

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Eletricidade

---

*CONTROLE ROBUSTO LQG/LTR COM  
RECUPERAÇÃO DO GANHO DA MALHA  
DE TRANSFERÊNCIA*

---

Joaquim Gomes Brito Filho

São Luís  
2006

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Eletricidade

---

*CONTROLE ROBUSTO LQG/LTR COM  
RECUPERAÇÃO DO GANHO DA MALHA  
DE TRANSFERÊNCIA*

---

Joaquim Gomes Brito Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da UFMA como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

São Luís  
2006

Brito Filho, Joaquim Gomes

Alocação de Auto-estrutura utilizando Controle Robusto LQG/LTR e Computação Evolutiva / Joaquim Gomes Brito Filho. - São Luís, 2006.

109f.:il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Eletricidade) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, 2006.

1. LQR 2. Filtro de Kalman 3. Controle Robusto LQG/LTR 4. Computação Evolutiva 5. Realimentação de Saída. I. Título.

CDU 62-52

**CONTROLE ROBUSTO LQG/LTR COM  
RECUPERAÇÃO DO GANHO DA MALHA  
DE TRANSFERÊNCIA**

**Joaquim Gomes Brito Filho**

Submetida em 04/04/2006

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. João Viana da Fonseca Neto**

Dr. em Engenharia Elétrica  
Orientador

---

**Prof. Sebastian Yuri Cavalcanti Catunda**

Dr. em Engenharia Elétrica  
Examinador Interno

---

**Prof. Roberto Célio Limão de Oliveira**

Dr. em Engenharia Elétrica  
Examinador Externo

## RESUMO

Apresenta-se um método para resolver o problema de Alocação de Auto-estrutura para sistemas dinâmicos multivariáveis por meio do Projeto de Controladores Robusto Gaussiano Linear Quadrático, Recuperação da Malha de Transferência e Algoritmo Genético Hierárquico em três níveis. Mostra-se um método unificado para o projeto de controladores robustos que são uma sistematização das três etapas da metodologia **LQG/LTR**. A computação evolutiva é utilizada no nível primário que é a determinação dos ganhos do controlador ótimo para garantir as condições de estabilidade robusta. O nível intermediário, consiste na utilização de um **AG** para determinar os ganhos de **Kalman** do observador de estado. O último nível desta hierarquia consiste da recuperação das propriedades de robustez do projeto **LQR** que foram perdidas devido a inclusão da malha **LQG** por meio de um **AG**. O método é verificado em um sistema dinâmico que representa uma aeronave em velocidade cruzeiro, uma análise de desempenho do projeto **LQG/LQR-hierárquico** no domínio da frequência e do tempo mostram os compromissos que devem ser assumidos em aplicações de sistemas do mundo real.

**Palavras-Chave:** Filtro de Kalman, Regulador Linear Quadrático, Algoritmos Genéticos, Linear Quadrático Gaussiano, Autoestrutura, Autovalores, Autovetores, Sistemas Dinâmicos

## ABSTRACT

In this work is presented a method to solve the Eigenstructure Allocation problem for multivariable dynamic systems by means of Robust Controllers Design Linear Quadratic Gaussian, *LQG/LTR* Loop transfer Recovery and Hierarchical Genetic Algorithm in three levels. It shows an unified method for controllers robust design that are one systematical of the three stages of **LQG/LTR** methodology. The evolutionary computation is used in the primary level that is the gain controller optimal determination to guarantee the terms of robust stability. The intermediary level, consists in the utilization of a **AG** to determine the **Kalman** state observer gain. The last level of this hierarchy consists of recovery the robustness properties of the **LQR** design which were lost due to inclusion of the **LQG** loop by means of a **GA**. The method is verified in a dynamic system which represents an aircraft in cruzeiro speed, a **LQG/LQR-hierarchic** design performance analysis in the frequency domain and of time show the commitments that should be taken over in applications of the real world systems.

**Keyword-Key:** Kalman Filter, Linear Quadratic Regulator , Genetic, Linear Quadratic Gaussiano Algorithms , Eigenestruture, Eigenvalues, Eigenvectors, Dynamic Systems

# Lista de Tabelas

3.1	Ganho $K$ do Controlador - $LQR$ . . . . .	35
3.2	Autovalores e Sensibilidades para a solução 3 do $LQR$ . . . . .	36
3.3	Comparação de valores de tempo e de máximo das variáveis de saída dos controladores base versus controlador $LQR$ para resposta ao impulso . . . . .	36
4.1	Restrições de projeto para o Filtro de Kalman . . . . .	45
4.2	Autovalores, sensibilidades e ganho do estimador para a solução $LQG$	47
5.1	Ganho $K$ do Controlador $LQR$ fixado para o Projeto $LQG/LTR$ , parâmetros de ajuste $v$ e matrizes de covariâncias para a recuperação da malha de transferência . . . . .	59
6.1	Valores Singulares Máximos Planta e Projetos LQR, LQG e LTR	74
6.2	Valores Singulares Mínimos - Projetos LQR, LQG e LTR . . . . .	74
6.3	Valores Singulares Máximos e Mínimos e Erros - Projeto $LQG/LTR$	75
A.1	Restrições de projeto para o $LQR$ e controlador base . . . . .	88

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos do Sistema de Controle em malha fechada - planta, sinais de ruído e perturbações. . . . .	14
3.1	Projeto de Controlador Inteligentes do tipo <b>LQR</b> . . . . .	23
3.2	Algoritmo do Método de Bryson (Metodologia Heurística) . . . . .	29
3.3	Algoritmo do Controle Ótimo Modal . . . . .	30
3.4	Algoritmo do Regulador com condições de Estabilidade . . . . .	31
3.5	Fluxograma do Algoritmo Genético. . . . .	32
3.6	Valores singulares das soluções produzidas pelo <i>AG</i> para o <i>LQR</i> . . . . .	34
3.7	Resposta ao impulso do controlador base versus controlador <i>LQR</i> . . . . .	37
4.1	Esquema para a solução de Riccati via RNA . . . . .	39
4.2	Diagrama de blocos do sistema . . . . .	43
4.3	Projeto do regulador utilizando observador e realimentação de estados . . . . .	46
4.4	Trajetórias dos Estados da Planta versus seus estimados. . . . .	48
4.5	Valores Singulares do Sistema - Projetos LQR e LQG. . . . .	49
5.1	Esquema para realimentação de estados. . . . .	52
5.2	Diagrama de blocos do controlador com o Filtro de Kalman . . . . .	53
5.3	Diagrama de Blocos Reduzido do Sistema regulador-observador. . . . .	55
5.4	Recuperação pela Entrada das propriedades de robustez. . . . .	58
A.1	Diagrama de uma aeronave para fins de projeto de controle. . . . .	86

# Lista de Abreviaturas e Siglas

AE	Auto-estrutura
AAE	Alocação de Auto-estrutura
AG	Algoritmo Genético
EAR	Equação Algébrica de Riccati
FK	Filtro de Kalman
K	Ganho do Regulador Linear Quadrático
L	Ganho do Filtro de Kalman
LQ	Linear Quadratic (Linear Quadrático)
LQG	Linear Quadratic Gaussian (Gaussiano Linear Quadrático)
LQR	Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)
LTR	Loop Transfer Recovery (Recuperação da Malha de Transferência)
LQG/LTR	Linear Quadratic Gaussian /Loop Transfer Recovery
MV	Minimum Variance (Variância Mínima)
MIMO	Multiple-Input and Multiple-Output (Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas)
SISO	Single-Input and Single-Output (Simples-Entrada e Simples-Saída)
P	Solução da Equação Algébrica de Riccati
S	Sensibilidade
T	Sensibilidade Complementar
$\Sigma$	Solução da Equação Algébrica de Riccati para o Filtro de Kalman
Q	Matriz de Ponderação do Estado
R	Matriz de Ponderação do Controle
$\Xi$	Matriz de Covariância da Perturbação no Estado
$\Theta$	Matriz de Covariância do Ruído de Medida

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivo . . . . .	8
1.2	Motivação . . . . .	9
1.3	Justificativa . . . . .	9
1.4	Organização da Dissertação . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Controle Multivariável</b>	<b>12</b>
2.1	Sistemas MIMO . . . . .	13
2.2	Controle <b>MIMO</b> no Domínio de Frequência . . . . .	16
2.2.1	Sensibilidade e Cosensibilidade . . . . .	16
2.2.2	Decomposição em Valores Singulares . . . . .	17
2.2.3	Especificações de Desempenho . . . . .	19
2.3	Conclusão . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Metodologia LQR para o Projeto de Controladores</b>	<b>23</b>
3.1	O Problema LQR . . . . .	25
3.2	A Solução do LQR . . . . .	26
3.3	As Matrizes $Q$ e $R$ . . . . .	27
3.3.1	Métodos Heurísticos . . . . .	28
3.3.2	Computação Evolutiva . . . . .	31
3.4	O Projeto LQR . . . . .	33
3.4.1	Análise dos Valores Singulares . . . . .	33
3.4.2	As Matrizes de Ponderação . . . . .	35
3.4.3	O Ganho do Controlador . . . . .	35
3.4.4	Resposta ao Impulso . . . . .	36
3.5	Conclusão . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Metodologia LQG para o Projeto de Controladores</b>	<b>39</b>
4.1	O Projeto LQG . . . . .	41
4.2	Formulação <b>AAE-LQG</b> . . . . .	43
4.3	Projeto do Observador de Estado . . . . .	44
4.4	Conclusão . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Metodologia LQG/LTR</b>	<b>50</b>
5.1	Controle LQG/LTR . . . . .	50
5.2	Ganhos de Malha Aberta . . . . .	51
5.2.1	Ganho de Malha Aberta do LQR . . . . .	52
5.2.2	Ganhos de Malha Aberta na Entrada e Saída . . . . .	52
5.3	Recuperação LTR na Entrada . . . . .	56
5.4	Ajuste para o Controlador LQG/LTR . . . . .	57
5.5	Conclusão . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Algoritmo Genético Hierárquico - LQG/LTR</b>	<b>61</b>
6.1	Introdução . . . . .	61
6.2	Modelo Hierárquico para Sintonia . . . . .	63
6.2.1	Modelo de Sintonia do Ganho LQR . . . . .	63
6.2.2	Modelo de Sintonia do Ganho LQG . . . . .	65
6.2.3	Modelo de Sintonia do Ganho LTR . . . . .	67
6.3	Projeto de Controle <b>LQG/LTR</b> . . . . .	70
6.3.1	Ajuste Empírico do Ganho <b>LQG/LTR</b> . . . . .	71
6.3.2	Projeto LQR/LQG . . . . .	72
6.3.3	Recuperação da Malha do LQR . . . . .	72
6.4	Modelo do <b>AG-LQG/LTR</b> . . . . .	75
6.4.1	Modelo Cromossômico . . . . .	76
6.4.2	Geração da População Inicial . . . . .	77
6.4.3	Estrutura de Fitness . . . . .	78
6.4.4	Métodos de Seleção . . . . .	80
6.4.5	Operações Cromossômicas . . . . .	81
6.5	Conclusão . . . . .	83

---

<b>7 Conclusão</b>	<b>84</b>
7.1 Trabalhos Futuros . . . . .	85
<b>A O Sistema Teste</b>	<b>86</b>
<b>B Desempenho e Estabilidade Robusto</b>	<b>89</b>
B.1 Modelo do Sistema Dinâmico . . . . .	90
B.2 Robustez - Desempenho e Estabilidade . . . . .	91
B.2.1 Desempenho Robusto . . . . .	91
B.2.2 Estabilidade Robusta . . . . .	96
<b>C Recuperação do Ganho de Malha na Entrada</b>	<b>97</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>

## CAPÍTULO 1

# Introdução

---

A Alocação de Auto-estrutura (**AAE**) consiste basicamente em alocar autovalores e autovetores associados em sistemas dinâmicos multivariáveis (*MIMO*). A importância da Alocação de Auto-estrutura é justificada, pois os autovalores refletem a estabilidade e taxa de decréscimo ou de crescimento da resposta temporal dos sistemas, enquanto os autovetores estão relacionados com a sua forma (Lewis and Syrmos 1995). Neste contexto percebe-se que somente a alocação dos autovalores não é suficiente para garantir a robustez de malha fechada e os requisitos de desempenho dos sistemas *MIMO*, ou seja, somente a alocação de autovalores não é suficiente para definir uma estrutura única de realimentação para o sistema. Isto acontece devido à liberdade promovida pela realimentação de estado ou saída em relação à seleção dos autovetores associados nos sistemas *MIMO*, (Doyle and Stein 1981). Já para o caso de sistemas mono variáveis *SISO*, os pólos de malha fechada definem uma única estrutura de realimentação, principalmente quando estes têm liberdade para deslocarem-se livremente dentro de certa área do plano complexo.

No parágrafo anterior mostrou-se a necessidade do desenvolvimento de métodos para garantir a robustez dos sistemas de controle no sentido da alocação de uma autoestrutura completa, métodos para os ajustes dos ganhos das malhas de controle e do observador, utilizado computação evolutiva e redes neurais, estão sendo desenvolvidos por (Melo Wolf *et al.* 2006) e (Brito Filho *et al.* 2006). A importância dos *Sistemas de Controle LQG/LTR* dentro de um contexto de aplicações envolve os mais variados segmentos das atividades humanas, desde

o setores industrial, de utilidade pública e outros. O setor industrial, (Weerasooriya 1995), utilidade pública geração de energia, (Lee 1996), (Rab-Alibeik 2003), atenuação de ruídos auditivos, devido a perturbações externas dos automóveis e outros (José Paulo F. *et al.* 2004), controle de máquinas de corrente contínua, controle de processos, (Gasem 1995). As referências (Lahdhiri 1993), (Wu 1995), (Paschall 1994), (Bailey 1990), (Jafar *et al.* 2006), (Kishor *et al.* 2004) and (Keller 2005) e as citadas mostram que a metodologia *LQG/LTR* está sendo incorporada nos diversos segmentos produtivos e estratégicos das sociedades industrializadas. Em face do exposto e constatado nas referências citadas, conclui-se que o controle *LQG/LTR* encontra-se na fase de realização tecnológica, as propriedades deste tipo de controle que são as garantias de desempenho e de estabilidade robustas, justificando a pesquisa e o desenvolvimento de metodologias de controle baseadas no projeto *LQR*.

As técnicas de computação evolutiva e de redes neuronais podem ser associadas as metodologias **LQR**, **LQG** e **LQG/LTR** para sistematizar um método que incorpora robustez na alocação de autoestruturas para sistemas do mundo real. O processo de evolução natural de organismos biológicos pode ser utilizado para determinar as matrizes de ponderação do projeto *LQG/LTR* (Ferreira e Fonseca *et al.* 2003). Entre as várias técnicas de Computação Evolutiva, escolheu-se os Algoritmos Genéticos (*AG*) como mecanismo de busca estocástico polarizado para resolver o problema de Alocação de Auto-estrutura. Nas próximas seções discute-se o objetivo, a motivação, a justificativa e a organização da proposta é apresentada nos capítulos da dissertação.

## 1.1 Objetivo

Esta dissertação tem como objetivo desenvolver uma metodologia para projetos de controladores robustos fundamentada em Algoritmos Genéticos para recuperação do ganho da malha de transferência utilizando o Projeto de Controle *LQG/LTR* e Computação Evolutiva, especificamente Algoritmos Genéticos.

## 1.2 Motivação

Baseando-se na aplicabilidade das metodologias **LQR**, **LQG** e **LQG/LTR** e da pesquisa motivada por (Ferreira e Fonseca *et al.* 2003), respectivamente, para resolver o problema de controle multivariável utilizando as teorias moderna e clássica de controle. O desenvolvimento pode ser justificado pelos seguintes motivos: a influência da Alocação da Auto-estrutura na resposta de sistemas dinâmicos multivariáveis e Alocação da Auto-estrutura como um problema de Controle Robusto. A metodologia escolhida foi **LQG/LTR**, em que se trabalha com sistemas dinâmicos estocásticos e levamos em consideração ruídos e perturbações na planta e são recuperadas as propriedades de robustez da malha através da técnica **LTR**. O método foi escolhido pelo fato de permitir a implementação da técnica **LQG/LTR** em sistemas do mundo real ou práticos.

## 1.3 Justificativa

A estabilidade, velocidade de resposta, formas de ondas e acoplamento de estados são eventos ou características do sistema que podem ser utilizados como figuras de mérito para avaliar o desempenho dos sistemas do mundo real.

Essas figuras ou índices de desempenho podem ser modificados, a critério do projetista, através de Alocação da Autoestrutura do Sistema Dinâmico. Logo, a importância do desenvolvimento de métodos para alocar autovalores e autovetores em sistemas dinâmicos multivariáveis pode ser justificada de forma global (importância de desempenho do sistema) e de forma de estado da arte (desenvolvimento científico e realizações tecnológicas). Uma das justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa é: a necessidade de formular uma solução sistemática, evitar soluções meramente baseadas no empirismo (tentativas e erros), para Alocação da Auto-estrutura como um problema de controle.

## 1.4 Organização da Dissertação

No Capítulo 2 apresenta-se o Controle Multivariável, destacando o desenvolvimento da Teoria de controle **LQG/LTR** com recuperação dos ganhos das malhas. Ainda neste capítulo encontra-se o desenvolvimento de sistemas multivariáveis

sendo destacado a influência da sensibilidade e cosensibilidade nas equações de entrada, de saída e de erro. Apresenta-se uma abordagem da decomposição em valores singulares e as especificações de desempenho em altas e baixas frequências.

No capítulo 3 é apresentada uma metodologia para o projeto de controladores  $LQR$ , tendo como abordagem a minimização de uma Função Custo com a determinação das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ . Ainda destacamos o problema e a solução do **LQR**, as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  e os métodos Heurísticos para a determinação das mesmas. Dentre estes métodos destacamos: **O Método de Bryson** que apresenta uma desvantagem fundamental ao se deter à iteração repetitiva de tentativas e erros; **Controle Ótimo Modal**, que se baseia na alocação de pólos, em que os parâmetros do índice de desempenho quadrático do projeto  $Q$  e  $R$  são escolhidos para alcançar a alocação; O Projeto do **Regulador com Condições de Estabilidades**, que utiliza a equação de Riccati para determinar as matrizes de ponderação apropriadas, resposta ao impulso e gráfico dos valores singulares.

No capítulo 4 é apresentado o projeto de controladores  $LQG$ , tendo como abordagem minimizar uma Função Custo com a determinação das matrizes de covariância  $\Xi$  e  $\Theta$ . Ainda destacamos o problema, a solução do **LQR** e os resultados computacional para o filtro de Kalman.

No capítulo 5 é apresentado o projeto de controladores  $LQG/LTR$ , o modelo do sistema teste, projeto dos controladores  $LQR$  e  $LQG$  via  $AG$  e em seguida, apresenta-se a determinação dos ganhos do controlador ótimo, resposta ao impulso, gráfico  $SVD$  e projeto  $LQG/LTR$  via  $AG$ .

No Capítulo 6, apresenta-se o algoritmo genético hierárquico para o projeto de controladores  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LQG/LTR$  utilizando uma hierarquia de modelos baseados em algoritmos genéticos. Mostra-se os modelos de busca para sintonizar os ganhos das malhas  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$  que compõem o *Modelo Hierárquico para Sintonia  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$* . Apresenta-se um experimento computacional para justificar o desenvolvimento de um terceiro algoritmo para recuperação da malha  $LQR$ , o projeto **LQG/LTR** com recuperação na entrada é implementado por tentativa e erro e suas principais características são amplamente analisadas e discutidas. A solução proposta para o problema de sintonia dos ganhos de recuperação de malha consiste de um modelo genético-artificial para o ajuste do

---

ganho de recuperação da malha de entrada. O modelo é abordado em seus aspectos estruturais, discutem-se as operações cromossômicas, métodos para geração da população inicial, a estrutura de *fitness* e métodos de seleção.

Finalmente, no Capítulo 7 apresentam-se conclusões, comentários, contribuições e perspectivas futuras. Alguns conceitos matemáticos, utilizados nesta dissertação, encontram-se nos Apêndices.

## CAPÍTULO 2

# Controle Multivariável

---

No projeto de sistemas de controle é importante perceber que um conjunto de equações diferenciais lineares, que forma a base de um projeto, é uma representação ou aproximação para os sistemas do mundo real. Vários sistemas têm dinâmicas que são importantes em altas frequências, que às vezes, são negligenciadas no projeto do modelo (Lewis and Syrmos 1995). Estas dinâmicas não modeladas em alta frequência podem atuar desestabilizando um sistema de controle que pode ter comportamento bastante satisfatório em termos do modelo do sistema. Em sistemas não lineares, o equilíbrio é modificado para um novo ponto de operação, enquanto que no modelo da planta linearizada descreve mudanças de comportamento com presença de perturbações. Estas variações paramétricas afetadas em baixa frequência podem também atuar para desestabilizar o sistema. Para compensar estas variações, nós podemos determinar ganhos de controladores satisfatórios para modelos linearizados em vários pontos de equilíbrio do projeto sobre um conjunto de operação. Estes ganhos projetados podem ser programados em computadores para o desempenho satisfatório do controlador sobre o ambiente inteiro. Para ganhos programados, é essencial que os ganhos do controlador estejam presentes em cada ponto de equilíbrio projetado para garantir estabilidade e manter as condições de operações perto do ponto de equilíbrio.

O controle **LQG** consegue estimar os estados para alimentar o controle **LQR**, contudo as propriedades de robustez do **LQR** são perdidas durante a estimação. Este problema é contornado com a aplicação do método **LTR** que recupera a malha do **LQR**. Este tipo de controle é conhecido como controle **LQG/LTR**.

Na secção 2.1 descreve-se alguns fundamentos de Sistemas Multivariáveis **MIMO**, apresentando-se uma análise sobre sensibilidade e cosensibilidade e suas influências no comportamento dinâmico nas equações de saída e erro do sistema.

Na secção 2.2 apresenta as definições de sensibilidade e cosensibilidade enfatizando algumas propriedades. Na subsecção 2.2.2, apresenta-se a decomposição e como calcular os valores singulares. Finalmente, na subsecção 2.3 é apresentado as especificações de desempenho em baixas e altas frequências e o ganho de operação. O Apêndice B complementa este Capítulo com diretrizes para uma análise de desempenho e de estabilidade robustas.

## 2.1 Sistemas MIMO

Nesta seção apresentam-se os principais conceitos e definições de Sistemas com Multivariáveis para fins de análise e projeto no domínio da frequência. A seguir, apresenta-se a definição de Sistema Multivariável sob o ponto de vista de sua descrição em função de transferência. Um Sistema Multivariável que possui  $m$ -entradas e  $q$ -saídas é descrito por um modelo entrada e saída,

$$Z(t) = G(t)U_r(t) \quad (2.1)$$

sendo  $Z \in \mathbb{R}^q$  a saída do Sistema ou Planta,  $U_r(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas e  $G \in \mathbb{R}^{q \times m}$  é a matriz de resposta ao impulso. Uma modificação na primeira entrada  $u_1$  pode afetar todas as saídas  $z_1, \dots, z_q$ . Isto mostra que existe interação entre entradas e saídas. Se afetar somente  $z_1$  podemos observar que não existe acoplamento para as saídas restantes. A presença de direções no sistema **MIMO** o diferencia em relação ao sistema **SISO**.

A figura 2.1 ilustra um diagrama em blocos padrão do sistema com realimentação no domínio da frequência. Podemos ainda observar a saída da planta  $Z(t) \in \mathbb{R}^q$ , a entrada do controle da planta  $U_c(t) \in \mathbb{R}^m$ , a entrada de referência  $U_r(t) \in \mathbb{R}^q$ , o distúrbio atuando no sistema  $U_d(t)$  e  $U_m(t)$  o ruído do sensor ou medição. Os sinais de ruídos e de distúrbios são geralmente vetores de dimensões  $q$ , sendo que os distúrbios ocorrem em baixas frequências, abaixo de algum  $\omega_d$ , enquanto o ruído de medida  $U_m(t)$  tem seus efeitos predominantes em altas frequências, acima de algum  $\omega_m$ .

Pode-se observar que a localização perfeita não pode ser alcançada a menos que o número  $m$  de entradas de controle seja maior ou igual ao número  $q$  de saídas. Então, nós podemos considerar que  $m = q$  tal que a planta e o compensador são quadrados. Isto é somente uma consequência de projeto de sensibilidade, e não uma restrição nos tipos de plantas que podem ser consideradas.

