UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Lenildo Moraes de Azevedo

SOBRE TRANSFORMAÇÕES ALGÉBRICAS

São Luis - MA
2023

Lenildo Moraes de Azevedo

SOBRE TRANSFORMAÇÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo
Doutor em Matemática

São Luis - MA
2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Moraes de Azevedo, Lenildo.
Sobre Transformações Algébricas / Lenildo Moraes de Azevedo. - 2024.
50 p.

Orientador(a): Marcos Antônio Ferreira de Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. Álgebra. 2. Polinômios. 3. Transformações Algébricas. I. Ferreira de Araújo, Marcos Antônio. II. Título.

Lenildo Moraes de Azevedo

Sobre Transformações Algébricas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada a Educação

São Luis: 14 de dezembro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Sou grato, em primeiro lugar, a Deus, por tudo que me foi dado; pelas barreiras e por todas as lutas travadas com fé e esperaça de alcançar os objetivos desejados.

Sou grato à minha mãe por sua dedicação extrema.

Sou grato ao Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo, pela orientação segura, pela paciência e pela dedicação com que acompanhou a realização deste trabalho.

Sou grato a todos os meus amigos, os quais levarei sempre no coração, pela ajuda que me foi proporcionada a todo momento, verdadeiros guerreiros. Que juntos possamos continuar lutando as futuras batalhas que surgirem em nossas vidas.

Enfim, sou grato a todas as pessoas que passaram pela minha vida e contribuiram, direta ou indiretamente, para que aqui eu pudesse chegar.

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma apresentação de algumas interessantes propriedades das equações algébricas. Mais especificamente, fazemos um estudo de como são alteradas as raízes de uma equação polinomial quando realizamos algumas transformações algébricas sobre as mesmas, dentre elas citamos: as transformações aditivas, transformações multiplicativas e transformações recíprocas.

ABSTRACT

In this work we present some interesting properties of algebraic equations. More specifically, we study how the roots of a polynomial equation change when we perform some algebraic transformations on them, including: additive transformations, multiplicative transformations and reciprocal transformations.

Sumário

INTRODUÇÃO

No presente trabalho desenvolvemos um assunto pouco visto (ou quase nunca antes estudado) no ensino médio das escolas brasileiras: as transformações algébricas. Tais transformações surgem quando em um polinômio na variável x fazemos uma mudança de variável, por exemplo, substituindo x por $x + a$. Feita a transformação, verificamos de que modo são afetadas as raízes do velho polinômio quando comparado ao novo polinômio. Também são consideradas transformações em que x é sustituído por kx, ou em que x é substituido por $1/x$.

O trabalho é dividido em três capítulos. No Capítulo 1 fazemos uma apresentação dos conceitos de função monomial, polinômios, operações com polinômios com ênfase na divisão de polinômios. Em seguida consideramos o caso particular da divisão por binômios do primeiro grau e apresentamos o algoritmo de Briot-Ruffini. Alguns exemplos são apresentados.

No Capítulo 2 fazemos uma apresentação das chamadas equações polinomiais apresetando o conceito de raiz de uma equação polinomial, número de raízes de um equação polinomial, raízes múltiplas, relações entre os coeficientes e raízes, raízes complexas e pesquisa das raízes racionais.

No Capítulo 3 são apresentados os conceitos de transformações algébricas, mais precisamente, os conceitos de transformações aditivas, multiplicativas e recíprocas. Algumas propriedades notáveis das equações recíprocas são apresentadas.

Capítulo 1

POLINÔMIOS

1.1 Introdução

Com o objetivo de deixar o texto um pouco mais autosuficiente, apresentamos neste capítulo alguns dos conceitos e terminologias que serão bastantes utilizados nos capítulos posteriores.

1.2 Função monomial

Definição 1.2.1 Dados um número complexo a e um número natural n, chama-se **função monomial** a função definida para todo x real por $M(x) = ax^n$. O número a é denominado coeficiente da função monomial.

Exemplo 1.2.1 São exemplos de função monomial, as seguintes funções:

a) $M(x) = 2x^3$ onde $a = 2$ e $n = 3$;

b) $P(x) = -\frac{1}{2}x^5$, onde $a = -\frac{1}{2}$ e $n = 5$;

c) $A(x) = -x$, onde $a = -1$ e $n = 1$;

d) $f(x) = 5$, onde $a = 5$ e $n = 0$.

Definição 1.2.2 Se $a \neq 0$, o número natural n é chamado o **grau** da função monomial $M(x) = ax^n$.

Quando $a = 0$, a função monomial $M(x) = 0$, que assume valores nulos para todo x real, é denominada função *nula* e nesse caso não se define seu grau.

Exemplo 1.2.2 Os graus dos monômios $M(x) = 3x^5$, $f(x) = \pi x^2$, $A(x) = -x^4$ e $g(x) = -2 = -2x^0$ são, respectivamente, são 5, 2, 4 e 0. Daqui em diante, denominaremos as funções monomiais simplesmente por monômios.

1.3 Operações com monômios

Multiplicação

Definição 1.3.1 Dados dois monômios quaisquer $M_1(x) = ax^n$ e $M_2(x) = bx^p$, chama-se **produto** deles o monômio

$$P(x) = M_1(x).M_2(x) = abx^{n+p},$$

ou seja,

$$(ax^n).(bx^p) = abx^{n+p}.$$

Exemplo 1.3.1 a) $(6x^3)\left(-\frac{1}{2}x^4\right) = 6.\left(-\frac{1}{2}\right)x^{3+4} = -3x^7$;

b) $(2x^5)(x^2)(\sqrt{3}x^4) = 2\sqrt{3}x^{11}$;

c) $\left(\frac{3}{10}x\right).0 = 0$.

Adição de monômios de mesmo grau

Definição 1.3.2 Dados dois monômios de mesmo grau $M_1(x) = ax^n$ e $M_2(x) = bx^n$ chama-se **soma** desses monômios ao monômio $S(x) = M_1(x) + M_2(x) = (a+b)x^n$, ou seja

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n.$$

Exemplo 1.3.2 a) $5x^5 + (-3x^5) = (5-3)x^5 = 2x^5$;

b) $\pi x^2 + (-\pi x^2) = (\pi - \pi)x^2 = 0$;

c) $-\frac{1}{2}x^3 + 2x^3 - 5x^3 = \left(-\frac{1}{2} + 2 - 5\right)x^3 = -\frac{7}{2}x^3$.

1.4 Função polinomial

Definição 1.4.1 Chama-se **função polinomial** ou simplesmente **polinômio** a qualquer soma de funções monomiais.

Exemplo 1.4.1 São exemplos de polinômio as seguintes funções:

a) $P_1(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 1$;

b) $P_2(x) = 7x^5 + 0$;

c) $P_3(x) = 5x^2 - x^5 - \sqrt{2}x^2 - 1$

d) $P_4(x) = -3$.

No polinômio $P(x) = 2x^3 + x - x^2 + 2x - 4x^3 + 1$, efetuando-se as adições dos monômios de mesmo grau, obtemos

$$P(x) = -2x^3 + 3x - x^2 + 1,$$

que é chamada **forma reduzida** do polinômio.

Escrevendo-se agora esse polinômio ordenado segundo as potências decrescente de x, obtemos:

$$P(x) = -2x^3 - x^2 + 3x + 1$$

que é a **forma reduzida e ordenada** do polinômio.

De maneira geral, todo polinômio pode se colocado na forma reduzida e ordenada

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}$$

onde n é um número natural e $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes do polinômio.

1.5 Grau de um polinômio

Definição 1.5.1 *Chama-se grau de um polinômio ao grau do seu monômio de maior grau.*

O grau de um polinômio é denotado por $\text{gr}(f)$ ou $\partial(f)$.

Exemplo 1.5.1 a) O grau do polinômio $P(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1$ é quatro;

b) O grau do polinômio $A(t) = t^7 - t^3 - 2t + 3$ é sete;

c) O grau do polinômio $R(x) = 5$ é zero.

É possível mostrar que:

i) $\partial(f+g) = \max\{\partial(f), \partial(g)\}$;

ii) $\partial(f.g) = \partial(f) + \partial(g)$

Observação 1.5.1 Não definimos o grau do polinômio nulo.

1.6 Valor numérico - Raiz

Definição 1.6.1 Dado um número complexo a e um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, chama-se **valor numérico de** f em a à imagem de a pela função f, isto é:

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0.$$

Muitas vezes, a ordem de escrita dos termos de um polinômio não é a ordem decrescente das potências de x, mas isso não chega a causar grande problema como se observa nos exemplos abaixo.

Assim, por exemplo se $f(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3$, então:

$$f(2) = 2 + 2 + 2^2 + 3.2^3 = 32$$
$$f(-1) = 2 + (-1) + (-1)^2 + 3(-1)^3 = -1$$
$$f(1+i) = 2 + (1+i) + (1+i)^2 + 3(1+i)^3 + 2 + 1 + i + 1 + 2i - 1 + 3 + 9i - 9 - 3i = -3 + 9i.$$

Muitas vezes, com o objetivo de simplificar a notação, escrevemos simplesmente

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

para representar um polinômio f na variável x. Neste caso estaremos dizendo que f é o mesmo que $f(x)$. A ordem dos termos de um polinômio não importa.

Definição 1.6.2 Dados um número complexo a e um polinômio f, diz-se que a é uma raiz (ou um **zero**) de f se $f(a) = 0$.

Exemplo 1.6.1 Por exemplo, os números -2 e -1 são raízes de $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$, já que

$$f(-2) = 2(-2) + 3(-2)^2 + (-2)^3 = 0$$
$$f(-1) = 2(-1) + 3.(-1)^2 + (-1)^3 = 0.$$

Exemplo 1.6.2 Consideremos o polinômio $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$ e calculemos seu valor numérico para $x = -1$, $x = 1$ e $x = -\frac{1}{3}$. Temos:

$$P(-1) = 3(-1)^3 + 4(-1)^2 - 5(-1) - 2 = -3 + 4 + 5 - 2 = 4;$$
$$P(1) = 3.1^3 + 4.1^2 - 5.1 - 2 = 3 + 4 - 5 - 2 = 0;$$
$$P(-\tfrac{1}{3}) = 3(-\tfrac{1}{3})^3 + 4(-\tfrac{1}{3})^2 - 5(-\tfrac{1}{3}) - 2 = -\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{5}{3} - 2 = 0;$$

Nesse caso, os números 1 e $-\frac{1}{3}$ são zeros ou raízes do polinômio, visto que $P(1) = 0$ e $P(-\frac{1}{3}) = 0$.

Definição 1.6.3 Dizemos que um polinômio f é **nulo** (ou **identicamente nulo**) se f assume o valor numérico zero para todo $x \in \mathbb{C}$. Quando f é identicamente nulo, escrevemos $f \equiv 0$.

