não foi jogar futebol.*
***Q**: Anastácia foi estudar matemática.*

Chamando por:
***A**: Anastácia vai estudar matemática;*
***B**: Anastácia vai jogar futebol; e*
***C**: Nina vai jogar futebol.*
Pode-se escrever esse argumento na linguagem proposicional da seguinte forma:
p1: $A \vee B$
p2: $B \to C$
p3: $\sim C$
Q: A

Dessa forma, tem-se o seguinte argumento formalizado:
$(A \vee B) \wedge (B \to C) \wedge (\sim C) \to A$

Colocando esse argumento na linguagem booleana, tem-se:
$(A \vee B)$ *corresponde a* $(A + B)$

$(B \to C)$ *corresponde a* $(\overline{B} + C)$
$(\sim C)$ *corresponde a* $\overline{C}$
chamando $(A\ +\ B).(\overline{B}+C).(\overline{C})$ *de* $S,\ tem - se\ que;$

$$\boxed{(A\ \vee B) \wedge (B \to C) \wedge (\sim C) \to A \text{ é } correspondente\ a\ \ \overline{S} + A}$$

Para demonstrar, deve-se agora construir a sua tabela verdade e verificar os níveis lógicos da última coluna. Assim;

Tabela 52 – **Análise da Argumentação lógica 1**

A	B	C	$\overline{\mathbf{B}}$	$\overline{\mathbf{C}}$	A + B	$\overline{\mathbf{B}}$ + C	S = (A + B).$(\overline{B}+C).\overline{C}$	$\overline{\mathbf{S}}$	$\overline{\mathbf{S}}$ + A
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1

Fonte: **própria autoria**

- **Questão 7:** Analisar as premissas da questão e verificar através da tabela verdade se a conclusão é válida.

Análise e resultado observado:

Conforme a leitura dos enunciados (premissas), escreve-se cada uma dessas na forma proposicional por ser o entendimento mais imediato, em seguida é feita a conversão para a linguagem booleana por ser mais fácil trabalhar com níveis lógicos **"1"e "0"**. Em seguida é montada a tabela de possibilidades de acordo com as entradas no caso 3, logo tem-se $\mathbf{2}^3 = 8\ linhas.$

Daí preenche-se corretamente cada coluna da tabela de acordo com as operações básicas booleanas $+$ (OU) , $\bullet$(E) e $^-$(NOT). Para verificação ser válida devem ser observados os níveis lógicos da última coluna de saída que correspondem a implicação da conclusão. Estes devem ser todos iguais a **1** que representam valores **verdadeiros** provando que o argumento é uma tautologia lógica booleana e que a conclusão é resultado das premissas.

Exemplo 5.8. ***Argumentação lógica 2***
Tem-se agora o seguinte argumento lógico.

p1*: Se Mateus foi dormir então João foi trabalhar*
p2*: Mateus não foi dormir*
Q*: João não foi trabalhar.*

Chamando por:

***A**: Mateus foi dormir*

***B**: João foi trabalhar*

Tem-se o seguinte argumento proposicional;

p1: $A \to B$

p2: $\sim A$

Q: $\sim B$

Formalizando, tem-se:

$(A \to B) \wedge (\sim A) \to \sim B$

Na linguagem booleana, tem-se:

$(\overline{A} + B).\overline{A} = S$

$\boxed{\overline{S} + \overline{B}}$

Deve-se construir agora a sua tabela verdade.

Observando que há duas premissas, logo tem-se $2^2 = 4$ *linhas. Deste modo, tem − se :*

Tabela 53 – **Análise da Argumentação lógica 2**

A	**B**	$\overline{\mathbf{A}}$	$\overline{\mathbf{B}}$	$\overline{\mathbf{A}} + B$	$\mathbf{S} = (\overline{\mathbf{A}} + B).\overline{A}$	$\overline{\mathbf{S}}$	$\overline{\mathbf{S}} + \overline{\mathbf{B}}$
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Fonte: **própria autoria**

- **Questão 8:** Analisar se o argumento é válido.

Análise e resultado observado:

Foi tomado o argumento, desse argumento extraídas as premissas e a conclusão. Em seguida foi realizada a representação proposicional e consequentemente a notação booleana. Para verificação da demonstração foi montada a tabela verdade.