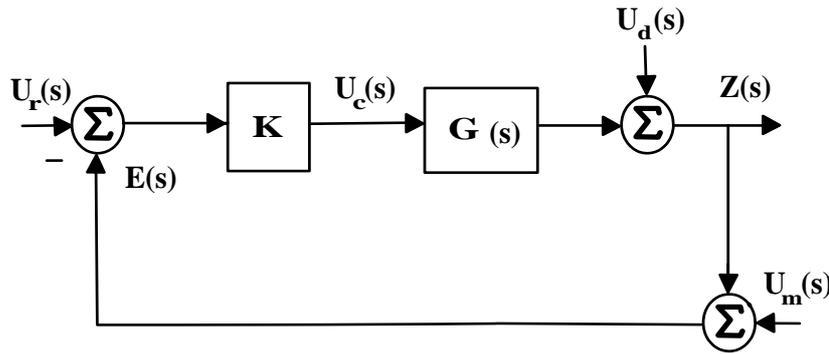


Figura 2.1: Diagrama de blocos do Sistema de Controle em malha fechada - planta, sinais de ruído e perturbações.

O erro de acompanhamento,

$$e(t) = U_r(t) - z(t) \quad (2.2)$$

Devido a presença de ruído da medição, o erro é melhor representado como ilustrado na equação,

$$e(t) = U_r(t) - z(t) - U_m(t) \quad (2.3)$$

Uma análise é apresentada em termos de domínio da frequência, a partir da figura 2.1 considere a saída da planta,

$$Z(s) = G(s)K(s)E(s) + U_d(s) \quad (2.4)$$

A equação (2.3) no domínio da frequência, a entrada do controlador,

$$E(s) = U_r(s) - Z(s) - U_m(s) \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.4), temos  $Z(s)$  em função das entradas  $U_r(s)$ ,  $U_m(s)$  e  $U_d(s)$  externas e da função de transferência,

$$Z(s) = (I + GK)^{-1}GK (U_r(s) - U_m(s)) + (I + GK)^{-1}U_d(s) \quad (2.6)$$

Substituindo a eq. (2.6) na equação de erro, eq. (2.5),

$$E(s) = [I - (I + GK)^{-1}GK]U_r(s) + (I + GK)^{-1}GKU_m(s) - (I + GK)^{-1}U_d(s) \quad (2.7)$$

Aplicando o lema da inversa na eq. (2.7),

$$E(s) = (I + GK)^{-1}(U_r(s) - U_d(s)) + (I + GK)^{-1}GKU_m(s) \quad (2.8)$$

Desde que  $\mathbf{GK}$  é quadrada e inversível,

$$(I + GK)^{-1}GK = [(GK)^{-1}(I + GK)]^{-1} = [(GK)^{-1} + I]^{-1} \quad (2.9)$$

Ainda,

$$[(I + GK)(GK)^{-1}]^{-1} = GK(I + GK)^{-1}. \quad (2.10)$$

Considerando as relações (2.9) e (2.10) e fazendo as devidas substituições, obtém-se as novas equações da saída e do erro,

$$Z(s) = GK(I + GK)^{-1}(U_r(s) - U_m(s)) + (I + GK)^{-1}U_d(s) \quad (2.11)$$

e

$$E(s) = (I + GK)^{-1}(U_r(s) - U_d(s)) + GK(I + GK)^{-1}U_m(s) \quad (2.12)$$

Observa-se que o par de equações (2.11) e (2.12) diferem do par de equações (2.6) e (2.7) em relação ao produto da função de transferência de malha aberta  $KG$ . No primeiro par este multiplica a função  $(I + GK)^{-1}$  pela esquerda e no segundo par pela direita. Isto mostra que a ordem deste produto matricial não altera os valores da saída  $Z(s)$  e  $E(s)$ .

## 2.2 Controle MIMO no Domínio de Frequência

Nesta secção apresenta-se os métodos no domínio da frequência para análise e projeto de Sistemas de Controle Multivariável. Os sistemas do Mundo Real são modelados como sistemas incertos, como em controle clássico, usando técnicas de controle robusto que são convenientemente analisados no domínio da frequência. A abordagem do controle moderno, tem sido no domínio do tempo, contudo esta abordagem deixa lacunas para compreensão do seu comportamento para variações no domínio da frequência.

Um problema que surge imediatamente para sistemas **MIMO** é de estender o gráfico **SISO** de magnitude de *Bode*. Os métodos tradicionais para sistemas **SISO** não são adequados para análise de Sistemas **MIMO**, pois não estamos interessados em fazer vários gráficos de frequência **SISO**, individualmente, para combinações de entradas e saídas no sistema **MIMO** e examinar margens de ganho e fase. Tal aproximação tem sido tentada e não pôde sempre, devido ao rendimento no comportamento verdadeiro do sistema **MIMO**. Isto dá-se devido a combinação de todas as entradas e saídas do sistema **MIMO**.

O desempenho robusto pode ser avaliado por meio do valor singular mínimo de ganho de malha que deve ser grande em baixas frequências, onde distúrbios estão presentes. No outro lado, para estabilidade robusta o valor singular máximo do ganho de malha deve ser pequeno em altas frequências, onde existe inexactidão significativa no modelo. Observa-se também que para garantir a estabilidade a respeito das variações paramétricas no modelo linearizado devido a mudança no ponto operação, o valor singular máximo deve ser inferior ao limite superior.

### 2.2.1 Sensibilidade e Cosensibilidade

Nesta seção, estende-se as noções clássicas de ganho da malha de diferença de retorno e de sensibilidades para sistemas multivariáveis que são matrizes de transferência quadrada de dimensão  $m \times m$ . As equações (2.6) e (2.11) de saída e de erro (2.7) e (2.12) fornecem duas funções importantes para a análise e para o projeto de Sistemas Multivariáveis no domínio da frequência que são as funções de sensibilidade e de cosensibilidade ou de sensibilidade complementar. Então, de acordo com as citadas equações, a sensibilidade do sistema,

$$S(s) = (I + GK)^{-1} \quad (2.13)$$

e a sua cosensibilidade,

$$T(s) = GK(I + GK)^{-1} = (I + GK)^{-1}GK \quad (2.14)$$

A saída e o erro são expressas em termos de sensibilidade e da cosensibilidade,

$$Z(s) = T(s)(U_r(s) - U_m(s)) + S(s)U_d(s) \quad (2.15)$$

e

$$E(s) = S(s)(U_r(s) - U_d(s)) + T(s)U_m(s) \quad (2.16)$$

Para assegurar pequenos erros, devemos ter a  $S(j\omega)$  pequena nas frequências onde as entradas de referências e de distúrbios são grandes, isto promove rejeições a distúrbios. Por outro lado, para rejeições satisfatórias dos ruídos, devemos ter a cosensibilidade  $T(j\omega)$  pequenas em frequências em que os ruídos  $U_m(t)$  são dominantes.

As seguintes propriedades e definições são válidas,

$$S(s) + T(s) = I \quad (2.17)$$

Logo, chama-se  $T(s)$  de complemento da sensibilidade. Note que a diferença de retorno é o inverso da sensibilidade,

$$L(s) = I + GK \quad (2.18)$$

e o ganho de malha,

$$G_{Malha}(s) = G(s)K(s) \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Decomposição em Valores Singulares

Não podemos então determinar diretamente uma medida clara para os valores baixos de sensibilidade e cosensibilidade. Então, assumimos que o número de entrada  $U_r(t)$  é igual ao número de saída de referência  $Z(t)$ . Elas são funções

complexas das frequências. Então, a noção do gráfico da magnitude de Bode, que é definida somente para funções complexas escalares de  $\omega$ , deve ser estendida para o caso **MIMO**. A melhor das medidas das matrizes quadradas é o valor singular. Dado uma matriz  $A$ , podemos escrever suas decomposições em valores singulares (**SVD**),

$$A = U\Sigma V^* \quad (2.20)$$

Sendo que  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias, ou seja,  $V^* = V^{-1}$ , a transposta conjugada complexa de  $V$  e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \sigma_r & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

com  $r = \text{rank}(A)$ . Os valores singulares são os  $\sigma_i$ , que são ordenados tal que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_{r-1} \geq \sigma_r$ . O **SVD** pode ser livremente como a extensão das matrizes gerais (que podem ser não quadradas ou complexas) da forma de Jordan. Se  $A$  é uma função de  $j\omega$ , considerando  $U$  e  $V$ . Desde que  $AA^* = U\Sigma V^* V \Sigma U^* = U\Sigma^2 U^*$ , segue que os valores singulares de  $A$  são simplesmente a raiz quadrada positiva dos autovalores de  $AA^*$ ,

$$SVD = \sqrt{\text{eig}(AA^*)} \quad (2.22)$$

Note que um gráfico completo de um comportamento de uma matriz versus ( $j\omega$ ) deve considerar as direções dos valores singulares bem como as fases multivariáveis, que também podem ser obtidas da decomposição do **SVD**. Assim, generalizações completas **MIMO** de magnitude de gráficos de Bode e fases são analisados. Portanto, a teoria relativa a porção fase do gráfico é mais difícil usar em uma técnica de projeto prático, pois um sistema **MIMO** para uma relação de Bode ganho-fase é avaliado (Doyle and Stein 1979). Devemos então somente empregar gráficos de **VSs** versus frequências, que corresponde gráficos de magnitude de Bode para sistemas **MIMO**.

A magnitude de uma matriz da função de transferência quadrada em algumas frequências ( $j\omega$ ) depende da direção de excitação de entrada. Entradas em uma certa direção no espaço de entrada excitará somente os valores singulares VSs associados com essas direções. Contudo, para algumas entradas, a magnitude da função de transferência em algumas dadas frequências ( $j\omega$ ) pode saltar para seus máximos valores singulares, denotado por  $\sigma_{max}(G(j\omega))$ , e abaixo para seus mínimos valores singulares, denotado  $\sigma_{min}(G(j\omega))$ . Assim, todos nossos resultados, bem como os gráficos que devemos analisar, precisam considerar as magnitudes destes dois valores .

As direções são relevantes para vetores e matrizes, a maior parte das idéias e técnicas de sistemas SISO é estendida para o caso MIMO. A técnica dos métodos de decomposição singular fornece informação que permite quantificar os sistemas Multivariáveis direcionalmente. Os resultados de sistema SISO podem ser genérico para sistemas **MIMO**, considerando magnitude (valor absoluto), levando em conta o valor singular máximo. A condição de estabilidade não é genérico em termos de **SVD**, isto mostra a dificuldade em determinar uma ótima medida de base da função de transferência **MIMO**.

### 2.2.3 Especificações de Desempenho

Comparando-se os Gráficos de Valores Singulares e os Gráficos de Bode podemos resaltar que os saltos dos *Valores Singulares* em algumas faixas de frequências não são possíveis de serem observadas. Então, tem-se a necessidade de discutir as especificações de desempenho no domínio da frequência para o caso **MIMO**. O ponto importante é que em baixas frequências é requerido que os valores singulares mínimos sejam grandes, enquanto que em altas frequências os valores singulares máximos sejam pequenos.

#### Ganho de Operação

Define-se a norma  $\| S \|_2$  de um vetor em função do tempo  $S(t)$  como,

$$\| S \|_2 = \left[ \int_0^{\infty} S^T(t)S(t)dt \right]^{1/2}. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) representa a energia total em  $S(t)$ . O sistema linear e invariante no tempo têm entradas  $U_r(t)$  e suas saídas  $Z(t)$  são representadas por uma integral de convolução, como representado na equação ,

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d(\tau), \quad (2.24)$$

sendo  $h(t)$  a resposta ao impulso. O operador ganho  $\| G \|_2$ , de cada sistema é definido como um dos menores valores de  $\gamma$  tal que,

$$\| Z \|_2 \leq \gamma \| U_r \|_2 \quad (2.25)$$

Sendo que o ganho do operador  $\| G \|_2$ ,

$$\| G \|_2 \leq \max [\sigma_{\max}(G(j\omega))] \quad (2.26)$$

sendo  $G(s)$  a função de transferência do sistema e sua norma , dada por  $\| G \|_2$ , sendo o valor máximo sobre a frequência  $\omega$  dos máximos valores singulares de  $G(j\omega)$ , ou seja,  $\max(\text{svd}(G(s)))$ . Assim,  $\| G \|_2$  é uma norma infinita no domínio da frequência.

Estes resultados fornecem incrementos importantes para  $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ , como estamos interessado em manter  $Z(t)$  pequeno sobre uma faixa de frequências, então, nós devemos tomar cuidado com  $\sigma_{\max}(G(j\omega))$  que é pequeno sobre essa faixa.

Agora é necessário ver como estes resultados podem serem usados em especificações no domínio do tempo. Alguns fatos que nós devemos usar nesta discussão,

$$\sigma_{\min}(GK) - 1 \leq \sigma_{\min}(I + GK) \leq \sigma_{\min}(GK) + 1 \quad (2.27)$$

$$\sigma_{\max}(M) \leq 1/\sigma_{\min}(M^{-1}) \quad (2.28)$$

$$\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (2.29)$$

Para algumas matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{GK}$ ,  $\mathbf{M}$ , com  $\mathbf{M}$  não singular.

Antes de iniciarmos uma discussão de especificações de desempenho, notamos o seguinte. Se  $S(jw)$  é pequeno, como descrito em baixas frequências,

$$\sigma_{max}(S) = \sigma_{max}[(I + KG)^{-1}] \approx 1/\sigma_{min}(GK) \quad (2.30)$$

Isto é, um grande valor  $\sigma_{min}(GK)$  garante um pequeno valor para  $\sigma_{max}(S)$ . Por outro lado, se  $T(j\omega)$  é pequena, como é desejado em altas frequências, então

$$\sigma_{max}(T) = \sigma_{max}[GK(I + KG)^{-1}] \approx \sigma_{max}(GK) \quad (2.31)$$

Isto é, um pequeno valor de  $\sigma_{max}(GK)$  garante um pequeno valor de  $\sigma_{max}(T)$ . Isto significa que especificações de  $S(j\omega)$  é pequena em baixas frequências e  $T(j\omega)$  é pequena em altas frequências, podendo igualmente ser formulado em termos de  $\sigma_{min}(GK)$ , sendo grande em baixas frequências e  $\sigma_{max}(GK)$  sendo pequena em altas frequências. Assim, todas nossas especificações de desempenho serão em termos do máximo e mínimo valores singulares de ganho de malha  $GK(j\omega)$ . O significado prático disto é que nós precisamos somente calcular os valores singulares do ganho de malha  $GK(j\omega)$ , e não os de  $S(j\omega)$  e  $T(j\omega)$ . De onde devemos recordar da secção 2.2.1 que  $S + T = I$ .

Vamos a priori considerar especificações em baixas frequências no gráfico do valor singular, e depois em altas frequências. De acordo com o que vimos nas equações (2.15) e (2.16), a cosensibilidade está relacionada com as entradas de referências  $U_r$  e com o distúrbio  $U_d$ , enquanto que a sensibilidade envolve o ruído de medida  $U_n$ .

### Especificações em baixas frequências

Para baixas frequências, podemos considerar que o ruído, equação (2.16), do sensor é zero,

$$E(s) = S(s)(U_r(s) - U_d(s)) \quad (2.32)$$

Assim, para manter  $\|e(t)\|_2$  pequeno, é necessário somente assegurar que o operador norma  $\|S\|_2$  seja pequeno em altas frequências onde  $U_r(j\omega)$  e  $U_d(j\omega)$  estão presentes. Isto pode ser alcançado assegurando que, em cada frequência,  $\sigma_{max}(S(j\omega))$  é pequeno, como já temos visto, isto pode ser garantido se nós selecionarmos,

$$\sigma_{\min}(GK(j\omega)) \gg 1, \text{ para } \omega \leq \omega_d \quad (2.33)$$

Os sinais  $U_r(j\omega)$  e  $U_d(j\omega)$  estão presentes para  $\omega \leq \omega_d$ .

Desta forma, exatamente como no caso clássico (Lewis and Syrmos 1995), estamos aptos para especificar um desempenho em baixas frequências que garante o desempenho robusto; que é, um ótimo desempenho na presença de distúrbios de baixas frequências.

### Especificações em altas frequências

Vamos agora discutir especificação de desempenho em altas frequências. O ruído do sensor faz-se presente acima de alguns valores de frequências conhecidas. Assim, de acordo com a equação (2.16), para manter pequenos  $\|e(t)\|_2$  na presença de ruídos de medidas devemos assegurar que o operador  $\|T\|_2$  é pequeno em altas frequência, isto pode ser garantido se,

$$\sigma_{\max}(GK(j\omega)) \ll 1, \text{ para } \omega \geq \omega_n \quad (2.34)$$

## 2.3 Conclusão

Neste capítulo apresentou-se uma análise de Controle Multivariável sob o ponto de vista de desempenho e estabilidade robusta utilizando funções de  $T(s)$  e  $S(s)$ . Na secção 2.1 vimos os fundamentos de sistema MIMO, fazendo-se uma análise da influência da sensibilidade e cosensibilidade, observando-se suas importâncias no comportamento da equação do erro e de entrada do sistema dinâmico. Também foi comentada e analisada a decomposição dos valores singulares, mostrando-se como calcular os valores singulares e suas ordenações em uma matriz diagonal. Por fim, apresentou-se as especificações de desempenho em baixas e altas frequências. Estes resultados serão utilizados para análise de desempenho e projeto de controladores **LQR**, **LQG** e **LQG/LTR** nos próximos capítulos.

# Metodologia LQR para o Projeto de Controladores

Neste capítulo enfoca-se a metodologia de controle ótimo, especificamente o *Projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR)*, no sentido de alicerçar uma formulação de procedimentos para o projeto de controladores que promovam a alocação de autoestruturas em Sistemas Multivariáveis. A figura 3.1 ilustra o esquema de um sistema de controle ótimo que tem por base dois paradigmas de Inteligência Artificial: um algoritmo genético para busca da matrizes de ponderação e uma rede neuronal para solução da *Equação Algébrica de Riccati*.

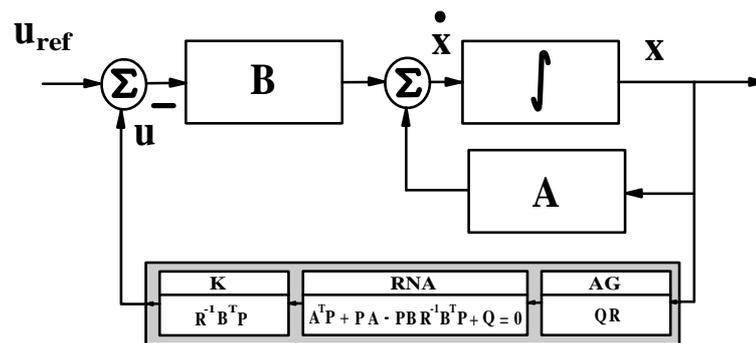


Figura 3.1: Projeto de Controlador Inteligentes do tipo **LQR**.

O diagrama de blocos do Sistema de controle, figura 3.1, que fundamenta-se no projeto *LQR*, algoritmos genéticos e redes neurais, caracteriza uma metodologia de projeto que é denominada **LQR** inteligente. A metodologia de controle *LQR* pode ser visualizada como uma aplicação particular de um problema de otimização. Este problema de otimização é caracterizado pela busca de vetor de entrada  $u$  que minimiza um funcional  $J(\cdot)$  e tem como restrição o modelo do Sistema descrito no espaço de estados,

$$\min_u J(x, Q, u, R) \quad (3.1)$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.2)$$

Esta formulação é chamada de problema de controle ótimo. No caso do Regulador Linear Quadrático, o índice de desempenho  $J$  é um mapeamento dos espaços dos vetores de estado e de controle que são ponderados pelas matrizes constantes  $Q$  e  $R$ , respectivamente.

Aponta-se como vantagem da metodologia **LQR** a margem de estabilidade garantida: margem de fase de 60 graus e margem de ganho infinita (M.Maciejowski 1989), estabelecendo a qualidade de estabilidade robusta. Contudo, aponta-se como desvantagens da metodologia **LQR** a necessidade de disponibilidade dos estados para medições para realimentação do sinal de controle, o que normalmente não é possível; e que não haja nem ruído nem perturbação no sistema.

O procedimento para o projeto de controladores ótimos que aloquem autoestruturas de Sistemas Multivariáveis é apresentado com o enfoque da importância da seleção das matrizes de Ponderação do estado e da entrada. Após a seleção destas matrizes, determina-se o ganho do controlador, analisa-se o seu comportamento em face a resposta ao impulso do sistema dinâmico e os valores singulares.

Discute-se a problemática relacionada com a solução da *Equação Algébrica de Ricatti* (**EAR**), a escolha das matrizes de ponderação e suas relações com métodos de busca ótima. As técnicas de inteligência artificial são associadas a métodos de busca, baseados em *Algoritmos Genéticos*, das matrizes de ponderação e redes neurais são utilizadas para resolver a EAR. A principal razão para investigarmos

soluções neuronais é a sua alta capacidade de recuperação para ocorrência de falhas. Esta característica acrescenta uma inovação para a síntese de um dispositivo em tempo real para o Controle de Processo em Plantas reais.

Na secção 3.1 é apresentado o problema do Regulador Linear Quadrático *LQR*, tendo como abordagem minimizar uma Função Custo com a determinação das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ .

Na secção 3.2 destacamos a solução do **LQR**, apresentando-se o Hamiltoniano e aplicando as condições de otimalidade no mesmo, para obtenção de uma representação matemática do estado e coestado, objetivando-se a definição da matriz hamiltoniana, também é apresentada a lei de controle, o ganho do controlador e a *Equação Algébrica de Riccati*.

Na secção 3.3 comenta-se sobre as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  e os métodos Heurísticos para a determinação das mesmas. Dentre estes métodos destacamos: **O Método de Bryson** que apresenta uma fraqueza fundamental ao se deter à interação repetitiva de tentativas e erros; **Controle Ótimo Modal**, Baseia-se na alocação de polos, em que os parâmetros do índice de desempenho quadrático do projeto  $Q$  e  $R$  são escolhidos para alcançar a alocação; **O Projeto do Regulador com Condições de Estabilidades**, que utiliza a equação de Riccati para determinar as matrizes de ponderação apropriadas.

Na secção 3.4 apresentam-se as matrizes de ponderação  $Q_{LQR}$  e  $R_{LQR}$  selecionadas para o projeto do controlador, posteriormente é apresentado o Ganho, uma análise e os gráficos de resposta ao impulso e dos valores singulares

### 3.1 O Problema LQR

O problema do Regulador Linear Quadrático (**LQR**) é apresentado sob o ponto de vista da natureza das matrizes de ponderação do estado e do controle. O procedimento de solução da *Equação Algébrica de Riccati* (**EAR**) é estável, pois as matrizes de ponderação e outras condições obedecem rigorosamente as restrições que garantem a existência de uma solução ótima.

O *LQR* é formulado por meio de um índice de desempenho quadrático e tem como restrição a equação de estado linear invariante no tempo,

$$J(t_o) = \frac{1}{2}x^T(T)P(T)x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_o}^T [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt \quad (3.3)$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ , o par  $A, B$  é controlável, o par  $A, C$  é observável,  $P(T) \geq 0, Q(T) \geq 0$  e  $R > 0$ . Todas simétricas.  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Matrizes definidas e semi-definidas positivas respectivamente.  $[t_o, T]$  é o intervalo de tempo de interesse do problema.

## 3.2 A Solução do LQR

Os métodos de cálculo variacional são utilizados para resolver o problema de otimização, a variável  $t$ , que indica tempo, será suprimida para simplificação na compreensão do desenvolvimento da solução. Assim, o Hamiltoniano,

$$H(t) = \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) + \lambda^T (Ax + Bu). \quad (3.5)$$

Após a aplicação das condições de otimalidade o estado  $x$  e o co-estado  $\lambda$  na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

sendo

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

a matriz Hamiltoniana.

A solução para este problema é resumida nos próximos parágrafos. Usando o método da varredura de Bryson e Ho, mencionado em Lewis (Lewis and Syrmos 1995), pode-se considerar um lagrangeano variando com a matriz  $P(t)$  que satisfaz a condição final  $\lambda(T) = P(T)x(T)$ .

A realimentação variante no tempo nem sempre permite uma implementação conveniente na prática, devido à variação do ganho do controlador com o tempo.

Entretanto, pode-se utilizar, ao invés disso, um ganho de realimentação subótimo (ganho constante) que minimize o índice de desempenho, Equação (6.2). Considerando o desenvolvimento das soluções apresentada em (6.2), a lei de controle que minimiza o índice  $J$  e satisfaz a restrição  $\dot{x}$ ,

$$u(t) = -Kx(t). \quad (3.8)$$

sendo  $K$  o ganho do controlador,

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t), \quad (3.9)$$

Este ganho é função da solução da Equação Algébrica de **Riccati**  $P$ , dada por:

$$0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad t \leq T. \quad (3.10)$$

### 3.3 As Matrizes $Q$ e $R$

Um problema do **LQR** é a determinação das matrizes de ponderação que satisfazem determinadas condições. A determinação dessas matrizes influencia para o cálculo do ganho. Diversas técnicas foram desenvolvidas para determiná-las que tem por base métodos determinísticos e Heurísticos. A liberdade de escolha das matrizes de ponderação do projeto **LQR** são as variáveis de projeto livres que são utilizadas para a Sintonia dos Ganhos do Controlador Ótimo. A problemática, desde a dificuldade da determinação e da sua importância no contexto do desenvolvimento desta metodologia, é apresentada na seção 3.3.1. Na seção 3.3.2 apresenta-se a computação evolutiva que tem como base a simulação dos aspectos específicos do processo evolutivo tendo como representação um conjunto de técnicas eficazes.

