

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Eletrodinâmicas do MPE não-mínimo com
altas
derivadas e violação da simetria de Lorentz**

Letícia Lisboa Dos Santos

**ORIENTADOR: MANOEL MESSIAS FERREIRA JR.
CO-ORIENTADOR: MARCO SCHRECK.**

SÃO LUÍS, 18 DE NOVEMBRO DE 2021

Eletrodinâmicas do MPE não-mínimo com altas derivadas e violação da simetria de Lorentz

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutor.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr.
Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, 18 DE NOVEMBRO DE 2021

dos Santos, Letícia Lisboa.

Eletrodinâmicas do MPE não-mínimo com altas derivadas e violação da simetria de Lorentz./ Letícia Lisboa dos Santos - 2021
157 f.

Impresso por computador.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

Co-orientador: Marco Schreck.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

1. Simetria de Lorentz 2. Eletrodinâmica com altas derivadas. I Título

CDU

LETÍCIA LISBOA DOS SANTOS

**Eletrodinâmicas do MPE não-mínimo com
altas
derivadas e violação da simetria de Lorentz**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Manoel Messias Ferreira Jr. (*Orientador*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Marco Schreck (*Co-orientador*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

José Abdalla Helayël-Neto

Doutor em Física - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

Doutor em Física - Universidade Federal do Ceará (UFC)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida, saúde e por continuar seguindo em frente, apesar das dificuldades.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, por todo apoio e cuidado durante todos esses anos.

Ao meu amor, João Alfíeres, que a Física me deu de presente. Obrigada por todo apoio e por tornar a caminhada mais suave.

Ao meu orientador, Manoel Messias, pela orientação durante esses longos anos.

Ao meu co-orientador, Marco Schreck, pela grande colaboração na minha carreira científica.

Aos professores do departamento de Física e PPGF da UFMA por todas as disciplinas ministradas.

Aos professores, Casana, Helayël e Maluf, por terem aceitado participar da minha banca e por todas as sugestões para a finalização desta tese.

Aos colegas e amigos do grupo GFTPC, muito obrigada pelos momentos de descontração.

Às agências CAPES, CNPq e FAPEMA pelo suporte financeiro.

Por fim, obrigada universo!

"Science will not light the lamp in a person whose soul has no fuel."

Michel de Montaigne.

Resumo

Nesta tese, apresentamos uma revisão da eletrodinâmica de Podolsky e da eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo de altas derivadas, CPT-par e dimensão 6. Analisamos para a eletrodinâmica de Podolsky as equações de movimento para os potenciais, encontrando a solução para o potencial eletrostático através do método de Green. Em seguida, calculamos o propagador de Feynman, cujos pólos fornecem as relações de dispersão da teoria, que permitem avaliar a causalidade, estabilidade e unitariedade da teoria. Estudamos também uma generalização da eletrodinâmica de Maxwell envolvendo termos anisotrópicos, CPT-pares, de Podolsky e Lee-Wick.

Além disso, examinamos uma eletrodinâmica de altas derivadas do setor CPT-ímpar do Modelo Padrão estendido (MPE) não-mínimo, de dimensão 5, acoplada a um tensor de violação de Lorentz. O termo da eletrodinâmica em questão tem a forma $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}$. Calculamos o propagador da teoria, analisamos as relações de dispersão dos setores isotrópico e anisotrópico. Verificamos que a causalidade é válida para todas as escolhas dos parâmetros, mas a unitariedade da teoria não é garantida. De forma análoga, também estudamos o termo de dimensão 5, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda T_\kappa (T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu}$, com altas derivadas que está diretamente ligado à teoria de fótons de Myers-Pospelov. Nesse modelo, obtemos para a escolha do tensor de fundo tipo-tempo dois modos para a relação de dispersão. Um modo é causal, enquanto o outro viola a causalidade. A unitariedade é preservada enquanto a energia permanece real, mesmo para o modo não causal. Para o tensor de fundo espacial, a causalidade é violada dentro de certos regimes. No entanto, existem configurações particulares que preservam a unitariedade e há fortes indicações numéricas de que a unitariedade é garantida para todas as configurações puramente espaciais.

Investigamos também o termo $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}$ e analisamos os aspectos clássicos das equações modificadas do tipo Maxwell, bem como o cálculo do quadri-potencial A_μ para obter os campos magnéticos e elétricos modificados pelo tensor de violação de Lorentz.

Por fim, investigamos uma eletrodinâmica planar modificada. Propomos uma teoria tipo Chern-Simons, em 1+2 dimensões, dotada de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz. O setor eletromagnético deste modelo possui uma contribuição CPT-ímpar, $\varepsilon^{\lambda\mu\nu} A_\lambda (\hat{k}_{AF}) F_{\mu\nu}$, que está relacionada a uma generalização do termo tipo Chern-Simons.

Palavras-chaves: Modelo Padrão Estendido não-mínimo, Violação de Lorentz, setores CPT-par e CPT- ímpar, eletrodinâmica com altas derivadas, eletrodinâmica planar.

Abstract

In this thesis, we present a review of Podolsky's and Maxwell's electrodynamics modified by a higher-derivative, CPT-even and dimension-6 term. For Podolsky's electrodynamics we analyze the equations of motion and find the solution for the electrostatic potential through Green's method. We also calculate the Feynman propagator and, by combining the poles, we get the dispersion relations of the theory, which allows us to evaluate causality, stability and unitarity of the theory. We study a generalization of Maxwell's electrodynamics involving anisotropic, CPT-even, Podolsky and Lee-Wick terms.

Furthermore, we examine a CPT-odd, higher-derivative and dimension-5 electrodynamics of the nonminimal Standard-Model Extension (SME) coupled to a tensor that controls Lorentz violation. The modification introduced has the form: $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}$. We calculate the propagator of the theory and we also analyze the dispersion relations for the isotropic and anisotropic sectors. We verified that causality is valid for all parameters that we choose; however unitarity of the theory is not guaranteed. Analogously, we study the dimension-5 term, given by $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda T_\kappa (T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu}$ with higher derivatives, which is directly linked to the theory of Myers-Pospelov for photons. In this model we obtain, for a time-like tensor background, two propagation modes. One of them is causal, while the other one isn't. Unitarity is preserved while energy remains real, even for the noncausal mode. For the spacelike background, causality is violated within certain regimes. However, there are particular configurations that preserve unitarity and there are strong numerical indications that unitarity is guaranteed for all purely spacelike configurations.

We also examine the term $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}$. In this context, we analyze the classical aspects of the modified Maxwell equations and calculate the four-potential A_μ in order to obtain the electric and magnetic fields modified by the Lorentz-violating tensor.

Finally, we investigate a modified planar electrodynamics. We propose a Chern-Simons-like theory in $(1 + 2)$ dimensions endowed with higher derivatives and Lorentz violation. The electromagnetic sector has a CPT-odd contribution, $\varepsilon^{\lambda\mu\nu} A_\lambda (\hat{k}_{AF}) F_{\mu\nu}$, which is related to a generalized Chern-Simons-like term.

Keywords: Nonminimal Standard-Model Extension, Lorentz violation, CPT-odd and CPT-even sectors, electrodynamics with higher-order derivatives, Podolsky electrodynamics, Planar electrodynamics.

Sumário

Introdução	1
1 O Modelo Padrão Estendido	6
1.1 Introdução	6
1.2 Setor de gauge eletromagnético CPT-par do Modelo Padrão Estendido	7
1.2.1 Parametrização matricial	9
1.3 Setor de gauge CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido	10
1.4 Setor de gauge do MPE não-mínimo	12
2 Eletrodinâmica de Podolsky	14
2.1 Introdução	14
2.2 Equações de movimento e soluções clássicas	15
2.3 Propagador de Feynman para a eletrodinâmica de Podolsky	18
3 Eletrodinâmica de Maxwell com termo de alta derivada de dimensão-6 CPT-par	22
3.1 Introdução	22
3.2 Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo de dimensão 6	22
3.2.1 O propagador de Feynman da eletrodinâmica com altas derivadas	24
3.2.2 Relação de dispersão e causalidade	29
3.2.3 Análise da unitariedade	42
4 Generalização da eletrodinâmica de Maxwell envolvendo termos anisotrópicos, CPT-pares, de Podolsky e Lee-Wick	46
4.1 Introdução	46
4.2 Eletrodinâmica de Maxwell envolvendo termos anisotrópicos de Podolsky e Lee-Wick	47
4.2.1 Relação de dispersão	48
4.3 Conexão com o MPE -não mínimo	60

5	Eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo CPT-ímpar com altas derivadas	62
5.1	Introdução	62
5.2	Eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo de altas derivadas, CPT-ímpar e dimensão 5: modelo simples	62
5.2.1	Relação de dispersão	66
5.2.2	Unitariedade	69
5.3	Eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo de altas derivadas, CPT-ímpar de dimensão 5: segundo modelo	74
5.3.1	Relação de dispersão	77
5.3.2	Unitariedade	82
5.4	Soluções clássicas	90
5.4.1	Equações de movimento	91
5.4.2	Soluções clássicas estacionárias para potencial escalar e vetor	91
6	Eletrodinâmica planar tipo Chern-Simons com altas derivadas e violação de Lorentz	98
6.1	Introdução	98
6.2	Teoria de Chern-Simons não-mínima	99
6.3	Equação de movimento	101
6.4	Eletrodinâmica de Deser-Jackiw	102
6.4.1	Propagador planar de Chern-Simons com Deser-Jackiw sem Maxwell	103
6.5	Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons modificada por termo CPT-ímpar de altas derivadas	105
6.6	Eletrodinâmica planar de Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas	108
6.7	Equações de movimento	113
7	Conclusão	116
A	Comparação com o propagador da teoria MCFJ	120
B	Mapeamento dos modelos de dimensão 5 para o MPE não-mínimo	122
C	Integrais da solução estacionária para o potencial escalar e vetorial	124
D	Alternativas para trabalhar CS com altas derivadas	127
D.1	Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Deser-Jackiw	127
D.1.1	Eletrodinâmica de Maxwell-Deser-Jackiw	128

D.2	Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas	128
D.3	Eletrodinâmica de Maxwell com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas . .	130
D.3.1	Eletrodinâmica de Deser-Jackiw com VL	133
D.4	Artigo referente aos Capítulos 3 e 4	144
D.5	Artigo referente ao Capítulo 5	145

Introdução

A física além do modelo padrão está sob amplo desenvolvimento nos últimos anos, abrangendo teorias que violam a simetria de Lorentz como um ramo de investigação. O modelo padrão estendido (MPE) é um arcabouço da teoria de campos efetiva obtida do MP, incluindo termos adicionais que consistem em acoplamentos escritos como contrações tensoriais entre os campos físicos e tensores de campos de fundo [1, 2], em que esses campos de fundo controlam a intensidade da violação da simetria de Lorentz. Além disso, estes campos introduzem direções privilegiadas no espaço-tempo. Estudos do MPE têm sido realizados para procurar efeitos da violação da simetria de Lorentz e desenvolver um programa de precisão que nos permite examinar os limites da simetria de Lorentz em várias interações físicas.

A investigação das possíveis violações das simetrias do espaço-tempo abrem janelas para explorar aspectos fundamentais da natureza. Nesta direção, a busca por modelos que nos indiquem como estes efeitos podem ser implementados se faz necessário. A partir destes modelos, pode-se comparar a teoria aos experimentos na tentativa de verificar ou não as violações da estrutura espaço-temporal. Acredita-se que a escala de Planck é o cenário onde pequenas violações da invariância da simetria de Lorentz podem de fato acontecer. Acredita-se que nesta escala a estrutura do espaço-tempo passa a apresentar flutuações na geometria. Existem modelos teóricos que propõem essa suposição. Podemos citar, por exemplo, violações da simetria de Lorentz no contexto da teorias de cordas [3, 4, 5, 6, 7] e também em teorias de gravitação quântica em *loop* [8, 9]. Por outro lado, partindo-se da ideia que violações da simetria de Lorentz são de fato factíveis, podemos citar uma série de estudos teóricos que baseiam-se neste novo cenário. Destacamos os modelos baseados em espaços-tempo não-comutativos [10, 11]. Nestes modelos, as coordenadas do espaço-tempo de Minkowski x^μ não são apenas números reais. Estes objetos agora são promovidos a operadores que satisfazem uma relação de comutação, a saber: $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$. A presença do tensor não-dinâmico $\theta^{\mu\nu}$, em geral, provoca efeitos que podem ser associados à violação da simetria de Lorentz como, por exemplo, anisotropia em modos de propagação de campos e partículas no vácuo. Existem na literatura outras hipóteses capazes de produzir efeitos ligados à violação da simetria de Lorentz. Um modelo bastante promissor tem seu alicerce nos chamados *spacetime foam* [12, 13, 14]. O conceito por trás destas teorias consiste em compreender como as flutuações de energia na escala de Planck podem in-

fluenciar a geometria do espaço-tempo e, conseqüentemente, como a propagação de partículas nestas estruturas modificadas seriam afetadas. Por último, destacamos as teorias de campos definidas em espaços-tempo com topologias não-triviais [15, 16, 17, 18, 19] e a gravidade de *Hořava-Lifshitz* [20] que tem como base a violação da simetria de Lorentz.

No âmbito do MPE muitas investigações têm sido feitas no contexto da violação da simetria de Lorentz do setor fermiônico [21, 22, 23], violação da simetria CPT [24], o setor eletromagnético CPT-ímpar [25, 26, 27], o setor eletromagnético CPT-par [28, 29], e interações fóton-férmion [30, 31, 32]. Assim, vemos que diversos estudos incluindo Violação da Simetria de Lorentz (VSL) têm sido realizados nos últimos anos, em que o MPE mínimo admite apenas contribuições com VSL de dimensões de massa 3 e 4. Contribuições de VSL com dimensões superiores pertence ao MPE não mínimo e serão abordados adiante.

Como pode-se observar, estudos dos setores dos fótons, férmions, neutrinos, entre outros, são bastante vastos. Porém, com a finalidade de fornecer um compilado acessível com os *bounds* mais restritivos já obtidos para os coeficientes mínimos e não-mínimos, Kostelecký e Russell publicaram o conhecido, e anualmente atualizado, *Data Table* [33].

Outra abordagem à pesquisa em eletrodinâmicas modificadas inclui a possibilidade de derivadas superiores. Esta ideia foi proposta pela primeira vez por Podolsky em 1942 [34], que estudou inicialmente o termo de dimensão 6, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta$, que é invariante de *gauge* e Lorentz. Essa teoria exhibe duas relações de dispersão, a usual da teoria de Maxwell e um modo massivo, que torna a energia de uma carga pontual finita [35]. No entanto, no nível quântico, o modo massivo produz problemas de unitariedade [36]. A condição de fixação do *gauge* de Lorentz não é a correta para a eletrodinâmica de Podolsky que apresenta cinco graus de liberdade: 2 graus de liberdade do fóton usual e 3 conectados ao modo massivo [37]. Na Ref. [37] podemos encontrar a condição de fixação do *gauge* mais adequada, chamada de *condição de Lorentz generalizada*, que é compatível com os 3 graus de liberdade relacionados ao modo massivo. Outros desenvolvimentos na teoria de Podolsky merecem ser mencionados como, por exemplo, implicações na lei de Stefan-Boltzmann foram estudadas usando o formalismo de temperatura finita [38].

A estrutura canônica da teoria foi estudada em [37, 39] e sua quantização tanto no formalismo BFV como no formalismo de integrais de caminho foram desenvolvidas em [40, 41]. Aspectos como auto-força e autointeração foram investigados em [42, 43]. Além disso, um estudo minucioso das funções de Green e das soluções clássicas foram feitos nas referências [44, 45]. Estudos complementares da eletrodinâmica de Podolsky foram feitos em [46], onde a expansão multipolar para campos no regime estático foi calculada. O método de simetrização de calibre foi empregado em [47, 48] com a finalidade de se obter o tensor energia-momento em sua forma simétrica. Já o problema de estabilidade na eletrodinâmica generalizada de Podolsky baseada no formalismo BRST foi investigado em [49]. Investigações envolvendo espalhamento elétron-pósitron e potenciais não-relativísticos dependentes do spin e da velocidade foram feitas em [50, 51], bem como no cenário de defeitos topológicos [52].

Outra extensão da teoria de Maxwell contendo derivadas superiores é a eletrodinâmica de Lee-Wick, descrita pelo termo de dimensão 6, $F_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha F^{\mu\nu}$ [53]. Essa teoria também implica em uma energia finita para uma carga pontual em $(1 + 3)$ dimensões do espaço-tempo. A eletrodinâmica de Lee-Wick também fornece uma contribuição bilinear para a Lagrangiana de Maxwell, que é semelhante ao termo de Podolsky, mas com sinal oposto. Este termo causa instabilidades de energia no nível clássico e estados de norma negativa no espaço de Hilbert no nível quântico. Após anos, essa teoria voltou a receber atenção com a proposta do Modelo Padrão de Lee-Wick [54], que se baseia em uma estrutura de gauge não Abeliana livre de divergências quadráticas, com interessante fenomenologia [55] e estudo das características da eletrodinâmica quântica [56]. Neste contexto, investigações gerais de extensões VSL são encontradas, bem como aplicações na energia de auto interação de fontes pontuais [57, 58, 59, 60].

Os termos que envolvem altas derivadas, quase sempre, são considerados como correções do modelo modificado em questão. Dessa forma são, em muitas ocasiões, tratados como perturbações [61, 62, 63, 64, 65]. Mesmo nessas situações, por mais fracos que sejam os operadores de derivadas superiores acoplados, a teoria modificada sofrerá um aumento em seus graus de liberdade. Sendo assim, para que a descrição do problema seja consistente, é necessário manter os graus de liberdades extras que surgem. Por sorte, a formulação Hamiltoniana para sistemas da mecânica clássica com derivadas temporais mais altas existe, e foi desenvolvida por Ostrogradski em 1850 [66].

Teorias que violam a simetria de Lorentz são também conectadas a teorias dotadas de derivadas de ordens superiores. Nesse contexto, a violação de Lorentz pode incorporar operadores de dimensão de massa mais alta, que podem incluir termos de altas derivadas. Versões não mínimas do MPE foram inicialmente desenvolvidas para o setor fotônico [67] e o setor de férmions [68, 69], concretizando exatamente um modelo onde a VSL é associada a termos de altas derivadas.

