Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Jefferson da Silva Farias

A Construção de Cantor dos Números Reais e os Números Hiperreais

São Luís - MA
2023

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Jefferson da Silva Farias

A Construção de Cantor dos Números Reais e os Números Hiperreais

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno Jefferson da Silva Farias e aprovada pela comissão julgadora.

Anselmo Baganha Raposo Júnior
(Orientador)

São Luís - MA
2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

da Silva Farias, Jefferson.
A CONSTRUÇÃO DE CANTOR DOS NÚMEROS REAIS E OS NÚMEROS HIPERREAIS / Jefferson da Silva Farias. - 2023.
62 f.

Orientador(a): Anselmo Baganha Raposo Junior.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.

1. História da Matemática. 2. Números Hiperreais. 3. Números Reais. 4. Sequência de Cauchy. I. Baganha Raposo Junior, Anselmo. II. Título.

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Fundamentos de Matemática
Aprovada em: 22 de dezembro de 2023

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Orientador
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Ginaldo de Santana Sá
University of Central Florida (UCF)

São Luís - MA
2023

À minha família que é base forte!

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus.

Ao meu orientador, Professor Doutor Anselmo Baganha Raposo Junior, que pacientemente me incentivou a finalizar essa dissertação.

E a todos que, de uma forma direta ou indireta, contribuíram para o sucesso desse projeto. Muito obrigado!

Gostaria de ser lembrada como uma pessoa que queria ser livre, para que os outros também fossem livres.

Rosa Parks

Resumo

O objetivo do presente estudo é propor a discussão e reflexão de possíveis abordagens dos Números Reais na Educação Básica, por meio da História da Matemática, da construção do conjunto dos Números Reais e de uma extensão dos números reais, os Números Hiperreais. Exibiremos a construção dos números reais feita por Cantor, onde cada número real é definido como uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Posteriormente, é feita também a construção dos números hiperreais a partir dos estudos publicados pelo matemático alemão Abraham Robinson. Além das construções apontadas acima, o último capítulo desta dissertação analisa como o conjunto dos números reais são estudados na matemática do Ensino Médio de acordo com as legislações vigentes no Brasil.

Palavras-chave: História da Matemática, Números Reais, Sequência de Cauchy, Números Hiperreais.

Abstract

The aim of this study is to propose a discussion and reflection on possible approaches to Real Numbers in Basic Education, through the History of Mathematics, the construction of the set of Real Numbers and an extension of the real numbers, the Hyperreal Numbers. We will show Cantor's construction of the real numbers, where each real number is defined as an equivalence class of Cauchy sequences of rational numbers. Subsequently, the construction of hyperreal numbers is also based on the studies published by the German mathematician Abraham Robinson. In addition to the constructions mentioned above, the last chapter of this dissertation analyzes how the set of real numbers is studied in high school mathematics according to current legislation in Brazil.

Key-words: History of Mathematics, Real Numbers, Cauchy Sequence, Hyperreal Numbers.

Sumário

Introdução

O tema desta dissertação é “A Construção de Cantor Dos Números Reais e os Números Hiperreais”, ou seja, temos como principal objetivo a construção formal e detalhada dos números reais pela perspectiva de Georg Cantor e também, como complemento, mostrar a existência dos números Hiperreais. No entanto, antes de adentrar, de fato, no campo das proposições e teoremas a cerca dos números reais, outro aspecto se faz importante: a História da Matemática.

Já sabemos que estamos num mundo em que grande parte das coisas que aqui existem são resultantes de forças naturais desde tempo muito, entretanto, somente a partir de alguns poucos milhares de anos, aceitamos o fato de que a raça humana passou a ser capaz de modificar em profundidade a realidade ambiental, social, cultural e científica, ou seja, “fazer história”.

O Capítulo 1 deste trabalho trata do surgimento e o desenvolvimento da noção de número ao longo da história, desde mais de 40 mil anos atrás faziam marcas em madeira e ossos como mecanismos de contagem. Mesmo sem intenção, ali já se iniciava a noção rudimentar de números e aritmética.

Fato, é que verdadeiramente tudo começou mesmo com a criação de sistemas numéricos nas civilizações antigas. Desde a Mesopotâmia, no sexto milênio a.C., no oeste da Ásia, berço das primeiras plantações e cidades, passando pela Babilônia (região que hoje em dia faz parte do Iraque), onde surgiram os primeiros registros de escrita e de Matemática, pelo Egito Antigo onde o comércio e a taxação de impostos requeriam um sistema numérico sofisticado, e suas obras de construção e engenharia dependiam de métodos de medida e algum conhecimento de geometria e de álgebra, pelos gregos que teriam introduzido um tipo de Matemática abstrata, até os tempos modernos onde no século XIX, a passou por um processo de mudanças com relação à sua fundamentação e surgiu uma nova noção de rigor, indo além da análise algebrizada dos séculos anteriores.

Foram vários os matemáticos no século XIX que apresentaram construções dos números reais, entre eles: Karl Weierstrass, Charles Méray, Richard Dedekind e Georg Cantor. As construções dos números reais mais difundidas foram as de Dedekind e a de Cantor. Ambos construíram os números reais a partir dos racionais seguindo, contudo, caminhos diferentes.

George Cantor, nasceu em S. Petersburgo, de pais dinamarqueses, mas a maior parte de sua vida passou na Alemanha. Doutorou-se em Berlim em 1867 com uma tese sobre a teoria dos números, mas suas contribuições mais originais centram-se ao redor da provocativa palavra “infinito”. As descobertas de Cantor tiveram grande impacto no mundo matemático de fins do século passado e começo deste século.

Cantor seguiu o rumo das classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais, enquanto Dedekind utilizou conjuntos específicos de racionais que foram chamados de Cortes de Dedekind.

Capítulo 1

O Surgimento e o Desenvolvimento da Noção de Número ao Longo da História

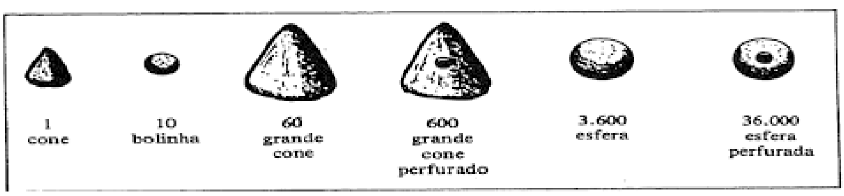
Há mais de 40 mil anos os humanos faziam marcas em madeira e ossos como mecanismos de contagem. Ali já se fazia presente, mesmo sem intenção, uma noção rudimentar de números e aritmética. Mas a história da Matemática, de fato, só começou com a criação de sistemas numéricos nas civilizações antigas.

Figura 1: Osso de Ishango, desenvolvido por africanos 20 mil anos antes de Cristo, a partir do fêmur de um macaco babuíno.

Fonte: `https://cearacriolo.com.br/o-osso-de-ishango/`

Um dos primeiros grandes exemplos nesta direção que se pode citar surgiu no sexto milênio a.C., na Mesopotâmia, no oeste da Ásia, berço das primeiras plantações e cidades. Foi lá que os sumérios desenvolveram, usando símbolos diversos para denotar quantidades diferentes, marcas de contagem.

Figura 2: Sistema de contagem dos sumérios: o método das "pedras contas".



Fonte: Patrícia Aires Pedroza - Sistemas de Numeração Antigos.

Também por volta de 3.500 a.C, na Babilônia (região que hoje em dia faz parte do Iraque), surgiram, em comum, os primeiros registros de escrita e de Matemática. De acordo com Roque (2012, pág. 2): "as primeiras formas de escrita foram motivadas pela necessidade de se registrarem quantidades (...): contagem do rebanho, insumos relacionados à sobrevivência e à organização da sociedade".

Figura 3: Tablet Plimpton 322 que contém números de escrita cuneiforme.

Fonte: `https://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/`

Uma história similar surge posteriormente com os antigos egípcios. O comércio e a taxação de impostos requeriam um sistema numérico sofisticado, e suas obras de construção e engenharia dependiam de métodos de medida e algum conhecimento de geometria e de álgebra.

As habilidades matemáticas sofisticadas dos egípcios permitiram que essa civilização observasse o céu para calcular e prever ciclos astronômicos e sazonais e elaborar calendários para o ano religioso e agrícola. Além disso, na "Matemática Egípcia" da Idade Antiga, o que se fazia estava relacionado também a problemas práticos: necessidades administrativas, contagem, medições de terras etc.

> As fontes indicam que, quando a Matemática começou a ser praticada no Egito antigo, ela também estava associada a necessidades administrativas. A quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração da sociedade. Estes profissionais eram importantes para assegurar a coleta e a distribuição dos insumos disponíveis, mas também pela formação de novos escribas. (ROQUE, 2012, p. 5)

O que se conhece atualmente sobre a Matemática egípcia deriva de textos limitados como o papiro de Rhind, datado de aproximadamente 1650 a.C, que são registros que contém problemas e soluções relacionados a regras de três, frações, progressões, equações simples, cálculo de áreas e volumes.

Figura 4: Papiro de Rhind.

Fonte: `https://www.matematica.br/historia/prhind.html`

Do século VII a.C em diante evidenciou-se o rápido aumento da influência da Grécia antiga ao longo do Mediterrâneo oriental e, com isso, os estudiosos gregos logo absorveram as ideias matemáticas dos babilônios e dos egípcios.

> Por volta do século VII a.C., o crescimento populacional e a dispersão dos gregos pela bacia do Mediterrâneo deram origem à mais importante instituição da antiguidade grega, que foi determinante para a organização política, administrativa, religiosa e militar da Grécia durante os séculos V e IV a.C. Trata-se da polis – a cidade-estado grega. (ROQUE, 2012, p. 50)

Ainda de acordo com Roque (2012, p. 50), o surgimento da polis se deu ao mesmo tempo em que o cidadão passou a ter direito de reger sua cidade e, para isso, tornava-se necessário estabelecer parâmetros, o que alimentava um gosto pela discussão. "A controvérsia movimentava a polis grega e, como contribuía para vencer o debate, a persuasão tornou-se uma habilidade bastante valorizada." (ROQUE, 2012, p. 50). A partir disso começaria a existir um novo tipo de pensamento, influenciado pelo contexto grego da época, em que esse pensamento, era baseado na argumentação e na lógica, sendo os critérios de uma verdade estabelecidos por coerência.

Segundo Roque (2012, p.49), a história tradicional conta que um dos primeiros matemáticos gregos que se tem registro na história foi Tales de Mileto que viveu entre os séculos VII e VI a.C. Entre os seus feitos destaca-se o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito utilizando as proporções entre sua altura e sua sombra. Em meados do século V a.C desenvolveu-se a matemática pitagórica que se ocupou em fazer a transição entre as épocas de Tales de Mileto e Euclides de Alexandria. Pitágoras, por sua vez, teria introduzido um tipo de Matemática abstrata na Grécia. É dizer que houve uma transição do tipo de Matemática realizada pelos babilônios e egípcios, profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

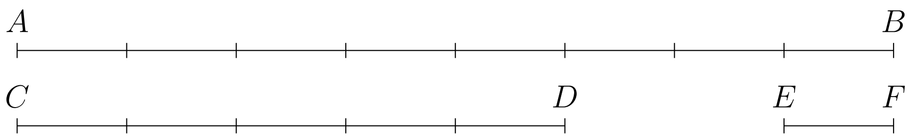
Nas antigas civilizações muito se notava o desenvolvimento da Matemática motivada pela resolução de problemas com natureza prática (ou aplicada), porém, na Grécia antiga, na época de Euclides, existiu um primeiro processo de formalização e sistematização. Houve preocupação em criar uma estrutura lógica coerente, baseada em postulados e axiomas, definições, resultados-base e resultados subsequentes. Os resultados-base viriam a partir dos axiomas, postulados e definições, e todos os resultados deveriam ser verdadeiros, sem que houvesse contradições. Foi essa noção de prova e rigor a maior contribuição dos gregos à Matemática.

Os Elementos, de Euclides, é o texto matemático completo mais antigo de que se tem conhecimento e que recebeu essa influência do pensamento grego. Nele, a Matemática passaria por um processo de abstração e formalização. Está dividido em 13 livros (na ordem): 6 de geometria plana, 4 de aritmética e 3 de geometria espacial. Pela primeira vez a geometria estaria separada da aritmética.

Foram os gregos um dos primeiros povos a desenvolver a noção de razão na Matemática de maneira mais próxima daquela que é ensinada nos dias de hoje, visto que uma das questões com que lidavam os matemáticos gregos daquela época era a de comparar grandezas de mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes.

Em Ávila (2001, p. 19) temos um exemplo de comparação entre dois segmentos retilíneos AB e CD, onde se esclarece que dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n, significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento EF tal que AB fosse m vezes EF e CD fosse n vezes esse mesmo segmento EF. Na figura abaixo, ilustramos essa situação com $m = 8$ e $n = 5$.

