



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fred Jorge Carvalho Lima

**Análise de Espalhamento de Defeitos
Topológicos e Não Topológicos em (1,1)
Dimensões**

São Luís

Abril de 2022

Fred Jorge Carvalho Lima

Análise de Espalhamento de Defeitos Topológicos e Não Topológicos em (1,1) Dimensões

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Física.

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

Coorientador: Prof. Dr. Kléber Zuza Nóbrega

São Luís

Abril de 2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Lima, Fred Jorge Carvalho.

Análise de espalhamento de defeitos topológicos e não topológicos em 1,1 dimensões / Fred Jorge Carvalho Lima. - 2022.

160 p.

Coorientador(a): Kléber Zuza Nóbrega.

Orientador(a): Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, 2022.

1. Kink. 2. Lump. 3. Ondas Solitárias. 4. Soliton.
I. Nóbrega, Kléber Zuza. II. Santos Filho, Adalto Rodrigues Gomes dos. III. Título.

Fred Jorge Carvalho Lima

Análise de Espalhamento de Defeitos Topológicos e Não Topológicos em (1,1) Dimensões

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho (UFMA) - Orientador

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes (UFMA)

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos (UFMA)

Prof. Dr. Kléber Zuza Nóbrega (UFC) - Coorientador

Profa. Dra. Azadeh Mohammadi (UFPE)

Prof. Dr. Alberto Alonso-Izquierdo (Universidad de Salamanca)

São Luís
Abril de 2022

Agradecimentos

Agradeço à Deus pelas bênçãos alcançadas e pela fé que me fez superar as dificuldades durante a produção deste texto. Agradeço ao Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho por sua orientação neste doutorado e na maior parte da minha vida acadêmica, também pela boa convivência e preciosa motivação. Ao Prof. Dr. Kléber Zuza Nóbrega por sua co-orientação e importante colaboração nos trabalhos desenvolvidos. Ao Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas que nos últimos seis anos muito contribuiu em minha formação. Também por sua colaboração nos trabalhos desenvolvidos.

Gostaria de agradecer ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFMA por todo suporte ao longo de minha vivência acadêmica nesta universidade. Agradeço ao coordenador, Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior, por seu apoio em vários momentos deste doutorado. Da mesma forma ao Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, que sempre nos foi próximo. Agradeço aos professores que ministraram as disciplinas das quais participei no doutorado: Prof. Dr. Frederico E. P. dos Santos, Prof. Dr. Manoel M. Ferreira Júnior, Prof. Dr. Marco Schreck, Prof. Dr. Sergey Pavluchenko. Agradeço ao Prof. Dr. Edilberto O. Silva por disponibilizar suas máquinas quando necessitei. Também agradeço a secretaria do programa na pessoa de Lucimary Ferreira.

Agradeço à minha Família. O agradecimento mais especial à minha mãe, Vanda Maria C. Lima, sempre a levarei comigo em meus pensamentos. Também ao meu pai, Francisco Borges Lima. Agradeço à Fernanda J. L. Lima pelo amor e dias compartilhados. Agradeço a todos os meus irmãos na pessoa de Freud S. B. C. Lima.

Agradeço aos amigos de convivência acadêmica, com os quais muito aprendi: Marcos L. Dias, Luís Fernando, Josberg S. Rodrigues, David Joseph, Francisco Alves, João Alfíeres.

Por fim, agradeço à FAPEMA pela bolsa de estudos.

*Se você acha que educação é cara, ...
experimente a ignorância. (Derek Bok)*

Resumo

Nesta tese, estudamos colisões entre soluções de teorias não lineares de campo escalar em $(1, 1)$ dimensões. Começamos reproduzindo os principais resultados, seguindo uma cronologia de estudos sobre colisões entre *kinks* nos modelos *sine*-Gordon, ϕ^4 e ϕ^6 . Além disso, discorremos sobre o papel dos modos internos no processo de colisão apresentando o mecanismo de troca de energia. Em seguida, estudamos o processo de espalhamento na semilinha com uma condição do tipo Neumann na fronteira para os modelos ϕ^4 e ϕ^6 . O espalhamento na semilinha apresenta sensíveis modificações na dinâmica em relação ao espalhamento na linha. Na semilinha, os resultados são dependentes da velocidade inicial e da condição de borda. Em particular, em ambos os modelos ϕ^4 e ϕ^6 , as estruturas de janelas de ressonância são modificadas através do efeito da solução-borda com, por exemplo, restauração de janelas ausentes. Na sequência, apresentamos os resultados para colisões entre *large kink-antikink* e *small kink-antikink* em um modelo duplo *sine*-Gordon dependendo de um único parâmetro r . Para alguns intervalos do parâmetro, observamos a conexão entre dois produtos da colisão entre *large kink-antikink*: a produção de múltiplos pares *antikink-kink* e a produção de até três oscilações localizadas. Colisões entre *small kinks* apresentam as seguintes possibilidades: mudança de setor topológico, colisões do tipo *one-bounce*, *two-bounce* ou a formação de estados *bion*. Em particular, para pequenos valores de r e da velocidade, observamos a formação de falsas janelas de *two-bounce*, com a supressão de janelas verdadeiras, apesar da presença de um modo vibracional. Também estudamos colisões entre *lumps* em um modelo com um falso vácuo dependendo de um parâmetro s . Para s pequeno, o modelo apresenta soluções *lumps* usuais, apresentando instabilidade. Para valores intermediários, as soluções são metaestáveis. Para $s \rightarrow \infty$, o modelo se torna um ϕ^4 . Mostramos que, para $s \gtrsim 2$, as soluções *lump* são metaestáveis, nesse cenário, e o modo interno negativo tende ao modo zero. *Lumps* metaestáveis podem se propagar, mantendo a forma, por tempo suficiente para produção e análise dos efeitos dinâmicos. Encontramos que colisões *lump-lump* podem resultar em um ou dois pares de *kink-antikink*, estados *bion* ou algumas oscilações viajantes.

Palavras-chave: Soliton, Kink, Lump, Ondas Solitárias.

Abstract

In this thesis, we study the collision process for solutions of nonlinear scalar field theories in $(1, 1)$ dimensions. We reproduce the main results following a timeline of papers about kink collisions for the sine-Gordon, ϕ^4 , and ϕ^6 models. Moreover, we describe the role of the internal modes in the collision process via the energy exchange mechanism. Next, we study the boundary scattering on the half-line with a Neumann-type boundary condition for both ϕ^4 and ϕ^6 models. The scattering on the half-line exhibits sensible modifications in the dynamics compared with the scattering on the line. On the half-line, the outputs depend on the initial velocity and the boundary. In particular, for both models, the resonance window structures are modified by the boundary effects with the restoration of missing windows. In the following, we present the results of collisions for large and small kink-antikink of a double sine-Gordon model depending on only one parameter r . For some parameter intervals we observe two connected effects: the production of multiple antikink-kink pairs and up to three solitary oscillations. The scattering process for small kink-antikink has several possibilities: the change of the topological sector, one-bounce collision, two-bounce collision, or formation of a bion state. In particular, we observed for small values of r and velocities, the formation of false two-bounce windows and the suppression of true two-bounce windows, despite the presence of an internal shape mode. We also study collisions of lump solutions in a model with a false vacuum depending on a parameter s . The model has unstable nontopological lump solutions with a bell shape for small s , acquiring a flat plateau around the maximum for large s . For $s \rightarrow \infty$ the ϕ^4 model is recovered. We show that for $s \gtrsim 2$ the lump is metastable with the only negative mode very close to zero. Metastable lumps can propagate and survive long enough to produce dynamical effects. We find that the lump-lump collision can result in one or two kink-antikink pairs, bion states, and some regularly traveling oscillations.

Keywords: Soliton, Kink, Lump, Solitary waves.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Embarcações esperando pela pororoca no rio Mearim. Imagem: César Hipólito/Tv Mirante.	26
Figura 2 – Sistema de pêndulos acoplados. Análogo mecânico do modelo de Frenkel-Kontarova	31
Figura 3 – Exemplo clássico de quebra espontânea de simetria.	38
Figura 4 – Energia potencial da teoria ϕ^4 para os casos: a) $m^2 > 0$ e b) $m^2 < 0$	38
Figura 5 – Potencial <i>sine</i> -Gordon.	44
Figura 6 – Solução <i>kink</i> do modelo <i>sine</i> -Gordon (acima) e a correspondente densidade de energia (abaixo).	45
Figura 7 – Evolução temporal da colisão soliton-soliton.	46
Figura 8 – Evolução temporal da colisão soliton-antisoliton.	47
Figura 9 – Estado <i>breather</i> da teoria <i>sine</i> -Gordon. $\omega = 0.50$	48
Figura 10 – Colisão de um <i>kink</i> com um <i>breather</i> no modelo <i>sine</i> -Gordon. A linha preta em traços indica em que posição o centro do <i>kink</i> deveria estar. $v = 0.25$ e $\omega = 0.50$	48
Figura 11 – Evolução temporal numérica de uma colisão do tipo <i>kink-antikink</i> no modelo <i>sine</i> -Gordon. $v = 0.25$ e $x_0 = 12$	50
Figura 12 – Potencial ϕ^4	51
Figura 13 – Perfil inicial para uma colisão <i>kink-antikink</i> (cima) e <i>antikink-kink</i> (baixo)	54
Figura 14 – Colisão <i>kink-antikink</i> no potencial ϕ^4 para $v = 0.15$: a) <i>Plot</i> de superfície espaço-temporal (a paleta de cores representa o valor do campo $\phi(x, t)$); b) Evolução do campo no ponto de colisão $x = 0$	55
Figura 15 – Colisão <i>kink-antikink</i> para $v = 0.50$. O <i>kink</i> e o <i>antikink</i> colidem uma vez (<i>one bounce</i>), o estado final é um par <i>kink-antikink</i> que se separam após a colisão envolvidos em radiação.	55
Figura 16 – Colisão <i>kink-antikink</i> para $v = 0.20$: O <i>kink</i> e <i>antikink</i> colidem duas vezes (<i>two-bounce</i>) e depois são refletidos um pelo outro.	56
Figura 17 – Colisão <i>kink-antikink</i> no modelo ϕ^4 : Velocidade final do par em função da velocidade inicial v . A linha em traços representa a reta $v_f = v_i$	57
Figura 18 – Perfil do campo no centro da colisão em $x = 0$. O número classificatório da n -ésima janela é: a) $n = 1$, b) $n = 2$ c) $n = 3$ e d) $n = 4$	58
Figura 19 – Ajuste linear para o intervalo de tempo entre as duas primeiras colisões (T_{12}) e o número n	59
Figura 20 – Estrutura de janelas de <i>two-bounces</i>	59
Figura 21 – Janelas de <i>3-bounces</i> na borda de uma janela de <i>two-bounces</i>	59
Figura 22 – Janelas de <i>4-bounces</i> na borda de uma janela de <i>3-bounces</i>	60

Figura 23 – Perfil do campo no centro da colisão em $x = 0$. a) Colisão do tipo 3-bounces e b) colisão do tipo 4-bounces.	60
Figura 24 – Potencial ϕ^6	61
Figura 25 – Potencial do tipo Schrödinger (linha) e o perfil da solução estática (traços) para: (à esquerda) <i>kink</i> Φ_{1+} e (à direita) <i>antikink</i> Φ_{2+}	62
Figura 26 – Estrutura de janelas de ressonância para a configuração $(1, 0) + (0, 1)$. A linha inferior (verde) indica o tempo da 1ª colisão, a do meio (vermelha), o tempo da 2ª colisão e a linha superior (verde) o tempo da 3ª colisão.	64
Figura 27 – Potencial tipo Schrödinger (linha sólida) e o perfil do campo escalar (linha em traços) para a) o par <i>antikink-kink</i> (configuração inicial $\Phi_{1+}(x - x_0) + \Phi_{2+}(x + x_0)$) e b) <i>kink-antikink</i> (configuração inicial $\Phi_{1+}(x - x_0) + \Phi_{2+}(x + x_0) - 1$). Consideramos $x_0 = 5$	64
Figura 28 – Autofrequências da equação (3.57) em função do parâmetro de separação inicial x_0 . Linhas sólidas para soluções ímpares e tracejadas para soluções pares.	65
Figura 29 – Soluções-borda para H positivo. Com $H = 1/2$	73
Figura 30 – Resultado da análise por perturbações lineares em torno das soluções-borda: A curva em azul para $H > 0$ é o estado vibracional encontrado para a borda ϕ_1 ; A curva vermelha em traço é o resultado para a borda $\phi_2(x)$. Figura retirada da referência [95].	74
Figura 31 – Módulo da velocidade final do <i>antikink</i> para: a) $H = -0.20$, b) $H = -0.10$, c) $H = 0$, d) $H = 0.10$. A linha tracejada indica é a reta $v_f = v_i$. A linha horizontal em pontos indica o valor da velocidade v_* , Eq. (4.46), para o correspondente valor de H	75
Figura 32 – Diagrama de fase que associa o par (H, v_i) ao estado final da colisão $\phi(0, t_f)$, com $t_f = \frac{ x_0 }{v_i} + 100$	75
Figura 33 – Colisão <i>antikink</i> -borda $\phi_1(x)$: alguns cenários representativos.	77
Figura 34 – Evolução temporal do campo na borda. À esquerda temos colisões nas janelas $n = 0, 1, 2$ para $H < 0$. À direita as primeiras janelas $n = 1, 2, 3$ para $H = 0$, correspondendo ao modelo ϕ^4	79
Figura 35 – Modelo ϕ^6 na linha: a) (esquerda) <i>Kinks</i> e <i>antikinks</i> regulares: $\Phi_{1+}(x)$ (vermelho tracejado), $\Phi_{2+}(x)$ (linha de traços e pontos em azul), $\Phi_{1-}(x)$ (linha em pontos pretos), $\Phi_{2-}(x)$ (linha verde). b) (direita) Soluções irregulares: $\Phi_{3+}(x)$ (linha tracejada em vermelho), $\Phi_{4+}(x)$ (linha de traços e pontos em azul), $\Phi_{3-}(x)$ (pontos em preto), $\Phi_{4-}(x)$ (linha verde).	80
Figura 36 – a) As duas soluções reais da equação (4.60) para $\chi(H)$: X_0 (linha vermelha) e $\hat{X}_0$ (linha verde); b) Única solução real, $X_1(H)$, da equação (4.61).	82

Figura 37 – Perfil das soluções estáticas satisfazendo a condição de Neumann com $ H = 0.90H_m$	83
Figura 38 – Potencial tipo-Schrödinger para as configurações iniciais estáticas: a) $\Phi_{2+}(x - a) + \phi_1(x)$, b) $\Phi_{2+}(x - a) + \phi_2(x)$, c) $\Phi_{1+}(x - a) + \tilde{\phi}_1(x) - 1$ e d) $\Phi_{1+}(x - a) + \tilde{\phi}_3(x) - 1$. As linhas correspondem aos valores $ H = 0.05H_m$ (vermelha), $ H = 0.50H_m$ (verde) e $ H = 0.95H_m$ (azul). Com $a = -12.50$	84
Figura 39 – Quadrado das auto-frequências, ω^2 , dos modos localizados na borda em função de H . As curvas são para as soluções: $\phi_1(x)$ (linha em preto), $\phi_2(x)$ (linha tracejada verde), $\tilde{\phi}_1(x)$ (linha em azul) e $\tilde{\phi}_2(x)$ (linhas vermelhas).	85
Figura 40 – Aferindo a estabilidade do método através da configuração estável $\phi_1(x)$: a) Evolução do campo na borda em $x = 0$, b) O campo (radiação) longe da borda em $x = -50$. Neste caso, temos $H = 0.80H_m$	85
Figura 41 – Aferindo numericamente a estabilidade das soluções-borda: (a) A solução-borda $\phi_1(x)$ não muda sua forma, sendo compatível com sua estabilidade; (b) $\tilde{\phi}_3(x)$ também não muda com o tempo; A solução-borda $\phi_2(x)$, confirma ser instável, uma vez que muda sua forma, emitindo radiação, conforme (c) ou um <i>kink</i> viajante como em (d), ao mesmo tempo que em $x = 0$, ocorre o processo $\phi_2 \rightarrow \tilde{\phi}_3$	86
Figura 42 – Colisão do <i>antikink</i> $\Phi_{2+}(x)$ com a solução-borda ϕ_1 para $0 \leq H < H_m$: a) Um estado tipo <i>bion</i> na borda, b) espalhamento inelástico (<i>one-bounce</i>) com a borda, c) <i>two-bounce</i> com a borda, d) produção de um <i>kink</i> $\Phi_{+1}(x)$ que forma um estado oscilante com o <i>antikink</i> inicial. O <i>kink</i> $\Phi_{1+}(x)$ produzido na borda colide com o <i>antikink</i> inicial em ponto longe da borda por uma vez em e) e por duas vezes em f).	88
Figura 43 – Gráfico de fase para o espalhamento do <i>antikink</i> $\Phi_{2+}(x)$ com a borda ϕ_1 ($-\phi_1$) com $H > 0$ ($H < 0$): estado final $\phi(0, t_f)$, com $t_f = a /v_i + 100$	89
Figura 44 – Espalhamento do <i>antikink</i> $\Phi_{2+}(x)$ com a solução borda ϕ_1 : Velocidade crítica para <i>one-bounces</i> v_c em função do parâmetro H	90
Figura 45 – Tempo em que ocorre a primeira (linha em preto), segunda (linha em vermelho) e terceira colisão (linha em azul) do <i>antikink</i> com a solução-borda em $x = 0$. Os valores de H são: (a) $H = 0$, (b) $H = 0.2H_m$, (c) $H = 0.4H_m$, e (d) $H = 0.5H_m$	91
Figura 46 – Colisão <i>antikink</i> $\Phi_{2+}(x)$ com a borda ϕ_1 : ordem da primeira janela de <i>two-bounces</i> observável em função de H/H_m	91

Figura 47 – Campo escalar na borda $\phi(0, t)$ em função do tempo t mostrando colisões na primeira janela visível quando H é: (a) $H = 0.1H_m$, (b) $H = 0.2H_m$ e (c) $H = 0.4H_m$. O número n de pequenas oscilações entre os <i>bounces</i> é também indicado. Em cada figura o tempo foi reescalado $t \rightarrow t - \tilde{t}$ de tal forma que a primeira colisão ocorra em $t = 0$	92
Figura 48 – Colisão do <i>antikink</i> Φ_{2+} com $H < 0$. a) Para $v_i < v_*$ o <i>antikink</i> não tem energia suficiente para alcançar a borda, b) <i>two-bounce</i> na região $v_* < v_i < v_c$, c) <i>one-bounce</i> para $v_i > v_c$, d) quando $v_i > v_c$ e com grandes valores de H o campo escalar acessa o outro setor topológico do potencial. Compare com a figura 43.	94
Figura 49 – Velocidade final do <i>antikink</i> Φ_{2+} . a) $H = -0.05H_m$ b) $H = -0.20H_m$ c) $H = -0.30H_m$ e d) $H = -0.40H_m$. As linhas tracejadas representam $v_f = v_i$ e as linhas em traço-ponto indicam o valor de $v_*(H)$ de acordo com a equação (4.75).	95
Figura 50 – Colisão do <i>kink</i> Φ_{1+} com a borda $\tilde{\phi}_1$ para valores de v_i e H , mostrando: mudança de setor topológico com a produção de um <i>antikink</i> Φ_{1-} ; produção de uma oscilação localizada em c) e d).	96
Figura 51 – Módulo da velocidade final do <i>antikink</i> produzido Φ_{1-} em função de $ H /H_m$ para: a) $v_i = 0.05$ b) $v_i = 0.20$ c) $v_i = 0.50$ d) $v_i = 0.80$	97
Figura 52 – Colisão do <i>kink</i> Φ_{1+} com a borda $\tilde{\phi}_3$, mostrando: em a) um retorno <i>quasi</i> -elástico b) <i>kink</i> na configuração de equilíbrio c) emissão de radiação pela borda instável ϕ_2 d) Colisão típica da região em laranja da figura 53 e) Colisão inelástica f) Estado final em grandes valores de H	98
Figura 53 – Colisão do <i>kink</i> Φ_{1+} com a borda $\tilde{\phi}_3$ para $H > 0$: Estado final do campo escalar $\phi(0, t_f)$, com $t_f = \frac{ a }{v_i} + 100$. A linha verde em traços é a curva $v_*(H)$ dada pela equação (4.82).	99
Figura 54 – Potencial $V(\phi)$ dado pela equação (5.3) para: $r = 0.1$ (linha em azul), $r = 0.5$ (vermelho em traços), $r = 0.9$ (preto em pontos).	102
Figura 55 – (a) Soluções <i>large kink</i> $\phi_K^l(x)$ e (b) o correspondente potencial tipo Schrödinger $V_{\text{sch}}(x)$. Em ambas figuras $r = 0.1$ (em azul), $r = 0.5$ (vermelho em traços), $r = 0.9$ (preto em pontos).	103
Figura 56 – (a) Soluções <i>small kinks</i> $\phi_K^s(x)$ e (b) o correspondente potencial do tipo Schrödinger $V_{\text{sch}}(x)$. $r = 0.1$ (em azul), $r = 0.5$ (vermelho em traços), $r = 0.9$ (preto em pontos).	104
Figura 57 – Frequência do modo vibracional ω^2 associado ao <i>small kink</i> em função de r (linha em azul). A linha em preto tracejado indica o início do contínuo de estados para cada r	104
Figura 58 – Energia E_L do <i>large kink</i> (vermelho), energia E_S do <i>small kink</i> (azul) e a diferença $\Delta_E = E_L - E_S$ (verde) em função de r	105

Figura 59 – Colisão do tipo <i>large kink-antikink</i> (esquerda) e a imagem do campo escalar no último tempo de simulação em função de x (direita). Com $v = 0.1$ para (a), (b) e $v = 0.8$ para (c), (d) . Em todas as figuras $r = 0.4$.	106
Figura 60 – Colisão do tipo <i>large kink-antikink</i> para $r = 0.65$ com $v = 0.3$, mostrando a produção de dois pares estreitos de <i>small $\bar{K}$-K</i> e a propagação de duas oscilações localizadas.	107
Figura 61 – Colisão do tipo <i>large kink-antikink</i> (esquerda) com o quadro da última simulação em função de x (direita). Em a) e b) $r = 0.6$, $v = 0.8$, com a produção de três pares de <i>small antikink-kink</i> . Em c) e d) $r = 0.7$, $v = 0.74$, resultando na produção de quatro pares de <i>small antikink-kink</i> .	108
Figura 62 – Gráficos de fase para colisões do tipo <i>large kink-antikink</i> : a) (esquerda) o estado final do campo escalar $\phi(x = 0, t_f)$, com $t_f = x_0/v + 100$, b) (direita) número de ondas solitárias produzidas após a colisão.	108
Figura 63 – Colisão <i>large kink-antikink</i> mostrando: a) a produção de um novo par de <i>large antikink-kink</i> em outro setor topológico. b) perfil do campo escalar em $x = 0$. Nesta figura $r = 0.85$ e $v = 0.90$.	109
Figura 64 – Valor médio da largura do par mais externo de <i>small antikink-kink</i> em função de r .	110
Figura 65 – Colisão <i>large kink-antikink</i> : Transformada de Fourier para a oscilação presente no centro do par mais estreito de <i>small antikink-kink</i> . Os sinais foram considerados no intervalo de tempo $100 < t < 800$. Em todos os casos, temos que $v = 0.25$. As linhas tracejadas correspondem ao limite para o contínuo, enquanto que as linhas em pontos ao modo vibracional.	111
Figura 66 – Colisão <i>large kink-antikink</i> : transformada de Fourier no centro do par mais estreito. Em todos os pontos, temos que $v = 0.25$. A linha branca em traços corresponde ao limite para o contínuo. A linha branca em pontos corresponde ao modo vibracional.	111
Figura 67 – Colisão <i>large kink-antikink</i> : (a) transformada de Fourier para uma das oscilações presentes na figura 60 no intervalo de tempo $100 < t < 800$. A linha tracejada corresponde ao limite para o contínuo de estados. b) Perfil das oscilações presentes na figura 60 até o tempo $t = 5000$.	112
Figura 68 – Colisão <i>small kink-antikink</i> : velocidades v_* e v_c em função do parâmetro r . Para $v > v_*$ acontece uma mudança de setor topológico com a produção de um par de <i>large antikink-kink</i> . Para $v_c < v < v_*$ observamos colisões do tipo <i>one-bounce</i> e para $v < v_c$ podemos observar a estrutura de janelas de ressonância.	113

Figura 69 – Colisão do tipo <i>small kink-antikink</i> , mostrando: a) mudança de setor topológico com a produção de um par de <i>large antikink-kink</i> . b) Um recorte do campo escalar em $x = 0$, mostrando uma oscilação. Em ambas as figuras temos $r = 0.1$ e $v = 0.8$	113
Figura 70 – Colisão <i>small kink-antikink</i> : a) evolução da oscilação presente na figura 69b, (b) transformada de Fourier para $200 < t < 5000$. As linhas tracejadas correspondem ao limite para o contínuo. Em ambas as figuras temos $r = 0.1$ e $v = 0.8$	114
Figura 71 – Colisão <i>small kink-antikink</i> , mostrando <i>one bounce</i> para $r = 0.1$, $v = 0.55$.	114
Figura 72 – Colisão <i>small kink-antikink</i> : para $r = 0.1$ e $v = 0.24$ temos como produto um estado do tipo <i>bion</i>	114
Figura 73 – Colisão <i>small kink-antikink</i> : para $r = 0.1$ e $v = 0.267$ ocorre o fenômeno <i>two-bounce</i>	115
Figura 74 – Colisões entre <i>small kink-antikink</i> : tempo em que ocorre a primeira (preto), segunda (vermelho) e terceira (azul) colisão em função da velocidade v . (a) $r = 0.05$, (b) $r = 0.1$ e (c) $r = 0.2$	115
Figura 75 – Diagrama associando (r, v) ao estado final do campo $\phi(0, t_f)$, com $t_f = x_0/v + 100$	116
Figura 76 – Colisão <i>small kink-antikink</i> : Em a), para $v = 0.97$, temos a produção de uma oscilação em $x = 0$. Em b), para $v = 0.975$, temos como produto dois pares de <i>small kink-antikink</i> que pertencem ao mesmo setor topológico do par inicial. Em ambos os casos, $r = 0.37$	116
Figura 77 – Energia potencial para um campo ϕ	120
Figura 78 – (a) Potencial ϕ^4 invertido, Eq. (6.10), (b) Solução <i>lump</i> e sua densidade de energia (curva em pontos).	122
Figura 79 – a) Potencial $V(\phi)$ para $s = 0.8$ (vermelho em pontos), $s = 1$ (verde em traços) e $s = 5$ (azul); b) Potencial $V(\phi)$ para $s = 1$, marcando os pontos ϕ_+ , ϕ_- , ϕ_0 e ϕ_{back}	122
Figura 80 – Soluções estáticas do tipo <i>lump</i> para $s = 0.50$ (azul), $s = 1$ (vermelho em traço), $s = 3$ (verde em pontos) e $s = 5$ (traço-ponto em preto). . .	123
Figura 81 – Potencial de Schrödinger associado à perturbação em torno da solução <i>lump</i> . As curvas são referentes aos valores $s = 0.50$ (azul), $s = 1$ (vermelho em traço), $s = 3$ (verde em pontos) e $s = 5$ (pontos e traços em preto).	124
Figura 82 – (a) Solução da equação de autoestados que apresenta, para s pequeno, quatro autofrequências na região discreta. Vemos um modo negativo, $\omega_{-1}^2 < 0$ (verde em traços), o modo translacional, $\omega_0^2 = 0$, e dois modos vibracionais; ω_1^2 em pontos vermelhos e ω_2^2 em azul tracejado. (b) $ \omega_{-1}^2 $ em verde tracejado e a diferença $ \omega_2^2 - \omega_1^2 $ em preto.	125

Figura 83 – a) Pontos ϕ_- (vermelho), ϕ_{back} (verde) e ϕ_+ (azul) e em b) os correspondentes valores do potencial, $V(\phi)$, em função de s . A solução <i>lump</i> interpola entre $\phi_0 = 0$ e ϕ_{back}	126
Figura 84 – Colisão <i>lump-lump</i> com (a) $v = 0.15$ para $s = 0.5$ e (b) $v = 0.27$ para $s = 0.82$	127
Figura 85 – Colisões <i>lump-lump</i> para os seguintes casos: (a) $v = 0.217$, sendo o estado final um <i>bion</i> em $x = 0$, (b) $v = 0.1861$, duas oscilações viajantes e em (c) $v = 0.254$, três oscilações viajantes como estado final. Em todos os casos $s = 3.75$	127
Figura 86 – Colisões <i>lump-lump</i> : (a) $v = 0.215$ com $s = 3.75$ e (b) $v = 0.325$ com $s = 4.5$	128
Figura 87 – Diagrama para valores de s e v . Estado final, após a colisão, caracterizado pelo ponto $\phi(x = 0, t = \frac{x_0(s)}{v} + 150)$	129
Figura 88 – Colisões de <i>lumps</i> metaestáveis: número de oscilações viajantes (pontos em azul) e número de pares do tipo <i>kink-antikink</i> ($K\bar{K}$, pontos em vermelho) em função da velocidade v . a) $s = 3.5$, b) $s = 4.0$ e c) $s = 5.0$. Para comparação, em d) apresentamos os resultados para o espalhamento de pares <i>kink-antikink</i> do modelo ϕ^4 que corresponde ao limite $s \rightarrow \infty$	130

Sumário

1	INTRODUÇÃO	25
2	CAMPO ESCALAR	31
2.1	Formalismo lagrangiano para Campos	33
2.2	Transformações e Quantidades Conservadas	35
2.3	Quebra Espontânea de Simetria	36
2.4	Soluções BPS	39
2.5	Estabilidade Linear	41
3	COLISÕES KINK-ANTI-KINK NA LINHA	43
3.1	Modelo <i>sine</i> -Gordon	43
3.2	Solução Numérica	48
3.3	Modelo $\lambda\phi^4$	50
3.3.1	Colisões <i>Kink-Antikink</i>	53
3.3.2	Mecanismo de Ressonância e Estrutura Fractal	56
3.4	Colisões <i>kink-antikink</i> no modelo ϕ^6	61
4	ESPALHAMENTO DE <i>KINK</i> E <i>ANTI-KINK</i> POR CONDIÇÃO DE CONTORNO TIPO NEUMANN	69
4.1	Energia na semilinha	70
4.2	Espalhamento de <i>kinks</i> ϕ^4 na semilinha	71
4.3	Espalhamento de <i>kinks</i> ϕ^6 na semilinha	78
4.4	Espalhamento <i>Antikink</i> -borda	87
4.4.1	$0 \leq H < H_m$	87
4.4.2	$-H_m < H < 0$	93
4.5	Espalhamento <i>kink</i> -Borda	94
4.5.1	Espalhamento <i>kink</i> -borda $\tilde{\phi}_1$	95
4.5.2	Espalhamento <i>kink</i> -borda $\tilde{\phi}_3$	96
5	CRIAÇÃO DE PARES <i>KINK-ANTI-KINK</i> E ONDAS SOLITÁRIAS EM UM MODELO DUPLO <i>SINE-GORDON</i>	101
5.1	Modelo	101
5.2	Colisão entre <i>Large kinks</i>	106
5.3	Colisão entre <i>small kinks</i>	112
6	ESPALHAMENTO DE <i>LUMPS</i> METAESTÁVEIS EM UM MODELO COM FALSO VÁCUO.	119

6.1	Soluções <i>lump</i> em (1+1) dimensões	119
6.2	Modelo s -dependente	122
6.3	Colisões <i>lump-lump</i>	125
7	CONCLUSÃO	133
	REFERÊNCIAS	137

APÊNDICES 149

APÊNDICE A – DIFERENÇAS FINITAS CENTRAIS E INTEGRA- DOR SIMPLÉTICO 151

A.1	Discretização central de 4ª ordem	152
A.2	Diferenças Finitas Centrais de ordem n	153
A.3	Integração Simplética	154

APÊNDICE B – FORÇA ESTÁTICA ENTRE *KINK-ANTI**KINK* E *ANTI**KINK*-BORDA 157

B.1	Modelo ϕ^4	158
B.1.1	Força estática na interação <i>kink-antikink</i>	158
B.1.2	Força de interação entre <i>antikink</i> e Solução-borda	159
B.2	Modelo ϕ^6	160
B.2.1	Força entre <i>kinks</i>	160
B.2.2	Força entre o <i>kink</i> e a Fronteira	162

Artigos Publicados

A contribuição original desta tese é baseada nas seguintes publicações:

- Fred C. Lima, Fabiano C. Simas, Kléber Zuza Nóbrega e Adalto R. Gomes. **Boundary Scattering in the ϕ^6 Model**. JHEP, v.10, p. 147, 2019.
- Fabiano C. Simas, Fred C. Lima, Kléber Zuza Nóbrega e Adalto R. Gomes. **Solitary oscillations and multiple antikink-kink pairs in the double sine-Gordon model**. JHEP, v.12, p. 143, 2020.
- Fred C. Lima, Fabiano C. Simas, Kléber Zuza Nóbrega e Adalto R. Gomes. **Scattering of metastable lumps in a model with a false vacuum**. Physics Letters B, v.822, p. 136707, 2021.

1 INTRODUÇÃO

A região norte do estado do Maranhão, no Brasil, mais especificamente na foz do rio Mearim, apresenta uma grande variação de maré. Todos os anos em determinada época, durante a lua cheia ou lua nova a variação da maré é máxima. Nessas condições, quando os constantes movimentos do oceano alcançam a foz do rio Mearim, este funciona como um canal, menos profundo que o oceano. Forma-se então a onda viajante conhecida como *pororoca* - do tupi, estrondo. A pororoca é um fenômeno natural que ocorre em regiões que apresentam grande variação de maré. É uma onda conhecida por viajar grandes distâncias rio adentro mantendo a sua forma por muito mais tempo que as ondas comuns às proximidades de uma praia [1]. Na figura 1 vemos algumas embarcações prontas para acompanhar o traslado da pororoca no rio Mearim. Este é um fenômeno natural, que podemos presenciar em nossa escala de vivência, no qual vemos a propagação localizada de uma quantidade considerável de energia através do meio aquoso e cuja causa inicial advém da interação gravitacional terra-lua. Podemos então nos perguntar se em outras escalas de energia, maiores ou menores, ocorrem fenômenos equivalentes envolvendo outros meios de propagação ou outras interações.

O primeiro relato formal de observação de um fenômeno com essas características foi feito por John Scott Russel em 1834 [2]. O relato mostra que as ondas produzidas por um barco se propagaram por um canal, por uma grande distância, sem alterações perceptíveis na sua velocidade e forma. Fisicamente, classificamos fenômenos com essas características de ondas solitárias. Ondas solitárias são objetos físicos cuja propriedade principal consiste no transporte uniforme e localizado de energia. Matematicamente, as ondas solitárias podem ser adequadamente descritas por equações diferenciais parciais não lineares. Por exemplo, a onda solitária observada por Russel tem a sua dinâmica descrita pela equação não linear de Korteweg-de Vries (KdV) [3]. Outras propriedades das ondas solitárias podem ser percebidas por análise de seu espalhamento. O espalhamento entre as soluções da equação KdV mostra que os pulsos iniciais sobrevivem a colisão sem perda de suas propriedades físicas. As ondas solitárias que mantêm suas propriedades após a interação com uma outra onda solitária são chamadas de *solitons*. A palavra *soliton* é atribuída a Martin Kruskal e N. J. Zabusky, que ao estudarem soluções periódicas da equação KdV acrescentaram o sufixo *on*, comum ao nome de partículas (elétron, fóton,...) [4]. *Solitons* aparecem de diversas formas na natureza e, atualmente, podem ser criados em laboratórios. Suas características têm sido empregadas para descrever uma grande variedade de fenômenos nas mais diversas áreas como ótica não linear, biofísica, interações no universo primordial e na física de partículas (vide a Ref. [5] e referências correlacionadas).



Figura 1 – Embarcações esperando pela pororoca no rio Mearim. Imagem: César Hipólito/Tv Mirante.

Defeitos topológicos são definidos como soluções estáveis de equações não lineares, possuindo energia finita e localizada [6]. Neste sentido, são um caso particular da definição de onda solitária. Sua particularidade reside no fato de possuírem carga topológica não nula, o que significa podem representar uma transição entre estados degenerados de um sistema. Como exemplos de defeitos topológicos podemos citar: a solução *kink* em $(1 + 1)$, vórtices em $(2 + 1)$ e monopólos em $(3 + 1)$ dimensões [7].

O estudo de ondas solitárias tem sido feito predominantemente a partir da ciência não linear. A ciência não linear por si própria não deve ser considerada como uma nova área isolada da ciência, mas como um campo extra a ser explorado em praticamente todas as áreas. Por exemplo, a teoria da relatividade e a mecânica quântica, ambas formalizadas no começo do século XX, podem ser consideradas novas áreas da física, observados os seus limites de validade. Por outro lado, o estudo para identificação de padrões não lineares pode ser realizado em qualquer escala de tamanho ou energia.

Um sistema é considerado não linear quando os resultados finais de um processo não são proporcionais aos iniciais. Neste sentido, muitos sistemas naturais ou sociais apresentam comportamento não linear. Um exemplo bem conhecido na física é do sistema massa-mola; Se o alongamento da mola for muito grande, a força restauradora não mais pode ser descrita pela lei de Hook, pois o sistema se torna um oscilador não linear. Um segundo exemplo em que podemos perceber não linearidade é o do pêndulo simples. Sabemos que para pequenos desvios da posição de equilíbrio, o pêndulo tem comportamento linear, o que indica que é válido o princípio da superposição de soluções. Matematicamente, uma das principais assinaturas da não linearidade é a quebra de validade desse princípio que

pode ser percebida através da equação

$$\ddot{\theta} + (g/l) \sin \theta = 0, \quad (1.1)$$

que descreve o movimento de uma massa pontual em um pêndulo simples de comprimento l que foi desviado por um ângulo θ da sua posição de equilíbrio, com g sendo a aceleração gravitacional. Não é difícil notar que essa equação é não linear, pois se temos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ sendo soluções independentes, vemos que $\theta_3(t) = \theta_1 + \theta_2$ não será uma solução, e isto é logo percebido, dado que $\sin(\theta_1 + \theta_2) \neq \sin \theta_1 + \sin \theta_2$. Se consideramos θ muito pequeno, a equação torna-se linear e o princípio da superposição é válido novamente. Outras assinaturas da não linearidade são notadas por estruturas complexas presentes na natureza como por exemplo: o padrão ramificado das árvores e percurso de rios, estruturas fractais, sistemas complexos, caos e os próprios *solitons*, que são descritos por equações não lineares [8]. Diante desse cenário, vemos que a mecânica newtoniana e o eletromagnetismo de Maxwell, que são teorias lineares, não são suficientes para se obter uma descrição completa da natureza, uma vez que importantes padrões presentes na natureza não são englobados por estas duas áreas. Ainda assim, quase todo aparato tecnológico da humanidade é fundamentado na mecânica e eletromagnetismo, teorias que já foram exaustivamente estudadas. Cabe então a seguinte motivação: um avanço no entendimento da natureza está a emergir através da ciência não linear, que só recentemente tem sido utilizada. De fato, a complexidade das teorias não lineares é a principal razão para que estas tenham sido exploradas somente a partir da metade do século XX, com a possibilidade de implementação de métodos numéricos por computadores. Desde então, esses problemas têm sido um laboratório para o desenvolvimento de ferramentas matemáticas úteis para as ciências naturais e sociais. Neste sentido o estudo das ondas solitárias, descritas por teorias não lineares, se mostra relevante.

O segundo “ingrediente” que utilizamos para a descrição dos fenômenos localizados é uma função real, invariante por transformações relativísticas, conhecida como campo escalar. Na física contemporânea, as diferentes interações conhecidas (gravitacional, eletromagnética, forte e fraca) são descritas em termos de campos que podem ser de natureza escalar, tensorial ou espinorial [9, 10]. A descrição por um campo escalar é a mais simples dentre as possíveis. Contudo, muitos fenômenos do tipo *solitons* podem ser estudados através de uma teoria de campo escalar. Em particular, nesta tese exploramos as propriedades das soluções conhecidas como *kinks* e *lumps*. *Kinks* são estruturas topológicas linearmente estáveis por pequenos desvios, enquanto que *lump* são não topológicos e instáveis por pequenas perturbações. A solução *kink*, em geral, pode ser associada ao estudo de fenômenos que apresentam transição de determinada propriedade física de um sistema. No contexto da cosmologia, soluções *kinks* descrevem uma estrutura fractal para paredes de domínio [11–13]; no contexto da biofísica, tais soluções são associadas as excitações na dupla hélice do DNA [14] e a transições não perturbativas em uma cadeia de

poliacetileno [15]. Já as soluções *lump* podem descrever *bright solitons*, soluções de uma equação de Schrödinger não linear no contexto da comunicação por fibras ópticas [16–19].

Nesta tese, analisamos o espalhamento entre soluções *kinks* e entre soluções *lump* em $(1 + 1)$ dimensões. Isto é possível através do estudo da física de um campo escalar e de técnicas para lidar com a natureza não linear presente nas interações. Soluções tipo *kink*, em geral, podem interagir de três formas: através de forças estáticas [7, 20]; por modos normais ou quasi-normais de vibração, que possuem capacidade de armazenar a energia cinética [21–25]; por radiação [26].

A área de estudo sobre colisões entre *kinks* ganhou força a partir da segunda metade do século XX, inicialmente com o método de espalhamento inverso sendo aplicado às teorias integráveis¹, como a *sine-Gordon* [28, 29]. A associação do par *kink-antikink* com o par partícula-antipartícula foi uma das motivações para o estudo do espalhamento destas soluções. Os resultados mostram que em modelos integráveis os *kinks* colidem, se sobrepondo por um pequeno tempo, e reassumem a forma inicial após a colisão sendo modificados apenas por uma fase, que implica em um atraso ou adiantamento em relação ao cenário sem colisão. Neste sentido, eles se comportam como os *solitons* observados na natureza. Apesar disso, do ponto de vista da física de partículas, a matriz de espalhamento do modelo *sine-Gordon* não leva em conta o nascimento de novas partículas [30]. Essa foi uma das razões pelas quais a comunidade passou a estudar também o espalhamento entre soluções *kinks* nos chamados modelos não integráveis, dentre estes, o bem conhecido modelo ϕ^4 . A colisão em modelos não integráveis apresenta resultados bem diferentes dos observados em modelos como o *sine-Gordon*. A diferença mais notável é que nos modelos não integráveis as soluções *kinks* não reassumem a sua forma exata após a colisão, há uma diversidade de estados finais. Ver-se então que a noção de integrabilidade se tornou importante para a compreensão dos resultados das colisões entre tais soluções de energia localizada.

Diante desse contexto, estruturamos esta tese da seguinte forma:

No capítulo 2 apresentamos o campo escalar através do formalismo Lagrangeano. Apresentamos o bem conhecido modelo de Frenkel-Kontorova para exemplificar como o campo escalar é apto para representar interações em um sistema contínuo. Obtemos a equação de movimento para uma Lagrangeana com dinâmica padrão; mostramos, através do teorema de Noether, as simetrias e quantidades conservadas, obtendo o tensor de energia momento. Também apresentamos o conceito de quebra espontânea de simetria, tomando como exemplo o caso da teoria escalar $\lambda\phi^4$. Logo em seguida, apresentamos o formalismo de primeira ordem, conhecido como método BPS (Bogomol’nyi, Prasad e Sommerfield). Através do método BPS podemos obter as soluções que possuem as menores

¹ Em uma teoria integrável existem tantas constantes de movimento quanto são os graus de liberdade do sistema [27].

energias possíveis à teoria. Finalizamos o capítulo com o estudo de perturbações lineares e a condição de estabilidade para soluções BPS.

No capítulo 3 buscamos fazer uma revisão acerca dos principais aspectos para colisões entre *kinks*. Para isso, consideramos os modelos que recorrentemente são estudados na literatura da área. Começamos apresentando as soluções do modelo integrável *sine-Gordon*. Mostramos as formas analíticas para interação entre *kinks* desse modelo. Em seguida apresentamos um método numérico que conduz a resultados equivalentes. Vemos que os *kinks* no modelo *sine-Gordon* de fato interagem como *solitons*. Continuamos o estudo de colisão com o modelo ϕ^4 . Os resultados desta seção são extremamente importante, porque o modelo ϕ^4 é tido como um protótipo de resultados para colisões entre *kinks* em modelos não integráveis. Neste caso, as interações entre *kinks* revelam padrões mais complexos. Em particular, as assinaturas da não linearidade se tornam mais evidentes neste modelos. Por exemplo, observamos o fenômeno *bion*, que apresenta evolução caótica. Uma outra assinatura da não linearidade é a existência de uma estrutura fractal de janelas de *n-bounces* [13]. Tal estrutura foi satisfatoriamente explicada por Campbell, Schonfeld e Wingate (CSW) através do chamado mecanismo de troca de energia entre os modos internos das soluções *kinks*, ao qual também nos referimos como mecanismo CSW [22]. Seguimos com o estudo do espalhamento de soluções do modelo ϕ^6 , no qual encontramos um contraexemplo ao mecanismo CSW. Por fim, mostramos os temas que recorrentemente vêm sendo estudados por pesquisadores da área.

No capítulo 4 estudamos o espalhamento de soluções *kinks* dos modelos ϕ^4 e ϕ^6 na semilinha. Em ambos os casos, a semilinha é imposta por uma condição de contorno do tipo Neumann que induz o surgimento de um novo termo de acoplamento na energia dos estados BPS. A condição de contorno faz surgir as soluções-borda adequadas a cada caso, e então, soluções não regulares na linha completa podem ser consideradas na semilinha. Primeiramente apresentamos, em caráter de revisão, os resultados do modelo ϕ^4 na semilinha. Em seguida, apresentamos os nossos resultados para o modelo ϕ^6 . Em ambos os modelos, observamos que algumas propriedades de colisões na linha completa continuam válidas, porém interessantes novos comportamentos são relatados.

No capítulo 5 estudamos um modelo duplo *sine-Gordon* dependendo de um parâmetro r . Neste modelo temos dois setores topológicos distintos que resultam em duas soluções distintas: *small* e *large kinks*. O espalhamento de *large kinks* nos leva a fenômenos interessantes como a produção de múltiplos pares de *small antikink-kink* e oscilações solitárias viajantes. Quanto maior for o parâmetro r , mais pares podem ser produzidos. Em seguida, estudamos as colisões no setor de *small kink*. As soluções *small kink* possuem um modo vibracional, cuja frequência depende de r . Neste caso, os efeitos da variação do parâmetro r são notados principalmente na estrutura de janelas de ressonância.

No capítulo 6, estudamos um modelo em que as soluções são do tipo *lump*. As

soluções *lump* nesse caso têm suas principais propriedades dependendo de um parâmetro s . Para s pequeno, os *lumps* são notavelmente instáveis enquanto que em valores maiores de s , são metaestáveis. No limite para s muito grande, as soluções *lump* se tornam equivalentes a dois pares *kink-antikink* do modelo ϕ^4 . Realizamos a colisão entre essas soluções *lump* no cenário de instabilidade, metaestabilidade e para valores maiores do parâmetro s .

No capítulo 7, apresentamos as nossas conclusões e perspectivas.

2 Campo Escalar

O formalismo lagrangiano é a ferramenta adequada para descrever sistemas dinâmicos sujeitos a vínculos. A principal vantagem, em relação ao formalismo vetorial de Newton, é a sua dependência de uma única função escalar,

$$L = T - V,$$

conhecida como *lagrangiana* [27, 31]. T e V são as energias cinética e potencial, respectivamente. Uma vez conhecida a lagrangiana, as coordenadas $q_k(x, t)$ ficam univocamente determinadas pelo sistema de equações diferenciais de segunda ordem,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1 \dots n, \quad (2.1)$$

desde que as $2n$ condições iniciais sejam conhecidas. Tais equações podem ser obtidas a partir da seguinte variação [27]:

$$\delta S = 0. \quad (2.2)$$

Onde

$$S = \int L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad (2.3)$$

é definido como sendo a ação.

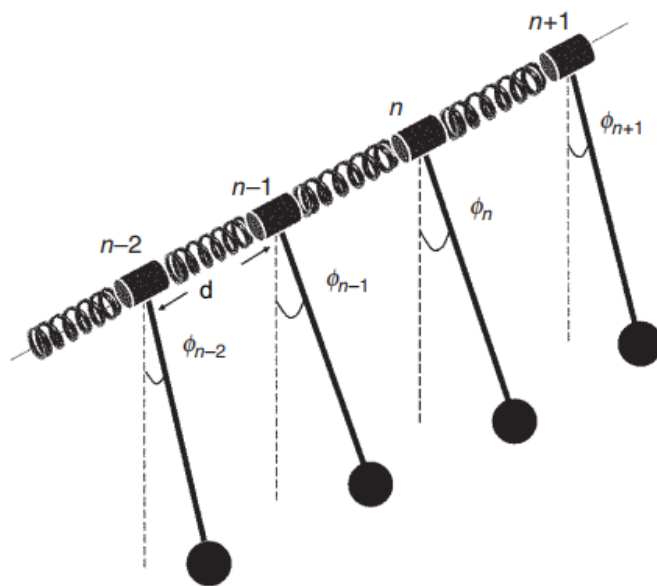


Figura 2 – Sistema de pêndulos acoplados. Análogo mecânico do modelo de Frenkel-Kontarova

Consideremos agora o seguinte sistema: um conjunto de pêndulos simples com comprimento l , separados por uma distância d , conforme descrito na figura 2 [20]. Este é um análogo mecânico do modelo de Frenkel-Kontarova [32, 33]. Vamos considerar como coordenada a variável $\phi(x_n, t) = \phi_n$ que indica o ângulo de desvio do n -ésimo pêndulo, que se encontra em x_n , de sua posição de equilíbrio. A energia potencial em x_n devido à torção com o pêndulo adjacente em x_{n-1} pode ser expressa da seguinte forma:

$$U_{n,n-1} = \frac{\alpha}{2}[\phi_n - \phi_{n-1}]^2.$$

Sendo α a constante de torção. A energia cinética em x_n é

$$T = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t} \right)^2,$$

sendo I o momento de inércia.

A energia potencial completa é dada por

$$U_{n,n+1} + U_{n,n-1} + V_n.$$

V_n é o potencial gravitacional, que no caso do pêndulo simples, é dado por $V(\phi_n, t) = -mgl(1 - \cos \phi_n)$. A lagrangiana do sistema pode ser escrita da seguinte forma

$$L = \sum_n \mathcal{L}_n(\phi_n, \dot{\phi}_n), \quad (2.4)$$

onde $\mathcal{L}_n = (\frac{I}{2})\dot{\phi}_n^2 - U_{n,n+1} - U_{n,n-1} - V_n$. A equação de movimento para o pendulo em x_n é então dada por:

$$I\ddot{\phi}_n - \alpha[\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}] + mgl \sin \phi_n = 0. \quad (2.5)$$

Se considerarmos que $\phi \ll 1$, o sistema se comporta harmonicamente sem acoplamento dos modos de vibração dos pêndulos adjacentes. Por outro lado, se consideramos o cenário em que a variação de ϕ_n seja muito maior que a distancia d que separa os pêndulos, podemos aplicar o limite $d \rightarrow 0$. Nesse limite $\phi_{n-1} = \phi(x - d, t)$ e $\phi_{n+1} = \phi(x + d, t)$. E a expansão em série de Taylor resulta

$$\phi(x_{n+1}) \approx \phi(x_n) + d \frac{\partial \phi(x_n)}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x_n)}{\partial x^2} + \frac{d^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi(x_n)}{\partial x^3} + \frac{d^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi(x_n)}{\partial x^4} + \dots \quad (2.6)$$

e

$$\phi(x_{n-1}) \approx \phi(x_n) - d \frac{\partial \phi(x_n)}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x_n)}{\partial x^2} - \frac{d^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi(x_n)}{\partial x^3} + \frac{d^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi(x_n)}{\partial x^4} + \dots \quad (2.7)$$

Usando (2.6) e (2.7) temos, em uma aproximação de quarta ordem, que

$$\frac{\partial^2 \phi(x_n)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x_{n+1}) - 2\phi(x_n) + \phi(x_{n-1}))}{d^2}. \quad (2.8)$$

Usando este resultado na equação de movimento (2.5), obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$I \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \alpha d^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + mgl \sin \phi(x, t) = 0. \quad (2.9)$$

Podemos ainda absorver as constantes desta equação através do seguinte reescalonamento

$$x \rightarrow x \sqrt{\frac{mgl}{d^2 \alpha}} \quad \text{e} \quad t \rightarrow t \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

Com isso, a equação de movimento toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \sin \phi(x, t) = 0. \quad (2.10)$$

Esta é a bem conhecida equação *sine*-Gordon. Vemos assim que, ao tomarmos o limite para o contínuo, $d \rightarrow 0$, o conjunto de variáveis dinâmicas $\phi(x_n)$ foi adequadamente substituído por uma função real, o campo escalar. A seguir, abordamos o formalismo lagrangiano para campos escalares reais, que são funções adequadas para descrição das interações em sistemas físicos com infinitos graus de liberdade.

2.1 Formalismo lagrangiano para Campos

Um sistema contínuo pode ser representado como uma superposição dos graus de liberdade de infinitos sistemas discretos. Se consideramos $n \rightarrow \infty$ em (2.4), com $d \rightarrow 0$, então $\mathcal{L}_n(\phi_n, \dot{\phi}_n)$ se torna a densidade lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi', \dot{\phi})$. A soma (2.4) é agora realizada sobre a linha x contínua. De modo que

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \phi', \dot{\phi}) dx. \quad (2.11)$$

A ação nesse caso se torna

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}(\phi, \phi', \dot{\phi}) dx. \quad (2.12)$$

Doravante, utilizaremos o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$ e os vetores do espaço-tempo bidimensional $x^\mu = (x^0, x^1)$, sujeitos à métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1\}$. Também fazemos uso da convenção de soma de Einstein. Como exemplo, consideremos o produto escalar, $x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2$. Nesta notação temos que

$$\mathcal{L}(\phi, \phi', \dot{\phi}) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.13)$$

e

$$S = \int d^2 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.14)$$

com $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Dos campos descritos pelo formalismo lagrangiano, o eletromagnético é um dos mais conhecidos. Apesar disso, o campo eletromagnético não é a teoria de campos mais simples, já que depende de um quadri-vetor $A_\mu(x^\mu)$, transformando covariantemente sob as transformações de Lorentz. A teoria de campos mais simples consiste em considerar uma função real $\phi(x^\mu)$, escalar de Lorentz, que é denominada *Campo Escalar Real*. A densidade lagrangiana do campo escalar real com o termo cinético padrão tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.15)$$

Sendo $V(\phi)$ a energia potencial do campo.

