



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Estabilidade Estrutural e Estatística das Transformações  
Expansoras**

Gabriel Pinho Gomes

São Luís - MA

2023

# Estabilidade Estrutural e Estatística das Transformações Expansoras

Gabriel Pinho Gomes

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão em 10 de maio de 2023.

**Orientador: Prof. Dr. Vanessa R. Ramos.**

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Pinho Gomes, Gabriel.

Estabilidade Estrutural e Estatística das  
Transformações Expansoras / Gabriel Pinho Gomes. - 2023.  
59 f.

Orientador(a): Vanessa R. Ramos.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São  
Luís, 2023.

1. Estabilidade Estatística. 2. Estabilidade  
Estrutural. 3. Transformações Expansoras. I. R. Ramos,  
Vanessa. II. Título.

# Estabilidade Estrutural e Estatística das Transformações Expansoras

Gabriel Pinho Gomes

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão em 10 de maio de 2023.

**Orientador: Prof. Dr. Vanessa R. Ramos.**

## Banca Examinadora:

---

**Prof. Dr. Vanessa Ribeiro Ramos**  
Universidade Federal do Maranhão

---

**Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva**  
Universidade Federal do Maranhão

---

**Prof. Dr. Rafael Alvarez Bilbao**  
Universidad Pedagógica y Tecnológica da  
Colombia - Colômbia

São Luís - MA

2023

*A Deus e aqueles que  
nunca desistiram de mim.*

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois sempre esteve comigo nos momentos mais difíceis, me dando forças para não desistir, concedendo capacidade e inteligência para concluir mais uma etapa na minha vida.

A minha mãe Ariene Martins Pinho e ao meu pai Carlos Jorge de Moraes Gomes, que confiaram em mim, e acreditaram que eu conseguiria, demonstrando amor, paciência e confiança, cada um do seu jeito, mas sempre presentes na minha vida, especialmente a minha mãe, que esteve ao meu lado me dando forças para continuar lutando pelo o que eu acreditava mesmo quando a escolha mais lógica seria desistir. Ao meu irmão Ytallo Ramon Mendes que sempre me apoiou e sempre me incentivou a buscar meus sonhos e ser uma pessoa melhor. A minha vó Terezinha de Jesus Martins de Deus Pinho, que hoje não se faz mais presente conosco, mas que sempre estará em nossos corações, por mostrar que a vida é um sopro e cada segundo é importante.

A minha noiva, companheira, melhor amiga e amor da minha vida, Aline Santos, por estar me apoiando em todas as minhas decisões, me incentivando, me amando, demonstrando carinho e acreditando em mim, mesmo nos momentos que nem eu acreditava.

Aos meus vizinhos que se tornaram família Cleziane Barros, Silvio Sousa, Maria Rodrigues, Emanuella Rodrigues e Maria Santana que sempre estiveram presente na minha vida, direta ou indiretamente, dando todo apoio e suporte.

Às minhas tias Arineuza Martins, Nelma Gomes, Hemel Gomes e Nazaré Melo por se fazerem presente no cumprimento dessa etapa. Às minha primas e amores da minha vida Hillery Gomes, Hellen Gomes, Rafaela Silva e Adrielle Gomes pelo total apoio e colaboração.

Quero agradecer a todos os meus amigos especialmente a Arthur Figueiredo, Iago Moroni, Rodolfo Salvo, Raony Serrão, Ananda Figueiredo, Kizze Viegas, Fran Brito, Denilson Junior, Adriana Melo por estarem comigo e me fazer rir em

momentos difíceis.

Aos meus amigos e companheiros de mestrado Ranney Ribeiro, Adriano Ribeiro que superaram as dificuldades junto comigo, por cada risada e piada contada durante esses anos.

A minha professora e orientadora Vanessa Ribeiro Ramos pela paciência, aprendizado, calma e a amizade que nunca faltaram durante esta etapa. Ao professor Ermeson Araujo pela exigência e paciência visando sempre buscar o meu melhor.

*"Matemática não é apenas números e  
sim envolve letras e toda capacidade  
que o humano conseguir expressar."*

(François Viète)

# Resumo

Neste trabalho, dissertaremos sobre a estabilidade estrutural e estatística das transformações expansoras: como aplicação do Lema de Sombreamento provaremos que toda aplicação expansora de classe  $C^1$  é estruturalmente estável, isto é, que toda dinâmica suficientemente próxima é topologicamente conjugada a ela. Em seguida, provaremos a existência e unicidade de uma medida invariante e absolutamente contínua a medida de Lebesgue. Por fim, mostraremos que a transformação expansora é estatisticamente estável, ou seja, a única medida ergódica absolutamente contínua a Lebesgue varia continuamente com a transformação.

**Palavras-Chave:** Transformações Expansoras; Estabilidade Estrutural; Estabilidade Estatística.

# Abstract

In this work, we will discuss about the structural stability and the statistical stability of expanding maps. As an application of the Shadowing Lemma, we will prove that every  $C^1$  expanding map is structurally stable, which means that all dynamics sufficiently close are topologically conjugated to it. Next, we will prove the existence and uniqueness of an invariant measure, absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. Finally, we will prove that the expanding map is statistically stable, that is, the unique ergodic measure absolutely continuous to Lebesgue varies continuously.

**Keywords:** Expanding Maps; Structural Stability; Statistical Stability.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Expansão decimal. . . . .	25
Figura 2 – Gráfico de $F$ . . . . .	29
Figura 3 – Comportamento da dinâmica $F$ . . . . .	30
Figura 4 – A dinâmica de um difeomorfismo Morse-Smale. . . . .	32
Figura 5 – Diagrama Comutativo . . . . .	33
Figura 6 – Trajetória de um ponto $x \in (a, b)$ . . . . .	35
Figura 7 – Transformação Expansora . . . . .	40
Figura 8 – Gráfico de $f(x) = 2x \pmod{1}$ . . . . .	41
Figura 9 – Ramo Inverso de $f$ em $p$ . . . . .	42

# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
2	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	17
2.1	<b>O círculo.</b> . . . . .	17
2.2	<b>Distância entre aplicações diferenciáveis.</b> . . . . .	19
2.3	<b>Teoria Ergódica.</b> . . . . .	20
3	<b>ESTABILIDADE ESTRUTURAL DOS DIFEOMORFISMOS MORSE-SMALE</b> . . . . .	27
4	<b>ESTABILIDADE ESTRUTURAL DAS TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS.</b> . . . . .	39
5	<b>ESTABILIDADE ESTATÍSTICA DAS TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS</b> . . . . .	48
5.1	<b>Existência de Medida Absolutamente Contínua</b> . . . . .	48
5.2	<b>Unicidade da Medida</b> . . . . .	52
5.3	<b>Estabilidade Estatística</b> . . . . .	56
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	59

# 1 Introdução

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos tem como principal objetivo descrever modelos que envolvem no tempo segundo uma regra matemática que relaciona o seu estado presente aos estados passado e futuro. Um problema central nessa área é compreender o comportamento das órbitas dos sistemas após pequenas perturbações.

O conceito de estabilidade estrutural, introduzida por Andronov e Pontragin em [3], afirma que toda estrutura topológica permanece inalterada sob pequenas perturbações. Por outro lado, o conceito de estabilidade estatística, introduzida por Alves e Viana em [2], estabelece a persistência das propriedades estatísticas em termos da continuidade da medida invariante absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue.

Na primeira parte deste trabalho, buscamos compreender o significado da estabilidade estrutural em sistemas dinâmicos, tendo como motivação inicial uma classe específica de difeomorfismos do círculo conhecida como Morse-Smale. Nesse contexto, apresentamos o seguinte teorema:

**Teorema A.** *Todo difeomorfismo do círculo  $f \in \text{Diff}^1(S^1)$  do tipo Morse-Smale é  $C^1$  estruturalmente estável.*

Além de provar esse importante teorema de estabilidade, também descrevemos o comportamento dinâmico característico dessa classe, no qual observamos uma quantidade finita de pontos periódicos que se alternam entre atuarem como repulsores ou atratores. Essa análise nos permite compreender em detalhes as propriedades e as implicações da estabilidade estrutural em sistemas dinâmicos do tipo Morse-Smale.

Com o objetivo de entender o comportamento de transformações que apresentam uma dinâmica mais rica tanto do ponto de vista topológico quanto do

ponto de vista ergódico, dedicamos a maior parte da dissertação ao estudo de transformações expansoras definida em uma variedade compacta qualquer. O estudo desses sistemas é útil para compreender outros sistemas mais complexos, como por exemplo, os difeomorfismos uniformemente hiperbólicos. Além de apresentar a definição e exemplos, provamos que a dinâmica expansora é estável por pequenas perturbações.

**Teorema B.** *Toda aplicação expansora  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  definida em uma variedade compacta e conexa é  $C^1$  estruturalmente estável.*

Observamos que o teorema de estabilidade estrutural acima é verdadeiro na topologia  $C^0$ . Optamos por apresentar aqui na dissertação, a versão onde a aplicação é de classe  $C^1$  porque em todos os outros teoremas utilizaremos essa mesma hipótese.

No contexto do Teorema B, provaremos que vale o Lema de Sombreamento, o qual afirma que toda pseudo-órbita é acompanhada por uma única órbita da transformação. Assim, a estabilidade estrutural das transformações expansoras na topologia  $C^1$  decorre do fato de que perturbações sutis na dinâmica geram trajetórias denominadas pseudo-órbitas. Essas pseudo-órbitas estão intimamente relacionadas às órbitas originais por meio de um homeomorfismo, que estabelece uma correspondência contínua entre as duas dinâmicas. Essa associação entre órbita e pseudo-órbita é crucial para compreender como as pequenas perturbações afetam o comportamento global do sistema dinâmico.

A fim de estudar as propriedades ergódicas das transformações expansoras provaremos a existência e unicidade de uma medida invariante, ergódica e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Entenderemos também o comportamento dessa medida após pequenas perturbações. Nessa direção iniciaremos com o seguinte resultado.

**Teorema C.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação expansora definida em uma variedade compacta conexa  $M$ . Suponha que a função jacobiana  $x \mapsto \det Df(x)$  é Hölder. Então existe uma única probabilidade invariante  $\mu$  absolutamente contínua*

em relação à medida de Lebesgue  $m$ . Além disso,  $\mu$  é ergódica, o seu suporte coincide com  $M$  e a sua bacia de atração  $B(\mu)$  tem medida de Lebesgue total na variedade.

É importante ressaltar que esse teorema é falso se omitirmos a hipótese do Jacobiano Hölder, como podemos ver em Quas [10].

A idéia da prova do Teorema C é utilizar o Lema de Distorção para construir uma medida invariante absolutamente contínua. Considerando a restrição normalizada dessa medida a um conjunto invariante com medida de Lebesgue positiva provaremos então a existência da medida ergódica.

Para a unicidade verificamos que a dinâmica é topologicamente exata e portanto, qualquer conjunto invariante não-trivial tem medida de Lebesgue total. Daí, sendo a bacia de atração da medida ergódica construída anteriormente um conjunto invariante seguirá que tem medida de Lebesgue total e conseqüentemente não poderá existir outra medida com essa propriedade.

O Teorema C acima nos permite definir uma aplicação  $\phi$  no espaço das transformações expansoras com jacobiano Hölder que associa a cada transformação a sua única medida ergódica absolutamente contínua. Denotando então por  $\mathcal{F}$  a família de transformações expansoras com jacobiano uniformemente limitado provaremos que em  $\mathcal{F}$  a aplicação  $\phi$  é contínua na topologia fraca\*. Esse é o significado do próximo resultado.

**Teorema D.** *A família  $\mathcal{F}$  é estatisticamente estável.*

A prova do Teorema D será consequência da densidade (derivada de Radon-Nikodym) em relação a Lebesgue de cada medida ergódica ser uniformemente limitada a família  $\mathcal{F}$ .

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 1, apresentaremos algumas definições básicas e resultados clássicos que serão utilizados ao longo do texto. No Capítulo 2 estudaremos a dinâmica dos Morse-Smale. O teorema de

estabilidade estrutural é provado no Capítulo 3. Por fim, dedicaremos o Capítulo 4 para a prova dos Teoremas C e D, concluindo assim a estabilidade estatística das transformações expansoras.

## 2 Preliminares

Para garantir a compreensão adequada do conteúdo deste trabalho, neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos que serão fundamentais para o desenvolvimento do texto.

### 2.1 O círculo.

Considere o círculo  $S^1$  como o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ao longo do texto, vamos considerar o círculo  $S^1$  como o intervalo fechado  $I = [0, 1]$ , onde os pontos 0 e 1 estão identificados. Isto é, definindo no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  a relação de equivalência módulo os inteiros (também denotada de *mod*1):

$$x \equiv y \text{ se, e somente se, } x - y \in \mathbb{Z}$$

temos que o intervalo  $I = [0, 1]$  possui um único representante de cada classe de equivalência pois identificamos 0 com 1. Como  $S^1$  pode ser parametrizado (bijetivamente) por  $I$  podemos então identificar  $S^1$  com o quociente

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Dito isso, definimos a distância no círculo da seguinte forma: dados  $x, y \in S^1$ , a distância entre eles é dada por

$$d_{S^1}(x, y) \equiv \min\{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\}.$$

Uma classe de exemplos muito interessante de dinâmicas no círculo são as rotações. Vamos descrevê-las no que se segue.