Figura 5: O significado geométrico da razão 8/5



$$\frac{AB}{CD} = \frac{8}{5}$$

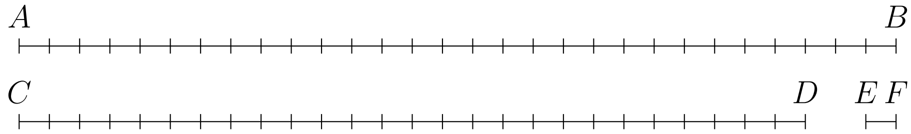
Fonte: do Autor

Utilizando-se dessa ideia de comparar grandezas, durante boa parte do século V a.C. pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta. Isto é: "dados dois segmentos AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação esta que descrevemos dizendo que EF é um submúltiplo comum de AB e CD." Ávila (2001, p. 20)

De fato, essa é uma ideia muito razoável, pois, se EF não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que haverá de existir um certo segmento EF, talvez muito pequeno, mas que satisfaça os propósitos desejados.

Ilustrando isso, Ávila (2001, p. 20) traz, como a Figura 6 evidencia, uma situação na qual o segmento EF é bem menor do que o segmento de mesma alcunha na Figura 5. E podemos ainda ir além: o segmento EF pode ser tomado tão pequeno, a ponto não será mais possível desenhá-lo, para nos convencermos, por meio da intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrarmos um submúltiplo comum de AB e CD.

Figura 6: O significado geométrico da razão 29/26



$$\frac{AB}{CD} = \frac{29}{26}$$

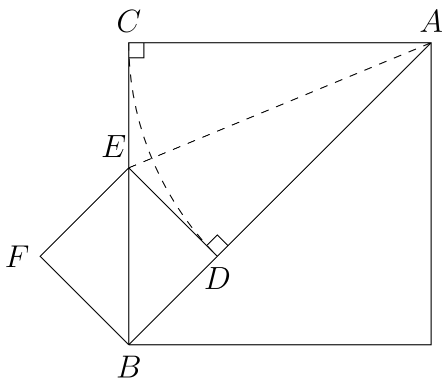
Fonte: do Autor

Assim, quando há a possibilidade de se encontrar um submúltiplo comum EF dos segmentos AB e CD, este serão ditos comensuráveis.

No entanto, não se pode afirmar que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Ou seja, existem segmentos AB e CD para os quais não se pode determinar um segmento EF que sirva como unidade de medida cabendo, simultaneamente, em AB e CD um número inteiro de vezes. Estes serão chamados segmentos incomensuráveis. A descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade teria representado um momento de crise no desenvolvimento da Matemática e uma ruptura com o modo de pensar sobre ela.

Em Ávila (2001, p. 20), é dito que foram os próprios pitagóricos os responsáveis pela descoberta dessas grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, através de um argumento geométrico, tal qual o que apresentaremos a seguir, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Figura 7: A incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado



Fonte: do Autor

Na figura acima, está representado um quadrado com diagonal $\delta = AB$ e lado $\lambda = AC$ Supondo que δ e λ sejam comensuráveis, pelo que vimos anteriormente, significa dizer que deve existir um terceiro segmento σ que seja submúltiplo comum de δ e λ. Façamos agora a seguinte construção: tracemos o arco $\widehat{CD}$ com centro em A e o segmento ED tangente a esse arco em D, de sorte que $AD = AC$. Então, nos triângulos retângulos

ACE e ADE, os catetos AC e AD são iguais e a hipotenusa AE é comum a eles. Logo, são também iguais os catetos CE e DE $(= BD)$.

Daí,

$$\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD$$

e

$$\lambda = BC = BE + CE = BE + BD,$$

ou seja,

$$\delta = \lambda + BD \tag{1.1}$$

e

$$\lambda = BE + BD \tag{1.2}$$

Como o segmento σ é submúltiplo comum de δ e λ, concluímos, por (1.1), que também é submúltiplo de BD. Daqui e de (1.2) segue que também é submúltiplo de BE. Provamos, assim, que se houver um segmento que seja submúltiplo comum de $\delta = AB$ e $\lambda = AC$, então o mesmo segmento σ será submúltiplo comum de BE e BD, segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado $BDEF$. Ou seja, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado $BDEF$ pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, uma vez que as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Evidentemente, isso é um absurdo! Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado AC e a diagonal AB do quadrado original sejam comensuráveis. Concluímos, portanto, que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis.

No livro V de Os Elementos, consta a teoria das proporções de Eudoxo (matemático e astrônomo ligado à escola de Platão), com definições relacionadas a razão e proporção. Essa teoria não classificava expressamente números em racionais ou irracionais, mas os identificou corretamente e assim propôs uma definição para as proporções que viera minimizar o transtorno que a descoberta do incomensurável causou, pois essa definição permitia a relação entre duas grandezas, quer sejam elas comensuráveis ou não.

Para Ávila (2001, p. 25), hoje é fácil perceber que a crise dos incomensuráveis seria resolvida com a introdução, na Matemática, dos números fracionários e dos números irracionais, mas os gregos tomaram outro caminho, criando um modo de falar em igualdade de razões mesmo no caso de grandezas incomensuráveis.

No entanto,

> Com sua definição de igualdade de duas razões, Eudoxo constrói a teoria das proporções, utilizando apenas os números inteiros. Embora tenha sido uma solução genial da crise dos incomensuráveis, ela atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, pois subordinou essas disciplinas aos estudos de Geometria, como retrata muito bem a exposição feita nos Elementos de Euclides. (ÁVILA, 2001, p. 26)

Com isso, somente a partir do século XIII a "matemática numérica" começa a chegar à Europa, vinda da Índia e da China por intermédio dos árabes. Três séculos mais tarde a Álgebra começa a se desenvolver, sobretudo na Itália, preparando o terreno para todo o desenvolvimento da Geometria Analítica e do Cálculo no século XVII. É importante ressaltar que o desenvolvimento mais recente da Matemática, sobretudo nos séculos XVII e XVIII, se deu graças à atitude dos matemáticos, que não se deixaram vencer pelas dificuldades naturais da falta de uma teoria dos fundamentos.

Como dissemos há pouco, os gregos, ao resolverem a crise dos incomensuráveis, acabaram desviando-se do curso natural de evolução da Matemática por se apegarem a excessivos critérios de rigor. Ao contrário disso, seus colegas dos últimos séculos não se ativeram tanto às exigências do rigor, por isso mesmo desbravaram e conquistaram territórios consideráveis. (ÁVILA, 2001, p. 27)

A Matemática desenvolveu-se extensamente nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XIX, porém não houve preocupação com as sutilezas dos procedimentos rigorosos até mesmo por não terem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos, ou seja, trabalhavam livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento.

> Antes do século XIX, todos os nomes que eram usados para designar estes números exprimiam a dificuldade de se admitir sua existência. Eram usadas designações de números “surdos” ou “inexprimíveis”, para os irracionais, quantidades “falsas”, “fictícias”, “impossíveis” ou “imaginárias”, para os números negativos e complexos. Isto mostra que estes números não tinham uma cidadania matemática e, em última instância, não eram sequer admitidos como números. (ROQUE, 2012, p. 239)

Durante o século XIX, a Matemática passou por um processo de mudanças com relação à sua fundamentação e surgiu uma nova noção de rigor, indo além da análise algebrizada dos séculos anteriores. A nova noção de rigor trouxe a abstração e a formalização para os fundamentos da Matemática. Na verdade, em meados do século XIX, diversos problemas matemáticos da época conduziam a um questionamento sobre o que é um número real, e como os racionais e irracionais se distribuem na reta. Antes deste momento, supunha-se, de modo geral, que a reta continha todos os números reais, e não havia preocupação de se definir este tipo de número. No final do século XIX, surgiu a caracterização dos números reais, onde números irracionais foram incluídos formalmente e, também, a noção de conjunto.

É válido ressaltar que, além disso, a fundamentação dos números reais precedeu a dos racionais, a dos inteiros e a dos naturais, diferentemente da ordem com a qual os números são ensinados na educação básica.

> “E é interessante observar que a fundamentação desses sistemas ocorreu na ordem inversa: primeiro foram organizados os números complexos, depois os números reais, os racionais, os inteiros e, finalmente, os números naturais.” (ÁVILA, 2001, p. 27)

Vários matemáticos do século XIX apresentaram construções dos números reais, entre eles: Karl Weierstrass, Charles Méray, Richard Dedekind e Georg Cantor. Ao longo dos próximos capítulos, veremos a construção de Cantor.

As teorias dos números reais que permaneceram foram as de Dedekind e a de Cantor. Ambos construíram os números reais a partir dos racionais seguindo, contudo, caminhos diferentes. Cantor seguiu o rumo das classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais, enquanto Dedekind utilizou conjuntos específicos de racionais que foram chamados de Cortes de Dedekind.

Capítulo 2

Os Números Reais Segundo Cantor

2.1 Números racionais

O objetivo dos próximos capítulos é apresentar as construções dos números reais feitas por Cantor e Dedekind. Antes, falemos um pouco sobre o conjunto dos números racionais, conjunto este que alicerçou ambas as construções. Para tanto, admitiremos aqui a familiaridade do leitor com as propriedades dos números naturais e inteiros. O apresentaremos como é usual, ou seja, como um conjunto munido de duas operações binárias gozando de axiomas que fazem dele um corpo, tendo como referência Guidorizzi (2001).

Os **números racionais** (ou **fracionários**) são os números da forma $a \div b$, onde a e b são números inteiros com $b \neq 0$. Costumeiramente, a divisão $a \div b$ é indicada por meio da *fração* $\frac{a}{b}$ e o conjunto dos números racionais é denotado por $\mathbb{Q}$. Assim:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

O termo *racional* provém do fato de $\frac{a}{b}$ representar a razão ou proporção entre dois inteiros a e b.

Em $\mathbb{Q}$ são definidas as operações binárias

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

denominadas, respectivamente, de **adição** e **multiplicação**.

Diremos que as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são **iguais** ou **equivalentes** sempre que $ad = bc$.

O número racional $\frac{a}{b}$ é dito **não-negativo** se $a \cdot b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $a \cdot b \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ é dito **estritamente positivo**.

Sejam r e s dois racionais: dizemos que r é **estritamente menor do que** s (ou que s é **estritamente maior do que** r) e escrevemos $r < s$ (respectivamente, $s > r$) se existe um racional estritamente positivo t tal que $s = r + t$. A notação $r \leq s$ (leia r menor do que ou igual a s) é usada para indicar que $r < s$ ou $r = s$. A notação $r \geq s$ (leia r maior do que ou igual a s) tem o mesmo significado que $s \leq r$. Observemos que r não-negativo equivale a $r \geq 0$. Se $s \leq 0$, dizemos que s é **não-positivo** e, se $s < 0$, dizemos que s é **negativo**.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ possui as seguintes propriedades:

(A1) **Associatividade da adição:** $(x + y) + z = x + (y + z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(A2) **Comutatividade da adição:** $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$.

(A3) **Existência de elemento neutro da adição:** $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(A4) **Existência do simétrico:** Para todo racional x existe um racional y tal que $x + y = 0$. Tal y é denominado o simétrico de x e é indicado por $-x$.

(M1) **Associatividade da adição:** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(M2) **Comutatividade da multiplicação:** $x \cdot y = y \cdot x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$.

(M3) **Existência de elemento neutro da Multiplicação:** $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(M4) **Existência do inverso:** Para todo racional não-nulo x existe um único racional y tal que $x \cdot y = 1$. Tal y é denominado o inverso de x e indicado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.

(D) **Distributividade da multiplicação em relativamente a adição:** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(O1) **Reflexividade da relação "$\leq$":** $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(O2) **Antissimetria da relação "$\leq$":** Se $x, y \in \mathbb{Q}$ são tais que $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

(O3) **Transitividade da relação "$\leq$":** Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$ são tais que $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

(O4) **Dicotomia da relação "$\leq$":** Dados os racionais x e y, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$.

(OA) **Compatibilidade da relação "$\leq$" com a adição:** Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Então $x \leq y$ se, e somente se, $x + z \leq y + z$ para todo racional z.

(OM) **Compatibilidade da relação** "$\leq$" **com a multiplicação:** Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Então $x \leq y$ se, e somente se, $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo racional $z \geq 0$.

Em face das propriedades (O1) a (O4) a relação "$\leq$" é dita uma **relação de ordem total** sobre $\mathbb{Q}$.

Observação 2.1 *O elementos neutros da adição e da multiplicação em* $\mathbb{Q}$ *são únicos. De fato, se* α *e* β *são elementos neutros da adição e da multiplicação, respectivamente, temos*

$$\alpha = \alpha + 0 = 0 \qquad e \qquad \beta = \beta \cdot 1 = 1.$$

Observação 2.2 *Seja* $x \in \mathbb{Q}$*. Então é único o simétrico de* x*. De fato, se* y *e* z *são ambos simétricos de* x*, temos*

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = z.$$

De modo análogo verificamos que, se $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$*, então o seu inverso é único.*

Observação 2.3 *Seja* $\mathbb{K}$ *um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos e suponhamos que nesse conjunto* $\mathbb{K}$ *estejam definidas duas operações indicadas por* $+$ *e* $\cdot$*, se a terna* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *satisfizer as propriedades* (A1) *a* (A4)*,* (M1) *a* (M4) *e* (D)*, diremos que* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *é um corpo. Se, além disso, em* $\mathbb{K}$ *estiver definida uma relação "*$\leq$*" de modo que a quadrupla* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *satisfaça todas as* 15 *propriedades anteriormente listadas, então diremos que* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *é um corpo ordenado. Segue então que* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *é um corpo ordenado.*

2.2 Sequências de Cauchy de números racionais

Na seção anterior apresentamos os números racionais e suas propriedades. No método de Cantor, cada número real é definido como uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Assim, primeiramente definiremos sequência de números racionais, sequência de Cauchy e seguiremos a construção dos números reais por sequências de Cauchy, conforme feita em Kemp (2014).