O próximo passo é fazer uso do princípio de Hamilton para então obter as equações de movimento para o campo. O princípio de Hamilton diz que

$$\delta S = \delta \int d^2x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0. \quad (2.16)$$

O que nos leva a

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \right] = 0. \quad (2.17)$$

Na expressão acima já consideramos que $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$. Considerando agora que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi). \quad (2.18)$$

podemos escrever que

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = 0. \quad (2.19)$$

Como, por definição, $\delta \phi(x, t) = 0$ nos extremos, temos que o segundo termo da integral acima não contribui. Ficamos então com a seguinte expressão

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0. \quad (2.20)$$

E como, em tese, $\delta \phi \neq 0$ no interior da região de integração, obtemos que

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.21)$$

que é a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar real. Também nos referimos a essa equação como equação de movimento. Para uma teoria do tipo (2.15), a equação de Euler-Lagrange resulta

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (2.22)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.23)$$

que é uma equação de segunda ordem, cujas soluções minimizam a ação (2.14). Notemos que quando $V(\phi) = 1 - \cos \phi$, esta última equação resulta na equação de movimento *sine-Gordon*, Eq. (2.10).

2.2 Transformações e Quantidades Conservadas

O teorema de Emmy Noether associa uma quantidade conservada à cada simetria contínua da ação em sistemas não dissipativos [27]. No contexto de uma teoria de campos, temos um cenário mais amplo para aplicação do teorema de Noether, uma vez que tais simetrias podem ser observadas nos seguintes casos: transformações nos próprios campos, também chamadas de internas; transformações nas coordenadas do espaço-tempo ou por ambas.

Transformações internas levam à conservação da corrente, enquanto que translações no espaço-tempo à conservação de energia-momento. Uma transformação interna, em sua forma infinitesimal, pode ser expressa como [9]

$$\varphi^I \rightarrow \varphi'^I = \left(\delta^{IJ} + \epsilon^a t_a^{IJ} \right) \varphi^J, \quad (2.24)$$

onde a $I = 1, 2, 3, \dots$ representa um campo diferente sob determinada transformação. Na expressão acima φ^I representa tanto campos escalares como também campos vetoriais, ou um conjunto destes. Os t_a^{IJ} são os geradores do grupo de simetria e ϵ_a é um parâmetro infinitesimal da transformação (um ângulo de rotação, por exemplo). A transformação global (2.24) tem como quantidade conservada a corrente

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^I)} t_a^{IJ} \varphi^J. \quad (2.25)$$

Consideremos agora transformações nas coordenadas do espaço-tempo,

$$\varphi(x^\mu) \rightarrow \varphi(x'^\mu) = \varphi(x^\mu + \epsilon^\mu). \quad (2.26)$$

Temos então que

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu \varphi') = \mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu). \quad (2.27)$$

Expandindo o lado direito em torno do ponto x^μ até a primeira ordem

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \epsilon^\nu \partial_\nu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \epsilon^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi. \quad (2.28)$$

Isto implica que

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (2.29)$$

Por outro lado,

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \partial_\nu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \partial_\mu \varphi. \quad (2.30)$$

E utilizando a equação de Euler-Lagrange, podemos escrever que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right) = \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (2.31)$$

Desta forma, temos que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0. \quad (2.32)$$

A quantidade conservada,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.33)$$

é o tensor energia-momento. A quantidade conservada associada à translações espaciais é o momento do campo [7]

$$P_i = - \int dx T_{0i} = - \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_i \varphi. \quad (2.34)$$

A quantidade conservada associada à translações temporais é a energia do campo

$$E = \int dx T_{00} = \int dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi - \mathcal{L} \right]. \quad (2.35)$$

Explicitamente, a energia associada à lagrangiana (2.15) é

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.36)$$

Apresentamos agora a quantidade chamada de corrente topológica que, por definição [20], é expressa, em $(1+1)$ dimensões, como

$$j^\mu = \frac{1}{\Delta \phi_v} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.37)$$

Sendo $\Delta \phi_v$ o intervalo entre dois mínimos adjacentes do potencial. A corrente topológica é naturalmente conservada, pois,

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{\Delta \phi_v} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = 0. \quad (2.38)$$

A corrente topológica não é uma corrente de Noether, já que não está associada a um grupo de simetria. A carga associada à corrente topológica é

$$Q = \frac{1}{\Delta \phi_v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \frac{1}{\Delta \phi_v} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)]. \quad (2.39)$$

A carga topológica é um tipo de índice de classificação de uma solução. Nesta tese, a configuração topológica do tipo *kink* está associada a $Q = 1$, enquanto que para uma configuração do tipo *antikink* temos $Q = -1$. Para defeitos não-topológicos do tipo *lump*, obtemos que $Q = 0$.

2.3 Quebra Espontânea de Simetria

Mesmo em nosso cotidiano, por vezes somos colocados a escolher por caminhos inicialmente equivalentes. Uma vez feita a nossa escolha, em geral, o cenário se modifica de forma que os outros caminhos podem não mais estar acessíveis. Colocando de outra forma, a simetria da situação inicial foi perdida.

O caminho natural de um sistema físico é sempre em busca de um estado fundamental de mínima energia. Por vezes, o sistema físico também se encontra diante de estados fundamentais equivalentes de tal modo que se torna necessário uma escolha aleatória por um desses estados. Se o estado fundamental escolhido não suporta a simetria inicial, dizemos, no contexto físico, que ocorre uma quebra espontânea da simetria. Para ilustração, consideremos o exemplo de uma haste cilíndrica flexível colocada em equilíbrio na vertical [34], como mostra a figura 3 à esquerda. Este estado de equilíbrio da haste pode ser perturbado, por exemplo, por aplicação de uma força na direção vertical. Se a força aplicada é pequena, nada acontece e a haste pode permanecer em equilíbrio. Caso a força aplicada seja tal que $\vec{F} > \vec{F}_c$, a haste é fortemente flexionada conforme mostra a figura 3 à direita. Após a perturbação, existe um contínuo de direções possíveis para que, sob a ação da gravidade, a haste venha a cair. Contudo, sabemos que a haste escolherá apenas uma direção dentre as possíveis. Após vergar, a haste alcança um novo estado de mínima energia. Claramente, este novo estado não possui a simetria do estado de equilíbrio inicial. Logo, dizemos que no processo de escolha de uma das direções possíveis, ocorreu uma quebra espontânea da simetria.

O mecanismo de quebra espontânea de simetria apresenta relevância para a física de campos e partículas. A fim de ilustrar tal mecanismo em uma teoria de campo escalar, consideremos a teoria $\lambda\phi^4$, descrita pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4, \quad (2.40)$$

com m e λ sendo parâmetros reais. Vemos que inicialmente a lagrangiana possui simetria $\mathbb{Z}_2$, $\phi \rightarrow -\phi$. Agora devemos encontrar o estado fundamental deste campo e então verificar se este satisfaz ou não a simetria inicial. Partimos da energia do campo que, nesse caso, é:

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right]. \quad (2.41)$$

O estado fundamental satisfaz as seguintes condições: $\partial_t\phi = 0$ e $\partial_x\phi = 0$. Ou seja, o estado fundamental é uma constante ϕ_v . Para garantir que E seja limitada inferiormente, escolhemos que $\lambda > 0$. Em relação a isso, não há restrições para o parâmetro m^2 . Devemos então analisar o estado fundamental para as duas possibilidades: $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$.

- Caso $m^2 > 0$

Nesse caso, o campo possui um único estado fundamental em $\phi = 0$. Vemos através da figura 4a que este estado fundamental mantém a simetria $\mathbb{Z}_2$ inicial da lagrangiana. Logo, neste caso, o estado fundamental não quebra a simetria.

- Caso $m^2 < 0$

Neste caso, a teoria apresenta dois estados fundamentais degenerados, conforme mostra a figura 4b. Vemos que estes estados fundamentais não apresentam a simetria

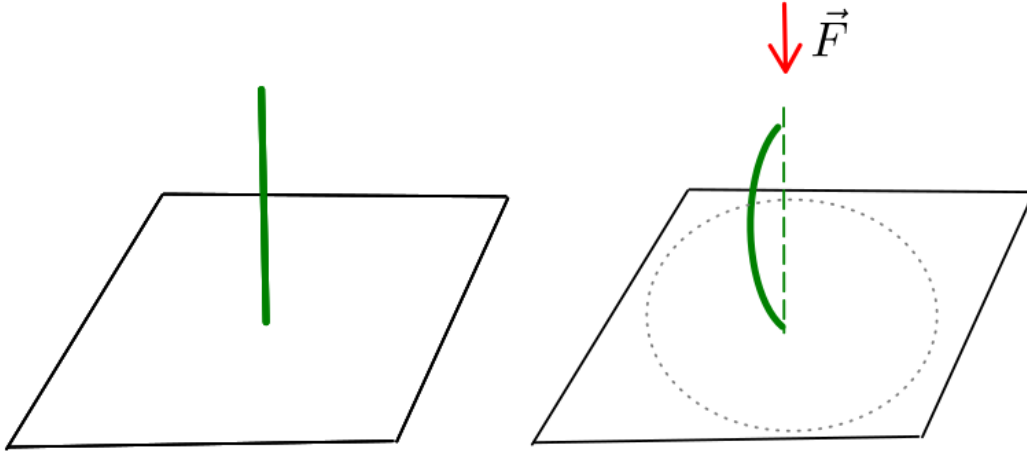


Figura 3 – Exemplo clássico de quebra espontânea de simetria.

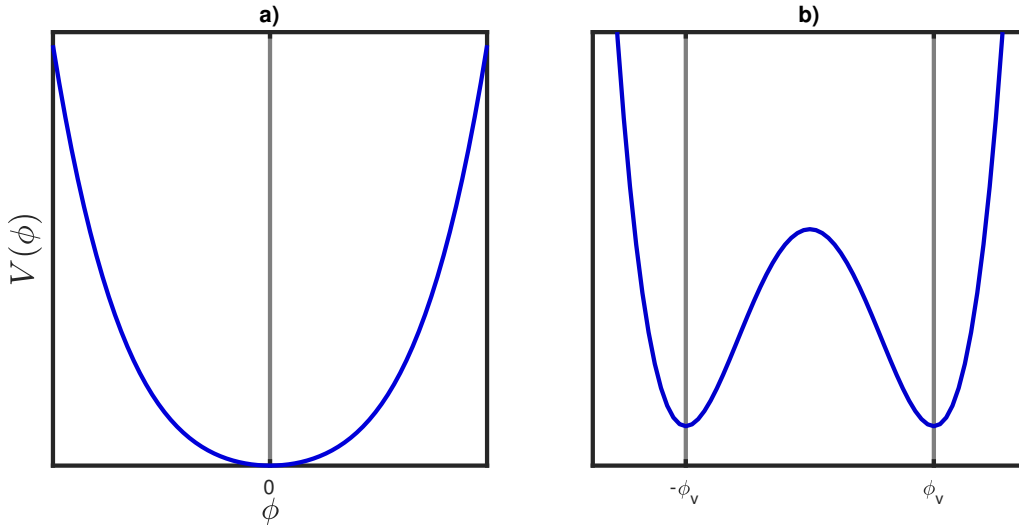


Figura 4 – Energia potencial da teoria ϕ^4 para os casos: a) $m^2 > 0$ e b) $m^2 < 0$.

inicial da lagrangiana, já que a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ leva um estado fundamental a outro diferente. Portanto, a escolha por um desses estados fundamentais quebra espontaneamente a simetria inicial.

A quebra espontânea de simetria também é notada quando adicionamos uma pequena perturbação em torno de um dos estados fundamentais, ϕ_v . Para perceber isto, vamos reescrever o potencial da teoria $\lambda\phi^4$ de forma que $V(\phi_v) = 0$. Ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_v^2)^2, \quad (2.42)$$

onde $\phi_v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ com $\mu = \sqrt{-m^2}$. A seguir, substituímos, na lagrangiana acima, o estado fundamental perturbado $\phi_v \rightarrow \phi_v + \chi$. Dessa forma, obtemos a seguinte lagrangiana para o estado fundamental perturbado:

$$\mathcal{L}_v = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \mu^2 \chi^2 - \mu \sqrt{\lambda} \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4. \quad (2.43)$$

E assim, vemos, de outra forma, que o estado fundamental não possui a mesma simetria da lagrangiana inicial. A simetria $\phi \rightarrow -\phi$ deixa de existir devido à presença do termo cúbico $\mu\sqrt{\lambda}\chi^3$. Além disso, o termo que acompanha a parte quadrática da lagrangiana é entendido como a massa do campo. Portanto, podemos dizer que a teoria de campos escalar $\lambda\phi^4$ apresenta quebra espontânea de simetria e que, ao estado fundamental, estão associados modos massivos de massa $\sqrt{2}\mu$. Essa mesma massa pode ser obtida diretamente do potencial, através da seguinte quantidade

$$m_i^2 = \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\nu_i}, \quad (2.44)$$

denominada de massa clássica. Ou seja, m_i é a massa relativa ao estado fundamental $\phi = \nu_i$, sendo ν_i um dos mínimos do potencial. A massa clássica delimita a energia para além da qual a perturbação em torno de um dos estados fundamentais do campo descreverá uma interação do tipo partícula livre.

2.4 Soluções BPS

As soluções de interesse da equação de movimento (2.23) são aquelas que minimizam o funcional de energia (2.35). O artigo [35] levou isso em conta ao propor uma forma de se obter as soluções de interesse da equação de movimento.

Se $V(\phi) \geq 0$, podemos expressá-lo como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2. \quad (2.45)$$

A função $W(\phi)$ é conhecida como *superpotencial*. Este nome surgiu a partir do uso da função W em modelos de supersimetria, para os quais W se torna uma quantidade fundamental [36].

Utilizando a equação (2.45), podemos escrever a energia da solução estática da seguinte forma:

$$E = \frac{1}{2} \int dx \left(\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right). \quad (2.46)$$

O próximo passo é completar o quadrado

$$E = \frac{1}{2} \int dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right], \quad (2.47)$$

resultando nos seguintes termos de energia:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2}_{E_P} \pm \underbrace{\int dx \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi}}_{E_{BPS}}. \quad (2.48)$$

Uma vez que a contribuição $E_P \geq 0$, temos que a energia mínima é obtida quando $E_P = 0$. Ou seja,

$$E_{\min} = E_{\text{BPS}} = \pm \int dx \frac{dW}{dx} = \pm W(\phi) \Big|_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} = \|W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))\|, \quad (2.49)$$

desde que

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi}. \quad (2.50)$$

Equivalentemente à equação (2.50), temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.51)$$

A energia (2.49) é frequentemente chamada de energia BPS, devido à Bogomol'nyi [35], Prasad e Sommerfield [37]. As equações (2.50) (ou sua equivalente (2.51)) são conhecidas como equações BPS ou equações de primeira ordem. As soluções dessas equações são os estados BPS [6, 38].

As soluções BPS também satisfazem a equação de Euler-Lagrange. Para verificar esta afirmação, basta diferenciar a equação (2.51) em relação a x ,

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{dV}{d\phi} \phi_x. \quad (2.52)$$

Como, pela equação BPS, $\phi_x = \pm \sqrt{2V}$, concluímos que

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{dV}{d\phi} \phi_x = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.53)$$

Conforme [35], ao utilizar o procedimento acima:

- Vemos que a energia mínima é proporcional à carga topológica.
- Podemos conhecer a energia da solução antes mesmo de conhecer a sua forma explícita. Precisamos apenas conhecer o campo ϕ nos extremos. Dizemos então que $E_{\min} = \Delta W$ é um *invariante topológico*, já que só depende dos valores de ϕ nos extremos.
- Podemos conhecer a solução $\phi(x)$ através de uma equação de primeira ordem (equação (2.50) ou sua equivalente (2.51)) ao invés de resolver uma de segunda ordem.

Há ainda na literatura outros métodos para se chegar as equações de primeira ordem. Um deles foi proposto por Schaposnik e Vega [39]. Nesse caso, as equações de primeira ordem, no contexto de vórtices em $2 + 1$ dimensões, são obtidas a partir da conservação do tensor energia-momento.

2.5 Estabilidade Linear

Quando falamos em *solitons*, certamente pensamos em um fenômeno que tem a sua forma preservada durante uma evolução temporal. Neste sentido, torna-se oportuno o estudo da estabilidade das soluções do campo. Podemos analisar a estabilidade de um fenômeno através da sua curva de energia. Em geral, perturba-se o estado fundamental através da adição de uma perturbação dependente do tempo, $\eta(x, t)$ [40]. Para o nosso caso, o estado fundamental é uma das soluções BPS, (que são soluções estáticas de mínima energia) que vamos representar por ϕ_s . O estado perturbado é então:

$$\phi_p(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.54)$$

com $|\eta(x, t)| \ll |\phi_s(x)|$. Se substituirmos o estado fundamental perturbado, ϕ_p , na equação de movimento dependente do tempo (2.23) e considerarmos somente os termos lineares para perturbação $\eta(x, t)$, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} + \left. \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} \eta(x, t) = 0. \quad (2.55)$$

Consideramos agora a seguinte forma geral para a perturbação

$$\eta(x, t) = \sum_k \Re \left[\eta_k(x) e^{i\omega_k t} \right], \quad (2.56)$$

com “ $\Re$ ” indicando a parte real. Substituindo na equação (2.55), obtemos uma equação do tipo Schrödinger para $\eta_k(x)$,

$$\hat{H} \eta_k(x) = \omega_k^2 \eta_k(x), \quad (2.57)$$

sendo o operador Hamiltoniano dado por:

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\text{sch}}(x), \quad (2.58)$$

com

$$V_{\text{sch}}(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s(x)}. \quad (2.59)$$

A estabilidade da solução é garantida se todos os $\omega_k^2 \geq 0$. Por outro lado, se existe ao menos um ω_k^2 negativo, as perturbações crescem ou decaem de forma exponencial com o tempo e a solução estática não é estável.

Neste capítulo, apresentamos a formulação fundamental de um campo escalar. Nos próximos capítulos, os conceitos apresentados até aqui se fazem presentes e possibilitam explicações fisicamente coerentes aos resultados obtidos.

3 Colisões Kink-Antikink na Linha

A área que estuda colisões entre soluções *kinks* em diversos cenários e teorias começou a ganhar força a partir da segunda metade do século XX com a utilização de método de espalhamento inverso [28, 41]. Desde então, o tema tem atraído pesquisadores de todo mundo. Apesar de quatro décadas de intensa investigação [42], alguns aspectos sobre as colisões entre *kinks* permanecem em aberto não sendo completamente entendidos, como por exemplo, a abordagem por coordenadas coletivas, tema principal de estudos recentes [43–45]. Possíveis aplicações dos resultados observados para colisões entre soluções *kinks* podem ser observadas, por exemplo, no estudo da foto geração de *solitons* topológicos em uma rede de *trans*-poliacetileno [46] e no estudo com nanofitas de grafeno encurvadas em uma direção transversa [47].

Tendo em vista que a rota natural para contribuir em um tema se dá por primeiramente conhecer os fundamentos, neste capítulo buscamos apresentar alguns resultados bem estabelecidos. Começamos com o modelo *sine*-Gordon, que é o modelo protótipo para as teorias integráveis. Em seguida, estudamos aspectos da teoria ϕ^4 e mostramos os principais resultados para as colisões entre *kinks*. Após, apresentamos o modelo ϕ^6 onde vemos como contornar uma aparente contradição do mecanismo de troca de energia.

3.1 Modelo *sine*-Gordon

Como já vimos no capítulo anterior, o modelo *sine*-Gordon é descrito pelo seguinte potencial escalar

$$V_{\text{SG}}(\phi) = 1 - \cos \phi. \quad (3.1)$$

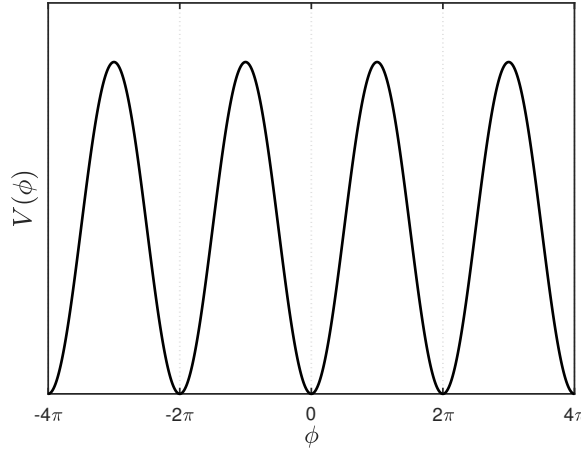
Tal modelo se reduz a uma equação de Klein-Gordon no limite de pequenas amplitudes de ϕ [48]. A figura 5 mostra o comportamento do potencial que é periódico por 2π , possuindo mínimos degenerados que são separados por barreiras equivalentes. A equação de movimento do modelo *sine*-Gordon é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0. \quad (3.2)$$

O potencial $V_{\text{SG}}(\phi)$ é associado ao seguinte superpotencial,

$$W_{\text{SG}}(\phi) = \mp 4 \cos \left(\frac{1}{2} \phi \right). \quad (3.3)$$

Para encontrar soluções não-triviais e com energia finita, vamos fazer uso do formalismo de primeira ordem. No capítulo 2, vimos que uma solução estática pode ser obtida pela

Figura 5 – Potencial *sine*-Gordon.

equação de primeira ordem,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW(\phi)}{d\phi}. \quad (3.4)$$

Assim, as equações de primeira ordem na teoria *sine*-Gordon são dadas por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2(1 - \cos \phi)}. \quad (3.5)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\phi_k(x) = 4 \arctan \left[e^{(x-x_0)} \right]. \quad (3.6)$$

Essa é a solução estática da teoria *sine*-Gordon. Como foi encontrada através do formalismo BPS, sabemos que se trata de uma solução fundamental, não trivial. A figura 6 superior mostra que a solução estática interpola entre dois estados fundamentais, $\phi = 0$ em $x \rightarrow -\infty$ e $\phi = 2\pi$ em $x \rightarrow \infty$, contendo uma região de transição em torno de $x = x_0$ (na figura temos $x_0 = 0$). Por essas características, a solução (3.6) é comumente denominada de *kink* do modelo *sine*-Gordon. Chamamos de *antikink* a solução $\phi_{ak}(x) = \phi_k(-x)$. Esta interpola entre $\phi = 2\pi$ em $x \rightarrow -\infty$ e $\phi = 0$ em $x \rightarrow \infty$.

Vamos agora verificar se a solução *kink* é estável por pequenos desvios. Adicionando uma perturbação, $\Re[\eta(x)e^{-i\omega t}]$, em torno da solução *kink*, conforme descrito na seção 2.5, chegamos à seguinte equação do tipo Schrödinger

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \cos(4 \arctan(e^x)) \eta = \omega^2 \eta. \quad (3.7)$$

O potencial do tipo Schrödinger associado é:

$$V_{\text{sch}}(x) = \cos(4 \arctan(e^x)) = 1 - 2\text{sech}^2(x). \quad (3.8)$$

A equação de autoestados (3.7) possui somente uma solução para $0 \leq \omega^2 < V_{\text{sch}}(\pm\infty) = 1$. Esta solução é o modo zero, η_0 , que é solução da equação (3.7) quando $\omega^2 = 0$. Explicitamente, o modo zero é dado por

$$\eta_0(x) = C \text{sech}(x), \quad (3.9)$$

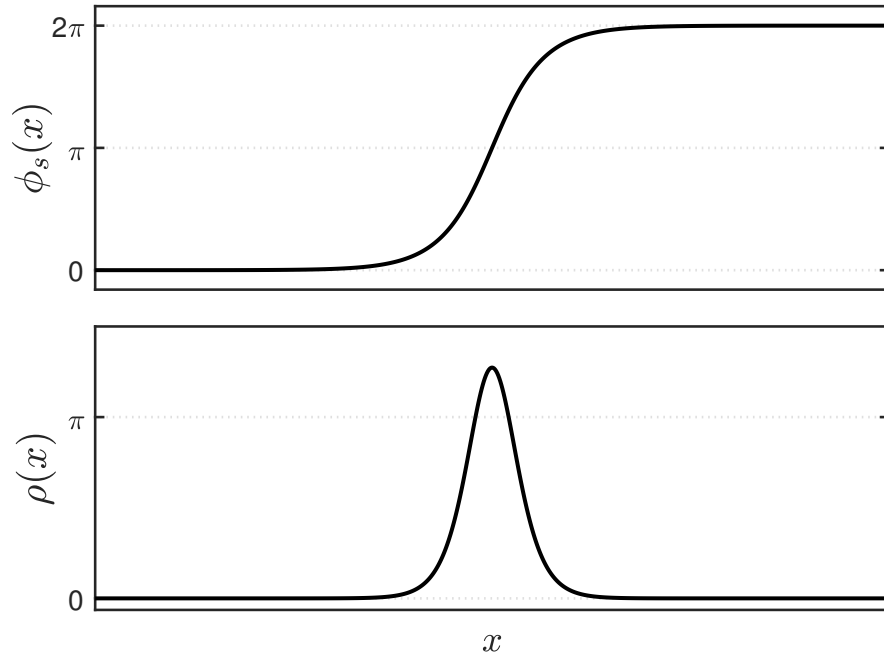


Figura 6 – Solução *kink* do modelo *sine*-Gordon (acima) e a correspondente densidade de energia (abaixo).

sendo C uma constante. Vejamos agora o efeito do modo zero no entorno da solução *kink*.

$$\phi_k(x) + \eta_0(x) = 4 \arctan[e^x] + C \operatorname{sech}(x) \quad (3.10)$$

$$= \phi_k(x) + \frac{C}{2} \frac{d\phi_k(x)}{dx} \quad (3.11)$$

$$\approx \phi_k(x + C/2). \quad (3.12)$$

Desta forma vemos que o modo zero apenas translada o centro da solução *kink* por um intervalo $\delta x = C/2$. Devido a isto, o modo zero é também conhecido como modo translacional. Como não existem autoestados para $\omega^2 < 0$, concluímos ainda que a solução *kink* é estável por pequenos desvios.

A densidade de energia, T_{00} , da solução (3.6) é dada explicitamente por:

$$\rho(x) = T_{00} = 4 \operatorname{sech}^2(x - x_0). \quad (3.13)$$

Na figura 6 inferior, vemos que a densidade de energia é espacialmente localizada em torno do centro do *kink*. Esta é uma característica fundamental de um *soliton*. Seria então a solução *kink* (ou *antikink*) do modelo *sine*-Gordon um *soliton*? Para responder esta pergunta precisamos saber como essas soluções interagem entre si ou com outras ondas solitárias. A colisão entre as soluções *kinks*¹ é uma das formas de realizar tal investigação. Em 1953, Seeger, Donth e Kochendörfer, ao usarem a equação do *sine*-Gordon para descrever o deslocamento de um cristal, encontraram soluções analíticas

¹ Nesta tese o termo *kinks*, no plural, pode estar se referindo a *kinks*, a *antikinks* ou a ambos.

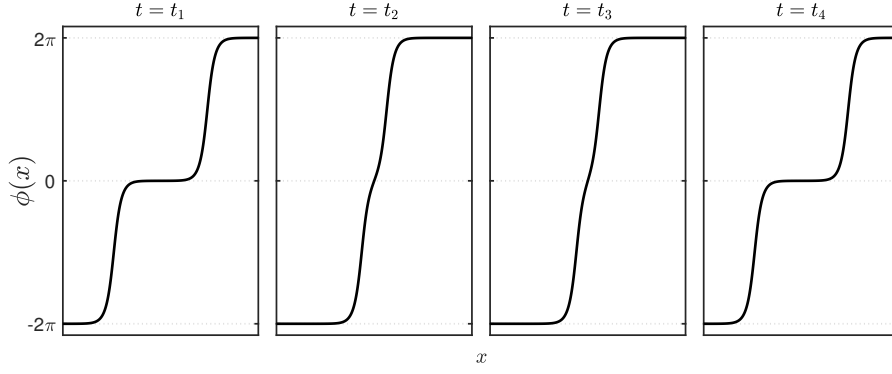


Figura 7 – Evolução temporal da colisão soliton-soliton.

que descrevem colisões do tipo *kink-kink* e *kink-antikink*² no modelo *sine-Gordon* [49]. As mesmas expressões foram obtidas independentemente por Perring e Skyrme em 1962 [50]. A solução que descreve uma colisão do tipo *kink-kink* é dada por

$$\phi_{KK} = 4 \arctan \left[\frac{v \sinh(x/\sqrt{1-v^2})}{\cosh(vt/\sqrt{1-v^2})} \right]. \quad (3.14)$$

Para esta configuração a carga topológica é $Q = 2$. A colisão do tipo *kink-antikink* foi encontrada como sendo

$$\phi_{K\bar{K}} = 4 \arctan \left[\frac{\sinh(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \cosh(x/\sqrt{1-v^2})} \right], \quad (3.15)$$

com $Q = 0$.

A evolução da solução *kink-kink* é observada na figura 7, onde temos que $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Na figura, vemos que um *kink* que interpola entre $\phi(-\infty) = -2\pi \rightarrow \phi(\infty) = 0$ se desloca para a direita com velocidade v , simultaneamente um outro *kink* ($\phi(-\infty) = 0 \rightarrow \phi(\infty) = 2\pi$) se desloca para esquerda com velocidade $-v$. No tempo t_2 os *kinks* estão na iminência da colisão, enquanto que em $t = t_3$ a colisão já ocorreu. Ao final do processo, vemos que os *kinks* passaram um pelo outro sem perda de sua forma e velocidade, no entanto houve uma mudança do setor de interpolação. O *kink* que viaja para a direita passou a interpolar entre $\phi(-\infty) = 0 \rightarrow \phi(\infty) = 2\pi$ e o *kink* que viaja para esquerda passou a interpolar entre $\phi(-\infty) = -2\pi \rightarrow \phi(\infty) = 0$.

A evolução de uma colisão do tipo *antikink-kink* é observada na figura 8, onde vemos um *antikink* que se move para a direita com velocidade v e um *kink* que se desloca em sentido contrário. Novamente, após a colisão ambos mantêm a forma anterior à colisão e também passam a interpolar em outro setor topológico do potencial. Por esses dois resultados, concluímos que as soluções *kink* do modelo *sine-Gordon* são de fato *solitons*.

Há ainda um outro estado fundamental não trivial de interesse na teoria *sine-Gordon*. Trata-se da solução *Breather* (o campo lembra o movimento de uma respiração).

² Nesta tese a ordem em que as soluções aparecem importa. Por exemplo *kink-antikink* indica um *kink*, viajando para o sentido positivo, colidindo com um *antikink* que viaja para o sentido negativo da linha.

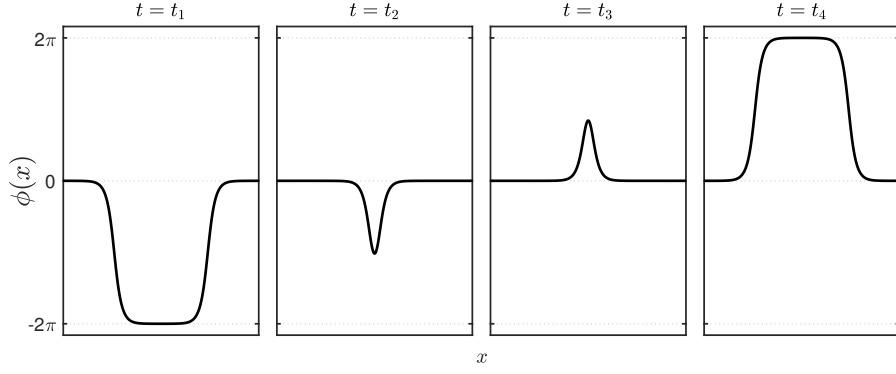


Figura 8 – Evolução temporal da colisão soliton-antisoliton.

Obtemos a solução *breather* ao atribuir

$$v \rightarrow \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad (3.16)$$

na solução (3.15), implicando que

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \rightarrow \gamma_\omega = \sqrt{1-\omega^2}. \quad (3.17)$$

Assim,

$$\phi_{K\bar{K}} = 4 \arctan \left[\frac{\sinh(\gamma_v vt)}{v \cosh(\gamma_v x)} \right] \rightarrow \phi_B = 4 \arctan \left[\frac{\gamma_\omega \sinh(i\omega t)}{i\omega \cosh(\gamma_\omega x)} \right]. \quad (3.18)$$

A solução *breather*, ϕ_B , fica

$$\phi_B = 4 \arctan \left[\frac{\gamma_\omega \sin(\omega t)}{\omega \cosh(\gamma_\omega x)} \right]. \quad (3.19)$$

O estado *breather* da teoria *sine*-Gordon é mostrado na figura 9. Esta figura nos permite observar que o estado *breather* é equivalente a um par *kink-antikink* oscilando com frequência ω e possuindo carga topológica $Q = 0$ (compare com a figura 8 quando $t = t_2$ e $t = t_3$). Uma propriedade do *breather sine*-Gordon é que ele não decai no tempo.

Na figura 10 vemos a colisão de um *kink* com um *breather* que, inicialmente oscila em $x = 0$. Vemos que após a colisão o *kink* surge mais a frente do que estaria se a colisão não tivesse ocorrido. Já o *breather* sofre um pequeno recuo. Isto é, ambos apresentam um *shift* de fase após a colisão. Veja que ambos mantêm suas propriedades físicas após a colisão, desta forma, vemos que o *breather*, no modelo *sine*-Gordon, interage como um *soliton*.

Um outro caminho para investigar as propriedades de soluções de um modelo consiste na solução numérica da equação de movimento. Este será o caminho que mais utilizaremos adiante.

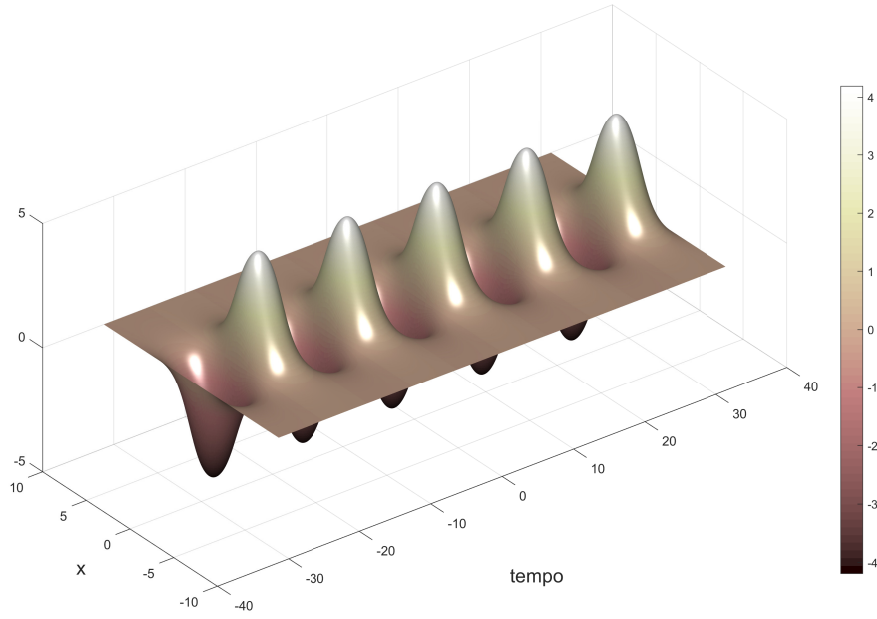


Figura 9 – Estado *breather* da teoria *sine*-Gordon. $\omega = 0.50$.

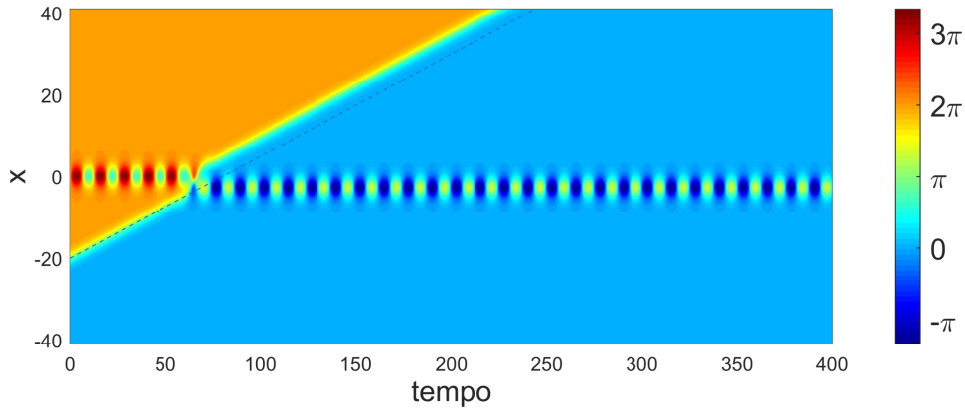


Figura 10 – Colisão de um *kink* com um *breather* no modelo *sine*-Gordon. A linha preta em traços indica em que posição o centro do *kink* deveria estar. $v = 0.25$ e $\omega = 0.50$.

3.2 Solução Numérica

Até aqui já conhecemos a solução estática do modelo *sine*-Gordon. Também vimos duas possibilidades de evolução temporal, analiticamente obtidas no século XX. Para a grande maioria dos modelos que estudaremos adiante podemos obter apenas as soluções estáticas, via formalismo BPS. No entanto, não foram encontradas soluções analíticas descrevendo exatamente a evolução temporal. Tal dificuldade reside em dois fatores: i) As equações são não lineares, ii) os modelos são não integráveis. Essa dificuldade é contornada quando recorremos às soluções numéricas.

A equação (3.2) é solucionada somente se duas condições iniciais ($t = 0$) independentes são conhecidas. Tais condições são obtidas a partir de uma função $\Phi(x, t)$, que

denominamos de perfil inicial, sendo, em geral, uma combinação de soluções estáticas. A dependência temporal se deve ao *boost* de Lorentz que é adequadamente aplicado nas soluções estáticas. O *boost* $x \rightarrow \gamma(x - x_0 - vt)$ faz com que a solução viaje para o sentido positivo de x , sendo $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$ o fator de contração de Lorentz. É no momento da escolha da combinação para $\Phi(x, t)$ que devemos decidir que tipo de colisão queremos realizar, se *kink-kink*, *kink-antikink*, *antikink-kink* e assim por diante. Vejamos, para uma colisão do tipo *antikink-kink*, como fica a escolha da função $\Phi(x, t)$.

Explicitamente, um *antikink sine-Gordon* que inicialmente está em $x = -x_0$, com $x_0 > 0$, e que se move com velocidade v para o sentido positivo da linha x , tem a seguinte forma:

$$\phi_{\bar{K}}(x, -x_0, v, t) = 4 \arctan \left[e^{-\gamma(x+x_0-vt)} \right]. \quad (3.20)$$

Já um *kink* que se move para o sentido negativo tem a forma

$$\phi_K(x, x_0, -v, t) = 4 \arctan \left[e^{\gamma(x-x_0+vt)} \right]. \quad (3.21)$$

Podemos agora obter $\Phi(x, t)$ para que a evolução aconteça na ordem mostrada na figura 8, isto é, uma colisão *antikink-kink*. Neste caso, temos que

$$\Phi(x, t) = \phi_{\bar{K}}(x, -x_0, v, t) + \phi_K(x, x_0, -v, t) - 2\pi. \quad (3.22)$$

Ou

$$\Phi(x, t) = 4 \arctan \left[e^{-\gamma(x+x_0-vt)} \right] + 4 \arctan \left[e^{\gamma(x-x_0+vt)} \right] - 2\pi, \quad (3.23)$$

uma vez obtida a função $\Phi(x, t)$, as duas condições iniciais necessárias para solução da equação de movimento são dadas por:

$$\Phi(x, 0) = 4 \arctan \left[e^{-\gamma(x+x_0)} \right] + 4 \arctan \left[e^{\gamma(x-x_0)} \right] - 2\pi \quad (3.24)$$

e

$$\left. \frac{d\Phi(x, t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{4v\gamma e^{\gamma(x-x_0)}}{e^{2\gamma(x-x_0)} + 1} + \frac{4v\gamma e^{-\gamma(x+x_0)}}{e^{-2\gamma(x+x_0)} + 1}. \quad (3.25)$$

Com essas duas condições iniciais, podemos resolver a equação de movimento

$$D_{tt}\Phi(x, t) = D_{xx}\Phi(x, t) - dV/d\Phi. \quad (3.26)$$

Expressamos a derivada espacial por discretização em diferenças finitas centrais. O apêndice A.1 mostra como obter os coeficientes da discretização. A evolução temporal é obtida por um método de integração simplética de sexta ordem, conforme descrito no apêndice A.3.

A malha é discretizada espacialmente com 2048 pontos a cada $\Delta x = 100$. O domínio temporal é discretizado com 5000 pontos a cada $\Delta t = 100$. Isto implica em um passo espacial $\delta x \approx 0.50$ e um passo temporal $\delta t = 0.02$. Com exceção de alguns casos específicos, estes são os passos utilizados nas simulações presentes nesta tese.

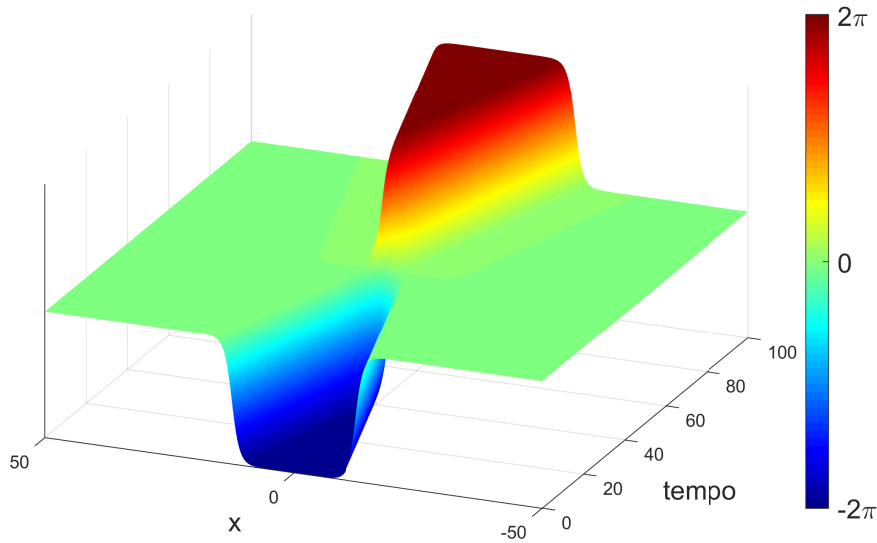


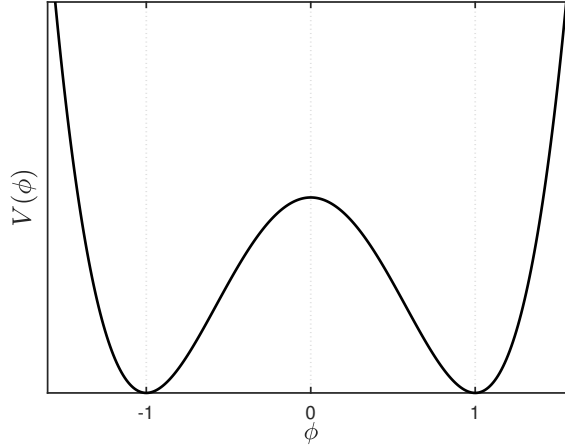
Figura 11 – Evolução temporal numérica de uma colisão do tipo *kink-antikink* no modelo *sine-Gordon*. $v = 0.25$ e $x_0 = 12$

Voltando a evolução com as condições iniciais (3.24) e (3.25), deve-se observar que o parâmetro x_0 deve ser grande o suficiente para que a primeira condição inicial não apresente erro numérico maior que a ordem de precisão do método utilizado.

A figura 11 mostra o resultado da solução numérica com as condições iniciais dadas por (3.24,3.25) com os parâmetros $x_0 = 12$ e $v = 0.25$. Vemos então que a solução numérica retrata o mesmo comportamento obtido através da solução (3.15). Após a colisão ambos *kink* e *antikink* mantêm a forma e velocidade sofrendo apenas um pequeno atraso de fase devido à interação [22].

3.3 Modelo $\lambda\phi^4$

O modelo ϕ^4 apresenta uma energia potencial do tipo poço-duplo com dois estados fundamentais degenerados, apresentando quebra espontânea de simetria. O modelo ϕ^4 tem desenvolvido papel importante em diversos temas de pesquisa, servindo como ponto de partida para estudos em sistemas não integráveis. Tem sido utilizado em muitos estudos da Matéria Condensada [11, 51]; no estudo [52] foi utilizado como uma teoria fenomenológica de transição de fase em cadeias de poliacetileno; foi utilizado na biofísica para descrever excitações na dupla hélice do DNA [14, 53] e também é bem conhecido no contexto cosmológico [12]. É um modelo referência para o estudo de colisões entre soluções *kinks*. Neste quesito o seu caráter não integrável é logo percebido, dado o comportamento diferente do observado para o modelo *sine-Gordon*. A seguir, apresentamos as soluções *kink/antikink* do modelo e as principais propriedades dessas soluções. Em especial, destacamos os modos

Figura 12 – Potencial ϕ^4

normais de vibração.

Nesta tese, consideramos o potencial ϕ^4 da seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (3.27)$$

A figura 12 mostra o potencial ϕ^4 que possui a forma de um poço duplo com dois estados fundamentais de mesma energia. Do nosso estudo no modelo *sine*-Gordon, vemos que este modelo tende a suportar duas soluções topológicas fundamentais. A equação de movimento para o campo no modelo ϕ^4 é dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\phi(1 - \phi^2) = 0. \quad (3.28)$$

Para obter a solução estática, utilizamos o formalismo BPS. O superpotencial nesse caso é

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3. \quad (3.29)$$

Soluções estáticas da equação de movimento são obtidas através das seguintes equações de primeira ordem:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi}.$$

Então, no modelo ϕ^4 , as equações de primeira ordem são dadas por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2). \quad (3.30)$$

Escolhendo o sinal “+”, obtemos a solução *kink* do modelo ϕ^4

$$\phi_K(x) = \tanh(x). \quad (3.31)$$

E, para o sinal “−”, obtemos a solução *antikink*, dada por

$$\phi_{\bar{K}}(x) = \phi_K(-x) = -\tanh(x). \quad (3.32)$$

A energia de ambas as soluções é dada por (2.49)

$$E = \|W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))\| = \frac{4}{3}. \quad (3.33)$$

A massa clássica para perturbações em torno de um dos estados fundamentais do potencial é:

$$m = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pm 1} = 4. \quad (3.34)$$

Isso implica que quando o campo representa uma interação do tipo partícula livre, as ondas planas têm a seguinte relação de dispersão: $\omega^2 = k^2 + 4$. E então qualquer solução de estado ligado, deve necessariamente estar na região $0 < \omega^2 < 4$. Sabendo disso, realizamos uma perturbação em torno de um dos estados fundamentais da teoria. Ou seja, perturbamos a solução *kink*

$$\phi_p(x, t) = \phi_K(x) + \xi(x, t), \quad (3.35)$$

com $|\xi(x, t)| \ll |\phi_K(x)|$. Substituindo $\phi_p(x, t)$ na equação de movimento e linearizando em torno de $\xi(x, t)$, obtemos que

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} + [6 \tanh^2(x) - 2] \xi(x, t) = 0. \quad (3.36)$$

Escolhendo que $\xi(x, t) = \eta(x) \exp(-i\omega t)$, a equação acima torna-se

$$-\frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} + [6 \tanh^2(x) - 2] \eta(x) = \omega^2 \eta(x), \quad (3.37)$$

que é uma equação tipo Schrödinger. Assim, podemos fazer a seguinte identificação:

$$U_{\text{sch}}(x) = 6 \tanh^2(x) - 2. \quad (3.38)$$

Desta forma, vemos que perturbações em torno do estado fundamental não trivial do campo nos levam ao problema de encontrar estados estacionários [54] sujeitos ao potencial $U_{\text{sch}}(x)$. Percebemos também a seguinte identificação:

$$U_{\text{sch}}(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_K(x)} = 6\phi_K^2 - 2, \quad (3.39)$$

e para $x = \pm\infty$,

$$U_{\text{sch}}(\pm\infty) = 4. \quad (3.40)$$

E assim, novamente vemos que $\omega^2 \geq 4$ descreve estados do tipo partícula livre. Denominamos o valor $U_{\text{sch}}(x = \pm\infty)$ de *limite para o contínuo*.

A equação (3.37) apresenta duas soluções do tipo estado ligado, ou seja, para $\omega^2 < 4$.

- Para $\omega^2 = \omega_0^2 = 0$, temos o modo translacional:

$$\eta_0(x) = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{sech}^2(x). \quad (3.41)$$

- Para $\omega^2 = \omega_1^2 = 3$, temos o modo vibracional

$$\eta_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh(x) \operatorname{sech}(x). \quad (3.42)$$

Para $\omega^2 \geq 4$, os autoestados têm a seguinte forma [21]

$$\eta_k(x) = e^{-ikx} \left[3 \tanh^2(x) + 3ik \tanh(x) - k^2 - 1 \right], \text{ com } k^2 = \omega^2 - 4. \quad (3.43)$$

Neste ponto vemos uma importante distinção em relação ao modelo *sine*-Gordon. As soluções *kinks* da teoria ϕ^4 possuem um modo zero e um modo vibracional, localizado na faixa de energia entre o modo zero e o limite para o contínuo. Se um *kink* viaja isoladamente, o modo dominante é o translacional. Contudo, em um processo de colisão, o *kink* é fortemente perturbado e então o modo vibracional deve exercer algum papel.

3.3.1 Colisões *Kink-Antikink*

A existência de soluções estáticas do tipo *kink* e *antikink* permite uma comparação com os resultados obtidos no modelo *sine*-Gordon. O estudo de colisões de *kinks* na teoria ϕ^4 é fundamental para o discernimento entre um modelo integrável e não-integrável, e do ponto de vista histórico contribui para a correta distinção entre *solitons* e ondas solitárias. De fato, como já mencionamos, *solitons* possuem a propriedade de manter a sua forma mesmo quando interagem com outras ondas. Um questionamento que surge é se existem na teoria ϕ^4 estados tais como a colisão *soliton-antisoliton* (figura 8), ou seja, se as ondas solitárias da teoria ϕ^4 possuem propriedade de *soliton*; Outro questionamento proveniente desta comparação se dá sobre a existência de um estado *breather* que não decai com o tempo. Esses questionamentos motivaram uma grande quantidade de estudos, principalmente nos anos 1970 e 1980. Os estudos pioneiros são atribuídos principalmente a Kudryavtsev [55], S. Aubry [56], Makhankov [57] e o notável trabalho de Ablowitz, Kruskal e Ladik (AKL) [41]. Estes estudos possibilitaram a descoberta e posterior elucidação de alguns dos complexos resultados observados na investigação dinâmica da teoria ϕ^4 .

Neste modelo não temos uma solução analítica descrevendo a evolução temporal. Precisamos então resolver numericamente a equação de movimento da teoria ϕ^4 a fim de reproduzir os principais resultados obtidos ao longo das últimas décadas. Para tal propósito precisamos novamente de duas condições iniciais. Uma possibilidade é o seguinte par de condições iniciais:

$$\Phi(x, 0) = \tanh[\gamma(x + x_0)] + \tanh[-\gamma(x - x_0)] - 1. \quad (3.44)$$

$$\dot{\Phi}(x, 0) = -\gamma v \left[\operatorname{sech}^2(\gamma(x + x_0)) + \operatorname{sech}^2(\gamma(x - x_0)) \right]. \quad (3.45)$$

Essas duas condições são representadas na figura 13 (cima) onde um *kink*, inicialmente centrado em $x = -x_0$, se move para o sentido positivo de x com velocidade v . Ao

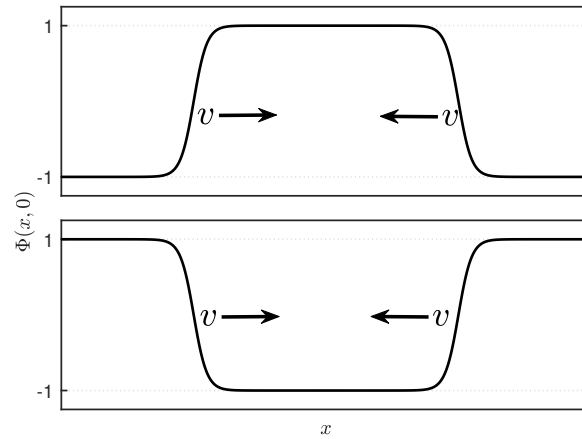


Figura 13 – Perfil inicial para uma colisão *kink-antikink* (cima) e *antikink-kink* (baixo)

mesmo tempo um *antikink*, inicialmente em $x = x_0$, se move também com velocidade v em sentido contrário ao *kink*. Outra possibilidade é a mostrada na figura 13 (baixo). Devido à simetria $\mathbb{Z}_2$ do potencial, ambas possibilidades são equivalentes em seus resultados diferindo apenas por $\phi \rightarrow -\phi$.

Passamos agora à discussão dos resultados. Estes são extremamente dependentes da velocidade v . Agora o *kink* não pode simplesmente passar pelo *antikink* sem sofrer alterações em sua forma. Eles ao contrário disto, dependendo da velocidade v se refletem após a colisão. Isto foi relatado no trabalho de Kudryavtsev [55], onde foi realizada uma colisão para $v = 0.10$. Encontraram que ao invés do *kink* simplesmente passar pelo *antikink*, se armadilham e formam um estado oscilatório no ponto de colisão $x = 0$. Na figura 14 apresentamos um estado similar ao observado em [55]. A figura 14a) mostra a evolução espaço-temporal do campo para a velocidade $v = 0.15$ e a figura 14b) mostra a evolução temporal do campo no ponto de colisão $x = 0$. Para esta velocidade ($v = 0.15$) o *kink* colide com o *antikink* em $x = 0$ e logo em seguida formam um estado oscilatório que é conhecido como *bion* (o estado *bion* é mostrado na figura 14b) . Podemos perceber que o estado oscilatório emite radiação, oscilações de pequena amplitude no campo, para além de $x = 0$.

Aubry realizou um estudo para diferentes valores de v [56] e desta forma pôde observar tanto estados *bions*, como estados de reflexão. Em seu trabalho, ele apresenta a simulação para $v = 0.50$ que é reproduzida na figura 15. Neste caso, após a colisão o par *kink-antikink* reflete um ao outro e eles retornam envolvidos por radiação.