Dado  $\alpha \in [0, 1]$ , uma rotação  $R_\alpha$  de  $S^1$  é a aplicação  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Primeiramente observe que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se compormos  $R_\alpha$  uma quantidade  $n$  de vezes obtemos

$$R_\alpha^n(x) = x + n \cdot \alpha \pmod{1} = R_{n \cdot \alpha}(x).$$

Daí, se  $R_\alpha^n(x) = x$  temos que ter  $n \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$ . Logo, uma rotação de ângulo  $\alpha$  tem pontos periódicos ( $R_\alpha^n(x) = x$ ) se e somente se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

O caso  $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  é mais complexo. Vamos mostrar que para todo  $x \in S^1$  sua órbita  $O^+(x) := \{R_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  é densa em  $S^1$ .

Suponha por contradição que existe  $x \in S^1$  tal que  $O^+(x)$  não é denso em  $S^1$ . Nesse caso, o conjunto  $A \equiv S^1 \setminus \overline{O^+(x)}$  é um aberto não-vazio do círculo. Observando que  $\overline{O^+(x)}$  é invariante sob  $R_\alpha$ , isto é,  $R_\alpha(\overline{O^+(x)}) = \overline{O^+(x)}$ , o mesmo vale para  $A$  pois é o seu complementar.

Seja  $I$  uma componente conexa de  $A$ , ou seja, um intervalo aberto maximal. Afirmamos que

$$R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, se a afirmação fosse falsa, teríamos duas possibilidades: a primeira é existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $R_\alpha^N(I) = I$ . Nesse caso, escrevendo  $I = (a, b)$ , temos:

$$R_\alpha^N(I) = (a + N \cdot \alpha \pmod{1}, b + N \cdot \alpha \pmod{1}) = (a, b).$$

O que implicaria em  $a = a + N \cdot \alpha \pmod{1}$  e, portanto,  $a$  seria um ponto periódico de  $R_\alpha$ , contradizendo a hipótese. A segunda possibilidade é existir um  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$R_\alpha^N(I) \neq I \text{ e } R_\alpha^N(I) \cap I \neq \emptyset.$$

Nesse caso, o conjunto  $C \equiv R_\alpha^N(I) \cup I$  é a união de dois intervalos contidos em  $A$ , e portanto é ele próprio um intervalo contido em  $A$ . No entanto,  $I$  é um subconjunto próprio de  $C$ , o que implica que  $C$  está contido em uma componente conexa de  $A$  e contém sua componente conexa  $I$ . Isso também leva a uma contradição.

Desse modo, a afirmação é verdadeira, temos que ter  $R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, segue que  $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) = \emptyset$  para todos os naturais onde  $n \neq m$ , pois caso contrário, teríamos  $R_\alpha^{m-n}(I) \cap I = \emptyset$ .

Entretanto, iterações de  $I$  pela rotação não alteram o seu comprimento, logo se as iterações  $R_\alpha^n(I)$  de  $I$  são todas mutuamente disjuntas, então chegamos a uma contradição, pois o comprimento total da união delas  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_\alpha^n(I)$  seria infinito. Assim provamos que a órbita de todo ponto é densa no círculo.

## 2.2 Distância entre aplicações diferenciáveis.

Seja  $(M, d)$  uma variedade diferenciável compacta munida da distância  $d$ . Vamos assumir, sem perda de generalidade, que  $M \subset \mathbb{R}^s$  para  $s \in \mathbb{N}$  grande. Denote por  $C^1(M)$  o espaço das aplicações diferenciáveis  $f : M \rightarrow M$  definidas em  $M$  que são de classe  $C^1$ , isto é, possuem derivada contínua.

Definimos em  $C^1(M)$ , a distância entre duas aplicações  $f : M \rightarrow M$  e  $g : M \rightarrow M$  da seguinte forma

$$d_1(f, g) \equiv \max \left\{ \sup_{x \in M} \{d_M(f(x), g(x)), \|Df(x) - Dg(x)\|_{\mathbb{R}^s}\} \right\}.$$

Desse modo, dado  $\varepsilon > 0$ , duas aplicações  $f : M \rightarrow M$  e  $g : M \rightarrow M$  estão  $\varepsilon$  próximas na distância  $C^1$  se, e somente se,

$$d_M(f(x), g(x)) < \varepsilon \text{ e } \|Df(x) - Dg(x)\| < \varepsilon.$$

Em palavras, duas aplicações estão próximas se as imagens e as derivadas de  $f$  e  $g$  estão próximas em todos os pontos. Nesse contexto, fixada  $f : M \rightarrow M$ , dizemos que  $g : M \rightarrow M$  é uma perturbação de  $f$ , se  $d_1(f, g) < \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$  pequeno.

Para cada  $\varepsilon > 0$  defina

$$\mathcal{U}(f, \varepsilon) \equiv \{g \in C^1(M) ; d_1(f, g) < \varepsilon\}.$$

Por definição, a família  $\{\mathcal{U}(f, \varepsilon)\}$  é uma base de vizinhanças para cada  $f \in C^1(M)$ . Essa base de vizinhanças define a topologia  $C^1$  no espaço  $C^1(M)$  das aplicações

diferenciáveis de classe  $C^1$  definidas em  $M$ . O leitor pode consultar mais detalhes no livro do Hirsch [6].

## 2.3 Teoria Ergódica.

Nessa seção abordaremos alguns conceitos básicos da teoria ergódica que serão utilizados ao longo do texto. Assumiremos que o leitor tenha certa familiaridade com teoria da medida. Os resultados dessa seção podem ser encontrados no livro do Ricardo Mañe [7] e também em Oliveira e Viana [8].

Considere  $M$  um espaço métrico. Denotaremos por  $\mathcal{M}_1(M)$  o espaço das medidas borelianas de probabilidade  $\mu$  definidas em  $M$ . Definiremos agora em  $\mathcal{M}_1(M)$  a topologia fraca\*.

**Definição 2.1.** *Dados uma probabilidade  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$  de  $M$ , um conjunto finito  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  de funções contínuas limitadas  $\phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  e um número real positivo  $\epsilon > 0$ , definimos*

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(M) : \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| \leq \epsilon \text{ para todo } i \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Como a interseção de quaisquer dois conjuntos desta forma contém algum conjunto desta forma, segue que a família  $\{V(\mu, \Phi, \epsilon) : \Phi, \epsilon\}$  pode ser tomada como base de vizinhanças de cada  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ . Desse modo, definimos a topologia fraca\* em  $\mathcal{M}_1(M)$  por essa bases de vizinhanças. Isso significa que os abertos de  $\mathcal{M}_1(M)$  são conjuntos  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(M)$  tais que para todo elemento  $\mu \in \mathcal{A}$  existe algum  $V(\mu, \Phi, \epsilon)$  contido em  $\mathcal{A}$ . Uma caracterização da convergência na topologia fraca\* é dada no seguinte lema.

**Lema 2.1.** *Uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$  na topologia fraca\* se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu_n \longrightarrow \int \phi d\mu \text{ para toda função contínua limitada } \phi : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Dada qualquer função contínua limitada  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , considere o conjunto finito (um elemento)  $\Phi = \{\phi\}$ . Como  $(\mu_n)_n \rightarrow \mu$  na topologia fraca\*, temos então que para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um índice  $\bar{n}$  tal que  $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$  para todo  $n \geq \bar{n}$ . Isso implica que

$$\left| \int \phi d\mu_n - \int \phi d\mu \right| \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq \bar{n}.$$

E portanto a sequência  $(\int \phi d\mu_n)_n$  converge para  $\int \phi d\mu$ .

Reciprocamente, suponha que a sequência  $(\int \phi d\mu_n)_n$  converge para  $\int \phi d\mu$  para toda função contínua limitada  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Sejam quaisquer  $\epsilon > 0$  e um conjunto finito de funções contínuas e limitadas  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  arbitrários. Por hipótese, para cada  $\phi_i$ , existe um índice  $\bar{n}_i$  tal que

$$\left| \int \phi_i d\mu_n - \int \phi_i d\mu \right| \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq \bar{n}_i.$$

Tomando então  $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_N\}$ , segue que  $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$  para todo  $n \geq \bar{n}$ . O que prova que a sequência  $(\mu_n)$  converge para  $\mu$  na topologia fraca\*.  $\square$

Os próximos dois lemas são bastante técnicos; Optamos por apresentar a prova aqui porque eles serão utilizados na demonstração do nosso Teorema C.

**Lema 2.2.** *Considere  $\nu$  uma probabilidade em um espaço métrico compacto  $M$  e seja  $(\mu_i)_{i \geq 1}$  uma sequência de probabilidades em  $M$  convergindo para  $\nu$  na topologia fraca\*. Se para todo  $i \geq 1$  tem-se  $\mu_i \leq \nu$ , isto é, para qualquer conjunto mensurável  $A \subset M$  vale  $\mu_i(A) \leq \nu(A)$  então  $\mu \leq \nu$ .*

*Demonstração.* Seja  $A \subset M$  um conjunto mensurável arbitrário. Da regularidade das medidas  $\mu$  e  $\nu$ , para cada  $\epsilon > 0$ , podemos considerar um subconjunto compacto  $K_\epsilon \subset A$  tal que  $\mu(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  e também  $\nu(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ . Tome agora  $A_\epsilon$  vizinhança aberta de  $K_\epsilon$ , por exemplo,  $A_\epsilon = \{z : d(z, K_\epsilon) < r\}$ , para  $r > 0$  de forma a garantir

$$\mu(A_\epsilon \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ e } \nu(A_\epsilon \setminus K_\epsilon) < \epsilon.$$

Observamos que o conjunto de valores possíveis para  $r$ , nos quais a fronteira de  $A_\epsilon$  não tem medida zero em relação a  $\mu$  tem que ser finito ou enumerável, caso contrário, a medida dessa fronteira não seria finita. Portanto, podemos assumir, que a fronteira de  $A_\epsilon$  tem medida zero modificando se necessário o valor de  $r$ .

Como  $\mu = \lim_i \mu_i$  e por hipótese  $\mu_i \leq \nu$  então segue que

$$\mu(A_\epsilon) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu_i(A_\epsilon) \leq \nu(A_\epsilon)$$

pois  $A_\epsilon$  é aberto com medida  $\mu$  nula da fronteira. Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluímos que

$$\mu(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(A_\epsilon) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu(A_\epsilon) = \nu(A).$$

O que nos dá  $\mu(A) \leq \nu(A)$  para qualquer mensurável  $A \subset M$ .  $\square$

**Lema 2.3.** *Considere  $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de partições por abertos de um espaço métrico compacto  $M$  com diâmetro convergindo para zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Sejam  $\nu$  uma probabilidade em  $M$  e  $B \subset M$  qualquer conjunto mensurável com  $\nu(B) > 0$ . Então existem  $V_n \in \mathcal{P}_n$  para  $n \geq 1$ , tais que*

$$\nu(V_n) > 0 \quad e \quad \frac{\nu(B \cap V_n)}{\nu(V_n)} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Da regularidade da medida  $\mu$ , para qualquer  $0 < \epsilon < \nu(B)$ , podemos escolher um subconjunto compacto  $K_\epsilon \subset B$  tal que  $\nu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ . Denote por  $K_{\epsilon,n}$  a união de todos os elementos de  $\mathcal{P}_n$  que intersectam  $K_\epsilon$ . Observe que  $\nu(K_{\epsilon,n} \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  para  $n$  suficientemente grande pois o diâmetro das partições convergem para zero e portanto podemos tomar os  $K_{\epsilon,n}$  tão próximos do compacto  $K_\epsilon$  quanto se queira. A prova do lema é por contradição, suponha que para todo  $V_n \in \mathcal{P}_n$  que intersecta  $K_\epsilon$  tenhamos:

$$\nu(K_\epsilon \cap V_n) \leq \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(V_n).$$

Isso implica que

$$\nu(K_\epsilon) \leq \sum_{V_n} \nu(K_\epsilon \cap V_n) \leq \sum_{V_n} \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(V_n) = \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(K_{\epsilon,n}) \quad (2.1)$$

Como

$$\nu(K_{\epsilon,n}) = \nu(K_\epsilon) + \nu(K_{\epsilon,n} \setminus K_\epsilon) < \nu(K_\epsilon) + \epsilon$$

e também

$$\nu(K_\epsilon) \leq \nu(B) = \nu(K_\epsilon) + \nu(B \setminus K_\epsilon) < \nu(K_\epsilon) + \epsilon.$$

Utilizando a desigualdade (2.1) acima, obtemos

$$\nu(K_\epsilon) \leq \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(K_{\epsilon,n}) < \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} (\nu(K_\epsilon) + \epsilon) \leq \nu(B) - \epsilon < \nu(K_\epsilon).$$

A contradição acima mostra que deve existir algum  $V_n \in \mathcal{P}_n$  tal que

$$\frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(V_n) < \nu(K_\epsilon \cap V_n) \leq \nu(B \cap V_n) \leq \nu(V_n)$$

o que implica  $\nu(V_n) > 0$  e também  $\frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \leq \frac{\nu(B \cap V_n)}{\nu(V_n)} \leq 1$ . Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos a conclusão do lema.  $\square$

A partir daqui será preciso o sistema dinâmico.