Proposição 1.6.1 *Um polinômio f é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de f forem nulos. Dito de outro modo, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$, então*

$$f = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

($\Leftarrow$) É imediato que se $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, então

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x_n^n = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}.$$

($\Rightarrow$) Se f é nulo, então existem $n+1$ números complexos α_0, α_1, α_2,..., α_n, dois a dois distintos tais que

$$\begin{aligned} f(\alpha_0) &= a_0 + a_1\alpha_0 + a_2(\alpha_0)^2 + ... + a_n(\alpha_0)^n = 0,\\ f(\alpha_1) &= a_0 + a_1\alpha_1 + a_2(\alpha_1)^2 + ... + a_n(\alpha_1)^n = 0,\\ f(\alpha_2) &= a_0 + a_1\alpha_2 + a_2(\alpha_2)^2 + ... + a_n(\alpha_2)^n = 0,\\ \\ f(\alpha_n) &= a_0 + a_1\alpha_n + a_2(\alpha_n)^2 + ... + a_n(\alpha_n)^n = 0. \end{aligned}$$

Estamos, desse modo, diante de um sistema linear homogêneo do tipo $(n+1)\times(n+1)$ cujas incognitas são a_0, a_1, a_n. O determinante da matriz dos coeficientes é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & ... & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & ... & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & ... & \alpha_2^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & ... & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

determinante esse, que é não nulo por tratar-se do determinante de uma matriz de *Vandermond* cujos elementos característicos são α_0, α_1, α_2, ..., α_n todos eles distintos. Desse modo, esse sistema possui uma única solução, qual seja, a trivial

$$a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Definição 1.6.4 Dois polinômios f e g são ditos **iguais** (ou **idênticos**) quando assumem valores numéricos iguais para todo $x \in \mathbb{C}$. Se f e g são idênticos escrevemos $f \equiv g$.

Proposição 1.6.2 *Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais, isto é, dados*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

tem-se

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

Demonstração: De fato, para todo $x \in \mathbb{C}$, tem-se

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Leftrightarrow f(x) = g(x),$$

como queríamos demonstrar. ■

1.7 Operações com polinômios

Adição

A soma de dois polinômios P_1 e P_2 é o polinômio $P_1 + P_2$ que obtemos somando os monômios de mesmos graus d P_1 e P_2.

Vejamos um exemplo. Sejam $P_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ e $P_2(x) = 2x^3 + x + 1$. Então, a soma $P_1(x) + P_2(x)$ é

$$\begin{aligned} P_1(x) + P_2(x) = &\ 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1 + 2x^3 + x + 1 \\ = &\ 3x^4 + x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

Multiplicação

O produto de dois polinômios P_1 e P_2 é o polinômio $P_1.P_2$ que se obtém multiplicando cada monômio de um deles por todos os monômios do outro, somando em seguida os resultados obtidos.

Por exemplo, o produto de $P_1(x) = x^2 + 2x + 1$ por $P_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$ é:

$$\begin{aligned} P_1(x).P_2(x) = &\ (x^2 + 2x + 1)(2x^3 - 3x^2 + x - 2) \\ = &\ x^2(2x^3 - 3x^2 + x - 2) + 2x(2x^3 - 3x^2 + x - 2) + 1.(2x^3 - 3x^2 + x - 2) \\ = &\ 2x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 2. \end{aligned}$$

Divisão

Sabemos que dividir o número natural a pelo número natural não nulo b significa obter dois números naturais q e r tais que :

a) $a = bq + r$;

b) $0 \leq r < b$,

conforme o velho esquema indicado na figura abaixo:

$$\begin{array}{c|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Por exemplo, na divisão de 245 por 26, tem-se

$$\begin{array}{c|l} 245 & 26 \\ \cline{2-2} 11 & 9 \end{array}$$

Mostraremos em seguida que na divisão de polinômios ocorrem fatos semelhantes a esses casos.

Definição 1.7.1 *Dividir um polinômio f por um polinômio g, onde $\partial f \geq \partial g$, onde g não é identicamente nulo, significa determinar polinômios q e r tais que*

a) $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$;

b) $\partial(r) < \partial g$ *ou* $r(x) = 0$.

Quando $r(x) = 0$ a divisão é chamada **exata** *e, nesse caso, diz-se que $f(x)$ é divisível por $g(x)$.*

O teorema que garante a possibilidade de dividir polinômios conforme a definição acima, de fato, existe e é chamado **Algoritmo da divisão**. Sua demonstração não será feita aqui, visto que foge aos objetivos desse texto. É importante salientar que, numa divisão, o quociente e o resto são únicos.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.7.1 Suponha que desejamos dividir $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$ por $g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$. Nesse caso, procuramos $q(x)$ e $r(x)$ tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

a) O resto $r(x)$ tem a forma $r(x) = mx^2 + nx + p$, visto que $\partial r < \partial g$ ou $r(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}$;

b) O quociente $q(x)$ é da forma $q(x) = ax + b$, visto que, para a identidade

$$2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3 = (x^3 + 2x^2 - x + 3).q(x) + mx^2 + nx + p$$

seja verdadeira é necessário que o grau de primeiro membro tenha o mesmo grau que o segundo membro. Além disso, como $\partial q = 1$, então $\partial q = \partial f - \partial g = 4 - x = 1$.

Portanto temos

$$2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3 = (x^3 + 2x^2 - x + 3).(ax + b) + mx^2 + nx + p$$

ou seja

$$2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3 = ax^4 + (b + 2a)x^3 + (2b - a + m)x^2 + (3a - b + n)x + (3b + p).$$

Usando a identidade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} a = 2, \\ b + 2a = -1, \\ 2b - a + m = 1 \Leftarrow a = 2,\ b = -5,\ m = 13,\ n = 10,\ \text{ e } p = 18, \\ 3a - b + n = 1, \\ 3b + p = 3. \end{cases}$$

Daí, segue que

$$q(x) = 2x - 5 \quad \text{e} \quad r(x) = 13x^2 - 10x + 18.$$

O método acima descrito é denominado *método de Descartes* ou *método dos coeficientes a determinar*.

1.8 Um algoritmo para a divisão: método da chave

Nessa seção descrevemos um algoritmo para obter o quociente e o resto da divisão do polinômio $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$ pelo polinômio $g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$. Isso será descrito por etapas.

Etapa 1: Escrevemos $f(x)$ e $g(x)$ na forma reduzida, isto é, ordenados de acordo com as potências decrescentes de seus termos.

Etapa 2: Dividimos o monômio de maior grau de $f(x)$ pelo monômio de maior grau de $g(x)$, obtendo-se assim o monômio de maior grau do quociente $q(x)$, ou seja

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 & x^3 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

Em seguida multiplicamos $2x$ por $g(x)$, subtraíndo de $f(x)$ o produto obtido:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3 & x^3 + 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x & 2x \\ \cline{1-1} -5x^3 + 3x^2 - 5x + 3 & \end{array}$$

O polinômio $r_1(x) = -5x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ é denominado primeiro resto parcial.

Etapa 3: Repetimos com cada resto parcial o procedimento (descrito na Etapa 2) até obtermos um resto com grau menor que o de $g(x)$ ou, se a divisão for exata, o resto será nulo. Assim, procedendo, obtemos

$$\begin{array}{r|l} -5x^3 + 3x^2 - 5x + 3 & x^3 + 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} 5x^3 + 10x^2 - 5x + 15 & -5 \\ \cline{1-1} 13x^2 - 10x + 18 & \end{array}$$

E, de modo resumido, podemos escrever:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3 & x^3 + 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x & 2x - 5 \\ \cline{1-1} -5x^3 + 3x^2 - 5x + 3 & \\ 5x^3 + 10x^2 - 5x + 15 & \\ \cline{1-1} 13x^2 - 10x + 18 & \end{array}$$

Portanto, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ são, respectivamente, $q(x) = 2x - 5$ e $r(x) = 13x^2 - 10x + 18$.

Observação 1.8.1 O algoritmo que acabamos de descrever só deve ser usado na divisão de $f(x)$ por $g(x)$ quando $\partial f \geq \partial g$. Quando isso não acontece, procedemos como nos exemplos abaixo.

Exemplo 1.8.1 Se quisermos dividir $f(x) = x^2 + 1$ por $g(x)$, lembremos inicialmente, que a seguinte igualdade deverá ser satisfeita

$$x^2 + 1 \equiv (x^3 + 1).q(x) + r(x)$$

e $\partial r < \partial g$ ou $r(x) \equiv 0$. Assim,

$$x^2 + 1 \equiv (x^3 + 1).q(x) + mx^2 + nx + p.$$

Para que a identidade acima aconteça, deve-se ter, necessariamente, $q(x) \equiv 0$. Assim, substituíndo-se $q(x)$ por 0 na identidade acima, obtemos $r(x) = x^2 + 1$.

Exemplo 1.8.2 Agora suponha que $f(x) \equiv 0$ e $g(x) = x^3 + 1$. Nesse caso, devemos ter:

$$0 \equiv (x^3 + 1).q(x) + mx^2 + nx + p.$$

Essa última identidade só ocorre se $q(x) \equiv 0$ e $r(x) \equiv 0$.

1.9 Divisão por binômios do $1^{\underline{0}}$ grau

Apresentaremos agora métodos específicos para determinarmos o quociente e o resto da divisão de polinômios por binômios do primeiro grau. O aprendizado desses métodos é muito útil no estudo das equações polinomiais.

Destacaremos, por sua importância, a divisão por polinômios da forma $x - a$.

Proposição 1.9.1 (Teorema do resto) *O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de f para $x = a$.*

Demonstração: Observemos, inicialmente, que na divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$, o resto é uma constante, visto que o grau de $x - a$ é um.

Portanto, podemos escrever

$$f(x) = (x - a).q(x) + k, \text{ onde } k \text{ é o resto nessa divisão.}$$

Portanto, tomando $x = a$ na expressão acima, obtemos

$$f(a) = (a - a).q(x) + k \quad \Leftarrow \quad r(x) = k = P(a),$$

como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 1.9.1 Para determinarmos o resto da divisão de $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 3$ por $x - 1$, sem efetuarmos a divisão, basta calcularmos o valor numérico de $f(x)$ para $x = 1$, ou seja, para o valor de x que anula $x - 1$. Assim, o resto é $r(x) = f(1) = 2 - 1 + 1 - 2 - 3 = -3$.