Um outro trabalho numericamente mais robusto foi realizado por AKL quando resolveram a equação de movimento para diferentes potenciais, sendo um deles o potencial ϕ^4 [41]. Sobre os resultados obtidos para a teoria ϕ^4 eles relataram o seguinte:

Finalmente, observamos que (2c)³ apresenta um fenômeno que não foi

³ (2c) é a teoria ϕ^4 .

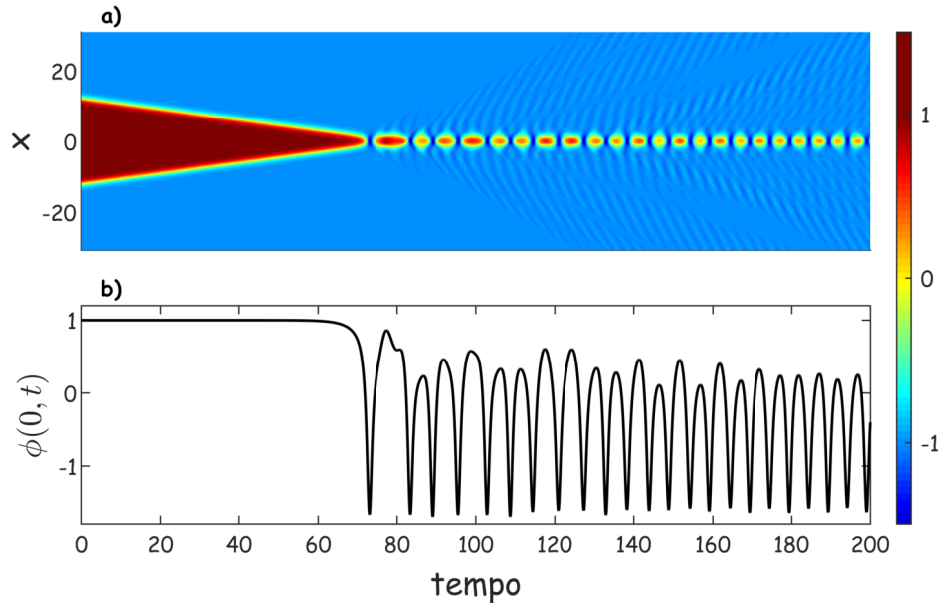


Figura 14 – Colisão *kink-antikink* no potencial ϕ^4 para $v = 0.15$: a) *Plot* de superfície espaço-temporal (a paleta de cores representa o valor do campo $\phi(x, t)$); b) Evolução do campo no ponto de colisão $x = 0$.

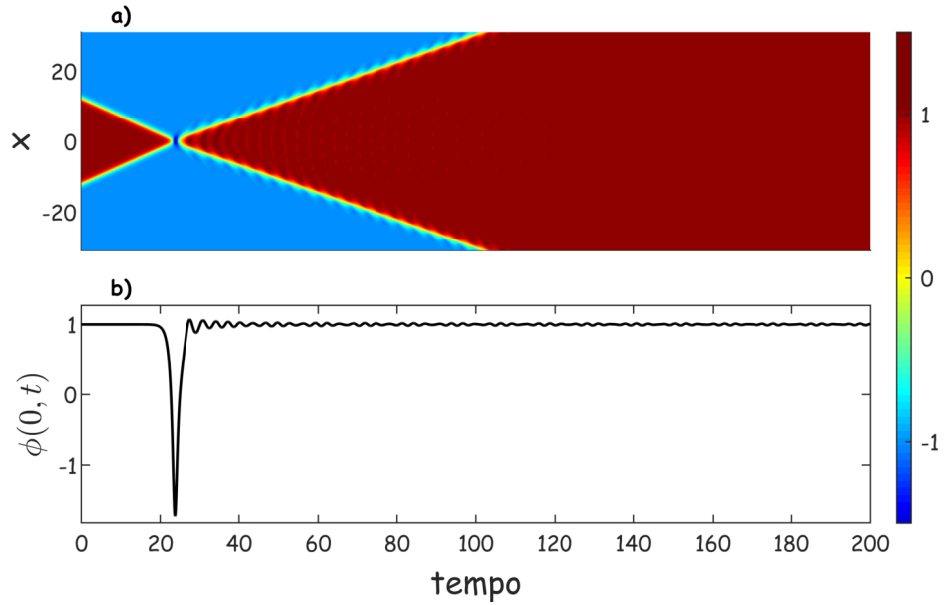


Figura 15 – Colisão *kink-antikink* para $v = 0.50$. O *kink* e o *antikink* colidem uma vez (*one bounce*), o estado final é um par *kink-antikink* que se separam após a colisão envolvidos em radiação.

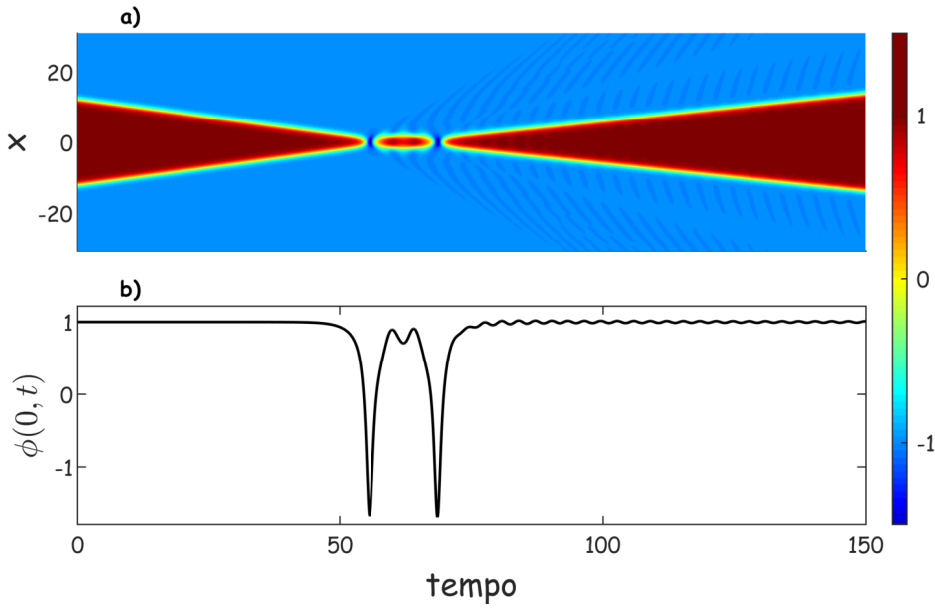


Figura 16 – Colisão *kink-antikink* para $v = 0.20$: O *kink* e *antikink* colidem duas vezes (*two-bounce*) e depois são refletidos um pelo outro.

notado por nós em nenhum outro cálculo nem por Kudryavtsev [4]⁴. Conforme v_i diminui para 0.3, v_f diminui para 0.135. Quando $v_i = 0.25$ um estado oscilatório é observado. No entanto, à medida que v_i diminui para 0.2, este estado oscilatório volta a emitir ondas para uma pequena região em torno de $v_i = 0.20$. De fato, quando $v_i = 0.20$, foi encontrado que $v_f = 0.155$, que é maior que a v_f observada para $v_i = 0.3$! Um pouco abaixo de $v_i = 0.20$ ($v_i = 0.193$), um estado oscilatório torna a aparecer. Subsequentes reduções de v_i também resultam em estados de onda oscilatórios. O motivo da notável “ressonância” entre essas ondas, interagentes não periódicas, e a radiação ainda não são completamente entendidos.

Até onde sabemos, esta é a primeira vez que a palavra “ressonância” foi usada no contexto de uma colisão *kink-antikink*. Para melhor entender este relato, observemos a figura 16 que mostra o resultado da colisão para $v = 0.20$. O *kink* colide com o *antikink* em um primeiro momento ficando armadilhado um ao outro por um período de tempo $\Delta t = T_{12}$ depois do qual tornam a colidir uma segunda vez. Após a segunda colisão, eles se separam por reflexão envolvidos em pequenas oscilações. Fenômenos desse tipo são conhecidos pelo termo *two-bounce*. As faixas contínuas de velocidades para quais ocorrem o fenômeno de *two-bounce* são conhecidas como **janelas de *two-bounces* (*n-bounces*)**, **janelas de ressonância** ou ainda **janelas de escape** [13, 22, 30].

3.3.2 Mecanismo de Ressonância e Estrutura Fractal

Após o estudo de AKL outros [58, 59] também relataram a existência de faixas de velocidades, abaixo de uma certa velocidade crítica v_c , em que também foram observadas

⁴ Referência [55] desta tese.

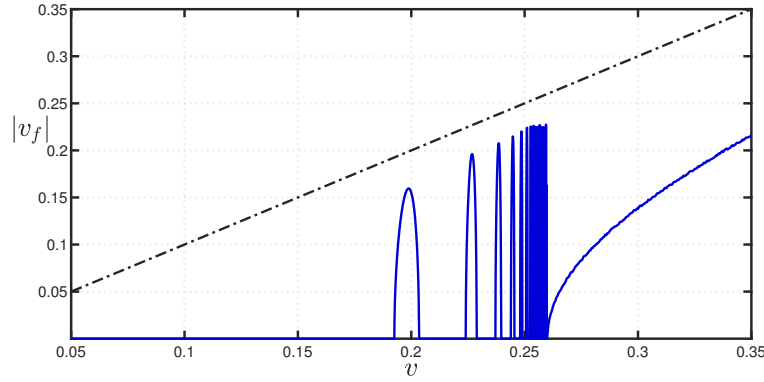


Figura 17 – Colisão *kink-antikink* no modelo ϕ^4 : Velocidade final do par em função da velocidade inicial v . A linha em traços representa a reta $v_f = v_i$.

as ressonâncias semelhantes à encontrada em torno de $v = 0.20$. Em 1983, foi publicado o importante trabalho de Campbell, Schonfeld e Wingate [22] (CSW) no qual consta uma varredura detalhada nos valores de v , o que possibilitou mostrar a distribuição das várias janelas de *two-bounce* ao longo da escala de velocidade v com a qual o *kink-antikink* se movem antes da colisão. O espectro de janelas de ressonância é reproduzido na figura 17 considerando a velocidade de saída do estado final após a colisão. Através da figura 17, podemos dividir o espectro de velocidades em três regiões: i) para $v \lesssim 0.19$ a colisão sempre resulta em um estado do tipo *bion*, por isso, a velocidade final do par é nula; ii) Na região $0.19 \lesssim v \leq v_c$ estão situadas as janelas de ressonância, que estão representadas pelas regiões onde $v_f > 0$ na figura 17. Também observamos estados de *bion* localizados no intervalo entre duas janelas; iii) Para $v > v_c$ a colisão sempre resulta em reflexão após a primeira colisão. No modelo ϕ^4 , $v_c = 0.2598$ [60].

Para explicar a existência dessas janelas, os autores das referências [22] e [61] propuseram uma teoria semi fenomenológica denominada por eles de *mecanismo de troca de energia* (adiante, também nos referimos a este mecanismo pelas iniciais CSW que faz referência aos autores do primeiro artigo publicado em 1983). Este mecanismo explica o surgimento das janelas de ressonâncias de forma quantitativa a partir da interação entre os modos vibracional e translacional das soluções BPS. Em suma, o mecanismo de troca de energia (CSW) diz: Durante uma colisão *kink-antikink* os modos vibracional e translacional são excitados e podem trocar energia em si. Se uma certa condição de ressonância é atendida, após a primeira colisão o modo de translação transfere energia para o modo vibracional, dessa forma o *kink* e *antikink* ficam armadilhados um ao outro não possuindo energia cinética suficiente para se afastar para longe do ponto de colisão. Passado um tempo T_{12} após o primeiro impacto ocorre uma segunda colisão. Após a segunda colisão o processo de transferência de energia pode se repetir novamente, o que gera uma terceira colisão. No caso da figura 16, após duas colisões, a energia cinética é consideravelmente restaurada (o modo vibracional continua excitado, porém com menos energia), por isso o *kink* e *antikink* são refletidos, após a segunda colisão, e se afastam para longe de ponto

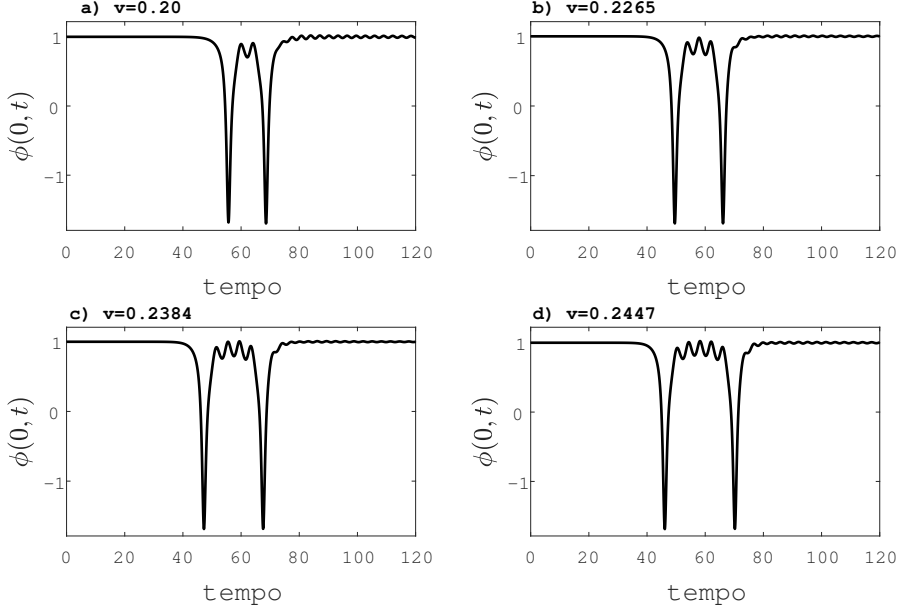


Figura 18 – Perfil do campo no centro da colisão em $x = 0$. O número classificatório da n -ésima janela é: a) $n = 1$, b) $n = 2$ c) $n = 3$ e d) $n = 4$.

de colisão com uma certa velocidade final v_f . A condição de ressonância do mecanismo CSW [22] é dada por:

$$\omega_1 T_{12} = 2\pi n + \delta, \quad (3.46)$$

onde ω_1 é a frequência do modo vibracional, T_{12} é o intervalo entre o primeiro e o segundo impacto, n é um número natural e δ é uma fase. Esta relação afirma que o modo vibracional deve oscilar um número inteiro de vezes para ocorra uma segunda colisão com restauração da energia cinética do par *kink-antikink*. O número n indica o número de pequenos ciclos presentes entre o tempo da primeira e segunda colisão. Cada janela de *two-bounce* possui um n próprio, podendo assim ser utilizado como um indexador das janelas de *two-bounce*. A figura 18 exemplifica esse papel de n . Para o caso $v = 0.20$, vemos apenas um ciclo entre os dois vales, por isso, $n = 1$ indicando que esta velocidade pertence à primeira de janela de *two-bounce*. No caso da figura 18b, vemos que existem dois ciclos entre os dois vales. Nesse caso, temos que $n = 2$, indicando que a velocidade $v = 0.2265$ pertence à segunda janela de *two-bounce*. O mesmo raciocínio é válido para as figuras 18c-d, que são casos da terceira ($n = 3$) e quarta ($n = 4$) janela, respectivamente.

Avaliamos a validade da relação (3.46) a partir dos dados das dez primeiras janelas de *two-bounce*. O resultado é mostrado na figura 19, onde a linha sólida representa o ajuste linear. Obtemos um coeficiente de ajuste igual a 3.727. Este valor é portanto bem próximo do valor teórico esperado a partir de (3.46), ou seja, $\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.63$. A figura 20 mostra a estrutura completa de janelas de *two-bounces* colocando o número de colisões em $x = 0$ em função de v . Vemos que a primeira janela, que compreende o intervalo de velocidade $0.1926 < v < 0.2034$, é a mais larga e que as janelas subsequentes são cada vez mais estreitas. De fato, o estudo [62] estimou que para n grande a largura das janelas decai

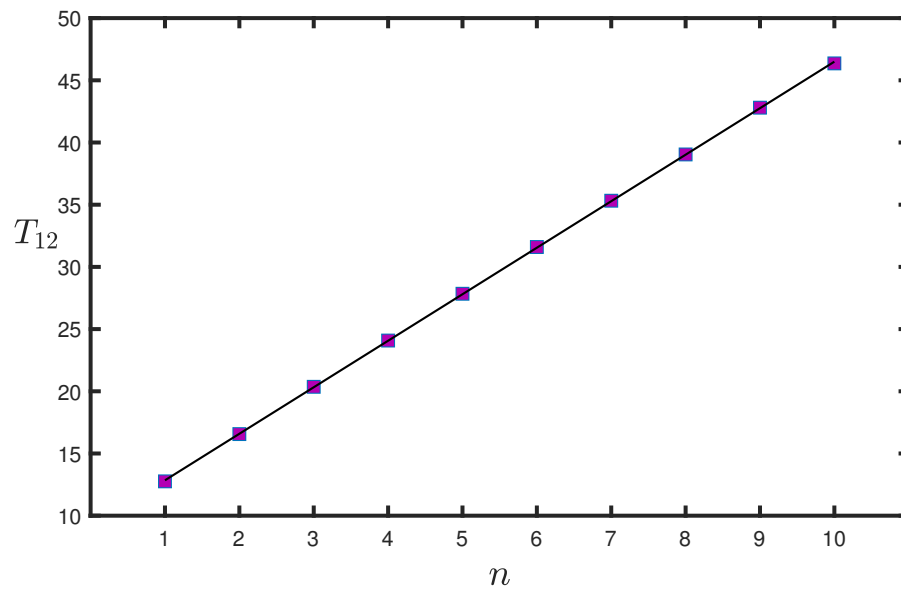


Figura 19 – Ajuste linear para o intervalo de tempo entre as duas primeiras colisões (T_{12}) e o número n .

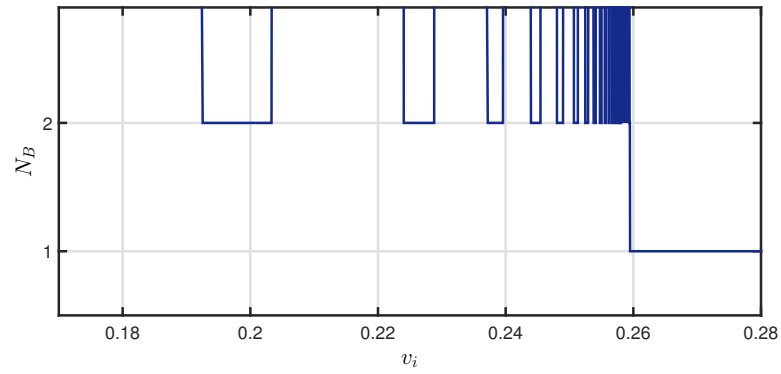


Figura 20 – Estrutura de janelas de *two-bounces*.

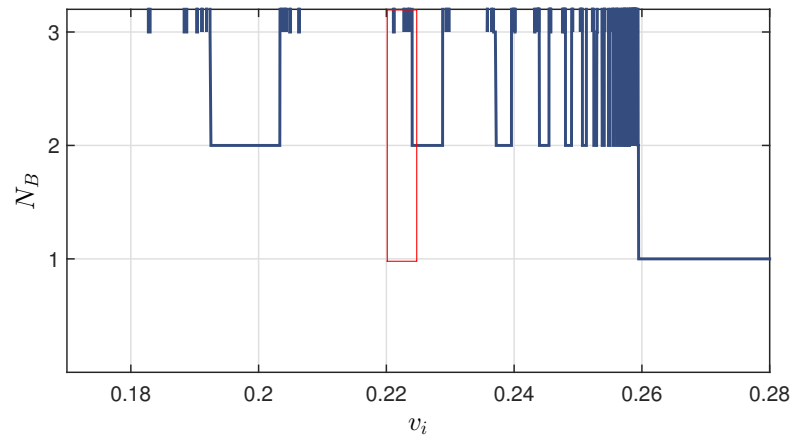


Figura 21 – Janelas de *3-bounces* na borda de uma janela de *two-bounces*.

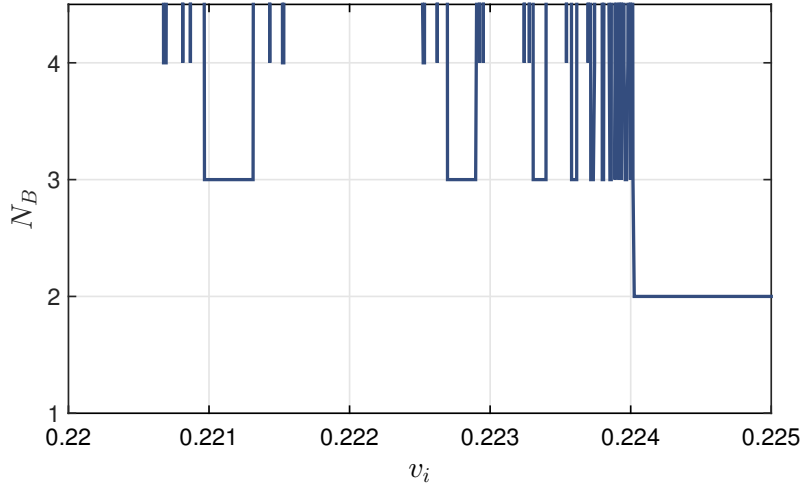


Figura 22 – Janelas de 4-bounces na borda de uma janela de 3-bounces.

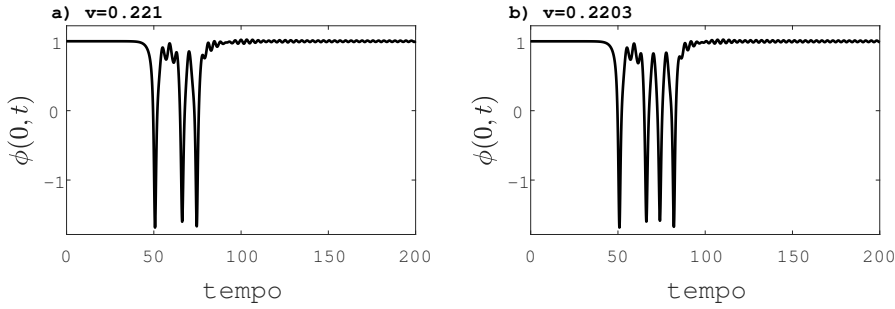
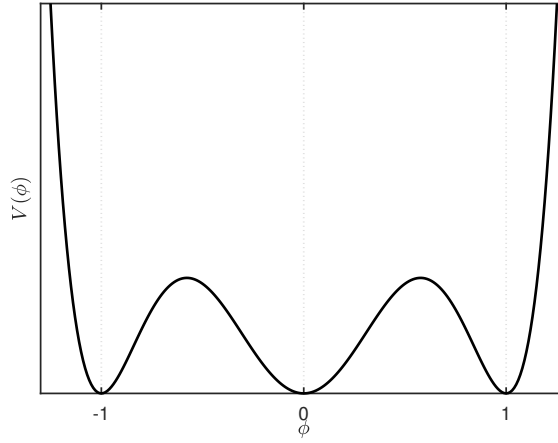


Figura 23 – Perfil do campo no centro da colisão em $x = 0$. a) Colisão do tipo 3-bounces e b) colisão do tipo 4-bounces.

com n^{-3} , o que leva a outra característica observada a partir da figura 20: o acúmulo de janelas na proximidade da velocidade crítica v_c .

Outro estudo relevante sobre o padrão de colisões no modelo ϕ^4 foi realizado por Anninos, Oliveira e Matzner [13]. Este estudo analisou a região na borda das janelas de ressonância e descobriram que nessa região não existem somente estados de *bion*. Observaram uma estrutura fractal de janelas de n -bounces, com $n \geq 3$. Essa estrutura é estabelecida da seguinte forma: na vizinhança (à direita ou à esquerda) de uma janela de 2-bounces existem janelas de 3-bounces. Observando a vizinhança de uma janela de 3-bounces encontramos janelas de 4-bounces, e assim por diante. As figuras 21 e 22 nos mostram essa estrutura. Na figura 21, podemos observar um aglomerado de janelas de 3-bounces na borda da segunda janela de *two-bounces*. Aplicando um *zoom* na região demarcada em vermelho, encontramos a estrutura da figura 22 onde observamos que na vizinhança de cada janela de 3-bounces existem janelas de 4-bounces. A figura 23a mostra uma colisão em um ponto de uma janela de 3-bounces e figura 23b mostra uma colisão do tipo 4-bounces ambas na vizinhança da segunda janela de *two-bounces*.

Vimos então que o mecanismo CSW relaciona a existência de janelas de ressonância

Figura 24 – Potencial ϕ^6

em colisões *kink-antikink* desde que essas soluções apresentem estados vibracionais no espectro de pequenas perturbações. Tal mecanismo também foi aplicado com sucesso em outras teorias tais como um modelo *sine-Gordon* modificado [61], no qual a existência de um modo vibracional para as soluções *kink/antikink* depende de um parâmetro r . Diante desses resultados foi sugerido na literatura [60] que a presença de um modo vibracional do *kink* seria uma condição necessária para a estrutura de janelas de ressonância como a observada nas figuras 17 e 20. Contudo o estudo de colisões *kink-antikink* para a teoria ϕ^6 trouxe à tona um interessante contra-exemplo para a associação do modo vibracional com fenômenos de *n-bounces*.

3.4 Colisões *kink-antikink* no modelo ϕ^6

Passemos agora ao estudo de colisão no modelo ϕ^6 . Seguindo o roteiro, vamos obter as soluções BPS e logo em seguida realizar a análise por perturbações lineares. Consideremos o modelo ϕ^6 sendo descrito por uma Lagrangeana com dinâmica padrão para um campo escalar $\phi(x, t)$ sujeito ao potencial dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2)^2. \quad (3.47)$$

Na figura 24 vemos que o potencial possui três mínimos degenerados e simetria $\mathbb{Z}_2$ em relação a $\phi = 0$. O superpotencial associado ao potencial (3.47) é dado por:

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4. \quad (3.48)$$

Então, de acordo com o formalismo BPS, as equações de primeira ordem, cujas as soluções minimizam a energia são:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (\phi - \phi^3), \quad (3.49)$$

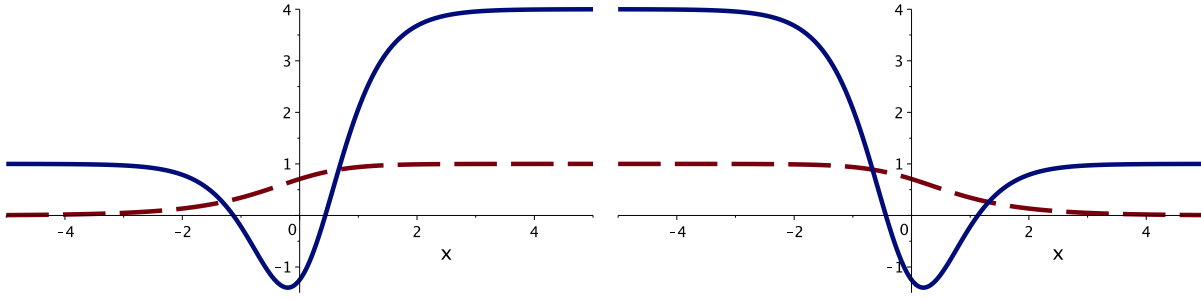


Figura 25 – Potencial do tipo Schrödinger (linha) e o perfil da solução estática (traços) para: (à esquerda) *kink* Φ_{1+} e (à direita) *antikink* Φ_{2+} .

A equação BPS (3.49), para o sinal “+”, admite a seguinte solução:

$$\Phi_{1+}(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x)}{2}}, \quad (3.50)$$

que é uma solução *kink* conectando os mínimos $\{0, 1\}$ do potencial. Para o sinal “-”, temos que uma das soluções é:

$$\Phi_{2+}(x) = \sqrt{\frac{1 - \tanh(x)}{2}}, \quad (3.51)$$

que descreve um *antikink* conectando os mínimos $\{1, 0\}$ do potencial.

O *antikink* e *kink* do setor $\{-1, 0\}$ do potencial são dados respectivamente por $\Phi_{1-}(x) = -\Phi_{1+}(x)$ e $\Phi_{2-}(x) = -\Phi_{2+}(x)$. Todas essas soluções têm energia de repouso $E = 1/4$.

O problema de perturbações lineares no modelo ϕ^6 conduz a uma equação de autoestados com o seguinte potencial tipo Schrödinger

$$U(x) = 15\phi_s^4 - 12\phi_s^2 + 1, \quad (3.52)$$

com ϕ_s sendo qualquer das soluções BPS. Assim, para as soluções $\Phi_{1\pm}$ o potencial para perturbações lineares tem a seguinte forma:

$$U_1(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \text{sech}^2(x). \quad (3.53)$$

Da igual modo, temos para $\Phi_{2\pm}$ o seguinte potencial

$$U_2(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \text{sech}^2(x). \quad (3.54)$$

As figuras 25a-b mostram os potenciais (3.53) e (3.54). Podemos destacar três regiões características: i) $0 < \omega^2 < 1$ onde é possível a existência de modos vibracionais, ii) $1 \leq \omega^2 < 4$ onde há um contínuo de estados de reflexão e iii) $\omega^2 > 4$ onde há um contínuo de autoestados livres. Encontramos um estudo detalhado desses potenciais na referência [63]. O estudo mostra que para $\omega^2 < 4$ apenas uma solução foi encontrada,

sendo ela o modo zero (modo translacional). Assim, os *kinks* e *antikinks* do modelo ϕ^6 não possuem um modo vibracional. Na região do contínuo ($\omega^2 \geq 4$) as autofunções são descritas em termos de funções hipergeométricas [63, 64].

Após obtermos as soluções estáticas e realizar a análise de estabilidade, vamos agora estudar a colisão entre essas soluções. Devido à simetria, $V(\phi) = V(-\phi)$, podemos nos restringir somente às soluções que interpolam entre os mínimos $\phi = 0$ e $\phi = 1$, ou seja, as soluções $\Phi_{1\pm}$ [65]. Ficamos então com duas configurações iniciais independentes. São elas:

- *Configuração par kink-antikink* $(0, 1) + (1, 0)$

$$\phi_{K\bar{K}}(x, 0) = \Phi_{1+}(x + x_0) + \Phi_{1-}(x - x_0) - 1. \quad (3.55)$$

- *Configuração par antikink-kink* $(1, 0) + (0, 1)$

$$\phi_{\bar{K}K}(x, 0) = \Phi_{1+}(x + x_0) + \Phi_{1-}(x - x_0). \quad (3.56)$$

Com $x_0 > 0$.

Passamos agora à discussão dos resultados obtidos para cada uma das configurações (3.55) e (3.56) tomando como base o estudo [23]. Primeiro observamos que os resultados da colisão para o par $(0, 1) + (1, 0)$ (*kink-antikink*) atestam a inexistência de uma estrutura de ressonância, na qual os defeitos venham a colidir por algumas vezes e depois retornarem por reflexão. Observamos que, nesse caso, para velocidades $v < v_c = 0.289$ *kink* e *antikink* colidem e ficam armadilhados um ao outro, enquanto que para $v > v_c$ o estado final é um par *antikink-kink* no setor $\{-1, 0\}$ do potencial. Ou seja, temos o seguinte processo para $v > v_c = 0.289$: $(0, 1) + (1, 0) \rightarrow (0, -1) + (-1, 0)$. Este resultado está em acordo com o mecanismo de ressonância CSW, uma vez que, como já vimos, ambas as soluções *kink* e *antikink* não possuem modo vibracional interno. Para a configuração $(1, 0) + (0, 1)$, no entanto, foi observada uma rica estrutura de janelas de ressonância conforme mostra a figura 26. Nesta, temos o tempo em que ocorre a primeira (linha inferior), segunda (linha do meio) e terceira (linha superior) colisão. As janelas de *two-bounces* são então delimitadas pelas regiões onde a linha superior diverge para $t \rightarrow \infty$.

Na estrutura de janelas da figura 26, também localizamos a velocidade crítica v_c , a partir da qual os *kinks* têm energia suficiente para se afastarem um do outro após o primeiro impacto. A velocidade v_c é localizada pelo valor de v em que o tempo da segunda e terceira colisão divergem simultaneamente. Numericamente a velocidade crítica foi encontrada sendo $v_c = 0.0457$.

Temos então um cenário semelhante ao observado para a colisão *kink-antikink* no modelo ϕ^4 , no entanto agora temos dificuldade em explicar a existência das janelas

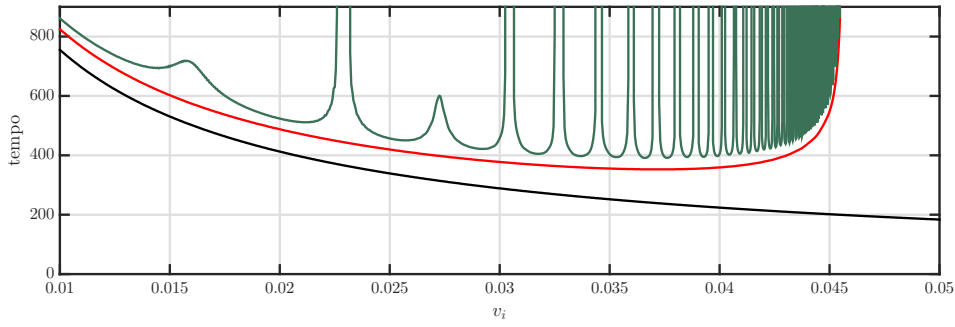


Figura 26 – Estrutura de janelas de ressonância para a configuração $(1, 0) + (0, 1)$. A linha inferior (verde) indica o tempo da 1ª colisão, a do meio (vermelha), o tempo da 2ª colisão e a linha superior (verde) o tempo da 3ª colisão.

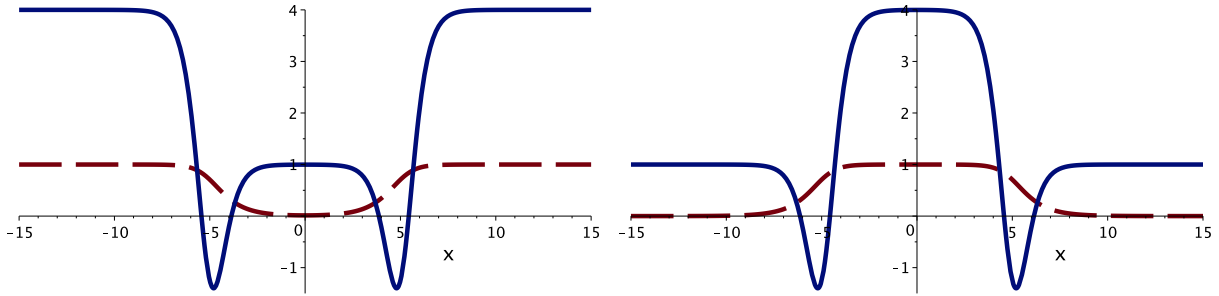


Figura 27 – Potencial tipo Schrödinger (linha sólida) e o perfil do campo escalar (linha em traços) para a) o par *antikink-kink* (configuração inicial $\Phi_{1+}(x - x_0) + \Phi_{2+}(x + x_0)$) e b) *kink-antikink* (configuração inicial $\Phi_{1+}(x - x_0) + \Phi_{2+}(x + x_0) - 1$). Consideramos $x_0 = 5$.

de *two-bounces* via mecanismo CSW já que ambos *kink* e *antikink* do modelo ϕ^6 não apresentam modo vibracional em seu espectro de perturbações lineares. Por esse motivo, este cenário é um contra-exemplo ao mecanismo de troca de energia CSW. Diante disso, o mérito dos autores do estudo [23] consistiu na elucidação do mecanismo responsável pela existência das janelas de ressonância. Tal mecanismo deveria explicar onde a energia cinética do par *kink-antikink* era temporariamente armazenada após a primeira colisão. Os autores observaram que, diferentemente do que ocorre para *kinks* do ϕ^4 , o potencial para perturbações lineares do ϕ^6 não apresenta a simetria $x \rightarrow -x$ (veja as figuras 25a-b). Isso implica que o potencial de perturbações para o *kink/antikink* individual difere do potencial das configurações iniciais (3.55) e (3.56). Desta forma, o potencial de perturbações depende da configuração inicial. Nas figura 27a plotamos o potencial de perturbações associado à configuração inicial $(1,0) + (0,1)$, no qual observamos um poço central. Já na figura 27b temos o potencial de perturbações da configuração $(0,1)+(1,0)$, este possui um grande platô central, que inviabiliza a existência de estados ligados.

Resolvemos numericamente a equação

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} + U_{\bar{K}K}(x)\eta = \omega^2\eta, \quad (3.57)$$

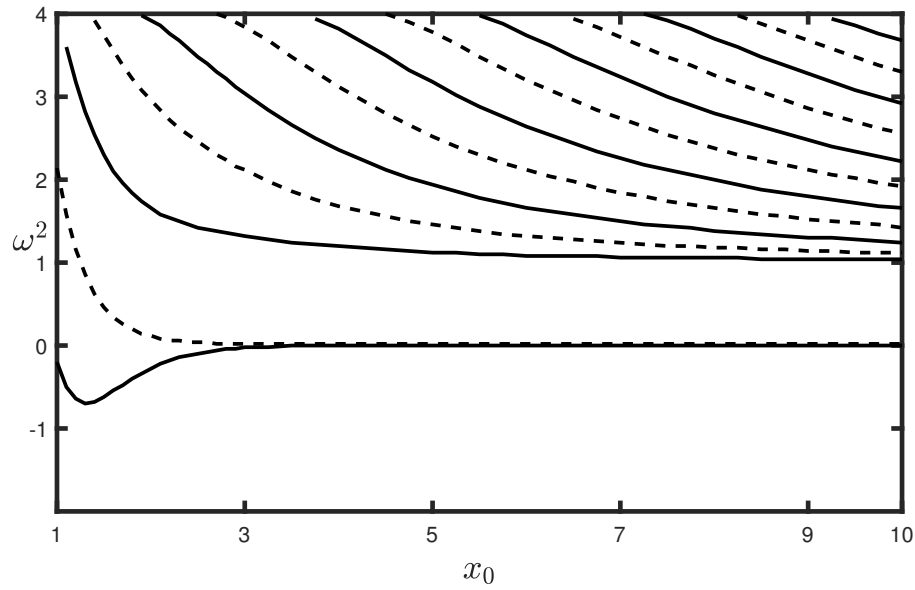


Figura 28 – Autofrequências da equação (3.57) em função do parâmetro de separação inicial x_0 . Linhas sólidas para soluções ímpares e tracejadas para soluções pares.

onde $U_{\bar{K}K}(x)$ é o potencial tipo Schrödinger da configuração inicial (3.56) variando o parâmetro de separação x_0 . O resultado é apresentado na figura 28 a qual mostra que as duas autofrequências inferiores rapidamente tendem ao modo zero à medida que x_0 cresce. Acima do modo zero temos um coletivo de autofrequências associadas a autoestados ímpares (linhas sólidas) e pares (linhas tracejadas). Diante desse resultado, os autores em [23] escreveram a seguinte explicação para a inesperada estrutura de ressonância observada na figura 26:

Então, a nova característica das colisões $\bar{K}K$ no modelo ϕ^6 é que, embora não existam modos internos para os kinks de forma individual, depois do primeiro impacto a energia pode ser armazenada nos estados ligados da configuração composta $(1,0)+(0,1)$. Isto possibilita que, em colisões para $v < v_c$ e que satisfaçam uma condição de ressonância adequada, a energia possa retornar ao modo translacional e deste modo o kink e antikink retornarem para o infinito.

A condição de ressonância (3.46) foi verificada para colisões $\bar{K}K$ com o coeficiente do ajuste linear próximo da primeira autofrequência ω_1 acima do modo zero. Assim, para o ϕ^6 o mecanismo de troca de energia se mostrou válido desde que se considere que a troca de energia ocorre entre o modo translacional de ambos *kink* e *antikink* e o coletivo de modos discretos encontrados a partir da linearização da configuração composta $(1,0)+(0,1)$.

Outras características importantes foram observadas para a colisão do tipo $\bar{K}K$ do potencial ϕ^6 . Podemos observar que a primeira janela de *two-bounce* é observada para $n = 12$, enquanto que no modelo ϕ^4 , $n = 1$ para a primeira janela observada. O motivo da ausência de janelas de menor ordem ($n < 12$) está associado à existência de um coletivo de

estados vibracionais no problema de perturbações lineares em torno do par $\bar{K}K$. Este tema tem sido investigado em outros estudos tais como [66]. Logo em seguida à primeira janela, existe uma falsa janela de ressonância com $n = 13$. Esta falsa janela pode ser notada na figura 26 nas proximidades de $v = 0.0273$. Observe que, nesse ponto, o tempo entre a segunda e terceira colisão é maior, porém não chega a divergir. O fenômeno descrito na falsa janela já havia sido observado no contexto da colisão de *kinks*-impureza, onde os autores usam o termo *quasiresonances* para descrever as janelas ausentes [67]. No estudo [68], os autores também observaram a formação de uma falsa janela de ordem zero ($n = 0$).

Neste capítulo vimos um breve histórico da evolução do estudo de colisões entre soluções *kinks* de algumas teorias de campos escalares, tais como a teoria *sine*-Gordon e as teorias polinomiais ϕ^4 e ϕ^6 . Vemos que o resultado das colisões está diretamente relacionado ao espectro de perturbações lineares em torno das soluções BPS de cada teoria. Esta relação é estabelecida pelo mecanismo de troca de energia CSW, que diz que após a primeira colisão a energia cinética do modo zero é transferida para o modo vibracional, e se atendida a condição de ressonância, na segunda colisão a energia retorna ao modo zero fazendo com que o *kink* e *antikink* retornem por reflexão, envolvidos em radiação.

Então, se as soluções estáticas de uma teoria não possuem modo vibracional no espectro de perturbações lineares, logo não devem existir fenômenos de ressonância. E isto é o que se verifica na teoria *sine*-Gordon. Contudo, o contra-exemplo da teoria ϕ^6 mostrou que deve-se investigar a linearização da configuração inicial, pois esta pode suportar autoestados com capacidade de também armazenar energia cinética após um primeiro impacto. Um outro importante contra-exemplo ao mecanismo CSW foi apresentado no estudo [66], onde os autores relataram uma total supressão da estrutura de janelas de *two-bounce* apesar da existência de um modo vibracional.

Um outro apontamento que podemos fazer é sobre a noção de integrabilidade e a sua relação direta com não linearidade e modos internos de vibração. Como já pontuamos, em um modelo integrável existem infinitas grandezas conservadas e as soluções dessas teorias interagem entre si como *solitons*. De acordo com os resultados apresentados neste capítulo vemos que, em sistemas integráveis, alguns aspectos da não linearidade não são notados. Dentre esses aspectos podemos destacar: i) alta dependência da configuração inicial. Veja que quando o modelo é não integrável os fenômenos são muitos sensíveis a qualquer variação de v ; ii) existência de estruturas fractais, essa é uma manifestação da não linearidade que, por sua vez, foi verificada apenas em situações de não integrabilidade, como no caso do modelo ϕ^4 ; iii) estruturas caóticas, que somente foram notórias nos casos de não integrabilidade. De fato, de acordo com [27], o caos é uma propriedade privativa dos sistemas não integráveis.

Além dos trabalhos citados neste capítulo de revisão, há ainda uma rica e crescente

literatura em torno das propriedades de soluções tipo *kinks* com destaque para análise de espalhamento destas em diversos modelos físicos, como por exemplo: em aproximações da teoria ϕ^4 e *sine*-Gordon, teorias polinomiais de maior grau, tais como ϕ^8 [69–72]; modelos hiperbólicos [73, 74]; investigação de *oscillons* [75–77]; modelos com dois campos [78–82]; colisões com duplo *kink* [83–85]; colisões entre defeitos e uma impureza localizada [86–89]; colisão entre multi-*kinks* [90–92]; espalhamento de *kinks* em barreiras de contorno [93–96]. Nos capítulos seguintes abordamos alguns destes temas e também apresentamos nossas contribuições para a literatura.

4 Espalhamento de *Kink* e Antikink por Condição de Contorno tipo Neumann

O estudo de fenômenos descritos por campos escalares em $(1 + 1)$ dimensões, tais como *solitons* e ondas solitárias, teve seus primórdios nos modelos completamente integráveis sendo os de caráter não integrável explorados em seguida com a descoberta de interessantes padrões, conforme estudado no capítulo 3. De forma semelhante, o estudo de teorias escalares limitadas à semilinha por uma adequada condição de contorno também foi iniciado em modelos integráveis, razão pela qual já temos uma quantidade razoável de estudos nesse cenário [97–103]. Para estes modelos, o principal aspecto é a escolha de condições de contorno que sejam compatíveis com o *bulk* de integrabilidade dos sistemas [104, 105]. Neste sentido, o trabalho de Ghoshal e Zamolodchikov [104] tem sido citado por um grande número de estudos envolvendo sistemas físicos com condições de fronteira. Um exemplo de fronteira integrável é encontrado na descrição do problema Kondo em $(1 + 1)$ [106] onde o *kink* desempenha o papel de uma quase partícula. Outros exemplos são encontrados nos trabalhos [93, 107], que tratam da propagação de *fluxons* em linhas de transmissão de Josephson semi-infinitas com adequadas condições de fronteira. Nesses trabalhos, o *fluxon* é entendido como um *quantum* do fluxo magnético em determinada direção. Uma linha de transmissão de Josephson é obtida através de dois supercondutores metálicos separados por um isolante de pequena espessura ($\approx 25\text{\AA}$) de modo a possibilitar uma corrente de Josephson (tunelamento) com um fluxo de campo magnético em uma certa direção x [108]. Em particular, o estudo [93] analisou a propagação de *fluxons* em linhas de transmissão de Josephson na teoria *sine*-Gordon com uma condição de fronteira do tipo campo magnético aplicada nos extremos $x = -L$ e $x = 0$.

A natureza apresenta diversos sistemas não integráveis, então é razoável que seja de interesse a investigação do espalhamento de soluções localizadas limitadas à semilinha em cenários de não integrabilidade. No estudo recente [94] os autores investigam o espalhamento de uma solução *antikink* na semilinha com uma condição de Robin que interpola entre uma condição de Dirichlet ($k \rightarrow \infty$) e uma condição de Neumann ($k \rightarrow 0$). Entre esses dois extremos de condições integráveis, o sistema *antikink*-borda passa por cenários de não integrabilidade. Um outro estudo recente investigou o espalhamentos de *kinks* da teoria ϕ^4 na semilinha com condição de contorno de Neumann [95]. Este último estudo foi realizado em um cenário completamente não integrável.

Neste capítulo estudamos o espalhamento de soluções tipo *kink* na semilinha, com uma condição de fronteira do tipo Neumann em $x = 0$. Apresentamos primeiramente o espalhamento de *kinks* na teoria não integrável ϕ^4 [95] que revelou interessantes comporta-

mentos. Após isso apresentamos o nosso trabalho para a teoria ϕ^6 na semilinha [96]. O espalhamento de *kinks* na semilinha para a teoria ϕ^4 carrega características dos modelos não integráveis, tais como a existência do padrão fractal para a distribuição das janelas de ressonância. A explicação dessas estruturas também passa pela análise de estabilidade para as soluções-borda que dependem do parâmetro H . Além disso, características que não são observadas no modelo ϕ^4 padrão são relatadas. O interesse na extensão do estudo para a teoria ϕ^6 é natural, tendo em vista que, nesse caso, sabemos que as soluções *kinks* não possuem modo vibracional interno. Logo, os efeitos de ressonância podem ser atribuídos às soluções-borda ou mesmo à configuração composta escolhida. Para estes modelos não integráveis, o caminho que seguimos para garantir resultados físicos se dá pela modificação do funcional energia que agora depende do parâmetro H .

4.1 Energia na semilinha

Vamos considerar a existência de soluções estáticas BPS na semilinha $-\infty < x \leq 0$. A fronteira é imposta através da seguinte condição de Neumann

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = H. \quad (4.1)$$

Neste capítulo o campo escalar na semilinha sempre satisfaz esta condição de Neumann. Vamos então analisar o efeito dessa condição de fronteira no funcional de energia. Para isso, consideremos um campo escalar $\phi(x, t)$ que apresenta dinâmica padrão e que está sujeito a uma energia potencial $V(\phi)$ em uma região limitada $a \leq x \leq b$. A energia total do campo é então dada por

$$E(t) = \int_a^b dx \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right). \quad (4.2)$$

Derivando no tempo, temos

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_a^b dx \left(\frac{d\phi}{dt} \frac{d}{dx} \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\phi}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (4.3)$$

Integrando o segundo termo por partes

$$\int_a^b dx \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d\phi}{dt} \right) = \int_a^b dx \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dt} \frac{d\phi}{dx} \right) - \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (4.4)$$

$$= \frac{d\phi(b)}{dt} \frac{d\phi(b)}{dx} - \frac{d\phi(a)}{dt} \frac{d\phi(a)}{dx} - \int_a^b dx \left(\frac{d\phi}{dt} \frac{d^2\phi}{dx^2} \right). \quad (4.5)$$

Substituindo em (4.3) e considerando que $\phi(x, t)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange, temos que

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d\phi(b, t)}{dt} \frac{d\phi(b, t)}{dx} - \frac{d\phi(a, t)}{dt} \frac{d\phi(a, t)}{dx}. \quad (4.6)$$

O cenário que desejamos estudar corresponde a $b = -\infty$ e $a = 0$, com o campo sujeito à condição $\phi_x = H$ em $x = 0$. Nesse cenário, temos que

$$\frac{dE(t)}{dt} = H \frac{d\phi(0,t)}{dt} - \frac{d\phi(-\infty,t)}{dt} \frac{d\phi(-\infty,t)}{dx}. \quad (4.7)$$

Se campo descreve uma solução localizada, $\phi(\pm\infty) = \text{const.}$ e $\phi_x(\pm\infty, t) = 0$. Assim, fisicamente a taxa de variação da energia total será

$$\frac{dE(t)}{dt} = H \frac{d\phi(0,t)}{dt}. \quad (4.8)$$

Logo, por conservação, a limitação para a semilinha através da condição (4.1) exige a adição do termo de fronteira energética $-H\phi(0, t)$. Então, a energia na semilinha é dada por:

$$E = \int_{-\infty}^0 dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] - H\phi(0, t). \quad (4.9)$$

Assim, as soluções das equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi}, \quad (4.10)$$

na semilinha com condição de Neumann, têm a energia mínima dada por:

$$E_{\text{BPS}} = \pm W \Big|_{\phi(-\infty)}^{\phi(0)} - H\phi(0). \quad (4.11)$$

4.2 Espalhamento de kinks ϕ^4 na semilinha

Antes de estudar o processo de colisão, precisamos conhecer as possíveis soluções satisfazendo a condição de contorno e realizar a análise de perturbações lineares. Partimos do superpotencial, que no modelo ϕ^4 é dado por

$$W(\phi) = \phi - \phi^3. \quad (4.12)$$

Logo, as duas equações de primeira ordem são:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (1 - \phi^2). \quad (4.13)$$

As soluções

$$\varphi_1(x) = \tanh(x - x_0) \quad (4.14)$$

e

$$\varphi_2(x) = \coth(x - x_0) \quad (4.15)$$

satisfazem a equação (4.13) para o sinal “+”, enquanto que as soluções

$$\varphi_3(x) = -\tanh(x - x_0) \quad (4.16)$$

e

$$\varphi_4(x) = -\coth(x - x_0). \quad (4.17)$$

satisfazem a equação (4.13) para o sinal “−”. Vemos que as soluções (4.15) e (4.17) são irregulares na linha, contudo na semilinha elas são aceitáveis se suas energias forem finitas. Na semilinha, $-\infty < x \leq 0$, cada uma das soluções deve satisfazer a condição de fronteira em $x = 0$. Nesse caso, $x_0 \rightarrow X = X(H)$. Ou seja,

$$\varphi_1(x) = \tanh(x - \chi(H)) \quad (4.18)$$

$$\varphi_4(x) = -\coth(x - X_1(H)). \quad (4.19)$$

Da condição de Neumann (4.1) resulta que

$$\operatorname{sech}^2(\chi(H)) = H, \quad (4.20)$$

$$\coth^2(-X_1(H)) - 1 = H. \quad (4.21)$$

As equações (4.20) e (4.21) não possuem solução real para $H < 0$. A equação (4.20) possui duas soluções para o mesmo valor de H no intervalo $0 \leq H \leq 1$. Vamos representar essas soluções por: $X_0(H)$ e $\hat{X}_0(H)$ sendo que $X_0 = -\hat{X}_0$. A equação (4.21) também possui duas soluções tal que $X_1 = -\hat{X}_1$ para $0 \leq H < \infty$. Por simetria, temos que as soluções φ_2 e φ_3 geram as mesmas soluções quando submetidas à condição de fronteira com H negativo.