A Lagrangiana não mínima para fótons pode ser escrita de forma semelhante a do setor mínimo:

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (1)$$

com A_μ sendo o campo de gauge do grupo $U(1)$, enquanto $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor "field strength" associado. Todos os campos são definidos no espaço-tempo de Minkowski com tensor métrico $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. O símbolo de Levi-Civita é denotado por $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, onde usamos a convenção $\epsilon^{0123} = 1$. Os operadores $(\hat{k}_{AF})_\kappa$ e $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ representam as versões não mínimas dos coeficientes mínimos correspondentes, $(k_{AF})_\kappa$ e $(k_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$. São dados por séries infinitas de operadores CPT-ímpares e CPT-pares de derivadas de ordens superiores:

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = \sum_{d=\text{ímpar}} (k_{AF}^{(d)})_\kappa^{\alpha_1\dots\alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (2a)$$

$$(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d=\text{par}} (k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{(d-4)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-4)}}, \quad (2b)$$

onde d é a dimensão de massa de cada operador de campo associado e os índices, $i = 1, 2, 3, \dots, d-4, d-3$, rotulam a ordem das derivadas. Portanto, o MPE não mínimo é uma generalização do MPE mínimo que inclui termos adicionais não renormalizáveis de derivadas de ordens superiores. Nesse contexto, o MPE mínimo pode ser interpretado como uma correção de ordem zero para o MPE não mínimo, onde as contribuições $d = 5, 6, 7, 8\dots$ são interpretadas como correções de mais altas ordens. As correções de derivadas mais altas tornam-se relevantes na medida em que consideramos escalas de energia mais altas. Assim, os coeficientes do MPE não mínimo podem ser úteis para investigar propriedades fundamentais, como causalidade, estabilidade e unitariedade de teorias de campos efetivas em escalas de energia mais altas.

É importante mencionar que escolhas particulares de coeficientes não mínimos foram propostas e investigadas em outras modificações da eletrodinâmica, incluindo operadores de dimensões superiores [70, 71]. Teorias não mínimas contendo acoplamentos de dimensões superiores também podem ser construídas sem a introdução direta de derivadas superiores. Tais acoplamentos foram considerados inicialmente em [72, 73] e foram propostos recentemente em cenários mais amplos [74, 75]. Diversas aplicações destes modelos são encontrados na literatura, incluindo o espalhamento fóton-fóton [76], interações eletrofracas [77] e a eletrodinâmica escalar [78]. Os termos modificados por altas derivadas com violação de Lorentz foram também gerados recentemente de outras formas, como por meio de correções quânticas da ação efetiva do fóton em um cenário com um acoplamento não mínimo entre férmions e fótons [79, 80], bem como em cenários supersimétricos [81, 82].

Nesta tese vamos apresentar uma eletrodinâmica CPT-par, dimensão-6, com derivadas de ordem superior, composta por um termo de Podolsky anisotrópico, $\partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha}$, e um termo anisotrópico de Lee-Wick, $F_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\mu\nu} D^{\alpha\beta}$, respectivamente, com $D^{\alpha\beta}$ representando um tensor de fundo de *rank*-2. Ambos os modelos podem ser mapeados na estrutura não mínima de dimensão 6 da Eq. (1.31). Obtivemos os propagadores e examinamos as relações de dispersão para várias configurações do tensor de *rank*-2. Descobrimos que o modelo exhibe modos causais e não-causais, bem como modos unitários e não-unitários [83]. Ambos os modelos são apresentados nos capítulos 2 e 3 dessa tese, respectivamente.

No capítulo 4, apresentamos uma eletrodinâmica de Maxwell com altas derivadas, CPT-ímpar, de dimensão 5. Através do operador CPT-ímpar não mínimo, $(\hat{k}_{AF})_\kappa$, escrevemos um termo mais simples, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}$, e um termo mais complexo, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda T_\kappa (T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu}$, ambos de dimensão 5. Para ambos os modelos calculamos o propagador e obtemos as relações de dispersão da teoria. Através das relações de dispersão, analisamos algumas configurações do campo de fundo e buscamos setores onde a energia é bem definida, a causalidade e unitariedade são asseguradas.

Ainda no capítulo 4, analisamos as soluções clássicas para o 4-potencial do modelo mais simples, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}$. O objetivo é mostrar como os termos de violação com derivadas superiores modificam as soluções clássicas da teoria de Maxwell. Através da equação de movimento obtemos as equações de onda para o potencial escalar e vetorial, resolvidas através

do método de Green. Com o potencial em mãos, podemos obter os campos elétricos e magnéticos e analisar as contribuições advindas do tensor de violação. Um estudo das soluções clássicas no cenário com quebra de Lorentz, para derivadas de ordem superior é encontrado na ref. [84], em que são examinados efeitos relevantes nos fenômenos de baixa energia, e associadas a modificações essenciais sobre os campos elétrico e magnético.

No capítulo 5, propomos uma eletrodinâmica planar tipo Chern-Simons com altas derivadas e violação da simetria de Lorentz. Apresentamos também algumas opções de teorias planares que podem ser examinadas. Analisamos uma eletrodinâmica de dimensão 5 na ausência do termo de Maxwell, obtivemos os modos de propagação da teoria através do propagador de Feynman e observamos que a relação de dispersão obtida corresponde a modo propagante, cuja dinâmica advém da presença dos termos de altas derivadas.

Capítulo 1

O Modelo Padrão Estendido

1.1 Introdução

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria efetiva que compartilha várias propriedades do Modelo Padrão já conhecidas, tais como renormalizabilidade, conservação da energia e momento, simetria e estrutura de calibre, mas não preserva a simetria de Lorentz, além de poder violar a simetria CPT, que é formada pela combinação de três transformações: conjugação de carga (C), inversão de paridade (P) e reversão de tempo (T), [85], [86]. O Modelo Padrão Estendido foi proposto em 1998. Em 1989 Kostelecký e Samuel [87], lançaram a idéia da quebra espontânea da simetria de Lorentz no contexto da teoria das cordas.

A simetria de Lorentz é uma simetria contínua e é dada pela invariância perante as transformações de Lorentz por meio de rotações e boosts. Em que a rotação ocorre sobre cada uma das três direções espaciais, assim temos três possíveis tipos de rotação. Um boost é uma mudança de velocidade que ocorre ao longo de cada uma das três direções espaciais, ou seja, existem também três tipos possíveis de boosts.

Quando um sistema físico tem a simetria de Lorentz violada quer dizer que as leis da física são afetadas pelas transformações de Lorentz de partícula, [88]. A simetria de Lorentz é preservada do ponto de vista de uma transformação de observador, ou seja, quando efetuamos mudanças relativas ao sistema de coordenadas. Já do ponto de vista de uma transformação de partícula, os campos são transformados, porém, os campos de fundo permanecem intactos, ou seja, mantém a mesma direção. Dessa maneira, observamos que as medidas obtidas após uma transformação de partícula serão diferentes.

A violação da simetria de Lorentz ocorre de duas maneiras, de forma explícita e de forma espontânea. A quebra explícita difere-se da quebra espontânea no que diz respeito à maneira como elas surgem na teoria. A quebra explícita, por exemplo, não depende de um mecanismo para ser gerada. Os termos que induzem essa quebra de simetria são introduzidos à mão. Por outro lado, a quebra espontânea da simetria é caracterizada por ser uma espécie de transição

de fase. Assim, é necessário um mecanismo para que tal transição ocorra. Os campos de fundo são, portanto, identificados como sendo valores esperados do vácuo de algum campo tensorial dinâmico antes da transição de fase ocorrer que indicam direções privilegiadas no espaço.

Os termos que incorporam a violação das simetrias discretas e contínuas, CPT e Lorentz, respectivamente, são constituídos pela contração de operadores de campos com constantes de acoplamento tensoriais, que carregam um ou mais índices de Lorentz. Essas constantes de acoplamento tensoriais induzem a quebra das simetrias CPT e Lorentz permeando o espaço-tempo, fornecendo uma estrutura para o vácuo da teoria.

Da mesma forma, diz-se que um sistema tem "simetria CPT" se a física não for afetada pela transformação combinada CPT. A simetria de Lorentz forma a base da relatividade restrita de Einstein. A junção das duas simetrias, Lorentz e CPT, forma o teorema CPT que afirma que teorias de campo quânticas locais com simetria de Lorentz também devem ter simetria CPT. [85]. Essas teorias incluem todas as usadas para descrever a física de partículas, por exemplo, a eletrodinâmica ou o Modelo Padrão e muitas teorias propostas, por exemplo, Teorias da Grande Unificação que se baseiam também na teoria quântica de campos local e invariante de Lorentz.

O setor eletromagnético do MPE é constituído pelos setores CPT-ímpar e CPT-par. O setor CPT- ímpar é caracterizado pelo tensor $(k_{AF})_{\kappa}$ e é representado pela eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [89], com muitas propriedades estudadas na literatura [90, 91, 92]. O setor CPT-par é representado pelo tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ que contém 19 componentes independentes, sendo suas simetrias compatíveis com a maneira como o mesmo está acoplado ao tensor do campo eletromagnético. O setor CPT-par tem sido estudado desde 2002 em diversas áreas da física [93, 94], após as contribuições iniciais de Kostelecký e Mewes [95].

1.2 Setor de gauge eletromagnético CPT-par do Modelo Padrão Estendido

A Lagrangeana do setor eletromagnético CPT-par do MPE, no que se refere ao setor de fótons depois da quantização, é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{CPT-par}}, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu}F^{\alpha\lambda}F^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ representa um tensor de rank-4, real, adimensional e possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann, dadas pelas relações

$$(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu} = -(k_F)_{\lambda\alpha\mu\nu} = (k_F)_{\mu\nu\alpha\lambda} = -(k_F)_{\mu\nu\lambda\alpha}, \quad (1.5)$$

$$(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu} + (k_F)_{\alpha\mu\nu\lambda} + (k_F)_{\alpha\nu\lambda\mu} = 0, \quad (1.6)$$

onde a última equação é uma identidade tipo Bianchi. As simetrias acima reduzem o número de componentes independentes do tensor $(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu}$ de 256 para 20. O fato de possuir o duplo traço nulo,

$$(k_F)_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 0,$$

reduz uma componente a mais, perfazendo o total de 19 componentes independentes. O duplo traço nulo tem por objetivo excluir a contribuição Lorentz-invariante, $(E^2 - B^2)$ termo de Maxwell, da estrutura $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

O termo de violação da simetria de Lorentz pode ser escrito desenvolvendo a soma de Einstein:

$$(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu} = 4(k_F)_{0i0j} F^{0i} F^{0j} + 4(k_F)_{0ilm} F^{0i} F^{lm} + (k_F)_{ablm} F^{ab} F^{lm}. \quad (1.7)$$

Sabendo-se que

$$F^{0i} = E^i, \quad F^{lm} = \epsilon_{lmp} B_p,$$

a Lagrangeana em termo dos campos elétrico e magnético assume forma

$$\mathcal{L}_{LV} = -\frac{1}{4} \left[4(k_F)_{0i0j} E^i E^j + 4(k_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} E^i B^p + (k_F)_{ablm} \epsilon_{abq} \epsilon_{lmp} B^q B^p \right]. \quad (1.8)$$

A simetria discreta CPT corresponde à combinação das simetrias discretas de conjugação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T). A simetria P quando aplicada a um sistema de coordenadas tridimensional muda a orientação dextrogira (orientação para a direita) para uma orientação levógira (esquerda). A simetria discreta C não tem nenhuma relação com as coordenadas espaço-temporais. Essa simetria relaciona as partículas com suas anti-partículas. A simetria T , a reversão temporal, como o nome já diz, reverte o sinal do tempo mantendo fixa as coordenadas espaciais.

Vamos agora realizar a classificação sobre as simetrias discretas CPT dos coeficientes de $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$.

Sob a transformação de carga C , ocorre: $E \rightarrow -E$ e $B \rightarrow -B$. Como todos os termos da lagrangeana (1.8) são bilineares nos campos E e B , não há qualquer reversão de sinal, indicando que os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{0ilm}$, $(k_F)_{ablm}$ são C -pares.

Sob a transformação de paridade P , ocorre: $E \rightarrow -E$ e $B \rightarrow B$. Vemos que o único termo que há reversão de sinal é

$$(k_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} (-E^i) B^p, \quad (1.9)$$

indicando que os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{ablm}$ são P -pares e $(k_F)_{0ilm}$ são P -ímpares.

Sob a transformação temporal T , ocorre $E \rightarrow E$ e $B \rightarrow -B$. Do mesmo modo, temos que o único termo que inverte o sinal é

$$(k_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} E^i (-B^p), \quad (1.10)$$

indicando que os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{ablm}$ são T -pares e $(k_F)_{0ilm}$ são T -ímpares.

Sob as transformações, CPT temos que $E \rightarrow E$ e $B \rightarrow B$. Logo os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{0ilm}$, $(k_F)_{ablm}$ são CPT -pares.

A Tabela 1.1 mostra um resumo dos coeficientes sob as transformações CPT.

	C	P	T	CPT
$(k_F)_{0i0j}$	+	+	+	+
$(k_F)_{0ilm}$	+	-	-	+
$(k_F)_{ablm}$	+	+	+	+

Tabela 1.1: Coeficientes sob as transformações CPT

1.2.1 Parametrização matricial

Uma parametrização muito útil para abordar esta teoria pode ser encontrada na referência [95]. As 19 componentes do tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ podem ser reescritas na forma de quatro matrizes 3×3 ,

$$(\kappa_{DE}), (\kappa_{HB}), (\kappa_{DB}), (\kappa_{HE}),$$

que são definidas como

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -2(\kappa_F)^{0j0k}, \quad (1.11)$$

$$(\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{j pq}\epsilon^{klm}(\kappa_F)^{pqlm}, \quad (1.12)$$

$$(\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{HE})^{kj} = \epsilon^{kpq}(\kappa_F)^{0j pq}, \quad (1.13)$$

em que a expressão (1.13) implica em $(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T$. Em concordância com esta parametrização, temos que

$$(\kappa_{DE})^{jk} = (\kappa_{DE})^{kj} \text{ e } (\kappa_{HB})^{jk} = (\kappa_{HB})^{kj}, \quad (1.14)$$

de modo que (κ_{DE}) e (κ_{HB}) são matrizes simétricas com 6 componentes cada. Como $(\kappa_{DB})^{jk}$ não tem simetria definida, tem a princípio 9 componentes.

Usando estas parametrizações, a Lagrangeana (1.8) assume a forma:

$$\mathcal{L}_{LV} = \frac{1}{2} \left[(\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j + 2(\kappa_{DB})_{ip} E^i B^p - (\kappa_{HB})_{qp} B^q B^p \right]. \quad (1.15)$$

Sabendo a forma como os campos E e B se transformam sob C , P , T , os coeficientes $(\kappa_{DE})_{ij}$, $(\kappa_{HB})_{qp}$, $(\kappa_{DB})_{ip}$ e $(\kappa_{HE})_{ip}$ são classificados sob simetrias discretas como mostrado na Tabela 1.2 a seguir.

	C	P	T	CPT
$(\kappa_{DE})_{ij}$	+	+	+	+
$(\kappa_{HB})_{qp}$	+	+	+	+
$(\kappa_{DB})_{ip}$	+	-	-	+
$(\kappa_{HE})_{ip}$	+	-	-	+

Tabela 1.2: Classificação sob as simetrias discretas CPT

O duplo traço nulo $(k_F)_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 0$ implica em

$$(k_F)_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 2(\kappa_F)_{0i}{}^{0i} + (\kappa_F)_{ij}{}^{ij} = -(\kappa_{DE})_i{}^i - (\kappa_{HB})^l{}_l = 0, \quad (1.16)$$

logo

$$(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})_i{}^i = 0. \quad (1.17)$$

Isso mostra que a matriz $(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})$, tem traço nulo. Logo

$$\begin{aligned} tr(\kappa_{DE}) + tr(\kappa_{HB}) &= 0, \\ tr(\kappa_{HB}) &= -tr(\kappa_{DE}). \end{aligned}$$

Esta condição reduz a soma das componentes de κ_{DE} e κ_{HB} de 12 para 11 componentes independentes.

Por outro lado, usando a propriedade (1.6), temos que

$$(k_F)_{0ilm} + (k_F)_{0lmi} + (k_F)_{0mil} = 0, \quad (1.18)$$

multiplicando por ϵ_{lmp} podemos escrever

$$(k_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} + (k_F)_{0lmi} \epsilon_{lmp} + (k_F)_{0mil} \epsilon_{lmp} = 0, \quad (1.19)$$

$$(k_{DB})_{ip} + (k_F)_{0lmi} \epsilon_{lmp} + (k_F)_{0mil} \epsilon_{lmp} = 0, \quad (1.20)$$

onde foi usado a propriedade (1.13). Multiplicando por δ_{ip} e usando novamente (1.13) obtemos

$$(\kappa_{DB})_{mm} = 0. \quad (1.21)$$

Lembrando que, $(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T$, implica em $tr(\kappa_{DB}) = -tr(\kappa_{HE})$. Concluimos que as matrizes κ_{DB} e κ_{HE} possuem ambas traço nulo. Possuem assim, juntas, $(9 - 1) = 8$ componentes independentes. Totalizando 19 componentes independentes, 11 do setor CPT- par e 8 do setor CPT- ímpar.

1.3 Setor de gauge CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido

A Lagrangeana do setor eletromagnético CPT-ímpar do MPE, no que se refere ao setor de fótons, é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}}, \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

onde o operador $(k_{AF})_\kappa$ representa um tensor de violação CPT- ímpar, é real e tem dimensão de massa igual a 1. Apenas a componente tipo-tempo, k_{AF}^0 , das quatro componentes independentes do operador $(k_{AF})_\kappa$ são associadas com termos invariantes sob uma rotação do referencial de

partícula. Da forma do tensor $(k_{AF})^\kappa$ vemos que se comporta, sob as transformações de Lorentz de partículas, como tensores com um número ímpar de índices de Lorentz.

A violação da simetria discreta CPT até então não foi observada na natureza, sendo assim, qualquer constante que viole CPT no MPE deve ser pequena.

O setor CPT- ímpar é representado pela eletrodinâmica tipo Carroll-Field-Jackiw [89]. Essa eletrodinâmica foi formulada com o objetivo de examinar as possibilidades de violação da simetria de Lorentz e da simetria CPT na eletrodinâmica de Maxwell. No entanto, a estrutura geral permite tratar as violações das simetrias de Lorentz e CPT em teorias de campo.