O principal enfoque desta seção é fazer uma breve explanação dos métodos de busca das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  que compõem índice de desempenho  $J$ .

### 3.3.1 Métodos Heurísticos

Os Métodos Heurísticos constituem uma das primeiras técnicas concebidas para a seleção das matrizes de ponderação. Uma abordagem dessa metodologia é o chamado quadrado do inverso ou Método de *Bryson*, cuja idéia básica é normalizar as saídas e o termo controle dentro da função de índice de desempenho quadrático, Figura 3.2, (Johnson 1987).

Esta normalização é normalmente realizada usando o máximo de valores antecipados (ou derivados) do controle e das saídas individuais. Embora simples, o Método de *Bryson* apresenta uma desvantagem fundamental ao se deter à iteração repetida tentativa e erro, Figura 3.2, (Johnson 1987).

#### Controle Ótimo Modal

O Controle Ótimo Modal baseia-se na convencional alocação de pólos, contudo ao invés de escolher o ganho de realimentação diretamente, os parâmetros do índice de desempenho quadrático do projeto (que são as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ ) são escolhidos para alcançar a alocação, Figura 3.3, (Johnson 1987).

#### Projeto do Regulador com Condições de Estabilidades

O Projeto do Regulador com Condições de Estabilidades é fundamentado no Controle Ótimo, neste método troca-se a determinação das localizações exatas de todos os pólos à malha fechada pela simples especificação de uma região do semiplano complexo esquerdo, onde deverão estar os pólos a malha fechada. Este método explora ainda as propriedades do regulador de potência mínima, e a Equação de Riccati é usada para determinar as matrizes de ponderação apropriadas, Figura 3.4, (Johnson 1987).

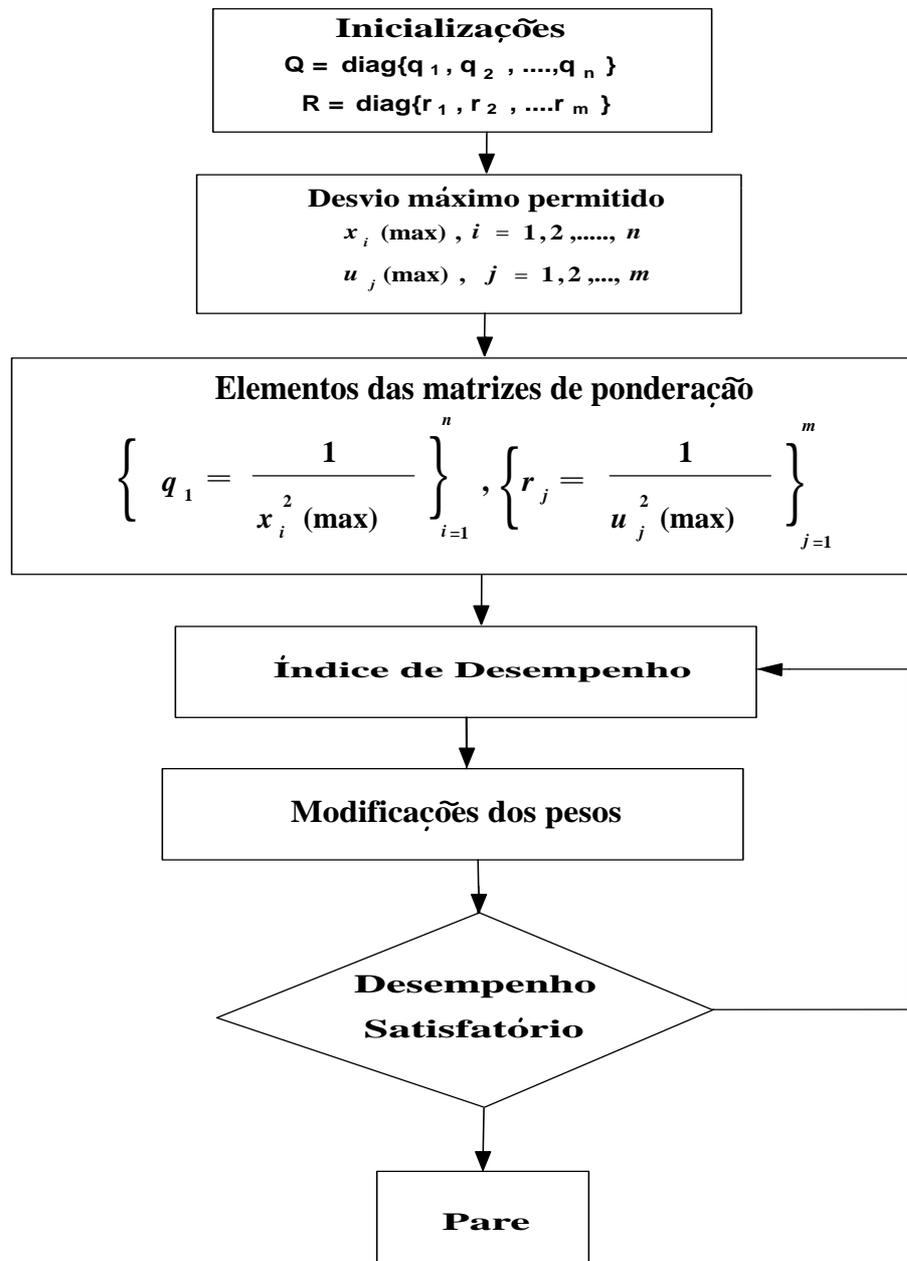


Figura 3.2: Algoritmo do Método de Bryson (Metodologia Heurística)

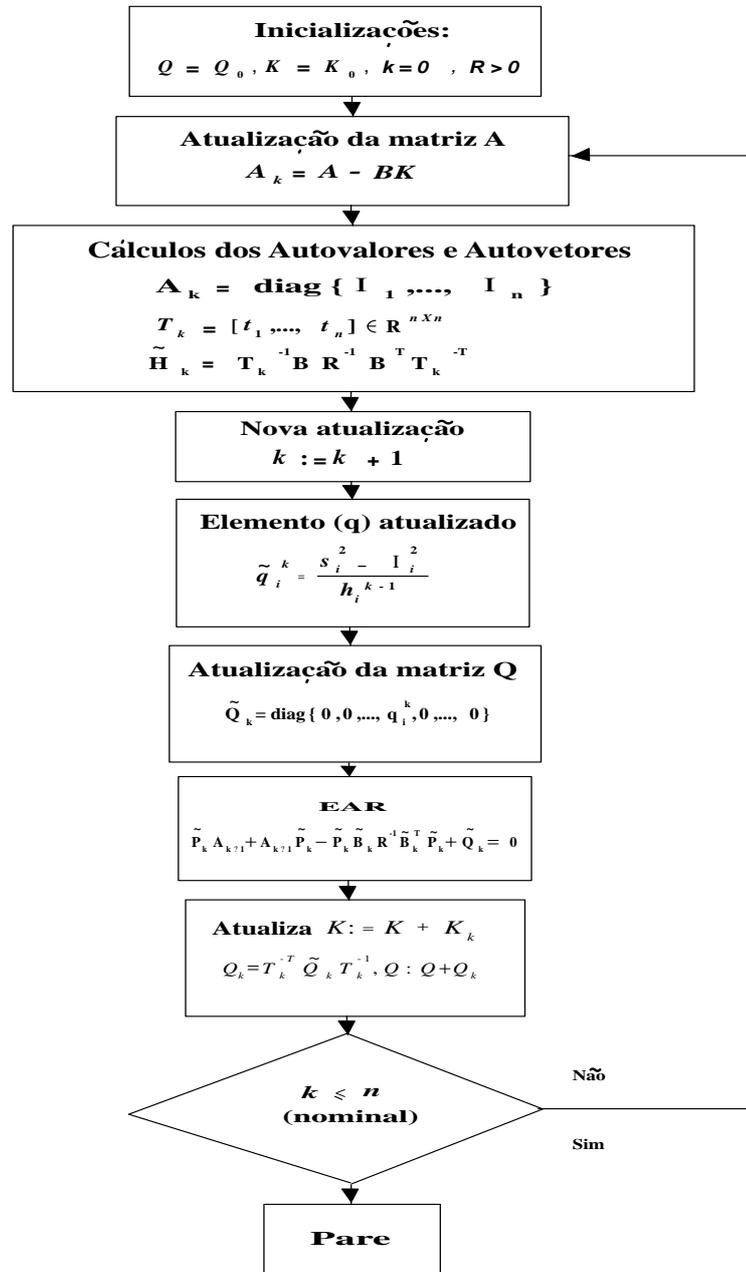


Figura 3.3: Algoritmo do Controle Ótimo Modal

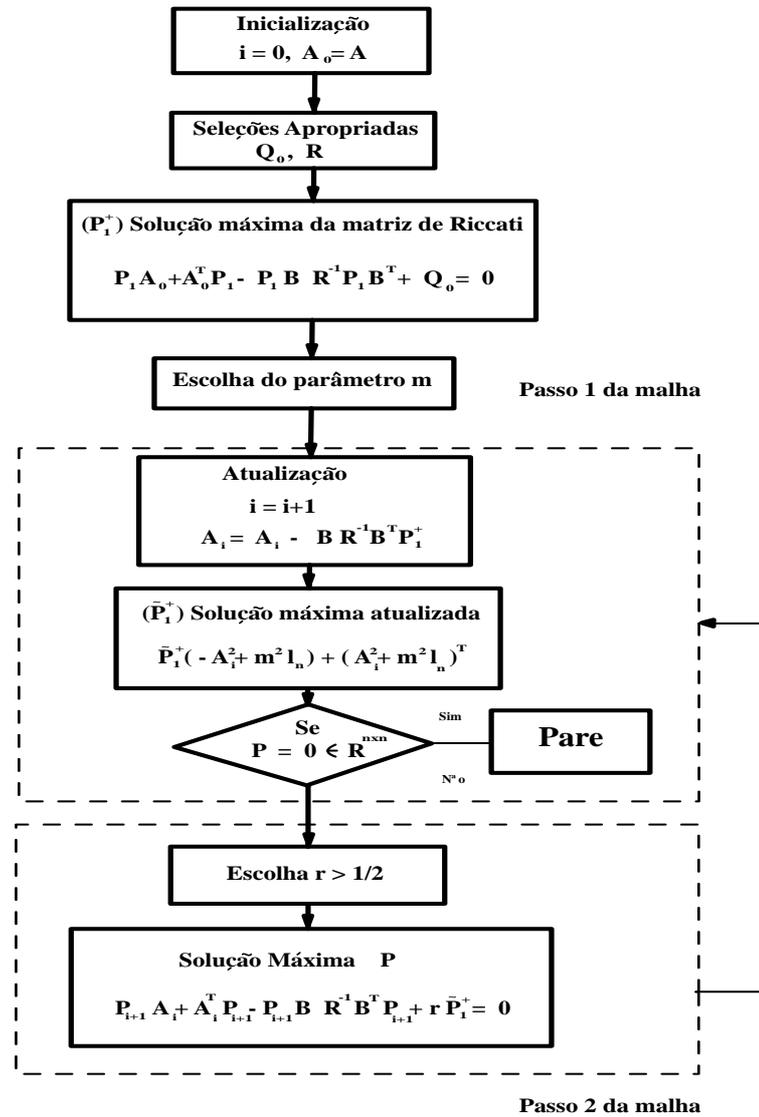


Figura 3.4: Algoritmo do Regulador com condições de Estabilidade

### 3.3.2 Computação Evolutiva

A Computação Evolutiva (*CE*) representa um conjunto de técnicas de otimização eficazes que tem por base paradigmas da evolução natural. Na Figura 3.5 temos a estrutura do algoritmo básico da *CE*, especificamente um algoritmo Genético, (Holland 1975) e (Goldberg 1989), desenvolvido por (Fonseca Neto 2000) para a

busca das matrizes de ponderação.

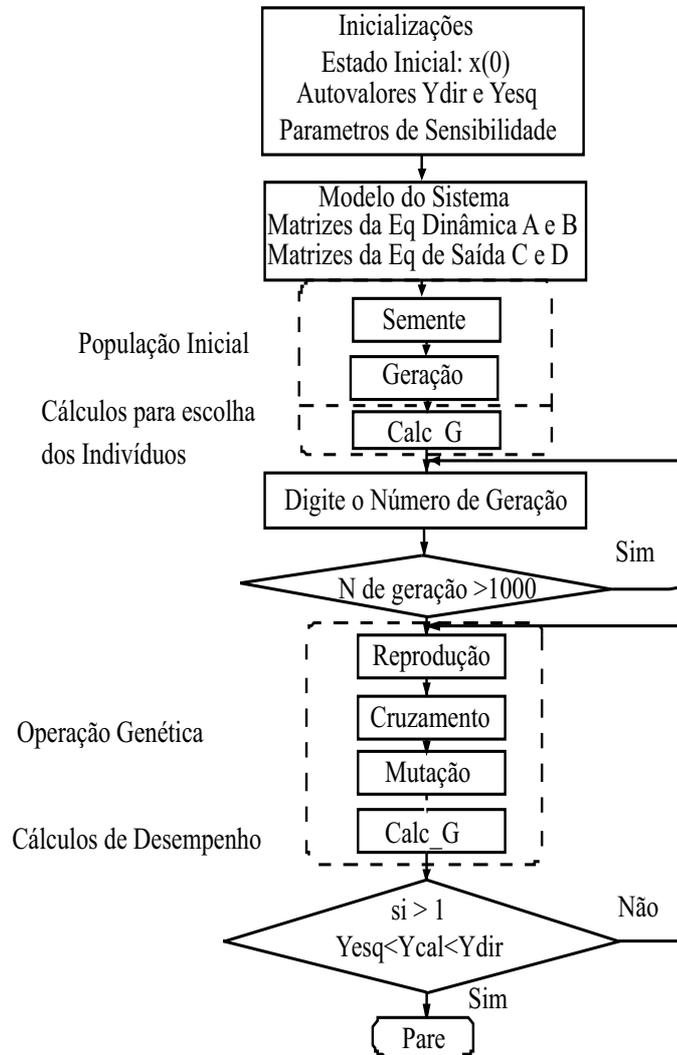


Figura 3.5: Fluxograma do Algoritmo Genético.

A Computação Evolutiva (**CE**) iniciou antes de 1950, (Bäck *et al.* 1997), que se verifica um crescimento do número de publicações e de conferências sobre este campo de pesquisa. Nos tempos atuais a utilização da *CE* já é tão abrangente que podemos grosseiramente dizer que ela vai da simples construção de grades horárias até modelos macroeconômicos.

## 3.4 O Projeto LQR

Nesta subsecção apresenta-se um procedimento para implementação da metodologia de Projeto de Controladores **LQR**. O Procedimento de projeto para Controladores Robustos fundamentados na Metodologia **LQR** é executada em três etapas. Inicialmente, realizam-se as buscas das matrizes de ponderação que é a primeira etapa, o cálculo do ganho do controlador, é uma etapa complexa que exige a utilização de métodos numéricos estáveis, a solução da *Equação de Riccati*, exige um alto esforço computacional, devido as operações com transformações das matrizes.

O modelo de uma aeronave, descrito no espaço de estado, e as restrições de autoestrutura para avaliar o desempenho destes controladores são apresentados no Apêndice A.

### 3.4.1 Análise dos Valores Singulares

De forma obrigatória, o primeiro passo do projeto é a busca das matrizes de ponderação do Projeto *LQR*. Contudo, a análise dos valores singulares é utilizada para definir o controlador que promove as melhores propriedades de robustez entre um grupo de soluções. Esta análise considera as soluções que satisfazem as restrições de autoestrutura, estas matrizes de ponderação  $Q$  do estado e  $R$  do controle são determinadas para o modelo de um Sistema que está no Apêndice A. Utiliza-se um *AG*, (Ferreira 2003), para realizar a busca destas matrizes.

Após exaustivas buscas, escolhe-se três conjuntos de pares das matrizes ponderação que melhor alocam a autoestrutura especificadas. Esta escolha é realizada tem por base os valores singulares em função da frequência, Figura 3.6, que são impostos ao sistema pelos ganhos do controlador ótimo.

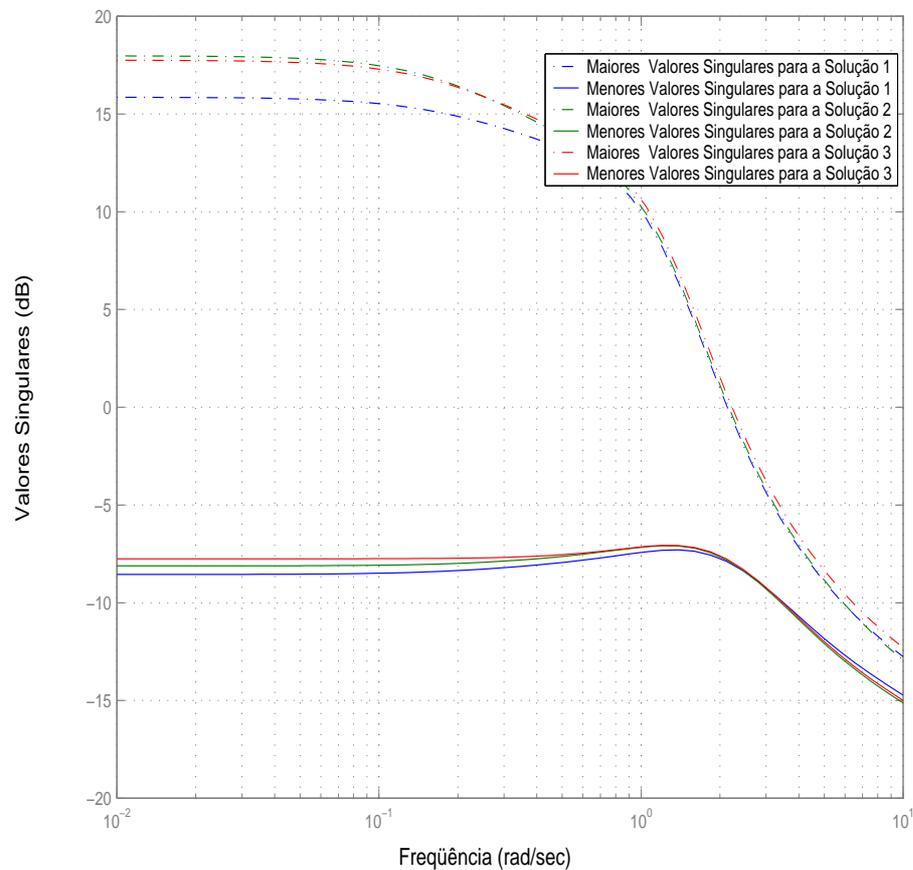


Figura 3.6: Valores singulares das soluções produzidas pelo *AG* para o *LQR*

Os gráficos dos valores singulares, Figura 3.6, representam a resposta em frequência para três soluções provenientes do algoritmo genético. Nestes gráficos, pode-se destacar a melhor solução do *AG* para os critérios de desempenho e de estabilidade. Das três soluções obtidas, a de número 3, foi a de melhor desempenho, pois obteve o maior dos menores valores singulares, em baixas frequências, dentre as soluções. Para a estabilidade, a melhor solução foi a de número 2, pois obteve o menor dos maiores valores singulares, em altas frequências.

Dessa forma, e devido às proximidades das curvas serem mais acentuadas em altas frequências, resolveu-se fixar o controlador obtido na solução de número três produzida pelo *AG*. Porém, qualquer uma das outras duas soluções poderia

trazer resultado satisfatório, pois, como já ressaltado anteriormente, seus valores singulares estão bem próximos, levando em conta os limites de estabilidade.

### 3.4.2 As Matrizes de Ponderação

As matrizes de ponderação  $Q$  do estado e  $R$  do controle para o caso 3, Figura 3.6, são escolhidas de acordo com os critérios estabelecidos na secção 3.4.1,

$$Q_{RLQ} = \begin{bmatrix} 10.1 & 1.9 & 2.0 & 1.7 & 0.4 & 1.2 \\ & 8.2 & 2.6 & 0.7 & 0.6 & 2.5 \\ & & 7.3 & 1.7 & 2.2 & 1.6 \\ & & & 38.1 & 2.0 & 1.2 \\ & & & & 78.0 & 0.3 \\ & & & & & 29.2 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$R_{RLQ} = \begin{bmatrix} 31.9 & 4.6 \\ & 25.9 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

### 3.4.3 O Ganho do Controlador

A determinação do Ganho do Controlador de Estados envolve um esforço computacional considerável que envolve a solução da  $EAR$  e cálculo da Lei de Controle  $u$ . Na Tabela 3.2, mostra-se os ganhos do controlador para o caso 3 para as matrizes de ponderação representadas nas relações (3.11) e (4.17).

Tabela 3.1: Ganho  $K$  do Controlador -  $LQR$

$K$	Ganho						
$k_1$	0.1851	0.0061	-0.0325	-1.1791	-0.0106	1.5988	
$k_2$	0.0198	0.1943	-0.4226	-0.7849	-1.2051	2.6245	

Os autovalores de malha fechada e as suas sensibilidades dos autovalores, Tabela 3.2, mostram que o método de projeto desenvolvido por (Fonseca Neto 2000) teve a habilidade em impor a autoestrutura especificada e implementado em (Brito Filho *et al.* 2006).

Tabela 3.2: Autovalores e Sensibilidades para a solução 3 do *LQR*

No	Autovalores	Sensibilidades
1	-28.6366	0.1380
2	-22.9010	0.2434
3	-2.0351	0.8599
4	-1.1774 + 1.1743i	0.5244
5	-1.1774 - 1.1743i	0.6109
6	-0.2895	0.9132

### 3.4.4 Resposta ao Impulso

A fim de comparar as respostas dos controladores base, no Apêndice A, e especificado segundo a metodologia proposta, (Fonseca Neto 2000), apresenta-se os valores das figuras de mérito para a resposta ao impulso, Tabela 3.3 que é montada a partir da Figura 3.7.

Tabela 3.3: Comparação de valores de tempo e de máximo das variáveis de saída dos controladores base versus controlador *LQR* para resposta ao impulso

Saída	Controlador Base				Controlador 1			
	$t_1$	$t_{max}$	$t_{reg}$	$V_{max}$	$t_1$	$t_{max}$	$t_{reg}$	$V_{max}$
1	25	1.75	11.6	-0.512	24	2.12	10.5	-0.496
2	0.43	0.10	3.00	-0.546	0.70	0.10	4.30	-0.512
3	1.73	0.12	6.26	-0.692	2.13	0.09	6.20	-0.558
4	1.67	0.42	3.40	0.133	2.16	0.63	4.00	0.177

A análise de desempenho dos controladores obtidos pelo *AG*, Tabela 3.3 e Figura 3.7, leva em consideração as especificações de projeto no domínio do tempo:  $t_1$  – tempo para atingir um ponto do regime permanente pela primeira vez,  $V_{max}$  – o valor máximo,  $t_{max}$  – tempo para atingir o valor máximo e  $t_{reg}$  – tempo para atingir o regime permanente (faixa de  $\pm 5\%$  do valor de regime). Observa-se que

o desempenho do controlador escolhido é satisfatório em relação ao controlador base.

