

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL
CURSO DE MESTRADO

DAVID SOUSA COSTA

**ESTUDO DE TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO DE EIXOS, CÔNICAS E QUÁDRICAS
USANDO AUTOVALORES E AUTOVETORES.**

São Luís - MA

2022

DAVID SOUSA COSTA

**ESTUDO DE TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO DE EIXOS, CÔNICAS E QUÁDRICAS
USANDO AUTOVALORES E AUTOVETORES.**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Maranhão, na área de educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo

São Luís - MA

2022

Costa, David Sousa.

Estudos de Translação, Rotação de eixos, Cônicas e Quádricas usando Autovalores e Autovetores. /David Sousa Costa. - 2022.

69f.

Orientador: Marcos Antônio Ferreira de Araújo.

Dissertação (Pós Graduação) - Profmat, Universidade Federal do Maranhão, 2022.

1. Aprendizagem. 2. Ensino Básico. 3. Translação e Rotação.
I. Araújo, Marcos Antônio Ferreira. II. Título.

CDU

DAVID SOUSA COSTA

**ESTUDO DE TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO DE EIXOS, CÔNICAS E QUÁDRICAS
USANDO AUTOVALORES E AUTOVETORES.**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Maranhão, na área de educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em de de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Antônio José da Silva
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Universidade Federal do Maranhão

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, à minha família que sempre me apoiou em todas as etapas dessa trajetória. Obrigado pela paciência, força e carinho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a **Deus**, pela vida concedida, pela força, paz, sabedoria e perseverança, que me permitiram concluir este trabalho e superar os desafios encontrados ao longo da minha vida.

Ao meu avô, por tudo que ele fez por mim.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo, por todo o apoio, pela oportunidade a mim concedida, pela orientação, dedicação e conhecimento passado. Os meus sinceros agradecimentos.

A minha mãe, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A minha esposa, pelo amor, por todo incentivo e apoio incondicional.

A todos aqueles que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Antônio José da Silva por todo seu apoio, por todo incentivo, por todo cuidado com os seus alunos e comprometimento acima de tudo com o mestrado.

Consagre ao senhor tudo o que você faz e os seus planos serão bem-sucedidos.

Provérbios 16:3

RESUMO

Através desse trabalho desenvolvido é factível de maneira favorável a compreensão dos estudos sobre translações, rotações de eixos, cônicas e quádricas. A pesquisa esta fundamentada com base em autores que discutem e descrevem sobre os estudos acima citado bibliograficamente, sendo de suma importância a aplicação dos estudos matemáticos na construção da Educação Matemática mesmo que abstrata entretanto planejada pelo discente.

Palavras-chaves: Translações; rotações; cônicas; quádricas;

ABSTRACT

Through this developed work, it is possible to favorably understand the studies on translations, axis rotations, conics and quadrics. The research is based on authors who discuss and describe the studies cited above bibliographically, being of paramount importance the application of mathematical studies in the construction of Mathematics Education, even if abstract, however planned by the student.

Keywords: Translation; Rotation; Conics; Quadrics

Sumário

Lista de Figuras	8
1	INTRODUÇÃO 12
2	TRANSLAÇÃO 13
3	ROTAÇÃO 17
4	AUTOVALORES E AUTOVETORES 26
4.1	Autovalores e Autovetores de uma Matriz 27
4.2	Polinômio Característico 28
5	FORMAS LINEARES, BILINEARES E QUADRÁTICAS 30
5.1	FORMAS LINEARES 30
5.2	FORMAS BILINEARES 30
5.3	Matriz de uma Forma Bilinear 31
5.4	Forma Bilinear Simétrica 32
5.5	Formas Quadráticas 33
5.6	Diagonalização da Forma Quadrática 35
6	CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS 39
6.1	Retas no Plano 41
6.2	Planos no Espaço 41
6.3	Cônicas no Plano 43
6.4	Procedimento Geral de Classificação das Cônicas 48
6.5	Quádricas em \mathbb{R}^3 51
7	CÔNICAS E A EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU 57
7.1	Circunferência 57
7.2	Elipse 58
7.3	Hipérbole 60
7.4	Parábola 62

CONSIDERAÇÕES FINAIS

64

REFERÊNCIAS

65

Lista de Figuras

1	Figura 1	13
2	Figura 2	14
3	Figura 3	15
4	Figura 4	17
5	Figura 5	18
6	Figura 6	27
7	Figura 7	33
8	Figura 8	39
9	Figura 9	39
10	Figura 10	40
11	Figura 11	41
12	Figura 12	42
13	Figura 13	42
14	Figura 14	42
15	Figura 15	43
16	Figura 16	44
17	Figura 17	44
18	Figura 18	45
19	Figura 19	45
20	Figura 20	46
21	Figura 21	46
22	Figura 22	47
23	Figura 23	47
24	Figura 24	51
25	Figura 25	52
26	Figura 26	52

27	Figura 27	53
28	Figura 28	53
29	Figura 29	54
30	Figura 30	54
31	Figura 31	55
32	Figura 32	56
33	Figura 32	57
34	Figura 33	58
35	Figura 34	59
36	Figura 35	60
37	Figura 36	60
38	Figura 37	60
39	Figura 38	61
40	Figura 39	63

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho parte do processo de ensino-aprendizagem da matemática, como área de conhecimento que constitui o currículo da educação básica brasileira onde exige dos professores dessa área o domínio de diversas metodologias de abordagem dos objetos de ensino.

É possível levar em consideração que, os objetos matemáticos são acessados por meio de representações, nos quais, os professores desenvolvem estratégias instrucionais envolvendo essas representações visando à aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos. É nesse contexto de pesquisa que surge a possibilidade de usar autovaleores e autovetores para interpolar registros de translações, rotações de eixos, cônicas e quádras como objetos matemáticos.

No cerne, propomos uma metodologia para estimular o raciocínio lógico através de um conjunto de pontos que possuem a mesma propriedade, permitindo que os alunos compreendam que o conteúdo não é um fim em si mesmo, mas um meio para desenvolver habilidades.

2 TRANSLAÇÃO

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto $O'(h,k)$, arbitrário. Vamos introduzir um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy . Assim, todo ponto P do plano tem duas representações: $P(x,y)$ no sistema xOy e $P(x',y')$ no sistema $(x'O'y')$

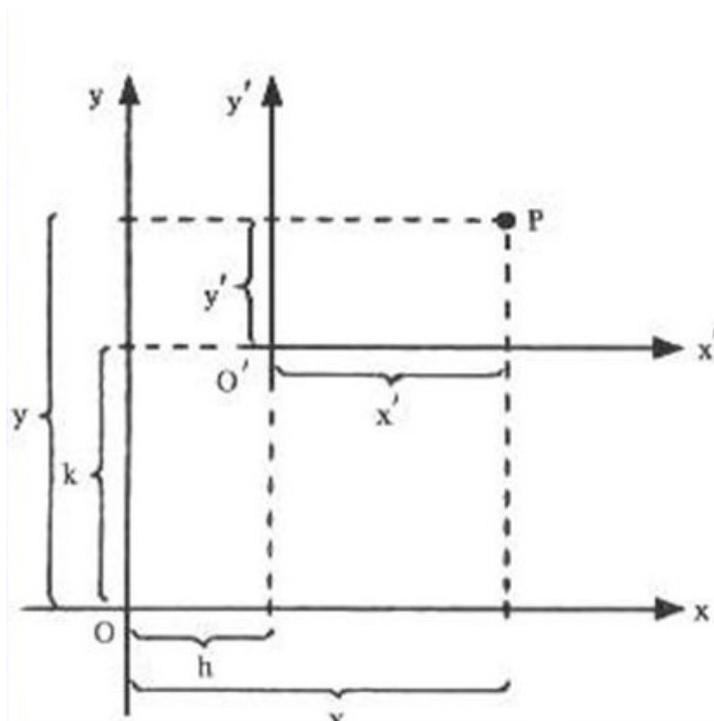


Figura 1: Translação

Desta figura obtém-se:

$$x = x' + h \text{ e } y = y' + k$$

ou

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k$$

que são as fórmulas de translação.

Denotaremos o sistema de eixos original por xOy , e o novo por $x'O'y'$.

Como relacionar os pares de eixos transladados?

Seja (a, b) o par de coordenadas da nova origem do sistema $x'O'y'$, em relação ao sistema xOy .

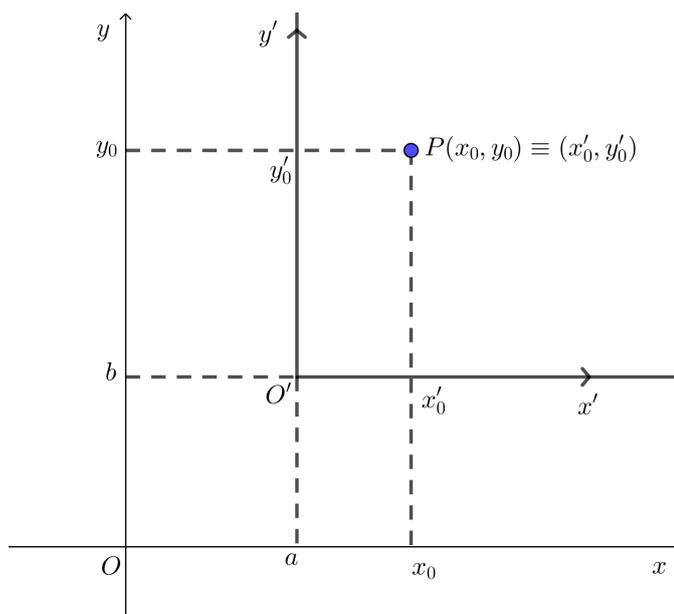


Figura 2: Translação

Da figura acima, temos:

$$\begin{cases} x_0 = a + x'_0 \\ y_0 = b + y'_0 \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} x'_0 = a - x_0 \\ y'_0 = b - y_0 \end{cases}$$

(Equações de Translações dos Eixos)

Definição 1. (*Translação dos eixos de coordenadas*). A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos sejam paralelos aos antigos eixos, respectivamente e semelhantemente orientados, é denominada *translação dos eixos coordenados*.

A fim de simplificar equações por translação dos eixos coordenados necessitaremos do seguinte teorema:

Teorema 1. Se os eixos coordenados são transladados por uma nova origem $O'(k, h)$ e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da translação dos eixos são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de translação das antigas para as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' + k \\ y = y' + h \end{cases}$$

Demonstração:

Consideremos no plano xy um ponto $O'(k, h)$, arbitrário e introduzamos um novo sistema de coordenadas $x'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy . Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema xy são x e y e, em relação ao sistema $x'y'$ são x' e y' . Desta forma e de acordo com a figura, temos:

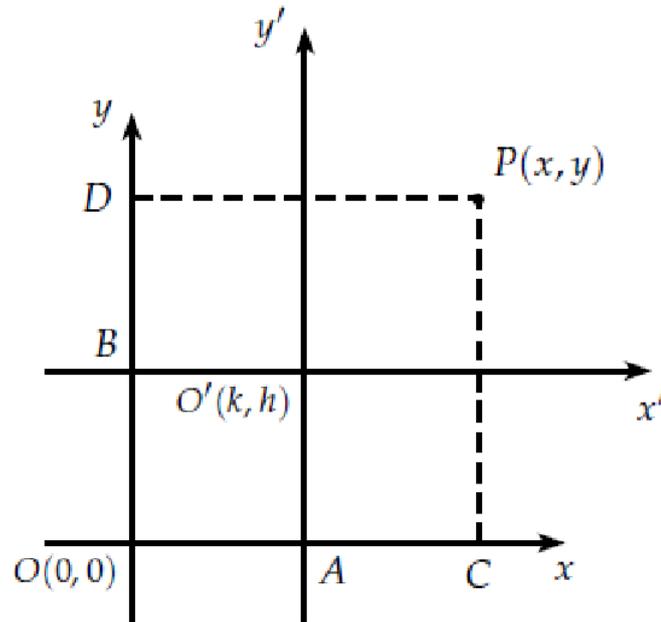


Figura 3: Rotação

$$\begin{cases} x = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = x' + k \\ y = \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = y' + h \end{cases} \quad \square$$

Sejam $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ dois sistemas cartesianas em E^3 , o primeiro referido daqui por diante como o "antigo", o segundo como o "novo". Utilizaremos (x, y, z) para indicar as coordenadas de um ponto X qualquer, relativamente ao sistema "antigo" e chamaremos (h, k, m) a tripla de coordenadas de O' em relação a ele:

$$O' = (h, k, m)_{\Sigma_1}$$

(h, k, m) são as coordenadas da "nova" origem no sistema "antigo".

