



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Gabriel Araújo dos Santos

Rigidez de Superfícies Minimizantes de Área em Variedades Tridimensionais

São Luís - MA

2024

Gabriel Araújo dos Santos

Rigidez de Superfícies Minimizantes de Área em Variedades Tridimensionais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

dos Santos, Gabriel.

Rigidez de Superfícies Minimizantes de Área em
Variedades Tridimensionais / Gabriel dos Santos. - 2024.
61 f.

Orientador(a): Ivaldo Nunes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2024.

1. Curvatura Escalar. 2. Estabilidade. 3. Rigidez.
4. Superfície Mínima. 5. . I. Nunes, Ivaldo. II.
Título.

Gabriel Araújo dos Santos

Rigidez de Superfícies Minimizantes de Área em Variedades Tridimensionais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 23 de Agosto de 2024:

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

Orientador

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

**Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo
Gouveia**

Examinador Externo

Universidade Federal de Alagoas - UFAL

**Prof^a. Dr^a. Maria de Andrade Costa e
Silva**

Examinador Externo

Universidade Federal de Sergipe - UFS

São Luís - MA
2024

À minha mãe e ao meu filho, Rafael.

Agradecimentos

Não poderia ser diferente, agradeço primeiramente a Deus, pois sem a Sua misericórdia e bondade eu não teria conseguido absolutamente nada até aqui. Ele me deu forças para lutar quando pensei que não conseguiria mais nada. Obrigado, Senhor.

Não é possível citar o nome de todos, pois isso necessitaria de muitas páginas, mas agradeço a cada membro da minha família. Em especial ao meu pai, Gean Sidney, ao meu, irmão, Dyogo Rafael e à minha esposa Charlyenne, esta que esteve ao meu lado presenciando e ajudando-me a enfrentar todas as adversidades dos últimos tempos.

Agradeço à minha guerreira, minha mãe, Delma . Sem ela é muito provável que eu estaria totalmente arruinado. Com certeza, Deus me privilegiou em tê-la como mãe. Agradeço por todo o suporte, amor, carinho, compreensão e educação que a senhora me deu. sem você eu não conseguiria terminar este trabalho.

Agradeço ao meu presente de Deus, Meu filho, Rafael. Sem dúvidas você foi uma fonte muito grande de motivação para a conclusão desta dissertação. Obrigado, filho.

Agradeço à minha médica e amiga, Ercínia, por todo suporte, apoio, compreensão e carinho nos últimos tempos.

Não poderia deixar de agradecer à Janaina por todo seu incentivo, motivação, encorajamento e carinho dados nesta reta final.

Agradeço ao meu orientador, o professor Ivaldo, pois ele foi muito compreensivo comigo durante os momentos difíceis. Além disso, sua orientação foi excepcional, uma vez que pude receber inúmeros conselhos valiosos sobre a matemática e sobre a vida, pude vê-lo pensar em problemas e, assim, enriquecer meu repertório. Obrigado, professor. O senhor não sabe o quando me inspiro em você.

Agradeço à professora Vanessa, pois, desde a graduação ela me ajuda com vários e valiosos conselhos. Obrigado, professora.

Agradeço ao professor Nivaldo Muniz pelas dicas valiosíssimas que me deu. A nossa conversa na entrada do CCET ficará marcada para sempre em minha vida.

Agradeço ao professor Anselmo Raposo, um cara incrível também. Obrigado, por toda a compreensão que teve comigo e por todos os conhecimentos que compartilhou.

Agradeço ao professor Ermerson Araújo pelos momentos de descontração, pelas dicas neste trabalho e pelos conselhos matemáticos.

Agradeço aos professores Gustavo Silvestre e Pedro Henrique, pois, no primeiro semestre de mestrado puderam compartilhar um pouco de conhecimento comigo. Além

disso, deram-me dicas importantes para a vida.

Agradeço aos professores José Santana e Marcos Araújo pelos conhecimentos compartilhados no segundo semestre de mestrado.

Agradeço a todos os professores do PPGMAT-UFMA, os quais são grandes seres humanos. Destaco o nosso coordenador, o professor Giovane, que me deu todo o suporte quando precisei. Além disso, sempre está em busca de melhorar nosso programa de pós-graduação.

Agradeço ao professor Abrão e à professora Maria por dedicarem um pouquinho de seus preciosos tempos para participarem da banca examinadora.

Agradeço ao meu amigo Arnando Nélío, que desde a graduação sempre esteve à disposição para conversar sobre a matemática e tirar as minhas dúvidas.

Agradeço a todos os meus colegas do mestrado. Em especial a Carlos Eduardo, Larissa Santos e, não poderia deixar de esquecer, do Gustavo Colins, com quem compartilhei de diversos momentos durante este mestrado.

Agradeço a todos os funcionários da UFMA que de alguma forma contribuíram para a construção deste trabalho.

Agradeço à Capes e à FAPEMA pelo apoio financeiro. Sem isso, também nada disso seria possível.

*“Ainda que a minha mente e o meu corpo enfraqueçam, Deus é a minha força, ele é tudo
o que sempre preciso.”*

(Salmos 73:26)

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma demonstração trazida em (MICALLEF; MORARU, 2015), onde os autores unificam as provas de resultados já comprovados por Cai e Galloway (CAI; GALLOWAY, 2000), Bray-Brendle-Neves (BRAY; BRENDLE; NEVES, 2010) e Nunes (NUNES, 2013). Nestes artigos, são impostas limitações inferiores na curvatura escalar do ambiente, que é uma variedade Riemanniana tridimensional, para obter-se conclusões geométricas e topológicas a respeito das superfícies mínimas nele contidas. Em termos mais precisos, colocamos $R_0 := \min_{x \in M} R(x)$, onde $R_0 \in \{-2, 0, 2\}$ e assumimos certas condições sobre a área e, em dois dos casos, sobre o gênero da superfície Σ . Assim, tiramos conclusões em relação à métrica da variedade ambiente numa vizinhança de Σ .

Palavras-chave: curvatura escalar, estabilidade, rigidez, superfície mínima.

Abstract

In this work, we present a demonstration from (MICALLEF; MORARU, 2015), where the authors unify the proofs of results previously established by Cai and Galloway (CAI; GALLOWAY, 2000), Bray-Brendle-Neves (BRAY; BRENDLE; NEVES, 2010), and Nunes (NUNES, 2013). In these articles, lower bounds are imposed on the scalar curvature of the ambient space, which is a three-dimensional Riemannian manifold, to derive geometric and topological conclusions about the minimal surfaces contained within it. More precisely, we define $R_0 := \min_{x \in M} R(x)$, where $R_0 \in \{-2, 0, 2\}$, and assume certain conditions regarding the area and, in two of the cases, the genus of the surface Σ . Thus, we draw conclusions about the metric of the ambient manifold in a neighborhood of Σ .

Keywords: scalar curvature, stability, rigidity, minimal surface.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Variedade diferenciável.	15
Figura 2 – Diferenciabilidade.	17
Figura 3 – Exemplo 2.1.10.	19
Figura 4 – Exemplo 2.1.11.	19
Figura 5 – Variação normal. Proposição (4.0.5)	53

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	DAS VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS À GEOMETRIA RIEMANNIANA: UMA BREVE ABORDAGEM	14
2.1	Variedades Diferenciáveis	14
2.2	Conexões Afins e Conexões Riemannianas	22
2.2.1	Geodésicas e a Aplicação Exponencial	24
2.2.2	Curvaturas	27
2.2.3	Imersões Isométricas	30
3	FÓRMULAS DE VARIAÇÃO DE ÁREA E ESTABILIDADE	34
4	PRINCIPAIS RESULTADOS	46
4.1	Considerações finais	58
	Referências	59

1 Introdução

A teoria das superfícies mínimas tem sido, há algum tempo, um terreno fértil de pesquisa em Geometria. Nesse sentido, uma das curiosidades sobre o tema é saber como essas superfícies se comportam em variedades com restrições relacionadas às curvaturas. Como exemplo inicial, temos uma observação feita por Simons em (SIMONS, 1968), onde ele percebeu que não existem hipersuperfícies fechadas, estáveis, mínimas e de dois lados em uma variedade de curvatura de Ricci positiva.

Nos aproximando do que é tratado neste trabalho, baseado no artigo (MICALLEF; MORARU, 2015) produzido por Micallef e Moraru, que estuda as implicações geométricas e topológicas geradas devido a certas limitações, por cotas inferiores, na curvatura escalar do espaço ambiente M , podemos falar que os resultados obtidos podem ser rastreados até o chegarem no famoso trabalho de Schoen e Yau (SCHOEN; YAU, 1979). Neste memorável trabalho, Schoen e Yau obtiveram restrições topológicas em uma superfície mínima orientada, de dois lados e estável Σ em uma variedade Riemanniana tridimensional cuja curvatura escalar é $R > 0$. Particularizando, eles provaram que o gênero de Σ deve ser zero.

Seguindo a linha do tempo, Fischer-Colbrie e Schoen estudaram o caso em que $R \geq 0$ e mostraram no material (FISCHER-COLBRIE; SCHOEN, 1980) que, para este caso, o gênero de Σ deve ser zero ou um. No caso em que é um, então Σ é totalmente geodésica e plana. Além disso, Σ tem curvaturas normais de Ricci de M e curvatura escalar R anulando-se ao longo de Σ . Neste trabalho, Fischer-Colbrie e Schoen, lançam a seguinte conjectura:

Conjectura 1.0.1. *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana tridimensional completa, com curvatura escalar não negativa e se Σ for um toro de dois lados que é de menor área em M , então M é plana.*

Cai e Galloway provaram essa conjectura em (CAI; GALLOWAY, 2000), onde eles supuseram que Σ é de menor área em sua classe de isotopia. Nessa perspectiva, eles trouxeram o seguinte resultado local, cuja prova da conjectura segue como consequência dele:

Teorema 1.0.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana dimensional com curvatura escalar não negativa, $R \geq 0$. Se Σ é um toro de dois lados mergulhado em M e que é localmente de menor área, então a métrica é plana em alguma vizinhança de Σ .*

Mais recentemente, Bray, Brendle e Neves em (BRAY; BRENDLE; NEVES, 2010) e Nunes em (NUNES, 2013) provaram resultados semelhantes para superfícies fechadas

diferentes do toro e sob hipóteses diferentes de curvatura escalar, como mostram os resultados abaixo.

Teorema 1.0.3 (Bray, Brendle e Neves). *Seja (M, g) uma variedade tridimensional com curvatura escalar maior ou igual a 2. Se Σ é uma esfera bidimensional mergulhada e que é localmente minimizadora de área, então Σ tem área menor ou igual a 4π . Além disso, se a igualdade ocorrer, então Σ com a métrica induzida g_Σ tem curvatura gaussiana constante igual a 1 e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$.*

Teorema 1.0.4 (Nunes). *Seja (M, g) uma variedade tridimensional com curvatura escalar maior ou igual a -2 . Se Σ é uma superfície fechada, bidimensional, mergulhada e de dois lados, localmente minimizadora de área, com gênero $g(\Sigma)$ maior que 1, então Σ tem área maior ou igual a $4\pi(g(\Sigma) - 1)$. Além disso, se a igualdade ocorrer, então Σ com a métrica induzida g_Σ tem curvatura gaussiana constante igual a -1 e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$.*

Observando os teoremas acima, percebe-se que, se olhada de maneira mais precisa, a prova dada por Schoen e Yau nos diz que um limite inferior na curvatura escalar da variedade M , fornece um limite na área da superfície mínima estável Σ . Mais precisamente,

- (1) se $R \geq 2$, então a área de Σ é limitada superiormente por 4π ;
- (2) se $R \geq -2$, então a área de Σ é limitada inferiormente por $4\pi(g(\Sigma) - 1)$.

Tais limites foram apresentados pela primeira vez em (SHEN; ZHU, 1997).

Diante de todo esse contexto, surge Micallef e Moraru em (MICALLEF; MORARU, 2015), onde eles apresentam uma prova unificada para os teoremas 1.0.2, 1.0.3 e 1.0.4. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a interessante demonstração exposta por Micallef e Moraru no artigo (MICALLEF; MORARU, 2015). Para isso, começamos fazendo uma breve revisão de alguns tópicos da geometria Riemanniana através de um capítulo preliminar. Em seguida, falamos um pouco sobre a noção de estabilidade, que é um dos conceitos fundamentais deste trabalho. Além disso, apresentamos a primeira e segunda fórmula de variação da área, as quais são ferramentas indispensáveis para a construção dos argumentos que nos levam ao objetivo do presente estudo. Por fim, utilizamos de técnicas coletadas nas referências bibliográficas para entendermos e apresentarmos a prova feita por Micallef e Moraru.

2 Das Variedades Diferenciáveis à Geometria Riemanniana: Uma breve abordagem

Neste capítulo fazemos uma breve abordagem sobre as variedades diferenciáveis e a Geometria Riemanniana, as quais são ferramentas de conhecimento indispensável para a compreensão deste trabalho. Além disso, dentro das possibilidades, deixamos este texto o mais autocontido possível, sendo assim, caso deixemos de abordar algum conteúdo aqui presente, iremos indicar onde consultar a teoria por meio das referências.

2.1 Variedades Diferenciáveis

De forma intuitiva, uma variedade é uma generalização de curvas e superfícies para dimensões maiores. Ela é localmente Euclidiana no sentido de que cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. As coordenadas em uma carta permitem realizar cálculos como se estivéssemos em um espaço Euclidiano, de modo que muitos conceitos de $\mathbb{R}^n$, como diferenciabilidade, derivadas em pontos, espaços tangentes e formas diferenciais, são transferidos para a variedade. Em essência, as variedades diferenciáveis são uma ferramenta poderosa para descrever e entender a geometria de espaços abstratos de maneira mais flexível e robusta.

Definição 2.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável M e uma família de aplicações $x_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ definidas em abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ tais que:*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para cada α , x_α é um homeomorfismo entre U_α e o aberto $x_\alpha(U_\alpha) \subset M$;
3. Para todo par α, β , as aplicações $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ e $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis (ver Figura 1).