Proposição 1.9.2 (Teorema de D'Alembert) *Um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - a$ se $f(a) = 0$.*

Demonstração: De fato, pelo teorema do resto, quando $f(x)$ é divisível por $x - a$ tem-se $r(x) = f(a) = 0$, isto é $x = a$ é raiz de $f(x)$. Reciprocamente, se $f(a) = 0$ segue que $f(x)$ é divisível por $x - a$, pois $f(a) = r(x) = 0$. ■

Corolário 1 (Extensão do Teorema de D'Alembert) *Se um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$ com $a \neq b$, então $f(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$.*

Pelo teorema de D'Alembert, temos $f(a) = f(b) = 0$. Por outro lado, pelo conceito de divisão e levando em conta que $(x-a)(x-b)$ tem grau 2, temos

$$f(x) = (x-a)(x-b).q(x) + px + q. \tag{1.1}$$

Fazendo-se, sucessivamente, $x = a$ e $x = b$ em (1.1), vem

$$f(a) = (a-a)(a-b)q(a) + pa + q = 0 \tag{1.2}$$

e

$$f(b) = (b-a)(b-b)q(b) + pb + q. \tag{1.3}$$

Subtraíndo (1.3) de 1.2, obtemos

$$pa - pb = 0 \iff p(a-b) = 0$$

e, visto que $a \neq b$, podemos concluir que $p = 0$. Da mesma forma, segue de (1.2) e $p = 0$ que $q = 0$, ou seja $r(x) \equiv 0$. ■

1.10 Dispositivo de Briot-Ruffini

Mostraremos nessa seção um dispositivo prático para agilizar a divisão de um polinômio $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grau $n \geq 1$, por $x - a$. Lembremos que, nesse caso, obtemos como quociente um polinômio $q(x)$ de grau $n-1$ e como resto uma constante q_0, isto é:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv (x-a)(q_n x^{n-1} + q_{n-1}x^{n-2} + \ldots + q_2 x + q_1) + q_0.$$

Note que, no segundo membro da igualdade acima, temos:

- monômio em x^n: $x.q_n x^{n-1} = q_n x^n$,
- monômio em x^{n-1}: $xq_{n-1}x^{n-2} - aq_n x^{n-1} = (q_{n-1} - aq_n)x^{n-1}$,
- monômio em x^{n-2}: $xq_{n-2}x^{n-3} - aq_{n-1}x^{n-2} = (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-2}$,

....,

- monômio em x^2: $xq_2 x - aq_3 x^2 = (q_2 - aq_3)x^2$,
- monômio em x: $xq_1 - aq_2 x = (q_1 - aq_2)x$,
- termo constante: $q_0 - aq_1$

Assim, pela identidade de polinômios, os coeficientes $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1$ e q_0 de $q(x)$, dados por

$$\begin{array}{rl}
 & q_n = a_n, \\
q_{n-1} - aq_n = a_{n-1} & \Rightarrow q_{n-1} = aq_n + a_{n-1}, \\
q_{n-2} - aq_{n-1} = a_{n-2} & \Rightarrow q_{n-2} = aq_{n-1} + a_{n-2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_2 - aq_3 = a_2 & \Rightarrow q_2 = aq_3 + a_2, \\
q_1 - aq_2 = a_1 & \Rightarrow q_1 = aq_2 + a_1, \\
q_0 - aq_1 = a_0 & \Rightarrow q_0 = aq_1 + a_0.
\end{array}$$

Isso equivale ao seguinte dispositivo prático, chamado **dispositivo de Briot-Ruffini**:

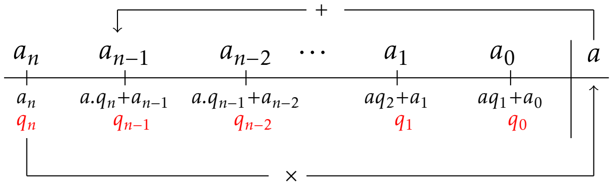


Figura 1.1: Dispositivo de Briot-Ruffini

Exemplo 1.10.1 Vamos dividir $3x^5-3x^3+2x^2-5$ por $x-2$ usando o dispositivo de Briot-Ruffini. De fato, usando o dispositivo, temos:

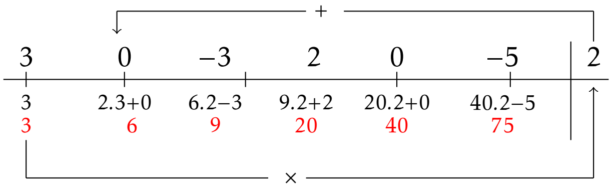


Figura 1.2: Dispositivo de Briot-Ruffini

Desse modo, temos $q(x)=3x^4+6x^3+9x^2+20x+40$ e o resto $r(x)=75$.

Capítulo 2

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Em todo esse trabalho, denotamos por $P(x)$ uma função polinomial do tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes a_0, a_1, a_2,..., a_n são números complexos e x uma variável complexa, isto é x pode assumir um valor complexo qualquer. Algumas vezes precisaremos fazer alguma restrição aos coeficientes, por exemplo, assumir que os coeficientes sejam números reais.

No capítulo anterior vimos alguns conceitos básicos necessários neste e no próximo capítulo, quais sejam:

a) o valor numérico de $P(x)$ para $x = \alpha$;

b) função polinomial identicamente nula;

c) funções polinomiais idênticas;

d) adição, multiplicação e divisão de polinômios;

e) Divisão por binômios do primeiro grau.

2.1 Conceitos iniciais

Definição 2.1.1 Dadas duas funções polinomiais $y = f(x)$ e $y = g(x)$, chama-se **equação polinomial** ou **equação algébrica** a sentença aberta $f(x) = g(x)$.

Assim, por exemplo, se $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ e $g(x) = 3x^2 - 3$, a sentença aberta

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$$

é uma equação polinomial.

Lembremos, ainda, que uma sentença em x, aberta, pode ser verdadeira ou falsa conforme o valor atribuído a x. No nosso exemplo, temos:

i) para $x = 0$, tem-se $0^3 + 0^2 - 0 - 1 = 3.0^2 - 3$ é uma sentença falsa;

ii) para $x = 1$, tem-se $1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 3.1^2 - 3$ é uma sentença verdadeira.

Definição 2.1.2 Dada uma equação polinomial $f(x) = g(x)$, chama-se **raiz** da equação a todo número que, substituído em lugar de x, torna a sentença verdadeira. Assim, o número r é raiz de $f(x) = g(x)$ se, e só se, $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira.

Retornando ao exemplo $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$, as suas raízes são 1, 2 e -1 pois:

i) para $x = 1$ tem-se $1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 3.1^2 - 3$, ou seja $0 = 0$, o que é uma sentença verdadeira,

ii) para $x = 2$ tem-se $2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 3.2^2 - 3$, ou seja $9 = 9$, o que é uma sentença verdadeira,

iii) para $x = -1$ $(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = 3.(-1)^2 - 3$, ou seja $0 = 0$, o que é uma sentença verdadeira.

Por outro lado, $x = 3$ não é uma raiz visto que, para $x = 3$ tem-se $3^3 + 3^2 - 3 - 1 = 3.3^2 - 3$, ou seja $33 = 24$, o que é uma sentença falsa.

Definição 2.1.3 Chama-se **conjunto-solução** ou **conjunto-verdade** em $\mathbb{C}$ da equação $f(x) = g(x)$ ao conjunto S cujos elementos são as raízes complexas desta equação.

Por exemplo, o conjunto solução da equação

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$$

é $S = \{1, 2, -1\}$.

Resolver uma equação polinomial significa obter o seu conjunto solução. Desse modo, resolver uma equação polinomial significa desenvolver uma sequência de raciocínios lógicos e concluir quais são as raízes, sem ter de advinhar nenhuma e sem esquecer nenhuma delas. Neste capítulo nos propomos a resolver equações polinomiais.

Definição 2.1.4 Diz-se que duas equações polinomiais são **equivalentes** quando apresentam o mesmo conjuto solução, isto é, toda raiz de uma equação é também raiz da outra e, reciprocamente

De acordo com a definição precedente, as equações $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$ e $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$ são equivalentes visto que admitem o mesmo conjunto solução.

Há duas operações que não alteram o conjunto solução de uma equação polinomial, isto é, há duas maneiras de transformar uma equação polinomial em outra, equivalente à primeira:

i) **somar aos dois membros a mesma função polinomial** isto é

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$$

Exemplo 2.1.1 Considere a equação

$$3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 + x + 5, \tag{2.1}$$

e adicionemos $h(x) = -g(x) = -2x^2 - x - 5$ a ambos os membros. Obtém-se, então:

$$(3x^2 - 4x + 11) + (-2x^2 - x - 5) = (2x^2 + x + 5) + (-2x^2 - x - 5).$$

Após a simplificação obtemos

$$x^2 - 5x + 6 = 0. \tag{2.2}$$

Segue-se que as equações (2.1) e (2.2) são equivalentes. Portanto, resolver a equação (2.2) é equivalente a resolver a equação (2.1).

Na prática, aplicamos a propriedade precedente com o seguinte enunciado: "em toda equação polinomial, **transpor** um termo de um membro para o outro, trocando o sinal de seu coeficiente, não altera o conjunto solução, ou seja"

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = 0.$$

ii) **Multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo k, onde** $(k \neq 0)$.

Por exemplo, as equações $\frac{3x^2}{4} - \frac{1}{8} = 0$ e $6x^2 - 1 = 0$ são equivalentes, visto que a segunda foi obtida da primeira multiplicada por 8.

Na resolução de uma equação polinomial procuramos sempre transformá-la em outra equivalente e mais "simples", na qual o conjunto solução possa ser obtido mais facilmente. Assim, fazendo uso dos artifícios acima descritos, é possível transformar qualquer equação polinomial $f(x) = g(x)$ numa equação equivalente $P(x) = f(x) - g(x) = 0$, isto é, uma equação polinomial se reduz à forma

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_1 x + a_0 = 0.}$$

Quando transformamos uma equação polinomial para a forma $P(x) = 0$, dois casos imediatos podem acontecer:

i) $1^{\underline{0}}$ **caso:** $P(x)$ **é identicamente nula**. Neste caso estamos diante da equação

$$0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + ... + 0.x + 0 = 0$$

a qual é uma sentença verdadeira qualquer que seja o número complexo x. Nesse caso, $S = \mathbb{C}$.

ii) $2^{\underline{0}}$ **caso:** $P(x)$ **é constante e não nula**. Neste caso estamos diante da quação

$$0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + ... + 0.x + k = 0,$$

a qual é uma sentença falsa qualquer que seja o número complexo x. Nesse caso, $S = \emptyset$.

Exemplo 2.1.2 Vamos resolver a equação $(x-1)(x^2+1) + x^2 = x^3 + x - 1$. De fato, desenvolvendo os cálculos no primeiro membro, obtemos

$$x^3 - x^2 + x - 1 + x^2 = x^3 + x - 1,$$

ou seja

$$(x^3 + x - 1) - (x^3 + x - 1) = 0.$$

Daí, tem-se

$$0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Logo, $= \mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.3 Vamos resolver a equação $x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$. Desenvolvendo o primeiro membro, obtemos

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x^2 + 2x - 7,$$

ou seja

$$(x^3 - 3x^2 + 2x) - (x^3 - 3x^2 + 2x - 7) = 0.$$

Daí, segue que

$$0x^3 + 0x^2 + 0x + 7 = 0.$$

Portanto, $S = \emptyset$.

2.2 Número de raízes

Nesta seção vamos analisar a quantidade de raízes de uma equação polinomial. Visto que toda equação polinomial pode ser colocada sob a forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0 = 0,$$

então, é evidente que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) r é raiz da equação $P(x) = 0$;

(2) r é raiz da função polinomial $P(x)$;

(3) r é raiz do polinômio.