Do mesmo modo que foi feito para o setor CPT-par, podemos fazer a classificação sobre cada uma das simetrias discretas C, P e T dos coeficientes de $(k_{AF})^\kappa$. Para isso vamos escrever o termo da Lagrangeana $\mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}}$ em função dos campos elétrico e magnético,

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}} = \frac{1}{2} (k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

na forma:

$$(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu} = (k_{AF})^0 \epsilon_{0ilm} A^i F^{lm} + (k_{AF})^i \epsilon_{i0lm} A^0 F^{lm} + (k_{AF})^i \epsilon_{il0m} A^l F^{0m} + (k_{AF})^i \epsilon_{ilm0} A^l F^{m0},$$

sabendo que

$$F^{0i} = E^i, \quad F^{lm} = \epsilon^{lmp} B_p,$$

a Lagrangeana em função dos campos elétrico e magnético assume forma

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}} = \frac{1}{2} \left[(k_{AF})^0 \epsilon_{ilm} A^i \epsilon_{lmp} B^p + (k_{AF})^i \epsilon_{i0lm} A^0 \epsilon_{lmp} B^p + 2 (k_{AF})^j \epsilon_{jl0m} A^l E^m \right], \quad (1.25)$$

podemos simplificar a expressão acima usando

$$\epsilon_{0ilm} \epsilon_{lmp} = \epsilon_{ilm} \epsilon_{lmp} = 2\delta_{ip},$$

logo

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}} = \frac{1}{2} \left[2 (k_{AF})^0 A^p B_p + 2 (k_{AF})^p A^0 B_p + 2 (k_{AF})^j \epsilon_{jl0m} A^l E^m \right], \quad (1.26)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}} = (k_{AF})^0 A^p B_p + (k_{AF})^p A^0 B_p + (k_{AF})^j \epsilon_{jl0m} A^l E^m, \quad (1.27)$$

ou na forma

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-ímpar}} = (k_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \phi (\mathbf{k}_{AF} \mathbf{B}) + \mathbf{k}_{AF} (\mathbf{A} \times \mathbf{E}), \quad (1.28)$$

onde $\phi = A^0$ é o campo escalar.

A classificação sobre as simetrias discretas CPT dos coeficientes de $(k_{AF})^\kappa$ sob as transformações de carga são $A^\mu \rightarrow -A^\mu$, $E \rightarrow -E$ e $B \rightarrow -B$, indicando que os coeficientes $(k_{AF})^0$, $(k_{AF})^i$, $(k_{AF})^j$ são C - pares. Sob as transformação de paridade, temos $A^\mu \rightarrow (-1)^\mu$, $E \rightarrow -E$ e $B \rightarrow B$, indicando que os coeficientes $(k_{AF})^0$ e $(k_{AF})^i$ são P- pares e $(k_{AF})^j$ é P - ímpares. Sob a transformação temporal - T, ocorre $A^\mu \rightarrow (-1)^\mu$, $E \rightarrow E$ e $B \rightarrow -B$, indicando que os coeficientes $(k_{AF})^0$ e $(k_{AF})^i$ são T - ímpares e $(k_{AF})^j$ é T- pares.

	C	P	T	CPT
$(k_{AF})^0 A^p B_p$	+	+	-	-
$(k_{AF})^p A^0 B_p$	+	+	-	-
$(k_{AF})^j \epsilon_{jlm} A^l E^m$	+	-	+	-

Tabela 1.3: Classificação sob as simetrias discretas CPT

Logo os coeficientes $(k_{AF})^0$, $(k_{AF})^i$, $(k_{AF})^j$ são CPT - ímpares, como deveria ser, conforme mostra a Tabela 1.3.

Uma vez apresentado o MPE, ou MPE-mínimo vamos estudar teorias que violam a simetria de Lorentz conectadas a derivadas de ordens superiores. Nesse contexto, extensões não mínimas do MPE foram desenvolvidas, em ambos os setores dos fótons [67] e [68], composto de derivadas superiores CPT-pares e CPT-ímpares.

1.4 Setor de gauge do MPE não-mínimo

O Modelo Padrão Estendido não-mínimo é uma generalização do MPE mínimo que inclui termos não-mínimos de altas derivadas e não renormalizáveis. Neste contexto, o MPE mínimo pode ser entendido como uma correção em ordem zero do Modelo Padrão. As correções em ordens superiores envolvem derivadas de ordens mais altas que se tornam relevantes à medida em que a escala de energia cresce. A densidade de Lagrangeana para o MPE não-mínimo no setor fotônico pode ser escrita de uma maneira similar à construção do setor fotônico do MPE mínimo [96], a saber

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda \left(\hat{k}_{AF}\right)_\kappa F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\kappa\lambda} \left(\hat{k}_F\right)^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

Os operadores \hat{k}_{AF} e \hat{k}_F representam agora as versões não-mínimas daqueles presentes no MPE mínimo, envolvendo termos de derivadas superiores, dados por:

$$\left(\hat{k}_{AF}\right)_\kappa = \sum_{d \geq 3} \left(k_{AF}^{(d)}\right)_\kappa^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\dots \alpha_{(d-3)}}, \quad (1.30)$$

$$\left(\hat{k}_F\right)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d \geq 4} \left(k_F^{(d)}\right)^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-4)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\dots \alpha_{(d-4)}}, \quad (1.31)$$

onde d é a dimensão de massa de cada termo, e os índices α_i são índices de Lorentz das derivadas superiores. No termo CPT-ímpar, vale $d \geq 3$, enquanto no termo CPT-par temos $d \geq 4$. No termo CPT-ímpar, $d = 5$ e $d = 7$ envolvem uma e duas derivadas adicionais, respectivamente. No caso do termo CPT-par, as mesmas são designadas por $d = 6$ e $d = 8$, respectivamente.

Os coeficientes do MPE não-mínimo são não renormalizáveis e se tornam relevantes quando estamos interessados em investigar propriedades fundamentais, tais como causalidade, estabilidade e unitariedade em escalas de energia mais altas. A depender da escala de energia em

questão os efeitos destes coeficientes não-renormalizáveis podem tornar-se dominantes. Como exemplo, a ação da eletrodinâmica quântica não-comutativa [97] incorpora os efeitos de violação da simetria de Lorentz associados com a não-trivialidade das relações de comutação entre as coordenadas do espaço-tempo [98]. De maneira similar, operadores com valores de d muito grande dominam em teorias com violação da simetria de Lorentz em supersimetria [99].

A QED não-comutativa pode ser mapeada para uma QED comutativa através do mapeamento de Seiberg-Witten [100]. Após este mapeamento, é possível tratar o campo eletromagnético obtido de maneira perturbativa. Neste tratamento é possível observar que a densidade de Lagrange obtida pode ser identificada como parte do setor eletromagnético não-mínimo do MPE.

Capítulo 2

Eletrodinâmica de Podolsky

2.1 Introdução

A eletrodinâmica de Podolsky é uma generalização da teoria de Maxwell. Essa eletrodinâmica inclui um termo de altas derivadas, que contém duas ordens derivativas adicionais atuando sobre o tensor do campo eletromagnético, ou mais especificamente, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta$. A teoria de Podolsky foi apresentada no artigo [34], no início dos anos 40. É uma teoria de segunda ordem que preserva as duas simetrias básicas da teoria eletromagnética: *gauge* e Lorentz. Portanto, é um termo de dimensão 6, *gauge*-invariante e Lorentz-invariante, mas não possui a simetria da dualidade dos campos eletromagnéticos livres como mostraremos no decorrer deste capítulo.

Alguns exemplos de Lagrangeanas, com termos de segunda ordem na derivada, são encontrados na literatura, como a Lagrangeana efetiva de Alekseev, Arbuzov e Baikov [101], que descreve o regime infravermelho do glúon na QCD.

A eletrodinâmica de Podolsky, produz um modo propagante massivo, sem quebrar a simetria de *gauge*, sendo neste aspecto distinto da teoria de Proca. Em 1942, estudos sobre a teoria de Podolsky foram iniciados e continuam sendo feitos em diversas áreas da física, como exemplos a obtenção de soluções clássicas para esta teoria, baseada no cálculo da correspondente função de Green e das expansões multipolares, foi realizada na Ref. [35]. A eletrodinâmica de Podolsky à temperatura finita foi examinada na Ref. [41], onde foram calculadas correções à lei de Stefan-Boltzmann. Também encontramos na literatura a quantização covariante da eletrodinâmica de Podolsky pelo método dos vínculos de Dirac [38].

Neste capítulo, faremos uma breve revisão dos aspectos mais elementares da eletrodinâmica de Podolsky. Iniciamos apresentando a densidade de Lagrangeana de Podolsky e as equações de movimento e as equações de onda satisfeitas pelos potenciais. Fixando a condição de calibre adequada, obtemos a equação de onda estacionária para o potencial escalar e vetor, para os quais a correspondente função de Green é calculada. Apresentamos a solução do potencial eletrostático, particularizando-o para o caso de uma carga pontual, e discutindo alguns limites

interessantes. Por fim, calculamos o propagador de Feynman desta teoria, obtendo as relações de dispersão a partir dos seus polos. Finalizamos analisando a causalidade, estabilidade e unitariedade da teoria.

2.2 Equações de movimento e soluções clássicas

A Lagrangiana de Podolsky, na presença de fontes, é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_\beta - j_\mu A^\mu, \quad (2.1)$$

onde θ^2 é um fator com dimensão de massa -2 , $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ é a 4-corrente que representa as fontes do campo.

A equação de Euler Lagrange para teorias com derivadas de ordem superior [103] é dada por:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} + \partial_\nu \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\kappa)} = 0. \quad (2.2)$$

Sabemos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -j^\kappa, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -F^{\rho\kappa}, \quad (2.3)$$

$$\partial_\rho \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \partial_\rho A_\kappa)} = \theta^2 \square \partial_\lambda F^{\lambda\kappa}, \quad (2.4)$$

e observamos que o último termo da Eq. (2.2) só resulta não-nulo quando atua sobre o termo de Podolsky. A equação de Euler Lagrange então fornece:

$$(1 + \theta^2 \square) \partial_\alpha F^{\alpha\kappa} = j^\kappa, \quad (2.5)$$

o que leva às duas equações de Maxwell não-homogêneas (modificadas pelo termo de Podolsky), na forma:

$$(1 + \theta^2 \square) \partial_j E^j = \rho, \quad (2.6)$$

$$(1 + \theta^2 \square) (\varepsilon_{ijk} \partial_j B^k - \partial_t E^i) = j^i. \quad (2.7)$$

Da identidade de Bianchi,

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0,$$

advêm as duas equações de Maxwell homogêneas não-modificadas

$$\partial_j B^j = 0, \quad (2.8)$$

$$(\varepsilon_{ijk} \partial_j E^k + \partial_t B^i) = 0. \quad (2.9)$$

O conjunto das equações de Maxwell modificadas é dado por

$$(1 - \theta^2 \square) (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \rho, \quad (2.10)$$

$$(1 - \theta^2 \square) (\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E}) = \mathbf{j}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (2.12)$$

cuja forma estacionária é

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \rho, \quad (2.13)$$

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{j}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.16)$$

Aplicando as transformações de dualidade, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}'$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}'$, sobre as eqs. (2.10-2.12), vemos que tais equações não permanecem invariantes, indicando a que a eletrodinâmica de Podolsky não possui simetria de dualidade.

A equação de onda para o 4-potencial, tem a forma

$$(1 + \theta^2 \square) (\square A^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha) = j^\beta. \quad (2.17)$$

Na eletrodinâmica de Podolsky, assim como ocorre na eletrodinâmica de Maxwell pura, o número de graus de liberdade físicos é menor que o número de componentes do campo de *gauge*, surgindo a necessidade de fixação do calibre. Uma escolha possível e covariante, seria o calibre de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, com o qual a eq. (2.17) recai em

$$(1 + \theta^2 \square) \square A^\beta = j^\beta. \quad (2.18)$$

Partindo da eq. (2.17), encontramos as equações estacionárias para os potenciais escalar e vetorial:

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) (\nabla^2 A_0) = -\rho, \quad (2.19)$$

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) (\nabla^2 A^i - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})) = -j^i. \quad (2.20)$$

Na literatura especializada, há um calibre específico para a eletrodinâmica de Podolsky, encontrado na Ref. [37], denominado de calibre de Coulomb generalizado,

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0. \quad (2.21)$$

Adotando-o, a eq. (2.20) assume a mesma forma diferencial da eq. (2.19):

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) \nabla^2 A^i = -j^i. \quad (2.22)$$

Tais equações podem ser solucionadas pelo tradicional método de Green, calculando-se a função de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que satisfaz a equação diferencial:

$$(1 - \theta^2 \nabla^2) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.23)$$

As soluções procuradas são genericamente dadas pelas integrais

$$A_0(\mathbf{r}) = - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (2.24)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (2.25)$$

Para encontrar a função de Green que satisfaz eq. (2.23), escrevemos:

$$G(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{G}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}, \quad \delta^3(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}, \quad (2.26)$$

onde $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Substituindo tais relações na eq. (2.23), encontramos

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = - \frac{1}{(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2) \mathbf{p}^2}, \quad (2.27)$$

de modo que

$$G(\mathbf{R}) = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\mathbf{p}^2} - \frac{\theta^2}{(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2)} \right] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}. \quad (2.28)$$

Usando os seguintes resultados de integrais no plano complexo,

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = \frac{1}{4\pi R}, \quad (2.29)$$

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R}, \quad (2.30)$$

encontramos a seguinte função de Green:

$$G(\mathbf{R}) = - \frac{1}{4\pi} \frac{(1 - e^{-R/\theta})}{R}. \quad (2.31)$$

Neste caso, os potenciais escalar e vetorial são dados por

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-M_p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-M_p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (2.33)$$

onde $M_p = 1/\theta$ representa o fator de massa de Podolsky. Para uma carga pontual, $q(\mathbf{r}') = q\delta^3(\mathbf{r}')$, temos:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{1 - e^{-M_p |\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}. \quad (2.34)$$

Importante observar que o comportamento Coulombiano usual, $A_0(\mathbf{r}) \propto |\mathbf{r}|^{-1}$, está presente na equação acima. No limite $\theta \rightarrow 0$ ou $M_p \rightarrow \infty$, a solução (2.34) reproduz o comportamento puro Coulombiano. No limite de grandes distâncias, $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, a solução (2.34) também reproduz o

comportamento puro Coulombiano. Porém, no limite de pequenas distâncias da fonte, $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$, temos $e^{-M_p|\mathbf{r}|} \sim (1 - M_p|\mathbf{r}|)$, e a eq. (2.34) leva ao resultado constante,

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} M_p, \quad (2.35)$$

evidenciando que na eletrodinâmica de Podolsky os campos não divergem nas proximidades das cargas pontuais. Uma interessante e atual análise sobre a expansão multipolar das soluções clássicas de Podolsky foi desenvolvida na Ref. [35].

2.3 Propagador de Feynman para a eletrodinâmica de Podolsky

No intuito de calcular o propagador da teoria de Podolsky, reescrevemos a Lagrangeana (2.1) na ausência de fontes e na presença do termo de fixação de calibre,

$$\mathcal{L}_{\text{Podolsky}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.36)$$

em uma forma quadrática,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu O_{\mu\nu} A^\mu, \quad (2.37)$$

onde $O_{\mu\nu}$ é o operador tensorial dado por

$$O_{\mu\nu} = (\square + \theta^2 \square^2) \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \square \Omega_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

e que satisfaz a identidade

$$O_{\mu\nu} \Delta_\alpha^\nu = g_{\mu\alpha}, \quad (2.39)$$

onde Δ_α^ν é operador inverso de $O_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\alpha}$, $(+, -, -, -)$, é o tensor métrico. Podemos agora propor a seguinte forma para $\Delta_{\mu\nu}$, em termos dos projetores conhecidos,

$$\Delta_\alpha^\nu = a \Theta_\alpha^\nu + b \Omega_\alpha^\nu, \quad (2.40)$$

onde a e b são constantes a serem determinadas. Estes operadores satisfazem uma álgebra tensorial fechada, conforme mostra a Tabela 2.1:

	Θ_α^ν	Ω_α^ν
$\Theta_{\mu\nu}$	$\Theta_{\mu\alpha}$	0
$\Omega_{\mu\nu}$	0	$\Omega_{\mu\alpha}$

Tabela 2.1: Álgebra tensorial fechada

Substituindo a expressão (2.40) na relação (2.39), realizando as contrações tensoriais envolvidas e solucionando o sistema, encontramos a e b :

$$a = \frac{1}{\square(1 + \theta^2 \square)}, \quad (2.41)$$

$$b = -\frac{1}{\square}\xi. \quad (2.42)$$

Logo o operador inverso tem a forma,

$$\Delta^{\nu\alpha} = \frac{1}{\square(1 + \theta^2 \square)} \Theta^{\nu\alpha} - \frac{\xi}{\square} \Omega^{\nu\alpha}. \quad (2.43)$$

O propagador de Feynman é definido como

$$\langle A_\nu A_\alpha \rangle = i \Delta_{\nu\alpha}(x - y), \quad (2.44)$$

assim, obtemos

$$\langle A_\nu A_\alpha \rangle = -\frac{i}{p^2} \left[\frac{1}{(1 - \theta^2 p^2)} \Theta_{\nu\alpha} - \xi \Omega_{\nu\alpha} \right]. \quad (2.45)$$

Este propagador fornece duas relações de dispersão:

$$p^2 = 0, \quad (2.46)$$

$$(1 - \theta^2 p^2) = 0. \quad (2.47)$$

Importante ressaltar que a relação (2.47) não faz sentido nenhum na ausência do termo de Podolsky, $\theta^2 = 0$, com o que obteríamos $1 = 0$. Vemos assim que esta relação representa um modo propagante típico da eletrodinâmica de Podolsky, que obviamente não faz sentido físico na ausência do mesmo. As relações acima implicam em

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2, \quad (2.48)$$

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + M_p^2, \quad (2.49)$$

onde a segunda relação representa um modo propagante massivo.

Análise da causalidade

A relação de dispersão $p_0^2 = \mathbf{p}^2$ é a usualmente conhecida na eletrodinâmica de Maxwell livre, sendo estável e causal. Resta analisar a relação (2.49), que representa um modo massivo,

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_p^2}. \quad (2.50)$$

Para analisar a causalidade clássica de um modo propagante, temos que calcular as velocidades de grupo $u_{\text{gr}} = dp_0/d|\mathbf{p}|$ e de frente de onda $u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} (p_0/|\mathbf{p}|)$. A causalidade estará

assegurada se $u_{\text{gr}} \leq 1$ e $u_{\text{frente}} \leq 1$. O módulo da velocidade de grupo e a velocidade de frente de onda para o modo (2.50) são dados por

$$u_{\text{gr}} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + M_p^2)}} \leq 1, \quad (2.51)$$

$$u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \sqrt{1 + M_p^2/|\mathbf{p}|^2} = 1. \quad (2.52)$$

Temos $u_{\text{gr}} < 1$ e $u_{\text{frente}} = 1$, o que é consistente com a preservação da causalidade clássica. Logo, a eletrodinâmica de Podolsky é causal.

