

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

EDU SOUZA PINHEIRO

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO
ENSINO MÉDIO**

São Luís
2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

EDU SOUZA PINHEIRO

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO
ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

São Luís
2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

PINHEIRO, EDU SOUZA.

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA
NO ENSINO MÉDIO / EDU SOUZA PINHEIRO. - 2021.

58 p.

Orientador(a): ANTONIO JOSÉ DA SILVA.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade
Federal do Maranhão, SÃO LUÍS-MA, 2021.

1. ENSINO NO BRASIL. 2. MATEMÁTICA. 3. PCN. 4.
SEQUÊNCIA DIDÁTICA. 5. TRIGONOMETRIA. I. DA SILVA,
ANTONIO JOSÉ. II. Título.

EDU SOUZA PINHEIRO

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO
ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 21/12/2021

Banca Examinadora

Prof. Dr. Antonio José da Silva

Universidade Federal do Maranhão – UFMA (Orientador)

Profa. Dra. Valeska Martins de Souza

Universidade Federal do Maranhão – UFMA (Membro Interno Titular)

Profa. Dra. Waléria de Jesus Barbosa Soares

SEMED São Luís e Faculdade Laboro (Membro Externo Titular)

RESUMO

A trigonometria é a área da matemática que estuda as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Não é possível dizer precisamente quando ela surgiu, no entanto, o que se sabe, é que ela teve início em meados do século IV a.C., em grandes civilizações como a egípcia e a babilônica. A trigonometria era vista como uma ferramenta essencial para o cálculo de medidas, sendo esta utilizada em diversas situações, como a astronomia, a agrimensura, a construção civil (onde no Egito se destacam as pirâmides) e a navegação. Apesar da limitação matemática da época, foi a partir destes primeiros passos que chegamos à matemática e à trigonometria modernas. A grande questão é que a trigonometria é uma área de complexa compreensão, assim, para manter a atenção e o interesse dos alunos, é essencial que os (as) professores (as) venham a vincular as aulas teóricas às aplicações do dia a dia do ser humano. Além disso, com a evolução da sociedade e as inovações tecnológicas, aquela metodologia de ensino puramente expositiva é ultrapassada e maçante para os (as) alunos (as). Com isso, é essencial, que o (a) docente intercale este tipo de aula com aulas práticas, palestras, exercícios práticos, bem como, utilizar o auxílio da tecnologia, para que os alunos possam fixar melhor os conteúdos expostos em sala de aula. A partir de tudo isso, é objetivo deste estudo, apresentar uma sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio, que esteja em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e ao mesmo tempo seja moderna, isto é, não seja composta apenas de aulas expositivas. Como metodologia de estudo, a dissertação em questão é um estudo de natureza exploratória e realizada através de pesquisas bibliográficas. Como conclusão, podemos dizer que a trigonometria é essencial na sociedade, assim, a realização de aulas mais dinâmicas e a utilização de uma sequência didática com metodologia de aulas mais modernas, pode melhorar consideravelmente o processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo no ambiente escolar.

Palavras-chave: Trigonometria; sequência didática; ensino no Brasil; matemática; PCN.

ABSTRACT

Trigonometry is the area of mathematics that studies the measures of the sides and angles of a triangle. It is not possible to say precisely when it appeared, however, what is known is that it began in the mid-4th century BC, in great civilizations such as the Egyptian and Babylonian. Trigonometry was seen as an essential tool for calculating measurements, being used in various situations, such as astronomy, surveying, civil construction (where the pyramids stand out in Egypt) and navigation. Despite the mathematical limitations of the time, it was from these first steps that we arrived at modern mathematics and trigonometry. The big question is that trigonometry is an area of complex understanding, so, in order to keep students' attention and interest, it is essential that teachers come to link theoretical classes to everyday human applications. In addition, with the evolution of society and technological innovations, that purely expository teaching methodology is outdated and boring for students. With this, it is essential that the teacher intersperses this type of class with practical classes, lectures, practical exercises, as well as using the aid of technology, so that students can better fix the contents exposed in the classroom. From all this, the objective of this study is to present a didactic sequence for the teaching of trigonometry in high school, which is in accordance with the PCN and the BNCC and at the same time is modern, that is, it is not composed only of classes expository. As a study methodology, the dissertation in question is an exploratory study carried out through bibliographic research. In conclusion, it can be said that trigonometry is essential in society, so the realization of more dynamic classes and the use of a didactic sequence with more modern class methodology can considerably improve the teaching-learning process of this content in the environment. school.

Keywords: Trigonometry; following teaching; teaching in Brazil; math; PCN.

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
ECA	Estatuto da Criança e do Adolescente
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IMUK	<i>Internationalen Mathematische Unterrichts Kommission</i>
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNE	Plano Nacional de Educação
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SEB	Secretaria de Educação Básica
Scielo	<i>Scientific Eletronic Library Online</i>

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O <i>seqt</i> Egípcio.....	17
Figura 2 – O <i>Gnômon</i>	17
Figura 3 – <i>Tales</i> e a Altura da Pirâmide.....	19
Figura 4 – A Corda de um ângulo α	21
Figura 5 – Teorema de <i>Ptolomeu</i>	22
Figura 6 – Representação <i>Jiva</i> Hindu.....	23
Figura 7 – A Ideia do Raio 1 de <i>Al-Battani</i>	24
Figura 8 – Fórmula Utilizada para Construir a Tabela de <i>Al-Battani</i>	24
Figura 9 – Concepção de George Joaquim Rético.....	25
Figura 10 – Representação de 1 Radiano.....	27
Figura 11 – Uso do <i>software</i> Geogebra no intuito de apresentar as razões trigonométricas aos discentes.....	38
Figura 12 – Representação do ângulo em graus e em radianos, e a medida do arco de 180°	39
Figura 13 – Gráfico das funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico interativo.....	40
Figura 14 – Gráfico da função seno para análise da continuidade, periodicidade, domínio e imagem.....	40
Figura 15 – Gráfico da função cosseno para análise da continuidade, periodicidade, domínio e imagem.....	41
Figura 16 – Gráfico da função tangente para análise da descontinuidade, periodicidade, domínio e imagem.....	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de Comparação PISA.....	31
Tabela 2 – Tabela de Habilidades da BNCC relacionadas à trigonometria.....	44
Tabela 3 – Bloco de atividades 1: breve histórico da trigonometria.....	45
Tabela 4 – Bloco de atividades 2: revisão de conceitos/atividades preparatórias.....	46
Tabela 5 – Bloco de atividades 3: semelhança de triângulos e trigonometria no triângulo retângulo.....	46
Tabela 6 – Bloco de atividades 4: construção de um teodolito caseiro.....	48
Tabela 7 – Bloco de atividades 5: transição do triângulo para o círculo trigonométrico.....	48
Tabela 8 – Bloco de atividades 6: trigonometria no círculo trigonométrico e no plano cartesiano.....	49
Tabela 9 – Bloco de atividades 7: transição do triângulo para o círculo trigonométrico.....	50
Tabela 10 – Bloco de atividades 8: atividades avaliativas.....	51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Metodologia	13
1.2 Estrutura do trabalho.....	14
2 UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA	16
3 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO BRASIL	29
3.1 A organização da Educação brasileira.....	29
3.2 Cenário da educação no Brasil a partir do PISA.....	30
3.3 O ensino da trigonometria no Brasil	32
3.4 A importância da trigonometria no dia-a-dia	35
3.5 Metodologias para o ensino da trigonometria.....	36
4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO.....	43
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	53
REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

De tudo que aprendemos em Matemática, a Álgebra – especialmente equações (no Ensino Fundamental), a Trigonometria (no Ensino Médio) e a Integral (no Ensino Superior) são ferramentas mágicas, que nos tornam poderosos e são a menina dos nossos olhos nesta sublime e magnífica ciência. Eis aí a razão da escolha do tema, uma vez que as normas do PROFMAT exigem que o trabalho de conclusão do curso seja voltado para o Ensino Básico.

A matemática é uma ciência extraordinária que sempre esteve presente na história e em nosso cotidiano, desde os tempos mais remotos, contribuindo para os avanços tecnológicos e científicos do mundo. No âmbito escolar, a matemática é tida como um “bicho-papão”, onde somente alguns discentes têm mais facilidades para compreendê-la: aqueles que possuem afinidades com os cálculos. No entanto, com o intuito de desmistificar esse paradigma que envolve a matemática, procuramos constantemente alternativas para que os conteúdos matemáticos estejam cada vez mais próximos dos (as) discentes (SILVA, 2019).

A matemática é composta por diversas áreas de conhecimento: a aritmética, a álgebra, a trigonometria e a geometria são as mais conhecidas no currículo da educação básica. No entanto, no ensino superior muitos, outras áreas podem ser citadas, como: cálculo, análise, topologia, teoria dos números, geometria diferencial, matemática discreta, estatística, probabilidade, entre outras (LOPES, 2014).

Dentre as áreas supracitadas, o estudo em questão é voltado para a trigonometria. A trigonometria é a área da matemática que estuda as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Não podemos dizer precisamente quando ela surgiu, mas sabemos que ela teve início em meados do século IV a.C, em grandes civilizações como as egípcias e babilônicas. Esta era visualizada como uma ferramenta de extrema importância para o cálculo de medidas, sendo utilizada em diversas situações, como a astronomia, a agrimensura, a construção e a navegação. Apesar da limitação matemática da época, grandes feitos foram realizados graças à trigonometria, como é o caso das pirâmides do Egito (VIANA; SILVA, 2007).

Trigonometria é uma palavra de origem grega, que pode ser decomposta em *trigōnon* (triângulo), mais *metron* (medida), ou seja, significa medida de triângulos. A trigonometria tem aplicações importantes em vários ramos, tanto na matemática pura, quanto na matemática aplicada e, conseqüentemente, nas ciências naturais. Por ser uma

área da matemática de grande relevância na educação básica, esta deve ser constantemente estudada, iniciando-se ainda no Ensino Fundamental.

O fato é que quando se fala em trigonometria a primeira coisa que vem no pensamento é uma imagem de um triângulo retângulo, uma vez que, é sobre essa figura geométrica que se inicia o estudo deste tema no Ensino Fundamental. Seguidamente e muito provavelmente se pensará nas razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente no Ensino Médio. Ao concentrar um pouco mais, é possível recordar que em certa altura do percurso escolar, os (as) professores apresentavam o círculo trigonométrico, ou seja, à medida que o indivíduo ia avançando no ensino, também os conhecimentos acerca da trigonometria iam se desenvolvendo (MARTINS, 2014).

Assim como qualquer conteúdo de qualquer área de conhecimento, é importante que o ensino de trigonometria esteja ligado às aplicações cotidianas dos (as) estudantes, uma vez que a matemática precisa ir além da memorização de fórmulas e conceitos, e sim saber utilizar estas expressões no dia a dia, de modo a descrever e modelar matematicamente situações. Como apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, mais recentemente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a trigonometria é uma temática que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações (SILVA et al., 2015).

Além disso, Lima, Coelho e Costa (2018) deixam evidentes que o ensino da trigonometria demanda ter seu alicerce em um trabalho pedagógico que possibilite o desenvolvimento das competências esperadas para o Ensino Médio, na qual o (a) aluno (a) construa o seu próprio conhecimento e se torne investigador de novos resultados. A partir disso, percebe-se que algumas dificuldades encontradas pelos (as) alunos no aprendizado são referentes à metodologia, às habilidades e aos conceitos que não foram bem trabalhados nos (as) anos/séries anteriores, o que interfere na hora em que eles (as) necessitam efetuar alguma tarefa sobre a trigonometria, tal como, utilizar os conhecimentos de proporção para se trabalhar com as razões trigonométricas.

Este estudo tem como seu objetivo geral, apresentar uma sugestão de metodologia, com base nos PCN e na BNCC, a partir de uma sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio brasileiro.

Os objetivos específicos definidos para este estudo são: Expor o cenário atual da Educação brasileira e mais especificadamente do ensino de trigonometria nas escolas; apresentar e sugerir uma metodologia, a partir do Geogebra para o fazer pedagógico em

sala de aula com a trigonometria e que podem auxiliar na utilização desta área da matemática nas escolas; propor uma sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio.

Na Matemática existem diversas áreas de conhecimento: álgebra, aritmética, geometria e trigonometria. Esta última é o alvo principal deste estudo, tendo em vista, que no Ensino Fundamental, existe um foco maior nas três primeiras áreas, assim, quando o (a) aluno (a) chega ao Ensino Médio, ele sente dificuldades nessa importante área da Matemática.

Geralmente, em diversas situações, a trigonometria é apresentada em sala de aula desconectada de suas aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico e análise de gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução dos problemas que envolvem medições, em especial, o cálculo de distâncias inacessíveis e a fenômenos periódicos (UBERTI, 2003).

Partindo desse princípio, é essencial que, com o evoluir da sociedade, o ensino também se adeque às realidades desta, para que assim, consigamos alcançar um índice de aprendizado maior entre os (as) discentes. A partir disso, por apresentar a matemática certos graus de complexidade, e a trigonometria ser uma área desta que é relegada ao longo de uma parte do ensino, é essencial apresentarmos uma sequência didática que respeite os PCN e a BNCC imposta pelo Ministério da Educação, bem como, busque um maior índice de aprendizado deste conteúdo.

Mas afinal, o que é uma sequência didática? De acordo com Barbosa (2002) uma sequência didática consiste em uma série de atividades que criam um ambiente de modelagem matemática, portanto, são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus/suas alunos (as).

Já Zabala (1998) define a sequência didática como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo (a) professor (a) como pelos (as) alunos (as).

Segundo Giordan et al. (2011) a estrutura de construção da sequência didática deve seguir os seguintes passos: a) apresentação da situação, definição e formulação da tarefa; b) produção inicial, estabelece o primeiro contato entre o (a) aluno (a) e o gênero textual proposto; c) módulos de atividade, atividades preparadas pelo (a) professor (a) de observação e análise; d) produção final, destinado à prática de elaboração textual.

Vygotsky (2001) afirma que os processos de ensino são fundamentais para aquisição dos conhecimentos, assim consideramos que é importante que os (as) professores (as) elaborem situações de ensino que permitam ao/à aluno (a) estabelecer conexões entre o conhecimento científico e sua compreensão do cotidiano e, nesse sentido, a sequência didática apresenta-se como uma importante metodologia pedagógica destes processos de ensino.