De um modo mais geral as proposições acima se traduzem em $P(r) = 0$. Diremos também que a equação $P(x) = 0$ é de grau n se, e somente se, $P(x)$ e P são de grau n. O seguinte teorema é de grande importância e será admitido sem demonstração, visto que a demonstração foge aos objetivos desse trabalho. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4].

Teorema 2.2.1 (Fundamental da álgebra) *Todo polinômio de grau n admite pelo menos uma raiz complexa.*

Teorema 2.2.2 *[da Decomposição] Todo polinômio P de grau n, $(n \geq 1)$*

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto em um produto de n fatores do primeiro grau, isto é:

$$P = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$

onde $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são as raízes de P. A menos da ordem dos fatores, essa decomposição é única.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em duas partes: Existência e Unicidade.
$1^{\underline{a}}$ **Parte: Existência**.
a) Seja P um polinômio de grau $n \geq 1$. Pelo teorema fundamental da álgebra, P possui uma raiz r_1. Assim, $P(r_1) = 0$ e, pelo teorema de D'Alembert, P é divisível por $x - r_1$, isto é

$$P = (x - r_1) Q_1(x) \tag{2.3}$$

onde Q_1 é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 1$, então $n - 1 = 0$ e Q_1 será o polinômio constante $Q_1 = a_n$ e $P = a_n(x - r_1)$, o que demonstra o teorema nesse caso.
b) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$ e o teorema fundamental da álgebra pode ser aplicado ao polinômio Q_1,

ou seja, Q_1 possui uma raiz r_2. Assim, $Q_1(r_2) = 0$ e, novamente pelo teorema de D'Alembert, Q_1 é divisível por $x - r_2$, ou seja

$$Q_1 = (x - r_2).Q_2. \tag{2.4}$$

Substituindo-se (2.4) em (2.3), obtemos

$$P = (x - r_1)(x - r_2)Q_2 \tag{2.5}$$

onde Q_2 é um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 2$, então $n - 2 = 0$ e $Q_n = a_n$. Portanto, $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)$, ficando demonstrado o teorema.
c) Continuando desse modo, após n aplicações do teorema fundamental da álgebra, chegamos na igualdade

$$P = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n).Q_n \tag{2.6}$$

onde Q_n é um polinômio de grau $n - n = 0$ e coeficiente dominante a_n Portanto, $Q_n = a_n$ e

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n),$$

o que garante a existência.
2ª **Parte: Unicidade**.

Suponhamos que P admita duas decomposições:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n)$$

e

$$P = a'_m(x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3)...(x - r'_m).$$

Reduzindo e ordenando os dois segundos membros, temos

$$a_nx^n - a_nS_1.x^{n-1} + ...a'_mx^m - a'_mS'_1.x^{m-1} + ...$$

Pela definição de igualdade de polinômios, tem-se necessariamente:

$$\boxed{n = m} \quad \text{e} \quad \boxed{a_n = a'_m}.$$

Assim, chegamos à igualdade

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3)...(x - r'_n). \tag{2.7}$$

Tomando $x = r_1$, na igualdade acima, obtemos

$$0 = (r_1 - r'_1)(r_1 - r'_2)(r_1 - r'_3)...(r_1 - r'_n).$$

Desse modo, um dos fatores $r_1 - r'_j$ deve ser nulo; fazendo uma conveniente ordenação dos fatores, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\boxed{r_1 = r'_1}$. Assim, a igualdade (2.7) se transforma em

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) = (x - r_1)(x - r'_2)(x - r'_3)...(x - r'_n)$$

e, daí,

$$(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) = (x - r'_2)(x - r'_3)...(x - r'_n).$$

Atribuindo $x = r_2$, na equação precedente, obtemos

$$0 = (r_2 - r_2')(r_2 - r_3')...(r_2 - r_n')$$

e, analogamente, um dos fatores $r_2 - r_k' = 0$; novamente podemos supor que $\boxed{r_2 = r_2'}$. Procedendo desse modo, assim por diante, concluiríamos que $\boxed{r_1 = r_i'}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. As igualdade $m = n$ e $a_m' = a_n$, $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$, $r_3' = r_3$,..., $r_n' = r_n$ são a prova da unicidade da decomposição. ■

Corolário 2 *Toda equação polinomial de grau n ($n \geq 1$) admite n, e somente n, raízes complexas.*

Demonstração: Consideremos a equação polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^2 + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

Pelo que vimos na demonstração do teorema precedente que P admite as raízes (distintas ou não) r_1, r_2, r_2,..., r_n. Além disso, na demonstração do mesmo teorema vimos ao provar a unicidade, que essas são as únicas raízes de P. ■

Exemplo 2.2.1 Vamos fatorar o polinômio $P(x) = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$, sabendo que suas raízes são 1, -2, 2, $-2i$ e $2i$. Ora pelo teorema da decomposição

$$P = 5(x-1)(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i).$$

Exemplo 2.2.2 *Vejamos qual o conjunto solução da equação $7(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^2 = 0$ e qual o grau dessa equação. Ora, os fatores $(x-1)^3$, $(x-2)^4$ e $(x-3)^2$ indicam que as raízes 1, 2 e 3 têm multiplicidade 3, 4 e 2, respectivamente. Portanto*

$$P = 7(x-1)(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)(x-3)(x-3)$$

de modo que, as raízes de P são 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3 e 3. Logo, a equação é do nono grau.

Observação 2.2.1 Tendo em vista o teorema da decomposição, todo polinômio P de grau n ($n \geq 1$) pode ser visto como o desenvolvimento de um produto de n fatores do primeiro grau e um fator constante a_n, que é o coeficiente dominante de P. Desse modo,

$$P = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n).$$

Além disso, nada impede que P apresente fatores iguais. Associando os fatores idênticos da decomposição de P, obtemos:

$$P = a_n(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}(x-r_3)^{m_3}...(x-r_p)^{m_p}$$

onde

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_p = n \\ r_1,\ r_2,\ r_3, ..., r_p \ \text{ são dois a dois distintos.} \end{cases}$$

Nesse caso, P é divisível separadamente pelos polinômios $(x-r_1)^{m_1}$, $(x-r_2)^{m_2}$, $(x-r_3)^{m_3}$ ... $(x-r_p)^{m_p}$.

2.3 Multiplicidade de uma raiz

Consideremos, como um exemplo preliminar, a equação polinomial

$$(x-3)(x-1)^2(x-4)^3$$

que possui 6 raízes: uma igual a 3, duas iguais a 1 e três iguais a 4. Nesse caso, dizemos que 3 é raiz simples, 1 é raiz dupla e 4 é raiz tripla da equação em questão.

Definição 2.3.1 Diz-se que r é uma raiz de multiplicidade m, $m \geq 1$, da quação $P(x) = 0$ se, e somente se,

$$\boxed{P = (x-r)^m.Q} \ \text{ e } \ Q(r) \neq 0,$$

isto é, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio P é divisível por $(x-r)^m$ e não é divisível por $(x-r)^{m+1}$, ou melhor, a decomposição de P apresenta m fatores iguais a $x-r$. Quando $m = 1$, dizemos que r é *raiz simples*; quando $m = 2$ dizemos que r é *raiz dupla*; quando $m = 3$ dizemos que r é *raiz tripla*, etc.

Exemplo 2.3.1 A equação $x^4(x+5)^7 = 0$ admite as raízes 0 com multiplicidade 4 e -5 com multiplicidade 7, portanto, embora seja uma equação do $11^{\underline{0}}$ grau, seu conjunto solução só tem dois elementos: $S = \{0, -5\}$

Exemplo 2.3.2 A equação $(x-a)^n = 0$ só admite a raiz a com multiplicidade n, isto é, seu conjunto solução é $S = \{a\}$.

2.4 Relações entre coeficientes e raízes

Consideremos a equação dos segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0) \tag{2.8}$$

cujas raízes são r_1 e r_2. Pelo Teorema da Decomposição essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$a(x-r_1)(x-r_2) = 0. \tag{2.9}$$

Segue que

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x-r_1)(x-r_2),$$

ou seja

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2.$$

Assim,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \ \text{ e } \ r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

que são as relações entre raízes e coeficientes da equação (2.8).

Analogamente, consideremos a equação polinomial do terceiro grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a \neq 0), \tag{2.10}$$

cujas raízes são r_1, r_2 e r_3. Pelo teoema da decomposição, essa equação pode ser escrita sob a forma

$$a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) = 0. \tag{2.11}$$

Tem-se, portanto, a identidade

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Daí, segue que

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3.$$

Daí,

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$$

são as relações entre as raízes e os coeficientes da equação (2.10).

Vamos agora, deduzir as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial de grau n, $(n \geq 1)$.

Considere a equação polinomial

$$P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0),$$

cujas raízes são r_1, r_2, r_3, ... , r_n. Tem-se, pelo teorema da decomposição, a identidade

$$\begin{aligned} P(x) \quad & \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) \\ & \equiv a_nx^n - a_n(r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n)x^{n-1} + \\ & a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{n-1}r_n)x^{n-2} - \\ & a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + ... + r_{n-2}r_{n-1r_n})x^{n-3} + ... + \\ & (-1)^h a_nS_hx^{n-h} + ... + (-1)^n a_n(r_1r_2r_3...r_n). \end{aligned}$$

Assim, aplicando a identidade de polinômios, obtemos

$$\begin{aligned} S_1 = \quad & r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\tfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 = \quad & r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + ... + r_{n-1}r_n = \tfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ & .... \\ s_h = \quad & \frac{\text{soma de todos os } C_{n,h} \text{ produtos}}{\text{de } h \text{ raízes da equação}} = ((-1)^h \tfrac{a_{n-h}}{a_n}) \\ & .... \\ S_n = \quad & r_1r_2r_3...r_n = (-1)^n \tfrac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

são as relações entre os coeficientes e as raízes da equação $P(x) = 0$, também chamadas **relações de Girard**.

Exemplo 2.4.1 Vamos calcular a soma e produto das raízes da equação

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Ora, utilizando as relações de Girard, obtemos

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{3}{2}$$

enquanto que

$$r_1.r_2.r_3.r_4 = (-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = \frac{6}{2} = 3.$$

Exemplo 2.4.2 Seja $\{r_1, r_2, r_3\}$ o conjunto solução da equação

$$2x^3 + 5x^2 + 8x + 11 = 0.$$

Desejamos calcular o valor de $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$. Usando as relações de Girard, obtemos

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\tfrac{a_2}{a_3} = -\tfrac{8}{2} = 4, \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= \tfrac{a_1}{a_3} = \tfrac{8}{2} = 4 \\ r_1 r_2 r_3 &= -\tfrac{11}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_2 + r_2 r_3) = (-\frac{5}{2})^2 - 2.4 = -\frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4}.$$

Exemplo 2.4.3 Suponha que desejemos resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é 1. Usando as relações de Girard, temos

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} &= 6, & (2.12) \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{a_1}{a_3} &= 3, & (2.13) \\ r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3} &= -10, & (2.14) \\ r_1 + r_2 &= 1. & (2.15) \end{aligned}$$

Substituíndo (2.15) em (2.12) obtemos $1 + r_3 = 6$, ou seja $r_3 = 5$. Agora, de (2.14) e (2.15) obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} r_1 r_2 = -\frac{10}{5} = -2, \\ r_1 + r_2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $r_1 = -1$ e $r_2 = 2$ (ou vice-versa).