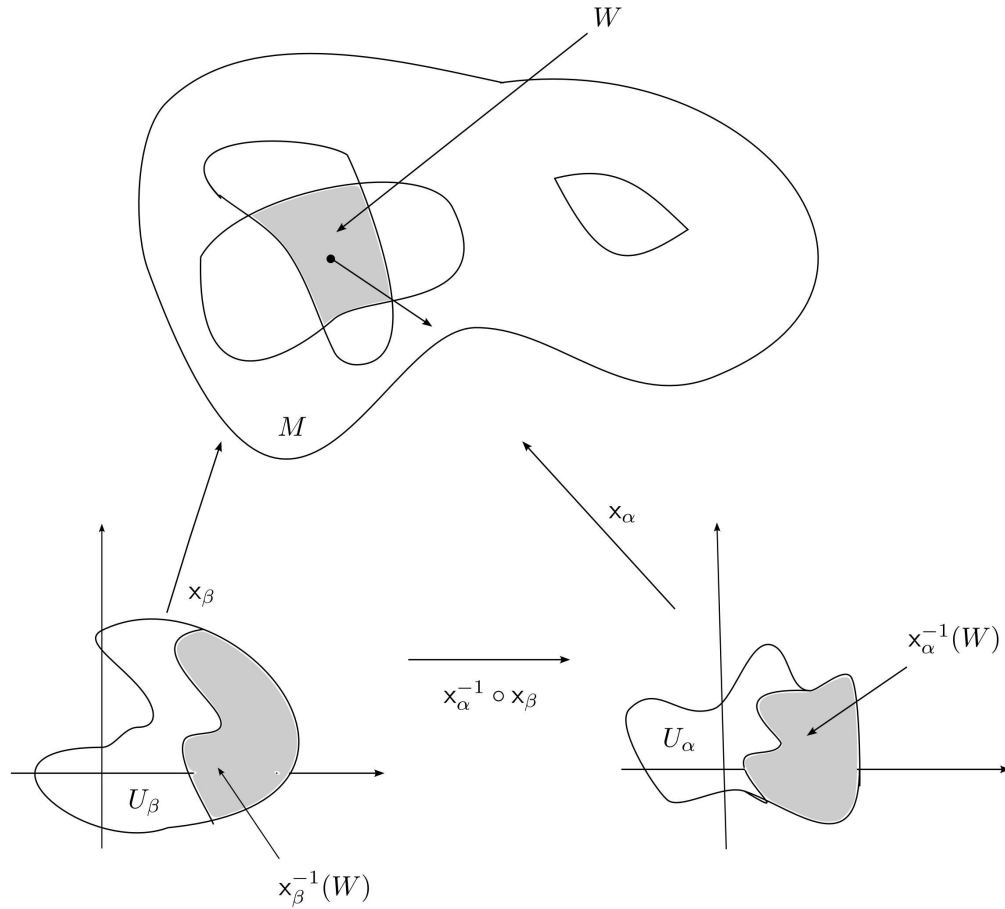
Uma família (U_α, x_α) com as duas primeiras condições é chamada uma estrutura diferenciável.

A título de exemplo, trataremos primeiramente da esfera unitária $\mathbb{S}^n$, a qual é, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$, uma variedade suave com uma estrutura diferenciável que pode ser introduzida como segue abaixo.

Exemplo 2.1.2 (Esfera $\mathbb{S}^n$). *A esfera unitária*

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Figura 1 – Variedade diferenciável.



Fonte: próprio autor.

com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ (sendo, portanto, um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável) é uma variedade suave com uma estrutura diferenciável que pode ser introduzida, por exemplo, através do seguinte atlas:

- **Atlas de gráficos de hemisférios:** Para cada $i = 1, \dots, n+1$, consideremos os seguintes conjuntos (hemisférios)

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\},$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\}.$$

As projeções $x_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow D_n$, onde

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

é o disco unitário, definidas por

$$\mathbf{x}_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

são cartas. De fato, elas são claramente contínuas e suas inversas são as aplicações contínuas

$$(\mathbf{x}_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \left[1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (x_k)^2 \right]^{1/2}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \right),$$

de modo que elas são homeomorfismos. As mudanças de coordenadas são as aplicações

$$\mathbf{x}_i^\pm \circ (\mathbf{x}_j^\pm)^{-1} : \mathbf{x}_j^\pm(U_i^\pm \cap U_j^\pm) \rightarrow \mathbf{x}_i^\pm(U_i^\pm \cap U_j^\pm)$$

dadas por

$$\mathbf{x}_i^\pm \circ (\mathbf{x}_j^\pm)^{-1} = \left(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_j, \pm \left[1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (x_k)^2 \right]^{1/2}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right),$$

portanto C^∞ . Observe que este atlas tem $2(n+1)$ cartas. $\square$

O próximo exemplo é de grande interesse, pois ele nos fornece duas estruturas diferenciáveis para a mesma variedade.

Exemplo 2.1.3 ($\mathbb{R}$ com mais de uma estrutura diferenciável). *Considere $\mathbb{R}$ munido com a topologia usual. Podemos definir pelo menos duas estruturas diferenciáveis diferentes para $\mathbb{R}$, isto é, dois atlas não compatíveis (ou seja, que geram atlas maximais diferentes). Temos a estrutura diferenciável padrão para $\mathbb{R}$, isto é, o atlas maximal que consiste de todas as aplicações que são difeomorfismos de abertos de $\mathbb{R}$ (lembramos que os abertos de $\mathbb{R}$ são uniões de intervalos abertos). O atlas para $\mathbb{R}$ consistindo apenas da carta $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\mathbf{x}(x) = x^3$$

(note que φ é um homeomorfismo) não é compatível com o atlas padrão de $\mathbb{R}$, pois

$$(\text{id} \circ \mathbf{x}^{-1})(x) = x^{1/3}$$

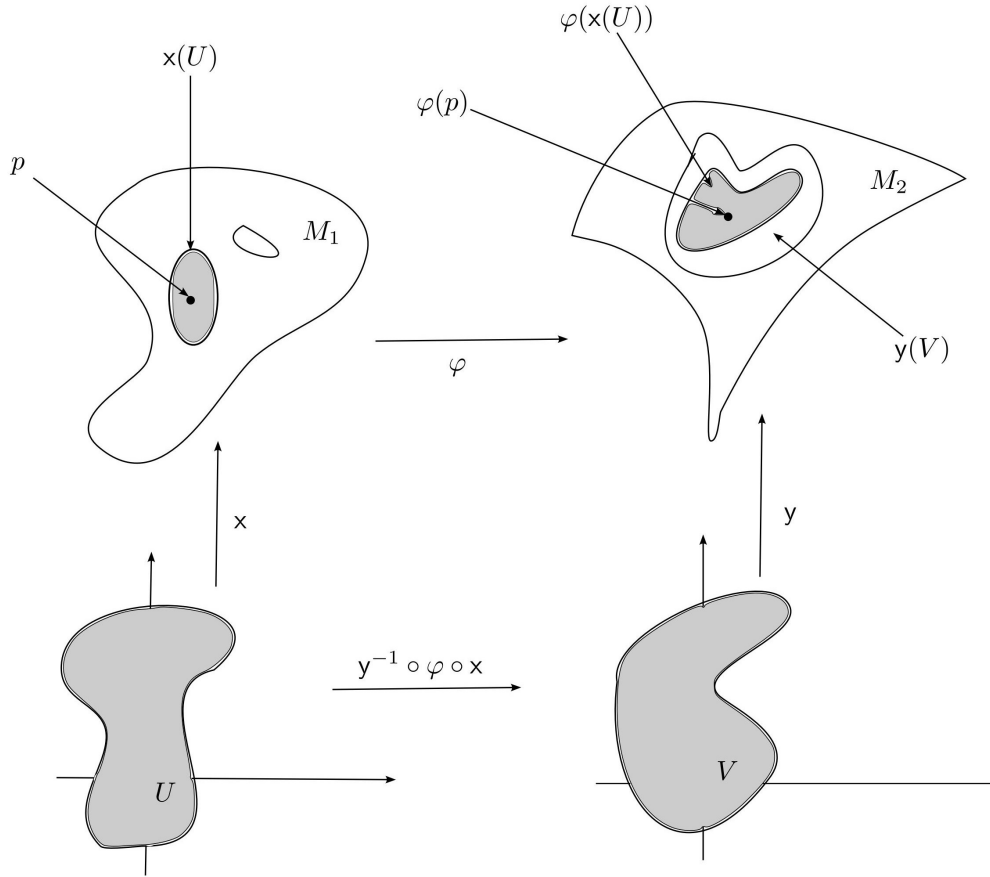
não é diferenciável, e portanto este atlas gera uma estrutura diferenciável diferente da estrutura diferenciável canônica. No entanto, estas estruturas diferenciáveis são equivalentes, no sentido de que definem variedades diferenciáveis difeomorfas. $\square$

Definição 2.1.4. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização $y : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subseteq y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$ (ver Figura 2). Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Figura 2 – Diferenciabilidade.



Fonte: próprio autor.

Vale destacar que a definição acima não depende da escolha das parametrizações. A aplicação (2.1) é chamada a *expressão* de φ nas parametrizações x e y . Analisemos o exemplo abaixo e vejamos a influência da estrutura diferenciável na diferenciabilidade.

Exemplo 2.1.5. Uma aplicação entre variedades diferenciáveis ser diferenciável depende fortemente das estruturas diferenciáveis definidas nestas variedades (daí o nome). As duas estruturas diferenciáveis no Exemplo 2.1.3 definem estruturas diferenciáveis distintas em $\mathbb{R}$, e a função identidade deixa de ser diferenciável dependendo de qual estrutura diferenciável escolhermos trabalhar. Com efeito, denotando as variedades diferenciáveis correspondentes às estruturas por $(\mathbb{R}, \text{id})$ e $(\mathbb{R}, x)$, as aplicações identidade

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \text{id}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{id}),$$

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \mathbf{x}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{x}),$$

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \text{id}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{x}),$$

são diferenciáveis porque

$$\text{id} \circ \text{id} \circ \text{id}^{-1} = \text{id},$$

$$\mathbf{x} \circ \text{id} \circ \mathbf{x}^{-1} = \text{id},$$

$$\mathbf{x} \circ \text{id} \circ \text{id}^{-1}(x) = x^3,$$

mas a aplicação identidade

$$\text{id} : (\mathbb{R}, \mathbf{x}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{id})$$

não é diferenciável, uma vez que

$$\text{id} \circ \mathbf{x}^{-1}(x) = x^{1/3}$$

não é diferenciável na origem. □

A proposição a seguir nos fornece uma importante aplicação linear, a saber, a diferencial.

Proposição 2.1.6. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

Definição 2.1.7. *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela proposição anterior é chamada **diferencial** de φ em p .*

Definição 2.1.8. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável, φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.*

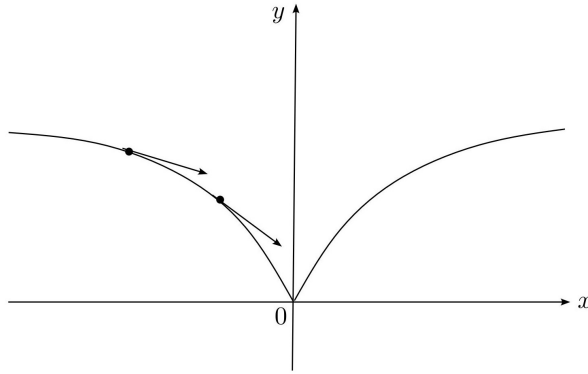
Definimos abaixo dois casos especiais de aplicações diferenciáveis que nos permitem estudar propriedades geométricas e topológicas das variedades.

Definição 2.1.9. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subseteq N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um **mergulho**. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Observe-se que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ .

Exemplo 2.1.10. A curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ é uma aplicação diferenciável mas não é uma imersão. De fato, a condição de imersão neste caso é equivalente a que $\alpha'(t) \neq 0$, o que não ocorre para $t = 0$ (ver Figura 3).

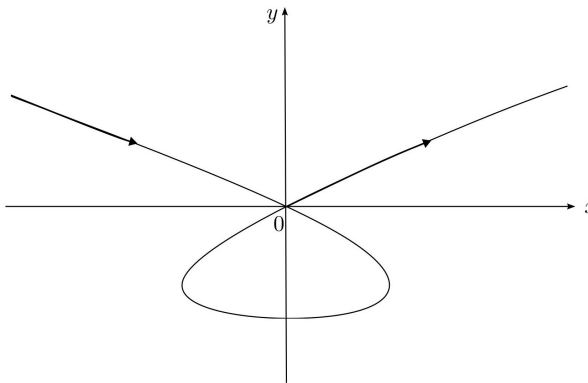
Figura 3 – Exemplo 2.1.10.



Fonte: próprio autor.

Exemplo 2.1.11. A curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ (ver Figura 4) é uma imersão $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possui uma auto-interseção para $t = 0$. Portanto α não é um mergulho.

Figura 4 – Exemplo 2.1.11.



Fonte: próprio autor.

Agora, introduziremos um conceito importante neste trabalho, que é a noção de orientação.

Definição 2.1.12. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que:

(i) Para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma orientação de M . Então, M é dita orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz (i).

As demonstrações omitidas nesta seção podem ser consultadas em (CARMO, 2008).

Lema 2.1.13. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX) \cdot f$*

Demonstração. Ver (CARMO, 2008). □

O campo vetorial Z obtido no lema acima é chamado o colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y .

Proposição 2.1.14. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis em M e a, b números reais, f e g funções diferenciáveis, então:*

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade);
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade);
- (c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidade de Jacobi);
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$.

A seguir apresentamos a definição de *métrica Riemanniana* que é um conceito fundamental na Geometria Diferencial, pois, dentre outras coisas, tal noção nos permite fazer medições de comprimentos, de ângulos e calcular curvatura. Desse modo, vemos a importância da noção de métrica Riemanniana.