Segundo Papoulias, (2019),

As aulas que envolvem estes conteúdos exigem grande atenção por parte dos (as) estudantes no que se refere à sequência em que os eventos acontecem, uma vez que ocorrem muitas transformações ao longo dos processos [...] Ao se realizar uma análise do modo como esse conteúdo vem sendo trabalhado nas escolas, percebe-se a grande necessidade de utilizar metodologias inovadoras para aperfeiçoar o ensino, contribuir para a qualidade das aulas e, conseqüentemente, do aprendizado. (PAPOULIAS, 2019, p.18).

Assim, a sequência didática é reconhecida e desenvolvida para atividades educacionais específicas, com início e fim conhecidos por professores (as) e alunos (as). Para entender a importância do ensino como motivo de justificativa é importante identificar suas categorias, como atividades e torná-lo uma relação que crie algo informativo, que atenda às reais necessidades dos (as) alunos (as).

1.1 Metodologia

Este trabalho se trata de um estudo de natureza exploratória e sua abordagem é uma revisão de literatura, ou seja, baseada em pesquisas bibliográficas. No entanto, uma sequência didática é proposta para que sirva ao propósito do ensino da trigonometria no ensino médio.

Por definição, a pesquisa exploratória possui como função preencher lacunas que costumam aparecer em um determinado estudo. Nas palavras de Gil (2008), as pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o intuito de proporcionar uma visão geral do problema, característica que possibilita atender ao objetivo deste estudo. Já nas palavras de Santos (2010), o objetivo de uma pesquisa exploratória é se familiarizar com um assunto pouco explorado. Ao final de uma pesquisa exploratória, o pesquisador terá um conhecimento maior acerca do assunto foco do estudo. Como qualquer pesquisa, ela depende também de uma pesquisa bibliográfica.

A pesquisa bibliográfica tem como intuito, proporcionar uma maior familiaridade com o problema de pesquisa, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses,

no caso em questão, como também é um estudo exploratório, a pesquisa não possui hipóteses. No geral, é possível dizer que estas pesquisas possuem como objetivo principal, o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite as considerações dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado (GIL, 2008).

Já nas palavras de Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa bibliográfica é efetuada a partir do levantamento de referências teóricas previamente analisadas e publicadas, seja por meios escritos, como também por meios eletrônicos, como é o caso de livros, artigos científicos de eventos, artigos de periódicos, monografias, dissertações de mestrado, teses de doutorado, entre outras. Qualquer trabalho científico é iniciado com uma pesquisa bibliográfica, como também é o caso deste estudo.

O procedimento para coleta de dados foi realizado através da consulta as fontes científicas indexadas em bases de dados como *Scientific Electronic Library Online* (Scielo), Google Scholar, bem como repositórios de universidades brasileiras e estrangeiras.

No geral, o período desta pesquisa está limitado entre os anos de 2010 e 2020, com algumas exceções. Isso, no intuito de produzir um material mais condizente com a realidade atual do ensino da trigonometria no Brasil. Como palavras-chave/descriptores utilizados no processo de pesquisa foram utilizados: trigonometria; sequência didática; educação no Brasil; matemática; PCN.

1.2 Estrutura do trabalho

A dissertação em questão encontra-se estruturada em 05 (cinco) capítulos. O primeiro é destinado a trazer a introdução/contextualização do assunto a ser desenvolvido de forma mais aprofundada nos capítulos posteriores, e também possui o intuito de apresentar a metodologia de estudo, bem como, os objetivos que desejam ser alcançados com este. O segundo capítulo é destinado à apresentação do histórico da trigonometria no mundo, passando desde os estudos realizados pelos egípcios e babilônicos, até a matemática moderna, que neste estudo será representada por *Euler* e *Fourier*.

O capítulo três é designado a apresentar a situação atual da educação no Brasil, como é organizado o ensino e como é conduzido o ensino da trigonometria no país. Neste ainda é apresentada uma possível solução para obter maior interesse dos alunos, que é efetuar uma ligação entre a teoria estudada em sala de aula, com a prática, ou seja, atividades cotidianas, que utilizam a trigonometria em sua concepção.

O capítulo quatro é voltado para o desenvolvimento do objetivo principal do estudo que é apresentar uma sequência didática construída para o ensino de trigonometria no ensino médio que esteja em concordância com o que são sugeridos pelos PCN e a BNCC.

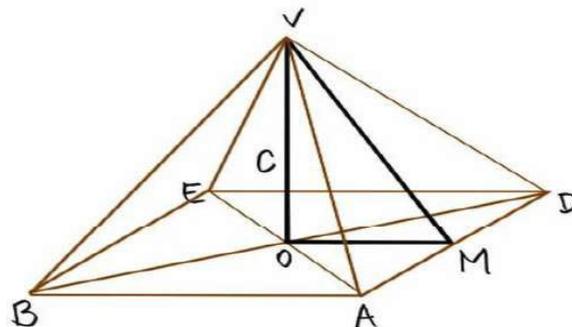
Por fim, as considerações finais obtidas ao longo de toda a dissertação serão apresentadas no quinto capítulo.

2 UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Para considerar a origem e formação dos fatos, devemos discutir qual o significado que se dá ao termo trigonometria. Considerando a trigonometria como a ciência analítica estudada agora, tem-se a origem no século XVII, após o estudo do simbolismo algébrico. No entanto, como este tópico está voltado para as origens mais remotas da astronomia, *Hiparco*, no século II a.C. e outros que tiveram grande influência no desenvolvimento da trigonometria. Estudar a gênese desta também permite observar o surgimento e o progresso da análise e da álgebra, campos da matemática nela contidos em forma de embrião. A trigonometria, assim como outros ramos da matemática, se desenvolveu no mundo antigo a partir de necessidades práticas, especialmente ligada à astronomia, agrimensura e à navegação. Os estudos iniciais estão ligados aos povos babilônicos e egípcios, sendo desenvolvido pelos gregos e indianos, através das práticas conseguiram criar situações de medições de distâncias inacessíveis (LOPES, 2014).

Na concepção de Uberti (2003), a palavra trigonometria tem origem no grego *trigōnon* (triângulo), mais *metron* (medida), cujo principal objetivo é estudar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Esta nasceu como uma resposta à necessidade da astronomia e da navegação. No geral, a trigonometria se desenvolveu como o resultado de uma interação contínua e fértil entre a oferta e a demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única ciência aplicada, a astronomia. Assim, a história da trigonometria mostrou em seu interior, o crescimento de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria.

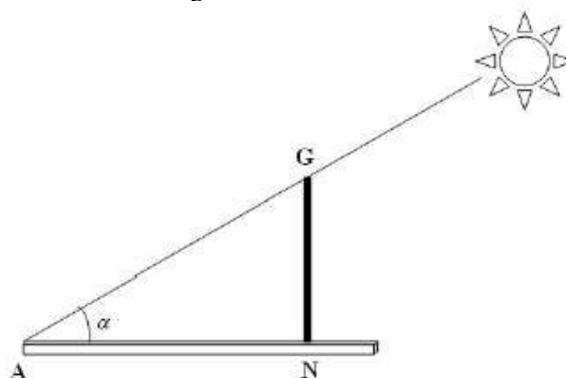
Gonçalves (2018) apresenta que a origem da trigonometria é incerta, ocorrendo provavelmente no Egito, a partir da necessidade de se medir alturas e distâncias inacessíveis. No Egito, os indícios podem ser observados no Papiro de *Ahmes*, conhecido como Papiro de *Rhind*, que é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias, possuindo 84 problemas matemáticos. Quatro desses problemas mencionam a *seqt* (o que seria a nossa cotangente atualmente) que nada mais é que a razão entre o afastamento horizontal da base (segmento OM) e a elevação vertical de uma pirâmide (medida OV), conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – O *seqt* Egípcio

Fonte: Gonçalves (2018, p. 16)

Na Figura 1, sejam $OV = 40$ e $OM = 80$, então o *seqt* $= \frac{80}{40}$. Isto é, *seqt* $= 2$.

Os Egípcios conceberam o significado de *seqt* como a razão entre afastamento horizontal em relação à elevação vertical e a medida da altura que determinava como deveria ser a inclinação de uma pirâmide. Aproximadamente em 1500 a.C., os egípcios começaram a associar sombras projetadas por *Gnômon*, uma vara vertical que se espetava no chão, perpendicular a este, a números, resultando no que seria o primeiro relógio de Sol, como se pode observar na Figura 2 (LEITE, 2016).

Figura 2 – O *Gnômon*

Fonte: Martins (2014, p. 4)

Conforme Strasburg (2014), na construção dos relógios de sol, produzidos pelos egípcios, era preciso ter conhecimento de algumas relações entre ângulos e cordas em um círculo. Alguns matemáticos acreditam que a trigonometria foi originalmente inventada para a produção deste tipo de relógio. No entanto, a construção dos relógios de sol se baseava mais em observações diárias, do que em um estudo aprofundado em trigonometria.

Como o tamanho do *gnômon* era constante, possivelmente usariam sempre a vara, na mesma posição, o comprimento de NA ao meio dia variava com o ângulo \hat{A} , ou seja, $\frac{AN}{GN}$ seria a “função” do ângulo \hat{A} , também hoje designada de cotangente (MARTINS, 2014).

Costa (2014) expõe que os primeiros vestígios da trigonometria surgiram não somente no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios tinham grande interesse pela astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem utilizar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.

Segundo Leite (2016), os babilônios foram excelentes astrônomos, e foi no século XXVIII a.C. que, ao realizar diversas observações do tempo, construíram um calendário astrológico. Foram eles que, por volta de 300 a.C., introduziram a divisão da circunferência como temos hoje em 360 partes. Especula-se que essa divisão foi motivada por 360 ser um número próximo dos dias do ano. Assim, os babilônios influenciaram povos posteriores e, alguns séculos depois, os gregos adotaram tanto a divisão da circunferência em 360 partes, como a divisão sexagesimal em graus, minutos e segundos para demonstrar o tamanho de arcos e cordas de circunferências.

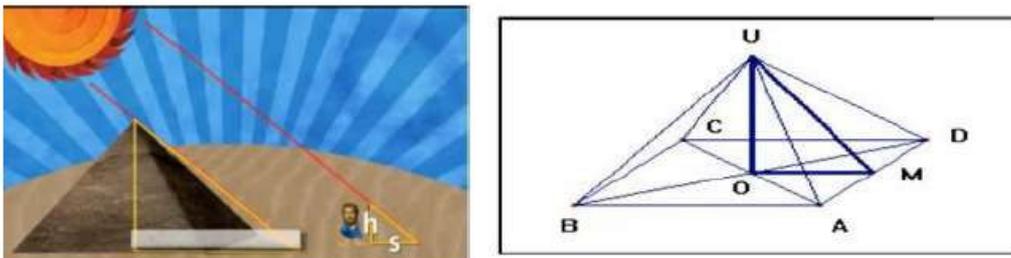
Um tipo de trigonometria primitiva também foi encontrado no Oriente. Na China, no reinado de *Chóu-pei Suan-king*, aproximadamente 1.110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente utilizados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo, mas, infelizmente não existem registros de como eram efetuadas as medições e quais as unidades de medida utilizadas. Na literatura chinesa é possível encontrar certa passagem que traduzida significa: “O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do *gnômon*”, o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C. (COSTA, 2014).

Embora as civilizações do Egito e Mesopotâmia tivessem algumas noções em relação à trigonometria, foi na Grécia que os estudos nessa área se desenvolveram. Os gregos de modo geral, foram estudiosos da cultura egípcia e mesopotâmica e muitos registros dessas duas civilizações chegavam à Grécia. Diversos gregos notáveis dedicaram a sua vida a dar sequência nos estudos iniciados no Egito e na Mesopotâmia e o desenvolvimento da matemática não foi uma exceção (STRASBURG, 2014).

No mundo ocidental, o conhecimento dos egípcios foi seguido pelos gregos. Na Grécia, a matemática teve um grande desenvolvimento e a civilização grega passou a

servir de preceptora a todas as outras nações. *Hierônimos de Rodas* atribui a *Tales* (624 – 548 a.C. aproximadamente) o método mais simples para medir a altura de uma pirâmide: “conta-se que *Tales* mediu a altura das pirâmides pela sombra delas, fazendo a medição na hora em que a sua própria sombra correspondia ao seu tamanho”, como se pode observar na Figura 3 (OLIVEIRA, 2014).

Figura 3 – *Tales* e a Altura da Pirâmide



Fonte: Oliveira (2014, p. 23)

Tales fundamentou a trigonometria com os seus estudos sobre a semelhança de triângulos e seu discípulo *Pitágoras* (570 – 495 a.C., aproximadamente) fez a primeira demonstração do teorema: “Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos” (OLIVEIRA, 2014).

Boyer (1996) deixa claro que muito do que é relatado sobre *Tales* e *Pitágoras* e suas obras são muito imprecisas. Portanto, o autor considera que:

Não sobreviveu nenhuma obra de *Tales* ou *Pitágoras*, nem se sabe se *Tales* ou *Pitágoras* jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. (BOYER, 1996, p. 55)

A trigonometria grega surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, conseguindo realizar o cálculo do tempo, e para ser utilizada na navegação e na geografia. Com isso, os estudos da trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana (UBERTI, 2003).

Segundo Martins (2014), a curiosidade estimulou os astrônomos gregos a calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e sobre o raio da terra. Deve-se a *Eratóstenes* de Cirene (276 – 194 a.C.), contemporâneo de *Arquimedes* (287 – 212 a.C.) e *Aristarco* (310 – 230 a.C.), a descoberta da medida para a circunferência da Terra,

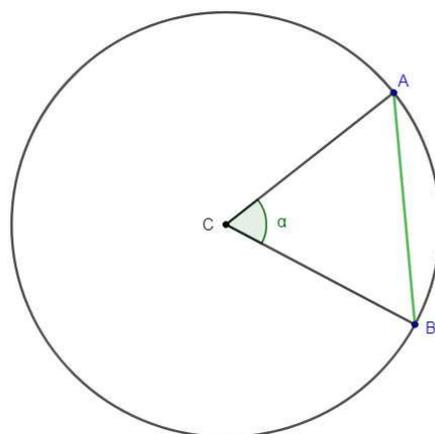
através da semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que levou a perceber a existência de relações entre ângulos e cordas.

No entanto, citando Boyer (1996), pode-se afirmar que: “Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a *Eratóstenes*, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática”.