Vamos chamar as soluções na semilinha, satisfazendo a condição de Neumann em $x = 0$, de soluções-borda. As soluções-borda possíveis para o modelo ϕ^4 são:

- Para $H > 0$

$$\phi_1(x) = \tanh(x - X_0), \quad (4.22)$$

$$\phi_2(x) = \tanh(x + X_0), \quad (4.23)$$

$$\phi_3(x) = -\coth(x - X_1), \quad (4.24)$$

$$\phi_4(x) = -\coth(x + X_1). \quad (4.25)$$

Estas soluções são ilustradas na figura 29 para o valor de $H = 1/2$. Novamente, por simetria, notamos que as soluções-borda para $H < 0$ são dadas por $\tilde{\phi}_i(x) = -\phi_i(x)$, com $i = 1, 2, 3, \dots$. A energia dessas soluções é obtida através da equação (4.11). Para soluções da equação BPS $\phi_x = 1 - \phi^2$, temos que

$$E[\phi_i] = -W \Big|_{\phi(-\infty)}^{\phi(0)} - H\phi(0, t) \quad (4.26)$$

$$= \phi(0) - \frac{1}{3}\phi^3(0) - \phi(-\infty) + \frac{1}{3}\phi^3(-\infty) - H\phi(0) \quad (4.27)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\phi(0)^3, \quad (4.28)$$

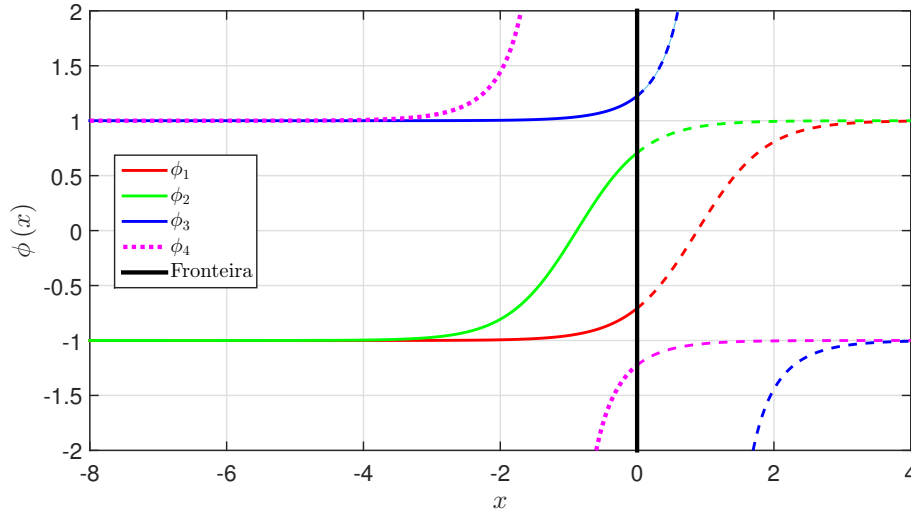


Figura 29 – Soluções-borda para H positivo. Com $H = 1/2$.

onde a dependência da energia da solução-borda com H fica implícita através da relação $H = 1 - \phi(0)^2$. Para as soluções da outra equação BPS, $\phi_x = \phi^2 - 1$, a energia é dada por:

$$E[\tilde{\phi}_i] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\tilde{\phi}(0)^3. \quad (4.29)$$

Perceba que na fronteira ($x = 0$) podemos expressar as soluções-borda (4.22-4.25) explicitamente em termos de H . Ou seja,

$$\phi_1(0) = -\sqrt{1-H}, \quad (4.30)$$

$$\phi_2(0) = \sqrt{1-H}, \quad (4.31)$$

$$\phi_3(0) = \sqrt{1+H}, \quad (4.32)$$

$$\phi_4(0) = -\sqrt{1+H}. \quad (4.33)$$

A estabilidade linear do campo nesse cenário é analisada por pequenas perturbações em torno das soluções-borda $\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t)$, sendo $\eta(x, t) = \eta_k(x)e^{i\omega_k t}$. Como sabemos que $\phi_x(x = 0) = H$, temos que as perturbações devem satisfazer

$$\left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (4.34)$$

O espectro de autofrequências para as soluções-borda perturbadas é apresentado na figura 30. Para $H > 0$, foi encontrado um estado vibracional para a borda ϕ_1 . A solução $\phi_2(x)$ apresenta soluções com $\omega^2 < 0$, o que indica que esta borda é instável. Para $H < 0$, não foram encontrados modos vibracionais [95]. Na região do contínuo, os autoestados são ondas planas satisfazendo a relação de dispersão $\omega^2 = k^2 + 4$.

Reportamos agora, de forma breve e em caráter de revisão, os resultados encontrados no artigo [95]. O perfil inicial consiste de um *antikink* ($\bar{K}$) que viaja a partir de $x_0 = -10$,

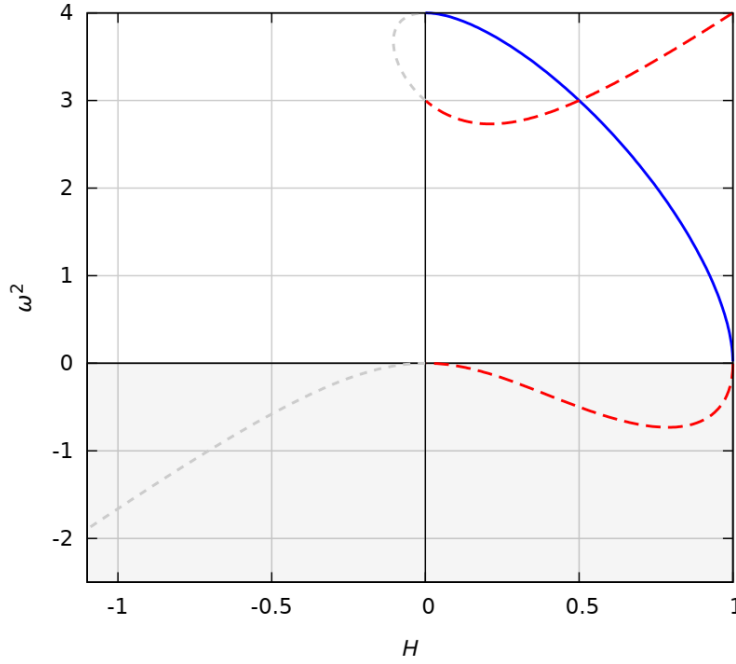


Figura 30 – Resultado da análise por perturbações lineares em torno das soluções-borda: A curva em azul para $H > 0$ é o estado vibracional encontrado para a borda ϕ_1 ; A curva vermelha em traço é o resultado para a borda $\phi_2(x)$. Figura retirada da referência [95].

quando $t = 0$, com velocidade v_i em direção à fronteira em $x = 0$. Vemos que as soluções regulares que podem se conectar ao *antikink* são somente $\phi_1(x)$ (que exige $H > 0$) e $\tilde{\phi}_3(x)$ ($H < 0$). Desta forma as condições iniciais para resolver a equação de movimento são:

- Para $H > 0$

$$\phi(x, 0) = \phi_1(x) - \tanh[\gamma(x - x_0)] + 1, \quad (4.35)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = -\gamma v_i \operatorname{sech}^2[\gamma(x - x_0)]. \quad (4.36)$$

- Para $H < 0$

$$\phi(x, 0) = \tilde{\phi}_3(x) - \tanh[\gamma(x - x_0)] + 1, \quad (4.37)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = -\gamma v_i \operatorname{sech}^2[\gamma(x - x_0)]. \quad (4.38)$$

Ambas as condições descrevem um *antikink* que viaja em direção à barreira energética em $x = 0$. Os resultados da colisão *antikink* com borda revelaram uma grande diversidade de comportamentos. Os principais aspectos podem ser entendidos a partir das figuras 31 e 32. A figura 31 mostra o módulo da velocidade final, v_f , do *antikink* em função da velocidade inicial, v_i , para alguns valores representativos de H .

A figura 32 é um diagrama de fase para o par (H, v_i) que nos permite ter uma visão panorâmica dos resultados da colisão *antikink* borda. Neste capítulo e nos próximos

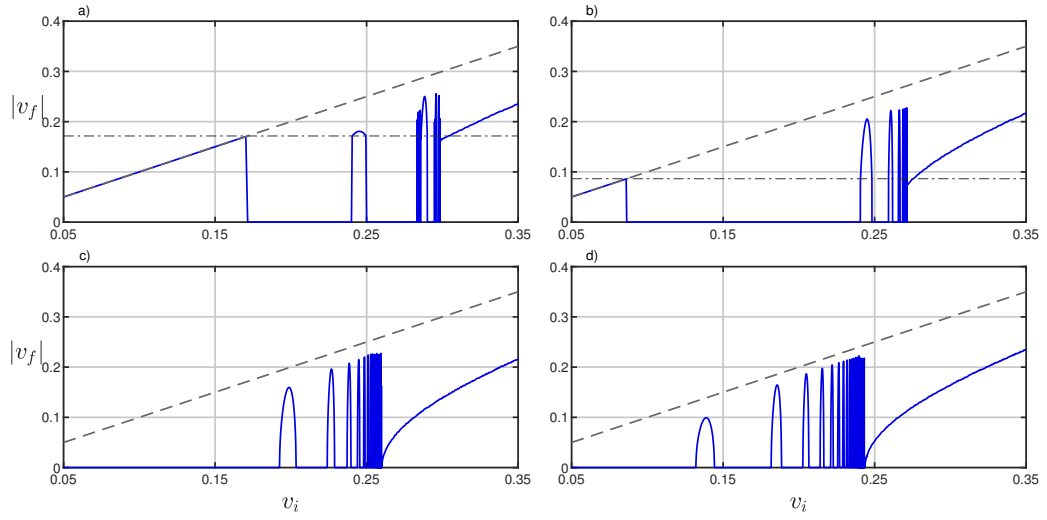


Figura 31 – Módulo da velocidade final do *antikink* para: a) $H = -0.20$, b) $H = -0.10$, c) $H = 0$, d) $H = 0.10$. A linha tracejada indica a reta $v_f = v_i$. A linha horizontal em pontos indica o valor da velocidade v_* , Eq. (4.46), para o correspondente valor de H .

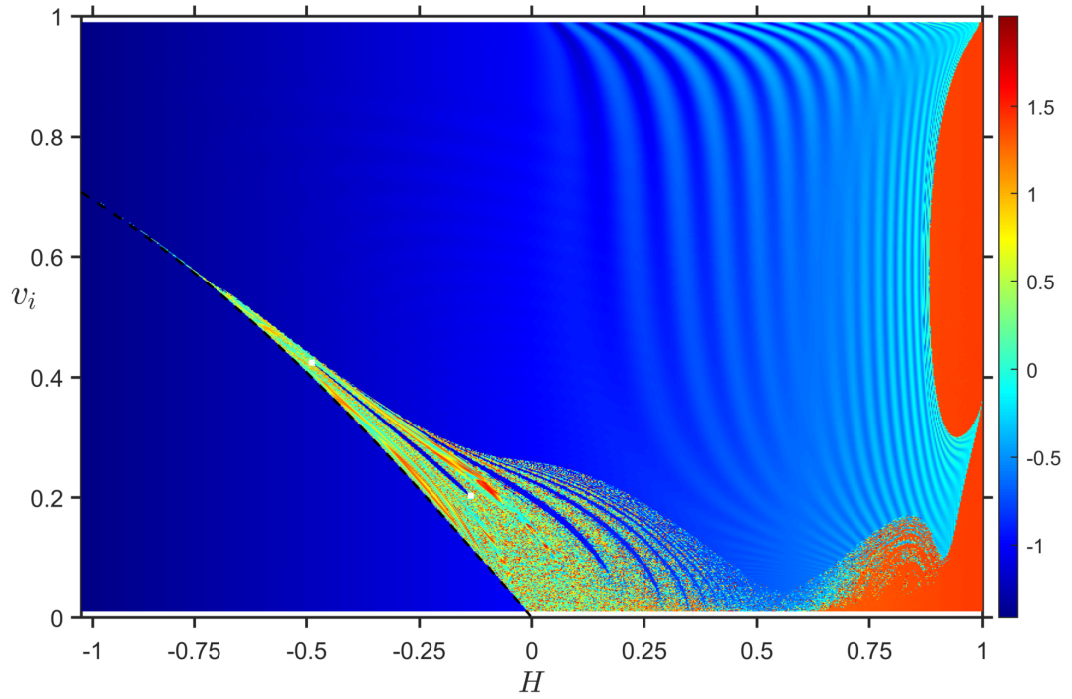


Figura 32 – Diagrama de fase que associa o par (H, v_i) ao estado final da colisão $\phi(0, t_f)$, com $t_f = \frac{|x_0|}{v_i} + 100$.

temos outros diagramas semelhantes a este. Tais diagramas nos permitem observar como os diferentes estados finais estão distribuídos em termo dos parâmetros do problema. Em geral, cada cor está associada a um determinado estado final da colisão. Por exemplo, a cor azul da parte superior, está associada ao estado final *one-bounce*, as listras em azul, como a delimitada pelos dois quadrados brancos, representam estados finais do tipo *n-bounces* e a cor laranja avermelhada, predominante para $H \rightarrow 1$, representa o fenômeno de emissão de um *kink* a partir da borda, como comentado adiante.

Agora vamos comentar sobre os principais comportamentos observados. Para H positivo, na região $0 < H < H_c \approx 0.60$, o *antikink* ou é refletido pela borda, retornando com uma velocidade v_f ou torna-se ligado à borda oscilando com grande amplitude e com frequência abaixo da frequência do contínuo, $\omega^2 = 4$. Quando $H = 0$, a colisão *antikink*-borda se torna equivalente à colisão *kink-antikink* para o ϕ^4 na linha, conforme mostra a figura 31c (compare com a figura 17). Para pequenos valores de H positivo a estrutura de janelas de ressonância é modificada basicamente em termo das suas localizações no eixo das velocidades v_i e também pelo valor da velocidade crítica v_c . Na figura 32 as janelas são indicadas pelas faixas horizontais em azul, no intervalo $0 < H < H_c$. Para grandes valores de H positivo, um interessante fenômeno ocorre: a solução borda $\phi_1(x)$, após a colisão, tende a decair para a solução-borda $\phi_3(x)$ e ocorre a produção de um novo *kink* viajante, que se desloca para longe da borda. No lado direito da figura 33 vemos alguns possíveis comportamentos para o *kink* produzido. Observamos que dependendo da velocidade relativa v_i , o *antikink* refletido e o *kink* originado na borda podem viajar separados ou se combinarem de modo a formar um *bulk-oscillon* como na figura 33f. Esses últimos fenômenos são predominantes, na região em vermelho, para $H > 0.60$ na figura 32.

Para valores negativos de H , observa-se que a solução-borda interage de forma repulsiva sobre o *antikink* viajante, de tal forma que se a velocidade v_i é pequena, então o *antikink* é refletido sem ao menos conseguir chegar até a fronteira em $x = 0$, retornando com velocidade de mesmo módulo, conforme mostra a figura 33a. Essa característica é também notada no gráfico da velocidade final, v_f , em função da velocidade de início, v_i . Nas figuras 31a-b vemos que para pequenos valores de v_i , o *antikink* é refletido com $|v_f| = |v_i|$, o que indica uma interação elástica. Como não há contato entre o centro do *antikink* e a borda, podemos descrever esse comportamento repulsivo da borda sobre o *antikink* através da força estática entre eles. A força de interação entre o *antikink* e borda é dada por [7, 95] (apêndice B):

$$F = 32 \left(\frac{1}{4} H + e^{2x_0} \right) e^{2x_0}. \quad (4.39)$$

Para $H < 0$, a força é repulsiva se o *antikink* está longe da borda, somente se tornando atrativa se o centro do *antikink* estiver em um ponto $x > \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1}{4} H \right)$. Se a velocidade v_i cresce, o *antikink* terá então mais energia para igualar ou superar a barreira de energética que o repele. Quando a energia do *antikink* é igual, temos uma configuração como a

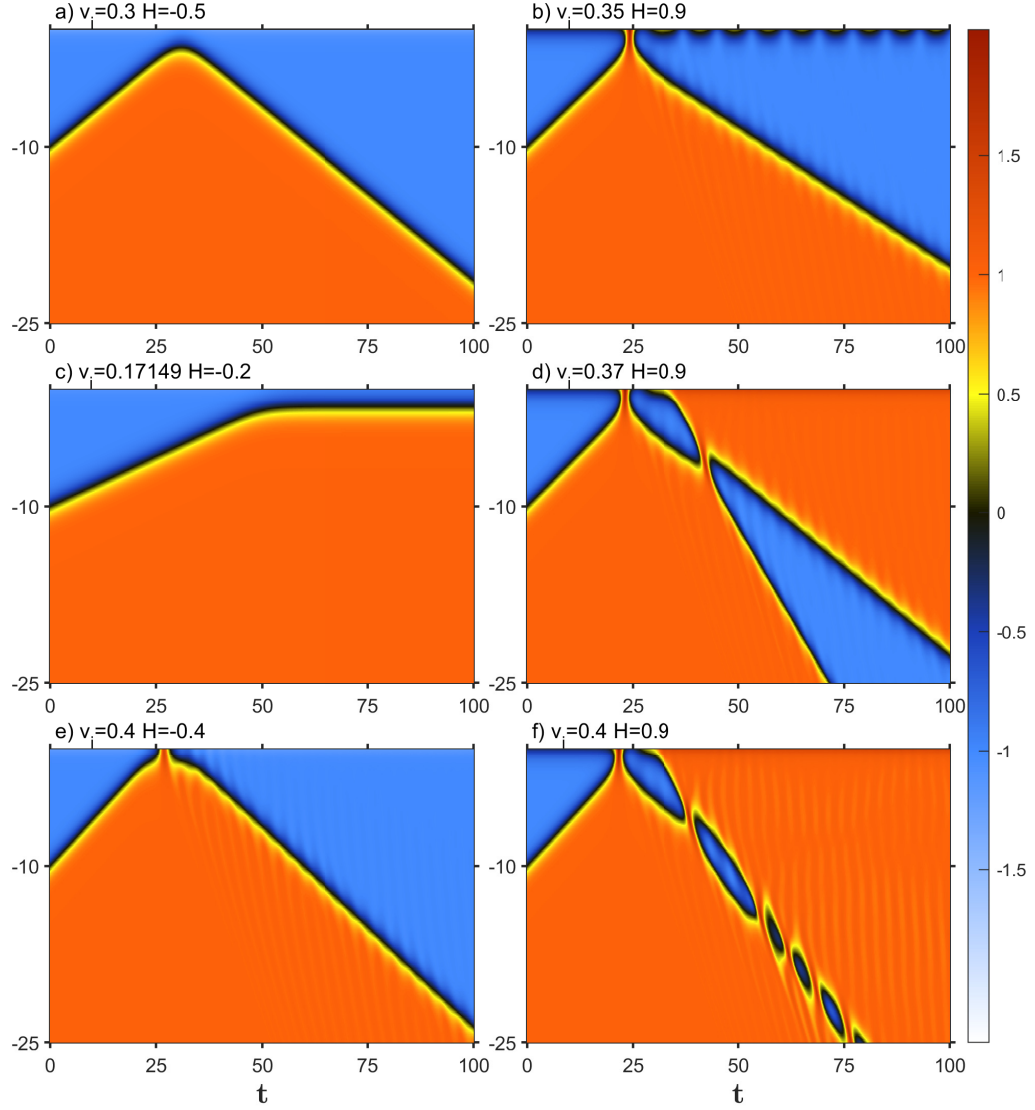


Figura 33 – Colisão *antikink*-borda $\phi_1(x)$: alguns cenários representativos.

mostrada na figura 33b, onde o *antikink* fica parado rente à borda. Este estado final é equivalente à solução-borda $\tilde{\phi}_2(x)$. Assim, no equilíbrio energético devemos ter que:

$$\frac{4}{3}\gamma(v_*) + E[\tilde{\phi}_3] = E[\tilde{\phi}_2] \quad (4.40)$$

com $\gamma(v_*) = (1 - v_*^2)^{-\frac{1}{2}}$ ¹. Da equação (4.29) temos que

$$E[\tilde{\phi}_3] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\tilde{\phi}_3(0)^3, \quad (4.41)$$

$$E[\tilde{\phi}_2] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\tilde{\phi}_2(0)^3. \quad (4.42)$$

¹ v_* é o mesmo v_{cr} da referência [95].

Substituindo em (4.40)

$$\frac{4}{3}\gamma(v_*) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\tilde{\phi}_3(0)^3 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\tilde{\phi}_2(0)^3. \quad (4.43)$$

$$\gamma(v_*) = \frac{1}{2} [\tilde{\phi}_3(0)^3 - \tilde{\phi}_2(0)^3]^{-2}. \quad (4.44)$$

$$v_* = \sqrt{1 - 4 [\tilde{\phi}_3(0)^3 - \tilde{\phi}_2(0)^3]}. \quad (4.45)$$

Utilizando as equações (4.30) - (4.33) e a relação $\tilde{\phi}_i(x) = -\phi_i(x)$, obtemos a dependência explícita de $v_*(H)$ como sendo

$$v_*(H) = \sqrt{1 - 4[(1+H)^{3/2} + (1-H)^{3/2}]^{-2}}. \quad (4.46)$$

A curva v_* está inserida no diagrama de fase (figura 32) para $H < 0$ (linha tracejada em preto). Os autores do estudo confirmaram que os resultados numéricos estão em bom acordo com a previsão de v_* . Assim, quando $v_i = v_*(H)$ a energia do *antikink* viajante chega ao topo barreira de potencial repulsivo. Se $v_i > v_*$, então o *antikink* supera a barreira de potencial e ao colidir com a borda excita os modos internos e então o *antikink* fica sujeito a ser refletido pela borda ou ficar oscilando em um estado tipo *bion*. Acima da velocidade, v_* , existe ainda uma outra velocidade crítica, v_c , a partir da qual o *antikink* colide apenas uma vez com a borda sendo refletido em seguida, como é o caso mostrado na figura 33c. Observe pelas figuras 31a e b que as janelas de ressonância estão localizadas no intervalo $v_* < v_i < v_c$. Observe também que se o *antikink* colide com a borda e retorna, sua velocidade final é, em geral, maior que $v_*(H)$. As janelas de ressonância para $H < 0$ são atribuídas ao modo vibracional do *antikink* viajante, uma vez que não existem modos vibracionais para as soluções-borda com $H < 0$, conforme a figura 30.

Os autores notaram ainda uma nova característica a partir das colisões *antikink*-borda. Foi observada uma janela de *two-bounce* de ordem zero, que não é observada em colisões na linha completa [22]. Esta janela pode ser observada na figura 32 na região delimitada por $(H, v_i) = (-0.488, 0.424)$ a $(H, v_i) = (-0.135, 0.203)$, estes pontos estão indicados na figura através de dois quadrados brancos. A figura 34 mostra as primeiras janelas de *two-bounces* observadas para $H < 0$ (à esquerda) e $H \geq 0$ (à direita). Em 34a, vemos o campo na borda para uma colisão para (H, v_i) pertencentes à janela de ordem zero.

Na próxima seção apresentamos a primeira contribuição original desta tese.

4.3 Espalhamento de *kinks* ϕ^6 na semilinha

No capítulo 3, vimos que o estudo de colisões no modelo ϕ^6 não foi redundante em relação ao modelo ϕ^4 . Ao invés, tornou possível uma outra abordagem para aplicação do mecanismo de troca de energia, explicando a existência e localização das janelas

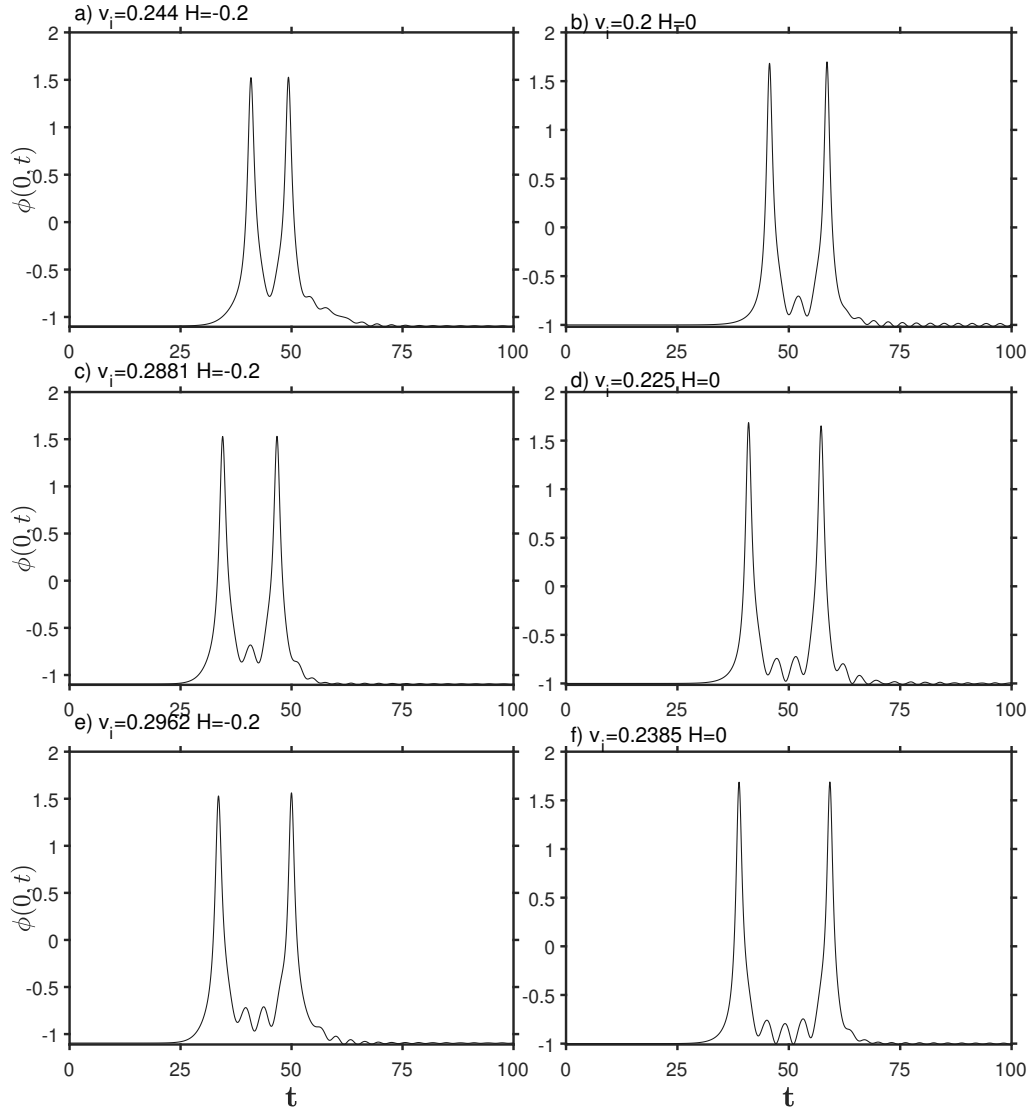


Figura 34 – Evolução temporal do campo na borda. À esquerda temos colisões nas janelas $n = 0, 1, 2$ para $H < 0$. À direita as primeiras janelas $n = 1, 2, 3$ para $H = 0$, correspondendo ao modelo ϕ^4 .

de ressonância observadas naquele caso. Desta forma, torna-se oportuno a investigação do espalhamento de soluções *kinks* do modelo ϕ^6 na semilinha, $-\infty < x \leq 0$, com a borda sendo uma barreira energética estabelecida pela condição de Neumann. Novamente, procuramos as possíveis soluções-borda, analisamos perturbações lineares e em seguida resolvemos numericamente a equação de movimento ϕ^6 .

O superpotencial do modelo ϕ^6 é:

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4. \quad (4.47)$$

Então, as duas equações de primeira ordem são dadas por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi - \phi^3 \quad (4.48)$$

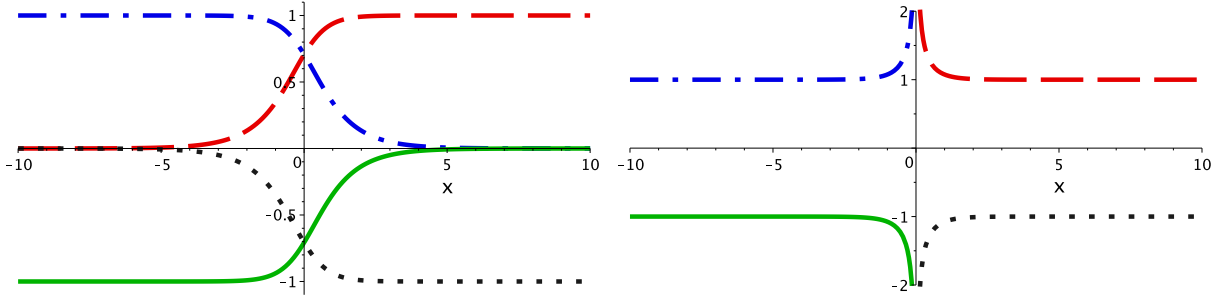


Figura 35 – Modelo ϕ^6 na linha: a) (esquerda) *Kinks* e *antikinks* regulares: $\Phi_{1+}(x)$ (vermelho tracejado), $\Phi_{2+}(x)$ (linha de traços e pontos em azul), $\Phi_{1-}(x)$ (linha em pontos pretos), $\Phi_{2-}(x)$ (linha verde). b) (direita) Soluções irregulares: $\Phi_{3+}(x)$ (linha tracejada em vermelho), $\Phi_{4+}(x)$ (linha de traços e pontos em azul), $\Phi_{3-}(x)$ (pontos em preto), $\Phi_{4-}(x)$ (linha verde).

e

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi^3 - \phi. \quad (4.49)$$

A solução *kink* conectando os mínimos $\{0, 1\}$ é dada por:

$$\Phi_{1+}(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x - X_c)}{2}}. \quad (4.50)$$

E a solução *antikink* conectando os mínimos $\{1, 0\}$ é dada por:

$$\Phi_{2+}(x) = \sqrt{\frac{1 - \tanh(x - X_c)}{2}}, \quad (4.51)$$

Onde X_c é uma constante que define a posição do centro do *kink/antikink*. O *antikink* e *kink* conectando os mínimos $\{0, -1\}$ e $\{-1, 0\}$ são, respectivamente, dados por: $\Phi_{1-}(x) = -\Phi_{1+}(x)$ e $\Phi_{2-}(x) = -\Phi_{2+}(x)$. A figura 35a mostra o perfil dessas soluções. Temos ainda outras quatro soluções que são divergentes em uma determinada posição, $x = X_c$, e portanto irregulares na linha. São elas:

$$\Phi_{3\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 + \coth(x - X_c)}{2}} \quad (4.52)$$

$$\Phi_{4\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - \coth(x - X_c)}{2}}. \quad (4.53)$$

A figura 35b mostra o perfil dessas soluções para $X_c = 0$.

Passamos agora a considerar as soluções do modelo ϕ^6 na semilinha, $-\infty < x \leq 0$, incluindo a condição de fronteira $\phi_x(x = 0) = H$. Devido à simetria $\mathbb{Z}_2$ do potencial, podemos considerar somente soluções pertencentes ao setor topológico $\{0, 1\}$. Com a restrição imposta pela condição de contorno, o X_c dos estados BPS passa a ser uma função do parâmetro H . Portanto, na semilinha, temos as soluções dadas por:

$$\varphi_{1+}(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh[x - \chi(H)]}{2}}, \quad (4.54)$$

$$\varphi_{4+}(x) = \sqrt{\frac{1 - \coth[x - X_1(H)]}{2}}, \quad (4.55)$$

aos quais são equivalentes à $\Phi_{1+}(x)$ e $\Phi_{4+}(x)$ da linha completa. A condição de Neumann, Eq. (4.1), implica que

$$\frac{\text{sech}^2 \chi}{\sqrt{8 - 8 \tanh \chi}} = H, \quad (4.56)$$

$$\frac{\coth X_1^2 - 1}{\sqrt{8 + 8 \coth X_1}} = H. \quad (4.57)$$

As equações (4.56) e (4.57) não possuem solução real para $H < 0$. A equação (4.56) possui duas soluções para o mesmo valor de H no intervalo $0 \leq H \leq H_m$, com $H_m = 2/\sqrt{27}$. Vamos representar essas soluções por: $X_0(H)$ e $\hat{X}_0(H)$ com $\hat{X}_0 \leq X_0$. Quando $H = H_m$, temos que $\hat{X}_0 = X_0$. Isto é semelhante ao que ocorre para o modelo ϕ^4 na semilinha [95], onde temos que $|\hat{X}_0| = |X_0|$ e $H_m = 1$. A outra equação, (4.57), possui uma única solução real que vamos representar por $X_1(H)$. O domínio dessa solução é $0 < H < \infty$.

Temos ainda as seguintes soluções:

$$\varphi_{2+}(x) = \sqrt{\frac{1 - \tanh[x + \chi(H)]}{2}}, \quad (4.58)$$

$$\varphi_{3+}(x) = \sqrt{\frac{1 + \coth[x + X_1(H)]}{2}}. \quad (4.59)$$

Nesse caso, a condição de Neumann (4.1) resulta

$$\frac{\text{sech}^2 \chi}{\sqrt{8 - 8 \tanh \chi}} = -H, \quad (4.60)$$

$$\frac{\coth X_1^2 - 1}{\sqrt{8 + 8 \coth X_1}} = -H. \quad (4.61)$$

As equações (4.60) e (4.61) não possuem soluções $H > 0$. A equação (4.60) possui duas soluções, $X_0(H)$ e $\hat{X}_0(H)$ no intervalo $-H_m \leq H \leq 0$, enquanto que a (4.61) possui apenas uma solução real, X_1 , para $H < 0$.

A figura 36a mostra o comportamento dos parâmetros X_0 e $\hat{X}_0$ em função de $|H|/H_m$. A figura 36b mostra o parâmetro X_1 como função de $|H|$. O sinal de H vai depender da escolha particular de uma das soluções φ_{i+} , $i = 1 \dots 4$, conforme mostramos adiante.

Uma vez conhecidos X_0 , $\hat{X}_0$ e X_1 , podemos conhecer as soluções-borda de interesse. Vamos classificar essas soluções de acordo a equação BPS de origem. Por esse critério temos que

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x - X_0)}{2}} \quad (4.62)$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x - \hat{X}_0)}{2}} \quad (4.63)$$

$$\phi_3(x) = \sqrt{\frac{1 + \coth(x + X_1)}{2}}. \quad (4.64)$$

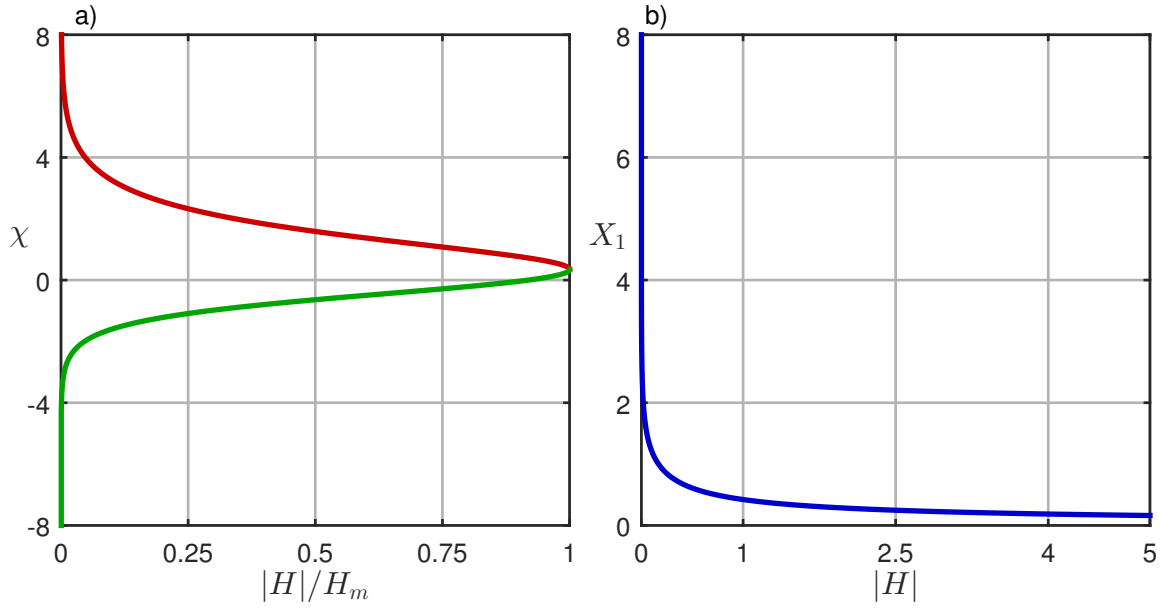


Figura 36 – a) As duas soluções reais da equação (4.60) para $\chi(H)$: X_0 (linha vermelha) e $\hat{X}_0$ (linha verde); b) Única solução real, $X_1(H)$, da equação (4.61).

são soluções-borda para a equação BPS (4.48). Enquanto que

$$\tilde{\phi}_1(x) = \sqrt{\frac{1 - \tanh(x + \hat{X}_0)}{2}} \quad (4.65)$$

$$\tilde{\phi}_2(x) = \sqrt{\frac{1 - \tanh(x + X_0)}{2}}, \quad (4.66)$$

$$\tilde{\phi}_3(x) = \sqrt{\frac{1 - \coth(x - X_1)}{2}}, \quad (4.67)$$

são soluções-borda para a equação BPS (4.49). Em relação ao domínio de existência, note que ϕ_1, ϕ_2 e $\tilde{\phi}_3$ são soluções para $H > 0$, enquanto que $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ e ϕ_3 são para $H < 0$. O perfil das soluções na região de interesse, $x \leq 0$, para determinado valor de H , é mostrado na figura 37. Percebemos que a solução $\phi_3(x)$ não é regular para $x < 0$, e deste modo não será considerada nas análises que faremos a seguir.

A energia das soluções-borda pode ser calculada a partir da equação (4.11). Desta forma, encontramos que a energia para as soluções (4.62 - 4.63) é dada por

$$E[\phi_i(x)] = \frac{3}{4}\phi_i(0)^4 - \frac{1}{2}\phi_i(0)^2, \quad (4.68)$$

onde $i = 1 \dots 2$. Já para as soluções (4.65 - 4.67), a energia tem a forma

$$E[\tilde{\phi}_i(x)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\tilde{\phi}_i(0)^2 - \frac{3}{4}\tilde{\phi}_i(0)^4, \quad (4.69)$$

com $i = 1 \dots 3$. As equações (4.68) e (4.69) mostram que a energia apresenta uma dependência implícita de H , que se dá pelos termos $\phi_i(0)$ e $\tilde{\phi}_i(0)$.

Agora vamos analisar o espectro de perturbações lineares das soluções-borda no ϕ^6 . Um caminho para realizar esse estudo é considerar que o *kink/antikink* que viaja

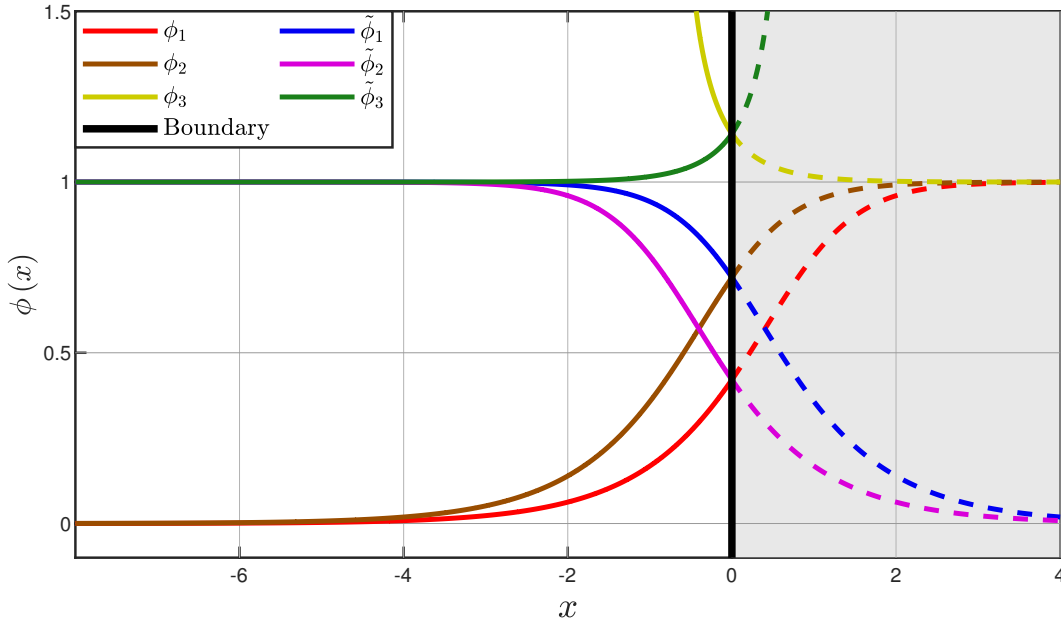


Figura 37 – Perfil das soluções estáticas satisfazendo a condição de Neumann com $|H| = 0.90H_m$.

está suficientemente longe da solução-borda em $x = 0$ e então resolver a equação do tipo Schrödinger resultante para a configuração composta. A figura 38 mostra o potencial do tipo Schrödinger para algumas configurações iniciais do par *antikink*-borda para diferentes valores de H . Percebemos que o potencial é composto por duas partes: uma com um poço centrado em x_0 (o valor nas figuras é: $x_0 = -12.50$) caracterizando o *kink/antikink* viajante. A segunda parte fica em torno de $x = 0$ e representa a influência da condição de borda. Vemos também que para $\omega^2 \geq 4$ temos os autoestados de espalhamento. Deste modo, a possibilidade de existência de modos vibracionais depende da região em torno da fronteira em $x = 0$. As figuras 38a-b mostram que para as bordas ϕ_1 e ϕ_2 tais modos devem estar situados na faixa $\omega^2 < 4$. O potencial associado à configuração *antikink*- $\tilde{\phi}_1$ é mostrado na figura 38c na qual vemos que estados ligados podem existir na região $\omega^2 < 1$. A região $1 < \omega^2 < 4$ só pode admitir estados metaestáveis, similares aos estados de reflexão que ocorrem na linha, conforme a seção 3.4. O potencial para $\Phi_{1+}(x - a) + \tilde{\phi}_2(x) - 1$ é similar à figura 38c, levando às mesmas possibilidades para a ocorrência de estados vibracionais e estados metaestáveis para a solução-borda $\tilde{\phi}_2$. O potencial da figura 38d mostra que não há possibilidade de estados vibracionais para a solução-borda $\tilde{\phi}_3$.

O resultado da solução numérica é mostrado na figura 39. Para $0 < H < H_m$, foram analisadas as soluções $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ e $\tilde{\phi}_3(x)$. A solução $\phi_1(x)$ apresenta um modo vibracional na região $0 < \omega^2 < 1$, assim essa solução é estável. A solução-borda $\phi_2(x)$ apresenta um autoestado para $\omega^2 < 0$, sendo portanto instável. A solução $\tilde{\phi}_3(x)$ não possui modo vibracional e é estável.

Para $-H_m < H < 0$, analisamos as soluções $\tilde{\phi}_1(x)$ e $\tilde{\phi}_2(x)$. Para a solução $\tilde{\phi}_1(x)$ encontramos um autoestado na região $0 < \omega^2 < 4$, o que indica estabilidade da solução.

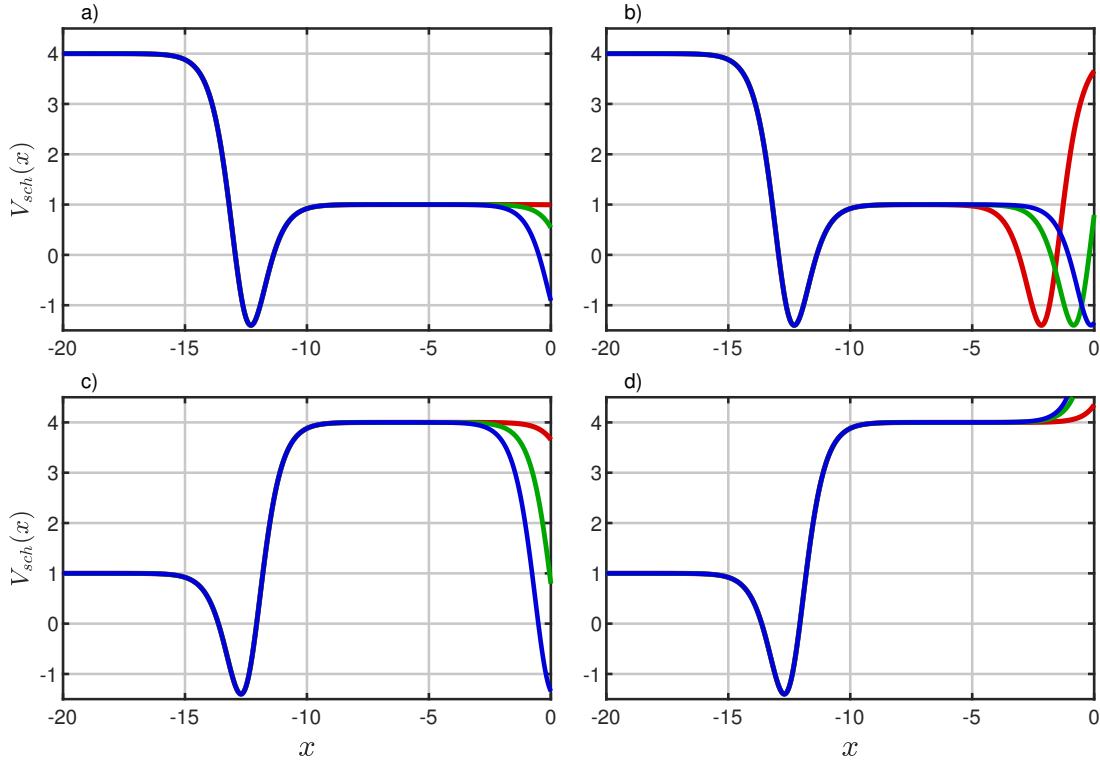


Figura 38 – Potencial tipo-Schrödinger para as configurações iniciais estáticas: a) $\Phi_{2+}(x - a) + \phi_1(x)$, b) $\Phi_{2+}(x - a) + \phi_2(x)$, c) $\Phi_{1+}(x - a) + \tilde{\phi}_1(x) - 1$ e d) $\Phi_{1+}(x - a) + \tilde{\phi}_3(x) - 1$. As linhas correspondem aos valores $|H| = 0.05H_m$ (vermelha), $|H| = 0.50H_m$ (verde) e $|H| = 0.95H_m$ (azul). Com $a = -12.50$.

Vemos que esse autoestado é metaestável ($1 < \omega^2 < 4$) para $-0.90 \lesssim H/H_m < 0$ passando para a região de estados ligados ($0 < \omega^2 < 1$) quando $-1 < H/H_m \lesssim -0.90$. A solução $\tilde{\phi}_2(x)$ possui três autoestados, sendo um deles com $\omega^2 < 0$, o que indica instabilidade.

Podemos usar a análise de estabilidade das soluções-borda para verificar a estabilidade do método numérico utilizado. Para isso, consideramos as soluções-borda de forma isolada sem qualquer processo de colisão com *kink/antikink* viajante. Seja $\xi(x)$ uma das soluções-borda $\phi_1(x)$, $\tilde{\phi}_1(x)$, ϕ_2 e $\tilde{\phi}_3(x)$. Evoluímos a equação de movimento ϕ^6 com as seguintes condições iniciais:

$$\phi(x, 0) = \xi(x), \quad (4.70)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = 0. \quad (4.71)$$

A figura 40a mostra a evolução da solução-borda estável ϕ_1 em $x = 0$, enquanto que a figura 40b mostra esta mesma solução longe da borda, em $x = -50$. Deixamos a equação de movimento evoluir até $t = 500$. Através desta análise, vemos que o método numérico não produz instabilidades significativas à ordem de precisão. O resultado obtido mostra que, na borda, o campo escalar varia menos uma unidade em 10^7 , ao mesmo tempo que longe da borda, o campo varia menos que uma unidade em 10^8 .

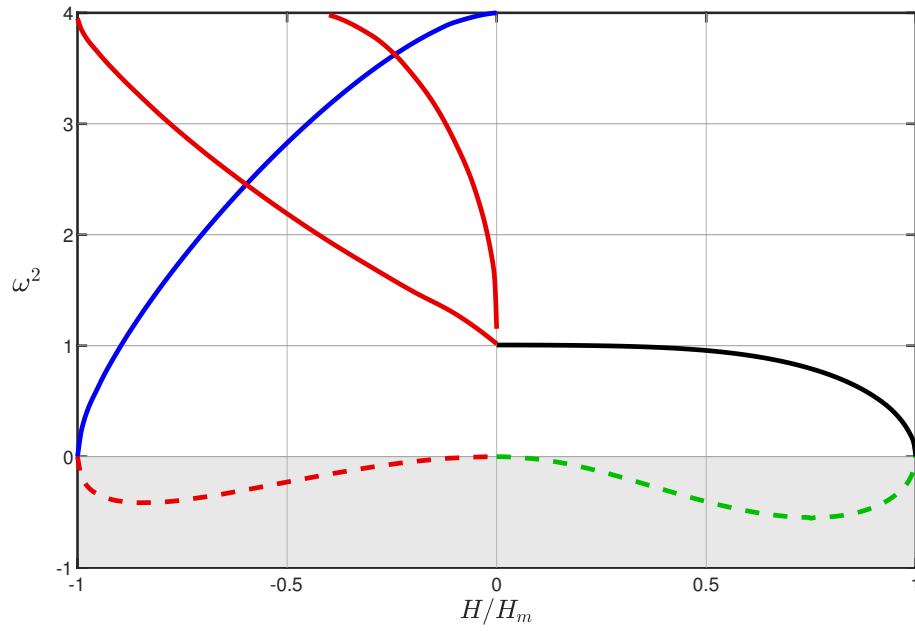


Figura 39 – Quadrado das auto-frequências, ω^2 , dos modos localizados na borda em função de H . As curvas são para as soluções: $\phi_1(x)$ (linha em preto), $\phi_2(x)$ (linha tracejada verde), $\tilde{\phi}_1(x)$ (linha em azul) e $\tilde{\phi}_2(x)$ (linhas vermelhas).

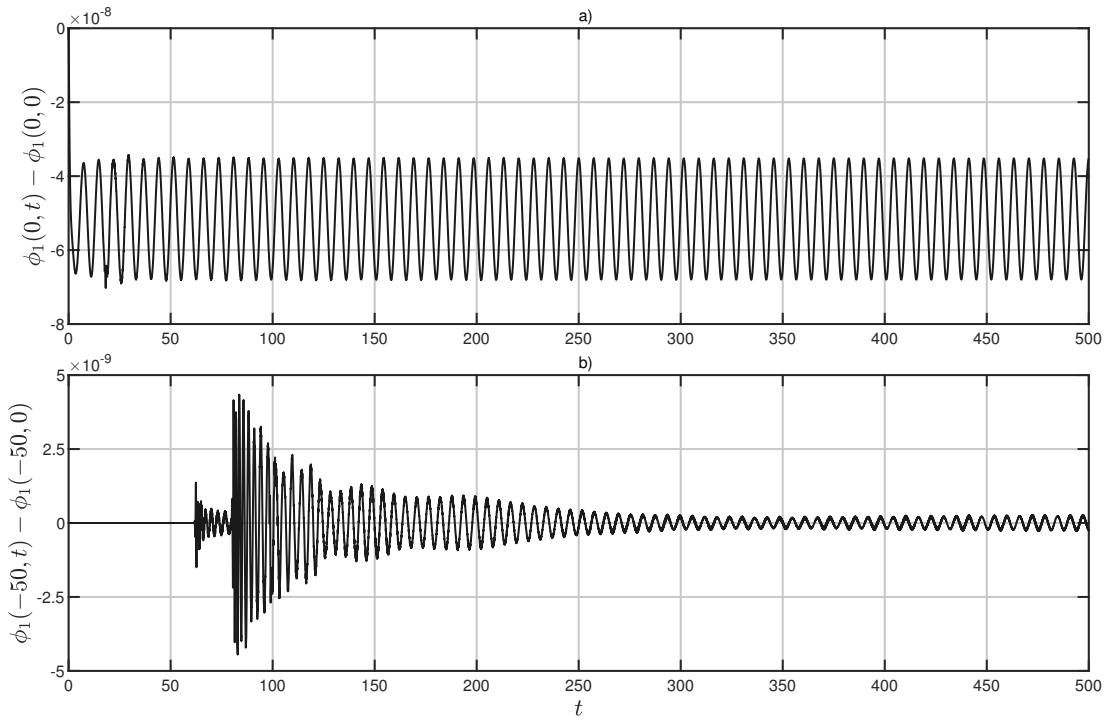


Figura 40 – Aferindo a estabilidade do método através da configuração estável $\phi_1(x)$: a) Evolução do campo na borda em $x = 0$, b) O campo (radiação) longe da borda em $x = -50$. Neste caso, temos $H = 0.80H_m$.

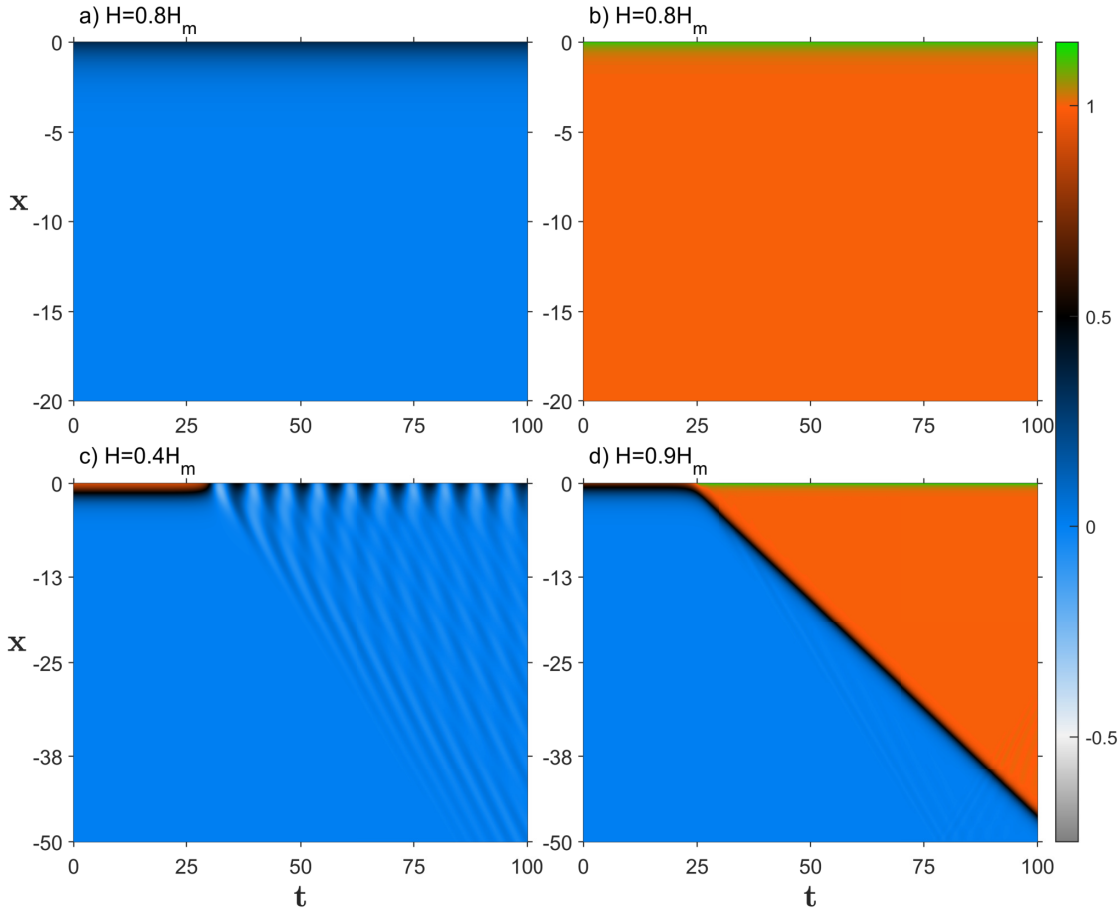


Figura 41 – Aferindo numericamente a estabilidade das soluções-borda: (a) A solução-borda $\phi_1(x)$ não muda sua forma, sendo compatível com sua estabilidade; (b) $\tilde{\phi}_3(x)$ também não muda com o tempo; A solução-borda $\phi_2(x)$, confirma ser instável, uma vez que muda sua forma, emitindo radiação, conforme (c) ou um *kink* viajante como em (d), ao mesmo tempo que em $x = 0$, ocorre o processo $\phi_2 \rightarrow \tilde{\phi}_3$.