Análise da unitariedade

Para que uma teoria seja unitária, a norma de todos os estados deve ser positiva. Quando os estados tem norma negativa a teoria é não unitária e os estados são chamados de estados fantasmas. Para analisar a unitariedade da eletrodinâmica de Podolsky, faremos uso do método da saturação do propagador, [104], que consiste na contração tensorial entre as correntes J_ν , J^α e a matriz do propagador escrita em cada um dos seus pólos envolvendo o cálculo do resíduo do propagador. A saturação do propagador é dada por

$$SP = J^\nu \text{Res} [i\Delta_{\nu\alpha}] J^\alpha, \quad (2.53)$$

em que a corrente satisfaz a lei de conservação $\partial^\nu J_\nu = 0$. Considerando, o propagador (2.45), a saturação com as correntes será dada por

$$SP = i\text{Res} \left[\frac{J^2}{\theta^2 p^2 (p^2 - 1/\theta^2)} \right]. \quad (2.54)$$

Para o pólo $p^2 = 0$, que é o mesmo pólo da teoria de Maxwell, o cálculo do resíduo fornece a saturação:

$$SP_{(p^2=0)} = i(\mathbf{J}^2 - J_0^2). \quad (2.55)$$

No pólo $p^2 = 0$, vale $p_0^2 = \mathbf{p}^2$. Da lei de conservação de corrente, $(p_0 J_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$, a eq. (2.55) fornece

$$SP_{(p^2=0)} = \frac{i}{|\mathbf{p}|^2} |\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2 > 0. \quad (2.56)$$

Logo a parte imaginária da saturação no pólo $p^2 = 0$ é positiva, implicando que as excitações associadas com este modo propagante são unitárias.

Para o pólo $p^2 = 1/\theta^2$, o cálculo do resíduo é dado por

$$SP_{(p^2=1/\theta^2)} = -i(\mathbf{J}^2 - J_0^2). \quad (2.57)$$

Sabendo que o pólo $p^2 = 1/\theta^2$ implica em $p_0^2 = 1/\theta^2 + \mathbf{p}^2$, e usando $p_0 J_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}$, a eq. (2.57) pode ser reescrita na forma

$$SP = -\frac{i}{\mathbf{p}^2 + 1/\theta^2} \left(\frac{\mathbf{J}^2}{\theta^2} + |\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2 \right) < 0. \quad (2.58)$$

Logo, a parte imaginária da saturação do propagador para o pólo $p^2 = 1/\theta^2$ é menor que zero, mostrando que as excitações advindas do polo $p^2 = 1/\theta^2$ têm norma negativa, violando a unitariedade. Esses estados com norma negativa (estados fantasmas) são típicos de teorias com derivadas de altas ordens.

Capítulo 3

Eletrodinâmica de Maxwell com termo de alta derivada de dimensão-6 CPT-par

3.1 Introdução

Partindo do modelo de Podolsky, investigamos uma eletrodinâmica em que o campo eletromagnético é acoplado a um tensor de violação de Lorentz e derivadas superiores. Mais especificamente, estudamos a eletrodinâmica de Maxwell modificada por um tensor de dimensão de massa 6, $D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}$, sendo $D_{\beta\alpha}$ um tensor fixo de rank-2, responsável pela VSL. Analisamos os modos associados às relações de dispersão, obtidas dos pólos do propagador, no que concerne à causalidade e à unitariedade da teoria.

3.2 Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo de dimensão 6

Apresentaremos uma eletrodinâmica de Maxwell dotada de um termo de altas derivadas, CPT-par de dimensão 6, com duas ordens derivativas adicionais, tal qual o termo de Podolsky, porém contendo um tensor de raking 2, $D_{\beta\alpha}$, violador da simetria de Lorentz, dado por

$$D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}, \quad (3.1)$$

na qual o tensor $D_{\beta\alpha}$ é obrigatoriamente simétrico.

O passo inicial nesta investigação consiste em analisar a eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo (3.1), ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta^2 D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}. \quad (3.2)$$

Uma pergunta pertinente é se o termo de violação de Lorentz proposto, $\partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha}$, contém um setor que é equivalente ao termo de Podolsky ou não. Sabemos que o termo de Podolsky equivale a

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta = \partial_\alpha F^{\alpha 0} \partial_\lambda F^\lambda_0 - \partial_\alpha F^{\alpha i} \partial_\lambda F^{\lambda i}. \quad (3.3)$$

No caso em que o tensor $D_{\beta\alpha}$ tem apenas as componentes D_{00} e D_{ii} , temos:

$$D_{\beta\alpha} \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} = D_{00} \partial_\sigma F^{\sigma 0} \partial_\lambda F^{\lambda 0} + D_{ii} \partial_\sigma F^{\sigma i} \partial_\lambda F^{\lambda i}. \quad (3.4)$$

Explicitando as componente do tensor D_{ii} , desenvolvemos:

$$\begin{aligned} \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha} &= D_{00} \partial_\sigma F^{\sigma 0} \partial_\lambda F^{\lambda 0} + D_{11} \partial_\sigma F^{\sigma 1} \partial_\lambda F^{\lambda 1} \\ &\quad + D_{22} \partial_\sigma F^{\sigma 2} \partial_\lambda F^{\lambda 2} + D_{33} \partial_\sigma F^{\sigma 3} \partial_\lambda F^{\lambda 3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A expressão acima envolve as componentes do traço não nulo do tensor $D_{\beta\alpha}$.

Se as componentes da diagonal principal satisfazem

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = -D_{00}, \quad (3.6)$$

obtemos

$$\partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha} = D_{00} (\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta). \quad (3.7)$$

Neste caso, o traço do tensor $D_{\beta\alpha}$ é dado por:

$$Tr(D_{\beta\alpha}) = D_{00} - D_{ii} = D_{00} - (D_{11} + D_{22} + D_{33}),$$

$$Tr(D_{\beta\alpha}) = 4D_{00}. \quad (3.8)$$

Vemos que, para esta configuração particular, o traço do tensor $D_{\beta\alpha}$ está associado ao termo de Podolsky na lagrangeana. Sabemos, contudo, que o traço pode ser definido para configurações genéricas em que não vale a condição (3.6). Neste caso, a princípio o termo do traço perde sua identificação com a estrutura de Podolsky. Outra forma de discutir esta possível equivalência é definindo o tensor $\tilde{D}_{\beta\alpha}$ sem traço,

$$\tilde{D}_{\beta\alpha} = D_{\beta\alpha} - \frac{1}{4} g_{\beta\alpha} Tr(D_{\mu\nu}), \quad (3.9)$$

ou seja, $Tr(\tilde{D}_{\beta\alpha}) = 0$. Composto por $\tilde{D}_{\beta\alpha}$, o termo (3.1) fornece:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \tilde{D}_{\beta\alpha} = \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha} - \frac{1}{4} (\partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta) Tr(D_{\mu\nu}), \quad (3.10)$$

confirmando que o termo de Podolsky aparece realmente associado ao traço do tensor $D_{\mu\nu}$, em que quando comparado com a expressão (3.8) obtemos

$$\frac{1}{4} Tr(D_{\mu\nu}) = D_{00}. \quad (3.11)$$

Assim, vemos que existem alguns caminhos para trabalhar a inclusão do termo $\partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \tilde{D}_{\beta\alpha}$.

Realizada a apresentação inicial do termo de dimensão 6 anisotrópico da Eq. (3.1) ou Eq. (3.10), podemos examinar algumas possibilidades de lagrangeanas incluindo-os.

Uma opção de abordagem seria discutir como a teoria de Podolsky é modificada pelo termo de violação de Lorentz, CPT-par, ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta + \eta^2 \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \tilde{D}_{\beta\alpha}, \quad (3.12)$$

onde $\tilde{D}_{\beta\alpha}$ representa a versão sem traço do tensor, ou seja, $Tr(\tilde{D}_{\beta\alpha}) = 0$, a fim de evitar a presença redundante do termo de Podolsky no termo de violação de Lorentz. Outra opção formal seria trabalhar com a lagrangeana (3.2), mantendo o traço não-nulo do tensor a fim de contemplar a presença do termo de Podolsky. Uma terceira opção seria investigar a lagrangeana (3.2), considerando $Tr(D_{\beta\alpha}) = 0$. Neste caso, estaríamos examinando uma eletrodinâmica de altas derivadas que não contém o termo de Podolsky,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta^2 \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \tilde{D}_{\beta\alpha}. \quad (3.13)$$

3.2.1 O propagador de Feynman da eletrodinâmica com altas derivadas

Em prosseguimento a nossa proposta, vamos considerar a lagrangeana (3.2), que é a forma mais geral dos modelos acima propostos. Neste caso, temos a lagrangeana de Podolsky modificada:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta + \eta^2 D_{\beta\alpha} \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (3.14)$$

Os parâmetros θ e η têm dimensão de comprimento, ou

$$[\theta] = [\eta] = \text{massa}^{-1}, \quad (3.15)$$

enquanto o tensor $D_{\beta\alpha}$ é adimensional, ou seja, $D_{\beta\alpha} = (\text{massa})^0$.

O primeiro passo para calcular o propagador de Feynman é escrever a lagrangeana na forma bilinear,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu O_{\mu\nu} A^\mu, \quad (3.16)$$

onde $O_{\mu\nu}$ é o operador tensorial que caracteriza este modelo. A lagrangeana (3.14) é lida como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} A^\nu \left[\square \Theta_{\mu\nu} + \theta^2 [\square^2 \Theta_{\nu\mu}] - \frac{1}{\xi} \square \Omega_{\mu\nu} + \right] A^\mu + \\ & \frac{1}{2} A^\nu [2\eta^2 \square^2 D_{\nu\mu} - 2\eta^2 \square \partial_\mu \partial^\alpha D_{\nu\alpha} - 2\eta^2 \square \partial_\nu \partial^\sigma D_{\sigma\mu} + 2\eta^2 \partial_\nu \partial_\mu \partial^\sigma \partial^\alpha D_{\sigma\alpha}] A^\mu, \end{aligned} \quad (3.17)$$

permitindo escrever

$$\begin{aligned} O_{\mu\nu} = & \square \Theta_{\mu\nu} + \theta^2 [\square^2 \Theta_{\nu\mu}] - \frac{1}{\xi} \square \Omega_{\mu\nu} + \\ & 2\eta^2 \square^2 D_{\nu\mu} - 2\eta^2 \square \partial_\mu \partial^\alpha D_{\nu\alpha} - 2\eta^2 \square \partial_\nu \partial^\sigma D_{\sigma\mu} + 2\eta^2 \partial_\nu \partial_\mu \partial^\sigma \partial^\alpha D_{\sigma\alpha}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde foram usados os projetores, longitudinal e transversal, $\Omega_{\beta\lambda} = \partial_\beta\partial_\lambda/\square$, $\Theta_{\beta\lambda} = g_{\beta\lambda} - \Omega_{\beta\lambda}$, respectivamente.

A fim de facilitar os cálculos da estrutura tensorial, podemos propor a seguinte parametrização, para $D_{\nu\mu}$ simétrico,

$$D_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (C_\nu B_\mu + C_\mu B_\nu). \quad (3.19)$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} O_{\mu\nu} = & (\square + \theta^2 \square^2) \Theta_{\mu\nu} + \left(2\eta^2 \square \rho \kappa - \frac{1}{\xi} \square \right) \Omega_{\mu\nu} + \eta^2 \square^2 C_\nu B_\mu + \\ & + \eta^2 \square^2 C_\mu B_\nu - \eta^2 \square \kappa C_\nu \partial_\mu - \eta^2 \square \kappa C_\mu \partial_\nu - \eta^2 \square \rho B_\nu \partial_\mu - \eta^2 \square \rho B_\mu \partial_\nu, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde foi feito

$$\kappa = B_\alpha \partial^\alpha, \quad \rho = C_\alpha \partial^\alpha. \quad (3.21)$$

O cálculo do propagador consiste na inversão algébrico-tensorial do operador $O_{\mu\nu}$, composto pelos seguintes projetores tensoriais:

$$\Theta_{\mu\nu}, \Omega_{\mu\nu}, B_\nu \partial_\mu, B_\mu \partial_\nu, C_\mu B_\nu, C_\nu B_\mu, C_\mu \partial_\nu, C_\nu \partial_\mu. \quad (3.22)$$

Com base nesses projetores, podemos propor uma forma para a inversa $O_{\mu\nu}$, que satisfaz à identidade

$$\begin{aligned} O_{\mu\nu} \Delta^\nu_\alpha &= g_{\mu\alpha}, \\ O_{\mu\nu} \Delta^\nu_\alpha &= \Theta_{\mu\alpha} + \Omega_{\mu\alpha}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

sendo o propagador de Feynman definido como

$$\langle 0 | T(A_\nu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = i \Delta_{\nu\alpha}(x - y). \quad (3.24)$$

Ao realizar todas as contrações obtidas através da relação (3.23), surgem dois novos elementos,

$$B_\mu B_\alpha, C_\mu C_\alpha,$$

não considerados inicialmente, de modo que precisam ser incluídos para fechar a álgebra dos operadores. Assim, propomos uma inversa, incluindo esses dois termos, na forma:

$$\Delta^\nu_\alpha = a \Theta^\nu_\alpha + b \Omega^\nu_\alpha + c B_\alpha \partial^\nu + d C^\nu B_\alpha + e C^\nu \partial_\alpha + f B^\nu \partial_\alpha + g C_\alpha B^\nu + h C_\alpha \partial^\nu + i B^\nu B_\alpha + j C^\nu C_\alpha, \quad (3.25)$$

onde a, b, c, \dots, j são coeficientes a determinar.

Ressaltamos que os projetores tensoriais contidos em (3.25) satisfazem uma álgebra fechada, exibida nas Tabelas (3.1), (3.2) e (3.3).

Uma vez a álgebra fechada, daremos continuidade ao cálculo do propagador. Substituindo a expressão (3.25) na Eq.(3.23), obtemos um sistema de 10 equações para os 10 coeficientes a serem determinados. A solução deste sistema fornece:

$$a = \frac{1}{\square (1 + \theta^2 \square)}, \quad (3.26)$$

	Θ_α^ν	Ω_α^ν	$B_\alpha \partial^\nu$	$C^\nu B_\alpha$
$\Theta_{\mu\nu}$	$\Theta_{\mu\alpha}$	0	0	$C_\mu B_\alpha - \frac{\rho}{\square} B_\alpha \partial_\mu$
$\Omega_{\mu\nu}$	0	$\Omega_{\mu\alpha}$	$B_\alpha \partial_\mu$	$\frac{\rho}{\square} B_\alpha \partial_\mu$
$B_\nu \partial_\mu$	$B_\alpha \partial_\mu - \kappa \Omega_{\mu\alpha}$	$\kappa \Omega_{\mu\alpha}$	$\kappa B_\alpha \partial_\mu$	$(C \cdot B) B_\alpha \partial_\mu$
$C_\mu B_\nu$	$C_\mu B_\alpha - \frac{\kappa}{\square} C_\mu \partial_\alpha$	$\frac{\kappa}{\square} C_\mu \partial_\alpha$	$\kappa C_\mu B_\alpha$	$(C \cdot B) C_\mu B_\alpha$
$C_\mu \partial_\nu$	0	$C_\mu \partial_\alpha$	$\square C_\mu B_\alpha$	$\rho C_\mu B_\alpha$
$B_\mu \partial_\nu$	0	$B_\mu \partial_\alpha$	$\square B_\mu B_\alpha$	$\rho B_\mu B_\alpha$
$C_\nu B_\mu$	$C_\alpha B_\mu - \frac{\rho}{\square} B_\mu \partial_\alpha$	$\frac{\rho}{\square} B_\mu \partial_\alpha$	$\rho B_\mu B_\alpha$	$C^2 B_\mu B_\alpha$
$C_\nu \partial_\mu$	$C_\alpha \partial_\mu - \rho \Omega_{\mu\alpha}$	$\rho \Omega_{\mu\alpha}$	$\rho B_\alpha \partial_\mu$	$C^2 B_\alpha \partial_\mu$
$B_\mu B_\nu$	$B_\mu B_\alpha - \frac{\eta}{\square} B_\mu \partial_\alpha$	$\frac{\kappa}{\square} B_\mu \partial_\alpha$	$\kappa B_\mu B_\alpha$	$(C \cdot B) B_\mu B_\alpha$
$C_\mu C_\nu$	$C_\mu C_\alpha - \frac{\rho}{\square} C_\mu \partial_\alpha$	$\frac{\rho}{\square} C_\mu \partial_\alpha$	$\rho C_\mu B_\alpha$	$C^2 C_\mu B_\alpha$

Tabela 3.1: Algebra fechada dos projetores tensoriais (parte 1).

$$b = -\frac{\xi}{\square} + \frac{\eta^2(-\eta^2 \rho^2 (\square B^2 - \kappa^2) - \eta^2 \kappa^2 (\square C^2 - \rho^2) + 2\rho \kappa \Pi)}{\Gamma \square (1 + \theta^2 \square)}, \quad (3.27)$$

$$c = f = \frac{\kappa \eta^4 (\square C^2 - \rho^2) - \eta^2 \rho \Pi}{\Gamma \square (1 + \theta^2 \square)}, \quad d = g = \frac{\eta^2 \Pi}{(1 + \theta^2 \square) \Gamma}, \quad (3.28)$$

$$e = h = \eta^2 \frac{[\eta^2 \rho (\square B^2 - \kappa^2) - \Pi \kappa]}{\Gamma \square (1 + \theta^2 \square)}, \quad (3.29)$$

$$I = -\frac{\eta^4 (\square C^2 - \rho^2)}{\Gamma (1 + \theta^2 \square)}, \quad j = -\frac{\eta^4 (\square B^2 - \kappa^2)}{\Gamma (1 + \theta^2 \square)}, \quad (3.30)$$

onde valem as definições:

$$\Gamma = [\eta^2 (\square C^2 - \rho^2) \eta^2 (\square B^2 - \kappa^2) - \Pi^2], \quad (3.31)$$

$$\Pi = (1 + \theta^2 \square + \eta^2 \square (C \cdot B) - \eta^2 \rho \kappa). \quad (3.32)$$

Substituindo todos os valores para $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, no operador (3.25), obtemos o propagador de Feynman do campo de gauge no espaço dos momentos na forma

$$\begin{aligned} \langle A_\nu A_\alpha \rangle = & -\frac{i}{p^2 (1 - \theta^2 p^2) \Gamma(p)} [\Gamma(p) \Theta_{\nu\alpha} + (b' - \xi (1 - \theta^2 p^2) \Gamma) \Omega_{\nu\alpha} - 2iF(p) \kappa_{\nu\alpha} + \\ & -2\eta^2 p^2 \Pi(p) D_{\nu\alpha} - 2iH(p) \rho_{\nu\alpha} + \eta^4 p^2 ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2) B_\nu B_\alpha + \eta^4 p^2 ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2) C_\nu C_\alpha], \end{aligned} \quad (3.33)$$