De acordo com a tabela verdade foi constatado na segunda linha da última coluna que aparece um nível lógico **0** indicando que a implicação entre as premissas e a conclusão é **falsa**. Portanto a argumentação analisada não representa uma tautologia booleana e dessa forma o argumento é inválido.

- ## Outras aplicações em diversas áreas.

Com base em [14] e [2], existem diversas outras aplicações envolvendo a lógica booleana, voltada para os seguintes ramos;

1. **eletrônica digital:** no design de circuitos digitais, onde os valores 0 ou 1 representam estados lógicos;

2. **programação de computadores:** nas operações lógicas, expressões condicionais e linguagens de programação;
3. **sistemas de informação:** no desenvolvimento de consultas lógicas em banco de dados utilizando operadores booleanos (AND, OR e NOT);
4. **redes de computadores:** em protocolos de comunicação, como o TCP/IP que usam lógica booleana para controlar o roteamento de dados;
5. **sistemas de controle e automação:** para criar lógicas de decisão em controle de processos e automação industrial;
6. **matemática da computação:** na teoria da computação a álgebra booleana é fundamental para entender a complexidade dos algoritmos;
7. **inteligência artificial:** em algoritmos de aprendizado de máquina a lógica booleana é utilizada para representar relações entre variáveis.

Como foi visto, a lógica booleana permite estabelecer relações entre a teoria de conjuntos e a lógica matemática fornecendo uma estrutura algébrica formal que permite uma melhor manipulação e análise sistemática das operações envolvendo o raciocínio lógico matemático.

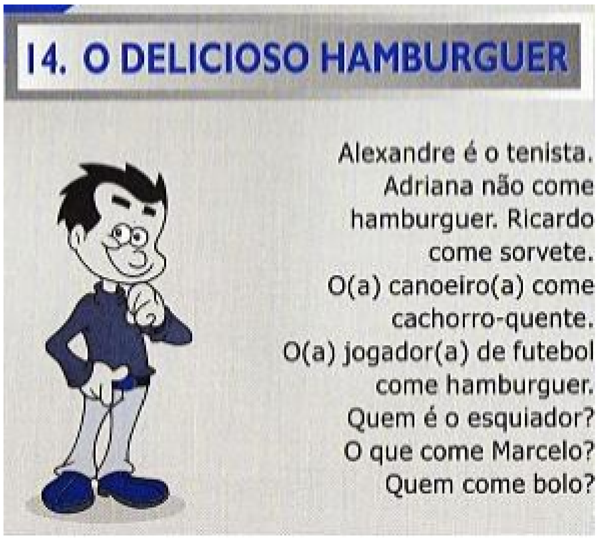
[13][2] Os chamados **Jogos de Boole** são jogos ou atividades com cartas que envolvem algum raciocínio lógico dedutivo. Essas atividades são essencialmente voltadas para o desenvolvimento do raciocínio lógico e compreendem a formação de conceitos para construir o conhecimento sobre um objeto, o indivíduo necessita desenvolver o pensamento lógico sobre outros objetos aos quais possa comparar o objeto pensado. Esses jogos consistem em solucionar histórias com estruturas lógicas. Um aluno lê a história e os participantes vão organizando cartas e dispondo-as para montar a história. O exemplo a seguir mostra um jogo de Boole e seu resultado.

[2] Procópio Mendonça Mello, professor de matemática durante 25 anos em Porto Alegre, no Rio Grande do Sul. Idealizou os Jogos Boole a partir de seus estudos de lógica. Interessado em apresentar a matemática de uma forma que despertasse o interesse de seus alunos, sempre buscou uma forma lúdica de trabalhar os seus conceitos. Através de enigmas, desafios e atividades práticas, o professor foi desenvolvendo vários projetos até produzir os Jogos Boole.

Exemplo 5.9. ***O Jogo de Boole***

Nesse jogo o aluno deve observar atentamente as dicas de cada um bloco de histórias lógicas, se houverem três blocos por exemplo, cada grupo deverá dispor as cartas e associar cada personagem com suas respectivas ocupações e tipos de comida, decifrar dedutivamente e chegar o quanto antes ao resultado. A figura ilustra um dos três livros de um jogo de Boole aplicado em sala de aula para crianças do $6^{\underline{o}}$ ano do ensino fundamental.