Definição 2.4 *Uma* **sequência de números racionais** *(ou uma* **sequência racional***) é uma função* $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, o valor* $x(n) \in \mathbb{Q}$ *será representado por* x_n *e chamado de* **termo de ordem** n *da sequência* x*. A sequência* x *também será representada por* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *ou* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*.*

Definição 2.5 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de números racionais é uma* **sequência de Cauchy** *se, dado um número racional* $\varepsilon > 0$*, é sempre possível obter* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tal que, sempre que* $m, n \geq n_\varepsilon$*, temos* $|x_m - x_n| < \varepsilon$*.*

Definição 2.6 *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de números racionais é dita* **convergente** *em* $\mathbb{Q}$ *se existir* $L \in \mathbb{Q}$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - L| < \varepsilon$ *sempre que* $n > n_\varepsilon$*.*

O número racional L definido acima, se existir, será chamado de limite da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Neste caso, diremos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para L e indicaremos este fato por $x_n \to L$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

Teorema 2.7 (Unicidade do Limite) *Se* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de números racionais tal que* $x_n \to a$ *e* $x_n \to b$*,* $a, b \in \mathbb{Q}$*. Então* $a = b$*.*

Demonstração: Para fins de contradição, suponhamos $a \neq b$. Deste modo, se $\varepsilon = |a-b|/2$, então $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to a$ e $x_n \to b$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq n_1$$

e

$$|x_n - b| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq n_2.$$

Seja $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$. Assim,

$$|a-b| = |(a - x_{n_\varepsilon}) + (x_{n_\varepsilon} - b)| \leq |x_{n_\varepsilon} - a| + |x_{n_\varepsilon} - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|$$

o que, evidentemente, é um absurdo. Logo, $a = b$ e o resultado segue. ■

Exemplo 2.8 A sequência de números racionais $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$ converge para zero. De fato, dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$, seja n_ε inteiro com $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$, (isto é possível pela propriedade arquimediana de $\mathbb{Q}$). Assim, se $n \geq n_\varepsilon$, então

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Para que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência de Cauchy, é preciso que seus termos x_m e x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m e n, estejam arbitrariamente próximos um do outro. Ou seja, é imposta uma condição sobre os termos da própria sequência. Uma sequência de Cauchy também é chamada **sequência fundamental**.

Notemos que existem pelo menos tantas sequências de Cauchy quantos são os números racionais, pois, qualquer que seja o número racional r, a sequência constante $(r_n)_{n=1}^{\infty} = (r, r, \ldots, r, \ldots)$ é claramente de Cauchy.

Lema 2.9 *Toda sequência de números racionais convergente em $\mathbb{Q}$ é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números racionais que converge para o número racional L. Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $n \geq n_\varepsilon$, temos $|x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Consequentemente, se $m, n \geq n_\varepsilon$ são números naturais, então

$$|x_m - x_n| = |(x_m - L) + (L - x_n)| \leq |x_m - L| + |x_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy. ■

Exemplo 2.10 Sejam $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de algarismos, isto é, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente por

$$x_1 = a \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{10^n}$$

é uma sequência de Cauchy. Com efeito, dado o racional positivo ε, como o conjunto $\{10^n : n \in \mathbb{N}\}$ é sabidamente um subconjunto superiormente ilimitado de $\mathbb{Q}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$10^{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Observemos que, se $m > n$, então

$$x_m = x_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}. \tag{2.2}$$

Consequentemente, se $n \geq n_\varepsilon$, segue de (2.1) e (2.2) que

$$|x_m - x_n| = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} < \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^{n_\varepsilon}} < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Como a desigualdade (2.3) é trivialmente verificada para $m = n$, concluímos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy.

Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números racionais será dita periódica se existem $n_0, p \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n = x_{n+p}$$

para todo $n \geq n_0$. É bem sabido que, se $x \in \mathbb{Q}$ e

$$x = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

é a expansão decimal de x, então a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de algarismos deve ser periódica. Deste modo, o exemplo acima garante que nem toda sequência de Cauchy de números racionais converge em $\mathbb{Q}$. De fato, tudo o que temos a fazer é fixar um inteiro não-negativo a e uma sequência não periódica $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de algarismos e considerar a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida como no Exemplo 2.10.

Na construção de Cantor dos números reais, a ideia é definir uma relação de equivalência "$\sim$" sobre o conjunto $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ das sequências de Cauchy de números racionais e então definir o conjunto dos números reais como sendo o quociente $(\mathcal{C}_\mathbb{Q}/\sim)$ e, a partir daí, definir operações algébricas e ordenação para as classes de equivalência determinadas.

2.3 Relações de equivalência e as sequências de Cauchy

Seja A um conjunto não-vazio. Dizemos que um subconjunto R de $A^2 = A \times A$ define uma relação de equivalência em A se possui as seguintes propriedades:

(i) $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$;

(ii) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;

(iii) $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Em lugar de tratar as relações de equivalência como subconjuntos de A^2, as redefinimos como sendo uma relação binária em A (isto é, como uma relação entre dois elementos de A). Diremos que a **está relacionado com** b se $(a, b) \in R$. Desse modo as propriedades acima são reescritas como segue.

Definição 2.11 *Seja A um conjunto não-vazio. Uma relação binária "$\sim$" sobre A é uma relação de equivalência sobre A se*

(i) $a \sim a$, *para todo* $a \in A$ *(reflexividade),*

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ *(simetria),*

(iii) $a \sim b$ *e* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ *(transitividade).*

As relações de equivalência são de extrema importância. Elas permitem classificar ou agrupar elementos de um conjunto A em subconjuntos contendo elementos ditos equivalentes (ou relacionados entre si).

Definição 2.12 *Se A é um conjunto não-vazio e $\sim$ é uma* **relação de equivalência** *em A, então a classe de equivalência de $a \in A$ é o conjunto*

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}.$$

Exemplo 2.13 No conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ definimos a relação $\sim$ entre dois elementos $a, b \in Z$ como $a \sim b$ se, e somente se, $-b$ é par. Como $a - a = 0$ é par, temos $a \sim a$. Se $a \sim b$ então $a - b$ é par. Como $-(a-b) = b - a$ é par, concluímos que $b \sim a$. Finalmente, se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a - b$ e $b - c$ são pares. Como $a - c = (a - c) + (c - b)$ é par, obtemos $a \sim c$. Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência. Notemos que $[0] = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ e $[1] = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$. Desse modo, em $\mathbb{Z}$ a relação de equivalência $\sim$ determina exatamente duas classes de equivalência: o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares.

Exemplo 2.14 Seja T o conjunto dos triângulos do plano e $\sim$ a relação de semelhança entre triângulos (isto é, triângulos com ângulos correspondentes iguais). Observamos sem dificuldade que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Definição 2.15 *O conjunto das classes de equivalência de uma relação de equivalência $\sim$ em A é chamado* **conjunto quociente** *de A com respeito a $\sim$ e é denotado por $(A/\sim)$.*

Exemplo 2.16 No Exemplo 2.13, em $\mathbb{Z}$ é definida a relação de equivalência: $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ é par. O conjunto quociente é

$$(\mathbb{Z}/\sim) = \{[0], [1]\} = \{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}\}.$$

Definição 2.17 *Uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X é uma* **partição** *de X se*

(i) $\varnothing \notin P$,

(ii) $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$,

(iii) *Se* $A, B \in P$ *e* $A \neq B$ *então* $A \cap B = \varnothing$.

Exemplo 2.18 Seja $X = \{a, b, c\}$. Então

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\} \text{ e } \{X\}$$

são exemplos de partições de X. Por outro lado,

$$\{\{a, b\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a\}, \{b\}\} \text{ e } \{X, \varnothing\}$$

não são partições de X.

Exemplo 2.19 Todo conjunto não-vazio A admite as partições triviais

$$\mathcal{P}_1 = \{\{a\} : a \in A\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \{A\}.$$

Exemplo 2.20 No Exemplo 2.19, as partições triviais de A, $P_1 = \{\{a\} : a \in A\}$ e $P_2 = \{A\}$, induzem, respectivamente, as relações R_1 e R_2 dadas por

$$aR_1b \Leftrightarrow a = b \quad \text{e} \quad aR_2b \Leftrightarrow a, b \in A.$$

que fornecem os respectivos conjuntos quociente:

$$(A/R_1) = \{\{a\} : a \in A\} \quad \text{e} \quad (A/R_2) = \{A\}.$$

Definição 2.21 *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, uma* **subsequência** *de x é qualquer restrição sua a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. É comum denotar a subsequência de x associada ao conjunto de índices $\mathbb{N}'$ por $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$.*

Os conceitos desenvolvidas no contexto de sequências possuem análogos naturais no âmbito das subsequências.

Teorema 2.22 *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração: Seja $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de (x_n). Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in N$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para todo $n \geq n_\varepsilon$. Em particular, $x_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para todo $n_k \geq n_0$. Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. ■

Teorema 2.23 *Se uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge para a, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Demonstração: Seja $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge para a. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } k \geq k_\varepsilon.$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } m, n \geq k_\varepsilon.$$

Tomemos $N_\varepsilon = \max\{n_{k_\varepsilon}, n_\varepsilon\}$ e fixemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N_\varepsilon$. Deste modo, se $n \geq N_\varepsilon$, então

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Corolário 2.24 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que não converge para zero, então existem $N, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n| \geq 1/N$ sempre que $n \geq n_0$.*

Demonstração: Para fins de contradição, suponhamos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}$$

seja infinito. Neste caso, existe uma sequência crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais tal que

$$x_{n_k} \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. A sequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ assim obtida converge para 0 e, portanto, do Teorema 2.23, $x_n \to 0$, o que sabemos não ser possível. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)\right\}$$

é finito. Fazendo

$$n_0 - 1 = \max\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)\right\}$$

o resultado segue. ■

Corolário 2.25 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy de termos não-nulos que não converge para zero, então $(x_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ também é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que não converge para 0, segue do Corolário 2.24 que existem um racional $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n| \geq c$ sempre que $n \geq n_0$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < c^2\varepsilon \text{ sempre que } m, n \geq N_\varepsilon.$$

Fazendo $n_\varepsilon = \max\{n_0, N_\varepsilon\}$ e tomando $m, n \geq n_\varepsilon$, temos

$$\left|\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n}\right| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m|\,|x_n|} < \frac{c^2\varepsilon}{c^2} = \varepsilon$$

e o resultado segue. ■

Teorema 2.26 *A relação $\sim$ definida no conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ das sequências de Cauchy de números racionais por*

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração: Sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ e $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$.

• **Reflexividade:** Como $x_n - x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $x - x$ é a sequência identicamente nula. Logo, $x - x \to 0$ e $x \sim x$.

• **Simetria:** Suponhamos $x \sim y$. Então $x_n - y_n \to 0$. Assim

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} -(x_n - y_n) = -\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

e, portanto, $y \sim x$.

• **Transitividade:** Suponhamos que $x \sim y$ e $y \sim z$. Isto significa que $x_n - y_n \to 0$ e $y_n - z_n \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } n > n_1.$$

Do mesmo modo, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } n > n_2.$$

Seja $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$. Então para todo $n > n_\varepsilon$, temos

$$|x_n - z_n| = |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, $x_n - z_n \to 0$, isto é, $x \sim z$. ■

Definição 2.27 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números racionais é dita* **limitada** *se existe $L > 0$ tal que $|x_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.28 *Toda sequência de Cauchy de números racionais é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy de números racionais. Para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < 1 \text{ sempre que } m, n \geq n_1.$$

Assim, se $m \geq n_1$, temos

$$|x_m| = |(x_m - x_{n_1}) - x_{n_1}| \leq |x_m - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|.$$

Fazendo $L = \max\{|x_1|, \ldots, x_{n_1-1}, 1 + |x_n|\}$, o resultado segue. ■

Teorema 2.29 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de Cauchy de números racionais.*

(i) $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy.*

(ii) $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy.*

(iii) Se $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge para 0 e $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(x_n/y_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy.

Demonstração: (i) Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n|, |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } n \geq n_\varepsilon.$$

Assim, se $n \geq n_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| &= |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \\ &\leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, $(x_n + y_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy.

(ii) Segue do Lema 2.9 e do Teorema 2.28 que existe $L > 0$ tal que $|x_n|, |y_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n|, |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

sempre que $n \geq n_\varepsilon$. Assim, se $n \geq n_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} |x_m y_m - x_n y_n| &= |x_m (y_m - y_n) + y_n (x_m - x_n)| \\ &\leq |x_m| |y_m - y_n| + |y_n| |x_m - x_n| \\ &< L\frac{\varepsilon}{2L} + L\frac{\varepsilon}{2L} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

e $(x_n y_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy.