	$C^\nu \partial_\alpha$	$B^\nu \partial_\alpha$	$C_\alpha B^\nu$
$\Theta_{\mu\nu}$	$C_\mu \partial_\alpha - \rho \Omega_{\mu\alpha}$	$B_\mu \partial_\alpha - \kappa \Omega_{\mu\alpha}$	$C_\alpha B_\mu - \frac{\kappa}{\square} C_\alpha \partial_\mu$
$\Omega_{\mu\nu}$	$\rho \Omega_{\mu\alpha}$	$\kappa \Omega_{\mu\alpha}$	$\frac{\kappa}{\square} C_\alpha \partial_\mu$
$B_\nu \partial_\mu$	$\square (C \cdot B) \Omega_{\mu\alpha}$	$\square B^2 \Omega_{\mu\alpha}$	$B^2 C_\alpha \partial_\mu$
$C_\mu B_\nu$	$(C \cdot B) C_\mu \partial_\alpha$	$B^2 C_\mu \partial_\alpha$	$B^2 C_\mu C_\alpha$
$C_\mu \partial_\nu$	$\rho C_\mu \partial_\alpha$	$\kappa C_\mu \partial_\alpha$	$\kappa C_\mu C_\alpha$
$B_\mu \partial_\nu$	$\rho B_\mu \partial_\alpha$	$\kappa B_\mu \partial_\alpha$	$\kappa C_\alpha B_\mu$
$C_\nu B_\mu$	$C^2 B_\mu \partial_\alpha$	$(C \cdot B) B_\mu \partial_\alpha$	$(C \cdot B) C_\alpha B_\mu$
$C_\nu \partial_\mu$	$C^2 \square \Omega_{\mu\alpha}$	$\square (C \cdot B) \Omega_{\mu\alpha}$	$(C \cdot B) C_\alpha \partial_\mu$
$B_\mu B_\nu$	$(C \cdot B) B_\mu \partial_\alpha$	$B^2 B_\mu \partial_\alpha$	$B^2 C_\alpha B_\mu$
$C_\mu C_\nu$	$C^2 C_\mu \partial_\alpha$	$(C \cdot B) C_\mu \partial_\alpha$	$(C \cdot B) C_\mu C_\alpha$

Tabela 3.2: Algebra fechada dos projetores tensoriais (parte 2).

em que fizemos as definições a seguir para simplificar o propagador, logo:

$$2\kappa_{\nu\alpha} = B_\nu p_\alpha + B_\alpha p_\nu, \quad (3.34)$$

$$2\rho_{\nu\alpha} = C_\nu p_\alpha + C_\alpha p_\nu, \quad (3.35)$$

$$b' = \eta^2 (\eta^2 (C \cdot p)^2 ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2) + \eta^2 (B \cdot p)^2 ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2) - 2 (C \cdot p) (B \cdot p) \Pi(p), \quad (3.36)$$

$$F(p) = i\eta^2 \Pi(p) (C \cdot p) - i\eta^4 (B \cdot p) ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2), \quad (3.37)$$

$$H(p) = i\eta^2 (B \cdot p) \Pi - i\eta^4 (C \cdot p) ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2), \quad (3.38)$$

$$\Gamma(p) = [\eta^4 ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2) ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2) - \Pi^2], \quad (3.39)$$

$$\Pi(p) = (1 - 2\theta^2 p^2 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p) (B \cdot p)), \quad (3.40)$$

em que $[F] = (\text{massa})^{-1}$ e $[\Gamma] = [\Pi] = (\text{massa})^0$.

As relações de dispersão desta teoria são lidas a partir dos pólos do propagador de Feynman dado pela Eq. (3.33):

$$\square (1 + \theta^2 \square) = 0, \quad (3.41)$$

$$\eta^2 (\square C^2 - \rho^2) \eta^2 (\square B^2 - \kappa^2) - (1 + \theta^2 \square + \eta^2 \square (C \cdot B) - \eta^2 \rho \kappa)^2 = 0. \quad (3.42)$$

No espaço dos momentos são reescritas como

$$p^2 = 0, \quad (3.43)$$

$$(1 - \theta^2 p^2) = 0, \quad (3.44)$$

$$\eta^4 (p^2 C^2 - (C \cdot p)^2) (p^2 B^2 - (B \cdot p)^2) - (1 - \theta^2 p^2 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p) (B \cdot p))^2 = 0. \quad (3.45)$$

	$C_\alpha \partial^\nu$	$B^\nu B_\alpha$	$C^\nu C_\alpha$
$\Theta_{\mu\nu}$	0	$B_\mu B_\alpha - \frac{\kappa}{\square} B_\alpha \partial_\mu$	$C_\mu C_\alpha - \frac{\rho}{\square} C_\alpha \partial_\mu$
$\Omega_{\mu\nu}$	$C_\alpha \partial_\mu$	$\frac{\kappa}{\square} B_\alpha \partial_\mu$	$\frac{\rho}{\square} C_\alpha \partial_\mu$
$B_\nu \partial_\mu$	$\kappa C_\alpha \partial_\mu$	$B^2 B_\alpha \partial_\mu$	$(C \cdot B) C_\alpha \partial_\mu$
$C_\mu B_\nu$	$\kappa C_\mu C_\alpha$	$B^2 C_\mu B_\alpha$	$(C \cdot B) C_\mu C_\alpha$
$C_\mu \partial_\nu$	$\square C_\mu C_\alpha$	$\kappa C_\mu B_\alpha$	$\rho C_\mu C_\alpha$
$B_\mu \partial_\nu$	$\square C_\alpha B_\mu$	$\kappa B_\mu B_\alpha$	$\rho C_\alpha B_\mu$
$C_\nu B_\mu$	$\rho C_\alpha B_\mu$	$(C \cdot B) B_\mu B_\alpha$	$C^2 C_\alpha B_\mu$
$C_\nu \partial_\mu$	$\rho C_\alpha \partial_\mu$	$(C \cdot B) B_\alpha \partial_\mu$	$C^2 C_\alpha \partial_\mu$
$B_\mu B_\nu$	$\kappa C_\alpha B_\mu$	$B^2 B_\mu B_\alpha$	$(C \cdot B) C_\alpha B_\mu$
$C_\mu C_\nu$	$\rho C_\mu C_\alpha$	$(C \cdot B) C_\mu B_\alpha$	$C^2 C_\mu C_\alpha$

Tabela 3.3: Algebra fechada dos projetores tensoriais (parte 3).

Se fizermos $\eta^2 = 0$ na relação (3.45), o que corresponde à eliminar os termos de violação da simetria de Lorentz da teoria, recuperamos:

$$p^2 = 0 \text{ e } (1 - \theta^2 p^2) = 0, \quad (3.46)$$

que são as mesmas relações de dispersão da eletrodinâmica de Podolsky.

O propagador de Feynman do campo de gauge no espaço dos momentos para $\theta = 0$, é definido como

$$\begin{aligned} \langle A_\nu A_\alpha \rangle = & -\frac{i}{p^2 \Gamma(p)} [\Gamma(p) \Theta_{\nu\alpha} + (b' - \xi \Gamma) \Omega_{\nu\alpha} - 2iF(p) \kappa_{\nu\alpha} - 2\eta^2 p^2 \Pi(p) D_{\nu\alpha} + \\ & -2iH(p) \rho_{\nu\alpha} + \eta^4 p^2 ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2) B_\nu B_\alpha + \eta^4 p^2 ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2) C_\nu C_\alpha], \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde

$$\Gamma_{\theta=0}(p) = [\eta^2 ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2) \eta^2 ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2) - \Pi_{\theta=0}^2], \quad (3.48)$$

$$\Pi_{\theta=0}(p) = (1 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p) (B \cdot p)). \quad (3.49)$$

Na ausência do termo de Podolsky, $\theta^2 = 0$, temos a relação usual de Maxwell, $p^2 = 0$, e a seguinte relação modificada:

$$\eta^4 (p^2 C^2 - (C \cdot p)^2) (p^2 B^2 - (B \cdot p)^2) - (1 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p) (B \cdot p))^2 = 0. \quad (3.50)$$

Com a ajuda do programa FORM, as equações de dispersão obtidas do pólo do propagador (3.33) podem ser generalizadas para uma escolha arbitrária de $D_{\mu\nu}$. Para uma escolha geral deste tensor, a equação de dispersão $p^2 = 0$ permanece, mas as Eqs. (3.44) e (3.45) se juntam

em uma única expressão, que pode então ser convenientemente escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 = & - (1 - \theta^2 p^2)^3 - 2(1 - \theta^2 p^2)^2 \eta^2 (D_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - p^2 D^\mu{}_\mu) \\
& + 2(1 - \theta^2 p^2) p^2 \eta^4 [p^2 D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} - 2D_{\mu\nu} D^{\mu\varrho} p^\nu p_\varrho + D^\mu{}_\mu (2D_{\nu\varrho} p^\nu p^\varrho - p^2 D^\nu{}_\nu)] \\
& + \frac{4}{3} p^4 \eta^6 [3D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} (D_{\varrho\sigma} p^\varrho p^\sigma - p^2 D^\varrho{}_\varrho) + (D^\mu{}_\mu)^2 (p^2 D^\nu{}_\nu - 3D_{\nu\varrho} p^\nu p^\varrho) \\
& + 2p^2 D^{\mu\nu} D_\mu{}^\varrho D_{\nu\varrho} + 6(D_{\mu\nu} D^{\mu\varrho} p^\nu p_\varrho D^\sigma{}_\sigma - D_{\mu\nu} D^{\mu\varrho} D^{\nu\sigma} p_\varrho p_\sigma)] . \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Podemos observar que não é possível fatorar $1 - \theta^2 p^2$, pois há uma contribuição proporcional a η^6 que não contém o termo $1 - \theta^2 p^2$. Esta contribuição desaparece quando $D_{\mu\nu}$ é decomposto em dois 4-vetores de acordo com a parametrização dada pela Eq. (3.19), a partir da qual a expressão $(1 - \theta^2 p^2) \Gamma(p) = 0$ é reproduzida.

3.2.2 Relação de dispersão e causalidade

No que se segue, analisamos alguns setores da teoria proposta, em busca de configurações do tensor de fundo que proporcione eletrodinâmicas consistentes. Estamos especialmente interessados em analisar a causalidade. O comportamento da velocidade de grupo e da velocidade de frente de onda nos permite tirar conclusões sobre a causalidade. As velocidades de grupo e de frente de onda são dadas por

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}. \quad (3.52)$$

Usamos a noção de causalidade clássica que requer $u_{\text{gr}} = |\mathbf{u}_{\text{gr}}| \leq 1$ e $u_{\text{frente}} \leq 1$. As relações de dispersão que não descrevem os fótons padrão, no limite em que o tensor de violação de Lorentz vai a zero, serão chamadas de “exóticas”, o que inclui as relações de dispersão do tipo Podolsky, mas não necessariamente as não físicas. As relações de dispersão que exibem velocidades de grupo ou de frente de onda divergentes ou maiores que 1 serão chamadas de espúrias. Para todas as configurações de fundo investigadas, existem três pólos distintos, incluindo $p^2 = 0$, que descreve o fóton usual. O primeiro e o segundo casos isotrópicos examinados a seguir, não podem ser parametrizados com dois 4-vetores, como proposto na Eq. (3.19). Portanto, eles devem ser estudados usando a equação mais geral (3.51).

Setor isotrópico do traço (com $\theta \neq 0$)

Como uma verificação inicial da Eq. (3.51), estudamos o caso de um tensor diagonal $D_{\nu\mu}$ com $D_{00} = -D_{11} = -D_{22} = -D_{33}$, $D_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, $D_{\nu\mu} = D_{00} g_{\nu\mu}$, que resulta em $D_\alpha^\alpha = 4D_{00}$. É uma configuração de traço puro que é invariante de Lorentz. A equação de

dispersão para esta configuração de $D_{\nu\mu}$ tem a forma:

$$\begin{aligned}
0 = & -(1 - \theta^2 p^2)^3 - 2(1 - \theta^2 p^2)^2 \eta^2 (D_{00} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - 4p^2 D_{00}) \\
& + 2(1 - \theta^2 p^2) p^2 \eta^4 [p^2 D_{00}^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - 2D_{00}^2 g_{\mu\nu} g^{\mu e} p^\nu p_e + 4D_{00} (2D_{00} g_{\nu e} p^\nu p^e - 4p^2 D_{00})] \\
& + \frac{4}{3} p^4 \eta^6 [3D_{00}^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} (D_{00} g_{e\sigma} p^e p^\sigma - 4p^2 D_{00}) + 16D_{00}^2 (4p^2 D_{00} - 3D_{00} g_{\nu e} p^\nu p^e) \\
& + 2p^2 D_{00}^3 g^{\mu\nu} \delta_\mu^e g_{\nu e} + 6(4D_{00}^3 g_{\mu\nu} g^{\mu e} p^\nu p_e - D_{00}^3 g_{\mu\nu} g^{\mu e} g^{\nu\sigma} p_e p_\sigma)] , \tag{3.53}
\end{aligned}$$

cuja simplificação leva a

$$\begin{aligned}
-(1 - \theta^2 p^2)^3 + 6(1 - \theta^2 p^2)^2 \eta^2 p^2 D_{00} - 12(1 - \theta^2 p^2) \eta^4 p^4 D_{00}^2 + 8p^6 \eta^6 D_{00}^3 = 0, \\
(p^2 \theta^2 + 2D_{00} p^2 \eta^2 - 1)^3 = 0. \tag{3.54}
\end{aligned}$$

A solução fornecida é

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2 + 2\eta^2 D_{00}}, \tag{3.55}$$

para $\theta^2 + 2\eta^2 D_{00} \neq 0$. Tal equação pode ser identificada com a relação de dispersão de Podolsky, escrevendo

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\Theta^2}, \tag{3.56}$$

onde $\Theta^2 = \theta^2 + 2\eta^2 D_{00}$. Em que obtemos uma relação de dispersão do tipo Podolsky com um parâmetro de Podolsky redefinido por Θ^2 que envolve o parâmetro padrão de Podolsky θ^2 e o campo de fundo. A relação de dispersão encontrada é causal e compatível com uma propagação bem comportada de sinais, desde que $\Theta^2 > 0$, ou seja, para $D_{00} > -\theta^2/2\eta^2$.

Setor isótropico (com $\theta \neq 0$)

O setor isotrópico sem traço pode ser expresso na forma $D_{\nu\mu} = -D_{00} \times \text{diag}(3, 1, 1, 1)_{\mu\nu}$ onde o sinal menos é escolhido para ser consistente com as definições feitas para o setor isótropico do traço. Esta escolha do tensor de fundo pode ser expressa na forma covariante em termos do tensor métrico de Minkowski e da direção puramente temporal $\lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)$ como segue:

$$D_{\nu\mu} = D_{00} (g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu \lambda_\mu). \tag{3.57}$$

Portanto, o caso isotrópico aqui analisado contém a parte invariante de Lorentz considerada no setor isótropico do traço e uma contribuição que viola a simetria de Lorentz dependendo da direção λ_μ . Esta estrutura particular exhibe duas relações de dispersão distintas que podem ser

obtidas através da Eq. (3.51). Substituindo (3.57) em (3.51), temos

$$\begin{aligned}
& - (1 - \theta^2 p^2)^3 - 2(1 - \theta^2 p^2)^2 \eta^2 D_{00} ((g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu \lambda_\mu) p^\mu p^\nu) \\
& + 2(1 - \theta^2 p^2) p^2 \eta^4 p^2 D_{00}^2 (g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu \lambda_\mu) (g^{\mu\nu} - 4\lambda^\mu \lambda^\nu) \\
& - 2(1 - \theta^2 p^2) p^2 \eta^4 2D_{00}^2 (g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu \lambda_\mu) (g^{\mu\varrho} - 4\lambda^\mu \lambda^\varrho) p^\nu p_\varrho \\
& + \frac{4}{3} p^4 \eta^6 D_{00}^3 [3 (g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu \lambda_\mu) (g^{\mu\nu} - 4\lambda^\mu \lambda^\nu) (g_{\varrho\sigma} - 4\lambda_\varrho \lambda_\sigma) p^\varrho p^\sigma \\
& + 2p^2 (g^{\mu\nu} - 4\lambda^\mu \lambda^\nu) (\delta_\mu^\varrho - 4\lambda_\mu \lambda^\varrho) (g_{\nu\varrho} - 4\lambda_\nu \lambda_\varrho) \\
& - 6 (g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu \lambda_\mu) (g^{\mu\varrho} - 4\lambda^\mu \lambda^\varrho) (g^{\nu\sigma} - 4\lambda^\nu \lambda^\sigma) p_\varrho p_\sigma] = 0.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Para o caso puramente temporal, $\lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)$, a Eq. (3.58) assume a forma

$$\begin{aligned}
& - (1 - \theta^2 p^2)^3 - 2(1 - \theta^2 p^2)^2 \eta^2 D_{00} (p^2 - 4p_0^2) + 2(1 - \theta^2 p^2) p^2 \eta^4 D_{00}^2 [10p^2 - 16p_0^2] \\
& + \frac{4}{3} p^4 \eta^6 D_{00}^3 [3(12) (p^2 - 4p_0^2) + 2p^2 (12 - 36) - 6 (p^2 - 28p_0^2)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Agrupando os termos e simplificando, temos

$$(p^2 \theta^2 + 2D_{00} p^2 \eta^2 - 1)^2 (p^2 \theta^2 - 6D_{00} \eta^2 p^2 + 8D_{00} \eta^2 p_0^2 - 1) = 0. \tag{3.60}$$

Considerando a equação acima como duas equações independentes em que cada uma é nula,

$$(p^2 \theta^2 + 2D_{00} p^2 \eta^2 - 1)^2 = 0, \tag{3.61}$$

$$(p^2 \theta^2 - 6D_{00} \eta^2 p^2 + 8D_{00} \eta^2 p_0^2 - 1) = 0, \tag{3.62}$$

obtemos duas soluções. Para a primeira equação a solução é dada por:

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\Theta^2}, \tag{3.63}$$

onde $\Theta^2 = \theta^2 + 2D_{00} \eta^2$. Essa relação de dispersão é uma perturbação da relação de dispersão usual de Podolsky, que corresponde à Eq. (3.56) do setor analisado anteriormente. Sabemos que este modo tem uma energia bem definida e é causal para $\Theta^2 > 0$, ou seja, $D_{00} > -\theta^2/2\eta^2$.

