

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA - PPGEE**

Jadyna Ayres Rodrigues

**Estimação Adaptativa de Estados Baseada na
Família de Algoritmos LMS em Espaço de
Estados (SSLMS)**

**São Luís, MA
2022**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA - PPGEE

**Estimação Adaptativa de Estados Baseada na
Família de Algoritmos LMS em Espaço de
Estados (SSLMS)**

Autor: Jadya Ayres Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza

São Luís, MA

2022

Jadyna Ayres Rodrigues

Estimação Adaptativa de Estados Baseada na Família de Algoritmos LMS em Espaço de Estados (SSLMS)

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia elétrica na área de concentração de Automação e Controle.

Data da aprovação: São Luís, MA, 14 de Fevereiro de 2022.

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza - UFMA
Orientador

Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto - UFMA
Membro da Banca Examinadora

Prof. Dr. Walbermark Marques dos Santos - UFES
Membro da Banca Examinadora

São Luís, MA
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ayres Rodrigues, Jadya.

Estimação Adaptativa de Estados Baseada na Família de Algoritmos LMS em Espaço de Estados SSLMS / Jadya Ayres Rodrigues. - 2022.

112 p.

Orientador(a): Francisco das Chagas de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2022.

1. Algoritmo SSLMS. 2. Espaço de estado. 3. Estimação de estado. 4. Filtros adaptativo. I. das Chagas de Souza, Francisco. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais essa conquista, fazendo-me alcançar todas as etapas deste trabalho.

Agradeço à Maria Ayres e Jorge Rodrigues, minha amada mãe e pai, respectivamente, e a todos da minha família pelo apoio desde o início de minha vida acadêmica.

Também quero agradecer ao Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza pela orientação focada, direcionada e acima de tudo, incentivadora. Agradecer pelos conselhos motivacionais, os quais nos fazem crescer como pessoa e, principalmente, como pesquisador.

Ao Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto e ao Prof. Dr. Welbermark Marques pelas suas participações na Banca Examinadora e por suas valorosas sugestões.

À Universidade Federal do Maranhão por proporcionar toda a sua estrutura e pessoal, inclusive ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade.

Agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, à Maria Ayres, minha amada mãe e a todos os meus familiares e amigos, que me acompanharam nessa minha trajetória.

*"O futuro pertence àqueles que acreditam na beleza de seus sonhos."
(Desconhecido)*

Resumo

Através de algumas técnicas de estimação, pode-se estimar uma quantidade de interesse desconhecida, com base em um conjunto de dados medidos ou possivelmente corrompidos por ruído de medição, sendo a qualidade dessa estimativa avaliada pela proximidade com o valor verdadeiro. A filtragem usa observações presentes e passadas para produzir uma estimativa atual da quantidade desconhecida. A estrutura em espaço de estado permite trabalhar com a dinâmica do sistema, como o algoritmo LMS (*Least-Mean Square*) em espaço de estado SSLMS (*State Space Least-Mean Square*) que gera um vetor de estado estimado, sendo uma possível solução ao problema de estimação. O SSLMS supera a capacidade de rastreamento do LMS padrão, a qual é limitada devido à suposição de modelo de regressão linear. Ao superar essa restrição, o SSLMS exhibe uma melhoria acentuada no desempenho do rastreamento em relação ao LMS padrão e suas variantes conhecidas. Partindo desse princípio, propõem-se neste trabalho nova variante do filtro adaptativo da família do LMS em espaço de estado para estimação das variáveis de estado. O método proposto, denominado algoritmo do tipo ZA-LMS (*Zero-Attracting LMS*) é comparado com os demais algoritmos da literatura para avaliação de desempenho em termos de velocidade de convergência e capacidade de rastreamento.

Palavras-chave: Algoritmo SSLMS, algoritmo em espaço de estado, estimação de estado, espaço de estado, filtros adaptativo.

Abstract

Through some estimation techniques, an unknown quantity of interest can be estimated, based on a set of measured data or possibly corrupted by measurement noise, being the quality of this estimate evaluated by its proximity to the true value. Filtering uses present and past observations to produce a current estimate of the unknown quantity. The structure in state space allows working with the dynamics of the system, as the algorithm LMS (*Least-Mean Square*) in state space SSLMS (*State Space Least -Mean Square*) that generates an estimated state vector, being a possible solution to the estimation problem. SSLMS outperform the tracking capability of the standard LMS, which is limited due to the assumption of linear regression model. By overcoming this constraint, SSLMS exhibits a marked improvement in tracking performance over the standard LMS and its known variants. Based on this principle, this work proposes a new variant of the adaptive filter of the LMS family in state space for estimating state variables. The proposed method, called ZA-LMS algorithm (*Zero-Attracting LMS*) is compared with other algorithms in the literature to evaluate performance in terms of convergence speed and tracking capacity.

Keywords: SSLMS algorithm, state space algorithm, state estimation, state space, adaptive filters.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Estrutura de um Estimador de Estado.	19
Figura 2.1 – Diagrama de blocos de um sistema simplificado. $u(t)$ corresponde ao sinal de entrada do sistema. Por consequência, há um sinal $y(t)$ gerado na saída.	25
Figura 2.2 – Um sistema linear qualquer em espaço de estados representado em diagrama de blocos em tempo contínuo.	27
Figura 2.3 – Diagrama de blocos de um sistema qualquer em espaço de estados em tempo discreto.	27
Figura 2.4 – Representação do circuito elétrico em que se deseja obter os estados.	33
Figura 2.5 – Representação do circuito elétrico com estados medidos.	33
Figura 2.6 – O instante k corresponde ao instante da estimação dos estados, o instante k_f corresponde ao instante final que compreende todas as medições disponíveis, a área com traços diagonais corresponde à medições utilizadas para estimação e a área total de cada retângulo corresponde à todas as medições disponíveis.	34
Figura 2.7 – Representação em diagrama de blocos de um sistema com controle de realimentação.	36
Figura 2.8 – Representação em diagrama de blocos de um observador de estado.	38
Figura 2.9 – Representação em diagrama de blocos de um observador de estado.	38
Figura 2.10 – Servomecanismo DC de velocidade.	41
Figura 2.11 – Evolução de $x_1(k)$	43
Figura 2.12 – Evolução de $x_2(k)$	43
Figura 2.13 – Evolução de $x_3(k)$	44
Figura 2.14 – Evolução de $y(k)$	44
Figura 2.15 – Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador sem ruído.	45
Figura 2.16 – Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador sem ruído.	45
Figura 2.17 – Métrica $e_{3,k}$ da estimação feita pelo observador sem ruído.	46
Figura 2.18 – Representação da implementação do sistema com observador em simulink sem ruído.	46
Figura 2.19 – Realização do ruído de observação w	48
Figura 2.20 – Realização do ruído de medição v	48
Figura 2.21 – Realização com ruído no estado x_1	49
Figura 2.22 – Realização com ruído no estado x_2	49
Figura 2.23 – Realização com ruído no estado x_3	50
Figura 2.24 – Realização com ruído na saída y	50
Figura 2.25 – Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador com ruído.	51

Figura 2.26–Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador com ruído.	51
Figura 2.27–Métrica $e_{3,k}$ da estimação feita pelo observador com ruído.	52
Figura 2.28–Representação da implementação do sistema com observador em simu- link com ruído.	52
Figura 2.29–Representação da implementação do sistema com observador em Simu- link sem ruído.	53
Figura 2.30–Representação da implementação do sistema com observador em Simu- link sem ruído.	53
Figura 2.31–Estado x_1 real e estimado pelo observador.	54
Figura 2.32–Estado x_2 real e estimado pelo observador.	54
Figura 2.33–Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador.	55
Figura 2.34–Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador.	55
Figura 3.1 – Esquema de Filtragem Adaptativa.	57
Figura 3.2 – Esquema de identificação de sistema.	58
Figura 3.3 – Esquema de equalização de canal.	59
Figura 3.4 – Esquema de predição de sinal.	60
Figura 3.5 – Esquema de cancelamento de ruído.	61
Figura 3.6 – Comportamento de rastreamento e estado estacionário de filtros adap- tativos de 16 ordens, acionados por sinal de entrada branco.	73
Figura 3.7 – Comportamento de rastreamento e estado estacionário de filtros adap- tativos de 16 ordens, acionados por sinal de entrada branco.	73
Figura 3.8 – Evolução do peso w_1	74
Figura 3.9 – Evolução do peso w_5	74
Figura 3.10–Evolução do peso w_7	75
Figura 3.11–Evolução do peso w_{10}	75
Figura 3.12–Evolução do peso w_{15}	76
Figura 4.1 – Filtro Transversal Adaptativo.	79
Figura 4.1 – Evolução dos estados x_1, x_2, x_3 e x_4	89
Figura 4.2 – Observação y_1, y_2	90
Figura 4.3 – Erro quadrático médio e^2_1, e^2_2	91
Figura 4.3 – Erro de estimação de uma senoide para SSLMS, SSNLMS, LMS e NLMS.	94
Figura 4.4 – Análise do MSD do algoritmo proposto em diferentes condições de es- parsidade.	95
Figura 4.4 – Comportamento dos coeficiente $w_1, w_5, w_7, w_{10}, w_{15}$	97
Figura A.1–Descrição gráfica de sequências aleatórias.	106

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Erro de estimação individual dos estados, equação (2.26)	87
Tabela 4.2 – Raiz do erro quadrático médio equação (2.28)	87
Tabela 4.3 – Erro quadrático global equação (2.29)	87

Lista de algoritmos

Algoritmo 3.1 – LMS no tempo discreto	64
Algoritmo 3.2 – NLMS em tempo discreto	66
Algoritmo 3.3 – ZA-LMS em tempo discreto	68
Algoritmo 3.4 – RZA-LMS em tempo discreto	69
Algoritmo 4.1 – SSLMS em tempo discreto	83
Algoritmo 4.2 – SSLMS em tempo discreto	84
Algoritmo 4.3 – SSZA-LMS em tempo discreto	86

Lista de abreviaturas e siglas

FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
LMS	<i>Least-Mean Square</i>
MSE	<i>Mea Square Error</i>
MSD	<i>Mean Square Deviation</i>
NLMS	<i>Normalized Least-Mean Square</i>
RZA-LMS	<i>Reweighted Zero-Attractor Least-Mean Square</i>
SSLMS	<i>State Space Least-Mean Square</i>
SSNLMS	<i>State Space Normalized Least-Mean Square</i>
SSZA-LMS	<i>State Space Zero-Attracting Least-Mean Square</i>
ZA-LMS	<i>Zero-Attracting Least-Mean Square</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Observador de Estado	17
1.2	Histórico da Estimação	19
1.3	Abordagem Clássica para Estimação de Estados	20
1.4	Abordagem Baseada em Espaço de Estado	21
1.5	Motivação	21
1.6	Objetivos	23
1.6.1	Objetivo Geral	23
1.6.2	Objetivos Específicos	23
1.6.3	Trabalho Publicado	23
1.6.4	Organização da Dissertação	24
2	GENERALIDADES	25
2.1	Representação do Sistema em Espaço de Estados	25
2.1.1	Sistemas Lineares	26
2.1.2	Sistemas Não Lineares	28
2.1.3	Sistemas Não Lineares com Ruído Aditivo	29
2.2	Linearização de Sistemas Não Lineares	29
2.3	Discretização	30
2.4	Ruído Branco	31
2.5	Estimador de Estado	32
2.6	Índice de Desempenho	34
2.7	Observadores de Estados	35
2.7.1	Realimentação de Estados	35
2.7.2	Observador de Estado com Realimentação	36
2.7.3	Princípio da Separação	37
2.7.4	Observador com Referência Não Nula	39
2.7.5	Aplicações	40
2.7.6	Exemplo sem Ruído	41
2.7.7	Discretização do Sistema	42
2.7.8	Exemplo com Ruído	46
2.7.9	Exemplo 2	50
3	TEORIA DE FILTRAGEM ADAPTATIVOS	56
3.1	Introdução à Filtragem	56
3.1.1	Identificação de Sistema	58

3.1.2	Equalização de Canal	59
3.1.3	Predição de Sinal	60
3.1.4	Cancelamento de Ruído	61
3.1.5	Plantas Esparsas	62
3.2	Algoritmos Adaptativos da Família LMS	62
3.2.1	Algoritmo LMS	62
3.2.2	Algoritmo NLMS	63
3.3	Algoritmos Adaptativos da Família Atrator para Zero	66
3.3.1	Algoritmo ZA-LMS	66
3.3.2	Algoritmo RZA-LMS	68
3.3.3	Condição de Convergência do ZA-LMS	69
3.3.4	Simulações Numéricas	72
4	ALGORITMO ADAPTATIVO EM ESPAÇO DE ESTADO	77
4.1	Analogia do LMS padrão com o SSLMS	78
4.2	Algoritmos em Espaço de Estado	79
4.2.1	Modelo em Espaço de Estado	80
4.2.2	Estimação de Estado	80
4.2.3	Ganho dos Algoritmos em Espaço de Estado	81
4.3	Algoritmo Proposto	84
4.4	Simulações Numéricas	86
4.4.1	Motor	86
4.4.2	Senoide	92
4.4.3	Identificação	94
5	CONCLUSÃO	99
5.1	Considerações finais	99
5.1.1	Propostas de Trabalhos Futuros	100
	REFERÊNCIAS	101
A	PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	105
B	DISTRIBUIÇÃO EM PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	107
C	ESTATÍSTICAS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS	108
D	ORTOGONALIDADE E DESCORRELAÇÃO	110

E	ESTACIONARIEDADE EM SENTIDO ESTRITO E SENTIDO AM- PLO	111
F	ERGOCIDADE	112

1 Introdução

Os termos, “estimador” ou “filtro”, são comumente usados para se referir a um sistema projetado, com o interesse de extrair informações sobre uma quantidade de interesse prescrita a partir de dados ruidosos. A teoria da estimação encontra aplicações em diversos campos: comunicações, radar, sonar, navegação, sismologia, engenharia biomédica e engenharia financeira (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.19).

A filtragem é um dispositivo que mapeia seu sinal de entrada para outro sinal de saída facilitando a extração da informação desejada contida no sinal de entrada, processando os sinais em tempo discreto representados no formato digital.

Pesquisas significativas foram realizadas para desenvolver algoritmos adaptativos eficazes, em uma tentativa de melhorar suas propriedades gerais em termos de convergência, capacidade de rastreamento, desajuste de estado estacionário, robustez, ou custo computacional (ARENAS-GARCIA et al., 2015).

Entre os vários métodos de estimativa historicamente utilizados, o método de mínimos quadrados recebeu considerável atenção, onde foram usados para resolver problema de estimativa e rastreamento. Gauss em 1795, foi o pioneiro a utilizar o método de mínimos quadrados, para estudar o movimento dos corpos celestes, embora tenha sido publicado pela primeira vez por Legendre em 1805 (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.38)(KAILATH, 1974).

Os primeiros estudos de estimativa de mínimos quadrados em processos estocásticos foram feitos por Kolmogorov, Kerin e Wiener. O trabalho de Wiener era independente do trabalho de Kolmogorov e Kerin. Wiener trabalhou no problema de previsão linear em tempo contínuo e forneceu uma fórmula explícita para o preditor ideal (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.38-39). O problema de estimar um processo corrompido pelo ruído aditivo também foi considerado por Wiener. Posteriormente, Levinson deu uma contrapartida em tempo discreto do problema de filtragem da Wiener (KAILATH, 1974).

Kalman propôs a solução para o problema de filtragem linear na estrutura de espaço de estados. O filtro de Kalman foi usado com sucesso em várias aplicações (BROWN; HWANG, 1997)(KAY, 1993, p.419). Uma dificuldade prática enfrentada na implementação de filtros ótimos é a exigência de informações *a priori* sobre as estatísticas dos dados. Esta informação *a priori* pode não estar disponível em certos casos. Geralmente os algoritmos baseados em modelo de estimativa (como o filtro Kalman e sua família) têm melhor desempenho que os algoritmos que não baseia-se no modelo de espaço de estados (como a família do LMS), devido a informações adicionais disponíveis na dinâmica do sistema (que pode ser usada para fornecer o modelo de espaço de estado) (HAYKIN; PRABHAKAR,

2014, p.22)(KAY, 1993, p.1) (KAILATH, 1974)(AHMED; MOINUDDIN; AL-SAGGAF, 2018).

Uma versão generalizada do algoritmo LMS, foi desenvolvido por Mohammad Bilal Malik e proposto com diferentes análises (MALIK, 2004a) (MALIK, 2004b) (MALIK; BHATTI, 2004)(MALIK; SALMAN, 2008). O filtro, denominado SSLMS (*State Space Least-Mean Square*), incorpora um modelo linear de espaço de estado variável no tempo do ambiente subjacente.

A versão (SS) é derivada como um estimador de estado com base em medições no qual está presente um ruído de medição. A derivação inclui ambos estimadores de estado atual e previsto. Os algoritmos de mínimos quadrados médios em espaço de estado (SSLMS) e mínimos quadrados médios normalizados em espaço de estado (SSNLMS) têm apresentado bons resultados, conforme verificado na literatura científica, para diversas aplicações.

O algoritmo ZA-LMS é derivado através da combinação de uma penalidade da norma l_1 nos coeficientes da função quadrática de custo do LMS, gerando um atrator para zero na iteração do LMS. O atrator para zero promove escassez durante o processo de filtragem e, portanto, acelera a convergência ao identificar sistemas esparsos (CHEN; GU; HERO, 2009). Neste contexto, a ideia central deste trabalho de pesquisa é desenvolver um novo algoritmo do tipo ZA-LMS (*Zero-Attracting LMS*) construído em torno da estrutura de espaço de estados (SS), com o objetivo de estimar os estados de um sistema.

A seguir serão abordados assuntos relevantes para situar o leitor sobre a temática apresentada nesse trabalho.

1.1 Observador de Estado

Um observador de estado ou estimador de estado é um sistema que fornece uma estimativa do estado interno de um determinado sistema real com base nas medições de entrada e saída do sistema real. Geralmente é implementado por um computador e fornece a base para muitas aplicações práticas.

Um sistema é composto por entradas e saídas, podendo ser interrelacionadas de acordo com um conjunto de regras. Para analisar esse sistema, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas, bem como recorrer aos computadores para a maioria dos processamentos necessários na análise. A abordagem com base no espaço de estados é a mais apropriada para analisar o sistema sob esse ponto de vista (OGATA; YANG, 2010, p.1).

A ideia de espaço de estado vem do método de variável de estado para descrever equações diferenciais. Neste método, as equações diferenciais que descrevem um sistema dinâmico são organizadas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem no vetor de estados do sistema e a solução é visualizada como uma trajetória desse vetor

em espaço de estado (FRANKLIN et al., 214, p.434).

Todo sistema linear contínuo com parâmetros concentrados pode ser descrito por um conjunto de equações da forma (CHEN, 1998, p.9)

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (1.2)$$

onde $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$ e $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado. Para um sistema com a saída da planta $y \in \mathfrak{R}^q$, com entrada de controle $u \in \mathfrak{R}^m$ e as matrizes do sistema $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ (CHEN, 1998, p.10). A Equação (1.1) representa a equação de estados e contém informações passadas do sistema e a Equação (1.2) representa a equação de saída, formado pela entrada e o conjunto de estados.

Existem muitos procedimentos analíticos para projeto de controle, que são baseados na suposição de que o vetor de estado completo está disponível para medição (LUENBERGER, 1979, p.300). Esses procedimentos especificam o valor da entrada atual como uma função do valor atual do vetor de estados, ou seja, o controle é uma função estática do estado. Matematicamente, é claro, há boas razões para esse tipo de especificação de controle.

O sistema evolui de acordo com suas equações do vetor de estados e, portanto, influencia o comportamento futuro, que é baseado no valor atual do estado. O vetor de estados é muito útil para monitoramento dos sistemas e também para implementar técnicas de controle, como controle por realimentação de estados.

A Equação (1.1) torna possível encontrar os valores dos estados para qualquer t caso o estado inicial $x(0)$ esteja disponível. Entretanto, isto nem sempre ocorre (LUENBERGER, 1979, p.302-303). Porém na prática, novos problemas podem surgir como:

- O vetor de estados pode não está disponível para medição. Em muitos sistemas físicos, por exemplo, as medições requerem o uso de equipamentos com custos elevados e com baixa precisão ao medir todas as variáveis de estado (LUENBERGER, 1979, p.300).
- Em grandes sistemas sociais ou econômicos, as medições podem exigir pesquisas extensas ou procedimentos complexos de manutenção de registros. E, em alguns sistemas, certos componentes do vetor de estados correspondem a variáveis internas inacessíveis, que não podem ser medidas (LUENBERGER, 1979, p.300).

Quando não é possível utilizar a Equação (1.1) e nem as medições para a obtenção dos estados, há a alternativa dos estimadores de estados.

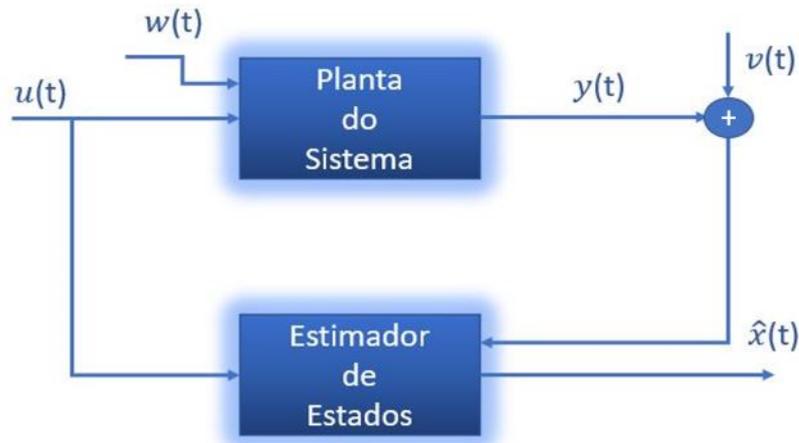


Figura 1.1 – Estrutura de um Estimador de Estado.

Neste caso, projeta-se um dispositivo chamado estimador de estado ou observador de estado para que a saída do dispositivo gere uma estimativa de estado. Os únicos dados disponíveis são a entrada $u(t)$, a saída $y(t)$, e os ruídos gaussianos brancos de processo e medição $w(t)$ e $v(t)$, respectivamente, com estatísticas conhecidas.

O estimador utilizará os sinais da entrada e da saída, as informações das estatísticas dos ruídos e o modelo do sistema para realizar a estimação de estado. Uma estrutura de estimação de estado é apresentada na Figura 1.1.

1.2 Histórico da Estimação

O primeiro método para formar um estimador ótimo a partir de dados ruidosos surgiu em 1795, conhecido como método dos mínimos quadrados, sendo sua descoberta atribuída a Carl Friedrich Gauss. A existência inevitável dos erros de medição havia sido reconhecida desde a época de Galileu; no entanto, este foi o primeiro método formal para lidar com tais erros.

Embora seja mais comumente usado para problemas de estimativa linear, Gauss utilizou o método dos mínimos quadrados primeiramente para um problema de estimativa não linear na área de astronomia, visando estimar as órbitas dos planetas. Este foi o primeiro método de estimação que satisfazia uma condição de otimalidade (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.6-7).

O método dos mínimos quadrados tinha sido descoberto de forma independente e publicado por Andrien-Marie Legendre na França e Robert Adrian nos Estados Unidos. Havia também sido descoberto e usado antes de Gauss nascer pelo físico alemão-suíço Johann Heinrich Lambert (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.8).

Nos primeiros anos da segunda guerra Mundial, Wiener esteve envolvido em um

projeto militar de um controlador automático para direcionar armas antiaéreas com informações do radar. Com a alta velocidade dos aviões, necessitava-se prever a trajetória das aeronaves para atingir o alvo; assim, o sistema deveria “disparar no futuro”, ou seja, o controlador tinha que prever o curso futuro de seu alvo usando dados de rastreamento do radar ruidoso (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.13).

Na derivação de um estimador ótimo, Wiener utilizou medidas de probabilidade em espaços funcionais para representar dinâmicas incertas. Derivou a solução para o erro de previsão baseada mínimo quadrado médio em termos das funções de autocorrelação do sinal e do ruído. Sua solução está na forma de um operador integrador que pode ser implementado através de filtros analógicos.

Uma derivação análoga do preditor linear ideal para sistemas de tempo discreto foi publicada por Kolmogorov em 1941 (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.8) de forma independente quando Wiener estava apenas concluindo seu trabalho no preditor de tempo contínuo. O trabalho de Wiener foi publicado em um relatório intitulado “*Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*”. O título foi posteriormente abreviado para “*Time series*”.

Em 1958, o Escritório de Pesquisa Científica da Força Aérea americana (RIAS - *Research Institute for Advanced Studies*) financiava Kalman e Bucy para pesquisas avançadas em estimativa e controle, semelhante aos trabalhos de Wiener e Kolmogorov, porém com a suposição adicional de dimensionalidade finita. Kalman conseguiu derivar o filtro de Wiener-Kolmogorov na forma de espaço de estados, surgindo assim o que é denominado filtro de Kalman. O filtro de Kalman é considerado a maior conquista na teoria de estimação do século XX (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.14-17).

1.3 Abordagem Clássica para Estimação de Estados

No projeto clássico do observador, a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$ são utilizadas para estimar o estado. O estimador de estado apresenta a seguinte forma (QAYYUM; SALMAN; MALIK, 2019),

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)u(k) + \mathbf{Q}(k)(y(k) - \bar{y}(k)), \quad \bar{\mathbf{x}}(k_0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (1.3a)$$

$$\bar{y}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (1.3b)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}(k)$ representa a estimativa de predição, $\mathbf{Q}(k)$ é a matriz de ganho do observador que geralmente é obtida usando métodos de projeto baseados em um Gramiano de observabilidade, projeto \mathcal{H}_∞ , projeto ótimo, filtro de Kalman, filtros adaptativos, etc., nos quais o ganho resultante é baseado no esquecimento exponencial das medições passadas (tal estimador é adequado nos casos em que todas as medições são consideradas) (QAYYUM; SALMAN; MALIK, 2019).

1.4 Abordagem Baseada em Espaço de Estado

Inspiradas na estrutura de espaço de estado do filtro de Kalman, a generalização do LMS e RLS tem sido obtida na forma de SSLMS em Malik e Salman (2008) e SSRLS por Malik (2004a) e Malik (2004b), usando o modelo em espaço de estado do ambiente subjacente e algumas variantes. Provou-se que os algoritmos SSLMS e SSRLS apresentam maiores taxas de convergência e desempenho de rastreamento superior em relação às abordagens clássicas existentes, além da capacidade de lidar com sistemas MIMO (*Multiple Input-Multiple Output*) (QAYYUM; SALMAN; MALIK, 2019).

A ideia é gerar um vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ usando as observações da saída $y(1), y(2), y(3) \cdots y(k)$, assumindo-se que as observações $y(k)$ são medidas a partir do instante $k = 1$ e o vetor de estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ é desconhecido. A hipótese de observabilidade do par $(\mathbf{A}(k), \mathbf{C}(k))$ permite projetar um estimador de estado. O modelo do sistema dinâmico (caracterizado pelas matrizes do sistema) permite calcular uma predição da estimativa do estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ no tempo k (usando observações até no instante $k - 1$) da seguinte maneira (MALIK; SALMAN, 2008):

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1), \quad (1.4)$$

sendo o erro de predição da saída definido como

$$\varepsilon(k) = y(k) - \bar{y}(k), \quad (1.5)$$

onde

$$\bar{y}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (1.6)$$

é a predição da saída. Também, pode-se definir o erro de estimação de saída como

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k), \quad (1.7)$$

em que $\hat{y}(k) = \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)$ é a estimativa da saída. Uma das formas conhecidas de estimador é

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\varepsilon(k), \quad (1.8)$$

onde $\mathbf{K}(k)$ é o ganho do observador (MALIK; SALMAN, 2008). Utiliza-se no trabalho de pesquisa a formulação em espaço de estado para o desenvolvimento de novas variantes dos filtros adaptativos da família do LMS em espaço de estado. Serão propostas novas técnicas para otimizar a escolha dos parâmetros dos algoritmos SSLMS, bem como o desenvolvimento de um novo filtro adaptativo em espaço de estado baseado no algoritmo do tipo ZA-LMS.

1.5 Motivação

O problema de estimação de uma quantidade desconhecida de interesse é frequentemente encontrado em várias disciplinas de engenharia. Com base em um conjunto de

dados medido (possivelmente corrompido pelo ruído da observação), uma estimativa da quantidade desconhecida é obtida usando alguma técnica de estimação (SALMAN, 2009, p.1). A qualidade da estimativa é avaliada pela proximidade com o valor real (verdadeiro), em algum sentido estatístico.

Neste trabalho, propõem-se um algoritmo adaptativo de estimação computacionalmente leve, porém eficaz, baseado no modelo de espaço de estados (SALMAN, 2009, p.1), (AHMED; MOINUDDIN; AL-SAGGAF, 2014). Com base em informações sobre a dinâmica do sistema, suas entradas e saídas, pode-se projetar um estimador de estado (observador). Este conceito foi proposto inicialmente por Luenberger (LUENBERGER, 1964), (LUENBERGER, 1971).

A abordagem adaptativa pode apresentar alguns problemas de estabilidade, devido a sua natureza recursiva que deve ser tratada como um problema específico. No entanto, a estabilidade é garantida se o observador se basear em um conjunto finito de entradas e saídas do sistema (receding horizon). Neste sentido, uma técnica de projeto de observador de horizonte retrocedente é introduzida para sistemas de tempo discreto em comparação com as técnicas padrão de observador (QAYYUM; SALMAN; MALIK, 2019).

A representação em espaço de estados é composta por dois modelos: o modelo de processo e o modelo de medição. Nesta representação, o estado do sistema descreve os aspectos subjacentes do mesmo, os quais permitem a previsão do comportamento do sistema durante um determinado período de tempo (BJAILI; MOINUDDIN; RUSHDI, 2019).

As Equações que representam o modelo definido em espaço de estados, em tempo discreto, permitem calcular o estado no instante k , sendo dadas por

$$x(k+1) = \mathbf{A}(k)x(k) + \mathbf{B}(k)u(k), \quad x(0) = x_0 \quad (1.9a)$$

$$y(k) = \mathbf{C}(k)x(k) + v(k) \quad (1.9b)$$

onde $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída da planta. As matrizes do sistema $\mathbf{A}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}(\cdot) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ são consideradas conhecidas e determinísticas. Além disso, supõem-se que a saída está corrompida por um ruído de observação inacessível $v(k) \in \mathbb{R}^q$. No processo de estimação, assume-se que o par de matrizes ($\mathbf{A}(k)$ e $\mathbf{C}(k)$) seja observável (RUGH, 1996, p.383).

A matriz de transição de estado do sistema é dada como:

$$\mathbf{A}(k, j) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\cdots\mathbf{A}(j), & k > j \\ \mathbf{I}, & k = j \end{cases} \quad (1.10)$$

a qual possui as seguintes propriedades (RUGH, 1996, p.392-396).

$$\mathbf{A}^{-1}(k, j) = \mathbf{A}(j, k), \quad \forall k, j \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{A}(k, i) = \mathbf{A}(k, j)\mathbf{A}(j, i), \quad i \leq j \leq k \quad (1.11b)$$

$$\mathbf{A}(k + 1, k) = \mathbf{A}(k) \quad (1.11c)$$

onde $i, j, k \in \mathbb{Z}$. As expressões acima assumem a inversibilidade de $\mathbf{A}(k)$.

1.6 Objetivos

Os objetivos deste projeto de pesquisa estão classificados em gerais e específicos. Desta forma, distinguem-se pontos a serem alcançados para que sejam logrados fins mais abrangentes.

1.6.1 Objetivo Geral

Propor um novo algoritmo do tipo ZA-LMS para estimação em espaço de estado, comparando-o com os algoritmos baseados nesta estrutura existentes na literatura.

1.6.2 Objetivos Específicos

- Avaliar o desempenho do algoritmo de rastreamento quanto ao modelo de espaço de estado que é comparado com o desempenho dos algoritmos de rastreamento presentes na literatura;
- Aplicar o algoritmo proposto para estimação de estado de um motor síncrono não linear;
- Avaliar o algoritmo SSZA-LMS em planta esparsa, aplicando-o em identificação de sistemas;
- Comparar o desempenho da técnica de estimação proposta com outras presentes na literatura.

1.6.3 Trabalho Publicado

A publicação produzida no decorrer desta pesquisa é apresentada a seguir:

- RODRIGUES, J. A.; FERNANDES, T.; S SOUZA, F. C. Estimação de estado baseada nos algoritmos LMS em espaço de estado. XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2021). Ouro Preto - MG, Brasil.

1.6.4 Organização da Dissertação

Este trabalho de pesquisa está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: Este capítulo tem por objetivo apresentar ao leitor os fundamentos deste trabalho, abrangendo os assuntos básicos da área de automação, como sistemas em espaço de estados, até assuntos mais complexos, como processos estocásticos. Além disso, uma das técnicas mais simples em estimação é abordada: o observador de estados. Para avaliação das técnicas apresentadas no decorrer desta dissertação, índices de desempenho são apresentados neste capítulo.
- Capítulo 3: Apresenta-se uma abordagem sobre a filtragem adaptativa, dando ênfase aos algoritmos da família LMS e aos algoritmos adaptativos da família atrator para zero. São abordados problemas práticos que envolvem filtros adaptativos. Por fim, são apresentadas simulações numéricas para os filtros adaptativos analisados neste capítulo.
- Capítulo 4: Este capítulo apresenta uma discussão do modelo de espaço de estado, além de propor novos algoritmos em espaço de estados e aplicações.
- Capítulo 5: Apresenta-se as conclusões deste trabalho de pesquisa, além de possíveis implementações e técnicas para trabalhos futuros.

2 Generalidades

Neste capítulo, apresentam-se definições e teorias básicas fornecidas ao leitor a fim de situá-lo para a compreensão dos capítulos consecutivos. Dentre os itens presentes neste capítulo estão: a classificação de sistemas dinâmicos, representação em espaço de estados, métodos de discretização e linearização de sistemas, processos estocásticos, ruído branco, estimadores de estados e, além disso, a teoria básica dos observadores de estados.

2.1 Representação do Sistema em Espaço de Estados

Um sinal, como o termo indica, é um conjunto de informações ou dados. Os sinais podem ser processados posteriormente por sistemas, que podem modificá-los ao extrair informações adicionais deles. Assim, um sistema processa um conjunto de sinais (entradas) para produzir outro conjunto de sinais (saídas) (LATHI; GREEN, 1998, p.51).

Os sistemas podem ser feitos de componentes físicos, como em sistemas elétricos, mecânicos ou hidráulicos (realização de hardware) ou pode ser um algoritmo que calcula uma saída de um sinal interno (realização de software). O estudo analítico de sistemas físicos consiste em quatro partes: modelagem, desenvolvimento de descrições matemáticas, análise e design (LATHI; GREEN, 1998, p.51).

Uma vez que um sistema (ou modelo) é selecionado para um sistema físico, a próxima etapa é desenvolver equações matemáticas expressas para descrever o sistemas, as quais são construídas com base no conhecimento em áreas específicas e em algumas medições (CHEN, 1998, p.1).



Figura 2.1 – Diagrama de blocos de um sistema simplificado. $u(t)$ corresponde ao sinal de entrada do sistema. Por consequência, há um sinal $y(t)$ gerado na saída.