O mesmo resultado foi obtido nos *plots* de superfície mostrados na figura 41. Para as bordas estáveis ($\phi_1(x)$, $\tilde{\phi}_1(x)$ e $\tilde{\phi}_3(x)$), nós não observamos mudanças significativas na forma do campo, como visto nas figuras 41a e 41b. A instabilidade da solução-borda $\phi_2(x)$ é bem nítida por essa análise. Podemos observar que para $H \lesssim 0.72H_m$, há emissão considerável a partir da borda, como mostra a figura 41c. Para $H \gtrsim 0.72H_m$, vemos a produção de um *kink* a partir da borda viajando para $-\infty$, como mostra a figura 41d. Para grandes valores de H , não há mais emissão de radiação perceptível após a criação do *kink* viajante. Nesse caso, vemos que a natureza da solução-borda é alterada com o tempo. Na figura podemos observar o seguinte processo: $\phi_2 \rightarrow \tilde{\phi}_3$ em torno de $x = 0$.

A seguir vamos estudar o espalhamento de um *antikink* ou *kink* pertencentes ao setor $\{0, 1\}$ com as soluções-borda adequadas a cada caso. Para este propósito vamos considerar somente soluções-borda que sejam estáveis e regulares na semilinha. Nesse sentido, as soluções-bordas com tais requisitos são: $\phi_1(x)$, $\tilde{\phi}_1(x)$ e $\tilde{\phi}_3(x)$.

4.4 Espalhamento *Antikink*-borda

Vamos considerar o espalhamento de um *antikink* do setor $\{0, 1\}$ com uma solução-borda. A figura 37 mostra que um *antikink* deste setor pode ser conectado somente com as bordas $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$. No entanto, já vimos que a solução $\phi_1(x)$ é regular e estável, enquanto que $\phi_2(x)$ se mostrou instável. O *antikink* em questão é a solução estática $\Phi_{2+}(x)$, dada pela equação (3.51). Este se torna um *antikink* viajante quando aplicamos um *boost* de Lorentz, da seguinte forma:

$$\Phi_{2+}(v_i, x, t) = \sqrt{\frac{1 - \tanh[\gamma(x - v_i t - a)]}{2}} \quad (4.72)$$

com $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_i^2}$. De modo que, em $t = 0$, o centro do *antikink* se encontra na posição $x = a$, com $a < 0$. Diante disso, temos que as duas condições iniciais para resolver a equação de movimento são:

$$\phi(x, 0) = \Phi_{2+}(v_i, x, 0) \pm \phi_1(x), \quad (4.73)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\Phi}_{2+}(v_i, x, t)|_{t=0}. \quad (4.74)$$

O perfil inicial com o sinal de mais (menos), na equação (4.73), é válido para $H > 0$ ($H < 0$). Devido à diversidade de resultados, nós iremos separar nossa análise por $H > 0$ e $H < 0$.

4.4.1 $0 \leq H < H_m$

Os principais comportamentos para esta configuração inicial, *antikink* viajante colidindo com ϕ_1 , são apresentados na figura 42. Estes são altamente sensíveis à variações do par (v_i, H) , revelando um cenário típico de não-integrabilidade, uma vez que após a colisão ocorre a emissão de radiação. E de acordo com o observado no capítulo 3, somos induzidos a considerar que um modo interno é excitado após a colisão. Como já investigamos o espectro linear de autoestados em torno das soluções, sabemos que esse comportamento é esperado, pois embora o *antikink* viajante não possua modo vibracional, vemos através da figura 39 que a solução-borda em questão possui. Desta forma, esperamos obter fenômenos com relevante contribuição do modo vibracional da solução-borda. De fato, a figura 42a mostra um estado de *bion* que oscila na borda. A figura 42b mostra o fenômeno *one-bounce* com a borda. Ou seja, o *antikink* colide apenas uma vez com a borda e em seguida é refletido com emissão de radiação (espalhamento inelástico). A figura 42c mostra o fenômeno de *two-bounce* na borda.

A figura 42d mostra a produção de um *kink* $\Phi_{1+}(x)$ viajante a partir da borda. Neste caso, o *antikink* inicial e o *kink* produzido pela borda formam um conjunto oscilatório, de modo que, viajam armadilhados um ao outro. As figuras 42e e 42f mostram casos em que o *kink* produzido $\Phi_{1+}(x)$ colide, longe da borda, uma e duas vezes, respectivamente,

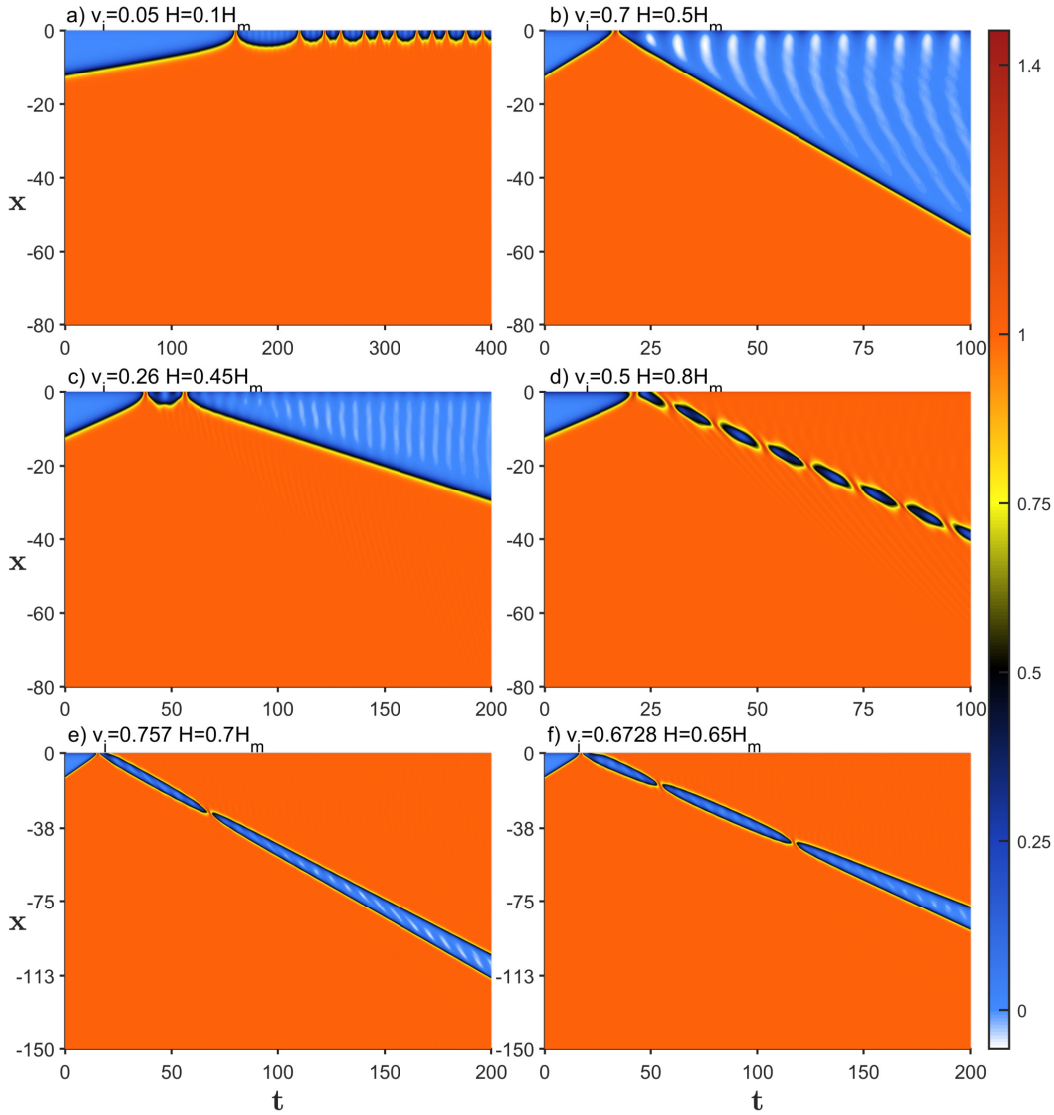


Figura 42 – Colisão do *antikink* $\Phi_{2+}(x)$ com a solução-borda ϕ_1 para $0 \leq H < H_m$: a) Um estado tipo *bion* na borda, b) espalhamento inelástico (*one-bounce*) com a borda, c) *two-bounce* com a borda, d) produção de um *kink* $\Phi_{+1}(x)$ que forma um estado oscilante com o *antikink* inicial. O *kink* $\Phi_{+1}(x)$ produzido na borda colide com o *antikink* inicial em ponto longe da borda por uma vez em e) e por duas vezes em f).

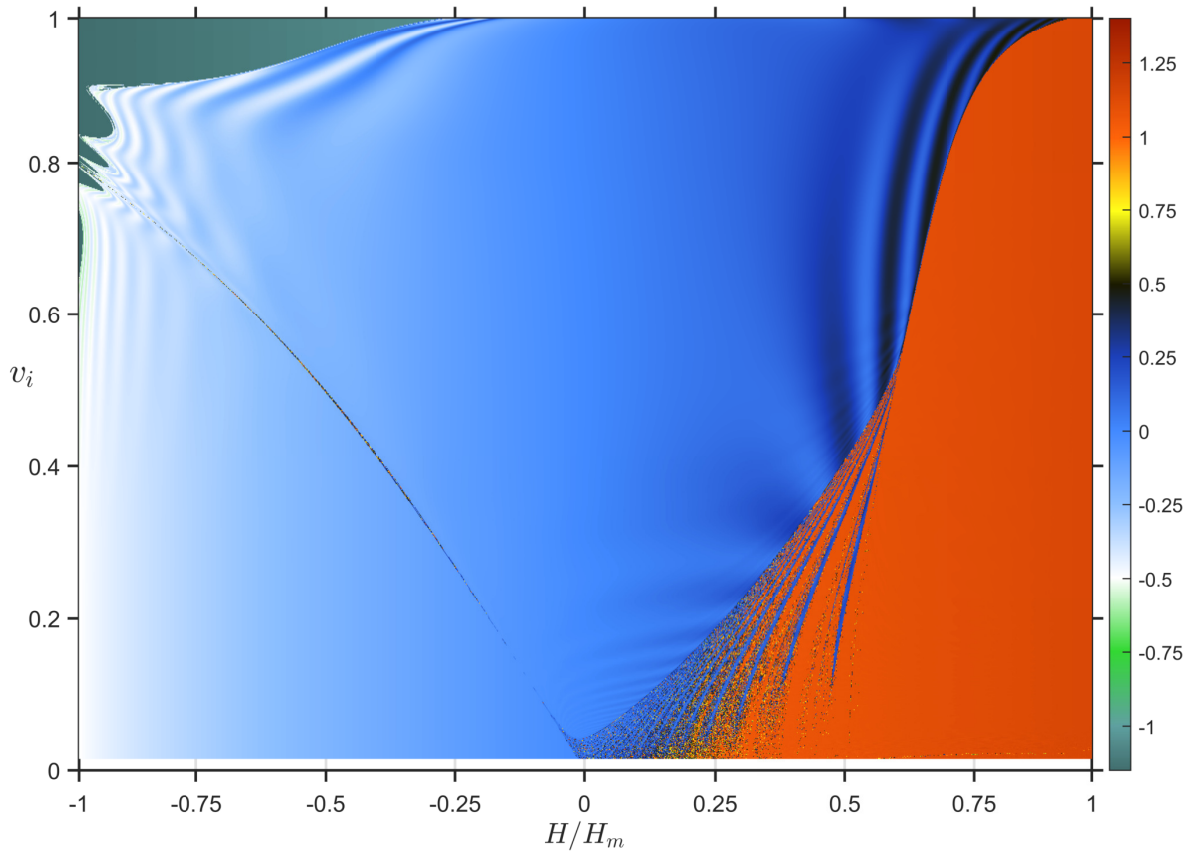


Figura 43 – Gráfico de fase para o espalhamento do *antikink* $\Phi_{2+}(x)$ com a borda ϕ_1 ($-\phi_1$) com $H > 0$ ($H < 0$): estado final $\phi(0, t_f)$, com $t_f = |a|/v_i + 100$.

com o *antikink* refletido. Já estudamos esses fenômenos no capítulo 3 e podemos perceber que o par *antikink* refletido com o *kink* produzido também são sujeitos a um mecanismo de troca de energia mesmo longe da borda. A atuação do modo vibracional na produção de estados *bion* e janelas de *two-bounces* pode ser observada nas figuras 42a e 42c. Nestas, podemos observar a emissão de radiação entre os momentos de colisão. Sendo importante destacar que a frequência das radiações diminui com o crescimento de H , confirmando o resultado teórico obtido na figura 39 para a solução $\phi_1(x)$ (linha em preto).

A complexa estrutura de resultados obtidos para o espalhamento do *antikink* $\Phi_{2+}(x)$ com a borda $\pm\phi_1(x)$ é apresentada de forma panorâmica através da figura 43, onde cada ponto representa o estado final do campo na borda após um tempo suficiente para a evolução total do estado. Vamos primeiramente comentar os resultados para a parte onde $H > 0$. A região em azul representa colisões inelásticas do *antikink* com a borda. Os pontos em vermelho-alaranjado representam a criação de um *kink* viajante $\Phi_{1+}(x)$ a partir da borda. Na figura também é possível observar a dependência da estrutura de janelas de *two-bounces* em relação ao parâmetro H . Tais janelas são representas pelas listras em azul ($\phi(0, t_f) \sim 0$) na região delimitada por $0 < H \lesssim 0.6H_m$, $v_i \lesssim 0.55$. A fronteira entre as cores azul e vermelho ilustra a forma de velocidade crítica v_c , que é a velocidade a partir

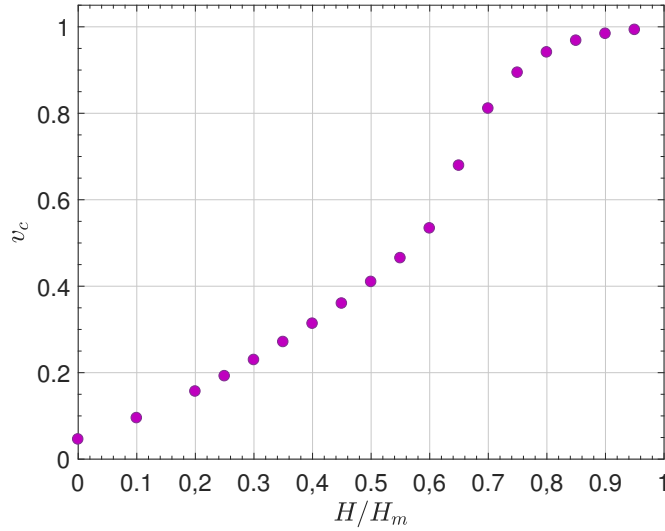


Figura 44 – Espalhamento do *antikink* $\Phi_{2+}(x)$ com a solução borda ϕ_1 : Velocidade crítica para *one-bounces* v_c em função do parâmetro H .

da qual o *antikink* sempre vai colidir apenas uma vez com a borda (esta curva é melhor visualizada na figura 44). Então vemos que, assim como ocorre para a colisão na linha, abaixo da velocidade crítica para colisões inelásticas temos as janelas de ressonância e estados *bion*. Além desses fenômenos, o diagrama de fase mostra que para grandes valores de H , predomina o fenômeno de criação de *kink* viajante na borda.

A figura 44 mostra o comportamento da velocidade crítica v_c em função do parâmetro H . Observamos que quanto maior o valor de H , maior será o módulo da velocidade crítica. Em particular, no limite $H \rightarrow H_m$, temos que $v_c \rightarrow 1$. Observamos também que a curva v_c versus H apresenta um ponto de inflexão em torno de $H \simeq 0.6H_m$, região que coincide com o valor máximo para o qual as janelas de ressonância ainda são observadas. Para $H \gtrsim 0.6H_m$, $v_c(H)$ cresce com uma taxa maior, e predomina a emissão de *kink* a partir da borda.

Agora passamos a investigar o efeito da variação de H sobre a estrutura das janelas de *two-bounces*. Tais efeitos são observados nas figuras 45a-45d que contêm três curvas em função de v_i , mostrando em que tempo ocorre a primeira, segunda e terceira colisão *antikink*- $\phi_1(x)$: a curva em preto marca o tempo em que ocorre a primeira colisão; a vermelha o tempo da segunda e a azul o tempo da terceira colisão. Desta forma as janelas de *two-bounces* estão situadas em intervalos Δv_i onde o tempo da terceira colisão diverge para $t \rightarrow \infty$. Nestes gráficos, observamos que quando $H = 0$ recuperamos os resultados obtidos para colisões *antikink-kink* do ϕ^6 na linha (compare com a figura 26). Notamos também que quando H cresce as janelas de ressonância se acumulam em torno de $v_i = v_c(H)$. A partir de $H \simeq 0.60H_m$ as janelas desaparecem completamente, restando os fenômenos de produção de *kink* viajante tais como mostrado nas figuras 42d-f.

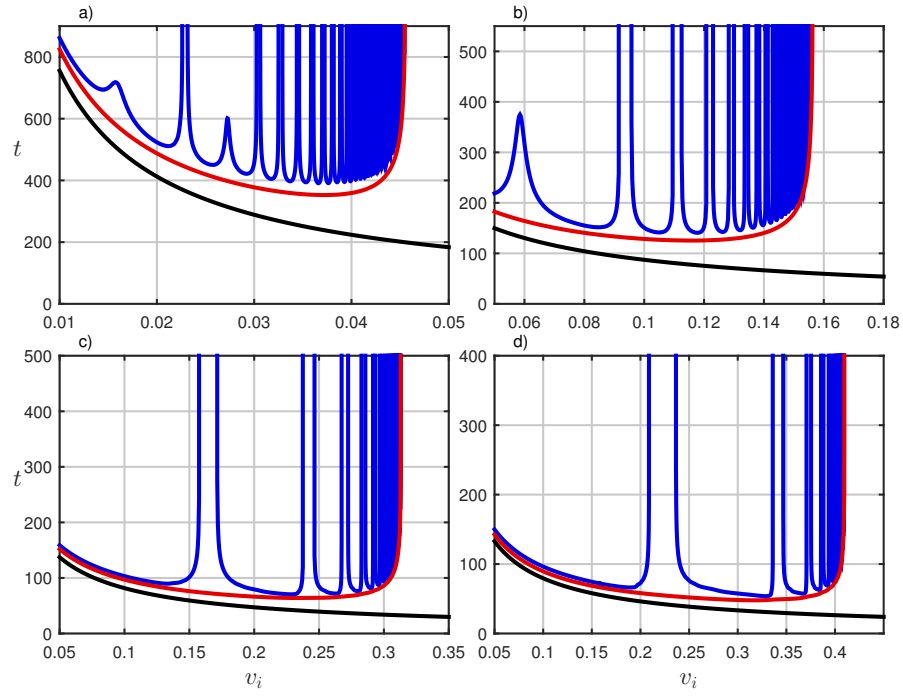


Figura 45 – Tempo em que ocorre a primeira (linha em preto), segunda (linha em vermelho) e terceira colisão (linha em azul) do *antikink* com a solução-borda em $x = 0$. Os valores de H são: (a) $H = 0$, (b) $H = 0.2H_m$, (c) $H = 0.4H_m$, e (d) $H = 0.5H_m$.

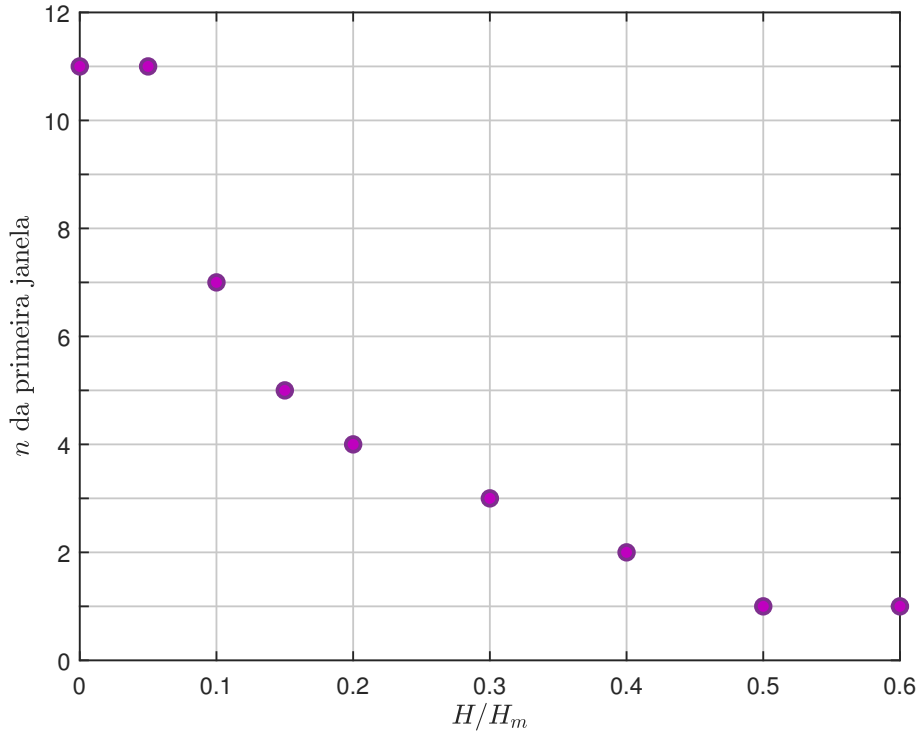


Figura 46 – Colisão *antikink* $\Phi_{2+}(x)$ com a borda ϕ_1 : ordem da primeira janela de *two-bounces* observável em função de H/H_m .

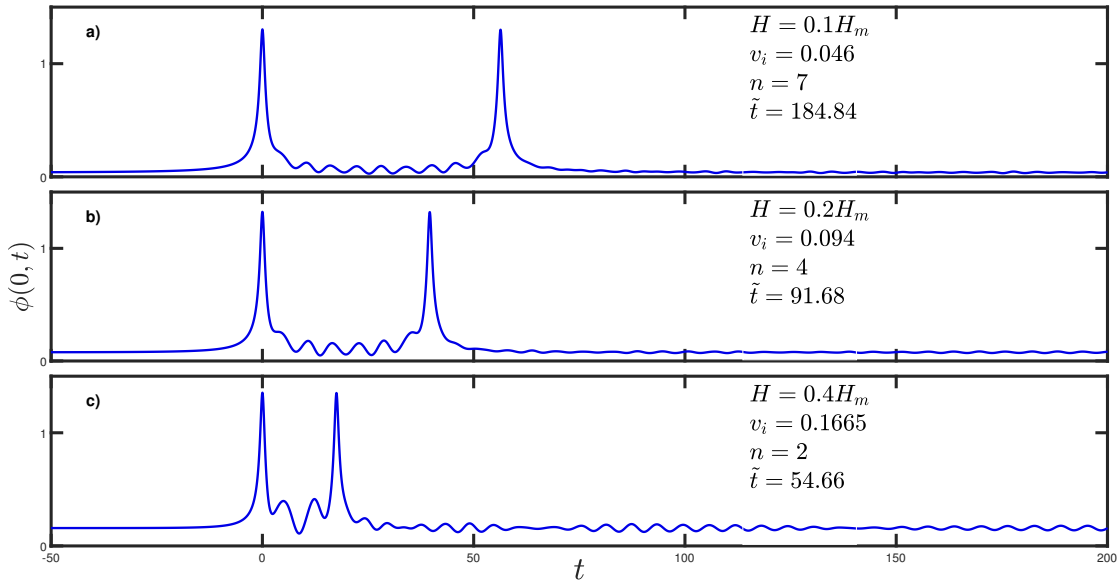


Figura 47 – Campo escalar na borda $\phi(0, t)$ em função do tempo t mostrando colisões na primeira janela visível quando H é: (a) $H = 0.1H_m$, (b) $H = 0.2H_m$ e (c) $H = 0.4H_m$. O número n de pequenas oscilações entre os *bounces* é também indicado. Em cada figura o tempo foi reescalado $t \rightarrow t - \tilde{t}$ de tal forma que a primeira colisão ocorra em $t = 0$.

O efeito da variação de H também é mensurado pelo rótulo inteiro n , que aqui tem o mesmo papel que desempenha na equação do mecanismo de troca de energia, Eq. (3.46). Isto é, n representa um número de ciclos possíveis entre as duas primeiras colisões na borda, vimos no capítulo 3 que n pode ser usado como um rótulo classificatório para as janelas de ressonâncias. As figuras 46 e 47 são apropriadas para a análise de possíveis mudanças na distribuição e classificação das janelas de ressonância. Na figura 46 vemos que o crescimento de H reduz a ordem da primeira janela de ressonância observada, ou seja, o rótulo n decai à medida que H cresce. Para valores pequenos de H ($H \leq 0.1H_m$), já é possível notar uma alteração na classificação das janelas, como podemos ver na figura 47a para a qual $n = 7$ para a primeira janela observável. Esse valor é diferente de $n = 11$, encontrado para $H = 0$, que é equivalente às colisões do tipo $\bar{K}K$ do ϕ^6 na linha². Este efeito é também percebido na comparação entre as figuras 47b e 47c. Em 47b temos $n = 4$ para $H = 0.20H_m$, enquanto que em 47c, $n = 2$ com $H = 0.40H_m$. A recuperação de janelas de ordem menor através do crescimento de H cobra um preço sobre a forma das oscilações, presentes entre os dois grandes picos, que são cada vez mais irregulares à medida que H cresce. Finalmente, no tocante às janelas de ressonância, vemos que estas desaparecem para $H > H_c \simeq 0.60H_m$, o que indica que o modo vibracional da borda passa a atuar na produção de um *kink* viajante durante o processo de espalhamento com

² Observe que nosso n corresponde a $n - 1$ na referência [23].

o *antikink* inicial.

4.4.2 $-H_m < H < 0$

Neste caso, o *antikink* viajante apresenta uma interação repulsiva com a solução-borda em $x = 0$. Seguindo o mesmo procedimento da seção 4.2, podemos encontrar o valor da velocidade de equilíbrio energético, $v_*(H)$, na qual o *antikink* nem é repelido e nem refletido pela energia repulsiva da solução-borda. A velocidade $v_i = v_*$ é a velocidade de equilíbrio para qual o estado final é equivalente à solução instável $\tilde{\phi}_2(x)$. Então, quando $v_i = v_*$, devemos ter $E_i = \frac{\gamma(v_*)}{4} + E[-\phi_1]$ e $E_f = E[\tilde{\phi}_2]$. Usando as equações (4.68) e (4.69) obtemos que:

$$v_*(H) = \sqrt{1 - \left[2 \left(\phi_1(0)^2 + \tilde{\phi}_2(0)^2 \right) - 3 \left(\phi_1(0)^4 + \tilde{\phi}_2(0)^4 \right) + 1 \right]^{-2}} \quad (4.75)$$

A curva $v_*(H)$ se ajusta bem ao comportamento observado no lado esquerdo da figura 43. Abaixo de v_* o *antikink* viajante não tem energia para alcançar a borda. Para $v_* < v_i < v_c$ existe um intervalo bem estreito de v_i onde são encontradas janelas de ressonância. Para $v_i > v_c$ encontramos somente colisões do tipo *one-bounce*. Uma exceção a este cenário ocorre na faixa $H < -0.25H_m$, para grandes valores de v_i , onde encontramos o estado final sendo $\Phi_{1-}(x)$ (Este último cenário corresponde à região verde no canto superior esquerdo da Fig. 43).

A figura 48 mostra alguns resultados representativos para a colisão *antikink* com a borda ϕ_1 para $H < 0$: em a) o *antikink* não consegue se aproximar da borda devido à interação repulsiva, b) espalhamento com *two-bounce*, c) colisão do tipo *one-bounce*, e em d) o estado final do campo escalar acessa o outro setor topológico. A figura 49 mostra o módulo da velocidade final do *antikink* e, através desta, notamos a existência de janelas de ressonância. De fato, a condição de ressonância só é atendida em um estreito intervalo de velocidades v_i (por isso são quase imperceptíveis no lado esquerdo da figura 43). Na figura 49, a linha tracejada representa o valor $v_f = v_i$ (em módulo) e a linha em traço-ponto indica o valor da velocidade $v_*(H)$ para o H indicado em cada caso. Em todos os cenários com $v_i < v_*$, o *antikink* não alcança a borda e retorna com a mesma velocidade. Aumentando ligeiramente v_i acima de v_* encontramos a região estreita de existência de *two-bounces*. Na região central observamos a velocidade final nas janelas de ressonância, que são casos como o da figura 49b. Aumentando ainda mais v_i , entramos na região de *one-bounces*, quando o *antikink* tem energia suficiente para superar a repulsão da borda e colidir uma vez, sendo refletido em seguida. Assim como acontece para a interação com borda no modelo ϕ^4 , a velocidade final nas janelas de ressonância é sempre maior que v_* . Contudo, quando v_i supera a velocidade crítica para *one-bounces* ($v_i > v_c$), a velocidade final é um pouco maior que v_* , isso é o oposto ao observado na interação para o modelo ϕ^4 , como observamos nas figuras 31a-b.

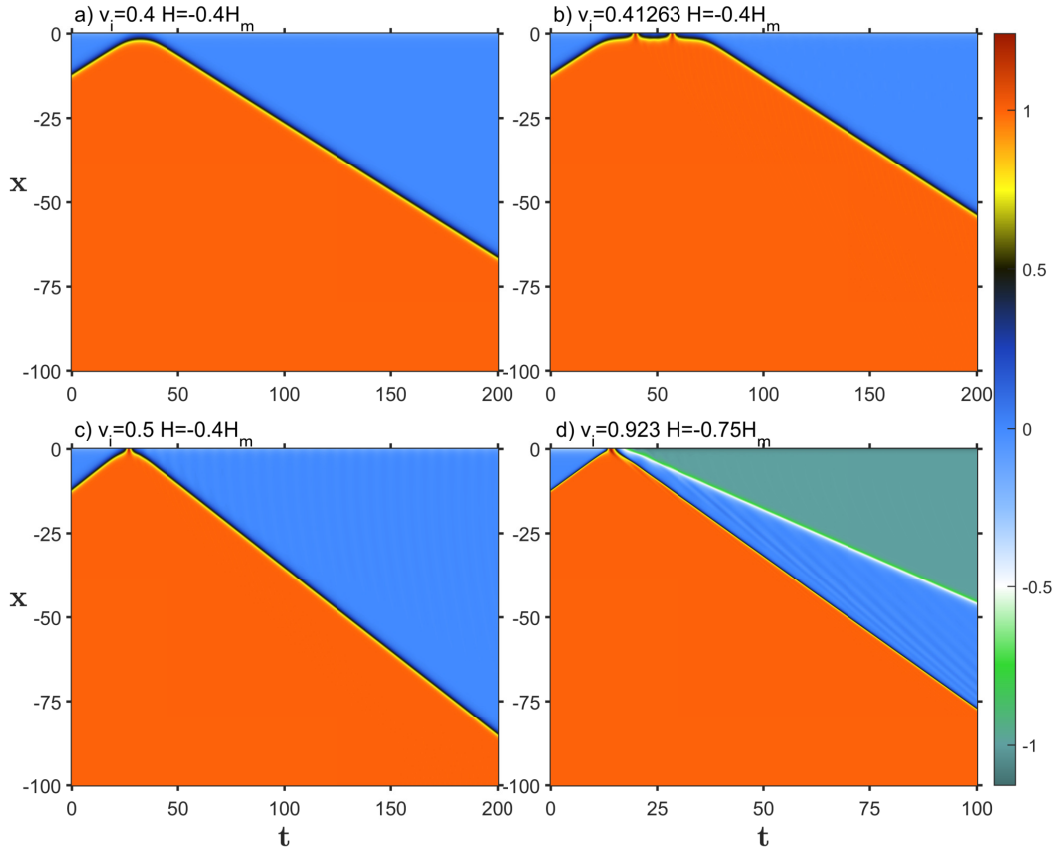


Figura 48 – Colisão do *antikink* Φ_{2+} com $H < 0$. a) Para $v_i < v_*$ o *antikink* não tem energia suficiente para alcançar a borda, b) *two-bounce* na região $v_* < v_i < v_c$, c) *one-bounce* para $v_i > v_c$, d) quando $v_i > v_c$ e com grandes valores de H o campo escalar acessa o outro setor topológico do potencial. Compare com a figura 43.

É importante observar que para $H < 0$, na interação com borda do ϕ^4 , a solução-borda não apresenta modo vibracional enquanto que o *antikink* viajante, daquele caso, apresenta. No setor que estamos analisando do ϕ^6 , o *antikink* viajante não apresenta modo vibracional, enquanto que a solução-borda apresenta um, conforme a figura 39. Para ambos ϕ^4 e ϕ^6 a borda decai para uma configuração instável $\tilde{\phi}_2$ quando v_i é igual ou ligeiramente maior que v_* .

4.5 Espalhamento *kink*-Borda

Agora vamos considerar o cenário em que um *kink* viaja em direção à borda. O *kink*, neste caso, é a solução estática Φ_{1+} dada pela equação (3.50). Quando este *kink* viaja com velocidade v_i em direção à borda, estando o seu centro em $x = a$ ($a < 0$) no tempo $t = 0$, podemos expressá-lo da seguinte forma:

$$\Phi_{1+}(v_i, x, t) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(\gamma(x - v_i t - a))}{2}}. \quad (4.76)$$

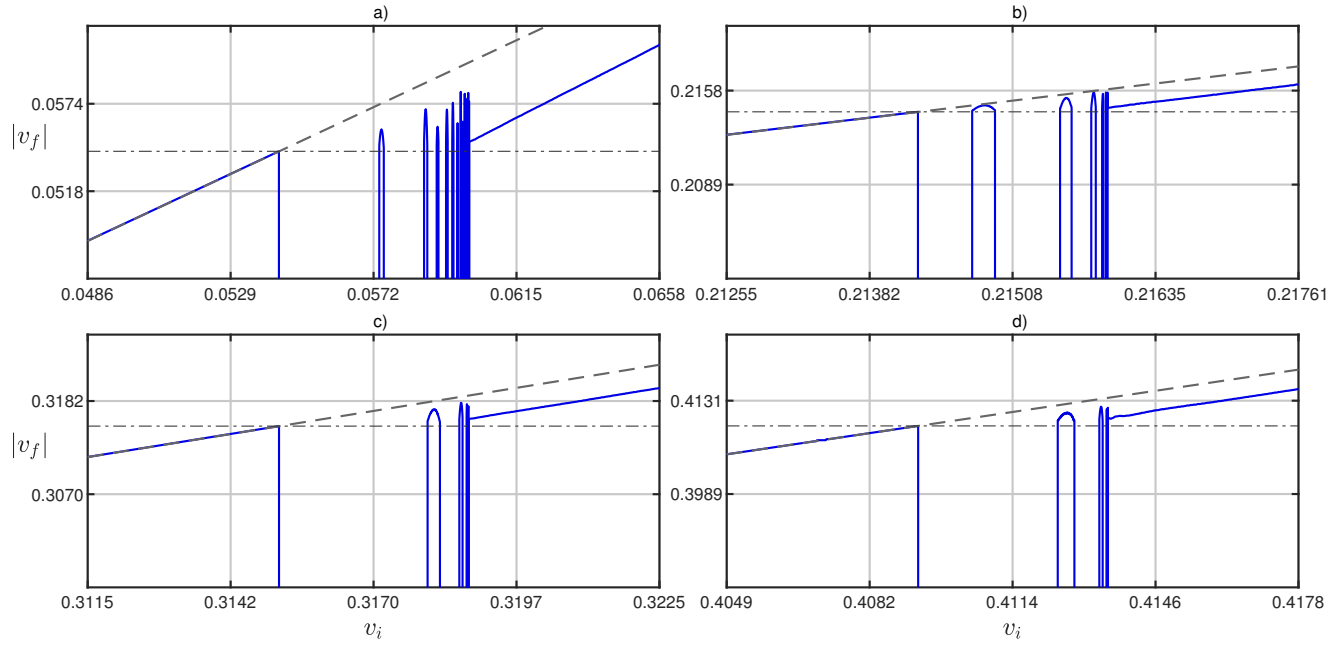


Figura 49 – Velocidade final do *antikink* Φ_{2+} . a) $H = -0.05H_m$ b) $H = -0.20H_m$ c) $H = -0.30H_m$ e d) $H = -0.40H_m$. As linhas tracejadas representam $v_f = v_i$ e as linhas em traço-ponto indicam o valor de $v_*(H)$ de acordo com a equação (4.75).

A figura 37 mostra que este *kink* somente pode ser conectado com as soluções $\tilde{\phi}_1(x)$ e $\tilde{\phi}_3(x)$. A seguir, estudamos separadamente o espalhamento *kink*-borda para estas duas configurações.

4.5.1 Espalhamento *kink*-borda $\tilde{\phi}_1$

Para esta solução temos que $-H_m < H < 0$. Assim, as condições iniciais são:

$$\phi(x, 0) = \Phi_{1+}(v_i, x, 0) + \tilde{\phi}_1(x) - 1, \quad (4.77)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\Phi}_{1+}(v_i, x, t)|_{t=0}. \quad (4.78)$$

com $a = -12.50$.

A figura 50 mostra diferentes aspectos encontrados para esta configuração inicial. O principal resultado é a mudança de setor topológico na borda, sendo que o estado final da colisão é um *antikink* do tipo Φ_{1-} . Vemos ainda que a própria borda também muda sua configuração, decaindo para uma outra configuração de borda, a $(-\tilde{\phi}_3)$. Deste modo, temos o seguinte processo $\Phi_{1+} + \tilde{\phi}_1 \rightarrow \Phi_{1-} + (-\tilde{\phi}_3)$. Note que o estado final da borda, $(-\tilde{\phi}_3)$, não possui modo vibracional, assim, a ausência de fenômenos de ressonância é esperada. A figura 51 mostra o módulo da velocidade final v_f do *antikink* produzido em função da velocidade inicial do *kink* Φ_{1+} , apresentando um interessante padrão que se modifica com a variação de H . Outro efeito interessante para esta configuração é o surgimento de oscilações localizadas que viajam a partir da borda para $-\infty$, como mostrado na figura 50c. Este

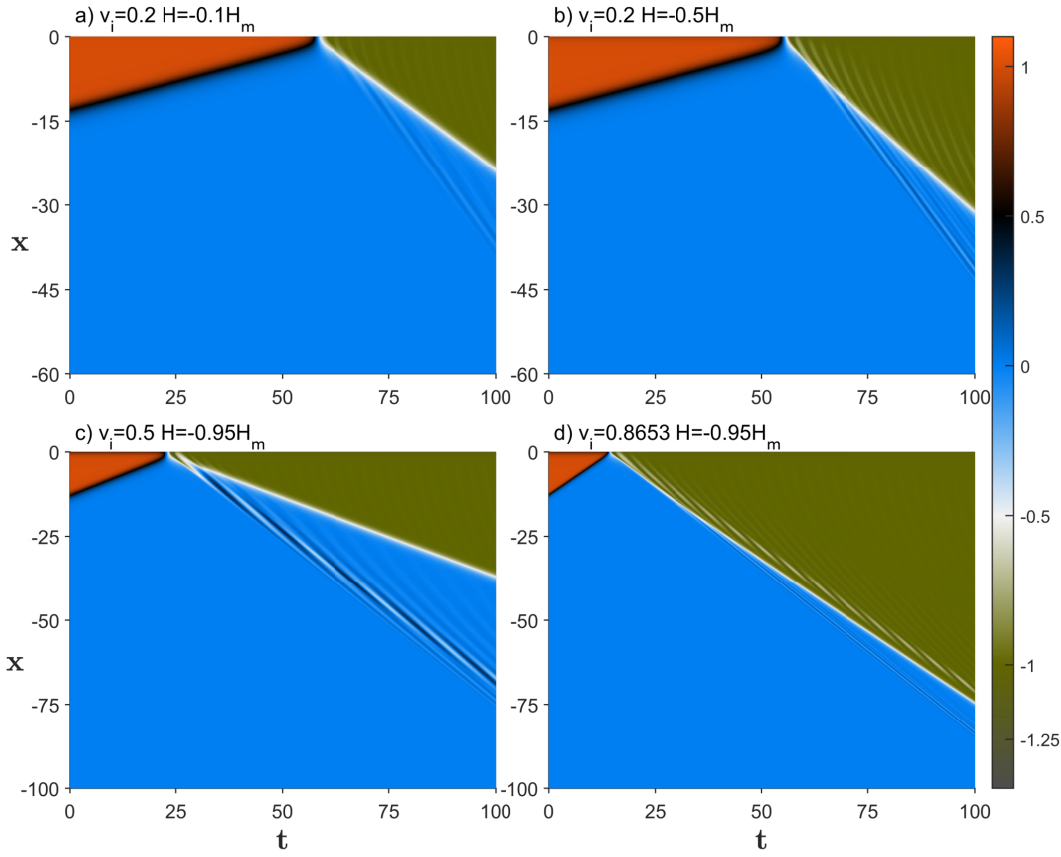


Figura 50 – Colisão do *kink* Φ_{1+} com a borda $\tilde{\phi}_1$ para valores de v_i e H , mostrando: mudança de setor topológico com a produção de um *antikink* Φ_{1-} ; produção de uma oscilação localizada em c) e d).

efeito surge para $|H| \approx 0.70H_m$ e se torna mais evidente para $|H| > 0.90H_m$. A oscilação localizada ocorre em torno do estado fundamental $\phi = 0$, se a sua velocidade for maior que a do *antikink* produzido, como mostra a figura 50c; ou também ocorre em torno de $\phi = -1$ se sua velocidade for menor ou igual que a v_f do *antikink*, conforme a figura 50d.

4.5.2 Espalhamento *kink*-borda $\tilde{\phi}_3$

Para esta solução, temos que $0 \leq H < \infty$. No entanto, para efeitos de comparação, iremos limitar nosso estudo ao intervalo $0 \leq H \leq H_m$. Seguindo o mesmo roteiro das configurações já estudadas, temos que as condições iniciais para o espalhamento *kink*-borda $\tilde{\phi}_3$ são:

$$\phi(x, 0) = \Phi_{1+}(v_i, x, 0) + \tilde{\phi}_3(x) - 1, \quad (4.79)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\Phi}_{1+}(v_i, x, t)|_{t=0}. \quad (4.80)$$

com $a = -12.50$.

Neste caso a solução-borda novamente exhibe uma interação repulsiva sobre o *kink* viajante. A figura 52 mostra o processo de colisão para alguns valores representativos de v_i

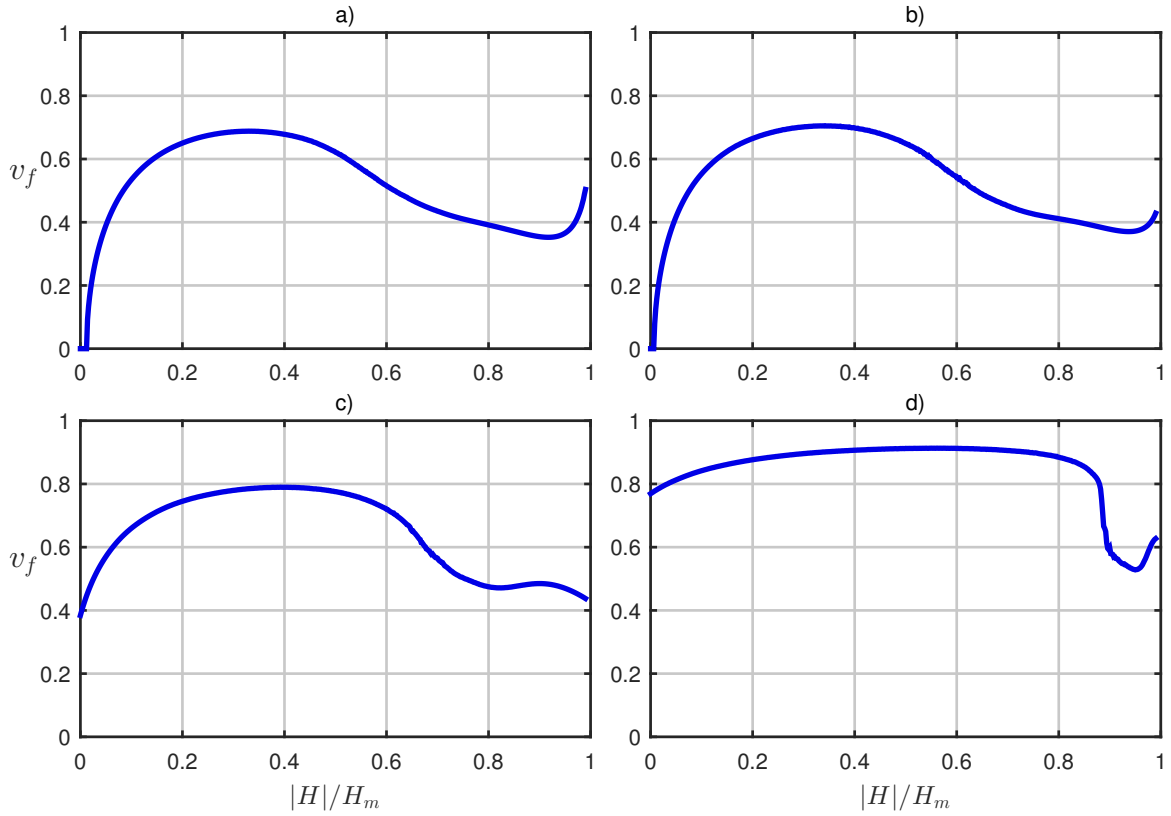


Figura 51 – Módulo da velocidade final do *antikink* produzido Φ_{1-} em função de $|H|/H_m$ para: a) $v_i = 0.05$ b) $v_i = 0.20$ c) $v_i = 0.50$ d) $v_i = 0.80$.

e H , mostrando os principais comportamentos para a dinâmica dessa configuração. Neste cenário, novamente se faz necessário a construção de um diagrama de fase (H, v_i) com o propósito de obter uma visão panorâmica de como estes fenômenos estão distribuídos. O diagrama, apresentado na figura 53, mostra o valor do campo na borda após a colisão em um tempo suficiente para o sistema definir o seu estado final, ou seja, $\phi(x=0, t=|a|/v_i+100)$. Como em casos anteriores, temos que, para baixos valores de velocidade v_i , a energia cinética do *kink* não é suficiente para superar a repulsão da borda $\tilde{\phi}_3$. Nesta situação o *kink* é repelido sem tocar na borda e retorna com a mesma velocidade, como mostra a figura 52a. De forma semelhante ao que ocorre no espalhamento *antikink*-borda no ϕ^4 e ϕ^6 para $H < 0$, na configuração *kink*-borda $\tilde{\phi}_3$ do modelo ϕ^6 , também podemos calcular a velocidade $v_*(H)$, para qual a energia cinética do *kink* se torna igual à energia repulsiva nas proximidades da borda, conforme mostra a figura 52b. O estado final, nesse caso, é uma configuração instável equivalente à solução borda $\phi_2(x)$. Vemos que a energia inicial é dada por:

$$E_i = \frac{1}{4}\gamma(v_*) + E[\tilde{\phi}_3], \quad (4.81)$$

sendo composta pela energia cinética do *kink* mais a energia da solução-borda $\tilde{\phi}_3(x)$. Quando $v_i = v_*$ a energia da configuração final é: $E_f = E[\phi_2]$. Pela igualdade $E_i = E_f$,

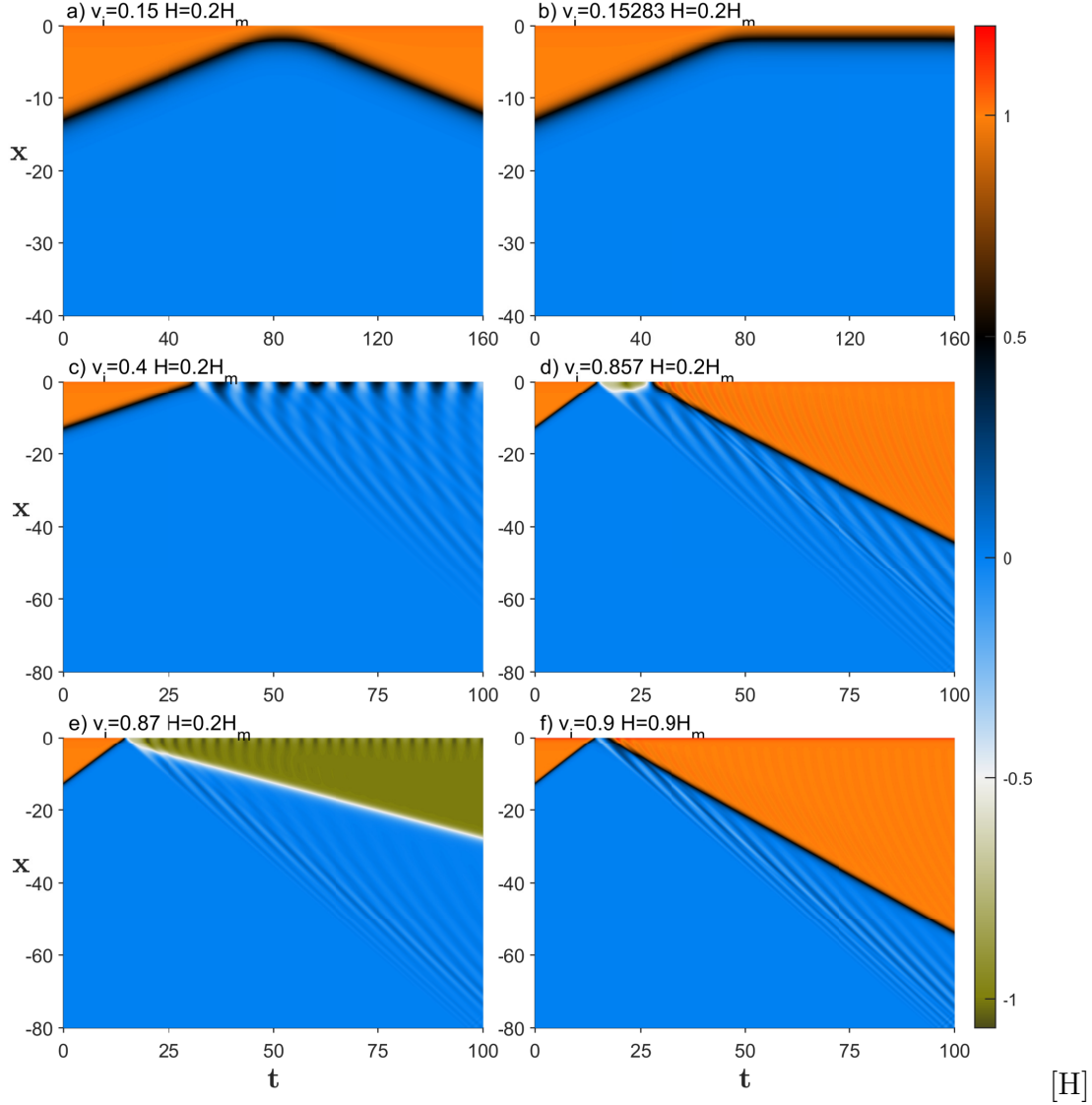


Figura 52 – Colisão do *kink* Φ_{1+} com a borda $\tilde{\phi}_3$, mostrando: em a) um retorno *quasi-elástico* b) *kink* na configuração de equilíbrio c) emissão de radiação pela borda instável ϕ_2 d) Colisão típica da região em laranja da figura 53 e) Colisão inelástica f) Estado final em grandes valores de H .

obtemos que:

$$v_*(H) = \sqrt{1 - \left[3\phi_2(0)^4 + 3\tilde{\phi}_3(0)^4 - 2\phi_2(0)^2 - 2\tilde{\phi}_3(0)^2 - 1 \right]^{-2}}, \quad (4.82)$$

sendo que a dependência por H se dá através das soluções-borda $\phi_2(0)$ e $\tilde{\phi}_3(0)$, conforme as equações (4.68) e (4.69). A curva $v_*(H)$ está incluída na figura 53 (linha verde tracejada). Este resultado é importante porque se trata de uma previsão teórica sendo confirmada com grande precisão através das nossas soluções numéricas. Aumentando a velocidade, de forma que $v_i > v_*(H)$, encontramos uma região intermediária onde observamos que o *kink* supera a força repulsiva da borda, colide com ela e é absorvido para um estado irradiante com o padrão da solução instável ϕ_2 . Na figura 52c apresentamos uma colisão nesta região intermediária. Em suma, temos que o processo de espalhamento para a região intermediária

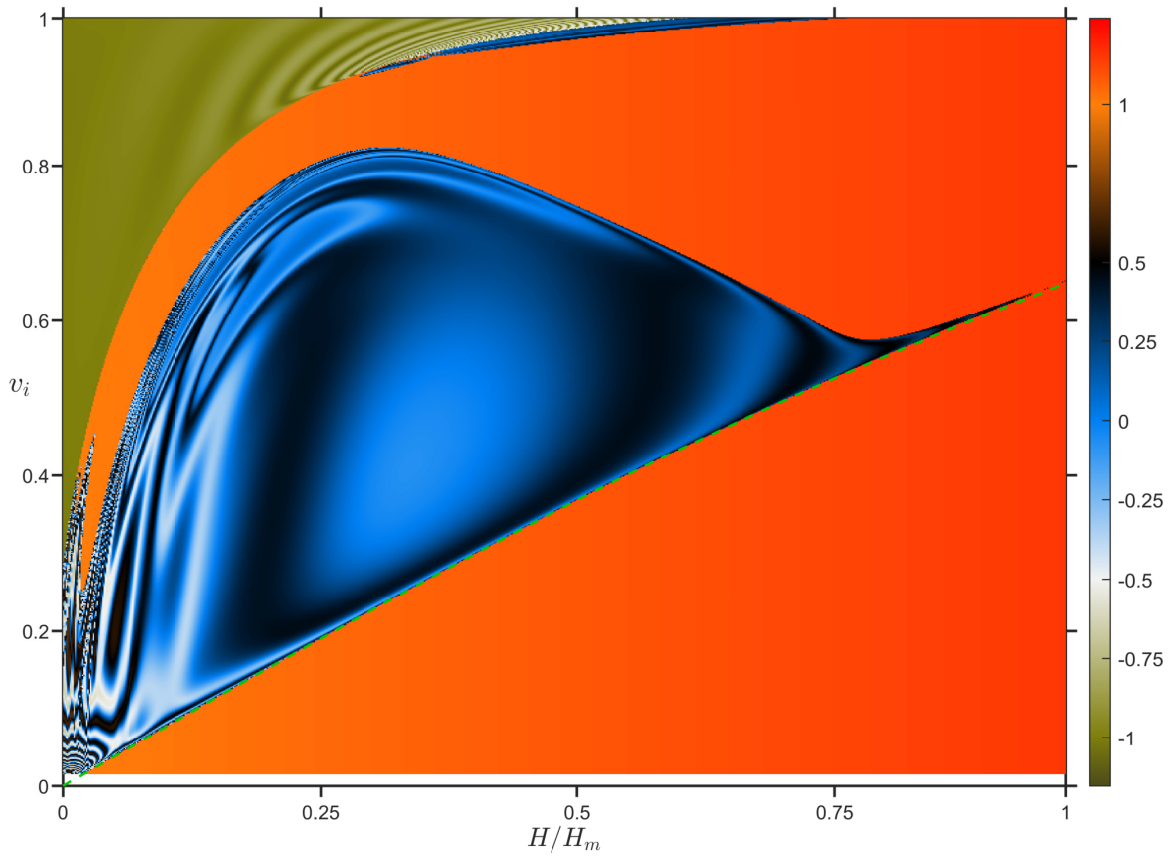


Figura 53 – Colisão do *kink* Φ_{1+} com a borda $\tilde{\phi}_3$ para $H > 0$: Estado final do campo escalar $\phi(0, t_f)$, com $t_f = \frac{|a|}{v_i} + 100$. A linha verde em traços é a curva $v_*(H)$ dada pela equação (4.82).