**Definição 2.2.** *Sejam  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável. Dizemos que uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$  é invariante por  $f$ , ou  $f$ -invariante se*

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

Uma forma equivalente de definir uma medida  $f$ -invariante é dizer que

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu \text{ para toda função contínua } \phi : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Denotaremos por  $\mathcal{M}_f(M)$  o espaço das medidas invariantes por  $f$  munido da topologia fraca\*.

Quando o espaço métrico  $M$  é compacto e a transformação  $f : M \rightarrow M$  é contínua, pode-se provar que o espaço  $\mathcal{M}_1(M)$  das probabilidades de  $M$  é compacto na topologia fraca\* e portanto o espaço  $\mathcal{M}_f(M)$  das medidas  $f$ -invariantes é não-vazio, isto é, sempre existem medidas  $f$ -invariantes. Esse é o resultado do próximo teorema cuja prova pode ser vista em Einsiedler e Wards [4].

**Teorema 2.1.** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  uma transformação contínua definida em um espaço métrico compacto  $M$  e  $\mu$  uma probabilidade qualquer em  $M$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina  $\mu_n \in \mathcal{M}_1(M)$  a probabilidade*

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \mu$$

onde  $f_*^j \mu$  é a medida dada por  $f_*^j \mu(A) = \mu(f^{-j}(A))$ , para todo mensurável  $A \subset M$ . Então qualquer ponto de acumulação da sequência  $(\mu_n)$  é uma medida  $f$ -invariante.

A seguir apresentamos dois exemplos de medidas invariantes.

**Exemplo 2.1.** *Para  $\alpha \in (0, 1)$ , considere a rotação  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Geometricamente, as rotações giram o círculo no sentido horário e não modificam o comprimento dos intervalos. Denotemos por  $\lambda$ , a medida de comprimento definida em  $S^1$ . Dado  $J \subset S^1$  qualquer intervalo, aplicando o teorema de mudança de variáveis vale que*

$$\lambda(R_\alpha^{-1}(J)) = \int_J |(R_\alpha^{-1})'(x)| d\lambda(x) = \int_J 1 d\lambda(x) = \lambda(J)$$

pois  $(R_\alpha)'(x) = 1$  para todo  $x \in S^1$ . Logo,  $R_\alpha$  não altera a medida  $\lambda$  dos intervalos do círculo. Como esses conjuntos geram a  $\sigma$ -álgebra de Borel do círculo concluímos que  $\lambda$  é uma medida invariante por rotações.

**Exemplo 2.2.** *Considere a expansão decimal de um número  $x \in [0, 1]$ . Podemos caracterizar essa transformação da seguinte maneira:*

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = 10x - [10x]$$

onde  $[10x]$  representa o maior inteiro menor ou igual a  $10x$ . Ou seja,  $f$  associa a cada  $x \in [0, 1]$  a parte fracionária de  $10x$ . Em  $[0, 1]$  vamos considerar  $\mu$  a medida de Lebesgue. Provaremos que  $\mu$  é  $f$ -invariante.

Dado  $I = (a, b) \subset [0, 1]$  um intervalo arbitrário, observe que a sua pré-imagem  $f^{-1}(I)$  consiste em dez intervalos disjuntos  $J_1, \dots, J_{10}$  (veja a Figura 1)

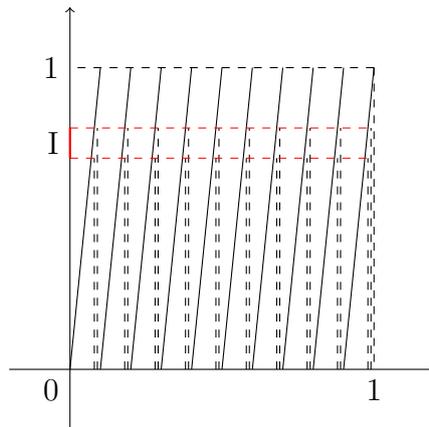


Figura 1 – Expansão decimal.

cujo comprimento é  $1/10$  da medida de  $I$ . E portanto,

$$\mu(f^{-1}(I)) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{10} J_j\right) = \sum_{j=1}^{10} \mu(J_j) = \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{10} |b - a| = |b - a| = \mu(I).$$

Isto mostra que  $f$  deixa invariante a medida  $\mu$  dos intervalos. Como esses conjuntos geram a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $[0, 1]$ , concluímos que  $\mu$  é  $f$ -invariante.

Note que, nos exemplos acima apenas verificamos que a medida dos intervalos eram invariantes pelas aplicações, isso porque utilizamos um teorema que afirma: se uma transformação deixa invariante a medida dos conjuntos mensuráveis que geram a sigma álgebra de Borel do espaço então a medida é invariante por essa transformação. Para a prova desse resultado, consulte [7].

No espaço  $\mathcal{M}_f(M)$  das medidas invariantes destacamos um subconjunto importante de medidas, denominadas ergódicas, que atribuem medida zero ou total aos conjuntos invariantes pela dinâmica.

**Definição 2.3.** Uma medida invariante  $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$  é ergódica se para todo subconjunto  $A \subset M$  invariante ( $f^{-1}(A) = A$ ) tem-se  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A) = 1$ .

Uma forma equivalente de definir medida ergódica é através das médias de funções integráveis ao longo de órbitas  $\{f^j(x)\}$ . Nesse contexto, dizemos que

$\mu \in \mathcal{M}_f(M)$  é ergódica se para toda função integrável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

para  $\mu$  quase todo ponto  $x \in M$ .

Em palavras, sob o ponto de vista de uma medida ergódica, o limite acima existe e é constante em quase todo ponto para toda função integrável. Esse resultado, não-trivial, é devido a Birkhoff e pode ser encontrado em [7].

Para finalizar esse capítulo, destacamos que a medida de Lebesgue dos exemplos (2.1) e (2.2) apresentados aqui é ergódica. A prova desse resultado exige algumas definições e propriedades que fogem do objetivo da dissertação e que deixaria essa seção demasiadamente longa. O leitor pode consultar [7] ou [8] para uma demonstração.

# 3 Estabilidade Estrutural dos Difeomorfismos Morse-Smale

Este capítulo será dedicado ao estudo da dinâmica de uma classe de difeomorfismos do círculo denominada Morse-Smale. Nosso principal objetivo é provar que essa classe é estável por pequenas perturbações. As provas dos resultados apresentados aqui podem ser encontrados no livro [1] escrito por Abdenur e França.

O conceito chave que permite demonstrar a estabilidade dos difeomorfismos que estudaremos neste capítulo é a hiperbolicidade dos pontos periódicos. Iniciaremos então com esta definição.

**Definição 3.1.** *Seja  $x$  um ponto fixo de um difeomorfismo  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , temos que  $x$  é Hiperbólico se  $f'(x) \neq 1$ . Quando  $f'(x) < 1$  chamaremos este ponto fixo de atrator, e se  $f'(x) > 1$  então chamaremos este ponto fixo de repulsor.*

De modo geral, dizemos que  $x$  é ponto periódico hiperbólico com período  $n$  se  $x$  é ponto fixo hiperbólico de  $f^n$ . Este ponto  $x$  será atrator se  $(f^n)'(x) < 1$  ou repulsor periódico se  $(f^n)'(x) > 1$ .

Dizemos que uma certa propriedade  $\mathcal{P}$  de um sistema dinâmico  $f$  é *robusta* quando ela continua a existir após pequenas perturbações do sistema, isto é, se existe um aberto em torno de  $f$ , na topologia considerada, em que a propriedade  $\mathcal{P}$  é válida para todo sistema dinâmico nesse aberto. A próxima proposição mostra a robustez dos pontos hiperbólicos, e em particular prova que eles são isolados, isto é, em sua vizinhança não há outro ponto fixo hiperbólico.

**Proposição 3.1.** *Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  e  $x$  seu ponto fixo hiperbólico. Então existe  $\epsilon > 0$  e uma vizinhança  $U \subset S^1$  de  $x$  tais que para todo  $g : S^1 \rightarrow S^1$  difeomorfismo  $C^1 - \epsilon$  próximo de  $f$  existe um único*

ponto fixo  $x_g \in U$  que também é hiperbólico. Além disso  $x_g$  será atrator ou repulsor dependendo se  $x$  for atrator ou repulsor.

*Demonstração.* Vamos supor que  $f'(x) > 1$  e o outro caso é análogo. Pela continuidade de  $f'$ , pois  $f$  é de classe  $C^1$ , existe um intervalo aberto  $U = (a, b) \subset S^1$  contendo  $x$ , tal que:

$$(i) f'(x) > 1 \text{ em todo } x \in [a, b]; \quad (ii) f(a) - a < 0; \quad e \quad (iii) f(b) - b > 0.$$

Tome  $\epsilon$  suficientemente pequeno satisfazendo  $\epsilon < \min\{|f(a) - a|, |f(b) - b|\}$  tal que se  $g$  é  $\epsilon$ -próxima de  $f$  na topologia  $C^1$  então  $g'(x) > 1$  para todo  $x \in [a, b]$ . Devido essa escolha ainda vale que

$$g(a) - a = (g(a) - f(a)) + (f(a) - a) < 0$$

$$g(b) - b = (g(b) - f(b)) + (f(b) - b) > 0$$

Essas inequações são obtidas considerando a escolha de  $\epsilon$  suficientemente pequeno e a condição de  $g'(x) > 1$  para todo  $x \in [a, b]$ . Aplicando o Teorema do Valor Intermediário à função  $w(x) \equiv g(x) - x$  segue que existe  $c \in (a, b)$  com  $w(c) = 0$ , ou seja,  $g(c) = c$ .

Afirmamos que este  $c$  é o único ponto fixo de  $g$  em  $(a, b)$ . De fato, se ocorresse  $g(d) = d$  com  $c \neq d \in (a, b)$  então  $g'(k) = 1$  para algum  $k$  entre  $c$  e  $d$ , como consequência do Teorema do Valor Médio.  $\square$

Uma vez definido pontos hiperbólicos, podemos finalmente definir a classe de difeomorfismos do tipo Morse-Smale.

**Definição 3.2.** Um difeomorfismo do círculo  $f \in \text{Diff}^1(S^1)$  é Morse-Smale se:

- (i)  $f$  possui pelo menos um ponto periódico;
- (ii) todo ponto periódico de  $f$  é hiperbólico.

Veamos a seguir um exemplo de difeomorfismo do tipo Morse-Smale. Considere a aplicação  $F : S^1 \rightarrow S^1$  dada por:

$$F(x) = \frac{1}{40\pi} \text{sen}(4\pi \cdot x) + x$$

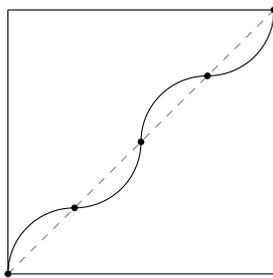


Figura 2 – Gráfico de  $F$

Observe o gráfico de  $F$  na figura acima; A linha tracejada é o gráfico da função identidade  $Id : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $Id(x) = x$ . Note que aplicação  $F$  satisfaz:

- É um difeomorfismo no círculo:  $F'(x) = \frac{1}{10} \cos(4\pi \cdot x) + 1 \neq 0$  para todo  $x \in S^1$  e portanto, pelo Teorema da Função Inversa,  $F$  é invertível com inversa diferenciável.
- Possui exatamente 4 pontos fixos:  $(0), (1/4), (1/2)$  e  $(3/4)$ . De fato, note que se  $F(x) = x$  então  $\frac{1}{40\pi} \text{sen}(4\pi x) + x = x$  nos dá  $\text{sen}(4\pi x) = 0$  e portanto  $4\pi x = k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Como temos que ter  $x \in [0, 1]$  segue que as soluções da equação são  $(0), (1/4), (1/2)$  e  $(3/4)$ .
- Tem derivada diferente de 1 em cada um dos seus pontos fixos: Como  $F'(x) = \frac{1}{10} \cos(4\pi \cdot x) + 1 \neq 0$  temos

$$F'(0) = \frac{11}{10}, \quad F'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{10}, \quad F'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{10} \quad \text{e} \quad F'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{10}.$$

Desse modo, concluímos que  $F$  é um difeomorfismo Morse-Smale. Sua dinâmica é a seguinte: os quatro pontos fixos de  $F$  ficam parados; A derivada maior que 1 nos pontos  $(0)$  e  $(\frac{1}{2})$  implica que  $F$  repele pontos próximos destes dois para longe deles. Já os pontos  $(\frac{1}{4})$  e  $(\frac{3}{4})$ , que possuem derivada menor que 1, atraem pontos próximos

para perto deles. Isto é, nos intervalos  $[0, 1/4]$ ,  $[1/2, 3/4]$  os pontos "caminham" da esquerda para direita, se afastando do extremo esquerdo e se aproximando do extremo direito. Acontece o inverso nos intervalos  $[1/4, 1/2]$ ,  $[3/4, 1]$  onde os pontos caminham da direita para esquerda. O comportamento é representado na Figura 3.