O modelo de espaço de estados é uma forma de representação matemática expressa através das regras de um sistema. Esta representação utiliza equações diferenciais lineares ou não lineares de primeira ordem para representar sistemas dinâmicos (sistemas em que suas saídas atuais dependem de valores passados da entrada (LUENBERGER, 1979, p.90-95), (LATHI; GREEN, 1998, p.84)).

Os sistemas de espaço de estados podem ser representados no domínio do tempo

contínuo ou no domínio do tempo discreto (SIMON, 2006a, p.3). Nas subseções subsequentes, encontra-se a representação de um sistema em espaço de estados. Os modelos matemáticos dos sistemas considerados nesta dissertação já estão disponíveis em espaço de estado.

2.1.1 Sistemas Lineares

Muitos processos podem ser descritos por sistemas de espaço de estado. Isso inclui processos em engenharia, economia, física, química, biologia e muitas outras áreas. Se for possível derivar um modelo matemático para um processo, então pode-se utilizar as ferramentas da matemática para controlar o processo e obter informações sobre o processo (SIMON, 2006a, p.18).

É por isso que os sistemas de espaço de estado são tão importantes para os engenheiros. Pode-se deduzir os valores de todas as saídas futuras do sistema, através do estado de um sistema no momento presente, e todas as entradas presentes e futuras, então deduz-se os valores de todas as saídas futuras do sistema (SIMON, 2006a, p.18).

Os modelos de espaço de estado geralmente podem ser divididos em modelos lineares e modelos não lineares. Embora a maioria dos processos reais seja não linear, as ferramentas matemáticas disponíveis para estimativa e controle são muito mais acessíveis e bem compreendidas para sistemas lineares (SIMON, 2006a, p.18).

A representação básica para sistemas lineares em espaço de estado é dada pelas equações

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)u(t) \quad (2.1)$$

e

$$y(t) = \mathbf{C}(t)x(t) + \mathbf{D}(t)u(t), \quad (2.2)$$

onde o vetor $x(t)$, de dimensão $n \times 1$, é chamado vetor de estado e seus componentes, $x_1(t), \dots, x_n(t)$, são as variáveis de estado. Os sinais de entrada e saída são $u(t)$ e $y(t)$, com dimensões $m \times 1$ e $p \times 1$, respectivamente. Em (2.1) e (2.2), as matrizes de coeficientes $\mathbf{A}(n \times n)$, $\mathbf{B}(n \times m)$, $\mathbf{C}(p \times n)$ e $\mathbf{D}(p \times m)$ são funções contínuas, com valor real definidas para todos $t \in (-\infty, \infty)$. A terminologia padrão é que (2.1) e (2.2) é um sistema invariante no tempo se essas matrizes forem constantes. Caso contrário, o sistema é dito ser variante no tempo (RUGH, 1996).

Normalmente, em problemas de engenharia, há um tempo inicial fixo t_0 e propriedades da solução $x(t)$ de uma equação de estado linear para determinado estado inicial $x(t_0) = x_0$ e o sinal de entrada $u(t)$ especificado para $t \in (t_0, \infty)$. (RUGH, 1996). O estado $x(t)$, por sua vez, é um vetor que armazena toda a informação do sistema até o instante atual.

Outra definição, dada por Simon (SIMON, 2006a, p.21), caracteriza o estado como variáveis que provêm uma completa representação das condições internas do sistema em

um determinado instante de tempo. Em Chen (1998, p.6), o estado $\mathbf{x}(t_0)$ de um sistema no instante t_0 é a informação que, juntamente com a entrada $\mathbf{u}(t), t \geq t_0$, determina unicamente a saída, $\mathbf{y}(t)$ para todo $t \geq t_0$.

Representa-se o sistema linear modelado em espaço de estados através de diagramas de blocos como na Figura 2.2.

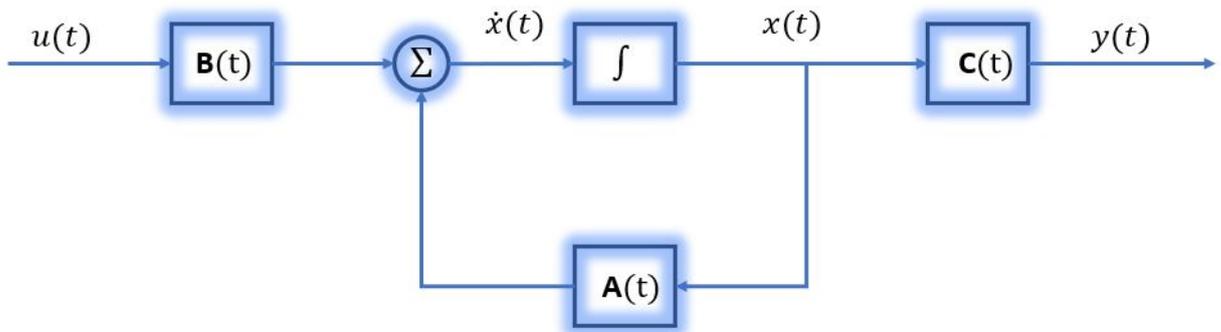


Figura 2.2 – Um sistema linear qualquer em espaço de estados representado em diagrama de blocos em tempo contínuo.

O sistema é considerado contínuo quando as entradas e saídas do sistema são sinais contínuos. As Equações (2.1) e (2.2), representam sistemas contínuo. Já no sistema discreto, as entradas e saídas são sinais discretos, sendo representado por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \tag{2.3}$$

e

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k), \tag{2.4}$$

onde o índice k indica o instante de tempo discreto. Visualiza-se a representação em diagrama de blocos do sistema em tempo discreto na Figura 2.3.

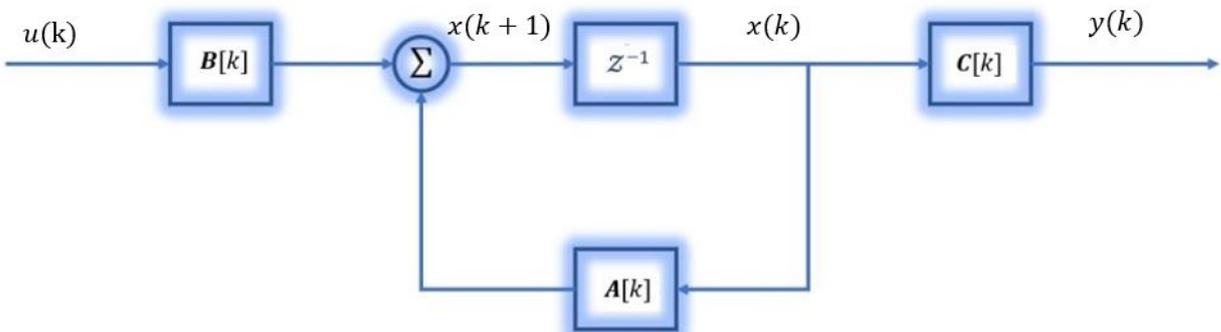


Figura 2.3 – Diagrama de blocos de um sistema qualquer em espaço de estados em tempo discreto.

Outra forma de se classificar um sistema está relacionada à quantidade de entradas e saídas, a qual é dada da seguinte forma:

- SISO - Uma entrada e uma saída (*single input single output*);
- MISO - Múltiplas entradas e uma saída (*multiple input single output*);
- SIMO - Uma entrada e múltiplas saídas (*single input multiple output*);
- MIMO - Múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multiple input multiple output*).

Além das classificações apresentadas nesta seção, há várias outras formas de classificação de sistemas, as quais podem ser estudadas em (CHEN, 1998, p.5-17), (LATHI; GREEN, 1998, p.79).

2.1.2 Sistemas Não Lineares

Toda a nossa discussão até este ponto considerou filtros lineares para sistemas lineares. Tais sistemas lineares não existem na prática. Todos os sistemas são basicamente não lineares. No entanto, muitos sistemas são próximos o suficiente do linear para que as abordagens de estimativa linear forneçam resultados satisfatórios. Mas “perto o suficiente” só pode ser levado até certo ponto. Eventualmente, encontra-se um sistema que não se comporta linearmente, mesmo em uma pequena faixa de operação, e nossas abordagens lineares para estimativa não fornecem mais bons resultados. Nesse caso, explora-se os estimadores não lineares (SIMON, 2006a, p.395).

A análise de sistemas não lineares é em alguns aspectos semelhante à de sistemas lineares, mas em outros aspectos é bastante diferente. A semelhança deriva do fato de que uma das principais técnicas de análise de sistemas não lineares é aproximar ou vinculá-los por sistemas lineares apropriados e, então, usar a teoria linear (LUENBERGER, 1979, p.316).

As diferenças derivam do fato de que tipos inteiramente novos de comportamento podem surgir em sistemas não lineares, em comparação com sistemas lineares. A análise também é diferente porque soluções explícitas raramente estão disponíveis para sistemas não lineares e, portanto, as características comportamentais devem ser inferidas por métodos mais sutis apropriados e, então, usar a teoria linear (LUENBERGER, 1979, p.316).

A representação de um sistema não linear não é mais apresentada de forma matricial; ao invés disso, a representação corresponde a um conjunto de equações e é dada por (LUENBERGER, 1979, p.316-317), (KAILATH, 1980, p.59)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.5)$$

e

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (2.6)$$

onde \mathbf{f} corresponde ao conjunto de funções não lineares de estado e \mathbf{h} corresponde ao conjunto de equações não lineares de saída. A representação para o caso discreto é semelhante

e dada por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad (2.7)$$

e

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k). \quad (2.8)$$

2.1.3 Sistemas Não Lineares com Ruído Aditivo

Os sinais utilizados no sistema em alguns casos podem ter característica estatística (quando os valores do sinal não podem ser preditos precisamente, mas são conhecidos através de descrições probabilísticas (LATHI; GREEN, 1998, p.60)), o que leva a necessidade de empregar variáveis estocásticas nas representações em espaços de estados. Para tais casos, o modelo do sistema é dado por (LEWIS; XIE; POPA, 2008, p.263)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{w}(t) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{v}(t). \quad (2.10)$$

O ruído $w(t)$ é denominado ruído de processo enquanto que o ruído $v(t)$ é denominado ruído de medição (PROHMANN et al., 2018, p.23).

Para o caso discreto, as equações têm o índice t alterado para o índice discreto k , resultando em

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) + \mathbf{w}(k) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) + \mathbf{v}(k). \quad (2.12)$$

Os sinais não são realmente estocásticos, na maioria das vezes. Nestes casos, os ruídos são utilizados para representar as incertezas da modelagem do sistema (SÄRKKÄ, 2013, p.1),(PROHMANN et al., 2018, p.23).

2.2 Linearização de Sistemas Não Lineares

A maioria dos sistemas físicos são não lineares e variam no tempo. Alguns deles podem ser descritos pela equação diferencial não linear da forma (2.1) e (2.2). Algumas equações não lineares, no entanto, podem ser aproximadas por equações lineares sob certas condições. Suponha que para alguma função de entrada $u_0(t)$ e algum estado inicial, $x_0(t)$ seja a solução de (2.1) e (2.2), isso é (CHEN, 1998, p.18)

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_o(t), \mathbf{u}_o(t), t). \quad (2.13)$$

Agora suponha que a entrada seja levemente perturbada para se tornar $u_o(t) + \bar{u}(t)$

e o estado inicial também seja apenas levemente perturbado. Para algumas equações não lineares, a solução correspondente pode diferir de $x_o(t)$ apenas levemente ¹(CHEN, 1998, p.18). Nesse caso, a solução pode ser expressa como $x_o(t) + \bar{x}(t)$ com $\bar{x}(t)$ pequeno para todo t . Sob esta suposição, pode-se expandir (2.1) e (2.2) como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_o(t) + \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_o(t) + \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}_o(t) + \bar{\mathbf{u}}(t), t) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_o(t), \mathbf{u}_o(t), t) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} + \dots\end{aligned}\quad (2.14)$$

onde, para $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ h_3]'$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]'$ e $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]'$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &:= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} := \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial x_1 & \partial h_1 / \partial x_2 & \partial h_1 / \partial x_3 \\ \partial h_2 / \partial x_1 & \partial h_2 / \partial x_2 & \partial h_2 / \partial x_3 \\ \partial h_3 / \partial x_1 & \partial h_3 / \partial x_2 & \partial h_3 / \partial x_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}(t) &:= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} := \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial u_1 & \partial h_1 / \partial u_2 \\ \partial h_2 / \partial u_1 & \partial h_2 / \partial u_2 \\ \partial h_3 / \partial u_1 & \partial h_3 / \partial u_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

denominados de Jacobianos. Porque \mathbf{A} e \mathbf{B} são calculados ao longo das duas funções de tempo $\mathbf{x}_o(t)$ e $\mathbf{u}_o(t)$ são, em geral funções de t . Usando (2.13) e negligenciando as potências superiores de $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ (CHEN, 1998, p.18). Reduz-se (2.14) para

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\bar{\mathbf{u}}(t). \quad (2.15)$$

Esta é uma equação de espaço de estado linear. A equação $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ pode ser linearizada de forma semelhante. Esta técnica de linearização é frequentemente usada na prática para obter equações lineares (CHEN, 1998, p.18).

2.3 Discretização

Considere a equação do estado de tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (2.16)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (2.17)$$

a discretização deste sistema contínuo pode ser feita aproximando a derivada de \dot{x} (CHEN, 1998, p.90)

¹ Isso não é verdade em geral. Para algumas equações não lineares, uma diferença muito pequena nos estados iniciais gerará soluções completamente diferentes, gerando o fenômeno do caos.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} \quad (2.18)$$

T representa o período de amostragem. Aproxima-se (2.16) como

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(t)T + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)T. \quad (2.19)$$

Se calcula-se $x(t)$ e $y(t)$ apenas em $t = kT$ para $k = 0, 1, \dots$, então (2.19) e (2.17) se tornarão

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= (\mathbf{I} + T\mathbf{A})\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Outra forma de discretização é por meio da entrada $u(t)$. Se uma entrada $u(t)$ for gerada por um computador digital seguido por um conversor digital-analógico, então $u(t)$ será constante por partes (CHEN, 1998, p.90-92). Tal situação é comum quando o controle é realizado através de um computador digital. Para esta situação, o sistema resultante é dado por (PROHMANN et al., 2018, p.25)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.21)$$

com as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} dadas por

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{B}_d = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (2.22)$$

Esta é uma equação de espaço de estado em tempo discreto. O método de discretização apresentado não há qualquer aproximação envolvida, como no caso anterior, e provém a solução exata do sistema (CHEN, 1998, p.92).

2.4 Ruído Branco

Matematicamente, um processo $v(t)$ é ruído branco se seus valores $v(t_i)$ e $v(t_j)$ são descorrelacionados para cada $v(t_i)$ e $v(t_j) \neq v(t_i)$ (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.385)

$$C(t_i, t_j) = 0 \quad t_i \neq t_j \quad (2.23)$$

a autocovariância de um processo não trivial de ruído branco deve ser de interesse

$$C(t_1, t_2) = q(t_1) \delta(t_1 - t_2) \quad q(t) \geq 0. \quad (2.24)$$

Se as variáveis aleatórias $v(t_i)$ e $v(t_j)$ são descorrelacionados, mas também independentes, $v(t)$ será chamado estritamente de ruído branco. Ao contrário disto, será assumido

que a média de um processo de ruído branco é nula (MANOLAKIS et al., 2000, p.110).

O termo ruído branco é usado para enfatizar que todas as frequências contribuem com a mesma quantidade de energia, como no caso da luz branca, obtida pela mistura de todas as cores possíveis na mesma quantidade. Se, além disso, adicionar as funções densidades de probabilidade de um ruído branco $x(t)$ for gaussiano, o processo será chamado de processo de ruído gaussiano branco (de segunda ordem) (MANOLAKIS et al., 2000, p.110).

2.5 Estimador de Estado

Na maioria dos casos, nem todas as variáveis de estado são medidas. O custo dos sensores necessários podem ser elevados ou podem ser fisicamente impossível medir todas as variáveis de estado, como por exemplo, uma usina nuclear (FRANKLIN et al., 214, p.489). Em muitos sistemas físicos, por exemplo, as medições requerem uso de dispositivos de medição caros e pode não medir todas as variáveis de estado.

Em grandes sistemas sociais ou econômicos, as medições podem exigir pesquisas extensas ou procedimentos complexos de manutenção, em alguns sistemas, certos componentes do vetor de estado correspondem a variáveis internas inacessíveis, que não podem ser medidas. Em todas essas situações, as estratégias de controle deve ser baseadas nos valores de um subconjunto das variáveis de estado (FRANKLIN et al., 214, p.489).

Quando confrontado com essa dificuldade bastante comum, existem duas vias de abordagem. A primeira é procurar diretamente novos procedimentos que requeiram menos medições - restringindo a escolha de funções de realimentação estático ou desenvolvendo procedimentos de processamento de realimentação mais complexos (dinâmicos) (LUENBERGER, 1979, p.301).

A segunda abordagem (mais simples) é construir uma aproximação do vetor de estado completo com base nas medições disponíveis. Qualquer um dos procedimentos de controle estático anteriores podem ser implementados usando este estado aproximado no lugar do estado real (LUENBERGER, 1979, p.301). Uma vez que nem sempre é possível obter os estados por sensores, os estimadores de estados passaram a se tornar uma solução para esta problemática. Estes estimadores consistem em construir uma aproximação do vetor de estados utilizando as medições disponíveis (LUENBERGER, 1979, p.301).

Para melhor compreensão, é possível citar o circuito da Figura 2.5, os quais possuem as tensões dos capacitores C_1 e C_2 e as correntes nos indutores L_1 e L_2 , seriam necessários 4 sensores para obter os estados do sistema. A inserção deste sensores para tal aplicação é inviável, uma vez que são de alto custo em relação ao sistema utilizado (PROHMANN et al., 2018, p.32).

Os estimadores podem ser classificados em três tipos de acordo com o uso dos dados disponíveis (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.132-133):

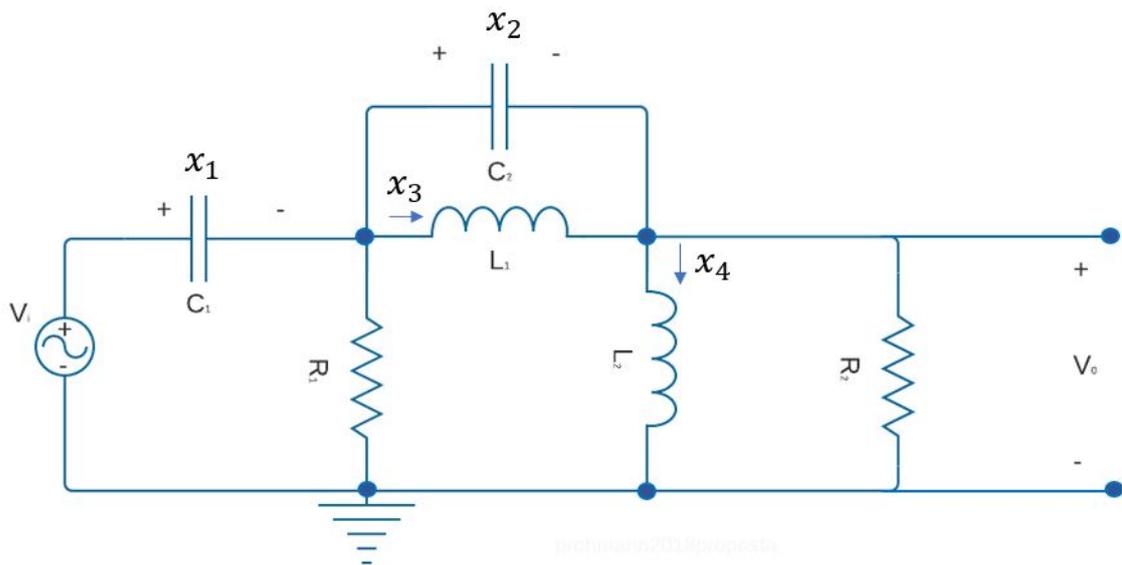


Figura 2.4 – Representação do circuito elétrico em que se deseja obter os estados.

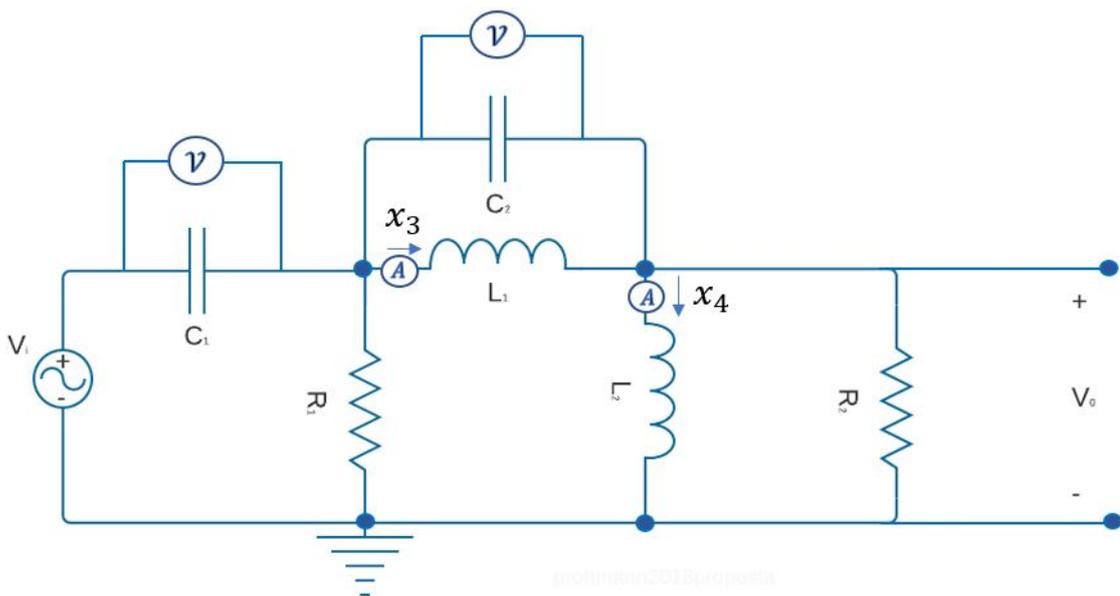


Figura 2.5 – Representação do circuito elétrico com estados medidos.

- Preditor: Utiliza observações estritamente antes do tempo em que o estado do sistema dinâmico deve ser estimado:

$$t_{\text{obs}} < t_{\text{est}}.$$

- Filtro: Utiliza observações até e incluindo o tempo em que o estado do sistema dinâmico deve ser estimado:

$$t_{\text{obs}} \leq t_{\text{est}}.$$

- Suavizador: Utiliza observações além do teste do tempo de que o estado do sistema

dinâmico deve ser estimado:

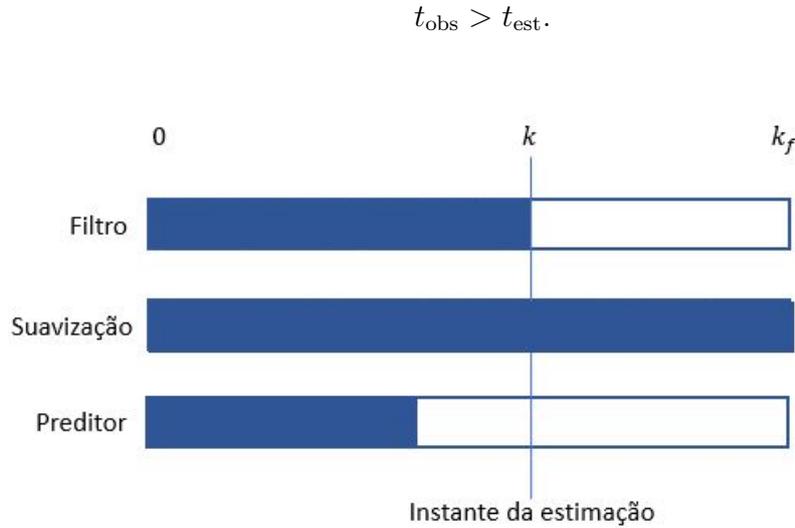


Figura 2.6 – O instante k corresponde ao instante da estimação dos estados, o instante k_f corresponde ao instante final que compreende todas as medições disponíveis, a área com traços diagonais corresponde à medições utilizadas para estimação e a área total de cada retângulo corresponde à todas as medições disponíveis.

2.6 Índice de Desempenho

Para realizar a comparação entre os algoritmos, definiram-se as seguintes funções de desempenho baseadas no erro quadrático médio, erro de estimação de estado, raiz do erro quadrático e raiz do erro quadrático global:

- O erro quadrático médio é calculado do seguinte modo:

$$e_{j,k}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\hat{y}_{j,k} - y_{j,k})^2, \quad j = 1, 2. \quad (2.25)$$

- Para o cálculo do erro de estimação de estado sem Monte Carlo, é dado como:

$$\eta_{i,k} \triangleq (\hat{x}_{i,k} - x_{i,k})^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2.26)$$

- A métrica para avaliar o erro de estimação com Monte Carlo é como segue:

$$e_{i,k} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \sqrt{(\hat{x}_{k,i,r} - x_{k,i,r})^2} \quad (2.27)$$

onde N_{MC} é o número de realizações de Monte Carlo, r é o índice referente a realização, i é o índice referente ao estado, k é o índice temporal, $\hat{x}_{k,i,r}$ é o estado estimado e $x_{k,i,r}$ é o estado real.

onde \hat{x} é o estado estimado de x e i indica o estado i th.

- A raiz do erro quadrático médio calculada como:

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_{i,k}}. \quad (2.28)$$

- O erro quadrático global no instante k calcula-se do seguinte modo:

$$\eta_k = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_{i,k}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.29)$$

2.7 Observadores de Estados

É mostrado nesta seção que o estado (ou uma aproximação dele) pode ser convenientemente calculado por um dispositivo conhecido como observador. O próprio observador é um sistema dinâmico linear. Seus valores de entrada são os valores das saídas medidas do sistema original e seu vetor de estado gera informações ausentes sobre o estado do sistema original. O observador pode ser considerado como um dispositivo dinâmico que, quando conectado às saídas disponíveis do sistema, gera todo o estado (LUENBERGER, 1979, p.300-301).

Uma abordagem alternativa é a de estimar o estado com base em medições que são uma combinação linear dos estados e, em seguida, gerar o esforço de controle com base nos estados estimados. Assume-se que, na melhor das hipóteses, apenas alguns dos estados são medidos diretamente.

O que se deseja é projetar um estimador de estado ou observador (LUENBERGER, 1979, p.300-301) que, quando dada uma sequência $y(k)$ e a entrada $u(k)$ reconstrói uma estimativa da sequência $x(k)$. Um observador ou estimador de estado é outro sistema dinâmico que possui entradas $u(k)$ e $y(k)$, cuja saída é uma estimativa de $x(k)$ (JACQUOT, 1995, p.239-241).

2.7.1 Realimentação de Estados

Nesta seção, apresenta-se uma breve explanação sobre o projeto do sistema de controle utilizando-se a realimentação dos estados e a estimação dos estados quando as medições disponíveis são incompletas. Um regulador é um sistema que controla a saída cerca de zero na presença de distúrbios externos, então o controle será fornecido com base na realimentação de estado proporcional negativa, a qual será da forma (JACQUOT, 1995, p.236).

$$u(k) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(k), \quad (2.30)$$

onde a matriz \mathbf{F} é referida como a matriz de ganho de realimentação. O diagrama de blocos ilustrada essa configuração na Figura 2.7. Sendo a entrada regida por 2.30, tem-se a seguinte equação de atualização dos estados:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k) + \mathbf{B}(-\mathbf{F}\mathbf{x})(k) \\
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k) - \mathbf{B}\mathbf{F}(k) \\
\mathbf{x}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(k)
\end{aligned}
\tag{2.31}$$

os autovalores podem ser encontrados através da equação característica

$$\lambda_c(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}] = 0. \tag{2.32}$$

Se o estado é da dimensão n e o esforço de controle é da dimensão m , a matriz de realimentação F possui elementos nm . Se o sistema (\mathbf{A}, \mathbf{B}) for controlável, a escolha dos elementos de F controlará a localização dos polos do sistema de circuito fechado proporcional negativa, que será da forma (JACQUOT, 1995, p.236).

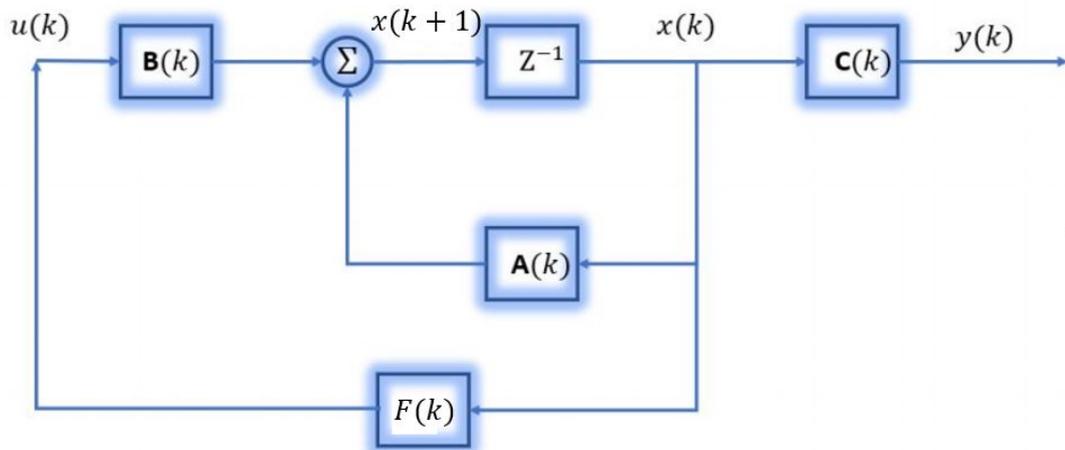


Figura 2.7 – Representação em diagrama de blocos de um sistema com controle de realimentação.

2.7.2 Observador de Estado com Realimentação

Considere o sistema (2.3) e (2.4), é assumido que o par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável. Deseja-se de construir um estimador que levará o erro da estimativa a zero no sentido assintótico. Projetar um estimador ou observador que inclua a estimativa anterior $\hat{\mathbf{x}}(k)$ e a medida $y(k)$ para estimar $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ (JACQUOT, 1995, p.242-243). Um estimador linear dessa forma seria

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}y(k) + \mathbf{z}(k) \tag{2.33}$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são matrizes ainda a serem selecionadas e $\mathbf{z}(k)$ é um vetor ainda não especificado. Substituindo (2.3) e (2.30), tem-se o erro de estimação que é definido por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}. \tag{2.34}$$

Subtrai-se (2.33) de (2.3), obtém-se

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}y(k) - \mathbf{z}(k) \quad (2.35)$$

é apropriado escolher a entrada $\mathbf{z}[k] = \mathbf{B}u(k)$, para que a expressão de erro se torne

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}y(k) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sendo $\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$, tem-se

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k). \quad (2.37)$$

Se o estimador for estável, o erro será zerado assintoticamente. Controla-se a dinâmica do erro selecionando a matriz de ganho \mathbf{K} do estimador para localizar os polos em qualquer lugar que desejado. A escolha da matriz de ganho \mathbf{K} pode ser feita utilizando alocação de polos (JACQUOT, 1995, p.243).

Nesse momento volta-se à Equação (2.33), substitui-se \mathbf{M} e $\mathbf{z}(k)$, para obter a equação de estimação:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}y(k) + \mathbf{B}u(k) \\ &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k)). \end{aligned} \quad (2.38)$$

É interessante notar que o estimador é uma réplica da planta original (2.3) impulsionada pelo erro na estimativa de $y(k)$. O diagrama de blocos deste estimador é dado na Figura 2.8.

Os polos da dinâmica do erro são os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$ e, portanto, as raízes são obtidas por (JACQUOT, 1995, p.243-244)

$$\det[\mathbf{I}z - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}] = 0 \quad (2.39)$$

2.7.3 Princípio da Separação

É importante mostrar que em certo sentido, é significativo separar o problema do projeto do observador do projeto de controle. Agora, examina-se um sistema de controle em que o estimador é usado para reconstruir os estados e, em seguida, a estimativa do estado é realimentada para gerar a sequência do esforço de controle ou a lei de controle (JACQUOT, 1995)

$$u(k) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.40)$$

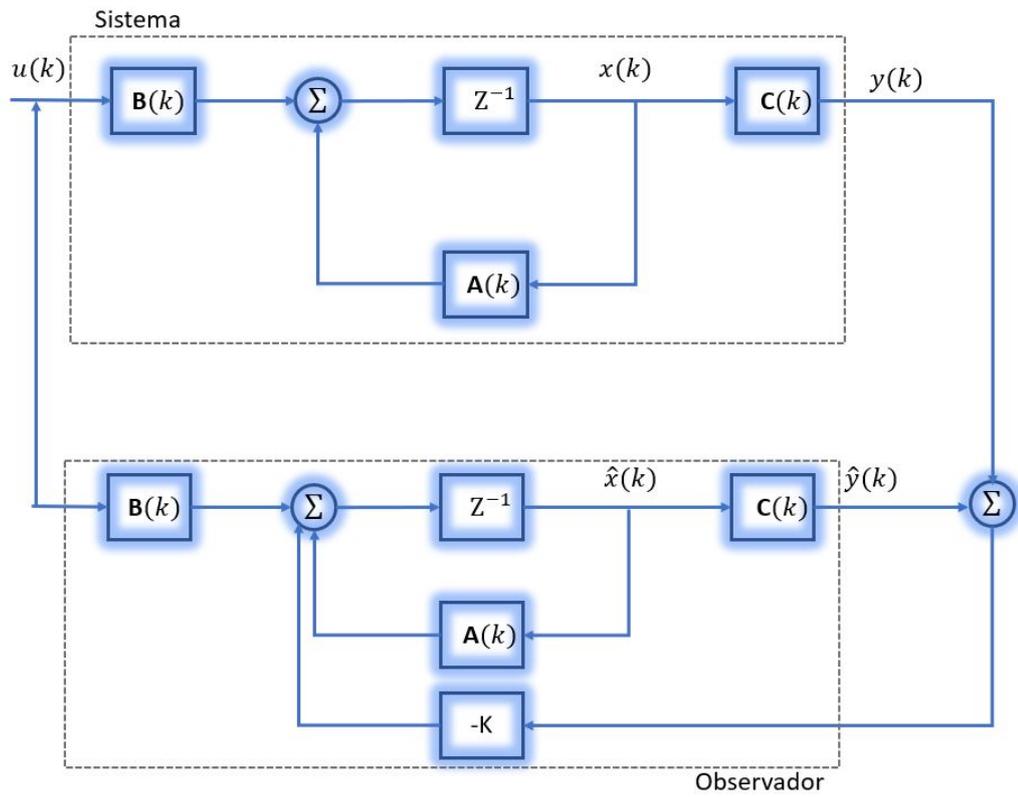


Figura 2.8 – Representação em diagrama de blocos de um observador de estado.