Figura 27 – **Jogo de Boole.**



Fonte: **site <https://sites.unipampa.edu.br/pibid2014/files/2012/01/mat-pdp-oficina-jogos-boole.pdf>**

Ao final, cada aluno deverá ter associado logicamente sua resposta com o enunciado apresentando os resultados ao professor. A figura abaixo mostra a resposta da história lógica do livro azul(em questão) e as cartas do jogo.

Figura 28 – **Resultados e cartas do jogo.**

Resposta:

Jogo Azul:

História 1 – O delicioso hambúrguer

Alexandre/tênis/bolo

Adriana/Canoeiro/cachorro quente

Ricardo/esquiador/sorvete

Marcelo/jogador/hambúrguer

JOGO AZUL

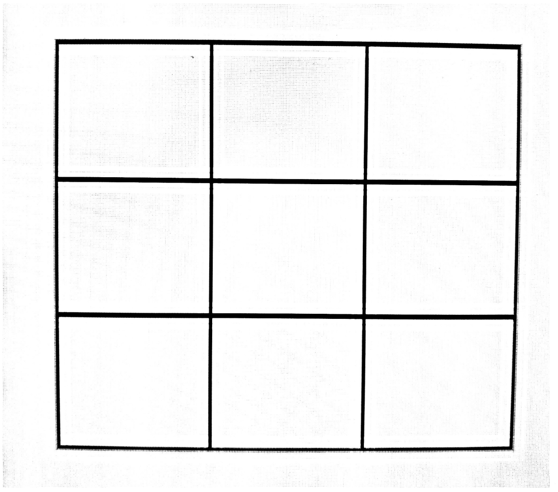
Fonte: **site <https://sites.unipampa.edu.br/pibid2014/files/2012/01/mat-pdp-oficina-jogos-boole.pdf>**

Outros jogos de Boole que também não envolvem variáveis lógicas booleanas, consistem em desafios lógicos que devem ser trabalhados em salas de aula, quebra-cabeças lógicos e geométricos, lógicas recreativas, lógicas de dedução, atividades de programação, jogos de cartas dedutivas para crianças, entre outros. Abaixo segue um exemplo de um jogo de boole conhecido popularmente como **quadrado mágico** ([21]).

Exemplo 5.10. ***O Quadrado Mágico***

Regra: O jogador deverá dispor no quadrado abaixo 9 algarismos (1 a 9) e colocá-los sem repetição na figura, de maneira que a soma dos números, no sentido vertical, horizontal e das duas diagonais principais, seja sempre QUINZE.

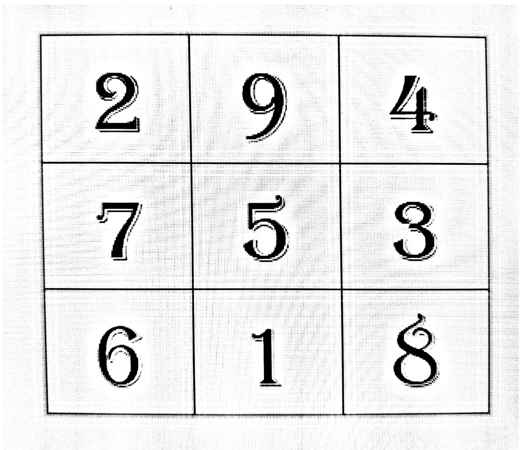
Figura 29 – **Quadrado Mágico (3x3)**



Fonte: **artigo OS FASCINANTES QUADRADOS MÁGICOS**

Solução: O Segredo na formação do Quadrado Mágico é o número cinco no meio. O participante que colocar o número cinco no meio terá oito possibilidades de formar um quadrado mágico. A figura abaixo representa uma destas oito soluções.