Definição 2.1.15. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Exemplo 2.1.16 (Métrica Produto). *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow$*

M_1 e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ as projeções naturais. Introduza em $M_1 \times M_2$ uma métrica Riemanniana pondo:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v \rangle_p + \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v \rangle_q \quad \text{para todo} \\ (p, q) \in M_1 \times M_2, u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2).$$

Desta forma, obtemos a métrica Riemanniana desejada. Por exemplo, o toro $S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$ tem uma estrutura Riemanniana induzida por $\mathbb{R}^2$ e tomando a métrica produto. O toro T^n com esta métrica Riemanniana chama-se **toro plano**.

Nesse sentido de fazer medições, um outro conceito central na geometria é a noção de isometria, a qual estabelece uma ideia de equivalência entre variedades Riemannianas.

Definição 2.1.17. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \text{para todos } p \in M, u, v \in T_p M. \quad (2.2)$$

Definição 2.1.18. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$, se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (2.2).*

Agora vamos mostrar como uma métrica Riemanniana nos permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M^n .

Precisamos de algumas considerações prévias. Seja $p \in M$ e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização, com $p \in \mathbf{x}(U)$, na orientação de M (diremos que tal parametrização é positiva). Considere uma base ortonormal positiva $\{e_1, \dots, e_n\}$ em $T_p M$ e escreva $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q)$ na base $\{e_i\} : X_i(p) = \sum_j a_{ij} e_j$. Então,

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{j, \ell} a_{ij} a_{k\ell} \langle e_j, e_\ell \rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj}.$$

Como o volume $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p))$ do paralelepípedo formado pelos vetores $X_1(p), \dots, X_n(p)$ em $T_p M$ é igual a $\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}) , temos que

$$\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij}(p))}. \quad (2.3)$$

Se $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma outra parametrização positiva em torno de p , com $Y_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(p)$ e $h_{ij}(p) = \langle Y_i, Y_j \rangle(p)$, teremos

$$\sqrt{\det(g_{ij}(p))} = \text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) \\ = J \text{vol}(Y_1(p), \dots, Y_n(p)) = J \sqrt{\det(h_{ij}(p))},$$

onde $J = \det \left(\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right) (p) = \det(d\mathbf{y}^{-1} \circ d\mathbf{x})(p) > 0$ é o determinante da diferencial da mudança de coordenadas.

Seja agora $R \subset M$ uma região (conjunto aberto e conexo), cujo fecho é compacto. Suponhamos que R está contida em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ de uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ positiva, e que a fronteira de $\mathbf{x}^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ (observe que a noção de medida nula em $\mathbb{R}^n$ é invariante por difeomorfismos). Definiremos o *volume* $\text{vol}(R)$ de R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n. \quad (2.4)$$

A expressão acima está bem definida. De fato, se R está contido em outra vizinhança coordenada $\mathbf{y}(V)$ de uma parametrização positiva $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, teremos com as notações acima e pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas,

$$\int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbf{y}^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})} dy_1 \dots dy_n = \text{vol}(R),$$

o que mostra que a definição (2.4) não depende do sistema de coordenadas escolhido (aqui se usa a hipótese de orientabilidade de M , para evitar que $\text{vol}(R)$ troque de sinal).

2.2 Conexões Afins e Conexões Riemannianas

Na geometria Riemanniana, as conexões desempenham um papel crucial ao permitir que se definam derivadas covariantes de campos vetoriais e outras estruturas geométricas em variedades. A mais importante dessas conexões é a conexão de Levi-Civita.

Dito isso, indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $C^\infty(M)$ o espaço das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 2.2.1. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Exemplo 2.2.2 (Conexão Euclideana). *Identificando espaços tangentes em $\mathbb{R}^n$ com o próprio $\mathbb{R}^n$, vetores tangentes com vetores em $\mathbb{R}^n$ e campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ com aplicações suaves $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, nós definimos a conexão euclidiana $\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$(\nabla_X Y)_p = dY_p(X_p),$$

ou seja, a derivada direcional do campo Y em p na direção de X_p . Em coordenadas, usando a definição de diferencial em $\mathbb{R}^n$,

$$dY_p(X_p) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) e_j,$$

ou seja,

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Para esclarecer a definição dada acima, temos a proposição que segue.

Proposição 2.2.3. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que :*

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Com a caracterização da derivada covariante, surge a noção de paralelismo.

Definição 2.2.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Agora introduziremos o conceito de conexão Riemanniana. Desta forma, comecemos este trabalho.

Definição 2.2.5. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle, \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle, \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.*

Definição 2.2.6. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (2.5)$$

Seguindo nossa abordagem, apresentamos o teorema nos fornece a conexão Riemanniana.

Proposição 2.2.7. *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

(a) ∇ é simétrica.

(b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Exemplo 2.2.8 (Conexão Riemanniana em $\mathbb{R}^n$). *A conexão euclidiana (Exemplo 2.2.2) é a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual. Com efeito, a conexão é compatível com a métrica, pois dada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável e V, W campos ao longo de α induzidos pelos campos vetoriais X, Y , respectivamente, então segue da regra da cadeia que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} V_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \right\rangle + \left\langle V_{\alpha(t)}, \frac{d}{dt} W_{\alpha(t)} \right\rangle \\ &= \langle dX_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), W_{\alpha(t)} \rangle + \langle V_{\alpha(t)}, dY_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \rangle \\ &= \langle (\nabla_{\alpha'(t)} X)_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \rangle + \langle V_{\alpha(t)}, (\nabla_{\alpha'(t)} Y)_{\alpha(t)} \rangle \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt} \Big|_{\alpha(t)}, W_{\alpha(t)} \right\rangle + \left\langle V_{\alpha(t)}, \frac{DW}{dt} \Big|_{\alpha(t)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Além disso, ela é simétrica, uma vez que

$$\begin{aligned} [(\nabla_X Y)_p - (\nabla_Y X)_p](f) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= [X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

2.2.1 Geodésicas e a Aplicação Exponencial

Um dos conceitos fundamentais da geometria Riemanniana é a ideia de geodésicas, que pode ser entendida como uma extensão do conceito de “linhas retas” para espaços mais gerais do que os Euclidianos.

Assuma que M é uma variedade Riemanniana munida de uma conexão Riemanniana.

Definição 2.2.9. *Dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se a derivada covariante de seu vetor tangente é identicamente nula, isto é,*

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Exemplo 2.2.10 (Geodésicas da Esfera). *As geodésicas da esfera são grandes círculos (isto é, círculos cujos centros são o centro da esfera, que podem também ser obtidos intersectando a esfera com planos passando pela origem).*

A partir de agora, exibimos alguns resultados que permitem-nos definir a aplicação exponencial.

Definição 2.2.11. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n com um atlas $\Phi = \{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de classe C^k . O **fibrado tangente** de M é a variedade diferenciável de dimensão $2n$ e classe C^{k-1}*

$$TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$$

com um atlas

$$\Psi = \{\psi : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

definido por

$$\psi_\alpha(x, v_1, \dots, v_n) = \left(x_\alpha(x), \sum_{i=1}^n v_i \partial_i(x) \right).$$

Lema 2.2.12. *Existe um único campo G em TM cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M .*

Definição 2.2.13. *O campo G definido acima é chamado campo geodésico em TM e seu fluxo é o fluxo geodésico de TM .*

Fazendo uso do Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias, temos o resultado a seguir.

Proposição 2.2.14. *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v .

Noutras palavras, o resultado acima afirma que se $|v| < \varepsilon_1$, a geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe em um intervalo $(-\delta, \delta)$ e é única. Em verdade, é possível aumentar (diminuir) o intervalo de definição de uma geodésica diminuindo (aumentando) sua velocidade, isto é, o comprimento de seu vetor tangente. Isto decorre do seguinte lema de homogeneidade.

Lema 2.2.15 (Homogeneidade de uma geodésica). *Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Os dois últimos resultados permitem-nos tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande numa vizinhança de p . De modo mais preciso, temos o resultado que segue.

Proposição 2.2.16. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número real $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ de classe C^∞ , onde $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM; q \in V, v \in T_p M, |v| < \varepsilon\}$, tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_p M$, com $|v| < \varepsilon$.*

Dessa forma, à luz da Proposição 2.2.16 podemos definir a aplicação exponencial.

Definição 2.2.17. *Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 2.2.16. Então, a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por*

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v), \quad (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Preparando o terreno para a apresentação do Lema de Gauss, vejamos a definição de uma superfície parametrizada.

Definição 2.2.18. *Seja A um conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ com $U \subset A \subset \bar{U}$, U aberto em $\mathbb{R}^2$ e tal que a fronteira ∂A de A seja uma curva diferenciável por partes com ângulos dos vértices distintos de π . Uma superfície parametrizada em M é uma aplicação diferenciável $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.*

Lema 2.2.19. *Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $s : A \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada, então:*

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}.$$

Na demonstração do teorema final deste trabalho, utilizamos a noção de campos de Killing, os quais possuem, como vemos abaixo, algumas propriedades interessantes.

Definição 2.2.20. *Dizemos que Z é um campo de Killing em M , se Z satisfaz:*

$$\langle \nabla_X Z, Y \rangle = -\langle X, \nabla_Y Z \rangle \quad (2.6)$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Para que possamos relacionar os campos de killing com o grupo das isometrias da variedade, precisamos recorrer ao Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.

Teorema 2.2.21. *Se X é um campo C^∞ num aberto V de uma variedade M e $p \in V$, então existem um aberto $V_0 \subset V$, $p \in V_0$, um número $\delta > 0$, e uma aplicação C^∞ , $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow V$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , para cada $q \in V_0$.*

A aplicação descrita no teorema acima chama-se o fluxo de X em V .

Dados um campo de vetores tangentes X de M e $p \in M$. Pelo teorema anterior, existe $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ tal que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. Fixando t , com $|t| < \varepsilon$, φ_t define um difeomorfismo de U em $\varphi_t(U)$ e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ vale onde ambos os lados estão definidos.

Definição 2.2.22. *Pela construção acima, dizemos que um campo X gera um grupo φ_t chamado de subgrupo (local) a um parâmetro de difeomorfismos locais.*

O conjunto das isometrias da variedade riemanniana M forma um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de M . Assim se um campo gera uma família a um parâmetro constituída de isometrias dizemos ele gera um subgrupo a um parâmetro de isometrias.

Proposição 2.2.23. *Seja X campo de vetores de M . Então X é um campo de Killing se e somente se X gera um subgrupo (local) a um parâmetro de isometrias locais de M .*

Demonstração. Ver (JOST, 2001), página 52. □

2.2.2 Curvaturas

A noção de curvatura é de extrema importância para o estudo da geometria Riemanniana. Nesse sentido, fazemos uma breve apresentação dos temas atrelados a este conceito. Vale destacar que, de modo intuitivo, a definição de curvatura mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 2.2.24. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Considerando um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$ e levando-se em consideração que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, podemos ver a definição anterior como abaixo:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = (\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} - \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

A proposição que segue, nos fornece duas informações úteis a respeito de R e do operador $R(X, Y)$.

Proposição 2.2.25. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração. Ver (CARMO, 2008) página 100. □

Proposição 2.2.26 (Primeira Identidade de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Demonstração. Ver (CARMO, 2008) página 101. □

Destacamos que, escrevemos por conveniência: $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$.

Exemplo 2.2.27 (Curvatura de $\mathbb{S}_R^2$). *A métrica da esfera bidimensional de raio R é dada por:*

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

no sistema de coordenadas (θ, ϕ) . Assim, podemos representá-la como segue:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Calculemos então os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^l usando a fórmula (ver (CARMO, 2008) página 62.):

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Para a esfera bidimensional, obtemos os símbolos de Christoffel não nulos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \cot \theta\end{aligned}\tag{2.7}$$

Como estamos tratando de uma variedade Riemanniana de dimensão 2, é suficiente calcularmos as quatro componentes independentes: R_{121}^1 , R_{212}^1 , R_{121}^2 e R_{212}^2 . A partir daí, obtemos R_{1212} , usando a notação $R_{ijkl} = g_{lm}R_{ijk}^m$, que será suficiente para nossas pretensões. Sendo assim, utilizando que (ver (CARMO, 2008))

$$\begin{aligned}R_{ijk}^l &= \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) + \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l \\ &= (\Gamma_{jk}^1 \Gamma_{i1}^l - \Gamma_{ik}^1 \Gamma_{j1}^l) + (\Gamma_{jk}^2 \Gamma_{i2}^l - \Gamma_{ik}^2 \Gamma_{j2}^l) + \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l,\end{aligned}$$

e fazendo $i = k$, temos:

$$R_{iji}^l = (\Gamma_{ji}^1 \Gamma_{i1}^l - \Gamma_{ii}^1 \Gamma_{j1}^l) + (\Gamma_{ji}^2 \Gamma_{i2}^l - \Gamma_{ii}^2 \Gamma_{j2}^l) + \partial_i \Gamma_{ji}^l - \partial_j \Gamma_{ii}^l.$$

A partir daí, obtemos que:

$$\begin{aligned}R_{212}^1 &= -R_{122}^1 = -\sin^2 \theta; \\ R_{121}^2 &= -R_{211}^2 = -1.\end{aligned}$$

Utilizando que:

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^2 g_{ml} R_{ijk}^m = g_{11} R_{ijk}^1 + g_{21} R_{ijk}^2,$$

obtemos:

$$R_{1212} = g_{12} R_{121}^1 + g_{22} R_{121}^2 = -R^2 \sin^2 \theta.$$

Portanto, utilizando as relações (página 104 (CARMO, 2008)) decorrentes da Proposição 2.5 do texto referido, temos:

$$\begin{aligned}R_{1212} &= -R^2 \sin^2 \theta, \\ R_{1221} &= -R_{1212} = R^2 \sin^2 \theta, \\ R_{2112} &= -R_{1212} = R^2 \sin^2 \theta, \\ R_{2121} &= R_{1212} = -R^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Em suma, estas são as componentes não nulas do tensor curvatura da esfera. $\square$

Definido o tensor curvatura, podemos apresentar a curvatura seccional, a qual dá origem a outras duas importantes curvaturas, a saber: curvatura de Ricci e curvatura escalar.