Sendo $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ base, sabemos que se X é um ponto qualquer de E^3 , existem u, v, w reais, determinados univocamente, tais que $O'X = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 + w\vec{f}_3$. Reciprocamente, dados u, v, w reais, a igualdade anterior determina univocamente o ponto X . Se u, v, w variam em \mathbb{R} , todo ponto $X \in E^3$ é obtido desse modo. Em outros termos

$$X \in E^3 \iff X = O' + u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 + w\vec{f}_3 \quad (u, v, w \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

A equação (1), por analogia com os casos da reta e do plano, pode ser chamada "equação vetorial do espaço E^3 ". Nesse caso, os vetores $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, fazem o papel de "vetores diretores" de E^3 , enquanto que u, v, w atuam como "parâmetros", fazem mesmo modo que λ, μ etc, nos casos da reta e do plano já citados. Assim, exatamente como foi feito lá, podemos obter de (1), a equação de E^3 na "forma paramétrica".

Para isso, vamos supor que

$$\vec{f}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})_E, \vec{f}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})_E, \vec{f}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})_E$$

onde $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Então, de (1) segue que

$$\begin{cases} x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z = m + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases} \quad (2)$$

Agora, observe que u, v, w , dados em (1) são exatamente as coordenadas de X em relação ao sistema $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ e portanto as equações (2) são as relações procuradas entre as "antigas" e as "novas" coordenadas de X . Por essa razão são chamadas equações de mudança de coordenadas do sistema Σ_1 para Σ_2 .

Observação 1. Sabemos que a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

é a matriz de mudança da base E para a base F . As equações (2) podem ser escritas matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x - h \\ y - k \\ z - m \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde se obtém

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \\ z - m \end{bmatrix} \quad (4)$$

Exemplo 1. Escreva as equações da mudança de coordenadas do sistema Σ_1 para o sistema Σ_2 , onde, com a notação anterior, $O' = (1, 2, -1)_{\Sigma_1}$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Resolução:

Pelos dados, vemos que $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)_E$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1)_E$, $\vec{f}_3 = (1, 2, -1)_E$.

Então por (2)

$$\begin{cases} x = 1 + u + w \\ y = 2 + 2w \\ z = -1 + v - w \end{cases}$$

3 ROTAÇÃO

Consiste em criar um novo sistema de eixos ortogonais rotacionando o original de certa angulação.

Note que, na figura abaixo, um ponto no plano pode ser localizados por suas coordenadas em relação a um referencial. O mesmo ponto pode ter pares de coordenadas diferentes, dependendo do referencial tomado.

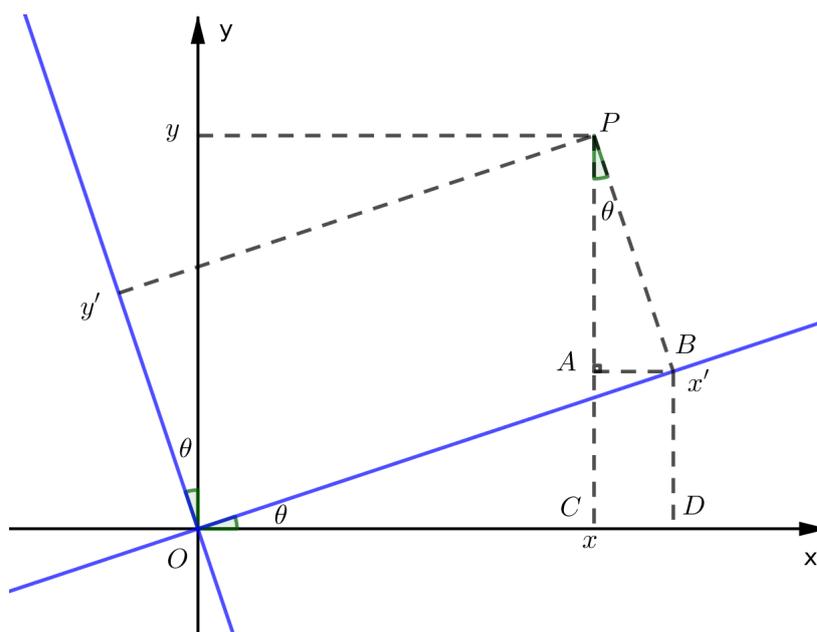


Figura 4: rotação

Definição 2. (*Rotação dos eixos coordenados*). A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos eixos possuam a mesma origem, é denominado rotação dos eixos coordenados.

Consideremos o plano Oxy e seja θ o ângulo de rotação o qual é obtido um novo sistema tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida de Ox e Oy .

Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema Oxy são x e y e, em relação aos sistemas $O'x'y'$ são x' e y' . Desta forma e de acordo com a figura, temos:

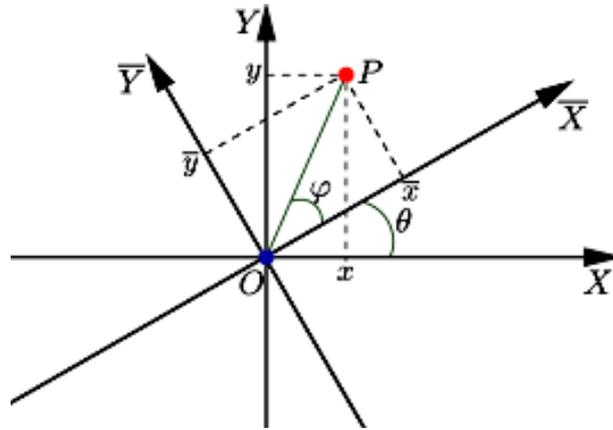


Figura 5: Rotação com o ângulo θ

$$\begin{cases} \bar{x} = \overline{Ox} = r \cdot \cos\varphi \\ \bar{y} = \overline{x'P} = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad (5)$$

e

$$\begin{cases} x = \overline{Ox} = r \cdot \cos(\theta + \varphi) = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \overline{x'P} = r \cdot \sin(\theta + \varphi) = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad (6)$$

Portanto, substituindo-se (5) em (6) temos:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cdot \cos\theta - \bar{y} \cdot \sin\theta \\ y = \bar{x} \cdot \sin\theta + \bar{y} \cdot \cos\theta \end{cases}$$

que são as equações de rotação. Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 2. Se girarmos os eixos coordenados de um ângulo θ em torno de sua origem O e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da rotação dos eixos são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de rotação das antigas para as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Sob forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

onde

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é a matriz rotação sob o ângulo θ .

Observação 2. As equações de rotação nos dão as antigas coordenadas em função das novas. Se quisermos as novas em função das antigas, basta resolver em relação a x e y o sistema por elas formado. Ou seja, pela regra de Cramer, temos;

$$\begin{cases} x_o = x'_o \cdot \cos\theta - y'_o \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y_o = x'_o \cdot \operatorname{sen}\theta + y'_o \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (7)$$

Resolvendo sistema, temos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_o = x'_o \cdot \cos\theta - y'_o \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y_o = x'_o \cdot \operatorname{sen}\theta + y'_o \cdot \cos\theta \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_o = x'_o \cdot \cos\theta - y'_o \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \cdot (\operatorname{sen}\theta) \\ y_o = x'_o \cdot \operatorname{sen}\theta + y'_o \cdot \cos\theta \quad \cdot (-\cos\theta) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_o \cdot \operatorname{sen}\theta = x'_o \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta - y'_o \cdot \operatorname{sen}^2\theta \\ -y_o \cdot \cos\theta = -x'_o \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - y'_o \cdot \cos^2\theta \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_o \cdot \operatorname{sen}\theta = \cancel{x'_o \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta} - y'_o \cdot \operatorname{sen}^2\theta \\ -y_o \cdot \cos\theta = \cancel{-x'_o \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta} - y'_o \cdot \cos^2\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Somando ambos os lados da igualdade teremos.

$$\begin{aligned} x_o \cdot \operatorname{sen}\theta - y_o \cdot \cos\theta &= -y'_o \cdot \operatorname{sen}^2\theta - y'_o \cdot \cos^2\theta \\ x_o \cdot \operatorname{sen}\theta - y_o \cdot \cos\theta &= -y'_o \cdot (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\ x_o \cdot \operatorname{sen}\theta - y_o \cdot \cos\theta &= -y'_o \cdot \underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_o \cdot \operatorname{sen}\theta - y_o \cdot \cos\theta &= -y'_o \\ -x_o \cdot \operatorname{sen}\theta + y_o \cdot \cos\theta &= y'_o \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por (-1) , teremos :

$$-x_o \cdot \operatorname{sen}\theta + y_o \cdot \cos\theta = y'_o$$

Portanto, temos :

$$y'_o = -x_o \cdot \operatorname{sen}\theta + y_o \cdot \cos\theta$$

Agora vamos substituir o valor de y'_o em uma das equações e achar o valor de x'_o .

$$\begin{aligned}
y_0 &= x'_0 \cdot \text{sen}\theta + (-x_0 \cdot \text{sen}\theta + y_0 \cdot \text{cos}\theta) \\
y_0 &= x'_0 \cdot \text{sen}\theta - x_0 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta + y_0 \cdot \text{cos}^2\theta \\
y_0 - y_0 \cdot \text{cos}^2\theta + x_0 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta &= x'_0 \cdot \text{sen}\theta \\
y_0 \cdot (1 - \text{cos}^2\theta) + x_0 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta &= x'_0 \cdot \text{sen}\theta \\
y_0 \cdot \text{sen}^2\theta + x_0 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta &= x'_0 \cdot \text{sen}\theta \\
y_0 \cdot \text{sen}\theta + x_0 \cdot \text{cos}\theta &= x'_0 \\
x'_0 &= x_0 \cdot \text{cos}\theta + y_0 \cdot \text{sen}\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{cases} x'_0 = x_0 \cdot \text{cos}\theta + y_0 \cdot \text{sen}\theta \\ y'_0 = -x_0 \cdot \text{sen}\theta + y_0 \cdot \text{cos}\theta \end{cases}} \quad (8)$$

Imagina o vetor (x, y) que liga um ponto genérico de um sistema ortogonal à origem. Seja (x', y') suas coordenadas no novo sistema, rotacionado de θ . Podemos imaginar o vetor (X, Y) como representando o complexo $X + iY$.

Rotacionar o sistema de um ângulo θ corresponde a manter a orientação dos eixos constante rotacionar o vetor de $-\theta$.

Para rotacionar um complexo do ângulo $-\theta$, devemos multiplicá-lo põe $\text{cos}(-\theta) + i\text{sen}(\theta)$.

Lembrando a propriedade dos complexos:

$$(\text{cis}\alpha) \cdot (\text{cis}\beta) = \text{cis}(\alpha + \beta)$$

Sendo (x', y') o par ordenado no novo sistema:

$$\begin{aligned}
x' + iy' &= (x + iy) \cdot (\text{cos}(-\theta) + i \cdot \text{sen}(-\theta)) \\
&= (x \cdot \text{cos}\theta + y \cdot \text{sen}\theta) + i \cdot (-x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \text{cos}\theta)
\end{aligned}$$

De onde segue que:

$$\begin{cases} x' = x_0 \cdot \text{cos}\theta + y_0 \cdot \text{sen}\theta \\ y' = -x_0 \cdot \text{sen}\theta + y_0 \cdot \text{cos}\theta \end{cases}$$

Exemplo 2. Considere o ponto $(1, 3)$ num sistema ortogonal xOy . Determine as coordenadas desse ponto num sistema rotacionado de 30° em relação ao original (no sentido trigonométrico).