é: $\Phi_{1+} + \tilde{\phi}_3 \rightarrow \phi_2$, que corresponde à região central em azul da figura 53. Fixando H em torno de $H = 0.40H_m$ e aumentando v_i acima da região intermediária, encontramos uma região onde as colisões são do tipo mostrado na figura 52d, sendo que nesse caso, a natureza da borda inicial, $\tilde{\phi}_3$, não é modificada. Este tipo de colisão corresponde à região em vermelho da parte superior da figura 53. Aumentando ainda mais a velocidade v_i , encontramos a configuração mostrada na figura 52e, que mostra a mudança de setor topológico na borda e a produção de um *antikink* do tipo Φ_{1-} . Este fenômeno é encontrado na região amarela, na parte superior do diagrama de fase. Para grandes valores de H , vemos que a possibilidade de mudança de setor na borda diminui. Vemos também que as colisões nessa região superior são como a mostrada na figura 52f onde a borda oscila em torno do estado fundamental $\phi = 1$.

Observe que nesse caso não foram observados fenômenos de ressonância na borda. Isso está de acordo com os nossos resultados para a análise por perturbações lineares, uma vez que, a solução-borda $\tilde{\phi}_3$ possui autoestados, para $\omega^2 > 0$, somente na região do contínuo. Chama a nossa atenção as constantes mudanças espontâneas do tipo de solução-borda após a colisão, por exemplo, na região intermediária e depois na região em

amarelo da figura 53.

Neste capítulo estudamos o espalhamento de um *antikink* na semilinha com condição de contorno de Neumann para ambos os modelos ϕ^4 e ϕ^6 . As principais características do espalhamento no modelo ϕ^4 podem ser observadas a partir do diagrama de fase, figura 32. Para o modelo ϕ^6 , devido ao maior número de soluções *kink*, são necessários dois diagramas (figuras 43 e 53). Comparando os digramas de fase, podemos demarcar algumas importantes semelhanças e diferenças entre estes dois casos. O diagrama relativo à teoria ϕ^4 mostra que não é possível demarcar uma curva para a velocidade crítica para a região de *one-bounce*. Já na colisão *antikink- ϕ_1* do modelo ϕ^6 , é possível notar a existência da referida curva para $H > 0$. Uma semelhança recorrente entre os dois modelos se apresenta no espalhamento quase inelástico pela borda repulsiva. Em ambos os modelos encontramos uma velocidade $v_*(H)$ através de argumentos de conservação da energia. Vimos que a curva teórica, $v_*(H)$, corrobora com a precisão de nossos resultados numéricos. Uma outra semelhança entre os dois modelos é a modificação da estrutura de janelas de escape, que possibilita notar a presença de janelas de escape ausentes para o espalhamento na linha.

Uma observação importante diz respeito a carga topológica na semilinha. Colisões na linha, como as vistas no capítulo 3, conservam a carga topológica, pois para uma configuração coletiva do tipo *kink-antikink*, vemos que $Q = 0$ antes e depois da colisão. Na semilinha, para cada condição de Neumann, existem pelo menos duas configurações possíveis para o campo no entorno da borda. Assim, durante a evolução, o campo pode alternar entre estas configurações desde que continue satisfazendo a condição de Neumann inicial. Nos cenários das figuras 42d-f a borda $\phi_1(x) \rightarrow \tilde{\phi}_3(x)$ após a colisão. Nesses cenários, do momento inicial até a colisão, a carga topológica se conserva para a configuração *antikink- $\phi_1(x)$* . Após a colisão, a carga topológica é conservada para a outra configuração, *antikink- $\tilde{\phi}_3(x)$* .

5 Criação de Pares *Kink-Antikink* e Ondas Solitárias em um Modelo duplo *sine-Gordon*

A teoria conhecida como **duplo *sine-Gordon*** (DSG) tem sido alvo de diversas investigações que envolvem descrição de fenômenos na matéria condensada, as propriedades de suas soluções tipo *kink* e o espalhamento destas. Trata-se de uma teoria que em geral transita entre descrever estados típicos de modelos completamente integráveis e estados de modelos não integráveis. Na teoria DSG os mínimos de energia são separados, de forma periódica, por barreiras de potencial não equivalentes, o que faz com que as equações de movimento resulte em soluções *kinks* com diferentes propriedades e estrutura interna. Entre algumas aplicações encontradas na literatura podemos citar a descrição da dinâmica de *spins* em um superfluido ^3He na fase B [30, 109–111], propriedades de pulsos óticos ultra curtos em um meio degenerado [112] e excitações não lineares em uma cadeia compressível de dipolos *XY* sob condições de acoplamento piezoelétrico [113]. Propriedades das soluções *kinks* na teoria DSG tais como: perturbações lineares, modos vibracionais internos e métodos analíticos são encontrados nos seguintes estudos [114–121]. Há também vários trabalhos em que se estuda a colisão de *kinks* na teoria DSG [122–133]. A seguir, analisamos um particular caso da teoria duplo *sine-Gordon*, analisando as principais propriedades das soluções *kinks* para em seguida estudar o processo de colisão. Os resultados e conclusões obtidas foram publicados no artigo [134].

5.1 Modelo

Vamos considerar a ação com dinâmica padrão em $(1, 1)$ dimensões em um espaço-tempo de Minkowski

$$S = \int dt dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - V(\phi) \right). \quad (5.1)$$

O potencial duplo *sine-Gordon* é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2\alpha^2\nu^2} [\cos^2(\nu\phi) - \alpha^2 \sin^2(\nu\phi)]^2. \quad (5.2)$$

Em nosso estudo vamos considerar o seguinte potencial [121]

$$V(\phi) = \frac{2}{1+r} \left(\cos(\phi) + r \right)^2, \quad (5.3)$$

que depende de um único parâmetro r , no seguinte intervalo, $0 < r < 1$. Este potencial é um caso particular do potencial (5.2), com $\alpha = \sqrt{(1-r)/(1+r)}$, $\nu = 1/2$ e $\lambda = \sqrt{1-r}$ [121].

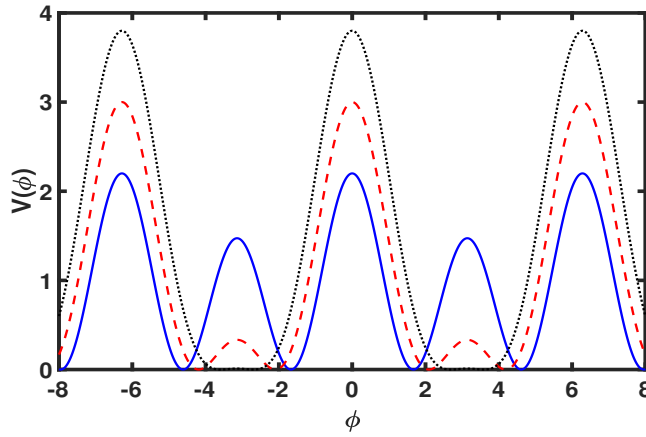


Figura 54 – Potencial $V(\phi)$ dado pela equação (5.3) para: $r = 0.1$ (linha em azul), $r = 0.5$ (vermelho em traços), $r = 0.9$ (preto em pontos).

A forma do potencial é mostrada na figura 54 para alguns valores de r . Note que, como esperado em uma teoria duplo *sine*-Gordon, os mínimos são separados por grandes e pequenas barreiras. Seguindo a convenção da literatura vamos chamar as soluções que interpolam entre dois mínimos separados por uma grande barreira de *large kink/antikink*. Às soluções que interpolam entre mínimos adjacentes separados pelas barreiras menores chamaremos de *small kink/antikink*. Para $r \rightarrow 0$, o potencial recupera o modelo integrável *sine*-Gordon. No caso de *small kinks*, o crescimento de r reduz a altura da barreira bem como o intervalo de interpolação. Para *large kinks* o crescimento de r aumenta a barreira e o intervalo de interpolação. Desta forma, quando $r \rightarrow 1$, o potencial vai a zero em $\phi = \pm\pi$, sendo muito próximo de zero também no entorno destes pontos. Em consequência, para altos valores de r , temos que $V_\phi(\phi = \pm\pi) \rightarrow 0$ e $V_{\phi\phi}(\phi = \pm\pi) \rightarrow 0$.

A principal motivação do potencial dado pela equação (5.3) é a sua dependência de um único parâmetro: se r é pequeno, podemos então explorar a vizinhança do modelo *sine*-Gordon [121]. Nós iremos considerar este potencial no intervalo $0 < r < 1$, explorando as principais propriedades no espalhamento de *large* e *small kinks*.

A equação de movimento é dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (5.4)$$

e as soluções estáticas $\phi_S(x)$ tipo *kink/antikink* são tais que conectam dois mínimos adjacentes do potencial e minimizam a energia. Perturbando linearmente essas soluções na forma $\phi(x, t) = \phi_S(x) + \eta(x) \cos(\omega t)$, chegamos ao problema de autoestados para uma equação de Schrödinger

$$-\frac{d^2 \eta(x)}{dx^2} + V_{\text{sch}}(x) \eta(x) = \omega^2 \eta(x), \quad (5.5)$$

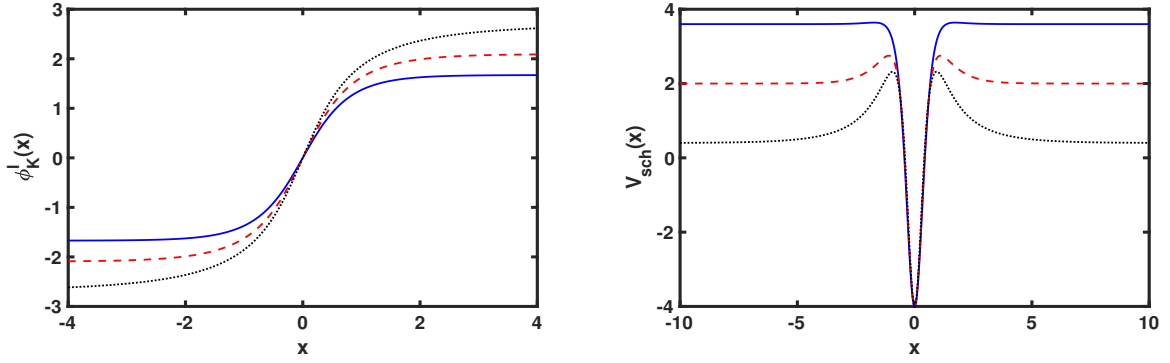


Figura 55 – (a) Soluções *large kink* $\phi_K^l(x)$ e (b) o correspondente potencial tipo Schrödinger $V_{\text{sch}}(x)$. Em ambas figuras $r = 0.1$ (em azul), $r = 0.5$ (vermelho em traços), $r = 0.9$ (preto em pontos).

com $V_{\text{sch}}(x) = V_{\phi\phi}(\phi_S(x))$. Vimos que o estudo do potencial de Schrödinger para perturbações lineares tem um papel fundamental para uma elucidação coerente das estruturas observadas em colisões entre *kinks*.

As soluções *large kinks* são dadas por [121]

$$\phi_K^l(x) = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \tanh(x\sqrt{1-r}) \right], \quad (5.6)$$

e as soluções *large antikinks* são dadas por $\phi_K^l(x) = \phi_K^l(-x)$. A figura 55a mostra o perfil estático das soluções *large kinks* para alguns valores do parâmetro r . Essas soluções conectam os mínimos $\pm\phi_v$, com $\phi_v = -\pi + \arccos(r)$. O aumento de r contribui para o crescimento dos limites assintóticos do *large kink*. A figura 55b mostra o potencial de Schrödinger, $V_{\text{sch}}(x)$, associado às perturbações em torno de um *large kink* para alguns valores de r . Para $r \rightarrow 0$, temos um mínimo central em torno de $x = 0$ e $V_{\text{sch}} = 4$ para $x \rightarrow \pm\infty$, correspondendo a um modelo *sine-Gordon*. A solução da equação de autoestados revela que *large kinks* não apresentam modo vibracional interno, apenas o modo zero é encontrado para valores de ω^2 abaixo da região contínua de autoestados. Vemos que o crescimento de r reduz os valores assintóticos do potencial. Em particular, para $r \rightarrow 1$, temos que $V_{\text{sch}} = 0$ em $x \rightarrow \pm\infty$. Isto está em acordo com $V_{\phi\phi}(\phi = \pm\pi) = 0$ para $r \rightarrow 1$, como já mencionamos. À medida que r cresce, $V_{\text{sch}}[\phi_K^l(x)]$ vai assumindo a forma de um vulcão. É conhecido que potenciais de perturbações lineares com a forma de vulcão não suportam modos normais de vibração (veja, por exemplo, os trabalhos [24, 25]). Assim, para $0 < r < 1$ não há modos vibracionais, mas somente um modo de translação, seguido por um contínuo de estados em ω^2 , correspondendo ao valor assintótico de $V_{\text{sch}}(x)$.

As soluções *small kinks* são dadas por [121]

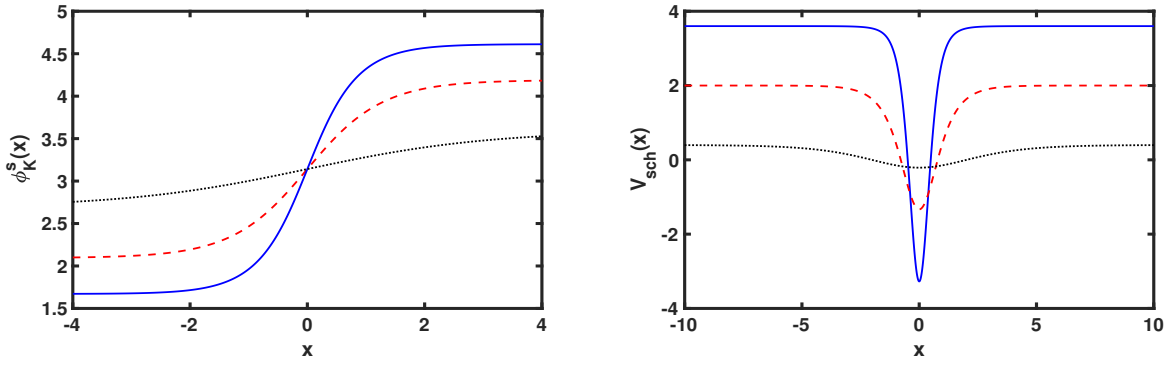


Figura 56 – (a) Soluções *small kinks* $\phi_K^s(x)$ e (b) o correspondente potencial do tipo Schrödinger $V_{\text{sch}}(x)$. $r = 0.1$ (em azul), $r = 0.5$ (vermelho em traços), $r = 0.9$ (preto em pontos).

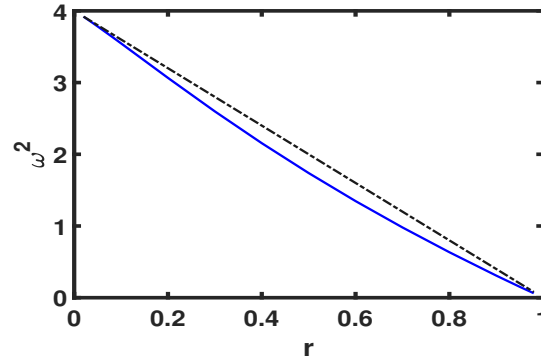


Figura 57 – Frequência do modo vibracional ω^2 associado ao *small kink* em função de r (linha em azul). A linha em preto tracejado indica o início do contínuo de estados para cada r .

$$\phi_K^s(x) = \pi + 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \tanh(x\sqrt{1-r}) \right], \quad (5.7)$$

sendo os correspondentes *antikinks* dados por $\phi_K^s(x) = \phi_K^s(-x)$. A figura 56a mostra o perfil de soluções *small kinks* para alguns valores de r . Essas soluções conectam os mínimos $\phi_v = \pi \pm \arccos(r)$. Com o crescimento do parâmetro r , esses mínimos se aproximam de π de modo que, no limite $r \rightarrow 1$, a solução *small kink* desaparece.

A figura 56b mostra o potencial tipo Schrödinger $V_{\text{sch}}(x)$ associado ao *small kink* para alguns valores de r . A mesma estrutura é obtida para as soluções *antikinks* $\phi_K^s(x)$. Observamos que o crescimento de r reduz a profundidade do poço de potencial e também reduz o valor assintótico que indica o início do contínuo de estados. Nós investigamos numericamente a existência de autoestados para o problema quântico de pequenas perturbações variando o parâmetro r . O resultado é apresentado na figura 57, que mostra a existência de um modo vibracional dependente de r .

Até aqui já apresentamos as soluções estáticas e estudamos o espectro de perturba-

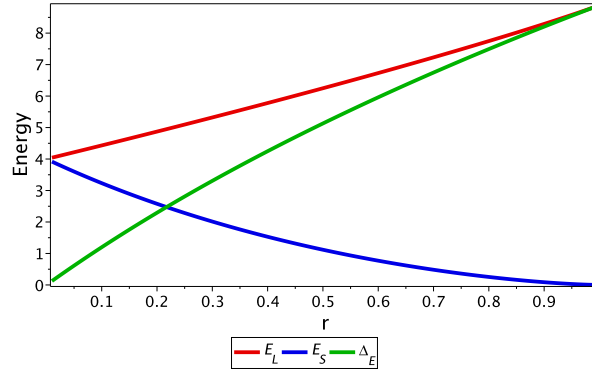


Figura 58 – Energia E_L do *large kink* (vermelho), energia E_S do *small kink* (azul) e a diferença $\Delta_E = E_L - E_S$ (verde) em função de r .

ções lineares das mesmas. Outro passo importante é o conhecimento da energia dessas soluções. Para um mesmo valor de r , temos que a energia dos *large kinks* é maior que a dos *small kinks*. *Large kinks* que conectam os mínimos $-\pi + \xi(r)$ e $\pi - \xi(r)$, com $\xi(r) = \arccos(r)$, têm energia dada por [121]

$$E_L = 4\sqrt{1-r} + 4r \frac{\pi - \xi(r)}{\sqrt{1+r}}, \quad (5.8)$$

enquanto que um *small kink* interpolando entre os mínimos $\pi - \xi(r)$ e $\pi + \xi(r)$ tem energia

$$E_S = 4\sqrt{1-r} - 4r \frac{\xi(r)}{\sqrt{1+r}}. \quad (5.9)$$

A figura 58 mostra os comportamentos de E_L , E_S e a diferença $E_L - E_S$ em função de r . A partir da figura, e também das equações (5.8) e (5.9), notamos que a diferença $\Delta_E = E_L - E_S$ é monotonicamente crescente com r .

Agora que já conhecemos as principais propriedades das soluções $\phi_K^l(x)$ e $\phi_K^s(x)$, vamos estudar o processo de espalhamento dessas soluções. Para isso, vamos resolver a equação de movimento discretizando a derivada espacial em diferenças finitas centrais e realizando a evolução temporal por integração simplética. As condições iniciais são:

$$\phi(x, 0) = \phi_K(x + x_0, v, 0) - \phi_K(x - x_0, -v, 0) - \phi_v \quad (5.10)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\phi}_K(x + x_0, v, 0) - \dot{\phi}_K(x - x_0, -v, 0), \quad (5.11)$$

onde $\phi_K(x, t) = \phi_S(\gamma(x - vt))$ representa uma solução estática viajante (podendo ser $\phi_K^l(x)$ ou $\phi_K^s(x)$), com $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ e ϕ_v sendo um adequado mínimo de $V(\phi)$.

Por razões didáticas, a seguir vamos discutir separadamente as colisões entre *large kinks* e *small kinks*.

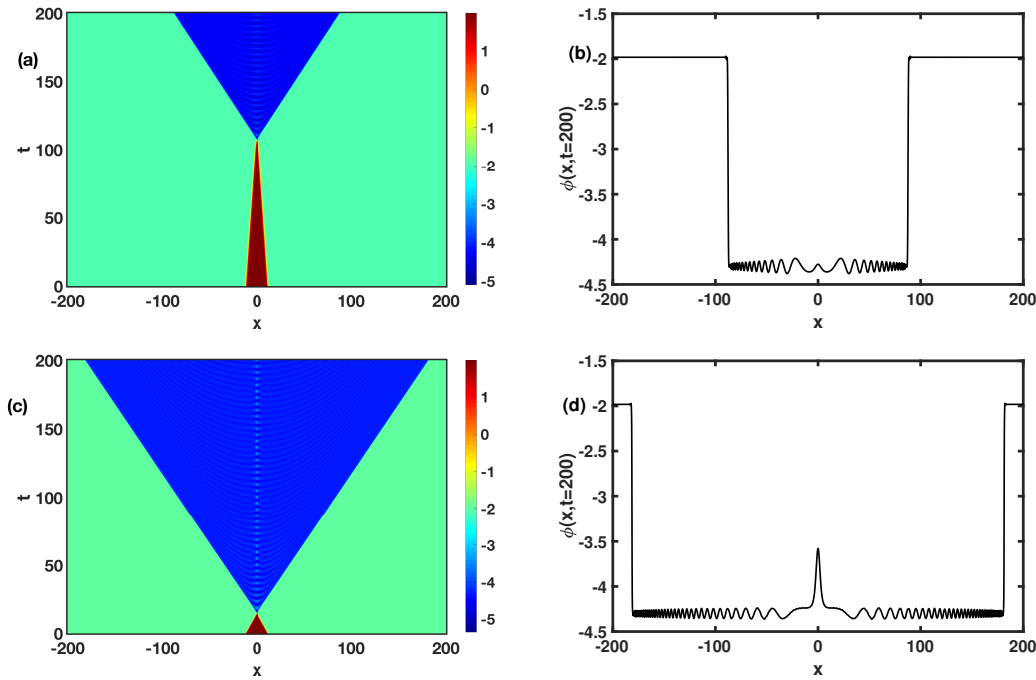


Figura 59 – Colisão do tipo *large kink-antikink* (esquerda) e a imagem do campo escalar no último tempo de simulação em função de x (direita). Com $v = 0.1$ para (a), (b) e $v = 0.8$ para (c), (d). Em todas as figuras $r = 0.4$.

5.2 Colisão entre *Large kinks*

Para todos os valores de $0 < r < 1$ nossos resultados mostram uma mudança de setor topológico no estado final da colisão. Para $r = 0.10$, o estado final é um par do tipo *small antikink-kink* (nesta ordem), ou seja, no estado inicial o *kink* e o *antikink* se aproximam um do outro, colidem uma vez e depois se afastam, interpolando em outro setor topológico da teoria, sendo agora um par de *small antikink-kink*. O par de *small antikink-kink* resultante viaja envolvido em pequenas oscilações existentes em torno do novo estado fundamental. Para investigar essas oscilações internas, consideremos um valor maior, $r = 0.40$, para o parâmetro da teoria. Nas figuras 59a e 59c, os gráficos mostram colisões do tipo *kink-antikink* para $v = 0.10$ e $v = 0.80$ respectivamente, sendo as figuras 59b e 59d um recorte com a imagem do campo escalar no último instante de tempo da simulação, em função de x . Primeiramente, observamos que a velocidade do par resultante é maior que a velocidade do par inicial. O motivo para isto é a diferença de energia entre *large* e *small kinks*. Quando o par inicial, formado por *large kinks* (que têm maior energia que os *small kinks*, conforme a figura 58), é convertido em um par de *small antikink-kink*, a energia cinética deve crescer para que exista conservação da energia entre os estados inicial e final. Por esse aspecto, concluímos que nesses casos a energia em forma de radiação não é significativa nas escalas de tempo que estamos considerando. Veja pelos recortes à direita que a radiação se concentra dentro dos limites do par resultante.

Destacamos ainda que: i) mais pares do tipo *small antikink-kink* ($\bar{K}-K$) podem

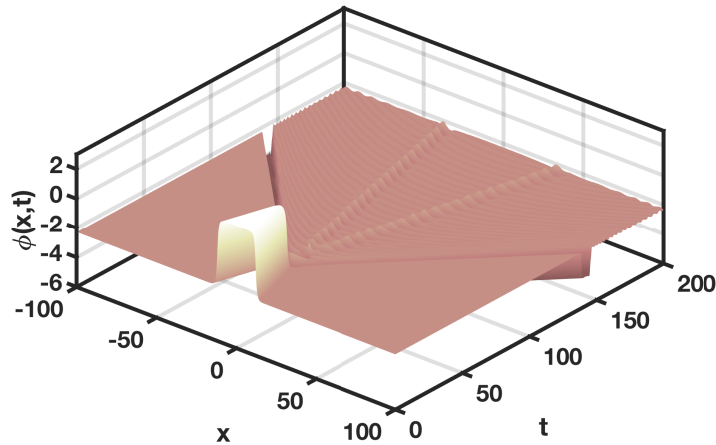


Figura 60 – Colisão do tipo *large kink-antikink* para $r = 0.65$ com $v = 0.3$, mostrando a produção de dois pares estreitos de *small $\bar{K}$ -K* e a propagação de duas oscilações localizadas.

ser formados no estado final, mas somente um desses pares, o mais externo, terá radiação limitada por suas bordas, e ii) podem surgir oscilações que viajam de forma localizada. Como exemplo dessa segunda observação temos a figura 60 onde $v = 0.30$ e $r = 0.65$. Vemos a produção de dois pares de *small $\bar{K}$ -K* depois da colisão, mas também observamos duas oscilações localizadas se propagando de forma harmônica e com longo tempo de vida. Isto sugere que deve existir uma conexão entre a formação de pares de *small kinks* e oscilações solitárias. Esta conexão foi também observada no estudo [135] onde os autores afirmam que a colisão entre dois trens de ondas idênticos e sua interação com a oscilação formada no centro, devido aos modos internos, faz surgir um par *kink-antikink*.

Também observamos que a produção de novos pares é mais sensível à variação do parâmetro r que da velocidade v com a qual o *kink* e *antikink* se aproximam antes da colisão. Por exemplo, nas figuras 61a-b onde $r = 0.6$, podemos notar a formação de três pares de *antikink-kink* depois da colisão: dois pares são estreitos e um largo. O crescimento do parâmetro r favorece a produção de mais pares *small $\bar{K}$ -K*, como pode ser notado nas figuras 61c-d, onde agora $r = 0.70$. Neste caso temos quatro pares formados após a colisão. Outra propriedade dos estados finais é que para um mesmo r o par mais externo é sempre o mais estreito, e quanto maior for o valor de r mais estreito será o par mais externo (compare as figuras 61a e 61c). Os diagramas de fase (r, v) , figura 62, nos permitem visualizar de forma ampla a influência do parâmetro r para a existência dos fenômenos reportados acima. Na figura 62a temos o estado final do campo escalar em um tempo suficientemente grande após a colisão entre as soluções *large*. Notamos um padrão de alternância, que na figura se dá entre as cores amarelo e vermelho. Em termos de fenômenos, cada mudança de cor na figura 62a representa a criação de um par adicional de *small antikink-kink*. Por exemplo, vemos que a primeira região em amarelo corresponde à criação de um par de *small $\bar{K}$ -K* (figuras 59a e 59c), a faixa seguinte, no

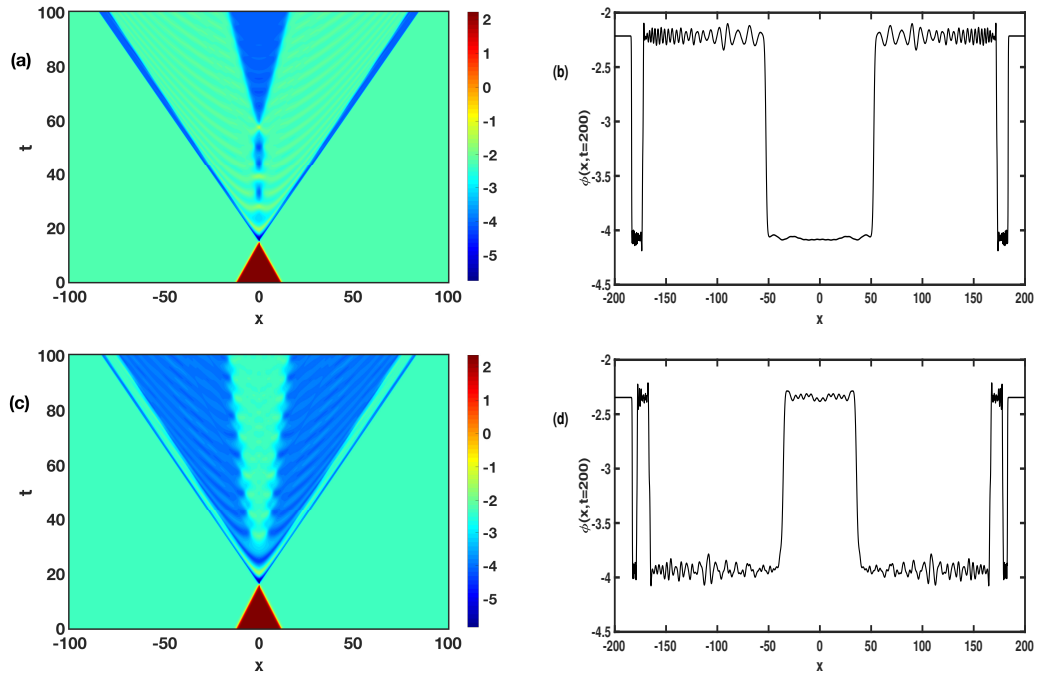


Figura 61 – Colisão do tipo *large kink-antikink* (esquerda) com o quadro da última simulação em função de x (direita). Em a) e b) $r = 0.6$, $v = 0.8$, com a produção de três pares de *small antikink-kink*. Em c) e d) $r = 0.7$, $v = 0.74$, resultando na produção de quatro pares de *small antikink-kink*.

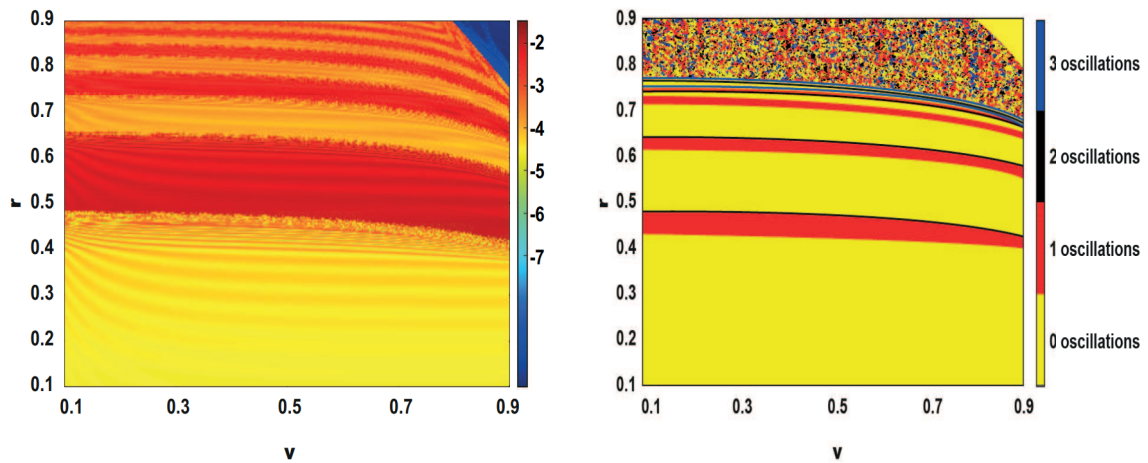


Figura 62 – Gráficos de fase para colisões do tipo *large kink-antikink*: a) (esquerda) o estado final do campo escalar $\phi(x=0, t_f)$, com $t_f = x_0/v + 100$, b) (direita) número de ondas solitárias produzidas após a colisão.

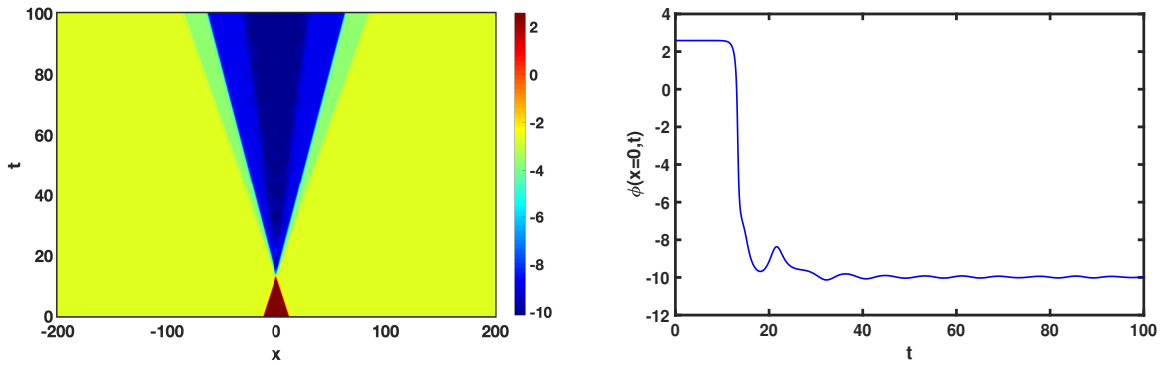


Figura 63 – Colisão *large kink-antikink* mostrando: a) a produção de um novo par de *large antikink-kink* em outro setor topológico. b) perfil do campo escalar em $x = 0$. Nesta figura $r = 0.85$ e $v = 0.90$.

sentindo crescente de r , em vermelho corresponde à criação de dois pares extras de *small $\bar{K}$ -K*. A adição de pares extras continua a cada mudança de cor na figura. Isso comprova que grandes valores de r favorecem a criação de pares *small antikink-kink*. A região em azul, canto superior direito da figura 62a, indica um interessante fenômeno observado para velocidades ultra-relativísticas com o parâmetro r próximo de 1. Este fenômeno é a transformação de par inicial de *large kink-antikink* em outro par *large antikink-kink* do setor topológico adjacente. Essa transformação exige uma alta energia inicial. As figuras 63a-b mostram essa transformação. Vemos que depois da interação, o novo par *large $\bar{K}$ -K* em outro setor topológico.

No diagrama 62b vemos o número de ondas solitárias viajantes produzidas após o processo de colisão *large K - $\bar{K}$* . Para pequenos valores de r tais ondas não são observadas. Com o crescimento de r observamos que a criação das ondas solitárias ocorre em algumas faixas de intervalo que estão situadas em paralelo às transições de regiões descritas na figura 62a. Por exemplo, a figura 62b mostra, na região $0.4 \lesssim r \lesssim 0.5$, uma onda solitária em $x = 0$, e para $r \sim 0.5$, duas ondas solitárias. Este valor de r está situado exatamente na transição da região de criação de um par para a região de criação de dois pares da figura 62a. O mesmo se aplica à região $0.62 \lesssim r \lesssim 0.65$, onde temos a criação de duas ondas solitárias. Este valor de r , por sua vez, fica na região de transição da formação de dois e três pares de *small antikink-kink*. Isto comprova que na colisão *large kink-antikink*, existe uma conexão direta entre a criação de ondas solitárias e o surgimento de pares adicionais de *small antikink-kink*. A figura 62b mostra ainda que para valores maiores de r , as regiões de transição para formação de ondas solitárias adquirem um aspecto caótico. Observamos também que para ambos r e v grandes não há mais a criação de ondas solitárias, como era de se esperar, uma vez que essa região corresponde à transformação de um par inicial de *large kink-antikink* em um par final do tipo *large antikink-kink* no setor topológico adjacente.

Comparando as figuras 59 e 61, vemos que quando há apenas um par *$\bar{K}$ -K* produzido

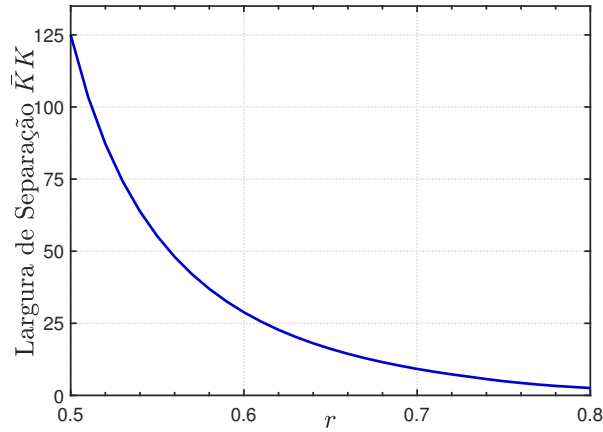


Figura 64 – Valor médio da largura do par mais externo de *small antikink-kink* em função de r .

(como na figura 59) este par não irradia, enquanto que quando temos a formação de três ou quatro pares (figura 61), somente o par mais externo não irradia. No primeiro caso, temos um par de grande espessura, enquanto que no segundo caso, um par estreito. Isto indica que a espessura do par criado não é um aspecto determinante para a ausência de radiação. No entanto, uma vez que pares mais estreitos, que não emitem radiação, são mais compatíveis para a descrição de partículas, nós investigamos algumas propriedades relacionadas à espessura e a radiação no ponto médio do par mais externo de *small $\bar{K}-K$* . A figura 64 mostra o valor médio da largura do par mais externo em função de r . Quanto maior for r , mais estreito se torna o par mais externo. Isto está em acordo com o observado nas figuras 61a e 61c para as quais $r = 0.60$ e $r = 0.70$ respectivamente.

Passamos agora a analisar características em torno do par mais externo, em particular, analisamos as oscilações presentes no centro do par mais externo (veja as Figs. 61-b e d). As figuras 65a-c apresentam a transformada de Fourier para uma velocidade específica, variando r . As frequências que estão abaixo do contínuo de estados indicam que o par não irradia. Para o valor $r = 0.50$ nós temos duas frequências na região de estados ligados para *small kinks* (figura 65a), e então notamos um decaimento na frequência com o crescimento de r . Ainda, uma terceira frequência surge para $r \gtrsim 0.623$ (figura 65b). Esta região coincide com o aumento no número de pares de *small $\bar{K}-K$* criados. Este comportamento não depende da velocidade, já que também realizamos simulações para um valor menor da velocidade, obtendo o mesmo padrão. A figura 66 agrega gráficos como os das figuras 65a-c, exibindo assim um panorama mais geral em termos de r . Observe que há um decaimento das frequências com o crescimento de r , e que as frequências principais estão sempre abaixo do limite do contínuo de estados. Além disso, as frequências também estão, em geral, abaixo do modo vibracional (linha em pontos), com exceção das regiões específicas $r \sim 0.5$ e $r \sim 0.64$, que são respectivamente próximas à região de transição para a formação de duas ondas solitárias após a colisão.

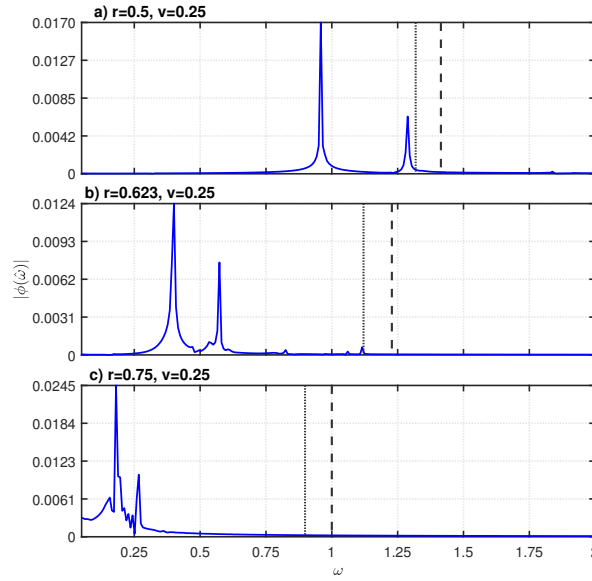


Figura 65 – Colisão *large kink-antikink*: Transformada de Fourier para a oscilação presente no centro do par mais estreito de *small antikink-kink*. Os sinais foram considerados no intervalo de tempo $100 < t < 800$. Em todos os casos, temos que $v = 0.25$. As linhas tracejadas correspondem ao limite para o contínuo, enquanto que as linhas em pontos ao modo vibracional.

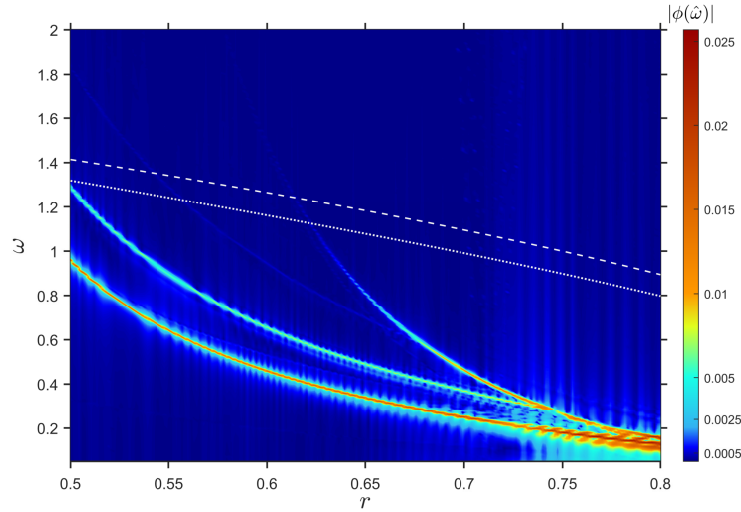


Figura 66 – Colisão *large kink-antikink*: transformada de Fourier no centro do par mais estreito. Em todos os pontos, temos que $v = 0.25$. A linha branca em traços corresponde ao limite para o contínuo. A linha branca em pontos corresponde ao modo vibracional.

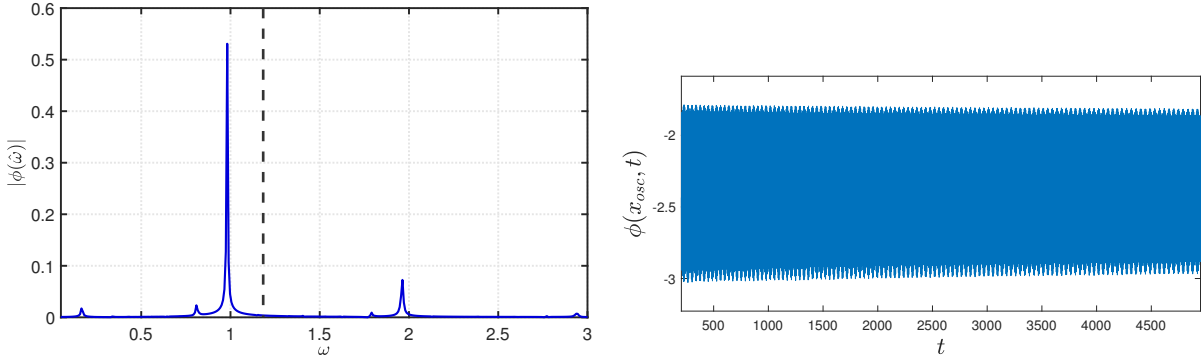


Figura 67 – Colisão *large kink-antikink*: (a) transformada de Fourier para uma das oscilações presentes na figura 60 no intervalo de tempo $100 < t < 800$. A linha tracejada corresponde ao limite para o contínuo de estados. b) Perfil das oscilações presentes na figura 60 até o tempo $t = 5000$.

Nós também analisamos alguns aspectos das ondas solitárias. A figura 67a mostra a transformada de Fourier para uma das ondas solitárias observadas na figura 60. Notamos que frequência principal fica na região dos autoestados vibracionais com um segundo pico de frequência, de menor intensidade, na região do contínuo. A amplitude dessas oscilações decai linearmente, como mostra figura 67b, o que indica que a onda segue a descrição de Manton-Merabet [136].

5.3 Colisão entre *small kinks*

O cenário para colisões do tipo *small kink-antikink* é melhor compreendido em termo das velocidades $v_*(r)$ e $v_c(r)$. Aqui, $v_*(r)$ é a velocidade a partir da qual uma colisão de *small $K-\bar{K}$* , sempre resulta em um par de *large $\bar{K}-K$* do setor topológico adjacente. Já $v_c(r)$ é a velocidade crítica para *one-bounce*. A figura 68 mostra as velocidades v_* e v_c em função de r . Note que $v_*(r)$ é monotonicamente crescente, tendendo à velocidade limite quando $r \approx 0.38$, e indo a zero quando $r \rightarrow 0$. Isto faz sentido, uma vez que no limite $r \approx 0$, recupera-se o modelo *sine-Gordon* no qual o *kink* passa pelo *antikink* mudando de setor topológico.

Colisões para pequenos valores de r e com $v > v_*$ resultam em um estado final do tipo *large antikink-kink*, como mostra a figura 69a. Note, a partir da figura, que a velocidade do *large kink* final é menor que a velocidade do *small kink* inicial. Isto, novamente, está relacionado com a diferença de energia entre *large* e *small kinks* para um dado valor de r . Outra observação é que o par final emite radiação. A figura 69b mostra o recorte do campo $\phi(0, t)$ em função de t . Podemos então ver que no momento da colisão a região central vai para o outro setor topológico. Na figura 70a mostramos a evolução da oscilação presente no estado final da figura 69b, separando o sinal do campo, $\phi(0, t)$, no seguinte intervalo: $200 \leq t \leq 5000$. A transformada de Fourier para esse sinal é apresentada na

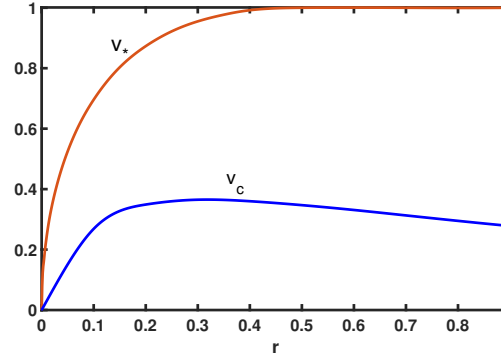


Figura 68 – Colisão *small kink-antikink*: velocidades v_* e v_c em função do parâmetro r . Para $v > v_*$ acontece uma mudança de setor topológico com a produção de um par de *large antikink-kink*. Para $v_c < v < v_*$ observamos colisões do tipo *one-bounce* e para $v < v_c$ podemos observar a estrutura de janelas de ressonância.

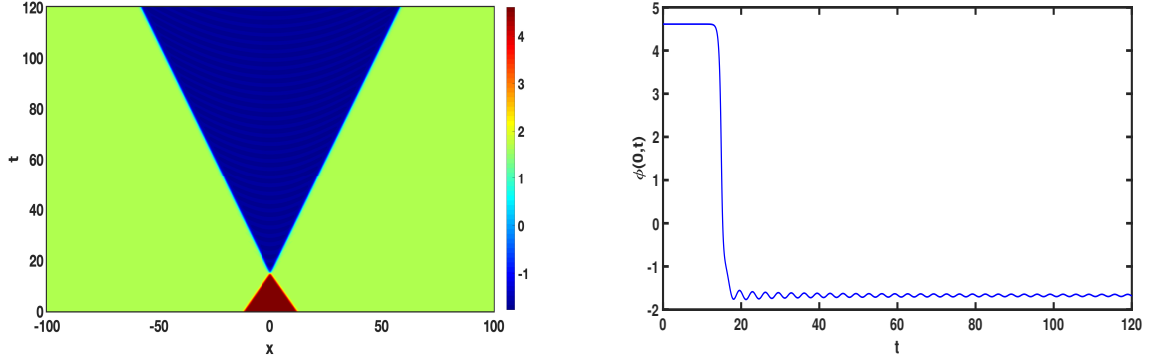


Figura 69 – Colisão do tipo *small kink-antikink*, mostrando: a) mudança de setor topológico com a produção de um par de *large antikink-kink*. b) Um recorte do campo escalar em $x = 0$, mostrando uma oscilação. Em ambas as figuras temos $r = 0.1$ e $v = 0.8$.

figura 70b, que mostra que as oscilações estão na região do contínuo de frequências para *large kinks*. A amplitude $A(t)$ dessa oscilação segue um decaimento na forma $|dA/dt| \propto A^3$ sendo, portanto, compatível com Manton-Merabet [136].

Para $v < v_*$ as colisões entre *small kink-antikink* não mais resultam em mudanças de setor topológico. Nesse caso existem algumas possibilidades: i) para $v_c < v < v_*$ a colisão é inelástica, do tipo *one-bounce*, com produção de pequenas radiações no interior do par resultante. Um caso representativo dessa região é apresentado na figura 71a e seu recorte em $x = 0$, apresentado na figura 71b. Esta é, portanto, uma típica colisão do tipo *one-bounce*, ii) para $v < v_c$ a colisão pode resultar em estados tipo *bion* (figura 72) ou estados do tipo *n-bounce* (figura 73).

A figura 74a-c mostra a estrutura de janelas de ressonâncias para colisões entre *small kinks*. A linha inferior, do meio e superior indicam os tempos da primeira, segunda e

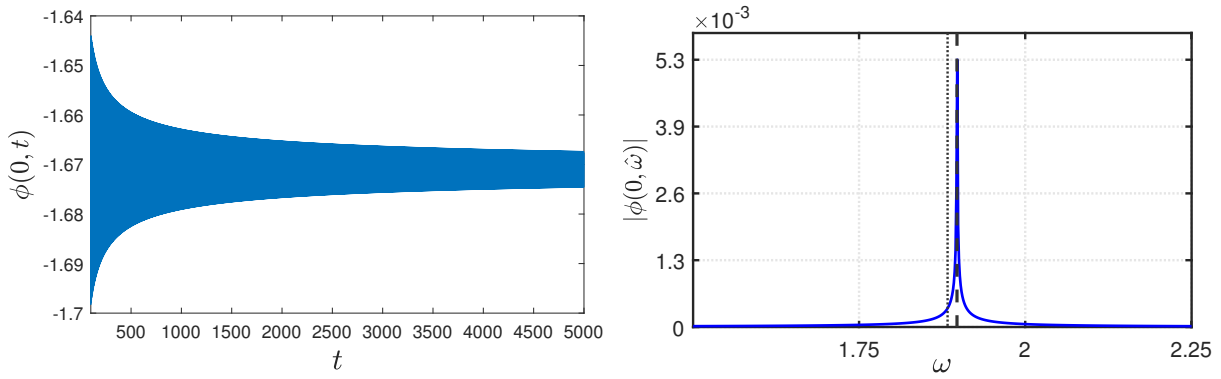


Figura 70 – Colisão *small kink-antikink*: a) evolução da oscilação presente na figura 69b, (b) transformada de Fourier para $200 < t < 5000$. As linhas tracejadas correspondem ao limite para o contínuo. Em ambas as figuras temos $r = 0.1$ e $v = 0.8$.

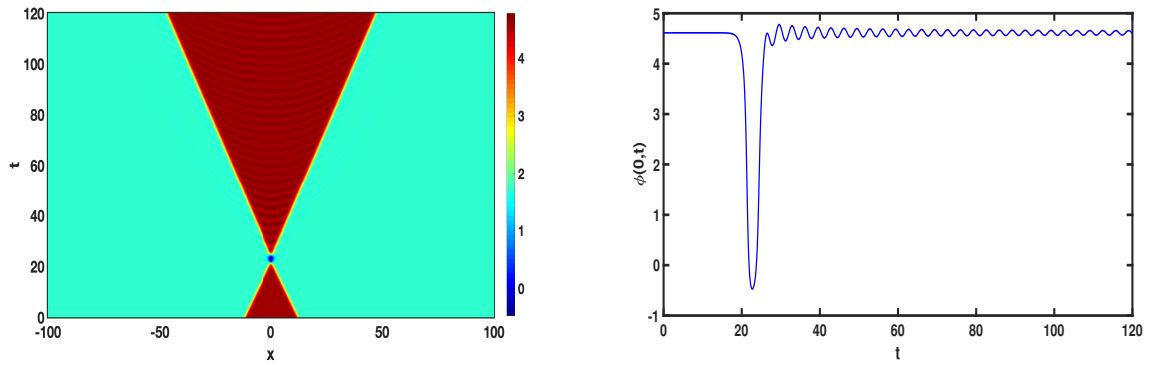


Figura 71 – Colisão *small kink-antikink*, mostrando *one bounce* para $r = 0.1$, $v = 0.55$.