A seguir, dado um espaço vetorial V com produto interno, indicamos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 2.2.28. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 2.2.29. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço de dimensão dois $\sigma \subset T_p M$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de M em p segundo σ .*

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$ e escolha uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle,$$

$$R(p) = \sum_j Ric_p(z_j) = \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle.$$

As expressões acima são chamadas, respectivamente, de curvatura de Ricci na direção x e curvatura escalar em p . Destacamos ainda que as expressões não dependem da base ortonormal escolhida.

Para ver um exemplo, referente à esfera, do cálculo detalhado dos conceitos acima, consulte (BIEZUNER, 2016) página 123.

2.2.3 Imersões Isométricas

Definição 2.2.30 (Imersões isométricas). *Sejam (M^n, g) e $(\bar{M}^m, \bar{g})$ variedades Riemannianas. Uma imersão isométrica de (M, g) em $(\bar{M}, \bar{g})$ é uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ satisfazendo*

$$g_p(u, v) = \bar{g}_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) \quad (2.8)$$

para todo $p \in M$ e todos $u, v \in T_p M$. Nesse caso, necessariamente devemos ter que $n \leq m$. O número $k = m - n$ é chamado a codimensão da imersão.

Note que, dadas uma variedade Riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ e uma variedade diferenciável, se $f : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão, então a métrica $\overline{g}$ induz de modo único uma métrica Riemanniana g em M de modo que f se torna uma imersão isométrica. De fato, basta definir g pela identidade (2.8). A métrica g definida desse modo chama-se a métrica induzida pela imersão e será denotada por $g = f^*\overline{g}$.

Considere uma imersão isométrica $f : (M, g) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são extensões locais de vetores tangentes em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, temos que a conexão Riemanniana ∇ de g é dada por:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T,$$

onde o lado direito da igualdade acima é a componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$.

Agora, vamos definir a segunda forma fundamental da imersão isométrica $f : M \rightarrow \overline{M}$. Para isso, é conveniente introduzir a definição que segue. Se X, Y são campos locais em M ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M .

No que segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos de vetores diferenciáveis em U normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 2.2.31. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é $C^\infty(M)$ -bilinear e simétrica.

Como $B(X, Y)$ é $C^\infty(M)$ bilinear, segue, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Feitas as considerações acima, podemos definir a *segunda forma fundamental*. Seja $p \in M$ e $N \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_N : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_N(x, y) = \langle B(x, y), N \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é, pela proposição 2.2.31, uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.2.32. *A forma quadrática II_N ou A definida em $T_p M$ por*

$$II_N(x) = A(x) = H_N(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal N .

Observemos que à aplicação bilinear H_N fica associada uma aplicação linear autoadjunta $S_N : T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle S_N(x), y \rangle = H_N(x, y) = \langle B(x, y), N \rangle.$$

A próxima proposição nos fornece uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 2.2.33. *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $N \in (T_p M)^\perp$. Seja $\bar{N}$ uma extensão local de N normal a M . Então*

$$S_N(x) = -(\bar{\nabla}_x \bar{N})^T.$$

O resultado que segue, relaciona a curvatura de M com a curvatura de $\bar{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se $x, y \in T_p M \subset T_p \bar{M}$, são vetores linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\bar{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de, respectivamente, M e $\bar{M}$ segundo o plano gerado por x e y .

Teorema 2.2.34 (Gauss). *Sejam $p \in M$ e $x, y \in T_p M$ vetores ortonormais. Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \quad (2.9)$$

Segue abaixo uma definição de grande importância para a compreensão dos principais resultados deste trabalho.

Definição 2.2.35. *Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $N \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental II_N é identicamente nula em p . A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$*

Uma condição mais fraca do que a de ser totalmente geodésica é a condição de ser mínima.

Definição 2.2.36. *Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $N \in (T_p M)^\perp$ tem-se $\text{tr}(S_N) = 0$.*

Se escolhermos um referencial ortonormal $E_1, \dots, E_n$ de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p em que f é um mergulho, podemos escrever, em p ,

$$B(x, y) = \sum_i H_i(x, y) E_i, \quad x, y \in T_p M, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $H_i = H_{E_i}$. O vetor dado por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i (\text{tr} S_i) E_i,$$

onde $S_i = S_{E_i}$, é chamado *vetor curvatura média* de f . Observemos que f é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

Agora, daremos um exemplo em que aparecem muitos conceitos apresentados neste capítulo. Além disso, este serve como modelo para a proposição de rigidez infinitesimal apresentada no capítulo 4.

Exemplo 2.2.37. *Seja (Σ, g_Σ) uma superfície Riemanniana compacta orientável com curvatura de Gauss constante K_0 . Considere o cilindro $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ munido com a métrica produto $g_\Sigma + dt^2$. Para cada t , considere o slice $\Sigma_t = \{t\}$. Pelo item (b), Exercício 1, Capítulo 6, de (CARMO, 2008), temos que Σ_t é uma superfície totalmente geodésica de (M, g) . Além disso, pelo item (d) do referido exercício, se tomarmos um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1, e_2 \in T\Sigma$ e $e_3 = \partial_t$, obtemos que $R = 2K(T\Sigma_t) = 2K_{\Sigma_t} = 2K_0$, onde a penúltima igualdade segue do fato que Σ_t é totalmente geodésica, juntamente com a equação de Gauss, e a última segue do fato que Σ_t com a métrica induzida é isométrica a (Σ, g_Σ) . Novamente, segue do item (d) que $\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = K(\partial_t, e_1) + K(\partial_t, e_2) = 0$. Por fim, note que o vetor normal unitário ao longo de Σ_t é dado por ∂_t .*

3 Fórmulas de Variação de Área e Estabilidade

Neste capítulo tratamos da noção de estabilidade e das fórmulas da variação da área, pois estas ferramentas são de grande importância para a compreensão dos resultados principais do presente trabalho. Além disso, fazemos pequenas abordagens sobre Equações Diferenciais Parciais.

Vejamos como se definem algumas ferramentas em nosso contexto. Destacamos que $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica Riemanniana da variedade diferenciável M , $(n + 1)$ -dimensional, e $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de g . Como ponto de partida, considere uma hipersuperfície Σ que, a menos que se diga o contrário, será fechada sem bordo e um campo X de vetores tangentes a M definido ao longo de Σ . Definimos o divergente de X ao longo de Σ da seguinte maneira: dado $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p \Sigma$, temos

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X = \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{e_i} X, e_i).$$

Note que, se $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Sigma}(\varphi X) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \varphi X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \varphi \bar{\nabla}_{e_i} X + e_i(\varphi) X, e_i \rangle \\ &= \varphi \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle e_i(\varphi) X, e_i \rangle \\ &= \varphi \operatorname{div} X + \sum_{i=1}^n \langle X, e_i(\varphi) e_i \rangle \\ &= \varphi \operatorname{div} X + \langle \bar{\nabla}_{\Sigma} \varphi, X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(\varphi X) = \langle \bar{\nabla}_{\Sigma} \varphi, X \rangle + \varphi \operatorname{div} X.$$

Note que se Y é um campo de vetores tangentes a M definido ao longo de Σ e Y^N denota sua componente normal, então

$$\operatorname{div}_{\Sigma} Y^N = \sum_i g(e_i, \nabla_{e_i} Y^N) = - \sum_i g(Y^N, \nabla_{e_i} e_i) = -g(Y^N, \vec{H}). \quad (3.1)$$

Definição 3.0.1. *Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão. Dizemos que uma aplicação diferenciável $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma variação de f , se:*

- (a) *As aplicações $f_t : \Sigma \rightarrow M$ definidas por $f_t(x) = F(x, t)$ são imersões para todo t ;*
- (b) *$f_0 = f$;*

(c) $F(x, 0) = f(x)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

No que segue, Vol representará o volume da hipersuperfície imersa com relação à métrica induzida pela imersão.

Proposição 3.0.2 (Primeira Variação da Área). *Seja $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma variação de uma imersão $f : \Sigma \rightarrow M$. Considere $V = \frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$ o campo variacional. Então*

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \Big|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma, \quad (3.2)$$

onde $d\sigma$ é o elemento de volume da métrica Riemanniana em Σ induzida por f .

Demonstração. Considere $\{x_1, \dots, x_n\}$ um sistema de coordenadas locais em Σ . Defina as seguintes relações:

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j}), \quad (3.3)$$

$$\nu(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Ressaltamos que a^{ij} é usado para representar a inversa da matriz a_{ij} . Observemos que $\nu(t)$ está bem definido, uma vez que $\det(g_{ij}(t))$ muda pelo determinante ao quadrado da Jacobiana da mudança de coordenadas, enquanto $\det(g^{ij}(0))$ muda pelo inverso disso. Além disso, utilizando (2.4), a área apresenta-se da seguinte forma:

$$\text{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx = \int_{\Sigma} \nu(t) d\sigma, \quad (3.5)$$

onde $d\sigma = d\sigma_0$.

Agora, vamos calcular a derivada da expressão acima:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} \left(\frac{d}{dt} \nu(t) \Big|_{t=0} \right) d\sigma. \quad (3.6)$$

A fim de obtermos $\frac{d}{dt} \nu(t) \Big|_{t=0}$ no ponto x , vamos escolher um sistema de coordenadas ortonormal no ponto x , ou seja, temos:

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizando esse fato juntamente com a seguinte simetria:

$$\nabla_V F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} V = 0,$$

podemos obter a derivada de $\nu(t)$ no ponto x :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \nu(t) \right|_{t=0} &= \left. \sqrt{\det(g^{ij}(0))} \frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \right|_{t=0} = \left. \left[\sqrt{\det(g^{ij}(0))} \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \frac{d}{dt} \det(g_{ij}(t)) \right] \right|_{t=0} \\
&= \frac{\text{tr}(g'_{ij}(0))}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left. \frac{d}{dt} \langle F_{x_i}(x, t), F_{x_i}(x, t) \rangle \right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2 \langle \nabla_V F_{x_i}, F_{x_i} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{F_{x_i}} V, F_{x_i} \rangle \\
&= \text{div}_\Sigma V
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Podemos obter uma relação do resultado acima com a curvatura média, para isso temos que expressar o campo variacional V em termos de sua componentes normal e tangencial:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \nu(t) \right|_{t=0} &= \text{div}_\Sigma V \\
&= \text{div}(V^T + V^N) \\
&= \text{div} V^T + \text{div} V^N \\
&= \text{div}_\Sigma V^T - \langle V, \vec{H} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde a última igualdade foi obtida usando a identidade (3.1).

Dessa forma, utilizando (3.9) em (3.6), obtemos:

$$\left. \frac{d}{dt} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = - \int_\Sigma \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma + \int_\Sigma \text{div}_\Sigma V^T d\sigma_t = - \int_\Sigma \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma,$$

onde $\int_\Sigma \text{div}_\Sigma V^T d\sigma = 0$ decorre do Teorema de Stokes pois $V = 0$ nos pontos de $\partial\Sigma$.

□

À luz da proposição acima, vale observar que uma hipersuperfície $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ é mínima se, e somente se Σ for um ponto crítico do funcional Vol definido na **Proposição 3.0.2**, com relação a variações que fixam o bordo. Com efeito, se Σ for mínima, então segue imediatamente que Σ é um ponto crítico do funcional Vol , uma vez que $\vec{H} \equiv 0$. Reciprocamente, suponha que Σ seja um ponto crítico do funcional Vol . Desse modo, temos que:

$$\int_\Sigma \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma = 0.$$

Escolhendo $V = \vec{H}$, obtemos

$$\int_\Sigma \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle d\sigma = 0$$

e, portanto, $\vec{H} = 0$, ou seja, Σ é mínima.