Assim, Costa (2014) expõe que surgiu, então, na segunda metade do século II a.C., um marco na história da trigonometria: *Hiparco* de Nicéia (190 – 120 a.C.). Fortemente influenciado pela matemática da Babilônia, ele acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isso parece dever-se a *Hiparco*, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1° em 60 partes, obtendo o arco de 1 minuto. Sua trigonometria baseava-se em uma única função, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda.

Os estudos de *Hiparco* conduziram-no à relação entre o comprimento de um arco e o ângulo ao centro correspondente de um círculo arbitrário. Supõe-se que tenha sido ele também, a construir a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°. Na Figura 4 é possível visualizar a corda de um ângulo α . Todas essas descobertas e avanços na astronomia conferiram-lhe o título de “Pai da Trigonometria” (MARTINS, 2014).

Anos mais tarde surgiu Cláudio *Ptolomeu* (90 – 168), autor da obra *Syntaxis Mathematica*, composta por 13 volumes, que ficou conhecida como o *Almagesto* (“o maior”), onde relacionou o comprimento da corda com o arco. No *Almagesto*, *Ptolomeu* inclui tabelas mais completas que as de *Hiparco* com ângulos de meio grau em meio grau, de 0° a 180° e o Teorema de *Ptolomeu* que foi de extrema importância para o cálculo das cordas de *Ptolomeu*. A partir deste resultado, chegou ao que chamamos hoje de fórmulas do seno e do cosseno da soma e da diferença de dois ângulos (MARTINS, 2014).

Figura 4 – A Corda de um ângulo α 

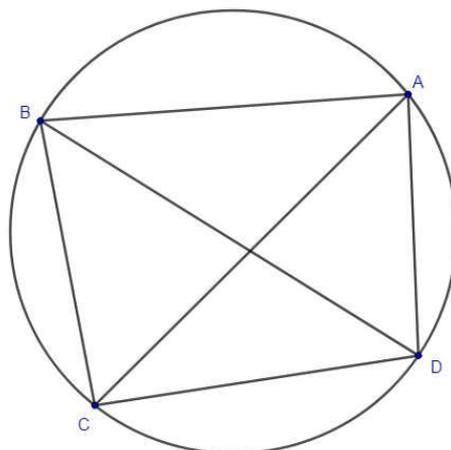
Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Martins (2014)

Conforme Costa (2014), o *Almagesto* é um marco, um modelo de astronomia que perdurou até Copérnico, no século XVI. *Ptolomeu*, na verdade, sistematizou e compilou no *Almagesto* uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego *Hiparco*, cujos livros se perderam. O *Almagesto* sobreviveu e por isso existem as suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos utilizados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu.

De acordo com Leite (2016), *Ptolomeu* dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes, cada uma dessas partes ele subdividiu em minutos e cada minuto dividiu em sessenta segundos e usou $\frac{377}{120} \sim 3,14666 \dots$ como uma aproximação para π . Construiu a tabela de cordas contendo ângulos variando de $\frac{1}{2}^\circ$ a 180° . Desta forma, a tábua de cordas de *Ptolomeu* equivalia a construir uma tabela de senos de ângulos $\frac{1}{4}^\circ$ de 0° a 90° .

No *Almagesto* encontra-se o “Teorema de *Ptolomeu*”, que era de grande importância para o cálculo das cordas que diz: “Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais”, como se pode ver na Figura 5. A relação do Teorema de *Ptolomeu* pode ser observada na Equação 1.

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \quad (1)$$

Figura 5 – Teorema de *Ptolomeu*

Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Uberti (2003)

Ptolomeu deduz o que em notação moderna e usando as funções seno e cosseno é a expressão para $\text{sen}(a \pm b)$. Além disso, demonstrou que $\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$, onde A é um ângulo agudo (UBERTI, 2003).

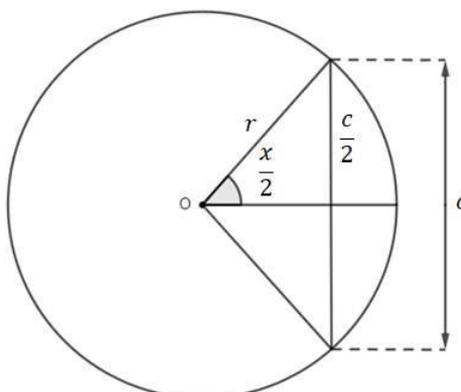
Posteriormente, por volta do século IV d.C. foi a vez dos hindus contribuírem com a trigonometria. Com a crise na Europa Ocidental devido as invasões dos bárbaros germânicos e a queda do Império Romano, o centro cultural começa a se deslocar para a Índia, revolucionando a trigonometria com a produção de diversos textos relacionados à astronomia. Um dos textos que foi preservado é o *Surya Siddhanta*, que segundo os hindus, o autor foi *Surya*, o deus sol (OLIVEIRA, 2014).

No *Surya* os hindus aperfeiçoaram a ideia da trigonometria de *Ptolomeu*, que relacionava as cordas de um círculo e os arcos centrais que subtendiam. Eles estabeleceram uma relação entre a metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo central, com isso, forneceu uma contribuição fundamental para a trigonometria: a introdução da noção de seno de um ângulo, que antecede a função trigonométrica moderna (LEITE, 2016).

Conforme Boyer (1996), em aproximadamente 500 d.C., o matemático e astrônomo *Aryabhata* publicou o *Aryabhatiya*, primeiro trabalho a mencionar de forma explícita ao seno como função de um ângulo. A palavra seno é decorrente de uma série de erros de tradução do sânscrito “ *jyâ-ardha*”, que significa meia-corda. *Aryabhata* abreviava esse termo para *jya* ou *jiva*. Posteriormente os árabes traduziram a palavra *jya* para *jiba*, e os escritores interpretaram como *jaib*, que significa baía, seio ou algo sinuoso.

Do árabe foi traduzido para o latim *sinus*, que também significava seio, baía. Assim, ao associar a metade da corda à metade do ângulo central, permitiu-se visualizar um triângulo retângulo na circunferência, como demonstrado pela Figura 6.

Figura 6 – Representação *Jiva* Hindu



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Leite (2016)

Sendo assim, o *jiva* é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, como pode ser visualizado na Equação 2.

$$jiva \frac{x}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{sen} \frac{x}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r} cr dx \quad (2)$$

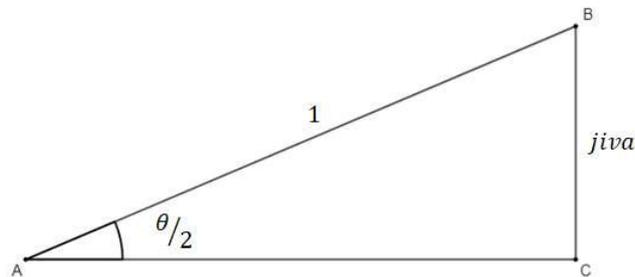
A metade da corda dividida pelo raio da circunferência é o seno da metade do arco. E foi da necessidade de calcular o seno do ângulo complementar que surgiu o cosseno, denominado por *Aryabhata* de “*kotiya*”. Com os cálculos dos hindus, as funções trigonométricas avançaram: foram aperfeiçoados assim os métodos de tabulação e as técnicas de aproximação. *Aryabhata* elaborou tabelas envolvendo metade de cordas, hoje conhecida como tabelas de seno, e, aproximadamente em 1.150 d.C., *Bhaskara* forneceu técnicas mais sofisticadas e detalhadas para construção de tais tabelas (LEITE, 2016).

Ainda nas palavras do autor supracitado, por volta do século IX, o Império árabe viveu grandes avanços. A civilização foi construída com cultura própria, e de modo que a ciência ocupava um lugar de destaque. Os árabes utilizaram dois tipos de trigonometria: a grega, das cordas localizadas no *Almagesto*; e a hindu dos textos dos *Siddhantas*, usando o *jiva* que se baseava no cálculo do seno de um ângulo. Por influência do matemático e astrônomo *Al-Battani* (850 – 929 d.C.), usavam com maior frequência a trigonometria hindu.

Costa (2014) apresenta que foi *Al-Battani* que introduziu a ideia do círculo de raio unitário e com isso pôde demonstrar que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa, como pode ser visualizado na Figura 7 e na Equação 3.

$$jiva = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{BC}{1} \rightarrow \text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1} \quad (3)$$

Figura 7 – A Ideia do Raio 1 de *Al-Battani*



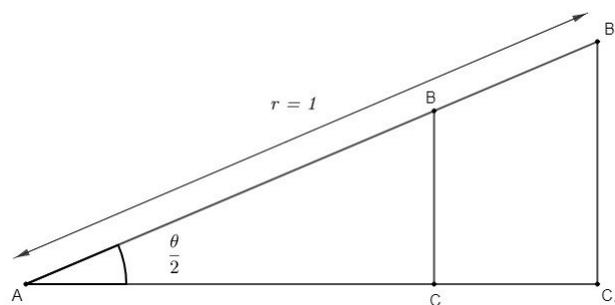
Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Costa (2014)

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$, então, quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa pode-se afirmar que $\Delta ABC \approx \Delta AB^1C^1$. No ΔABC temos que: $\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{jiva}{1}$.

Pelo Teorema de *Tales*, tem-se que: $\frac{jiva}{1} = \frac{BC}{AB} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$. Logo, $\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1} = \frac{jiva}{1}$.

As fórmulas acima apresentadas foram utilizadas para construir a tabela de *Al-Battani*, como se pode observar na Figura 8.

Figura 8 – Fórmula Utilizada para Construir a Tabela de *Al-Battani*



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Costa (2014)

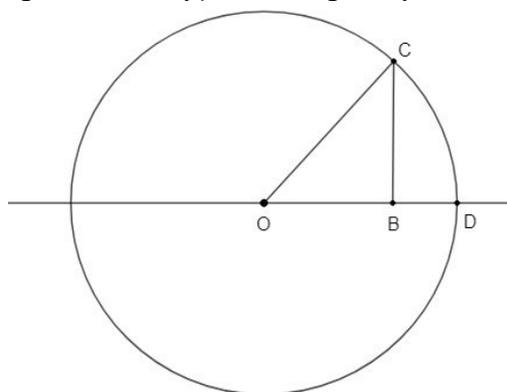
Conforme Leite (2016), após *Al-Battani* veio *Abu al-Wafa* (940 – 998), estudioso da álgebra e da trigonometria. *Abu al-Wafa* construiu uma tabela para senos de ângulos variando $\frac{1}{4}$ de grau um do outro e utilizou o que seria equivalente a 8 casas decimais. Ele forneceu uma tabela de tangentes, na qual utilizou todas as 06 (seis) funções trigonométricas comuns e estabeleceu relações entre elas. Ainda que não formalmente definidas, os árabes contribuíram consideravelmente para o desenvolvimento das funções tangente, cotangente, secante e cossecante. Desta forma eles também tiveram uma outra grande contribuição, visto que, foi através deles que a trigonometria chegou a Europa.

Com a decadência da Escola de Bagdad, as principais atividades intelectuais que lá eram realizadas se deslocaram para o sul da Europa, e também o estudo da trigonometria. No século XI, a cidade espanhola Toledo, que por alguns séculos era dominada pelos árabes, passou a ser dominada pelos cristãos. Nessa época era tida como importante centro de traduções. Após traduções de obras do hebreu, do grego e, especialmente do árabe para o latim, o século XII ficou conhecido como o “século das traduções”, deste modo, permitindo aos europeus o acesso à matemática árabe e à herança grega (LEITE, 2016).

O matemático europeu mais habilidoso do século XIII foi *Fibonacci* (1170 – 1250). Ele estudou no norte da África e depois viajou pelo Oriente como mercador, com isso sofreu forte influência dos árabes. Sua obra “*Practica Geometriae*”, de 1220, é uma aplicação da trigonometria árabe na agrimensura (COSTA, 2014).

Na concepção de Uberti (2003), outro fator de desenvolvimento da trigonometria foi a necessidade de refazer todos os cálculos da astronomia posicional, com a adoção progressiva do sistema heliocêntrico de *Copérnico*. A construção de tabelas trigonométricas era uma tarefa lenta e desagradável, mas essencial para o progresso da astronomia e da matemática. A utilização crescente da trigonometria fez com que muitos outros matemáticos construíssem tabelas, como por exemplo, *George Joaquim Rético* (1514 – 1576). Ele fundiu ideias de outros matemáticos com suas próprias contribuições e expôs uma trigonometria do triângulo retângulo: em vez de dizer que CB é o seno do arco CD , ele considerou CB como o seno do ângulo COB , o que introduziu essencialmente a formulação da trigonometria do triângulo retângulo, como é feito até hoje, como se vê na Figura 9.

Figura 9 – Concepção de George Joaquim Rético



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Uberti (2003)

Martins (2014) expõe que com *Thomas Fincke*, em 1583 surge o conceito de tangente. Mais tarde em 1620, *Edmund Gunter* foi o primeiro a utilizar o conceito de cotangente. Tais conceitos desempenharam um papel fundamental na construção de relógios de sol, permitindo calcular o comprimento da sombra produzida por um objeto.

A partir de *Galileu* (1564 – 1642), e com a descoberta da Geometria Analítica por *Descartes* (1596 – 1650) e por *Fermat* (1601 – 1665), o estudo das curvas se desenvolveu muito. A curva seno foi introduzida nos estudos de *Roberval* (1602 – 1675) sobre a cicloide; no livro Mecânica de *Wallis* (1616 – 1703), publicado no ano de 1670, há um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica. Pouco a pouco, as funções trigonométricas passaram a figurar frequentemente na matemática, paralelamente ao uso de tabelas cada vez mais precisas para aplicações na topografia, navegação e astronomia de posição (UBERTI, 2003).

Conforme Leite (2016), o século XVIII foi marcado pela presença de um dos maiores matemáticos da história: o suíço *Leonhard Euler* (1707 – 1783). Sua obra é constituída de aproximadamente 800 manuscritos (livros e artigos), dos quais 300 foram publicados após o seu falecimento. *Euler* adotou o raio de um círculo como unidade e passou a definir as funções trigonométricas aplicadas a um número e não a um ângulo, usado até então. Com essas medidas, *Euler* influenciou o desenvolvimento da trigonometria da época para a forma atual. As funções trigonométricas passaram a serem visualizadas como funções periódicas no início do século XVI, motivado pelos trabalhos do matemático francês *François Viète* (1540 – 1603), e impulsionada pelo surgimento do cálculo infinitesimal, atingindo o ápice no século XVIII, quando *Euler* introduziu a função exponencial “ e ”, onde o símbolo “ e ”, representa o atualmente conhecido “número de *Euler*”, aproximadamente 2,718.