(iii) É uma consequência imediata do item (ii) acima e do Corolário 2.25 ■

Teorema 2.30 *Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ sequências de números racionais.*

(i) *Se $x_n \to a \in \mathbb{Q}$ e $y_n \to b \in \mathbb{Q}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b.$$

(ii) *Se $x_n \to a \in \mathbb{Q}$ e $y_n \to b \in \mathbb{Q}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

(iii) *Se $x_n \to a \in \mathbb{Q}$ e $y_n \to b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

(iv) *Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é limitada e $y_n \to 0$, então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Demonstração: (i) Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a|, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } n \geq n_\varepsilon.$$

Assim, se $n \geq n_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a+b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, $x_n + y_n \to a + b$.

(ii) Segue do Lema 2.9 e do Teorema 2.28 que existe $L > 0$ tal que $|x_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L} \qquad \text{e} \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}$$

sempre que $n \geq n_\varepsilon$. Assim, se $n \geq n_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n (y_n - b) + b(x_n - a)| \\ &\leq |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a| \\ &< L\frac{\varepsilon}{2L} + |b| \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que $x_n y_n \to ab$.

(iii) É suficiente mostrar, em virtude de (ii), que $1/y_n \to 1/b$. Suponhamos $b > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n - b| < \min\left\{\frac{b^2\varepsilon}{2}, \frac{b}{2}\right\} \text{ sempre que } n \geq n_\varepsilon.$$

Em particular, se $n \geq n_\varepsilon$, temos

$$y_n = b - (b - y_n) \geq b - |b - y_n| > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

Logo,

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{y_n b}\right| = \frac{|y_n - b|}{y_n b} < \frac{b^2\varepsilon/2}{b^2/2} = \varepsilon$$

sempre que $n \geq n_\varepsilon$. Isto mostra que $1/y_n \to 1/b$. O caso em que $b < 0$ é análogo.

(iv) Seja $L > 0$ tal que $|x_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n| = |y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{L} \text{ sempre que } n \geq n_\varepsilon.$$

Assim, se $n \geq n_\varepsilon$, temos

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

e $x_n y_n \to 0$. ■

2.4 O corpo dos números reais

A seção precedente estabeleceu a fundação que nos permitirá estabelecer o conjunto dos números reais.

Definição 2.31 *O* **conjunto dos números reais** *é o conjunto quociente*

$$\mathbb{R} = (\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\sim).$$

Notemos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ pode ser identificado como um subconjunto de $\mathbb{R}$ através da correspondência

$$r \in \mathbb{Q} \mapsto [r] \in \mathbb{R},$$

onde $[r]$ é a classe de equivalência da sequência constante $(r, r, r, \ldots)$.

É necessário estabelecer a estrutura algébrica de $\mathbb{R}$. Para isso, definiremos entre as classes de equivalências as operações de adição e multiplicação e uma relação de ordem.

Sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $u = (u_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ e $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de números racionais tais que

$$x \sim u \quad \text{e} \quad y \sim v.$$

Consideremos as sequências

$$x + y = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}, \; u + v = (u_n + v_n)_{n=1}^{\infty}, \; x \cdot y = (x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ e } u \cdot y = (u_n \cdot v_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Como $x \sim u$ e $y \sim v$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (y_n - v_n) = 0$. Assim, do Teorema 2.30,

$$(x_n + y_n) - (u_n + v_n) = (x_n - u_n) + (y_n - v_n) \to 0$$

e

$$x_n y_n - u_n v_n = x_n (y_n - v_n) + v_n (x_n - u_n) \to 0$$

Isto mostra que $[x + y] = [u + v]$ e que $[x \cdot y] = [u \cdot v]$ e nos permite conceber a definição a seguir.

Definição 2.32 *A* **adição** *e a* **multiplicação** *são as operações binárias definidas, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ ([x], [y]) &\mapsto [x + y] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ ([x], [y]) &\mapsto [x \cdot y] \end{aligned}$$

Teorema 2.33 *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, equipado com as operações de adição e multiplicação definidas acima, é um corpo.*

Demonstração: Sejam $t = [(t_n)_{n=1}^{\infty}], u = [(u_n)_{n=1}^{\infty}], v = [(v_n)_{n=1}^{\infty}] \in \mathbb{R}$.

- **Associatividade da adição.**

Notemos que

$$\begin{aligned}(t+u)+v &= [(t_n+u_n)_{n=1}^{\infty}] + [(v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [((t_n+u_n)+v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(t_n+(u_n+v_n))_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(t_n)_{n=1}^{\infty}] + [(u_n+v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= t+(u+v)\,.\end{aligned}$$

- **Existência do elemento neutro da adição.**

Seja $0 = [(0,0,0,\ldots)]$. Então,

$$t+0 = [(t_n+0)_{n=1}^{\infty}] = [(t_n)_{n=1}^{\infty}] = t.$$

- **Existência do elemento simétrico.**

Seja $-t = [(-t_n)_{n=1}^{\infty}]$. Neste caso,

$$t+(-t) = [(t_n+(-t_n))_{n=1}^{\infty}] = [(0,0,0,\ldots)] = 0.$$

- **Comutatividade da adição.**

Notemos que

$$t+u = [(t_n+u_n)_{n=1}^{\infty}] = [(u_n+t_n)_{n=1}^{\infty}] = u+t.$$

A segunda igualdade decorre do fato de o conjunto dos números racionais ser um corpo e a última decorre apenas da definição da adição em $\mathbb{R}$.

- **Associatividade da multiplicação.**

Notemos que

$$\begin{aligned}(t\cdot u)\cdot v &= [(t_nu_n)_{n=1}^{\infty}] \cdot [(v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [((t_nu_n)\,v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(t_n\,(u_nv_n))_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(t_n)_{n=1}^{\infty}] \cdot [(u_nv_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= t\cdot(u\cdot v)\,.\end{aligned}$$

- **Existência do elemento neutro da multiplicação.**

Seja $1 = [(1,1,1,\ldots)]$. Então

$$t\cdot 1 = [(t_n\cdot 1)_{n=1}^{\infty}] = [(t_n)_{n=1}^{\infty}] = t.$$

- **Comutatividade da multiplicação.**

Notemos que

$$t \cdot u = [(t_n u_n)_{n=1}^{\infty}] = [(u_n t_n)_{n=1}^{\infty}] = u \cdot t.$$

A segunda igualdade decorre do fato do conjunto dos números racionais ser um corpo e a última decorre apenas da definição da multiplicação em $\mathbb{R}$.

- **Existência do elemento inverso.**

Se $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, segue do Corolário 2.24 que existe uma sequência $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $t_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t = [(t_n)_{n=1}^{\infty}]$. Fazendo $t^{-1} = \left[(t_n^{-1})_{n=1}^{\infty}\right]$, temos

$$t \cdot t^{-1} = \left[\left(t_n t_n^{-1}\right)_{n=1}^{\infty}\right] = [(1, 1, 1, \ldots)_{n=1}^{\infty}] = 1.$$

- **Distributividade da multiplicação em relação a adição.**

Notemos que

$$\begin{aligned} t \cdot (u + v) &= [(t_n (u + v_n))_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(t_n u_n + t_n v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(t_n u_n)_{n=1}^{\infty}] + [(t_n v_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= t \cdot u + t \cdot v. \end{aligned}$$

■

2.5 Ordem nos reais

Após mostrar que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo, o próximo passo consiste em mostrar que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, isto é, que existe uma relação de ordem $<$ em $\mathbb{R}$ que respeita as operações de corpo. Definiremos o conceito de uma sequência positiva e de número real positivo.

Definição 2.34 *Uma sequência de Cauchy de números racionais $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita* **positiva** *se existem inteiros positivos M e n_0 tais que, se $n > n_0$ então $x_n > 1/M$. Se $s \in \mathbb{R}$, dizemos que s é um número real* **positivo** *se existe uma sequência positiva $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de números racionais tal que $s = [(s_n)_{n=1}^{\infty}]$. Dados dois números reais s, t, dizemos que s é* **maior do que** *t (alternativamente, t é* **menor do que** *t), e representaremos este fato simbolicamente por $s > t$ (alternativamente, $t < s$), se $s - t$ é positivo.*

Notemos que, deste modo, dizer que $s \in \mathbb{R}$ é positivo é o mesmo que afirmar que $s > 0$.

O próximo resultado assegura que, se uma classe de equivalência é positiva, então todas as sequências que a ela pertencem são positivas. Em outras palavras, garante que a relação $<$ é bem definida.

Teorema 2.35 *Sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de Cauchy de números racionais. Se x é positiva e $x \sim y$, então y é positiva.*

Demonstração: Sejam $n_0, M \in \mathbb{N}$ tais que $x_n > 1/M$ sempre que $n > n_0$. Como $x \sim y$, $x_n - y_n \to 0$ e, portanto, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m_0 \Rightarrow |x_n - y_n| < \frac{1}{M(M+1)}.$$

Fazendo $N_0 = \max\{n_0, m_0\}$ observamos que, se $n \geq N_0$, então

$$y_n = x_n - (x_n - y_n) \geq x_n - |x_n - y_n| > \frac{1}{M} - \frac{1}{M(M+1)} = \frac{1}{M+1}.$$

e o resultado segue. ■

Teorema 2.36 *A relação $<$ é transitiva.*

Demonstração: Sejam $x = [(x_n)_{n=1}^{\infty}], y = [(y_n)_{n=1}^{\infty}], z = [(z_n)_{n=1}^{\infty}] \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e $y < z$. Neste caso, existem $M, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$y_n - x_n, z_n - y_n > \frac{1}{M} \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Assim, sempre que $n \geq n_0$, temos

$$z_n - x_n = (z_n - y_n) + (y_n - x_n) > \frac{2}{M} > \frac{1}{M}$$

e, consequentemente, $x < z$. ■

Teorema 2.37 *Sejam $t, u, v \in \mathbb{R}$. Se $t > u$, então $t + v > u + v$.*

Demonstração: Denotando $t = [(t_n)_{n=1}^{\infty}]$, $u = [(u_n)_{n=1}^{\infty}]$ e $v = [(v_n)_{n=1}^{\infty}]$, como $t > u$, isto é, $t - u > 0$, existem $n_0, M \in \mathbb{N}$ tais que

$$t_n - u_n > \frac{1}{M} \text{ sempre que } n \geq n_0. \tag{2.4}$$

Mas

$$t_n - u_n = (t_n + v_n) - (u_n + v_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Segue de (2.4) e (2.5) que $(t + v) - (u + v) > 0$, isto é, $t + v > u + v$. ■

Teorema 2.38 *Sejam $t, u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Se $t > u$, então $t \cdot v > u \cdot v$ se $v > 0$ e $t \cdot v < u \cdot v$ se $v < 0$.*

Demonstração: Façamos $t = [(t_n)_{n=1}^{\infty}]$, $u = [(u_n)_{n=1}^{\infty}]$ e $v = [(v_n)_{n=1}^{\infty}]$. Se $v > 0$, existem $n_0, M \in \mathbb{N}$ tais que

$$t_n - u_n, v_n > \frac{1}{M} \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Daí, se $n \geq n_0$, temos

$$t_n v_n - u_n v_n = (t_n - u_n) v_n > \frac{1}{M^2}$$

e, portanto, $t \cdot v > u \cdot v$. Se $v < 0$, segue do Teorema 2.37 que $0 = v + (-v) < 0 + (-v) = -v$. Neste caso existem $n_0, M \in \mathbb{N}$ tais que

$$t_n - u_n, -v_n > \frac{1}{M} \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Daí, se $n \geq n_0$, temos

$$u_n v_n - t_n v_n = (t_n - u_n)(-v_n) > \frac{1}{M^2}$$

e, portanto, $t \cdot v < u \cdot v$. ∎

Teorema 2.39 $\mathbb{R}$ *tem a* **propriedade arquimediana***, isto é, dados os números reais positivos x e y, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mx > y$.*

Demonstração: Denotemos $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$. Como $x, y > 0$, segue do Corolário 2.24 que existem $N, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n, y_n > \frac{1}{N} \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Por outro lado, sendo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de Cauchy, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n|, |x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $n \geq n_0$, fazendo $m = 2MN$, temos

$$\frac{1}{N} < y_n < M < 2M = m\frac{1}{N} < mx_n$$

e, portanto,

$$mx_n - y_n > M \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Isto mostra que

$$mx - y = [(mx_n - y_n)_n^{\infty}] > 0,$$

como desejado. ∎

Teorema 2.40 (Tricotomia) *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então uma, e apenas uma, das três seguintes possibilidades ocorre:*

$$\textit{ou } x < y, \textit{ ou } x = y, \textit{ ou } y < x.$$

Demonstração: Mostremos inicialmente que, de todo modo, pelo menos uma das três opções ocorre. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$ ou $x = y$, ou $x \neq y$. Caso valha a igualdade, então nada há a verificar. Caso contrário, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências de Cauchy de números racionais tais que $x = [(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ e $y = [(y_n)_{n=1}^{\infty}]$, então estas sequências não são equivalentes com respeito à relação $\sim$ e, portanto, $x - y = [(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}] \neq 0$. Logo, existem um racional $\varepsilon > 0$ e uma sequência crescente $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ de números naturais tais que

$$|x_{m_n} - y_{m_n}| \geq \varepsilon.$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências de Cauchy de números racionais, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{e} \qquad |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{4}$$

sempre que $m, n \geq n_\varepsilon$. Por outro lado,

$$x_{m_{n_\varepsilon}} - y_{m_{n_\varepsilon}} \geq \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad x_{m_{n_\varepsilon}} - y_{m_{n_\varepsilon}} \leq -\varepsilon.$$

(i) Suponhamos que $x_{m_{n_\varepsilon}} - y_{m_{n_\varepsilon}} \geq \varepsilon$. Neste caso,

$$x_n - x_{m_{n_\varepsilon}} > -\frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$, ou, equivalentemente,

$$x_n > x_{m_{n_\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. De modo análogo concluímos que

$$-y_n > -y_{m_{n_\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. Logo, se $n \geq n_\varepsilon$, então

$$x_n - y_n > x_{m_{n_\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{4} - y_{m_{n_\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{4} = \left(x_{m_{n_\varepsilon}} - y_{m_{n_\varepsilon}}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto estabelece que $x = [(x_n)_{n=1}^\infty] > [(y_n)_{n=1}^\infty] = y$.