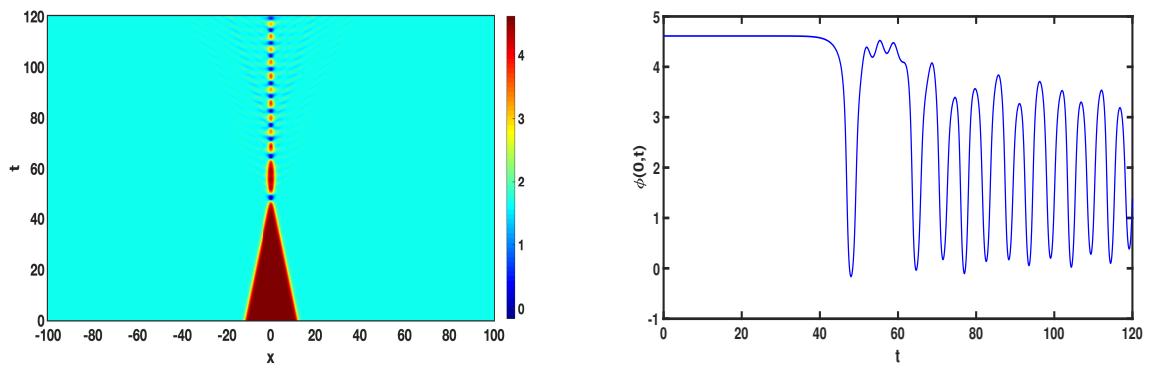


Figura 72 – Colisão *small kink-antikink*: para $r = 0.1$ e $v = 0.24$ temos como produto um estado do tipo *bion*.

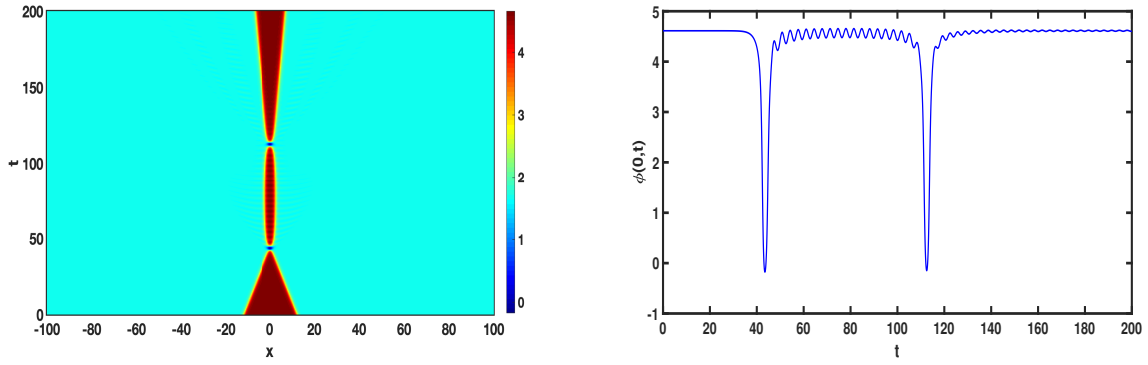


Figura 73 – Colisão *small kink-antikink*: para $r = 0.1$ e $v = 0.267$ ocorre o fenômeno *two-bounce*.

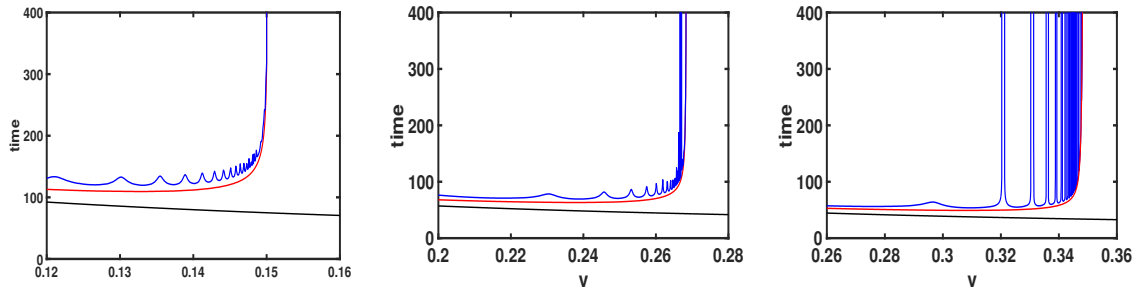


Figura 74 – Colisões entre *small kink-antikink*: tempo em que ocorre a primeira (preto), segunda (vermelho) e terceira (azul) colisão em função da velocidade v . (a) $r = 0.05$, (b) $r = 0.1$ e (c) $r = 0.2$.

terceira colisão respectivamente. Em cada uma dessas figuras, o valor de r é fixo. Para o caso $r = 0.05$ (figura 74a) podemos observar que existem somente a formação de estados *bion* e algumas falsas janelas de *two-bounce* (uma *quasi*-ressonância [129]) para $v < v_c = 0.151$. Observe que apesar da existência de modos vibracionais, não há estrutura de janelas de *two-bounces* indo contra o esperado pelo mecanismo de ressonância CSW [22]. Para $r = 0.10$ (figura 74b) pode-se ver que há somente uma janela de *2-bounces* bem estreita e a ocorrência de espalhamentos inelásticos para $v > v_c = 0.2685$. Para $r = 0.20$ (figura 74c), observamos o crescimento da velocidade crítica ($v_c = 0.3486$) e um aumento na quantidade de janelas de *two-bounces*. Isto é, o crescimento de r contribui para a recuperação da estrutura completa de janelas de *2-bounces* enquanto que a redução de r provoca uma supressão desta estrutura.

O panorama completo dos resultados como função de r e v é apresentado na figura 75, que mostra um ponto do campo em $x = 0$ para um tempo suficientemente grande após a colisão. Na figura podemos perceber as regiões que são delimitadas pelas curvas $v_c(r)$ e $v_*(r)$ (vide a figura 68). A região em azul para $v > v_*$, indica a ocorrência de pares de *large antikink-kink* como produto da colisão. A região em vermelho, em que $v_* < v < v_c$, equivale as colisões inelásticas. Para a região $v < v_c$, temos os estados de *bion*

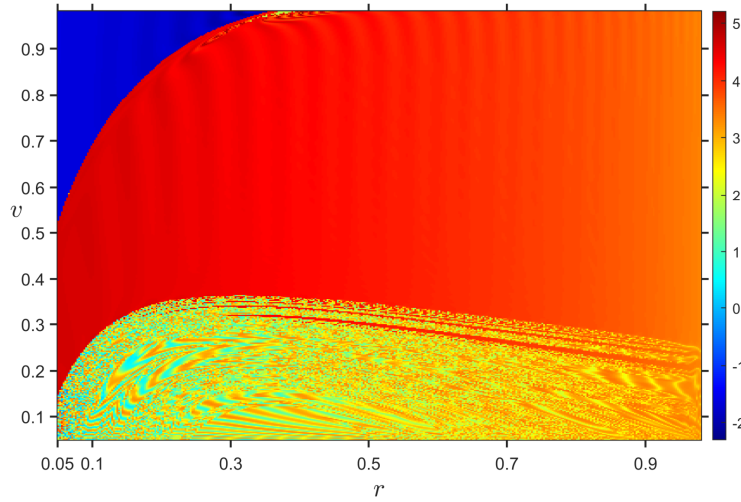


Figura 75 – Diagrama associando (r, v) ao estado final do campo $\phi(0, t_f)$, com $t_f = x_0/v + 100$.

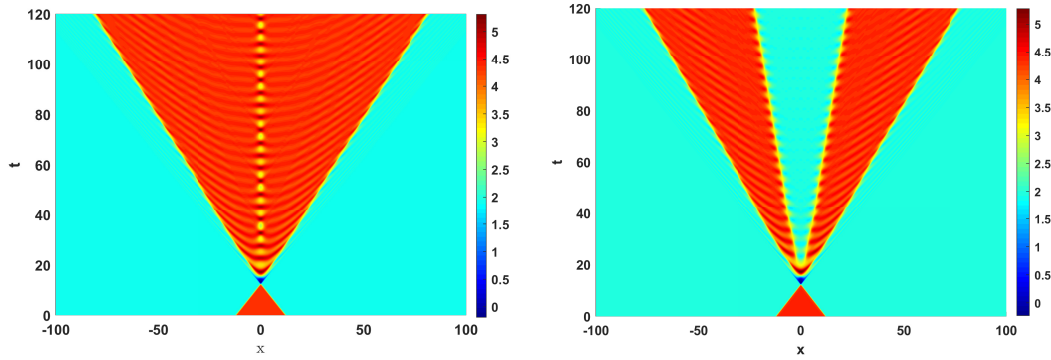


Figura 76 – Colisão *small kink-antikink*: Em a), para $v = 0.97$, temos a produção de uma oscilação em $x = 0$. Em b), para $v = 0.975$, temos como produto dois pares de *small kink-antikink* que pertencem ao mesmo setor topológico do par inicial. Em ambos os casos, $r = 0.37$.

e as janelas de *two-bounces*, que estão demarcadas pelas listras horizontais em vermelho. Para velocidades ultra-relativísticas, na região em torno de $r \sim 0.40$, um novo fenômeno foi também observado. Nesta região, para algumas velocidades, observamos a criação de dois pares de *small kink-antikink* como estado final da colisão. Este comportamento não pode ser considerado equivalente ao observado para a colisão de *large kink-antikink*, pois naquele caso existe uma mudança de setor topológico com a produção de *small kinks* (veja, por exemplo, as figuras 61a e 61d). Na figura 76 mostramos dois possíveis cenários desta região. Em 76a existe a formação de um único par com a presença de uma oscilação central em $x = 0$. Na figura 76b observamos a formação de dois pares de *small kink-antikink*. Observe que o estado final continua sendo do tipo *small K- $\bar{K}$* e no mesmo setor topológico.

Analisamos, neste capítulo, o cenário de espalhamento para ambos os setores do modelo duplo *sine-Gordon* dependendo do parâmetro r . No caso dos *large kinks* destacamos a produção de múltiplos pares com natureza de *small kink*, investigamos

algumas propriedades do par mais externo e das oscilações viajantes produzidas na colisão *large kink-antikink*. No caso dos *small kinks*, observamos a existência de duas velocidades críticas que delimitam comportamentos específicos. Abaixo da velocidade crítica para *one bounce* investigamos modificações na estrutura de janelas de ressonância devido à variação do parâmetro r .

Até este capítulo, temos lidado sempre com soluções topológicas. No próximo capítulo analisamos um modelo que suporta soluções não topológicas. Algumas propriedades dessas soluções nos permitem analisar o produto de seu espalhamento.

6 Espalhamento de *lumps* metaestáveis em um modelo com falso vácuo.

Além da solução do tipo *kink*, que é topológica e estável por pequenas perturbações, existem ainda as soluções conhecidas como *lump*, que também são obtidas a partir de equações diferenciais parciais não lineares para um campo escalar, satisfazendo uma condição específica nos extremos. Ao contrário das soluções *kink*, *lumps*, em geral, se mostram instáveis por pequenas perturbações. Modelos com soluções estáticas analíticas, do tipo *lump* em $(1 + 1)$ dimensões, são estudados, por exemplo, nas seguintes referências [19, 137–140]. Estas soluções são de interesse, por exemplo, para descrever *bright solitons* em fibras ópticas [17, 18] e excitações localizadas em condensados de Bose-Einstein [141, 142]. Em $(3+1)$ dimensões, soluções não topológicas de campos escalares foram investigadas no contexto do universo primordial [143–146], sendo consideradas como um modelo para matéria escura [147, 148]. Além disso, soluções *lump* têm sido objeto de estudo em vários cenários atuais. Por exemplo, em [89], os autores investigaram a transferência de férmions devido à colisão entre um *antikink* e um *lump* no modelo ϕ^4 com um acoplamento de Yukawa. Colisões entre *lumps* e ondas solitárias em $(3 + 1)$ dimensões, foram estudadas no contexto da equação estendida de Kadomtsev-Petviashvili, a qual descreve o modelo de um plasma de múltiplas componentes [149]. Neste capítulo estudamos um dos modelos apresentados na referência [139], que diz respeito a uma teoria dependente de um parâmetro s , cujas soluções são do tipo *lump*. Investigamos o espectro de perturbações lineares e após, resolvemos a equação de movimento para uma configuração de espalhamento das soluções *lump*.

Os resultados foram publicados na referência [150].

6.1 Soluções *lump* em $(1+1)$ dimensões

Soluções *kink* são encontradas em potenciais cujos estados fundamentais são separados por barreiras de potencial. Essas barreiras podem ser i) equivalentes, como no caso do potencial *sine-Gordon*; ii) não equivalentes, como no modelo duplo *sine-Gordon* ou infinitas nas extremidades, formando um poço, como no caso dos potenciais polinomiais. Soluções *lump* surgem interpolando entre um mínimo local e um ponto de instabilidade da energia potencial. Para ilustrar essa afirmação, consideremos a figura 77, que mostra uma configuração genérica de energia potencial com pontos de mínimos e máximos locais. A interpolação $\phi_1(x = -\infty) \rightarrow \phi_2(x = \infty)$ é própria de uma solução tipo *kink*, a interpolação inversa $\phi_2(x = -\infty) \rightarrow \phi_1(x = \infty)$ resulta na solução tipo *antikink* associada.

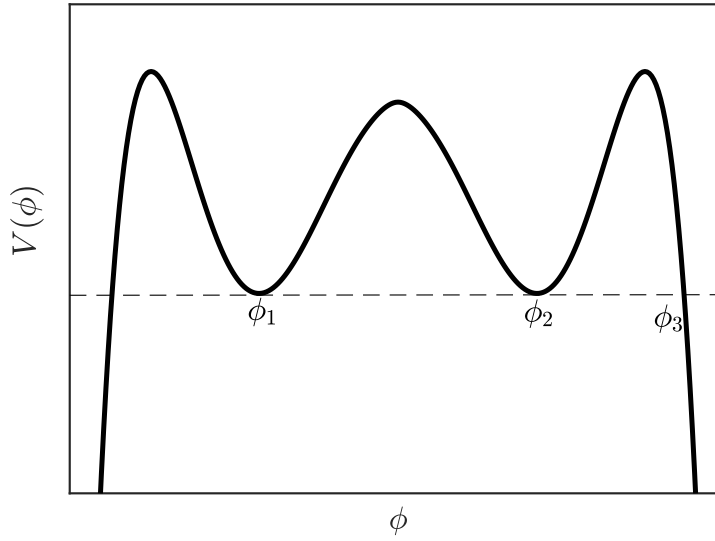


Figura 77 – Energia potencial para um campo ϕ .

Já as soluções *lump* centradas em $x = x_0$ são próprias de uma interpolação do tipo $\phi_2(x = -\infty) \rightarrow \phi_3(x = x_0) \rightarrow \phi_2(x = \infty)$.

Formalmente, consideremos uma teoria dada pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi), \quad (6.1)$$

para a qual temos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (6.2)$$

Para uma configuração de campo estática, $\phi(x)$, a equação de movimento se torna

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (6.3)$$

Integrando a equação (6.3) em x , obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C}, \quad (6.4)$$

sendo C uma constante de integração. Se estabelecemos o critério de que, em $x \rightarrow \pm\infty$, o campo esteja em pelo menos um dos mínimos locais ϕ_i , tal que $V(\phi_i) = 0$, então

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\phi=\phi_i} \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Assim, concluímos que $C = 0$ em (6.4). Com essas considerações, ficamos com as seguintes equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (6.6)$$

De acordo com o critério que adotamos para os extremos da solução estática, temos duas possibilidades de soluções: soluções do tipo *kink* e *lump*. Soluções do tipo *kink* satisfazem as seguintes condições nos extremos

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \phi(x) = \phi_i \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \phi_{i+1}. \quad (6.7)$$

Por outro lado, soluções não topológicas do tipo *lump*, satisfazem a seguinte condição nos extremos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \phi_i. \quad (6.8)$$

No caso das soluções tipo *kink*, cada sinal da equação (6.6) corresponde a uma solução em $-\infty < x < \infty$. Por outro lado, soluções *lump* não são monotônicas em todo domínio. Assim, as equações de primeira ordem, para soluções *lumps*, satisfazem [19]

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V(\phi)} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dx} = \mp\sqrt{2V(\phi)} \quad \text{para } x > 0. \quad (6.9)$$

Como exemplo, consideremos o seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4 \quad (6.10)$$

conhecido como potencial ϕ^4 invertido [38], mostrado na figura 78a. A equação de movimento, nesse caso, fica

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3. \quad (6.11)$$

As soluções para a equação acima são:

$$\phi(x) = \pm \text{sech}(x), \quad (6.12)$$

que claramente são soluções do tipo *lump*. A densidade de energia associada é dada por:

$$\rho(x) = \tanh^2(x) \text{sech}^2(x) \quad (6.13)$$

O perfil da solução *lump* para esta teoria é mostrado na figura 78b. Observe que as soluções (6.12) satisfazem as equações de primeira ordem, Eq. (6.9).

A análise de estabilidade para soluções *lump*, Eq. (6.12), nos leva a uma equação do tipo Schrödinger para o seguinte potencial

$$V_{\text{sch}}(x) = 1 - 6\text{sech}^2 x. \quad (6.14)$$

A equação de autoestados possui duas soluções no espectro discreto: uma para $\omega = 0$ e outra com $\omega^2 = -3$ [38, 139]. Desta forma, as soluções *lump* se mostram instáveis.

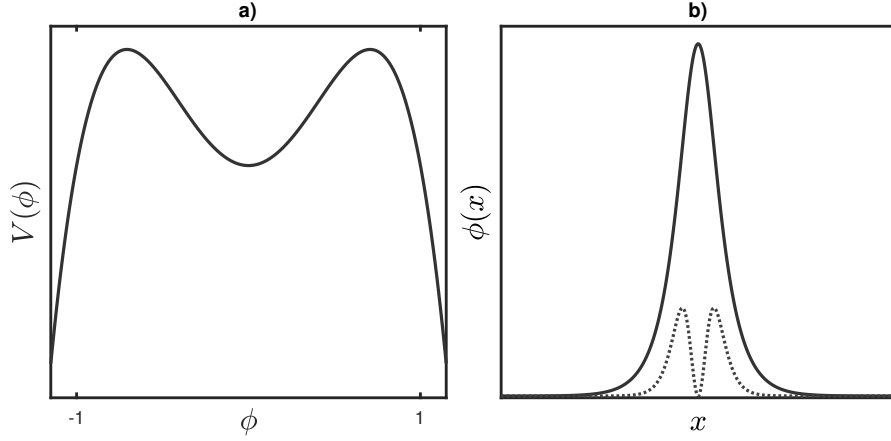


Figura 78 – (a) Potencial ϕ^4 invertido, Eq. (6.10), (b) Solução *lump* e sua densidade de energia (curva em pontos).

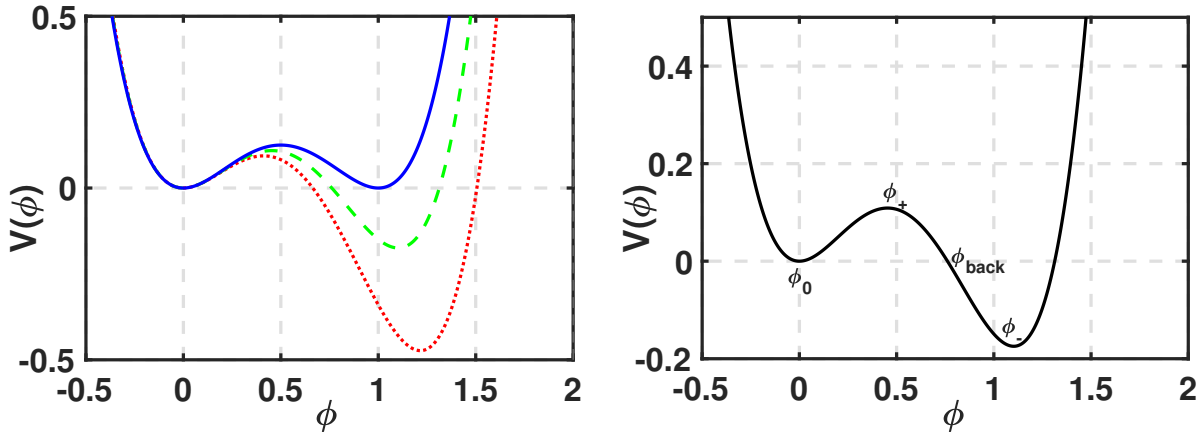


Figura 79 – a) Potencial $V(\phi)$ para $s = 0.8$ (vermelho em pontos), $s = 1$ (verde em traços) e $s = 5$ (azul); b) Potencial $V(\phi)$ para $s = 1$, marcando os pontos ϕ_+ , ϕ_- , ϕ_0 e ϕ_{back} .

6.2 Modelo s -dependente

Consideramos agora o seguinte potencial [19]

$$V(\phi) = 2\phi^2 (\phi - \tanh(s)) (\phi - \coth(s)), \quad (6.15)$$

onde $s > 0$ é um parâmetro real. Na figura 79a mostramos o potencial para alguns valores do parâmetro s . Observe que no limite $s \rightarrow \infty$, $V(\phi)$ se torna um potencial ϕ^4 , com mínimos em $\phi = 0$ e $\phi = 1$. Para um s qualquer, temos que o potencial possui os seguintes pontos característicos: um mínimo local em

$$\phi_0 = 0, \quad (6.16)$$

um máximo local em

$$\phi_+ = \frac{3}{4} \coth(2s) - \frac{1}{4} \sqrt{9 \coth^2(2s) - 8} \quad (6.17)$$

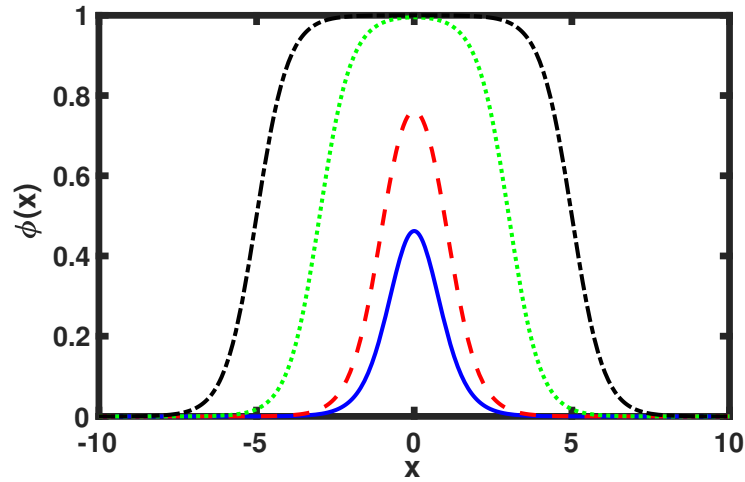


Figura 80 – Soluções estáticas do tipo *lump* para $s = 0.50$ (azul), $s = 1$ (vermelho em traço), $s = 3$ (verde em pontos) e $s = 5$ (traço-ponto em preto).

e um mínimo global em

$$\phi_- = \frac{3}{4} \coth(2s) + \frac{1}{4} \sqrt{9 \coth^2(2s) - 8}. \quad (6.18)$$

Além disso, o potencial cruza o eixo ϕ no ponto

$$\phi_{\text{back}} = \tanh(s), \quad (6.19)$$

que fica entre o máximo local e o mínimo global. Esses pontos característicos estão assinalados na figura 79b para $s = 1$. $V(\phi)$ é sempre positivo no ponto ϕ_+ , enquanto que no ponto ϕ_- o potencial é negativo, indo a zero no limite $s \rightarrow \infty$. Assim, o modelo em questão é caracterizado por um falso vácuo no ponto $\phi = 0$ e um verdadeiro no ponto $\phi = \phi_-$.

As soluções *lump*, centradas em $x_0 = 0$, são dadas por [19]

$$\phi_s(x) = \frac{1}{2} (\tanh(x + s) - \tanh(x - s)). \quad (6.20)$$

Na figura 80 mostramos o perfil dessas soluções para alguns valores do parâmetro s . Comparando com a figura 79b, vemos que as soluções *lump* partem do mínimo local nos extremos ($x \rightarrow \pm\infty$) tendendo ao ponto $\phi = \phi_{\text{back}}$ no centro da solução. Vemos que o parâmetro s controla a largura do *lump*. Para s pequenos, temos uma solução *lump* com as regiões de interpolação próximas, lembrando a forma usual de um sino. Já para grandes valores de s surge um platô central em torno do valor de $\phi_{\text{back}}(s)$. Este platô não é uma forma usual em soluções *lump*. Esta é então uma boa razão para estudarmos as soluções *lump* variando o parâmetro s .

Uma vez obtidas as soluções estáticas, é interessante estudar como estas se ajustam quando submetidas à perturbações lineares. Para isso perturbamos as soluções estáticas na

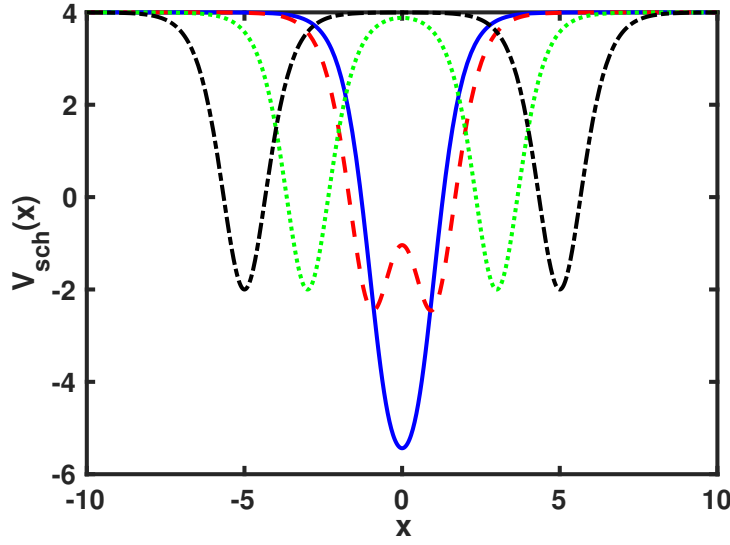


Figura 81 – Potencial de Schrödinger associado à perturbação em torno da solução *lump*. As curvas são referentes aos valores $s = 0.50$ (azul), $s = 1$ (vermelho em traço), $s = 3$ (verde em pontos) e $s = 5$ (pontos e traços em preto).

forma $\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x) \cos(\omega t)$. Novamente, chegamos em um problema de autoestados de Schrödinger

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} + V_{\text{sch}}(x)\eta(x) = \omega^2\eta, \quad (6.21)$$

sendo o potencial do tipo Schrödinger, $V_{\text{sch}}(x) = V_{\phi\phi}(\phi = \phi_s(x))$, dado por:

$$V_{\text{sch}}(x) = 4 + 24\phi_s^2(x) - 12[\tanh(s) + \coth(s)]\phi_s(x), \quad (6.22)$$

onde $\phi_s(x)$ é a solução estática dada pela equação (6.20). O comportamento do potencial de Schrödinger é mostrado na figura 81 para alguns valores de s . Vemos que este potencial pode ser separado em dois comportamentos a partir do valor $\bar{s} = (1/2) \ln(\sqrt{3} + 2) \simeq 0.66$ [139]. Para $s \leq \bar{s}$ o potencial tem a forma de um poço simples, enquanto que para $s > \bar{s}$, $V_{\text{sch}}(x)$ assume a forma de um poço duplo, com um máximo local na posição correspondente ao centro da solução *lump*. À medida que s cresce, o máximo local de $V_{\text{sch}}(x)$ se torna um platô, cuja largura cresce com s , separando os dois poços de potencial. Para grandes valores de s , este potencial se torna equivalente ao da configuração coletiva *kink-antikink* do modelo ϕ^4 .

Resolvemos o problema de autoestados, Eq. (6.21), para o potencial descrito na Eq. (6.22). O resultado está apresentado na figura 82a que mostra a presença de quatro autoestados para valores pequenos de s : o primeiro autoestado é encontrado para $\omega^2 < 0$, indicando que soluções para tais valores de s são instáveis, em seguida vem o modo translacional ($\omega^2 = 0$). Acima destes, temos um coletivo de dois modos vibracionais para $\omega^2 > 0$. A autofrequência negativa tem um rápido crescimento monótono na região $s < 2$, tendendo ao modo zero para $s \gtrsim 2$, indicando que, nesta região, as soluções *lump* são metaestáveis, podendo viajar por algum tempo sem sentir os efeitos da instabilidade. Já os

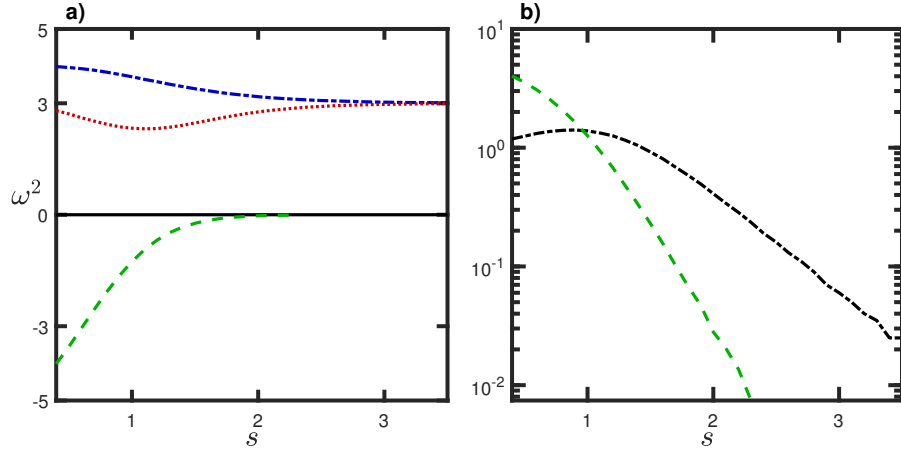


Figura 82 – (a) Solução da equação de autoestados que apresenta, para s pequeno, quatro autofrequências na região discreta. Vemos um modo negativo, $\omega_{-1}^2 < 0$ (verde em traços), o modo translacional, $\omega_0^2 = 0$, e dois modos vibracionais; ω_1^2 em pontos vermelhos e ω_2^2 em azul tracejado. (b) $|\omega_{-1}^2|$ em verde tracejado e a diferença $|\omega_2^2 - \omega_1^2|$ em preto.

dois modos vibracionais tendem à frequência $\omega^2 = 3$ em $s \approx 3$. $\omega = \sqrt{3}$ é a autofrequência para o modo vibracional do *kink* no modelo ϕ^4 . Então, de acordo com esse gráfico, temos *lumps* instáveis para $0 < s \lesssim 2$, *lumps* metaestáveis para $2 \lesssim s \lesssim 3$. Para $s \gtrsim 3$, a solução *lump* viaja por um tempo ainda mais longo e quando perturbado, oscila em torno da frequência $\omega = \sqrt{3}$. Na figura 82b vemos o quão rapidamente o modo negativo vai para o entorno do modo zero. Também mostra como a diferença entre os dois modos vibracionais decai rapidamente com s . Essas características das soluções também fazem sentido, a partir da observação da figura 83a-b. Em 83a vemos a posição dos pontos ϕ_{back} , ϕ_+ e ϕ_- em função de s . Já na Fig. 83b, temos os valores do potencial nesses pontos em função de s . Observe que para $s \gtrsim 2$, o mínimo global é bem próximo de $V = 0$, ϕ_{back} e do mínimo local, ϕ_0 . Observe que para s grande os extremos continuam no mínimo local, ϕ_0 , ao passo que a região central do platô tende ao mínimo global.

6.3 Colisões lump-lump

Passamos agora a resolver a equação de movimento para o cenário em que dois *lumps* se aproximam um do outro com velocidade v . Fazemos isto aplicando um *boost* de Lorentz à solução estática (6.20). As condições iniciais, atendendo a esses requisitos são dadas por:

$$\phi_s(x, 0) = \phi_{L,s}(x + x_0, v, 0) + \phi_{L,s}(x - x_0, -v, 0), \quad (6.23)$$

$$\dot{\phi}_s(x, 0) = \dot{\phi}_{L,s}(x + x_0, v, 0) + \dot{\phi}_{L,s}(x - x_0, -v, 0), \quad (6.24)$$

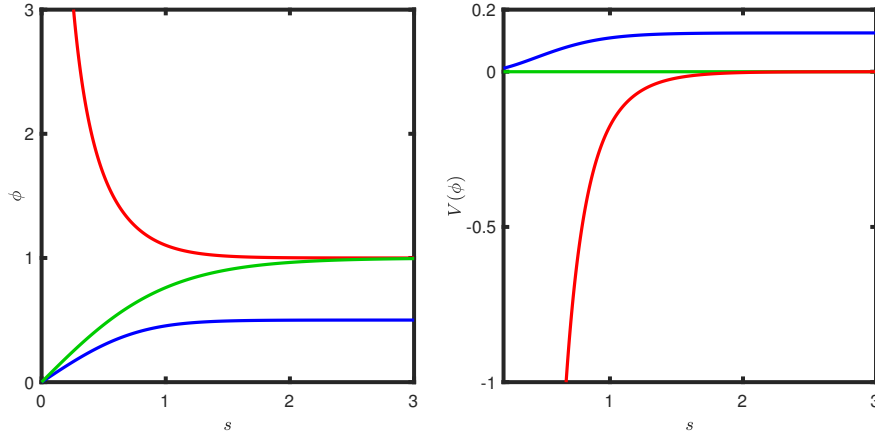


Figura 83 – a) Pontos ϕ_- (vermelho), ϕ_{back} (verde) e ϕ_+ (azul) e em b) os correspondentes valores do potencial, $V(\phi)$, em função de s . A solução *lump* interpola entre $\phi_0 = 0$ e ϕ_{back} .

onde

$$\phi_{L,s}(x, v, t) = [\tanh(\gamma(x - vt) + s) - \tanh(\gamma(x - vt) - s)]/2, \quad (6.25)$$

$$\dot{\phi}_{L,s}(x, v, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_{L,s}(x, v, t)|_{t=0} \quad (6.26)$$

e $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Essas condições correspondem a um par de *lumps*: um deles centrado em $x = -x_0(s)$, no tempo $t = 0$, viajando para o sentido positivo de x com velocidade v , o outro *lump*, centrado inicialmente em $x = x_0(s)$, viaja no sentido oposto com mesma velocidade. Resolvemos a equação de movimento, usando o esquema de diferenças finitas centrais para descrever a derivada espacial. A evolução temporal é obtida por integração simplética. Nós consideramos $x_0(s) = 14 + s$. Assim, em $t = 0$, a posição do centro do *lump* depende de s . Essa dependência é necessária por dois motivos: i) Para s pequeno, o *lump* é instável sendo importante que a colisão aconteça antes que os *lumps* venham a decair pelo modo instável; ii) Para grandes valores de s , as soluções *lump* se tornam largas (veja a figura 80), assim $x_0(s)$ garante que em $t = 0$, essas soluções estarão suficientemente distantes mesmo em valores grandes de s . Isto garante que o campo inicial é uma solução da equação de movimento. A seguir, comentamos os resultados obtidos.

Para colisões com pequenos valores de s , o modo instável deforma rapidamente as soluções *lumps*, antes mesmos que essas venham a interagir por contato, conforme mostram as figuras 84a-b. Notamos, após certo tempo, a presença de pequenas oscilações emitidas em forma de radiação. O padrão de emissão de radiação pode ser simples, como na Fig. 84a ou mais complexo, como na Fig. 84b, onde o campo em $x = 0$ aparece oscilando algumas vezes entre os pontos ϕ_0 e ϕ_- até que, após um certo colapso, vai definitivamente para $\phi = \phi_-$ com a produção de duas oscilações viajantes.

Alguns exemplos envolvendo valores maiores de s são apresentados na figura 85. Nesses casos, vemos que as soluções *lumps* conseguem viajar até o ponto de colisão sem

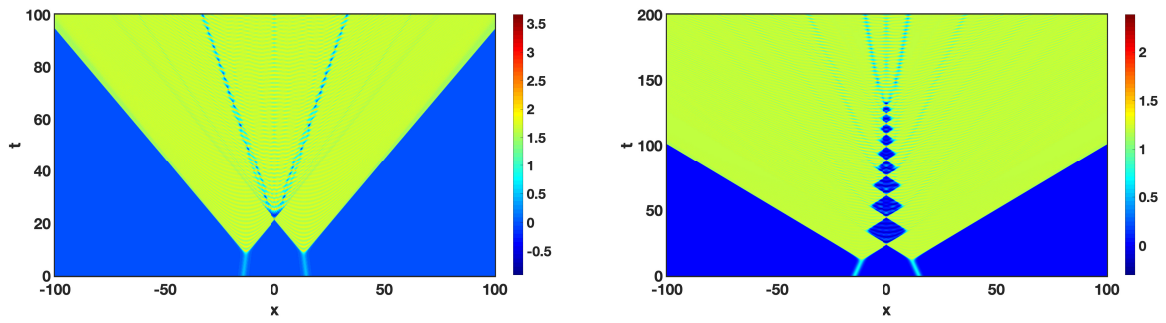


Figura 84 – Colisão *lump-lump* com (a) $v = 0.15$ para $s = 0.5$ e (b) $v = 0.27$ para $s = 0.82$.

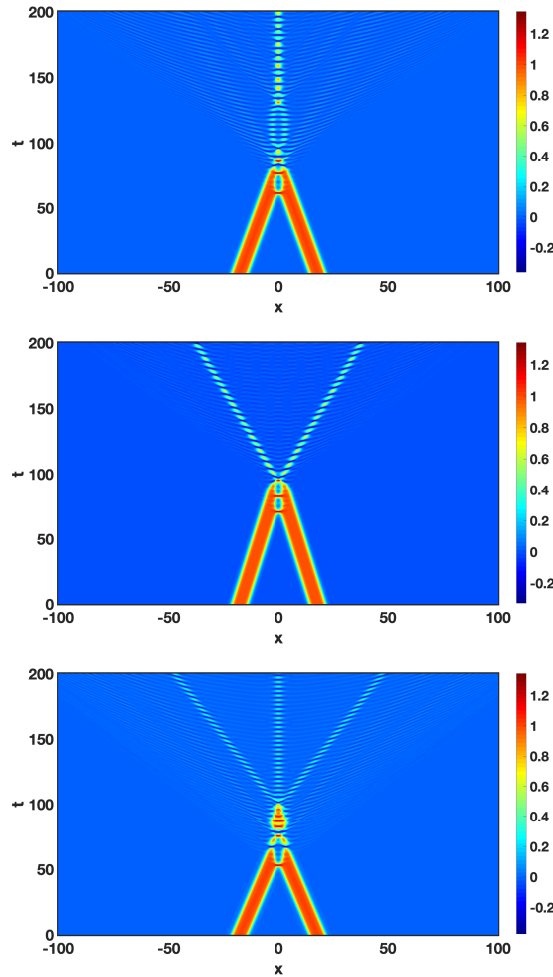


Figura 85 – Colisões *lump-lump* para os seguintes casos: (a) $v = 0.217$, sendo o estado final um *bion* em $x = 0$, (b) $v = 0.1861$, duas oscilações viajantes e em (c) $v = 0.254$, três oscilações viajantes como estado final. Em todos os casos $s = 3.75$.

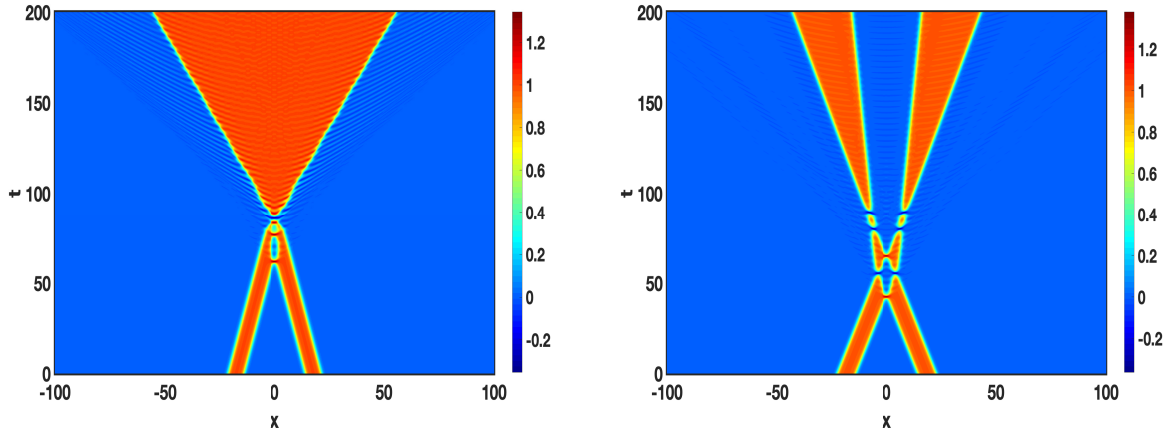


Figura 86 – Colisões *lump-lump*: (a) $v = 0.215$ com $s = 3.75$ e (b) $v = 0.325$ com $s = 4.5$.

perda considerável de energia, mantendo a sua forma inicial. Isto está em acordo com o esperado por nossa análise prévia para a região de *lumps* metaestáveis. Após a colisão os seguintes estados finais são possíveis: os dois *lumps* se aniquilam e oscilam em um estado tipo *bion* (Fig. 85a), produção de duas oscilações localizadas que viajam para longe de $x = 0$ ou três oscilações, sendo duas viajantes e uma fixa em $x = 0$ (Fig. 85c). Observe que a oscilação da Fig. 85c é regular, enquanto que o estado *bion* é irregular. Existe ainda, para outros valores de s e v , a possibilidade de produção de mais oscilações viajantes. Em nossas simulações, observamos casos de até quatro oscilações viajantes como estado final da colisão. Outras possibilidades de estados finais são mostradas na figura 86. Vemos que a colisão dos dois *lumps* pode resultar em uma configuração *kink-antikink*, sendo que o *kink*, nesse caso, interpola entre ϕ_0 e ϕ_- . Na figura 86b vemos o estado final como dois pares *kink-antikink*.

Uma vez apresentados os principais comportamentos para colisão entre *lumps*, é importante termos uma noção acerca da influência de v e s para a existência de cada cenário. A figura 87 é um diagrama no qual cada ponto corresponde ao valor $\phi(x = 0, t = x_0(s)/v + 150)$ para dados (s, v) . A finalidade desses pontos é caracterizar o estado final do campo após a colisão. Assim, as cores correspondem a determinados fenômenos. O comportamento instável é caracterizado pela região em laranja. A região em azul pode indicar dois fenômenos distintos: a produção de duas ou quatro oscilações localizadas, como no exemplo da Fig. 85b ou a produção de dois pares tipo *kink-antikink*, como na Fig. 86b. A região em verde corresponde à criação de um par tipo *kink-antikink*, como o da Fig. 86a. Regiões apresentando uma distribuição aleatória para as cores verde e azul correspondem aos padrões oscilatórios em $x = 0$, como no caso da Fig. 85a (*bion*) ou Fig. 85c (três oscilações regulares). Este padrão é observado no digrama 87 para valores baixos de v na região $1 \lesssim s \lesssim 9$. No entanto, este padrão muda para grandes valores de v . Nesse caso, para s pequeno, observamos a presença de uma considerável região em verde, o

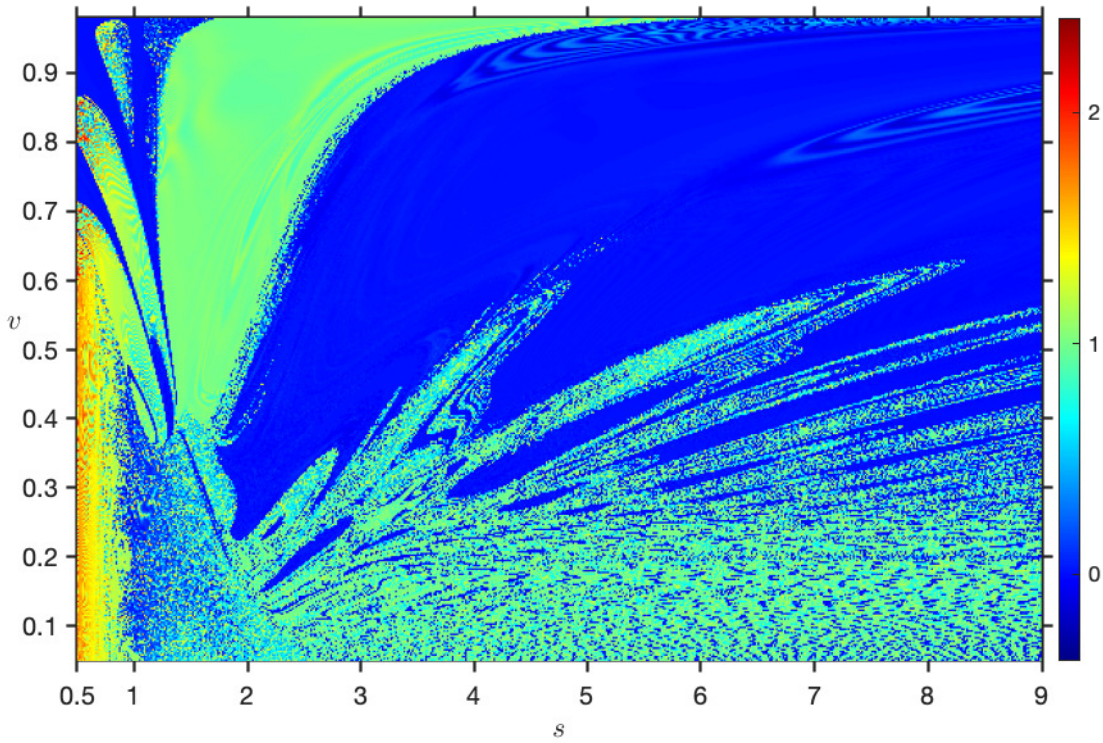


Figura 87 – Diagrama para valores de s e v . Estado final, após a colisão, caracterizado pelo ponto $\phi(x = 0, t = \frac{x_0(s)}{v} + 150)$.

que indica a produção de um único par tipo *kink-antikink*. Por outro lado, o crescimento de s favorece a produção de duas oscilações viajantes e a criação de pares do tipo *kink-antikink*, ambos associados à cor azul da figura. Para $s \gtrsim 3$, o digrama mostra *lumps* metaestáveis apresentando um padrão complexo na região de pequenas velocidades, onde a interação entre o par *lump-lump* leva mais tempo para acontecer por contato. Por outro lado, em velocidades ultra relativísticas, o diagrama assume um padrão predominantemente azul, o que significa ausências de estados *bion*, de produção de oscilações regulares em $x = 0$ ou de conversão dos dois *lumps* em um único par tipo *kink-antikink*, ao invés, há predominância do fenômeno de criação de dois pares do tipo *kink-antikink* e de duas oscilações viajantes. Isto é razoável, uma vez que para grandes valores de s , os resultados tendem a reproduzir a colisão entre pares *kink-antikink* do modelo ϕ^4 , onde vemos que, em altas velocidades, ambos os pares colidem de forma inelástica.

Em velocidades menores e com s grande, podemos observar na figura 87 uma mistura de pontos em verde e azul, o que significa estados *bion* ou oscilatórios. Para valores intermediários de v e grande s , notamos a presença de faixas horizontais permanentes em azul. Essas faixas de intervalos de v , lembram as janelas de ressonância e neste caso podem ser observadas no intervalo $4 \lesssim s \lesssim 9$. Para melhor caracterizar as regiões da figura 87 na região de *lumps* metaestáveis, apresentamos nas figuras 88a-c a distribuição dos estados finais de produção de ondas viajantes ou pares tipo *kink-antikink* em função da velocidade inicial, fixando o valor de s em cada figura. Além disso, para efeito de comparação, na

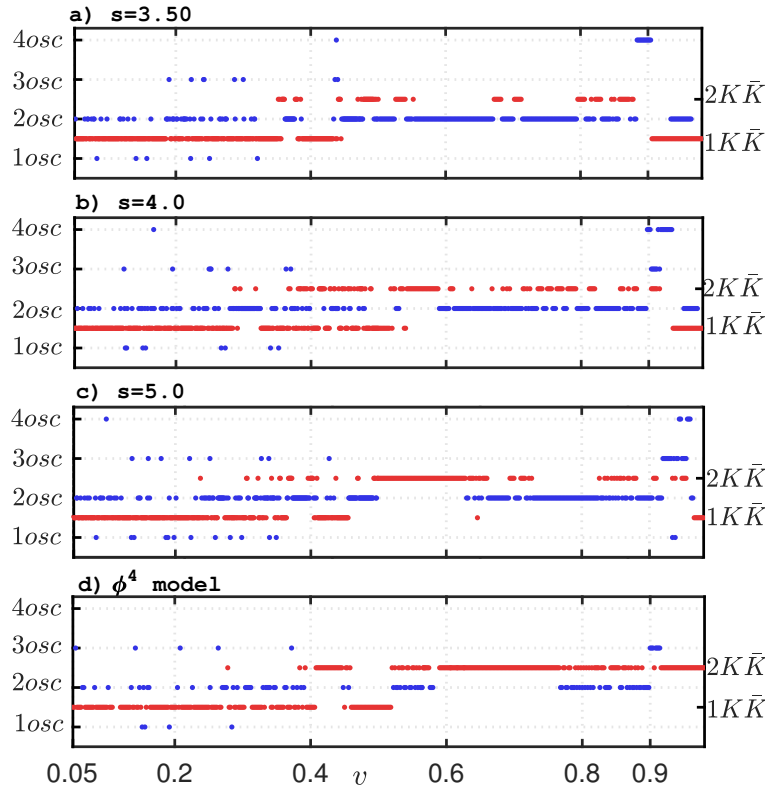


Figura 88 – Colisões de *lumps* metaestáveis: número de oscilações viajantes (pontos em azul) e número de pares do tipo *kink-antikink* ($K\bar{K}$, pontos em vermelho) em função da velocidade v . a) $s = 3.5$, b) $s = 4.0$ e c) $s = 5.0$. Para comparação, em d) apresentamos os resultados para o espalhamento de pares *kink-antikink* do modelo ϕ^4 que corresponde ao limite $s \rightarrow \infty$.

Fig. 88d, apresentamos o mesmo gráfico para os resultados finais encontrados nas colisões entre pares de *kink-antikink* do modelo ϕ^4 . Concluimos que para baixas velocidades é mais provável a ocorrência de criação de um par do tipo *kink-antikink* com alguns pontos de velocidade intercalados resultando na produção de duas oscilações viajantes. Isto está de acordo com o que observamos para baixas velocidades no diagrama (s, v) , onde observamos uma predominância da cor verde com alguns *pixels* em azul. Também notamos a existência de janelas de velocidade para as quais o resultado da colisão é a produção de duas oscilações viajantes. Essas janelas correspondem às faixas horizontais em azul, encontradas na figura 87. Em particular, na figura 88a, vemos que para grandes velocidades, é mais frequente a observação de oscilações viajantes que a produção de pares tipo *kink-antikink*. Comparando as figuras 88a-c, vemos que o crescimento de s favorece a criação de pares tipo *kink-antikink*, especialmente em grandes velocidades. De fato, no modelo ϕ^4 (que equivale a $s \rightarrow \infty$) mostrado na Fig. 88d, vemos que, em grandes velocidades, predomina a criação de pares *kink-antikink*. Colisões resultando em três oscilações ocorrem como menos frequência. Já colisões resultando em quatro oscilações viajantes são raras, ocorrendo para valores específicos de s e v .

Em síntese, neste capítulo analisamos o espalhamento para um tipo específico

de soluções *lump*, que dependendo do valor do parâmetro s , podem se propagar por um tempo suficiente para permitir o estudo sobre o estado final do espalhamento. O espectro de perturbações lineares dessas soluções é muito sensível ao parâmetro do modelo, especialmente na faixa $0 < s \lesssim 3$, o que confere uma diversidade de resultados ao produto do espalhamento. Uma das características interessantes do modelo é a possibilidade de transição entre um cenário de instabilidade e um cenário metaestável. No cenário instável, o espalhamento resulta em padrões irregulares. No cenário metaestável, podemos perceber algumas semelhanças com colisões entre *kinks* em modelos não integráveis. Por exemplo, podemos perceber o surgimento de estruturas que lembram as janelas de escape e, em determinado cenário, a colisão entre as soluções não topológicas produz uma estrutura semelhante a um par *kink-antikink*, que, por sua vez, é formado por uma combinação de soluções topológicas. Extensões desse trabalho poderiam investigar a regra de decaimento, bem como o espectro de frequências das oscilações localizadas produzidas no espalhamento e também, para grandes valores de s , a existência de padrões para as janelas percebidas no diagrama 87.

7 Conclusão

Nesta tese estudamos a interação, através do processo de colisão, entre soluções estáticas para teorias escalares do tipo Klein-Gordon em $(1, 1)$ dimensões. Estudamos principalmente as interações relacionadas aos modos internos de cada solução.

No capítulo 3, mostramos que para o modelo completamente integrável *sine*-Gordon, as soluções *kinks* e *breather* interagem como *solitons*. Ou seja, após a colisão, as soluções continuam a viajar mantendo um padrão uniforme. Ainda neste capítulo, apresentamos os resultados para colisões *kink-antikink* da teoria ϕ^4 . Neste caso, os resultados são diversos, tais como: um estado *bion*, que surge após a colisão e tem como característica a emissão contínua de radiação, oscilando no ponto de colisão sem padrão definido, sendo considerado caótico. Para colisões no modelo ϕ^4 existe uma velocidade crítica, v_c , a partir da qual o *kink* e *antikink* sempre colidem de forma inelástica, apenas uma vez, sendo refletidos um pelo outro em seguida. Entre a região de estado *bion* e a velocidade crítica existem janelas de velocidade nas quais ocorre o fenômeno de ressonância *two-bounce*, quando o *kink* e *antikink* refletem um ao outro após a segunda colisão. Vimos que esse fenômeno é elucidado considerando-se um mecanismo de troca de energia entre os modos internos das soluções *kink* e *antikink*. Este mecanismo atua quando a condição de ressonância, Eq. (3.46), é satisfeita. Além das janelas de *2-bounces*, observamos que existem janelas de *3-bounces* nas bordas das janelas de *2-bounces*. De forma geral, as janelas de $n + 1$ -*bounces*, com $n \geq 2$, se situam na vizinhança das janelas de n -*bounces*. Esse ordenamento das janelas faz surgir uma estrutura fractal. Também estudamos colisões no modelo ϕ^6 , quando mostramos que para esse modelo o mecanismo de troca de energia precisa ser aplicado para os modos internos associados à configuração coletiva inicial. De fato, as soluções *kink* e *antikink* do modelo ϕ^6 não apresentam modos vibracionais. Já a configuração coletiva *antikink-kink* apresenta um modo zero seguido por um coletivo de modos vibracionais pares e ímpares. Isso justificou a existência das janelas de n -*bounces* encontradas para as colisões *antikink-kink* do modelo.