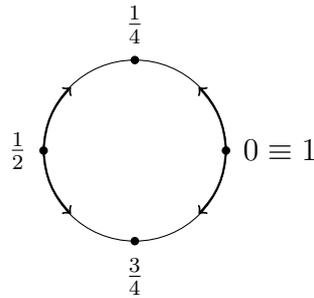


Figura 3 – Comportamento da dinâmica  $F$ .

De maneira geral, vamos agora estudar a dinâmica dos difeomorfismos Morse-Smale. Cabe aqui observar um resultado notável da teoria dos homeomorfismos do círculo, o qual afirma que qualquer que seja o homeomorfismo do círculo, todos os pontos periódicos tem o mesmo período. Esse resultado pode ser encontrado em Brin e Stuck [5]. Dito isto, iremos supor que todos os pontos periódicos do nosso Morse-Smale  $f$  são fixos. No caso de pontos periódicos a análise abaixo pode ser feita considerando no lugar de  $f$  a dinâmica  $f^s$  onde  $s$  é o período dos pontos periódicos de  $f$ .

Sejam  $p_1, \dots, p_k$  pontos fixos hiperbólicos de  $f$  no círculo. Primeiramente, observe que há uma quantidade finita de pontos fixos hiperbólicos pois, como provamos na Proposição 3.1 que esses pontos são isolados, existe vizinhança  $U_j$  de  $p_j$  onde ele é o único fixo hiperbólico. Daí, cobrindo o círculo com tais vizinhanças, sua compacidade implica em uma quantidade finita de pontos fixos hiperbólicos.

Sendo uma quantidade finita vamos ordená-los de maneira crescente:

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k,$$

isto tomando as únicas representações dos pontos em  $[0, 1)$ , e denotando  $p_1 = p_{k+1}$ .

Desse modo se tomarmos dois pontos fixos vizinhos  $p_i$  e  $p_{i+1}$  percebemos que não existe outro ponto fixo entre eles neste intervalo  $I_i = (p_i, p_{i+1})$  e logo temos  $f(x) - x \neq 0$ , para todo  $x \in I_i = (p_i, p_{i+1})$ . Então pela continuidade de  $f$  temos que o sinal de  $f - Id$  é constante, independentemente se for negativo ou positivo.

Vamos mostrar que **cada intervalo**  $I_i = (p_i, p_{i+1})$  **é monótono** para  $f$  no seguinte sentido: se  $f - Id > 0$  em  $I_i = (p_i, p_{i+1})$  então os pontos caminham da esquerda para a direita se afastando de  $p_i$  (ponto repulsor) e se aproximando de  $p_{i+1}$  (ponto atrator). E caso  $f - Id < 0$  acontece então o contrário, ou seja, as órbitas  $\{f^n(x)\}$  caminham da direita para esquerda.

De fato, suponha que em  $I_i = (p_i, p_{i+1})$  temos  $f - Id > 0$ . Então dado qualquer  $x \in I_i$  a sua órbita  $\{f^n(x)\}$  forma uma sequência estritamente crescente, pois  $f - Id > 0$  implica  $x < f(x)$  e isso nos dá  $x < f(x) < \dots < f^{n-1}(x) < f^n(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, sendo  $\{f^n(x)\}$  uma sequência de pontos crescente e limitada temos que ter as seguintes convergências

$$f^{-n}(x) \rightarrow p_i \text{ e } f^n(x) \rightarrow p_{i+1} \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

caso contrário poderíamos exibir  $w \in (p_i, p_{i+1})$  satisfazendo  $f^n(x) \rightarrow w$  e, em particular, pela continuidade da  $f$  temos  $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) \rightarrow w = f(w)$  e portanto  $w \in (p_i, p_{i+1})$  seria ponto fixo pela dinâmica, o que é contradição pois assumimos que  $f(x) > x$  para todo  $x \in (p_i, p_{i+1})$ . O mesmo argumento prova que  $f^{-n}(x) \rightarrow p_i$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Portanto, se  $f - Id > 0$  em  $I_i = (p_i, p_{i+1})$  então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = p_i \text{ (ponto repulsor)} \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p_{i+1} \text{ (ponto atrator)}.$$

para qualquer  $x \in I_i = (p_i, p_{i+1})$ . Caso em  $I_i = (p_i, p_{i+1})$  tenhamos  $f - Id < 0$ , o argumento simétrico prova que para qualquer  $x \in I_i = (p_i, p_{i+1})$  vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p_i \text{ (ponto atrator)} \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = p_{i+1} \text{ (ponto repulsor)}.$$

Dos cálculos anteriores, vemos que se  $p_i$  é um ponto atrator então o próximo ponto será repulsor, isto é, os pontos  $p_i$  se alternam entre atrator e repulsor; Concluimos em particular, que eles estão distribuídos aos pares, ou seja, a quantidade dos pontos  $p_i$  tem que ser par.

Reunindo todas as observações acima, podemos descrever completamente a dinâmica de um difeomorfismo Morse-Smale  $f$  com pontos fixos da seguinte forma:

- (i) Existem finitos pontos fixos hiperbólicos  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ ;
- (ii) Esses pontos  $p_i$  dividem o círculo em uma quantidade  $k$  de intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_k$  onde a dinâmica tem um comportamento monótono: as órbitas se movem da esquerda para direita ou da direita para a esquerda;
- (iii) Se  $p_i$  é um ponto atrator então o próximo ponto  $p_{i+1}$  é repulsor; os pontos atratores e repulsores se alternam ao longo do círculo;
- (iv) O número de pontos  $k$  é par;

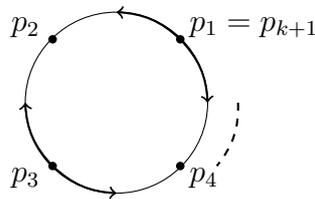


Figura 4 – A dinâmica de um difeomorfismo Morse-Smale.

Agora que entendemos a dinâmica, focaremos na estabilidade estrutural dos difeomorfismos do tipo Morse-Smale. Começemos com a definição de conjugação topológica.

**Definição 3.3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos. Duas aplicações  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .*

Chamamos o homeomorfismo  $h$  de conjugação topológica entre  $f$  e  $g$ . A conjugação faz o diagrama comutar.

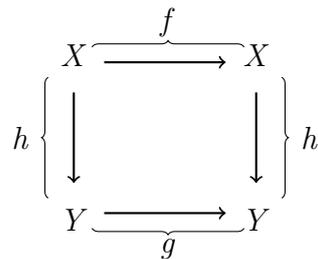


Figura 5 – Diagrama Comutativo

Então podemos perceber que duas aplicações topologicamente conjugadas possuem a mesma dinâmica topológica.

Primeiramente: se  $x$  é ponto fixo de uma aplicação  $f$  que é conjugada a  $g$  por um homeomorfismo  $h$ , então temos que  $h(x) = h \circ f(x) = g \circ h(x)$  e portanto  $h(x)$  é ponto fixo de  $g$ . Logo  $h$  leva o conjunto de pontos fixos  $Fix(f)$  de  $f$  no conjunto de pontos fixos  $Fix(g)$  de  $g$  preservando as propriedades topológicas. Veremos na seguinte proposição que isto vale também para o conjunto dos pontos periódicos.

**Proposição 3.2.** *Se  $f$  é topologicamente conjugado a  $g$  pelo homeomorfismo  $h$  então  $f^n$  é conjugado a  $g^n$  pelo homeomorfismo  $h$ .*

*Demonstração.* Basta observar o seguinte:

$$h \circ f^n \circ h^{-1} = (h \circ f \circ h^{-1}) \circ \dots \circ (h \circ f \circ h^{-1})$$

e como  $h \circ f \circ h^{-1} = g$  temos que  $h \circ f^n \circ h^{-1} = g^n$ .  $\square$

Chegamos finalmente ao ápice do nosso capítulo: provar a estabilidade estrutural dos difeomorfismos Morse-Smale. Já observamos a robustez dos pontos hiperbólicos, e esta robustez acarreta uma estabilidade local, ou seja, a dinâmica em uma vizinhança do ponto permanece inalterada mesmo após pequenas perturbações. Veremos agora um conceito maior que estabilidade local, a seguir veremos o conceito de estabilidade global.

**Definição 3.4.** *Seja  $M$  um variedade compacta. Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  é  $C^1$ - estruturalmente estável se existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_f$  de  $f$  na topologia  $C^1$  tal que toda  $g \in \mathcal{U}_f$  é topologicamente conjugada a  $f$ .*

No próximo objetivo é provar a estabilidade estrutural dos difeomorfismos de Morse-Smale. Nessa direção, precisamos de duas proposições.

Sejam  $[a, b]$  e  $[c, d]$  dois intervalos monótonos crescentes dos difeomorfismos  $f$  e  $g$ , respectivamente. Como vimos anteriormente,  $f|_{[a,b]}$  e  $g|_{[c,d]}$  possuem dinâmicas essencialmente idênticas, ou seja, os extremos ficam parados enquanto os pontos interiores andam no futuro até o extremo direito, e andam para esquerda no passado até o extremo esquerdo. Provaremos na seguinte proposição que essa propriedade implica na conjugação entre as dinâmicas.

**Proposição 3.3.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  e  $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$  difeomorfismos tais que  $f(x) > x$  para  $x \in (a, b)$  e  $g(y) > y$  para  $y \in (c, d)$ . Então  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas.*

*Demonstração.* Vamos tomar  $\alpha \in (a, b)$  e  $\beta \in (c, d)$  arbitrários. Por hipótese temos que  $f(x) > x$  para  $x \in (a, b)$  e então aplicando  $f$   $n$ -vezes temos que  $x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^{n-1}(x) < f^n(x)$ . Isso mostra que  $\{f^n(x)\}$  é crescente com relação a  $n \in \mathbb{Z}$ . Por hipótese temos também  $g(y) > y$  e logo  $\{g^n(y)\}$  é crescente com relação a  $n \in \mathbb{Z}$ . Vamos provar que é possível escrever  $(a, b)$  e  $(c, d)$  como a união de intervalos disjuntos:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)) = (a, b) \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n(\beta), g^{n+1}(\beta)) = (c, d).$$

De fato, sendo a sequência de pontos  $\{f^n(\alpha)\}$  crescente e limitada temos que ter as seguintes convergências

$$f^n(\alpha) \rightarrow b \quad \text{e} \quad f^{-n}(\alpha) \rightarrow a \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

caso contrário poderíamos exibir  $w \in (a, b)$  satisfazendo  $f^n(\alpha) \rightarrow w$  e, em particular,  $f(f^n(\alpha)) = f^{n+1}(\alpha) \rightarrow w = f(w)$  e portanto  $w \in (a, b)$  seria ponto fixo pela

dinâmica, o que é contradição pois assumimos  $f(x) > x$  para todo  $x \in (a, b)$ . O mesmo argumento prova que  $f^{-n}(\alpha) \rightarrow a$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Desse modo, a união dos intervalos cobre todo o  $(a, b)$ . Além disso, os intervalos são disjuntos pois  $\{f^n(\alpha)\}$  é crescente com relação a  $n \in \mathbb{Z}$  e portanto a imagem de cada intervalo é o intervalo adjacente a direita. Analogamente, provamos que  $(c, d)$  é a união dos intervalos disjuntos.

A ordenação nas imagens dos intervalos  $[f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha))$  que vimos acima implica, em particular, que para todo  $x \in (a, b)$  a sua órbita  $\{f^n(x)\}$  passa uma única vez em cada intervalo da união disjunta. Em outras palavras, dado  $x \in (a, b)$  existe um único  $N \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^N(x) \in [\alpha, f(\alpha))$ . O mesmo acontece para  $y \in (c, d)$  em relação ao intervalo  $[\beta, g(\beta))$ . A Figura 6 representa o comportamento dos pontos no intervalo  $(a, b)$ .

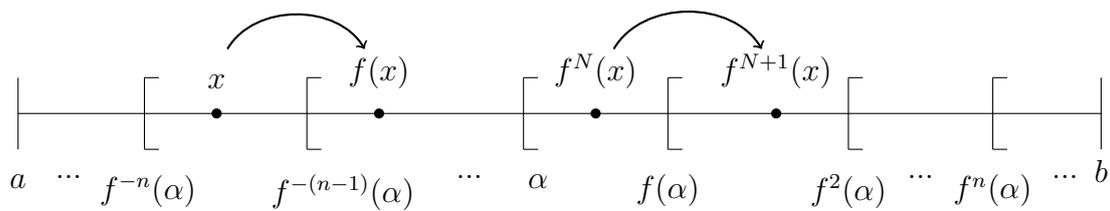


Figura 6 – Trajetória de um ponto  $x \in (a, b)$ .