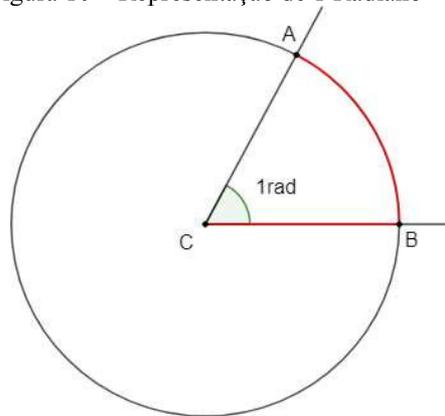
Através desta, foi possível modernizar as noções de seno e cosseno, ao definir $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ como funções de uma variável real x . *Euler* introduziu as notações sen , cos , tg , cotg , sec e cossec para as funções trigonométricas. Apesar de não ter sido criação dele, o uso definitivo da letra grega π para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, é em grande parte devido a ele.

Martins (2014) apresenta que através do estudo de *Euler*, o seno podia deixar de ser visualizado apenas como uma medida de um segmento de reta e que este poderia ser visualizado como um número, uma razão ou uma ordenada de um ponto no círculo.

Assim, o seno seria uma função do arco duma circunferência de raio unitário que limita o círculo trigonométrico.

Ainda nas palavras do autor acima mencionado, a medida dos ângulos em radianos é essencial na trigonometria. As duas unidades mais utilizadas para medir amplitudes de ângulos e de arcos de circunferências são o grau e o radiano. O grau é a unidade mais antiga. O radiano é a amplitude de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. Na Figura 10, observamos que o arco AB tem comprimento igual ao raio CB, por isso, a amplitude do arco AB é de 1 radiano. O ângulo ao centro correspondente tem amplitude igual à do arco, assim a sua amplitude também é 1 radiano (*1rad*).

Figura 10 – Representação de 1 Radiano



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Martins (2014)

É importante assim, ter presente a relação que existem entre graus e radianos. O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é π . Assim, para obter o comprimento de uma circunferência, multiplicamos o raio por 2π .

Costa (2014) expõe que o tratamento analítico das funções trigonométricas está no livro “*Introductio in Analysin Infinitorum*”, de 1748, considerada a obra chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o *status* de número obtido pela ordenada de um ponto do círculo unitário, ou o número definido pela série exposta nas Equações 4 e 5, para um certo número real θ :

$$\text{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (4)$$

$$\text{cos}\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (5)$$

Em 1748 *Euler* mostrou as funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos por meio da Equação 6:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots\right) \rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (6),$$

onde i é a unidade imaginária e $i^2 = -1$.

Considerando a Equação 6 e fazendo a substituição de θ por $-\theta$, obtém-se $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ e, a partir disso, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ e $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$, que resultam nas Equações 7 e 8.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (7)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (8)$$

Tais equações são conhecidas como “identidades de *Euler*”, mas essas equações já eram conhecidas pelos matemáticos ingleses *Roger Cotes* (1682 – 1716) e *Moivre* (1667 – 1754).

Posteriormente, Leite (2016) apresenta que o matemático francês *Joseph Fourier* (1768 – 1830) em 1822 publicou a sua importante obra *Théorie Analytique de la Chaleur*, que descreve quando uma função $y = f(x)$ pode ser representada por uma série trigonométrica conhecida como série de Fourier.

Finalmente, em relatos de Silva (2014), a trigonometria, no início era um elemento auxiliar da agrimensura e da astronomia e estas se tornaram primeiramente autônomas e por fim, se transformou em uma parte da análise matemática, expressando relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Como pôde ser observado nesta exposição, foi um longo caminho na humanidade para chegar até a trigonometria que hoje é ensinada aos alunos nas escolas e universidades espalhadas por todo o mundo. Na atualidade se encontram aplicações para a trigonometria nas telecomunicações, na música, na determinação de distâncias entre estrelas, na medicina, na física, na sociologia e em muitas outras áreas científicas. Como tal, o seu estudo é indispensável para todos aqueles que desejam um dia ingressar nas áreas de engenharia e demais ciências.

3 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO BRASIL

3.1 A organização da Educação brasileira

Conforme Ocanha (2016), os cidadãos possuem hoje o direito à educação básica com acesso gratuito, incluindo pré-escola, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Esta educação deve ser de qualidade e seguir orientações dadas pelo Ministério da Educação (MEC) junto à Secretaria de Educação Básica (SEB), visando oferecer uma formação básica comum.

Segundo o que consta no portal do MEC, a educação básica é norteada por documentos que são a Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (DCN) e o Plano Nacional de Educação (PNE), aprovado em 26 de junho de 2014 pelo Congresso Nacional. Outros documentos fundamentais são a Constituição da República Federativa do Brasil, o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA) e ainda, hoje temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Com isso, é de responsabilidade da União, disponibilizar o PNE, responsável por nortear o ensino de todo o país. Dentro deste plano, cada Estado, juntamente com os seus Municípios, pode organizar o seu currículo como melhor forma para a sua realidade, criando políticas e diretrizes que contribuam para o desenvolvimento eficaz do PNE. Cada Município deve também ter suas propostas pedagógicas que garantam a eficácia do ensino (OCANHA, 2016).

A educação básica tem por finalidades desenvolver o (a) educando (a), assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores. (BRASIL, 1996, art. 22)

Silva (2015) apresenta em seu estudo que a educação deve possibilitar ao indivíduo um desenvolvimento amplo e dinâmico desde o período sensório-motor até o operatório abstrato e que, para construir esse conhecimento, as concepções infantis combinam-se às informações advindas do meio, na medida em que o conhecimento não é concebido apenas como sendo descoberto espontaneamente pela criança, nem compartilhado de maneira mecânica pelo meio exterior ou pelos adultos, mas como resultado de uma interação na qual o sujeito é sempre um elemento ativo, que procura ativamente compreender o mundo que o cerca e que busca resolver as interrogações que este mundo provoca. É aquele que aprende basicamente através de suas próprias ações sobre os objetos do mundo e que constrói suas próprias categorias de pensamento ao

mesmo tempo em que organiza o seu mundo. Não é um sujeito que espera que alguém que possui um conhecimento o “transmita” a ele por um ato de bondade. Assim o ato de educar seria estimular as estruturas de formas de ação (motora, verbal e mental) cada vez mais móveis, mais amplas e mais estáveis, com a finalidade de extensão progressiva do organismo.

Os principais objetivos da educação são a formação de homens “criativos, inventivos e descobridores”, de pessoas críticas e ativas, e na busca constante da construção da autonomia. Assim, a educação tem importância fundamental no desenvolvimento humano e a forma de educar, ou de compartilhar conhecimentos por suas imensas variáveis, torna-se o ponto chave para a construção ou para a desconstrução de um ser humano.

Quando o assunto é a trigonometria, alvo principal deste estudo, Souza (2019) expõe que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN do Ensino Médio, o estudo da trigonometria é destacado como um tema que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática como desenvolvimento de habilidades e competências, sendo que este estudo deve estar relacionado às aplicações, evitando-se o uso excessivo no cálculo algébrico das identidades e das equações.

O último grande marco legal para a construção do currículo da Educação Básica é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento homologado pela Portaria nº 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, Seção 1, Pág. 146, em sua versão ampliada, entrando em vigor a partir de 2018.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BRASIL, 2017, p. 7).

3.2 Cenário da educação no Brasil a partir do PISA

Conforme Silva (2015), em uma avaliação de aprendizagem em larga escala, que avalia a qualidade de educação, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), realizada em 65 países, o Brasil ficou entre as últimas posições do *ranking*, demonstrando que o país ainda tem muito o que evoluir quando o assunto é educação. O

PISA é uma avaliação aplicada pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) para medir o nível de habilidades de estudantes de diferentes países em 03 (três) áreas do conhecimento: matemática, leitura e ciência. O exame ocorre a cada 03 (três) anos para alunos (as) na faixa etária dos 15 anos, sendo que a cada edição o foco está centrado em uma área principal a ser avaliada. Em 2000, o foco foi em leitura; em 2003, em matemática; em 2006, em ciências; em 2009, repetiu-se a leitura; em 2012, o foco foi novamente em matemática e assim sucessivamente.

Ainda nas palavras do autor supracitado, apesar de não ser um país-membro da OCDE, o Brasil participa do PISA desde 2000, mesmo tendo ficado na última posição no referido ano. O desempenho do país evoluiu ao longo de suas participações, mas os (as) alunos (as) brasileiros (as) ainda ocupam as últimas posições do *ranking* do PISA, conforme pode ser observado na Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela de Comparação PISA
A EVOLUÇÃO DO BRASIL NO PISA (PONTUAÇÃO E POSIÇÃO NO RANKING MUNDIAL)

BRASIL	PISA 2000	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009	PISA 2012	PISA 2015	PISA 2018
Matemática	334	356	370	386 (57°)	391 (58°)	377 (65°)	384 (71°)
Leitura	396	403	393	412 (53°)	410 (55°)	407 (59°)	413 (58°)
Ciências	375	390	390	405 (53°)	405 (59°)	401 (63°)	404 (67°)
Média Geral	368	383	384	401	402	492	488

Fonte: OCDE e Inep/MEC

De acordo com os dados apresentados na Tabela 1 e com as palavras de Lima, et, al (2020), observamos, portanto, avanços moderados da educação do Brasil, especialmente em matemática, se comparados à primeira edição do PISA realizada em 2000. Todavia, quando comparados à média atingida pelos países da OCDE, ainda não alcançamos o patamar necessário para o desenvolvimento das competências elencadas por essa avaliação. Em relação às médias gerais, é possível verificar que o Brasil mesmo tendo participado de todas as edições do PISA, apresenta uma evolução pequena frente aos demais países.

Silva (2015) ainda expõe que além das conclusões obtidas através do PISA, diversos especialistas em educação veem diversas falhas e problemas na educação brasileira, que começam a ser percebidas pela população brasileira, tais como gestão

ineficiente, desprestígio do magistério, má formação de professores, baixo investimento na Educação Básica, pouca inovação na sala de aula, baixa participação da comunidade escolar, entre outros. É necessário levar em conta que no Brasil houve um grande atraso quanto a preocupação em relação à educação, uma vez que, acabou ficando 4, 5 séculos de atraso nesse setor em relação à outros países desenvolvidos, talvez, por falta de investimentos na educação. Tal diferença não é recuperada do dia para a noite, mas com investimentos adequados esse abismo pode ser reduzido.

Quando o assunto é a matemática, onde a trigonometria se enquadra, este foi um dos piores itens na avaliação do PISA apresentado na Tabela 1. Gonçalves (2018) apresenta que um dos obstáculos para o sucesso dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula é o desinteresse do (a) aluno (a) com relação ao modo que a matemática é apresentada, com aulas expositivas e até por vezes, cansativas. Com isso, alguns autores defendem que uma das melhores maneiras de se aprender matemática é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, experimentando e buscando novos caminhos que valorizem a experiência.

3.3 O ensino da trigonometria no Brasil

Na primeira metade do século XX, diversos educadores matemáticos colocaram em discussão a importância do ensino da trigonometria e as relações dela com a geometria e a álgebra, questionando se o ensino independente deste conteúdo era viável ou não, uma vez que havia uma vertente que afirmava ser um erro muito grave separar a trigonometria e a geometria, por exemplo, e principalmente ao considerá-la uma parte independente no currículo da matemática ensinada no ensino secundário (ensino médio em nossos dias), enquanto outros afirmavam que a trigonometria era um conteúdo específico que deveria ser abordado de maneira isolada (SILVA, 2013).

Ainda nas palavras do autor supracitado, alguns estudiosos consideravam ainda que tal separação certamente acarretaria a criação de barreiras que dificultariam o conhecimento de poderosos métodos da própria trigonometria, buscaram apoio no fato de que muitas questões de geometria se resolvem de maneira elementar e rápida graças às noções básicas da trigonometria. Tais matemáticos defendiam a importância da fusão de tópicos a serem abordados nos programas de ensino, para que os (as) estudantes pudessem perceber a relação interdisciplinar de tais tópicos para solucionar quaisquer situações-problema tanto da matemática, quanto de outras disciplinas.

De acordo com Miorim (1998), no Brasil, as discussões desencadeadas na primeira fase do movimento se refletiram na proposta apresentada em 1928, pelo Professor Euclides Roxo, então diretor do Colégio Pedro II, localizado no Rio de Janeiro, uma instituição que era referência em educação no Brasil naquele período. Essa proposta foi desenvolvida pela congregação do referido colégio, com base nas discussões apontadas na *Internationalen Mathematische Unterrichts Kommission* (IMUK, sigla em alemão) e sugeria alterações significativas para o ensino da Matemática. Apresentava como inovação a ideia de unificação das matemáticas, ou seja, consistia em tornar a Álgebra, Geometria e Aritmética uma só disciplina, denominada Matemática. É importante ressaltar que essa ideia, que era novidade no Brasil, já havia sido adotada em outros países como Alemanha e Estados Unidos, e também questionada sua aplicação em outros, como Itália e Inglaterra. E apesar da proposta ter sido prescrita quase sem nenhuma alteração na Reforma Francisco Campos em 1931, sofreu forte resistência da ala dos (as) professores (as) de Matemática mais conservadores (as) da época, que tinham como base para sua resistência principalmente os argumentos levantados por esses países que não aderiram à nova proposta.

Conforme Silva & Silva (2012), ocorreu no ano de 1942 outra reforma expressiva no Brasil, chamada de Reforma Gustavo Capanema, criada pelo então Ministro de Educação e Saúde Gustavo Capanema (1900-1985). Nessa reforma foi defendido o ensino a partir de coisas concretas, ou seja, a partir do contato com a natureza e com a vida. Nessa reforma, Capanema imprimiu fortes modificações nas propostas de Euclides Roxo, para ele a cultura científica ligada ao ensino da ciência moderna deveria contribuir para o crescimento intelectual e a preparação para os estudos universitários com um caráter problematizador e criativo para o (a) aluno (a). Porém, essas reformas não contribuíram de maneira substancial ao currículo do ensino de Matemática idealizado por Euclides Roxo, pois a matemática trabalhada nos níveis secundário e superior continuava com um enorme distanciamento entre os conteúdos ensinados.