(ii) Suponhamos que $x_{m_{n_\varepsilon}} - y_{m_{n_\varepsilon}} \leq -\varepsilon$. Neste caso,

$$x_n - x_{m_{n_\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$, ou, equivalentemente,

$$x_n < x_{m_{n_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. De modo análogo concluímos que

$$-y_n < -y_{m_{n_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. Logo, se $n \geq n_\varepsilon$, então

$$x_n - y_n < x_{m_{n_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{4} - y_{m_{n_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{4} = \left(x_{m_{n_\varepsilon}} - y_{m_{n_\varepsilon}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto estabelece que $x = [(x_n)_{n=1}^\infty] < [(y_n)_{n=1}^\infty] = y$.

Provaremos agora que $x = y$, $x < y$ e $x > y$ não podem ocorrer simultaneamente. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ sequências de Cauchy de números racionais tais que $x = [(x_n)_{n=1}^\infty]$ e $y = [(y_n)_{n=1}^\infty]$.

Suponhamos que $x = y$ e $x > y$ ocorram simultaneamente. Segue do fato de que $x > y$ que existem um racional positivo d e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que,

$$x_n - y_n > d \text{ sempre que } n \geq n_1.$$

Por outro lado, como $x = y$, segue que $x_n - y_n \to 0$. Dessa forma, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|x_n - y_n| < d \text{ sempre que } n \geq n_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, inferimos que, se $n \geq n_0$, então

$$x_n - y_n > d \qquad \text{e} \qquad x_n - y_n < d.$$

A Tricotomia em $\mathbb{Q}$ assegura que as desigualdades não podem ser simultaneamente satisfeitas.

De modo análogo verificamos que não ocorre $x = y$ e $x < y$ simultaneamente.

Finalmente, suponhamos que $x < y$ e $y < x$ sejam simultaneamente válidas. Segue de $x < y$ que existem um racional positivo d_1 e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$y_n - x_n > d_1 \text{ sempre que } n \geq n_1.$$

Por outro lado, segue de $y < x$ que existem um racional positivo d_2 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n - y_n > d_2 \text{ sempre que } n \geq n_2.$$

Fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, inferimos que, se $n \geq n_0$, então

$$0 = (y_n - x_n) + (x_n - y_n) > d_1 + d_2,$$

contradizendo o fato de que o racional $d_1 + d_2$ deve ser positivo. ■

Definição 2.41 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Diremos que x é* **menor do que ou igual a** *y, e representaremos este fato simbolicamente por $x \leq y$, se $x < y$ ou $x = y$.*

Teorema 2.42 *A relação $\leq$ define uma relação de ordem total sobre $\mathbb{R}$.*

Demonstração: • **Antissimetria.** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x \leq y \qquad \text{e} \qquad y \leq x.$$

Se fosse $x \neq y$, da definição da relação $\leq$ teríamos $x < y$ e $y < x$, contradizendo a tricotomia em $\mathbb{R}$. Logo, $x = y$.

• **Reflexividade.** Segue imediatamente do fato de que $x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

• **Transitividade.** Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, notemos que

$$\begin{aligned} x = y \text{ e } y = z &\Rightarrow x = z \\ x < y \text{ e } y = z &\Rightarrow x < z \\ x = y \text{ e } y < z &\Rightarrow x < z \\ x < y \text{ e } y < z &\Rightarrow x < z \end{aligned}$$

Isto mostra que, em todo caso, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

O fato de $\leq$ ser uma ordem total é uma consequência imediata da tricotomia ■

2.6 A completude de $\mathbb{R}$

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio. Dizemos que A é **superiormente limitado** se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$, para todo $x \in A$. Um tal b é dito ser uma **cota superior** de A. Analogamente, dizemos que A é **inferiormente limitado** se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in A$. Um tal a é dito ser uma **cota inferior** de A. Diremos ainda que A é **limitado** se for limitado superior e inferiormente e que é **ilimitado** quando não é limitado, isto é, quando não é superiormente limitado ou quando não é inferiormente limitado.

Suponhamos que $A \subset \mathbb{R}$ seja não-vazio e superiormente limitado. Um número real σ será dito um **supremo** para A se cumpre, simultaneamente, as seguintes condições:

(i) σ é uma cota superior de A;

(ii) se b é cota superior de A, então $\sigma \leq b$.

O supremo de um conjunto superiormente limitado A, quando existe, será denotado por $\sup A$. Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e inferiormente limitado, diremos que um número real ι é um **ínfimo** para A se cumpre, simultaneamente, as seguintes condições:

(i) ι é uma cota inferior de A;

(ii) se a é cota inferior de A, então $a \leq \iota$.

O ínfimo de um conjunto inferiormente limitado A, quando existe, será denotado por $\inf A$.

Observação 2.43 *O supremo de um conjunto não-vazio $A \subset \mathbb{R}$, quando existe, é único. Com efeito, suponhamos que existam $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, tais que ambos sejam supremos de A. Assim, usando o fato de σ_1 e σ_2 serem cotas superiores de A, obtemos $\sigma_1 \leq \sigma_2$ e $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Portanto, pela tricotomia, $\sigma_1 = \sigma_2$. De modo análogo concluímos que o ínfimo de um subconjunto não-vazio de números reais, quando existe, é único.*

O objetivo principal desta seção é estabelecer a completude de $\mathbb{R}$ ou, em outras palavras, assegurar que conjuntos não-vazios e superiormente (inferiormente) limitados de números reais possuem supremo (ínfimo).

Definição 2.44 *Dado $r \in \mathbb{R}$ o módulo (ou valor absoluto de r) é o número real*

$$|r| = \max\{-r, r\} = \begin{cases} -r, & \text{se } r < 0, \\ r, & \text{se } r \geq 0. \end{cases}$$

Consideramos agora, em $\mathbb{R}$, uma importante classe de subconjuntos seus denominados **intervalos**. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Chamamos de **intervalos limitados** os seguintes subconjuntos:

(i) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

(ii) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;

(iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;

(iv) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

(v) $[a, a] = \{a\}$.

Dizemos que o comprimento de todos os intervalos acima é $b - a$. Chamamos ainda de **intervalos ilimitados** os seguintes subconjuntos:

(vi) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

(vii) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;

(viii) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;

(ix) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;

(x) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Os intervalos (i), (vi) e $(viii)$ são ditos **intervalos abertos**. Os intervalos (iv), (v), (vii) e (ix) são ditos **intervalos fechados**, sendo o intervalo (v) comumente chamado de **intervalo degenerado**. Os intervalos (ii) e (iii) são ditos **intervalos semi-abertos** (à direita e à esquerda, respectivamente). Finalmente, é usual chamar $\mathbb{R}$ de **intervalo total**.

Observação 2.45 *Sejam $r, a \in \mathbb{R}$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $|a| < r$.

(ii) $a \in (-r, r)$.

De fato,

$$|a| < r \Leftrightarrow -a < r \ e \ a < r \Leftrightarrow -r < a \ e \ a < r \Leftrightarrow a \in (-r, r).$$

Analogamente, $|a| \leq r \Leftrightarrow a \in [-r, r]$.

Dizemos que um subconjunto não-vazio X de números reais é **denso** em $\mathbb{R}$ se todo intervalo aberto (a, b) de $\mathbb{R}$ contém algum ponto de X, isto é, se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$, então existe $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Teorema 2.46 *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Sejam $x = [(x_n)_{n=1}^{\infty}]\,, y = [(y_n)_{n=1}^{\infty}] \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Sejam Neste caso, existem $d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que,

$$y_n - x_n > d \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Por isso, podemos escrever

$$\frac{y_n - x_n}{2} > \frac{d}{2} \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Logo, inferimos que

$$\frac{y_n - x_n}{2} - \frac{d}{4} > \frac{d}{4}.$$

Isto significa que

$$\frac{y - x}{2} > \frac{d}{4} = h. \tag{2.6}$$

Como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nh$. De $x < y$, obtemos $x < nh$. Seja

$$X = \{m \in \mathbb{N} : x < mh\} \subset \mathbb{N}.$$

Acima, vimos que $n \in X$ e, portanto, $X \neq \varnothing$. Pelo Princípio da Boa Ordem, X possui um elemento mínimo p. Seja $r = ph$. então

$$x < ph = r \tag{2.7}$$

e a minimalidade de p em X garante que

$$(p-1)\,h \leq x. \tag{2.8}$$

Consequentemente, de (2.6) e (2.8), temos

$$r = ph = (p-1)h + h \leq x + h < x + \frac{y-x}{2} < x + y - x = y. \tag{2.9}$$

De (2.7) e (2.9) o resultado desejado segue. ∎

Corolário 2.47 *Dados $r \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, existe um número racional q tal que $|r - q| < \varepsilon$.*

Demonstração: A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ assegura a existência de $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$q \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)\,.$$

Neste caso, temos

$$r - \varepsilon < q < r + \varepsilon$$

ou, equivalentemente,

$$-\varepsilon < q - r < \varepsilon.$$

Segue daqui que

$$-\varepsilon < r - q < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|r - q| < \varepsilon,$$

como desejado. ∎

As noções e resultados estabelecidos no contexto de sequências de números racionais são facilmente adaptados para o contexto de números reais. Para evitarmos repetições desnecessárias, tais conceitos e resultados serão diretamente utilizados neste novo contexto.

Corolário 2.48 *Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy de números reais. Então, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \to a$.*

Demonstração: Segue do Corolário 2.47 que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um número racional a_n tal que

$$|u_n - a_n| < \frac{1}{n}.$$

Vejamos que a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ assim definida é uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, segue da propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, que existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ sempre que } m, n \geq M_\varepsilon$$

Então, contanto que $n, m > n_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$, temos

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - u_m) + (u_m - u_n) + (u_n - a_n)| \\ &\leq |u_m - a_m| + |u_m - u_n| + |u_n - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais e, portanto, representa o número real $a = [(a_n)_{n=1}^{\infty}]$. Devemos mostrar que $u_n - a \to 0$, mas isto é praticamente construído na definição de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$. Para ser preciso, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número racional $[(a_n, a_n, a_n, \ldots)]$. Então, evidentemente, $a_n \to a$. Mas, $|u_n - a_n| < 1/n$ por construção e, portanto, $u_n - a_n \to 0$. Segue daqui que $u_n \to a$. ■

Definição 2.49 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais é dita* **não-decrescente** *(respectivamente* **crescente***) se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, (respectivamente $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$). De modo análogo definimos sequência* **não-crescente** *(respectivamente, sequência* **decrescente***).*

Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais é dita monótona se é crescente, decrescente, não-crescente ou não-decrescente.