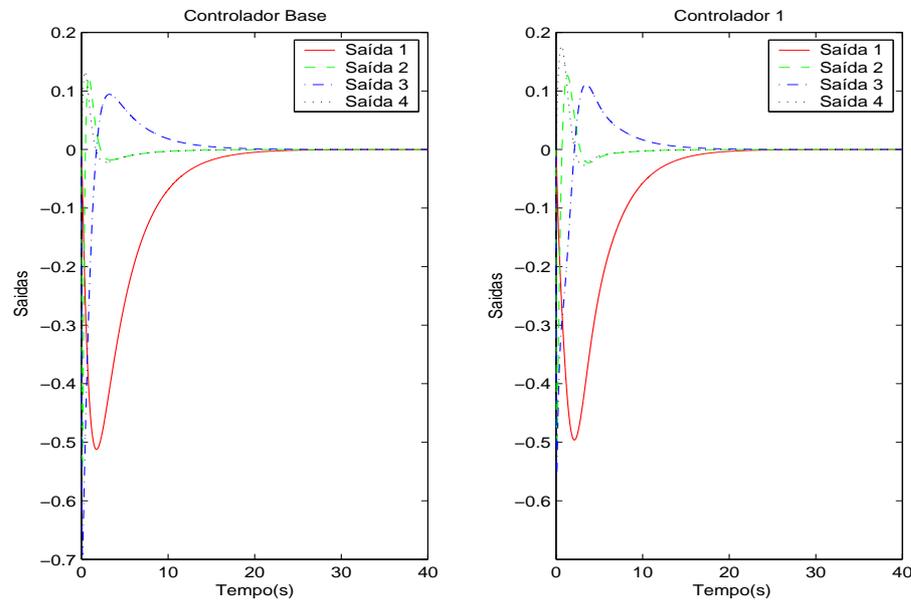


Figura 3.7: Resposta ao impulso do controlador base versus controlador *LQR*

### 3.5 Conclusão

O controle *LQR* foi utilizado como uma aplicação particular de um problema de otimização. Este problema foi caracterizado pela busca de vetor de entrada  $u$  que minimiza uma função de desempenho. Esta formulação foi chamada de problema de controle ótimo. No caso do Regulador Linear Quadrático, o índice de desempenho é um mapeamento dos espaços dos vetores de estados e de controle ponderados pelas matrizes constantes  $Q$  e  $R$ , respectivamente. Aponta-se como vantagem do **LQR** a margem de estabilidade garantida: margem de fase de 60 graus e margem de ganho infinita, estabelecendo a qualidade de estabilidade robusta. Contudo, apresentou-se como desvantagens do **LQR** a necessidade de disponibilidade dos estados para medições para realimentação do sinal de controle, e que não haja nem ruído nem perturbação no sistema. O procedimento para o projeto de controladores ótimos que aloquem autoestruturas de Sistemas

Multivariáveis foi apresentado com a importância da seleção das matrizes de Ponderação do estado e da entrada. Foi discutido a problemática relacionada com a solução da *Equação Algébrica de Ricatti (EAR)*, a escolha das matrizes de ponderação e suas relações com métodos de busca ótima. As técnicas de inteligência artificial são associadas a métodos de busca, baseados em *Algoritmos Genéticos*, das matrizes de ponderação e redes neurais são utilizadas para resolver a EAR.

# Metodologia LQG para o Projeto de Controladores

O controle **LQG** foi desenvolvido para superar as desvantagens do **LQR**. Certas variáveis de estado não podem ser medidas ou são muito ruidosas. Por meio do controle **LQG** é possível estimar estes estados. A figura 4.1 apresenta-se o diagrama de um controle **LQG** baseado em redes neurais e algoritmo genético.

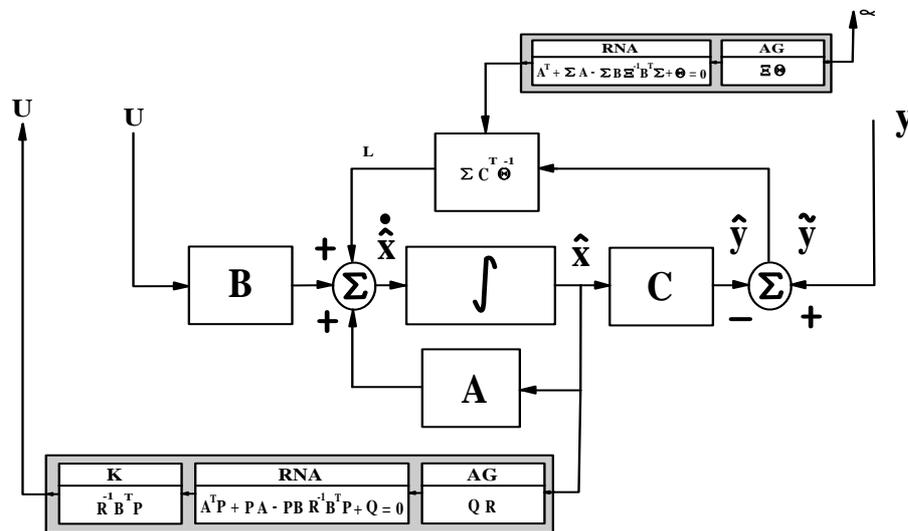


Figura 4.1: Esquema para a solução de Riccati via RNA

A realização das pesquisas no espaço de estado, em aproximadamente 1970, conduziu ao desenvolvimento da metodologia para o projeto de controle ótimo quadrado Gaussiano e o estabelecimento do princípio da separação. Isto permitiu a separação do projeto de controle e a estimação do vetor de estado. Os resultados foram a base para uma nova visão para projetos de controle. O problema **LQG** é formulado como um problema de otimização estocástica,

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x^T \Theta(t) x + u^T \Xi(t) u) dt \right] \quad (4.1)$$

s.a

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + G\xi(t) \quad (4.2)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ , o par  $A, B$  é controlável, o par  $A, C$  é observável,  $\Theta(t) \geq 0$  e  $\Xi(t) > 0$ . Todas simétricas.  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Matrizes definidas e semi-definidas positivas respectivamente.  $[t_o, T]$  é o intervalo de tempo de interesse do problema. Um observador é adicionado ao Projeto *LQR* para estimação do estado através da saída medida, que é comum em sistemas de controle. O observador projetado pode ser determinístico (observador clássico ou de Luenberger) ou estocástico (Filtro de Kalman). Quando o observador é projetado considerando um ruído gaussiano, o controle é chamado *Linear Quadrático Gaussiano - LQG*.

O controlador *LQG* apresenta como vantagens: ação integral que pode ser introduzida facilmente; sinais de referência estocásticos podem ser incluídos; sistemas multivariáveis não quadrados, com atraso nas diferentes malhas, podem ser controlados.

As principais desvantagens do controlador *LQG* são as perdas das propriedades de robustez, devido à inclusão do estimador; e o tempo gasto com a estimação.

Neste Capítulo apresenta-se um método para o problema de *AAE* de Estimador de Estado Estocástico via *FK* e *AG*. A formulação deste problema e sua solução foram publicados por Fonseca Neto e Carlos Ferreira (Ferreira 2003). Assim, na Seção 4.1 comenta-se o Controle *LQG*, mostrando a estrutura deste Controle, indicando-o como um esquema prático para solucionar os problemas de controle, a partir de uma estimação que deve ser feita quando não se tem sensores para medir as variáveis de estado. Também é salientado o principal problema do Controle *LQG*: perda das propriedades de robustez do *LQR*.

Na Seção 4.1 trata-se do observador estocástico ótimo (*Filtro de Kalman*), utilizado no Projeto de Controle *LQG* para estimação das variáveis de estado. Finalmente, na Seção 4.3 apresenta-se os resultados computacionais, cuja finalidade é determinar as matrizes de covariâncias  $\Xi$  da perturbação no estado e  $\Theta$  do ruído da medida, de forma a obter um estimador especificado.

Estas matrizes serão utilizadas na Seção 5.3 como covariâncias iniciais  $\Xi_o$  da perturbação no estado e  $\Theta_o$  do ruído de medida, apresenta-se que podem recuperar as propriedades do *LQR*, perdidas com a estimação, com as escolhas convenientes para as covariâncias, Equações (5.28) e (5.28).

## 4.1 O Projeto LQG

A realimentação de saída é uma prática para a maioria dos sistemas de controle. Assim, um observador é adicionado ao Projeto *LQR* para estimação do estado através da saída medida. Quando o observador é projetado considerando um ruído gaussiano, o controle é chamado *Linear Quadrático Gaussiano - LQG*. A inclusão do Filtro de Kalman pode resultar nas propriedades de robustez do *LQR*, (Doyle and Stein 1979).

O controlador *LQG* apresenta como principais vantagens a ação integral que pode ser introduzida facilmente, sinais de referência estocásticos podem ser incluídos e sistemas multivariáveis não quadrados, com atraso nas diferentes malhas, podem ser controlados e como desvantagens apresenta as perdas das propriedades de robustez, devido à inclusão do estimador. Outra desvantagem é o tempo gasto com a estimação.

Considere o modelo estocástico do sistema dinâmico,

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + G\xi(t) \quad (4.3)$$

em que  $\xi(t) \in R^m$  é um processo estocástico chamado de ruído no estado (ou no processo), que se admite ser branco, gaussiano e tal que

$$E[\xi(t)] = 0, \quad (4.4)$$

$$E[\xi(t)\xi(t + \tau)^T] = \Xi\delta(t - \tau). \quad (4.5)$$

$\Xi = \Xi^T > 0$  é a matriz de covariância do ruído no estado ou densidade espectral do ruído de processo, que indica a potência do ruído e  $\delta(t - \tau)$ , *Delta de Dirac*, traduz que o valor do  $\xi$  no instante  $t$  não está relacionado com seu valor em outro instante  $\tau \neq t$ . Admitindo-se que os sensores não mensuram o estado diretamente, mas apenas variáveis de saída sujeitas à ação de um ruído de medida aditivo,

$$y(t) = Cx(t) + \nu(t) \quad y(t) \in R^m. \quad (4.6)$$

$\nu(t)$  é o ruído branco, gaussiano, independente de  $\xi(t)$  ,

$$E[\nu(t)] = 0; \quad (4.7)$$

$$E[\nu(t)\nu(t + \tau)^T] = \Theta\delta(t - \tau); \quad (4.8)$$

$$E[\xi(t)\nu(t + \tau)^T] = 0, \quad \forall t \text{ e } \tau. \quad (4.9)$$

Em que  $\Theta = \Theta^T > 0$  é a matriz de covariância do ruído de medida ou densidade espectral do ruído de medida, que indica a potência do ruído. O par  $A, C$  é suposto observável.

O problema a ser resolvido consiste em obter-se uma estimativa  $\hat{x}(t)$  do estado  $x(t)$  a partir da observação da saída  $\{y(\tau), \tau \leq t\}$ . O *FK* é um sistema dinâmico, com a estrutura representada na Figura 4.2, em que a matriz de ganho

$$L = \Sigma C^T \Theta^{-1}. \quad (4.10)$$

Sendo  $\Sigma$  a solução única, simétrica e definida positiva da Equação Algébrica de Riccati-*EAR* (Cruz 1996), apresentada abaixo:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + G\xi G^T - \Sigma C^T \Theta^{-1} C \Sigma = 0. \quad (4.11)$$

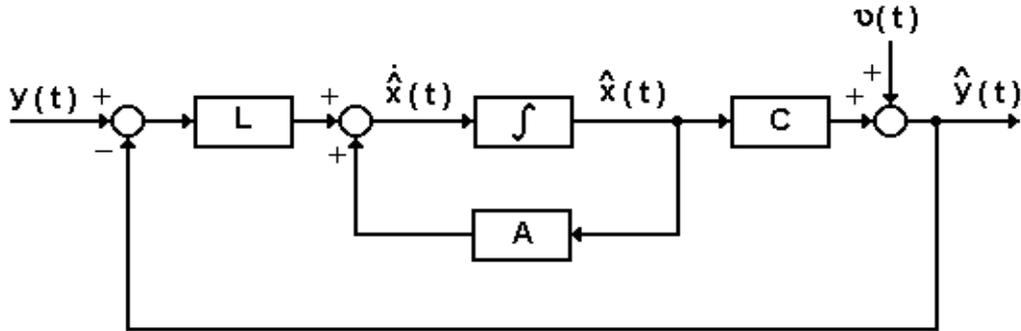


Figura 4.2: Diagrama de blocos do sistema

A estimativa gerada pelo filtro é ótima no sentido de que a variância do erro de estimação, Equação (4.12), é mínima,

$$\min \sum_{i=1}^n E\{[x_i(t) - \hat{x}_i(t)]^2\}. \quad (4.12)$$

Sendo assim, a dinâmica do Filtro de Kalman é dada por

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]. \quad (4.13)$$

O Filtro de Kalman é tal que

$$\text{Re}[\lambda_i(A - LC)] < 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.14)$$

## 4.2 Formulação AAE-LQG

Nesta Seção formula-se o *FK* de forma a alocar a Auto-estrutura no problema de estimação de estado estocástico. Esta nova formulação permite a utilização de técnicas de Computação Evolutiva para determinar um observador estocástico para estimar os estados com uma dinâmica desejada, onde não se tem acesso para medi-los, a partir do Filtro de Kalman.

Utilizando-se as restrições de  $AE$ , restrições de autovalores e autovetores, pode-se formular o problema de estimação de estado estocástica, encontrar  $L = \Sigma(\Xi, \Theta)C^T\Theta^{-1}$  do  $FK$ , de forma a satisfazer estas restrições. Este problema pode ser formulado como um problema de otimização, permitindo a determinação de um estimador  $L(\Xi, \Theta)$  através de técnicas de busca aleatória.

Analogamente a proposta apresentada por (Fonseca Neto 2000) para o controle **LQR** e estendida por (Ferreira 2003) para a alocação de auto estrutura no projeto **LQG** propõe-se como função custo, Equação (6.4), a soma das sensibilidades dos autovetores. Esta nova função custo, tem-se um problema de otimização multi-objetivo:

$$\min_{\Xi, \Theta} \sum_{i=1}^n s_i(\Xi, \Theta) \quad (4.15)$$

s.a

$$\begin{aligned} s_i(\Xi, \Theta) &\leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ \lambda_{ei} &\leq \lambda_{ci}(\Xi, \Theta) \leq \lambda_{di}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

sendo  $s_i = S_i/\epsilon_i$  é a  $i$ -ésima sensibilidade normalizada em relação à  $i$ -ésima especificação de projeto:  $\epsilon_i > 0$ .

Em que  $\Theta = \Theta^T > 0$  é a matriz de covariância do ruído de medida ou densidade espectral do ruído de medida, que indica a potência do ruído. O par  $(A,C)$  é suposto observável. O sistema dinâmico acima pode ser representado na forma de diagrama de blocos, conforme ilustra a Figura 4.2.

### 4.3 Projeto do Observador de Estado

O projeto do observador de estado está fundamentado na teoria do Filtro de *Kalman*. O modelo do sistema teste que representa uma aeronave, Apêndice A, é utilizado para verificar o desempenho do projeto LQG associado com um algoritmo genético para realizar a busca das matrizes de covariância. O modelo está descrito no espaço de estados, mostrando as matrizes do sistema dinâmico, o controlador base e as restrições de autoestrutura. As restrições do Projeto para

o Ganho de Kalman, Tabela 4.1, são obtidas a partir de um deslocamento para a esquerda que são incrementadas nas restrições do controlador base, Tabela A.1, do Apêndice A.

Tabela 4.1: Restrições de projeto para o Filtro de Kalman

N.	Autovalores	Sensibilidades
1	$-14.04 \leq Re \leq -24.84$	14.56
2	$-21.60 \leq Re \leq -32.40$	8.26
3	$-1.08 \leq Re \leq -3.24$ $3.24 \leq Imag \leq -3.24$	10.48
4	$-1.08 \leq Re \leq -3.24$ $3.34 \leq Imag \leq -3.24$	10.48
5	$-2.16 \leq Re \leq -3.24$	19.84
6	$-0.216 \leq Re \leq -3.24$	4.36

Nesta Tabela, verifica-se que as faixas dos autovalores em malha fechada para o *FK* encontram-se no semi-plano esquerdo mais afastadas do eixo imaginário que as faixas dos autovalores em malha fechada para o *LQR*, conforme pode ser vista na tabela A.1 do apêndice A. Também as sensibilidades dos autovalores para o *FK* foram duplicadas para garantir maior robustez dos autovetores. Estes cuidados na escolha das restrições ou critérios de projeto servem para assegurar uma estimação de estado mais rápida do que o controle no Projeto *LQG*. A Figura 4.3 ilustra um esquema para o controle *LQG* enfatizando esta seqüência: estimação e, em seguida, controle.

A alocação da autoestrutura foi realizado com o auxílio do algoritmo genético para selecionar as matrizes de covariância que satisfaz as restições da tabela 4.2. Para dez gerações, o *AG* obteve dez soluções, ou seja, encontrou dez matrizes de covariâncias  $\Xi$  da perturbação no estado e  $\Theta$  do ruído de medida. Estas matrizes produziram soluções bem próximas. Por esta razão, apresenta-se, a seguir, o resultado obtido para a terceira solução,

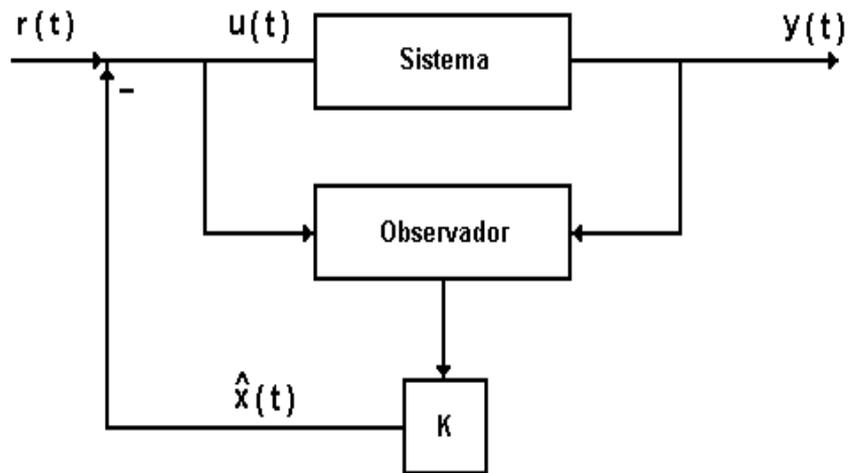


Figura 4.3: Projeto do regulador utilizando observador e realimentação de estados

$$\Xi_o = \begin{bmatrix} 0.0271 & 0.0077 & 0.0019 & 0.0016 & 0.0026 & 0.0020 \\ & 0.0270 & 0.0050 & 0.0074 & 0.0053 & 0.0057 \\ & & 0.0255 & 0.0061 & 0.0073 & 0.0046 \\ & & & 0.0230 & 0.0054 & 0.0084 \\ & & & & 0.0269 & 0.0070 \\ & & & & & 0.0255 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\Theta_o = \begin{bmatrix} 0.0309 & 0.0024 & 0.0009 & 0.0070 \\ & 0.0301 & 0.0033 & 0.0027 \\ & & 0.0306 & 0.0016 \\ & & & 0.0303 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Na Tabela 4.2 é apresentado os autovalores de malha fechada, as sensibilidades dos autovalores e o ganho do estimador, obtidos quando da aplicação das matrizes de covariâncias  $\Xi$  e  $\Theta$ , geradas pelo  $AG$  na solução  $LQG$ .

Tabela 4.2: Autovalores, sensibilidades e ganho do estimador para a solução *LQG*

No	Autovalores	Sensibilidades	Ganho do Estimador
1	-20.0000	0.0689	0.0022 0.0011 0.0028 0.0025
2	-25.0002	0.1213	0.0045 0.0082 0.0033 0.0051
3	-1.6407 + 1.6800i	0.1179	1.2452 -0.0767 0.3881 -0.2937
4	-1.6407 - 1.6800i	0.2350	-0.0143 0.3616 -0.3195 0.1551
5	-1.4277 + 0.3612i	0.0990	0.5273 -0.4254 1.4531 -0.6137
6	-1.4277 - 0.3612i	0.6045	-0.0886 0.1919 -0.4891 0.4201

Utilizando-se a melhor solução produzida pelo *AG* na geração das matrizes de ponderação *Q* do estado e *R* do controle, terceira solução, e a primeira solução produzida pelo *AG* na geração das matrizes de covariâncias,  $\Xi_o$  da perturbação no estado e  $\Theta_o$  do ruído de medida. Os resultados da Estimação do estados utilizando a teoria do Filtro Kalman, Figura 4.4, mostram que trajetórias dos estados de referência versus os estados estimados, percebe-se que, apesar da presença de ruídos, a ação reguladora é detectada em todos os estados.

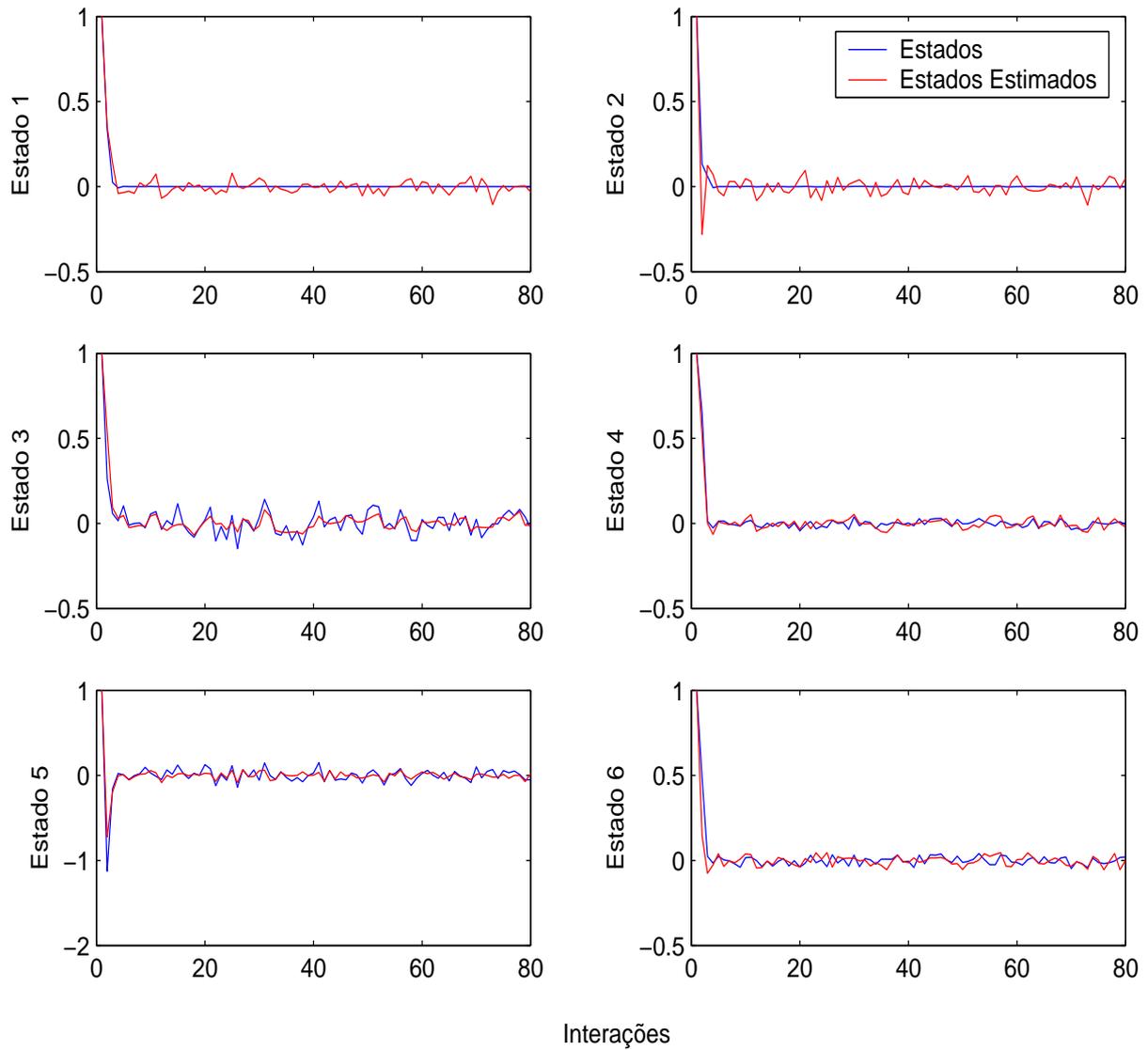


Figura 4.4: Trajetórias dos Estados da Planta versus seus estimados.

Os gráficos dos valores singulares, Figura 4.5, ilustram as alterações provocadas pela inserção do observador de estado  $LQG$  na malha de controle.

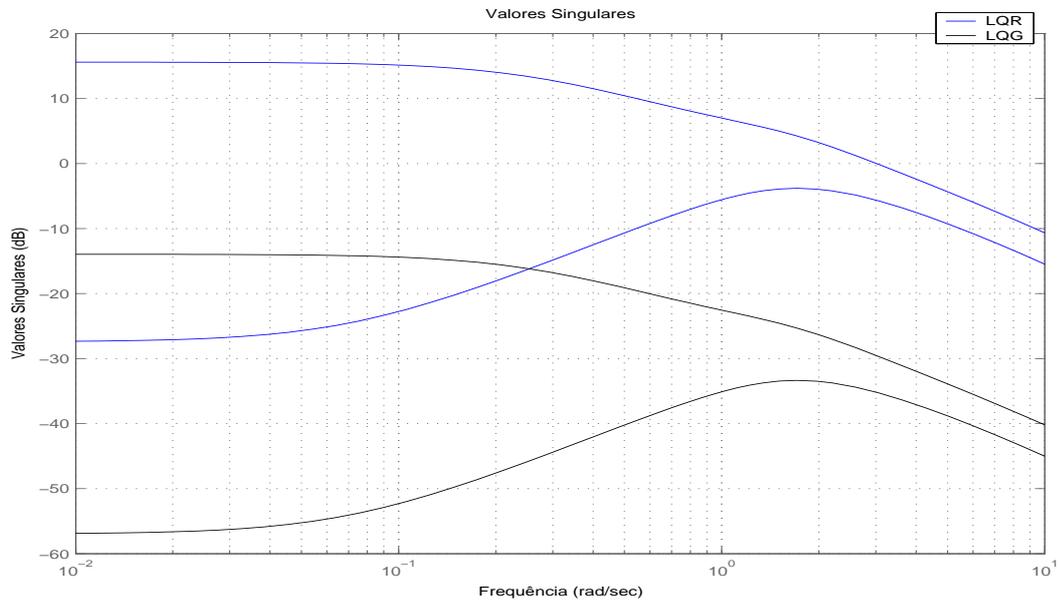


Figura 4.5: Valores Singulares do Sistema - Projetos LQR e LQG.