Observação 2.4.1 É interesante notar que as n relações de Girard para uma equação polinomial não são suficientes para se obter as raízes r_1, r_2, r_3, ... ,r_n. De fato, se tentarmos calcular r_1, por exemplo, após várias substituições obteremos a equação

$$\underbrace{a_n r_1^n + a_{n-1} r_1^{n-1} + a_{n-2} r_1^{n-2} + \ldots + a_1 r_1 + a_0}_{P(r_1)} = 0$$

o que equivale a equação dada. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, simplesmente usando as relações de Girard, teremos

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= 6 & (2.16) \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= 3 & (2.17) \\ r_1 r_2 r_3 &= -10 & (2.18) \end{aligned}$$

Usando a equação (2.17) obtemos

$$r_1(r_2 + r_3) = 3 \;\Rightarrow\; r_1(6 - r_1) - \frac{10}{r_1} = 3$$

e, daí

$$r_1^2(6-r_1)-10=3r_1 \quad \Rightarrow$$
$$\underbrace{r_1^3-6r_1^2+3r_1+10}_{P(r_1)}=0.$$

Quando uma condição adicional é dada, (por exemplo, a soma das raízes é 1) então, como vimos no Exemplo 1.4.3, é possível determinar explícitamente a solução da equação.

2.5 Raízes complexas

Teorema 2.5.1 *Se $P(x)$ é uma equação polinomial com coeficientes reais e $z=a+bi$ é uma solução, então $\overline{z}=a-bi$ também o será.*

Demonstração Suponha que

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n+2}+...+a_1x+a_0=0,$$

que os coeficientes a_1, a_2, a_3,..., a_n sejam todos reais e que $z=a+bi$ seja uma raiz de $P(x)$. Então,

$$\begin{aligned}
P(\overline{z}) = \;& a_n(\overline{z})^n+a_{n-1}(\overline{z})^{n-1}+a_{n-2}(\overline{z})^{n+2}+...+a_1\overline{z}+a_0\\
= \;& a_n\overline{z^n}+a_{n-1}\overline{z^{n-1}}+a_{n-2}\overline{z^{n+2}}+...+a_1\overline{z}+a_0\\
= \;& \overline{a}_n\overline{z^n}+\overline{a}_{n-1}\overline{z^{n-1}}+\overline{a}_{n-2}\overline{z^{n+2}}+...+\overline{a}_1\overline{z}+\overline{a}_0\\
= \;& \overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\overline{a_{n-2}z^{n+2}}+...+\overline{a_1z}+\overline{a_0}\\
= \;& \overline{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n+2}+...+a_1x+a_0}=\overline{P(z)}=\overline{0}=0,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.5.2 *Se uma equação polinomial $P(x)=0$ com coeficientes reais admite a raiz $z=a+bi$ ($b\neq 0$) com multiplicidade p, então também admite a raiz $\overline{z}=a-bi$ com multiplicidade p.*

Demonstração: Suponhamos que a equação $P(x)=0$ com coeficientes reais admite a raiz $z=a+bi$ ($b\neq 0$) com multiplicidade p e a raiz $\overline{z}=a-bi$ com multiplicidade q, com $q\neq p$. Mostraremos que isso leva a uma contradição. De fato seja $m=\min\{p,q\}$. Como o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-z)^p$ e por $(x-\overline{z})^q$, então P é divisível por $(x-z)^m$ e por $(x-\overline{z})^m$. Visto que $z\neq\overline{z}$, segue que P é divisível por $(x-z)^m.(x-\overline{z})^m$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
P = \;& [(x-z)^m(x-\overline{z})^m].Q\\
= \;& [(x-z)(x-\overline{z})]^m.Q\\
= \;& [x^2-(z+\overline{z})x+z\overline{z}]^m.Q\\
= \;& [x^2-2ax+(a^2+b^2)]^m.Q
\end{aligned}$$

Como P e $[x^2-2ax+(a^2+b^2)]^m$ têm coeficientes reais, segue-se que Q também tem todos os coeficientes reais. Assim, são possíveis dois casos:

(1) $\mathbf{m=p<q}$. Nesse caso Q não seria divisível por $x-z$, ou seja, $Q(z)\neq 0$ e $Q(\overline{z})=0$, o que seria um absurdo.

(2) $\mathbf{m=q<p}$. Nesse caso, Q não seria divisível por $x-\overline{z}$ mas seria divisível por $x-z$, ou seja $Q(\overline{z})\neq 0$ e $Q(z)=0$, o que seria um absurdo.

Assim, deve-se ter $q = p$. ■

Observação 2.5.1 Os dois teoremas precedentes só se aplicam a equações polinomiais que possuem *coeficientes reais*. Por exemplo, a equação $x^2 - ix = 0$ admite comjo raízes 0 e i, entretanto não admite $-i$ (conjugado de i) como raiz.

Visto que a toda raiz complexa $z = a + bi$ de uma equação polinomial $P(x) = 0$, com coeficientes reais, corresponde uma outra raiz $\overline{z} = a - bi$, com igual multiplicidade, segue-se que o número de raízes complexas não reais de $P(x) = 0$ é necessariamente par.

Além disso, se uma equação polinomial com coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite uma reiz real. Assim, por exemplo, toda equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, (com a, b, c e d reais) tem uma ou três raízes reais já que o número de raízes complexas e não reais aparecem aos pares.

Exemplo 2.5.1 (Aplicações) a) Vamos determinar o menor grau que pode ter uma equação polinomial de coeficientes reais para admitir 1, i e $1 + i$ como raízes. Ora, para que tal equação polinomial tenha tais raízes, deverá também ter as raízes conjugadas $-i$ e $1 - i$. Portanto, tal equação terá no mínimo 5.

b) Suponha que desejemos formar uma equação polinomial de coeficientes reais e grau mínimo que admita 0 como raiz simples; 1 como raiz dupla e $2-3i$ como raiz tripla. Visto que a equação também terá $2 + 3i$ como raiz tripla, então a equação será

$$k(x - 0)(x - 1)^2(x - 2 + 3i)^3(x - 2 - 3i)^3 = 0$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$.

c) Suponha que desejemos resolver a equação $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0$ sabendo que uma das raízes é $i\sqrt{3}$. Nesse caso, $-i\sqrt{3}$ também será uma raiz. Assim, o primeiro membro da equação será dividido por $(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) = x^2 + 3$. Fazendo a divisão, concluímos que vale a decomposição

$$(x^2 + 3)(x^2 + x - 1) = 0.$$

As raízes restante são $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2.6 Raízes reais

Nessa seção desejamos analisar quando a equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais admite raízes em um certo intervalo $]a, b[$.

Com essa finalidade, seja então $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais. Indiquemos por r_1, r_2, r_3,...,r_p suas raízes reais e z_1, $\overline{z}_1$, z_2, $\overline{z}_2$, z_3, $\overline{z}_3$, ... , z_q, $\overline{z}_q$, suas raízes complexas e não reais. Pelo Teorema da Decomposição, tem-se

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_p)[(x - z_1)(x - \overline{z}_1)(x - z_2)(x - \overline{z}_2)...(x - z_q)(x - \overline{z}_q)]. \tag{2.19}$$

Façamos o produto correspondente a duas raízes conjugadas, digamos $z_1 = a + bi$ e $\overline{z}_1$. Ora

$$\begin{aligned}(x - z_1)(x - \overline{z}_1) &= x^2 - (z_1 + \overline{z}_1)x + z_1\overline{z}_1 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \\ &= (x - a)^2 + b^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Com isso verificamos que o produto é positivo para todo valor real de x. Como o polinômio

$$Q = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)(x - z_2)(x - \overline{z}_2)...(x - z_q)(x - \overline{z}_q)$$

é o produto de q fatores do tipo que acabamos de analisar, segue-se que Q assume valor numérico positivo para todo x real e a expresão (2.19) fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} P(x) = a_n.Q.(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_p), \\ \text{com } \; Q(x) > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Teorema 2.6.1 (de Bolzano) *Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a,b[$ um intervalo aberto. Então:*

a) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal, então existe um par de raízes reais ou não existem raízes reais da equação em $]a,b[$.

b) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a,b[$.

Demonstração: Notemos, inicialmente, que se r_i é uma raiz no interior do intervalo $]a,b[$, então $a < r_i < b$, ou seja

$$\left.\begin{array}{l} a - r_i < 0 \\ b - r_i > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a - r_i)(b - r_i) < 0.$$

Notemos ainda, que se r_e é uma raiz real externa ao intervalo $]a,b[$, digamos $a < b < r_e$, então

$$\left.\begin{array}{l} a - r_e < 0 \\ b - r_e < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a - r_i)(b - r_i) > 0.$$

Agora, calculemos o produto $P(a) \cdot P(b)$. Tem-se

$$\begin{aligned} P(a).P(b) = \;\; & [a_n.Q(a)(a - r_1)(a - r_2)(a - r_3)...(a - r_p)]\times \\ & [a_n.Q(b).(b - r_1)(b - r_2)(b - r_3)...(b - r_p)] \\ = \;\; & a_n^2[Q(a).Q(b)][(a - r_1)(a - r_2)(a - r_3)...(a - r_p)]\times \\ & [(b - r_1)(b - r_2)(b - r_3)...(b - r_p)] \end{aligned} \tag{2.21}$$

Desse modo, verificamos que $P(a) \cdot P(b)$ é um produto de $p + 2$ fatores numéricos, a saber:

$$\begin{cases} \text{um fator é } \; a_n^2 > 0, \\ \text{outro fator é } \; Q(a).Q(b) > 0, \;\; \text{pois } \; Q(x) > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \\ p \;\text{ fatores do tipo } \; (a - r_j)(b - r_j) \;\text{ onde } \; r_j \;\text{ é uma raiz da equação.} \end{cases}$$

Assim, os únicos fatores negativos do segundo membro da expressão (2.21) são os fatores correspondentes às raízes de $P(x) = 0$ internas ao intervalo $]a,b[$, o que permite concluir a existência de duas possibilidades.

(1) quando $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal, ou seja, $P(a).P(b) > 0$, existe um número par de fatores negativos do tipo $(a - r_i)(b - r_i)$ e, portanto, existe um número par de raízes reais da equação $P(x) = 0$ no interior do intervalo $]a,b[$.

(2) quando $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, isto é, $P(a).P(b) < 0$, existe um número ímpar de fatores negativos do tipo $(a-r_i)(b-r_i)$ e, portanto, existe um número ímpar de raízes reais da equação $P(x) = 0$ no interior do intervalo $]a, b[$.