Solução:

Equações de rotação:

$$\begin{cases} x' = x_0 \cdot \text{cos}\theta + y_0 \cdot \text{sen}\theta \\ y' = -x_0 \cdot \text{sen}\theta + y_0 \cdot \text{cos}\theta \end{cases}$$

Logo:
$$\begin{cases} x' = 1 \cdot \text{cos}30^\circ + 3 \cdot \text{sen}30^\circ \\ y' = -1 \cdot \text{sen}30^\circ + 3 \cdot \text{cos}30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

As coordenadas do ponto no novo sistema serão:

$$\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3} - 1}{2} \right)$$

Exemplo 3. Sejam, em relação a um sistema de coordenadas $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ em E^2 , $P = (1, 2)$, $r : x - 2y - 1 = 0$ (equação geral de uma reta no plano). Obtenha as coordenadas de P e uma equação de r no sistema Σ_2 , obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Resolução:

Por (4) temos:

$$\begin{aligned} u &= x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + y \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ v &= -x \cdot \sin \frac{\pi}{6} + y \cdot \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{aligned}$$

Substituindo x e y pelas coordenadas de P obtemos:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, v = -\frac{1}{2} + \sqrt{3};$$

logo,

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right)_{\Sigma_2}$$

Para obter uma equação de r no sistema Σ_2 , usamos (3)

$$\begin{aligned} x &= u \cdot \cos \frac{\pi}{6} - v \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y &= u \cdot \sin \frac{\pi}{6} + v \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \end{aligned}$$

Substituindo na equação dada, vem:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v - 2 \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \right) - 1 = 0$$

donde

$$r : \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)u - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right)v - 1 = 0 \right]_{\Sigma_2}$$

Exemplo 4. Faça uma rotação em E^2 de modo que a reta $r : [x + y + 3 = 0]_{\Sigma_1}$ fique paralela ao (novo) eixo das ordenadas.

Resolução:

Devemos achar o ângulo de rotação. Para que r seja paralela ao eixo dos v , é necessário e suficiente que sua equação seja da forma ' $u = constante$ ', isto é, que o coeficiente de v seja nulo. Substituindo (3) na equação de r , temos:

$$(u \cos \theta - v \sin \theta) + (u \sin \theta + v \cos \theta) + 3 = 0$$

ou

$$u \cos \theta - v \sin \theta + u \sin \theta + v \cos \theta + 3 = 0$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)u + (\cos \theta - \sin \theta)v + 3 = 0$$

A condição é, pois,

$$\cos \theta = \sin \theta \quad (9)$$

Então, qualquer θ que satisfaça (5) serve aos nossos propósitos: $\Theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$, n inteiro.

Escolhamos, por exemplo, $\Theta = \frac{\pi}{4}$; a equação de r fica, nesse caso, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)u + 3 = 0$,

ou seja,

$$\sqrt{2}u + 3 = 0.$$

Aplicação das translações e rotações de E^2 ao estudo da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Fixemos um sistema ortogonal de coordenada (O, \vec{i}, \vec{j}) em E^2 . Será de grande utilidade no próximo capítulo fazer algumas simplificações na equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (10)$$

Vamos analisar aqui dois problemas:

1. Eliminar, por meio de uma translação, os termos de 1.º grau.

Consiste em descobrir o ponto (h, k) para o qual se deve transladar o sistema de modo que a equação (6) se transforme numa equação da forma

$$\bar{A}u^2 + \bar{B}uv + \bar{C}v^2 + \bar{F} = 0 \quad (11)$$

Substituindo as equações de translação

$$A(u+h)^2 + B(u+h)(v+k) + C(v+k)^2 + D(u+h) + E(v+k) + F = 0$$

donde, efetuando os quadrados e ordenando em relação a u e v , vem:

$$A(u^2 + 2uh + h^2) + B(uv + uk + vh + hk) + C(v^2 + 2vk + k^2) + Du + Dh + Ev + Ek + F = 0$$

$$0Au^2 + 2Auh + Ah^2 + Buv + Buk + Bvh + Bhk + Cv^2 + 2Cvk + Ck^2 + Du + Dh + Ev + Ek + F = 0$$

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + (Bk + 2Ah + D)u + (2Ck + Bh + E)v + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0 \quad (12)$$

Então, devemos achar h e k de modo que

$$\begin{cases} Bk + 2Ah + D = 0 \\ 2Ck + Bh + E = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Se o sistema (9) tiver solução, teremos resolvido nosso problema. Note que se o determinante

$$\begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC$$

for diferente de zero, o sistema (9) tem certamente solução (única). Se for nulo, podem existir infinitas soluções ou pode não existir nenhuma. Neste caso, é impossível 'eliminar os termos de 1.º grau por meio de uma translação'.

Observe agora a igualdade (8). Os coeficientes dos termos de 2.º grau são os mesmos (A, B, C) que na equação (6). Translações não afetam, pois os termos de 2.º. Além disso, chamando $G(x, y)$ o 1.º membro de (6), vemos que o termo independente de (8) é $G(h, k)$. Essas considerações permitem ganhar tempo na obtenção de (8).

2. Eliminar, por meio de uma rotação, o termo misto de 2.º grau. Consiste em descobrir um ângulo de rotação tal que a equação (6) se transforme, após a rotação, numa equação da forma

$$A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0 \quad (14)$$

Para levarmos isso a efeito, devemos preliminarmente observar o seguinte: após uma rotação de ângulo Θ , a equação (6) se transforma em

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0 \quad (15)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = A \cdot \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \sin 2\theta + C \cdot \sin^2 \theta \\ B' = (C - A) \cdot \sin 2\theta + B \cdot \cos 2\theta \\ C' = A \cdot \sin^2 \theta - \frac{B}{2} \cdot \sin 2\theta + C \cdot \cos^2 \theta \\ D' = D \cdot \cos \theta + E \cdot \sin \theta \\ E' = E \cdot \cos \theta - D \cdot \sin \theta \\ F' = F \end{array} \right. \quad (16)$$

Observe que à semelhança das equações (4) podemos obter (d) e (e) da tabela de dupla entrada abaixo. Observe também que a última igualdade, (f), nos diz que rotações não afetam o termo independente¹

	D'	E'
D	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
E	$\sin \theta$	$\cos \theta$

Mas, voltando ao nosso objetivo: para que (11) seja da forma (10), devemos ter $B' = 0$, ou seja:

$$(C - A) \cdot \sin 2\theta + B \cdot \cos 2\theta = 0$$

donde, sendo $B' \neq 0$ Se $B = 0$ ², concluímos que:

- se $A = C$, então $\cos 2\theta = 0$ e portanto θ pode ser $\frac{\pi}{4}$, donde por (a) e (c), $A' = \frac{1}{2}(A+B+C)$ e $C' = \frac{1}{2}(A-B+C)$; ou $\frac{3\pi}{4}$, e neste caso $A' = \frac{1}{2}(A-B+C)$ e $C' = \frac{1}{2}(A+B+C)$.
- se $A \neq C$, então

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}} \quad (17)$$

e qualquer θ que satisfaça a (13) serve aos nossos propósitos.

Pode-se ainda demonstrar que, escolhido θ como acima, os coeficientes A' e C' são raízes da equação do 2º grau.

$$\boxed{\begin{bmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{bmatrix} = 0} \quad (18)$$

A decisão sobre qual das raízes é A' e qual é C' depende da escolha do valor de θ , entre os muitos possíveis, e está vinculada à relação

¹O termo independente é invariante por rotações.

²o que queríamos já está feito desde o início!

$$\boxed{\cos 2\theta = \frac{A-C}{A'-C'}} \quad (19)$$

que se obtém facilmente de (12).

Exemplo 5. Fazendo mudanças de coordenadas convenientes em E^2 , transforme a equação $G(x, y) = 9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$, numa equação da forma $A'u^2 + C'v^2 + F' = 0$.

RESOLUÇÃO:

Devemos eliminar os termos de 1º grau da equação dada. Para isso, procedemos como vimos em (I). A translação

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

Substituindo na equação G teremos:

$$9 \cdot (u + h)^2 - 4 \cdot (v + k)^2 - 18 \cdot (u + h) - 16 \cdot (v + k) - 7 = 0$$

$$9(u^2 + 2uh + h^2) - 4(v^2 + 2vk + k^2) - 18u - 18h - 16v - 16k - 7 = 0$$

$$9u^2 + 18uh + 9h^2 - 4v^2 - 8vk - 4k^2 - 18u - 18h - 16v - 16k - 7 = 0$$

$$9u^2 - 4v^2 + u(18h - 18) + v(-8k - 16) + \underbrace{9h^2 - 4k^2 - 18h - 16k - 7}_{G(h,k)} = 0$$

$$9u^2 - 4v^2 + u(18h - 18) + v(-8k - 16) + G(h, k) = 0$$

onde $G(h, k) = 9h^2 - 4k^2 - 18h - 16k - 7 = 0$. Impondo que os coeficientes de u e v sejam nulos, temos:

$$\begin{cases} 18h - 18 = 0 \\ -8k - 16 = 0 \end{cases} \therefore h = 1, k = -2$$

Substituindo em $9u^2 - 4v^2 + u(18h - 18) + v(-8k - 16) + G(h, k) = 0$, obtemos $9u^2 - 4v^2 = 0$

■

Observação 3. Quando a equação dada não apresenta o termo xy , pode-se resolver também completando quadrados.

$$9x^2 - 18x = 9(x^2 - 2x) = 9[(x - 1)^2 - 1] = 9(x - 1)^2 - 9$$

$$-4y^2 - 16y = -4(y^2 + 4y) = -4[(y + 2)^2 - 4] = -4(y + 2)^2 + 16$$

Substituindo em $G(x, y) = 9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$, obtemos

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 0$$

e agora basta fazer $u = x - 1$ e $v = y + 2$

$$9u^2 - 4v^2 = 0 \blacksquare$$

4 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, $T : V \rightarrow V$ gostaríamos de saber que os vetores seriam levados neles mesmos por essa transformação. Isto é, dada $T : V \rightarrow V$, quais são os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = v$? (v é chamado vetor fixo).

Exemplo 6. $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Aplicação identidade)

$$(x, y) \rightarrow (x, y)$$

Neste caso, todo \mathbb{R}^2 é fixo uma vez que $I(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Definição 3. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Tv = \lambda v$, λ é um autovalor de T um autovetor de T associado a λ .

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo. Vejamos no exemplo a seguir, como calcular autovalores e autovetores, usando a definição.

Exemplo 7. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$v \mapsto 2v$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2. Observe geometricamente:

De um modo geral toda transformação

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto \alpha v, \alpha \neq 0$$

tem α como autovalor de qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v . Ainda mais, se:

- i. $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.
- ii. $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.
- iii. $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.

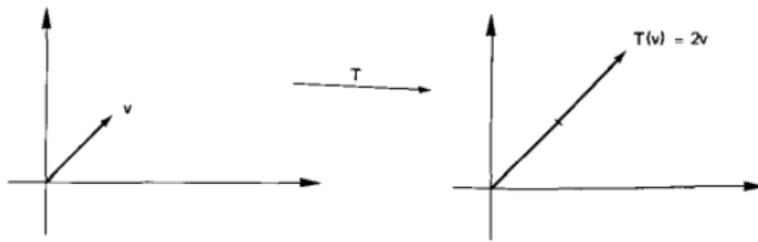


Figura 6: Autovalor

iv. $\alpha = 1$, T é a identidade.

Teorema 3. Dada uma transformação $T : V \rightarrow V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ , qualquer vetor $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ .

Definição 4. O subespaço $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é chamado o subespaço associado ao autovalor λ .

4.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada, A , de ordem n , estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, associada à matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = A \cdot v$. Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A , e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq 0$.

Dada a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, temos

$$A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}e_1 \text{ e em geral,}$$

$A \cdot e_i = a_{ii}e_i$. Então, estes vetores da base canônica de \mathbb{R}^n são autovetores para A , e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii} .

4.2 Polinômio Característico

Observamos no exemplo da seção anterior que se nos basearmos nas definições de autovalor e autovetor, para efetuar os cálculos que determinam seus valores, estaremos adotando um procedimento muito complicado. Por isto vamos procurar um método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz real A de ordem n . Vejamos um exemplo para o caso em que $n = 3$ e em seguida generalizamos para n qualquer.

Exemplo 8. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Procuramos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A \cdot v = \lambda v$. Observe que se I for a matriz identidade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita na forma $Av = (\lambda I)v$, ou ainda, $(A - \lambda I)v = 0$.