Alves (2016) apresenta em seu estudo que no que diz respeito à trigonometria no Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tratam-na de duas formas: a primeira está inserida nos estudos de geometria (aplicações nos triângulos retângulos, seno, cosseno e tangente); a segunda está relacionada às funções trigonométricas, onde se ressalta a importância de ter compreendido bem os conceitos mais básicos e suas aplicações, para efetivação plena da aprendizagem. Nessa mesma direção, os PCN afirmam que:

[...] a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às implicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvam medições, em especial, o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondam a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a física pode ser de grande oportunidade de aprendizagem significativa. (BRASIL, 2000, p. 44).

Assim, utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos são competências que os alunos devem adquirir com o ensino da trigonometria. Para que essas competências sejam desenvolvidas com sucesso, é importante perceber que:

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como à sua importância no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000, p. 43).

Strasburg (2014) expõe que quanto à trigonometria, o professor pode fazer o uso de recursos tecnológicos que podem servir de facilitador da aprendizagem dessa importante área do conhecimento, que já contribuiu muito com o desenvolvimento científico.

De acordo com Lopes (2014), o ensino da Trigonometria no Brasil passa por 03 (três) momentos históricos, sendo que tais momentos estão ligados à sua abordagem metodológica:

- a. **Geométrico:** Havia uma total integração entre a trigonometria e a geometria plana, todos os teoremas eram demonstrados utilizando a geometria euclidiana. Essa tendência permaneceu até o ano de 1929;
- b. **Geometria Vetorial:** resultante de um movimento nacional, direcionado a uma matemática mais experimental e aplicada, dando ênfase a física como ponto de aplicabilidade da matemática. Essa tendência permaneceu nos anos de 1930 até 1960;
- c. **Funções Circulares:** Essa tendência surgiu com o advento da matemática moderna, até os meados dos anos 1980.

Um aspecto que demonstra claramente o privilégio dado às funções circulares é o fato das orientações curriculares para o Ensino Médio, destacar essas funções como um conceito central no ensino de trigonometria no ensino médio.

Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90° , deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180° . A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida 30° , 45° e 60° (BRASIL, 2006, p. 73)

O documento ainda ressalta a importância de trabalhar aplicações da trigonometria em resolução de problemas, além de distâncias inacessíveis. Outro fator importante colocado pelas Orientações Curriculares Nacionais é que algumas transformações trigonométricas podem ser dispensadas, além do estudo de outras funções inversas das funções seno, cosseno e tangente. Esse é um marco sobre o ensino de trigonometria no Brasil, uma vez que, nas últimas 03 (três) décadas, além de ênfase nas funções circulares, se assistiu a um processo de “algebrização” da trigonometria (LOPES, 2014).

No geral, o que se percebe é que as dificuldades sentidas pelos alunos em aprender trigonometria, estão associadas a falta de compreensão de conceitos como operações com números racionais na forma fracionária. Os alunos sentem muita dificuldade em operar com radianos, com isso, o ensino da trigonometria deverá ser cuidadoso, especialmente pelos novos conceitos e os anteriores que os são requeridos.

De modo a facilitar o aprendizado, Lima, Coelho e Costa (2018) recomendam que o ensino da trigonometria deva estar ligado às aplicações cotidianas dos estudantes, uma vez que, a matemática está além da “decoreba”, devendo sim, saber utilizar as expressões apresentadas na teoria desta importante área da matemática.

3.4 A importância da trigonometria no dia-a-dia

A trigonometria é uma “parte” da ciência denominada matemática que tem suma relevância por estar no cotidiano do ser humano, servindo de ferramenta para resolução de questões quantitativas e lógicas. Compreende-se que a trigonometria faz parte dos mais antigos ramos da matemática e já está junto ao homem desde os povos antigos para medir ângulos e distâncias. Atualmente é utilizada em diversas situações práticas e teorias envolvendo não somente problemas internos da matemática, porém de outras disciplinas científicas e tecnológicas que envolvem fenômenos periódicos como eletricidade, termodinâmica, entre outros (LOPES, 2014).

Conforme Gonçalves (2018), com os estudos trigonométricos é possível determinar as medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos) e com o uso de triângulos semelhantes pode-se determinar distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a distância da largura de um rio, o raio da terra, entre outros. Portanto, quando se observa por este ponto de vista, os estudos trigonométricos aparecem em uma posição superinteressante, para o dia a dia e na vida escolar do indivíduo, mesmo sendo complicado para alguns, tem por outro lado um significado indispensável ao cotidiano de qualquer pessoa. Além disso, suas aplicações fazem parte do dia a dia, sem que muitos percebam:

- a. Há métodos atuais de análise em medicina, onde são enviadas ondas ao coração, de maneira que efetuem interações seletivas com os tecidos. Tais questões são vinculadas às funções trigonométricas;
- b. Geodésia: estudo da forma e dimensão da terra;
- c. Método que permite calcular com precisão a potência de transporte de linhas, as perdas e as distâncias;
- d. Estudo da intensidade luminosa: onde se calcula a intensidade luminosa irradiada por uma fonte luminosa para uma determinada direção;
- e. Instrumentos de medição de ângulos: topografia (teodolito, estação total), ciência náutica e cartografia.

Nas palavras de Santos (2014), quando se acompanham as aplicações da trigonometria na sociedade, se aprende que a trigonometria é aplicada em diversas atividades no cotidiano, embora diversas pessoas não percebam. Um dos exemplos mais práticos seria: como calcular a altura de um prédio, de uma árvore, de um poste, entre outros. Certamente as pessoas que não têm o conhecimento da trigonometria iriam utilizar uma escala para coisas simples ou sua própria noção de tamanho e esses cálculos seriam bem mais simples se elas tivessem a noção de trigonometria. Além disso, a trigonometria é muito aplicada em diversas profissões, como é o caso da: astronomia, mecânica, física, entre outras.

3.5 Metodologias para o ensino da trigonometria

O ensino da trigonometria tem seu início na educação básica das escolas brasileiras, ou seja, é aplicado a alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, onde são expostos conceitos, teoremas e exemplos práticos relativos às razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo, ainda no Ensino fundamental. Além

disso, são ensinados importantes teoremas, como o teorema de *Pitágoras*, que possui constantes aplicações à nossa volta e é de extrema importância a sua compreensão, para que seja possível avançar no ensino destes conceitos aos alunos nas escolas brasileiras.

No Ensino Médio, as aplicações dos conceitos das razões trigonométricas são mais bem aplicadas a partir do ensino do círculo trigonométrico, onde é possível ensinar questões como arcos e ângulos, possibilitando também o conhecimento por parte dos discentes da medida de ângulos em radianos. Além da explanação deste conteúdo na disciplina de matemática (geometria), estes são aplicados em outros conteúdos na Física ao longo do Ensino Médio, como por exemplo, a física ondulatória, o que demonstra a interdisciplinaridade da trigonometria. Atualmente, não se vê mais o ensino desta disciplina na educação básica, mas a astronomia no passado era uma disciplina em que possuía ampla aplicação dos conceitos trigonométricos em seu estudo (SANTOS; ROMA, 2018). No entanto, vale ressaltar que a astronomia se faz presente em outros ramos de conhecimento científico como a Geografia e a Física, onde apresenta as mesmas aplicabilidades.

Pereira (2006) relata em suas observações, com relação ao conteúdo de trigonometria, o não desempenho dos alunos e as dificuldades de socialização na compreensão de conceitos trigonométricos básicos, aqueles ligados à formação do (a) estudante, que em sua trajetória a maioria apresenta pouco ou quase nenhum domínio dos conhecimentos prévios, importantes para o estudo da trigonometria. Dentre eles, cabe mencionar a metodologia tradicional, com destaque a prática excessiva do cálculo, a busca inadequada a novos recursos pedagógicos, a ausência de contextualização e da linguagem matemática, ligada à realidade do aluno.

Diante de fatores como a interdisciplinaridade, a existência de tecnologias que possam auxiliar no ensino, bem como, do elevado uso dos conceitos da trigonometria no dia a dia, a união destes fatores, pode gerar uma nova metodologia de ensino deste conteúdo, que venha a atrair com maior intensidade a atenção dos (as) discentes, e com isso, melhorar os níveis de aprendizado no assunto.

Em relação à interdisciplinaridade, um ponto que pode atrair maior atenção dos (as) discentes, é a parte prática envolvendo os conteúdos. Como se sabe, a física ondulatória possui um grande vínculo com a trigonometria, assim, a aula conceitual pode ser efetuada juntamente com a prática em laboratório, de modo a buscar elevar o índice de aprendizado.

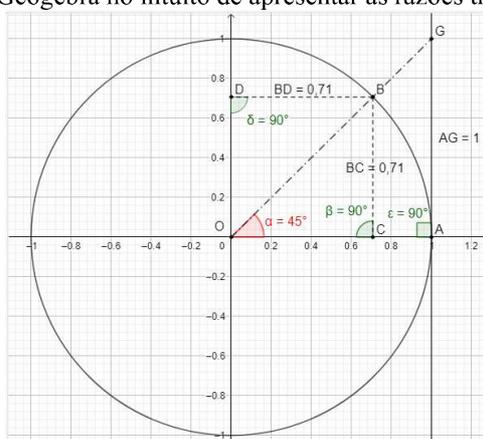
Considerando que hoje em dia vivemos numa era digital e que possuímos inúmeros *softwares* que podem ser elementos facilitadores no momento de explanação de determinado conteúdo, passa a ser essencial, a aliança da teoria à prática no ambiente de sala de aula e isso pode ser efetuada com um *software* denominado Geogebra, que é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, folhas de cálculo, gráficos, estatística e cálculo numa aplicação fácil de utilizar, e o mesmo é disponível gratuitamente na *internet*. Santos e Roma (2018) apresentam que este *software* tem como destaque a possibilidade de manipulação de questões trigonométricas, sem que seja necessário o conhecimento do aluno em programação avançada, ou seja, é um elemento de uso simples e que pode agregar e muito na compreensão da trigonometria por parte dos discentes.

Ainda de acordo com os autores supracitados, compreendemos que, à medida que os (as) discentes passam a compreender melhor as questões trigonométricas, estes (as) em seu ambiente residencial podem buscar novas descobertas sobre o assunto de maneira autônoma, ou seja, sem o auxílio de um professor. No entanto, as dúvidas que venham a surgir, podem ser solucionadas no ambiente de sala de aula, o que gera um ambiente ativo, em que o (a) estudante passa a ser a peça principal deste local.

Alguns exercícios que têm a possibilidade de serem realizados no *software* Geogebra são:

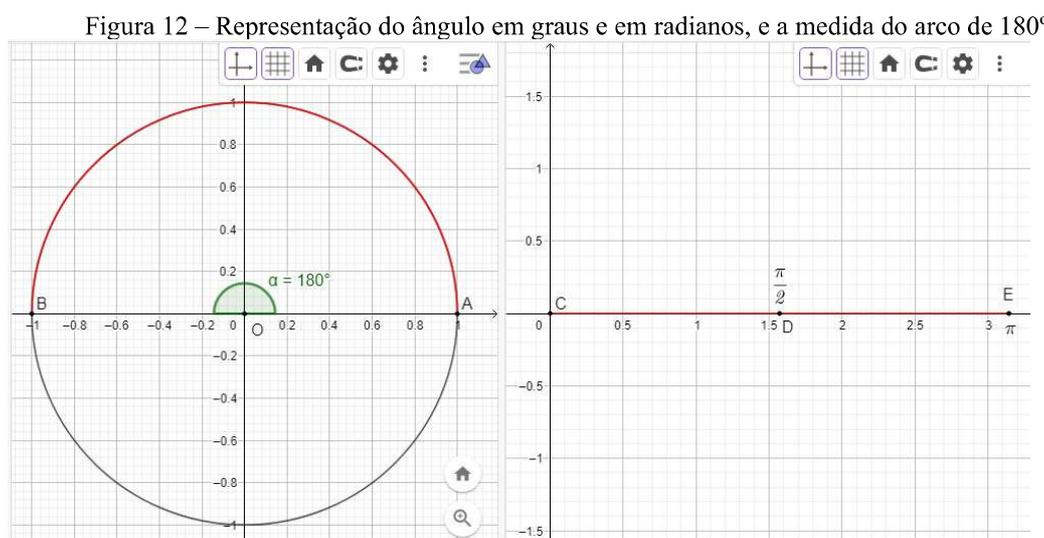
- a. Ilustração dos conceitos previamente apresentados acerca das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no círculo trigonométrico (Figura 11). Tal atividade pode ser aplicada até mesmo no Ensino Fundamental, no entanto, a sua melhor compreensão, como previamente já foi dito neste estudo, ocorrerá ao longo do Ensino Médio;

Figura 11 – Uso do *software* Geogebra no intuito de apresentar as razões trigonométricas aos/às discentes



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Santos & Roma (2018)

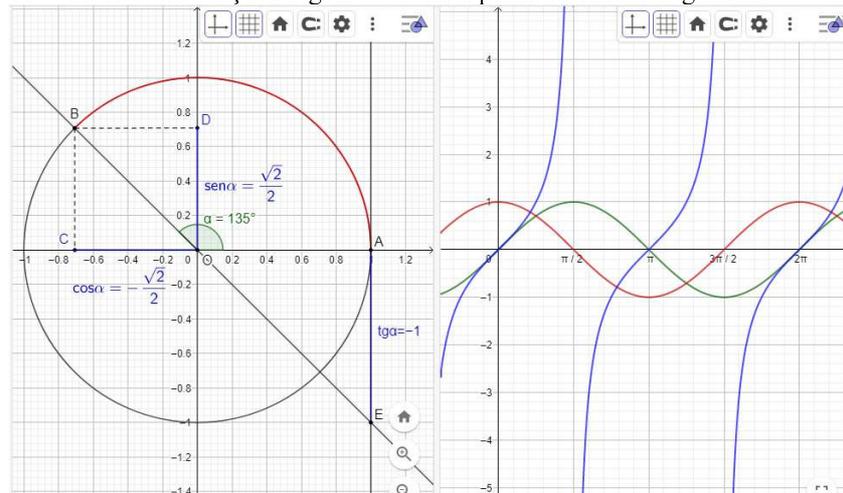
- b. A atividade seguinte tem como objetivo expor alguns exemplos de ângulos medidos tanto em graus, como em radianos, de maneira que os (as) discentes compreendam como se dão as regras de conversão de um para o outro, propondo exemplos de forma que seja possível verificar a relação entre o ângulo e a medida do arco, assim como, o perímetro do círculo trigonométrico de raio unitário (Figura 12), que é proporcional à medida do ângulo central (SOUZA, 2017).