Isso, encerra a demonstração. ■

Exemplo 2.6.1 (Aplicações) Vamos determinar quantas raízes reais a equação $x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0$ pode apresentar no intevalo $]0,1[$. Primeiro, observe que se $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 4$, então

$$P(0) = 0^3 + 5.0^2 - 3.0 + 4 = 4 > 0$$
$$P(1) = 1^3 + 5.1^2 - 3.1 + 4 = 7 > 0.$$

Visto que $P(0)$ e $P(1)$ são positivos, a equação pode ter duas ou nenhuma raiz real no intervalo.

Agora, vamos analisar quantas raízes reais a equação polinomial $x^3 - 3x^3 + 7x + 1 = 0$ pode apresentar no intervalo $]-1,1[$. Com essa finalidade, considere o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^3 + 7x + 1$. Temos:

$$P(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)^2 + 7.(-1) + 1 = -10 < 0$$
$$P(1) = 1^3 - 3.(-1)^2 + 7.(-1) + 1 = 6 > 0.$$

Visto que $P(-1)$ e $P(1)$ têm sinais contrários, a equação pode ter uma ou três sinais no intervalo em questão.

Para finalizar, consideremos a equação

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + (m-3) = 0.$$

Desejamos determinar m de tal modo que a equação acima tenha ao menos uma raiz real no intervalo $]0,2[$. Para isso, observe que:

$$P(0) = m - 3 \quad \text{e} \quad P(2) = m + 3.$$

A condição de existência traduz-se em $P(0).P(2) < 0$. Assim, deve-se ter $(m-3)(m+3) < 0$ o que equivale a $-3 < m < 3$.

2.7 Pesquisa das raízes racionais

Nessa seção desenvolvemos um método para determinar, caso seja possível, as raízes racionais de uma equação polinomial $P(x) = 0$.

Teorema 2.7.1 *Suponha que uma equação polinomial*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^2 + ... + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0),$$

tenha coeficientes inteiros e admita uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, com p e q primos entre si). Então, p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração: Se $\dfrac{p}{q}$ é raiz de $P(x) = 0$, tem-se

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + ... + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplicando-se ambos os membros por q^n, obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Isolando $a_n p^n$ e, depois, $a_0 q^n$, obtemos

$$a_n p^n = -q[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}], \tag{2.22}$$

$$a_0 q^n = -p[a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}]. \tag{2.23}$$

Como a_0, a_1, a_2,...,a_n, p e q são todos inteiros, segue que $[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}]$ e $[a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}]$ também o serão. Portanto, de (2.22) e (2.23), segue que

$$\frac{a_n p^n}{q} \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \frac{a_0 q^n}{p} \in \mathbb{Z}.$$

Isso significa que q divide $a_n p^n$ e, como q e p^n são primos entre si, então a_n é divisível por q; de modo análogo, temos que $a_0 q^n$ é divisível por p e, como q^n e p são primos ente si, segue que p divide a_0. Isso encerrra a demonstração. ■

Exemplo 2.7.1 Quais são as raízes racionais da equação

$$2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 30x - 12 = 0.$$

As possíveis raízes racionais são da forma $\frac{p}{q}$ onde p é divisor de -12 e q é divisor de 2. Desse modo, temos

$$p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12\} \quad \text{e} \quad q \in \{1, 2\}.$$

Assim se a equação tiver raízes racionais, essas raízes se encontram no conjunto

$$\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}.$$

Esses valores foram obtidos dividindo os possíveis valores de q (no caso 1 e 2) por todos os possíveis valores de p (no caso -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12). Fazendo a verificacão de $P(x)$ para as 16 possíveis raízes, obtemos que $P(2) = 0$ e $P(\frac{1}{2}) = 0$. Para as demais tem-se $P(x) \neq 0$.

Exemplo 2.7.2 Vamos determinar as raízes inteiras da equação polinomial $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$. Note que, nesse caso temos que $p \in \{-1, 1-3, 3, -9, 9\}$ e $q = 1$. Portanto, as possíveis raízes inteiras $\frac{p}{q}$ estão no conjunto $\{-1, 1-3, 3, -9, 9\}$. Após verificação, uma-a-uma, tem-se que $P(-3) = 0$. Portanto, -3 é a única raíz inteira.

Observação 2.7.1 É importante observar que o teorema precedente só se aplica a equações polinomiais com coeficientes inteiros (todos!). Não é suficiente que o coeficiente dominante a_n e o termo independente a_0 sejam inteiros. Por exemplo, a equação $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ apresenta as raízes 2 e $\frac{1}{2}$ enquanto que o teorema precedente (aplicado de forma errada!) nos daria como possíveis raízes 1 e -1.

Por outro lado se a equação $P(x) = 0$ com coeficientes inteiros e $a_0 \neq 0$ admite uma raiz inteira $r = \frac{r}{1}$, então r é divisor de a_0 (termo independente de P). Assim, as possíveis raízes inteiras de

$$7x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 6 = 0$$

são -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6 e 6.

Se a equação $P(x)$ com coeficientes inteiros e coeficiente dominante unitário ($a_n = 1$) admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, então essa raiz é necessáriamente inteira visto que $q = 1$. Assim, por exemplo, qualquer raiz racional da equação

$$x^4 + 11x^3 - 7x^2 + 4x - 8 = 0,$$

é necessariamente inteira pois está no conjunto $\{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$.

Capítulo 3

TRANSFORMAÇÕES ALGÉBRICAS

3.1 Conceitos iniciais e exemplos

Definição 3.1.1 Chama-se **transformação** de uma equação algébrica $P_1(x) = 0$ a toda operação a partir da qual se obtém uma outra equação algébrica $P_2(y) = 0$ cujas raízes estejam relacionadas com as raízes da equação inicial através de uma lei conhecida $y = f(x)$. Nesse caso, a equação $P_1(x) = 0$ é chamada *equação primitiva*, enquanto que a equação $P_2(y) = 0$ é chamada *equação transformada* e a lei $y = f(x)$ é chamada *relação de transformação*.

Exemplo 3.1.1 Se $P_1(x) = 3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ é a equação primitiva e $y = x^2$ é a relação de transformação, então:

$$P_2(y) = 3(\sqrt{y})^4 - 7(\sqrt{y})^2 + 5 = 3y^2 - 7y + 5 = 0$$

é a equação transformada. Nesse caso, as raízes de $P_2(y)$=0 são iguais aos quadrados das raízes de $P_1(x) = 0$.

Exemplo 3.1.2 Seja $P_1(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = 0$ a equação primitiva e $y = x - 1$ a relação de transformação. Então

$$\begin{aligned} P_2(y) = &\quad 2(y+1)^3 - 5(y+1)^2 + 7(y+1) = \\ = &\quad 2y^3 + y^2 + 3y + 3 = 0 \end{aligned}$$

é a equação transformada.

É interessante observar que, no presente exemplo, as raízes de $P_2(y) = 0$ são iguais as raízes de $P_1(x) = 0$ diminuídas de 1.

A seguir faremos uma análise das três principais transformações que são mais usuais em equações polinomiais.

3.2 A transformação multiplicativa

Definição 3.2.1 Chama-se **transformação multiplicativa** aquela na qual a relação de transformação é dada por

$$y = kx, \quad (k \neq 0).$$

No presente caso, dada a equação primitiva $P_1(x) = 0$, substituíndo x por $\frac{y}{k}$ e fazendo as devidas simplificações, obtemos a transformada $P_2(y) = 0$, cujas raízes são precisamente as raízes de $P_1(x) = 0$ multiplicadas por k.

Exemplo 3.2.1 Dada a equação $x^3-2x^2+x+1=0$, vamos obter sua transformada pela relação $y=2x$. Ora,

$$P_1(x)=P_1(\frac{y}{2})=(\frac{y}{2})^3-2(\frac{y}{2})^2+(\frac{y}{2})+1=0.$$

Após eliminação dos denominadores, chegamos a conclusão de que

$$P_2(y)=y^3-8y^2+4y+8=0.$$

Exemplo 3.2.2 Suponhamos que desejemos obter a transformada que apresenta como raízes os simétricos dos triplos das raízes de $5x^3+x^2-x+1=0$. Nesse casos, temos: *equação primitiva:* $P_1(x)=5x^3+x^2-x+1=0$,
relação de transformação: $y=-3x$. Daí, segue que

$$P_1(x)=P_1(-\frac{y}{3})=5(-\frac{y}{3})^3+(-\frac{y}{3})^2-(-\frac{y}{3})+1=0.$$

Assim, após a eliminação dos denominadores, obtemos

$$P_2(y)=-5y^3+3y^2+9y+27=0.$$

3.3 A transformação aditiva

Definição 3.3.1 Chama-se **transformação aditiva** aquela em que a relação de transformação é dada por

$$y=x+a.$$

No presente caso, dada a equação primitiva $P_1(x)=0$, substituído-se x por $y-a$, e fazendo as devidas simplificações, obtemos a transformada $P_2(y)$, cujas raízes são precisamente as de $P_1(x)$ acrescidas de a, sendo a um número complexo qualquer.

Exemplo 3.3.1 Considere a equação $x^3-2x^2+x+1=0$. Vamos obter sua transformada pela relação $y=x+2$. Ora,

$$P_1(x)=P_1(y-2)=(y-2)^3-2(y-2)^2+(y-2)+1=0$$

o que após a simplificação, nos leva a

$$P_2(y)=y^3-8y^2+21y-17=0.$$

Exemplo 3.3.2 Nesse exemplo, vamos obter a transformada que apresenta como raízes as raízes de

$$5x^3+x^2-x+1=0$$

diminuídas de 3. Nesse caso, temos
equação primitiva: $P_1(x)=5x^3+x^2-x+1=0$
relação de transformação: $y=x-3$. Daí,

$$P_1(x)=P_1(y+3)=5(y+3)^3+(y+3)^2-(y+3)+1=0.$$

Após a simplificação da expressão acima, obtemos

$$P_2(y)=5y^3+46y^2+140y+142=0.$$

Observe que os resultados obtidos nesses dois exemplos poderiam ser indicados de outro modo, digamos:

$$1^{\underline{0}})\quad \begin{cases} P_1(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ P_2(x+2) = (x+2)^3 - 8(x+2)^2 + 21(x+2) - 17 \end{cases}$$

e

$$2^{\underline{0}})\quad \begin{cases} P_1(x) = 5x^3 + x^2 - x + 1 \\ P_2(x-3) = 5(x-3)^3 + 46(x-3)^2 + 140(x-3) + 142 \end{cases}$$

onde $P_1(x) = P_2(x+a)$ para todo valor complexo atribuído a x, visto que desenvolvendo as potências indicadas em $P_2(x+a)$, obtemos $P_1(x)$. Podemos dizer então que $P_1(x)$ e $P_2(x+a)$ são funções polinomiais idênticas.

Teorema 3.3.1 *Dada a equação primitiva*

$$P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_1 x + a_0$$

a sua transformada aditiva é

$$P_2(x+a) = R_n.(x+a)^n + R_{n-1}.(x+a)^{n-1} + R_{n-2}.(x+a)^{n-2} + ... + R_1.(x+a) + R_0 = 0$$

onde R_0*,* R_1*,* R_2*,...,*R_n *são os restos das divisões de* P_1 *pelos sucessivos quocientes por* $(x+a)$*.*

Demonstração: Provemos que $P_1(x)$ e $P_2(x+a)$ são funções polinomiais idênticas. Isso será feito por etapas.