Seja  $H$  um homeomorfismo entre os intervalos  $[\alpha, f(\alpha))$  e  $[\beta, f(\beta))$ , em que  $H(\alpha) = \beta$ . Podemos considerar por exemplo  $H : [\alpha, f(\alpha)) \rightarrow [\beta, f(\beta))$  dado por

$$H(x) = \frac{g(\beta) - \beta}{f(\alpha) - \alpha} \cdot (x - \alpha) + \beta.$$

Defina a aplicação  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  de forma que  $h(x) = g^{-N} \circ H \circ f^N(x)$ , em que  $N$  é o único inteiro tal que  $f^N(x) \in [\alpha, f(\alpha))$ . Vale ressaltar que  $h(a) = c$  e  $h(b) = d$ , mantendo a correspondência entre os extremos dos intervalos.

Provaremos que  $h$  é um homeomorfismo que conjuga  $f$  e  $g$ . Temos dois passos:  $h$  é um homeomorfismo e  $h$  conjuga  $f$  com  $g$ . Vamos para o primeiro.

Note que  $h$  é contínua em cada intervalo  $[f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha))$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , pois é a composição de funções contínuas. Para verificar que  $h$  é contínua em todo

intervalo  $[a, b]$ , precisamos somente analisar a fronteira de cada intervalo da união disjunta  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)] = (a, b)$  e por isso, tomaremos os limites à esquerda e à direita.

Considere duas sequências  $x_k \rightarrow f^n(\alpha)_+$  e  $y_k \rightarrow f^n(\alpha)_-$ , com  $k \rightarrow +\infty$ . Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} h(x_k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g^n \circ H \circ f^{-n}(x_k) \\ &= g^n \circ H(\alpha) \\ &= g^n(\beta) \\ &= g^{n-1}(g(\beta)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{n-1} \circ H \circ f^{-n+1}(y_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} h(y_k) \end{aligned}$$

O que prova que  $h$  é contínua em cada  $f^n(\alpha)$ .

É fácil ver que a função  $h$  é uma bijeção entre  $[a, b]$  e  $[c, d]$  pois ela possui uma inversa que é dada por  $h^{-1}(y) = f^{-n} \circ H^{-1} \circ g^n(y)$ , onde  $n$  é o único inteiro onde  $g^n(y) \in (c, d)$ ,  $h^{-1}(c) = a$ , e  $h^{-1}(d) = b$ . Da mesma maneira que provamos a continuidade de  $h$  segue que  $h^{-1}$  é contínua e portanto  $h$  é homeomorfismo.

Agora vamos para o segundo passo: mostrar que  $h$  conjuga  $f$  com  $g$ . Seja  $x$  com  $f^k(x) \in [\alpha, f(\alpha))$ . Temos então que:

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= g^{-k+1} \circ H \circ f^{k-1}(f(x)) \\ &= g \circ (g^{-k} \circ H \circ f^k)(x) \\ &= g \circ h(x). \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir mostra que o conjunto dos difeomorfismos de Morse-Smale é aberto com a distância  $C^1$ .

**Proposição 3.4.** *Seja  $f \in \text{Diff}^1(S^1)$  um difeomorfismo Morse-Smale com  $k$  pontos fixos. Então, existe  $\epsilon > 0$  tal que todo  $g$  difeomorfismo  $C^1 - \epsilon$  próximo de  $f$  é Morse-Smale com exatamente  $k$  pontos fixos.*

*Demonstração.* Sejam  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  os pontos fixos de  $f$  de maneira crescente. Provamos acima que existem intervalos abertos  $U_i = (a_i, b_i)$  em torno de cada  $p_i$  e constantes  $\epsilon_i > 0$ , tais que, se  $g$  está  $C^1 - \epsilon$  próximo de  $f$  então existe um único ponto fixo  $q_i$  de  $g$  em cada  $U_i$ . Considere  $\bar{\epsilon} = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ .

Além disso, como  $f(x) - x \neq 0$  no compacto  $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$  podemos então escolher arbitrariamente  $\tilde{\epsilon} > 0$  pequeno o suficiente para que  $g(x) - x \neq 0$  quando  $x \in S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ , qualquer que seja a perturbação  $g$   $\tilde{\epsilon}$  - próxima de  $f$ .

Tomando então  $\hat{\epsilon} = \min\{\bar{\epsilon}, \tilde{\epsilon}\}$  temos que se  $g$  é  $C^1 - \hat{\epsilon}$  - próxima de  $f$  então os únicos pontos fixos de  $g$  são os pontos  $q_i$  acima.  $\square$

Chegamos, finalmente, ao teorema principal deste capítulo:

**Teorema A.** *Todo difeomorfismo do círculo  $f \in \text{Diff}^1(S^1)$  do tipo Morse-Smale é  $C^1$  estruturalmente estável.*

*Demonstração.* Demonstraremos apenas o caso onde os pontos periódicos de  $f$  são fixos. A demonstração para o caso geral utiliza os mesmos argumentos apenas fazendo a mudança de notações.

Seja  $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ , com pontos fixos  $p_1 < \dots < p_k$ , onde  $p_{k+1} \equiv p_1$ . Defina os intervalos  $I_i \equiv [p_i, p_{i+1}]$  para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Se limitarmos o difeomorfismo  $f$  a cada intervalo  $I_j$  temos  $k$  intervalos monótonos, isto é, o intervalo  $I_1$  para  $f_1 \equiv f|_{I_1}$ , o intervalo  $I_2$  para  $f_2 \equiv f|_{I_2}$ , assim sucessivamente até finalmente o intervalo  $I_k$  para  $f_k \equiv f|_{I_k}$ .

Como vimos na Proposição 3.4, existe  $\epsilon > 0$  tal que se  $g$  é  $C^1 - \epsilon$  - próxima de  $f$  então  $g$  possui exatamente  $k$  pontos fixos  $q_1 < \dots < q_k$ , todos estes hiperbólicos. Mais ainda, cada  $q_i$  é do mesmo tipo de  $p_i$ ; se  $p_i$  for atrator então  $q_i$  será atrator, se

for repulsor segue a mesma premissa. Logo, os pontos fixos de  $g$  dividem o círculo em  $k$  intervalos monótonos  $J_i \equiv [q_i, q_{i+1}]$ , onde  $J_i$  segue a mesma propriedade de  $I_i$ , ou seja, se  $I_i$  for crescente em relação a  $f$ ,  $J_i$  também será crescente em relação a  $g$ . O mesmo valendo caso seja decrescente.

Agora, aplicando a Proposição 3.3 a cada par de intervalos  $I_i$  e  $J_i$ , concluímos que existe uma conjugação topológica  $h_i : I_i \rightarrow J_i$  entre  $f_i$  e  $g_i$  para cada  $i \in 1, \dots, k$ .

Defina  $h : S^1 \rightarrow S^1$  colocando  $h(x) = h_i(x)$  se  $x \in I_i$ . Observamos que  $h$  está bem definida pois, se  $x$  estiver em mais de um intervalo então  $x$  é um dos pontos fixos  $p_i$  e assim temos que  $h_i(p_i) = q_i = h_{i+1}(p_i)$  devido a construção das conjugações  $h_i$ . Podemos assim concluir que  $h$  é contínua nas fronteiras dos intervalos e logo é contínua em todo círculo.

Além disso,  $h$  é uma bijeção com inversa dada por  $h^{-1}(y) = h_i^{-1}(y)$ , para todo  $y \in J_i$ , e esta é contínua utilizando o mesmo argumento que usamos para  $h$ .

Desse modo, concluímos que  $h$  é uma conjugação topológica entre  $f$  e  $g$  provando assim a estabilidade estrutural dos difeomorfismos Morse-Smale.  $\square$

Concluindo esse capítulo, queremos ressaltar ainda duas importantes propriedades dos difeomorfismos Morse-Smale. A primeira é que eles são densos no espaço dos difeomorfismos do círculo munido da distância  $C^1$ : para qualquer difeomorfismo do círculo, em toda vizinhança na topologia  $C^1$  desse difeomorfismo, existe um difeomorfismo do tipo Morse-Smale; Além disso, como vimos na Proposição 3.4, os difeomorfismos Morse-Smale formam um conjunto aberto. Então, Morse-Smale é um subconjunto aberto e denso no espaço dos difeomorfismos do círculo. Uma prova desse fato pode ser encontrada no artigo do Smale [11].

A segunda propriedade a ressaltar: como demonstrado anteriormente, os difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis no espaço dos difeomorfismos, além disso essa premissa é válida no caminho inverso, ou seja, todo difeomorfismo estruturalmente estável é do tipo Morse-Smale. Esse notável teorema, provado por Jacob Palis e Stephen Smale, pode ser encontrado em [9].

# 4 Estabilidade Estrutural das Transformações Expansoras.

No capítulo anterior provamos a estabilidade estrutural de uma classe de difeomorfismos do círculo chamada de Morse-Smale. Neste capítulo estudaremos a dinâmica de difeomorfismos locais definidos em uma variedade compacta qualquer, com a propriedade de expansão uniforme. Aqui, o objetivo principal será provar a estabilidade estrutural dessa classe e no próximo capítulo abordaremos a teoria ergódica. Como ferramenta principal para a demonstração utilizaremos o Lema de Sombreamento, o qual afirma que toda pseudo-órbita é sombreada por uma órbita da transformação. Os resultados desse capítulo podem ser encontrados em Oliveira e Viana [8]. Vamos iniciar definindo então as transformações que estudaremos a partir daqui.

**Definição 4.1.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta e seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação de classe  $C^1$ . Podemos então dizer que  $f$  é expansora se existe  $\sigma > 1$  (constante de expansão) e alguma métrica Riemanniana em  $M$  tal que*

$$\|Df(x)v\| \geq \sigma\|v\| \text{ para qualquer } x \in M \text{ e para qualquer } v \in T_xM.$$

Observe que devido a desigualdade do valor médio, para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança  $B(p, \delta_p)$  tal que  $f$  expande distâncias:

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y) \text{ para todo } x, y \in B(p, \delta_p).$$

Cobrindo a variedade  $M$  com tais vizinhanças  $B(p, \delta_p)$ , devido a sua compacidade podemos extrair uma subcobertura finita  $\{B(p_1, \delta_{p_1}), \dots, B(p_k, \delta_{p_k})\}$  de  $M$  onde a dinâmica expande as distâncias em cada vizinhança. Então, tomando

$$\rho = \min\{\delta_{p_i} ; i = 1, \dots, k\} > 0 \tag{4.1}$$

concluimos que a transformação expansora satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer  $p \in M$ , a imagem da bola  $B(p, \rho)$  contém uma vizinhança do fecho da bola  $B(f(p), \rho)$  e

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y) \text{ para todo } x, y \in B(p, \rho).$$

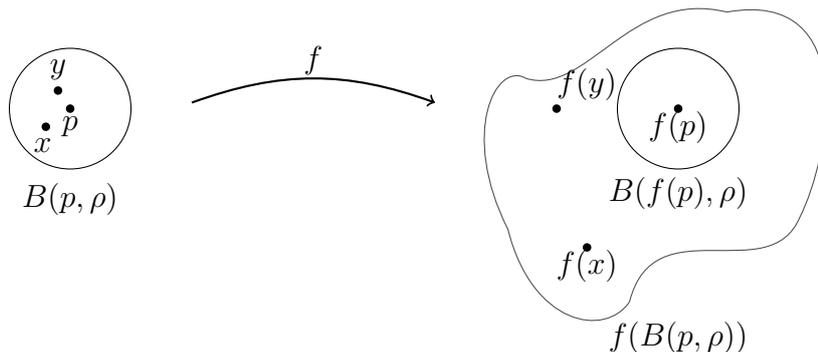


Figura 7 – Transformação Expansora

Antes de prosseguirmos, cabe aqui uma observação a respeito do comportamento uniforme de transformações expansoras na topologia  $C^1$ .

**Observação 4.1.** *Dada uma transformação expansora  $f : M \rightarrow M$  existe uma vizinhança  $V_f$  na topologia  $C^1$  tal que toda  $g \in V_f$  é também expansora*

$$\begin{aligned} \sigma \|v\| \leq \|Df(x)v\| &\leq \|(Df(x) - Dg(x))v\| + \|Dg(x)v\| \\ &\leq \varepsilon \|v\| + \|Dg(x)v\| \end{aligned}$$

uma vez que podemos tomar  $Dg$   $\varepsilon$ -perto de  $Df$  de modo que  $\sigma - \varepsilon > 1$ . Isso implica ainda que em  $V_f$  a constante de expansão  $\sigma$  é uniforme. Observamos também que, como a constante  $\rho$  fixada em (4.1) depende dessa expansão  $\sigma$ , então a dinâmica de qualquer  $g$  expande distâncias em vizinhanças  $B(p, \rho)$  desde que  $g$  esteja suficientemente perto de  $f$  na topologia  $C^1$ .

Vejamos agora dois exemplos de transformações expansoras definidas em variedades compactas.