Escrevendo mas visualmente

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equação equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de três equações e três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferentes de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja $x = y = z = 0$. Mas estamos interessados em calcular os autovetores de A , isto é, vetores $v \neq 0$, tais que $(A - \lambda I)v = 0$. Neste caso $\det(A - \lambda I)$ deve ser zero, ou seja

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante da matriz, temos:

$$\det(A) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) - [-2(2 - \lambda)] = 0$$

Colocando $(2 - \lambda)$ em evidência teremos:

$$(2 - \lambda)[(4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2] = 0$$

$$(2 - \lambda)[4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2] = 0$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$$(2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

Logo as raízes do polinômio característico de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ e portanto os autovalores da matriz A são 2 e 3. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $Av = \lambda v$, para os casos:

i. $\lambda = 2$

Resolvendo a equação $Av = 2v$, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$$

A terceira equação implica que $y = 0$ e por isso vemos na segunda que $x = 0$. Como nenhuma equação impõe restrição em z , os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $(0, 0, z)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[0, 0, 1]$

ii. $\lambda = 3$

Resolvendo a equação $Av = 3v$, temos

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}$$

Tanto na primeira como na segunda equação vemos que $x = -2y$ e da terceira $y = z$. Os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $(-2y, y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[-2, 1, 1]$.

5 FORMAS LINEARES, BILINEARES E QUADRÁTICAS

5.1 FORMAS LINEARES

Suponha que uma pessoa necessite comprar ferro, chumbo e cobre a cinco, seis e quatro reais o kg, respectivamente. Se esta pessoa compra x kg de ferro, y kg de chumbo e z kg de cobre, podemos representar esta compra pelo vetor (x, y, z) e o custo total é dado pela expressão $5x + 6y + 4z$.

Observe que a "função custo"

$$c : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto 5x + 6y + 4z$$

é uma transformação linear cujo contradomínio é um espaço vetorial muito particular, pois é o conjunto dos números reais. Transformações lineares deste tipo aparecem muito e por isso recebem um nome especial.

Definição 5. *Seja V um espaço vetorial real. Uma forma linear é uma transformação linear $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$*

Se $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V e $\beta = \{w\}$ é uma base de \mathbb{R} , então

$$[f]_{\beta}^{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{1 \times n}$$

Se $v \in V$ é tal que

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

então $[f(v)]_{\beta} = [f]_{\beta}^{\alpha} [v]_{\alpha}$

5.2 FORMAS BILINEARES

Consideremos agora funções, associadas a espaços vetoriais, que se comportam mais ou menos como produtos internos, isto é, funções que a cada par de vetores associam um número de tal forma que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma forma linear em relação ao segundo vetor, e vice-versa. Funções deste tipo estão muito relacionadas com considerações acerca da energia de um corpo (veja 10.5) e,

portanto, com toda a Física. Nesta secção definiremos estas funções, que serão denominadas formas bilineares, e estudaremos alguns aspectos técnicos, principalmente o seu relacionamento com matrizes, que é o mais importante na prática.

Definição 6. *Seja V um espaço vetorial real. Uma forma bilinear é uma aplicação $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(v, w) \mapsto B(v, w)$ tal que:*

i. *Para todo w fixado, $B(v, w)$ é uma forma linear em v , isto é,*

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$$

$$\text{e } B(\alpha v, w) = \alpha B(v, w)$$

ii. *Para todo v fixado, $B(v, w)$ é uma forma linear em w , isto é,*

$$B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$$

$$\text{e } B(v, \alpha w) = \alpha B(v, w)$$

Exemplo 9. O produto usual de números reais

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto p(x, y) = xy$$

Verificando i) e ii):

$$p(x, y + z) = x(y + z) = xy + xz = p(x, y) + p(x, z)$$

$$p(\alpha x, y) = \alpha x \cdot y = \alpha(x, y) = \alpha p(x, y)$$

Analogamente mostram-se as outras propriedades.

5.3 Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dada uma base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , associamos a B uma matriz $[B]_\alpha^\alpha$ chamada matriz da forma bilinear B , na base α , do seguinte modo:

Se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ e $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$,

$$B(v, w) = B(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \sum_{i,j} x_i y_j B(v_i, v_j) = [x_1 \dots x_n]$$

$$\begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \dots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \dots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [v]_\alpha' [B]_\alpha^\alpha [w]_\alpha$$

Exemplo 10. Seja $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por $B(v, w) = -x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$ onde $v = (x_1, x_2)$ e $w = (y_1, y_2)$. Então se $\alpha = \{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 , temos

$$[B]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) \\ B(e_2, e_1) & B(e_2, e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Com isto, podemos escrever a forma bilinear dada na forma matricial:

$$B(v, w) = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$B(v, w) = [v_\alpha] [B]_\alpha^\alpha [w]_\alpha$$

5.4 Forma Bilinear Simétrica

Definição 7. A forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica se $B(v, w) = B(w, v)$ para todo $v, w \in V$.

Exemplo 11. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V . Então a forma bilinear $B(v, w) = \langle v, w \rangle$ é simétrica, pois $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

Exemplo 12. $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $B(v, w) = -x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + 3x_1 y_2 + 2x_2 y_2$ onde $v = (x_1, x_2)$ e $w = (y_1, y_2)$.

Calculando, $B(v, w)$, temos

$$\begin{aligned} B(w, v) &= ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \\ &= -y_1 x_1 + 3y_1 x_2 + 3y_2 x_1 + 2y_2 x_2 \end{aligned}$$

Como $B(v, w) = B(w, v)$, B é simétrica.

Observe que $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica. De fato:

$$B(v, w) = [x_1 x_2] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Teorema 4. Uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica se e somente se $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica.

Demonstração:

$$\text{Seja } [B]_\alpha^\alpha \text{ simétrica } [B]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$.

Seja $u = [x_1, \dots, x_n]$

$$v = [y_1, \dots, y_n]$$

$$\text{Então } B(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

$$e B(v, u) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i x_j$$

Como a adição é comutativa e $a_{ji} = a_{ij}$, temos, depois de trocar os índices i e j ,

$$B(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j = B(u, v)_\alpha$$

Agora, seja B simétrica. Então $B(u, v) = B(v, u)$

$$\text{Daí, obtemos } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} x_j y_i$$

$$\text{Invocando índices à direita, temos } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i y_j$$

Como isto é válido para todos os vetores u e v , $a_{ij} = a_{ji}$ e $[B]_\alpha^\alpha$ é simétrica. ■

5.5 Formas Quadráticas

Consideremos uma partícula de massa m deslocando-se no espaço com velocidade $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. A energia cinética que esse corpo possui é dada pela expressão

$$E_c = \frac{m\|\vec{v}\|^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right)^2$$

Portanto,

$$E_c = \frac{m}{2} \cdot v_x^2 + \frac{m}{2} \cdot v_y^2 + \frac{m}{2} \cdot v_z^2 = [v_x v_y v_z] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Desta forma, a energia cinética pode ser interpretada como uma função (que não é linear) da velocidade.

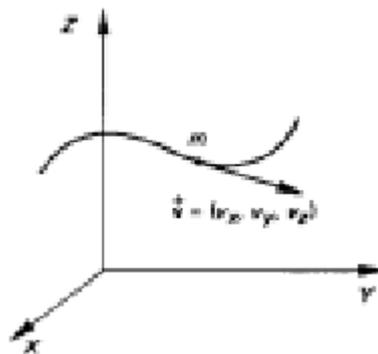


Figura 7: $E_c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Se considerarmos, agora, a aplicação bilinear simétrica

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

cuja expressão é

$$B(v_x, v_y, v_z, (w_x, w_y, w_z)) = [v_x v_y v_z] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix},$$

observamos que

$$E_c(v_x, v_y, v_z) = B((v_x, v_y, v_z), (v_x, v_y, v_z)).$$

Expressões que se comportam como a da energia cinética, isto é, que provêm de formas bilineares simétricas, recebem o nome de *formas quadráticas*.

Definição 8. Seja V um espaço vetorial real e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(v) = B(v, v)$ é chamada forma quadrática associada a B . Observe que (do exemplo 2 de Forma Bilinear Simétrica) em relação a uma base α de V , Q pode ser expressa na seguinte forma:

$$Q(v) = [v]_{\alpha}' [B]_{\alpha}^{\alpha} [v]_{\alpha}$$

onde $[B]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 13. $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(v) = x^2 - 10xy + y^2, \text{ onde } v(x, y).$$

Sabemos que

$$Q(v) = [x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Então, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2$.

Lodo, $a = 1$, $2b = -10$ e $c = 1$.

Substituindo,

$$Q(v)[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe ainda que Q é a forma quadrática associada à forma bilinear:

$$B(v, w) = [x_1 \ y_1] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

$$[w]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e

$$[B]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

(α é a base canônica de \mathbb{R}^2)

O procedimento adotado no exemplo anterior pode ser aplicado a uma forma quadrática genérica $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + cy^2$.

Concluimos então que sua forma matricial é

$$Q(x, y) = [x \quad y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 14. $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 5yz.$$

Em relação à base canônica de \mathbb{R}^3 , Q é dada na seguinte forma matricial:

$$Q(x, y, z) = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Compare com o exemplo anterior e extraia um resultado análogo para formas quadráticas $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz.$$

5.6 Diagonalização da Forma Quadrática

Veremos a seguir que qualquer que seja a forma quadrática $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ sempre existe uma base ortonormal de V em relação a qual matriz de Q é diagonal, ou seja, Q terá uma forma parecida com a do exemplo 1 de Formas Quadráticas. Antes de formalizar esse resultado no teorema a seguir, vamos "diagonalizar" a forma quadrática do exemplo 1 $Q(v) = x^2 - 10xy + y^2$ onde $v(x, y)$. Procuremos uma base β de modo que se

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$$

ou ainda

$$Q(v) = [x_1 \quad y_1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$Q(x, y) = [x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou $Q(x, y) = [v]_\alpha' [B]_\alpha^\alpha [v]_\alpha$, α base canônica do \mathbb{R}^2 . Como a matriz $[B]_\alpha^\alpha$ é simétrica, ela é diagonalizável, admitindo um conjunto de autovetores ortonormais.

Os autovalores de $[B]_\alpha^\alpha$ são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$. Procurando os autovetores, encontramos para $\lambda_1 = 6$, $v_1 = (x, -x)$ e para $\lambda_2 = -4$, $v_2 = (x, x)$.

Assim, uma base ortonormal β de autovetores será dada por

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Seja $[I]_\beta^\beta$ a matriz de mudança de base. Então

$$[B]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta [B]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha, \text{ onde } [B]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Substituindo em $Q(v) = [v]_\alpha' [B]_\alpha^\alpha [v]_\alpha$, temos

$$Q(v) = [v]_\alpha' [I]_\alpha^\beta [B]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

Como $[I]_\alpha^\beta$ é ortogonal, pois α e β são bases ortonormais,

$$\left([I]_\alpha^\beta \right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha = \left([I]_\alpha^\beta \right)'$$

donde

$$Q(v) = \left([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha \right)' [B]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha \right) = [v]_\beta' [B]_\beta^\beta [v]_\beta.$$

Isto é,

$$Q(v) = [x_1 \quad y_1] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 6x_1^2 - 4y_1^2$$

onde

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 5. *Seja $Q(v) = B(v, v)$ uma forma quadrática em V . Existe uma base ortonormal β de V tal que se*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

então $Q(v) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

Prova: Seja α uma base ortonormal qualquer de V .

Então $Q(v) = B(v, v) = [v]_\alpha' [B]_\alpha^\alpha [v]_\alpha$. Logo, a matriz simétrica e, portanto, corresponde a um operador auto-adjunto $T : V \rightarrow V$ que tem como matriz $[T]_\alpha^\alpha = [B]_\alpha^\alpha$. Como um operador auto-adjunto pode ser diagonalizado mediante uma base β de autovetores ortonormais, então

$$\begin{aligned}
[B]_{\alpha}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha} &= [I]_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha} \\
&= \left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha} \\
&= \left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha}
\end{aligned}$$

pois α e β são bases ortonormais e, portanto, $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é uma matriz ortogonal.