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Santos & Roma (2018)

- c. A terceira atividade refere-se à apresentação das chamadas funções trigonométricas notáveis, com base em um círculo trigonométrico interativo existente no Geogebra. Ao realizar esta atividade, é essencial que o (a) docente venha a prover uma revisão concisa sobre os teoremas ligados à trigonometria estudados em anos/séries anteriores. Posteriormente, é possível que o (a) docente apresente aos/às estudantes os gráficos das funções trigonométricas notáveis (Figura 13), o que vai auxiliar não apenas na disciplina, mas também em conceitos das áreas da física e da engenharia, para aqueles (as) que optarem por estudar tal área no Ensino Superior (SANTOS; ROMA, 2018).

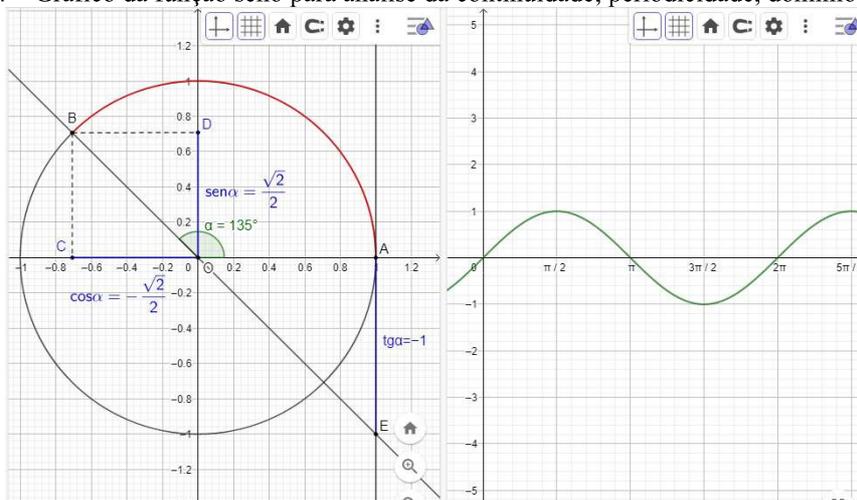
Figura 13 – Gráfico das funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico interativo



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Santos & Roma (2018)

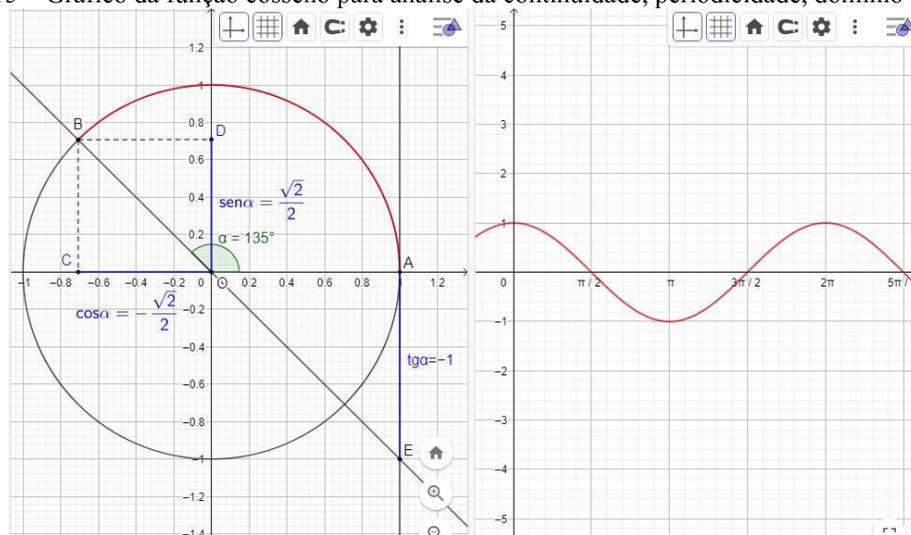
- d. A penúltima atividade indicada possui o mesmo objetivo que a atividade anterior. No entanto, o seu foco se encontra nas características de cada função trigonométrica, onde o (a) estudante pode melhor compreender através da utilização gráfica, qual é o domínio e a imagem da função, assim como, qual a periodicidade destas. Feito e compreendida tal seção de ensino, o (a) docente fica possibilitado de expor as demais características que podem ser visualizadas em um gráfico deste tipo. Através de exemplos similares aos apresentados nas Figuras 14, 15 e 16, o (a) docente tem a possibilidade de orientar os exercícios que venham a ser realizados por seus/suas alunos (as) através de perguntas, de modo que os (as) estudantes observem e realizem algumas pressuposições, de forma a comprová-las, por meio tanto da observação dos gráficos, concluído que as funções seno e cosseno são funções contínuas (ROMA; SANTOS, 2018).

Figura 14 – Gráfico da função seno para análise da continuidade, periodicidade, domínio e imagem



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Santos & Roma (2018)

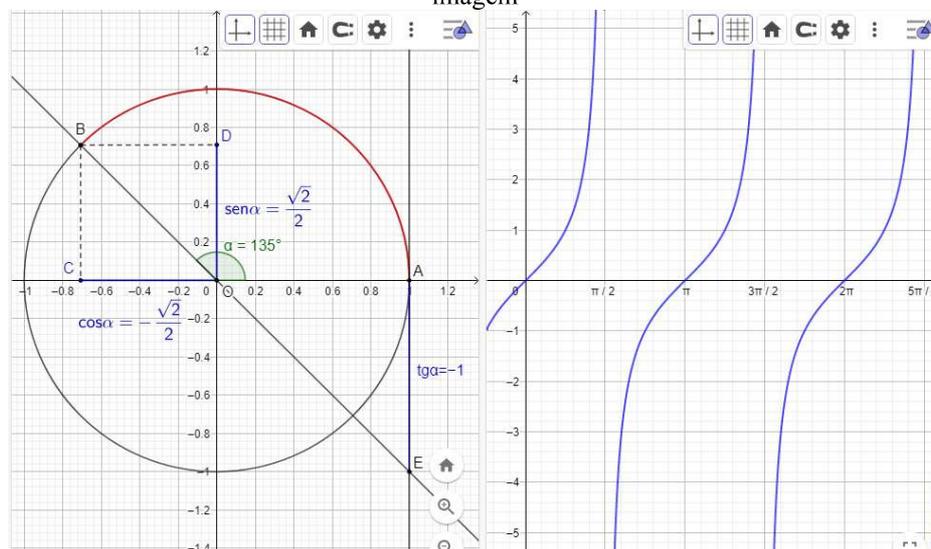
Figura 15 – Gráfico da função cosseno para análise da continuidade, periodicidade, domínio e imagem



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Santos & Roma (2018)

Posteriormente a fixação do conteúdo por parte dos (as) alunos (as), acerca das funções trigonométricas essenciais, o (a) docente de Física, pode introduzir a Física Ondulatória de maneira prática, visto que, seus/suas alunos (as) já vão possuir uma melhor compreensão teórica sobre alguns dos principais elementos que envolvem a física ondulatória, conseguindo assim atrair maior atenção dos (as) discentes.

Figura 16 – Gráfico da função tangente para análise da descontinuidade, periodicidade, domínio e imagem



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de Santos & Roma (2018)

- e. A última atividade refere-se à utilização do *software* supracitado e visa expor o conteúdo ligado à transformação das funções trigonométricas. Sabendo que os (as) discentes trabalharam previamente com os gráficos destas funções, é

essencial que estes (as) revisem as características de cada função trigonométrica, à medida que estes (as) realizarem as transformações que os forem solicitadas.

Por meio do uso do Geogebra, o (a) docente deve demonstrar a teoria de maneira que o (a) discente possa visualizar as soluções, sendo algo que atrai maior índice de atenção dos (as) estudantes, do que as aulas simplesmente expositivas.

A outra opção é ainda efetuar uma conexão entre os conceitos da trigonometria com as questões do dia a dia, ou com profissões importantes no mercado de trabalho. Para isso, os (as) professores (as) podem propor aulas de campo, aulas práticas, além de palestras com profissionais de áreas que tenham um determinado vínculo com a trigonometria.

Esse conjunto de opções de atividades executado com o uso de computador, data show e smartphones torna no fazer pedagógico um momento prazeroso e, com o tempo, pode ajudar a elevar o Índice de Desenvolvimento da Educação (IDEB) do nosso país.

4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentamos a essência do estudo em questão: a sequência didática propriamente dita. No entanto, devemos ainda considerar que:

1. Esta sequência didática é destinada especificamente para estudantes de 1ª e/ou 2ª séries do Ensino Médio, podendo ainda ser trabalhada com estudantes da 3ª série do Ensino Médio, caso a turma, por alguma razão, não teve contato com a trigonometria em séries/anos anteriores ou apresente habilidades fragilizadas nesta área. Por fim, também pode ser trabalhada com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, onde temos os primeiros contatos com a trigonometria de forma mais específica. Neste caso, recomendamos que o grau de complexidade das atividades seja menos elevados;
2. Uma unidade letiva ou um período letivo de 50 dias, com quatro/cinco horas-aulas semanais de 50 minutos, seja reservado para a execução desta sequência didática;
3. Computador/notebook, data show, celular smartphone, calculadora científica (opcional), quadro branco, pincel e tinta para quadro branco, apagador, compasso, esquadros, transferidor, régua, trena, papel, lápis, borracha escolar, caneta esferográfica e cola branca, sejam utilizados com material didático.

Em conformidade com os fundamentos pedagógicos apresentados na BNCC, a mesma está estruturada de modo a explicitar as competências e as habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica e em cada etapa da escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos (as) os (as) estudantes. No tocante ao ensino e aprendizagem da trigonometria, das 5 (cinco) competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, 3 (três) competências são merecedoras de destaque, uma vez que estão intimamente relacionadas ao estudo em questão. São as competências que citamos seguir:

[...] 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático;

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a

necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 523).

As habilidades vinculadas a essas competências tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático e trigonométrico, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos (as) estudantes. (BRASIL, 2017). Na Tabela 2, apresentamos essas habilidades; apenas 4 (quatro) de um somatório de 37 (trinta e sete) habilidades relacionadas nestas 3 (três) competências:

Tabela 2 – Habilidades da BNCC relacionadas à trigonometria

HABILIDADES
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.
(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Fonte: (BRASIL, 2017, p. 528, 529, 531 e 533).

Diante disso, podemos afirmar que: ao conseguirem utilizar as representações trigonométricas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os (as) estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliar a capacidade de pensar trigonometricamente.

A sequência didática sugerida é organizada em 08 (oito) blocos de atividades, mesclando o tipo de tecnologia e a abordagem metodológica adotada, de acordo com um foco principal estabelecido. Cada bloco é composto por um número específico de atividades, na forma de atividades em sala de aula e atividades complementares a serem realizadas em casa, podendo estas serem resolvidas em alguns momentos em equipes, visto que, também é intuito da escola o processo de integração do(a) estudante com outros indivíduos e da formação do cidadão.

O primeiro bloco tem como objetivo reconhecer a história da trigonometria, bem como a sua origem e identificar algumas personalidades importantes que contribuíram para esta importante área da matemática. A ideia advinda deste bloco é uma atividade em grupo, cujo intuito é escolherem algum dos matemáticos importantes nessa área e apresentarem sobre a vida e teorias desenvolvidas por este. Na Tabela 3 podemos observar as atividades que são aplicadas nesse bloco.

Tabela 3 – Bloco de atividades 1: Breve histórico da trigonometria

Bloco	Atividade	Descrição
1	Breve Histórico da Trigonometria	<p>Aula 1: Realização de aula expositiva acerca da trigonometria no Egito, na Babilônia e na Grécia antiga.</p> <p>Aula 2: Realização de aula expositiva acerca da origem da trigonometria para os povos hindus, árabes e a chegada desta à Europa.</p> <p>Aula 3: Realização de aula expositiva acerca da trigonometria na era moderna. Divisão dos grupos para a realização da atividade deste bloco.</p> <p>Atividade: Divididos em 06 (seis) grupos, os alunos deverão desenvolver uma apresentação expositiva de no máximo 10 minutos, acerca do histórico da trigonometria. Um grupo falará sobre a trigonometria no Egito, outro na Babilônia, outro na Grécia, outro sobre a origem desta para os povos hindus, outro para os povos árabes e por fim, o último para o europeu. O intuito desta atividade é socializar o aluno, promover a melhora na comunicação dele, bem como, este aprofundar o conhecimento sobre o histórico da trigonometria.</p>

Fonte: Próprio autor (2021)

O segundo bloco de atividades tem como ideia a retomada de alguns conceitos como: Teorema de *Tales*, Teorema de *Pitágoras*, triângulos e escala, consistindo na realização de aulas expositivas, aulas práticas e atividades de fixação, que serão consideradas atividades preparatórias para a introdução da trigonometria. Os seus objetivos são: reconhecer os tipos de triângulos e identificar o triângulo retângulo; compreender as relações de proporcionalidade entre segmentos de retas formados entre retas paralelas cortadas por transversais; Verificar que a soma das áreas dos quadrados formados pelos catetos é igual a área do quadrado formado pela hipotenusa do triângulo retângulo; Deduzir a fórmula do Teorema de *Pitágoras*; Identificar os tipos de triângulo de acordo com as medidas de seus lados e a medida de seus ângulos internos; Conhecer a soma dos ângulos internos de polígonos é 180° ; Mostrar uma noção clara da divisão entre os espaços no planta baixa de uma casa; reconhecer que escala é a relação entre as dimensões de um desenho e o objeto por ele representado; Utilizar o Teorema de *Pitágoras* para determinar o perímetro de triângulos e quadriláteros no Geoplano; Deduzir a fórmula para o cálculo da área do triângulo utilizando a figura do retângulo como suporte. Podemos observar as atividades e suas respectivas descrições na Tabela 4.