**Exemplo 4.1.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a função definida por  $f(x) = 2x$  módulo 1. O comportamento dessa função é o seguinte: para cada  $x \in [0, 1]$  associamos o seu dobro e a operação módulo 1 leva ao seu correspondente no intervalo  $[0, 1]$ . Por exemplo, se escolhermos  $x = 0,8$  temos  $f(x) = 0,6$ , o qual é o representante de  $1,6$  módulo 1 no intervalo  $[0, 1]$ .*

*Nesse exemplo, a função tem como derivada  $f'(x) = 2$  e portanto é uniformemente expansora com taxa de expansão  $\sigma = 2$ . Aqui percebemos claramente que a constante  $\rho$  fixada em (4.1) é  $1/2$  e a dinâmica tem dois ramos inversos que contraem uniformemente segundo uma taxa  $1/2$ .*

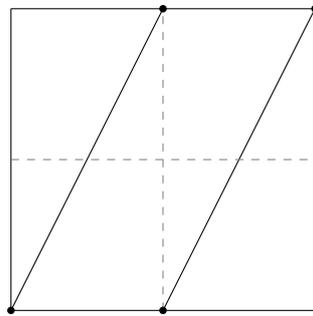


Figura 8 – Gráfico de  $f(x) = 2x \pmod{1}$ .

*Uma maneira simples de generalizar esse exemplo, é considerar a função  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f(x) = kx \pmod{1}$ , onde  $k \geq 2$  é um inteiro. Nesse caso, a transformação é uniformemente expansora, com  $f'(x) = k$ , constante  $\rho = 1/k$  e possui  $k$  ramos inversos contrativos.*

O próximo exemplo é uma generalização para dimensão qualquer do exemplo unidimensional dado anteriormente.

**Exemplo 4.2.** *Considere  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma matriz invertível na forma diagonal com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  com  $|\lambda_i| > 1$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Supondo que os coeficientes de  $A$  são inteiros,  $A$  induz uma aplicação  $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  no toro  $\mathbb{T}^n$  com derivada  $Df_A(x) = A$  para todo  $x \in \mathbb{T}^n$ . Considere a base de autovetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  associados aos autovalores  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e fixe o produto interno rela-*

tivamente ao qual essa base é ortogonal. Tomando  $\sigma = \inf_i |\lambda_i|$  temos que

$$\|Df_A(x)v\| = \|Av\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|v\| \geq \sigma \|v\|$$

O que mostra que a transformação  $f_A$  é expansora.

Já sabemos a definição de transformações expansoras, e como o próprio nome diz, elas expandem distâncias ao longo das iterações. Pensaremos agora no caminho inverso; Como a restrição de  $f$  a cada bola  $B(p, \rho)$  é injetiva e a sua imagem contém o fecho da bola  $B(f(p), \rho)$  temos que a restrição de  $f$  a interseção  $B(p, \rho) \cap f^{-1}(B(f(p), \rho))$  é um homeomorfismo sobre sua imagem  $B(f(p), \rho)$ . Desse modo está bem definida a função inversa

$$h_p : B(f(p), \rho) \rightarrow B(p, \rho)$$

a qual é um homeomorfismo que chamaremos de **ramo inverso** de  $f$  em  $p$ . Além disso, como  $f \circ h_p = id$ , podemos aplicar a propriedade de expansão de  $f$  para concluir que

$$d(z, w) = d(f \circ h_p(z), f \circ h_p(w)) \geq \sigma d(h_p(z), h_p(w))$$

para todo  $h_p(z), h_p(w) \in B(p, \rho)$ . E portanto,

$$d(h_p(z), h_p(w)) \leq \sigma^{-1} d(z, w) \text{ para todo } z, w \in B(f(p), \rho).$$

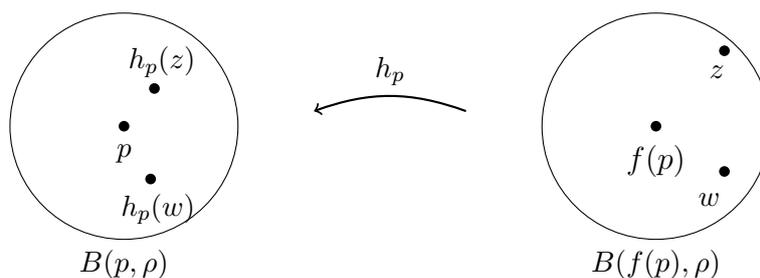


Figura 9 – Ramo Inverso de  $f$  em  $p$ .

A propriedade acima mostra que os ramos inversos da transformação expansora são contrativos. Vejamos agora algumas consequências desta propriedade.

**Lema 4.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  expansora. Então para todo  $y \in M$  vale que*

$$f^{-1}(B(y, \rho)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} h_x(B(y, \rho)).$$

*Demonstração.* Como  $f \circ h_x = id$  podemos concluir que  $h_x(B(y, \rho))$  está contido na pré-imagem da bola  $B(y, \rho)$ , para todo  $x \in f^{-1}(y)$ . A fim de demonstrar a outra inclusão considere  $z$  um ponto qualquer onde  $f(z) \in B(y, \rho)$ . Por definição de transformações expansoras temos,  $f(B(z, \rho)) \supset B(f(z), \rho)$  logo contém  $y$ . Então seja  $h_z : B(f(z), \rho) \rightarrow M$  o ramo inverso de  $f$  em  $z$  e seja  $x = h_z(y)$ . Podemos ver que  $z$  e  $h_x(f(z))$  estão na bola  $B(x, \rho)$ . Como  $f$  é injetiva em cada bola de raio  $\rho$  e  $f(h_x(f(z))) = f(z)$  temos que  $z = h_x(f(z))$ .  $\square$

Antes do próximo teorema precisaremos da definição de transformações expansivas.

**Definição 4.2.** *Uma transformação contínua  $f : M \rightarrow M$  em um espaço métrico é chamada de expansiva se existe  $\epsilon_0 > 0$  (constante de expansividade), tal que, para todo  $x, y \in M$  com  $x \neq y$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  onde  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0$ .*

Já que sabemos a definição de expansividade, podemos provar o seguinte teorema.

**Teorema 4.1.** *Toda transformação expansora  $f : M \rightarrow M$  é expansiva.*

*Demonstração.* Dados  $x, y \in M$ , pelo que vimos acima, existe  $\rho > 0$  tal que o ramo inverso  $h : B(p, \rho) \rightarrow M$  é de classe  $C^1$  e vale:

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1} d(y_1, y_2) \text{ para todo } y_1, y_2 \in B(y, \rho).$$

Daí, se  $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho$  para todo  $n \geq 0$  temos então

$$d(x, y) \leq \sigma^{-n} d(f^n(x), f^n(y)) \leq \sigma^{-n} \rho,$$

e portanto  $x = y$ . □

Como consequência deste teorema concluímos que a aplicação expansora  $f$  tem  $\rho$  como constante de expansividade. Em particular, (ver Observação 4.1) a constante de expansividade é uniforme em uma vizinhança de  $f$  na topologia  $C^1$ . A seguinte observação traz outra propriedade importante.

**Observação 4.2.** *Para todo  $\bar{\epsilon} > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $d(f^n(x), f^n(y)) < \rho$  para todo  $n \leq N$  então  $d(x, y) < \bar{\epsilon}$ . De fato, caso contrário existiria  $\bar{\epsilon} > 0$  tal que para todo natural  $N$  teríamos  $d(f^N(x), f^N(y)) < \rho$  com  $d(x, y) \geq \bar{\epsilon}$  e portanto,  $x \neq y$ . Isto é um absurdo, pois,  $f$  é  $\rho$ -expansiva.*

Como mencionamos, a ferramenta principal na prova da estabilidade das transformações expansoras é o Lema de Sombreamento. Antes de enunciá-lo e seguirmos para a sua demonstração, precisamos definir pseudo-órbita.

**Definição 4.3.** *Dado  $\delta > 0$  chamaremos de  $\delta$ -pseudo-órbita de uma transformação  $f : M \rightarrow M$  qualquer sequência  $(x_n)_{n \geq 0}$ , tal que,*

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta \text{ para todo } n \geq 0$$

*Diremos que a  $\delta$ -pseudo-órbita é periódica se existe um natural  $k \in \mathbb{N}$  onde  $x_n = x_{n+k}$  para todo  $n \geq 0$ .*

Observamos que toda órbita  $\{f^n(x)\}$  também é uma  $\delta$ -pseudo-órbita. Quando se trata de transformações expansoras podemos ver que existe o caminho inverso disto, ou seja, toda pseudo-órbita está suficientemente próxima de alguma órbita da transformação. Essa é a essência do Lema de Sombreamento.

**Proposição 4.1** (Lema de Sombreamento). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação expansora. Então para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x_n)$  existe  $x \in M$  satisfazendo  $d(f^n(x), x_n) < \epsilon$  para todo  $n \geq 0$ .*

Além disso, se  $\epsilon > 0$  é suficientemente pequeno de modo que  $2\epsilon$  é uma constante de expansividade para  $f$  então o ponto  $x \in M$  é único. Vale ainda que, se a pseudo-órbita é periódica então  $x$  é ponto periódico.

*Demonstração.* Seja  $\rho$  a constante de expansividade de  $f$  e sem perda de generalidade, suponha que  $\epsilon < \rho$ . Tome  $\delta > 0$  tal que  $\sigma^{-1}\epsilon + \delta < \epsilon$ . Considere agora  $h_n : B(f(x_n), \rho) \rightarrow B(x_n, \rho)$ , ramo inverso de  $f$  em  $x_n$ . Lembrando que  $h_n$  tem como taxa de contração  $\sigma^{-1}$  e que  $h_n \circ f^n(x_n) = x_n$  segue que

$$h_n(B(f(x_n), \epsilon)) \subset B(x_n, \sigma^{-1}\epsilon) \text{ para cada } n \geq 1.$$

Como  $(x_n)$  é  $\delta$ -pseudo órbita, isto é,  $d(x_n, f(x_{n-1})) < \delta$  temos

$$d(h_n(z), f(x_{n-1})) \leq d(h_n(z), x_n) + d(x_n, f(x_{n-1})) \leq \sigma^{-1}\epsilon + \delta < \epsilon$$

para qualquer  $h_n(z)$  com  $z \in B(f(x_n), \epsilon)$ . E portanto vale que

$$h_n(B(f(x_n), \epsilon)) \subset B(f(x_{n-1}), \epsilon) \text{ para todo } n \geq 1.$$

Note que essa propriedade se estende a  $\overline{B(f(x_n), \epsilon)}$ , fecho da bola  $B(f(x_n), \epsilon)$ . Denotemos agora por  $h^{n+1}$  a composição  $h^{n+1} = h_0 \circ \dots \circ h_n$ . Como vimos acima, a sequência de compactos  $K_{n+1} = h^{n+1}(\overline{B(f(x_n), \epsilon)})$  é encaixada

$$K_{n+1} = h_0 \circ \dots \circ h_{n-1} \circ h_n(\overline{B(f(x_n), \epsilon)}) \subset h_0 \circ \dots \circ h_{n-1}(\overline{B(f(x_{n-1}), \epsilon)}) = K_n.$$

Considere então  $x$  nesta interseção. Por construção,  $x \in K_{n+1}$  para todo  $n \geq 0$ , isto é,  $x = h^{n+1}(z) = h_0 \circ \dots \circ h_n(z)$  com  $z \in B(f(x_n), \epsilon)$ . Em particular,  $f^n(x) = f \circ \dots \circ f \circ h_0 \circ \dots \circ h_n(z) = h_n(z)$  pertence a  $h_n(B(f(x_n), \epsilon))$ . Como  $h_n(B(f(x_n), \epsilon)) \subset B(x_n, \sigma^{-1}\epsilon)$  isto implica em  $d(f^n(x), x_n) < \epsilon$  para todo  $n \geq 0$ , e portanto  $x$  satisfaz a primeira parte do proposição.

Verificaremos agora a unicidade: seja  $x'$  outro ponto que satisfaz a conclusão da proposição. Temos que

$$d(f^n(x), f^n(x')) \leq d(f^n(x), x_n) + d(f^n(x'), x_n) \leq 2\epsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Por expansividade, segue que  $x = x'$ .

Suponha agora que a pseudo-órbita é periódica, com período  $k \geq 1$ . Então,

$$d(f^n(f^k(x)), x_n) = d(f^{n+k}(x), x_{n+k}) < \epsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Da unicidade concluída anteriormente, temos que ter  $f^k(x) = x$ . □

Note que, no Lema de Sombreamento, para garantirmos que a  $\delta$ -pseudo órbita  $(x_n)$  será acompanhada pela órbita  $(f^n(x))$  de algum  $x \in M$ , o  $\delta$  depende de  $\epsilon$ , da expansão  $\sigma$  e da constante de expansividade  $\rho$  de  $f$ . Como vimos anteriormente na Observação 4.1 que as constantes  $\sigma$  e  $\rho$  podem ser tomadas uniformes em uma vizinhança  $V_f$  de  $f$  na topologia  $C^1$ , concluímos que o  $\delta$  encontrado vale igualmente para toda  $g \in V_f$ .