De maneira natural, segue a curiosidade em entender como se comporta a segunda variação da área calculada em uma hipersuperfície mínima. Nesse sentido, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.0.3 (Segunda Variação da Área). *Sejam $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima imersa e F uma variação de Σ na direção normal. Ponha $V = \varphi N$ como sendo o campo variacional. Então*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \varphi^2 d\sigma \quad (3.10)$$

Demonstração. Como mencionado no enunciado, nosso campo variacional é normal, ou seja, em Σ

$$V^T \equiv 0.$$

Assim como na demonstração da *proposição 3.0.2* utilizamos

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j}), \quad (3.11)$$

$$\nu(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da proposição anterior, devemos obter a seguinte derivada:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} \left(\left. \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) \right|_{t=0} \right) \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx. \quad (3.13)$$

Para isso, utilizaremos o seguinte fato: dado uma família suave de matrizes invertíveis $(g_{ij}(t))$ a 1-parâmetro, vale, para $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, que $\left. \frac{d}{dt} \det(g_{ij}(t)) \right|_{t=s} = \text{tr}(g'_{ij}(s) g_{ij}^{-1}(s)) \det(g_{ij})$. À luz desta observação, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \frac{d}{dt} \det(g_{ij}(t)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \det(g_{ij}(t)) \\ &= \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)). \end{aligned}$$

Em resumo, a sequência de igualdades acima nos fornece a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} = \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)). \quad (3.14)$$

Multiplicando ambos os lados desta igualdade por $2\sqrt{\det(g^{ij}(0))}$, obtemos que:

$$2 \frac{d}{dt} \nu(t) = \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \nu(t) \quad (3.15)$$

A partir da relação (3.15), busquemos calcular a segunda derivada de $\nu(t)$:

$$\begin{aligned}
2 \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) &= \frac{d}{dt} [\text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \nu(t)] \\
&= \frac{d}{dt} [\text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t))] \nu(t) + \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \frac{d}{dt} \nu(t) \\
&= \text{tr}[g''_{ij}(t) g^{lm}(t) + g'_{ij}(t) (g^{lm})'(t)] \nu(t) + \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \frac{d}{dt} \nu(t) \\
&= \text{tr}[g''_{ij}(t) g^{lm}(t) + g'_{ij}(t) (g^{lm})'(t)] \nu(t) + \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \frac{\text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \nu(t)}{2} \\
&= \text{tr}[g''_{ij}(t) g^{lm}(t) + g'_{ij}(t) (g^{lm})'(t)] \nu(t) + \frac{[\text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t))]^2}{2} \nu(t) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Para examinarmos $\frac{d^2}{dt^2} \nu(t) \Big|_{t=0}$ em algum ponto $x \in \Sigma$, escolhemos um sistema ortonormal $\{x_i\}$ em x . Desse modo, derivando a expressão $g^{lk}(t) g_{km}(t) = \delta_{lm}$ aplicando a regra do produto, obtemos:

$$(g^{lk})'(t) g_{km}(t) = -g^{lk}(t) g'_{km}(t),$$

avaliando em $t = 0$ chegamos a:

$$(g^{lm})'(0) = -\delta_{lk} g'_{km}(0) = -g'_{lm}(0).$$

Dessa forma, utilizando a relação acima em conjunto com (3.16), obtemos que:

$$2 \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) \Big|_{t=0} = \text{tr}[g''_{ij}(0)] - \text{tr}[g'_{ij}(0) g'_{lm}(0)] + \frac{(\text{tr}[g'_{ij}(0)])^2}{2} \nu(t). \quad (3.17)$$

Sob outra perspectiva, e utilizando a simetria

$$\nabla_V F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} V = 0 \quad (3.18)$$

juntamente com o fato da variação ser normal e a segunda forma fundamental ser simétrica, temos:

$$\begin{aligned}
g'_{ij}(0) &= \frac{d}{dt} g(F_{x_i}, F_{x_j}) \Big|_{t=0} \\
&= g(\nabla_V F_{x_i}, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_V F_{x_j}) \\
&= g(\nabla_{F_{x_i}} V, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \nabla_{F_{x_j}} V) \\
&= F_{x_i} g(V, F_{x_j}) - g(V, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}) + F_{x_j} g(F_{x_i}, V) - g(\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i}, V) \\
&= -g(V, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}) - g(\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i}, V) \\
&= -g(V, (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})^N) - g((\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i})^N, V) \\
&= -g(V, A(F_{x_i}, F_{x_j})) - g(A(F_{x_j}, F_{x_i}), V) \\
&= -2g(V, A(F_{x_i}, F_{x_j})). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[g'_{ij}(0)] &= \sum_i g'_{ii}(0) \\
 &= \sum_i -2g(V, A(F_{x_i}, F_{x_i})) \\
 &= -2g\left(V, \sum_i A(F_{x_i}, F_{x_i})\right) \\
 &= -2g(V, \vec{H}) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

uma vez que Σ é mínima. Utilizando o fato acima em (3.17), verificamos que

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) \right|_{t=0} = \text{tr}[g''_{ij}(0)] - \text{tr}[g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)]. \quad (3.20)$$

Fazendo uso de (3.19) e levando em consideração que $V = \varphi N$, chegamos à seguinte relação referente à segunda parcela de (3.20):

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[(g'_{ij}(0))^2] &= \sum_{i,j=1}^n g'_{ij}(0)g'_{ji}(0) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n g'_{ij}(0)^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^n [-2g(V, A(F_{x_i}, F_{x_j}))]^2 \\
 &= 4 \sum_{i,j=1}^n [g(\varphi N, A(F_{x_i}, F_{x_j}))]^2 \\
 &= 4\varphi^2 \sum_{i,j=1}^n [g(N, A(F_{x_i}, F_{x_j}))]^2 \\
 &= 4\varphi^2 |A|^2.
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Além disso, percebamos que, em x , temos

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[g''_{ij}(0)] &= \sum_{i=1}^n g''_{ii}(0) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n g(F_{x_i tt}, F_{x_i}) + 2 \sum_{i=1}^n g(F_{x_i t}, F_{x_i t}).
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Utilizando a simetria da conexão, podemos chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n g(F_{x_i t t}, F_{x_i}) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_V \nabla_V F_{x_i}, F_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_V \nabla_{F_{x_i}} V, F_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_V \nabla_{F_{x_i}} V - \nabla_{F_{x_i}} \nabla_V V + \nabla_{[V, F_{x_i}]} F_t, F_{x_i}) + \sum_{i=1}^n g(\nabla_{F_{x_i}} \nabla_V V, F_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R_M(F_{x_i}, V) V, F_{x_i}) + \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_V V).
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (3.22), segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}[g''_{ij}(0)] &= 2 \sum_{i=1}^n g(R_M(F_{x_i}, V) V, F_{x_i}) + 2 \operatorname{div}_\Sigma(V_t) + 2 \sum_{i=1}^n g(F_{x_i t}, F_{x_i t}) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n g(R_M(F_{x_i}, V) V, F_{x_i}) + 2 \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_V V) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^n g(F_{x_i t}^T, F_{x_i t}^T) + 2 \sum_{i=1}^n g(F_{x_i t}^N, F_{x_i t}^N)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Levando-se em consideração (3.18) e que a variação é normal em x , temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n g(F_{x_i t}^T, F_{x_i t}^T) &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_V F_{x_i})^T, (\nabla_V F_{x_i})^T) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_V F_{x_i}, F_{x_j}) g(\nabla_V F_{x_i}, F_{x_j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_V F_{x_i}, F_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{F_{x_i}} V, F_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{F_{x_i}}(\varphi N), F_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left[g(F_{x_i}(\varphi) N, F_{x_j}) + \varphi g(\nabla_{F_{x_i}} N, F_{x_j}) \right]^2 \\
&= \varphi^2 \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{F_{x_i}} N, F_{x_j})^2 \\
&= \varphi^2 |A|^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Novamente, fazendo uso de (3.18), podemos ver que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n g(F_{x_i t}^N, F_{x_i t}^N) &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_V F_{x_i})^N, (\nabla_V F_{x_i})^N) \\
&= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{F_{x_i}} V)^N, (\nabla_{F_{x_i}} V)^N) \\
&= \sum_{i=1}^n |(\nabla_{F_{x_i}} V)^N|^2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora, substituindo (3.24) e (3.25) em (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{tr}[g''_{ij}(0)] &= 2 \operatorname{div}(V_t) + 2 \sum_{i=1}^n g(R_M(F_{x_i}, V)V, F_{x_i}) \\
&\quad + 2|A|^2 \varphi^2 + 2 \sum_{i=1}^n |(\nabla_{F_{x_i}} V)^N|^2 \\
&= 2 \operatorname{div}(\nabla_V V) - 2 \operatorname{Ric}(N, N) \varphi^2 + 2|A|^2 \varphi^2 + 2 \sum_{i=1}^n |(\nabla_{F_{x_i}} V)^N|^2. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de (3.26) e (3.21) em (3.20), obtemos:

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) \right|_{t=0} = 2 \operatorname{div}(\nabla_V V) - 2 \operatorname{Ric}(N, N) \varphi^2 - 2|A|^2 \varphi^2 + 2 \sum_{i=1}^n |(\nabla_{F_{x_i}} V)^N|^2. \quad (3.27)$$

Dividindo por 2 em ambos os lados da igualdade acima, e substituindo o resultado em (3.13), temos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\nabla_V V) d\sigma - \int_{\Sigma} \operatorname{Ric}(N, N) \varphi^2 d\sigma - \int_{\Sigma} |A|^2 \varphi^2 d\sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^n |(\nabla_{F_{x_i}} V)^N|^2 d\sigma. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Levando-se em consideração que a variação tem suporte compacto, segue que $\nabla_V V = 0$ nos pontos de $\partial\Sigma$. Além disso, vejamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |(\nabla_{F_{x_i}} V)^N|^2 &= \sum_{i=1}^n |\langle \nabla_{F_{x_i}} V, N \rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{F_{x_i}}(\varphi N), N \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{F_{x_i}}(\varphi)N + \varphi \nabla_{F_{x_i}} N, N \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{F_{x_i}}(\varphi)N, N \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_{F_{x_i}}(\varphi))^2 \\
&= |\nabla \varphi|^2.
\end{aligned}$$

Unindo a relação obtida acima com o fato de $\nabla_V V = 0$ sob as condições mencionadas, obtemos (3.28) no seguinte formato:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 - (\operatorname{Ric}(N, N) + |A|^2) \varphi^2 d\sigma.$$

□

Um fato interessante a se considerar, é que há outras versões para as proposições sobre a primeira e segunda variação de área apresentadas acima. Especificando, temos os

casos em que a hipersuperfície Σ possui bordo. Nessa perspectiva, tratamos de variações que fixam o bordo e variações de bordo livre. Dito isso, façamos algumas considerações sobre estas configurações.

Primeiramente, vejamos o que significa dizer que uma variação tem bordo fixo.

Definição 3.0.4. Dizemos que uma variação $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é de bordo fixo (ou própria), se $F(x, \cdot) = x$ para todo $x \in \partial\Sigma$.

Observação: Se $F(x, \cdot) = x$ para todo $x \in K^c$, onde $K \subset \Sigma$ é um conjunto compacto, dizemos que a variação tem suporte compacto.

Nesse sentido, as fórmulas obtidas nas proposições (3.0.2) e (3.0.3) apresentam-se sob o mesmo formato quando tratamos de variações que fixam o bordo. No entanto, as variações consideradas são tais que a função φ que determina a variação, satisfaz: $\varphi|_{\partial\Sigma} = 0$.

Em contrapartida, quando a variação é de bordo livre, temos alterações no formato das expressões obtidas na primeira e segunda variação da área apresentadas neste trabalho. Fazemos uma breve abordagem sobre o caso.

Para isso, admita que $(M^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ seja uma variedade Riemanniana com bordo ∂M e chamemos de X o campo normal unitário ao longo de ∂M apontando para fora de ∂M . Considere $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície com bordo $\partial\Sigma$ imersa em M . Além disso, assuma que o bordo de Σ , $\partial\Sigma$, esteja contido no bordo do ambiente ∂M . Seja η o vetor normal unitário a $T_p\partial\Sigma$ que aponta para fora de $\partial\Sigma$. Nessa perspectiva, dizemos que Σ é bordo livre, se $\eta = X$ em $\partial\Sigma$.

Diante das considerações feitas acima, a primeira variação da área para o caso descrito, apresenta-se do seguinte modo:

$$\left. \frac{d}{dt} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle \eta, V \rangle d\Sigma. \quad (3.29)$$

Além disso, a segunda variação da área para o contexto observado, encontra-se sob o seguinte formato, para cada variação de Σ com campo variacional $V = \rho N$, onde ρ foi definida no final do capítulo 2:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} |\nabla \rho|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A^M|^2) \rho^2 d\sigma - \int_{\partial\Sigma} (A^{\partial M}(N, N) \rho) d\partial\Sigma \quad (3.30)$$

Voltando ao contexto do presente trabalho, integrando por partes a expressão (3.10) podemos ver a segunda variação da área sob uma nova perspectiva. De fato, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \varphi^2 d\sigma &= - \int_{\Sigma} \varphi \Delta \varphi d\sigma - \int_{\Sigma} (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \varphi^2 d\sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \varphi (\Delta + \text{Ric}(N, N) + |A|^2) \varphi d\sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \varphi L \varphi d\sigma, \end{aligned}$$

onde $L = \Delta + Ric(N, N) + |A|^2$ é chamado de operador de Jacobi de Σ .

Seguindo o trabalho, definimos então a noção de estabilidade. Um dos conceitos que se fazem necessários para o desenvolvimento dos resultados centrais da presente dissertação.

Definição 3.0.5 (Estabilidade). *Uma hipersuperfície $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ é dita estável se*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} \geq 0 \quad (3.31)$$

para toda variação F com bordo fixo.

Note que a fórmula da segunda variação de área implica que a condição (3.31) é equivalente à seguinte condição:

$$\int_{\Sigma} (Ric(N, N) + |A|^2) \varphi^2 d\sigma \leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 d\sigma, \quad \text{para toda } \varphi \in C^\infty(\Sigma). \quad (3.32)$$

A desigualdade (3.32) é conhecida como *desigualdade de estabilidade*.

Agora, faremos uma interessante descrição da estabilidade de uma hipersuperfície mínima. Isso se dá por meio da caracterização variacional do primeiro autovalor do operador de Jacobi.

Definição 3.0.6. *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do operador de Jacobi L de uma hipersuperfície mínima $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ se existe uma função $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ não identicamente nula, chamada autofunção associada a λ , satisfazendo*

$$L\varphi + \lambda\varphi = 0. \quad (3.33)$$

Da teoria clássica das equações diferenciais elípticas, temos o conhecimento de que os autovalores do problema $L\varphi + \lambda\varphi = 0$ são dados por uma sequência não decrescente e divergente que denotamos por:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow \infty.$$

Com a definição acima em mãos, vamos apresentar uma caracterização variacional do primeiro autovalor λ_1 do operador de Jacobi L . Para isso, estudamos a segunda variação da área que é dada pela forma quadrática:

$$Q(\varphi, \varphi) = - \int_{\Sigma} \varphi L \varphi d\sigma. \quad (3.34)$$

Observemos que λ é um autovalor de L associado à autofunção φ se, e somente se, $Q(\varphi, \psi) = \lambda_L \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Sigma)}$ para toda $\psi \in C^\infty(\Sigma)$.

Nesse contexto, o primeiro autovalor λ_1 de L é obtido variacionalmente pela fórmula de Rayleigh:

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{Q(\varphi, \varphi)}{\int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma} : \varphi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\} \right\}. \quad (3.35)$$

Em particular, segue que:

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\Sigma} (|\nabla \varphi|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \varphi^2) d\sigma}{\int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma},$$

para toda $\varphi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$.