No capítulo 4, estudamos o espalhamento de soluções *kinks* ϕ^4 e ϕ^6 na semilinha, $-\infty < x \leq 0$, com barreira energética em $x = 0$, estabelecida através da condição de contorno $\phi_x(x = 0) = H$. Neste cenário as soluções interagem tanto através dos modos internos como também pela força estática entre as soluções. A interação via força estática foi observada nos cenários em que a solução-borda atua de forma repulsiva sobre a solução viajante. Nestes casos, obtemos a velocidade $v_*(H)$ para a qual a energia cinética se iguala a energia repulsiva nas proximidades da fronteira, resultando em uma configuração de equilíbrio instável. Para $v > v_*(H)$ encontramos uma região onde existem janelas de ressonância, mesmo no caso do modelo ϕ^6 em que as soluções *kinks* não apresentam

modo vibracional. Em ambos os modelos ϕ^4 e ϕ^6 observamos que a estrutura de janelas é modificada com a variação do parâmetro H . No modelo ϕ^4 observamos uma janela de ordem zero, que é ausente para colisões na linha completa. No modelo ϕ^6 também observamos a recuperação de janelas de ordem inferior.

No capítulo 5 estudamos colisões para as configurações *large* e *small kink-antikink* de um modelo duplo *sine-Gordon* dependendo de um único parâmetro r . Calculamos as energias para ambos *large* e *small kinks* e observamos que *large kinks* possuem maior energia. Na colisão entre *large kinks* destacamos os seguintes resultados: pares de *small antikink-kink* como estado final da colisão; o número de pares produto da colisão aumenta com r ; produção de ondas solitárias viajantes. Verificamos que o número de oscilações também aumenta com r evidenciando uma relação entre o número de pares e oscilações criadas. Na colisão *small kink-antikink*, observamos que os fenômenos estão distribuídos em regiões que são separadas pelas velocidades v_c e v_* . Apesar da existência de um modo vibracional para $r \gtrsim 0.02$, temos que para r pequeno, as janelas de *2-bounces* não existem, restando apenas *quasi*-ressonâncias. O crescimento de r restaura a estrutura de janelas. Observamos também uma região específica onde a colisão entre *small kinks* resulta na produção de 2 pares, também de *small kinks*, e no mesmo setor topológico. Essa é uma importante diferença para os resultados observados na colisão para *large-kinks*.

No capítulo 6 investigamos as estruturas formadas em espalhamentos de *lumps* metaestáveis em um modelo com falso vácuo, dependendo de um parâmetro s . O parâmetro s exerce grande influência no espectro de perturbações lineares e em consequência, no processo de colisão *lump-lump*. As soluções são claramente instáveis para s pequeno ($s \lesssim 2$), quando possuem um modo interno negativo e dois positivos. Para $s \gtrsim 2$ as soluções podem ser consideradas metaestáveis, com o modo interno negativo sendo muito próximo de zero. Além disso, para $s \rightarrow \infty$ a solução *lump* se torna um par *kink-antikink* do modelo ϕ^4 . Nossos resultados mostraram que para pequenos valores de s , devido à instabilidade, os *lumps* em movimento logo perdem a sua forma, antes mesmo da colisão. O crescimento de s favorece soluções *lump* com maior tempo de vida, os quais possuem dois modos vibracionais cujas frequências são muito próximas de $\omega^2 = 3$, que é a frequência para o modo vibracional do modelo ϕ^4 . Neste cenário, a colisão *lump-lump* pode resultar em: i) um estado *bion* oscilando em $x = 0$, ii) um ou dois pares do tipo *kink-antikink*, iii) duas ou mais (nós observamos até quatro) oscilações viajantes. Os resultados também mostraram que para s pequeno o estado final mais provável é a produção de um par do tipo *kink-antikink*. Por outro lado, s grande favorece a produção de oscilações viajantes ou dois pares do tipo *kink-antikink*. Para s grande vemos também que o tempo de vida das oscilações produzidas é bem mais longo em relação ao rápido decaimento das soluções *lump* em s menores. Isto implica que o caráter metaestável das soluções *lump*, para grandes valores de s , permanece mesmo depois da colisão, quando observamos estados de longa vida.

Os temas inseridos nesta tese foram propícios à aquisição de um valioso conjunto de conhecimentos. Estudamos os fundamentos da teoria de campos e simultaneamente procuramos por ferramentas que nos possibilitaram adentrar o vasto cenário da física não linear. Diversos temas correlatos continuam sendo debatidos pela comunidade científica, o que nos anima a continuar estudando temas afins com o objetivo de contribuir mais vezes com a literatura da área. Diante disso, temos como possíveis caminhos: i) investigar a intersecção dos temas que estudamos nesta tese com problemas de outras áreas da física tais como cosmologia e física da matéria condensada, ii) continuar estudando a dinâmica de defeitos para cenários mais amplos, iii) aprimorar técnicas de abordagem numérica, uma vez que os temas em debate exigem análises cada vez mais detalhadas.

Referências

- 1 CHANSON, H. *Tidal Bores, Aegir, Eagre, Mascaret, Pororoca: Theory and Observations*. [S.l.]: World Scientific, 2012. ISBN 139789814335416. Citado na página 25.
- 2 RUSSEL, J. S. *Reports on waves: Made to the meetings of the British Association in 1842-43*. [S.l.]: Richard and John E Taylor, 1845. Citado na página 25.
- 3 ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 15, p. 240–243, Aug 1965. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.15.240>>. Citado na página 25.
- 4 ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 15, p. 240–243, Aug 1965. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.15.240>>. Citado na página 25.
- 5 REMOISSENET, M. *Waves called solitons: Concepts and Experiments*. Third. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin, 1999. Citado na página 25.
- 6 FILHO, D. B. *Campos Escalares em ação*. Tese (Doutorado) — Tese apresentada para o Concurso de Professor Titular-UFPB, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 40.
- 7 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 26, 28, 36, 76 e 158.
- 8 LAM, L. *Nonlinear physics for beginners :fractals, chaos, solitons, pattern formation, cellular automata, complex systems*. [S.l.]: World Scientific, 1998. Citado na página 27.
- 9 RUBAKOV, V. *Classical theory of gauge fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 35.
- 10 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. [S.l.]: Academic press, 2011. Citado na página 27.
- 11 VACHASPATI, T. *Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 27, 50 e 158.
- 12 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 50.
- 13 ANNINOS, P.; OLIVEIRA, S.; MATZNER, R. A. Fractal structure in the scalar $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$ theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 44, 1991. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.44.1147>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 29, 56 e 60.
- 14 YOMOSA, S. Soliton excitations in deoxyribonucleic acid (dna) double helices. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 27, p. 2120–2125, Apr 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.27.2120>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 50.

- 15 RICE, M.; TIMONEN, J. Insulator-to-metal transition in doped polyacetylene. *Physics Letters A*, v. 73, n. 4, p. 368–370, 1979. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960179905632>>. Citado na página 28.
- 16 AGRAWAL, G. P. Nonlinear fiber optics. In: *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*. [S.l.]: Springer, 2000. p. 195–211. Citado na página 28.
- 17 AGRAWAL, G. *Nonlinear Fiber Optics*. Elsevier Science, 2013. (Optics and Photonics). ISBN 9780123970237. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xNvw-GDVn84C>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 119.
- 18 HAUS, H. A.; WONG, W. S. Solitons in optical communications. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 68, p. 423–444, Apr 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.423>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 119.
- 19 AVELAR, A. T.; BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. New Lump-like Structures in Scalar-field Models. *Eur. Phys. J. C*, v. 55, p. 133–143, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 28, 119, 121, 122 e 123.
- 20 YAKOV, S. M. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. ISBN 9781108429917. Citado 3 vezes nas páginas 28, 32 e 36.
- 21 SUGIYAMA, T. Kink-Antikink Collisions in the Two-Dimensional φ^4 Model. *Progress of Theoretical Physics*, v. 61, n. 5, 1979. Disponível em: <<http://ptp.oxfordjournals.org/content/61/5/1550.abstract>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 53.
- 22 CAMPBELL, D. K.; SCHONFELD, J. F.; WINGATE, C. A. Resonance structure in kink-antikink interactions in φ^4 theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 9, n. 1-2, 1983. Citado 8 vezes nas páginas 28, 29, 50, 56, 57, 58, 78 e 115.
- 23 DOREY, P.; MERSH, K.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; SHNIR, Y. Kink-antikink collisions in the ϕ^6 model. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 107, 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.091602>>. Citado 5 vezes nas páginas 28, 63, 64, 65 e 92.
- 24 DOREY, P.; ROMANCZUKIEWICZ, T. Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes. *Physics Letters B*, v. 779, p. 117–123, 2018. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318301023>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 103.
- 25 CAMPOS, J. a. G. F.; MOHAMMADI, A. Quasinormal modes in kink excitations and kink–antikink interactions: a toy model. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 5, p. 352, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 103.
- 26 ROMANCZUKIEWICZ, T. Could the primordial radiation be responsible for vanishing of topological defects? *Phys. Lett. B*, v. 773, p. 295–299, 2017. Citado na página 28.
- 27 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 28, 31, 35 e 66.
- 28 M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 43.

- 29 DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. *Solitons: an introduction*. [S.l.]: Cambridge university press, 1989. v. 2. Citado na página 28.
- 30 BELOVA, T. I.; KUDRYAVTSEV, A. E. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.*, v. 40, 1997. [Usp. Fiz. Nauk167,377(1997)]. Citado 3 vezes nas páginas 28, 56 e 101.
- 31 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. J., *Safko, Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2001. Citado na página 31.
- 32 SCOTT, A. C. A nonlinear klein-gordon equation. *American Journal of Physics*, v. 37, n. 1, p. 52–61, 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.1975404>>. Citado na página 32.
- 33 BARONE, A.; ESPOSITO, F.; MAGEE, C.; SCOTT, A. Theory and applications of the sine-gordon equation. *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, Springer, v. 1, n. 2, 1971. Citado na página 32.
- 34 RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 37.
- 35 BOGOMOLNY, E. The stability of classical solutions. *Yad. Fiz.*, v. 24, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- 36 SHIFMAN, M.; YUNG, A. *Supersymmetric Solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Citado na página 39.
- 37 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the t hooft monopole and the julia-zee dyon. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 35, n. 12, p. 760–762, sep 1975. Citado na página 40.
- 38 BAZEIA, D. Defect structures in field theory. In: *13th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields Campos do Jordao, Brazil, January 9-22, 2005*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 121.
- 39 VEGA, H. J. de; SCHAPOSNIK, F. A. Classical vortex solution of the abelian higgs model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 1100–1106, Aug 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.1100>>. Citado na página 40.
- 40 JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 49, 1977. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.49.681>>. Citado na página 41.
- 41 ABLOWITZ, M. J.; KRUSKAL, M. D.; LADIK, J. F. Solitary wave collisions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 36, n. 3, 1979. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/0136033>>. Citado 3 vezes nas páginas 43, 53 e 54.
- 42 KEVREKIDIS, P. G.; GOODMAN, R. H. Four Decades of Kink Interactions in Nonlinear Klein-Gordon Models: A Crucial Typo, Recent Developments and the Challenges Ahead. 9 2019. Citado na página 43.
- 43 TAKYI, I.; WEIGEL, H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 085008, Oct 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.085008>>. Citado na página 43.

- 44 MANTON, N. S.; OLEŚ, K.; ROMAŃCZUKIEWICZ, T.; WERESZCZYŃSKI, A. Kink moduli spaces: Collective coordinates reconsidered. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 103, p. 025024, Jan 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.025024>>. Citado na página 43.
- 45 MANTON, N. S.; OLEŚ, K.; ROMAŃCZUKIEWICZ, T.; WERESZCZYŃSKI, A. Collective coordinate model of kink-antikink collisions in ϕ^4 theory. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 127, p. 071601, Aug 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.071601>>. Citado na página 43.
- 46 BERNASCONI, L. Chaotic soliton dynamics in photoexcited trans-polyacetylene. *The Journal of Physical Chemistry Letters*, v. 6, n. 5, p. 908–912, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/acs.jpclett.5b00159>>. Citado na página 43.
- 47 YAMALETDINOV, R. D.; SLIPKO, V. A.; PERSHIN, Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: A testing ground for the φ^4 field model. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 96, p. 094306, Sep 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.094306>>. Citado na página 43.
- 48 RUBINSTEIN, J. Sine-gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 11, n. 1, 1970. Citado na página 43.
- 49 SCOTT, A.; CHU, F.; MCLAUGHLIN, D. The soliton: A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, v. 61, n. 10, p. 1443–1483, 1973. Citado na página 46.
- 50 PERRING, J. K.; SKYRME, T. H. R. A model unified field equation. In: _____. [s.n.], 1994. p. 216–221. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812795922_0015>. Citado na página 46.
- 51 BISHOP, A. Statistical mechanics of nonlinear dispersive systems. In: BISHOP, A. R.; SCHNEIDER, T. (Ed.). *Solitons and Condensed Matter Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1978. p. 85–103. ISBN 978-3-642-81291-0. Citado na página 50.
- 52 RICE, M.; TIMONEN, J. Insulator-to-metal transition in doped polyacetylene. *Physics Letters A*, v. 73, n. 4, p. 368–370, 1979. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960179905632>>. Citado na página 50.
- 53 DAUXOIS, T.; PEYRARD, M. *Physics of solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 50.
- 54 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 2005. Citado na página 52.
- 55 KUDRYAVTSEV, A. E. Solitonlike solutions for a higgs scalar field. *JETP Lett. (USSR) (Engl. Transl.)*, v. 22, no. 3, pp. 82-83, 8 1975. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/4051808>>. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 56.
- 56 AUBRY, S. A unified approach to the interpretation of displacive and order–disorder systems. ii. displacive systems. *The Journal of Chemical Physics*, v. 64, n. 8, p. 3392–3402, 1976. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.432632>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

- 57 MAKHANKOV, V. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems). *Physics Reports*, v. 35, n. 1, p. 1–128, 1978. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157378900741>>. Citado na página 53.
- 58 KLEIN, R.; HASENFRATZ, W.; THEODORAKOPOULOS, N.; WÜNDERLICH, W. The kink-phonon and the kink-kink interaction in the ϕ^4 model. *Ferroelectrics*, v. 26, n. 1, p. 721–724, 1980. Citado na página 56.
- 59 MOSHIR, M. Soliton-antisoliton scattering and capture in $\lambda\phi^4$ theory. *Nuclear Physics B*, 1981. Citado na página 56.
- 60 GOODMAN, R. H.; HABERMAN, R. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 61.
- 61 PEYRARD, M.; CAMPBELL, D. K. Kink-antikink interactions in a modified sine-gordon model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 9, n. 1, p. 33–51, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 61.
- 62 CAMPBELL, D. K.; PEYRARD, M. Solitary wave collisions revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 18, n. 1, 1986. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278986901612>>. Citado na página 58.
- 63 LOHE, M. A. Soliton structures in $p(\varphi)_2$. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 20, 1979. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.3120>>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.
- 64 P.M., M.; FESHBAACH, H. *Methods of theoretical physics*. New York: McGraw-Hill, 1953. Citado na página 63.
- 65 GANI, V. A.; KUDRYAVTSEV, A. E.; LIZUNOVA, M. A. Kink interactions in the $(1+1)$ -dimensional φ^6 model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 89, 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.125009>>. Citado na página 63.
- 66 SIMAS, F. C.; GOMES, A. R.; NOBREGA, K. Z.; OLIVEIRA, J. Suppression of two-bounce windows in kink-antikink collisions. *JHEP*, 2016. Citado na página 66.
- 67 FEI, Z.; KIVSHAR, Y. S.; VÁZQUEZ, L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 46, 1992. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.46.5214>>. Citado na página 66.
- 68 SIMAS, F.; GOMES, A. R.; NOBREGA, K. Degenerate vacua to vacuumless model and kink–antikink collisions. *Physics Letters B*, v. 775, p. 290–296, 2017. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931730905X>>. Citado na página 66.
- 69 GANI, V. A.; LENSKY, V.; LIZUNOVA, M. A. Kink excitation spectra in the $(1+1)$ -dimensional ϕ^8 model. *J. High Energ. Phys.*, 2015. Citado na página 67.
- 70 BELENDRYASOVA, E.; GANI, V. A. Scattering of the ϕ^8 kinks with power-law asymptotics. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 67, p. 414–426, 2019. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570418302508>>. Citado na página 67.

- 71 KHARE, A.; CHRISTOV, I. C.; SAXENA, A. Successive phase transitions and kink solutions in ϕ^8 , ϕ^{10} , and ϕ^{12} field theories. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 90, p. 023208, Aug 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.023208>>. Citado na página 67.
- 72 BAZEIA, D.; GOMES, A. R.; NOBREGA, K.; SIMAS, F. C. Kink scattering in a hybrid model. *Physics Letters B*, v. 793, p. 26–32, 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931930245X>>. Citado na página 67.
- 73 BAZEIA, D.; GOMES, A. R.; NOBREGA, K. Z.; SIMAS, F. C. Kink scattering in hyperbolic models. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, n. 31, p. 1950200, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X19502002>>. Citado na página 67.
- 74 BAZEIA, D.; BELENDRYASOVA, E.; GANI, V. A. Scattering of kinks of the sinh-deformed φ^4 model. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 4, p. 340, 2018. Citado na página 67.
- 75 DOREY, P.; ROMAŃCZUKIEWICZ, T.; SHNIR, Y. Staccato radiation from the decay of large amplitude oscillons. *Physics Letters B*, v. 806, p. 135497, 2020. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320303014>>. Citado na página 67.
- 76 BAZEIA, D.; GOMES, A. R.; NOBREGA, K.; SIMAS, F. C. Oscillons in hyperbolic models. *Physics Letters B*, v. 803, p. 135291, 2020. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320300952>>. Citado na página 67.
- 77 TOMASZ, R.; SHNIR, Y. Oscillons in the presence of external potential. *JHEP*, v. 01, p. 101, 2018. Citado na página 67.
- 78 HALAVANAU, A.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; SHNIR, Y. Resonance structures in coupled two-component ϕ^4 model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 085027, Oct 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.085027>>. Citado na página 67.
- 79 ALONSO-IZQUIERDO, A. Reflection, transmutation, annihilation, and resonance in two-component kink collisions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 045016, Feb 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.045016>>. Citado na página 67.
- 80 ALONSO-IZQUIERDO, A. Kink dynamics in a system of two coupled scalar fields in two space–time dimensions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 365, p. 12–26, 2018. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278917303159>>. Citado na página 67.
- 81 ALONSO-IZQUIERDO, A. Asymmetric kink scattering in a two-component scalar field theory model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 75, p. 200–219, 2019. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100757041930098X>>. Citado na página 67.

- 82 ALONSO-IZQUIERDO, A. Kink dynamics in the MSTB model. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 94, n. 8, p. 085302, jun 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab1184>>. Citado na página 67.
- 83 MENDONCA, T. S.; OLIVEIRA, H. P. de. The collision of two-kinks defects. *JHEP*, v. 09, p. 120, 2015. Citado na página 67.
- 84 MENDONCA, T. S.; OLIVEIRA, H. P. de. The collision of two-kinks revisited: the creation of kinks and lump-like defects as metastable states. *Braz. J. Phys.*, v. 49, n. 6, p. 914–922, 2019. Citado na página 67.
- 85 ZHONG, Y.; DU, X.-L.; JIANG, Z.-C.; LIU, Y.-X.; WANG, Y.-Q. Collision of two kinks with inner structure. *JHEP*, v. 02, p. 153, 2020. Citado na página 67.
- 86 FEI, Z.; KIVSHAR, Y. S.; VÁZQUEZ, L. Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 45, 1992. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.6019>>. Citado na página 67.
- 87 ADAM, C.; OLES, K.; QUEIRUGA, J. M.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; WERESZCZYNSKI, A. Solvable self-dual impurity models. *JHEP*, v. 07, p. 150, 2019. Citado na página 67.
- 88 LIZUNOVA, M.; KAGER, J.; LANGE, S. de; WEZEL, J. van. Emergence of oscillons in kink-impurity interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 54, n. 31, p. 315701, jul 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac0d36>>. Citado na página 67.
- 89 CAMPOS, J. a. G. F.; MOHAMMADI, A. Fermion transfer in the ϕ^4 model with a half-BPS preserving impurity. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 4, p. 045003, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 119.
- 90 GANI, V. A.; MARJANEH, A. M.; SAADATMAND, D. Multi-kink scattering in the double sine-Gordon model. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 7, p. 620, 2019. Citado na página 67.
- 91 MARJANEH, A. M.; GANI, V. A.; SAADATMAND, D.; DMITRIEV, S. V.; JAVIDAN, K. Multi-kink collisions in the ϕ^6 model. *JHEP*, v. 07, p. 028, 2017. Citado na página 67.
- 92 MARJANEH, A. M.; SAADATMAND, D.; ZHOU, K.; DMITRIEV, S. V.; ZOMORRODIAN, M. E. High energy density in the collision of N kinks in the ϕ^4 model. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v. 49, p. 30, 2017. Citado na página 67.
- 93 OLSEN, O. H.; SAMUELSEN, M. R. Fluxon propagation in long Josephson junctions with external magnetic field. *Journal of Applied Physics*, v. 52, n. 10, p. 6247–6251, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.328567>>. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 69.
- 94 ARTHUR, R.; DOREY, P.; PARINI, R. Breaking integrability at the boundary: the sine-gordon model with robin boundary conditions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 49, n. 16, p. 165205, mar 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/16/165205>>. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 69.
- 95 DOREY, P.; HALAVANAU, A.; MERCER, J.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; SHNIR, Y. Boundary scattering in the ϕ^4 model. *JHEP*, v. 05, p. 107, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 67, 69, 73, 76, 77, 81 e 160.

- 96 LIMA, F. C.; SIMAS, F. C.; NOBREGA, K.; GOMES, A. R. Boundary scattering in the ϕ^6 model. *JHEP*, v. 10, p. 147, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 70.
- 97 SKLYANIN, E. K. Boundary conditions for integrable equations. *Funct. Anal. Appl.*, v. 21, p. 164–166, 1987. Citado na página 69.
- 98 SKLYANIN, E. K. Boundary Conditions for Integrable Quantum Systems. *J. Phys. A*, v. 21, p. 2375–2389, 1988. Citado na página 69.
- 99 TARASOV, V. O. The integrable initial-boundary value problem on a semiline: nonlinear Schrodinger and sine-Gordon equations. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 7, n. 3, p. 435–449, jun 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0266-5611/7/3/009>>. Citado na página 69.
- 100 KHABIBULLIN, I. Integrable initial-boundary-value problems. *Theor Math Phys*, v. 86, p. 28–36, 1991. Citado na página 69.
- 101 KHABIBULLIN, I. Sine-Gordon equation on the semi-axis. *Theor Math Phys*, v. 114, p. 90–98, 1998. Citado na página 69.
- 102 KHABIBULLIN, I. The bäcklund transformation and integrable initial boundary value problems. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, v. 49, p. 418–423, 1991. Citado na página 69.
- 103 TARASOV, V. O. The integrable initial-boundary value problem on a semiline: nonlinear schrodinger and sine-gordon equations. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 7, n. 3, p. 435–449, jun 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0266-5611/7/3/009>>. Citado na página 69.
- 104 GHOSHAL, S.; ZAMOLODCHIKOV, A. Boundary S Matrix And Boundary State In Two-Dimensional Integrable Quantum Field Theory. *International Journal of Modern Physics A*, v. 09, n. 21, p. 3841–3885, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X94001552>>. Citado na página 69.
- 105 GHOSHAL, S. Bound State Boundary S Matrix Of The Sine-Gordon Model. *International Journal of Modern Physics A*, v. 09, n. 27, p. 4801–4810, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X94001941>>. Citado na página 69.
- 106 FENDLEY, P. Kinks in the kondo problem. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 71, p. 2485–2488, Oct 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.2485>>. Citado na página 69.
- 107 OLSEN, O. H.; SAMUELSEN, M. R. Reflection of sine-gordon breathers. *Journal of Applied Physics*, v. 52, n. 4, p. 2913–2917, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.329026>>. Citado na página 69.
- 108 MCLAUGHLIN, D. W.; SCOTT, A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 18, p. 1652–1680, Oct 1978. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.18.1652>>. Citado na página 69.
- 109 MAKI, K.; KUMAR, P. Magnetic solitons in superfluid ^3He . *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 14, 1976. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.14.118>>. Citado na página 101.

- 110 CONDAT, C. A.; GUYER, R. A.; MILLER, M. D. Double sine-gordon chain. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 27, 1983. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.27.474>>. Citado na página 101.
- 111 VOLLHARDT, P. W. D. *The superfluid phases of Helium 3*. [S.l.]: Taylor and Francis, 1990. Citado na página 101.
- 112 DODD, R. K.; BULLOUGH, R. K.; DUCKWORTH, S. Multisoliton solutions of nonlinear dispersive wave equations not soluble by the inverse method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 8, n. 7, 1975. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/8/i=7/a=002>>. Citado na página 101.
- 113 REMOISSENET, M. Non-linear excitations in a compressible chain of dipoles. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 14, n. 11, 1981. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0022-3719/14/i=11/a=011>>. Citado na página 101.
- 114 HUDÁK, O. The double sine-gordon equation: On the nature of internal oscillations of the 2π -kink. *Physics Letters A*, v. 86, n. 4, p. 208–212, 1981. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960181904898>>. Citado na página 101.
- 115 SODANO, P.; EL-BATANOUNY, M.; WILLIS, C. R. Eigenfunctions of the small oscillations about the double-sine-Gordon kink. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 34, p. 4936–4939, Oct 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.34.4936>>. Citado na página 101.
- 116 SALERNO, M.; SAMUELSEN, M. Normal modes in a solitary wave solution to a double sine-Gordon equation. *Physics Letters A*, v. 128, n. 8, p. 424–426, 1988. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960188901223>>. Citado na página 101.
- 117 LOU, S. yue; NI, G. jiong. Deforming some special solutions of the sine-Gordon equation to that of the double sine-Gordon equation. *Physics Letters A*, v. 140, n. 1, p. 33–35, 1989. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960189905422>>. Citado na página 101.
- 118 SALERNO, M.; SAMUELSEN, M. R. Internal oscillation frequencies and anharmonic effects for the double sine-Gordon kink. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 39, p. 4500–4503, Mar 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.39.4500>>. Citado na página 101.
- 119 MAJERNÍKOVÁ, E. Oscillation mode and “nonlinear” radiation of the double sine-Gordon 2π kink. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 49, p. 3360–3367, Apr 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.49.3360>>. Citado na página 101.
- 120 KIVSHAR, Y. S.; PELINOVSKY, D. E.; CRETEGNY, T.; PEYRARD, M. Internal Modes of Solitary Waves. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 5032–5035, Jun 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.5032>>. Citado na página 101.

- 121 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. Defect structures in sine-Gordon like models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 208, n. 3, p. 236–256, 2005. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278905002940>>. Citado 4 vezes nas páginas 101, 102, 103 e 105.
- 122 SHIEFMAN, J.; KUMAR, P. Interaction Between Soliton Pairs In A Double Sine-Gordon Equation. (Talk). *Phys. Scripta*, v. 20, p. 435–439, 1979. Citado na página 101.
- 123 OLSEN, O.; SAMUELSEN, M. Interaction between solitary wave solutions to a double sine-Gordon equation. *Physics Letters A*, v. 80, n. 4, p. 209–212, 1980. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960180900018>>. Citado na página 101.
- 124 OLSEN; SAMUELSEN. Collisions Between Solitary Wave Solutions to a Double Sine-Gordon Equation. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 25, n. 6A, p. 882–884, jun 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0031-8949/25/6a/058>>. Citado na página 101.
- 125 CAMPBELL, D. K.; PEYRARD, M.; SODANO, P. Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 19, n. 2, p. 165–205, 1986. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278986900199>>. Citado na página 101.
- 126 KIVSHAR, Y. S.; MALOMED, B. A. Radiative and inelastic effects in dynamics of double sine-gordon solitons. *Physics Letters A*, v. 122, n. 5, p. 245–248, 1987. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960187908152>>. Citado na página 101.
- 127 RAVELO, R.; EL-BATANOUNY, M.; WILLIS, C. R.; SODANO, P. Dynamics of kink-kink collisions in the double-sine-Gordon system. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 38, p. 4817–4826, Sep 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.38.4817>>. Citado na página 101.
- 128 SALERNO, M. Reduced sine-Gordon breather-(anti)kink dynamics and the double sine-Gordon system. *Physics Letters A*, v. 134, n. 7, p. 421–423, 1989. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960189903630>>. Citado na página 101.
- 129 GANI, V. A.; KUDRYAVTSEV, A. E. Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 60, p. 3305–3309, Sep 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.60.3305>>. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 115.
- 130 POPOV, S. P. Interactions of breathers and kink pairs of the double sine-Gordon equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, v. 54, n. 12, p. 1876–1885, 2014. Citado na página 101.
- 131 ASHCROFT, J.; ETO, M.; HABERICHTER, M.; NITTA, M.; PARANJAPÉ, M. B. Head butting sheep: kink collisions in the presence of false vacua. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 49, n. 36, p. 365203, aug 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/36/365203>>. Citado na página 101.

- 132 HABERICHTER, M.; MACKENZIE, R.; PARANJAPPE, M. B.; UNG, Y. Tunneling decay of false domain walls: The silence of the lambs. *Journal of Mathematical Physics*, v. 57, n. 4, p. 042303, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4947263>>. Citado na página 101.
- 133 GANI, V. A.; MARJANEH, A. M.; ASKARI, A.; BELENDRYASOVA, E.; SAADATMAND, D. Scattering of the double sine-Gordon kinks. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 4, p. 345, 2018. Citado na página 101.
- 134 SIMAS, F. C.; LIMA, F. C.; NOBREGA, K. Z.; GOMES, A. R. Solitary oscillations and multiple antikink-kink pairs in the double sine-Gordon model. *JHEP*, v. 12, p. 143, 2020. Citado na página 101.
- 135 ROMANCZUKIEWICZ, T.; SHNIR, Y. Oscillon Resonances and Creation of Kinks in Particle Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 081601, Aug 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.081601>>. Citado na página 107.
- 136 MANTON, N. S.; MERABET, H. kinks - gradient flow and dynamics. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 10, n. 1, p. 3–18, jan 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0951-7715/10/1/002>>. Citado 2 vezes nas páginas 112 e 113.
- 137 AVELAR, A. T.; BAZEIA, D.; CARDOSO, W. B.; LOSANO, L. Lump-like Structures in Scalar-field Models. *Phys. Lett. A*, v. 374, p. 222–227, 2009. Citado na página 119.
- 138 BAZEIA, D.; MARQUES, M. A.; MENEZES, R. Compact Lumps. *EPL*, v. 111, n. 6, p. 61002, 2015. Citado na página 119.
- 139 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; OLMO, G. J. Novel connection between lump-like structures and quantum mechanics. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 133, n. 7, p. 251, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 119, 121 e 124.
- 140 MARQUES, M. A. Novel lump-like structures. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 125, n. 1, p. 11001, jan 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/125/11001>>. Citado na página 119.
- 141 NGUYEN, J. H.; DYKE, P.; LUO, D.; MALOMED, B. A.; HULET, R. G. Collisions of matter-wave solitons. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 12, p. 918–922, 2014. Citado na página 119.
- 142 AVELAR, A. T.; BAZEIA, D.; CARDOSO, W. B. Solitons with cubic and quintic nonlinearities modulated in space and time. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 79, p. 025602, Feb 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.79.025602>>. Citado na página 119.
- 143 FRIEMAN, J. A.; GELMINI, G. B.; GLEISER, M.; KOLB, E. W. Primordial origin of nontopological solitons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 60, p. 2101–2104, May 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.2101>>. Citado na página 119.
- 144 GRIEST, K.; KOLB, E. W. Solitosynthesis: Cosmological evolution of nontopological solitons. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 40, p. 3231–3240, Nov 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.3231>>. Citado na página 119.

- 145 FRIEMAN, J. A.; OLINTO, A. V.; GLEISER, M.; ALCOCK, C. Cosmic evolution of nontopological solitons. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 40, p. 3241–3251, Nov 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.3241>>. Citado na página 119.
- 146 MACPHERSON, A. L.; CAMPBELL, B. A. Biased discrete symmetry breaking and fermi balls. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 347, n. 3-4, p. 205–210, 1995. Citado na página 119.
- 147 MIELKE, E. W.; PÉREZ, J. A. V. Toroidal halos in a nontopological soliton model of dark matter. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 75, p. 043504, Feb 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.043504>>. Citado na página 119.
- 148 PONTÓN, E.; BAI, Y.; JAIN, B. Electroweak symmetric dark matter balls. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 9, p. 1–47, 2019. Citado na página 119.
- 149 LIU, J.-G. Collisions between lump and soliton solutions. *Applied Mathematics Letters*, v. 92, p. 184–189, 2019. ISSN 0893-9659. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965919300266>>. Citado na página 119.
- 150 LIMA, F. C.; SIMAS, F. C.; NOBREGA, K.; GOMES, A. R. Scattering of metastable lumps in a model with a false vacuum. *Physics Letters B*, v. 822, p. 136707, 2021. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026932100647X>>. Citado na página 119.
- 151 ALLEN, M. P.; TILDESLEY, D. J. *Computer simulation of liquids*. [S.l.]: Oxford university press, 2017. Citado na página 154.
- 152 OMELIAN, I.; MRYGLOD, I.; FOLK, R. Optimized forest–ruth- and suzuki-like algorithms for integration of motion in many-body systems. *Computer Physics Communications*, v. 146, n. 2, p. 188–202, 2002. ISSN 0010-4655. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465502004514>>. Citado na página 154.
- 153 YOSHIDA, H. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, v. 150, n. 5, p. 262–268, 1990. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960190900923>>. Citado 2 vezes nas páginas 154 e 155.
- 154 FOREST, E.; RUTH, R. D. Fourth-order symplectic integration. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 43, n. 1, p. 105–117, 1990. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090019L>>. Citado na página 154.
- 155 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014. Citado na página 159.

Apêndices

APÊNDICE A – Diferenças Finitas Centrais e Integrador Simplético

A.1 Discretização central de 4ª ordem

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $a \leq x \leq b$. Podemos discretizar x em N partes $[a, a+h, \dots, a+(N-1)h, b]$, sendo h o passo de discretização. Suponha que queiramos obter a derivada primeira de $f(x)$ através de dois pontos imediatamente anteriores e dois imediatamente posteriores a um ponto x . Isto é,

$$\frac{df(x)}{dx} \approx c_1 f(x-2h) + c_2 f(x-h) + c_3 f(x) + c_4 f(x+h) + c_5 f(x+2h). \quad (\text{A.1})$$

Para obter esta derivada, devemos conhecer cada um dos 5 coeficientes. É razoável que tenhamos também cinco equações para que este problema seja solucionado. Podemos expandir cada termo da Eq. A.1 em torno de x , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_1 f(x-2h) \approx c_1 \left[f(x) + \frac{(-2h)^1}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{(-2h)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{(-2h)^3}{3!} f^{(3)}(x) \right. \\ \left. + \frac{(-2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(-2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

com $f^{(j)} = \frac{d^j f(x)}{dx^j}$. Prosseguindo,

$$\begin{aligned} c_2 f(x-h) \approx c_2 \left[f(x) + \frac{(-h)^1}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{(-h)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{(-h)^3}{3!} f^{(3)}(x) \right. \\ \left. + \frac{(-h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(-h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$c_3 f(x+0 \cdot h) = c_3 f(x), \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} c_4 f(x+h) \approx c_4 \left[f(x) + \frac{(h)^1}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{(h)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{(h)^3}{3!} f^{(3)}(x) \right. \\ \left. + \frac{(h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(h)^5}{5!} f^{(5)}(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} c_5 f(x+2h) \approx c_5 \left[f(x) + \frac{(2h)^1}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(x) \right. \\ \left. + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Após substituir essas expansões em (A.1), chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= 0 \\ \frac{h}{1!} [-2c_1 - c_2 + c_4 + 2c_5] \frac{df(x)}{dx} &= \frac{df(x)}{dx} \\ 4c_1 + c_2 + c_4 + 4c_5 &= 0 \\ -8c_1 - c_2 + c_4 - 8c_5 &= 0 \\ 16c_1 + c_2 + c_4 + 16c_5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \frac{1!}{h^1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

O sistema é finalmente resolvido se conhecemos a inversa da matriz do sistema. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{h^1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1! \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

que resulta em: $c_1 = 1/12h$, $c_2 = -8/12h$, $c_3 = 0$, $c_4 = 8/12h$ e $c_5 = -1/12h$. Substituindo na Eq. (A.1), temos a derivada primeira com acurácia de 4^a ordem para o esquema de discretização central, que é dada por:

$$\left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{4^a} = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo o mesmo procedimento para obter a derivada segunda, vemos que a Eq. (A.8) se torna agora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \frac{2!}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

E agora os coeficientes são: $c_1 = \frac{-1}{12h^2}$, $c_2 = \frac{16}{12h^2}$, $c_3 = \frac{-30}{12h^2}$, $c_4 = \frac{16}{12h^2}$ e $c_5 = \frac{-1}{12h^2}$

A.2 Diferenças Finitas Centrais de ordem n

De forma geral, podemos expressar a m -ésima derivada de $f(x)$ através do esquema de discretização central com n pontos precedentes e n pontos posteriores a x , sendo $m \leq 2n$.

$$\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m} \right) \approx c_1 f(x-nh) + c_2 f(x-(n-1)h) + \dots + c_{n+1} f(x) + \dots + c_{2n} f(x+(n-1)h) + f(x+nh). \quad (\text{A.12})$$

Seguindo os passos descritos acima chegamos a um sistema de $2n+1$ equações

$$\begin{bmatrix} (-n)^0 & (-n+1)^0 & \dots & (n-1)^0 & n^0 \\ (-n)^1 & (-n+1)^1 & \dots & (n-1)^1 & n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-n)^{2n-1} & (-n+1)^{2n-1} & \dots & (n-1)^{2n-1} & n^{2n-1} \\ (-n)^{2n} & (-n+1)^{2n} & \dots & (n-1)^{2n} & n^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2n} \\ c_{2n+1} \end{bmatrix} = \frac{m!}{h^m} [\delta_{km}]_{(2n+1) \times 1} \quad (\text{A.13})$$

com $k = 0, 1, \dots, 2n$. A solução para os $2n + 1$ coeficientes é dada como na Eq. (A.9),

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2n} \\ c_{2n+1} \end{bmatrix} = \frac{m!}{h^m} \begin{bmatrix} (-n)^0 & (-n+1)^0 & \cdots & (n-1)^0 & n^0 \\ (-n)^1 & (-n+1)^1 & \cdots & (n-1)^1 & n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-n)^{2n-1} & (-n+1)^{2n-1} & \cdots & (n-1)^{2n-1} & n^{2n-1} \\ (-n)^{2n} & (-n+1)^{2n} & \cdots & (n-1)^{2n} & n^{2n} \end{bmatrix}^{-1} [\delta_{km}]_{(2n+1) \times 1}. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Integração Simplética

A integração simplética é um esquema numérico para sistemas Hamiltonianos. Uma característica do método de integração simplética é a possibilidade de reversão temporal. Se tornou relevante para a evolução, por exemplo, da dinâmica molecular com muitos corpos, situação onde o tradicional método Runge-Kutta exige passos temporais pequenos, o que torna o esforço computacional menos eficiente [151, 152]. Haruo Yoshida apresentou uma abordagem alternativa para a construção de um integrador simplético de qualquer ordem par [153]. A seguir, mostramos a abordagem proposta por Neri, Forest e Ruth [154]. Em seguida, mostramos a proposta de Yoshida para a construção de integradores de ordens maiores que quatro.

Seja o seguinte Hamiltoniano

$$H = T(p) + V(q). \quad (\text{A.15})$$

Sabemos que a evolução de uma variável dinâmica $z(q, p)$ é dada por:

$$\dot{z} = \{z, H(z)\}, \quad (\text{A.16})$$

onde as chaves representam os parênteses de Poisson, $\{F, G\} = F_q G_p - F_p G_q$. Introduzindo a representação $D_G F = \{F, G\}$, podemos escrever que

$$\dot{z} = D_H z. \quad (\text{A.17})$$

A solução desta equação no intervalo $0 \leq t \leq \tau$ é:

$$z(t) = [\exp \tau \hat{D}_H] z(0). \quad (\text{A.18})$$

Para um Hamiltoniano com a forma de (A.15), podemos considerar que $\hat{D}_H = \hat{A} + \hat{B}$, com o operador $\hat{A}$ representando a parte cinética e $\hat{B}$ o termo de potencial. Com $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sendo não comutativos. A evolução de z fica

$$z(\tau) = \exp[\tau(\hat{A} + \hat{B})] z(0). \quad (\text{A.19})$$

Para um dado inteiro n , que foi chamado de ordem do integrador, deve-se encontrar um conjunto de números reais $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ e $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ tais que a diferença

$$\exp[\tau(\hat{A} + \hat{B})] - \left[\exp(c_1\tau\hat{A}) \exp(d_1\tau\hat{B}) \exp(c_2\tau\hat{A}) \times \exp(d_2\tau\hat{B}) \times \dots \right. \\ \left. \times \exp(c_k\tau\hat{A}) \times \exp(d_k\tau\hat{B}) \right], \quad (\text{A.20})$$

seja da ordem de τ^{n+1} . Ou seja,

$$\exp[\tau(\hat{A} + \hat{B})] = \prod_{i=1}^k \exp(c_i\tau\hat{A}) \exp(d_i\tau\hat{B}) + \mathcal{O}(\tau^{n+1}). \quad (\text{A.21})$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 8x + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 4x + 35 \\ \Rightarrow x = 7 \quad (\text{A.22})$$

O objetivo desta abordagem é encontrar os coeficientes (c_i, d_i) com $(i = 1, 2, \dots, k)$ para uma dada ordem n . Uma forma de encontrar tais coeficientes é expandir o lado esquerdo de (A.21) em potências de τ e em seguida igualar com os coeficientes da expansão no lado direito. Os coeficientes encontrados são usados no seguinte mapeamento simplético

$$q_i = q_{i-1} + \tau c_i \frac{\partial T}{\partial p}(p_{i-1}), \quad (\text{A.23})$$

$$p_i = p_{i-1} - \tau d_i \frac{\partial V}{\partial q}(q_i). \quad (\text{A.24})$$

Por exemplo, para $n = 1$, tem-se que

$$\exp[\tau(\hat{A} + \hat{B})] = \exp(c_1\tau\hat{A}) \exp(d_1\tau\hat{B}) + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (\text{A.25})$$

Cuja solução é a trivial, $c_1 = 1$ e $d_1 = 1$. Para $n = 2$

$$\exp[\tau(\hat{A} + \hat{B})] = \exp(c_1\tau\hat{A}) \exp(d_1\tau\hat{B}) \exp(c_2\tau\hat{A}) + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (\text{A.26})$$

A solução encontrada, nessa ordem, é $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = 1$ e $d_2 = 0$. De modo que o integrador simplético de segunda ordem tem a seguinte forma:

$$\hat{S}_{2a}(\tau) = \exp\left(\frac{1}{2}\tau\hat{A}\right) \exp(\tau\hat{B}) \exp\left(\frac{1}{2}\tau\hat{A}\right). \quad (\text{A.27})$$

Utilizando esta abordagem, Neri encontrou os coeficientes para um integrador simplético até a quarta ordem (referência [6] do artigo [153]). Para $n > 4$, a tarefa de encontrar os coeficientes se torna muito trabalhosa.

Yoshida obteve os integradores de ordem superior através do produto simétrico de integradores de ordem inferior e utilizando a formula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH).

Por exemplo, o integrador simplético de 4^a ordem pode ser obtido a partir da repetição simétrica do integrador de 2^a ordem. Ou seja,

$$\hat{S}_{4^a}(\tau) = \hat{S}_{2^a}(x_1\tau)\hat{S}_{2^a}(x_0\tau)\hat{S}_{2^a}(x_1\tau), \quad (\text{A.28})$$

onde x_1 e x_0 são números reais a serem determinados.

O integrador simplético de 6^a ordem é obtido pela repetição simétrica de $\hat{S}_{4^a}(\tau)$

$$\hat{S}_{6^a}(\tau) = \hat{S}_{4^a}(y_1\tau)\hat{S}_{4^a}(y_0\tau)\hat{S}_{4^a}(y_1\tau). \quad (\text{A.29})$$

APÊNDICE B – Força Estática entre *kink-antikink* e *antikink-borda*

B.1 Modelo ϕ^4

B.1.1 Força estática na interação *kink-antikink*

Vamos calcular a força para uma configuração estática consistindo de um *antikink* ϕ_1 , cujo o centro está em $x = -a$, e um *kink* ϕ_2 com o centro em $x = a$, sendo $a > 0$. Seguimos as referências [7, 11].

A força é definida como a variação temporal do momento do campo, equação (2.34). Para um campo escalar com dinâmica padrão em um intervalo limitado $(-\infty, b]$, temos que o momento é dado por:

$$P_1 = - \int T_{01} dx = - \int_{-\infty}^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx. \quad (\text{B.1})$$

Então, a força é dada por:

$$F = \dot{P} = - \int_{-\infty}^b \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dx. \quad (\text{B.2})$$

Usando a equação de movimento para substituir $\ddot{\phi}(x)$, e também com as igualdades

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{B.3})$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{B.4})$$

temos que a expressão (B.2) se torna

$$F = - \int_{-\infty}^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{-\infty}^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{-\infty}^b \frac{dV}{dx} dx. \quad (\text{B.5})$$

Integrando a diferencial total, obtemos

$$F = \left[- \frac{1}{2} \left((\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \right) + V(\phi) \right]_{-\infty}^b. \quad (\text{B.6})$$

Então, podemos interpretar a força como a diferença de pressão nos extremos de integração. Ou seja, $F = -T_{11} \Big|_{-\infty}^b$.

A configuração estática do nosso interesse é dada por

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) + 1,$$

sendo

$$\phi_1(x) = -\tanh(x + a)$$

e

$$\phi_2(x) = \tanh(x - a),$$

assim a equação (B.6) se torna

$$F = \left[-\frac{1}{2} (\partial_x(\phi_1 + \phi_2 + 1))^2 + V(\phi_1 + \phi_2 + 1) \right]_{-\infty}^b. \quad (\text{B.7})$$

O ponto b deve estar situado entre o *antikink* e o *kink* e suficientemente longe de ambos, de tal forma que podemos considerar $-a \ll b \ll a$. Assim, durante todo o intervalo de integração temos que $\phi_2 + 1 \rightarrow 0$. Então podemos linearizar em torno desta combinação. Fazendo assim e também expandindo $V(\phi)$ em torno de ϕ_1 , obtemos da equação acima

$$F = \left[-\frac{1}{2}(\partial_x\phi_1)^2 - (\partial_x\phi_1)(\partial_x\phi_2) + V(\phi_1) + (1 + \phi_2) \frac{dV}{d\phi} \right]_{\phi=\phi_1}^b \Big|_{-\infty}. \quad (\text{B.8})$$

Devido à equação BPS, o primeiro e terceiro termo se anulam entre si. Com isso temos que

$$F = \left[-(\partial_x\phi_1)(\partial_x\phi_2) + (1 + \phi_2)(\partial_{xx}\phi_1) \right]_{-\infty}^b, \quad (\text{B.9})$$

onde também usamos a versão estática da equação de movimento para substituir o último termo.

Vamos analisar a contribuição dos limites de integração. Dado o perfil inicial, vemos que o limite inferior não contribui na expressão (B.9), pois a derivada primeira e segunda são nulas no infinito. Em relação ao limite superior, considerando a seguinte série [155]

$$\tanh(x - a) = -1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2(1+k)(x+a)}, \quad (\text{B.10})$$

e lembrando que b está longe do *kink* e do *antikink*, observa-se que em b haverá somente o comportamento assintótico de ϕ_1 e ϕ_2 . Assim, o primeiro termo da série (B.10) é suficiente para representar a contribuição do limite superior, que é dada por

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= -\tanh(x + a) \sim -1 + 2e^{-2(x+a)}, \\ \phi_2(x) &= \tanh(x - a) \sim -1 + 2e^{2(x-a)}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo as expressões acima com suas respectivas derivadas na expressão (B.9), obtemos a força entre o *antikink* e *kink*

$$F = 32e^{-2R}, \quad (\text{B.12})$$

onde $R = 2a$ é a separação entre o *kink* e *antikink*.

B.1.2 Força de interação entre *antikink* e Solução-borda

Estamos agora em condições de obter a força de interação entre uma solução *kink/antikink* e uma solução-borda que atende a condição $\partial_x\phi = H$ em $x = 0$. Consideremos

o mesmo cenário descrito em [95]. Inicialmente temos um *antikink* localizado em $x = x_0 < 0$ e adicionamos uma espécie de *kink* “imagem” em $x = x_1 > 0$. O perfil estático dessa configuração é:

$$\phi(x) = -\tanh(x - x_0) + \tanh(x - x_1) + 1. \quad (\text{B.13})$$

De acordo com a equação (B.12), a força para essa configuração é

$$F = 32e^{-2(x_1 - x_0)}. \quad (\text{B.14})$$

Pelas mesmas considerações feitas na seção anterior, vamos considerar o comportamento assintótico do perfil

$$\phi(x) \sim \left(-1 + 2e^{-2(x-x_0)}\right) + \left(-1 + 2e^{2(x-x_1)}\right) + 1, \quad (\text{B.15})$$

onde agora a forma assintótica acima vale se escolhermos $|x_1|, |x_0| \gg 1$.

O perfil (B.13) e sua forma assintótica devem satisfazer a condição de contorno de Neumann (4.1). Dessa forma, aplicando essa condição à (B.15), temos

$$H = -4e^{2x_0} + 4e^{-2x_1},$$

de onde vemos que

$$e^{-2x_1} = \frac{1}{4}H + e^{2x_0}. \quad (\text{B.16})$$

Substituindo a relação acima na equação (B.14), obtemos uma expressão para a força em termos do campo H e de x_0

$$F = 32 \left(\frac{1}{4}H + e^{2x_0} \right) e^{2x_0}. \quad (\text{B.17})$$

B.2 Modelo ϕ^6

B.2.1 Força entre *kinks*.

Vamos agora calcular a força entre um *kink* e um *antikink* do modelo ϕ^6 . Novamente, eles devem estar bem separados. O nosso ponto de partida é a expressão para a força, dada pela equação (B.6), ou seja

$$F = \left[-\frac{1}{2} \left((\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \right) + V(\phi) \right]_{-\infty}^b, \quad (\text{B.18})$$

onde $V(\phi)$ é agora o potencial do modelo ϕ^6 . A configuração de perfil inicial é a seguinte: colocamos um *antikink* do tipo $\phi_{(1,0)}$ em uma posição $x = -a$ e colocamos um *kink* do tipo $\phi_{(0,1)}$ em uma posição $x = a$

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), \quad (\text{B.19})$$

sendo

$$\phi_1(x) = \phi_{(1,0)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2} [1 - \tanh(x+a)]} \quad (\text{B.20})$$

e

$$\phi_2(x) = \phi_{(0,1)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \tanh(x-a)]}. \quad (\text{B.21})$$

Substituindo o perfil (B.19) na equação (B.18), obtemos

$$F = \left[-\frac{1}{2} \left((\partial_x \phi_1)^2 + (\partial_x \phi_2)^2 \right)^2 + V(\phi_1 + \phi_2) \right]_{-\infty}^b.$$

Novamente escolhemos o ponto b longe de ambos *antikink* $\phi_1(x)$ e *kink* $\phi_2(x)$. Dessa forma agora percebemos que durante todo o intervalo de integração ocorre que $\phi_2(x) \rightarrow 0$, logo nesse intervalo esse campo pode ser adequadamente descrito considerando-se apenas termos lineares. Novamente, expandimos $V(\phi)$ em torno de $\phi_1(x)$. Obtemos então a seguinte expressão

$$F = \left[-\frac{1}{2} (\partial_x \phi_1)^2 - \partial_x \phi_1 \partial_x \phi_2 + V(\phi_1) + \phi_2 \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_1} \right]_{-\infty}^b,$$

que em se tratando de solução da equação de primeira ordem se reduz a

$$F = \left[-\partial_x \phi_1 \partial_x \phi_2 + \phi_2 \partial_{xx} \phi_1 \right]_{-\infty}^b. \quad (\text{B.22})$$

Vamos analisar a contribuição dos limites de integração. Através do perfil inicial, vemos que o limite inferior não contribui na expressão (B.22), pois novamente a derivada primeira e segunda são nulas no infinito. Em relação ao limite superior, temos que em b o comportamento de $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ será assintótico. A forma assintótica no presente caso, se reduz a

$$\phi_1(x) \sim \sqrt{\frac{1 + (-1 + 2e^{-2(x+a)})}{2}} = e^{-(x+a)}, \quad (\text{B.23})$$

$$\phi_2(x) \sim \sqrt{\frac{1 + (-1 + 2e^{2(x-a)})}{2}} = e^{(x-a)}. \quad (\text{B.24})$$

Assim, após calcular as derivadas de (B.23) e (B.24) para substituir em (B.22), obtemos a expressão para a força entre dois *kinks* no potencial ϕ^6

$$F = 2e^{-R}, \quad (\text{B.25})$$

onde novamente, $R = 2a$ é a separação entre *kink* e *antikink*.

B.2.2 Força entre o *kink* e a Fronteira

Agora vamos repetir os passos que fizemos na seção B.1.2 para o caso de um *kink* do modelo ϕ^6 . Assim, inicialmente temos um *antikink* localizado em $x = x_0 < 0$ e adicionamos um *kink* “imagem” em $x = x_1 > 0$. O perfil estático dessa configuração é:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2} [1 - \tanh(x - x_0)]} + \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \tanh(x - x_1)]}. \quad (\text{B.26})$$

De acordo com a equação (B.25), a força para essa configuração fica

$$F = 2e^{-(x_1 - x_0)}. \quad (\text{B.27})$$

No ponto no qual a força foi calculada, apenas o comportamento assintótico do perfil é relevante. O comportamento assintótico é dado por:

$$\phi(x) \sim e^{-(x - x_0)} + e^{(x - x_1)}. \quad (\text{B.28})$$

Esse perfil deve satisfazer a condição de Neumann

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = H.$$

Então, a partir da derivada do perfil em $x = 0$, obtemos que

$$H = e^{-x_1} - e^{x_0},$$

de onde temos a seguinte relação

$$e^{-x_1} = H + e^{x_0}. \quad (\text{B.29})$$

Substituindo essa relação na equação da força, (B.27), obtemos a força estática de interação entre um *antikink* e a solução-borda em termos de H e da posição do *antikink*:

$$F = (H + e^{x_0}) e^{x_0}. \quad (\text{B.30})$$