Definição 2.50 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais, diz-se* **limitada** *se existe $c > 0$, tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

O seguinte resultado relaciona sequências monótonas e limitadas com sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.51 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência monótona e limitada de números reais, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Consideremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja monótona não-decrescente. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada, existe $a > 0$ tal que $x_n \leq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq a.$$

Suponhamos, por absurdo, que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não seja uma sequência de Cauchy. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $m, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq m \geq n_0$ tais que

$$x_n - x_m = |x_n - x_m| \geq \varepsilon.$$

Em particular, para $n_0 = 1$, existem $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_1 \geq m_1 \geq 1$ tais que

$$x_{n_1} - x_{m_1} \geq \varepsilon.$$

Para $n_0 = n_1$, obtemos $m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 \geq m_2 \geq n_1$ tais que

$$x_{n_2} - x_{m_2} \geq \varepsilon.$$

Para $n_0 = n_2$, podemos encontrar $m_3, n_3 \in \mathbb{N}$, com $n_3 \geq m_3 \geq n_2$ tais que

$$x_{n_3} - x_{m_3} \geq \varepsilon.$$

Procedendo deste modo, obtemos sequências $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais, tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$n_{k+1} \geq m_{k+1} \geq n_k \qquad \text{e} \qquad x_{n_k} - x_{m_k} \geq \varepsilon. \tag{2.10}$$

Fazendo indução em k, vejamos que

$$x_{n_k} \geq x_{m_1} + k\varepsilon, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$X = \{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \geq x_{m_1} + k\varepsilon\}.$$

Notemos que $1 \in X$ em decorrência de (2.10). Agora, seja $k \in X$. Daí, de (2.10) e do fato de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ser não decrescente, temos

$$x_{n_{k+1}} \geq x_{m_{k+1}} + \varepsilon = \left(x_{m_{k+1}} - x_{n_k}\right) + x_{n_k} + \varepsilon \geq x_{n_k} + \varepsilon \geq x_{m_1} + k\varepsilon + \varepsilon = x_{m_1} + (k+1)\,\varepsilon.$$

Isto prova que $k + 1 \in X$ e, do Princípio de Indução, $X = \mathbb{N}$. À luz da propriedade arquimediana, podemos tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$k_0\varepsilon > a - x_{m_1}.$$

Por isso, podemos escrever

$$x_{n_{k_0}} \geq x_{m_1} + k_0\varepsilon > x_{m_1} + a - x_{m_1} = a.$$

Deste modo, existe pelo menos um elemento de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que é maior do que a. Isto contradiz o fato de que $x_n \leq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy de números reais. A demonstração para os outros casos possíveis de sequências monótonas é análoga. ■

Relacionando sequências monótonas e limitadas com convergência, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.52 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência monótona e limitada de números reais, então é também uma sequência convergente.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.51, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Daí, como toda sequência de Cauchy de números reais é convergente, inferimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. ∎

Teorema 2.53 (Teorema da Conservação do Sinal) *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $x \neq 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então x_n e x possuem o mesmo sinal.*

Demonstração: Se $x > 0$, fazendo $\varepsilon = x/2$ segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Neste caso,

$$0 < \frac{x}{2} = x - \varepsilon < x_n$$

para todo $n \geq n_0$. Se $x < 0$, fazendo $\varepsilon = -x/2$ segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Neste caso,

$$x_n < x + \varepsilon = \frac{x}{2} < 0.$$

para todo $n \geq n_0$. ∎

Corolário 2.54 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de números reais que convergem para x e y, respectivamente. Se existe N_0 tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N_0$, então $x \leq y$.*

Demonstração: De fato, como $x_n - y_n \to x - y$, se fosse $x > y$, teríamos $x - y > 0$ e, consequentemente, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n - y_n > 0$, o que, evidentemente, é uma contradição. ∎

Corolário 2.55 *Sejam $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais que converge para u e $c \in \mathbb{R}$. Se existe N_0 tal que $u_n \leq c$ (respectivamente, $u_n \geq c$) para todo $n \geq N_0$, então $u \leq c$ (respectivamente, $u \geq c$).*

Demonstração: Fazendo $u_n = x_n$ e $y_n = c$ (respectivamente, $u_n = y_n$ e $x_n = c$) no corolário anterior, o resultado segue. ∎

Corolário 2.56 *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência monótona convergente e seja*

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

o conjunto dos seus termos. Então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup X$$

se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é não-decrescente e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf X$$

se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é não-crescente.

Demonstração: Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Suponhamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja monótona não-decrescente. Para fins de contradição, suponhamos que x não seja uma cota superior de X. Neste caso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x < x_{n_0}$$

e, consequentemente, se $n \geq n_0$, temos

$$x \leq x_n.$$

Seja $d = (x + x_{n_0})/2$. Então

$$x < d < x_{n_0} \leq x_n$$

e, do Corolário 2.55, obtemos

$$d \leq x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

o que, obviamente, é uma contradição. Logo, x é uma cota superior de X. Suponhamos, novamente para fins de contradição, que exista $a < x$ tal que a seja cota superior de X. Fazendo $\varepsilon = (x - a)/2$, segue da convergência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

e, sendo assim, temos, em particular

$$a < \frac{x + a}{2} = x - \varepsilon < x_n, \text{ sempre que } n \geq n_0$$

e isto é uma contradição. Logo, tal cota superior não existe e $x = \sup X$. O caso em que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é não-crescente é análogo. ∎

O resultado a seguir, será útil para provarmos que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente admite supremo.

Teorema 2.57 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ duas sequências de números reais tais que*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é monótona não-decrescente;

(ii) (y_n) é monótona não-crescente;

(iii) $x_m < y_n$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$;

(iv) dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos $y_n - x_n < \varepsilon$.

Então, existe um único número real que pertence a todos os intervalos $[x_m, y_n]$, com $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: As hipóteses do teorema nos garantem que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências monótonas e limitadas (de fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x_1 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_1$), e isto nos assegura a convergência de ambas em $\mathbb{R}$. Do Corolário 2.56 inferimos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Segue de (iii) que, $x_m < y_n$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e, portanto, do Corolário 2.54, temos

$$x \leq y.$$

Notemos que não pode ocorrer $x < y$. De fato, pelo item (iv), se isto ocorrese, fazendo $\varepsilon = (y - x)/2 > 0$ existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, teríamos

$$y_n - x_n < \varepsilon = \frac{y - x}{2}.$$

Daí, usando o Corolário 2.54 novamente, concluiríamos que

$$y_n - x_n \to y - x \leq \varepsilon = \frac{y - x}{2}$$

o que, evidentemente, seria um absurdo. Logo, $x = y$ e

$$x_m \leq x \leq y_n, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, se $a < x$, então a não é cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, portanto, $x_n > a$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a \notin [x_n, y_n]$. Do mesmo modo, se $b > x$, então b não é cota inferior de $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, portanto $y_m < b$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e $b \notin [x_m, y_m]$. Isto encerra a demonstração. ■

Estabelecemos agora o resultado central desta seção

Teorema 2.58 *Seja X um conjunto não-vazio e superiormente limitado de números reais. Então, o supremo de X existe em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja y_1 uma cota superior de X e seja $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que x_1 não seja cota superior de X. Notemos que $x_1 < y_1$. Designemos por y_2 o menor entre os números

$$\frac{y_1 + x_1}{2} \quad \text{e} \quad y_1$$

que seja cota superior de X e por x_2 o maior entre os números e

$$\frac{y_1 + x_1}{2} \quad \text{e} \quad x_1$$

que não seja cota superior de X. Observemos que

$$y_2 = \frac{y_1 + x_1}{2} \Rightarrow x_2 = x_1 \qquad \text{e} \qquad y_2 = y_1 \Rightarrow x_2 = \frac{y_1 + x_1}{2}.$$

Em ambos os casos, temos

$$y_2 - x_2 = \frac{y_1 - x_1}{2} \qquad \text{e} \qquad x_1 \leq x_2 < y_2 \leq y_1.$$

Denotemos por y_3 o menor entre os números

$$\frac{y_2 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_2$$

que seja cota superior de X e por x_3 o maior entre os números

$$\frac{y_2 + x_2}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2$$

que não seja cota superior de X. Observemos que

$$y_3 = \frac{y_2 + x_2}{2} \Rightarrow x_3 = x_2 \qquad \text{e} \qquad y_3 = y_2 \Rightarrow x_3 = \frac{y_2 + x_2}{2}.$$

Em ambos os casos, temos

$$y_3 - x_3 = \frac{y_2 - x_2}{2} = \frac{y_1 - x_1}{2^2} \qquad \text{e} \qquad x_1 \leq x_2 \leq x_3 < y_3 \leq y_2 \leq y_1.$$

De modo geral, supondo definidos

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n < y_n \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1,$$

com

$$y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}},$$

sejam y_{n+1} o menor entre os números

$$\frac{y_n + x_n}{2} \qquad \text{e} \qquad y_n$$

que seja cota superior de X e por x_{n+1} o maior entre os números

$$\frac{y_n + x_n}{2} \qquad \text{e} \qquad x_n$$

que não seja cota superior de X. Observemos que

$$y_{n+1} = \frac{y_n + x_n}{2} \Rightarrow x_{n+1} = x_n \qquad \text{e} \qquad y_{n+1} = y_n \Rightarrow x_3 = \frac{y_n + x_n}{2}.$$

Em ambos os casos, temos

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{y_1 - x_1}{2^n} \qquad \text{e} \qquad x_1 \leq \cdots \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq \cdots \leq y_1.$$

A sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, como foi construída, é monótona não-crescente e a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ monótona não-decrescente. Além disso, observamos que $x_m < y_n$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq y_n \leq \cdots \leq y_3 \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}} = 0,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y_n - x_n < \varepsilon, \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

São satisfeitas, portanto, as hipóteses do Teorema 2.57, o que nos permite concluir que existe um único número real k que pertence a todos os intervalos $[x_n, y_m]$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. O número real k é o supremo de X. De fato, qualquer que seja $x \in X$, tem-se $x \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois y_n é cota superior de X). Passando ao limite, quando $n \to \infty$, obtemos $x \leq k$, isto é, k é cota superior de X. Suponhamos, agora, que exista $s < k$ que seja cota superior de X. Assim, $k - s > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq n_1$, temos

$$|x_n - k| < k - s \Rightarrow s - k < x_n - k < k - s \Rightarrow s < x_n < 2k - s.$$

Logo, $s < x_n$, para todo $n \geq n_1$. Dessa forma, $x < x_n$, para todo $x \in X$ e $n \geq n_1$ (pois, s é cota superior de X). Isto significa que x_{n_1} é cota superior de X o que é um absurdo uma vez que nenhum dos termos da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é cota superior de X. Isto assegura que $k = \sup X$. ■

Um resultado análogo para o ínfimo pode ser estabelecido *mutatis mutandis.*

Capítulo 3

Uma Extensão dos Números Reais: Os Números Hiperreais

Ao fazer os seguintes questionamentos: "Existe um número maior que zero que seja menor do que todo número real maior que zero?" ou "Existe um número maior que zero que seja maior do que todo número real maior que zero?" surge uma grande dúvida e quem conhece os números reais, e imagina a reta dos números reais, tende a responder com "não" às duas perguntas. Mas, se um número maior que zero é muito pequeno, tipo $0,000000001$, você sempre pode dividi-lo em duas partes iguais e obter um número menor ainda. E se um número maior que zero é muito grande, tipo 200.000.000.000, você sempre pode multiplicá-lo por 2 e obter um número maior ainda.

Desde 1961 todo estudante de matemática já pode criar um sistema numérico no qual a resposta às duas perguntas é "sim". Nesse ano, o matemático alemão Abraham Robinson publicou uma série de artigos científicos sobre "Análise não Padrão" ou "Análise Não-Standard" e entrou para a história. Há milênios os matemáticos perseguem essa ideia de "um número infinitamente pequeno"; no século XVII, por exemplo, Leibniz a usou com sucesso para criar sua versão do cálculo diferencial e integral a ideia dos números infinitesimais quando pretendia chegar tão perto do zero quanto se queria. Vários matemáticos interpelaram Leibniz pessoalmente ou por carta para criticar suas ideias e exigir uma explicação do que seriam as tais "quantidades infinitamente pequenas", como ele chamou esses números mágicos, menores que qualquer número real possível e imaginável.

Naquela época, não havia conceitos matemáticos aos quais pudesse recorrer para justificar sua intuição. Abraham Robinson encerrou a discussão ao mostrar que, com as ferramentas da lógica formal moderna, qualquer pessoa pode criar um sistema numérico no qual haja números positivos menores do que qualquer número real positivo, e números positivos maiores do que qualquer número real positivo. Robinson chamou tais sistemas de "sistemas numéricos hiperreais".

Nesse novo sistema definiu-se como infinitésimo um número maior que zero que seja menor que qualquer número real positivo e infinito como um número maior que zero e maior que qualquer número real maior que zero. A criação dos números hiperreais faz uso de sequências reais de um modo diferente do que era usado na época, pois a preocupação de Abraham Robinson não era com a convergência delas, mas como cada sequência poderia representar um número real standard e um números real não-standard, que seriam uma extensão do primeiro conjunto. O corpo de sequências a valores reais identificaria cada número real com uma sequência constante cujas entradas são o próprio número.

Vamos considerar o conjunto das sequências a valores reais, que será denotado por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com a adição e multiplicação feitas termo a termo. Claramente, se somarmos ou multiplicarmos duas sequências a valores reais termo a termo conseguiremos outra sequência a valores reais, o que nos permite falar que o conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um conjunto fechado com relação a essas duas operações. Do mesmo modo, toda sequência a valores reais tem um inverso aditivo. Basta tomarmos o inverso aditivo de cada entrada da sequência. Deste modo, o conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ forma um anel comutativo com identidade. Porém se quisermos verificar se o nosso conjunto é um corpo (o que seria conveniente), esbarramos no problema dos divisores de zero, pois podemos ter duas sequências não-nulas cujo produto é nulo. Considere, por exemplo, as sequências $a = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ e $b = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$. Então,

$$ab = (0 \cdot 1, 1 \cdot 0, 0 \cdot 1, 1 \cdot 0, \ldots) = (0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Deste modo, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não seria um corpo.

Para resolver esse problema foi desenvolvida uma teoria (a dos números hiperreais). Primeiramente é necessário introduzir a noção de ultrafiltro livre.

Definição 3.1 *Um* **filtro** $\mathcal{U}$ *sobre um conjunto não-vazio* J *é um subconjunto de* $\mathcal{P}(J)$*, o conjunto das partes de* J*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\varnothing \notin \mathcal{U}$;

(ii) Se $A, B \in \mathcal{U}$*, então* $A \cap B \in \mathcal{U}$ *(propriedade da intersecção finita);*

(iii) Se $A \in \mathcal{U}$ *e* $A \subset B \subset J$*, então* $B \in \mathcal{U}$ *(propriedade de superconjunto).*

Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(J)$ um filtro.