Então,

$$\begin{aligned}
Q(v) &= [v]_{\alpha}' \cdot \left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha} \\
&= \left([I]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha}\right)' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \left([I]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha}\right) \\
&= [v]_{\beta}' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [v]_{\beta} \\
&= [y_1 \quad \cdots \quad y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 15. Seja a forma quadrática em \mathbb{R}^2 dada por:

Se $v = (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned}
Q(v) &= -4x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2 \\
&= -4x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 \\
&= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calculemos os autovalores.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 33$$

Resolvendo a equação do segundo grau, teremos λ_1 e λ_2 .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-33)$$

$$\Delta = 4 + 132$$

$$\Delta = 136$$

Agora vamos achar λ_1 e λ_2 .

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{136}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm 2\sqrt{34}}{2}$$

$$\lambda' = \frac{2 + 2\sqrt{34}}{2}$$

$$\lambda' = \frac{2(1 + \sqrt{34})}{2}$$

$$\lambda' = 1 + \sqrt{34}$$

$$\lambda'' = \frac{2 - 2\sqrt{34}}{2}$$

$$\lambda'' = \frac{2(1 - \sqrt{34})}{2}$$

$$\lambda'' = 1 - \sqrt{34}$$

Então existe uma base β (que é aquela de autovetores da matriz) tal que se

$$[v]_{\beta} = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{34} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$Q(v) = (1 - \sqrt{34})y_1^2 + (1 + \sqrt{34})y_2^2.$$

6 CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS

Neste capítulo estaremos interessados em figuras do plano \mathbb{R}^2 ou de espaço \mathbb{R}^3 , isto é, em conjuntos de pontos no plano ou no espaço, cujas coordenadas satisfazem certas propriedades. Por exemplo, o subconjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ pode ser representado graficamente, como mostra a figura

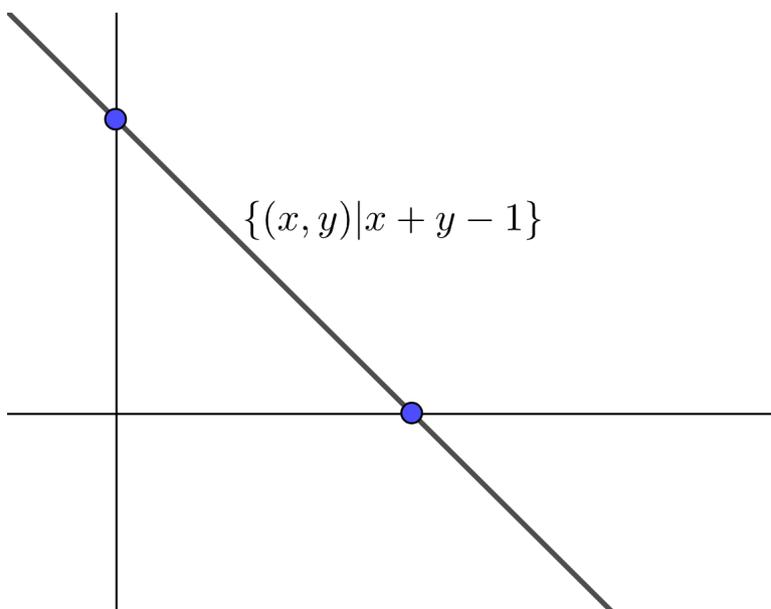


Figura 8: Cônicas

Outro exemplo é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y = 1\}$ cuja representação é

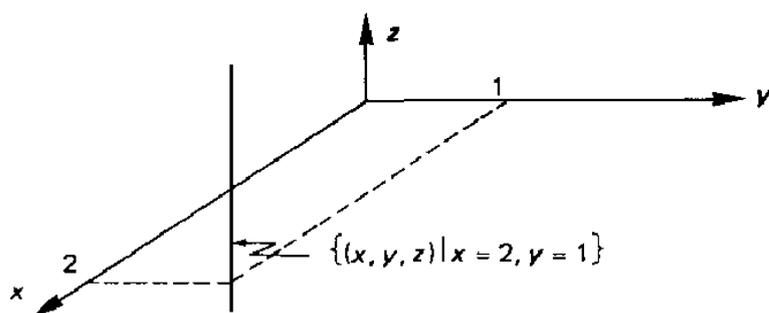


Figura 9: Tridimensional

Estaremos particularmente interessados em estudar subconjuntos de \mathbb{R}^2 da forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_1(x, y) = 0, \dots, F_k(x, y) = 0\}$$

e subconjuntos de \mathbb{R}^3 da forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F_1(x, y, z) = 0, \dots, F_k(x, y, z) = 0\}$$

As equações $F_1(x, y) = 0, \dots, F_k(x, y) = 0$ ou $(F_1(x, y, z) = 0, \dots, F_k(x, y, z) = 0$ no caso do espaço \mathbb{R}^3) são chamadas equações cartesianas da figura que o conjunto determina. Observe que estas equações relacionam as coordenadas canônicas, isto é, coordenada em relação à base canônica de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Frequentemente, dá-se apenas as equações cartesianas da figura.

Exemplo 16. Podemos desenhar a figura no plano cuja equação cartesiana (em relação à base canônica) é $y - x^2 = 0$.

A figura pedida é o subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\}$, constituído pelos pontos, da forma (x, x^2) . Portanto,

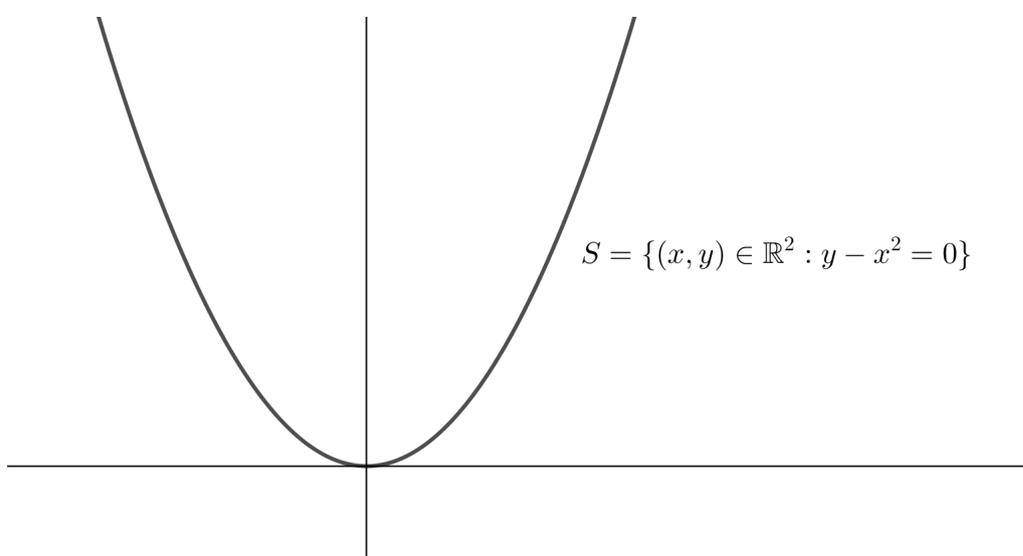


Figura 10: Função Quadrática

Exemplo 17. Para desenhar a figura no espaço cuja equação cartesiana é $y - x^2 = 0$, devemos saber que a figura pedida é o subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}$. Note que z pode assumir qualquer valor.

Observe ainda que as equações cartesianas dos dois exemplos anteriores são aparentemente as mesmas.

Analisemos agora o que acontece quando as equações cartesianas são de tipos especiais. Começemos com o tipo mais simples, ou seja, as equações $F(x, y) = 0$ ou $F(x, y, z) = 0$, de primeiro grau.

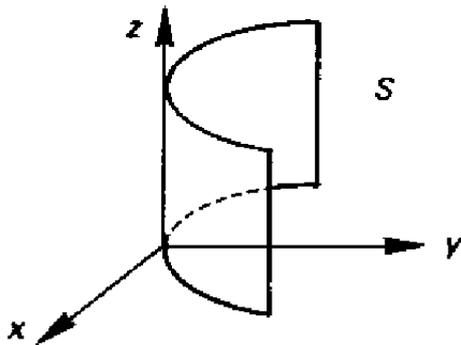


Figura 11:

6.1 Retas no Plano

Definição 9. Uma reta no plano é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação cartesiana

$$Ax + By = C$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Temos as seguintes possibilidades:

6.2 Planos no Espaço

Definição 10. Um plano no espaço é o conjunto dos pontos (x, y, z) do espaço cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem à equação

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A \neq 0 \text{ ou } B \neq 0 \text{ ou } C \neq 0.$$

É claro que esta definição algébrica deve coincidir com a definição geométrica de plano. Consideremos um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) tal que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (sempre exista). Então a equação $Ax + By + Cz + D = 0$ pode ser escrita, subtraindo-se a primeira da segunda,

$$0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = \langle (A, B, C), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle$$

onde \langle, \rangle representa o produto interno canônico em \mathbb{R}^3 . Os pontos (x, y, z) que satisfazem a equação são (x, y, z) , de tal modo que o vetor diferença $v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ seja ortogonal ao vetor (A, B, C) . Isto corresponde à direção geométrica de um plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e tem (A, B, C) como vetor normal.

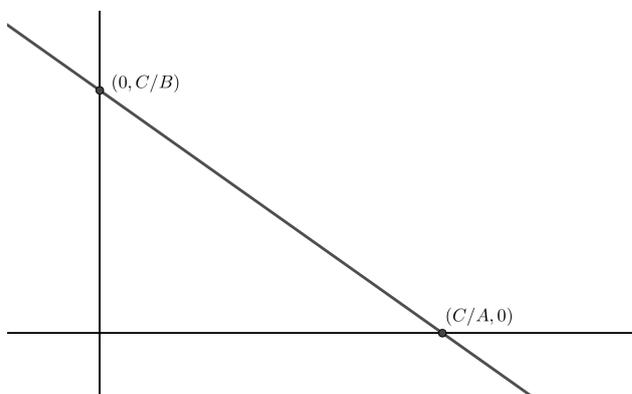


Figura 12: Equação da reta

$$A \neq 0 \text{ e } B \neq 0;$$

$$Ax + By + C = 0$$

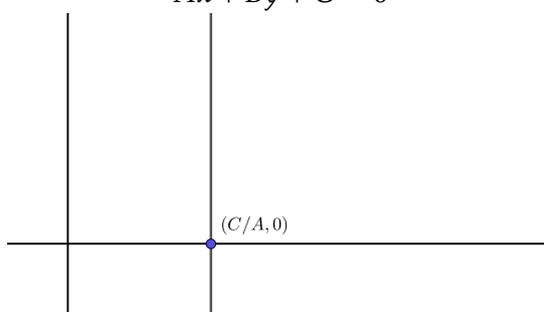


Figura 14:

Equação constante no eixo

x

$$A \neq 0 \text{ e } B = 0;$$

$$Ax = C$$

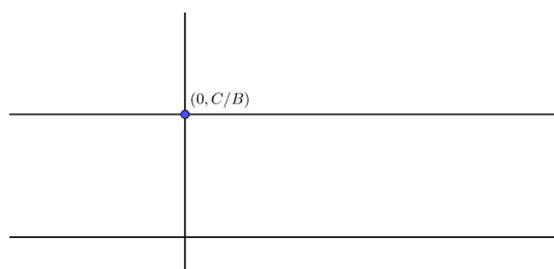


Figura 13: Equação constante

$$A = 0 \text{ e } B \neq 0;$$

$$By = C$$

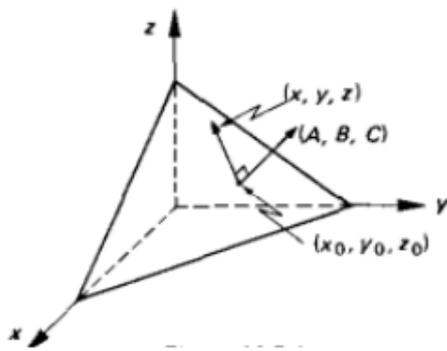


Figura 15: Vetor

Passemos agora a analisar o que acontece quando a equação cartesiana é do segundo grau.

6.3 Cônicas no Plano

Para tratar das cônicas no plano de forma adequada procedemos estudando figuras padrão e, através da diagonalização de formas quadráticas associadas, mostraremos que as equações representam uma das figuras padrão centrada, possivelmente, em outro referencial.