$1^{\underline{a}}$ **Etapa** Quando dividimos $P_1(x)$ por $x+a$, obtemos um quociente Q_0 (de grau $n-1$) e um resto R_0 de tal modo que se tem

$$P_1 = Q_0.(x+a) + R_0. \tag{3.1}$$

$2^{\underline{a}}$ **Etapa** Quando dividimos Q_0 por $x+a$, obtemos quociente Q_1 (de grau $n-2$) e resto R_1 de tal modo que

$$Q_0 = Q_1.(x+a) + R_1 \tag{3.2}$$

e, substituído (3.2) em (3.1), resulta:

$$P_1 = Q_1.(x+a)^2 + R_1(x+a) + R_0. \tag{3.3}$$

$3^{\underline{a}}$ **Etapa** Quando dividimos Q_1 por $x+a$, obtemos um quociente Q_2 (de grau $n-3$) e resto R_2 de tal modo que

$$Q_1 = Q_2.(x+a) + R_2. \tag{3.4}$$

Substituído (3.4) em (3.3), resulta que

$$P_1 = Q_3.(x+a)^3 + R_2.(x+a)^2 + R_1.(x+a) + R_0, \tag{3.5}$$

e assim, sucessivamente, até que:

$$P_1 = Q_{n-2}(x+a)^{n-1} + R_{n-2}(x+a)^{n-2} + ... + R_1(x+a) + R_0.$$

$4^{\underline{a}}$ **Etapa** Quando dividimos Q_{n-2} por $x+a$, obtemos o quociente Q_{n-1} (de grau 0) e resto R_{n-1} de tal modo que

$$Q_{n-2} = Q_{n-1}.(x+a) + R_{n-1} \tag{3.6}$$

e, substituíndo (3.6) em (3.5), obtém-se

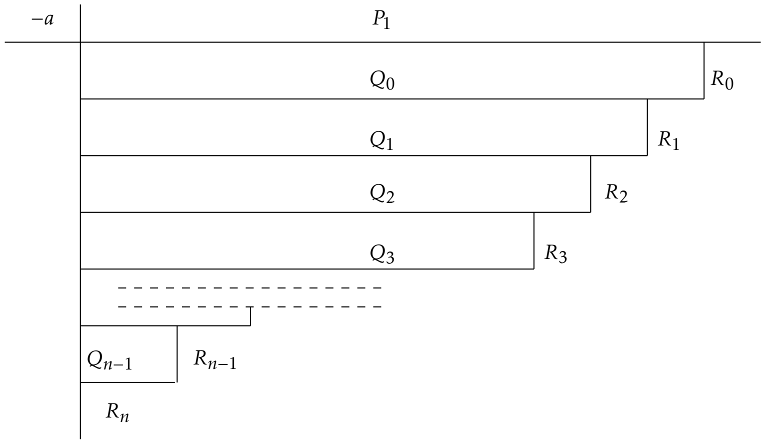
$$Q_{n-2} = Q_{n-1}.(x+a)^n + R_{n-1}.(x+a)^{n-1} + ... + R_1(x+a) + R_0.$$

Finalmente, a divisão de Q_{n-1} por $x+a$ produz um quociente 0 e resto R_n. Assim, $Q_{n-1} = R_n$, o que resulta em

$$P_1 = R_n.(x+a)^n + R_{n-1}.(x+a)^{n-1} + R_{n-2}.(x+a)^{n-2} + ... + R_1.(x+a) + R_0,$$

o que demonstra o teorema. ■

Do teorema acima resulta que a transformada aditiva de $P_1(x) = 0$, de grau n, é definida pelos $n+1$ restos das divisões do polinômio P_1 e os sucessivos quocientes, por $x+a$. As sucessivas divisões por $x+a$ podem ser realizadas mais rapidamente com o auxílio do chamado *dispositivo de Horner-Ruffini* (semelhante ao dispositivo de Briot-Ruffini), conforme ilustrado abaixo:



Exemplo 3.3.3 Dada a equação $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, vamos obter sua transformada aditiva pela relação $y = x+2$. Pelo dispositivo de Horner-Ruffini, tem-se

-2	1	-2	1	1
	1	-4	9	$-17 = R_0$
	1	-6	$21 = R_1$	
	1	$-8 = R_2$		
	$1 = R_3$			

Portanto, a transformada aditiva desejada é dada por

$$(x+2)^2 - 8(x+2) + 21(x+2) - 17 = 0.$$

Exemplo 3.3.4 Suponhamos que desejamos desenvolver o polinômiio $P_1 = 5x^3 + x^2 - x + 1$ em potências de $x-3$. Pelo dispositivo de Horner-Ruffini, temos

3	5	1	-1	1
	5	16	47	$142 = R_0$
	5	31	$140 = R_1$	
	5	$46 = R_2$		
	$5 = R_3$			

Portanto segue-se que

$$P_1 = 5(x-3)^3 + 46(x-3)^2 + 140(x-3) + 142.$$

Exemplo 3.3.5 Dada a equação $x^6 - x^4 + 3x^2 + 1 = 0$, suponhamos que desejamos obter uma equação cujas raízes sejam as raízes da equação dada acrescidas de 1. Assim o problema consiste em achar a transformada aditiva através da relação $y = x + 1$. Usando o dispositivo de Horner-Rufini, tem-se então

−1	1	0	−1	0	3	0	1
	1	−1	0	0	3	−3	4
	1	−2	2	−2	5	−8	
	1	−3	5	−7	12		
	1	−4	9	−16			
	1	−5	14				
	1	−6					
	1						

Desse modo, a equação procurada é a

$$y^6 - 6y^5 + 14y^4 - 16y^3 + 12y^2 - 8y + 4 = 0.$$

3.4 A transformação recíproca

Definição 3.4.1 Chama-se **transformação recíproca** aquela em que a relação de transformação é dada por

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Dada a equação primitiva $P_1(x) = 0$, substituíndo x por $\frac{1}{y}$ e fazendo as devidas simplificações, obtemos a transformada $P_2(y) = 0$, cujas raízes são precisamente os inversos das raízes de $P_1(x) = 0$

Exemplo 3.4.1 Dada a equação $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, vamos obter sua transformada pela relação $y = \frac{1}{x}$. De fato.

$$P_1(x) = P_1(\frac{1}{y}) = (\frac{1}{y})^3 - 2(\frac{1}{y})^2 + (\frac{1}{y}) + 1 = 0.$$

Após as simplificações obtém-se

$$P_2(y) = 1 - 2y + y^2 + y^3 = 0.$$

Exemplo 3.4.2 Suponha que desejemos obter a transformada que apresenta como raízes os inversos das raízes de $5x^3 + x^2 - x + 1 = 0$. Tem-se, então: *equação primitiva*: $P_1(x) = 5x^3 + x^2 - x + 1 = 0$
relação de transformação: $y = \frac{1}{x}$.
Portanto, tem-se

$$P_1(x) = P_1(\frac{1}{y}) = 5(\frac{1}{y})^3 + (\frac{1}{y})^2 - (\frac{1}{y}) + 1 = 0,$$

que, após as devidas simplificações, nos leva a

$$P_2(y) = y^3 - y^2 + y + 5 = 0.$$

Observe que, para se obter a transformada recíproca é suficiente inverter totalmente a ordem dos coeficientes da equação primitiva e trocar x por y:

$$P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

$$P_2(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_{n-2}y^{n-2} + a_{n-1}y + a_n = 0.$$

Assim, por exemplo, tem-se:

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0,$$

$$6y^5 + 5y^4 + 4y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = 0.$$

3.5 Equações recíprocas

Definição 3.5.1 Uma equação polinomial $P(x)$ é chamada **recíproca** se, e somente se, é equivalente à sua transformada recíproca $P(\frac{1}{x}) = 0$.

Teorema 3.5.1 *Seja $P(x) = 0$ uma equação recíproca, tendo α como raíz com multiplicidade m. Então, $\frac{1}{\alpha}$ também será uma raiz dessa mesma equação, com multiplicidade m.*

Demonstração: Já sabemos que se $\alpha \neq 0$ é uma raiz de $P(x) = 0$, então $\frac{1}{\alpha}$ é raiz da transformada recíproca $P(\frac{1}{x}) = 0$, tendo α e $\frac{1}{\alpha}$ a mesma multiplicidade. Se $P(x) = 0$ é equivalente a $P(\frac{1}{x}) = 0$, então toda raiz da segunda também será raiz da primeira e, portanto, $\frac{1}{\alpha}$ é raiz de $P(x) = 0$. ■

O teorema precedente sugere um processo para construir equações recíprocas: basta formar a equação tomando o cuidado de a cada raiz α fazer corresponder uma raiz $\frac{1}{\alpha}$ com a mesma multiplicidade de α.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.5.1 $P(x) = 4(x-2)(x-\frac{1}{2}) = 0$ é uma equação recíproca, já que $P(x) = 4x^2 - 10x + 4 = 0$ e

$$P(\frac{1}{x}) = 4(\frac{1}{x})^2 - 10(\frac{1}{x}) + 4 = \frac{4 - 10x + 4x^2}{x} = 0$$

são equações equivalentes.

Exemplo 3.5.2 A equação $P(x) = 18.(x-3)(x-\frac{1}{3})(x+\frac{2}{3})(x+\frac{3}{2})$ é uma equação recíproca que pode ser escrita sob a forma

$$18x^4 - 21x^3 - 94x^2 - 21x + 18 = 0.$$

Exemplo 3.5.3 $P(x) = 2.(x-1)^3(x-\frac{1}{2})(x-2) = 0$ é uma equação recíproca que também pode ser escrita sob a forma

$$2x^5 - 11x^4 + 23x^3 - 23x^2 + 11x - 2 = 0.$$

Observe que, neste exemplo à raiz $\alpha = 1$ corresponde a raiz $\frac{1}{\alpha} = 1$.

Exemplo 3.5.4 $P(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ não é uma equação recíproca, já que suas raízes 2 e 3 não vêm acompanhadas de suas respectivas inversas.

Exemplo 3.5.5 $P(x) = (x-2)^2(x-\frac{1}{2})$ também não é uma equação recíproca, já que as raízes 2 e $\frac{1}{2}$ não têm a mesma multiplicidade.

Pelo exposto, aprendemos a reconhecer, de imediato, quando uma equação disposta na sua forma fatorada é ou não uma equação recíproca. No entanto, as equações polinomiais raramente vêm na forma fatorada. Desse modo, necessitamos de um critério que garanta quando uma equação polinomial é recíproca.