## 4.4 Conclusão

Neste Capítulo foi apresentado um método para o problema de  $AAE$  utilizando o Estimador de Estado Estocástico via  $FK$  e  $AG$ . Na Seção 4.1 foi apresentado o Controle  $LQG$ , destacando a estrutura deste Controle, considerando-o como um esquema prático para solucionar os problemas de controle, a partir de uma estimação que se fez com a ausência de sensores para medir as variáveis de estado.

Na Seção 4.1 foi apresentado o observador estocástico ótimo (*Filtro de Kalman*), utilizado no Projeto de Controle  $LQG$  para estimação das variáveis de estado. Também observamos a dualidade existente entre o  $LQR$  e o  $FK$  para mostrar que pode-se restringir a Auto-estrutura do estimador estocástico.

Por fim, na Seção 5 apresentou-se o desenvolvimento de um Algoritmo, que teve por finalidade a determinação das matrizes de covariâncias  $\Xi$  da perturbação no estado e  $\Theta$  do ruído de medida, de forma a obter um estimador especificado. Contudo, podemos observar que o principal problema do Controle  $LQG$  foi as perdas das propriedades de robustez do  $LQR$  com a inclusão do  $FK$ .

## CAPÍTULO 5

# Metodologia $LQG/LTR$

---

Neste Capítulo a metodologia de  $AAE$  em sistemas dinâmicos multivariáveis por meio do Projeto  $LQR$  e Algoritmo Genético, apresentada no Capítulo 3, e a metodologia de  $AAE$  de Estimador de Estado, proposta no Capítulo 4, via  $FK$  e Algoritmo Genético, são utilizadas para solucionar o problema de  $AAE$ , agora via Projeto de Controle Robusto  $LQG/LTR$  e Algoritmo Genético.

Primeiramente, secção 5.1, aborda-se um histórico e uma descrição sobre o procedimento de Controle ótimo do tipo  $LQG/LTR$ . Na secção 5.2, apresentam-se os ganhos de malha aberta utilizados no procedimento de recuperação das propriedades de robustez do  $LQR$ , enquanto na secção 5.3, mostra-se a Recuperação do Ganho de Malha de Realimentação na Entrada, em que o sistema completo, com observador, pode atingir a robustez do  $LQR$ , bastando fixar o ganho do Controlador e escolher adequadamente as matrizes de covariâncias  $\Xi$  da perturbação no processo e  $\Theta$  do ruído de medida. Por fim, na secção 5.4, mostram-se o desenvolvimento e os resultados da execução simulações da metodologia proposta para a Recuperação da Malha de Transferência.

### 5.1 Controle $LQG/LTR$

O Regulador Linear Quadrático e o Filtro de Kalman podem ser combinados para projetar um regulador dinâmico, o  $LQG$ , como visto na Seção 4.1. Sabe-se que o  $LQR$  possui ótimas propriedades de robustez (Lewis and Syrmos 1995), ou seja, margem de ganho infinita e margem de fase de 60 graus, desde que os

métodos para obtenção do controlador  $K$  e do estimador  $L$  sejam duais. O Projeto do Filtro de Kalman pode ser visto como o de um sistema com realimentação. Pode-se concluir que o  $FK$  também possui ótimas propriedades de robustez.

Uma vez que tanto o Regulador Linear Quadrático como o Filtro de Kalman exibem boa robustez, era esperado que o Controlador  $LQG$  resultante da interconexão entre eles também apresentasse as mesmas propriedades. Entretanto, a inclusão do Filtro de Kalman pode resultar em degradação das propriedades do  $LQR$ , de forma que no Projeto  $LQG$  as propriedades de robustez não são garantidas (Doyle and Stein 1979). A metodologia de Projeto  $LTR$ , por meio da qual estas propriedades de robustez podem ser recuperadas é formada de dois passos: no primeiro, define-se a chamada *Malha Objetivo* (*Target Feedback Loop*) e, no segundo, através de um procedimento assintótico, recuperam-se as características de resposta em frequência dessa malha ajustando um determinado parâmetro (Doyle and Stein 1981) (Cruz 1996) (Kwakernaak 1969) (Kwakernaak and Sivan 1972).

A Recuperação do Ganho de Malha de Realimentação na Entrada considera constante o ganho do  $LQR$  e, em seguida, ajusta o ganho do Filtro de Kalman de tal forma que as propriedades do  $LQR$  sejam recuperadas. É importante destacar que a fixação do ganho do controlador, assim como das matrizes de covariâncias  $\Xi_o$  da perturbação no estado e  $\Theta_o$  do ruído de medida iniciais, os quais serão utilizados para recuperação das propriedades de robustez, são produzidos pelos  $AG$ 's.

## 5.2 Ganhos de Malha Aberta

Nesta Seção apresenta-se o ganho de malha aberta do  $LQR$ ,  $L_{LQR}(s)$ , e os ganhos de malha aberta do sistema completo, com observador, na entrada,  $L_r(s)$ , e na saída,  $L_r^o(s)$ , os quais serão utilizados na metodologia de recuperação das propriedades de robustez. Mostra-se que o objetivo principal é fazer o ganho de malha aberta do sistema com observador tender ao ganho de malha aberta do  $LQR$  que é robusto.

### 5.2.1 Ganho de Malha Aberta do *LQR*

Na figura 5.1 Considere-se apenas o problema do regulador sem estimação de estado, como ilustrado. De acordo com a Figura 5.1, admitindo  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ , a função de transferência da planta é

$$G(s) = \Phi(s)B \quad (5.1)$$

sendo

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (5.2)$$

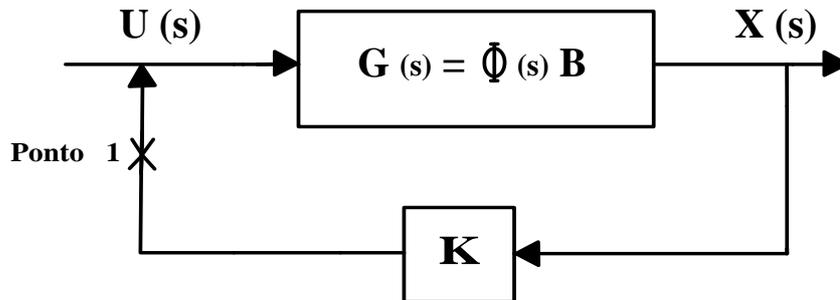


Figura 5.1: Esquema para realimentação de estados.

Abrindo-se a malha na entrada (Ponto 1, Figura 5.1), define-se o Ganho de Malha Aberta do *LQR* como sendo

$$L_{LQR}(s) = K\Phi B \quad (\text{Ganho de Malha Aberta do } LQR). \quad (5.3)$$

### 5.2.2 Ganhos de Malha Aberta na Entrada e Saída

O objetivo do *LQG/LTR* é fazer o sistema completo (com observador) tender ao *LQR*, que é robusto. Dessa forma, considera-se a planta dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + G\xi(t), \quad (5.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + \nu(t). \quad (5.5)$$

Sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\xi(t)$  um ruído branco e gaussiano no processo,  $\nu(t)$  um ruído branco e gaussiano de medida e considerando-se ainda o sistema com o observador (Filtro de Kalman) da Figura 5.2, a variação do estado estimado será dada por,

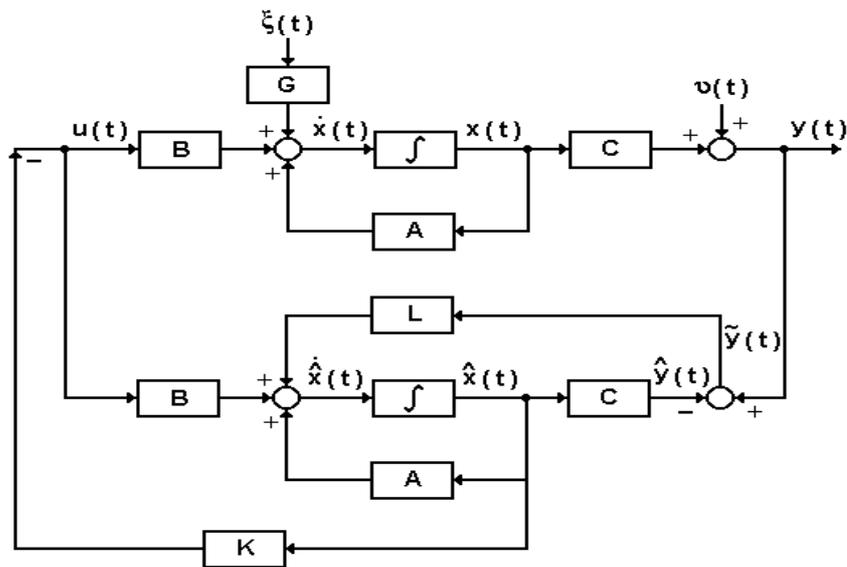


Figura 5.2: Diagrama de blocos do controlador com o Filtro de Kalman

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\tilde{y}(t), \quad (5.6)$$

sendo

$$\tilde{y}(t) = y(t) - C\hat{x}(t). \quad (5.7)$$

Substituindo-se a Equação (5.7) em (5.6)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace na Equação (5.8):

$$\begin{aligned} s\hat{X}(s) &= (A - LC)\hat{X}(s) + BU(s) + LY(s), \\ \hat{X}(s) &= (sI - A + LC)^{-1}[BU(s) + LY(s)]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A lei de controle,

$$U(s) = -K\hat{X}(s). \quad (5.10)$$

Substituindo-se a Equação (5.9) em (5.10)

$$U(s) = -K(sI - A + LC)^{-1}[BU(s) + LY(s)]. \quad (5.11)$$

Definindo-se

$$H_u(s) = -K(sI - A + LC)^{-1}B, \quad (5.12)$$

e

$$H_y(s) = -K(sI - A + LC)^{-1}L. \quad (5.13)$$

A matriz do estimador é definida como

$$\Phi_o(s) = (sI - A + LC)^{-1}. \quad (5.14)$$

Logo

$$H_u(s) = K\Phi_o B, \quad (5.15)$$

e

$$H_y(s) = K\Phi_o L. \quad (5.16)$$

Assim, substituindo-se as Equações (5.15) e (5.16) na Equação (5.11),

$$U(s) = F(s)Y(s). \quad (5.17)$$

sendo

$$F(s) = -(I + H_u)^{-1}H_y, \quad (5.18)$$

substituindo as Equações (5.15) e (5.16) na equação (5.18),

$$F(s) = \{I + K[sI - (A - LC)]^{-1}B\}^{-1}K\Phi_oL. \quad (5.19)$$

Usando-se o lema da inversa, a Equação (5.17) pode ser escrita da seguinte maneira:  $(A_1 + B_1C_1D_1)^{-1} = A_1^{-1} - A_1^{-1}B_1(D_1A_1^{-1}B_1 + C_1^{-1})^{-1}D_1A_1^{-1}$ . Assim, fazendo:  $A_1 = I$ ,  $B_1 = K$ ,  $C_1 = (sI - A + LC)^{-1}$  e  $D_1 = B$ , tem-se

$$F(s) = K\Phi_rL. \quad (5.20)$$

sendo

$$\Phi_r = [sI - (A - BK - LC)]^{-1}. \quad (5.21)$$

Considerando o diagrama de blocos para o sistema completo, com observador, Figura 5.3:

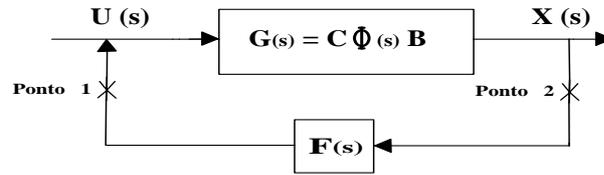


Figura 5.3: Diagrama de Blocos Reduzido do Sistema regulador-observador.

Abrindo-se a malha na entrada da Figura 5.3 (Ponto 1), o ganho do regulador referido à entrada,

$$L_r(s) = F(s)G(s) = K\Phi_rLC\Phi B \quad (\text{Ganho de Malha Aberta na Entrada}). \quad (5.22)$$

Da mesma forma, abrindo-se a malha na saída da Figura 5.3 (Ponto 2), o ganho do regulador referido à saída será

$$L_r^o(s) = G(s)F(s) = C\Phi BK\Phi_rL \quad (\text{Ganho de Malha Aberta na Saída}). \quad (5.23)$$

### 5.3 Recuperação LTR na Entrada

Neste processo de recuperação, o ganho  $K$  do controlador é fixado e projeta-se o ganho  $L$  do Filtro de Kalman pela variação e escolha adequada dos parâmetros para atingir-se a robustez do *LQR*. Para o *LTR* na entrada, o que se deseja é que

$$L_r(s) \rightarrow L_{LQR}(s). \quad (5.24)$$

Note-se que  $L_r(s)$  não pode ser feito exatamente igual a  $L_{LQR}(s)$ . Entretanto, se a função de transferência do sistema for quadrada e de fase mínima, então  $K$  poderá ser determinado de modo que  $L_r(s)$  torne-se arbitrariamente próximo de  $L_{LQR}(s)$ .

Considerando-se o modelo dinâmico estocástico em variáveis de estado dado pelas Equações (5.4) e (5.5) e considerando que  $\xi(t)$  e  $\nu(t)$  são ruídos brancos, gaussianos e independentes, com média zero e covariâncias dadas por

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) & \nu(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

pelo que já foi mostrado na Seção 4.1, no *LQG*, a solução da Equação Algébrica de Riccati,  $\Sigma$ , Equação (6.21), fornece o ganho  $L$  do Filtro de Kalman, Equação (6.22)

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + G\Xi G^T - \Sigma C^T \Theta^{-1} C \Sigma, \quad (5.26)$$

$$L = \Sigma C^T \Theta^{-1}. \quad (5.27)$$

A recuperação da malha é realizada por meio das variações nas matrizes de covariâncias, fazendo-se as escolhas convenientes para as covariâncias

$$\Xi = v^2 \Xi_o + B B^T, \quad (5.28)$$

$$\Theta = v^2 \Theta_o, \quad (5.29)$$

e admitindo-se

$$G = I. \quad (5.30)$$

Substituindo-se as Equações (5.28)-(5.30), tem-se para as Equações (5.31) e (5.32):

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + (v^2\Xi_o + BB^T) - \Sigma C^T(v^2\Theta_o)^{-1}C\Sigma, \quad (5.31)$$

$$L = \Sigma C^T(v^2\Theta_o)^{-1}. \quad (5.32)$$

Detalhes da manipulação algébrica que mostram a recuperação da malha são apresentados no Apêndice C,

$$L_r(s) \rightarrow K\Phi B \quad \text{ou} \quad L_r(s) \rightarrow L_{LQR}(s). \quad (5.33)$$

Da Equação (5.33), conclui-se que a recuperação da malha do *LQR* é realizada por meio da seleção das matrizes de covariâncias e do parâmetro  $v$ .

## 5.4 Ajuste para o Controlador *LQG/LTR*

Após a dedução do procedimento de recuperação do ganho de malha de realimentação (*LTR*) na entrada, secção 5.3, percebe-se que escolhendo-se devidamente as matrizes de covariâncias e variando-se o parâmetro  $v$  pode-se obter a robustez desejada, ou seja, pode-se aproximar o *LQG* do *LQR* que é robusto.

O primeiro passo para o procedimento para recuperação da malha do *LQR* é a determinação dos ganhos  $K$  do controlador que satisfazem as restrições de projeto. O ganho, fixado no procedimento, é determinado por meio da metodologia apresentada no Capítulo 3, *Alocação de Auto-estrutura via LQR e Algoritmo Genético*. Este ganho foi escolhido segundo uma análise de desempenho e de estabilidade robustos, de acordo com a análise dos valores singulares apresentada na secção 3.4.1 do Capítulo 3. A Figura 3.6 do referido capítulo mostra os gráficos dos valores singulares para as três soluções do *AG*.

O próximo passo para aplicação da metodologia proposta é fazer o sistema completo, com observador, tender ao *LQR*. Para isso, escolhe-se adequadamente as matrizes de covariâncias  $\Xi = v^2\Xi_o + BB^T$  e  $\Theta = v^2\Theta_o$ , conforme mostrado na secção 5.3. Variando-se o parâmetro  $v$ , os valores singulares correspondentes as variações são apresentados na Figura 5.4 de acordo com os valores das matrizes

de covariâncias apresentados na Tabela 5.1. Verificou-se que quando  $v \rightarrow 0$  as propriedades de robustez perdidas com a estimação são recuperadas pelos ajustes do ganho do observador.

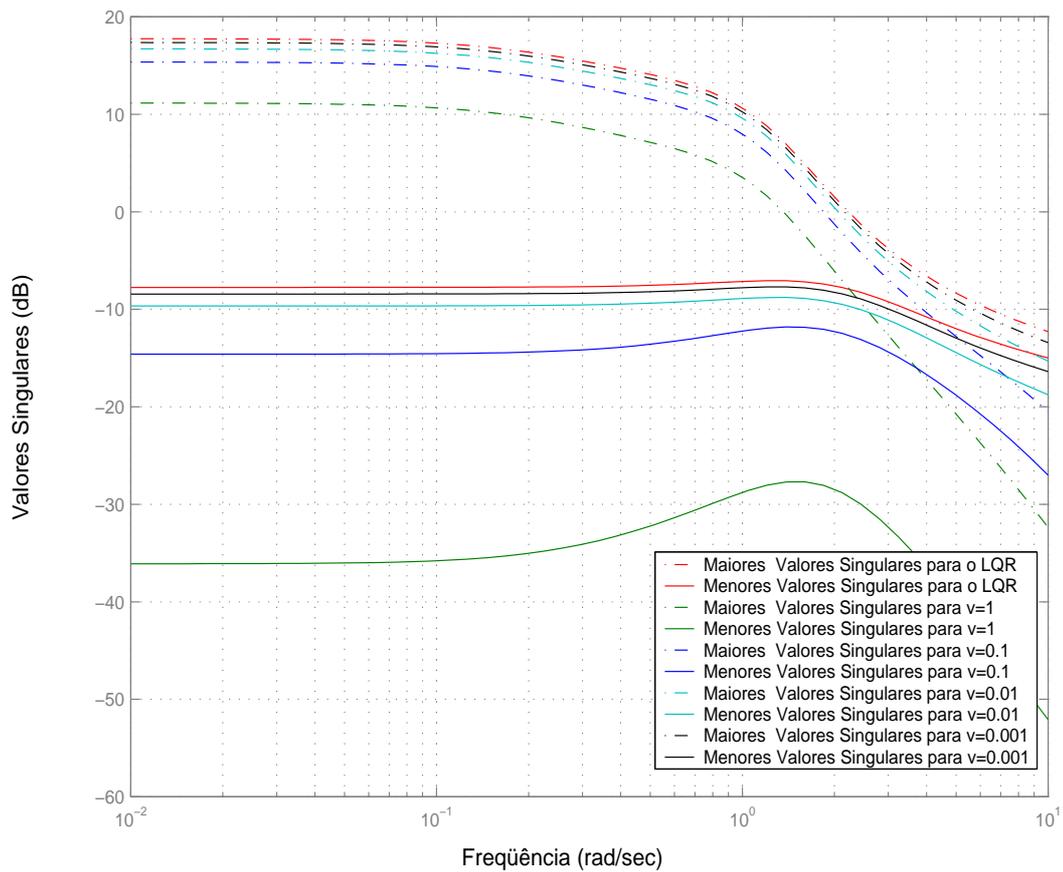


Figura 5.4: Recuperação pela Entrada das propriedades de robustez.

A Tabela 5.1 também traz o ganho do controlador que foi fixado no projeto *LQG/LTR* e as matrizes de covariâncias obtidas quando o parâmetro de ajuste  $v$  foi variado, até obter-se a recuperação.

Tabela 5.1: Ganho  $K$  do Controlador *LQR* fixado para o Projeto *LQG/LTR*, parâmetros de ajuste  $v$  e matrizes de covariâncias para a recuperação da malha de transferência

Ganho do Controlador 3	Parâmetros de Ajuste $v$	Matrizes de Covariâncias	
		$\Xi$	$\Theta$
0.1741 -0.0044 0.0080 -1.1591 0.0561 1.5141 0.0124 0.2060 -0.5404 -0.7791 -1.3067 2.7763	$v_1 = 1$	800 0 0 0 0 0 1250 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 1 0 0 1 0 1
	$v_2 = 0.1$	404.00 0 0 0 0 0 631.25 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0.01 0 0 0 0.01 0 0 0.01 0 0.01
	$v_3 = 0.01$	400.0400 0 0 0 0 0 625.0625 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$(1.0e^{-003})^*$ 0.1 0 0 0 0.1 0 0 0.1 0 0.1
	$v_4 = 0.001$	400.0004 0 0 0 0 0 625.0006 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$(1.0e^{-005})^*$ 0.1 0 0 0 0.1 0 0 0.1 0 0.1

## 5.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado uma metodologia para Alocação de Auto-estrutura, com a utilização do estimador *LQG*.

Percebeu-se que unindo a solução do problema de estimação e as restrições de Auto-estrutura, da mesma forma como feito para o Regulador Linear Quadrático, podemos transformar o problema de Alocação de Auto-estrutura num problema de otimização, permitindo a determinação de um estimador de estado, com a utilização de técnicas de busca aleatória.

A análise da Auto-estrutura foi importante, pois nos mostrou claramente a interligação dos autovalores, autovetores, condições iniciais e entrada na composição da resposta temporal do sistema.

Finalmente, os resultados alcançados neste trabalho foram satisfatórios. Recuperamos as propriedades de robustez perdidas pela estimação das variáveis de estado, utilizando a técnica *LTR*. Na Alocação de Auto-estrutura do problema de controle e do problema de estimação de estados, utilizamos o *LQR* e o Filtro de Kalman, como metodologias de projeto para a alocação.

# Algoritmo Genético Hierárquico - LQG/LTR

---

## 6.1 Introdução

O projeto do Regulador Linear Quadrático ( $LQR$ ) e o Filtro de *Kalman* ( $FK$ ) formam o Controle Linear Quadrático Gaussiano,  $LQG$ , contribuindo para viabilizar as implementações em tempo real de compensadores ótimos. A força do  $LQG$  consiste na disponibilização de todos os estados para a realimentação ótima. A desvantagem do  $LQG$ , as propriedades de robustez do  $LQR$  são perdidas pela inserção do observador de estado. Este problema é contornado com a metodologia de projeto  $LQG/LTR$  ou  $LTR$  que recupera a robustez garantida do  $LQR$ .

Sob o ponto de vista do objetivo de controle, estas metodologias podem ser utilizadas para alocar a Auto-estrutura em Sistemas *MIMO*. Este ponto de vista considera a fusão das metodologias  $LQR$  e  $LQG$  do controle moderno, e da metodologia  $LTR$  de controle robusto, (Cruz 1996). Resolvida toda problemática, ainda resta o gargalo para determinar um controlador que satisfaz as restrições de projeto.

As metodologias  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$  promovem robustez garantida, realimentação dos estados e recuperação de robustez, mas não mostram como sintonizar de forma eficiente os ganhos dos compensadores. A proposta de um Modelo Hierárquico de Algoritmos Genéticos para o projeto de Controladores  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$  com modelos de otimização combinatória que é resolvido por computação evolutiva

para ajustes dos ganhos das malhas. Na referência (Fonseca Neto 2000), o problema de *AAE* é modelado em estruturas de otimização para selecionar as matrizes  $Q$  e  $R$ , este modelo foi estendido por (Ferreira 2003) para a alocação de auto estrutura no projeto *LQG*. O modelo Hierárquico atua no sentido de garantir as propriedades de robustez dos projetos *LQR* e *LQG* e para garantir o melhor desempenho robusto dos sistemas de controle baseado nestas metodologias.