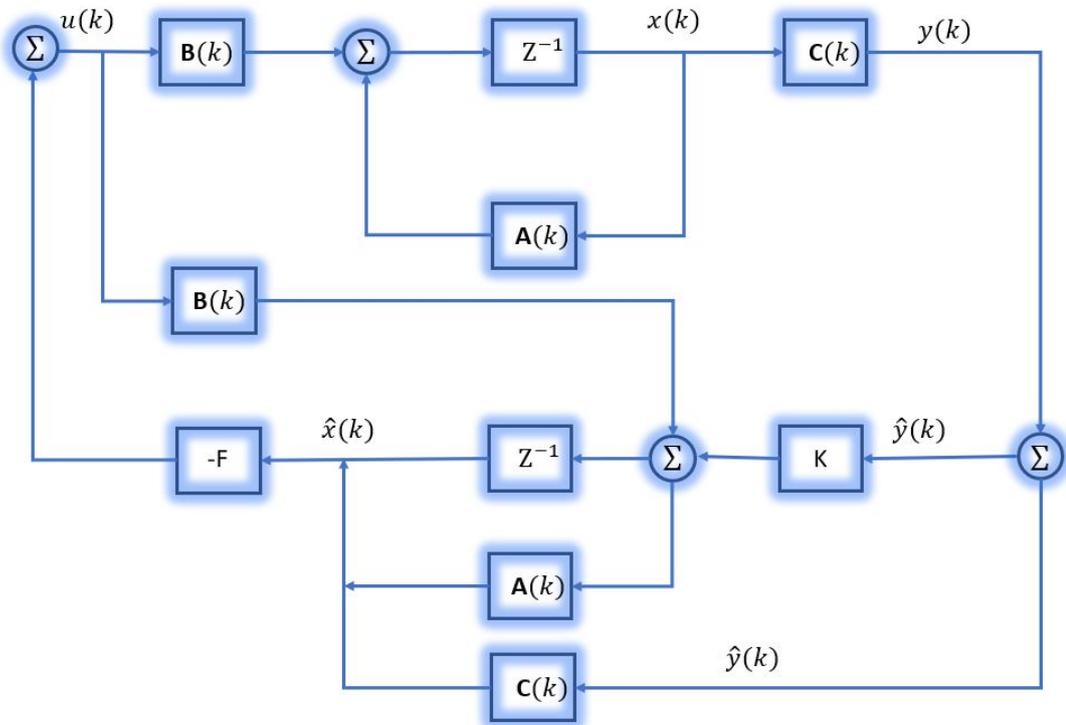


Figura 2.9 – Representação em diagrama de blocos de um observador de estado.

Este esquema é mostrado na Figura 2.9, para o estimador

equação de erro é

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{KC}]\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (2.41)$$

combinando a equação da planta (2.3) com a equação (2.40), tem-se

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) - \mathbf{BF}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (2.42)$$

relacionando a equação (2.34) e escrevendo (2.41), como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{KC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{BF} & \mathbf{A} - \mathbf{BF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

A transformação z produz um determinante para a equação característica do sistema completo

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{KC}) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{BF} & \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{BF}) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

Sendo a matriz zero no canto superior direito, o determinante acima pode ser calculado como o produto de dois determinantes

$$\det[\mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{KC})] \det[\mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{BF})] = 0 \quad (2.45)$$

A prova desses determinantes indica que n polos do sistema completo vêm do segundo determinante e seus valores são controlados pela seleção dos elementos da matriz de controle de realimentação \mathbf{F} . Os polos do observador são declarados pelo primeiro determinante na escolha de \mathbf{K} . Esse resultado é chamado princípio de separação, pois projeta-se o observador e o controlador separadamente.

Depois que os elementos de \mathbf{F} são selecionados para fornecer ao sistema de controle de malha fechada as localizações corretas dos polos, os elementos de \mathbf{K} devem ser escolhidos para que os polos do estimador seja mais rápidos (aproximadamente 2 vezes mais rápido) do que os polos de malha fechada (JACQUOT, 1995, p.245).

Com a lei de controle (2.40) substituída na equação do estimador, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{BF}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(\mathbf{yF} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{A} - \mathbf{BF} - \mathbf{KC}]\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Ky}(k) \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.7.4 Observador com Referência Não Nula

Sendo a referência não nula, a entrada é dada por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{Fx}(k) + \mathbf{Gr}(k) \quad (2.47)$$

onde $\mathbf{r}(k)$ é o sinal de referência e \mathbf{G} é uma matriz a ser encontrada. Desenvolvendo a equação de estados com esta entrada, tem-se

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BF})\mathbf{x}(k) + \mathbf{BGr}(k). \quad (2.48)$$

Tomando a transformada z ,

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BF})^{-1}\mathbf{BGR}(z) \quad (2.49)$$

a transformada da saída é dada por

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BF})^{-1}\mathbf{BGR}(z). \quad (2.50)$$

Escolhendo-se \mathbf{G} para que o ganho DC seja igual a 1, ou seja,

$$\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BF})^{-1}\mathbf{BG} \Big|_{z=1} = \mathbf{I} \quad (2.51)$$

a matriz \mathbf{G} será

$$\mathbf{G} = [\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BF})^{-1} \mathbf{B}]^{-1}. \quad (2.52)$$

2.7.5 Aplicações

Obtém-se a implementação de controle de realimentação de estados por observador através dos seguintes passos:

- Calcula-se os autovalores da matriz \mathbf{A} para encontrar os polos da planta real.
- Define-se os polos desejados (escolha do projetista) e, através da alocação de polos utilizando (2.39), faz-se o cálculo da matriz \mathbf{F} . Através desses cálculos realiza-se o controle da planta utilizando realimentação de estados.

`place(A,B, polos_controlador)`

Pode-se utilizar a função do MatLab $\text{\textcircled{R}}$.

- Os polos do observador são definidos como os polos em malha fechada com sua parte real multiplicada por dois, pois os polos do observador devem ser mais rápidos que os polos em malha fechada da planta.
- Uma vez conhecido os polos do observador, calcula-se \mathbf{K} através da alocação de polos utilizando (2.39). Pode-se utilizar a função do MatLab $\text{\textcircled{R}}$

`place(A',C', polos_observador)`

para encontrar \mathbf{K} , onde \mathbf{A} e \mathbf{C} são as matrizes de estado e de saída transpostas, respectivamente, e `polos_observador` é um vetor contendo os polos do observador, os quais devem ser duas vezes mais rápidos que os polos do sistema em malha fechada

- Por fim, calcula-se a matriz \mathbf{G} por Equação (2.52)

2.7.6 Exemplo sem Ruído

Considere o servomecanismo DC de velocidade mostrado na Figura 2.10 (HEMERLY, 2000, p.134).

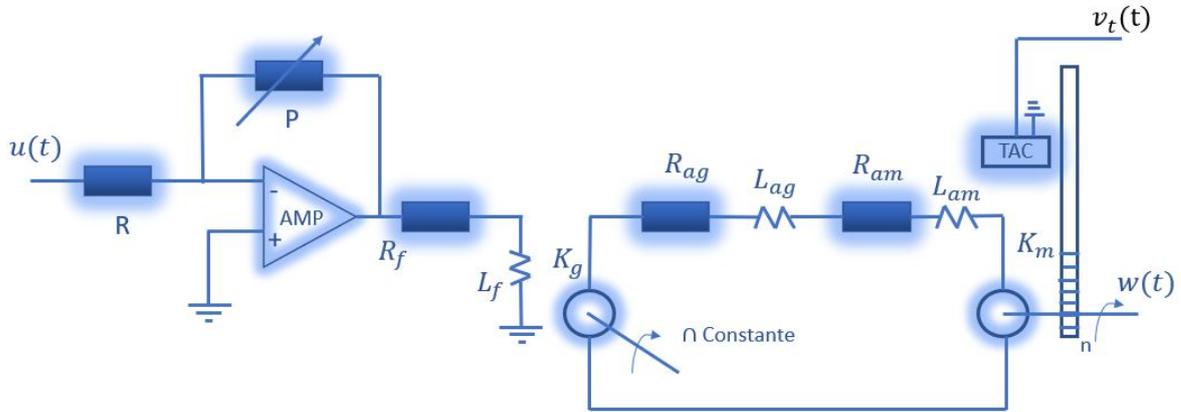


Figura 2.10 – Servomecanismo DC de velocidade.

A corrente de campo $i_c(t)$ é dada por

$$L_f \frac{d}{dt} i_c(t) + R_f i_c(t) = A u(t) \quad (2.53)$$

onde A é o ganho do amplificador operacional. A tensão induzida nos terminais do gerador é dada por $v_g(t) = K_g i_c(t)$ e a força contra-eletromotriz nos terminais do motor é $v_m(t) = K_m w(t)$, onde $w(t)$ é a velocidade angular do motor. Logo, na malha de armadura tem-se (HEMERLY, 2000, p.134)

$$(L_{ag} + L_{am}) \frac{d}{dt} i_a(t) + (R_{ag} + R_{am}) i_a(t) + K_m w(t) = K_g i_c(t). \quad (2.54)$$

Finalmente, o torque é dado por $T(t) = K_m i_a(t)$, com $T(t) = B w(t) + J \frac{d}{dt} w(t)$, onde B é o atrito viscoso e J é a inércia da carga. Logo,

$$J \frac{d}{dt} w(t) + B w(t) = K_m i_a(t) \quad (2.55)$$

Assim, definindo-se os estados $x_1(t) = w(t)$, $x_2(t) = i_c(t)$ e $x_3(t) = i_a(t)$, de (2.53) - (2.55) tem-se:

$$\begin{aligned} J \dot{x}_1(t) + B x_1(t) &= K_m x_3(t) \\ L_f \dot{x}_2(t) + R_f x_2(t) &= A u(t) \\ (L_{ag} + L_{am}) \dot{x}_3(t) + (R_{ag} + R_{am}) x_3(t) &= K_g x_2(t) - K_m x_1(t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Supondo-se agora $J = 2 \times 10^{-4} \text{kgm}^2$, $B = 20 \times 10^{-5} \text{Nms}^{-1}$, $K_m = 0,09 \text{Vs}$, $L_f = 0,8 \text{H}$, $R_f = 15 \Omega$, $A = 5$, $(L_{ag} + L_{am}) = 0,4 \text{H}$, $(R_{ag} + R_{am}) = 12 \Omega$, $K_g = 35 \text{VA}^{-1}$, e

admitindo-se que a velocidade angular $w(t) = x_1(t)$ seja a variável medida, via tacômetro TAC na Figura 2.10, com ganho $K_t = 0,05V \text{ s}$ e redução $n = 1/5$, ou seja, $y(t) = V_t(t) = K_t n w(t) = 0,01x_1(t)$, resulta o seguinte modelo em variáveis de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 450 \\ 0 & -18,75 & 0 \\ -0,225 & 87,50 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6,25 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.57)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

2.7.7 Discretização do Sistema

Discretizando-se o sistema 2.57 até 2.58 com período de amostragem $T = 0.01s$, resultando em

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9855 & 1,6695 & 3,8609 \\ 0 & 0,8290 & 0 \\ -0,0019 & 0,6849 & 0,7367 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0363 \\ 0,0570 \\ 0,0233 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.59)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Para entrada degrau, com amplitude 1 volt, e condição inicial $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ comportamento das variáveis de estado $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$, e da saída $y(k)$ é mostrado nas Figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.7.7:

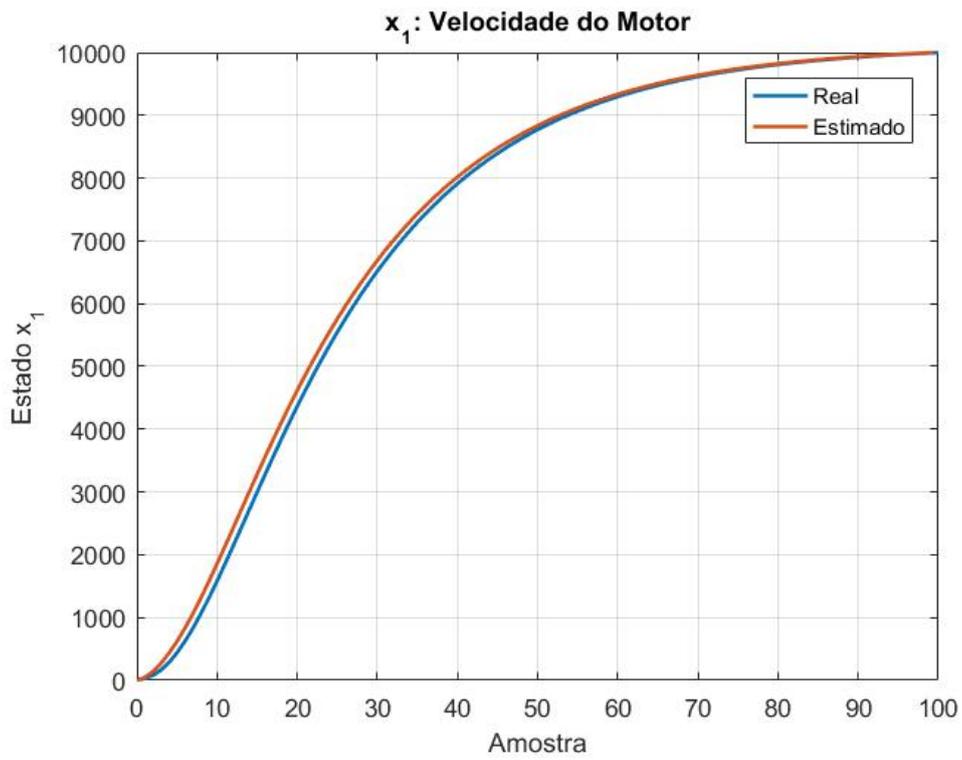


Figura 2.11 – Evolução de $x_1(k)$.

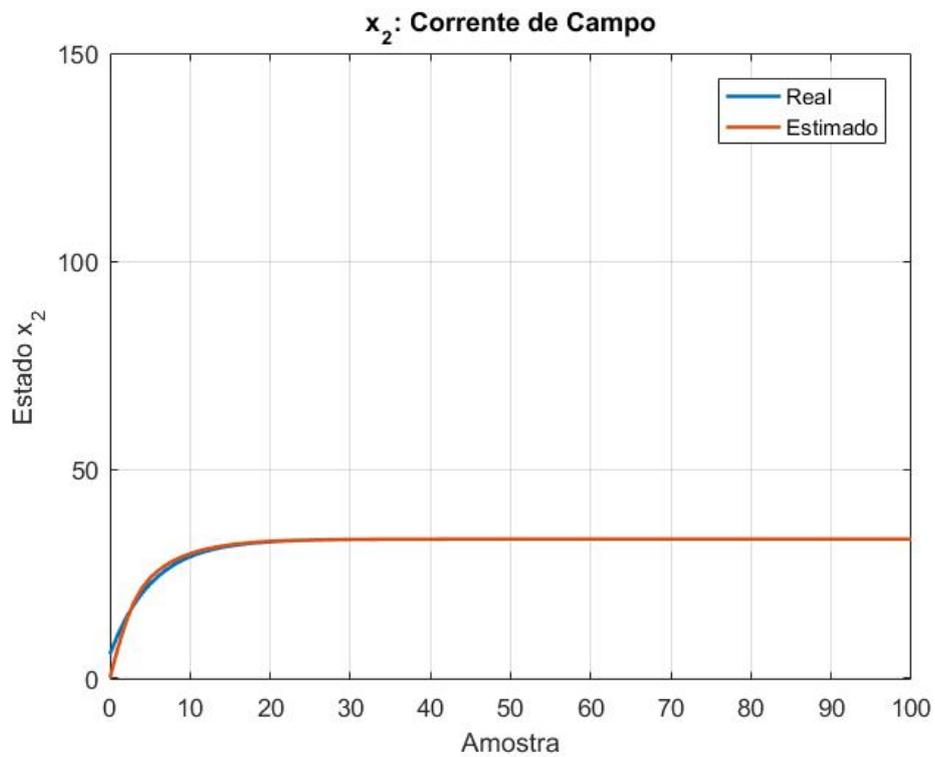
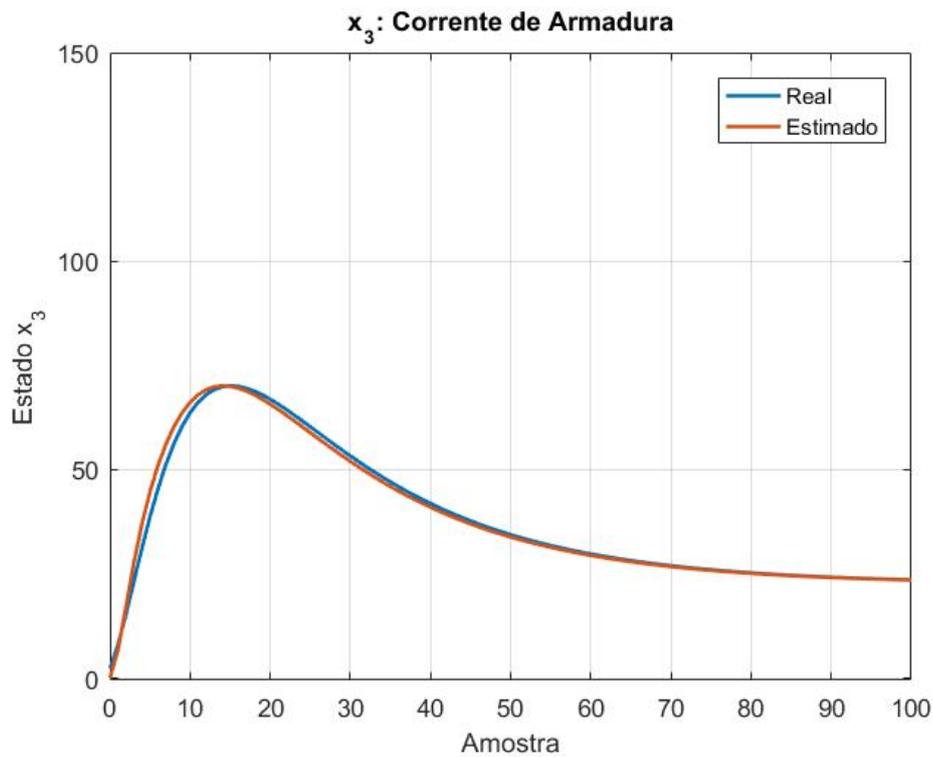
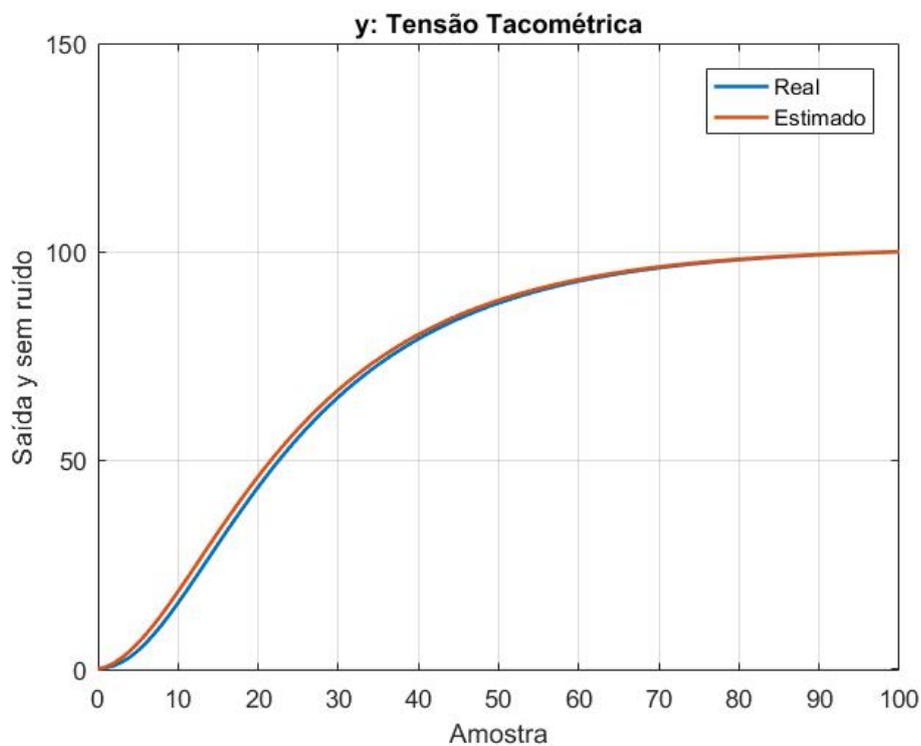


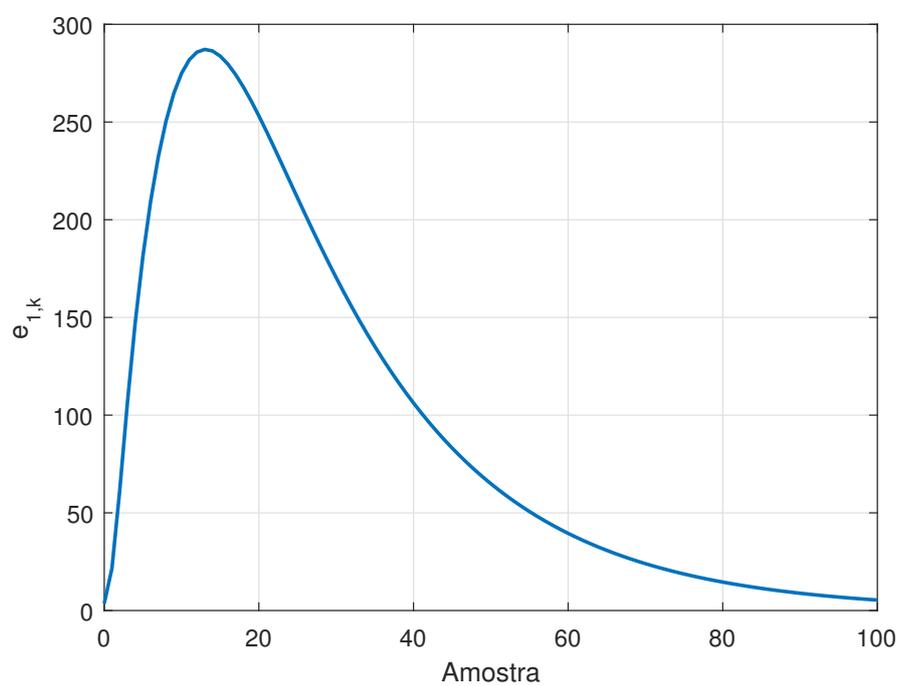
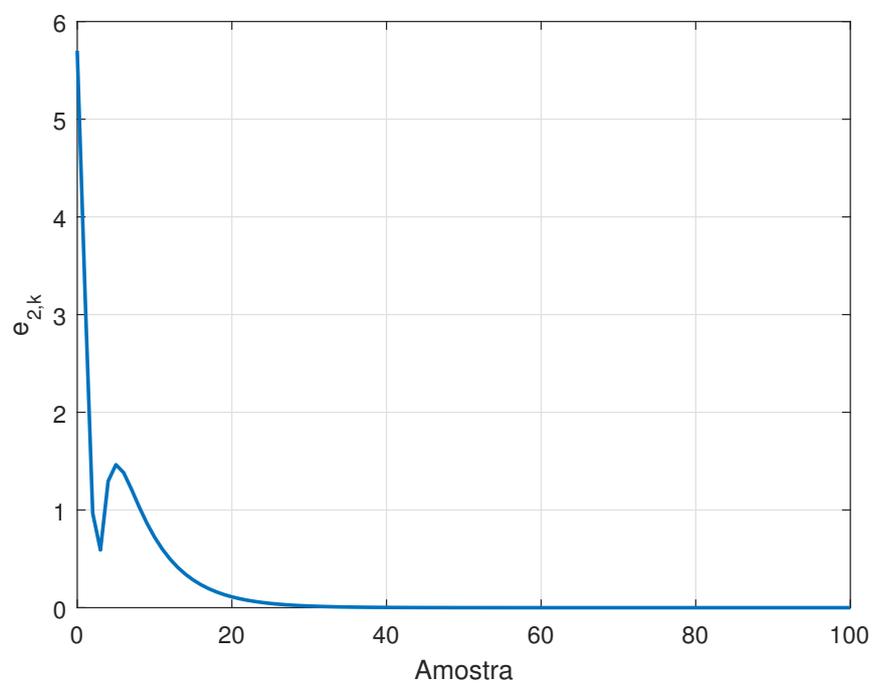
Figura 2.12 – Evolução de $x_2(k)$.

Figura 2.13 – Evolução de $x_3(k)$.Figura 2.14 – Evolução de $y(k)$.

O valor de regime de $y(k)$, na Figura corresponde a uma velocidade de aproximadamente 1000 rpm no eixo do motor.

O erro absoluto obtido para tal caso pode ser observado nas Figuras 2.15, 2.16,

2.17:

Figura 2.15 – Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador sem ruído.Figura 2.16 – Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador sem ruído.

A representação do sistema com observador de estado em simulink encontra-se na Figura 2.18:

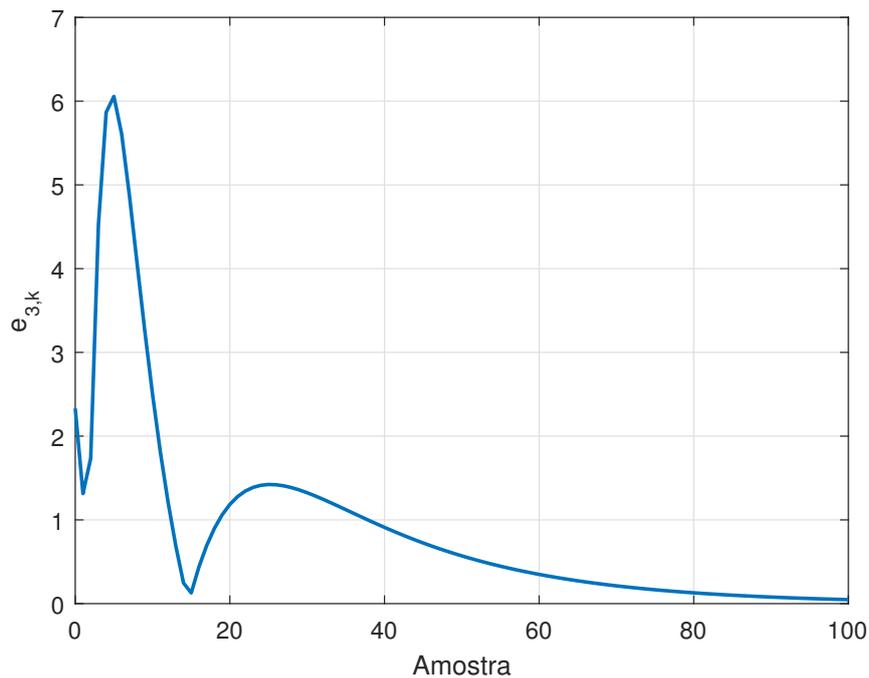


Figura 2.17 – Métrica $e_{3,k}$ da estimação feita pelo observador sem ruído.

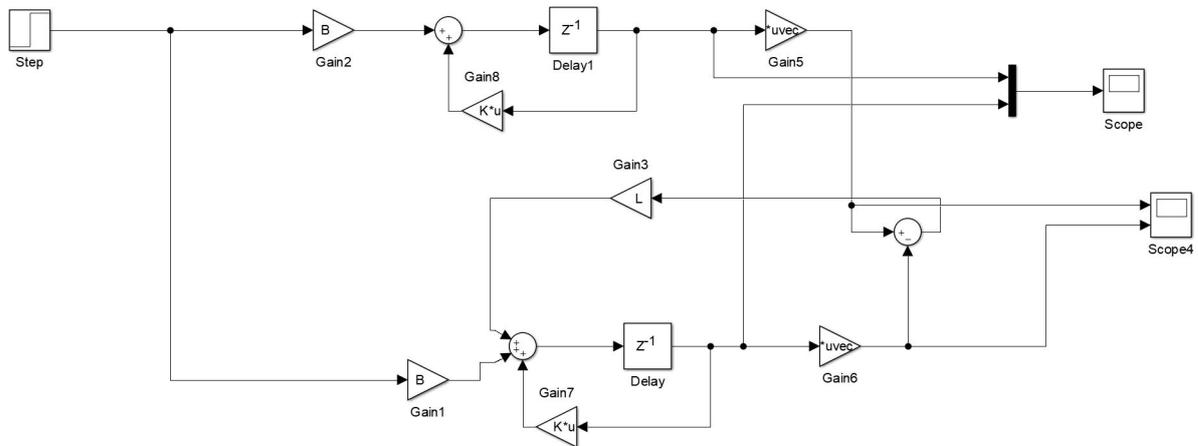


Figura 2.18 – Representação da implementação do sistema com observador em simulink sem ruído.

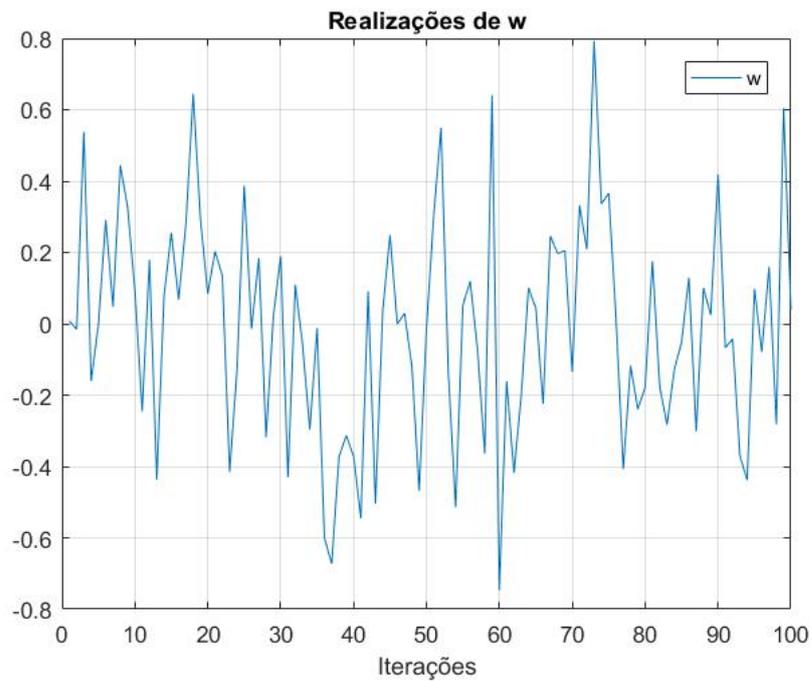
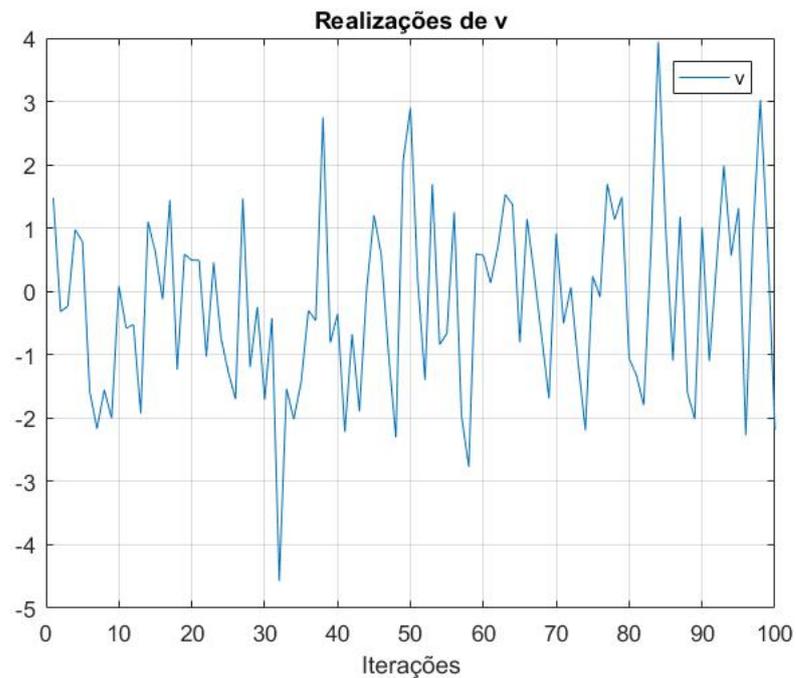
2.7.8 Exemplo com Ruído

Usualmente o tacômetro é um sensor ruidoso. Assim, de modo a tornar-se o modelo (2.59)-(2.60) mais realista, acrescenta-se um ruído de leitura $v(k)$. Adicionalmente, a corrente de armadura $i_a(t)$, que é a variável de estado $\mathbf{x}_3(t)$, também pode ser ruidosa, devido à comutação das escovas no gerador e no motor. Concluindo, tem-se o seguinte modelo estocástico para o servomecanismo DC de velocidade da Figura 2.10 (HEMERLY, 2000, p.136)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9855 & 1,6695 & 3,8609 \\ 0 & 0,8290 & 0 \\ -0,0019 & 0,6849 & 0,7367 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0363 \\ 0,0570 \\ 0,0233 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (2.61)$$

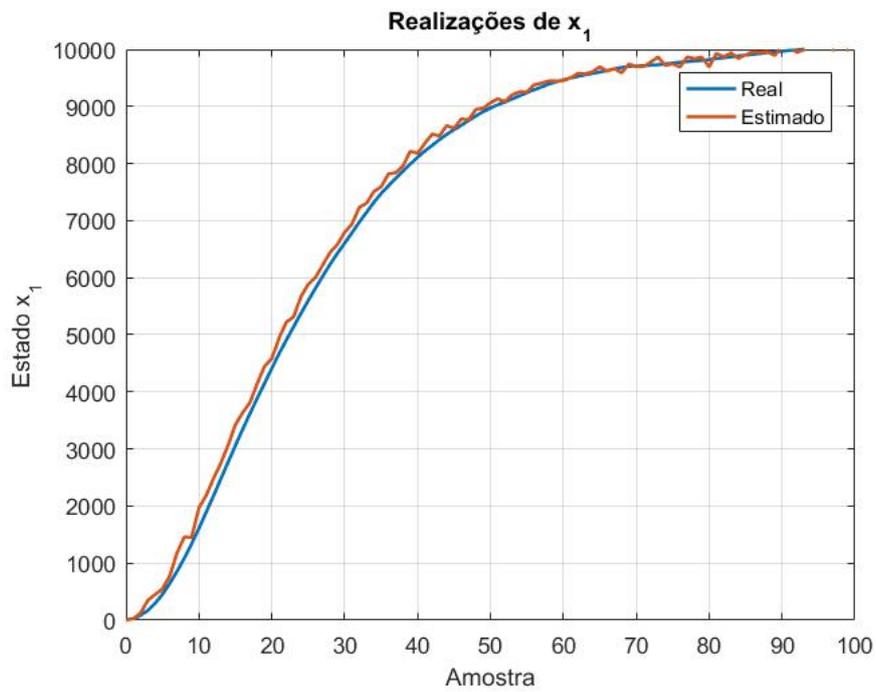
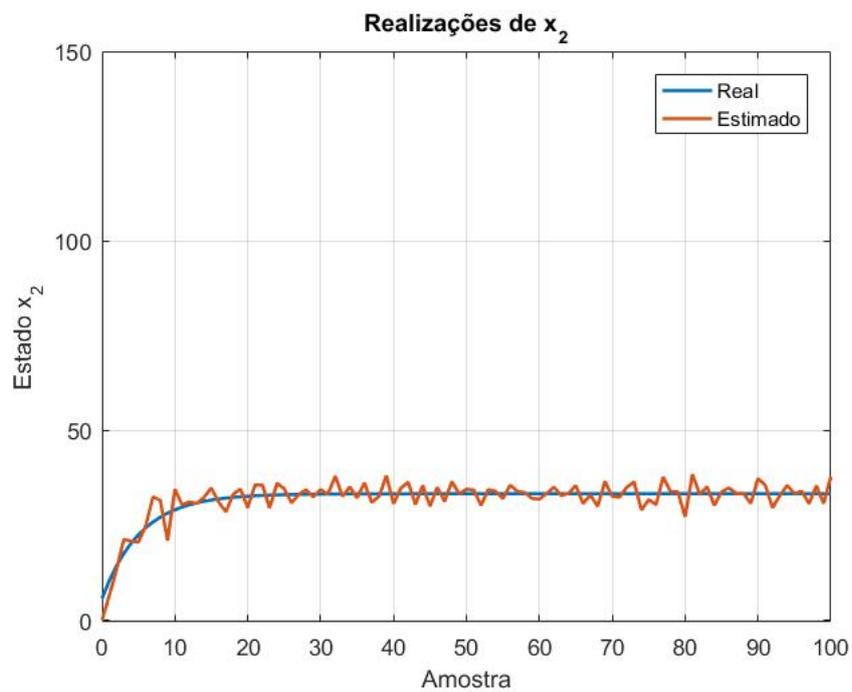
$$\mathbf{y}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (2.62)$$

Supondo-se que os ruídos de estado $w(k)$ e de medida $v(k)$ sejam Gaussianos com média zero e covariâncias $P_w = 0,0002$ e $P_v = 0,01$, respectivamente, nas Figuras 2.21 à 2.24 apresentam-se três realizações dos processos envolvidos no modelo (2.61)-(2.62). As realizações dos estados $x_1(k)$ e $x_2(k)$ são praticamente coincidentes, pois o ruído nesses dois estados é oriundo do estado $x_3(k)$, vide (2.61), que por sua vez não é muito ruidoso, conforme indicado nas Figuras 2.19-2.24 (HEMERLY, 2000, p.136).