Para a segunda equação, obtemos a solução a seguir:

$$p_0^2 = \frac{1}{(\theta^2 + 2D_{00} \eta^2)} + \frac{(\theta^2 + 2D_{00} \eta^2 - 8D_{00} \eta^2)}{(\theta^2 + 2D_{00} \eta^2)} \mathbf{p}^2, \tag{3.64}$$

ou na forma

$$p_0^2 = \frac{1}{\Theta^2} + \Lambda \mathbf{p}^2, \tag{3.65}$$

onde

$$\Lambda = 1 - \frac{8D_{00} \eta^2}{\Theta^2}. \tag{3.66}$$

Podemos observar que para a relação de dispersão (3.64) também temos uma perturbação da relação de dispersão usual de Podolsky, mas nesse caso o termo dependente do momento

também é modificado. A velocidade de frente de onda para a relação de dispersão (3.65) tem a forma

$$u_{\text{frente}} = \sqrt{\Lambda} = \sqrt{1 - \frac{8D_{00}\eta^2}{\Theta^2}}. \quad (3.67)$$

A velocidade de frente de onda somente é real para

$$D_{00} < \frac{\theta^2}{6\eta^2}. \quad (3.68)$$

Para $D_{00} < \theta^2/6\eta^2$, e $D_{00} > 0$, a velocidade de frente de onda é < 1 . O módulo da velocidade de grupo tem a forma

$$u_{gr} = |\mathbf{p}| \Lambda \left(\frac{1}{\Theta^2} + |\mathbf{p}|^2 \Lambda \right)^{-1/2} = \Lambda |\mathbf{p}| / p_0. \quad (3.69)$$

Esta função aumenta monotonicamente de 0 para um valor constante dado por

$$\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} u_{gr} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8D_{00}\eta^2}{\Theta^2} \right) \frac{|\mathbf{p}|}{p_0} = \sqrt{\Lambda} = u_{\text{frente}}, \quad (3.70)$$

igualando com a velocidade de frente de onda. Logo, no limite em que $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ a velocidade de grupo é < 1 para $D_{00} > 0$, sendo assim temos que a estrutura é causal e bem comportada para o intervalo do coeficiente D_{00} : $[0, \theta^2/6\eta^2]$.

Setor isotrópico temporal (com $\theta \neq 0$)

A configuração do campo fundo isotrópica mais simples possível é dada por $C_\mu = (C_0, 0)$, $B_\mu = (B_0, 0)$, que corresponde a $D_{00} = C_0 B_0$, $D_{0i} = D_{ij} = 0$. Para esta configuração, a relação de dispersão (3.45) é dada por:

$$\eta^4 (p^2 C_0^2 - C_0^2 p_0^2) (p^2 B_0^2 - B_0^2 p_0^2) - (1 - \theta^2 p^2 - \eta^2 p^2 C_0 B_0 + \eta^2 C_0 B_0 p_0^2)^2 = 0,$$

simplificando, obtemos

$$\pm \eta^2 C_0 B_0 \mathbf{p}^2 = 1 - \theta^2 p^2 + \eta^2 \mathbf{p}^2 C_0 B_0, \quad (3.71)$$

de onde podemos extrair duas soluções. A primeira solução tem a forma

$$p_0^{(1)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}},$$

que corresponde à relação original de dispersão de Podolsky.

Para a segunda solução da equação (3.71), obtemos

$$p_0^{(2)} = \sqrt{\Psi \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}}, \quad (3.72)$$

onde

$$\Psi = 1 + \frac{2\eta^2 D_{00}}{\theta^2}. \quad (3.73)$$

A velocidade de frente de onda é dada por:

$$u_{\text{frente}} = \sqrt{\Psi} = \sqrt{1 + \frac{2\eta^2 D_{00}}{\theta^2}}, \quad (3.74)$$

que gera $u_{\text{frente}} \leq 1$ para D_{00} negativo. Além disso, temos que o módulo da velocidade do grupo,

$$u_{gr} = \Psi |\mathbf{p}| \left(\Psi \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2} \right)^{-1/2} = \Psi \frac{|\mathbf{p}|}{p_0^{(2)}}. \quad (3.75)$$

O módulo da velocidade de grupo cresce monotonicamente de 0 a um valor constante que corresponde à velocidade de frente de onda, para grandes momento, na forma:

$$\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} u_{gr} = \sqrt{\Psi} = u_{\text{frente}}. \quad (3.76)$$

Portanto, $D_{00} \leq 0$ é a condição necessária para que a propagação de sinal seja causal.

Setor espacial anisotrópico de paridade par (com $\theta = 0$)

Para os coeficientes $C_\mu = (0, C_i)$, $B_\mu = (0, B_i)$, temos

$$D_{00} = 0, \quad D_{0i} = 0, \quad D_{ij} = (C_i B_j + C_j B_i)/2. \quad (3.77)$$

Nesta configuração, vale:

$$C^2 = -\mathbf{C}^2, \quad B^2 = -\mathbf{B}^2, \quad (B \cdot p) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}, \quad (C \cdot p) = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}. \quad (3.78)$$

Substituindo tais informações na Eq. (3.50), temos:

$$\begin{aligned} & \eta^4 (p^4 \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2 + p^2 \mathbf{C}^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 p^2 \mathbf{B}^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2) + \\ & - (1 + \eta^2 p^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) + \eta^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}))^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.79)$$

cuja simplificação leva a

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1 + 2\eta^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})}{\eta^4 \mathbf{C}^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 + \eta^4 \mathbf{B}^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 - 2\eta^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - 2\eta^4 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})}. \quad (3.80)$$

Sem efeito de nenhuma aproximação, podemos escrever na forma a seguir:

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1 + 2\eta^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})}{\eta^4 [\mathbf{C} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{B} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})]^2 - 2\eta^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})}. \quad (3.81)$$

Empregando a restrição adicional dos vetores serem paralelos ou antiparalelos, podemos escrever:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{B}, \quad (3.82)$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, exceto o zero, fornecendo $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^2 = \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2$ e $\mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})$. Obtemos então a solução

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2}{\mathbf{B}^2}, \quad (3.83)$$

que pode ser escrita em função do vetor unitário $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$,

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2} - \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p}\right)^2, \quad (3.84)$$

que é uma relação de dispersão não-birrefringente. Para $\alpha > 0$, significa que os vetores \mathbf{B} e \mathbf{C} são paralelos, enquanto $\alpha < 0$ descreve \mathbf{B} e \mathbf{C} antiparalelos. Introduzimos agora o ângulo ϑ que especifica a orientação de propagação, dada por \mathbf{p} , em relação ao vetor de fundo, através do produto escalar:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| \cos \vartheta, \quad (3.85)$$

que inserido na Eq. (3.84), fornece

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2}}. \quad (3.86)$$

Essa relação de dispersão é parcialmente semelhante à da teoria de Podolsky, mas a parte dependente do momento é modificada pelo fator $\sin^2 \vartheta$. Além disso, o termo “massa”, $1/2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2$, aparece com um sinal negativo para $\alpha > 0$, o que compromete a definição de energia.

Vemos que a relação (3.84) pode ser investigada com relação à causalidade. Primeiro, obtemos a velocidade de frente de onda, que é dada por:

$$u_{\text{frente}} = |\sin \vartheta| \leq 1, \quad (3.87)$$

sendo compatível com a preservação da causalidade, para qualquer ângulo α .

Para a velocidade do grupo, temos:

$$\mathbf{u}_{gr} = \frac{\mathbf{p} - \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p})}{p_0}, \quad (3.88)$$

cujo módulo vale,

$$u_{gr} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta}{p_0^2}}. \quad (3.89)$$

Substituindo p_0^2 , podemos escrever

$$u_{gr} = \frac{1}{\sqrt{1 - [2\eta^2 \alpha |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta]^{-1}}}, \quad (3.90)$$

$$u_{gr} = \frac{1}{\sqrt{1 - [2x^2 \sin^2 \vartheta]^{-1}}}, \quad (3.91)$$

onde

$$x = \eta |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| \sqrt{|\alpha|}.$$

Para $\alpha > 0$, o módulo da velocidade de grupo é bem definido apenas para $\mathbf{p}^2 > (2\eta^2\alpha |\mathbf{B}|^2 \sin^2 \vartheta)^{-1}$, sendo este um cutoff mínimo da teoria. O problema é que esse cutoff mínimo depende do ângulo ϑ e, como o momento da partícula pode, a princípio, apontar em qualquer direção, o cutoff não é fixo. Por esta razão, não funciona como um verdadeiro cutoff. É fácil notar que a velocidade de grupo é sempre maior que 1 e, até singular, para $\eta |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| = \csc \vartheta / \sqrt{2\alpha}$, ou seja, o modo correspondente viola a causalidade. O comportamento do módulo da velocidade de grupo, (3.91), em termos da variável x , é descrito na Fig. (3.1).

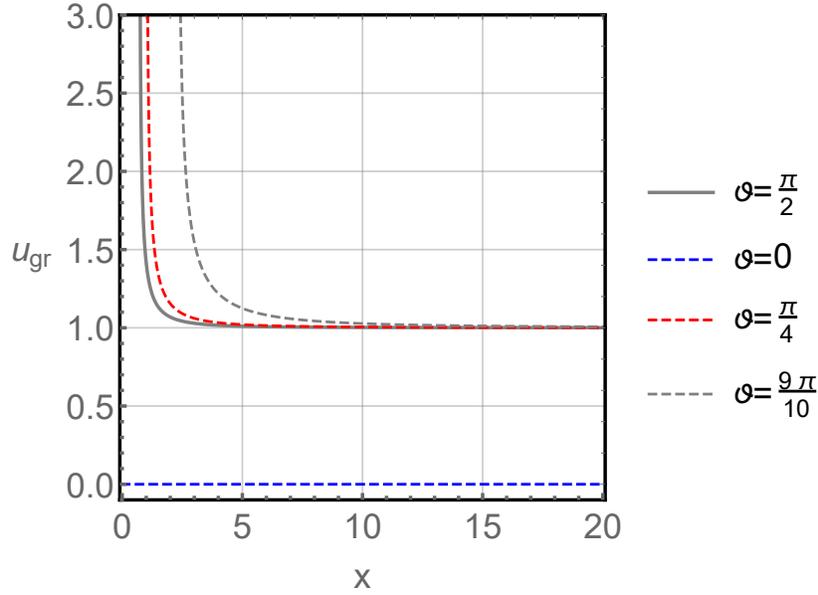


Figura 3.1: Velocidade de grupo com $\alpha > 0$, para alguns valores de ϑ

Em contraste, a velocidade do grupo para $\alpha < 0$ não exibe qualquer singularidade, sendo dada por,

$$u_{gr} = \frac{1}{\sqrt{1 + [2 \sin^2 \vartheta \eta^2 \alpha |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^2]^{-1}}}. \quad (3.92)$$

A velocidade de grupo cresce monotonamente de zero até 1. O gráfico do módulo é apresentado na Fig. (3.2).

Outra possibilidade que vale a pena considerar é o caso em que os vetores \mathbf{B} e \mathbf{C} são ortogonais, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Esta configuração é especialmente interessante, porque implica em $D_{ii} = 0$ e $Tr(D_{\mu\nu}) = 0$, quando então a lagrangiana (3.14), com $\theta = 0$, representa uma eletrodinâmica de derivadas de alta ordem que não contém o setor de Podolsky. A equação de dispersão (3.50) então fornece

$$\eta^4 p^4 \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2 + \eta^4 p^2 [\mathbf{C}^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{B}^2] - 2\eta^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) - 1 = 0. \quad (3.93)$$

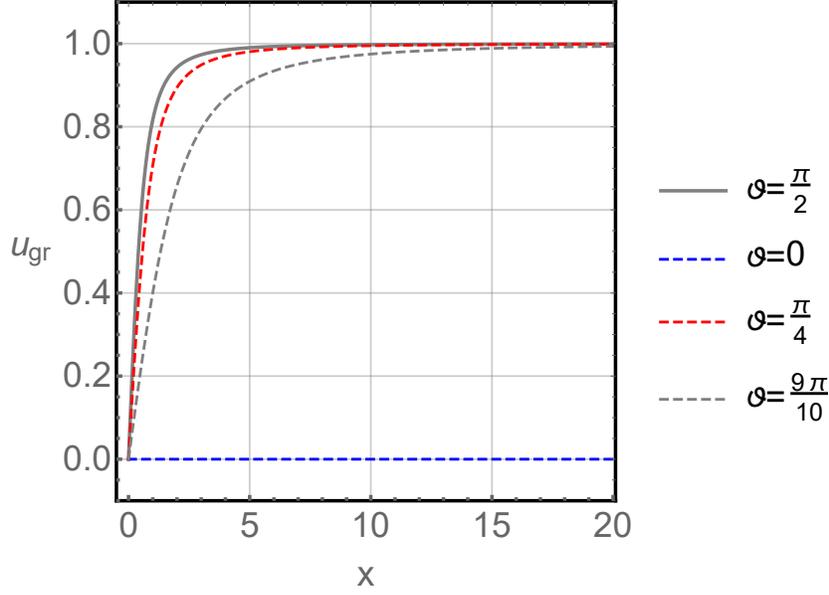


Figura 3.2: Velocidade de grupo com $\alpha < 0$, para alguns valores de ϑ

Para analisar esta situação, adotamos um sistema de coordenadas no qual os vetores \mathbf{C} e \mathbf{B} apontam ao longo dos eixos x e y , respectivamente:

$$\mathbf{C} = |\mathbf{C}|\hat{e}_x, \quad \mathbf{B} = |\mathbf{B}|\hat{e}_y. \quad (3.94)$$

Neste sistema, temos que

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}| (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad (3.95)$$

que implica

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{C}| |\mathbf{p}| \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (3.96)$$

sendo agora ϑ o ângulo que o momento \mathbf{p} faz com o eixo z .

A relação (3.93) é reescrita como

$$\begin{aligned} & \eta^4 (p_0^2 - |\mathbf{p}|^2)^2 |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{B}|^2 + \eta^4 (p_0^2 - |\mathbf{p}|^2) |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta \\ & - 2\eta^2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi - 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Simplificando e organizando, obtemos uma equação de segundo grau para p_0^2 ,

$$\begin{aligned} & \eta^4 |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{B}|^2 (p_0^2)^2 - \eta^4 |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^2 (\cos^2 \vartheta + 1) p_0^2 \\ & + |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| |\mathbf{p}|^2 \eta^2 [\eta^2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \vartheta - 2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \vartheta] - 1 = 0, \end{aligned} \quad (3.98)$$

cujas soluções são dadas por:

$$p_0^2 = \frac{(\cos^2 \vartheta + 1)}{2} |\mathbf{p}|^2 \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4} |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^4 \eta^4 \sin^4 \vartheta + |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| |\mathbf{p}|^2 \eta^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi}}{|\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \eta^2}. \quad (3.99)$$

Definindo

$$\frac{(\cos^2 \vartheta + 1)}{2} = 1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{2} = \alpha_\vartheta, \quad (3.100)$$

$$\eta^2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \sin^2 \vartheta = \nu_1, \quad (3.101)$$

podemos reescrever a relação de dispersão em uma forma simplificada, dada a seguir:

$$(p_0^\pm)^2 = \alpha_\vartheta |\mathbf{p}|^2 \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \nu_1^2 |\mathbf{p}|^4 + \nu_1 |\mathbf{p}|^2 \sin 2\varphi}}{|\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \eta^2}. \quad (3.102)$$

Avaliando a velocidade de frente de onda,

$$u_{\text{frente}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \pm \frac{\eta^2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \sin^2 \vartheta}{2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \eta^2}}, \quad (3.103)$$

observamos que, no limite $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$, obtemos duas relações possíveis, a saber:

$$u_{\text{frente}}^+ = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{2}} = 1, \quad (3.104)$$

$$u_{\text{frente}}^- = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} \leq 1, \quad (3.105)$$

ambas estão em conformidade com a preservação da causalidade, independentemente dos ângulos ϑ e φ . O próximo passo é avaliar a velocidade de grupo, cujo módulo é dado por:

$$\mathbf{u}_{gr} = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0^\pm} \alpha_\vartheta \pm \frac{1}{4 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \eta^2 p_0^\pm} \frac{(\nu_1^2 |\mathbf{p}|^3 + 2\nu_1 |\mathbf{p}| \sin 2\varphi)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \nu_1^2 |\mathbf{p}|^4 + \nu_1 |\mathbf{p}|^2 \sin 2\varphi}}. \quad (3.106)$$

Como estamos interessado no módulo da velocidade, fazemos

$$u_{gr} = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0^\pm} \sqrt{\alpha_\vartheta^2 \pm \alpha_\vartheta \frac{1}{2x^2} \frac{(x^4 \sin^4 \vartheta + 2x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi}} + \frac{(x^4 \sin^4 \vartheta + 2x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi)^2}{16x^4 (1 + \frac{1}{4} x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi)}}, \quad (3.107)$$

onde foi usado

$$\nu_1 = \eta^2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| \sin^2 \vartheta, \quad x^2 = \eta^2 |\mathbf{C}| |\mathbf{B}| |\mathbf{p}|^2. \quad (3.108)$$

Sabendo que

$$(p_0^\pm)^2 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{x^2} \left(x^2 \alpha_\vartheta \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi} \right), \quad (3.109)$$

podemos escrever

$$\frac{|\mathbf{p}|^2}{(p_0^\pm)^2} = \frac{x^2}{\left(x^2 \alpha_\vartheta \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi} \right)}, \quad (3.110)$$

logo o módulo da velocidade de grupo assume a forma

$$u_{gr} = x \sqrt{\frac{\left[\alpha_{\vartheta}^2 \pm \alpha_{\vartheta} \frac{1}{2x^2} \frac{(x^4 \sin^4 \vartheta + 2x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi}} + \frac{(x^4 \sin^4 \vartheta + 2x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi)^2}{16x^4 (1 + \frac{1}{4}x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi)} \right]}{x^2 \alpha_{\vartheta} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4 \sin^4 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi}}}. \quad (3.111)$$

Com o intuito de simplificar a Eq. (3.111), podemos definir:

$$Y = \sqrt{4 + x^2 \sin^2 \vartheta (x^2 \sin^2 \vartheta + 4 \sin 2\varphi)}, \quad (3.112)$$

e, através da definição (3.100), podemos escrever

$$\alpha_{\vartheta} = \frac{1}{4} (\cos 2\vartheta + 3). \quad (3.113)$$

Assim, obtemos o módulo da velocidade de grupo na forma

$$u_{gr}^{\pm} = \sqrt{\frac{4x^2 S + 2x^4 T + x^6 U}{Y^2 \{x^2 (3 + \cos 2\vartheta) \pm 2Y\}}}, \quad (3.114)$$

onde foram feitas as redefinições a seguir:

$$S = 3 + \cos(2\vartheta) \pm Y \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi, \quad (3.115)$$

$$T = 2 [3 + \cos(2\vartheta)] \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi \pm Y \sin^4 \vartheta, \quad (3.116)$$

$$U = [3 + \cos(2\vartheta)] \sin^4 \vartheta. \quad (3.117)$$

O gráfico da Fig. (3.3) mostra o módulo da velocidade de grupo para o modo positivo da relação de dispersão (3.102) para escolhas de diferentes ângulos.