Além disso, obtemos da caracterização (3.35) para o primeiro autovalor λ_1 de L que a hipersuperfície mínima Σ é estável se, e somente se, $\lambda_1 \geq 0$.

Segue abaixo um importante lema sobre o primeiro autovalor do operador de Jacobi e sua respectiva autofunção.

Lema 3.0.7. *Suponha que $\varphi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$ é tal que $Q(\varphi, \varphi) = \lambda_1 \int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma$. Então, φ é uma autofunção de L associada ao autovalor λ_1 .*

Demonstração. Dada $v \in C^\infty(\Sigma)$, defina a seguinte função

$$f(t) := Q(\varphi + tv, \varphi + tv) - \lambda_1 \int_{\Sigma} (\varphi + tv)^2 d\sigma, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que decorre da caracterização variacional de λ_1 dada em (3.35) que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, temos

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{Q(\psi, \psi)}{\int_{\Sigma} \psi^2 d\sigma} : \psi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\} \right\} \leq \frac{Q(\varphi + tv, \varphi + tv)}{\int_{\Sigma} (\varphi + tv)^2 d\sigma}.$$

Além disso, por hipótese, $f(0) = 0$ e, portanto, $t = 0$ é um ponto de mínimo global de f e, consequentemente é também um ponto crítico. Logo,

$$0 = f'(0) = 2Q(\varphi, v) - 2\lambda_1 \int_{\Sigma} \varphi v d\sigma.$$

Noutras palavras, para toda $v \in C^\infty(\Sigma)$, temos:

$$-\int_{\Sigma} v L\varphi d\sigma = \lambda_1 \int_{\Sigma} \varphi v d\sigma.$$

Logo,

$$\int_{\Sigma} v(L\varphi + \lambda_1 \varphi) d\sigma = 0, \quad \text{para toda } v \in C^\infty(\Sigma).$$

Portanto, segue que $L\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$, ou seja, φ é uma autofunção associada a λ_1 .

□

Apresentamos agora um resultado que será de grande utilidade na demonstração da *proposição 4.0.5*, esta que se faz de grande necessidade para atingir os objetivos deste trabalho.

Seja $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ uma variação de Σ com suporte compacto concordando com a *definição 3.0.1* e tal que $f_t(\partial\Sigma) \subset \partial M$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Destacamos que o índice t é usado para se referir a quantidades associadas a $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$. Por exemplo, N_t e H_t denotam, respectivamente, o campo normal unitário e a curvatura média de Σ_t .

Proposição 3.0.8. *Seja $\rho(t) := \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}(t, x), N(t) \right\rangle$. Então segue que:*

$$\frac{d}{dt}H(t) = dH_t \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^T \right] - L_{\Sigma_t}(\rho(t)),$$

onde $L_{\Sigma_t} = \Delta_{\Sigma_t} + \text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2$ é o operador de Jacobi de Σ_t .

Demonstração. Uma demonstração para esta proposição pode ser encontra em (AMBROZIO, 2015), Proposição 16. $\square$

Vale destacar que para os objetivos deste trabalho, o resultado acima reduz-se a

$$\frac{d}{dt}H(t) = -L_{\Sigma_t}(\rho(t)),$$

pois estamos tratando de superfícies com curvatura média constante e, como consequência disso, a diferencial da mesma é nula.

4 Principais Resultados

A seguir seguem vários resultados que contribuirão preciosamente para o desfecho deste trabalho. Nessa perspectiva, vejamos a proposição que segue.

A fim de demonstrar a Proposição (4.0.3) necessitamos de um lema que é consequência da equação de Gauss. Desse modo, segue abaixo o resultado necessário.

Lema 4.0.1. *Seja $(M^{n+1}, \bar{g})$ uma variedade Riemanniana e $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície. Então:*

$$R = \bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) + H^2 - |A|^2, \quad (4.1)$$

onde R denota a curvatura escalar de Σ com respeito à métrica induzida.

Demonstração. Lembremos que a equação de Gauss nos diz que :

$$R(X, Y, Z, W) = \bar{R}(X, Y, Z, W) + A(Y, Z)A(X, W) - A(X, Z)A(Y, W),$$

onde $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$, para todos $X, Y, Z, W \in T\Sigma$. Consideremos uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ do espaço tangente $T_p M$, o qual é ortogonal a $N = N(p)$. Utilizando a base escolhida e a equação acima, chegamos a:

$$R(e_i, e_j, e_k, e_l) = \bar{R}(e_i, e_j, e_k, e_l) + A(e_j, e_k)A(e_i, e_l) - A(e_i, e_k)A(e_j, e_l),$$

ou simplifcadamente,

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + A_{jk}A_{il} - A_{ik}A_{jl}.$$

Agora, façamos $k = j$. Somando e subtraindo o termo $\bar{R}_{iNNl}$ na equação acima e somando em j de 1 até n , obtemos:

$$\sum_{j=1}^n R_{ijjl} = \sum_{j=1}^n \bar{R}_{ijjl} + \bar{R}_{iNNl} - \bar{R}_{iNNl} + \sum_{j=1}^n A_{jj}A_{il} - \sum_{j=1}^n A_{ij}A_{jl},$$

donde segue que

$$Ric_{il} = \bar{Ric}_{il} - \bar{R}_{iNNl} + HA_{il} - \sum_{j=1}^n A_{ij}A_{jl}.$$

Fazendo $i = l$ e somando em i de 1 até n , obtemos:

$$\sum_{i=1}^n Ric_{ii} = \sum_{i=1}^n \bar{Ric}_{ii} + \bar{Ric}_{NN} - \bar{Ric}_{NN} - \sum_{i=1}^n \bar{R}_{iNNi} + \sum_{i=1}^n HA_{ii} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}A_{ji},$$

onde acima também somamos e subtraímos o termo $\bar{Ric}_{NN}$. Portanto, temos

$$R = \bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) + H^2 - |A|^2.$$

□

Como consequência do lema acima, segue o seguinte corolário.

Corolário 4.0.2. *Seja $(M^3, \bar{g})$ uma variedade Riemanniana e $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mínima, então:*

$$2K_\Sigma = \bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) - |A|^2. \quad (4.2)$$

Demonstração. Supondo $n = 2$ no lema acima demonstrado, segue-se que $R = 2K_\Sigma$. Além disso, Σ é mínima ($H = 0$), logo, a expressão obtida no resultado mencionado nos dá:

$$2K_\Sigma = \bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) + 0 - |A|^2.$$

Com isso, o resultado segue. □

Com o resultado acima em mãos, podemos partir para a proposição que segue. Esta que utiliza de propriedades geométricas e topológicas de superfícies mínimas em variedades Riemannianas para tirar conclusões sobre a forma e a área dessas superfícies, dependendo das condições impostas sobre a curvatura escalar do ambiente.

Proposição 4.0.3. *Sejam (M, g) uma 3-variedade Riemanniana orientável e $\Sigma \subset M$ uma superfície mínima compacta e orientável. Se Σ é estável, então*

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma R_g + |A|^2 d\sigma \leq \int_\Sigma K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (4.3)$$

Em particular, se

- (i) $R_g \geq 0$, então Σ é homeomorfa a uma esfera ou um toro;
- (ii) $R_g \geq 2$, então Σ é homeomorfa a uma esfera e $|\Sigma| \leq 4\pi$;
- (iii) $R_g \geq -2$ e Σ possui gênero $g(\Sigma) \geq 2$, então $|\Sigma| \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1)$.

Demonstração. Inicialmente provaremos a desigualdade (4.3). Para isso, seja N um campo unitário de vetores normais definido ao longo de Σ . Para cada função $\phi \in C^\infty(\Sigma)$, temos, pela segunda variação da área e pelo fato de Σ ser mínima estável, que

$$\int_\Sigma (Ric(N, N) + |A|^2) \phi^2 d\sigma \leq \int_\Sigma |\nabla \phi|^2 d\sigma,$$

onde A e $d\sigma$ denotam, respectivamente, a segunda forma fundamental e o elemento de área de Σ . Escolhendo $\phi = 1$, segue que $\nabla \phi = 0$ e, assim:

$$\int_\Sigma (Ric(N, N) + |A|^2) d\sigma \leq 0. \quad (4.4)$$

Agora, pelo Lema (4.0.1) temos que

$$\text{Ric}(N, N) = \frac{R_g}{2} - K_\Sigma - \frac{|A|^2}{2}. \quad (4.5)$$

Fazendo a substituição de (4.5) em (4.4), temos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Sigma \left(\frac{R_g}{2} - K_\Sigma - \frac{|A|^2}{2} + |A|^2 \right) d\sigma \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{R_g}{2} - K_\Sigma + \frac{|A|^2}{2} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma (R_g + |A|^2) d\sigma \leq \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde a última igualdade segue do Teorema de Gauss-Bonnet.

Para finalizarmos a demonstração desta proposição, provaremos os itens (i), (ii), (iii). Com esse objetivo, lembremos que $\chi(\Sigma) = 2 - 2g(\Sigma)$, onde $g(\Sigma)$ denota o gênero de Σ e $\chi(\Sigma)$ a característica de Euler de Σ .

Para o item (i), basta que olhemos para a relação (4.3) e percebamos que deve ocorrer de $\chi(\Sigma) \geq 0$.

Para demonstrar o item (ii), suponha que $R_g \geq 2$. Logo, como $|A|^2 \geq 0$, segue da desigualdade (4.3) que $\chi(\Sigma) > 0$ (em particular, $g(\Sigma) = 0$), ou seja, Σ é homeomorfa a uma esfera, e

$$|\Sigma| \leq \frac{1}{2} \int_\Sigma (R_g + |A|^2) d\sigma \leq \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = 4\pi,$$

o que prova o item (ii).

Para demonstrar o item (iii), suponha que $R_g \geq -2$ e que Σ possui gênero $g(\Sigma) \geq 2$. Desse modo, novamente levando em consideração que $|A|^2 \geq 0$, temos pela desigualdade (4.3) que

$$-|\Sigma| \leq \frac{1}{2} \int_\Sigma (R_g + |A|^2) d\sigma \leq \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma) = 4\pi(1 - g(\Sigma)).$$

Portanto, $|\Sigma| \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1)$, o que prova o item (iii). $\square$

Em resumo, a proposição acima mostra que superfícies mínimas estáveis em variedades com certas condições de curvatura possuem restrições topológicas e geométricas específicas.

A próxima proposição simplificará o nosso estudo em alguns aspectos, isso porque ela nos diz, sob certas condições, que o operador diferencial que descreve a estabilidade é apenas o Lapaciano na superfície Σ , fato que simplifica a análise da estabilidade.

Proposição 4.0.4 (Rigidez infinitesimal). *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana orientável e $\Sigma \subset M$ uma superfície mínima compacta e orientável. Suponha que Σ é estável e $R_g \geq R_0$, onde $R_0 \in \{-2, 0, 2\}$.*

- (i) *Se $R_0 = 0$ e Σ é homeomorfa a um toro; ou*
- (ii) *se $R_0 = 2$, Σ é homeomorfa a uma esfera e $|\Sigma| = 4\pi$; ou*
- (iii) *se $R_0 = -2$, Σ possui gênero $g(\Sigma) \geq 2$ e $|\Sigma| = 4\pi(g(\Sigma) - 1)$,*

então

1. *Σ é totalmente geodésica e $K_\Sigma = R_0/2$;*
2. *R_g é constante igual a Λ e $\text{Ric}_g(N, N) = 0$ ao longo de Σ .*

Em particular, o operador de Jacobi de Σ é dado por $L = \Delta_\Sigma$.

Demonstração. De acordo com as nossas hipóteses, temos $R_g \geq \Lambda$. Desta forma, decorre deste fato e da estabilidade de Σ que

$$\frac{R_0}{2}|\Sigma| \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R_g + |A|^2) d\sigma \leq 2\pi\chi(\Sigma). \quad (4.6)$$

Observe que as condições (i), (ii) e (iii) implicam

$$\frac{R_0}{2}|\Sigma| = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Portanto, as desigualdades em (4.6) são, de fato, igualdades. Logo, como $R_g \geq \Lambda$, segue da igualdade

$$\frac{R_0}{2}|\Sigma| = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R_g + |A|^2) d\sigma$$

que $A \equiv 0$, ou seja, Σ é totalmente geodésica, e $R_g = R_0$ em Σ .

Agora, vamos mostrar função $\psi \equiv 1$ está no núcleo do operador de Jacobi $L = \Delta_\Sigma + \text{Ric}(N, N) + |A|^2$ de Σ .

Para isso, note, pela demonstração do Corolário 4.0.3, que a igualdade

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R_g + |A|^2) d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$$

é equivalente a igualdade

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) d\sigma = 0. \quad (4.7)$$

Agora, consideremos λ_1 o primeiro autovalor do operador de Jacobi de Σ , o qual é definido (veja (3.35)) variacionalmente por

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Sigma} (|\nabla \varphi|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)\varphi^2); \int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma = 1 \right\}. \quad (4.8)$$

Sendo Σ estável, segue que $\lambda_1 \geq 0$. Ademais, escolhendo $\varphi = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|_g}}$, obtemos que

$$\int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma = 1 \quad e \quad |\nabla \varphi|^2 = 0.$$

Outrossim, utilizando (4.7), temos

$$\int_{\Sigma} (|\nabla \varphi|^2 - (Ric(N, N) + |A|^2)) \varphi^2 d\sigma = -\frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} (Ric(N, N) + |A|^2) d\sigma = 0.$$

Daí, decorre que $\lambda_1 = 0$ e $L(\varphi) = 0$, ou seja, φ está no núcleo do operador de Jacobi. Consequentemente, a função $\psi = 1$ também está no núcleo de L , pois é um múltiplo de φ . Portanto, como já concluímos acima que Σ é totalmente geodésica, obtemos

$$Ric(N, N) = L(1) = 0.$$

Para concluir a demonstração, segue da relação (4.2) e das informações obtidas até aqui que

$$2K_{\Sigma} = R_g - 2Ric(N, N) - |A|^2 = \Lambda,$$

ou seja,

$$K_{\Sigma} = \frac{\Lambda}{2}.$$

□

A *proposição 4.0.5* será ferramenta de grande importância para demonstração do *Teorema 2* e, consequentemente, do *Teorema 3*. A proposição em questão, por meio da função w , nos fornece uma ferramenta para explorar a geometria das superfícies próximas a uma dada superfície inicial. Esta garante a existência de deformações suaves que preservam a curvatura média constante.