Definição 11. Uma cônica em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A ou B ou $C \neq 0$

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática $Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear, $L(x,y) = Dx + Ey$, e um ponto constante F . Isto é, a equação que define a cônica é:

$$\boxed{Q(x, y) + L(x, y) + F = 0}$$

Exemplo 18. Circunferência

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$A = C = 1$$

$$B = D = E = 0$$

$$F = -r^2$$

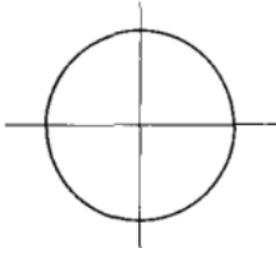


Figura 16: Circunferência

Elipse

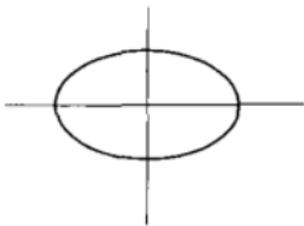


Figura 17: Elipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$A = \frac{1}{a^2}, C = \frac{1}{b^2}; a > 0, b > 0$$

$$B = D = E = 0$$

$$F = -1$$

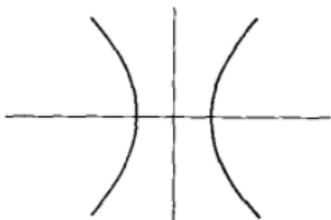
Hipérbole

Figura 18: Hipérbole

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$A = \frac{1}{a^2}, C = -\frac{1}{b^2}; a > 0, b > 0$$

$$B = D = E = 0$$

$$F = -1$$

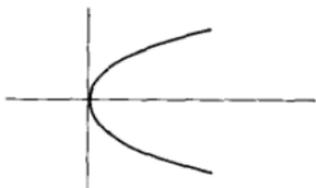
Parábola

Figura 19: Parábola

$$\boxed{y^2 - Dx = 0}$$

$$D \neq 0$$

Temos ainda os casos chamados degenerados.

Par de retas concorrentes (hipérbole degenerada)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \implies y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

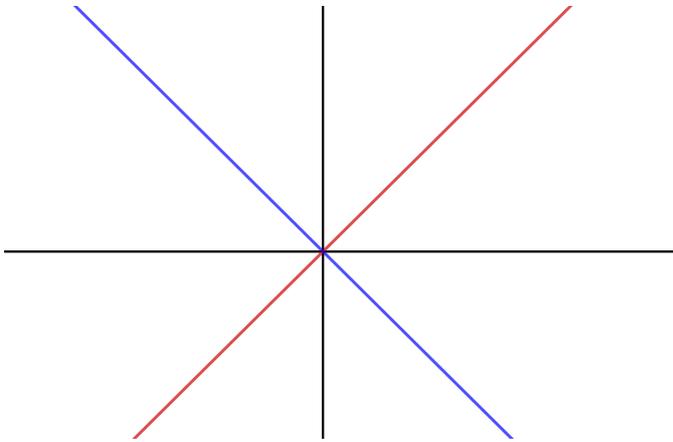


Figura 20: Retas concorrentes

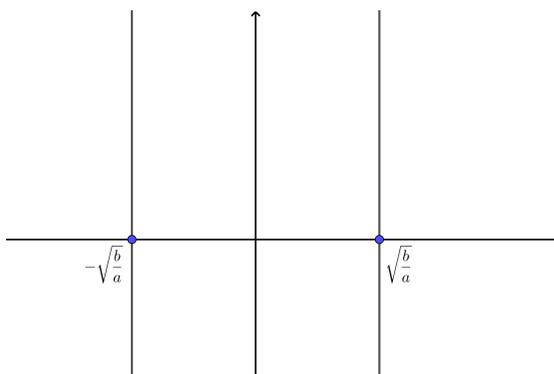


Figura 21: Retas paralelas

Par de retas paralelas (parábola degenerada)

$$ax^2 - b = 0$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

Uma reta (parábola degenerada)

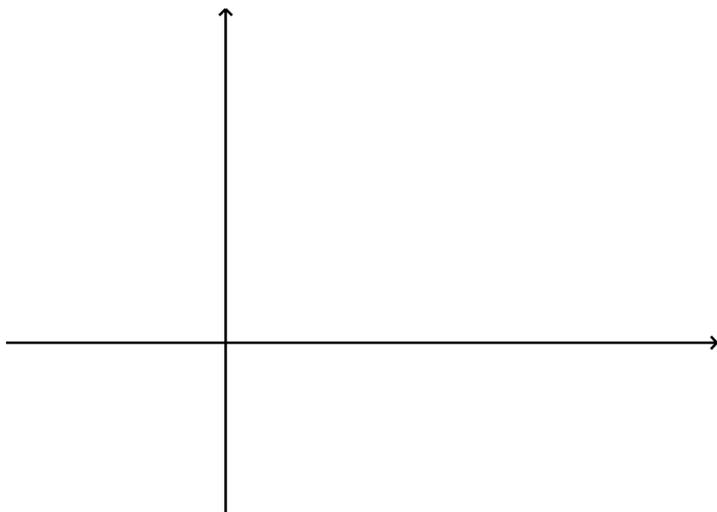


Figura 22: Parábola degenerada

$$x^2 = 0$$

Um ponto (elipse degenerada)

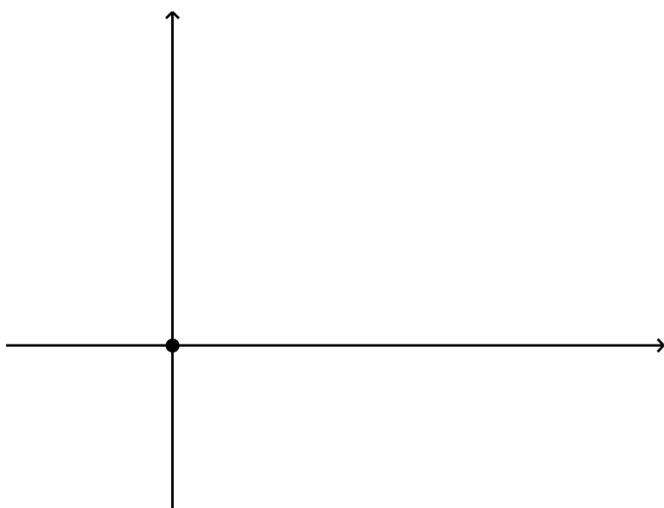


Figura 23: Elipse degenerada

$$ax^2 + by^2 = 0$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

Vazio (elipse ou parábola degenerada)

$$ax^2 + by^2 + r^2 = 0$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

$$(r \neq 0)$$

As equações das cônicas aqui apresentada estão na "forma reduzida", isto é, $B = 0$; se $A \neq 0$, $D = 0$ e se $C \neq 0$, $E = 0$. Através de uma mudança de referencial conveniente, que toda cônica toma uma das formas colocadas acima.

Estamos interessados aqui na cônicas, definidas algebricamente. No entanto, cada cônica pode ser perfeitamente caracterizada por propriedades geométricas. O tratamento geométrico das cônicas que é a forma como elas foram introduzidas pelos gregos. O estudo das cônicas feito a partir de suas propriedades geométricas é muito lindo e tem muitas aplicações.

6.4 Procedimento Geral de Classificação das Cônicas

Dada a equação (em coordenadas canônicas de \mathbb{R}^2)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(A \text{ ou } B \text{ ou } C \neq 0)$$

para achar que a figura ela representa no plano, devemos proceder do seguinte modo:

1° Passo: Escrevemos a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2° Passo: Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, precisamos encontrar os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores ortonormais v_1 e v_2

$$\text{de } \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

3° Passo: Obtemos as novas coordenadas. Para isto, precisamos para substituir na

$$\text{equação de } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I]_{\text{canonica}}^{\text{autovetores}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

4° Passo: Substituímos as novas coordenadas na equação, obtendo a equação na nova base $\{v_1, v_2\}$

$$\begin{bmatrix} X_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} [I]_{\text{canonica}}^{\text{autovetores}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0$$

ou seja,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$$

5° Passo: Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + \lambda_2 y_1^2 + by_1 + F = 0$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0$$

Seja $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$, temos então $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$
(que é umas das equações típicas) onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$$

ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by_1 + F = 0$$

Tomando $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $Y_2 = y_1$, temos

$$\lambda_1 x_2^2 + by_2 + f = 0$$

(que é uma das equações típicas) onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$$

iii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$

Como vimos, este procedimento permite-nos, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer cônica na forma de uma das equações típicas. Nesse processo classificamos a cônica, damos suas dimensões e posições no plano.

Muitas vezes, entretanto, estaremos interessados apenas em classificar a cônica dada por uma equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sem determinar suas dimensões e localização. Visando solucionar este problema de uma forma mais rápida, vamos discutir as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Consideremos, portanto, os autovalores λ_1 e λ_2 de $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$. Como já vimos, obteremos depois da eliminação do termo misto uma equação da forma

$$(*) \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$$

I Vamos analisar inicialmente, a situação em que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Neste caso, através de uma translação, obtemos

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$$

Note que se:

- i λ_1 e λ_2 forem ambos positivos, teremos para $f < 0$ uma elipse; para $f = 0$ teremos um ponto ($x_2 = y_2 = 0$) e para $f > 0$ teremos o conjunto vazio.
- ii Se λ_1 e λ_2 forem ambos negativos, também teremos uma elipse, um ponto ou vazio, conforme f seja positivo, nulo ou negativo.
- iii Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos, poderemos ter uma hipérbole, quando $f \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $f = 0$.

II Consideremos agora a situação em que $\lambda_1 = 0$ (e, portanto $\lambda_2 \neq 0$). Como vimos, partindo da equação (*), chegamos a uma equação:

$$\lambda_2 y_2^2 + ax_2 + f = 0$$

Note que:

- i Se $a \neq 0$ teremos uma parábola
- ii Se $a = 0$, podemos ter um par de retas paralelas, uma reta ou vazio.

III O caso em que $\lambda_2 = 0$ é discutido de maneira análoga ao (II).

Podemos resumir os resultados até aqui obtidos no seguinte teorema:

Teorema 6. *Dada uma cônica definida pela equação (*) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados à sua forma quadrática; então:*

- i Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou vazio).
- ii Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).
- iii Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio)

Podemos afirmar que o determinante associado à forma quadrática

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & A \end{bmatrix} \text{ é igual ao produto de seus autovalores } \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Teorema 7. *Dada a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, esta equação no plano representará:*

- i Uma elipse ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC < 0$
- ii Uma parábola ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC = 0$
- iii Uma hipérbole, se $B^2 - 4AC > 0$

6.5 Quádricas em \mathbb{R}^3

Definição 12. *Uma quádrlica em \mathbb{R}^3 é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

com A ou B ou C ou D ou E ou $F \neq 0$

Tipos de quádrlicas:

- i. Elipsóide.