Teorema 3.5.2 (do reconhecimento) *Uma equação polinomial $P(x) = 0$ é recíproca se, e somente se, seus coeficientes equidistantes dos extremos forem iguais ou simétricos.*

Dada a equação polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

dizemos que a_n e a_0 são os coeficientes extremos, a_{n-1} e a_1 são coeficientes equidistantes do extremos, a_{n-2} e a_2 também, etc. De modo mais geral, a_{n-k} e a_k, onde $k \leq n$ são equidistantes dos extremos.
Demonstração: Consideremos, então, a equação polinomial de grau n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $a_{n-k} = \pm a_k$, para todo inteiro k, onde $0 \leq k \leq n$. Então, é imediato que

$$P(\frac{1}{x}) = 0$$

é equivalente a $P(x) = 0$. $\Rightarrow$ Provemos, agora, que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

e

$$P(\frac{1}{x}) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

são equações equivalentes, então $a_{n-k} = \pm a_k$, para todo $k = 0, 1, 2, ..., n$. De fato, da equivalência das equações segue que os coeficientes devem ser proporcionais, ou seja

$$\begin{aligned}
a_n &= p.a_0 \\
a_{n-1} &= p.a_1 \\
a_{n-2} &= p.a_2 \\
&\cdots\cdots \\
a_2 &= p a_{n-2} \\
a_1 &= p a_{n-1} \\
a_0 &= p a_n
\end{aligned}$$

Observando as igualdades acima, vemos que

$$a_{n-k} = p a_k \quad \text{e} \quad a_k = p.a_{n-k}.$$

Daí, segue que

$$a_{n-k} = p(p.a_{n-k}).$$

Logo, $p^2 = \pm 1$, ou seja $a_{n-k} = \pm a_k$, como queríamos demonstrar. ∎

Exemplo 3.5.6 As equações polinomiais abaixo são todas recíprocas:

$$\begin{aligned}
&4x^2 - 10x + 4 = 0 \\
&18x^4 - 21x^3 - 94x^2 - 21x + 18 = 0 \\
&2x^5 - 11x^4 + 23x^3 - 23x^2 + 11x - 2 = 0 \\
&3x^7 + 5x^5 + 5x^2 + 3 = 0.
\end{aligned}$$

Observe que a última das equações acima pode ser reescrita sob a forma

$$3x^7 + 0.x^6 + 5x^5 + 0.x^4 + 0.x^3 + 5x^2 + 0.x + 3 = 0.$$

Com o objetivo de facilitar sua resolução, classificamos as equações recíprocas em:

a) *equações recíprocas de 1ª espécie*: são aquelas em que os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais,

$$a_n = a_0, \quad a_{n-1} = a_1, \quad a_{n-2} = a_2, \; ...$$

Por exemplo

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$$

e

$$7x^4 - 11x^3 - 5x^2 - 11x + 7 = 0$$

são equações recíprocas de primeira espécie.

b) *equações recíprocas de 2ª espécie:* são aquelas em que os coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos, isto é

$$a_n = -a_0, \quad a_{n-1} = -a_1, \quad a_{n-2} = -a_2, \; ...$$

Assim,

$$7x^3 - 6x^2 + 6x - 7 = 0$$

e

$$4x^4 - 5x^3 + 5x - 4 = 0$$

são exemplos de equações recíprocas.

3.6 Propriedades notáveis das equações recíprocas

1ª *propriedade*: Toda equação $P(x) = 0$, recíproca de 2ª espécie admite o número 1 como raiz. A divisão de P por $x - 1$ conduz a uma equação recíproca de 1ª espécie. De fato, se $P(x) = 0$ apresenta os coeficientes equidistantes dos extremos simétricos, então a soma dos coeficientes equidistantes dos extremos é nula, ou seja

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1 + a_0 = 0,$$

ou seja, 1 é raiz. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtemos

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & 1 \\
\hline
\multicolumn{6}{c|}{\underbrace{a_n \quad (a_n + a_{n-1}) \quad a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \quad \cdots \quad (a_n + a_{n-1}) \quad a_n}_{Q(x)}} & 0 &
\end{array}$$

Portanto, $P(x) = (x - 1).Q(x) = 0$ e $Q(x) = 0$ é uma equação recíproca de 1ª espécie.

$2^{\underline{a}}$ *propriedade* Toda equação $P(x) = 0$, recíproca de $1^{\underline{a}}$ espécie e grau ímpar admite o número -1 como raiz. A divisão de $P(x)$ por $x+1$ conduz a uma equação recíproca de $1^{\underline{a}}$ espécie de grau par. De fato, como $P(x) = 0$ apresenta número par de coeficientes iguais dois a dois, tem-se então:

$$P(-1) = -a_n + a_{n+1} - a_{n-2} + ... + a_2 - a_1 + a_0 = 0,$$

e, portanto, -1 é raiz. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos

$$\begin{array}{cccccc|c|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & -1 \\ \hline \underbrace{a_n \quad (a_{n-1}+a_n) \quad a_{n-2}-a_{n-1}+a_n \quad \cdots \quad (a_1-a_0) \quad a_0}_{Q(x)} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Portanto, $P(x) = (x+1).Q(x)$ e $Q(x)$ é uma equação recíproca de $1^{\underline{a}}$ espécie e grau par.

Analisemos um pouco mais de perto as *equações de* $1^{\underline{a}}$ espécie e grau par.

Para isso, vamos resolver a equação polinomial $P(x) = 0$ onde $a_{n-k} = a_k$, para $0 \leq k \leq n$ e $n = 2p$ (n é par). Temos que

$$\begin{aligned} a_0x^{2p} + a_1x^{2p-1} \quad & a_2x^{2p-2} + ... + a_{p-2}x^{p+2} + a_{p-1}x^{p+1} + a_px^p + \\ & a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por x^p, obtemos

$$\begin{aligned} a_x^p + a_1x^{p-1} \quad & a_2x^{p-2} + ... + a_{p-2}x^2 + a_{p-1} + a_p + \\ & a_{p-1}\tfrac{1}{x} + a_{p-2}\tfrac{1}{x^2} + ... + a_2\tfrac{1}{x^{p-2}} + a_1\tfrac{1}{x^{p-1}} + a_0\tfrac{1}{x^p} = 0. \end{aligned}$$

Associando os pares de termos equidistantes dos extremos, vem

$$\begin{aligned} a_0(x^{2p} + \tfrac{1}{x^{2p}}) + a_1(x^{2p-1} + \tfrac{1}{x^{2p-1}}) \quad & a_2(x^{2p-2} + \tfrac{1}{x^{2p-2}}) + ... + \\ & a_{p-2}(x^2 + \tfrac{1}{x^2}) + a_{p-1}(x + \tfrac{1}{x}) + a_p = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Fazendo a transformação $y = x + \frac{1}{x}$, obtemos

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \;\; x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y, \;\; x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2, \;\; \text{etc}$$

Assim, a equação (3.7) se transforma em

$$a_p + a_{p-1}y + a_{p-2}(y^2 - 2) + a_{p-3}(y^3 - 3y) + ... = 0 \quad (\text{de grau } p = \frac{n}{2}).$$

Exemplo 3.6.1 Vamos resolver a equação $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$. Dividindo essa equação por x^2, obtemos

$$6x^2 - 35x + 62 - 35.\frac{1}{x} + 6.\frac{1}{x^2} = 0,$$

o que equivale a

$$6(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 35(x + \frac{1}{x}) + 62 = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $y = x + \frac{1}{x}$, a equação precedente se torna

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0,$$

resultando na equação do segundo grau $6y^2 - 35y + 50 = 0$, cujas raízes são $y = \frac{5}{2}$ e $\frac{10}{3}$. Assim, se $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ tem-se $2x^2 - 5x + 2 = 0$ de onde se obtém $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$. Por outro lado, se $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, tem-se $3x^2 - 10x + 3 = 0$ e, daí, $x = 3$ ou $x = \frac{1}{3}$. Portanto o conjunto solução da nossa equação inicial é

$$S = \{2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}.$$

Exemplo 3.6.2 Vamos resolver a equação $6x^6 - 13x^5 - 6x^4 + 26x^3 - 6x^2 - 13x + 6 = 0$. Para isso, dividimos essa equação por x^3, obtendo

$$6x^3 - 13x^2 - 6x + 26 - 6.\frac{1}{x} - 13.\frac{1}{x^2} + 6.\frac{1}{x^3} = 0,$$

ou ainda,

$$6(x^3 + \frac{1}{x^3}) - 13(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 6(x + \frac{1}{x}) + 26 = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $y = x + \frac{1}{x}$, obtemos a equação

$$6(y^3 - 3y) - 13(y^2 - 2) - 6y + 26 = 0,$$

ou ainda

$$6y^3 - 13y^2 - 24y + 52 = 0.$$

Fazendo a pesquisa das raízes racionais, encontramos $y = 2$, $y = -2$ ou $y = \frac{13}{6}$. Assim,

a) se $x + \frac{1}{x} = 2$, então obtemos a raiz dupla $x = 1$;

b) se $x + \frac{1}{x} = -2$, então obtemos a raiz dupla $x = -1$;

c) se $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$, então obtemos a raízes $x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Logo, a equação inicial tem por conjunto solução $S = \{1, -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$.

Observação 3.6.1 De modo resumido, temos os seguintes resultados:

a) Dada uma equação recíproca de $2^{\underline{a}}$ espécie e grau ímpar, sabemos que uma de suas raízes é 1. Assim, dividindo por $x - 1$, recaímos numa equação de $1^{\underline{a}}$ *espécie e grau par*.

b) Dada uma equação recíproca de $2^{\underline{a}}$ espécie e grau par, sabemos que uma das raízes é 1. Assim, dividindo por $x - 1$, recaímos numa equação de $1^{\underline{a}}$ espécie e grau ímpar. Nesta uma das raízes é -1 e, dividindo por $x + 1$, recaímos numa equação de $1^{\underline{a}}$ *espécie e grau par*.

c) Dada uma equação recíproca de $1^{\underline{a}}$ espécie e grau ímpar, sabemos que uma das raízes é -1. Daí, dividindo por $x + 1$, recaímos numa equação de $1^{\underline{a}}$ *espécie e grau par*.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação teve por objetivo o resgate de conteúdos pouco ou nunca considerados nos últimos tempos no ensino médio no Brasil. Iniciamos com uma apresentação mais ou menos autossuficiente introduzindo os conceitos básicos necessários ao estudos dos polinômios, tais como o grau de um polinômio, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios. Foram discutidas ainda algumas ferramentas necessárias como a divisão por polinômios do primeiro grau, e mais precisamente algoritmos como o de Briot-Ruffini. Finalmente fizemos uma apresentação das transformações algébricas mais simples desejando que o assunto possa ser de utilidade para quem deseja se aprofundar no estudo da álgebra.

Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson and Dolce, Osvaldo. *Algebra III*. Editora Moderna, São Paulo, 1973.

[2] Iezzi, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol 6. Editora Atual. São Paulo, 2010.

[3] Iezzi, Gelson et ali. *Matemática*. 3ª Série. Editora Atual. São Paulo,1993.

[4] Jacy Monteiro, L. H. *Elementos de álgebra*. Livros técnicos e científicos Editora S. A. Rio de4 Janeiro, 1978.