Figura 2.19 – Realização do ruído de observação w .Figura 2.20 – Realização do ruído de medição v .

O erro absoluto obtido para tal caso pode ser observado nas Figuras 2.25-2.27:

A representação do sistema com observador de estado com ruído em simulink encontra-se na Figura 2.28:

Figura 2.21 – Realização com ruído no estado x_1 .Figura 2.22 – Realização com ruído no estado x_2 .

2.7.9 Exemplo 2

Um observador de estados foi implementado para estimar os estados do sistema cujo o modelo matemático é dado por

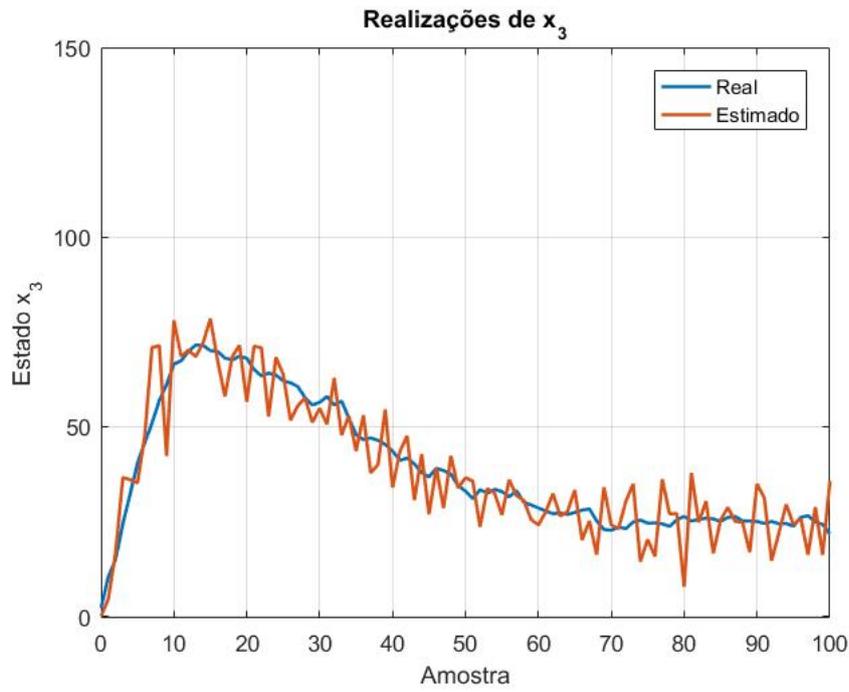


Figura 2.23 – Realização com ruído no estado x_3 .

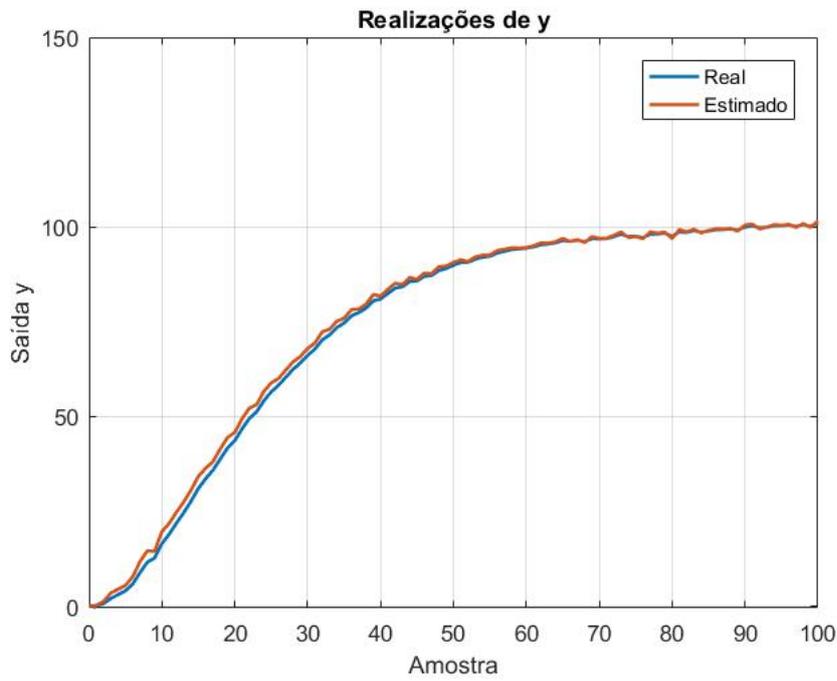


Figura 2.24 – Realização com ruído na saída y .

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1,2272 & 1 \\ -0,3029 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,0634 \\ 0,0978 \end{bmatrix} u_k \quad (2.63)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (2.64)$$

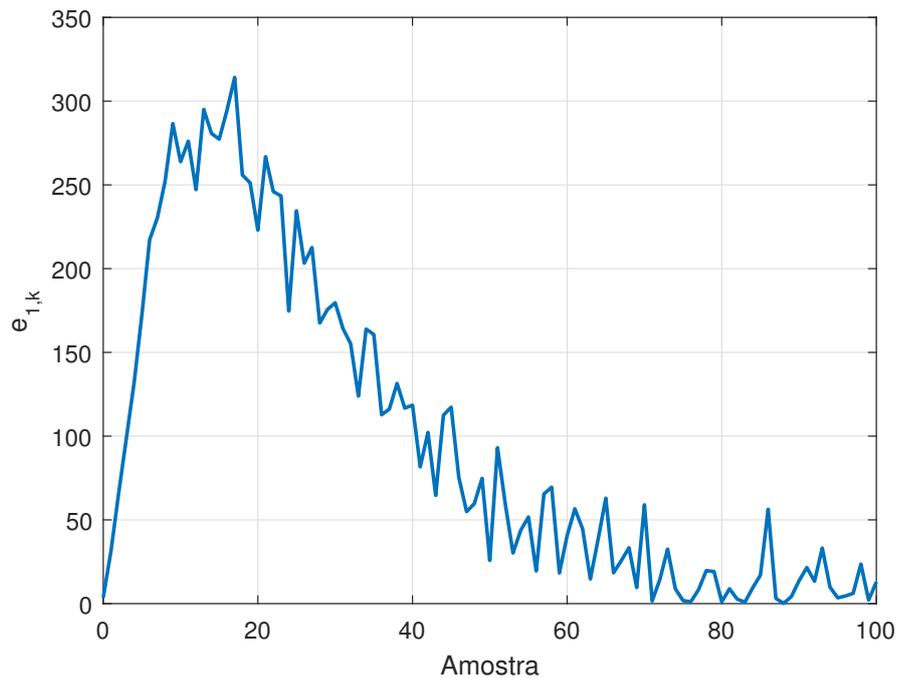


Figura 2.25 – Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador com ruído.

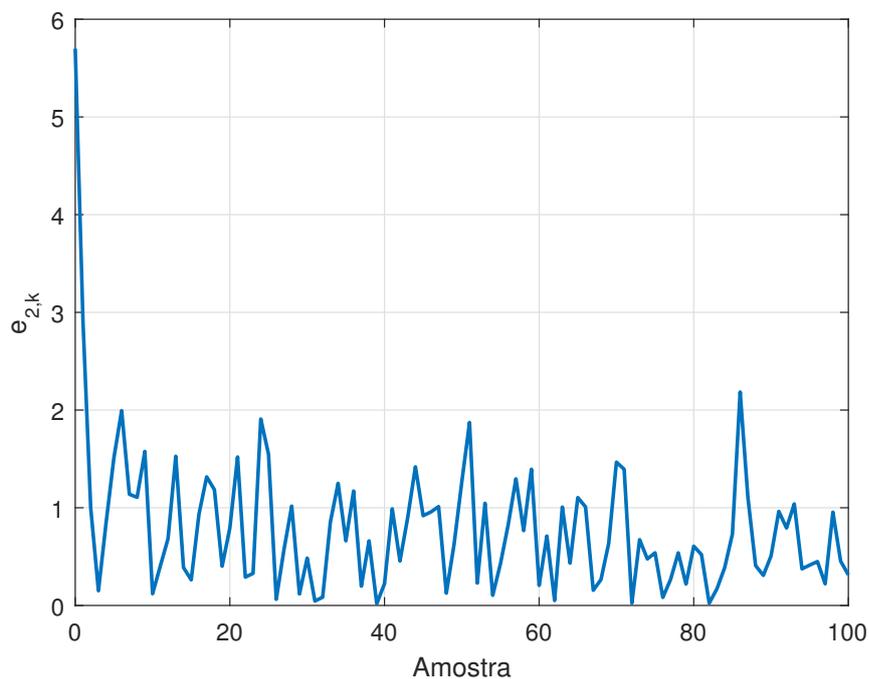


Figura 2.26 – Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador com ruído.

A entrada utilizada é mostrada na Figura 2.29. As condições iniciais do sistema foram $\mathbf{x}_0 = [8 \ 10]^T$ e do observador foram $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0]^T$. Os polos encontrados da matriz \mathbf{A} foram $[0, 8849 \ 0, 3423]$, e os polos utilizados para o observador foram $[0, 4425 \ 0, 1711]$. Utilizando a função `place` do MatLab(R), o ganho de realimentação do observador obtido foi $\mathbf{K} = [0, 6136 \ -0, 2272]^T$. Os estados estimados pelo observador podem ser observados

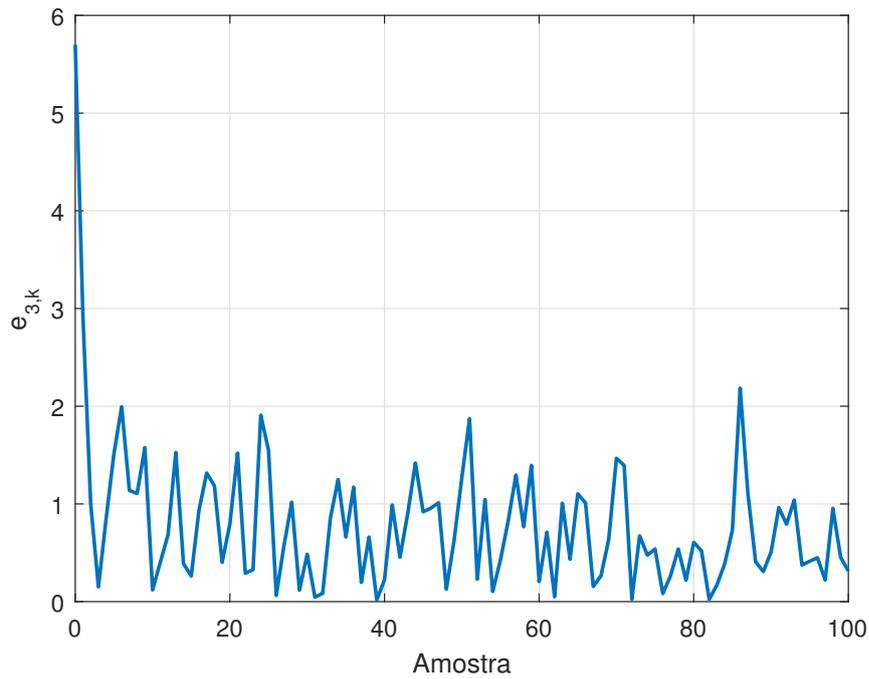


Figura 2.27 – Métrica $e_{3,k}$ da estimação feita pelo observador com ruído.

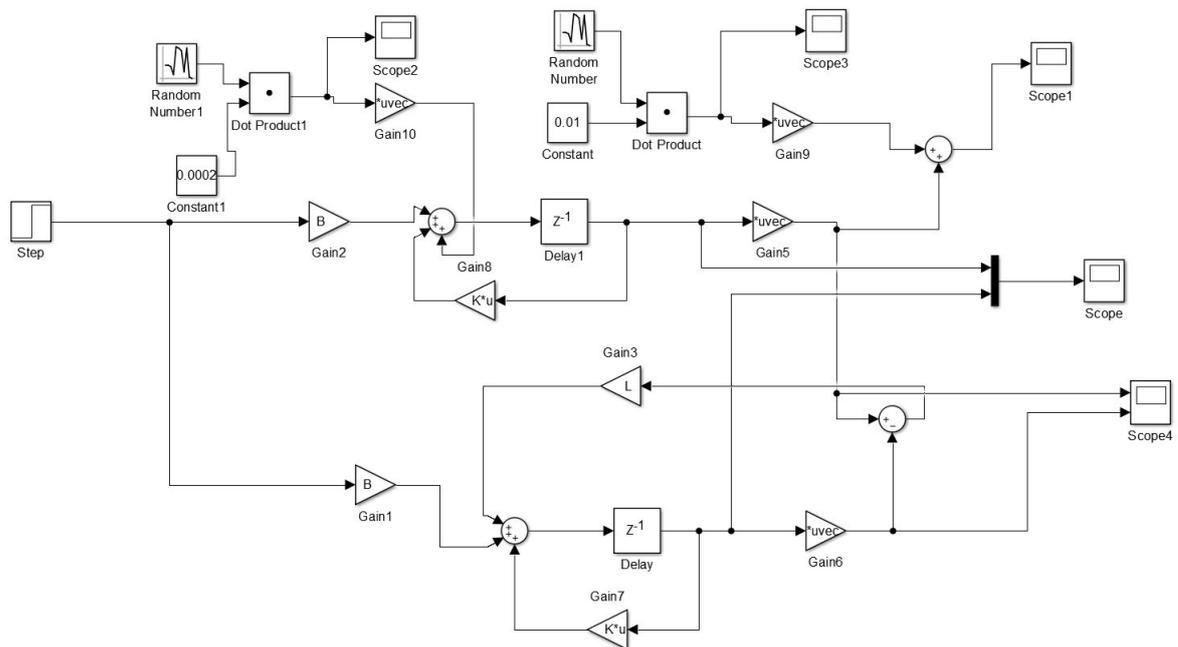


Figura 2.28 – Representação da implementação do sistema com observador em simulink com ruído.

nas Figuras 2.31 e 2.32 e o erro absoluto obtido para tal caso pode ser observado nas Figuras 2.33-2.34.

O erro absoluto obtido para tal caso pode ser observado nas figuras 2.33 e 2.34.

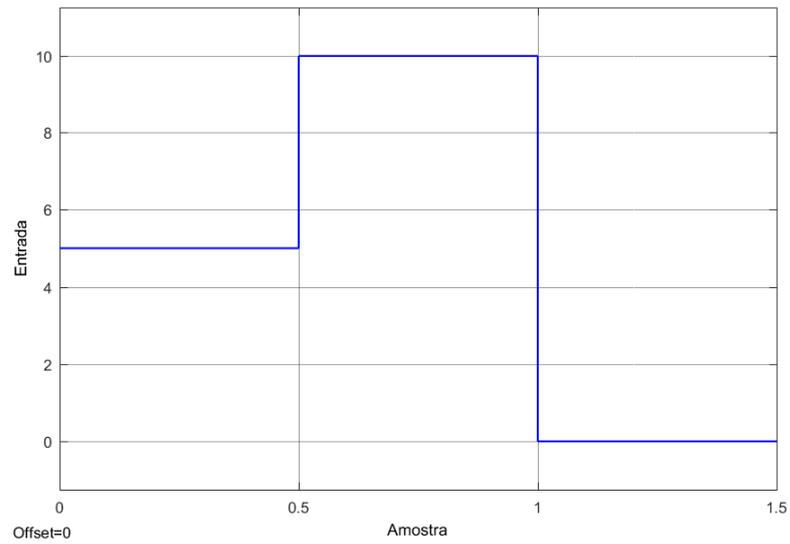


Figura 2.29 – Representação da implementação do sistema com observador em Simulink sem ruído.

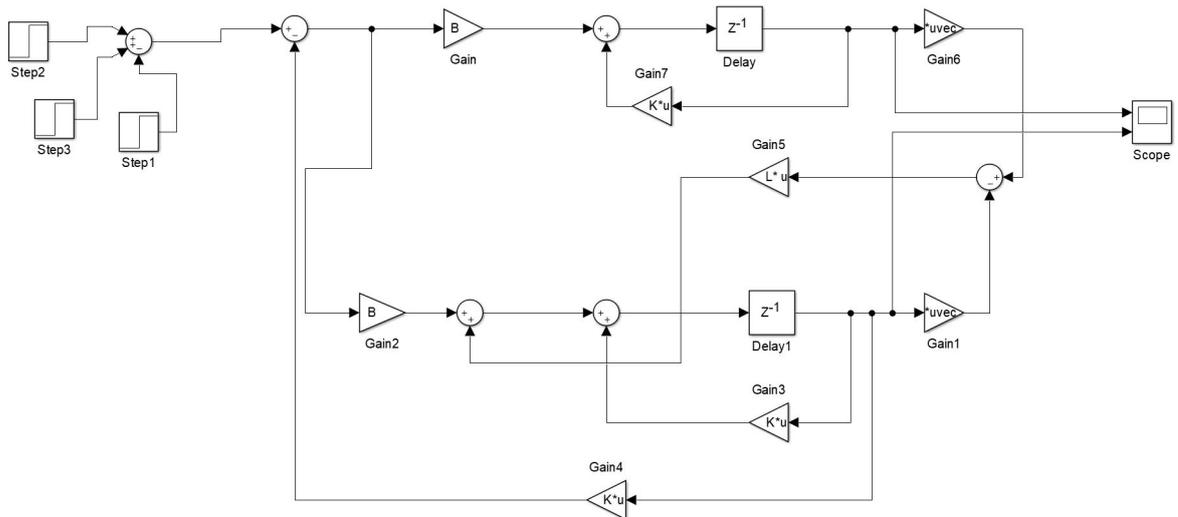


Figura 2.30 – Representação da implementação do sistema com observador em Simulink sem ruído.

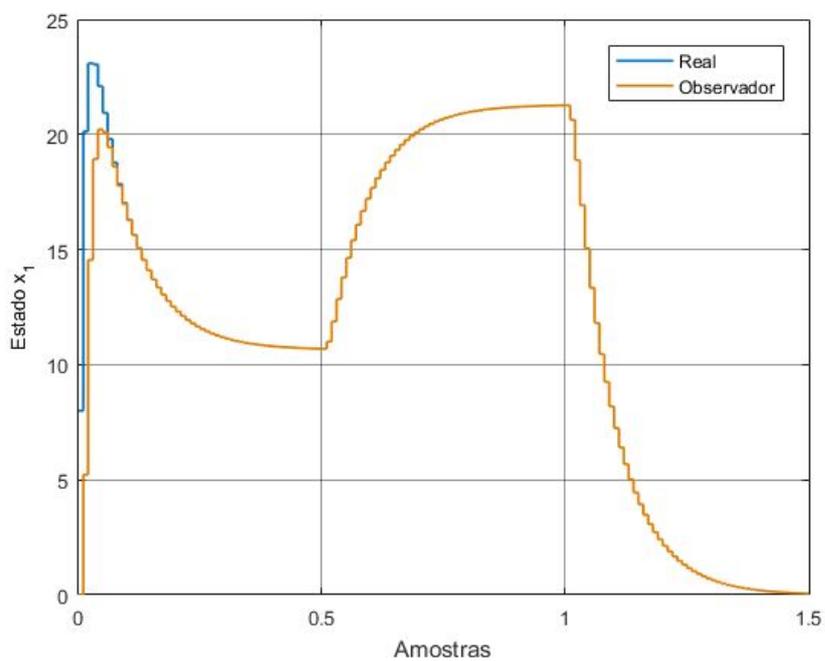


Figura 2.31 – Estado x_1 real e estimado pelo observador.

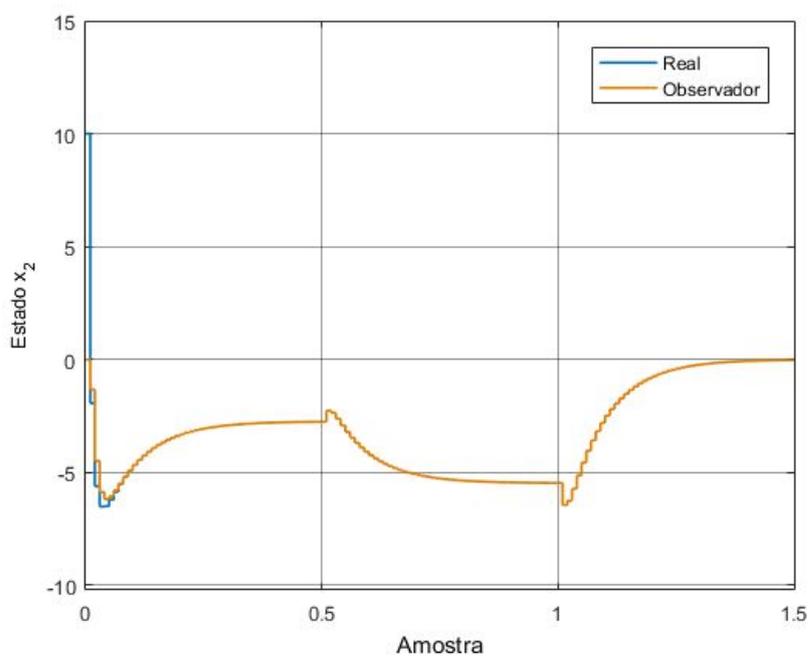
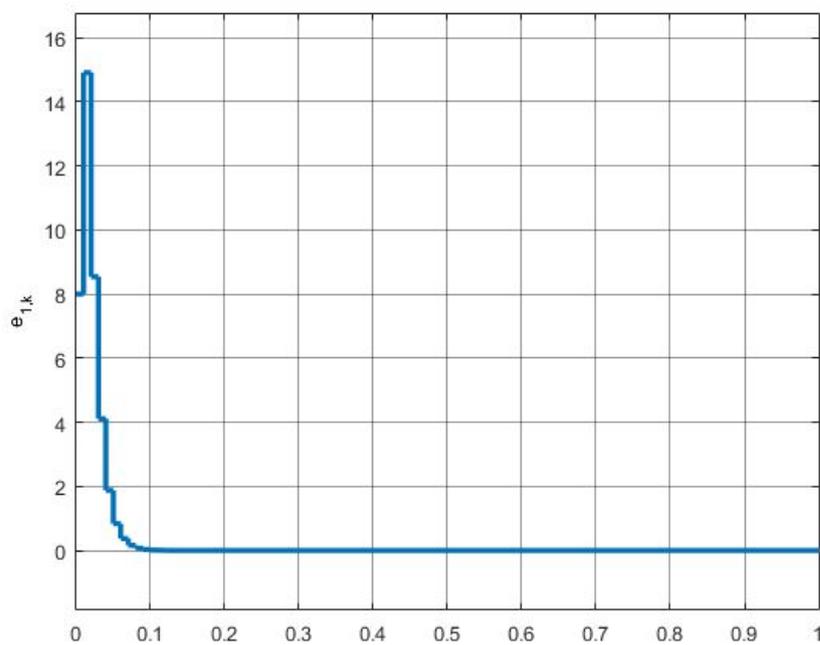
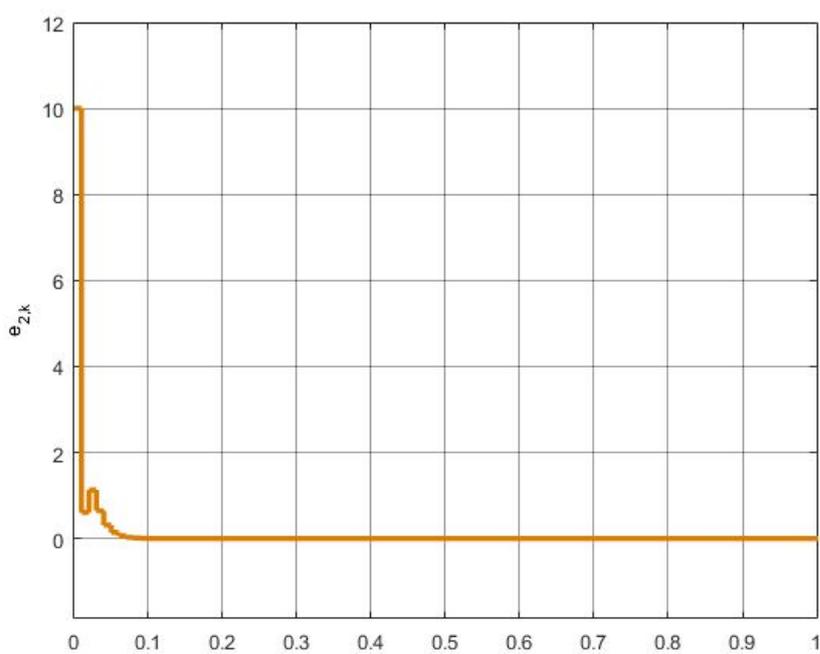


Figura 2.32 – Estado x_2 real e estimado pelo observador.

Figura 2.33 – Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador.Figura 2.34 – Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador.

3 Teoria de Filtragem Adaptativos

Neste capítulo, apresenta-se a introdução sobre filtragem adaptativa e alguns exemplos de aplicações de filtros adaptativos. Quatro amplas classes de aplicações são examinadas, incluindo identificação de sistema, equalização de canal, previsão de sinal e cancelamento de ruído.

Em seguida apresenta-se um método simples e elegante para atualizar os pesos do filtro chamado de mínimo quadrado médio ou método LMS. As características de desempenho do método LMS são investigadas, incluindo limites no tamanho do passo que garantem a convergência, estimativas da taxa de convergência e estimativas do erro em regime permanente.

Uma série de modificações no método LMS básico são apresentadas, incluindo o método LMS normalizado. Em seguida, apresenta-se os algoritmos adaptativos da família atrator para zero. O capítulo termina com um exemplo de aplicação.

3.1 Introdução à Filtragem

Na linguagem cotidiana, “adaptar-se” significa mudar um comportamento para se conformar a novas circunstâncias, estado de adaptação e ajuste. Essa definição é expressa principalmente em termos de adaptação biológica ao meio ambiente. As mesmas definições servem, pelo menos até certo ponto, para sistemas adaptativos “artificiais” ou feitos pelo homem, que são assuntos a serem tratados nesta dissertação (WIDROW; STEARNS, 1985, p.3).

Partindo desse princípio os sistemas adaptativos podem ser definidos como aqueles cuja a estrutura é alterável ou ajustável, tendo como objetivo melhorar o desempenho do sistema em relação a algum critério desejado e às características do ambiente ao qual esta inserido (BRANCO, , p.1).

Dentre as características que podem ser assumidas por esses sistemas, está a possibilidade de adaptação automática a um ambiente variável no tempo, a capacidade para realizar tarefas específicas (filtragem, tomada de decisão) e a independência de procedimentos elaborados para sintetizá-los (geralmente necessário à sistemas não adaptativos) e a habilidade de “projetar-se” e inferir seus padrões de comportamento em resposta a novas situações (WIDROW; STEARNS, 1985, p.3).

Por outro lado, os sistemas adaptativos são mais complexos e difíceis de analisar do que os sistemas não adaptativos. Isso se deve à característica não linear dos parâmetros adaptativos do sistema que são variantes no tempo. No entanto, este tipo de sistema pode ser uma alternativa para controlar plantas cujas características são desconhecidas, vari-

antes no tempo, plantas instáveis ou sujeitas a perturbações internas (BRANCO, , p.1). Um exemplo de sistema com essas é chama-se de filtro.

A Filtragem é uma operação de processamento de sinais cujo objetivo é processar um sinal para manipular a informação contida no mesmo. Em outras palavras, um filtro é um dispositivo que mapeia seu sinal de entrada para outro sinal de saída facilitando a extração da informação desejada contida no sinal de entrada (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2013, p.1).

Quando os parâmetros de um filtro são capazes de alterarem seus respectivos valores com o tempo, diz-se que o filtro é “adaptativo”. O filtro adaptativo produz, a partir de uma dada entrada, $u(k)$, e do vetor de coeficientes, $\mathbf{w}(k)$, uma saída, $y(k)$, a qual é comparada com um dado sinal desejado, $d(k)$, gerando um sinal de erro, $e(k)$. Então, o algoritmo adaptativo, é usado para modificar em cada instante, k , o vetor de coeficientes, $\mathbf{w}(k)$, com o intuito de tornar a saída do filtro adaptativo, $y(k)$, uma boa estimativa do sinal desejado, $d(k)$.

Para atingir tal objetivo, o algoritmo adaptativo, usa os dados de $u(k)$ e $e(k)$ em uma regra de atualização do vetor de coeficientes, o projeto de filtro adaptativo consiste em desenvolver um algoritmo para atualizar o vetor de peso $\mathbf{w}(k)$ para garantir que o filtro satisfaça algum critério de projeto. $\mathbf{w}(k)$, que busca otimizar uma função de custo escolhida apropriadamente (FARHANG-BOROJENY, 2013, p.2).

Durante a captação das amostras do sinal desejado, $d(k)$, um ruído de medição, $v(k)$, pode ser gerado. Este ruído interfere no processo de filtragem dificultando a estimação de $d(k)$ (BRANCO, , p.1), esse processo está representado na Figura 3.1.

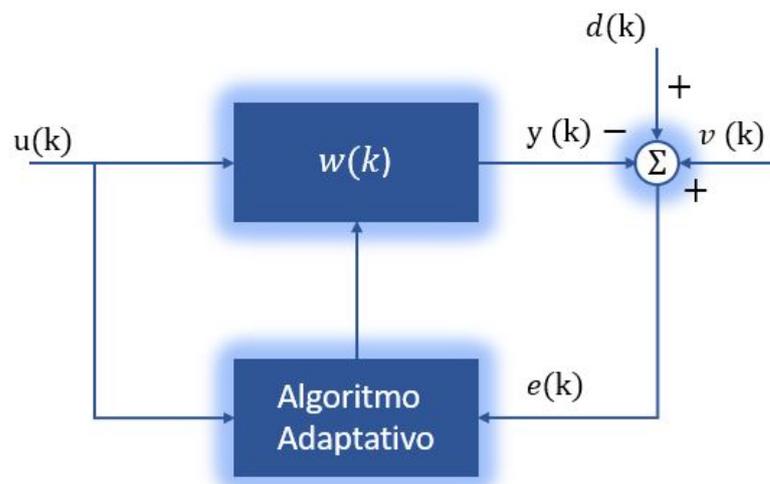


Figura 3.1 – Esquema de Filtragem Adaptativa.

3.1.1 Identificação de Sistema

O sucesso obtido pelos engenheiros na aplicação de técnicas de análise e projeto a problemas práticos muitas vezes pode ser atribuído ao uso eficaz de modelos matemáticos de fenômenos físicos. Em muitos casos, um modelo matemático pode ser desenvolvido aplicando-se princípios físicos subjacentes a cada componente.

No entanto, há outros casos em que essa abordagem de baixo para cima é menos eficaz porque o sistema ou fenômeno físico é muito complexo e não é bem compreendido. Nesses casos, muitas vezes é útil pensar no sistema desconhecido como uma caixa preta onde podem ser feitas medições da entrada e saída, mas pouco se sabe sobre os detalhes do que está dentro da caixa (logo, o termo preto).

Supõe-se que o sistema desconhecido pode ser modelado como um sistema linear de tempo discreto. O problema de obter um modelo do sistema a partir das medições de entrada e saída é chamado de problema de identificação do sistema (SCHILLING; HARRIS, 2011, p.646).

Filtros adaptativos são altamente eficazes para realizar a identificação do sistema usando a configuração mostrada na Figura 3.2

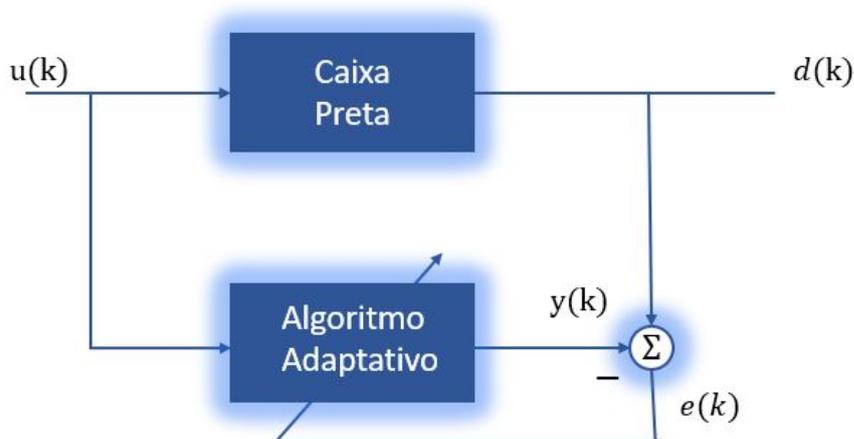


Figura 3.2 – Esquema de identificação de sistema.

Na Figura 3.2, apresenta-se um filtro adaptativo em paralelo com o sistema de caixa preta desconhecido. Ambos os sistemas são acionados pela mesma entrada, $u(k)$. O objetivo é ajustar os parâmetros ou coeficientes do filtro adaptativo para que sua saída imita a resposta do sistema desconhecido. Assim, a saída desejada, $d(k)$, é a saída do sistema desconhecido e a diferença entre a saída desejada e a saída do filtro adaptativo, $y(k)$, é o sinal de erro $e(k)$.

$$e(k) \triangleq d(k) - y(k). \quad (3.1)$$

O algoritmo de atualização dos parâmetros do filtro adaptativo utiliza o erro $e(k)$ e a entrada $u(k)$ para ajustar os pesos de forma a reduzir o erro ao quadrado. Observe-se que se o sinal de erro pode chegar a zero, então a saída do filtro adaptativo é uma reprodução exata da saída do sistema desconhecido. Nesse caso, o filtro adaptativo se torna um modelo exato do sistema de caixa preta desconhecido. Este modelo pode ser usado em estudos de simulação e também pode ser usado para prever a resposta do sistema desconhecido a novas entradas.

3.1.2 Equalização de Canal

Outra classe importante de aplicações de filtros adaptativos pode ser encontrada na indústria de comunicação. Que seja considerado o problema de transmissão de informações por meio de um canal de comunicação. Na extremidade de recepção, o sinal será distorcido devido aos efeitos do próprio canal. Por exemplo, o canal invariavelmente exibirá algum tipo de característica de resposta de frequência com alguns componentes espectrais da entrada mais atenuados do que outros.