- A condição *(iii)* acima garante que $J \in \mathcal{U}$.
- O conjunto $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cup \{\varnothing\}$ é denominado filtro **impróprio**.
- Dizemos que $\mathcal{U}$ é um filtro principal se existe $E \subset J$, $E \neq \varnothing$, tal que

$$\mathcal{U} = \{X \subset \mathcal{P}(J) : E \subset X\}.$$

  Caso contrário, dizemos que $\mathcal{U}$ é **não-principal**;
- Dizemos que $\mathcal{U}$ é **livre** se $\bigcap_{X \in \mathcal{U}} X = \varnothing$;
- Dizemos que $\mathcal{U}$ é **maximal** se $\mathcal{U}$ não é subconjunto de qualquer outro filtro sobre J.

Exemplo 3.2 Seja J um conjunto infinito. Dizemos que $A \subset J$ é cofinito se o seu complementar A^c é finito. Se $\mathcal{U}$ é a família de todos os subconjuntos cofinitos de J, então U é um filtro. De fato,

- $\varnothing \notin \mathcal{U}$ pois $\varnothing^c = J$ é infinito;

- Dados dois conjuntos cofinitos A e B, segue das Leis de De Morgan que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

  Como A^c e B^c são finitos, o mesmo ocorre com $A^c \cap B^c$. Logo, $A \cup B$ é cofinito, ou seja, $A \cup B \in \mathcal{U}$;

- Sejam $A \in \mathcal{U}$ e $B \subset J$. Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$ e, sendo A^c finito, concluímos que B^c é finito e, portanto, que B é cofinito e, sendo assim, um elemento de $\mathcal{U}$.

Definição 3.3 *Um filtro $\mathcal{U}$ será chamado* **ultrafiltro** *sobre J se, para todo $A \subset J$ temos $A \in J$ ou $A^c \in J$.*

Posteriormente veremos que os ultrafiltros são os filtros maximais.

Definição 3.4 *Um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre J será chamado* **livre** *se ele não contém subconjuntos finitos de J.*

O lema abaixo garante que, dado qualquer ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre J e qualquer coleção finita de subconjuntos disjuntos de J cuja união é J, resulta que exatamente um desses subconjuntos deverá pertencer ao ultrafiltro.

Lema 3.5 *Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre J e seja $\{A_1, \ldots, A_n\}$ uma coleção finita de subconjuntos dois a dois disjuntos tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = J$. Então existe um único i tal que $A_i \in \mathcal{U}$.*

Demonstração: Vejamos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$. Para fins de contradição, suponhamos que $\mathcal{U}$ não contenha nenhum dos subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$. Então, $\mathcal{U}$ precisa conter o complementar de cada um deles, ou seja, os conjuntos $A_1^c, \ldots, A_n^c$ estão em $\mathcal{U}$. Portanto, $\mathcal{U}$ contém a intersecção desses complementares dada por

$$A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = J^c = \varnothing,$$

o que contradiz claramente o fato de $\varnothing$ não pode pertencer a $\mathcal{U}$. Logo, $\mathcal{U}$ contém um dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$. Agora suponhamos que $\mathcal{U}$ contenha A_i e A_j com $i \neq j$. Então $\mathcal{U}$ precisa também conter $A_i \cap A_j$. Porém, A_i e A_j são disjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \varnothing$ e $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Logo, $\mathcal{U}$ pode conter apenas um dos subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$. ■

O lema a seguir mostra que qualquer filtro pode ser estendido a um ultrafiltro. Basta utilizarmos o Lema de Zorn para provar a existência de um filtro maximal e depois disso verificarmos que esse filtro maximal satisfaz a propriedade de ultrafiltro.

Lema 3.6 *Sejam J um conjunto não-vazio e $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(J)$ um filtro sobre J. Então $\mathcal{U}$ pode ser estendido a um ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre J.*

Demonstração: Vejamos, inicialmente a existência de um filtro maximal (no sentido da inclusão) que contém $\mathcal{U}$. Para tanto, consideremos o conjunto Φ dos filtros sobre J que contém $\mathcal{U}$. A coleção Φ é claramente não-vazia pois $\mathcal{U} \in \Phi$. Considerando sobre Φ a ordem parcial definida pela inclusão, seja $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ uma cadeia em Φ. A cadeia $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ é um subconjunto totalmente ordenado de Φ. Afirmamos que o conjunto

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$$

é um limitante superior da cadeia. De fato, como $\varnothing \notin \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$ (pois cada $\mathcal{F}_i$ é um filtro), concluímos que $\varnothing \notin \mathcal{G}$. Similarmente, para todos $A \in \mathcal{G}$, temos $A \in \mathcal{F}_i$ para algum $i \in I$. Então, para todo $B \subset J$ tal que $A \subset B$, temos $B \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{G}$, o que assegura que $\mathcal{G}$ possui a propriedade de superconjunto. Por último, sejam $A, B \in \mathcal{G}$. Assim, existem $i, j \in I$ tais que $A \in \mathcal{F}_i$ e $B \in \mathcal{F}_j$. Como $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ é uma cadeia, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$. Então $A, B \in \mathcal{F}_j$ e, portanto, $A \cap B \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{G}$, garantindo que $\mathcal{G}$ possui a propriedade da interseção finita. Inferimos, assim, que $\mathcal{G}$ é um filtro em Φ que é, claramente, um limitante superior para a cadeia $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$. Segue então do Lema de Zorn que Φ possui um elemento maximal $\mathcal{F}$.

Finalmente, vejamos que o filtro maximal $\mathcal{F}$ encontrado é um ultrafiltro. Para isso, devemos verificar que, para todo $X \subset J$, ou $X \in \mathcal{F}$ ou $X^c \in \mathcal{F}$. Seja $X \subset J$ e suponha que $\mathcal{F}$ não contenha nem X e nem X^c. Então existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap X = \varnothing$ pois, caso contrário,

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{X \cap A : A \in \mathcal{F}\}$$

seria um filtro que contém $\mathcal{F}$ propriamente, o que violaria a maximalidade de $\mathcal{F}$. Similarmente, deve existir $B_0 \in \mathcal{F}$ tal que $B_0 \cap X^c = \varnothing$. Pela propriedade da interseção finita devemos ter $A_0 \cap B_0 \neq \varnothing$. Mas isso é impossível pois $A_0 \subset X^c$ e $B_0 \subset X$. Logo $\mathcal{F}$ precisa conter X ou X^c. ■

A existência de ultrafiltros livres (que não contém subconjuntos finitos de J) segue imediatamente do lema anterior. Basta tomar o filtro consistindo de todos os conjuntos cofinitos (cujo complementar é finito) e estender a um ultrafiltro. Como esse filtro não terá conjuntos finitos e o ultrafiltro resultante contém esses conjuntos ou seus complementares, o ultrafiltro maximal resultante poderá ser formado apenas por conjuntos infinitos, o que é uma condição para termos um ultrafiltro livre.

Agora precisamos juntar a ideia de ultrafiltro livre vista até aqui e as sequências de números reais que representarão os números hiperreais. Para isso, nós precisamos saber quando igualar duas sequências criando uma relação de equivalência.

Mas quando duas sequências serão iguais? Quando o conjunto dos índices dos termos iguais (que é um subconjunto dos números naturais) formar um conjunto grande (todos exceto por uma quantidade finita de termos).

Para completar é primordial entendermos que justamente os subconjuntos grandes de $\mathbb{N}$ serão o ultrafiltro procurado, em relação ao qual definiremos abaixo a equivalência módulo ultrafiltro.

Definição 3.7 (Equivalência Módulo Ultrafiltro) *Dados um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$, e sequências $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definimos a relação $\stackrel{\mathcal{U}}{=}$ por*

$$a \stackrel{\mathcal{U}}{=} b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Vejamos que a relação acima definida é, de fato, uma relação de equivalência:

- **Reflexividade:** Tomando uma sequência $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, observamos que

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = a_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$$

e, portanto, $a \overset{\mathcal{U}}{=} a$.

- **Simetria:** Para quaisquer sequências a e b em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tais que $a \overset{\mathcal{U}}{=} b$, temos

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Contudo

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} = \{n \in \mathbb{N} : b_n = a_n\}$$

e, portanto, $b \overset{\mathcal{U}}{=} a$.

- **Transitividade:** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tais que $a \overset{\mathcal{U}}{=} b$ e $b \overset{\mathcal{U}}{=} c$. Então os conjuntos $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : b_n = c_n\}$ são ambos elementos de $\mathcal{U}$. Notemos que, se $n \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2$, então $a_n = c_n$ e, portanto

$$(\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2) \subset \{n \in \mathbb{N} : a_n = c_n\}$$

e, da proprieade de super conjunto, $\{n \in \mathbb{N} : a_n = c_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, $a \overset{\mathcal{U}}{=} c$ e a relação $\overset{\mathcal{U}}{=}$ é transitiva.

Denotaremos a classe de equivalência da sequência a por $[a]$.

Definição 3.8 *O* **conjunto dos números hiperreais** (**módulo** $\mathcal{U}$) *é o conjunto quociente* $\mathbb{H}_{\mathcal{U}} = \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \overset{\mathcal{U}}{=}\right)$. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *pode ser visto como um subconjunto de* $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ *pela identificação do número real* r *com a classe* $[r] = [(r, r, r, \ldots)]$.

Desejamos definir, agora, as operações de adição e multiplicação que farão deste conjunto um corpo.

Lema 3.9 *As correspondências*

$$([x], [y]) \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}} \times \mathbb{H}_{\mathcal{U}} \mapsto [x] + [y] = [x + y] \qquad e \qquad ([x], [y]) \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}} \times \mathbb{H}_{\mathcal{U}} \mapsto [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$

estão bem definidas sobre $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$.

Demonstração: Devemos mostrar que as correspondências em questão não dependem da escolha dos representantes das classes. Sejam $w, x, y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tais que $x \overset{\mathcal{U}}{=} w$ e $y \overset{\mathcal{U}}{=} z$. Isso significa que $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : w_n = x_n\} \in \mathcal{U}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : y_n = z_n\} \in \mathcal{U}$. Então, pela propriedade da interseção finita, sabemos que $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 \in \mathcal{U}$. Sejam

$$\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N} : x_n + y_n = w_n + z_n\} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{N}_4 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \cdot y_n = w_n \cdot z_n\}.$$

É evidente que

$$(\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2) \subset \mathbb{N}_3 \quad \text{e} \quad (\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2) \subset \mathbb{N}_4.$$

Segue da propriedade de super conjunto que $\mathbb{N}_3, \mathbb{N}_4 \in \mathcal{U}$ e, consequentemente,

$$w + y \overset{\mathcal{U}}{=} x + z \quad \text{e} \quad w \cdot y \overset{\mathcal{U}}{=} x \cdot z,$$

como queríamos mostrar. ■

Dito de outro modo, verificamos que dados $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, temos

$$[(a_n)_{n=1}^{\infty}] + [(b_n)_{n=1}^{\infty}] = [(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty}] = [(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}]$$

e

$$[(a_n)_{n=1}^{\infty}] \cdot [(b_n)_{n=1}^{\infty}] = [(a_n)_{n=1}^{\infty} \cdot (b_n)_{n=1}^{\infty}] = [(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}].$$

Nosso próximo passo é verificar que $(\mathbb{H}_{\mathcal{U}}, +, \cdot)$ é um corpo.

Teorema 3.10 $(\mathbb{H}_{\mathcal{U}}, +, \cdot)$ *é um corpo.*

Demonstração:

- **Associatividade da adição.**

Sejam $[a], [b], [c] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
([a] + [b]) + [c] &= [(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}] + [(c_n)_{n=1}^{\infty}] \\
&= [((a_n + b_n) + c_n)_{n=1}^{\infty}] \\
&= [(a_n + (b_n + c_n))_{n=1}^{\infty}] \\
&= [(a_n)_{n=1}^{\infty}] + [(b_n + c_n)_{n=1}^{\infty}] \\
&= [a] + ([b] + [c])
\end{aligned}$$

e a adição é associativa.

- **Existência do elemento neutro da adição.**

O elemento neutro da adição é $[0]$. De fato, se $[a] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$, então

$$[0] + [a] = [(0 + a_n)_{n=1}^{\infty}] = [(a_n)_{n=1}^{\infty}] = [a].$$

- **Existência do elemento simétrico.**

É evidente que, se $[a] = [(a_n)_{n=1}^{\infty}] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$, então o seu simétrico será $-[a] = [-a] = [(-a_n)_{n=1}^{\infty}]$.

- **Comutatividade da adição.**

Dados $[a], [b] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$, temos

$$[a] + [b] = [(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}] = [(b_n + a_n)_{n=1}^{\infty}] = [b] + [a]$$

e a adição é comutativa.

- **Associatividade da multiplicação.**

Sejam $[a], [b], [c] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$. Assim

$$\begin{aligned}([a]\cdot[b])\cdot[c] &= [(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}]\cdot[(c_n)_{n=1}^{\infty}]\\ &= [((a_n\cdot b_n)\cdot c_n)_{n=1}^{\infty}]\\ &= [(a_n\cdot(b_n\cdot c_n))_{n=1}^{\infty}]\\ &= [(a_n)_{n=1}^{\infty}]\cdot[(b_n\cdot c_n)_{n=1}^{\infty}]\\ &= [a]\cdot([b]\cdot[c])\end{aligned}$$

e a multiplicação é associativa.