Além de apresentar o Modelo Hierárquico de Algoritmos para recuperação da malha, apresenta-se o modelo de um algoritmo genético para Recuperação de malha utilizando metodologia de Projeto *LTR* para recuperar as propriedades de robustez do *LQR*. Esta metodologia, por meio de um procedimento assintótico, recupera as características de resposta em frequência dessa malha ajustando um determinado parâmetro, normalmente por tentativa e erro. Para contornar este problema, propõe-se um ajuste inteligente para as matrizes de covariância  $\Xi$  e  $\Theta$  para Recuperação do Ganho da Malha na Entrada ou por meio de variações nas ponderações  $Q$  e  $R$  do *LQR* para Recuperação na Saída.

Este capítulo está organizado em seções e um apêndice para apresentar o desenvolvimento do projeto de controladores *LQR*, *LQG* e *LQG/LTR* utilizando uma hierarquia de modelos baseados em otimização combinatória e algoritmos genéticos. No *Modelo Hierárquico para Sintonia LQR, LQG e LTR*, seção 6.2, apresentam-se os modelos de busca que são utilizados para sintonizar os ganhos das malhas *LQR*, *LQG* e *LTR*. Em todos os modelos de sintonia mostra-se que a hierarquia coordena a modelagem inteligente para o ajuste de ganho, atuando em uma segunda camada de otimização, diferente da otimização de controle ótimo e robusto. Na seção 6.3 apresenta-se o Projeto de Controle **LQG/LTR** que tem por objetivo mostrar a necessidade do desenvolvimento de um terceiro algoritmo genético para concretizar a implementação do modelo hierárquico. Os projetos *LQR* e *LQG* são desenvolvidos utilizando algoritmos genéticos. O projeto **LQG/LTR** com recuperação na entrada é implementado por tentativa e erro e suas principais características são amplamente analisadas e discutidas. No

Modelo do **AG-LQG/LTR**, seção 6.4, apresenta-se o modelo genético-artificial para o ajuste do ganho de recuperação da malha de entrada, discute-se o modelo cromossômico que é uma representação dos indivíduos de uma população em termos de genética de *Mendel*, métodos para geração da população inicial, a estrutura

de *fitness*, métodos de seleção, operações cromossômicas de duplicação, *crossover* e mutação. Na seção 6.5 apresenta-se a conclusão e comentários. No Apêndice A apresentam-se as matrizes  $Q$  e  $R$  para justificar e verificar o desempenho da metodologia  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$  para o projeto de controladores.

## 6.2 Modelo Hierárquico para Sintonia

O Modelo Hierárquico para Sintonia atua na Recuperação da Malha em Controladores  $LQG/LTR$ . Estes modelos estão fundamentados em otimização combinatória para sintonizar as malhas dos Sistemas de Controle  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$ . Estes modelos são dedicados a seleção de pares de matrizes  $(Q, R)$  e  $(\Xi, \Theta)$  dos índices de desempenho dos projetos  $LQR$  e  $LQG$ , respectivamente, e a seleção das matrizes de ajuste para o ganho de recuperação de malha do projeto  $LTR$ . As estruturas de otimização combinatória permitem o desenvolvimento de métodos baseados em algoritmos genéticos para realizar busca destas matrizes nas instâncias de projetos  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$ .

Apresenta-se o Modelo Hierárquico para Sintonia  $LQR$ ,  $LQG$  e  $LTR$  em três itens que estão organizados de forma padronizada, no sentido que mostram os Modelos para Sintonia do ganho, o Problema e um método para solução. Em *Modelo de Sintonia do Ganho  $LQR$* , subseção 6.2.1, apresenta-se o Modelo de Sintonia do Ganho  $LQR$ , salienta-se a Busca das matrizes de ponderação  $LQR_{QR}$  por meio de técnicas de otimização combinatória. Na subseção 6.2.2 apresenta-se um Modelo para Sintonia do Ganho  $LQG$ . Em Modelo de Sintonia do Ganho  $LTR$ , subseção 6.2.3, apresentam-se os modelos para recuperação da malha do  $LQR$  pela entrada e pela saída.

### 6.2.1 Modelo de Sintonia do Ganho $LQR$

O Modelo para Sintonia dos Ganho  $LQR$  enfoca a seleção das matrizes de ponderação  $(Q, R)$ . O problema é modelado como um mapeamento do espaço de matrizes  $((Q, R), \mathbb{R})$  em um controlador  $(K_{Q,R}, \mathbb{R})$  que aloca uma determinada autoestrutura. Um modelo de otimização combinatória é construído por Fonseca, (Fonseca Neto 2000), para resolver o problema de Alocação de Autoestruturas em Sistemas Dinâmicos Multivariáveis. O método proposto por Fonseca Neto é uma

alternativa para alocar a Auto-estrutura através do  $LQR$ , superando as buscas por *tentativa e erro* do projetista para determinar as matrizes de ponderação.

### Modelo de Busca $LQR_{QR}$

O problema  $LQR$  é formulado para alocar a Auto-estrutura em Sistemas Dinâmicos Multivariáveis. Esta formulação permite a utilização de técnicas de computação evolutiva para determinar o ganho ótimo  $K = R^{-1}B^T S_{LQR}(Q, R)$  do controlador que realize a alocação. A estrutura de otimização combinatória para busca das matrizes de ponderação é,

$$\min_{Q,R} \sum_{i=1}^n p_i s_i(Q, R) \quad (6.1)$$

s.a

$$\begin{aligned} s_i(Q, R) &\leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ \lambda_{ei} &\leq \lambda_{ci}(Q, R) \leq \lambda_{di}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

em que  $p_i$  a  $i$ -ésima ponderação das sensibilidades e  $s_i = S_i/\epsilon_i$  a  $i$ -ésima sensibilidade normalizada em relação à  $i$ -ésima especificação de projeto:  $\epsilon_i > 0$ . O índice de desempenho menor ou igual a  $n$ , significa que a maior parte das sensibilidades foram satisfeitas, servindo como indicador global de convergência do processo de busca. Formulações alternativas são apresentadas por Liu (Liu and Patton 1998) e Bottura (Bottura and Fonseca Neto 1999). Cada par  $(\lambda_i, v_i)$  representa um objetivo para o sistema com  $n$ -estados.

### O Problema LQR

O Problema  $LQR$  é formulado com uma estrutura de otimização com objetivo de determinar uma lei de controle  $u(t) = -K_{LQR}x(t)$ . Esta lei minimiza um índice de desempenho quadrático e tem como restrição a equação de estado linear invariante no tempo,

$$\begin{aligned}
J(t_o) &= \frac{1}{2}x^T(T)P(T)x(T) + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_o}^T [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt
\end{aligned} \tag{6.2}$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6.3}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ , o par  $(A, B)$  é controlável, o par  $(A, C)$  é observável,  $P(T) \geq 0, Q(T) \geq 0$  e  $R > 0$ . Todas simétricas.  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Matrizes definidas e semi-definidas positivas, respectivamente.

### A Solução do LQR

As matrizes de ponderação  $(Q, R)$ , determinada pelo Modelo de Busca  $LQR_{QR}$ , são parâmetros da equação de *Riccati*,  $0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, t \leq T$ . A solução  $P$  da Equação Algébrica de **Riccati** fornece os ganhos do controlador,  $K_{LQR} = R^{-1}B^T P$ , para calcular  $u_{LQR} = -K_{LQR}x$ .

### 6.2.2 Modelo de Sintonia do Ganho $LQG$

O Modelo para Sintonia dos Ganho  $LQG$  enfoca a seleção das matrizes de covariâncias  $(\Xi, \Theta)$ . Um método para o problema de *AAE* de Estimador de Estado Estocástico via *FK* e *AG* estão publicados em (Ferreira 2003), o projeto do filtro de *Kalman* leva em consideração a alocação da Auto-estrutura no problema de estimação de estado estocástico. Esta formulação permite a utilização de técnicas de Computação Evolutiva para determinar um observador estocástico.

#### Modelo de Busca $LQG_{\Xi\Theta}$

Utiliza-se as restrições de *AE* (autovalores e autovetores) para formular o problema de estimação de estado estocástica, com o objetivo de encontrar  $L = \Sigma_{\Xi, \Theta} C^T \Theta^{-1}$  do *FK*, de forma a satisfazer estas restrições. O problema é modelado como um problema de otimização combinatória, permitindo a determinação de um estimador  $L_{\Xi, \Theta}$  por meio de Algoritmo genético a alcação de autoestrutura,

$$\min_{\Xi, \Theta} \sum_{i=1}^n s_i(\Xi, \Theta) \quad (6.4)$$

s.a

$$\begin{aligned} s_i(\Xi, \Theta) &\leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ \lambda_{ei} &\leq \lambda_{ci}(\Xi, \Theta) \leq \lambda_{di}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

sendo  $s_i = S_i/\epsilon_i$  é a  $i$ -ésima sensibilidade normalizada em relação à  $i$ -ésima especificação de projeto:  $\epsilon_i > 0$ . Em que  $\Theta = \Theta^T > 0$  é a matriz de covariância do ruído de medida ou densidade espectral do ruído de medida, que indica a potência do ruído. O par  $(A, C)$  é suposto observável.

### O Problema LQG

No projeto *Linear Quadrático Gaussiano*, um observador é adicionado ao Projeto *LQR* para estimação do estado por meio da saída medida. A formulação do problema de controle ótimo estocástico é representado por uma estrutura de otimização,

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x^T \Theta(t) x + u^T \Xi(t) u) dt \right] \quad (6.5)$$

s.a

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + G\xi(t) \quad (6.6)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ , o par  $A, B$  controlável, o par  $(A, C)$  observável,  $\Theta(t) \geq 0$  e  $\Xi(t) > 0$ , são todas simétricas, e  $\Xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , são matrizes definidas e semi-definidas positivas, respectivamente.

### A Solução do LQG

As matrizes de covariância  $(\Xi, \Theta)$ , determinada pelo Modelo de Busca  $LQG_{\Xi, \Theta}$ , são parâmetros da equação de *Riccati*,  $\Sigma + \Sigma A^T + G \Xi G^T - \Sigma C^T \Theta^{-1} C \Sigma = 0$ ,  $t \leq T$ . A solução  $\Sigma$  da Equação Algébrica de **Riccati** fornece o ganho do observador,  $L = \Sigma C^T \Theta^{-1}$ , que é utilizado para calcular uma estimativa  $\hat{x}(t)$  do estado  $x(t)$  a partir da observação da saída  $\{y(\tau), \tau \leq t\}$ .

### 6.2.3 Modelo de Sintonia do Ganho *LTR*

O problema *LQG/LTR* com recuperação de malha de realimentação é formulado como um problema de otimização que pode ser aplicado tanto para as recuperações das malhas de saída ou de entrada. Os objetivos são: a) encontrar as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  do problema *LQR*, determinando o controlador  $K_{LQR/LTR}$  com recuperação pela saída, b) encontrar as matrizes de covariância do problema *LQG*, determinando o ganho do observador  $L_{LQG/LTR}$  com recuperação pela entrada.

A utilização de procedimentos por tentativa e erro para o projeto (*LTR*) justifica o desenvolvimento de um algoritmo que fornece o ganho da recuperação de malha. O ganho do controlador  $K$ , fixado no procedimento, é determinado por meio da metodologia desenvolvida por (Fonseca Neto 2000) e (Fonseca Neto 2003). O procedimento para recuperação do ganho de malha de realimentação (*LTR*) na entrada, (Ferreira e Fonseca *et al.* 2003), mostra devidamente a escolha das matrizes de covariâncias. Esta escolha é função de variações de um parâmetro  $v_i$  que aproxima a malha de controle *LTR* para a malha de controle *LQR*. Porém, a metodologia aplicada faz uso do método de tentativa e erro para determinação do parâmetro  $v_i$ .

#### Modelo de Busca *LTR*

A seleção das matrizes  $(\Xi, \Theta)$  ou  $(Q, R)$  são as duas alternativas para escolher as matrizes de covariâncias ou ponderações, respectivamente, para recuperação da malha do *LQR*.

Na recuperação pela saída, a busca é direcionada para  $(Q, R)$ , as variações nas matrizes de ponderação tendo como referência  $(Q_0, R_0)$  e a lei para suas variações  $(Q_i = v_i^2 Q_0 + CC^T, R = v_i^2 R_0)$  em função de um escalar  $v_i$ . Na recuperação pela entrada, a busca é direcionada para  $(\Xi, \Theta)$ , as variações nas matrizes de covariância tem como referência  $(\Xi_o, \Theta_o)$  e a lei que estabelece as suas variações  $(\Xi_i = v_i^2 \Xi_o + BB^T, \Theta = v_i^2 \Theta_o)$  em função de um escalar  $v_i$ .

O problema é modelado como um problema de otimização combinatória, permitindo a determinação dos ganhos do controlador  $K = R^{-1} B^T P_{LQR}(Q, R)$  ou do ganho do observador  $L_{\Xi, \Theta}$  que recuperem a malha  $L_{LQR}$  por meio de  $L_{LQG/LTR}$  como representado na equação (6.7),

$$\min_L \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sigma_i^{L_{LQR}-M} - \sigma_i^{L_{LTR}-M} \right) + \left( \sigma_i^{L_{LQR}-M} - \sigma_i^{L_{LTR}-M} \right) \right] \quad (6.7)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \sigma_{iesq}^{max-M} &\leq \sigma_i^{L_{LTR}-M} \leq \sigma_{idir}^{max-M} \\ \sigma_{iesq}^{min-m} &\leq \sigma_i^{L_{LTR}-m} \leq \sigma_{idir}^{max-m} \\ \lambda_{iesq} &\leq \lambda_i c \leq \lambda_{idir} \\ s_i &\leq \epsilon \end{aligned} \quad (6.8)$$

sendo  $L_{LQR}$  a malha do controle  $LQR$ ,  $L_{LQG/LTR}$  a malha recuperada pelo projeto  $LQG/LTR$ . Os maiores valores singulares e seus limites à direita e a esquerda são  $\sigma_i^{L_{LTR}-M}$ ,  $\sigma_{esq}^{max-M}$  e  $\sigma_{idir}^{max-M}$ , respectivamente. Os menores valores singulares e seus limites à direita e a esquerda são  $\sigma_i^{L_{LTR}-m}$ ,  $\sigma_{esq}^{max-m}$  e  $\sigma_{idir}^{max-m}$ , respectivamente. As restrições de projeto são as alocações de autoestrutura.

A estratégia de recuperação da malha do controle  $LQR$  por meio do projeto  $LQG/LTR$  ocorre pelo ajuste do ganho  $K_{QR}$  do controlador  $LQR$  ou pelo ajuste do ganho  $L_{\Xi\Theta}$  do observador de estado. Na Figura 5.3 do Capítulo 5 apresenta-se o diagrama de blocos para o sistema, controle e observador para fins de projeto de recuperação da malha de saída.

### O Problema da Recuperação LTR

A recuperação da malha do  $LQR$  é conduzida no domínio da frequência. O modelo Planta, Controle e Observador do projeto  $LQG$  é reduzido ao diagrama planta  $G(s)$  e compensador  $F$  para fins de projeto da malha de recuperação. O projeto desta tem por base os pontos de abertura, o ponto 1 fornece o ganho de malha aberta na entrada e o ponto 2 o ganho na saída, Figura 5.3 do Capítulo 5.

A redução do diagrama Planta, Controle e Observador estabelece a seguintes relação entre os sinais de saída e entrada com os parâmetros do modelo da planta do sistema de controle. O sinal de entrada,  $U(s) = -H_u(s)U(s) - H_y(s)Y(s)$ , sendo  $H_u(s) = -K(sI - A + LC)^{-1}B = K\Phi_o B$  e  $H_y(s) = -K(sI - A + LC)^{-1}L$

$= K\Phi_o L$ ,  $\Phi_o(s) = (sI - A + LC)^{-1}$ . A função de retorno de  $Y$  para  $U$ ,  $\frac{U(s)}{Y(s)} = F(s) = K\Phi_r L$ , sendo  $\Phi_r = [sI - (A - BK - LC)]^{-1}$ .

### O Problema LTR - Recuperação na entrada

Abrindo o modelo do sistema no Ponto 1 obtém-se o *Ganho de Malha Aberta na Entrada*,  $L_r^e(s) = F(s)G(s) = K\Phi_r LC\Phi B$ . O problema é formulado para determinar o ganho  $L_{\Xi\Theta}$  do observador que recupere a malha do  $L_{LQR}$ , ou seja,

$$\min_{L_{\Xi\Theta}} L_{LQR} - K\Phi_r LC\Phi B \quad (6.9)$$

sujeito a

$$|L| \leq \varepsilon \quad (6.10)$$

$$\lambda_{esq} \leq \lambda_c \leq \lambda_{dir}$$

$$s_i \leq \epsilon$$

$$(6.11)$$

As  $|L|$  restrições do problema são operacionais, limitam-se aos ajustes do ganho  $L$  do observador ou controlador.

### A Solução LTR - Recuperação na entrada

As matrizes de covariância  $(\Xi, \Theta)$ , determinada pelo Modelo de Busca  $LTR_{\Xi\Theta}$ , são parâmetros da equação de *Riccati*,  $\Sigma + \Sigma A^T + G(v^2 \Xi_o + BB^T)G^T - \Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1} C \Sigma = 0$ ,  $t \leq T$ . A solução  $\Sigma$  da Equação Algébrica de **Riccati** fornece os ganho do observador,  $L = \Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1}$ .

### O Problema LTR - Recuperação na Saída

Abrindo o modelo do sistema no Ponto 2 obtém-se o *Ganho de Malha Aberta na Saída*,  $L_r^o(s) = G(s)F(s) = C\Phi BK\Phi_r L$ . O problema é formulado para determinar o ganho  $K_{QR}$  do controlador que recupere a malha do  $L_{LQR}$ , ou seja,

$$\min_{L_{QR}} \quad L_{LQR} - C\Phi BK\Phi_r L \quad (6.12)$$

sujeito a

$$|L| \leq \epsilon \quad (6.13)$$

$$\lambda_{esq} \leq \lambda_c \leq \lambda_{dir}$$

$$s_i \leq \epsilon$$

$$(6.14)$$

As  $|L|$  restrições do problema são operacionais, limitam-se aos ajustes do ganho  $L$  do observador ou controlador.

### A Solução LTR - Recuperação na Saída

As matrizes de ponderação  $(Q, R)$ , determinada pelo Modelo de Busca  $LTR_{QR}$ , são parâmetros da equação de *Riccati*,  $0 = A^T P + PA - PB(v_i^2 R_o)^{-1} B^T P + (v_i^2 Q_o + CC^T)$ ,  $t \leq T$ . A solução  $P$  da Equação Algébrica de **Riccati** fornece os ganhos do controlador,  $K_{LTR} = (v_i^2 R_o)^{-1} B^T P$ , para o cálculo da lei de controle,  $U_{LTR} = -K_{LTR}x$ .

## 6.3 Projeto de Controle LQG/LTR

As metodologias para projeto **LQG/LTR** apresentados em (Cruz 1996), (Doyle and Stein 1979), (Kwakernaak and Sivan 1972) e (Ferreira e Fonseca *et al.* 2003) mostram a necessidade do desenvolvimento de um algoritmo inteligente para a recuperação de malha.

Nesta secção apresenta-se um procedimento para o ajuste do ganho  $L$  do observador que recupera pela entrada a malha do  $LQR$ . O ajuste do ganho baseia-se nas modificações automáticas do parâmetro  $v_i$ , tendo como referências as matrizes de ponderação, afim de determinar o ganho ótimo do observador que recupere a robustez.

No Ajuste Empírico do Ganho **LQG/LTR**, secção 6.3.1, apresenta-se o mapeamento de um procedimento para sintonia da malha  $LTR$ . O Projeto LQR/LQG, secção 6.3.2, enfoca a aplicação os modelos para Sintonia dos Ganho LQR e LQG,

subsecções 6.2.1 e 6.2.2. Na secção 6.3.3 apresenta-se o procedimento para Recuperação da Malha do  $LQR$ , este ajuste é uma aplicação do mapeamento proposto na secção 6.3.1.

### 6.3.1 Ajuste Empírico do Ganho LQG/LTR

O procedimento de ajuste do ganho do observador para Recuperação da Malha do  $LQR$  pela da entrada consiste da escolha das matrizes de covariância, determinação da Solução Equação Algébrica **Riccati**, Cálculo do Ganho do Ótimo e uma métrica para avaliação do processo de recuperação. O mapeamento central do procedimento são as relações  $F_{\Xi\Theta}$  que selecionam as matrizes de covariâncias com as variações no parâmetro  $v_i$ . A seguir apresenta-se os mapeamentos para o Ajuste Empírico do Ganho **LQG/LTR**. O mapeamento dos espaços das matrizes de covariâncias,

$$F_{\Xi\Theta} : (\Xi_0, \Theta_0, v_i) \rightarrow (\Xi_i, \Theta_i) \quad (6.15)$$

sendo  $F_{\Xi\Theta}$  uma função de matrizes de covariância que define as regras para o ajuste destas matrizes de acordo com o parâmetro  $v_i$ . A solução da equação de *Riccati*,

$$F_{LTR} : (\Xi_i, \Theta_i, A, C) \rightarrow \Sigma_{LTR} \quad (6.16)$$

sendo  $\Sigma_{LTR}$  o conjunto de soluções de **Riccati** que são obtidos com as variações de  $v_i$ . A solução da equação Riccati é mapeada no ganha ótimo do projeto  $LQG$ ,

$$F_{LTR/LQG} : (\Sigma_{LTR}, C) \rightarrow L_{LTR-saida} \quad (6.17)$$

sendo  $L_{LTR-saida}$  do  $LQG$  que recupera a malha do  $RLQ$ . O mapeamento final deve avaliar a qualidade da recuperação, se o ganho  $L_{LTR}$  se aproxima da malha do projeto  $RLQ$ ,

$$F_{LTR/RLQ} : (L_{LTR-saida}, L_{RLQ}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.18)$$

A função  $F_{LTR/RLQ}$  representa um funcional que deve ser estabelecido afim de mensurarmos a qualidade da recuperação. Normalmente, utiliza-se uma com-

paração ponto à ponto dos valores singulares máximos e mínimos dos projetos *LTR* e *RLQ*, (Ferreira e Fonseca *et al.* 2003) e (Lewis and Syrmos 1995).

### 6.3.2 Projeto LQR/LQG

O conhecimento dos ganhos do controlador e observador de estado são os pontos iniciais para a realização do da recuperação da malha do *LQR*. As metodologia para o projeto de controladores *LQR* e *LQG* utilizando algoritmos genéticos é apresentada nos capítulos 3 e 4, respectivamente.

#### Projeto LQR

A escolha do ganho tem por base a análise de desempenho e de estabilidade robustos, de acordo com a análise dos valores singulares apresentada na seção 3.4.1 do Capítulo 3.

#### Projeto LQG

A metodologia *LQG* para o Projeto de Controladores é apresentado no Capítulo 4, especificamente, na seção 4.3, apresenta-se todos os passos para determinação do ganho de *Kalman* para o observador de estado estocástico.

### 6.3.3 Recuperação da Malha do *LQR*

A recuperação da malha pela entrada consiste de um procedimento para o ajuste dos ganhos do observador que reestabelece as propriedades de robustez do projeto **LQR**. Este procedimento é formado pelos operadores  $F_{\Xi\Theta}$ ,  $F_{LTR}$  e  $F_{LTR/RLQ}$  que representam a concretização dos mapeamentos para a escolha das matrizes de covariância, determinação da solução de **Riccati**, cálculo do Ganho e métricas para verificação. A partir de variações no parâmetro  $v_i$  recupera-se a robustez, ou seja, pode-se aproximar a malha do *LQG* da malha do *LQR*.

#### Mapeamento $F_{\Xi\Theta}$

As covariâncias do ruído da planta e medida. O ajuste é realizado por meio de variações no escalar  $v_i$  pertencente a  $\mathbb{R}$ .

$$\Xi_i = v_i \Xi_0 + BB^T \quad (6.19)$$

$$\Theta_i = v_i \Theta_0 \quad (6.20)$$

### Mapeamento $F_{LTR}$

Estas covariâncias ajustadas são as entradas para a solução da equação algébrica de *Riccati*,

$$0 = A\Sigma_{LTR} + \Sigma_{LTR}A^T + G\Xi_iG^T - \Sigma_{LTR}C^T\Theta_i^{-1}C\Sigma_{LTR}, \quad (6.21)$$

### Mapeamento $F_{LTR/LQG}$

O cálculo do ganho do ganho do estimador

$$L_{LTR-saida} = \Sigma_{LTR}C^T\Theta_i^{-1}. \quad (6.22)$$

### Mapeamento $F_{LTR/RLQ}$

A avaliação do mapeamento  $F_{LTR/RLQ}$  permite comparar a evolução do processo de determinação da malha de recuperação. O processo recuperação é ilustrado para três situações de variação do parâmetro  $v_i$ .