Além disso, haverá distorção de fase e atraso e o sinal pode ser corrompido com ruído aditivo. Para remover ou pelo menos minimizar, os efeitos prejudiciais do canal de comunicação, deve-se passar o sinal recebido por um filtro que se aproxime do inverso do canal para que a cascata ou conexão em série dos dois sistemas restaure o sinal original (SCHILLING; HARRIS, 2011, p.647-648).

A técnica de inserir um sistema inverso em série com um sistema original desconhecido é chamada de equalização, tendo em vista que resulta em um sistema geral com uma função de transferência de um. A equalização ou modelagem inversa, pode ser obtida com um filtro adaptativo usando a configuração mostrada na Figura 3.3.

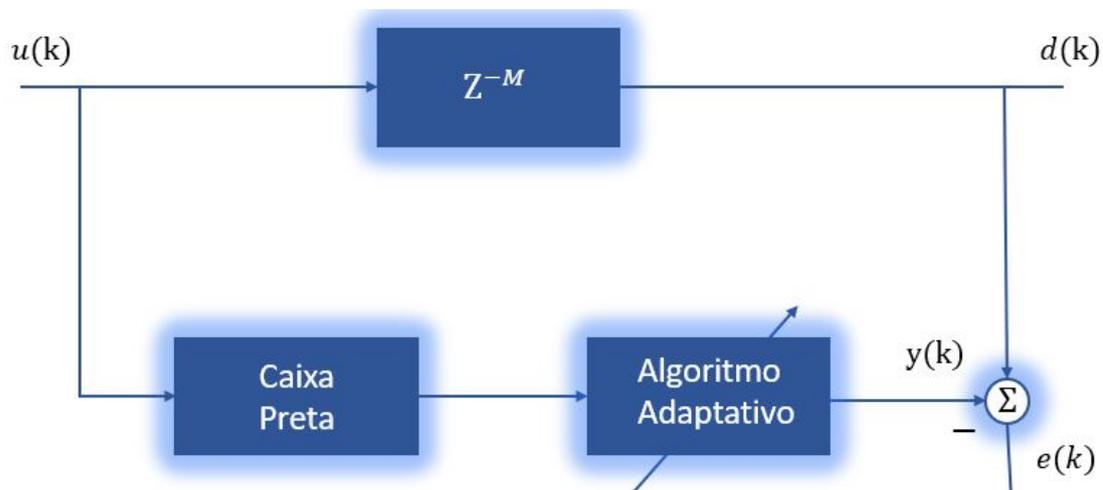


Figura 3.3 – Esquema de equalização de canal.

Nesse momento, o sistema de caixa preta, que representa o canal de comunicação

desconhecido, está em série com o filtro adaptativo. Esta combinação em série está em paralelo com um elemento de retardo correspondente a um retardo de M amostras. Assim, a saída desejada, neste caso, é simplesmente uma versão atrasada do sinal transmitido.

$$d(k) = u(k - M). \quad (3.2)$$

A razão para inserir um atraso é que o sistema de caixa preta normalmente transmite algum atraso ao sinal $u(k)$ conforme ele é processado pelo sistema. Portanto, um sistema inverso exato teria que incluir um avanço de tempo correspondente, algo que não é viável para um filtro causal. Além disso, se o sistema de caixa preta desconhecido representar um canal de comunicação, atrasar o sinal por M amostras não distorcerá a informação que chega ao receptor.

3.1.3 Predição de Sinal

Como ilustração, considere o problema de codificação de voz para transmissão ou armazenamento. A técnica direta é codificar as próprias amostras de fala. Uma alternativa eficaz é usar as amostras anteriores da fala para prever os valores das amostras futuras. Normalmente, o erro de previsão tem uma variação menor que o próprio sinal de voz original. Conseqüentemente, o erro de previsão pode ser codificado usando um número menor de bits do que uma codificação direta da própria fala.

Desta forma, um sistema de codificação eficiente pode ser implementado. Um filtro adaptativo pode ser usado para prever amostras futuras de fala ou outros sinais, usando a configuração mostrada na Figura 3.4.

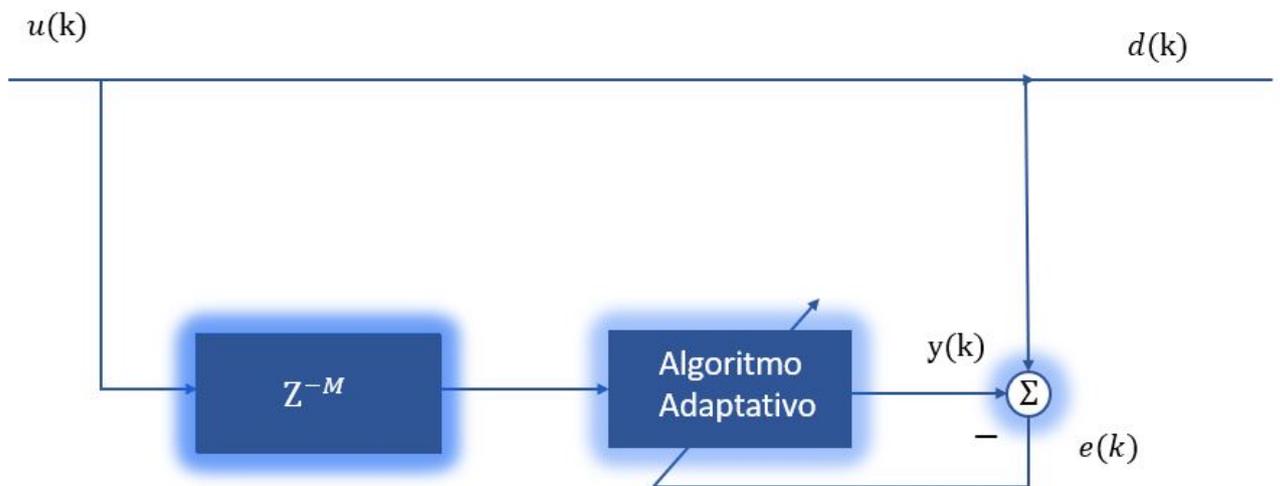


Figura 3.4 – Esquema de predição de sinal.

Nesse caso, a saída desejada é a própria entrada. Uma vez que o filtro adaptativo

processa uma versão atrasada da entrada, a única maneira de o erro ir para zero é se o filtro adaptativo prever com sucesso o valor das M amostras de entrada no futuro. É claro que uma previsão exata de uma entrada completamente aleatória não é possível com um sistema causal. Normalmente, a entrada consiste em um componente determinístico subjacente mais ruído aditivo. Nesses casos, as informações das amostras anteriores podem ser usadas para minimizar o quadrado do erro de predição (SCHILLING; HARRIS, 2011, p.648).

3.1.4 Cancelamento de Ruído

Outra classe de aplicações de filtros adaptativos mostra o problema de interferência ou cancelamento de ruído. Como ilustração, supõe-se que o motorista de um carro faça uma chamada usando um telefone celular. O microfone do celular capta a voz do motorista e o ruído ambiente da estrada, que varia de acordo com a velocidade do carro e as condições de direção. Para tornar a voz do locutor mais inteligível na extremidade receptora, um segundo microfone de referência pode ser colocado no carro para medir o ruído ambiente da estrada (SCHILLING; HARRIS, 2011, p.649).

Um filtro adaptativo pode então ser usado para processar este sinal de referência e subtrair o resultado do sinal detectado pelo microfone primário usando a configuração mostrada na Figura 3.5.

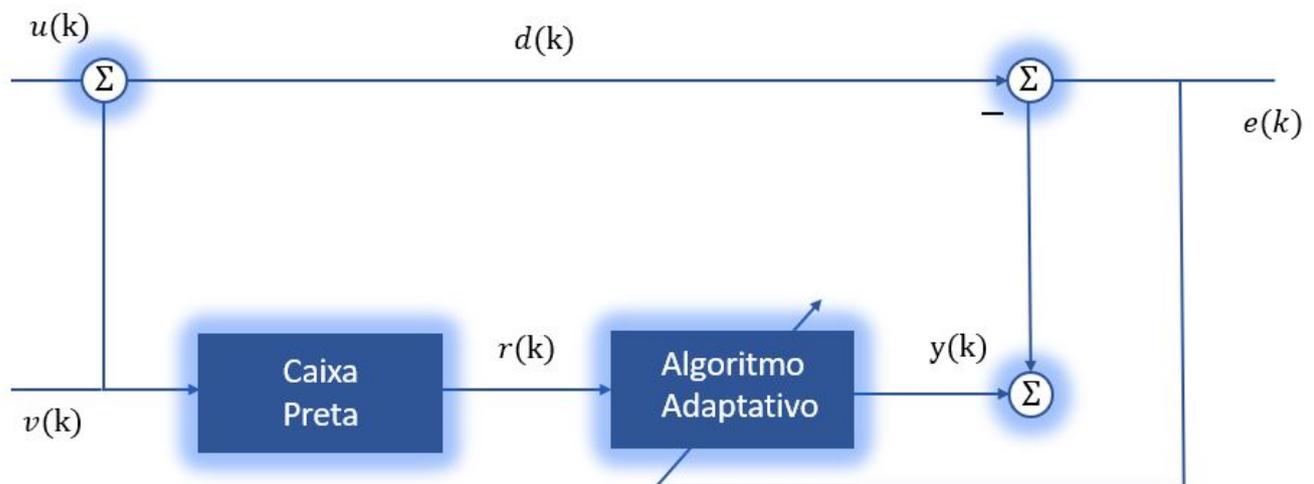


Figura 3.5 – Esquema de cancelamento de ruído.

Observa-se que o sinal desejado $d(k) = u(k) + v(k)$ consiste na relação do sinal de entrada e o ruído. O sinal de referência $r(k)$ é o ruído filtrado. A presença de um sistema de caixa preta desconhecido leva em consideração o fato de que o microfone primário e o microfone de referência são colocados em locais diferentes e, portanto, o sinal de referência $r(k)$ é diferente, mas correlacionado ao ruído $v(k)$ que aparece no microfone

principal (SCHILLING; HARRIS, 2011, p.649). O erro neste caso é

$$e(k) = u(k) + v(k) - y(k). \quad (3.3)$$

Caso a entrada $u(k)$ e o ruído $v(k)$ não estiverem correlacionados um com o outro, então o valor mínimo possível para $e^2(k)$ ocorre quando $y(k) = v(k)$, que corresponde ao ruído da estrada sendo removido completamente do sinal de voz transmitido $e(k)$.

3.1.5 Plantas Esparsas

O termo "esparsidade" está relacionado com uma característica inerente a alguns vetores e matrizes. Em particular, considere um dado vetor

$$\mathbf{p} = [p_1 p_2 p_3 \dots p_N]^T, \quad (3.4)$$

definido em um dado subespaço de dimensão finita de \mathbb{R}^N . Este vetor é dito esparsos se a grande maioria de seus elementos, p_i , com $i = 1, 2, \dots, N$, é nula. O sobrescrito T denota transposta de um vetor ou matriz. A característica esparsa de alguns sinais, plantas e ambientes tem sido objeto de estudo de várias áreas do conhecimento.

Em especial, as plantas esparsas são encontradas em diversas aplicações, tais como estimação de harmônicas em sistemas elétricos de potência, cancelamento de eco em telecomunicações, estimação de canais de comunicação subaquáticos e de canais de comunicação com múltiplos percursos e identificação de eventos sísmicos.

A medida de esparsidade da planta é calculado segundo a definição

$$S(\mathbf{p}) = \frac{N}{\sqrt{N} - N} \left(1 - \frac{\|\mathbf{p}\|_1}{\sqrt{N}\|\mathbf{p}\|_2} \right), \quad (3.5)$$

onde $\|\mathbf{p}\|_1$ e $\|\mathbf{p}\|_2$ são, respectivamente, a norma-1 e a norma-2 do vetor de coeficientes da planta, \mathbf{p} . Tem-se também que $0 \leq S(\mathbf{p}) \leq 1$. Quanto mais próximo $S(\mathbf{p})$ estiver de 1, mais esparsa a planta é considerada. A variável N representa a quantidade de coeficientes de \mathbf{p} .

3.2 Algoritmos Adaptativos da Família LMS

Nesta subseção, apresenta-se a família do algoritmo adaptativo LMS e sua modificação o método LMS normalizado.

3.2.1 Algoritmo LMS

O algoritmo LMS (*Least-Mean Square*) foi proposto pela primeira vez por Widrow e Hoff em 1960 consistindo simplesmente em substituir os valores médios das variáveis pelos seus valores instantâneos (ABRANTES, 2000, p.91). É o algoritmo adaptativo mais

básico e o mais utilizado em aplicações que envolvem filtragem adaptativa linear (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.266) e (MANOLAKIS et al., 2000, p.524).

O LMS é membro dos algoritmos de gradiente estocástico, devido à sua simplicidade computacional e robustez às estatísticas dos sinais, tornou-se amplamente utilizado em diversas aplicações de filtragem adaptativa (DINIZ et al., 1997, p.77).

Tal algoritmo é baseado no algoritmo de descida em gradiente, diferenciando-se pois não são necessária as estatísticas do sinal para o cálculo do vetor gradiente. Para isso, o algoritmo é implementado a partir de estimativas instantâneas do vetor gradiente, baseadas em valores de amostra do vetor de entrada $\mathbf{u}(k)$ e do sinal de erro $e(k)$. Ao longo das últimas décadas, várias modificações e aprimoramentos deste algoritmo têm sido propostas (FARHANG-BOROUJENY, 2013, p.139).

O algoritmo LMS calcula o vetor de pesos através de uma relação recursiva, como mostrado na Equação (3.8), onde os parâmetros são atualizados a partir do erro gerado na iteração (3.7).

$$y(k) = \hat{\mathbf{w}}^T(k)\mathbf{u}(k) \quad (3.6)$$

$$e(k) = d(k) - y(k) \quad (3.7)$$

e

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \mu\mathbf{u}(k)e^*(k), \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{u}(k) = (u(k), \dots, u(k-N+1))$ é o sinal de entrada do filtro (regressor), $d(k)$ representa o sinal desejado em um instante k , $y(k)$ é a saída do filtro e $\hat{\mathbf{w}}(k)$ é uma estimativa do vetor de coeficiente de peso desconhecido $\mathbf{w}(k)$, do modelo de regressão linear múltipla usado para representar o ambiente a partir do qual $\mathbf{u}(k)$ e $d(k)$ são escolhidos em conjunto (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.266).

O parâmetro μ é o passo de adaptação e determina a velocidade que o algoritmo esta convergindo para a solução ótima. Deve ser escolhido em um intervalo para garantir a convergência (DINIZ et al., 1997, p.78), o seu valor deve está dentro do intervalo abaixo:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}. \quad (3.9)$$

onde λ_{\max} é o autovalor máximo calculado a partir da matriz de autocorrelação R .

3.2.2 Algoritmo NLMS

O algoritmo LMS normalizado (NLMS), pode ser visto como uma implementação especial do algoritmo LMS padrão, o qual leva em consideração a variação do nível do sinal na entrada do filtro e seleciona um parâmetro de tamanho do passo normalizado, que resulta em uma convergência estável e rápida do algoritmo de adaptação.

O algoritmo NLMS pode ser desenvolvido a partir de diferentes pontos de vista

Algoritmo 3.1 LMS no tempo discreto1: **Inicialização:**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

2: **Cálculo da saída do filtro:**

$$y(k) = \hat{\mathbf{w}}^T(k)\mathbf{u}(k)$$

3: **Cálculo do sinal do erro**

$$e(k) = d(k) - y(k) + v(k)$$

4: **Atualização dos coeficientes do filtro**

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \mu\mathbf{u}(k)e^*(k)$$

5: **fim**

(FARHANG-BOROUJENY, 2013, p.170). Na forma padrão do algoritmo LMS, a correção $\mu\mathbf{u}(k)e^*(k)$ é aplicada ao vetor de pesos $\hat{\mathbf{w}}(k)$ na iteração $k+1$ sendo diretamente proporcional ao vetor de entrada $\mathbf{u}(k)$.

Assim, quando $\mathbf{u}(k)$ é grande, o algoritmo LMS experimenta um problema de amplificação de ruído gradiente. Para superar essa dificuldade, utiliza-se o algoritmo LMS normalizado, que é uma sua generalização do algoritmo LMS padrão.

Em particular, a correção aplicada ao vetor de pesos $\hat{w}(k)$ na iteração $k+1$ é “normalizada” em relação à norma euclidiana quadrada do vetor de entrada de toque $\mathbf{u}(k)$ na iteração k , por isso denominado “normalizado” (HAYKIN, 1996, p.432-433).

O algoritmo LMS normalizado pode ser visto como a solução para um problema de otimização (minimização) restrita. Especificamente, o problema de interesse pode ser expresso da seguinte forma:

Dado o vetor de entrada $\mathbf{u}(k)$ e a resposta desejada $d(k)$, determina-se o vetor de peso $\hat{\mathbf{w}}[k+1]$ só para minimizar a norma euclidiana quadrada da mudança

$$\delta\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k+1) - \hat{\mathbf{w}}(k) \quad (3.10)$$

no vetor de peso $\hat{\mathbf{w}}(k+1)$ em relação ao seu valor antigo $\hat{w}(k)$, sujeito à restrição

$$\hat{\mathbf{w}}^T(k+1)\mathbf{u}(k) = d(k). \quad (3.11)$$

Para resolver este problema de otimização restrita, utiliza-se o método dos multiplicadores Lagrange (HAYKIN, 1996, p.433). De acordo com este método, a função de custo para o problema em questão consiste em dois termos, dados no lado direito da equação (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.335)

$$J(k) = \|\delta\hat{\mathbf{w}}(k+1)\|^2 + \text{Re} \left[\lambda^* \left(d(k) - \hat{\mathbf{w}}^T(k+1)\mathbf{u}(k) \right) \right] \quad (3.12)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange de valor complexo e o asterisco denota a conjugação complexa. A norma euclidiana quadrada $\|\delta\hat{\mathbf{w}}(k+1)\|^2$ é naturalmente valorizada como real. O operador de parte real, denotado por $\text{Re}[\cdot]$ e aplicado ao segundo termo, garante

que a contribuição da restrição para a função de custo seja igualmente avaliada em termos reais (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.335).

A função de custo $J(k)$ é uma função quadrática em $\hat{\mathbf{w}}(k+1)$, como mostrado pela expansão da Equação (3.12) em

$$J(k) = (\hat{\mathbf{w}}(k+1) - \hat{\mathbf{w}}(k))^T (\hat{\mathbf{w}}(k+1) - \hat{\mathbf{w}}(k)) + \text{Re} \left[\lambda^* \left(d(k) - \hat{\mathbf{w}}^T(k+1) \mathbf{u}(k) \right) \right]. \quad (3.13)$$

Para encontrar o valor ótimo do vetor de peso atualizado que minimiza a função de custo $J(k)$, diferencia-se a função de custo $J[k]$ em relação a $\hat{\mathbf{w}}^T(k+1)$. Então, seguindo o cálculo de Wirtinger para diferenciar uma função de valor real em relação a um vetor de peso de valor complexo e tratar formalmente $\hat{\mathbf{w}}(k)$ como uma constante, obtém-se

$$\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{\mathbf{w}}^T(k+1)} = 2(\hat{\mathbf{w}}(k+1) - \hat{\mathbf{w}}(k)) - \lambda^* \mathbf{u}(k), \quad (3.14)$$

o resultado igual a zero e resolvendo para o valor ótimo $\hat{\mathbf{w}}(k+1)$, obtém-se

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \frac{1}{2} \lambda^* \mathbf{u}(k). \quad (3.15)$$

O multiplicador desconhecido λ é substituído (ou seja, o vetor de peso $\hat{\mathbf{w}}(k+1)$) na restrição da Equação (3.11). Substituindo (3.15) em 3.15, escreve-se

$$\begin{aligned} d(k) &= \hat{\mathbf{w}}^T(k+1) \mathbf{u}(k) \\ &= \left(\hat{\mathbf{w}}(k) + \frac{1}{2} \lambda^* \mathbf{u}(k) \right)^T \mathbf{u}(k) \\ &= \hat{\mathbf{w}}^T(k) \mathbf{u}(k) + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{u}^T(k) \mathbf{u}(k) \\ &= \hat{\mathbf{w}}^T(k) \mathbf{u}(k) + \frac{1}{2} \lambda \|\mathbf{u}(k)\|^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Resolvendo λ , obtém-se

$$\lambda = \frac{2e(k)}{\|\mathbf{u}(k)\|^2}, \quad (3.17)$$

onde

$$e(k) = d(k) - \hat{\mathbf{w}}^T(k) \mathbf{u}(k) \quad (3.18)$$

é o sinal de erro.

A partir das Eqs.(3.15) e (3.17), tem-se

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{w}}(k+1) &= \hat{\mathbf{w}}(k+1) - \hat{\mathbf{w}}(k) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{u}(k)\|^2} \mathbf{u}(k) e^*(k). \end{aligned} \quad (3.19)$$

A fim de exercer controle sobre a mudança no vetor de peso de um ciclo de adaptação para o próximo sem mudar a direção do vetor, é introduzido um fator de escala real

positivo denotado por μ (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.335-336).

$$\begin{aligned}\delta \hat{\mathbf{w}}(k+1) &= \hat{\mathbf{w}}(k+1) - \hat{\mathbf{w}}(k) \\ &= \frac{\mu}{\|\mathbf{u}(k)\|^2} \mathbf{u}(k) e^*(k).\end{aligned}\quad (3.20)$$

Equivalentemente

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \frac{\mu}{\|\mathbf{u}(k)\|^2} \mathbf{u}(k) e^*(k).\quad (3.21)$$

O parâmetro δ deve ser incluído, a fim de evitar tamanho do passo grande quando o vetor de entrada de derivação $u(k)$ torna-se pequeno. A equação de atualização do coeficiente é então dada por

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \frac{\mu}{\delta + \|\mathbf{u}(k)\|^2} \mathbf{u}(k) e^*(k),\quad (3.22)$$

onde $\delta > 0$. O valor de μ deve está no intervalo $0 < \mu < 2$, para garantir a estabilidade e convergência do algoritmo NLMS.

Algoritmo 3.2 NLMS em tempo discreto

1: **Inicialização:**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$\delta > 0, 0 < \mu < 2$

2: **Cálculo da saída do filtro:**

$$y(k) = \hat{\mathbf{w}}^T(k) \mathbf{u}(k)$$

3: **Cálculo do sinal do erro**

$$e(k) = d(k) - y(k) + v(k)$$

4: **Atualização dos coeficientes do filtro**

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \frac{\mu}{\delta + \|\mathbf{u}(k)\|^2} \mathbf{u}(k) e^*(k)$$

5: **fim**

3.3 Algoritmos Adaptativos da Família Atrator para Zero

Nesta seção, apresentam-se os algoritmos da família atrator para zero. A abordagem proposta usa o algoritmo ZA-LMS em espaço de estados em plantas não esparsas e para identificação de sistemas. A seguir a representa-se algoritmo RZA-LMS (*Reweighted Zero-Attracting Least Mean Square*), uma variação.

3.3.1 Algoritmo ZA-LMS

Seja $y(k)$ uma amostra do sinal de saída observada

$$y(k) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) + v(k)\quad (3.23)$$

onde $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T$ é o vetor de coeficiente de filtro, por exemplo, uma resposta ao impulso do canal FIR, $\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]^T$ indica o vetor do sinal de entrada, $x(k)$ e $v(k)$, são os ruídos de observação assumidos como independentes com $x(k)$.

O objetivo dos filtros do tipo LMS é estimar sequencialmente o vetor de coeficientes desconhecido usando o sinal de entrada $x(k)$ e a saída desejada $y(k)$ (CHEN; GU; HERO, 2009). Seja $\mathbf{w}(k)$ o vetor de coeficientes estimado do filtro adaptativo na iteração k . No LMS padrão, a função de custo $L(k)$ é definida como

$$L(k) = \frac{1}{2}e^2(k), \quad (3.24)$$

com

$$e(k) = y(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k) \quad (3.25)$$

sendo o erro instantâneo.

O vetor de coeficientes de filtro é atualizado por

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu \frac{\partial L(k)}{\partial \mathbf{w}(k)} = \mathbf{w}(k) + \mu e(k)\mathbf{x}(k), \quad (3.26)$$

onde μ é o tamanho do passo que controla a convergência e o comportamento em estado estacionário do algoritmo LMS (CHEN; GU; HERO, 2009). Indica-se \mathbf{R} como a matriz de covariância do vetor de entrada $\mathbf{x}(k)$ e λ_{\max} como seu autovalor máximo. A condição de convergência bem conhecida para o LMS é

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}. \quad (3.27)$$

No ZA-LMS, uma nova função de custo $L_1(k)$ é definida pela combinação do erro quadrado instantâneo com a penalidade de norma ℓ_1 do vetor de coeficiente

$$L_1(k) = \frac{1}{2}e^2(k) + \gamma \|\mathbf{w}(k)\|_1. \quad (3.28)$$

Usando a atualização de gradiente descida, a atualização do filtro ZA-LMS é definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mu \frac{\partial L_1(k)}{\partial \mathbf{w}(k)} \\ &= \mathbf{w}(k) - \rho \operatorname{sgn} \mathbf{w}(k) + \mu e(k)\mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $\rho = \mu\gamma$ e $\operatorname{sgn}(\cdot)$ é uma função de sinal de componente definida como

$$\operatorname{sgn}(g) = \begin{cases} g/|g|, & g \neq 0 \\ 0, & g = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Na Equação (3.29), verifica-se que a equação de atualização consiste em três termos. O primeiro e o terceiro termos são semelhantes ao do LMS convencional e o segundo

termo é o termo atrator zero que é responsável pela atração dos coeficientes para zero, acelerando assim a velocidade de convergência e ρ que é o controlador atrator zero que decide a força de atração (SIVASHANMUGAM; ARUMUGAM, 2016).

A análise de convergência do ZA-LMS (CHEN; GU; HERO, 2009) indica que o parâmetro controlador do atrator zero desempenha um papel importante na redução da convergência e da compensação de erro de estado estacionário.

Para o sistema esparso, um pequeno valor de ρ diminui o erro de estado estacionário ao custo de uma convergência mais lenta e se uma convergência mais rápida for necessária, então ρ é aumentado, mas ao mesmo tempo o erro de estado estacionário também aumenta quando o sistema é esparso. Isso exige um ρ ótimo (SIVASHANMUGAM; ARUMUGAM, 2016). Além disso, é evidente a partir de (CHEN; GU; HERO, 2009) que o ZA-LMS não pode superar o LMS padrão quando o sistema não é espesso.

Além disso, ρ deve estar de acordo com o nível de esparsidade quando o sistema muda de esparso para semisparso ou não esparso. Assim, o valor constante de ρ não é adequado especialmente para sistema esparso com variação no tempo e o algoritmo robusto só pode ser alcançado alterando o valor do controlador de atrator zero de acordo com o nível de esparsidade (CHEN; GU; HERO, 2009).

Algoritmo 3.3 ZA-LMS em tempo discreto

1: **Inicialização:**

$$0 < \mu < 2$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{sgn}(g) = \begin{cases} g/|g| & g \neq 0 \\ 0 & g = 0 \end{cases}$$

2: **Cálculo da saída do filtro:**

$$y(k) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{u}(k)$$

3: **Cálculo do sinal do erro**

$$e(k) = d(k) - y(k) + v(k)$$

4: **Atualização dos coeficientes do filtro**

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \rho \text{sgn} \mathbf{w}(k) + \mu e(k)\mathbf{x}(k)$$

5: **fim**

3.3.2 Algoritmo RZA-LMS

O parâmetro ρ no ZA-LMS não distingue entre pesos zero e pesos diferentes de zero. Como todos os pesos são forçados a zerar uniformemente, seu desempenho se deterioraria em sistemas menos esparsos. Motivado pela reponderação em amostragem compressiva, foi proposta uma abordagem heurística para reforçar o atrator para zero denominado LMS reponderado com atração para zero (RZA-LMS).

O RZA-LMS é derivado por meio da nova função de custo

$$L_2(k) = \frac{1}{2}e^2(k) + \gamma' \sum_{i=1}^N \log(1 + |\mathbf{w}_i|/\varepsilon'). \quad (3.31)$$

Neste algoritmo, a penalidade da soma logarítmica $\sum_{i=1}^N \log(1 + |\mathbf{w}_i|/\varepsilon')$ foi introduzida como ele se comporta de forma mais semelhante à ℓ_0 norma do que $\|\mathbf{w}\|_1$. O vetor de coeficientes é então atualizado por

$$\mathbf{w}_i(k+1) = \mathbf{w}_i(k) - \rho \frac{\text{sgn} \mathbf{w}_i(k)}{1 + \varepsilon |\mathbf{w}_i(k)|} + \mu e(k) \mathbf{x}_i(k), \quad (3.32)$$

ou equivalentemente, na forma de vetor

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \rho \frac{\text{sgn}\{\mathbf{w}(k)\}}{1 + \varepsilon |\mathbf{w}(k)|} + \mu e(k) \mathbf{x}(k), \quad (3.33)$$

onde $\rho = \mu\gamma'/\varepsilon'$ e $\varepsilon = 1/\varepsilon'$. O RZA-LMS encolhe seletivamente os pesos com pequenas magnitudes. O atrator zero reponderado tem efeito apenas nas derivações para as quais as magnitudes são comparáveis a $1/\varepsilon$, e há pouca contração exercida nas torneiras cujo $|\mathbf{w}_i[k]| \gg 1/\varepsilon$. Dessa forma, o viés do RZA-LMS pode ser reduzido.

Algoritmo 3.4 RZA-LMS em tempo discreto

1: **Inicialização:**

$$0 < \mu < 2$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{sgn}(g) = \begin{cases} g/|g| & g \neq 0 \\ 0 & g = 0 \end{cases}$$

2: **Cálculo da saída do filtro**

$$y[k] = \mathbf{w}^T(k) \mathbf{u}(k)$$

3: **Cálculo do sinal do erro**

$$e(k) = d(k) - y(k) + v(k)$$

4: **Atualização dos coeficientes do filtro**

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \rho \frac{\text{sgn}\{\mathbf{w}(k)\}}{1 + \varepsilon |\mathbf{w}(k)|} + \mu e(k) \mathbf{x}(k)$$

5: **fim**

3.3.3 Condição de Convergência do ZA-LMS

A condição de convergência do ZA-LMS é fornecida no seguinte teorema:

- **Teorema 1.**

Se μ satisfaz (3.9), o vetor de coeficiente médio $E[\mathbf{w}(k)]$ converge para

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{w} - \frac{\rho}{\mu} \mathbf{R}^{-1} E[\text{sgn} \mathbf{w}(\infty)]. \quad (3.34)$$

Prova. Denotando $\hat{\mathbf{w}}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}$, (3.8) é equivalente a

$$\tilde{\mathbf{w}}(k) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{x}(k) \mathbf{x}(k)^T) \tilde{\mathbf{w}}(k-1) - \rho \text{sgn} \mathbf{w}(k-1) + \mu e(k) \mathbf{x}(k). \quad (3.35)$$

Tomando o valor esperado em ambos os lados de (3.35), tem-se

$$E[\tilde{\mathbf{w}}(k)] = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})E[\tilde{\mathbf{w}}(k-1)] - \rho E[\text{sgn } \mathbf{w}(k-1)]. \quad (3.36)$$

Observa-se que o vetor $\rho E[\text{sgn } \mathbf{w}(-1)]$ é limitado entre $-\rho\mathbf{1}$ e $\rho\mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é um vetor de de 1. Portanto, $E[\tilde{\mathbf{w}}(k)]$ converge se o autovalor máximo de $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})$ for menor que 1, o que é satisfeito por (3.9). Como $E[\mathbf{w}(k)] = E[\tilde{\mathbf{w}}(k)] + \mathbf{w}$, $E[\mathbf{w}(k)]$ também converge com o vetor limitado, apresentado em (3.34).

Pode-se ver que a condição de convergência do ZA-LMS e do LMS padrão é a mesma, independente de ρ . A Equação 3.34 implica que o filtro ZA-LMS retorna uma estimativa tendenciosa do vetor de coeficiente verdadeiro. No entanto, mostramos que com o ρ apropriado, o ZALMS é capaz de gerar um MSE menor do que o LMS padrão para sistemas verdadeiramente esparsos.

- **Teorema2.**

Seja NZ o conjunto de índices de derivações diferentes de zero, ou seja, $w_i \neq 0$ para $i \in NZ$. Assumindo que ρ é suficientemente pequeno para que para cada $i \in NZ$

$$E[\text{sgn } w_i(\infty)] = \text{sgn } w_i, \quad (3.37)$$

o excesso de MSE do filtro ZA-LMS é

$$P_{\text{ex}}(\infty) = \frac{\eta}{2-\eta}P_0 + \frac{\alpha_1}{(2-\eta)\mu}\rho\left(\rho - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1}\right), \quad (3.38)$$

onde

$$\alpha_1 = E\left[\text{sgn } \mathbf{w}(\infty)^T(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})^{-1}\text{sgn } \mathbf{w}(\infty)\right] \quad (3.39)$$

e

$$\alpha_2 = E[\|\mathbf{w}(\infty)\|_1] - \|\mathbf{w}\|_1. \quad (3.40)$$

A prova do Teorema 2, É fácil ver que α_1 é sempre positivo, e o intervalo de α_1 é

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{N}{1 - \mu\lambda_{\max}}. \quad (3.41)$$

Observa-se que o primeiro termo no RHS de (3.38) é o excesso de MSE do filtro

LMS padrão. Portanto, quando $\alpha_2 > 0$, pode-se esperar um MSE menor que o LMS padrão, ou seja, quando ρ é selecionado entre 0 e $2\alpha_2/\alpha_1$,

$$P_{\text{ex}}(\infty) < \frac{\eta}{2 - \eta} P_0.$$

Para especificar mais α_2 , tem-se o seguinte resultado.

Lema 1. Sejam Z e NZ os conjuntos de índices de derivações zero e derivações diferentes de zero, respectivamente. Se $\mathbf{w}(n)$ for assumido como distribuição gaussiana, uma aproximação de primeira ordem de α_2 é dada por

$$\alpha_2 \simeq \sum_{i \in Z} \sqrt{\frac{2}{\pi} \Phi_{ii}(\infty)} - \frac{\rho}{\mu} \sum_{i \in NZ} |b_i|, \quad (3.42)$$

onde $\Phi_{ii}(\infty)$ e b_i são o i -ésimo elemento da diagonal de $\Phi(\infty)$ e \mathbf{b} respectivamente, definidos como

$$\begin{aligned} \Phi(\infty) &= E[(\mathbf{w}(\infty) - \mathbf{w})(\mathbf{w}(\infty) - \mathbf{w})^T] \\ \mathbf{b} &= \mathbf{R}^{-1} E[\text{sgn } \mathbf{w}(\infty)]. \end{aligned}$$

Prova. O termo α_2 pode ser escrito como

$$\alpha_2 = \sum_{i \in Z} E[|w_i(\infty)|] + \sum_{i \in NZ} (E[|w_i(\infty)|] - |w_i|). \quad (3.43)$$

Agora, utiliza-se o seguinte fato: Assumindo que uma variável aleatória z é gaussiana distribuída com média ν e variância σ^2 ,

$$E[|z|] = \sqrt{\frac{2}{\pi} E[z^2]} + o\left(\frac{|\nu|}{\sigma}\right) \quad \text{quando } |\nu| \ll \sigma \quad (3.44)$$

e

$$E[|z|] = |\nu| + o\left(\frac{\sigma}{|\nu|}\right) \quad \text{quando } |\nu| \gg \sigma. \quad (3.45)$$

Como $w_i(\infty)$ é uma variável aleatória gaussiana, com (3.34), (3.44) e (3.45), a aproximação de primeira ordem de α_2 é

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\simeq \sum_{i \in Z} \sqrt{\frac{2}{\pi} E[w_i(\infty)^2]} - \sum_{i \in NZ} |E[w_i(\infty)] - w_i| \\ &= \sum_{i \in Z} \sqrt{\frac{2}{\pi} \Phi_{ii}(\infty)} - \frac{\rho}{\mu} \sum_{i \in NZ} |b_i|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Existem dois termos concorrentes no RHS de (3.42). A primeira varia em torno de zero para os pesos associados a coeficientes zero de \mathbf{w} . O segundo termo é um viés, que se deve ao encolhimento dos pesos associados a coeficientes diferentes de zero de \mathbf{w} . Quando os toques zero superam os toques diferentes de zero, o primeiro termo domina o segundo, e α_2 positivo ocorre junto com uma redução associada no MSE.