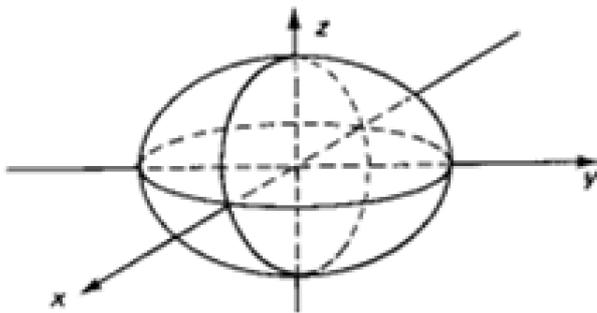


Figura 24: Elipsóide

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

ii. Hiperbolóide de uma folha

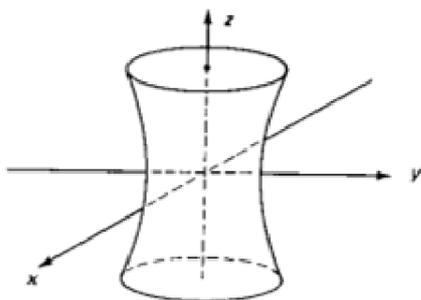


Figura 25: Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

iii. Hiperboloide de duas folhas

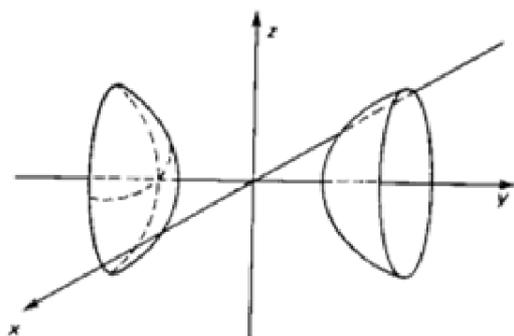


Figura 26: Hiperboloide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

iv. Parabolóide elíptico

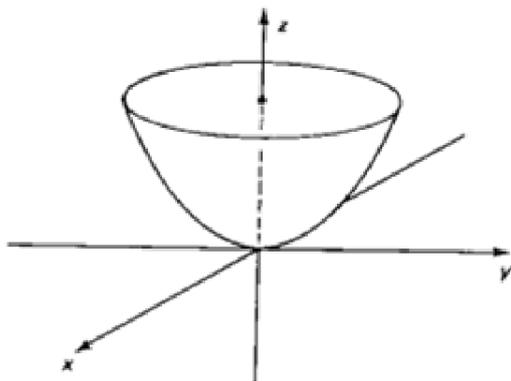
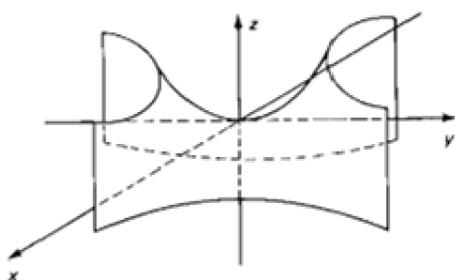


Figura 27: Parabolóide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

v. Parabolóide hiperbólico



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

vi. Cone quadrático

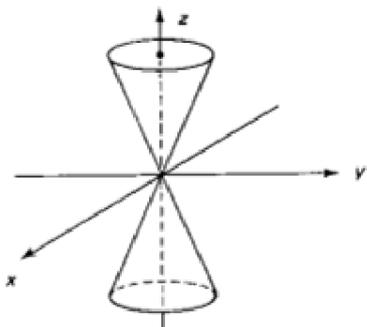


Figura 28: Cone quadrático

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

Cilindro

a) Cilindro elíptico

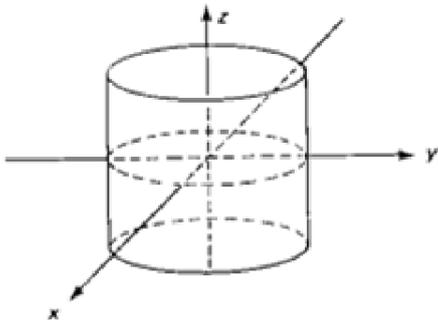


Figura 29: Cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Cilindro hiperbólico

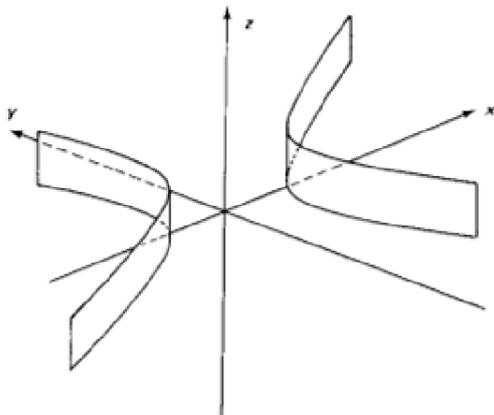


Figura 30: Cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

c) Cilindro parabólico

$$x = ky^2$$

A equação que define as quádrica pode representar o conjunto vazio ($x^2 = -1$), um ponto ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$), uma reta ($x^2 + y^2 = 0$), um plano ($z^2 = 0$), dois planos paralelos ($z^2 = 1$) ou dois planos que se interceptam ($xy = 0$). Estes casos são denominados *degenerados*. Da mesma forma que foi feito para cônica, mostramos através de uma mudança de referencial conveniente que toda quádrica é de um dos tipos descritos acima. Ou seja, quando nos é dada uma equação do 2º grau em x, y, z e precisamos

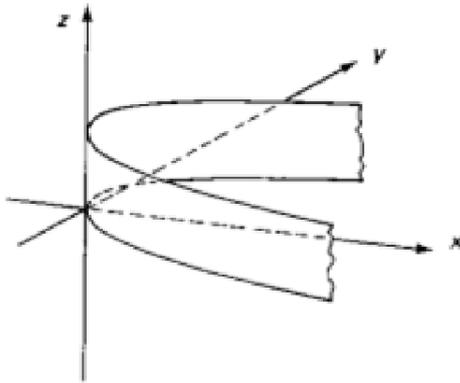


Figura 31: Cilindro parabólico

saber que a figura ela representa em \mathbb{R}^3 (classificar a quádrlica) procedemos de modo análogo à situação em \mathbb{R}^2 , reduzindo a equação e interpretando-a no final.

Exemplo 19. Para achar a figura dada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$$

Resolução: Devemos resolver

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 81$$

Calculando os autovalores e autovetores respectivos (já normalizados) obtemos

$$\lambda_1 = 1, v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\lambda_2 = 1, v_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$\lambda_3 = 4, v_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Ainda,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]_{\text{canonica}}^{\text{autovetores}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\text{autovetores}}$$

onde

$$[I]_{\text{canonica}}^{\text{autovetores}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Então, a equação se torna

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 81$$

ou

$$x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81, \text{ que é uma elipsóide.}$$

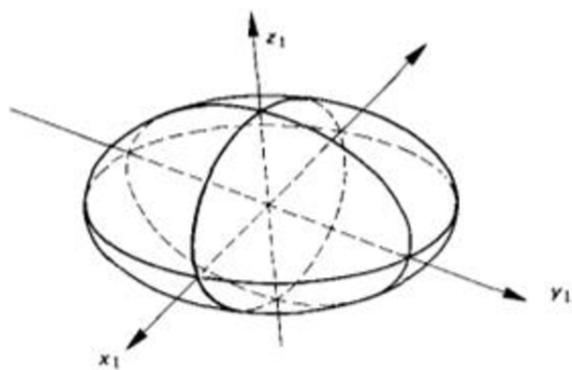


Figura 32: Elipsóide

7 CÔNICAS E A EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU

Uma cônica pode ser obtida pela intersecção de um plano com uma superfície cônica de revolução e tem por equação, em coordenadas cartesianas, uma equação do segundo grau, podendo ser uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Nessa primeira seção do trabalho recordaremos as equações de cada uma dessas cônicas analisando-as como lugares geométricos, isto é, como um conjunto de pontos que possuem uma mesma propriedade.

7.1 Circunferência

Antes de falarmos sobre a circunferência, vale lembrar que, dados dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, a distância entre eles é igual a medida do seguimento de reta AB , indicada por $d(A, B)$.

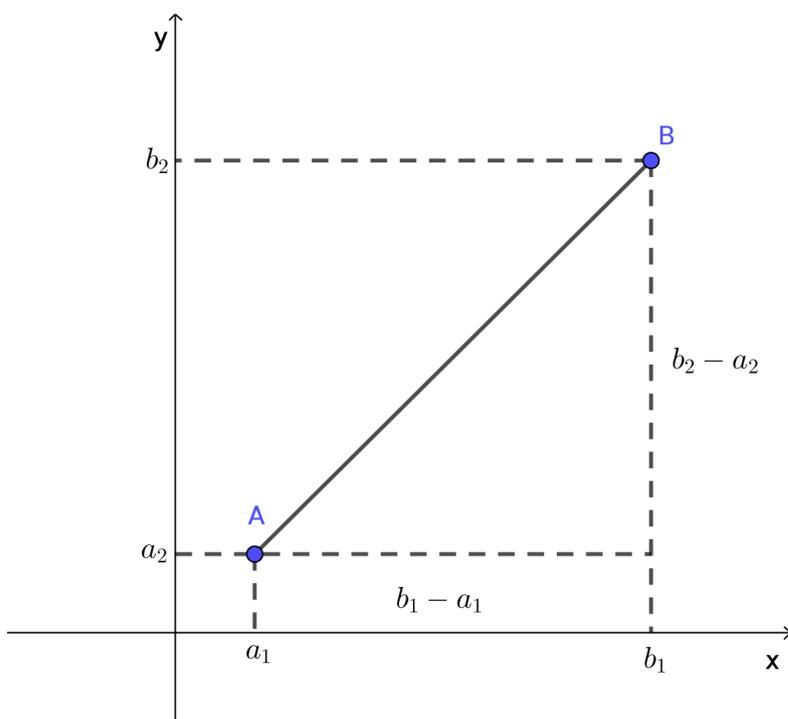


Figura 33: Distância de dois pontos

Pelo Teorema de Pitágoras, $d(A, B)^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$. O que implica em $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Definição 13. *Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, denominado centro da circunferência.*

Pela definição de circunferência, dados $C(x_0, y_0)$, centro de uma circunferência,

e r um número real positivo, para todo ponto $P(x, y)$, da circunferência, tem-se que $d(P, C) = r$. Da definição, segue que:

$$d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (20)$$

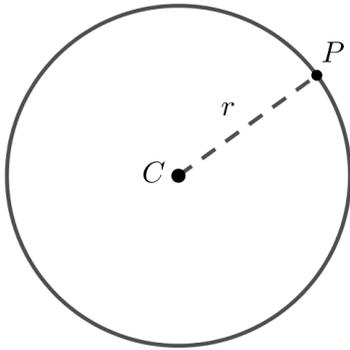


Figura 34: Circunferência

Dizemos que (1) é a equação canônica da circunferência cujo centro é o ponto (x_0, y_0) e r o raio dessa circunferência.

7.2 Elipse

Na sequência, falaremos sobre a elipse, uma importante curva cujas aplicações vão desde o simples estudo de geometria analítica a contextos bem mais avançados, como o estudo do movimento dos astros.

Definição 14. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos eixos (focos) é constante e maior do que a distância entre os focos.*

Sem perda de generalidade, consideremos uma elipse centrada na origem do sistema de coordenadas, cujos focos A e B estão localizados sobre o eixo Ox , assim $A = (-c, 0)$ e $B = (c, 0)$. A reta determinada pelos focos da elipse é denominada reta focal. A reta perpendicular, à reta focal pelo centro da elipse é a reta não focal. Denotaremos por b a distância do centro da elipse a cada um dos vértices da elipse sobre a reta não focal.

Por definição, se $2a$ é a constante que representa a soma das distâncias de um ponto $P = (x, y)$ da elipse a cada um dos focos, então:

$$d(P, A) + d(P, B) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

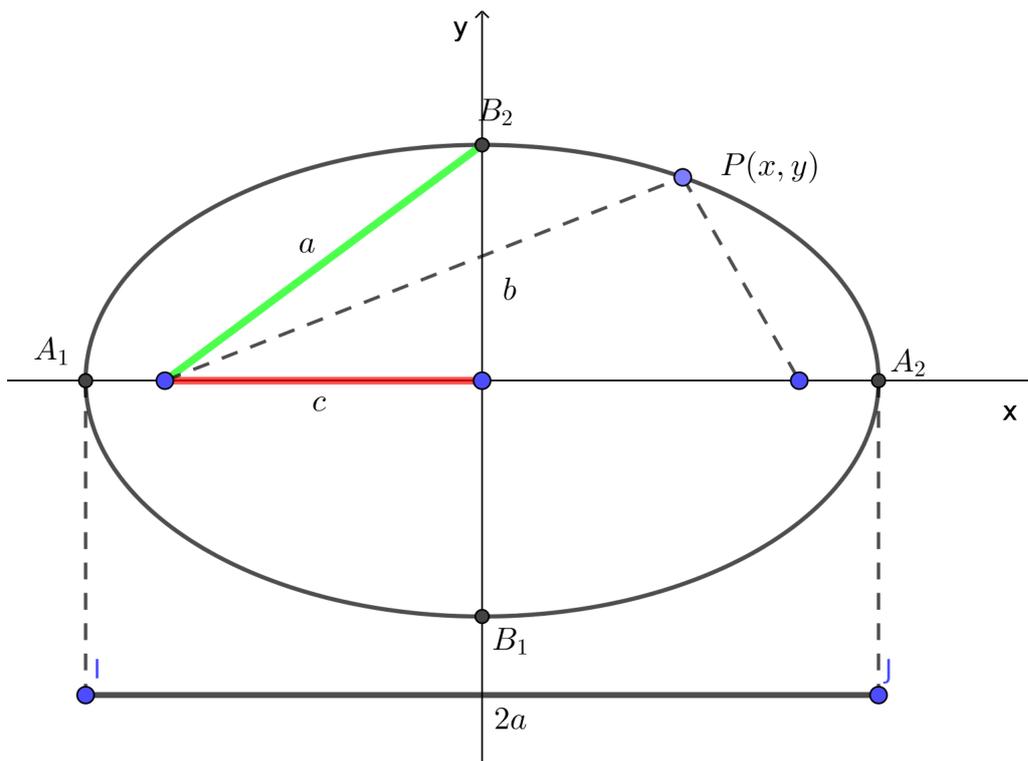


Figura 35: Elipse

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \quad (21)$$

Elevando ambos os membros da igualdade (2) ao quadrado, temos:

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 + 2xc + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + xc = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Mas $a^2 - c^2 = b^2$, portanto $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$. Dividindo a equação por a^2b^2 , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (22)$$

Tem-se que (3) é a equação canônica da elipse centrada no ponto $O = (0, 0)$, cuja reta focal coincide com o eixo Ox .