Inicialmente, o ganho do controlador  $K$  é mantido constante e o ganho de recuperação de malha é determinado como uma função do parâmetros  $v_i$ . De maneira geral, o próximo passo é determinar o ganho  $L_{LTR-saida}$  que recupere a robustez do projeto  $LQR$ . As matrizes são selecionadas de forma empírica de acordo com as relações (6.19) e (6.20). Variou-se o parâmetro  $v_i$ , de acordo como os valores apresentados na Tabela 5.1.

Em relação a evolução do processo de recuperação, verifica-se que quando  $v \rightarrow 0$  as propriedades de robustez perdidas com a estimação são recuperadas, conforme mostra a Figura 5.4 do Capítulo 5. A Tabela 5.1, do referido capítulo, está mostrando o ganho do controlador que foi fixado no projeto  $LQG/LTR$  e as matrizes de covariâncias em função de  $v_i$ .

Considerando os valores singulares para três situações distintas *Planta*, *LQR* e *LQG*, montam-se as tabelas 6.1 e 6.2 que representam os valores singulares máximos e mínimos, considerando as faixas de altas e de baixas frequências.

Tabela 6.1: Valores Singulares Máximos Planta e Projetos LQR, LQG e LTR

Projeto	$SVD_{max}$						
	Baixa freq BW-Hz					Alta freq BW-Hz	
	0.01	0.1	1	10	100	$10^3$	$10^4$
<i>Planta</i>	22.7	21.9	8.6	-19.1	-51.2	-90.8	-131
<i>LQG</i>	11.9	11.4	5.18	-28.7	-79.7	-139	-199
<i>LQR</i>	17.5	17.1	10.5	-12.3	-26	-45.8	-65.8
$\nu = 1$	11.2	10.7	3.35	-31.9	-82.1	-142	-202
$\nu = 10^{-2}$	17.1	16.3	9.37	-15	-26.1	-45.9	-65.8
$\nu = 10^{-3}$	17.2	16.7	10.2	-13.5	-26.1	-45.8	-65.8
$\nu = 10^{-6}$	17.4	17	10.4	-12.5	-26.1	-45.9	-65.8

Tabela 6.2: Valores Singulares Mínimos - Projetos LQR, LQG e LTR

Projeto	$SVD_{min}$						
	Baixas freq BW-Hz					Altas freq BW-Hz	
	0.01	0.1	1	10	100	$10^3$	$10^4$
<i>Planta</i>	-36.3	-31.7	-14.2	-24	-57	-96.9	-137
<i>LQG</i>	-54.4	-49.8	-33.5	-58.8	-111	-171	-231
<i>LQR</i>	-7.75	-7.75	-7.16	-15	-29.3	-49.3	-69.2
$\nu = 1$	-52.4	-47.7	-29.5	-52.3	-103	-163	-223
$\nu = 10^{-2}$	-11	-10.2	-8.85	-18.8	-29.4	-49.2	-69.2
$\nu = 10^{-3}$	-8.45	-8.43	-7.8	-16.4	-29.3	-49.3	-69.2
$\nu = 10^{-6}$	-7.8	-7.8	-7.28	-15.2	-29.5	-49.3	-69.2

Na tabela 6.3 apresentam-se os valores singulares máximos para diversas faixas de frequências e erro em relação aos valores singulares do projeto  $LQR$  para  $v_i = 1$ .

Tabela 6.3: Valores Singulares Máximos e Mínimos e Erros - Projeto  $LQG/LTR$

freq Hz	Valores Singulares					
	Máximo dB			Mínimo dB		
	$SV_{LQR}$	$SV_{LTR}$	erro	$SV_{LQR}$	$SV_{LTR}$	erro
$10^{-2}$	17.5	11.2	6.3	-7.75	-52.4	44.65
$10^{-1}$	17.1	10.7	6.4	-7.75	-47.7	39.95
$10^0$	10.5	3.35	7.15	-7.16	-29.5	22.34
$10^1$	-12.3	-31.9	19.6	-15	-52.3	37.3
$10^2$	-26	-82.1	56.1	-29.3	-103	73.7
$10^3$	-45.8	-142	96.2	-49.3	-163	113.7
$10^4$	-65.8	-202	136.2	-69.2	-223	153.8

## 6.4 Modelo do AG-LQG/LTR

Em relação a seleção das matrizes de ponderação e de covariância, secção 6.3, mostrou-se que o projeto  $LQR$  e  $LQG$  já pode ser executado praticamente sem interferência do projetista. Contudo, a recuperação da malha do  $LQR$  ainda é realizado por *tentativa e erro*, justificando o desenvolvimento de modelos para um ajuste automático do ganho do observador de estados.

Em face ao exposto no parágrafo anterior, apresenta-se o desenvolvimento de um modelo genético-artificial para o ajuste do ganho de recuperação da malha. O objetivo do modelo o algoritmo genético é a realização de uma busca inteligente do ganho de recuperação da malha, pois os métodos por tentativa e erro não garantem uma solução ótima. Este método complementa a pesquisa desenvolvida por (Fonseca Neto 2000) e (Ferreira 2003) para seleção das matrizes de ponderação do projeto  $LQR$  e das matrizes de covariância do projeto  $LQG$ , respectivamente.

O Modelo Cromossômico, secção 6.4.1, apresenta o modelo genético artificial do mapeamento de indivíduos de uma população e em termos da recuperação

da malha de entrada no projeto *LQG/LTR*, discutindo-se os conceitos de indivíduo, de alelo, de geração e de população na genética artificial. Os métodos para Geração da População Inicial são discutidos na secção 6.4.2. A Estrutura de Fitness, secção 6.4.3, é uma estrutura funcional que estabelece os critérios de identificação, de suficiência e de necessidade para a sobrevivência de indivíduos ou aceitação de soluções, aborda-se o cálculo Pré-*Fitness*, Função de Desempenho, Pontuação e Ordenação de populações. Em Métodos de Seleção, secção 6.4.4, apresenta-se os métodos para escolha de indivíduos e do tipo de operações cromossômicas. Na secção 6.4.5 as Operações Cromossômicas são modeladas como mapeamentos dos conjuntos de indivíduos de uma população em conjuntos de indivíduos de uma população que são realizados pelos operadores cromossômicos de duplicação, *crossover* e mutação.

### 6.4.1 Modelo Cromossômico

O escalar  $v_i$  é o único parâmetro do processo de ajuste que é codificado como sendo um cromossomo. A busca deste parâmetro gera conjuntos de matrizes de covariâncias que são modeladas como indivíduos de uma população. O mapeamento de  $i$  indivíduos de uma população  $j$ ,

$$F_{\Xi\Theta}^j : (v_i^j, \Xi_0, \Theta_0) \rightarrow (\Xi_i, \Theta_i) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n_{ind} \text{ e} \\ j = 1, \dots, n_{pop} \end{array} \quad (6.23)$$

sendo  $n_{ind}$  o número de indivíduos e  $n_{pop}$  a quantidade de populações com  $n_{ind}$  indivíduos. O mapeamento representado pela relação (6.23) em termos de operadores,

$$\Xi_i^j = v_i^j \Xi_0 + BB^T \quad (6.24)$$

e

$$\Theta_i^j = v_i^j \Theta_0 \quad (6.25)$$

Os escalares  $v_i$ ,  $i = 1 \dots n$  são representados como cromossomos. O modelo artificial genético é codificado por um cromossomo artificial de  $n$  bits ou na forma decimal.

### Modelagem Escalar $v_i$

Os escalares  $v_i$  são modelados como cromossomos, a base numérica decimal é utilizada para representar os seus alelos. Cada escalar é chamado de indivíduo- $v_i$  e cada conjunto de escalares da forma  $v_{i,k}^j$  caracteriza um indivíduo  $i$  com  $n_{alelo}$  alelos da população  $j$ ,

$$v_{i,k}^j = v_{i,1}^j \cup v_{i,2}^j \dots \cup v_{i,n_{alelo}}^j, \\ i = 1, \dots, n_{ind} \text{ e } j = 1, \dots, n_{pop} \quad (6.26)$$

sendo  $n_{ind}$  o número de indivíduos,  $n_{pop}$  a quantidade de populações com  $n_{ind}$  indivíduos. Cada individuo possui uma quantidade  $n_{alelo}$  de alelos artificiais. Estes alelos representam propriedades dos escalares  $v_i$  que são chamados de alelos e possuem significado análogo ao da genética natural.

Os alelos de  $v_i$  podem ser representados em bases numéricas binária ou decimal. Considerando uma população  $j$  de  $n$  indivíduos e cada individuo com  $k$  alelos,

$$\begin{aligned} v_{1,k}^j &\leftarrow v_{11}^j \dots q_{1n_{alelo}}^j \\ v_{2,k}^j &\leftarrow v_{21}^j \dots q_{2n_{alelo}}^j \\ \dots &\leftarrow \dots \dots \\ v_{n,k}^j &\leftarrow v_{n1}^j \dots v_{nn_{alelo}}^j \end{aligned} \quad (6.27)$$

Os alelos de  $v_i$  podem representar simples valores numéricos até estruturas complexas, caracterizando diferentes alelos artificiais. A população  $j$ , relação (6.27), representada por uma matriz  $V^j \in R^{n_{ind} \times n_{alelo}}$ ,

$$V^j \leftarrow \bigcup_{i=1, \dots, n_{ind}} v_{i,k}^j, \quad k = 1, \dots, n_{alelo}, \\ i = 1, \dots, n_{ind} \text{ e } j = 1, \dots, n_{pop} \quad (6.28)$$

### 6.4.2 Geração da População Inicial

Existem diversos métodos para geração de indivíduos que vão *start-up* o processo de busca. Propomos dois métodos, um deles é aleatório e ou outro é constru-

tivista. O aleatório não se importa com qualidade da população, já o método construtivistas estabelece que todos os indivíduos devem satisfazer a Estrutura ou Função de fitness antes de iniciar a busca.

### 6.4.3 Estrutura de Fitness

A *Estrutura de Fitness* no nosso contexto significa um termo mais amplo do que o termo *Função de fitness*. A estrutura de *Fitness* é uma estrutura funcional que estabelece os critérios de identificação, de suficiência e de necessidade. Esta estrutura define um critério seletivo por espécie e define o tipo do meio ambiente artificial, a fim de que individuo seja considerado apto a participar do processo de busca. Todos os indivíduos  $v_{ik}$  de uma população  $j$  são mapeados em uma estrutura que representa as características da recuperação da malha, em relação ao atendimento aos critérios do projeto,

$$F_{LTR/RLQ}^{fitness} : (\Upsilon_{id}, \Upsilon_{suf}, \Upsilon_{nec}) \rightarrow \Upsilon_{LTR/LQR} \quad (6.29)$$

sendo  $\Upsilon_{id}$ ,  $\Upsilon_{suf}$  e  $\Upsilon_{nec}$  os conjuntos de identificação, suficiência e necessidade. O conjunto  $\Upsilon_{LTR/LQR}$  representa os atributos de um indivíduo,

$$\Upsilon_{LTR/LQR} = \left\{ \Upsilon_{id}^{ikj}, \Upsilon_{suf}^{ikj}, \Upsilon_{nec}^{ikj} \right\} \quad (6.30)$$

O mapeamento dos elementos do conjunto  $\Upsilon_{LTR/LQR}$  é objetivo da estrutura de fitness. Este objetivo que representa o conjunto de identificação é constituído pelo tamanho da palavra, índice de adequabilidade e origem.

O conjunto de suficiência  $\Upsilon_{suf}^{ikj}$  é a garantia de que todos os indivíduos de uma população satisfazem os limites de minimização da função de desempenho. No caso das especificações de projeto do *LQR*,

$$\Upsilon_{suf}^{LQR} = \left\{ \sigma_{LQR}^{max}, \sigma_{LQR}^{min} \right\} \quad (6.31)$$

sendo  $\sigma_i$  os valores singulares máximos e mínimos das malhas **LQR**. No caso de um indivíduo  $v_{ik}^j$ ,

$$\Upsilon_{suf}^{ijk} = \{ \sigma_{ijk}^{max}, \sigma_{ijk}^{min} \} \quad (6.32)$$

sendo  $\sigma_i$  os valores singulares máximos e mínimos das malhas **LTR**.

O conjunto de suficiência  $\Upsilon_{suf}^{ijk}$  relaciona-se com as condições globais. As condições que estão relacionadas com áreas específicas da busca que representam as restrições do problema controle e qualidade do desempenho do modelo, tal como: complexidade do algoritmo e outras condições impostas pelo modelo de busca genética. O conjunto  $\Upsilon_{nec}^{RLQ}$  de restrições para o projeto *LQR*,

$$\Upsilon_{nec}^{LQR} = \{ \lambda_i, \nu_i, \delta_i, \} \quad (6.33)$$

sendo  $\lambda_i$ ,  $\nu_i$  e  $\delta_i$ , autovalores, autovetores à direita e as sensibilidades dos autovalores, respectivamente. De forma similar ao conjunto de restrições de suficiência tem-se o conjunto  $\Upsilon_{nec}^{ikj}$ .

O conjunto de identificação e restrições *LQR* assume um valor padrão de referência para espécie, alelos, origem do cromossomo e informação sobre o processo de busca,

$$\Upsilon_{id}^{LQR} = \{ limit_{\sigma_i}, orig_{ijk}, alelos_{ijk} \} \quad (6.34)$$

sendo  $limit_{\sigma_i}$ ,  $orig_{ijk}$  e  $alelos_{ijk}$  o limite de variação de cada individuo  $v_{ijk}$  em torno dos valores singulares de referências

A estrutura de *fitness* é decomposta em blocos funcionais que representam o Cálculo Pré-*Fitness*, Função de Desempenho, Pontuação e Ordenação.

### **Cálculo Pré-*Fitness***

A solução da Equação Algébrica de *Riccati* e os Cálculos do Ganho de Malha *LTR* e dos Valores Singulares são três etapas para determinação do índice de desempenho de cada indivíduo de uma população  $j$ .

### Função de Desempenho

A função de desempenho é um mapeamento de erro quadrático mínimo entre os menores e maiores valores singulares dos projetos  $LQR$  e  $LQG/LTR$ ,

$$F_{ijk}^{desemp} = \min_{v_i} \sum_{i=1}^{n_{freq}} \left[ SVD_{ikj}^{LTR} - SVD_{ikj}^{RLQ} \right]^2 \quad (6.35)$$

sendo  $SVD_{ikj}^{LTR}$  e  $SVD_i^{RLQ}$  os valores singulares da recuperação e do projeto  $LQR$ , respectivamente, correspondente a um conjunto de  $n_{freq}$  frequências. As soluções são submetidas a este teste que permite avaliar recuperação da malha o mapeamento  $F_{LTR/RLQ}$ .

### Pontuação e Ordenação

Consiste da avaliação dos indivíduos que foram gerados a partir das operações genéticas; todo indivíduo possui uma característica que permite verificar o quanto ele é adequado para ser um membro permanente da população atual; esta avaliação é feita numericamente através de um dada função e este número é uma marca da qualidade do indivíduo indicando o grau de satisfabilidade. A segunda fase, formação da população permanente, consiste da seleção propriamente dita; os indivíduos são escolhidos para compor a população e são ordenados de acordo com o grau de satisfabilidade. Os que melhor satisfazem um determinado índice são selecionados para compor a população permanente atual.

#### 6.4.4 Métodos de Seleção

No contexto deste trabalho, os métodos de seleção são classificados de acordo com a finalidade do processo de escolha. Existem três processos de seleção que são nitidamente distintos durante a busca das matrizes de ponderação, e todos eles são dependentes de um gerador de números pseudo-aleatórios.

O primeiro método consiste na escolha das operações genéticas; é classificado pela escolha do tipo de operação genética a ser realizada em cada passo do ciclo de busca e pela manipulação dos alelos cromossômicos em função da forma de atuação dos operadores genéticos. O segundo método relaciona-se com o procedimento

para escolha de indivíduos que sofrem ações dos operadores genéticos. O terceiro método relaciona-se com a escolha da quantidade de indivíduos para compor a população permanente, após o término de cada *ciclo de busca*, e constitui a fase final do algoritmo de *fitness*; a quantidade de indivíduos a ser incluída varia entre 1 e o número máximo de indivíduos que compõem a população permanente.

### 6.4.5 Operações Cromossômicas

As operações cromossômicas são mapeamentos dos conjuntos de indivíduos de uma população  $j$  em conjuntos de indivíduos de uma população em  $j + 1$ . Estes mapeamentos são realizados pelos operadores  $F_{crom}^\kappa$  cromossômicos de duplicação, *crossover* e mutação. De forma geral, estes mapeamentos,

$$F_{crom}^\kappa : (v_{i_1,k}^j, v_{i_2,k}^j) \rightarrow v_{i,k}^{j+1} \quad k = 1, \dots, n_{alelo},$$

$$i = 1, \dots, n_{ind} \text{ e}$$

$$j = 1, \dots, n_{pop} \quad (6.36)$$

O conjunto  $\kappa$  dos operadores cromossômico é definido com três operadores,

$$\kappa : \{Dup_x, X_{over}, X_{mut}\} \quad (6.37)$$

Os operadores  $Dup_x$ ,  $X_{over}$ ,  $X_{mut}$  são estabelecidos nos itens operação de duplicação, de *crossover* e de mutação.

#### Operação de Duplicação

A operação de duplicação não precisa ser avaliada porque esta operação apenas verifica qual é o indivíduo que possui o pior valor de *fitness*. Este é removido e substituído por um *clone* do indivíduo mais forte da população  $j$ ,

$$v_{ik}^{j+1} = v_{ik}^j \quad (6.38)$$

$$i = 1, \dots, n_{ind}; \quad k = 1, \dots, n_{alelo}$$

### Operação de Crossover

A geração de cromossomos  $v_{i,k}^{j+1}$  para a próxima população a partir da combinação aleatória de dois indivíduos  $i_1$  e  $i_2$  de uma mesma população  $j$ ,

$$v_{ik}^{j+1} = idad_j v_{i_1k}^j - |1 - idad_j| v_{i_2k}^j \quad (6.39)$$

$$i = 1, \dots, n_{ind}; \quad k = 1, \dots, n_{alelo}$$

sendo  $idad_j$ ,  $t = j, \dots, n_{pop}$ , um parâmetro que pondera os valores de alelos dos cromossomos, podendo variar de acordo com a idade da população. Por exemplo, considerando uma busca de  $n_{pop}$  a população  $n_{pop}/3$  tem um histórico de evolução que está registrado nos alelos de cada cromossomo.

### Operação de Mutação

Os procedimentos para operação de mutação decimal são implementados da seguinte maneira: a mutação local consiste de uma modificação em todos os alelos de indivíduos escolhidos aleatoriamente de acordo com o princípio de seleção natural de *Darwin*. A mutação para um cromossomo  $v_k$  de um indivíduo  $i$  e o valor de cada alelo é modificado de maneira multiplicativa,

$$v_{ik}^{j+1} = v_{i,k}^j b^{x_{local}} \quad (6.40)$$

$$i = 1, \dots, (n_{ind} \quad e \quad k = 1, \dots, n_{alelo})$$

sendo que  $v_{ik}^{j+1}$  representa o valor do alelo do cromossomo do novo indivíduo. O elemento  $v_{ik}^j$  representa o valor do alelo do cromossomo- $v$  do indivíduo  $i$ . O valor  $b$  é a base determinística do multiplicador exponencial,  $b > 1$ , e  $x_{local}$  é o expoente aleatório,  $0 \leq x_{local} \leq 1$ .

O procedimento para mutação decimal global consiste da escolha de indivíduos aleatoriamente, tal qual na mutação local, e para estes indivíduos os valores de cada alelo são incrementados de um valor que é o produto de um número aleatório pela diferença entre os alelos correspondentes do pior e do melhor indivíduo da população atual,

$$v_{ik}^{j+1} = v_{ik}^j + x_{global} |v_{ik}^{j-melhor} - v_{ik}^{j-pior}| \quad (6.41)$$

$$i = 1, \dots, n_{ind} \quad e \quad k = 1, \dots, n_{alelo}$$

sendo os elementos  $v_{ik}^{j+1}$ ,  $v_{ik}^j$  e  $x_{global}$  definidos tal qual na mutação local. Os elementos  $v_{ik}^{j-melhor}$  e  $v_{ik}^{j-pior}$  representam os alelos dos cromossomos  $v$  dos indivíduos que apresentam o melhor e o pior *fitness*.

## 6.5 Conclusão

Apresentou-se um Modelo Hierárquico de Algoritmos Genéticos para recuperação da malha de transferência na entrada em Sistemas de controle robusto **LQG/LTR**. Especificamente apresentou-se o desenvolvimento do projeto de controladores *LQR*, *LQG* e *LQG/LTR* utilizando uma hierarquia de algoritmos baseados em otimização combinatória e algoritmos genéticos, enfocando-se os modelos para sintonizar os ganhos das malhas de controle. O projeto **LQG/LTR** com recuperação na entrada foi implementado por tentativa e erro e suas características foram utilizadas para justificar uma modelagem inteligente para o ajuste dos ganhos. A solução inteligente é o desenvolvimento do modelo genético-artificial para o ajuste do ganho da malha de recuperação.

## CAPÍTULO 7

# Conclusão

---

Neste trabalho foi apresentado uma metodologia para Alocação de Auto-estrutura, com a utilização de Controladores  $LQG/LTR$  e computação evolutiva. Mostrou-se o desenvolvimento de um terceiro modelo e um algoritmo genético para recuperação da malha de controle do projeto  $LQR$ . A metodologia para o projeto de controladores foi apresentada como uma evolução da metodologia **LQR** que passa pelo projeto de controladores **LQG** e finalmente chega a metodologia de projeto de controladores Robustos **LQG/LTR**.

Percebeu-se que unindo a solução do problema de estimação e as restrições de Auto-estrutura, da mesma forma como feito para o Regulador Linear Quadrático, podemos transformar o problema de Alocação de Auto-estrutura num problema de otimização, permitindo a determinação de um estimador de estado, com a utilização de técnicas de busca aleatória.

A análise da Auto-estrutura foi importante, pois nos mostrou claramente a influência dos autovalores, dos autovetores, das condições iniciais e da entrada na composição da resposta temporal do sistema.

O controle  $LQR$  foi utilizado como uma aplicação particular de um problema de otimização. Este problema foi caracterizado pela busca de vetor de entrada que minimiza uma função de desempenho. Esta formulação foi chamada de problema de controle ótimo. No caso do Regulador Linear Quadrático, o índice de desempenho é um mapeamento dos espaços dos vetores de estados e de controle ponderados pelas matrizes de ponderação, respectivamente.

Na alocação de auto-estrutura do problema de controle e do problema de

estimação de estados, utilizamos o *LQR* e o Filtro de *Kalman*, como metodologias de projeto. Os resultados obtidos neste trabalho foram satisfatórios. Recuperou-se as propriedades de robustez perdidas pela estimação das variáveis de estado, utilizando como ferramenta o projeto *LQG/LTR*. O procedimento de recuperação da malha baseado em um Algoritmo Hierárquico mostra-se com uma alternativa atrativa para automatizar a metodologia de projeto *LQG/LTR*.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Nesta dissertação apresentou-se as justificativas e um modelo de um algoritmo genético para recuperação da malha de controle do **LQR**, a fim de que esta proposta esteja plena na sua realização teórica e experimental é necessário que as seguintes atividades sejam desenvolvidas:

- Codificação em microcomputadores ou sistemas embarcados do terceiro algoritmo genético para recuperação da malha do *LQR*;
- Generalizar o modelo genético hierárquico de forma tal que realize a recuperação pela saída,
- Verificar o desempenho do método de recuperação de malha em outras plantas, tais como: motor de indução e fornos elétricos;
- Acoplar o modelo genético hierárquico na formulação do *LQR* inteligente;
- Desenvolver um método para escolha inicial das matrizes de ponderação e covariância para recuperação da malha;
- Analisar a convergência do modelo genético hierárquico.

## APÊNDICE A

# O Sistema Teste

---

Neste apêndice apresenta-se uma descrição do Sistema Teste no espaço de estado que consiste do modelo de uma aeronave em velocidade de cruzeiro, (Davies and Clarke 1995), na Figura A.1 apresenta-se um diagrama que salienta as variáveis de estado e as suas entradas.