3.3.4 Simulações Numéricas

Nesta subseção, apresenta-se o desempenho do ZA-LMS e do RZA-LMS comparado ao desempenho do filtro LMS padrão. O experimento foi projetado para demonstrar o rastreamento e desempenhos em estado estacionário. O experimento consiste em uma planta esparsa, \mathbf{p} , de esparsidade $S(\mathbf{p}) = 0,9435$, com coeficientes ativos iguais a $\{0.1, 1, 1.0 - 0.5, 0.1\}$ localizados nas posições $\{1, 5, 7, 10, 15\}$, respectivamente.

Na aplicação, existem 16 coeficientes no sistema variável no tempo. Inicialmente, define-se o 5 peso com o valor 1 e os demais como zero, fazendo com que o sistema tenha uma esparsidade de $1/16$. Após 500 iterações, todos os toques ímpares são definidos como 1, enquanto todos os toques pares permanecem zero, ou seja, uma esparsidade de $8/16$.

Após 1000 iterações, todos os toques pares são configurados com o valor -1 , enquanto todos os toques ímpares são mantidos como 1, deixando um sistema completamente não esparsa. O sinal de entrada e o ruído observado são sequências aleatórias gaussianas brancas com variação de 1 e 10^{-3} , respectivamente.

Os três filtros (LMS, ZA-LMS e RZA-LMS) são executados 200 vezes. Os parâmetros são definidos como $\mu = 0.05$, $\rho = 5 \times 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10$. Observe que utiliza-se os mesmos ρ e ε para três filtros (LMS, ZA-LMS, RZA-LMS). A estimativa do desvio quadrado médio (MSD) é mostrada na Figura 3.6.

Como é possível observar pelos resultados do MSD, quando o sistema é muito esparsa (antes da 500 iteração), o ZA-LMS e o RZA-LMS produzem convergência mais rápida e melhor desempenho em estado estacionário do que o LMS padrão. O RZA-LMS atinge um MSD menor que o ZA-LMS.

Após a 500 iteração, à medida que o número de pesos diferentes de zero aumenta para 8, o desempenho do ZA-LMS se deteriora enquanto o RZA-LMS mantém o melhor desempenho entre os três filtros. Após 1000 iterações, o RZA-LMS ainda tem desempenho comparável ao LMS padrão, mesmo que o sistema agora seja completamente esparsa.

É possível ver que, para este sistema esparsa longo, os algoritmos de atração de zero superam significativamente o LMS padrão, conforme medido pela taxa de convergência mais rápida e MSE de estado estacionário inferior apresentado na Figura 3.7.

Os resultados da simulação demonstraram que o algoritmo LMS esparsa supera o tradicional algoritmo LMS. Sabe-se que existem muitos fatores que influenciam o desempenho do algoritmo, como a função de custo do algoritmo, a restrição esparsa do algoritmo, a estrutura do modelo do sistema etc.

Para obter uma melhor estimativa do sistema, deve-se definir valores de parâmetros adequados. Quanto mais informações tivermos sobre o modelo de sistema, mais algoritmo preciso será possível projetar. Nas Figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 apresenta-se a evolução dos pesos.

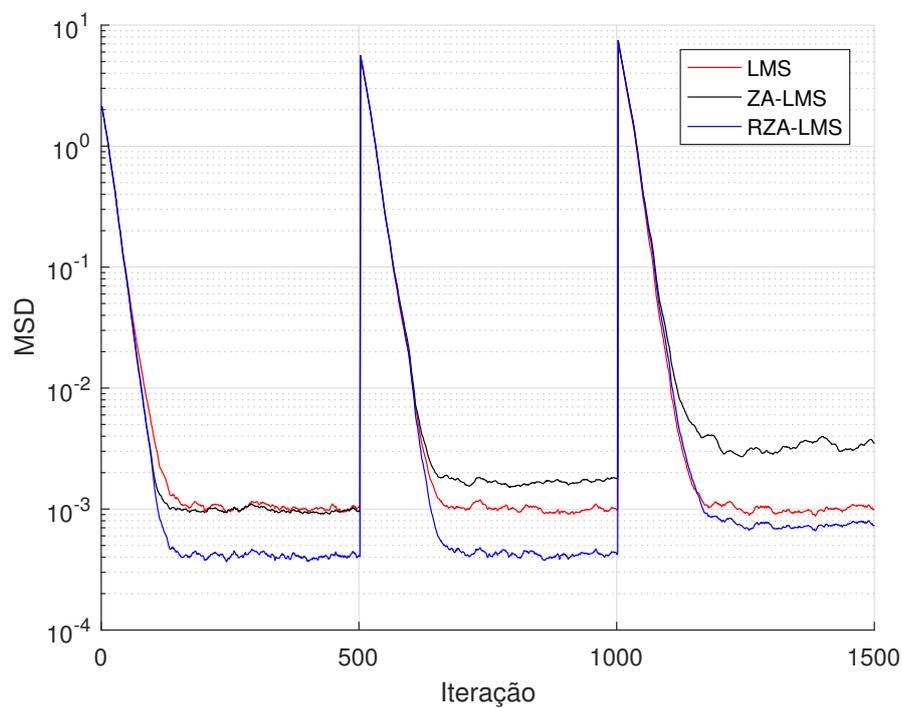


Figura 3.6 – Comportamento de rastreamento e estado estacionário de filtros adaptativos de 16 ordens, acionados por sinal de entrada branco.

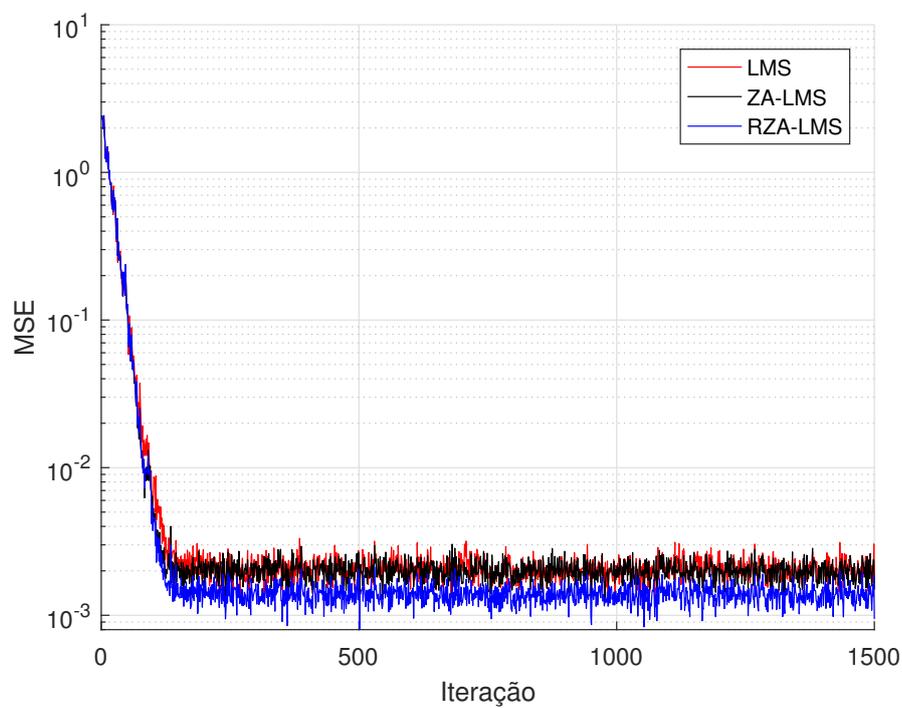


Figura 3.7 – Comportamento de rastreamento e estado estacionário de filtros adaptativos de 16 ordens, acionados por sinal de entrada branco.

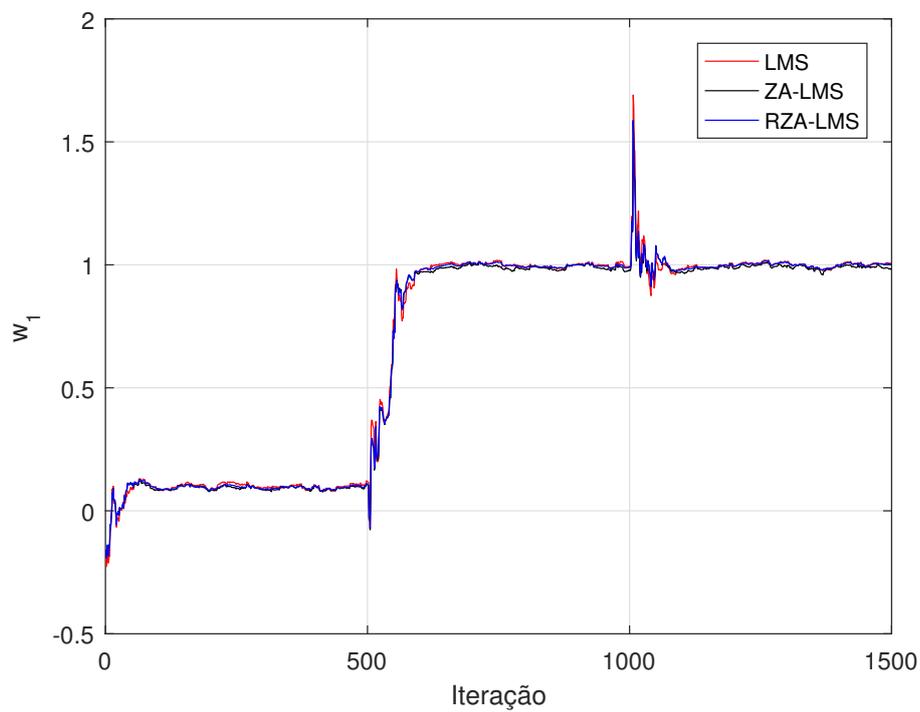


Figura 3.8 – Evolução do peso w_1 .

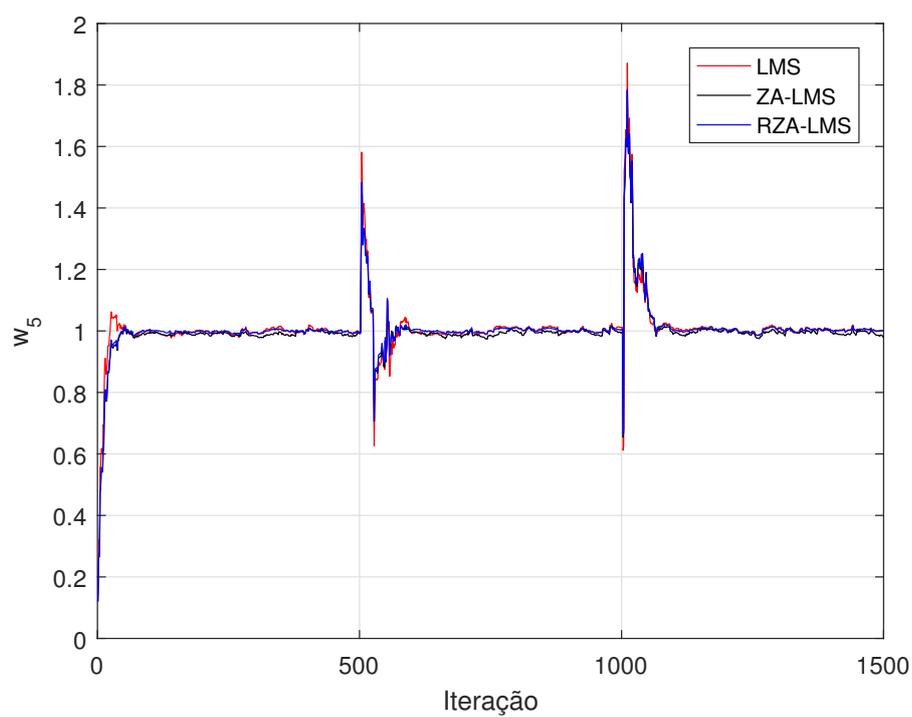


Figura 3.9 – Evolução do peso w_5 .

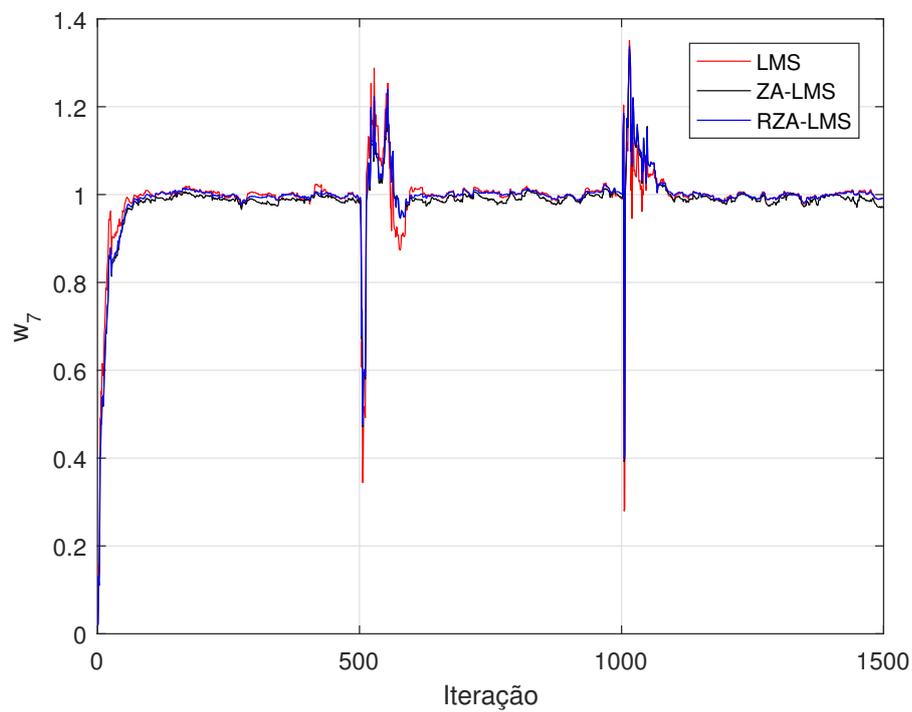


Figura 3.10 – Evolução do peso w_7 .

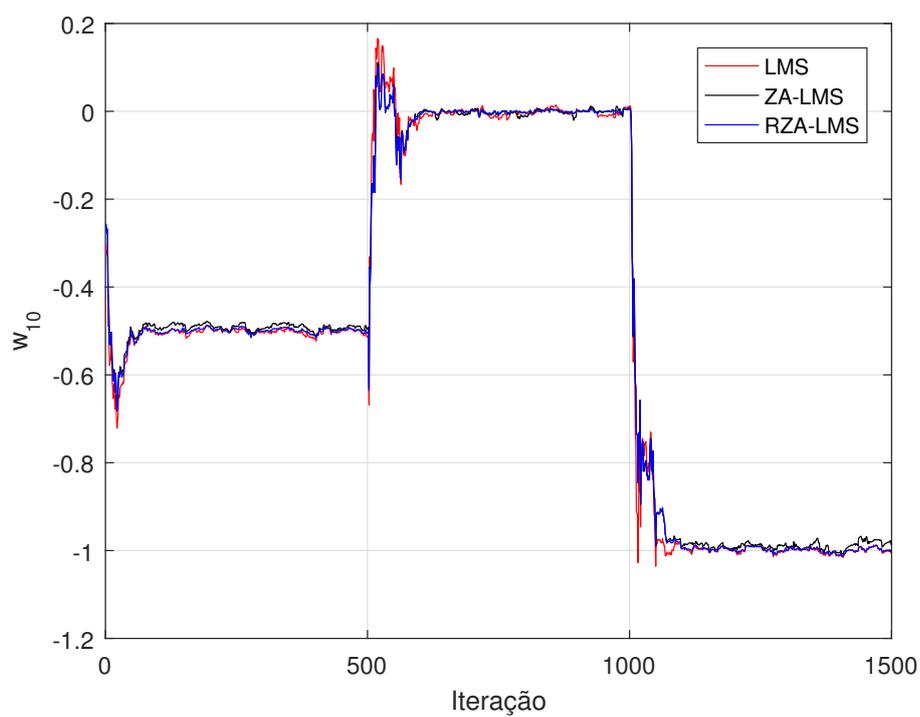
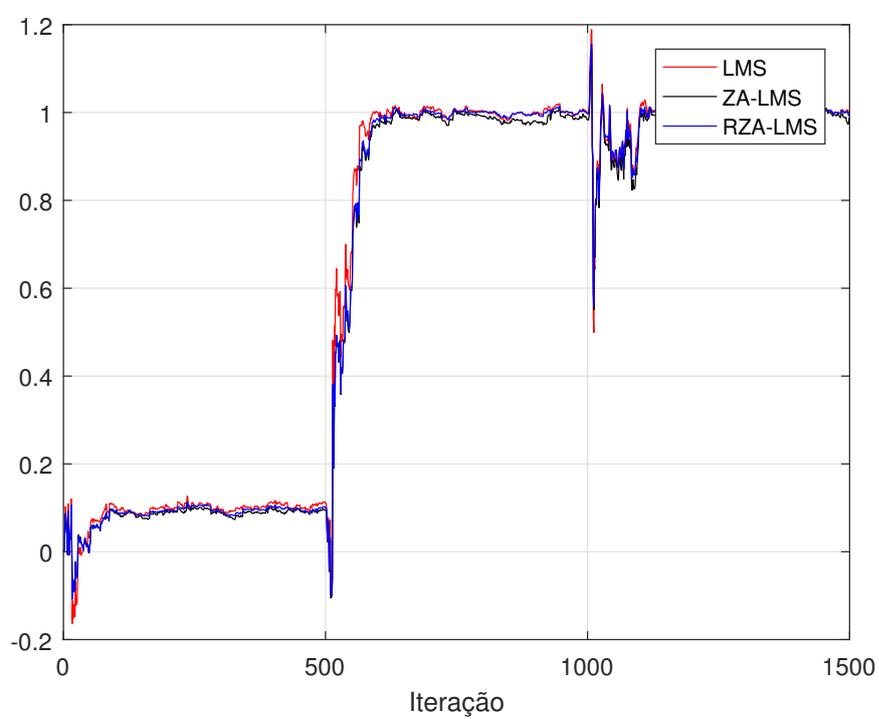


Figura 3.11 – Evolução do peso w_{10} .

Figura 3.12 – Evolução do peso w_{15} .

4 Algoritmo Adaptativo em Espaço de Estado

Os filtros adaptativos desempenham um papel vital no desenvolvimento de uma ampla variedade de sistemas, a capacidade de operar satisfatoriamente em um ambiente desconhecido e rastrear variações no tempo das estatísticas de entrada tornam o filtro adaptativo um dispositivo poderoso para processamento de sinais e aplicações de controle (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.35).

A filosofia dos filtros adaptativos gira em torno dos mínimos quadrados médios (LMS), mínimos quadrados normalizado (NLMS) e suas variantes. Uma das principais aplicações de LMS e NLMS tem sido rastrear variações no tempo em um sinal.

O modelo depende da natureza do problema de rastreamento, requer que o designer tenha liberdade para selecionar um modelo que corresponda o mais próximo ao ambiente subjacente, o que despertou considerável interesse na literatura. Operando em ambiente não estacionário, o LMS (independente do modelo) oferece algumas vantagens.

Se o mecanismo responsável pela geração de um sinal for conhecido *a priori*, ele pode ser usado com vantagem para rastrear o sinal de perto na presença de ruído de observação. No caso de LMS e NLMS, não há uma maneira direta de incorporar tais informações, *a priori*, em suas formulações matemáticas.

Por outro lado, têm-se os filtros que são construídos em torno da estrutura de espaço de estados, devido a dinâmica do sistema podem incorporar essas informações, a princípio, como a família do filtro de Kalman.

Neste capítulo, apresenta-se os algoritmos baseados no modelo em espaço de estado linear. Oferecendo dois pontos positivos:

- Qualquer sistema linear causal pode ser representado por um modelo de espaço de estado, portanto, um designer não está restrito ao modelo de regressão linear;
- Natureza (MIMO) do modelo de espaço de estado permite o tratamento de observações vetoriais.

O NLMS e o LMS padrão, por outro lado, lidam apenas com observações escalares. Adequado à natureza da generalização.

O desenvolvimento começa com uma discussão do modelo de espaço de estado de um sistema discreto linear variável no tempo não forçado. A saída do sistema que pode ter sido corrompida pelo ruído de observação é considerada disponível para medições. Este modelo constitui a base do desenvolvimento.

A derivação de SSLMS, com base na solução de norma mínima de um sistema

subdeterminado de equações lineares, usa apenas a última observação no algoritmo recursivo. A solução com fator de normalização é chamada de LMS normalizado por espaço de estado (SSNLMS), onde omitir esse fator nos dá simplesmente SSLMS.

É mostrado que o modelo de regressão linear é um caso especial do modelo de espaço de estado geral usado na derivação de SSLMS. Na verdade, tal fato demonstra que SSLMS é uma generalização verdadeira do LMS padrão. A formulação de SSLMS em espaço de estado também torna possível sua utilização na estimativa de estado em sistemas de controle.

O SSLMS supera a capacidade de rastreamento do LMS padrão, a qual é limitada devido à suposição do modelo de regressão linear. Ao superar essa restrição, o SSLMS exhibe uma melhoria acentuada no desempenho do rastreamento em relação ao LMS padrão e suas variantes conhecidas. Partindo desse princípio, propõem-se neste trabalho nova variante do filtro adaptativo da família do LMS em espaço de estado para estimação das variáveis de estado.

O método proposto, denominado algoritmo do tipo ZA-LMS, é comparado com os demais algoritmo da literatura para avaliação de desempenho em termos de velocidade de convergência e capacidade de rastreamento. Por fim, apresenta-se as aplicações para validar o desempenho do algoritmo em comparação aos existentes na literatura.

4.1 Analogia do LMS padrão com o SSLMS

O filtro transversal adaptativo clássico apresenta-se na Figura 4.1. Com o propósito de mostrar a analogia do SSLMS com o LMS padrão. Tem-se a entrada do sistema:

$$\mathbf{u}(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n+1)]^T. \quad (4.1)$$

O vetor de entrada para um sistema com os pesos de derivação:

$$\mathbf{w}_0(k) = [w_{01}(k), w_{02}(k), \dots, w_{0n}(k)]^T. \quad (4.2)$$

A saída deste filtro é corrompida por ruído de observação $v(k)$. O sinal $d(k)$ é chamado de sinal desejado. Representam-se os pesos de derivação de um filtro transversal adaptativo como:

$$\hat{\mathbf{w}}(k) = [\hat{w}_1(k), \hat{w}_2(k), \dots, \hat{w}_n(k)]^T, \quad (4.3)$$

onde $\hat{\mathbf{w}}(k)$ pode ser pensado como uma estimativa dos pesos de derivação desconhecidos \mathbf{w}_0 . A saída desse filtro é $s(k)$. O problema é ajustar os pesos de derivação estimados de modo a minimizar o erro $e(k)$ em algum sentido. Se for subdeterminado, obtemos o LMS

normalizado. Descartando o fator de normalização, tem-se o LMS padrão, onde

$$\begin{aligned}
 m &= 1 \\
 A &= I \\
 C(k) &= \mathbf{u}(k) \\
 \bar{x}(k) &= \hat{\mathbf{w}}(k) \\
 \varepsilon(k) &= e(k) \\
 y(k) &= d(k) \\
 \bar{y}(k) &= s(k).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Então, o filtro desenvolvido se transforma no LMS padrão. Partindo desse princípio desenvolve-se nesta dissertação o algoritmo SSZA-LMS. Por este motivo, afirma-se que SSLMS e suas variantes são na verdade generalização dos filtros LMS convencionais.

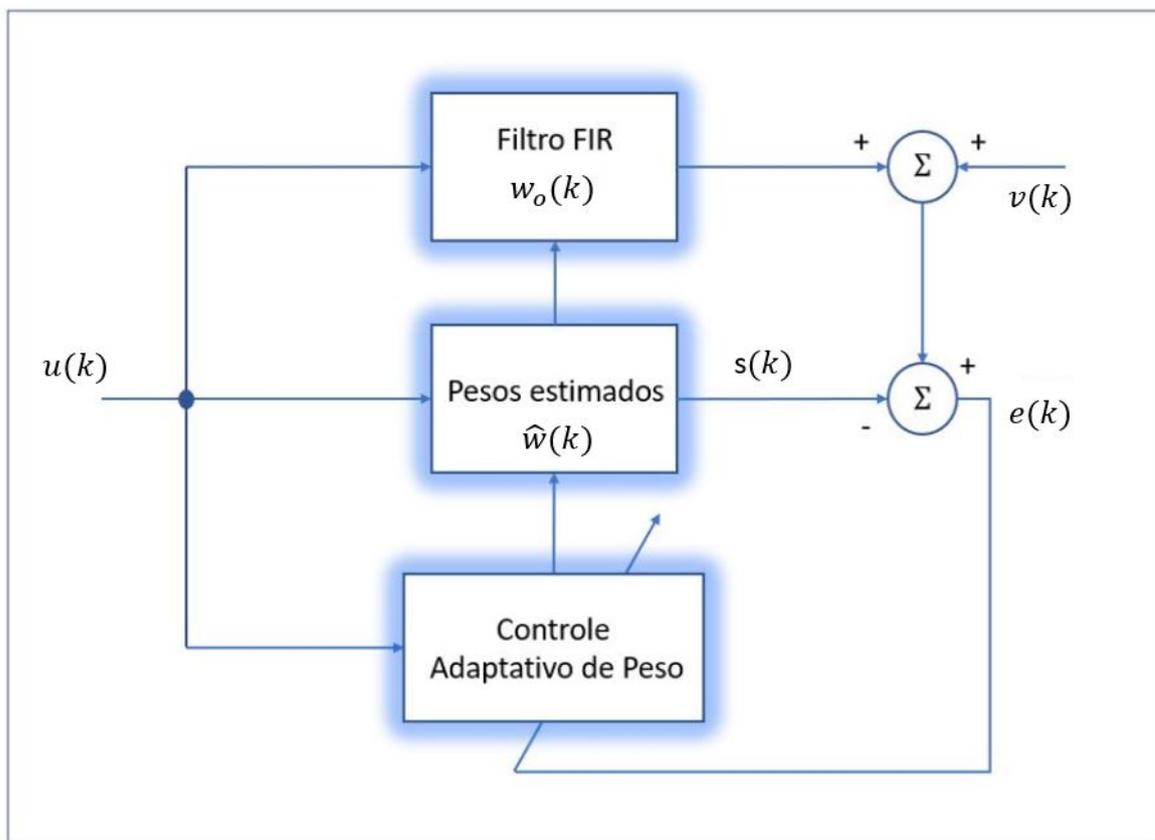


Figura 4.1 – Filtro Transversal Adaptativo.

4.2 Algoritmos em Espaço de Estado

Nesta seção, apresenta-se o modelo de espaço de estado e os algoritmos presentes na literatura.

4.2.1 Modelo em Espaço de Estado

Inicialmente, define-se o modelo geral em espaço de estados de um sistema linear variável no tempo discreto representado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado do processo, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída medido de modo que $m \leq n$. Nas Equações (4.5) e (4.6), $\mathbf{A}(k)$ é a matriz de transição de estados, $\mathbf{B}(k)$ é a matriz de entrada, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entrada, $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^m$ são os vetores de ruídos de processo e medição, respectivamente.

Em (4.6), $\mathbf{C}(k)$ é a matriz de saída, com dimensão $\mathbf{dim}[\mathbf{C}(k)] = m \times n$ e $\mathbf{D}(k)$ é a matriz de transmissão direta com $\mathbf{dim}[\mathbf{D}(k)] = m \times p$. Presume-se que o sistema discreto por (4.5) e (4.6) seja observável.

Um caso especial é o sistema linear não-forçado (i.e., autônomo) variável no tempo, representado como (AHMED; MOINUDDIN; AL-SAGGAF, 2014).

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \quad (4.8)$$

A representação do espaço de estado para um sistema de tempo contínuo não linear é:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (4.10)$$

onde f e h são funções não lineares e os parâmetros foram definidos anteriormente (AHMED; MOINUDDIN; AL-SAGGAF, 2014).

4.2.2 Estimação de Estado

Inspirada na estrutura de espaço de estado do filtro de Kalman, a generalização do LMS tem sido obtida na forma de SSLMS por Malik e Salman (2008), usando o modelo em espaço de estado do ambiente subjacente e algumas variantes. Provou-se que o algoritmo SSLMS apresenta maior taxa de convergência e desempenho de rastreamento superior em relação às abordagens clássicas existentes, além da capacidade de lidar com sistemas MIMO (QAYYUM; SALMAN; MALIK, 2019).

A ideia é gerar um vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ usando as observações da saída

$\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \mathbf{y}(3) \cdots \mathbf{y}(k)$, supondo que as observações $\mathbf{y}(k)$ são medidas a partir do instante $k = 1$ e o vetor de estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ é desconhecido. A hipótese de observabilidade do par $(\mathbf{A}(k), \mathbf{C}(k))$ permite projetar um estimador de estado.

O modelo do sistema dinâmico (caracterizado pelas matrizes do sistema) permite calcular uma predição da estimação do estado $\bar{\mathbf{x}}(k)$ no tempo k (usando observações até no instante $k - 1$) da seguinte maneira (MALIK; SALMAN, 2008):

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1), \quad (4.11)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ é o estado estimado para o instante $k-1$ e $\bar{\mathbf{x}}(k)$ é o estado previsto no instante k . O erro de predição da saída é definido como:

$$\varepsilon(k) = \mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k) \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{y}(k)$ é obtido como em (4.6) e

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (4.13)$$

é a predição da saída. Define-se o erro de estimação como:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) \quad (4.14)$$

onde $\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)$ é a saída estimada. Uma das atualizações do estimador é dada por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\varepsilon(k) \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{K}(k)$ é o ganho do observador, que é determinado por diferentes métodos apresentados neste capítulo. (MALIK; SALMAN, 2008).

4.2.3 Ganho dos Algoritmos em Espaço de Estado

Nesta subseção, derivou-se uma versão generalizada do LMS, a saber o SSLMS que incorpora a dinâmica do modelo conforme fornecida em (4.5) e (4.6). Relaciona-se o erro de predição (4.12) e o erro de estimação (4.14) da seguinte forma:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) = \varepsilon(k) - \mathbf{C}(k)\delta(k), \quad (4.16)$$

com

$$\delta(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k). \quad (4.17)$$

Assumindo-se que $\mathbf{C}(k)$ é posto completo, $\hat{\mathbf{x}}(k)$ é escolhido de modo que $\mathbf{e}(k) = \mathbf{0}$, o que implica o seguinte:

$$\varepsilon(k) = \mathbf{C}(k)\delta(k). \quad (4.18)$$

Se $m < n$ então há infinitas escolhas de $\hat{\mathbf{x}}(k)$ que satisfazem $\mathbf{e}(k) = \mathbf{0}$. Recorreu-se à solução de norma mínima de (4.18), que minimiza $\delta(k)$ em (4.17), sujeito à restrição $\mathbf{e}(k) = \mathbf{0}$. Tem-se:

$$\delta(k) = \mathbf{C}^T(k) \left(\mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k) \right)^{-1} \varepsilon(k) \quad (4.19)$$

relacionando a Equação (4.17) e (4.19), a equação de atualização do estimador é derivada como:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}^T(k) \left(\mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k) \right)^{-1} \varepsilon(k) \quad (4.20)$$

comparando (4.20) com (4.15), o ganho do observador $\mathbf{K}(k)$ de acordo com o método de solução de norma mínima passa a ser:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{C}^T(k) \left(\mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k) \right)^{-1}. \quad (4.21)$$

Na sua forma, o ganho em (4.21) tem um escopo limitado. Para que um estimador de estado seja válido, a saída do sistema (que é a entrada do estimador) para as estimativas de estado deve ser controlável. Declarando-se que $(\mathbf{A}(k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k-1), \mathbf{K}(k))$ deve ser controlável.

A escolha do ganho conforme dado na Equação (4.21), não garante que este requisito será sempre satisfatório. Além disso, o designer prefere ter um controle da taxa de convergência, o que é feito por meio do parâmetro de tamanho do passo no LMS padrão. Em vista dessas considerações, é introduzido um parâmetro de tamanho do passo μ e a matriz \mathbf{G} . Obtem-se

$$\mathbf{K}(k) = \mu \mathbf{G} \mathbf{C}^T(k) \left(\mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k) \right)^{-1}. \quad (4.22)$$

A matriz \mathbf{G} é escolhida de modo a ter um estimador válido (ou seja, par controlável $(\mathbf{A}(k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k-1), \mathbf{K}(k))$), enquanto a taxa de convergência é controlada por meio de μ .

Em certos casos, como modelo sinusoidal a condição de controlabilidade existe sem a matriz \mathbf{G} em (4.22). Por outro lado, modelos de velocidade constante e aceleração constante não atendem a este requisito e, portanto, o projetista deve escolher um \mathbf{G} para que o estimador seja válido. A escolha real desta matriz depende da natureza do problema.

Finalmente, para os casos em que a invertibilidade de $\mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k)$, não pode ser garantida, pode-se usar um pequeno número γ , que modifica (4.22) para:

$$\mathbf{K}(k) = \mu \mathbf{G} \mathbf{C}^T(k) \left(\gamma \mathbf{I} + \mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k) \right)^{-1}. \quad (4.23)$$

Esta modificação nos permite lidar com problemas onde $\mathbf{C}(k)$ pode tornar-se deficiente em classificação por um curto intervalo. $\gamma = 0$ é usado em situações onde $\mathbf{C}(k)$ de

classificação completa. Define-se como:

$$\gamma \mathbf{I} + \mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k). \quad (4.24)$$

Como um fator de normalização, as Equações (4.11), (4.13), (4.15) e (4.23) é denominado como LMS normalizado em espaço de estado (SSNLMS). É a partir de (4.23) que uma matriz $m \times m$ deve ser invertida. Uma simplificação neste algoritmo resulta na remoção do fator de normalização, o que reduz o ganho do observador para:

$$\mathbf{K}(k) = \mu \mathbf{G}\mathbf{C}^T(k) \quad (4.25)$$

As Equações (4.11), (4.13), (4.15) e (4.25) é, portanto, chamado de LMS em espaço de estado (SSLMS). Uma analogia do SSLMS com o LMS padrão é apresenta-se na Seção 4.1.