A velocidade de grupo do modo positivo não possui singularidades. No entanto, de acordo com o gráfico, para alguns ângulos, a velocidade pode ser maior do que 1, quebrando a causalidade, mas sempre saturando em 1.

Para o modo negativo, ressaltamos que a velocidade de grupo diverge para o seguinte valor da variável adimensional x :

$$x_{\text{singular}} = \frac{|\sec \vartheta|}{2} \sqrt{\sqrt{(3 + \cos(2\vartheta))^2 - 4 \sin^4 \vartheta \cos^2(2\varphi) + 2 \sin^2 \vartheta \sin(2\varphi)}}. \quad (3.118)$$

Este valor é indicado pelas linhas verticais na Fig. (3.4). Devido à singularidade, o comportamento do modo negativo, neste regime, é não físico. Em contraste, a velocidade de grupo do modo positivo, para ângulos iguais ao considerados no modo negativo, não possui singularidades.

Para momentos pequenos, as velocidades do grupo podem ser expandidas até a segunda ordem da seguinte forma:

$$u_{gr}^{\pm} = \eta |\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin^2 \vartheta \pm \frac{1}{4} \cos 2\vartheta \pm \frac{3}{4} \right)}. \quad (3.119)$$

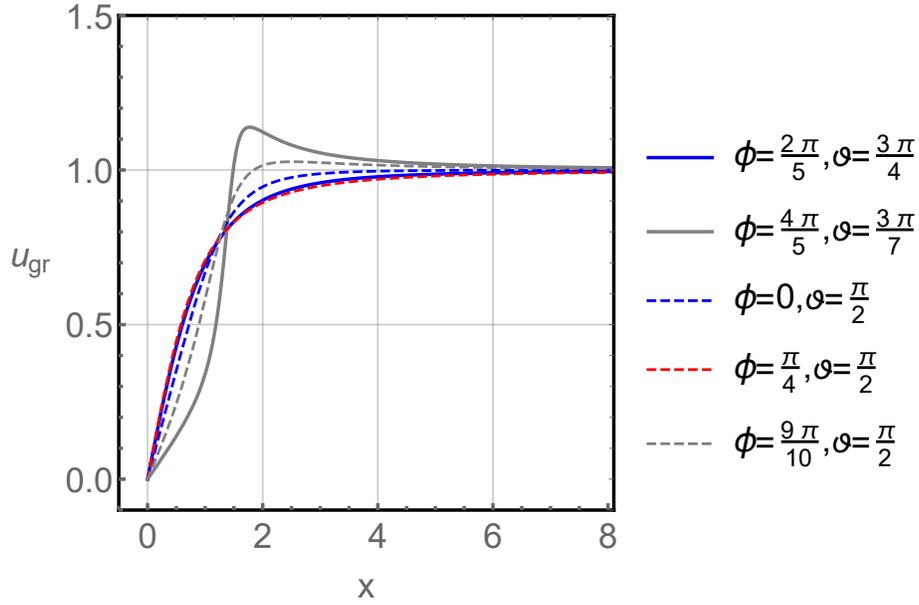


Figura 3.3: Velocidade de grupo para diferentes ângulos do modo positivo

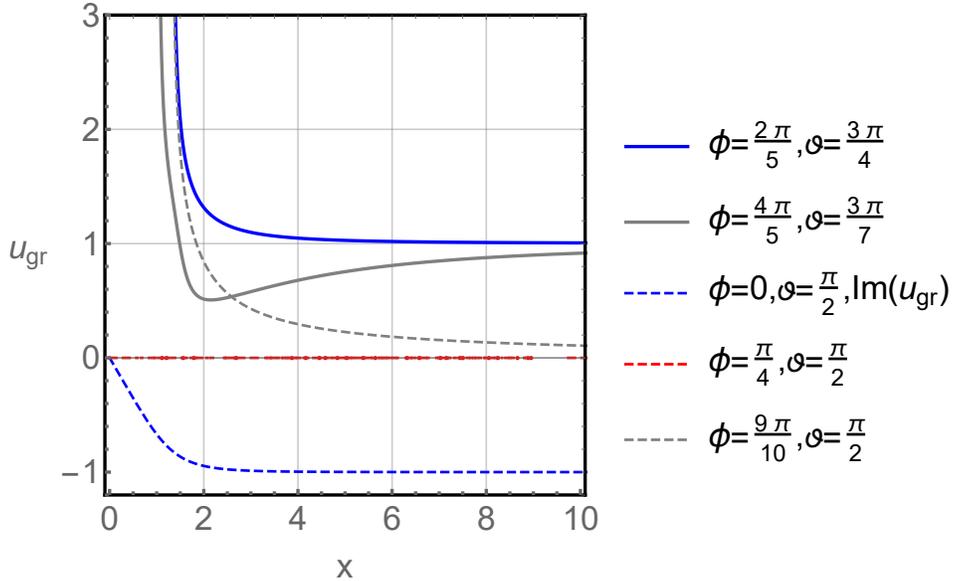


Figura 3.4: Velocidade de grupo para diferentes ângulos do modo negativo

Usando a identidade trigonométrica $\cos 2\vartheta = 1 - 2 \sin^2 \vartheta$, podemos escrever,

$$u_{gr}^{\pm} = \tilde{\Theta}^{\pm} |\mathbf{p}|, \quad (3.120)$$

onde

$$\tilde{\Theta}^{\pm} = \eta \sqrt{|\mathbf{C}| |\mathbf{B}|} \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta (\sin 2\varphi \mp 1) \pm 1}.$$

Para pequenos momentos o módulo da velocidade de grupo se comporta como um modo de Podolsky, no qual a massa depende da direção do momento. O gráfico 3.4, gerado para outros

valores dos ângulos, não revela nenhum máximo ou mínimo, com a velocidade de grupo do modo negativo se aproximando de 1 de cima e o modo positivo se aproximando de 1 de baixo. Para esta escolha de parâmetros, o modo positivo é exótico. Também foi verificado que o modo negativo não se propaga para certos ângulos. Por exemplo, a velocidade de grupo desaparece para $\vartheta = \pi/2$ e $\varphi = \pi/4$. Para $\vartheta = \pi/2$ e $\varphi < [\pi + \arcsin(1/x^2)]/2$, leva a valores complexos.

Assim, concluímos que a configuração tipo espaço, $B_\mu = (0, \mathbf{B})_\mu$ e $C_\mu = (0, \mathbf{C})_\mu$, com os vetores \mathbf{B} e \mathbf{C} paralelos ou ortogonais, pode resultar em relações de dispersão exóticas e espúrias, nas quais as velocidades de grupo divergem ou quebram causalidade. Em geral, tais relações sugerem propagação de sinal apenas no regime de grandes momentos, compatível com $u_{fr} = 1$.

Setor anisotrópico de paridade-ímpar (com $\theta = 0$)

Consideremos agora a configuração paridade-ímpar e anisotrópica, que é caracterizada por um 4-vetor puramente temporal, $C_\mu = (C_0, 0)$, e um puramente espacial, $B_\mu = (0, B_i)$. Ao ser inserida na Eq. (3.50), conduz a:

$$p_0^2 \eta^4 C_0^2 [\mathbf{p}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2] + 2\eta^2 C_0 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) p_0 - \eta^4 \mathbf{p}^2 C_0^2 [\mathbf{p}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2] - 1 = 0.$$

A solução obtida tem a forma,

$$p_0 = \frac{\text{sgn}(C_0) \mathbf{p}^2 \sqrt{\eta^4 C_0^2 (\mathbf{p}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2)^2 + \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})}}{\eta^2 C_0 [\mathbf{B}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2]}, \quad (3.121)$$

podendo também ser reescrita em função dos ângulos, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| \cos \vartheta_B$, assim, obtemos

$$p_0 = \frac{\text{sgn}(C_0) \sqrt{1 + \eta^4 C_0^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{p}^4 \sin^4 \vartheta_B - \cos \vartheta_B}}{\eta^2 C_0 |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| \sin^2 \vartheta_B}. \quad (3.122)$$

Podemos observar que, a relação de dispersão é positiva, real e não definida no limite $C_0 \rightarrow 0$.

Para a velocidade de frente de onda, temos

$$u_{\text{frente}} = \frac{\sqrt{\eta^4 C_0^2 \mathbf{B}^2 \sin^4 \vartheta_B}}{\eta^2 C_0 |\mathbf{B}| \sin^2 \vartheta_B} = 1. \quad (3.123)$$

O resultado para a velocidade de frente de onda é simplesmente 1, não revelando nenhum problema com causalidade para o regime de grandes momento. A velocidade de grupo associado, no entanto, é

$$u_{\text{gr}} = [(\eta|\mathbf{p}|)^{-4} C_0^{-2} \Upsilon^{-3} \{(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{p}}) [\text{sgn}(C_0) 2\Xi(\Upsilon + 4\mathbf{B}^2) - 4\mathbf{B}^2(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{p}})] + 2\mathbf{B}^2(\Upsilon - 2\mathbf{B}^2) - 4\Xi^2 \Upsilon\} + 5 - 4\Upsilon^{-1} \mathbf{B}^2 [\text{sgn}(C_0) 2\Xi^{-1}(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - 1] - 4(\eta|\mathbf{p}|)^4 \mathbf{B}^2 C_0^2 \Upsilon \Xi^{-2}]^{1/2}, \quad (3.124a)$$

onde

$$\Upsilon = (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 - \mathbf{B}^2, \quad \Xi = \sqrt{\mathbf{B}^2 + (\eta|\mathbf{p}|)^4 C_0^2 \Upsilon^2}. \quad (3.124b)$$

Podemos observar que, em princípio, existe apenas um modo único, isto é, a estrutura considerada descreve um vácuo não birrefringente para fótons. Entretanto, tanto a relação de dispersão quanto a velocidade de grupo dependem do sinal da componente C_0 explicitamente. Em termos do ângulo ϑ_B entre \mathbf{B} e \mathbf{p} , o resultado é expresso como

$$u_{\text{gr}} = \left[1 - 4 \csc^2 \vartheta_B + \text{sgn}(C_0) \frac{8}{Y} \cot \vartheta_B \csc \vartheta_B + \frac{4x^4}{Y^2} \sin^2 \vartheta_B + \frac{1}{8x^4} \left\{ \csc^6 \left(\frac{\vartheta_B}{2} \right) (1 - \text{sgn}(C_0)Y) + \sec^6 \left(\frac{\vartheta_B}{2} \right) (1 + \text{sgn}(C_0)Y) \right\} \right]^{1/2}, \quad (3.125)$$

onde

$$Y = \sqrt{1 + (x \sin \vartheta)^4}, \quad x = \eta |\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{B}| |C_0|}. \quad (3.126)$$

Independentemente do sinal de C_0 a velocidade de grupo torna-se singular apenas para valores quase nulo do momento, conforme as Fig. (3.5) e (3.6), que caracteriza um regime não físico para cada sinal de C_0 .

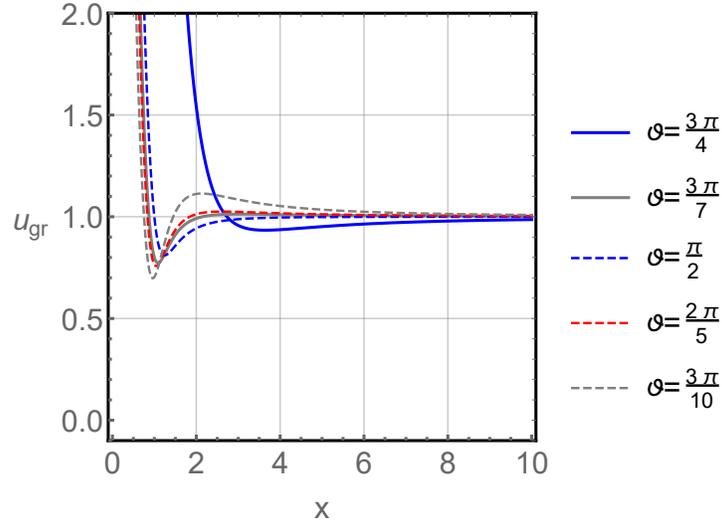


Figura 3.5: Velocidade de grupo para diferentes ângulos com $C_0=1$

Uma expansão para pequenos momentos, fornece

$$u_{\text{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x^2} \sqrt{[1 + \text{sgn}(C_0)] \sec^6 \left(\frac{\vartheta_B}{2} \right) + [1 - \text{sgn}(C_0)] \csc^6 \left(\frac{\vartheta_B}{2} \right)}, \quad (3.127)$$

explicitamente revelando as singularidades para ambos os sinais de C_0 . Note que a velocidade de grupo de um dos modos, para $C_0 < 0$ e $\vartheta_B = 3\pi/10$, tem um mínimo e se aproxima de 1 de baixo aumentando para x , enquanto a velocidade de grupo do segundo modo, para $C_0 > 0$, tem um mínimo e um máximo e se aproxima de 1 de cima. O módulo da velocidade de grupo se torna maior que 1 para ambos os modos em alguns valores de x , que é um comportamento que corresponde à violação de causalidade. Vale apenas ressaltar também que os dois modos

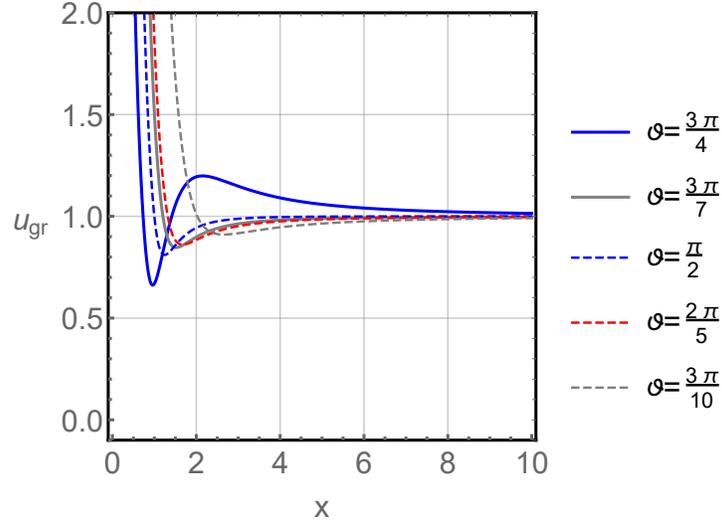


Figura 3.6: Velocidade de grupo para diferentes ângulos com $C_0=-1$

se fundem em um único modo para $\vartheta = \pi/2$ e que eles trocam seu papel por $\vartheta \in (\pi/2, \pi]$. Nenhum dos modos se comportam como fótons padrão quando $\eta \rightarrow 0$. Como os modos da velocidade de grupo exibem singularidades, são espúrias.

A compilação dos resultados obtidos revela que esta eletrodinâmica de derivadas de ordens mais alta exibe apenas uma propagação de sinais bem comportada no limite de grandes momentos. Mas as relações de dispersão não podem ser válidas apenas para um determinado intervalo de momento, a menos que um corte fisicamente razoável possa ser imposto à teoria. Portanto, essa interpretação não será considerada. Para momentos pequenos, alguns dos modos se comportam como um modo Podolsky, onde o parâmetro Podolsky pode depender da direção do momento devido à anisotropia.

3.2.3 Análise da unitariedade

Para analisar a unitariedade, faremos uso do método da saturação do propagador que consiste na contração tensorial entre as correntes J_ν , J^α e a matriz do propagador escrita em cada um dos seus pólos envolvendo o cálculo do resíduo do propagador. A saturação do propagador é dada por

$$SP = J^\nu \text{Re } s [i\Delta_{\nu\alpha}] J^\alpha. \quad (3.128)$$

Considerando o propagador da Eq. (3.33), definido na ausência do termo Podolsky ($\theta^2 = 0$), a saturação com as correntes será dada por

$$SP = -i\text{Res} \left[\frac{1}{p^2 \Gamma_{\theta=0}(p)} [\Gamma_{\theta=0}(p) J^2 - 2\eta^2 p^2 \Pi_{\theta=0}(p) (C \cdot J) (B \cdot J) + \eta^4 p^2 ((C \cdot p)^2 - p^2 C^2) (B \cdot J)^2 + \eta^4 p^2 ((B \cdot p)^2 - p^2 B^2) (C \cdot J)^2] \right], \quad (3.129)$$

onde $\Gamma_{\theta=0}(p)$ é dado pela Eq. (3.50). Vale ressaltar que $\Gamma_{\theta=0}(p)$ deve ser analisado em relação ao resíduo de cada denominador.

Para o pólo $p^2 = 0$, que é o mesmo polo da teoria de Maxwell, o cálculo do resíduo fornece a saturação:

$$SP_{(p^2=0)} = -iJ^2 = i(\mathbf{J}^2 - J_0^2). \quad (3.130)$$

Da lei de conservação de corrente, $(p_0 J_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$, a eq. (3.130) fornece

$$SP_{(p^2=0)} = \frac{i}{|\mathbf{p}|^2} |\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2 > 0. \quad (3.131)$$

Logo a saturação no pólo $p^2 = 0$ é positiva, implicando que as excitações associadas com este modo propagante são unitárias, independentemente da configuração do tensor de fundo. Portanto, deduzimos que uma quantização desse modo, que é a usual da eletrodinâmica, corresponde ao fóton.

Para o segundo pólo, o cálculo do resíduo em $\Gamma_{\theta=0}(p)$ tem a forma

$$\begin{aligned} \text{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0} = & -i\eta^2 \left\{ \eta^2 (B \cdot J)^2 [(C \cdot p)^2 - C^2 p^2] + \eta^2 (C \cdot J)^2 [(B \cdot p)^2 - B^2 p^2] \right. \\ & \left. - 2(B \cdot J)(C \cdot J)\Pi_{\theta=0}(p) \right\} \Big|_{\Gamma(p)=0}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

A situação agora é mais complicada e requer uma análise cuidadosa para encontrar o sinal global da expressão entre chaves. Para melhor analisar o pólo $\Gamma_{\theta=0}(p)$ temos que calcular a unitariedade separada para cada um dos coeficientes do background analisados anteriormente.