Com todas essas definições, consequências e explicações em mente, chegamos ao ápice deste capítulo a demonstração do teorema de estabilidade para expansoras.

**Teorema B.** *Toda aplicação expansora  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  definida em uma variedade compacta e conexa é  $C^1$  estruturalmente estável.*

*Demonstração.* Primeiramente, da definição de expansora e da topologia  $C^1$ , ver seção 2.2, podemos tomar uma vizinhança  $V_f$  de  $f$  na topologia  $C^1$  tal que toda aplicação  $g \in V_f$  também é expansora. Além disso, diminuindo  $V_f$  se necessário, as constantes do Lema de Sombreamento são as mesmas nessa vizinhança.

Considere  $\rho$  a constante de expansividade de  $f$  e seja  $\epsilon < \rho/3$ . Para esse  $\epsilon$ , tome  $\delta$  como no Lema de Sombreamento e considere a vizinhança  $V_\delta \subset V_f$  de  $f$  na topologia  $C^1$ . Vamos provar que toda  $g \in V_\delta$  é topologicamente conjugada a  $f$ .

Dados  $g \in V_\delta$  e  $x \in M$ , devido a escolha de  $V_\delta$  temos

$$d(f(g^j(x)), g^{j+1}(x)) = d(f(g^j(x)), g(g^j(x))) < \delta, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$

e portanto  $(g^j(x))$  é uma  $\delta$ -pseudo órbita para  $f$ . Aplicando então o Lema de Sombreamento, existe um único  $y \in M$  que acompanha  $x \in M$ . Como  $x \in M$  é arbitrário e  $y \in M$  é único segue que está bem definida a aplicação  $h : M \rightarrow M$ ,  $h(x) = y$ , que a cada  $x$  considera a  $\delta$ -pseudo-órbita gerada por  $g$  e associa o ponto  $y$  cuja órbita por  $f$  acompanha  $x$ .

Note que, por expansividade, essa aplicação é injetiva e como podemos aplicar o processo inverso, ela é sobrejetiva. Observe ainda que  $h$  conjuga  $f$  e  $g$  visto que, por definição, o ponto que acompanha  $g(x)$  tem que ser  $f(h(x))$ , e portanto vale que  $f \circ h = h \circ g$ .

Provaremos agora que  $h$  é contínua e, por compacidade, concluiremos que  $h$  é um homeomorfismo. Dado  $\bar{\epsilon} > 0$  seja  $N \in \mathbb{N}$  da Observação 4.2. Como  $g$  é contínua, existe  $\bar{\delta} > 0$  tal que se  $d(x, z) < \bar{\delta}$  então  $d(g^n(x), g^n(z)) < \rho/3$  para todo  $n \leq N$ . Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} d(f^n(h(x)), f^n(h(z))) &\leq d(f^n(h(x)), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(z)) \\ &\quad + d(g^n(z), f^n(h(z))) \\ &\leq \rho/3 + \rho/3 + \rho/3 \end{aligned}$$

para todo  $n \leq N$  pois  $h(x)$  acompanha  $x$  e  $h(z)$  acompanha  $z$ .

Aplicando a Observação 4.2 segue que  $d(h(x), h(z)) < \bar{\epsilon}$  concluindo assim a continuidade de  $h$ .  $\square$

Para finalizar, gostaríamos de destacar que, fazendo algumas adaptações, o teorema de estabilidade estrutural acima é verdadeiro na topologia  $C^0$ . Optamos por apresentar a versão  $C^1$  desse teorema para facilidade do leitor.

# 5 Estabilidade Estatística das Transformações Expansoras

Neste último capítulo da dissertação provaremos a estabilidade estatística das transformações expansoras. Como primeiro passo mostraremos que toda aplicação expansora admite uma única medida invariante, ergódica e absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue. Essa unicidade nos permite definir o mapa que a cada transformação expansora associa a sua única medida absolutamente contínua. Provar que tal mapa é contínuo na topologia fraca\* é o significado da estabilidade estatística da transformação. Para a demonstração da existência e unicidade da medida absolutamente contínua a Lebesgue seguiremos o livro Oliveira e Viana [8].

## 5.1 Existência de Medida Absolutamente Contínua

Como vimos anteriormente, uma transformação  $f : M \rightarrow M$  definida em uma variedade Riemanniana é expansora se:

$$\|Df(x)v\| \geq \sigma\|v\| \quad \text{para qualquer } x \in M \text{ e para qualquer } v \in T_x M.$$

Particularmente, a condição acima implica que  $Df(x)$  é um isomorfismo para todo  $x \in M$  e portanto  $f$  é um difeomorfismo local. Chamaremos de *medida de Lebesgue* em  $M$  à medida de volume  $m$  induzida pela métrica Riemanniana.

**Definição 5.1.** *Dada uma probabilidade invariante  $\mu$ , chamamos de bacia de  $\mu$  o conjunto  $B(\mu)$  dos pontos  $x \in M$  tais que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

para toda função contínua  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Observe que a bacia de uma medida é um conjunto invariante, isto é,  $f^{-1}(B(\mu)) = B(\mu)$ . De fato, sejam  $x, y \in M$  com  $y = f^{-1}(x)$  então

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) &= \frac{1}{n} (\varphi(y) + \varphi(x) + \cdots + \varphi(f^{n-2}(x)) + \varphi(f^{n-1}(x)) - \varphi(f^{n-1}(x))) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) + \frac{1}{n} (\varphi(y) - \varphi(f^{n-1}(x))). \end{aligned}$$

Como  $\varphi$  uma função limitada (contínua em um compacto) temos que

$$\frac{1}{n} (\varphi(y) - \varphi(f^{n-1}(x))) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

E portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) = \int \varphi d\mu \text{ se, e somente se, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu.$$

Logo  $x \in B(\mu)$  se, e somente se,  $y = f^{-1}(x) \in B(\mu)$ . Isso mostra a invariância da bacia de atração. Em particular, observamos que se  $\mu$  é uma medida ergódica então  $B(\mu)$  tem  $\mu$ -medida total.

Podemos agora enunciar o teorema de unicidade que provaremos aqui.

**Teorema C.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação expansora definida em uma variedade compacta conexa  $M$ . Suponha que a função jacobiana  $x \mapsto \det Df(x)$  é Hölder. Então existe uma única probabilidade invariante  $\mu$  absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue  $m$ . Além disso,  $\mu$  é ergódica, o seu suporte coincide com  $M$  e a sua bacia  $B(\mu)$  tem medida de Lebesgue total na variedade.*

Destacamos que a Hölder regularidade da função jacobiana é fundamental. Caso essa condição não seja satisfeita, não é possível garantir a unicidade da medida invariante absolutamente contínua a Lebesgue. O leitor interessado pode consultar Quas [10] para mais detalhes.

Antes de prosseguirmos para a prova do Teorema C, vale lembrar que, como visto no capítulo anterior, a transformação expansora  $f$  possui ramos inversos contrativos: existe  $\rho > 0$  tal que, para qualquer pré-imagem  $x$  de um ponto  $y \in M$ , existe uma aplicação  $h : B(y, \rho) \rightarrow M$  de classe  $C^1$  tal que  $f \circ h = Id$  e vale

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1}d(y_1, y_2) \text{ para todo } y_1, y_2 \in B(y, \rho).$$

Agora, para avançarmos, vamos enunciar e provar alguns resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema C. Iniciaremos com o famoso **Lema de distorção**.

**Lema 5.1** (Lema de distorção). *Existe  $C_1 > 0$  tal que para qualquer  $n \geq 1$ ,  $y \in M$ , e qualquer ramo inverso  $h^n : B(y, \rho) \rightarrow M$  de  $f^n$  tem se*

$$\log \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} \leq C_1 d(y_1, y_2)^\nu \leq C_1 (2\rho)^\nu$$

para todo  $y_1, y_2 \in B(y, \rho)$

*Demonstração.* Denote por  $h^n$  a composição  $h^n = h_n \circ \dots \circ h_1$  dos ramos inversos de  $f$  onde  $h^0 = id$ . Utilizando propriedades de logaritmo temos

$$\log \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} = \sum_{i=1}^n \log |\det Dh_i(h^{i-1}(y_1))| - \log |\det Dh_i(h^{i-1}(y_2))|.$$

Observando que  $\log |\det Dh_i| = -\log |\det Df| \circ h_i$  e que cada  $h_i$  é uma contração, com taxa de contração  $\sigma^{-1}$ , aplicamos a hipótese da Hölder continuidade do jacobiano para obter

$$\log \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} = \sum_{i=1}^n C_0 d(h^i(y_1), h^i(y_2))^\nu \leq \sum_{i=1}^n C_0 \sigma^{-i\nu} d(y_1, y_2)^\nu.$$

A prova do lema segue tomando  $C_1 = C_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^{-i\nu}$ . □

O lema de distorção implica no controle uniforme da medida de Lebesgue das bolas de raio  $\rho$  da dinâmica, isso é provado no corolário seguinte.

**Corolário 5.1.** *Existe uma constante  $C_2 > 0$  tal que para todo  $y \in M$  e quaisquer conjuntos mensuráveis  $B_1, B_2 \subset B(y, \rho)$  vale que*

$$\frac{1}{C_2} \frac{m(B_1)}{m(B_2)} \leq \frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))} \leq C_2 \frac{m(B_1)}{m(B_2)}.$$

*Demonstração.* Considere  $C_2 = \exp(2C_1(2\rho)^\nu)$ . Pelo lema de distorção temos

$$\begin{aligned} m(h^n(B_1)) &= \int_{B_1} |\det Dh^n| dm \leq \exp(C_1(2\rho)^\nu) |\det Dh^n(y)| m(B_1) \text{ e} \\ m(h^n(B_2)) &= \int_{B_1} |\det Dh^n| dm \geq \exp(-C_1(2\rho)^\nu) |\det Dh^n(y)| m(B_1) \end{aligned}$$

E portanto

$$\frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))} \leq C_2 \frac{m(B_1)}{m(B_2)}$$

Analogamente obtemos a desigualdade contrária.  $\square$

**Proposição 5.1.** *Existe  $C_3 > 0$  tal que  $(f_*^n m)(B) \leq C_3 m(B)$  para todo conjunto mensurável  $B \subset M$  e todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Vamos supor que  $B$  está contido numa bola de raio  $\rho$  e centro  $z \in M$ , ou seja  $B \subset B_0 = B(z, \rho)$ . Utilizando a proposição anterior temos que

$$\frac{m(h^n(B))}{m(h^n(B_0))} \leq C_2 \frac{m(B)}{m(B_0)},$$

e essa propriedade vale para todo ramo inverso  $h^n$  de  $f^n$  num ponto da pré-imagem de  $z$ . Como  $(f_*^n m)(B) = m(f^{-n}(B))$  é a soma da medida  $m(h^n(B))$  sobre  $B_0$  em todos os ramos inversos de  $B$ , temos

$$\frac{(f_*^n m)(B)}{(f_*^n m)(B_0)} \leq C_2 \frac{m(B)}{m(B_0)}.$$

Observando agora que  $(f_*^n m)(B_0) \leq (f_*^n m)(M) = 1$  e que a medida de Lebesgue da bola com raio fixado está limitada por uma constante  $\alpha_0$  longe de zero que só depende do raio, a proposição segue tomando  $C_3 = C_2/\alpha_0$ .  $\square$

Como consequência dessa proposição já é possível provar a existência de uma medida invariante absolutamente convergente a Lebesgue.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  considere a seguinte medida invariante:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m$$

Como  $(\mu_n)$  é uma sequência limitada podemos considerar  $\mu$  um ponto de acumulação. A Proposição 5.1 garante que para qualquer conjunto mensurável  $B \subset M$  vale:

$$\mu_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m(B) \leq C_3 m(B)$$

qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, por propriedade da convergência na topologia fraca\* (veja Lema 2.2 nas preliminares) segue que

$$\mu(B) \leq C_3 m(B).$$

Isto implica que  $\mu$  é absolutamente contínua a Lebesgue e possui densidade limitada por  $C_3$ . Desse modo, provamos a existência afirmada no Teorema B.

## 5.2 Unicidade da Medida

Concluimos a primeira parte do nosso teorema, provamos que  $f$  admite uma medida invariante  $\mu$  absolutamente contínua a medida de Lebesgue  $m$ . Agora provaremos que ela é única e é ergódica.

Nosso próximo passo é provar a existência de uma medida ergódica e absolutamente contínua a Lebesgue. Considere  $\mathcal{P}_0 = \{U_1, \dots, U_s\}$  uma partição de  $M$  com interior não-vazio e diâmetro menor que  $\rho$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina  $\mathcal{P}_n$  a partição de  $M$  cujos átomos são imagens de cada um dos  $U_j$ ,  $1 \leq j \leq s$  pelos respectivos ramos inversos de  $f^n$ , isto é:

$$\mathcal{P}_n = \{V_n ; V_n = f^{-n}(\mathcal{P}_0)\}$$

Observe que sendo  $f^{-n}$  uma contração de taxa  $\sigma^{-n}$  então os átomos de  $\mathcal{P}_n$  tem diâmetro menor que  $\rho\sigma^{-n}$ . Deste modo,  $(\mathcal{P}_n)$  é uma sequência de partições com diâmetro convergindo a zero.