Algoritmo 4.1 SSNLMS em tempo discreto

1: **Inicialização:**

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

2: **for:** $k = 1, 2, \dots, N$

3: **Medição da saída do sistema:** $\mathbf{y}(k)$

4: **Predição do estado (estimativa a priori)**

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k-1) + \hat{\mathbf{x}}(k-1)$$

5: **Cálculo da saída estimada**

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k)$$

6: **Erro de estimação da saída**

$$\varepsilon(k) = \mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)$$

7: **Cálculo do ganho observador**

$$\mathbf{K}(k) = \mu \mathbf{G}\mathbf{C}^T(k) \left(\gamma \mathbf{I} + \mathbf{C}(k)\mathbf{C}^T(k) \right)^{-1}$$

8: **Estado estimado (estimativa a posteriori)**

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\varepsilon(k)$$

9: **fim**

Algoritmo 4.2 SSLMS em tempo discreto1: **Inicialização:**

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

2: **for:** $k = 1, 2, \dots, N$ 3: **Medição da saída do sistema:** $\mathbf{y}(k)$ 4: **Predição do estado (estimativa a priori)**

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k-1) + \hat{\mathbf{x}}(k-1)$$

5: **Cálculo da saída estimada**

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k)$$

6: **Erro de estimação da saída**

$$\varepsilon(k) = \mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)$$

7: **Cálculo do ganho observador**

$$\mathbf{K}(k) = \mu \mathbf{G} \mathbf{C}^T(k)$$

8: **Estado estimado (estimativa a posteriori)**

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\varepsilon(k)$$

9: **fim**

4.3 Algoritmo Proposto

Nesta seção, apresenta-se o novo algoritmo para a estimação de estado, baseado em espaço de estados o SSZA-LMS. A atualização da Equação (4.26) pode ser considerada como a adaptação com base na descida mais íngreme (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014) e, portanto, pode ser generalizada com a seguinte regra de atualização:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) - \mu \nabla \mathbf{J}(k), \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{J}(k)$ é a função de custo a ser minimizada, $\nabla \mathbf{J}(k)$ é o gradiente. Diferentes algoritmos de filtro adaptativo utilizam várias funções de custo para resolver os problemas do processamento de sinal. Buscam-se as melhores funções de custo para adaptar melhor o algoritmo ou alcançar a velocidade de convergência mais rápida. A função de custo do algoritmo SSZA-LMS proposto é (RODRIGUES J. A.; FERNANDES, 2021):

$$\mathbf{J}(k) = \frac{1}{2} \varepsilon^T(k) \varepsilon(k) + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1, \quad (4.27)$$

onde $\varepsilon(k)$ é o erro de predição definido como

$$\varepsilon[k] = \mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k), \quad (4.28)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k). \quad (4.29)$$

Substituindo (4.28) e (4.29) em (4.27) tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(k) &= \frac{1}{2}(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k))^T(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k))^T(\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k)) + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}^T(k) - \bar{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{C}^T(k))(\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k)) + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \\
&= \frac{1}{2}[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \\
&\quad + \bar{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1] \tag{4.30} \\
&= \frac{1}{2}[-\bar{\mathbf{x}}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k) - \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + 2\bar{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)] + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \\
&= \frac{1}{2}[-2\bar{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + 2\bar{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)] + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \\
&= \frac{1}{2}[\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + 2\mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k)] + \gamma \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \\
&= \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \gamma \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k)).
\end{aligned}$$

Em seguida, deriva-se $\mathbf{J}(k)$ em relação a $\bar{\mathbf{x}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(k)}{\partial \bar{\mathbf{x}}(k)} &= \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \gamma \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k)) \\
&= \mathbf{C}^T(k)(\mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k)) + \gamma \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k)) \tag{4.31} \\
&= \mathbf{C}^T(k)(\bar{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}(k)) + \gamma \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k)).
\end{aligned}$$

Dessa forma, o gradiente da função custo resulta em:

$$\nabla \mathbf{J}(k) = -\mathbf{C}^T(k)\varepsilon(k) + \gamma \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k)). \tag{4.32}$$

Das Equações (4.26) e (4.32), a equação do estimador é obtida como

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mu \varepsilon \mathbf{C}^T(k) - \rho \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k)), \tag{4.33}$$

onde $\rho = \mu\gamma$ e $\operatorname{sgn}(\cdot)$ são os componentes da função sinal definidos como

$$\operatorname{sgn}(g) = \begin{cases} g/|g| & g \neq 0 \\ 0 & g = 0. \end{cases} \tag{4.34}$$

O SSZA-LMS tem o termo adicional $-\rho \operatorname{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k))$ que sempre atrai os estados para zero, por isso denominado atrator para zero, cuja força é controlada por ρ (CHEN; GU; HERO, 2009). O parâmetro ρ para o SSZA-LMS está relacionado com a convergência do algoritmo quanto menor o valor de ρ melhor o seu desempenho. O parâmetro μ é o tamanho do passo para auxiliar na obtenção rápida da solução. A metodologia proposta é mostrada no Algoritmo 4.3.

Algoritmo 4.3 SSZA-LMS em tempo discreto

-
- 1: **Inicialização:**
 $\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, 0 < \mu < 2$ e $\rho = 1 \times 10^{-5}$
 - 2: **for:** $k = 1, 2, \dots, N$
 - 3: **Medição da saída do sistema:** $\mathbf{y}(k)$
 - 4: **Predição do estado (estimativa a priori)**
 $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k-1) + \hat{\mathbf{x}}(k-1)$
 - 5: **Cálculo da saída estimada**
 $\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k)$
 - 6: **Erro de estimação da saída**
 $\varepsilon(k) = \mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)$
 - 7: **Estado estimado (estimativa a posteriori)**
 $\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mu \mathbf{C}^T(k)\varepsilon(k) - \rho \text{sgn}(\bar{\mathbf{x}}(k))$
 - 8: **fim**
-

4.4 Simulações Numéricas

Nesta seção, o desempenho do algoritmo proposto é avaliado considerando exemplos comparativos envolvendo diferentes tipos de cenários, apresentam-se os experimentos numéricos e gráficos para validar o desempenho do novo algoritmo.

4.4.1 Motor

Realiza-se a estimação dos parâmetros de estado do motor síncrono na presença de um ruído gaussiano. Uma visão geral da raiz do erro quadrático médio dos estados pode ser consultada na Tabela 4.2. Na Tabela 4.1 e 4.3 encontra-se o erro de estimação individual e o erro global dos estados. Houve a comparação do desempenho dos algoritmos SSLMS, SSNLMS e SSZA-LMS.

O modelo do sistema é discretizado com o período de amostragem $\Delta t = 0.0002s$ e os algoritmos são simulados com um período de amostragem de $0.001s$ para simular o efeito do cenário em tempo real, onde os sensores são limitados pelo período de amostragem. O parâmetro ρ escolhido para o SSZA-LMS foi 1×10^{-5} e passo μ para SSLMS, SSNLMS e SSZA-LMS foram escolhidos como 0.2, 0.4 e 5×10^{-2} , respectivamente.

A observação foi sujeita a ruído de observação gaussiano de covariância $\sigma^{-2} = 0.01^2$ e o ruído do processo foi considerado de covariância $\sigma^{-2} = 0.001^2$. Os estados iniciais reais do sistema foram considerados como $\mathbf{x}(0) = [1 \ 3 \ 0.5 \ 2]^T$ e a estimativa inicial para os algoritmos foi escolhida como sendo $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Os parâmetros das simulações são referidos em (SIMON, 2006b).

Na Figura 4.1, observa-se em (a) a corrente A, em (b) a corrente B, em (c) a velocidade angular e em (d) a posição. Na figura 4.2, pode-se observar em (a) e (b) as observações de y_1 e y_2 , comparando a capacidade de rastreamento dos algoritmos, com o SSZA-LMS aos demais, observa-se que apresenta melhor capacidade de rastreamento.

Na Figura 4.3 em (a) e (b), pode-se observar que o algoritmo proposto converge para zero mais rápido em comparação aos outros algoritmos. Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 pode-se analisar melhor o desempenho dos algoritmos. O erro de estimação individual dos estados, a raiz do erro quadrático médio e o erro global do algoritmo proposto é menor em comparação com ao SSLMS e SSNLMS e, portanto, esse algoritmo pode muito bem ser implementado e considerado como o novo algoritmo de estimação de estado do sistema.

Tabela 4.1 – Erro de estimação individual dos estados, equação (2.26)

Estados	SSLMS	SSNLMS	SSZA-LMS
Estado x_1	$2.0574e^{-05}$	$8.3852e^{-05}$	$2.0967e^{-06}$
Estado x_2	$3.5495e^{-05}$	$6.1230e^{-05}$	$3.3808e^{-06}$
Estado x_3	0.0034	0.0058	$2.6481 e^{-04}$
Estado x_4	0.0012	0.049	$7.2144e^{-05}$

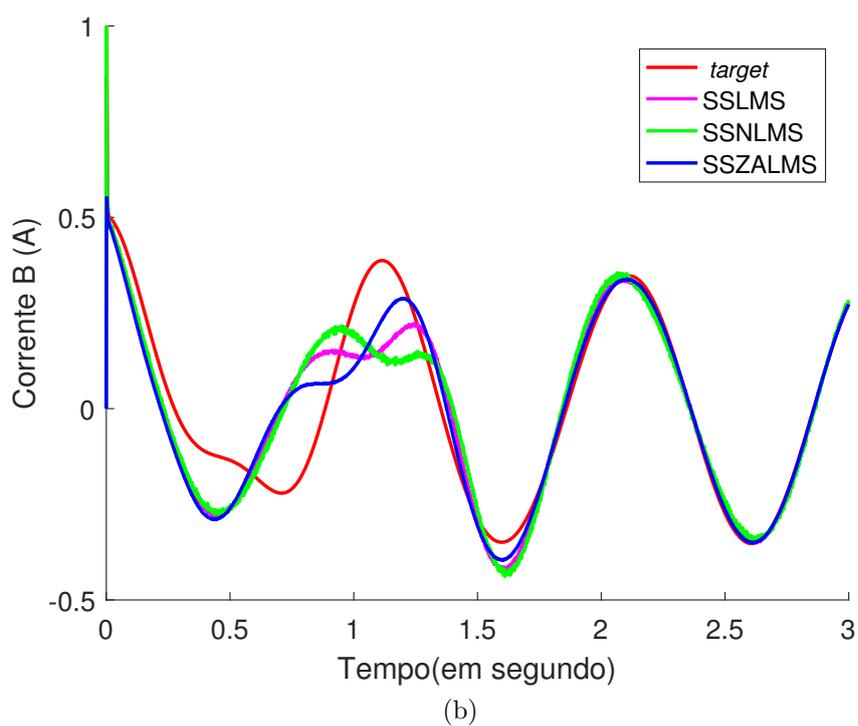
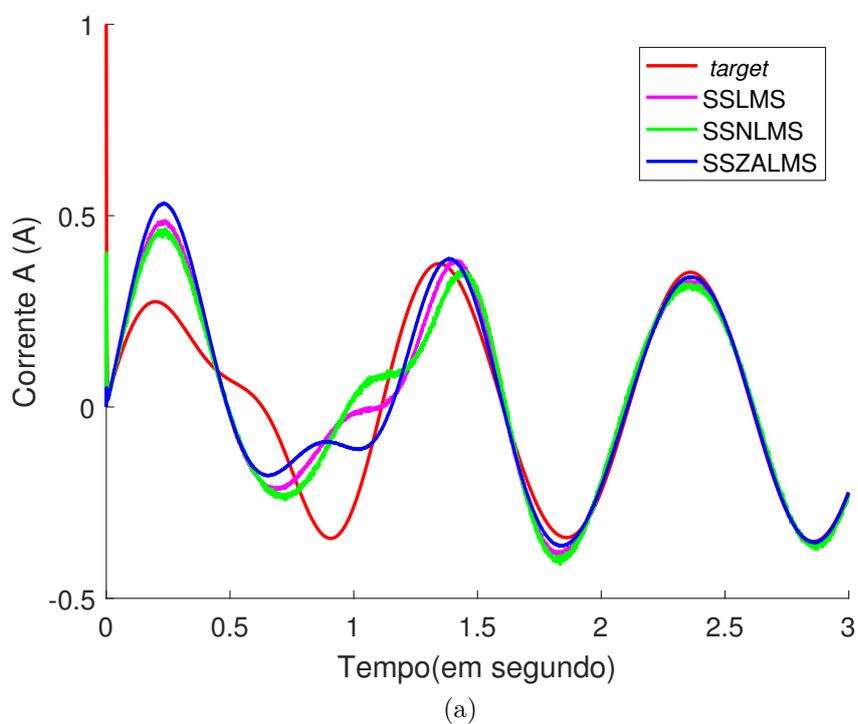
Tabela 4.2 – Raiz do erro quadrático médio equação (2.28)

Estados e observações	SSLMS	SSNLMS	SSZA-LMS
Estado x_1	0.0057	0.0092	0.0021
Estado x_2	0.0077	0.0094	0.0025
Estado x_3	0.0546	0.0724	0.0132
Estado x_4	0.0377	0.0734	0.0098

Tabela 4.3 – Erro quadrático global equação (2.29)

Algoritmo	Erro global
SSLMS	0.0048
SSNLMS	0.0061
SS-ZALMS	$2.8832e^{-04}$

Observa-se nesta aplicação que o novo algoritmo, denominado SSZA-LMS, foi usado para a estimação de estado de um motor síncrono não linear. O desempenho do novo algoritmo foi investigado, comparando-o com os algoritmos SSLMS e o SSNLMS já existentes na literatura. Resultados de simulação mostram que o algoritmo SSZA-LMS supera os algoritmos SSLMS e SSNLMS em termos de capacidade de rastreamento, erro quadrático, raiz do erro quadrático médio de estimação e o erro de estimação individual e global. O desempenho de rastreamento do SSZA-LMS é melhor do que o do SSLMS e do SSNLMS.



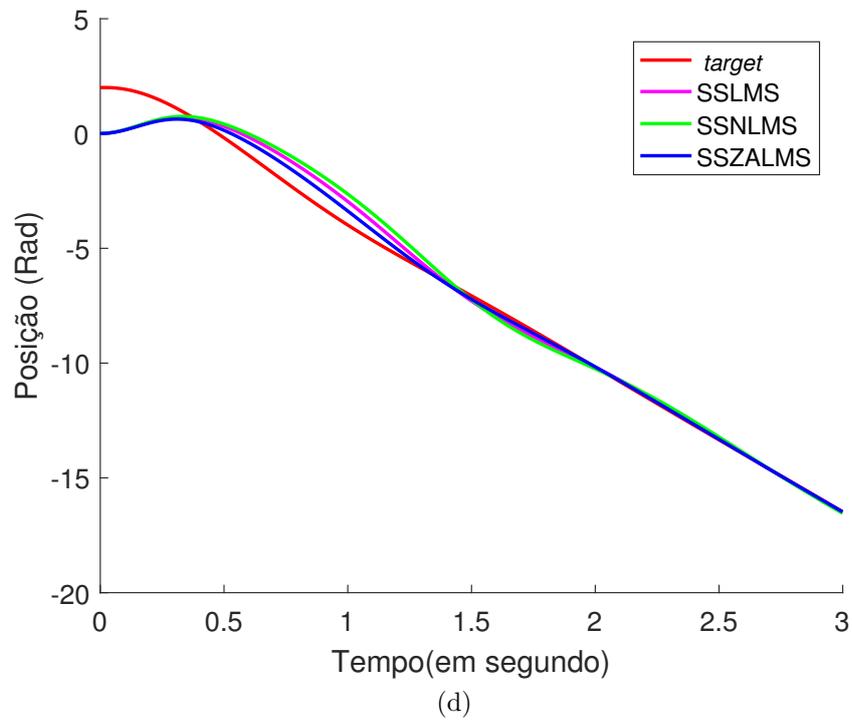
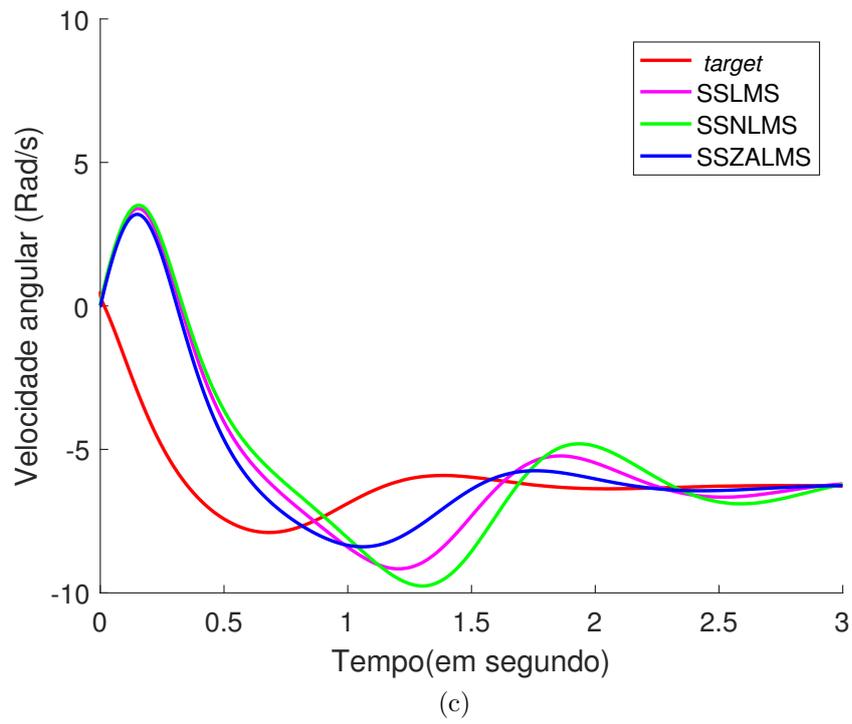


Figura 4.1 – Evolução dos estados x_1, x_2, x_3 e x_4 .

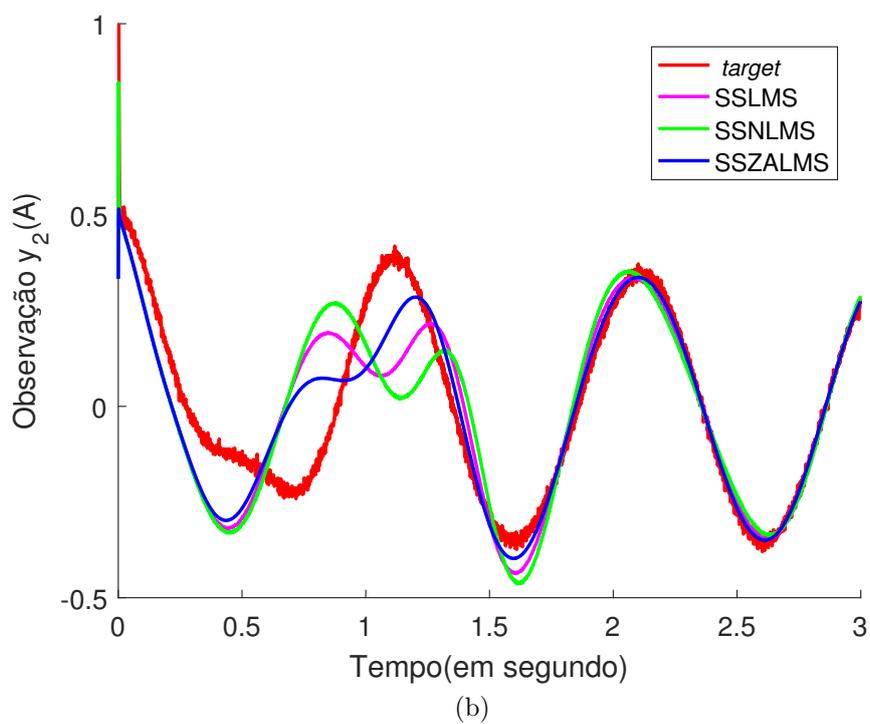
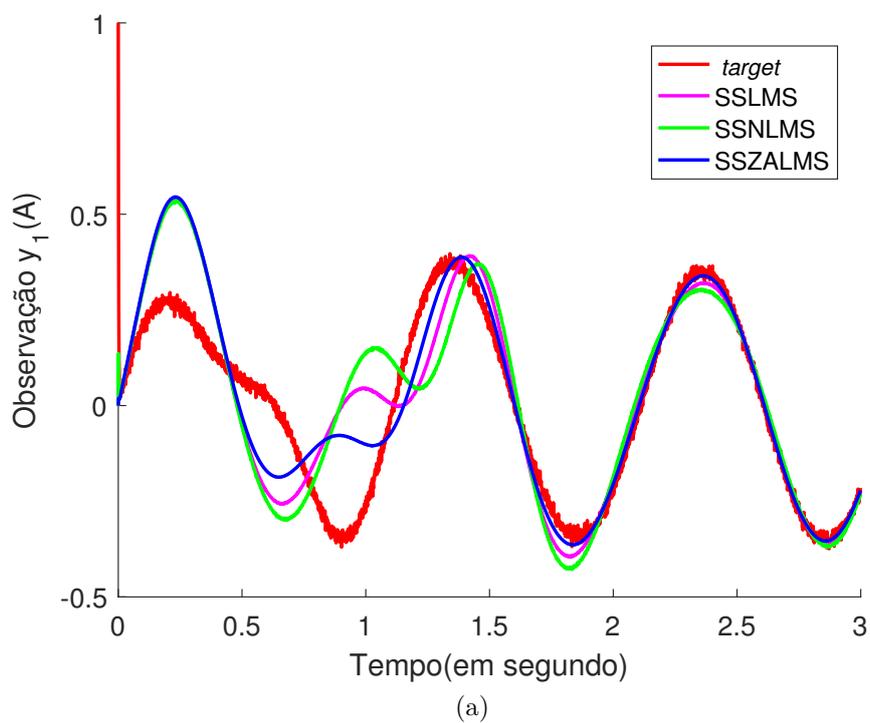
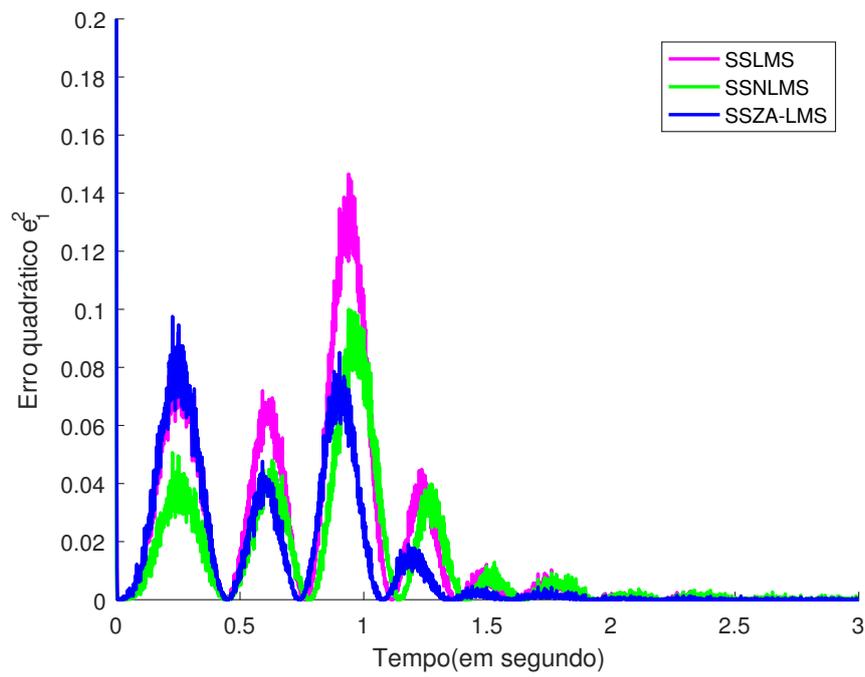
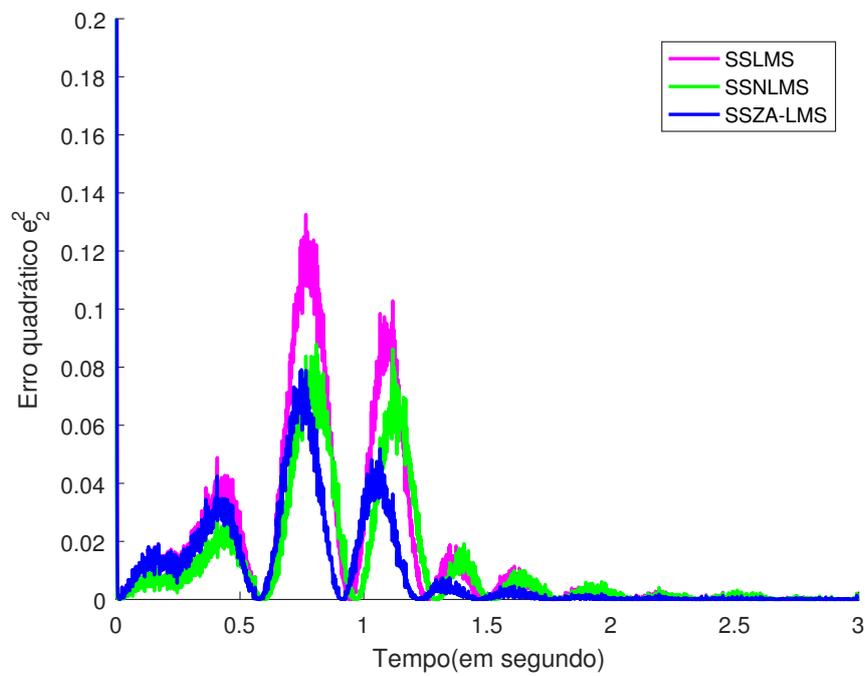


Figura 4.2 – Observação y_1, y_2 .



(a)



(b)

Figura 4.3 – Erro quadrático médio e_1^2, e_2^2 .

4.4.2 Senoide

O problema de rastrear uma senoide ruidosa é de importância histórica e tem recebido atenção considerável na literatura. O problema surge naturalmente no contexto de um sinal de interferência de frequência conhecida. Widrow e Stearns (1985) consideram o problema do cancelamento da interferência de 60 Hz na eletrocardiografia, usando o LMS.

Nesta seção, , houve o fornecimento de um breve relato de como SSZA-LMS pode ser usado em tais casos. A fase e a amplitude do sinal de interferência são consideradas desconhecidas. Aparentemente, o conhecimento *a priori* da frequência simplifica é um problema trivial. No entanto, no caso do LMS padrão e NLMS, o designer não tem uma maneira direta de incorporar essas informações.

Em virtude da formulação de espaço de estado do SSZA-LMS e SSLMS, essas informações podem ser incorporadas de maneira direta em tempo discreto como

$$y(k) = \sigma_s \cos(\omega_o kT + \phi) + v[kT] \quad (4.35)$$

e

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega_o T) & \sin(\omega_o T) \\ -\sin(\omega_o T) & \cos(\omega_o T) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \text{Potência do sinal} \\ \omega_o &= \text{Frequência do sinal} \\ \phi &= \text{Fase do sinal} \\ T &= \text{Tempo de amostragem} \\ v &= \text{Ruído de observação} \end{aligned}$$

O SS-ZALMS pode então ser usado para rastrear o sinal de interferência.

O SSZA-LMS é selecionado como o estimador. A fim de demonstrar o algoritmo da rede, assumem-se os seguintes parâmetros:

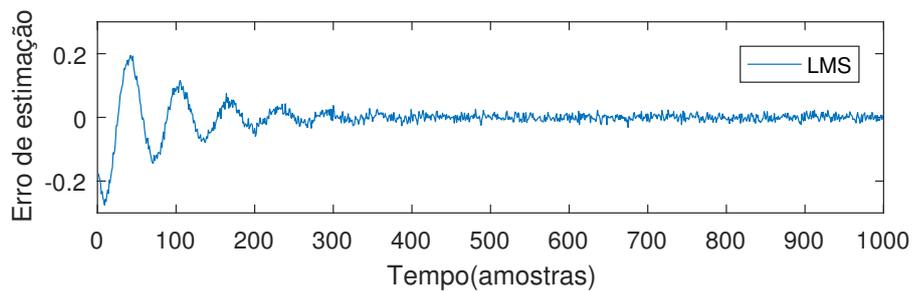
$$\begin{aligned} a &= 1.5 \\ \omega_o &= 0.1 \\ \phi &= \pi/4 \\ \mu &= 0.05 \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ G &= I, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde I é a matriz de identidade. O ruído de observação é considerado como uma sequência branca de média zero de variação de 0.1. Observa-se o sinal em (4.35) no domínio discreto

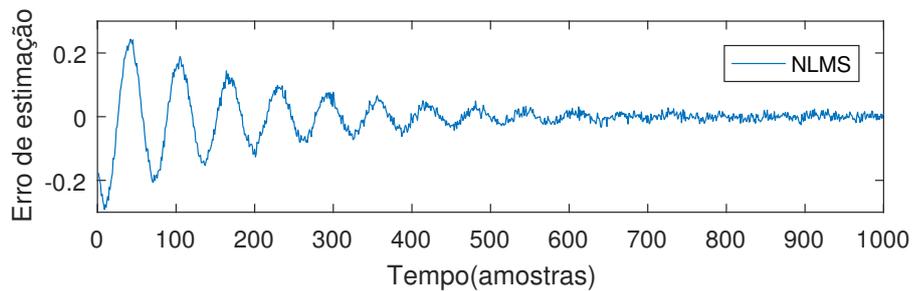
com o tempo de amostragem $T = 1s$. Os resultados da simulação, conforme ilustrado na Figura 4.3, demonstram o desempenho dos algoritmos.

Para os algoritmos LMS, NLMS, SSLMS e SSNLMS o passo μ escolhido foi de 0.05, foi definido o pequeno valor de $\gamma = 0.01$ para o algoritmo SSNLMS.

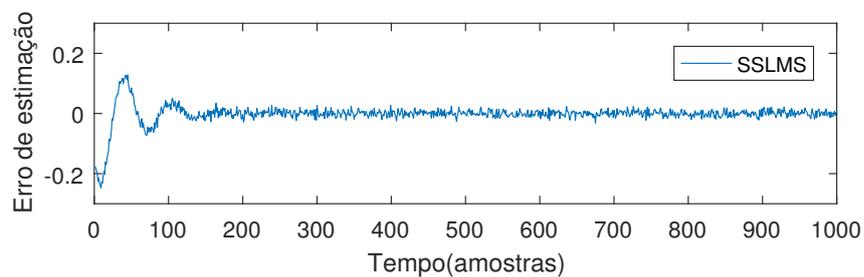
Na Figura 4.3 em (e), observa-se que o algoritmo SSZA-LMS, apresenta melhor desempenho de rastreamento, ao superar o LMS em (a), NLMS em (b), o SSLMS em (c) e o SSNLMS em (d). Após o término do período transitório, o SSZA-LMS se adapta muito bem ao sinal a ser rastreado.



(a)



(b)



(c)

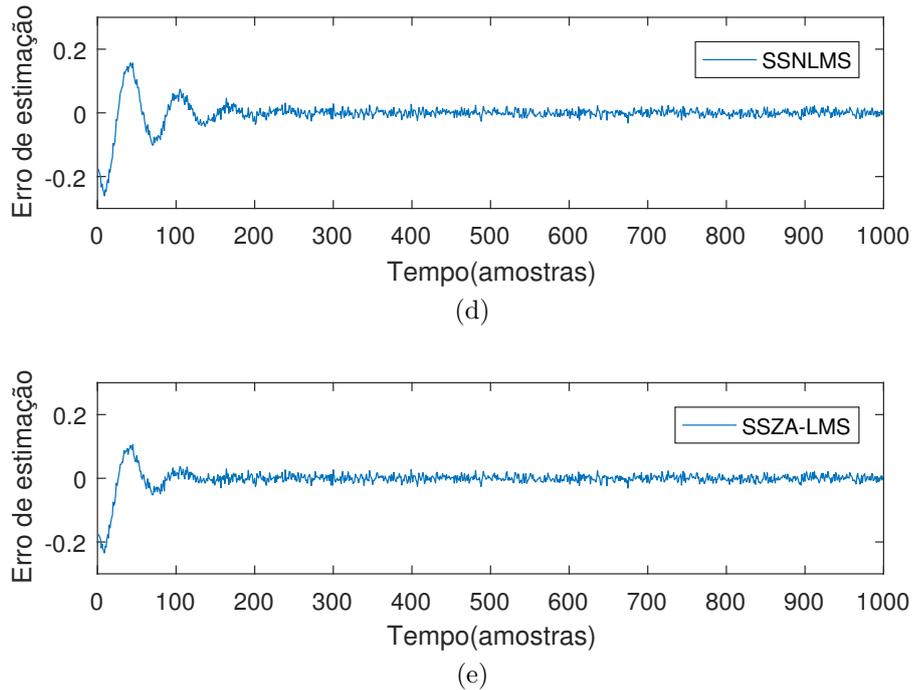


Figura 4.3 – Erro de estimação de uma senoide para SSLMS, SSNLMS, LMS e NLMS.

4.4.3 Identificação

Para avaliar o desempenho do algoritmo proposto, simulações de Monte Carlo (média de 200 realizações independentes) são realizadas, considerando um problema de identificação de sistemas, utiliza-se a mesma aplicação da subseção 3.3.4. Tais simulações têm como objetivos comparar o desempenho do algoritmo proposto SSZA-LMS com os algoritmos ZA-LMS, o LMS padrão e o algoritmo em espaço de estado presente na literatura o SSLMS em termos de velocidade de convergência e rastreamento dos coeficientes da planta a ser identificada.

Apresenta-se uma planta esparsa, \mathbf{p} , com coeficientes ativos iguais a $\{0.1, 1.0, -0.5, 0.1\}$ localizados nas posições $\{1, 5, 7, 10, 15\}$, respectivamente. Esta aplicação tem o objetivo de comparar o desempenho do algoritmo proposto o SSZA-LMS, com os demais algoritmos encontrados na literatura em termos de velocidade de convergência.

Na Figura 4.4 apresenta-se o desvio quadrático médio (MSD), como apresentado nos resultados do MSD, quando o sistema é muito esparsa (no instante $n = 500$), tanto o ZA-LMS quanto o SSZA-LMS produzem convergência mais rápida e melhor desempenho em estado estacionário do que o LMS padrão e o SSLMS.

Após o instante $n = 500$, conforme o número de coeficientes diferentes de zero aumenta para 8, o desempenho do ZA-LMS se deteriora enquanto o SSZA-LMS mantém o melhor desempenho entre os três filtros. Após 1000 iterações, o SSZA-LMS ainda tem um desempenho melhor ao LMS padrão e o SSLMS, embora o sistema agora seja completamente não esparsa.