Tabela 4 – Bloco de atividades 2: revisão de conceitos/atividades preparatórias

Bloco	Atividade	Descrição
2	Revisão de Conceitos/Atividades Preparatórias	<p>Aula 1: Realização de aula expositiva, de modo a revisar os tipos de triângulos, bem como, o conceito de escalas e unidades de medida.</p> <p>Aula 2: Realização de aula expositiva/prática, de modo a revisar o Teorema de <i>Tales</i>.</p> <p>Aula 3: Realização de aula expositiva/prática, de modo a revisar o Teorema de <i>Pitágoras</i>.</p> <p>Atividade A: Exploração de conhecimentos prévios dos alunos acerca de triângulos, visando recuperar informações como: classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos, soma de seus ângulos internos.</p> <p>Atividade B: Exploração de uma planta baixa de uma casa e dos conceitos nela inseridos: escala, perímetro, bem como, área de retângulos. O intuito base é que o aluno, através de um instrumento prático e muito utilizado na construção civil, que é a planta baixa, venha a reconhecer o uso dos instrumentos de medida.</p>

Fonte: Próprio autor (2021)

O terceiro bloco de atividades se refere à trigonometria no triângulo retângulo. Conta com atividades a serem realizadas em grupos, nas quais os alunos necessitam medir alturas de paredes, sem delas se aproximar, utilizando apenas alguns materiais concretos como esquadros, trenas, transferidor, o que os remeterá à origem empírica do conhecimento trigonométrico. Os objetivos são: Identificar que quando as três razões entre lados correspondentes de dois triângulos são iguais, necessariamente os três ângulos correspondentes são congruentes; perceber a proporcionalidade nas medidas dos lados dos triângulos que possuem as características citadas anteriormente. Nesta etapa recomenda-se permitir que os alunos escolham entre diversos problemas aplicados de trigonometria, retirados de livros didáticos, 03 (três) para serem resolvidos. Após esta atividade, estes serão impelidos a elaborar seus próprios problemas. Na Tabela 5 se observam as atividades e suas descrições.

Tabela 5 – Bloco de atividades 3: semelhança de triângulos e trigonometria no triângulo retângulo.

Bloco	Atividade	Descrição
3	Semelhança de Triângulos e Trigonometria no Triângulo Retângulo.	<p>Atividade A: Mobilização de Conhecimentos sobre a semelhança de triângulos, de modo que os alunos venham a encontrar o valor da altura da parede da sala de aula, utilizando apenas trena, régua, esquadro e um canudo de refrigerante. Isso fará com que os alunos criem estratégias, utilizando o material dado e a semelhança de triângulos. E permitirá a expansão da criatividade do aluno, bem como, a assimilação prática de conceitos, evitando a chamada “decoreba”.</p> <p>Atividade Complementar 1: Atividades de fixação com semelhança de triângulos para verificar a invariância das relações.</p>

Atividade B: Busca pelo ângulo de inclinação conhecidos a altura da parede e a distância até ela, dispondo de um transferidor e um canudo de refrigerante. Pretende-se que os alunos encontrem o ângulo e verifiquem que este corresponde aproximadamente ao ângulo do esquadro utilizado na atividade A.

Atividade Complementar 2: Formalização da definição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e exploração destas relações em triângulos retângulos variados e em posições diversas. Exploração de relações fundamentais na trigonometria. Exercícios retirados dos livros didáticos propostos no plano de ensino.

Desafio da planta do telhado: Visa conhecer e associar algumas partes do telhado à formação de triângulos e, possivelmente aplicar o Teorema de *Pitágoras*; nesta atividade será possível também o aluno verificar os ângulos existentes através da inclinação do telhado. Para isto é utilizada a planta do telhado.

Atividade C: Pretende que o aluno escolha e resolva 03 (três) problemas aplicados, que abordem razões trigonométricas diferentes, a partir de uma lista de problemas aplicados retirados de livros didáticos. É esperado que os alunos redijam e ilustrem um problema que seja coerente, que necessite de uma das razões trigonométricas: seno, cosseno ou tangente, e seja este passível de resolução.

Atividade Complementar 3: É pedido aos alunos que elaborem exercícios a partir de situações práticas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Trabalho Prático: Pretende selecionar junto aos alunos, construções que eles consideram interessantes na cidade e delas extrair a trigonometria presente: telhados, escadas, rampas de acessibilidade, entre outros elementos.

Fonte: Próprio autor (2021)

No quarto bloco de atividades, será realizada uma atividade prática chamada de “construção de um teodolito caseiro”, onde o (a) docente realizará o projeto, juntamente aos seus alunos, com a apresentação e construção de um teodolito utilizando materiais simples e baratos previamente requeridos aos discentes, e após a construção haverá também a ida ao pátio da escola para a realização de uma experimentação com o instrumento construído. O objetivo é construir um teodolito utilizando materiais baratos e de fácil acesso pelos (as) estudantes. Na Tabela 6 podem-se compreender as atividades que serão realizadas e suas descrições.

Tabela 6 – Bloco de atividades 4: construção de um teodolito caseiro

Bloco	Atividade	Descrição
4	Construção de um teodolito caseiro	<p>Aula 1: Realização de aula expositiva/prática, de modo a demonstrar o que é um teodolito, seu inventor, como era o primeiro objeto, e como eram obtidas as medidas àquela época.</p> <p>Aula 2: Realização de aula expositiva/prática, de modo a demonstrar as aplicações práticas da trigonometria no dia-a-dia utilizando o teodolito caseiro; incluindo a demonstração dos materiais utilizados para a construção do mesmo.</p> <p>Atividade A: Distribuição dos materiais aos alunos e divisão da turma em duplas; construção do teodolito.</p> <p>Atividade B: Utilização do teodolito construído pelos estudantes para a mensuração de árvores, paredes, mastros e outras alturas e distâncias inacessíveis no pátio e/ou no perímetro da escola.</p> <p>Atividade Complementar: É pedido aos alunos que, em equipes, repitam as atividades semelhantes à atividade B em torres, postes, morros, rios, prédios, etc., existentes em sua cidade.</p>

Fonte: Próprio autor (2021)

O quinto bloco de atividades aborda a transição da trigonometria do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Contempla uma introdução e/ou apresentação do que seja um círculo orientado e as unidades comumente utilizadas para representar ângulos e arcos. Os objetivos são: introduzir o estudo da trigonometria na circunferência a partir da abordagem de resolução de problemas e modelagem matemática; reconhecer que O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema de eixos cartesianos. Na Tabela 7 observam-se as atividades utilizadas neste bloco e suas descrições.

Tabela 7 – Bloco de atividades 5: transição do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico

Bloco	Atividade	Descrição
5	Transição do Triângulo retângulo para o Círculo Trigonométrico	<p>Aula: Realização de aula expositiva/prática de modo a introduzir o círculo trigonométrico, seus conceitos e expressões a ele vinculados.</p> <p>Atividade: Fixação dos conceitos de círculo trigonométrico e arco orientado, o que são os quadrantes do círculo trigonométrico e quais são seus intervalos de existência; Exploração de noções de arcos côngruos e de primeira determinação positiva e negativa. Nesta atividade o que se espera é que os alunos identifiquem a existência de intervalos de 90° em 90° e que estes podem ser representados em duas unidades diferentes (graus e radianos).</p> <p>Atividade Complementar: Exploração do conceito de comprimento de circunferência e comprimento de arcos de circunferência.</p>

Fonte: Próprio autor (2021)

O sexto bloco contempla a trigonometria no círculo trigonométrico e no plano cartesiano, desde as funções seno e cosseno no círculo, até o esboço de seus gráficos no plano cartesiano; reduções ao primeiro quadrante, relações de complementaridade e as fórmulas de soma e diferença de ângulos. Tais atividades têm como recomendação a utilização de recursos computacionais para auxiliar a exposição da teoria aos discentes, tudo isso, no intuito de tornar o aprendizado menos maçante e mais prazeroso para eles. Para isso, será utilizado o *software* Geogebra, apresentado no capítulo 3 deste estudo. O objetivo é realizar um estudo da trigonometria fazendo o uso de *software* Geogebra. Na Tabela 8 podem-se observar as atividades e suas respectivas descrições para o sexto bloco.

Tabela 8 – Bloco de atividades 6: trigonometria no círculo trigonométrico e no plano cartesiano

Bloco	Atividade	Descrição
6	Trigonometria no Círculo Trigonométrico e no Plano Cartesiano	<p>Aula 1: Realização de aulas expositivas/práticas acerca da trigonometria no círculo trigonométrico, apresentando as funções trigonométricas, o plano cartesiano, bem como, o desenvolvimento dos gráficos das funções trigonométricas.</p> <p>Aula 2: Realização de aulas expositivas acerca do <i>software</i> Geogebra e como procede o seu funcionamento.</p> <p>Atividade A: Utilização de <i>applets</i> de trigonometria desenvolvidos no Geogebra para estimular os alunos a perceberem o que ocorre aos valores de seno, cosseno e tangente quando aumentamos ou diminuímos o valor do ângulo em cada quadrante do círculo trigonométrico; além disso, desejamos que os alunos consigam encontrar os valores dos ângulos dados, bem como, seus valores de seno, cosseno ou tangente, utilizando os <i>applets</i>. Por fim, estes devem identificar os eixos correspondentes às funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico.</p> <p>Atividade Complementar 1: Atividades de fixação dos conceitos abordados na atividade realizada com o recurso computacional (<i>software</i> Geogebra).</p> <p>Atividade B: Observação de como são formados os gráficos das funções seno, cosseno e tangente, à medida que completamos uma volta na circunferência trigonométrica, utilizando <i>applets</i> dinâmicos; além disso, o intuito é que os alunos consigam reconhecer o que é uma função periódica, avaliando se as funções trigonométricas estudadas são ou não periódicas, podendo ainda identificar tal período.</p> <p>Atividade Complementar 2: Desenho dos gráficos das funções seno e cosseno a partir da tabela de arcos notáveis, no mesmo plano cartesiano, de modo a facilitar a descoberta da defasagem entre as funções; é importante dar destaque as características dos gráficos e funções trigonométricas, associando-as às partes de um telhado e a aplicações de outras áreas de conhecimento,</p>

	<p>visto que, isso pode auxiliar ao discente fixar o conteúdo exposto.</p> <p>Atividade C: Análise de situações de simetria no círculo trigonométrico (vertical, horizontal e em relação à origem) para estabelecer as expressões de redução ao 1º quadrante, considerando o quadrante em que os ângulos se encontram.</p> <p>Atividade Complementar 3: Atividades de fixação dos conceitos sobre redução ao primeiro quadrante, abordados na atividade com o recurso computacional (<i>software Geogebra</i>).</p> <p>Atividade D: Percepção de relações de complementaridade entre ângulos e como isso afeta os valores das funções seno e cosseno em um mesmo quadrante. É intuito também explorar as fórmulas de soma e subtração de ângulos através da abordagem geométrica em software dinâmico.</p> <p>Atividade Complementar 4: Fixação das relações de complementaridade entre ângulos e seus reflexos sobre os valores do seno e do cosseno de ângulos em um mesmo quadrante; aplicação das fórmulas de soma e subtração de ângulos e sua utilização para obter alguns modelos abstratos clássicos da trigonometria em uma exploração algébrica.</p>
--	--

Fonte: Próprio autor (2021)

O sétimo bloco é uma etapa que contemplará a integração de disciplinas, de modo a possibilitar uma melhor aprendizagem do aluno, acerca dos conceitos e da prática da trigonometria. Neste momento, física e matemática se interligarão em algumas aulas e atividades. O objetivo é identificar que a trigonometria se faz presente na Física e na Matemática. Na Tabela 9 observam-se as atividades utilizadas neste bloco e suas descrições.

Tabela 9 – Bloco de atividades 7: Interligação de Disciplinas envolvendo a Trigonometria

Bloco	Atividade	Descrição
7	Interligação de Disciplinas envolvendo a Trigonometria	<p>Aula: Integração de disciplinas. Uma vez que os conceitos do círculo trigonométrico e das funções trigonométricas foram expostos aos alunos, é possível realizar a interligação desta área da matemática com áreas de outras disciplinas, como é o caso da física ondulatória.</p> <p>Palestra: Realização de uma palestra com profissionais de áreas que muito utilizam a trigonometria, destacando e evidenciando a importância desta área da matemática, bem como de suas aplicações.</p>

Fonte: Próprio autor (2021)

O oitavo bloco de atividades prevê as atividades avaliativas, compreendendo três testes, realizados individualmente, abrangendo cada um, dois dos seis blocos apresentados ao longo da sequência didática; será também realizado um trabalho prático em equipe de modo a aplicar os conhecimentos obtidos ao longo da referida sequência

didática. O objetivo é mensurar o desempenho escolar dos (as) estudantes através de dois dos instrumentos avaliativos aqui propostos. Na Tabela 10 podem-se observar as atividades e suas respectivas descrições para o oitavo bloco.

Tabela 10 – Bloco de atividades 8: Avaliações da aprendizagem

Bloco	Atividade	Descrição
8	Avaliações da aprendizagem	<p>Trabalho Prático: Aplicação dos conceitos obtidos no estudo da trigonometria em um trabalho prático, de modo aos alunos fixarem os conteúdos aprendidos e ao mesmo tempo os aplicarem em atividades do dia-a-dia e que sejam importantes para diversas profissões do mercado de trabalho.</p> <p>Testes/Exames: Sugerimos a aplicação de pelo menos dois testes/exames, como uma das formas de verificação de aprendizagem dos conteúdos abordados. Todos os conteúdos estudados devem ser contemplados nesses instrumentos avaliadores.</p>

Fonte: Próprio autor (2021)

A realização das atividades expostas nas Tabelas de 3 a 10 contemplarão todo o conteúdo necessário de ser exposto em trigonometria. Para ser um ensino mais dinâmico, as aulas vão variar de aulas expositivas, aulas práticas, exercícios propostos, trabalhos em equipe, palestra, testes/exames, assim como aulas nos laboratórios de matemática e/ou informática, utilizando *softwares* e *applets* que venham a auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Compreende-se que essas atividades foram retiradas da obra de Silva e Frota (2011) e remanejadas à melhor maneira para o aprendizado brasileiro e a situação observada pelo autor nas escolas nacionais.

No tocante à avaliação da aprendizagem, embora apenas o oitavo bloco na Tabela 10 apresenta atividades avaliativas, não só os aspectos formativos, como atividades escritas (trabalhos escritos, testes, etc.), mas também os aspectos informativos como a assiduidade, pontualidade, participação, comportamento, etc., tudo verificados ao longo de toda a execução da sequência didática, são instrumentos de avaliação que se resumem em uma média aritmética desses aspectos, quando atribuídas à valores numéricos, ou à conceitos, dependendo da forma de avaliar de cada localidade.