- **Existência do elemento neutro da multiplicação.**

O elemento neutro da multiplicação é $[1]$. De fato, se $[a] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$, então

$$[1]\cdot[a] = [(1\cdot a_n)_{n=1}^{\infty}] = [(a_n)_{n=1}^{\infty}] = [a].$$

- **Comutatividade da multiplicação.**

Dados $[a], [b] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$, temos

$$[a]\cdot[b] = [(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}] = [(b_n\cdot a_n)_{n=1}^{\infty}] = [b]\cdot[a]$$

e a adição é comutativa.

- **Existência do elemento inverso.**

Seja $[a] = [(a_n)_{n=1}^{\infty}] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}} \setminus \{[0]\}$. Neste caso

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \notin \mathcal{U}.$$

Contudo, sendo $\mathcal{U}$ um utrafiltro, temos

$$\mathbb{N}_0^c = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de números reais definida por

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \in \mathbb{N}_0,\\ a_n^{-1} & \text{se } n \in \mathbb{N}_0^c.\end{cases}$$

Então

$$\mathbb{N}_0^c = \{n \in \mathbb{N} : a_n x_n = 1\}$$

e, consequentemente, se $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, temos

$$[a]\cdot[x] = 1.$$

- **Distributividade da multiplicação em relação a adição.**

Sejam $[a], [b], [c] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$. Então

$$\begin{aligned} [a]\cdot([b]+[c]) &= [(a_n)_{n=1}^{\infty}]\cdot[(b_n+c_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(a_n(b_n+c_n))_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(a_nb_n+a_nc_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}]+[(a_nc_n)_{n=1}^{\infty}] \\ &= [a]\cdot[b]+[a]\cdot[c]. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova de que $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ é um corpo. ■

Definição 3.11 (Ordem Módulo Ultrafiltro) *Dados um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$, e sequências $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definimos a relação $\overset{\mathcal{U}}{\leq}$ por*

$$a \overset{\mathcal{U}}{\leq} b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Notemos que, se $a, b, c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ são tais que $a = b \overset{\mathcal{U}}{\leq} c$, então $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} c$. De fato, se

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq c_n\},$$

então $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2 \in \mathcal{U}$ e, consequentemente, $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 \in \mathcal{U}$. Se $n \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2$, então

$$a_n = b_n \leq c_n,$$

ou seja,

$$a_n \leq c_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2.$$

Logo,

$$(\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2) \subset \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n\} = \mathbb{N}_3$$

e, consequentemente, $\mathbb{N}_3 \in \mathcal{U}$ e $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} c$. De modo análogo verificamos que, se $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} b \overset{\mathcal{U}}{=} c$, então $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} c$.

Podemos então considerar a relção em $\leq$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ definida por

$$[(a_n)_{n=1}^{\infty}] \leq [(b_n)_{n=1}^{\infty}] \Leftrightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \overset{\mathcal{U}}{\leq} (b_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Vamos mostrar abaixo que a relação $\leq$ definida acima constitui uma ordem total sobre $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$.

- **Reflexividade:** Seja $[a] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$. Então,

  $$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_n\} \in \mathcal{U}$$

  e, por conseguinte, $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} a$ e $[a] \leq [a]$.

- **Antissimetria:** Sejam $[a], [b] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ tais que $[a] \leq [b]$ e $[b] \leq [a]$. Assim, $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} b$ e $b \overset{\mathcal{U}}{\leq} a$ de onde segue que

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\}, \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{U}.$$

Logo $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 \in \mathcal{U}$ e, se $n \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2$, então, pela tricotomia em $\mathbb{R}$,

$$a_n = b_n.$$

Daí

$$(\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2) \subset \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} = \mathbb{N}_3$$

e, sendo assim, $\mathbb{N}_3 \in \mathcal{U}$ e $a \overset{\mathcal{U}}{=} b$, isto é, $[a] = [b]$.

- **Transitividade:** Sejam $[a], [b], [c] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$, tais que $[a] \leq [b]$ e $[b] \leq [c]$. Assim,

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\}, \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq c_n\} \in \mathcal{U}.$$

Logo $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 \in \mathcal{U}$ e, se $n \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2$, então,

$$a_n \leq b_n \quad \text{e} \quad b_n \leq c_n.$$

Da transitividade da relação $\leq$ em $\mathbb{R}$ concluímos então que

$$a_n \leq c_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2.$$

Daí,

$$(\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2) \subset \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n\} = \mathbb{N}_3$$

e, sendo assim, $\mathbb{N}_3 \in \mathcal{U}$ e $a \overset{\mathcal{U}}{\leq} c$, ou seja, $[a] \leq [c]$.

Vejamos, agora, que a relação $\leq$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ define sobre este conjunto uma ordem total. Para isso, consideremos $[a], [b] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ e

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\}.$$

Pela maximalidade do ultrafiltro $\mathcal{U}$, inferimos que ou $\mathbb{N}_0 \in \mathcal{U}$ ou $\mathbb{N}_0^c \in \mathcal{U}$. Se $\mathbb{N}_0 \in \mathcal{U}$, então $[a] \leq [b]$. Se $\mathbb{N}_0^c \in \mathcal{U}$, então

$$\mathbb{N}_0^c = \{n \in \mathbb{N} : b_n < a_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\}$$

e, deste modo,

$$\{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{U}$$

o que implica em $[b] \leq [a]$.

Resta-nos mostrar de forma rigorosa a existência de números infinitos e números infinitesimais. Para isso, introduziremos a notação $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ para o conjunto dos números **hiperreais standard**, que é a imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$. Similarmente, $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}$ denota a imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$. Definiremos abaixo o que são os números infinitos e infinitesimais.

Definição 3.12 (Números Infinitos e Números Infinitesimais) *Um número hiperreal não-negativo* $[A] \in \mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ *é dito* **infinitesimal** *se* $[a] \leq [n]^{-1}$ *para todo* $[n] \in \mathbb{N}_{\mathcal{U}}$ *e é dito* **infinito** *se* $[n] \leq [a]$ *para todo* $[n] \in \mathbb{N}_{\mathcal{U}}$.

Seja $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de termo geral $\omega_n = n$. Sejam $\omega = [(\omega_n)_{n=1}^{\infty}]$ e, seja $[j]$ um número natural standard arbitrário. Então, $\omega \geq 0$, $\omega \neq 0$, $\omega_n < j$ sempre que $n < j$ e $\omega_n \geq j$ sempre que $n \geq j$. Assim, o conjunto de índices para os quais $\omega_n < j$ é finito. Porém, como já visto, qualquer ultrafiltro livre precisa conter todos os subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$, de onde segue que $\{n \in \mathbb{N} : \omega_n \geq j\} \in \mathcal{U}$. Portanto, para qualquer número natural standard $[j]$, temos $[j] \leq [\omega]$, o que faz com que $[\omega]$ seja um número infinito. Similarmente, vamos considerar o número hiperreal $1/\omega = [(1/\omega_n)_{n=1}^{\infty}]$. É evidente que $1/\omega \geq 0$ e que $1/\omega \neq 0$. Desta vez, para qualquer número natural standard $[j]$, sabemos que $1/\omega_n \leq 1/j$ sempre que $n \geq j$ e $1/\omega_n > 1/j$ sempre que $n < j$. Portanto, o conjunto de índices para os quais $1/\omega_n > 1/j$ é finito, o que significa que $\{n \in \mathbb{N} : 1/\omega_n \leq 1/j\} \in \mathcal{U}$. Logo, $1/\omega \leq [j]^{-1}$ para todo $[j] \in \mathbb{N}_{\mathcal{U}}$ e isso significa que $1/\omega$ é um número infinitesimal.

Para finalizar, como o conjunto $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ dos números hiperreais contém números da forma $\omega \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $\mathbb{N}$ é limitado em $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ e sendo assim, $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ não é arquimediano e, como consequência, $\mathbb{H}_{\mathcal{U}}$ não é completo.

Capítulo 4

O Ensino dos Números Reais no Ensino Médio

O desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos, como foi mostrado no Capítulo 1, mostra a necessidade humana de construir novos conjuntos, pois suas descobertas e aplicações favoreceram o desenvolvimento de nossa civilização. Após essa excursão histórica de séculos descrita anteriormente, como definir esses números na Educação Básica?

Mesmo sendo um dos mais importantes conjuntos numéricos, devido a sua complexidade, a compreensão dos números reais tem sido um obstáculo tanto para os alunos possuem dificuldades em transpor quanto para os professores que possuem dificuldades em tratar o assunto com clareza. O seu entendimento é de suma importância no ensino de Matemática, o seu estudo permite também o desenvolvimento da lógica e do raciocínio matemático.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n^o 9.394/96) afirma que o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, afim de garantir a continuidade de estudos, mas também a preocupação com a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

De acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio do Ministério da Educação (MEC), espera-se que ao final do Ensino Médio os estudantes consigam usar a Matemática para resolver problemas encontrados do cotidiano; aplicá-la na modelagem de fenômenos em outras áreas do conhecimento; perceber a Matemática como uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; compreender a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico

Primeiramente vamos analisar o que diz Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) sobre o ensino dos números reais propõem na Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998) recomendam a introdução do estudo de números reais já no 4^o ciclo (a partir da 7a série) e os PCN para o Ensino Médio - PCNEM (2000, p.114 e 116) sugerem ainda a utilização de vários registros de representação, bem como a identificação de um objeto nas suas diferentes representações:

> Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentadas sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez [...] Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto [...] Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra, bem como, localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações [...] Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.

"Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente" (PCNs, 1998).

Há ainda a sugestão nos PCNs que se deve trabalhar com os números irracionais como pontos da reta real, assim como é feito com os números racionais, fazendo com que o aluno compreenda a necessidade do irracional na construção do conjunto dos números reais, uma vez que muito usualmente o número irracional é trabalhado com dois conceitos que são: os números irracionais são números que não podem ser expressos na razão entre dois inteiros e os irracionais são números decimais infinitos não-periódicas.

> O conhecimento dos irracionais não é intuitivo, o formalismo matemático que está presente no estudo desse conjunto numérico apresenta diversos desafios para a Educação Básica, então considerar os números irracionais como números que não podem ser expressos na razão entre dois inteiros ou como números decimais infinitos não-periódicas significa desconsiderar o desenvolvimento da estrutura dos irracionais, levando o aluno a entender que estes números existem só na abstração, são números invisíveis, quando na verdade esses números aparecem em muitas situações problemas, como o número π.

Com o tempo o estudo dos números se transformou de algo empírico ou experimental a uma ciência dedutiva e abstrata, que foi evoluindo de maneira gradual até chegar ao conceito formal de número real. Então, partindo desse ponto, o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998) no que se refere à Matemática diz que:

O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência.

E reforça ainda que esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber.

Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações, mesmo que uma certa parcela de professores e alunos desconheçam a verdadeira importância em aprender os números reais, é necessário estudar a história dos números reais para que se possa acompanhar o desenvolvimento do pensamento sobre esse conceito, assim como sua necessidade na evolução humana.

Capítulo 5

Considerações Finais

Este trabalho, a respeito da construção dos números reais, tem caráter importante pois os números costumam ser o primeiro contato de qualquer pessoa com a Matemática, mas com o passar dos anos escolares, durante a educação básica, vai se percebendo um certo distanciamento e repulsa dos estudantes com relação ao tema. Talvez pelo fato dos conceitos irem ficando mais abstratos e mais distantes de uma realidade palpável aos estudantes.

Prova desse distanciamento são as avaliações externas feitas pelo Governo do Estado do Maranhão, uma delas o Sistema Estadual de Avaliação do Maranhão (SEAMA) que foi implementado, em 2019, pela Secretaria de Estado da Educação do Maranhão (SEDUC-MA), que apontam as dificuldades dos estudantes ao resolver itens onde a habilidade sondada é a resolução de operações com os números racionais.

Ou seja, há indícios de que existe uma fragilidade a ser combatida e por esse motivo é essencial ter professores que conheçam essas construções dos conjuntos numéricos a fim de aprimorar suas práticas e facilitar o processo de ensino-aprendizagem das redes públicas. Não apenas recomenda-se o conhecimento das construções matemáticas a rigor, mas também levantamos a importância de atrelar esse saber matemático, que foi mudando e se aprimorando ao longo dos séculos, a um contexto histórico.

Inserir a História da Matemática é um valioso elemento para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, nas diferentes áreas e nos diversos níveis, o que permite compreender as origens das ideias que deram forma à nossa cultura, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem bem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Referências Bibliográficas

[1] AGUILAR, I.; DIAS, M. S. *A Construção dos Números Reais e suas Extensões*. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste. Universidade Federal Fluminense, 2015.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. 1 ed. São Paulo, SP. Editora Edgard Blücher, 2001.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática* / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

[4] BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médi*o. Brasília: MEC, 2002.

[5] BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 2002.

[6] Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (*Orientações curriculares para o Ensino Médio*; volume 2)

[7] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. 5ª edição. ed. LTC. Rio de Janeiro - RJ.

[8] KEMP, T. *Cauchy's construction of* $\mathbb{R}$. Lecture Notes. Department of Mathematics. University of California, San Diego, 2014.

[9] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Tópicos de História da Matemática*. - Rio de Janeiro: SBM, 2012. 1ª edição. Coleção PROFMAT. 285 p.

[10] SOUTO, Leonardo. *O ensino dos números reais: dificuldades epistemológica e histórica do conceito de número real*. 2018. - PUC-GO, [S. l.], 2018.