Dado qualquer conjunto mensurável  $B$  com  $m(B) > 0$  podemos aplicar o Lema 2.3 para concluir que existem  $V_n \in \mathcal{P}_n$  tais que

$$m(V_n) > 0 \text{ e } \frac{m(B \cap V_n)}{m(V_n)} \longrightarrow 1, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

O lema a seguir prova que todo conjunto positivamente invariante tem medida de Lebesgue total em algum  $U_i \in \mathcal{P}_0$ .

**Lema 5.2.** *Se  $A \subset M$  é um conjunto positivamente invariante, com  $m(A) > 0$ . Então existe  $U_i \in \mathcal{P}_0$  tal que  $m(U_i \setminus A) = 0$*

*Demonstração.* Pelo observado acima, podemos escolher  $V_n \in \mathcal{P}_n$  de modo que

$$\frac{m(V_n \setminus A)}{m(V_n)} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Seja  $U_{i(n)} = f^n(V_n)$ . Pelo lema de distorção aplicado ao ramo inverso de  $f^n$  que leva  $U_{i(n)}$  em  $V_n$ , temos que

$$\frac{m(U_{i(n)} \setminus A)}{m(U_{i(n)})} \leq \frac{m(f^n(V_n \setminus A))}{m(f^n(V_n))} \leq \exp(C_1(2\rho)^\nu) \frac{m(V_n \setminus A)}{m(V_n)}$$

converge para zero também. Agora, sendo  $\mathcal{P}_0$  finito então existe algum  $1 \leq i \leq s$  tal que  $i(n) = i$  para infinitos valores de  $n$ . Logo,  $m(U_i \setminus A) = 0$ .

□

Agora estamos prontos para provar a existência de uma medida ergódica absolutamente contínua a Lebesgue.

Primeiramente, observe que como consequência do lema anterior, existem no máximo  $s = \#\mathcal{P}_o$  conjuntos invariantes com medida de Lebesgue positiva dois-a-dois disjuntos. Desse modo,  $M$  pode ser particionada em uma quantidade finita de conjuntos invariantes,  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , com  $r \leq s$  os quais são minimais pois não existem subconjuntos invariantes contidos neles.

Seja  $\mu$  a medida invariante absolutamente contínua a Lebesgue  $m$  construída anteriormente. Como  $A_1, A_2, \dots, A_r$  particionam  $M$  temos que ter  $\mu(A_i) > 0$ , para algum  $1 \leq i \leq r$ . Considere então a medida normalizada:

$$\mu_i(B) = \frac{\mu(B \cap A_i)}{\mu(A_i)}.$$

Sendo  $\mu \ll m$  e  $f$ -invariante segue que  $\mu_i$  também é absolutamente contínua e  $f$ -invariante. Agora vamos verificar, que  $\mu_i$  é ergódica.

Dado  $D \subset M$  positivamente invariante com  $m(D) > 0$ , pelo lema anterior existe algum  $U_j$  tal que

$$m(U_j \setminus D) = 0, \text{ isto é, } m(U_j \cap D) = 1.$$

Daí, se  $U_j \supset A_i$  então  $\mu_i(D) = \frac{\mu(D \cap A_i)}{\mu(A_i)} = 1$  e se  $U_j \cap A_i = \emptyset$  então  $\mu_i(D) = 0$ . Isso prova que  $\mu_i$  é ergódica.

Até aqui provamos a existência de uma medida  $\mu$  absolutamente contínua e ergódica. Agora, para concluirmos a prova do Teorema C precisamos provar a unicidade. Nessa direção utilizaremos que a dinâmica é topologicamente exata.

**Lema 5.3.** *Para todo aberto não-vazio  $U \subset M$  existe  $N \geq 1$  tal que  $f^N(U) = M$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in U$  e  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Suponha por absurdo que dado qualquer  $n \geq 1$ ,  $f^n(U)$  não cobre toda a variedade. Logo existe alguma curva  $\gamma$  que liga  $f^n(x)$  a um ponto  $y \in M \setminus f^n(U)$ , e essa curva pode ser tomada com comprimento menor que  $(\text{diam } M + 1)$ . Tomando  $\gamma$  pelo difeomorfismo  $f^n$

obtemos a curva  $\gamma_n$  que liga  $x$  a um ponto  $y_n \in M \setminus U$ . Dessa maneira vale que  $r \leq \text{comp}(\gamma_n) \leq \sigma^{-n}(\text{diam}M + 1)$  e isto é uma cota superior para o valor de  $n$ , o que é um absurdo.  $\square$

O lema anterior nos permite concluir que se  $A \subset M$  é positivamente invariante com  $m(A) > 0$  então  $A$  tem medida total na variedade. De fato, já sabemos da existência de  $U_i \in \mathcal{P}_0$  tal que  $m(U_i \setminus A) = 0$ . Seja  $N \in \mathbb{N}$  do lema anterior tal que  $f^N(U_i) = M$ . Então

$$M \setminus A = f^N(U_i) \setminus A \subset f^N(U_i) \setminus f^N(A) \subset f^N(U_i \setminus A)$$

pois  $A$  é positivamente invariante. Como  $m(U_i \setminus A) = 0$  e  $f^N$  tem jacobiano limitado segue que  $m(f^N(U_i \setminus A)) = 0$ . Logo,  $m(M \setminus A) = 0$  e portanto  $A$  tem medida total em  $M$ .

Utilizando a propriedade acima vamos concluir a prova do Teorema C. Provaremos agora que  $\mu$  é única, sua bacia  $B(\mu)$  tem medida total e seu suporte  $\text{supp}(\mu)$  coincide com  $M$ .

Seja  $B(\mu)$  a bacia de atração de  $\mu$ , isto é,

$$B(\mu) = \left\{ x \in M; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) = \int \varphi d\mu \text{ para } \varphi : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua} \right\}.$$

Como  $\mu$  é uma medida invariante temos que a sua bacia  $B(\mu)$  é um conjunto positivamente invariante com  $m(B(\mu)) > 0$ . Logo, do que vimos anteriormente segue que  $B(\mu)$  tem medida de Lebesgue total na variedade.

Analogamente, seja  $\text{supp}(\mu)$  o suporte de  $\mu$ , isto é,

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in M; \mu(V_x) > 0 \text{ para todo } V_x \subset M \text{ vizinhança de } x\}.$$

Note que  $\text{supp}(\mu)$  é um conjunto invariante: dado  $x \in M$  existe  $y \in M$  com  $y = f^{-1}(x)$  tal que  $\mu(V_x) > 0$  se e somente se  $\mu(V_y) = \mu(f^{-1}(V_x)) > 0$  pois,  $\mu$  é uma medida invariante. Então sendo  $\text{supp}(\mu)$  um conjunto invariante vale que

$m(\text{supp}(\mu)) = 1$ . Além disso, como  $\text{supp}(\mu)$  é um conjunto fechado temos que ter  $\text{supp}(\mu) = M$ , caso contrário, seu complementar seria um conjunto aberto com medida de Lebesgue zero, o que é um absurdo.

Por fim a unicidade: suponha  $\mu$  e  $\nu$  duas medidas ergódicas. Pelo que argumentamos anteriormente, vale que  $m(B(\mu)) = m(B(\nu)) = 1$ . Então existe  $x \in B(\mu) \cap B(\nu)$  e portanto para esse  $x$  temos

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) = \int \varphi d\nu$$

para toda função  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, o que é um absurdo.

### 5.3 Estabilidade Estatística

Considere  $M$  uma variedade Riemanniana compacta e conexa. Seja  $\mathcal{F}$  uma família de transformações expansoras de classe  $C^1$  e suponha que existam constantes  $C_0, \nu > 0$  tais que a função jacobiana é  $\nu$ -Hölder com constante  $C_0$  uniforme em  $\mathcal{F}$ :

$$\log \frac{|\det Df(x)|}{|\det Df(y)|} \leq C_0 d(x, y)^\nu, \text{ para quaisquer } x, y \in M \text{ e } f \in \mathcal{F}.$$

Pelo Teorema C, sabemos que para cada  $f \in \mathcal{F}$  existe uma única medida  $f$ -invariante  $\mu_f$  absolutamente contínua a Lebesgue.

**Definição 5.2.** Fixada em  $\mathcal{F}$  a topologia  $C^1$ , dizemos que  $f \in \mathcal{F}$  é estatisticamente estável se o mapa

$$f \in \mathcal{F} \longrightarrow \mu_f$$

é contínuo na topologia fraca\*

O objetivo desta seção é provar a dependência contínua das medidas  $\mu_f$  obtidas no Teorema C quando variamos a dinâmica em  $\mathcal{F}$ .

**Teorema D.** A família  $\mathcal{F}$  é estatisticamente estável.

Considere  $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$  uma sequência em  $\mathcal{F}$  convergindo para  $f \in F$  na topologia  $C^1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mu_n$  a única medida  $f_n$ -invariante ergódica absolutamente contínua de  $f_n$ . Vamos mostrar que todo ponto de acumulação  $\mu_0$  da sequência  $(\mu_n)$  é  $f$ -invariante e absolutamente contínua em respeito a Lebesgue. Começemos com a  $f$ -invariância.

**Lema 5.4.** *Seja  $\mu_0$  qualquer ponto de acumulação da sequência  $(\mu_n)$ . Então  $\mu_0$  é uma medida  $f$ -invariante.*

*Demonstração.* Como  $\mu_n$  é  $f_n$ -invariante então para qualquer função contínua  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , vale que

$$\int \varphi \circ f_n d\mu_n = \int \varphi d\mu_n \longrightarrow \int \varphi d\mu_0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Logo, para verificar a  $f$ -invariância de  $\mu_0$  é suficiente provar que

$$\int \varphi \circ f_n d\mu_n \longrightarrow \int \varphi \circ f d\mu, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos escrever

$$\left| \int \varphi \circ f_n d\mu_n - \int \varphi \circ f d\mu_0 \right| \leq \left| \int \varphi \circ f_n d\mu_n - \int \varphi \circ f d\mu_n \right| + \left| \int \varphi \circ f d\mu_n - \int \varphi \circ f d\mu_0 \right|$$

Como  $f_n$  converge para  $f$  e  $\mu_0$  é ponto de acumulação de  $(\mu_n)$  segue que cada parcela da soma acima converge para 0 quando  $n \rightarrow +\infty$ . Isso implica que  $\mu_0$  é  $f$ -invariante.  $\square$

Podemos agora concluir a prova do Teorema D: do lema anterior sabemos que qualquer ponto de acumulação  $\mu_0$  da sequência  $(\mu_n)$  é  $f$ -invariante.

Lembrando que cada  $\mu_n$  é a única medida absolutamente contínua de  $f_n$  e que na família  $\mathcal{F}$  a função jacobiana  $x \rightarrow \log \det Df(x)$  é Hölder com constante uniformemente limitada, podemos aplicar o lema de distorção para obter que qualquer conjunto mensurável  $B \subset M$  satisfaz

$$\mu_n(B) \leq C_3 m(B)$$

qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ .

Daí, por propriedade de convergência na topologia fraca\*, veja Lema 2.2, o ponto de acumulação  $\mu_0$  dessa sequência também tem densidade limitada por  $C_3$ , isto é,

$$\mu_0(B) \leq C_3 m(B).$$

Isso implica que  $\mu_0$  é uma medida absolutamente contínua a Lebesgue. Aplicando a prova do Teorema C, temos que  $\mu_0$  é a única medida ergódica absolutamente contínua a Lebesgue. Desse modo provamos que a aplicação  $f \in \mathcal{F} \rightarrow \mu_f$  é contínua na topologia fraca\*.

# Bibliografia

- [1] Flavio Abdenur e L. Felipe Nobili. *Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão um*. Vol. 1ª edição. IMPA, 2007.
- [2] José Ferreira Alves e Marcelo Viana. *Statistical Stability for Robust Classes of Maps with Non-uniform Expansion*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] Aleksandrovich Andronov e Nikolay Potryagin. *Systems Grossier*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1937.
- [4] Manfred Einsiedler e Thomas Ward. *Ergodic Theory: with a view towards Number Theory*. Springer, 2011.
- [5] Brin Michael e Garret Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Morris Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics, Corrected reprint of the 1976, Springer-Verlag, 1994.
- [7] Ricardo Mane. *Teoria Ergódica*. SBM, 1987.
- [8] Krerley Oliveira e Marcelo Viana. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Vol. 2ª edição. SBM, 2019.
- [9] Jacob Palis, Stephen e Smale. *Structural Stability Theorems*. A.M.S. Symp Pure Math, 1970.
- [10] Anthony N. Quas. *Most Expanding maps have no absolutely continous invariant measure*. Studia Math, 1999.
- [11] Stephen Smale. *Differentiable dynamical systems*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967.