Para Kraemer (2006), avaliação vem do latim e significa valor ou mérito ao objeto em pesquisa, junção do ato de avaliar ao de medir os conhecimentos adquiridos pelo indivíduo. É um instrumento valioso e indispensável no sistema escolar, podendo descrever os conhecimentos, atitudes ou aptidões que os alunos apropriaram. Sendo assim a avaliação revela os objetivos de ensino já atingidos num determinado ponto de percurso e também as dificuldades no processo de ensino aprendizagem.

Já para Libâneo (1994):

A avaliação é uma tarefa complexa que não se resume à realização de provas e atribuição de notas. A mensuração apenas proporciona dados que devem ser submetidos a uma apreciação qualitativa. A avaliação, assim, cumpre funções pedagógico-didáticas, de diagnóstico e de controle em relação às quais se recorrem a instrumentos de verificação do rendimento escolar. (LIBÂNEO, 1994, p. 195).

Assim, compreendemos que esta sequência didática, ora proposta, pode ser altamente eficaz e se apresenta de forma positiva em aumentar o interesse e o gosto dos (as) estudantes pela matemática, especialmente pela trigonometria, melhorando significativamente o desempenho dos (as) mesmos (as) em avaliações externas como o ENEM e, quem sabe, elevando o patamar do país, em verificações de conhecimento como é o caso do PISA e contribuindo com a elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação do Brasil,

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo em questão permitiu uma análise por menorizada do histórico da trigonometria no mundo, a situação da educação no Brasil, principalmente na área foco desta dissertação, bem como, na verificação de novas metodologias de ensino, que fujam do óbvio das maçantes aulas meramente expositivas.

É fato que o ensino da matemática, bem como da trigonometria não é nada fácil, uma vez que, existem diversos mitos e paradigmas que dificultam tal ação, tais como: “a disciplina é difícil”, “não serve para nada”, “não vou utilizar isso no meu cotidiano ou na minha vida profissional”, entre outros clichês que se ouve no ambiente escolar. Tais questões tornam o trabalho do professor um verdadeiro desafio, visto que, ele deve se desdobrar de modo a tentar motivar seus alunos a gostarem e aprenderem a temida disciplina, que é essencial para o dia-a-dia.

Devido aos paradigmas supracitados, a má formação de alguns professores, entre outras questões, o desempenho dos alunos no PISA quando o assunto foi a matemática, foi um dos piores do mundo. Tudo isso, faz com que os gestores e profissionais do ensino devam refletir acerca das metodologias de ensino-aprendizagem que vêm utilizando. As aulas meramente expositivas são maçantes e não fazem com que os discentes absorvam o conteúdo explanado.

A partir disso, é essencial a proposição de novas metodologias de ensino, aliando prática à teoria, bem como, utilizar a tecnologia que está cada vez mais avançada, como uma ferramenta de auxílio ao desenvolvimento do conhecimento nos alunos.

Foi possível verificar que o ensino contextualizado da trigonometria (bem como, qualquer outro tópico de ensino) é essencial, uma vez que ao se contextualizar um assunto que é inicialmente abstrato, pode-se visualizar melhor como ele funciona e assim comprovar a sua veracidade. Experiências dessa natureza são importantes na sala de aula, uma vez que fornecem uma aproximação do conteúdo com o dia-a-dia dos alunos, o que lhes faz sentir vontade de aprender o conteúdo por conta própria.

A partir de todo este cenário foi apresentada uma sequência didática para o ensino da trigonometria no ensino médio, onde está aborda todos os conteúdos essenciais desta área e ainda busca fazer revisões de conceitos prévios, uma vez que, por muitas vezes, os alunos chegam ao ensino médio, e à fase de aprendizado da trigonometria, com um conhecimento bem defasado em relação aos conceitos básicos para a aprendizagem deste conteúdo.

Foram propostas aulas expositivas, aulas práticas, aulas com utilização de *softwares* e *applets*, integração com outras disciplinas, através de palestra – como é o caso da física, bem como, a realização de atividades individuais e em grupo para que os alunos possam ao mesmo tempo compreender o conteúdo, não precisando mais, fazer o uso da chamada “decoreba”, e além disso, promover a integração social entre os alunos, visto que, estes vivenciaram ao longo de toda a vida a realização de trabalhos em equipe. Tal metodologia de ensino dinâmica pode se mostrar muito eficaz e, com isso, talvez no futuro, possa melhorar significativamente a aprendizagem dos (as) estudantes.

Por fim, propomos que estudos futuros venham aplicar a sequência didática proposta, de modo a verificar a sua eficácia, e quem sabe, já programar novas metodologias ou técnicas, que possam proporcionar uma aprendizagem cada vez mais completa dos (as) discentes, não somente, mas principalmente, quando o assunto for trigonometria. É esperado que este estudo cumpra com o seu papel e insira o leitor no tema, que é um assunto bastante polarizado na sociedade contemporânea. Após isso, pretendemos que essas ideias sejam tragas ao debate com o auxílio de periódicos da área que fazem um estudo minucioso e cientificamente relevante, para que no futuro, o presente trabalho seja colocado na mesma mesa dos especialistas, sirva também como inspiração a novos estudos que queiram trazer uma nova abordagem e possam utilizá-lo como referencial teórico.

REFERÊNCIAS

- ALVES, R. da S. **Proposta Metodológica para o Ensino da Trigonometria Baseada na Psicologia Pedagógica**. 2016. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, Natal - RN, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/21759/1/>>. Acesso em: 03 mar 2020.
- BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a geometria fractal: para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002
- BOYER, C. **História da matemática**. 2a Ed. - Trad. De Elza Gomide, Editora Blucher Ltda, São Paulo - SP, 1996.
- BRASIL. **Lei num. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/>. Acesso em: 03 fev 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2017.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais**. Ministério da Educação. Brasília – DF, 2006.
- COSTA, N. M. L. da. **A História da Trigonometria**. 2014. 18 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -PUC/SP, São Paulo - SP, 2014. Disponível em: <<http://www.amma.com.pt/cm/af33/trf1/histtrigon.pdf>>. Acesso em: 03 mar 2020.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre - RS: UFRGS Editora, 2009. 119 p. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/cursopgdr/>>. Acesso em: 03 mar 2020.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 75 f. São Paulo: Atlas, 2008.
- GONÇALVES, R. M. **A Trigonometria e a História da Matemática em Sala de Aula: Uma Experiência com a Construção de Instrumentos de Navegação e do Relógio de Sol**. 2018. 69 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre - RS, 2018. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/179421/001068452.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 03 mar 2020.
- GOOGLE SCHOLAR. Disponível em: <<https://scholar.google.com.br>>. Acesso em: 03 mar 2020.
- GIORDAN, Marcelo; GUIMARÃES, Yara AF; MASSI, Luciana. *Uma análise das abordagens investigativas de trabalhos sobre sequências didáticas: tendências no ensino de ciências*. Anais do VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, v. 5, 2011.
- KRAEMER, Maria Elisabeth Pereira. **Avaliação da aprendizagem como construção do saber**. 19/07/2006.

LEITE, L. A. de. **Breve História da Trigonometria**. 2016. 43 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, João Pessoa - PB, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/>>. Acesso em: 03 mar 2020.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994. 2ª edição.

LIMA, J. H. S.; COELHO, J. M. S; COSTA, A. C. **Sequências de Atividades para o Ensino de Trigonometria: Uma Revisão de Estudos**. In: CONGRESSO NACIONAL DA EDUCAÇÃO - CONEDU, 5., 2018, Belém - Pa. Anais [...] . Belém - PA: Editora Realize, 2018. p. 1 - 12. Disponível em: <<http://www.editorarealize.com.br/>>. Acesso em: 03 mar 2020.

LIMA, Paulo Vinícius Pereira de. et al. **Brasil no Pisa (2003-2018): reflexões no campo da Matemática**. 2020. 24 f. Tangram – Revista de Educação Matemática, Dourados - MS – v.3 n.2, pp. 03-26 (2020). Disponível em: <<https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12122/5813>>. Acesso em: 27 fev 2022.

LOPES, M. A. **Reflexões sobre Ensino de Trigonometria: Experiências Através de um Projeto Pedagógico**. 2014. 34 f. Monografia (Especialização) - Curso de Fundamentos da Educação, Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Monteiro - PB, 2014. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/>>. Acesso em: 03 mar 2020.

MARTINS, M. C. F. **Trigonometria: Passado, Presente e Futuro**. 2014. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2014. Disponível em: <<https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/>>. Acesso em: 03 mar 2020.

MIORIM, M. A. **Introdução a História da Matemática**. São Paulo, SP: Atual, 1998

OCANHA, M. **Uma Introdução à Trigonometria com Aprendizagem Significativa**. 2016. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, Três Lagoas - MS, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufms.br:8443/jspui/bitstream/1234567>>. Acesso em: 03 mar 2020.

OLIVEIRA, C. A. C. de. **Trigonometria: O Radiano e as Funções Seno, Cosseno e a Tangente**. 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, Campina Grande - PB, 2014. Disponível em: <<http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/CarlosAndre.pdf>>. Acesso em: 03 mar 2020.

PEREIRA, C. S. **Aprendizagem em Trigonometria: um caminho possível**. Monografia de especialização. Universidade Estadual da Paraíba. 2006.

PAPOULIAS, Waleska Dembiski **Proposta de sequência didática sobre reprodução e embriologia humana para o ensino médio baseada na experiência docente**. 2019. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Biologia, Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba - PR. Disponível em: < <https://www.profbio.ufmg.br/wp-content/uploads/2021/02/TCM-WALESKA-DEMBISKI-PAPOULIAS-1.pdf> >. Acesso em: 03 mar 2020.

SANTOS, E. de S. **Ensino-Aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio: Um Olhar para os Livros Didáticos**. 2014. 89 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Campina Grande - PB, 2014. Disponível em: <<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&>>. Acesso em: 03 mar 2020.

SANTOS, C. J. G dos. Tipos de Pesquisa (2010). *Oficina da Pesquisa*, 1(1), 1-10. Recuperado de <<http://www.oficinadapesquisa.com.br/APOSTILAS>>.

SANTOS, J. S. dos; ROMA, A. I. R. **Trigonometria para o Ensino Fundamental e Médio com a Utilização das Tecnologias Digitais**. Rematec, São Paulo - SP, v. 13, n. 28, p.114-126, maio 2018. Disponível em: <<http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/>>. Acesso em: 03 mar 2020.

SCIENTIFIC ELETRONIC LIBRARY ONLINE (SciELO). Disponível em: <<https://www.scielo.org>>. Acesso em: 03 mar 2020.

SILVA, Marcelo Ataide; SILVA, Jonson Ney Dias da. **Movimento Modernizador da Matemática Secundária nos Livros Didáticos de Stávale e Sangiorgi**. *Anais do VSIPEM*. 2012. 19 f. Artigo produzido como Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana - Ba. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/13243298-Movimento-modernizador-da-matematica-secundaria-nos-livros-didaticos-de-stavale-e-sangiorgi-1.html>>. Acesso em: 27 fev 2022.

SILVA, E. G. M. G. da. **Contextualização Histórica para o Estudo da Trigonometria e Construção do Teodolito no Ensino Fundamental**. 2015. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília - UNB, Brasília - DF, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.unb.br/handle>>. Acesso em: 03 mar 2020.

SILVA, Everaldo Raiol da. **O Surgimento das Trigonometrias em Diferentes Culturas e as Relações estabelecidas Entre Elas**. 2014. 210 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém - PA. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/8551/1/Dissertacao_SurgimentoTrigonometriasDiferentes.pdf>. Acesso em: 03 mar 2020.

SILVA, M. F. da; FROTA, M. C. R. **Uma Sequência Didática para Introdução da Trigonometria no Ensino Médio**. 2011. 85 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica - PUC/MG, Belo Horizonte - MG, 2011. Disponível em: <<http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/>>. Acesso em: 03 mar 2020.

SILVA, R. C. T. Z. **Trigonometria: História e Aplicações no Contexto Escolar**. 2019. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru - SP, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/181733>>. Acesso em: 03 mar 2020.

SILVA, W. M. P et al. **Medindo Alturas Inacessíveis com o Auxílio da Trigonometria: O Caso da Igreja Nossa Senhora da Conceição em Passira - PE**. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO - CONEDU, 2., 2015, Recife - PE. Anais [...] . Recife - PE: Editora Realize, 2015. p. 1 - 5. Disponível em: <<http://www.editorarealize.com.br/>>.

SILVA, Wellington da. **O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio**. 2013. 91 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro – SP, 2013. Disponível em:

<
<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92419/000733617.pdf?sequence=1>
>. Acesso em: 03 mar 2020.

SOUZA, J. M. **Funções Trigonométricas e Suas Aplicações no Cálculo de Distâncias Inacessíveis**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) Universidade de São Paulo – USP, campus São Carlos - SP. 2017.

SOUZA, P. C. T. de. **Recursos Digitais no Ensino de Trigonometria**. Revista Kurytyba, Curitiba - PR, v. 11, n. 1, p.87-104, jun. 2019. Disponível em: <http://www.cmc.eb.mil.br/images/revista/Revista_Cientifica/Revista_2019_1.pdf#page=91>. Acesso em: 03 mar 2020.

STRASBURG, E. B. **Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o Uso do Software GeoGebra**. 2014. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - URG, Rio Grande - RS, 2014. Disponível em: <https://profmat.furg.br/images/TCC/tcc_ezequiel_pos_banca.pdf>. Acesso em: 03 mar 2020.

TRAVITZKI, R. **Brasil no PISA 2012 – Ainda há muito a ser feito, mas a melhora é visível**. 2013. Disponível em: <<https://rizomas.net/politicas-publicas-de-educacao>>. Acesso em: 12 jul 2020.

UBERTI, G. L. **Uma Abordagem das Aplicações Trigonométricas**. 2003. 54 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis - SC, 2003. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle>>. Acesso em: 03 mar 2020.

VIANA, M. C. V.; SILVA, C. M.: **Concepções de Professores de Matemática sobre a Utilização da História da Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem**. In: Anais Do Encontro Nacional De História Da Matemática, 9, 2007. Belo Horizonte – MG, 2007.

VYGOTSKY, Lev S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

WIKIPÉDIA. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/>>

ZABALA, Antoni. **A Prática educativa: como ensinar**. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.