Proposição 4.0.5. *Seja N um campo normal unitário em uma superfície orientada e de dois lados Σ imersa em uma variedade tridimensional M . Se o operador de Jacobi de Σ é dado por $L = \Delta_{\Sigma}$, então existe $\varepsilon > 0$ e uma função suave $w : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, as superfícies*

$$\Sigma_t := \{\exp_x(w(x, t)N(x)) : x \in \Sigma\}$$

têm curvatura média constante $H(t)$. Além disso, temos que

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, t)|_{t=0} = 1 \quad e \quad \int_{\Sigma} (w(\cdot, t) - t) d\sigma = 0,$$

para todo $x \in \Sigma$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demonstração. Seja L o operador de Jacobi de Σ e suponha que $L = \Delta_\Sigma$. Fixemos $\alpha \in (0, 1)$ e definamos os seguintes conjuntos:

$$X = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma) : \int_\Sigma u \, d\sigma = 0\} \quad \text{e} \quad Y = \{u \in C^{0,\alpha}(\Sigma) : \int_\Sigma u \, d\sigma = 0\}.$$

Note X e Y são espaços de Banach, pois são subespaços fechados de $C^{2,\alpha}(\Sigma)$ e $C^{0,\alpha}(\Sigma)$, respectivamente. Definimos então, para cada $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_u : \Sigma \rightarrow M$ por

$$\varphi_u(x) = \exp_x(u(x)N(x)).$$

Pomos então $\Sigma_u = \varphi_u(\Sigma)$. Dito isso, escolha $\varepsilon, \delta > 0$ tais que φ_{u+t} seja uma imersão, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $u \in B(0, \delta) = \{v \in X : \|v\|_{C^{2,\alpha}} < \delta\}$. Com essa escolha, a superfície Σ_{u+t} imersa é de classe $C^{2,\alpha}$. Denote por H_{u+t} a curvatura média de Σ_{u+t} .

Agora, considere a aplicação $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, \delta) \rightarrow Y$ definido por:

$$\Psi(t, u) = H_{\Sigma_{u+t}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma H_{\Sigma_{u+t}} \, d\sigma. \quad (4.9)$$

Note que $\Psi(0, 0) = 0$, uma vez que $\Sigma_0 = \Sigma$. Vamos agora calcular a derivada $D_2\Psi(0, 0) \cdot v$, $v \in X$:

$$\begin{aligned} D_2\Psi(0, 0) \cdot v &= \frac{d\Psi}{ds}(0, sv) \\ &= \frac{d}{ds} \left(H_{\Sigma_{sv}} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma H_{\Sigma_{sv}} \, d\sigma \right) \\ &= \frac{d}{ds} H_{\Sigma_{sv}} \Big|_{s=0} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma \left(\frac{d}{ds} H_{\Sigma_{sv}} \Big|_{s=0} \right) d\sigma. \\ &= -Lv + \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma Lv \, d\sigma, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos a *proposição 3.0.8*. Agora, pelo Teorema da Divergência e pelo fato de $L = \Delta_\Sigma$, temos:

$$D\Psi(0, 0) \cdot v = -\Delta_\Sigma v$$

Dando continuidade ao trabalho, observemos que $\Delta_\Sigma : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo linear. Uma consequência imediata deste fato, é que $D\Psi(0, 0)$ também é um isomorfismo. Como $\Psi(0, 0) = 0$, segue do Teorema da Função Implícita que existem $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ e uma função $u : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow B(0, \delta)$ tal que

$$u(0) = u(0, \cdot) = 0 \quad \text{e} \quad \Psi(t, u(t, \cdot)) = 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1).$$

Definamos agora $w(t, \cdot) = u(t, \cdot) + t$, onde $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Observemos que, como $\Psi(t, u(t, \cdot)) = 0$, a superfície $\Sigma_t = \varphi_{w(t, \cdot)}(\Sigma)$ tem curvatura média constante para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Ademais, $w(0, x) = u(0, x) = 0$ e como $u(t, \cdot) \in B(0, \delta) \subset X$, temos:

$$\int_\Sigma (w(t, \cdot) - t) \, d\sigma = \int_\Sigma u(t, \cdot) \, d\sigma = 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \quad (4.10)$$

Feitas as considerações acima, defina $f : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \Sigma \rightarrow M$ por

$$f(t, x) = \exp_x(w(t, x)N(x)). \quad (4.11)$$

Levando-se em conta que $w(0, x) = 0$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(1, x, w(t, x)N(x)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)N(x), \quad \forall x \in \Sigma. \quad (4.12)$$

Agora, observemos que devido ao fato de $\Psi(t, u(t, \cdot)) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, obtemos que:

$$H_{w(t, \cdot)} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{w(t, \cdot)} d\sigma = 0.$$

Nessa perspectiva, segue que:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{w(t, \cdot)} \Big|_{t=0} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t} H_{w(t, \cdot)} \Big|_{t=0} \right) d\sigma = 0$$

Pela *proposição 3.0.8*, temos:

$$\Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma = 0.$$

Como a integral na expressão acima é nula, conclui-se que:

$$\Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0.$$

Logo, como Σ é compacta e $\partial\Sigma = \emptyset$ temos que $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$ é constante.

Além disso, derivando (4.10) em $t = 0$, temos

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, \cdot) - 1 \right) d\sigma = 0,$$

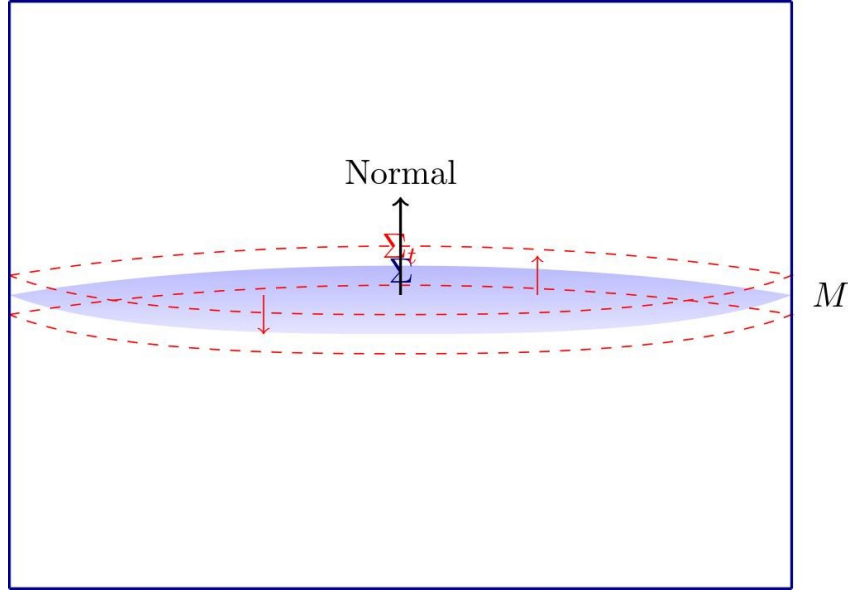
isto é,

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma = |\Sigma|.$$

Por fim, como $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$ é constante, obtemos $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) = 1$. Em resumo, verificamos que todas as condições afirmadas na proposição são, de fato, satisfeitas. $\square$

A proposição anterior nos garante que certas pequenas deformações normais da superfície Σ resultam em superfícies Σ_t com curvatura média constante. Assim, sob as hipóteses de ser totalmente geodésica e ter $\text{Ric}(N, N) = 0$ ao longo de Σ , além de uma limitação inferior da curvatura escalar do ambiente, o Teorema 4.0.6 nos diz que a área dessas superfícies não aumenta diante de pequenas deformações. Além disso, o resultado a seguir, fornece uma expressão explícita para a área da superfície original, Σ .

Figura 5 – Variação normal. Proposição (4.0.5)



Fonte: próprio autor.

Teorema 4.0.6. *Seja M uma variedade tridimensional e seja $\Sigma \subset M$ uma superfície imersa, de 2 lados e fechada. Denotemos por R a curvatura escalar de M e seja $R_0 := \min_{x \in M} R(x)$. Suponha que Σ tenha as seguintes propriedades:*

- (i) Σ é totalmente geodésica;
- (ii) R é igual a R_0 ao longo de Σ ;
- (iii) a curvatura de Ricci normal de M se anula ao longo Σ .

Sejam Σ_t e ϵ como na Proposição 4.0.5 e denote por $A(t)$ a área de Σ_t . (Em particular, $A(0)$ é a área de Σ .) Então existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$\text{para } |t| < \delta, \quad A(t) \leq A(0).$$

Além disso, Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{2}R_0$ e, portanto, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, $A(0) = \frac{8\pi}{|R_0|}|\gamma - 1|$ se R_0 for não nulo.

Demonstração. Com a notação da Proposição 4.0.5, seja

$$f_t(x) := \exp_x(w(x, t)N(x)), \quad x \in \Sigma, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Então, $f_0 =: f$ é um dado mergulho totalmente geodésico. Defina $\rho_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ pondo:

$$\rho_t(x) := \left\langle N_t(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right\rangle, \quad (4.13)$$

onde N_t é o normal unitário de Σ_t , o qual é escolhido contínuo em t . A função assim definida satisfaz a seguinte equação de Jacobi (ver (AMBROZIO, 2015), Proposição 16):

$$H'(t) = -\Delta_{\Sigma_t} \rho_t - (\text{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t \quad (4.14)$$

onde $(\cdot)' := \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$. Note que, utilizando a Equação de Gauss (4.1), podemos reescrever (4.14) do seguinte modo:

$$H'(t) = -\Delta_{\Sigma_t} \rho_t - \left(\frac{R_t}{2} - K_t + \frac{H^2(t)}{2} - \frac{|A_t|^2}{2} \right) \rho_t \quad (4.15)$$

onde $R_t(x) := R(f_t(x))$ e $K_t(x) := K(f_t(x))$ é a curvatura de Gauss de Σ_t em $f_t(x)$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= \left\langle N_0(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \Big|_{t=0} \right\rangle = \left\langle N_0(x), \frac{\partial}{\partial t} \exp_x((w(x, t)N(x)) \Big|_{t=0} \right\rangle \\ &= \langle N_0(x), N(x) \rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, sendo $\rho_0(x) = 1$ para todo $x \in \Sigma$ e Σ sendo compacta, podemos assumir, diminuindo ε se necessário, que $\rho_t(x) > 0$ para todo $x \in \Sigma$. Assim, podemos dividir (4.15) por ρ_t :

$$H'(t) \frac{1}{\rho_t} = -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t - \frac{1}{2} R_t + K_t - \frac{1}{2} H(t)^2 - \frac{1}{2} |A_t|^2. \quad (4.16)$$

Fazendo uso das hipóteses (i), (ii) e (iii) juntamente com Equação de Gauss (4.1), obtemos:

$$K_0 \equiv \frac{R_0}{2} \leq \frac{R_t(x)}{2}, \quad \forall x \in \Sigma, t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (4.17)$$

Usando este fato em (4.16) obtemos:

$$\begin{aligned} H'(t) \frac{1}{\rho_t} &= -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t - \frac{R_t}{2} + \frac{R_0}{2} - \frac{R_0}{2} + K_t - \frac{H(t)^2}{2} - \frac{|A_t|^2}{2} \\ &= -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t + \frac{1}{2} (R_0 - R_t) + (K_t - K_0) - \frac{H(t)^2}{2} - \frac{|A_t|^2}{2} \\ &\leq -\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t + (K_t - K_0). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Agora, integrando sobre Σ_t com relação ao elemento de área $d\sigma_t$ induzido por f_t e levando em consideração que $H(t)$ não depende de x , temos:

$$\begin{aligned} H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leq \int_{\Sigma} \left(-\frac{1}{\rho_t} \Delta_{\Sigma_t} \rho_t \right) d\sigma_t + \int_{\Sigma} (K_t - K_0) d\sigma_t \\ &= \int_{\Sigma} \left\langle \nabla_{\Sigma_t} \left(\frac{1}{\rho_t} \right), \nabla_{\Sigma_t} \rho_t \right\rangle d\sigma_t + \int_{\Sigma} (K_t - K_0) d\sigma_t \\ &= - \int_{\Sigma} \left\langle \frac{\nabla_{\Sigma_t} \rho_t}{\rho_t^2}, \nabla_{\Sigma_t} \rho_t \right\rangle d\sigma_t + \int_{\Sigma} (K_t - K_0) d\sigma_t \\ &= - \int_{\Sigma} \frac{\|\nabla_{\Sigma_t} \rho_t\|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + \int_{\Sigma} (K_t - K_0) d\sigma_t \\ &\leq \int_{\Sigma} (K_t - K_0) d\sigma_t \\ &= 4\pi(1 - g(\Sigma_t)) - K_0 A(t). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Vale destacar que esta última igualdade foi obtida aplicando-se o Teorema de Gauss-Bonnet.

Tendo em vista que

$$A'(t) = \int_{\Sigma} H(t) \rho_t d\sigma_t = H(t) \int_{\Sigma} \rho_t d\sigma_t, \quad (4.20)$$

para mostrarmos que existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $A(t) \leq A(0)$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$, é suficiente checarmos que $H(t) \leq 0$ para $t \in [0, \delta)$ e $H(t) \geq 0$ para todo $t \in (-\delta, 0]$ para algum $0 < \delta < \varepsilon$. Isso será feito a seguir. Faremos apenas o caso $t \geq 0$, pois o caso $t \leq 0$ é análogo.