Figura 30 – **Uma solução do Quadrado Mágico**



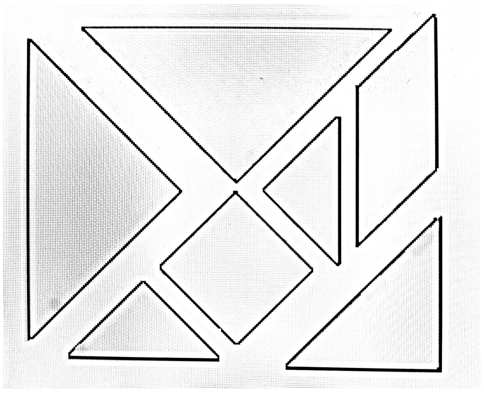
Fonte: **artigo OS FASCINANTES QUADRADOS MÁGICOS**

Um jogo de quebra-cabeças lógico geométrico tido também como lógica de recreação e muito trabalhado para construção e desenvolvimento do raciocínio lógico para crianças, jovens e adultos de várias idades é o **Tangram** ([10]). Este jogo requer astúcia, reflexão, imaginação, paciência e criatividade, logo agrega diversos valores para educação de uma forma geral. Existem vários tipos de Tangram, porém o mais difundido e tradicional é formado por 7 peças geométricas: cinco triângulos isósceles e retângulos (sendo 2 pequenos, 1 médio e 2 grandes), um quadrado e um paralelogramo. Com este é possível formar diversas montagens de figuras(desenhos variados). O exemplo abaixo mostra uma montagem com o Tangram de sete peças.

Exemplo 5.11. ***O Tangram***

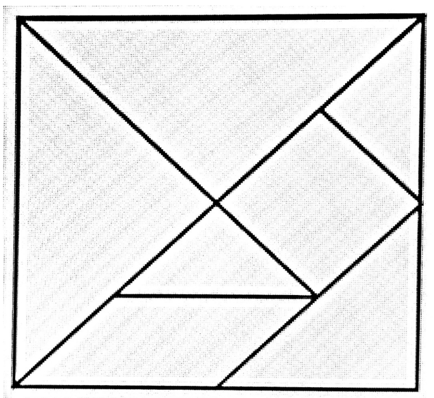
Regra: Os jogadores deverão executar quaisquer montagens utilizando todas as sete peças do Tangram sem que haja sobreposição das peças.

Figura 31 – **Tangram de 7 Peças**



Fonte: **site <https://br.pinterest.com/elizabethmaiabe/tangram/>**

Figura 32 – **Montagem de um Quadrado com o Tangram**



Fonte: **site <https://br.pinterest.com/elizabethmaiabe/tangram/>**

6 Considerações Finais

Este presente trabalho mostrou um assunto de fundamentação matemática que exerce grande importância nos Sistemas de Computação e Eletrônica Digital que é a Lógica booleana e foi elaborado para apresentar o seu uso no ensino básico através de tarefas que podem ser aplicadas para um grupo de alunos para serem analisados e observados os seus posicionamentos. Tais tarefas estão relacionadas com o desenvolvimento do raciocínio lógico desses alunos.

Essas tarefas foram abordadas de uma forma simples e didática para melhor compreensão do aluno que durante as atividades terá o acompanhamento do professor. Vale ressaltar que o estudo da lógica matemática de uma forma geral é pouco abordada nos ensinos fundamentais e médio, logo esse trabalho foi desenvolvido para fins de estudo para alunos e professores.

Por meio desse sistema matemático de análise lógica é possível demonstrar teoremas e obter respostas dentro de outras áreas, ajudando assim a compreendê-las de maneira bastante clara. Para este estudo foi necessária a abordagem de vários itens essenciais para o seu esclarecimento, dentre estes, as definições de teoremas, os tipos de funções lógicas e as comparações com a álgebra de conjuntos e o cálculo proposicional modernos.

Foram também apresentadas demonstrações de teoremas, obtenção de expressões e simplificação destas equações que são base para a explicação das aplicações.

Finalizando o estudo foram trabalhadas três aplicações envolvendo raciocínio lógico matemático na área da Física, Eletrônica e Lógica, focando sempre na utilização da álgebra booleana.