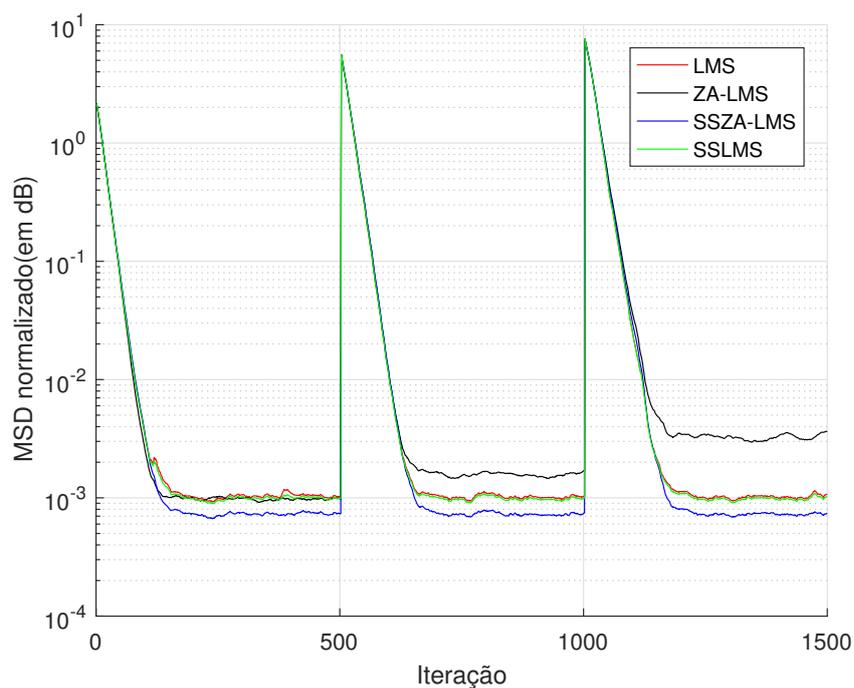
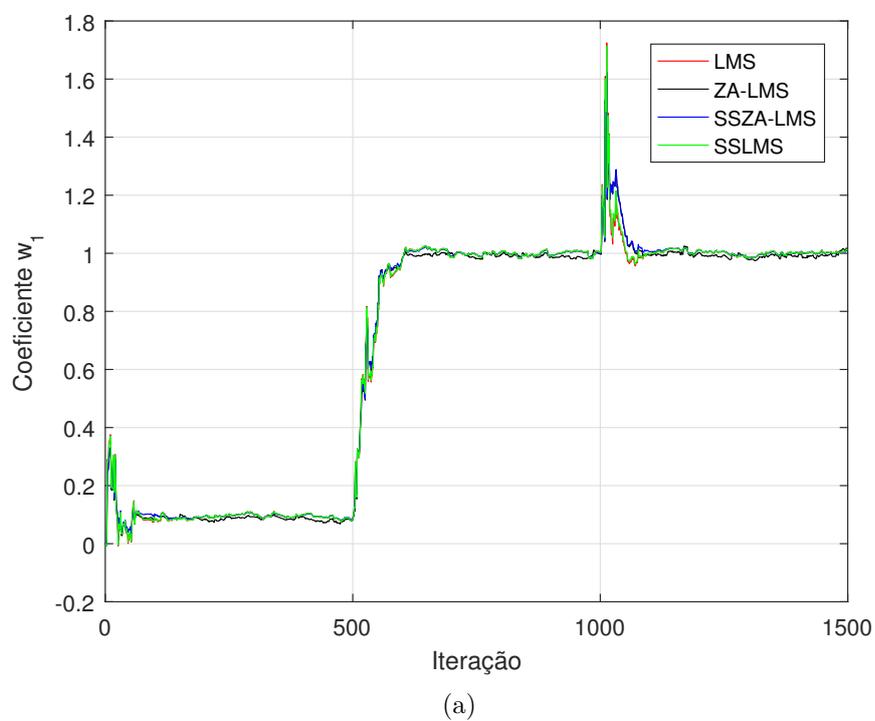
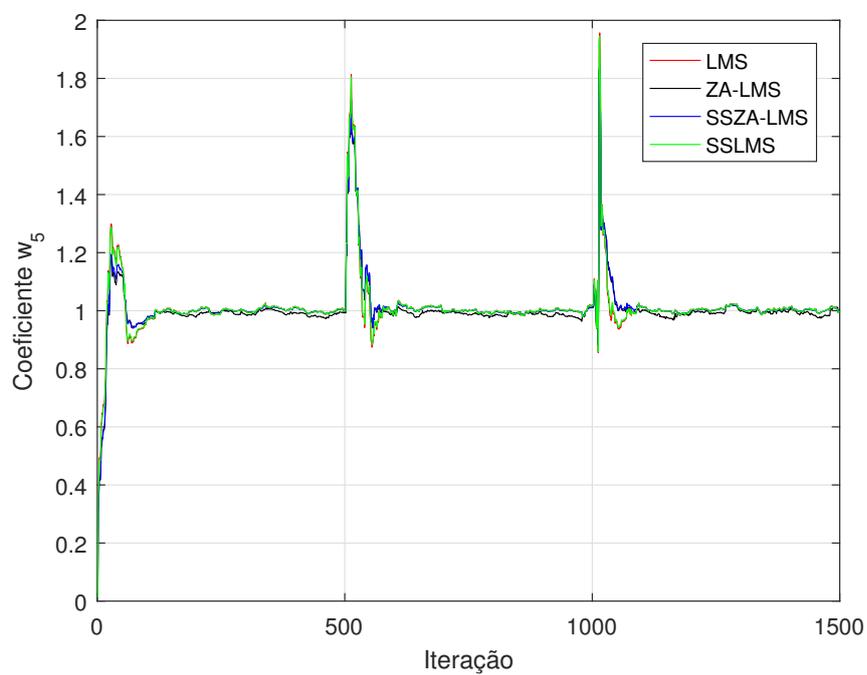


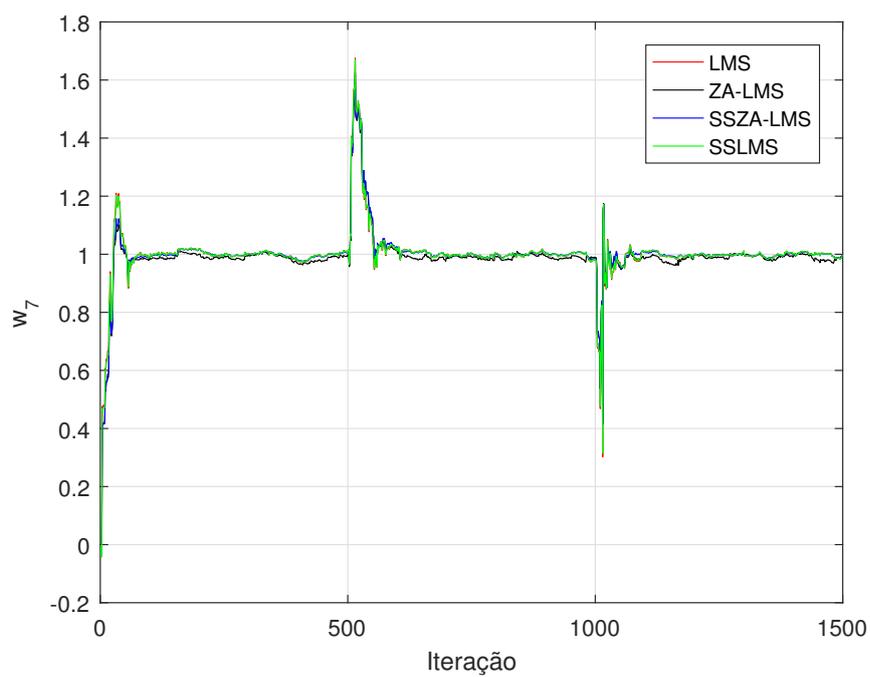
Figura 4.4 – Análise do MSD do algoritmo proposto em diferentes condições de esparsidade.



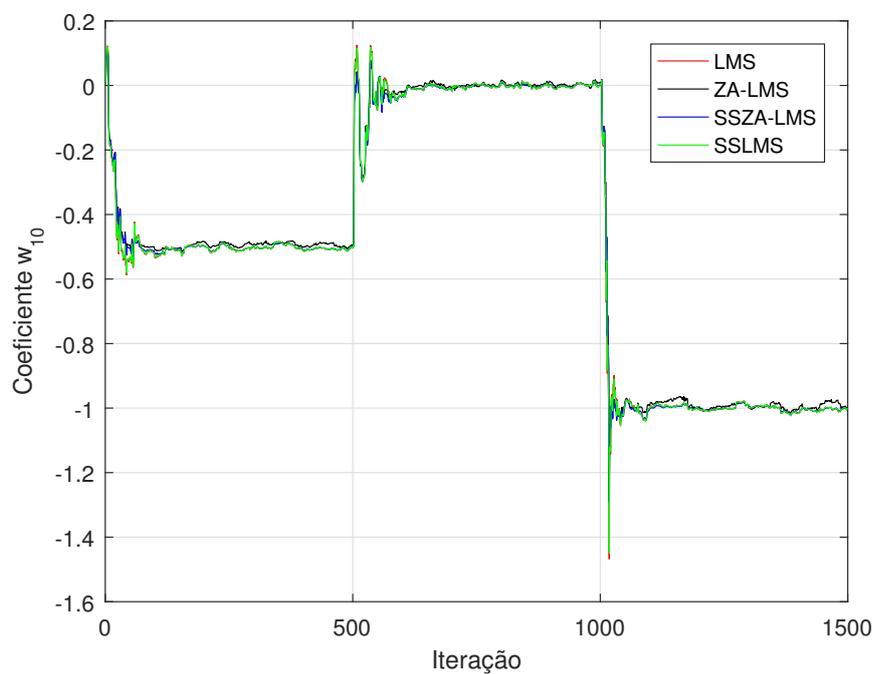
(a)



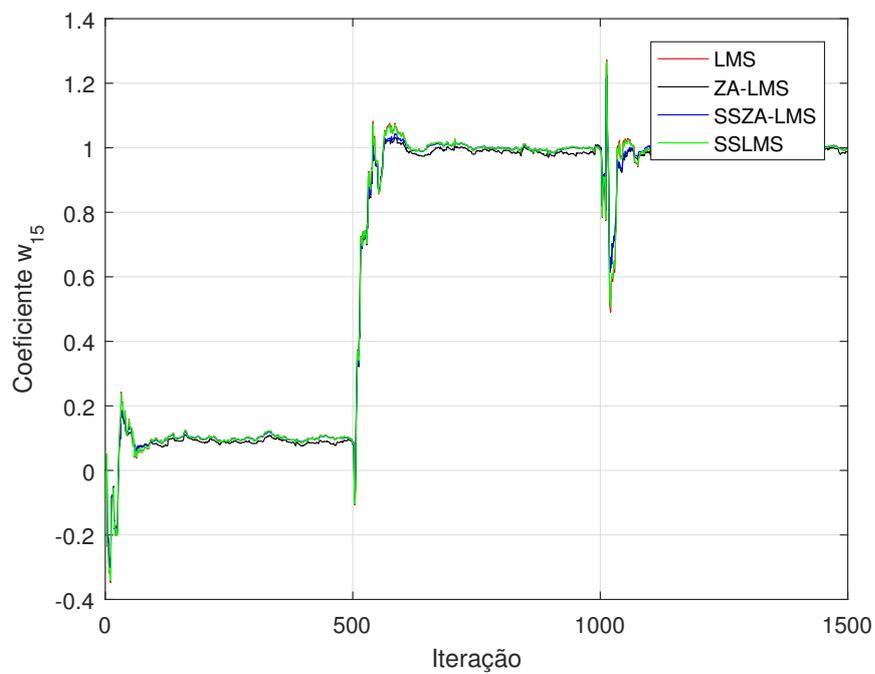
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 4.4 – Comportamento dos coeficiente $w_1, w_5, w_7, w_{10}, w_{15}$.

Na Figura 4.4, observa-se o comportamento dos coeficientes na planta esparsa, semi esparsa e sem esparsidade em (a) o comportamento do peso w_1 , em (b) w_5 , (c) em w_7 , em (d) w_{10} e em (e) w_{15} , pode-se comparar o comportamento entre os algoritmos LMS, ZA-LMS, SSZA-LMS e SSLMS.

5 Conclusão

5.1 Considerações finais

Com um objetivo tão amplo, a teoria da estimação encontra aplicações em diversos campos: comunicações, radar, sonar, navegação, sismologia, engenharia biomédica e engenharia financeira, entre outros. O problema de estimar uma quantidade desconhecida de interesse é frequentemente encontrado na literatura. Uma dificuldade prática enfrentada na implementação de filtros ótimos é a exigência de informações *a priori* sobre as estatísticas dos dados.

As estatísticas dos dados podem não estar disponíveis em certos casos. Sabe-se geralmente que algoritmos baseados em modelo de estimação (como o filtro Kalman e sua família) têm melhor desempenho que os algoritmos que não se baseiam no modelo em espaço de estados (como a família do LMS), devido a informações adicionais disponíveis da dinâmica do sistema.

Uma versão generalizada do algoritmo LMS (*Least-Mean Square*) foi desenvolvido por Malik e proposto com diferentes análises. Esse novo algoritmo, denominado SSLMS (*State Space Least-Mean Square*), incorpora um modelo linear de espaço de estado variável no tempo do ambiente subjacente.

A versão SS (*State Space*) é derivada como um estimador de estado com base em medições nas quais está presente ou não um ruído de medição. A derivação inclui ambas estimativa de estado atual e prevista. Partindo desse princípio, implementou-se o algoritmo ZA-LMS.

A principal desvantagem do ZA-LMS é que o mesmo funciona bem apenas quando o sistema é altamente esparso, tendo o desempenho deteriorado quando o nível de esparsidade é baixo, sendo superado pelo LMS em condições não esparsas.

Baseado no modelo de espaço de estado, os algoritmos do tipo LMS em espaço de estado permite a geração de um vetor de estados estimados, sendo uma possível solução para o problema de estimação de estado. Em termos de capacidade de rastreamento, o SSZA-LMS é superior ao algoritmo SSLMS, mostrando uma melhoria significativa no desempenho de rastreamento em comparação ao algoritmo SSLMS e suas variantes conhecidas.

O algoritmo proposto neste trabalho é utilizado para a estimação de estado de um motor síncrono com modelo não linear, rastreamento de uma senoide e para identificação de sistemas. Experimentos numéricos comprovam que o algoritmo proposto apresenta desempenho superior quando comparado ao algoritmo SSLMS. Os resultados de simulação são apresentados em três tipos diferentes de ambientes, confirmando que o algoritmo

SSZA-LMS é de fato superior em termos de velocidade de convergência, rastreamento e precisão em comparação com os algoritmos do tipo SSLMS existentes na literatura.

5.1.1 Propostas de Trabalhos Futuros

Esta dissertação abre espaço para novas pesquisas envolvendo a técnica proposta, as quais estão listadas a seguir:

- Propor técnica para otimizar a escolha dos parâmetros do algoritmo, como o passo de adaptação e a matriz de ganho.
- Implementar novas variantes de algoritmos do tipo SS (*State Space*) bem como desenvolvimento de modelos estocásticos (modelos de análise) para os algoritmos da família SS.

Referências

- ABRANTES, S. A. *Processamento adaptativo de sinais*. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 63.
- AHMED, A.; MOINUDDIN, M.; AL-SAGGAF, U. M. State space least mean square for state estimation of synchronous motor. In: IEEE. *8th International Conference on Electrical and Computer Engineering*. [S.l.], 2014. p. 461–464. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 80.
- AHMED, A.; MOINUDDIN, M.; AL-SAGGAF, U. M. q-state space least mean family of algorithms. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer, v. 37, n. 2, p. 729–751, 2018. Citado na página 17.
- ARENAS-GARCIA, J. et al. Combinations of adaptive filters: performance and convergence properties. *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, v. 33, n. 1, p. 120–140, 2015. Citado na página 16.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive control*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado na página 57.
- BJAILI, H. A.; MOINUDDIN, M.; RUSHDI, A. M. A state-space backpropagation algorithm for nonlinear estimation. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer, v. 38, n. 8, p. 3682–3696, 2019. Citado na página 22.
- BRANCO, C. A. S. C. *Algoritmos adaptativos lms normalizados proporcionais: proposta de novos algoritmos para identificação de plantas esparsas*. Dissertação (Mestrado). Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. Introduction to random signals and applied kalman filtering: with matlab exercises and solutions. *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions*, 1997. Citado na página 16.
- CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1998. Citado 7 vezes nas páginas 18, 25, 27, 28, 29, 30 e 31.
- CHEN, Y.; GU, Y.; HERO, A. O. Sparse lms for system identification. In: IEEE. *2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. [S.l.], 2009. p. 3125–3128. Citado 4 vezes nas páginas 17, 67, 68 e 85.
- DINIZ, P. S. et al. *Adaptive filtering*. [S.l.]: Springer, 1997. v. 4. Citado na página 63.
- FARHANG-BOROJENY, B. *Adaptive filters: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 57, 63 e 64.
- FRANKLIN, G. F. et al. *Feedback control of dynamic systems*. [S.l.]: Pearson, 214. v. 7. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 32.
- GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. *Kalman filtering: Theory and Practice with MATLAB*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 33 e 111.

- HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 1996. (Prentice-Hall information and system sciences series). ISBN 9780133227604. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=l78QAQAAMAAJ>>. Citado na página 64.
- HAYKIN, S.; PRABHAKAR, T. *Adaptive Filter Theory*. Pearson, 2014. (Always learning). ISBN 9780273764083. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Tf6oZwEACAAJ>>. Citado 9 vezes nas páginas 16, 17, 63, 64, 65, 66, 77, 84 e 105.
- HEMERLY, E. M. *Controle por computador de sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Blucher, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 47.
- JACQUOT, R. G. *Modern digital control systems*. [S.l.]: Routledge, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 37 e 39.
- KAILATH, T. A view of three decades of linear filtering theory. *IEEE Transactions on information theory*, IEEE, v. 20, n. 2, p. 146–181, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- KAILATH, T. *Linear systems*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980. v. 156. Citado na página 28.
- KAY, S. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection theory*. PTR Prentice-Hall, 1993. (Fundamentals of Statistical Signal Processing). ISBN 9780133457117. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aFwESQAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- LATHI, B. P.; GREEN, R. A. *Signal processing and linear systems*. [S.l.]: Oxford University Press New York, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 29.
- LEWIS, F.; XIE, L.; POPA, D. *Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory, Second Edition*. Taylor & Francis, 2008. (Automation and Control Engineering). ISBN 9780849390081. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BVwnAQAAIAAJ>>. Citado na página 29.
- LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, IEEE, v. 8, n. 2, p. 74–80, 1964. Citado na página 22.
- LUENBERGER, D. G. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 596–602, 1971. Citado na página 22.
- LUENBERGER, D. G. *Introduction to dynamic systems; theory, models, and applications*. [S.l.], 1979. Citado 5 vezes nas páginas 18, 25, 28, 32 e 35.
- MALIK, M. B. State-space recursive least-squares: Part i. *Signal processing*, Elsevier, v. 84, n. 9, p. 1709–1718, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- MALIK, M. B. State-space recursive least squares: Part ii. *Signal Processing*, v. 84, n. 9, p. 1719–1728, 2004. ISSN 0165-1684. Special Section on New Trends and Findings in Antenna Array Processing for Radar. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168404001082>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

- MALIK, M. B.; BHATTI, R. A. Tracking of linear time-varying systems using state-space least mean square. In: IEEE. *IEEE International Symposium on Communications and Information Technology, 2004. ISCIT 2004*. [S.l.], 2004. v. 1, p. 582–585. Citado na página 17.
- MALIK, M. B.; SALMAN, M. State-space least mean square. *Digital Signal Processing*, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 334–345, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 17, 21, 80 e 81.
- MANOLAKIS, D. G. et al. *Statistical and adaptive signal processing: spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering, and array processing*. [S.l.]: McGraw-Hill Boston, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 32, 63, 106, 107, 108, 109 e 110.
- OGATA, K.; YANG, Y. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010. v. 5. Citado na página 17.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. *Probability, random variables, and stochastic processes*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 31, 105, 108, 110 e 112.
- PROHMANN, E. A. V. et al. Proposta de um filtro de partículas aliado ao filtro de kalman estendido iterativo para estimação de estados de sistemas não lineares com ruído gaussiano. Universidade Federal do Maranhão, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 29, 31, 32, 105 e 110.
- QAYYUM, A.; SALMAN, M.; MALIK, M. B. Receding horizon observer for linear time-varying systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 41, n. 9, p. 2612–2622, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 80.
- RODRIGUES J. A.; FERNANDES, T. S. F. C. Estimação de estado baseada nos algoritmos lms em espaço de estado. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2021), 2021. Citado na página 84.
- RUGH, W. J. *Linear system theory*. [S.l.]: prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1996. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- SALMAN, M. *ADAPTIVE ESTIMATION USING STATE-SPACE METHODS*. Tese (Doutorado) — National University of Sciences and Technology, Pakistan, 2009. Citado na página 22.
- SÄRKKÄ, S. *Bayesian filtering and smoothing*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado na página 29.
- SCHILLING, R. J.; HARRIS, S. L. *Fundamentals of digital signal processing using MATLAB*. [S.l.]: Cengage learning, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 58, 59, 61 e 62.
- SIMON, D. *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- SIMON, D. Using nonlinear kalman filtering to estimate signals. *Embedded Systems Design*, CMP MEDIA LLC, v. 19, n. 7, p. 38, 2006. Citado na página 86.

SIVASHANMUGAM, R.; ARUMUGAM, S. Robust adaptive algorithm by an adaptive zero attractor controller of za-lms algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2016, 2016. Citado na página 68.

WIDROW, B.; STEARNS, S. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall, 1985. (EDITED BY ALAN V. OPPENHEIM). ISBN 9780130040299. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=X74QAQAAMAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 92.

A Processos Estocásticos

O conhecimento sobre probabilidade e variáveis aleatórias, é necessário para a compreensão sobre processos estocásticos. Podemos citar alguns os autores que abordam estes assuntos: Therrien (1992), Bertsekas e Tsitsiklis (2002), Papoulis e Pillai (2002), Manolakis, Ingle e Kogon (2000), Lindsey (2004) e Jazwinski (2007) (PROHMANN et al., 2018, p.25).

O termo processo estocástico ou processo aleatório, é usado para descrever a evolução temporal de um fenômeno estatístico de acordo com as leis probabilísticas. A evolução temporal do fenômeno significa que o processo estocástico é uma função do tempo, definida em algum intervalo de observação.

A natureza estatística do fenômeno significa que, antes de realizar um experimento, não é possível definir exatamente como ele evolui com o tempo. Exemplos de um processo estocástico incluem sinais de fala, sinais de televisão, sinais de radar, dados de computadores digitais, saída de um canal de comunicação, dados sismológicos e ruído (HAYKIN; PRABHAKAR, 2014, p.48).

Uma variável aleatória x é uma regra para atribuir a cada resultado ζ de um experimento S um número $x(\zeta)$. Um processo estocástico $x(t)$ é uma regra para atribuir a todos ζ uma função $x(t, \zeta)$. Assim, um processo estocástico é uma família de funções de tempo, dependendo do parâmetro ζ ou, equivalentemente, uma função de t e ζ . O domínio de ζ é o conjunto de todos os resultados experimentais e o domínio de t é um conjunto \mathbb{R} de números reais (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.373).

Se \mathbb{R} é o eixo real, então $x(t)$ é um processo de tempo contínuo. Se \mathbb{R} é o conjunto de números inteiros, então $x(t)$ é um processo de tempo discreto. Um processo de tempo discreto é, portanto, uma sequência de variáveis aleatórias. É dito que $x(t)$ é um processo de estado discreto se seus valores forem contáveis. Caso contrário, é um processo de estado contínuo. A maioria dos resultados desta investigação será redigida em termos de processos de tempo contínuo (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.373).

Existem as seguintes interpretações sobre processo estocástico:

1. É uma família (ou um conjunto) de funções $x(t, \zeta)$. Nesta interpretação, t e ζ são variáveis.
2. Se t é uma variável e ζ é fixo. Tem-se uma função de temporal (ou uma realização do processo fornecido).
3. Se t é fixo e ζ é variável, então $x(t)$ é uma variável aleatória igual ao estado do processo especificado no tempo t .

4. Se t e ζ são fixos, então $x(t)$ é um número.

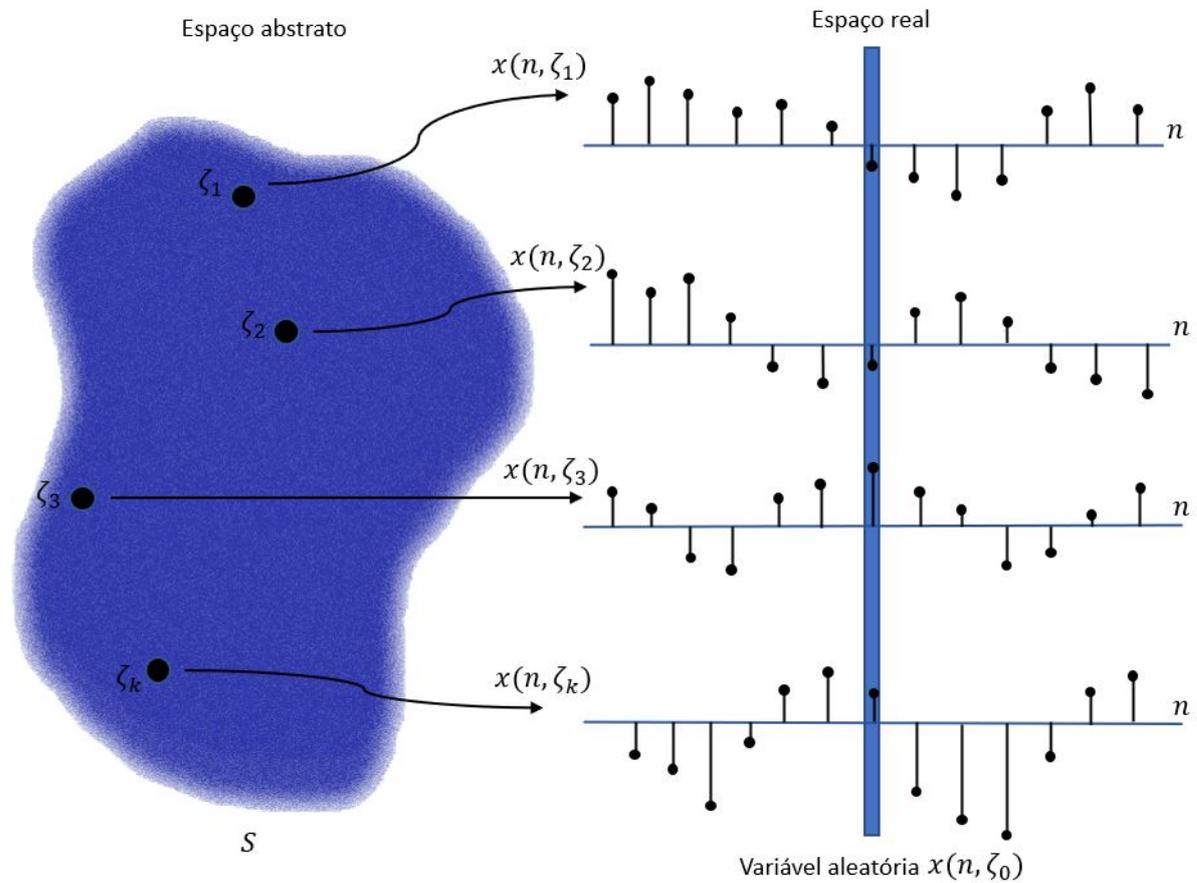


Figura A.1 – Descrição gráfica de sequências aleatórias.

Uma sequência aleatória também é chamada de série temporal na literatura estatística. É uma sequência de variáveis aleatórias ou pode ser pensada como um vetor aleatório de dimensão infinita. Como acontece com qualquer coleção de objetos infinitos, deve-se ter cuidado com as propriedades assintóticas (ou convergência) de uma sequência aleatória. São obtidas amostras de um processo estocástico ao longo do tempo.

Cada vez que o processo é reiniciado, um novo conjunto de amostras é obtido. A este conjunto de amostra dá-se o nome de realizações (MANOLAKIS et al., 2000, p.98).

B Distribuição em Processos Estocásticos

Na Figura A.1, fica claro que $n = n_0, x(n_0, \zeta)$ é uma variável aleatória que requer uma função de probabilidade de primeira ordem, diga cdf $F_x(x; n_0)$ para sua descrição. De forma similar $x(n_1, \zeta)$ e $x(n_2, \zeta)$ são variáveis aleatórias conjuntas nas instâncias n_1 e n_2 , respectivamente, exigindo um conjunto cdf $F_x(x_1, x_2; n_1, n_2)$.

Os processos estocásticos contêm infinitas variáveis aleatórias (MANOLAKIS et al., 2000, p.99). Portanto, eles são completamente descritos, em um sentido estatístico, se sua função de distribuição de ordem k th

$$F_x(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = \Pr \{x(n_1) \leq x_1, \dots, x(n_k) \leq x_k\} \quad (\text{B.1})$$

é conhecido para cada valor de $k \geq 1$ e para todas as instâncias n_1, n_2, \dots, n_k . Ao obter n variáveis aleatórias, distribuição de n -ésima ordem é representada por

$$F_x(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2; \dots, t_n), \quad (\text{B.2})$$

Claramente, a descrição probabilística requer muitas informações que são difíceis de obter na prática, exceto para processos estocásticos simples. No entanto, muitas (mas não todas) propriedades de um processo estocástico podem ser descritas em termos de médias associadas a suas densidades de primeira e segunda ordem (MANOLAKIS et al., 2000, p.99-100).

Outras informações sobre distribuições podem ser encontrada em Papoulis e Pillai (2002, p. 73-83) e Manolakis, Ingle e Kogon (2000, p. 75-77).

C Estatísticas de Processos Estocásticos de Primeira e Segunda Ordens

Um processo estocástico é uma grande quantidade incontável de variáveis aleatórias, uma para cada t . Para um t específico, $x(t)$ é uma variável aleatória com distribuição

$$F(x, t) = P\{x(t) \leq x\}. \quad (\text{C.1})$$

Esta função depende de t , e é igual à probabilidade do evento $\{x(t) \leq x\}$ consiste em todos os resultados ζ de modo que, no momento específico t , as amostras $x(t, \zeta)$ do processo especificado não excedam o número x . A função $F(x, t)$ será chamada de distribuição de primeira ordem do processo $x(t)$. Sua derivada em relação a x :

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad (\text{C.2})$$

é a densidade de primeira ordem de $x(t)$ (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.375).

A distribuição de segunda ordem do processo $x(t)$ é a distribuição conjunta

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2\}. \quad (\text{C.3})$$

Em relação as distribuições de primeira ordem, é possível calcular o valor esperado ou valor médio por

$$\hat{x}(t) = E[x(t)]. \quad (\text{C.4})$$

Uma interpretação possível para a média de $x(t)$ é que esta pode ser considerada como a “localização” ou o “centro de gravidade” de $x(t)$ (MANOLAKIS et al., 2000, p.77). Relacionado as distribuições de segunda ordem, é possível calcular a correlação e a covariância. A correlação é dada por

$$R(x(t_1), x(t_2)) = E[x(t_1)x(t_2)]. \quad (\text{C.5})$$

A covariância é dada por

$$C(x(t_1), x(t_2)) = E[(x(t_1) - \hat{x}(t_1))(x(t_2) - \hat{x}(t_2))]. \quad (\text{C.6})$$

Através da covariância, é possível encontrar o desvio padrão através de

$$\sigma(x(t_1), x(t_2)) = \sqrt{C(x(t_1), x(t_2))} \quad (\text{C.7})$$

o qual é uma medida da dispersão dos valores observados em torno da média de $x(t)$ (MANOLAKIS et al., 2000, p.79). É possível construir a matriz de correlação de um processo fazendo

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(x(t_1), x(t_1)) & \mathbf{R}(x(t_1), x(t_2)) & \dots & \mathbf{R}(x(t_1), x(t_n)) \\ \mathbf{R}(x(t_2), x(t_1)) & \mathbf{R}(x(t_2), x(t_2)) & \dots & \mathbf{R}(x(t_2), x(t_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}(x(t_n), x(t_1)) & \mathbf{R}(x(t_n), x(t_2)) & \dots & \mathbf{R}(x(t_n), x(t_n)) \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

a matriz de covariância por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(x(t_1), x(t_1)) & \mathbf{C}(x(t_1), x(t_2)) & \dots & \mathbf{C}(x(t_1), x(t_n)) \\ \mathbf{C}(x(t_2), x(t_1)) & \mathbf{C}(x(t_2), x(t_2)) & \dots & \mathbf{C}(x(t_2), x(t_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(x(t_n), x(t_1)) & \mathbf{C}(x(t_n), x(t_2)) & \dots & \mathbf{C}(x(t_n), x(t_n)) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

D Ortogonalidade e Descorrelação

Dois processos são denominados mutuamente ortogonais se (MANOLAKIS et al., 2000, p.101), (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.385)

$$R(x(t_1), x(t_2)) = 0 \quad \forall t_1 \text{ e } t_2 \quad (\text{D.1})$$

e descorrelacionados se

$$C(x(t_1), x(t_2)) = 0 \quad \forall t_1 \text{ e } t_2. \quad (\text{D.2})$$

Se ambos os processos tiverem média nula, a descorrelação implica também na ortogonalidade (MANOLAKIS et al., 2000, p.86),(PROHMANN et al., 2018, p.30).

E Estacionariedade em Sentido Estrito e Sentido Amplo

O RP $X(t)$ (ou sequência aleatória x_k) é chamado estacionário de sentido estrito se todas as suas estatísticas (significando $p[x(t_1), x(t_2), \dots]$) são invariantes em relação às mudanças de tempo origem (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.119):

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

O RP $X(t)$ (ou x_k) é chamado estacionário de sentido amplo (ou estacionário de sentido fraco) se

$$\mathbb{E}\langle x(t) \rangle = c(\text{a constant}) \quad (\text{E.2})$$

e

$$\mathbb{E}\langle x(t_1) x^T(t_2) \rangle = Q(t_2 - t_1) = Q(\tau) \quad (\text{E.3})$$

onde Q é uma matriz com cada elemento, dependendo apenas da diferença $t_2 - t_1 = \tau$. Portanto, quando $x(t)$ é estacionário no sentido amplo, isso implica que suas estatísticas de primeira e segunda ordem são independentes da origem temporal, enquanto a estacionariedade estrita por definição implica que as estatísticas de todas as ordens são independentes da origem temporal (GREWAL; ANDREWS, 2014, p.119).

F Ergodicidade

Um problema central nas aplicações de processos estocásticos é a estimativa de vários parâmetros estatísticos em termos de dados reais. O problema de estimar a média de um dado processo $\mathbf{x}(t)$ é ponto central nesta investigação. Começamos com este problema (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.523).

Para um t , $\mathbf{x}(t)$ é uma variável aleatória, sua média $\eta(t) = E\{\mathbf{x}(t)\}$ pode ser estimada. Observa-se n amostras $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ de $\mathbf{x}(t)$ e usamos como estimativa pontual $E\{\mathbf{x}(t)\}$ de média (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.523)

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}(t, \zeta_i) \quad (\text{F.1})$$

Como sabemos, $\hat{\eta}(t)$ é uma estimativa consistente de $\eta(t)$, entretanto, ele pode ser usado apenas se um grande número de realizações $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ de $\mathbf{x}(t)$ estiver disponível. Em muitas aplicações, conhecemos apenas uma única amostra de $\mathbf{x}(t)$. Podemos então estimar $\eta(t)$ em termos da média de tempo da amostra dada.

Isso não é possível se $E\{\mathbf{x}(t)\}$ depender de t . No entanto, se $\mathbf{x}(t)$ é um processo estacionário regular, sua média de tempo tende a $E\{\mathbf{x}(t)\}$, pois o comprimento da amostra disponível tende a ∞ . Ergodicidade é um tópico que trata da teoria subjacente (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p.523).