Afirmção 1 : existe um número real positivo $\delta < \varepsilon$ tal que $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \delta)$.

Demonstração da Afirmção 1. Temos três casos a considerar:

Caso 1: $R_0 > 0$. Fazendo uma homotetia na métrica de M , se necessário, podemos supor $R_0 = 2$. Por (4.17) segue que $K_0 \equiv 1$. Logo, segue do Teorema de Gauss-Bonnet, que Σ tem gênero zero e $A(0) = A(\Sigma) = 4\pi$. Deste modo, a desigualdade (4.19) fica

$$\begin{aligned} H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leq 4\pi - A(t) = A(0) - A(t) = - \int_0^t A'(s) ds \\ &= - \int_0^t \left\{ H(s) \int_{\Sigma} \rho_s d\sigma_s \right\} ds, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde a última igualdade foi obtida usando-se a Fórmula da Primeira a Variação da Área (3.2).

Definimos então $\phi(t) := \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t$ e $\xi(t) := \int_{\Sigma} \rho_t d\sigma_t$. Note que ϕ é estritamente positiva qualquer que seja $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Assim, da desigualdade (4.21) segue que:

$$H'(t) \leq - \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t H(s) \xi(s) ds \quad (4.22)$$

Como $\phi(0) = \xi(0) = A(0)$, pois $\rho_0 \equiv 1$, e ϕ e ξ são contínuas com relação à t , podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{1}{\phi(t)} < \frac{4}{A(0)} \quad \text{e} \quad \xi(t) < 4A(0), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (4.23)$$

Tendo em vista que queremos mostrar que existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \delta)$, vamos supor que este fato não ocorra. Sendo assim, para todo $0 < \delta < \varepsilon$ existe $t_+ \in (0, \delta)$ tal que $H(t_+) > 0$. Por continuidade, existe $t_- \in [0, t_+]$ tal que $H(t_-) \leq H(t)$ para todo $t \in [0, t_+]$. Como $H(0) = 0$, segue que $H(t_-) \leq H(0) = 0$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_1 \in (t_-, t_+)$ tal que

$$\frac{H(t_+) - H(t_-)}{t_+ - t_-} = H'(t_1).$$

Deste modo, por (4.22) e (4.23) e usando que $-H(t_-) \geq 0$, temos

$$\frac{H(t_+) - H(t_-)}{t_+ - t_-} = H'(t_1) \leq -\frac{1}{\phi(t_1)} \int_0^{t_1} H(s)\xi(s) ds \leq -16H(t_-)t_1.$$

Logo,

$$H(t_+) - H(t_-) \leq -16H(t_-)(t_+ - t_-)t_1 \leq -16H(t_-)\delta^2$$

pois $0 < (t_+ - t_-)t_1 < \delta$. Portanto, $H(t_+) \leq H(t_-)(1 - 16\delta^2)$.

Assim, escolhendo $0 < \delta < \varepsilon$ suficientemente pequeno tal que $1 - 16\delta^2 > 0$, temos

$$0 < H(t_+) \leq H(t_-)(1 - 16\delta^2) \leq 0,$$

o que é uma contradição.

Caso 2: $R_0 = 0$. Por (4.17), temos que $K_0 \equiv 0$ e, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, Σ tem gênero um. Dessa forma, pela desigualdade (4.19), segue que $H'(t) \leq 0 \forall t \in [0, \varepsilon)$, donde a função H é não-crescente e como $H(0) = 0$, teremos $H(t) \leq 0, \forall t \in [0, \varepsilon)$.

Caso 3: $R_0 < 0$. Fazendo uma homotetia na métrica de M , se necessário, podemos supor $R_0 = -2$. Assim, por (4.17) e pelo Teorema de Gauss-Bonnet segue que Σ tem gênero $g(\Sigma) > 1$ e $A(0) = 4\pi(g(\Sigma) - 1)$. Além disso, a desigualdade (4.19) se expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned} H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leq 4\pi(1 - g(\Sigma)) - (-1)A(t) = A(t) - A(0) = \int_0^t A'(s) ds \\ &= \int_0^t \left\{ H(s) \int_{\Sigma} \rho_s d\sigma_s \right\} ds. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Procederemos a demonstração deste caso por contradição. Dessa forma, suponha que para todo $0 < \delta < \varepsilon$ existe $t_0 \in (0, \delta)$ tal que $H(t_0) > 0$. Defina o seguinte conjunto:

$$I := \{t \in [0, t_0] : H(t) \geq H(t_0)\}.$$

Afirmamos que: $\inf I = 0$. Suponhamos o contrário, isto é, que $t^* := \inf I > 0$. Note que $H(t^*) = H(t_0)$ pois, H é contínua. Além disso, para todo $t \in [0, t^*)$ temos $t \notin I$, ou seja, $H(t) < H(t_0) \leq H(t^*)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_1 \in (0, t^*)$ tal que

$$H(t^*) = H'(t_1)t^*, \quad (4.25)$$

uma vez que $H(0) = 0$. Por (4.24), (4.23) e (4.25), temos

$$\begin{aligned} H(t^*) = H'(t_1)t^* &\leq \frac{t^*}{\phi(t_1)} \int_0^{t_1} H(s)\xi(s) ds \\ &\leq \frac{t^*}{\phi(t_1)} \int_0^{t_1} H(t^*)\xi(s) ds \leq \frac{4t^*}{A(0)} H(t^*)(4A(0)t_1) \\ &< 16H(t^*)\delta^2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

o que é uma contradição se escolhermos $\delta < \frac{1}{4}$. Dessa maneira, nossa afirmação está provada.

Nesse sentido, sendo $\inf I = 0$, segue da definição de I que $H(0) \geq H(t_0)$. Ora, mas isso é uma contradição pois $H(0) = 0$ e $H(t_0) > 0$. Logo, a afirmação 1 fica provada.

Para finalizar a prova deste teorema, note que a informação $H(t) \leq 0 \forall t \in [0, \delta]$ atrelada à relação (4.20) implica que $A'(t) \leq 0$. Dessa forma, $A(t)$ é não-crescente e, portanto, $A(t) \leq A(0) \forall t \in [0, \delta]$. $\square$

Teorema 4.0.7. *Sejam (M, g) uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura escalar R , e $R_0 := \min_{x \in M} R(x)$. Assuma que M contenha uma superfície mínima fechada, mergulhada, com dois lados, minimizante de área.*

1. *Suponha que $R_0 = 2$ e que a área de Σ seja igual a 4π . Então Σ tem gênero zero e possui uma vizinhança que é isométrica ao produto $g_1 + dt^2$ em $S^2 \times (-\delta, \delta)$, onde g_1 é a métrica na esfera euclidiana de raio 1.*
2. *Suponha que $R_0 = 0$ e que Σ tenha gênero um. Então Σ possui uma vizinhança que é flat e isométrico ao produto $g_0 + dt^2$ em $T^2 \times (-\delta, \delta)$, onde g_0 é uma métrica flat no toro T^2 .*
3. *Suponha que $R_0 = -2$ e que Σ tenha gênero $\gamma \geq 2$ e área igual a $4\pi(\gamma - 1)$. Então Σ possui uma vizinhança que é isométrica ao produto $g_{-1} + dt^2$ em $\Sigma \times (-\delta, \delta)$, onde g_{-1} é uma métrica de curvatura gaussiana constante igual a -1 em Σ .*

Demonstração. Seja $f : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ a variação de Σ dada pela Proposição 4.0.5. Diminuindo $\epsilon > 0$ se necessário podemos supor que f é um mergulho de $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ em uma vizinha $\mathcal{U}$ de Σ em M e que $A(t) \leq A(0)$ para todo $-\epsilon < t < \epsilon$, pelo Teorema 4.0.6.

Como Σ é minimizante de área, temos $A(0) \leq A(t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Disso, segue que para todo t , $\Sigma_t = f(t, \Sigma)$ é minimizante de área e além disso satisfaz as condições 1 e 2 da Proposição 4.0.4. Em particular, temos

$$0 = \Delta_{\Sigma_t} \rho_t.$$

Portanto, ρ_t é constante para todo t .

Note que como Σ_t é totalmente geodésica, temos que $\nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t = 0$, onde $\{x_1, x_2\}$

são coordenadas locais em Σ . Logo,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_t(x) \\
 &= \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle \\
 &= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t = 0$ e com isso que N_t é um campo de vetores paralelo definido em $\mathcal{U}$. Em particular, N_t define um campo de Killing em $\mathcal{U}$, o que implica que o fluxo local de N_t age por isometrias locais.

Como Σ é compacta, temos que o fluxo local de N_t em torno de Σ está definido em um intervalo $(-\delta, \delta)$, onde $\delta > 0$ não depende de $x \in \Sigma$. Logo, como esse fluxo local age por isometrias locais de M , temos que Σ possui uma vinhança $\mathcal{V} \approx (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ onde podemos escrever a métrica g como $dt^2 + g_\Sigma$, onde g_Σ é a métrica induzida em Σ a qual tem curvatura de Gauss constante igual a 0, 1 ou -1 , conforme o caso. $\square$

4.1 Considerações finais

Finalizamos esse trabalho tecendo alguns comentários sobre os resultados provados por Micallef e Moraru em (MICALLEF; MORARU, 2015) sobre os quais dissertamos. Destacamos que a importância desse trabalho, para além de fornecer uma prova unificada dos resultados provados em (CAI; GALLOWAY, 2000), (BRAY; BRENDLE; NEVES, 2010) e (NUNES, 2013), deve-se também ao impacto que a técnica utilizada nele teve em outros contextos. Mais precisamente, a abordagem usada por Micallef e Moraru em (MICALLEF; MORARU, 2015) foi utilizada com sucesso para demonstrar vários resultados de rigidez em diversos outros contextos, a saber: hipersuperfícies mínimas em dimensão superior, problema de bordo livre, relatividade geral matemática, variedades com peso, etc. Ao leitor interessado em mais detalhes, indicamos, como exemplo e de modo não exaustivo, as seguintes referências: (MORARU, 2016), (AMBROZIO, 2015), (BARROS; CRUZ, 2020), (GALLOWAY; MENDES, 2018), (MENDES, 2019) e (CASTRO; ROSALES, 2014).

Referências

- AMBROZIO, Lucas C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. **The Journal of Geometric Analysis**, Springer, v. 25, p. 1001–1017, 2015.
- BARROS, A.; CRUZ, C. Free boundary hypersurfaces with non-positive Yamabe invariant in mean convex manifolds. **J. Geom. Anal.**, v. 30, n. 4, p. 3542–3562, 2020. ISSN 1050-6926,1559-002X. DOI: [10.1007/s12220-019-00207-1](https://doi.org/10.1007/s12220-019-00207-1). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00207-1>.
- BIEZUNER, R. Notas de aula de geometria riemanniana. **Departamento de Matemáticas, UFMG**, 2016.
- BRAY, Hubert; BRENDLE, Simon; NEVES, André. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. **Communications in analysis and geometry**, International Press, v. 18, n. 4, p. 821–830, 2010.
- CAI, Mingliang; GALLOWAY, Gregory J. Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. **Communications in Analysis and Geometry**, International Press of Boston, v. 8, n. 3, p. 565–573, 2000.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemaniana**. [S.l.]: IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- CASTRO, Katherine; ROSALES, César. Free boundary stable hypersurfaces in manifolds with density and rigidity results. English. **J. Geom. Phys.**, v. 79, p. 14–28, 2014. ISSN 0393-0440. DOI: [10.1016/j.geomphys.2014.01.013](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.013).
- COLDING, Tobias H; MINICOZZI, William P. **A course in minimal surfaces**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2011. v. 121.
- FISCHER-COLBRIE, Doris; SCHOEN, Richard. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Citeseer, v. 33, n. 2, p. 199–211, 1980.
- GALLOWAY, Gregory J.; MENDES, Abraão. Rigidity of marginally outer trapped 2-spheres. **Comm. Anal. Geom.**, v. 26, n. 1, p. 63–83, 2018. ISSN 1019-8385,1944-9992. DOI: [10.4310/CAG.2018.v26.n1.a2](https://doi.org/10.4310/CAG.2018.v26.n1.a2). Disponível em: <https://doi.org/10.4310/CAG.2018.v26.n1.a2>.
- JOST, Jürgen. **Riemannian geometry and geometric analysis**. [S.l.]: Springer, 2001. v. 42005.

- MENDES, Abraão. Rigidity of marginally outer trapped (hyper)surfaces with negative σ -constant. English. **Trans. Am. Math. Soc.**, v. 372, n. 8, p. 5851–5868, 2019. ISSN 0002-9947. DOI: [10.1090/tran/7752](https://doi.org/10.1090/tran/7752).
- MICALLEF, Mario; MORARU, Vlad. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 143, n. 7, p. 2865–2872, 2015.
- MORARU, Vlad. On area comparison and rigidity involving the scalar curvature. English. **J. Geom. Anal.**, v. 26, n. 1, p. 294–312, 2016. ISSN 1050-6926. DOI: [10.1007/s12220-014-9550-x](https://doi.org/10.1007/s12220-014-9550-x). Disponível em: wrap.warwick.ac.uk/57514/1/WRAP_THESIS_Moraru_2013.pdf.
- NUNES, Ivaldo. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. **Journal of Geometric Analysis**, Springer, v. 23, p. 1290–1302, 2013.
- SANTOS, Franciele Conrado dos. Rigidez de superfícies fechadas que minimizam área em variedades tridimensionais. **UFS**, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
- SCHOEN, Richard; YAU, Shing-Tung. **Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature**. [S.l.]: JSTOR, 1979. v. 110, p. 127–142.
- SHEN, Ying; ZHU, Shunhui. Rigidity of stable minimal hypersurfaces. **Mathematische Annalen**, Berlin [etc.] J. Springer [etc.], v. 309, n. 1, p. 107–116, 1997.
- SIMONS, James Harris. Minimal varieties in riemannian manifolds. **Matematika**, v. 16, n. 6, p. 60–104, 1968.