Portanto, os objetivos principais no desenvolvimento deste trabalho consistem na complementação do Mestrado em Matemática, na promoção de aulas que despertem o interesse e estimulem a capacidade de raciocínio lógico dos alunos no ensino básico, além de propiciar um rico texto como apoio às disciplinas da área de matemática já existentes ou a serem oferecidas pelo programa **Profmat**.

É importante ressaltar também, que este assunto complementa a formação, tendo em vista que este tópico não foi abordado no mestrado nem na graduação.

Diante da importância desse assunto para a matemática e outras áreas, sugere-se novas pesquisas que destaquem a mesma natureza deste trabalho e que tratem especificamente da lógica matemática, uma vez que este estudo tem contribuição estrutural para o progresso das áreas de pesquisas científicas.

Bibliografia

[1] ABAR. Celina Aparecida Almeida Pereira. **Noções de lógica matemática**. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/$\sim$ *logica* >, acesso em 14 de outubro de 2023.

[2] AWARI. - Desvendando os Mistérios da Álgebra de Boole: um Guia Completo. Disponível em <https://awari.com.br/desvendando-os-misterios-da-algebra-booleana-um-guia-completo>, acesso em 24.01.2024.

[3] BOOLE. George. **Biografia de George Boole**. Disponível em <https://www.ebiografia.com /georgeboole>, consultado em 12 de outubro de 2023.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências Naturais**. Brasília: MEC / SEF, 1997.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1997.

[6] CAPUANO. Francisco G.; IDOETA, Ivan V. **Elementos de Eletrônica Digital**. 6 ed. São Paulo: Érica, 1984.

[7] CERQUEIRA. L.A. **Introdução à Lógica**. Zahar Editora, RJ, 1979.

[8] DEMUC. **História da Matemática**. Disponível em <https://www.mat.uc.pt/ $\sim mat1206/histmat/historia\_da\_matematica.htm$ >, acesso em 5 de outubro de 2023.

[9] FAJARDO. R.A. **Lógica Matemática**. São Paulo: IME., 2012.

[10] HAMZE. Amelia. **A configuração geométrica do Tangram.** Brasil Escola, 2019. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/trabalho-docente /aconfiguracao-geometrica-tangram.htm>, acesso em: 04 jan. 2024.

[11] HEGENBERG. Leonidas; FILHO, A.S.R; FILHO, J.B.C.L.; LYRA, J.H.B.; COUTO, L.A.; SILVA, M.G. da; SOUSA, A.J.M. de. **INICIAÇÃO À LÓGICA E À METODOLOGIA DA CIÊNCIA**. Ed. Cultrix. São Paulo, 1980.

[12] MATES. Benson. **Lógica Matemática Elemental**. Madrid, Tecnos, 1991.

[13] MELLO. P. M.; MELLO, D. A. **Jogos Boole: A maneira divertida de ficar inteligente(2011).** Disponível em: < www.jogosboole.com.br >, acesso em 22.01.2024.

[14] MENDES. Herman do Lago. **Os Números Binários: do saber escolar ao saber científico**. Dissertação de Mestrado, UFPE, 2015.

[15] DE MORGAN. Augustus. **Biografia de Augustus De Morgan**. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/AugustusDeMorgan >, acesso em 20 de novembro de 2023.

[16] MORTARI. C.A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora UNESP. Imprensa oficial do Estado, 2001.

[17] NASCIMENTO. Jefferson Alexandre do. **Explorando a lógica matemática no ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em matemática), UFRN, 2016.

[18] PhET. – Physics Education Technology. Disponível em <http://phet.colorado.edu/>, acesso em 09.01.2024.

[19] PILATE. Valéria Aparecida. **O ensino de Lógica na sala de aula de Matemática: uma proposta**. Dissertação de Mestrado, UFJF, 2021.

[20] POST. Emil Leon. **Biografia de Emil Post**. Disponível em <https://pt.frwiki.wiki /wiki/Emil$_{post}$ >, Acesso em 20 de novembro de 2023.

[21] SANTINHO. Miriam Sampieri e MACHADO Rosa Maria. **OS FASCINANTES QUADRADOS MÁGICOS.** Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica UNICAMP - LEM - IMECC/Cotil-LEM, 2006.

[22] ZANIN. Vagner Luis. **Raciocínio lógico e matemático**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.