Para o caso em que a elipse está centrada na origem e a reta focal coincide com o eixo Oy , teremos a seguinte equação canônica:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

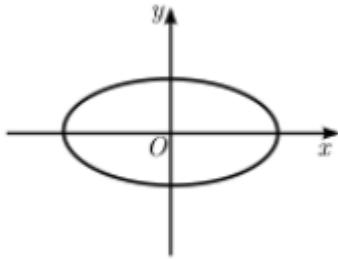


Figura 36: elipse

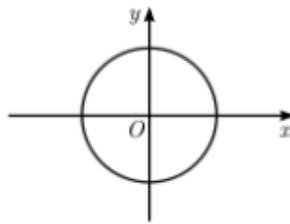


Figura 37: circunferência

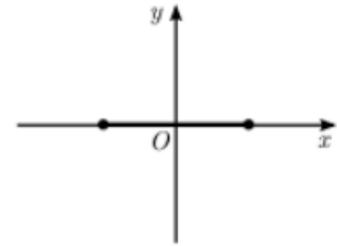


Figura 38: pontos

Ao estudarmos uma equação do segundo grau, estamos interessados em identificar qual a cônica que ela representa. Mas não basta reconhecer a cônica como uma elipse, hipérbole ou parábola, se faz necessário identificar alguns de seus elementos. Na elipse, os principais elementos a serem identificados são: as coordenadas do foco, as coordenadas do centro da elipse, a distância entre os focos $2c$, a reta focal, a reta não focal (perpendicular à reta focal no centro da elipse) e a excentricidade e , definida pela razão de c para a , isto é, $e = \frac{c}{a}$.

Sobre a excentricidade, note que $0 \leq c \leq a$, portanto $0 \leq e \leq 1$. Se analisarmos os casos extremos, isto é, se $c = 0$, os dois focos coincidem e temos portanto uma circunferência de raio $2a$. Para o caso em que $c = a$, a elipse se degenera em um segmento de reta cujos extremos são os focos.

7.3 Hipérbole

Definição 15. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos eixos (focos) é constante e menor do que a distância entre os focos.*

Ou seja, se P é um ponto da hipérbole que tem por focos os pontos $|d(P, A) - d(P, B)| = 2a$, a em que $C = (a, b)$, $D = (0, b)$, $E = (a, 0)$ e A e B , é uma constante real positiva tal que então $a < c$, $\overline{OC} = c$

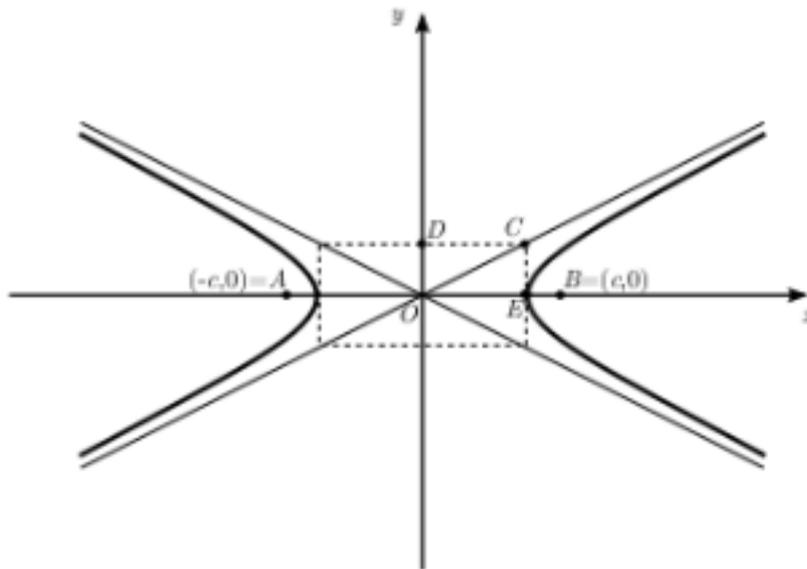


Figura 39: hipérbole

Sem perda de generalidade, consideremos uma hipérbole centrada na origem do sistema de coordenadas, de tal modo que os focos estão localizados sobre o eixo Ox . Sejam $A = (-c, 0)$ e $B = (c, 0)$ os focos dessa hipérbole. Assim, para determinarmos a equação reduzida para o caso da diferença ser positiva, $2a$, fazemos:

$$d(P, A) - d(P, B) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos:

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, teremos:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2xc + 2xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo ambos os membros por (4), teremos:

$$\Leftrightarrow xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow xc - a^2 = \sqrt{a^2(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (xc - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2 \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2 x^2 - 2xca^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 c^2 + a^4 = a^2 x^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 c^2 - a^2 x^2 + a^4 - a^2 c^2 = a^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (c^2 - a^2) + a^2 \cdot (a^2 - c^2) = a^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (c^2 - a^2) - a^2 \cdot (c^2 - a^2) = a^2 y^2$$

Como $c^2 - a^2 = b^2$:

$$\Leftrightarrow x^2 b^2 - a^2 b^2 = a^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 b^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $a^2 b^2$, teremos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

Logo, (4) é a equação canônica para a hipérbole cujo centro é a origem do sistema de coordenadas e a reta focal coincide com o eixo Ox . Aqui foi feita a análise para o ramo direito da hipérbole, para o caso da diferença ser positiva. Entretanto, de maneira análoga encontramos a mesma equação quando consideramos o caso da diferença ser negativa, isto é, para o ramo esquerdo da hipérbole.

Seguindo também o mesmo desenvolvimento, quando escolhida uma hipérbole centrada em $(0,0)$ tal que a reta focal coincida com o eixo Oy , encontramos como equação canônica da hipérbole, a equação,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (24)$$

7.4 Parábola

Definição 16. *Parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de uma reta e um ponto, fora dela, dados. A reta é denominada geratriz da parábola, enquanto o ponto é seu foco.*

Ou seja, se P , é um ponto da parábola cuja reta diretriz é r e o foco é o ponto A , por definição $d(P, r) = d(P, A)$. Para determinarmos a equação canônica de uma parábola, precisamos recordar como determinar a distância de um ponto a uma reta.

Proposição 1. *Dados um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta $r : ax + by - c = 0$, em um plano, tem-se que a distância de P a r é dada por $d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.*

A demonstração para essa proposição pode ser feita utilizando o Teorema de Pitágoras, juntamente com o fato de que a distância de um ponto a uma reta é a menor das distâncias. Assim, tomando um ponto qualquer da reta e o pé da perpendicular baixada do ponto até a reta, é possível concluir essa demonstração. intenção no momento fazê-la, e sim estudarmos a parábola.

Sem perda de generalidade, consideremos uma parábola cujo foco $A = \left(0, \frac{c}{b}\right)$ está sobre o eixo Oy e que tem a reta $r : y = -\frac{c}{b}$ por sua diretriz. Note que esses valores foram escolhidos de modo que o vértice da parábola coincida com a origem do sistema de coordenadas adotado, isto é, se V é o vértice dessa parábola, então $V = (0, 0)$.

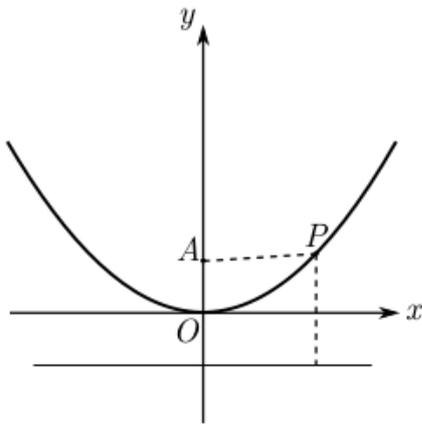


Figura 40: parábola

Seja $P = (x, y)$ um ponto dessa parábola, por definição $d(P, r) = d(P, A)$, então

$$\begin{aligned} \frac{|0x + by + c|}{\sqrt{0^2 + b^2}} &= \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{c}{b}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{(by + c)^2}{b^2} &= x^2 + \left(y - \frac{c}{b}\right)^2 \\ \Leftrightarrow b^2y^2 + c^2 + 2bcy &= b^2x^2 + b^2y^2 + c^2 - 2bcy \\ \Leftrightarrow \cancel{b^2y^2} + \cancel{c^2} + 2bcy &= b^2x^2 + \cancel{b^2y^2} + \cancel{c^2} - 2bcy \\ \Leftrightarrow 2bcy + 2bcy &= b^2x^2 \\ \Leftrightarrow 4bcy &= b^2x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4bcy}{b^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4cy}{b} \\ \Leftrightarrow x^2 \cdot b &= 4cy \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 \cdot b}{4c} &= y \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{\frac{4c}{b}}$$

Perceba que $\frac{2c}{b}$ é a distância do foco à reta diretriz, a qual denominaremos parâmetro da parábola e representaremos por p . Portanto a equação canônica da parábola que tem a reta diretriz na mesma direção do eixo Ox e cujo vértice é o ponto $(0,0)$ é $y = \frac{x^2}{2p}$.

Se a reta diretriz tiver a mesma direção do eixo Oy e vértice $(0,0)$, então a sua equação canônica será $x = \frac{y^2}{2p}$, em que p corresponde à distância e o foco à reta diretriz.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando-se apenas de sistemas e multiplicação de matrizes, conteúdos ministrados no Ensino Médio, vimos que é possível identificar qual é a cônica representada por uma equação geral do segundo grau. Justamente por reunir geometria analítica, vetores, trigonometria, matrizes e sistemas de equações, trabalhar com a rotação e a translação de curvas no plano pode ser uma atividade engrandecedora para os alunos, além de poder ser utilizada para revisar esses assuntos.

Vale ressaltar o que foi apresentado aqui pode ser estendido às demais curvas estudadas no Ensino Médio, como os gráficos gerados por funções trigonométricas, afins, logarítmicas, exponenciais, etc.

A rotação e a translação em \mathbb{R}^2 pode ainda ser utilizado na resolução de problemas em geometria plana, além de situações envolvendo vetores em Física. Portanto, o estudo de equações gerais do segundo grau deveria ser mais abordado na educação básica, ainda que em turmas específicas, destinadas à alunos com maior interesse pela Matemática.

REFERÊNCIAS

<https://sites.icmc.usp.br/apneto/cursos/material/eigen.pdf>

Boldrini, José Luiz / Álgebra Linear ... [et al.]. - 3 ed. - São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980

Callioli, Carlos A. et al.: Álgebra Linear e Aplicações - 6ª ed. Atual, 1990

Biral, Andressa Cesana. Geometria analítica / Andressa Cesana Biral, Joccitiel Dias da Silva. - Ed.rev. - Vitória : Universidade Federal do Espírito Santo, Núcleo de Educação Aberta e à Distância, 2009. 78, [9] p. : il.

Geometria analítica : 2º grau I Are[Antar Neto . .. [et al.]. - São Paulo : Ed. Moderna, 1980 (Noções de matemática; v.6)

<https://docs.ufpr.br/jcvb/online/Capitulo6-Aut08.pdf>