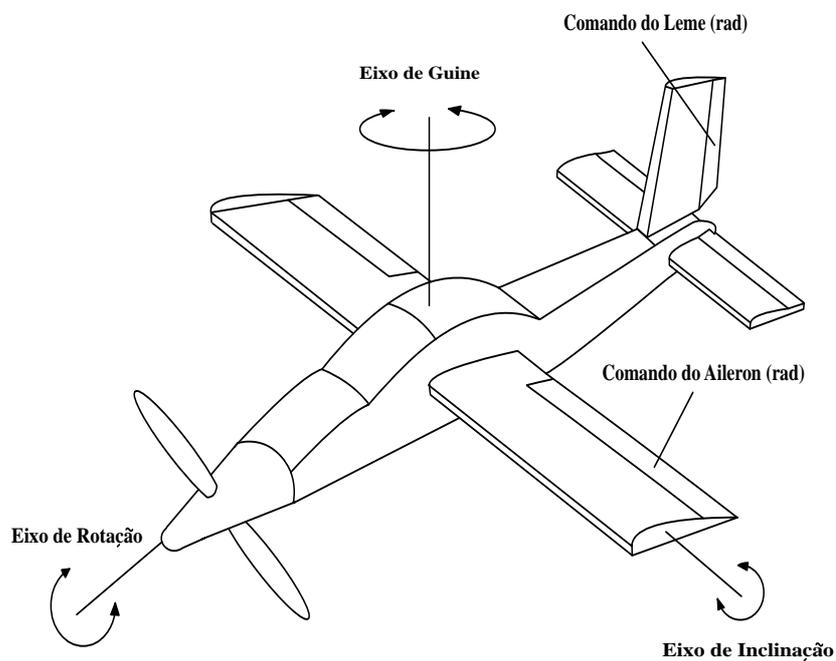


Figura A.1: Diagrama de uma aeronave para fins de projeto de controle.

Os modelos de Sistemas para Testes de Condições Operacionais ou validação são concebidos, segundo a abordagem clássica de modelagem para fins de Projetos e Implementação de Sistemas de Controle. O modelo global do sistema é constituído de um modelo para a planta e outro modelo para o Sistema de Controle. O modelo do sistema representado em variáveis de estado pelas Equações (A.1) e (A.2),

$$\dot{x} = Ax + Bu + G\xi, \quad (\text{A.1})$$

$$y = Cx + \nu. \quad (\text{A.2})$$

sendo que as variáveis de estado  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  e  $x_6$  representam deflexão do leme(rad), deflexão do aileron(rad), ângulo de projeção horizontal(rad), taxa de guine(rad/s), taxa de rotação (rad/s), ângulo de inclinação (rad), respectivamente. As entradas  $u_1$  e  $u_2$  são os comandos de leme(rad) e Aileron(rad).  $\xi$  e  $\nu$  são ruídos Gaussianos do processo e da medida, respectivamente. A matriz de estado  $A$  (A.3), a matriz de saída  $C$  (A.5), e a matriz  $G$  (A.6),

$$A = \begin{bmatrix} -20.00 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.000000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -25.00 & 0.0000 & 0.0000 & 0.000000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000000 & 0.0000 \\ -0.744 & -0.032 & 0.0000 & -1.540 & -0.00420 & 1.5400 \\ 0.3370 & -1.120 & 0.0000 & 0.2490 & -1.00000 & -5.200 \\ 0.0200 & 0.0000 & 0.0386 & -0.996 & -0.00029 & -0.117 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

matriz de controle,

$$B = \begin{bmatrix} 20.00 & 00.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 00.00 & 25.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.4})$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

e

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

As restrições de projeto são mostradas na Tabela A.1, que são limites de autovalores e suas sensibilidades associadas. Estas restrições foram montadas a partir da Auto-estrutura fornecida pela implementação de um controlador base, (Davies and Clarke 1995), também mostrado na Tabela A.1, quando aplicado no modelo linear do sistema dinâmico.

Tabela A.1: Restrições de projeto para o *LQR* e controlador base

Nº.	Autovalores	Sensibilidades	Controlador Base
1	$-13.00 \leq Re \leq -23.00$	7.28	0.00 0.00 -0.1169 -3.29960 -0.4584 2.8277 0.00 0.00 -0.2947 -0.96445 -0.6826 3.8995
2	$-20.00 \leq Re \leq -30.00$	4.13	
3	$-1.00 \leq Re \leq -3.00$ $3.000 \leq Imag \leq -3.00$	5.24	
4	$-1.00 \leq Re \leq -3.00$ $3.00 \leq Imag \leq -3.00$	5.24	
5	$-2.00 \leq Re \leq -3.00$	9.92	
6	$-0.20 \leq Re \leq -3.00$	2.18	

# Desempenho e Estabilidade Robusto

---

Neste apêndice discute-se o desempenho e estabilidade robusta de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis. A análise de Robustez considera perturbações externas, ruídos da medida, variações na planta e erro entrada/saída para o desempenho robusto. Para o caso da Estabilidade Robusta, estabelece-se um limite para a norma de um erro que é função da planta real, do modelo sem considerar as dinâmicas de alta-freqüência e do controlador. Os índices de robustez são avaliados através dos valores singulares das matrizes de sensibilidade e de sensibilidade complementar.

Inicialmente, o problema surge com a representação aproximada do sistema do mundo real. Quando os sistemas do mundo real são representados por modelos lineares, a não inclusão de não linearidades pode conduzir o sistema a instabilidade. Este problema é analisado tanto nas baixas quanto nas altas freqüências. A seguir explica-se o problema da modelagem.

*O Problema:*

a - Modelo Linear  $\rightarrow$  não-linearidades desprezadas  $\rightarrow$  Instabilidade.

- Baixas frequências
  - Modifica ponto de equilíbrio
- Altas frequências
  - Dinâmicas não Modeladas

*Solução:*

b- Projeto de Controladores

- Garantir a estabilidade
  - Altas frequências → Erros na modelagem
  - Baixas frequências → variações dos parâmetros da planta → mudança de equilíbrio

c - Desempenho Robusto

- Acompanhar sinal de referência,
- Rejeição a perturbações externas,
- Ruídos de medidas,
- Insensibilidade a variações na planta.

## B.1 Modelo do Sistema Dinâmico

As equações da saída e do erro são obtidas a partir do diagrama de blocos da figura 2.1, Capítulo 2, que representa o modelo do Sistema Dinâmico. Estas equações levam em consideração as perturbações na saída e o ruído da medida. As relações entre as funções de transferência do compensador, planta, sinais e manipulações algébricas via lema da inversa fornece,

*Equação de saída:*

$$Y(s) = C(s)[R(s) - N(s)] + S(s)D(s) \quad (\text{B.1})$$

*Equação do Erro:*

$$E(s) = S(s)[R(s) - D(s)] + C(s)D(s) \quad (\text{B.2})$$

sendo,

1.  $S(s) \rightarrow$  sensibilidade

$$S(s) = \frac{1}{I + G(s)K(s)} \quad (\text{B.3})$$

2.  $C(s) \rightarrow$  sensibilidade complementar

$$C(s) = \frac{G(s)K(s)}{I + G(s)K(s)} \quad (\text{B.4})$$

A análise de robustez considera a equação de saída  $Y$  e a equação do erro  $E$ , normas e valores singulares de sinais e funções de transferência são utilizados para avaliar o desempenho e a estabilidade robusta do sistema.

## B.2 Robustez - Desempenho e Estabilidade

Nesta secção apresenta-se as condições que devem ser satisfeitas para que o controlador possa ser chamado de robusto. A primeira secção considera o desempenho robusto, explora-se quatro tipos de situações em que o controlador deve satisfazer a fim de garantir o ponto de operação especificado pelo projetista. A segunda seção analisa sob o ponto de vista de garantir estabilidade na ocorrência de dinâmicas não modeladas do sistema real.

### B.2.1 Desempenho Robusto

O desempenho robusto é analisado para as seguintes situações: acompanhamento do sinal de referência, rejeição a distúrbio, rejeição erros de medidas e insensibilidade a variações na planta. A robustez é avaliada em termos dos valores singulares das matrizes de ganho de malha  $GK$  e sensibilidades,

a - Acompanhamento do sinal de referência

- Os sinais  $R(s)$  são em baixa frequência. O conjunto das frequências de  $R(s)$ ,

$$\Omega_r = \{\omega \in R | \omega \leq \omega_r\}$$

- A partir das equações (B.1) e (B.2), considerar a contribuição  $R(s)$  em  $Y(s)$  e  $E(s)$ ,

*Saída:*

$$Y(s) = C(s)R(s) \quad (\text{B.5})$$

*Erro:*

$$E(s) = S^0(s)R(s) \quad (\text{B.6})$$

A fim de facilitar uma primeira análise a saída e o erro são expressos em termos das sensibilidades,

*Saída:*

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)}{I + G(s)K(s)}R(s) \quad (\text{B.7})$$

*Erro:*

$$E(s) = \frac{1}{I + G(s)K(s)}R(s) \quad (\text{B.8})$$

Em relação a equação de saída é necessário que

$$GK \gg I$$

para garantir que o controlador  $K$  imponha o sinal de referência na saída  $Y$ . Em termos de valores singulares significa impor

$$\sigma_m[GK] \gg 1$$

para garantir um bom acompanhamento do sinal de referência.

A condição de robustez para o erro é garantida para frequências limitadas superiormente, isto é, dado por um supremo, da equação (B.8),

$$\alpha_r(\omega) \ll 1$$

Logo,

$$\frac{\|E(s)\|}{\|R(s)\|} \ll \alpha_r(\omega) \quad (\text{B.9})$$

ou

$$\frac{\|R(s)\|}{\|E(s)\|} \gg \frac{1}{\alpha_r(\omega)} \quad (\text{B.10})$$

Em termos de valores singulares,

$$\sigma_m[I + G(s)K(s)] \geq \frac{1}{\alpha_r(\omega)} \geq 1$$

A condição de robustez para o acompanhamento do sinal de referência que leva em conta os sinais de saída e erro,

$$\sigma_m[G(s)K(s)] \geq \frac{1}{\alpha_r(\omega)}$$

b - Perturbações externas

- Os sinais  $D(s)$  são em baixas frequências. O conjunto das frequências de  $D(s)$ ,

$$\Omega_d = \{\omega \in R | \omega \leq \omega_d\}$$

- A partir das equações (B.1) e (B.2), considerar a contribuição  $D(s)$  em  $Y(s)$  e  $E(s)$ ,

*Saída:*

$$Y(s) = S(s)D(s) \tag{B.11}$$

*Erro:*

$$E(s) = C(s)D(s) \tag{B.12}$$

De maneira similar ao acompanhamento do sinal de referência. A condição de robustez para que o controlador garanta a rejeição para perturbações externas,

$$\sigma_m[G(s)K(s)] \geq \frac{1}{\alpha_d(\omega)}$$

O acompanhamento do sinal de referência leva em conta os sinais de saída e de erro.

c - Insensibilidade a variações na planta

- Os sinais são em baixas frequências. O conjunto das frequências de  $\delta G(s)$ ,

$$\Omega_\delta = \{\omega \in R | \omega \leq \omega_\delta\}$$

- A partir das equação (B.1) considerar a contribuição  $R(s)$  em  $Y(s)$ ,

*Saída:*

$$Y(s) = C(s)R(s) \quad (\text{B.13})$$

Ainda,

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)}{I + G(s)K(s)}R(s) \quad (\text{B.14})$$

Os efeitos das variações da planta  $G(s)$  na saída  $Y(s)$  são modelados através da equação:

$$\delta Y(s) = \frac{\delta G(s)G(s)^{-1}}{I + G(s)K(s)}Y(s) \quad (\text{B.15})$$

A idéia consiste em determinar uma expressão que indique uma estratégia para assegurar desempenho robusto para variações na planta. Manipulando a equação (B.15),

$$\frac{\delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\delta G(s)G(s)^{-1}}{I + G(s)K(s)} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\frac{\delta Y(s)}{Y(s)}}{\delta G(s)G(s)^{-1}} = \frac{1}{I + G(s)K(s)} \quad (\text{B.17})$$

A equação é expressa em termos das normas das variações na saída e na planta sendo limitada pelo seu maior valor singular,

$$\frac{\frac{\|\delta Y(s)\|}{\|Y(s)\|}}{\|\delta G(s)G(s)^{-1}\|} \leq \frac{1}{\sigma_M[I + G(s)K(s)]} \quad (\text{B.18})$$

Considerando que o conjunto de frequências deve satisfazer a restrição (B.18) e deve possuir um limitante que restrinja a propagação de  $\delta G(s)$  em  $Y(s)$ ,

$$\alpha_\delta(\omega) \ll 1$$

A desigualdade (B.18),

$$\frac{\frac{\|\delta Y(s)\|}{\|Y(s)\|}}{\|\delta G(s)G(s)^{-1}\|} \leq \alpha_\delta(\omega) \quad (\text{B.19})$$

As desigualdades (B.18) e (B.19) podem ser manipuladas de forma que se tenha uma relação que permite verificar a robustez em questão,

$$\sigma_m[I + G(s)K(s)] \geq \frac{1}{\alpha_\delta(\omega)} \gg 1 \quad (\text{B.20})$$

Uma aproximação,

$$\sigma_m[G(s)K(s)] \geq \frac{1}{\alpha_\delta(\omega)} \gg 1 \quad (\text{B.21})$$

d - Erro de Medida

- Instrumentos de medição introduzem erros nas altas-freqüências. O conjunto das freqüências de  $N(s)$ ,

$$\Omega_N = \{\omega \in R | \omega \geq \omega_N\}$$

- A partir da equação (B.1), considerar a contribuição  $N(s)$  em  $Y(s)$ ,

*Saída:*

$$Y(s) = -C(s)N(s) \quad (\text{B.22})$$

Ainda,

$$Y(s) = -\frac{G(s)K(s)}{I + G(s)K(s)}N(s) \quad (\text{B.23})$$

A condição de que deve ser satisfeita para garantir robustez a rejeição ao ruído,

$$G(s)K(s) \ll I \quad (\text{B.24})$$

Então, a matriz  $G(s)K(s)$  é pequena se o maior valor singular é pequeno,

$$\sigma_M[G(s)K(s)] \ll 1 \quad (\text{B.25})$$

De maneira similar ao acompanhamento do sinal de referência. A condição de robustez para que o controlador garanta a rejeição para perturbações externas,

$$\sigma_m[G(s)K(s)] \geq \frac{1}{\alpha_d(\omega)}$$

## B.2.2 Estabilidade Robusta

Esta análise considera o seguinte fato: mesmo garantindo a estabilidade em malha fechada do Modelo Linear, tem-se que a estabilidade não está para o sistema do mundo real  $G'$ , devido a dinâmicas de alta frequência que são desprezadas.

# Recuperação do Ganho de Malha na Entrada

---

Neste apêndice apresenta-se o desenvolvimento algébrico para ajustar o ganho do observador para recuperação da malha de controle  $LQR$ . Este ajuste é feito por meio de manipulações das matrizes de covariância do ruídos. Segundo Lewis (Lewis and Syrmos 1995) e Kwakernaak (Kwakernaak and Sivan 1972), mostra-se que sob as hipóteses:  $v \rightarrow 0$  e  $\Sigma \rightarrow 0$ , obtém-se para as Equações (5.31) e (5.32),

$$\Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1} C \Sigma \rightarrow BB^T, \quad (\text{C.1})$$

e

$$L \rightarrow \Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1}, \quad (\text{C.2})$$

mas

$$\begin{aligned} L(v^2 \Theta_o) L^T &= \Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1} (v^2 \Theta_o) [\Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1}]^T, \\ &= \Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1} (v^2 \Theta_o) (v^2 \Theta_o)^{-1} C \Sigma, \\ &= \Sigma C^T (v^2 \Theta_o)^{-1} C \Sigma. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Logo, das Equações (C.1) e (C.3):

$$L(v^2 \Theta_o) L^T \rightarrow BB^T, \quad (\text{C.4})$$

A solução,

$$L \rightarrow \frac{1}{v}BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.5})$$

sendo  $U$  uma matriz unitária. Definindo-se a matriz de realimentação do compensador,

$$\Phi_c(s) = [sI - (A - BK)]^{-1}, \quad (\text{C.6})$$

o ganho de malha aberta na entrada,

$$\begin{aligned} L_r(s) &= F(s)G(s) = K[sI - (A - BK - LC)]^{-1}LC\Phi B, \\ &= K[sI - (A - BK) + LC]^{-1}LC\Phi B, \\ &= K[\Phi_c^{-1} + LC]LC\Phi B. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Usando o lema da inversa, como feito anteriormente, Equação (5.17), na Equação (C.7),

$$\begin{aligned} L_r(s) &= K[\Phi_c - \Phi_c L(I + C\Phi_c L)^{-1}C\Phi_c]LC\Phi B, \\ &= K\Phi_c[I - L(I + C\Phi_c L)^{-1}C\Phi_c]LC\Phi B, \\ &= K\Phi_c[L - L(I + C\Phi_c L)^{-1}C\Phi_c L]C\Phi B, \end{aligned}$$

Fatorando  $[I + C\Phi_c L]^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} L_r(s) &= K\Phi_c L[I - (I + C\Phi_c L)^{-1}C\Phi_c L]C\Phi B, \\ &= K\Phi_c L(I + C\Phi_c L)^{-1}[(I + C\Phi_c L) - C\Phi_c L]C\Phi B, \\ &= K\Phi_c L(I + C\Phi_c L)^{-1}C\Phi B. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Calculando-se  $L(I + C\Phi_c L)^{-1}$ , quando  $L \rightarrow \frac{1}{v}BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned}
 L(I + C\Phi_c L)^{-1} &\rightarrow \frac{1}{v}BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}(I + C\Phi_c\frac{1}{v}BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}})^{-1}, \\
 &\rightarrow \frac{1}{v}BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}(vI + C\Phi_cBU\Theta_o^{-\frac{1}{2}})^{-1}v, \\
 &\rightarrow \underbrace{BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}(vI + C\Phi_cBU\Theta_o^{-\frac{1}{2}})^{-1}}_{v \rightarrow 0}, \\
 &\rightarrow BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}(C\Phi_cBU\Theta_o^{-\frac{1}{2}})^{-1}, \\
 &\rightarrow BU\Theta_o^{-\frac{1}{2}}(U\Theta_o^{-\frac{1}{2}})^{-1}(C\Phi_cB)^{-1}, \\
 L(I + C\Phi_c L)^{-1} &\rightarrow B(C\Phi_cB)^{-1}. \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

Assim, das Equações (C.8) e (C.9),

$$L_r(s) \rightarrow K\Phi_cB(C\Phi_cB)^{-1}C\Phi B. \tag{C.10}$$

Como

$$\Phi_c = (\Phi^{-1} + BK)^{-1}, \tag{C.11}$$

usando-se novamente o lema da inversa, na Equação (C.11),

$$\begin{aligned}
 \Phi_c &= \Phi - \Phi B(K\Phi B + I)^{-1}K\Phi, \\
 &= \Phi[I - B(K\Phi B + I)^{-1}K\Phi].
 \end{aligned}$$

Então,

$$\Phi_cB = \Phi B[I - (K\Phi B + I)^{-1}K\Phi B], \tag{C.12}$$

$$C\Phi_cB = C\Phi B[I - (K\Phi B + I)^{-1}K\Phi B],$$

a matriz inversa de  $C\Phi_cB$ ,

$$(C\Phi_cB)^{-1} = [I - (K\Phi B + I)^{-1}K\Phi B]^{-1}(C\Phi B)^{-1}. \tag{C.13}$$

Substituindo as Equações (C.12) e (C.13) na Equação (C.10),

$$L_r(s) \rightarrow K\Phi B[I - (K\Phi B + I)^{-1}K\Phi B][I - (K\Phi B + I)^{-1}K\Phi B]^{-1}(C\Phi B)^{-1}C\Phi B.$$

# Referências Bibliográficas

- Bailey, G.V.; J.M. (1990). LQG/LTR robust control system design for low-pressure feedwater heater train Murphy. *Southeastcon '90, Proceedings, IEEE Vol.3*, 853 – 856.
- Bäck, Thomas, David B. Fogel and Zbigniew Michalewicz (1997). *Handbook of Evolutionary Computation*. first ed.. Institute of Physics Publishing and Oxford University press. Bristol and New York.
- Bottura, C. P. and J.V. da Fonseca Neto (1999). Parallel genetic algorithm fitness function team for eigenstructure assignment via lqr designs. *Congress on Evolutionary Computation - CEC99. Washington, DC, USA. Vol 2*, 1035–1042.
- Brito Filho, Joaquim Gomes, João Viana da Fonseca Neto, Marlon P. de Melo Wolf, Carlos C. Teixeira and Ivanildo Abreu (2006). A Genetic Algorithm for Eigenstructure Assignment via *LQR* Design - Simulations and Analysis. *Relatório Técnico PPPGE - UFMA - DE.EE*. pp. 1 – 8.
- Cruz, José Jaime da (1996). Controle Robusto Multivariável. *EDUSP*.
- Davies, R. and T. Clarke (1995). Parallel implementation of a genetic algorithm. *IEEE*. **3**(1), 1–9.
- Doyle, J. C. and G. Stein (1979). Robustness with Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **24**(4), 607–611.
- Doyle, J. C. and G. Stein (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**, 4–16.

- Ferreira, Carlos C. T. e Fonseca Neto, J. V. (2003). Projeto do Filtro de Kalman via Alocação de Autoestrutura e Algoritmo Genético. *VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Ferreira e Fonseca, Carlos C. T., J. V. Fonseca Neto and F. A. Torrico (2003). Alocação de Autoestrutura via Controle LQG/LTR e Computação Evolutiva. *VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Fonseca Neto, João Viana da (2000). Alocação Computacional Inteligente de Autoestruturas para Controle Multivariável. PhD thesis. UNICAMP.
- Fonseca Neto, João Viana da (2003). *An Inequalities Method for Multivariable System's Eigenstructure Assignment via Genetic Multi-Objective Optimization*. 2003 American Control Conference. Denver-Colorado.
- Gasem, C. Zhou; J.R. Whiteley; E.A. Misawa; K.A.M. (1995). Application of enhanced LQG/LTR for distillation control. *Control Systems Magazine, IEEE* **15**(4), 56 – 63.
- Goldberg, David Edward (1989). *Genetic Algorithms in search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company Inc.. USA.
- Holland, J.H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press . Ann Arbor-Michigan-USA.
- Jafar, Zarei, Montazeri Allahyar, Motlagh Mohammad Reza Jahed and Javad Posh-tan (2006). Design and comparison of LQG/LTR and Hinf controllers for a VSTOL Flight control System. *IEEE* pp. 1–18.
- Johnson, Prof.M.J Grimble; M.A (1987). Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design. *IEEE*.
- José Paulo F., Garcia, Bortolo Edson S., Ribeiro Jean Marcos S. and Garcia Lizete Maria C. F. (2004). Active Noise attenuation Using LQG/LTR Control. *Eletrônica de Potência* **9**(2), 23–26.
- Keller, J.P. (2005). Interactive Control System Design. *Control Eneginerig and Practice* **14**, 177–184.

- Kishor, Nand, Saini R.P. and Dr.S.P.Singh (2004). LQG/LTR Controller for Speed Governing of Hydro-Turbine. *IEEE*. pp. 1125–1128.
- Kwakernaak, H. (1969). Optimal Low-Sensitivity Linear Feedback Systems. *Automatic*.
- Kwakernaak, H. and R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience. New York.
- Lahdhiri, T.; Alouani, A.T. (1993). LQG/LTR pitch attitude control of an earth-orbiting spacecraft. *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on* **vol.1**, Pages:445 – 446.
- Lee, Myoen-Song Choi; Jeong-Woo Lee; K.Y. (1996). An auxiliary LQG/LTR robust controller design for cogeneration plants Young-Moon Park. *Energy Conversion, IEEE Transactions on* **1(2)**, 407 – 413.
- Lewis, Frank L. and Vassilis L. Syrmos (1995). *Optimal Control*. John Wiley and Sons, Inc.. USA.
- Liu, G.P. and R.J Patton (1998). *Eigenstructure Assignment for Control System Design*. John Willey & Sons.
- Melo Wolf, Marlon P. de, João Viana da Fonseca Neto, Carlos C. Teixeira, Ivanildo Abreu and Joaquim Gomes Brito Filho (2006). A Genetic Algorithm for Eigenstructure Assignment via LQR Design - Theoretical Development. *Relatório Técnico PPPGE - UFMA - DE.EE*. pp. 1–7.
- M.Maciejowski, J. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison - Wiley.
- Paschall, J.M.; D.B. Ridgely; R.N. (1994). Autopilot Design for a Tail-Controlled Missile Using LQG/LTR With Eigenstructure Reassignment Brown. *American Control Conference* **Vol.3**, 3278 – 3282.
- Rab-Alibeik, H.; Setayeshi, S. (2003). Improved temperature control of a PWR nuclear reactor using an LQG/LTR based controller. *Nuclear Science, IEEE Transactions on* **50(1)**, 211 – 218.

- 
- Weerasooriya, S.; Phan, D.T. (1995). Discrete-time LQG/LTR design and modeling of a disk drive actuator tracking servo system. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* **Volume: 42**(Issue: 3), Pages:240 – 247.
- Wu, Ying-Yu Tzou. Hsiang-Jui (1995). LQG/LTR control of an AC induction servo drive. *IEEE Transactions on* **10**, 214 – 221.