Considerando a Eq. (3.48), uma avaliação de $\Gamma_{(p)=0}$ fornece a relação

$$\text{sgn}(\Pi_{\theta=0})\Pi(p)|_{\Gamma(p)=0} = \eta^2 \sqrt{[(B \cdot p)^2 - B^2 p^2][(C \cdot p)^2 - C^2 p^2]} \Big|_{\Gamma(p)=0}. \quad (3.133)$$

A função de sinal no lado esquerdo deve ser levada em conta, pois $\Pi_{\theta=0}(p)$ pode ser uma quantidade negativa, enquanto o lado direito é manifestamente positivo. Além disso, precisamos novamente distinguir dois casos. Após investigar um grande número de setores com violação de Lorentz, deduzimos que $p^\mu \in M_1$ ou $p^\mu \in M_2$ com os dois conjuntos

$$M_1 \equiv \{(B \cdot p)^2 - B^2 p^2 > 0, (C \cdot p)^2 - C^2 p^2 > 0\}, \quad (3.134)$$

$$M_2 \equiv \{(B \cdot p)^2 - B^2 p^2 < 0, (C \cdot p)^2 - C^2 p^2 < 0\}. \quad (3.135)$$

Ambas as opções asseguram $\Pi(p)$ real. Para a primeira opção, o resíduo pode ser expresso em termos do quadrado de uma soma de dois termos. Para a segunda opção, um sinal de menos global deve ser retirado de toda a expressão, invertendo o sinal global da saturação. Os resíduos podem então ser escritos da seguinte forma:

$$\text{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0} = i\eta^4 \left\{ \begin{aligned} & - \left\{ (B \cdot J) \sqrt{(C \cdot p)^2 - C^2 p^2} \right. \\ & \left. - \text{sgn}(\Pi_{\theta=0})(C \cdot J) \sqrt{(B \cdot p)^2 - B^2 p^2} \right\}^2 \Big|_{\Gamma(p)=0} \end{aligned} \right. , \quad (3.136)$$

para $p^\mu \in M_1$ e

$$\text{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0} = i\eta^4 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ (B \cdot J) \sqrt{|(C \cdot p)^2 - C^2 p^2|} \right. \\ \left. + \text{sgn}(\Pi_{\theta=0})(C \cdot J) \sqrt{|(B \cdot p)^2 - B^2 p^2|} \right\}^2 \end{array} \right\} \Big|_{\Gamma(p)=0}, \quad (3.137)$$

para $p^\mu \in M_2$.

Portanto, $\text{Im}[\text{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0}] < 0$ para o primeiro caso, que é um comportamento que indica a quebra de unitariedade. O segundo caso se comporta de maneira oposta, logo a unitariedade é preservada.

A configuração para o setor de paridade-ímpar com $(C_\mu) = (C_0, \mathbf{0})$, $(B_\mu) = (0, \mathbf{B})$ analisada no setor anisotrópico de paridade par é coberto pelo último caso. Assim, obtemos

$$(B \cdot p)^2 - B^2 p^2 = -\frac{|\mathbf{B}|}{2\eta^2 |\mathbf{C}|} < 0, \quad (C \cdot p)^2 - C^2 p^2 = -\frac{|\mathbf{C}|}{2\eta^2 |\mathbf{B}|} < 0, \quad (3.138)$$

é por isso que $p^\mu \in M_2$ neste setor. Assim, a unitariedade é preservada para essa configuração.

Para o setor anisotrópico de paridade ímpar afirma que

$$(C \cdot p)^2 - C^2 p^2 = C_0^2 \mathbf{p}^2 > 0. \quad (3.139)$$

No entanto, é um pouco mais complicado avaliar a segunda condição. A inequação $(B \cdot p)^2 - B^2 p^2 \geq 0$ a ser verificada pode ser convertida em uma forma mais transparente como segue,

$$2x^4 \sin^4 \vartheta_B \cos^2 \vartheta_B + \left\{ 3 + \cos(2\vartheta_B) - 4 \text{sgn}(C_0) \cos(\vartheta_B) \sqrt{1 + x^4 \sin^4 \vartheta_B} \right\} \geq 0, \quad (3.140a)$$

que é equivalente a

$$2 \left\{ 1 - \text{sgn}(C_0) \cos \vartheta_B \sqrt{1 + x^4 \sin^4 \vartheta_B} \right\}^2 \geq 0. \quad (3.140b)$$

Este último envolve o ângulo ϑ_B e a quantidade adimensional $x = \eta |\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{B}| |C_0|}$. Para $C_0 > 0$, o sinal de igualdade é válido somente para $\vartheta_B = 0$, enquanto para $C_0 < 0$ é válido para $\vartheta_B = \pi$. Além destes valores muito específicos nos limites do intervalo para ϑ_B , a condição $(B \cdot p)^2 - B^2 p^2 > 0$ é cumprida manifestamente, em que $p^\mu \in M_1$. Portanto, de acordo com nosso critério, há problemas com unitariedade para este setor.

Existe uma possibilidade alternativa de calcular o propagador saturado. Usando os operadores transversal (T) e longitudinal (L) $\Theta_{\mu\nu}$ e $\Omega_{\mu\nu}$ no espaço dos momentos, o propagador pode ser decomposto em quatro partes

$$\Delta_{\mu\nu}^{TT} \equiv \Theta_{\mu\alpha} \Delta^{\alpha\beta} \Theta_{\beta\nu}, \quad \Delta_{\mu\nu}^{TL} \equiv \Theta_{\mu\alpha} \Delta^{\alpha\beta} \Omega_{\beta\nu}, \quad \Delta_{\mu\nu}^{LT} \equiv \Omega_{\mu\alpha} \Delta^{\alpha\beta} \Theta_{\beta\nu}, \quad \Delta_{\mu\nu}^{LL} \equiv \Omega_{\mu\alpha} \Delta^{\alpha\beta} \Omega_{\beta\nu}. \quad (3.141)$$

Depois de realizar as contrações com a corrente, somente $\Delta_{\mu\nu}^{TT}$ irá sobreviver. Seguindo este procedimento, o propagador saturado pode ser lançado na forma

$$SP = J^\mu \Delta_{\mu\nu}^{TT} J^\nu, \quad (3.142)$$

onde

$$\Delta_{\mu\nu}^{TT} = -i \frac{(M^{-1})_{\mu\nu}}{p^2}, \quad (3.143a)$$

$$M^{\mu\nu} = [(1 - \theta^2 p^2)g - 2\eta^2 D^{TT} p^2]^{\mu\nu}, \quad (3.143b)$$

$$(D^{TT})_{\mu\nu} \equiv \Theta_{\mu\alpha} D^{\alpha\beta} \Theta_{\beta\nu}. \quad (3.143c)$$

Assim, o comportamento da unitariedade é completamente controlado pela parte totalmente transversa da matriz $D_{\mu\nu}$. Executando uma decomposição parcial da fração, o polo padrão $p^2 = 0$ pode ser separado das demais expressões envolvendo o parâmetro de Podolsky e o coeficiente de violação de Lorentz na forma:

$$\Delta_{\mu\nu}^{TT} = -i \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + (\theta^2 \delta + 2\eta^2 D^{TT})_{\mu}{}^{\alpha} (M^{-1})_{\alpha\nu} \right\}. \quad (3.144)$$

Usando a decomposição explícita de $D_{\mu\nu}$ em termos de dois 4-vetores propostos na Eq. (3.19) e $\theta = 0$, podemos deduzir que $\det(M) = \Gamma(p)$, com $\Gamma(p)$ da Eq. (3.50) para $\theta = 0$. O resultado da Eq. (3.144) é adequado para investigar unitariedade para o caso em que $\theta \neq 0$ e $D_{\mu\nu}$ é geral em que a forma não depende de uma decomposição de dois 4-vetores.

Por fim, a violação da unitariedade estar conectada ao aparecimento de derivadas temporais adicionais nas contribuições com violação de Lorentz da densidade lagrangiana, das Eqs (3.16), (3.18).

Capítulo 4

Generalização da eletrodinâmica de Maxwell envolvendo termos anisotrópicos, CPT-pares, de Podolsky e Lee-Wick

4.1 Introdução

A eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo CPT-par com altas derivadas, apresentada no capítulo anterior, pode ser generalizada e escrita de modo a envolver termos anisotrópicos de Podolsky e Lee-Wick conforme mostraremos no decorrer deste capítulo.

Existem dois outros termos CPT-par de dimensão 6 com duas derivadas adicionais, além da modificação com violação de Lorentz (3.1), que podem ser expressos em termos do tensor do campo eletromagnético e do tensor de fundo $D^{\mu\nu}$, a saber:

$$D^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\mu\nu}, \quad D^{\mu\nu} \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} \partial_\mu F_{\nu\lambda}. \quad (4.1)$$

O primeiro termo é tipo Lee-Wick anisotrópico, enquanto o segundo produz uma contribuição bilinear semelhante a ele, mas com sinal oposto, de forma que apenas um desses termos será considerado aqui. A mesma equivalência observada para o caso do termo de Podolsky anisotrópico vale também para o termo de Lee-Wick anisotrópico. Para a configuração de um tensor diagonal $D_{\beta\alpha}$ da forma $D_{\beta\alpha} = D_{00} g_{\beta\alpha}$, torna-se proporcional ao termo usual de Lee-Wick, isto é,

$$D^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\mu\nu} = D_{00} (F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}). \quad (4.2)$$

O comportamento dos coeficientes do tensor $D_{\beta\alpha}$ sob operações das simetrias discreta C , P e T não depende da forma como o tensor está acoplado ao campo eletromagnético. Sendo assim, continua sendo válido para as estruturas anisotrópicas de Lee-Wick da Eq. (4.1).

4.2 Eletrodinâmica de Maxwell envolvendo termos anisotrópicos de Podolsky e Lee-Wick

Em princípio, a eletrodinâmica, com violação de Lorentz, de dimensão 6 mais geral modificada por um tensor de fundo simétrico de rank-2, $D_{\beta\alpha}$, também inclui a segunda das contribuições anisotrópicas de Lee-Wick da Eq. (4.1), e é representado pela Lagrangiana a seguir:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda{}_\beta + \eta_1^2 D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} + \eta_2^2 D^{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\lambda}\partial_\beta F_{\alpha\lambda} + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (4.3)$$

onde $\theta \geq 0$, $\eta_1 \geq 0$, e $\eta_2 \geq 0$. O termo $\eta_1^2 D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}$ incorpora o termo de Podolsky modificado com violação de Lorentz considerado no capítulo anterior, e o termo $\eta_2^2 D^{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\lambda}\partial_\beta F_{\alpha\lambda}$ é a contribuição anisotrópica de Lee-Wick.

A lagrangeana acima na forma bilinear é escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu \bar{O}_{\mu\nu} A^\nu,$$

onde o operador $\bar{O}_{\mu\nu}$ é dado por

$$\begin{aligned} \bar{O}_{\mu\nu} = & (1 + \theta^2 \square + 2\eta_2^2 D^{\beta\alpha} \partial_\beta \partial_\alpha) \square \Theta_{\mu\nu} + \left(2\eta_1^2 D^{\beta\alpha} \partial_\beta \partial_\alpha - \frac{1}{\xi} \right) \square \Omega_{\mu\nu} + 2\eta_1^2 D_{\nu\mu} \square^2 \\ & - 2\eta_1^2 D_{\nu\alpha} \square \partial_\mu \partial^\alpha - 2\eta_1^2 D_{\sigma\mu} \square \partial_\nu \partial^\sigma. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Com base na parametrização,

$$D_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (C_\beta B_\alpha + C_\alpha B_\beta),$$

para o tensor simétrico $D_{\beta\alpha}$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{O}_{\mu\nu} = & (1 + \theta^2 \square + 2\eta_2^2 \kappa \rho) \square \Theta_{\mu\nu} + \left(2\eta_1^2 \kappa \rho - \frac{1}{\xi} \right) \square \Omega_{\mu\nu} + \eta_1^2 (B_\mu C_\nu + B_\nu C_\mu) \square^2 \\ & - \eta_1^2 (C_\nu \partial_\mu + C_\mu \partial_\nu) \kappa \square - \eta_1^2 (\partial_\nu B_\mu + \partial_\mu B_\nu) \rho \square, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$$\kappa = B_\alpha \partial^\alpha \text{ e } \rho = C_\alpha \partial^\alpha. \quad (4.6)$$

Propondo o *ansatz*

$$\begin{aligned} \Delta^\nu{}_\alpha = & a\Theta^\nu{}_\alpha + b\Omega^\nu{}_\alpha + cB^\nu C_\alpha + dB_\alpha C^\nu \\ & + eC^\nu \partial_\alpha + fC_\alpha \partial^\nu + gB^\nu \partial_\alpha + hB_\alpha \partial^\nu + jB^\nu B_\alpha + lC^\nu C_\alpha, \end{aligned} \quad (4.7)$$

usando a identidade

$$\bar{O}_{\mu\nu} \Delta^\nu{}_\alpha = g_{\mu\alpha},$$

e usando a mesma álgebra tensorial do primeiro caso, mostrado no capítulo anterior, o propagador para esse modelo tem a forma:

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu\alpha} = & -\frac{i}{p^2\Delta(p)} \left\{ \tilde{\Gamma}(p)\Theta_{\nu\alpha} + [b' - \xi\Delta(p)]\Omega_{\nu\alpha} \right. \\ & - i\tilde{F}(p)(B_\nu p_\alpha + B_\alpha p_\nu) - 2\eta_1^2 D_{\nu\alpha} p^2 \tilde{\Pi}(p) - i\tilde{H}(p)(C_\nu p_\alpha + C_\alpha p_\nu) \\ & \left. + \eta_1^4 B_\nu B_\alpha [(C \cdot p)^2 - C^2 p^2] p^2 + \eta_1^4 C_\nu C_\alpha [(B \cdot p)^2 - B^2 p^2] p^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.8a)$$

onde fizemos as seguintes definições

$$\Delta(p) = [1 - \theta^2 p^2 - 2\eta_2^2 (B \cdot p)(C \cdot p)]\tilde{\Gamma}(p), \quad (4.8b)$$

$$\tilde{\Gamma}(p) = \eta_1^4 [(B \cdot p)^2 - B^2 p^2] [(C \cdot p)^2 - C^2 p^2] - \tilde{\Pi}^2(p), \quad (4.8c)$$

$$\tilde{\Pi}(p) = 1 - \theta^2 p^2 - \eta_1^2 p^2 (B \cdot C) + [\eta_1^2 - 2\eta_2^2] (B \cdot p)(C \cdot p), \quad (4.8d)$$

$$\tilde{F}(p) = F(p)|_{\eta=\eta_1}, \quad \tilde{H}(p) = H(p)|_{\eta=\eta_1}, \quad (4.8e)$$

com $F(p)$ e $H(p)$ dados pelas Eqs. (3.37) e (3.38), respectivamente. Agora as relações de dispersão são dadas por:

$$p^2[1 - \theta^2 p^2 - 2\eta_2^2 (B \cdot p)(C \cdot p)] = 0, \quad (4.9a)$$

$$\tilde{\Gamma}(p) = 0. \quad (4.9b)$$

Agora podemos observar que ao contrário da Eq. (3.41), a relação de dispersão de Podolsky, do modelo do capítulo anterior, também é modificada, conforme mostrado na Eq. (4.9a).

4.2.1 Relação de dispersão

Para analisarmos as relações de dispersão (4.9a) e (4.9b), consideramos as configurações tipo-tempo e tipo-espaço para o campo de fundo $C_\beta B_\alpha$. Primeiro vamos estudar as relações de dispersão (4.9a) e (4.9b) para o setor temporal.

Setor isotrópico tipo-tempo (com $\theta \neq 0$)

A configuração isotrópica tipo-tempo é caracterizada por $B_\mu = (B_0, \mathbf{0})_\mu$, $C_\mu = (C_0, \mathbf{0})_\mu$. Como já mencionado, a relação de dispersão (4.9a) mostra que a relação de dispersão de Podolsky usual agora é modificada por uma contribuição resultante do termo anisotrópico de Lee-Wick. Nesse caso, a relação de dispersão obtida da Eq. (4.9a) assume a forma,

$$1 - \theta^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2) - 2\eta_2^2 B_0 C_0 p_0^2 = 0,$$

simplificando, obtemos a solução

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2} \right)}, \quad (4.10)$$

onde

$$\varepsilon = 1 + \frac{2\eta_z^2 B_0 C_0}{\theta^2}. \quad (4.11)$$

A relação de dispersão do tipo Podolsky obtida é modificada por uma espécie de constante dielétrica, ε .

Causalidade Analisamos alguns setores da teoria proposta em busca de configurações do tensor de fundo que proporcione uma eletrodinâmica consistente. Para analisar a causalidade verificamos o comportamento da velocidade de grupo e da velocidade de frente de onda. As velocidades de grupo e de frente de onda são dadas por

$$\mathbf{u}_{gr} = \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}. \quad (4.12)$$

Usamos a notação de causalidade clássica que requer $u_g = |\mathbf{u}_g| \leq 1$ e $u_{frente} \leq 1$. As relações de dispersão que exibem velocidades de grupo e velocidade de frente de onda divergentes ou velocidades maiores que 1 serão chamadas de espúrias.

Para $B_0 C_0 > 0$, temos

$$\frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\mathbf{p}^2 \theta^2} \right)}, \quad (4.13)$$

logo a velocidade de frente de onda é dada por

$$u_{frente} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < 1. \quad (4.14)$$

Para a velocidade de grupo, podemos escrever

$$\mathbf{u}_{gr} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2} \right)}}. \quad (4.15)$$

Para o módulo da velocidade de grupo, obtemos

$$u_{gr} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1/\theta^2}}. \quad (4.16)$$

Podemos observar que a expressão acima também é sempre menor que 1, garantindo a validade de causalidade para essa configuração. A relação de dispersão (4.10) só faz sentido na presença do termo de Podolsky ($\theta^2 \neq 0$). Vemos que θ^2 aparece dentro da expressão para ε também.

Setor isotrópico tipo tempo, RD 2, (com $\theta \neq 0$)

Agora vamos analisar a equação de dispersão (4.9b) para a configuração isotrópica com $B_\mu = (B_0, \mathbf{0})_\mu$, $C_\mu = (C_0, \mathbf{0})_\mu$, que pode ser escrita como

$$\eta_1^2 B_0 C_0 \mathbf{p}^2 = \pm [1 - \theta^2 p_0^2 + \theta^2 \mathbf{p}^2 + \eta_1^2 \mathbf{p}^2 B_0 C_0 - 2\eta_2^2 B_0 C_0 p_0^2]. \quad (4.17)$$

Para o sinal positivo, +, obtemos a relação entre energia e momento na forma

$$p_0^2 = \frac{1 + \theta^2 |\mathbf{p}|^2}{2\eta_2^2 B_0 C_0 + \theta^2}. \quad (4.18)$$

Para o sinal negativo, −, a relação entre energia e momento é dada por

$$(2\eta_2^2 B_0 C_0 + \theta^2) p_0^2 = 1 + (\theta^2 + \eta_1^2 B_0 C_0 + \eta_1^2 B_0 C_0) \mathbf{p}^2, \quad (4.19)$$

cujas soluções são:

$$p_0^2 = \frac{1 + (\theta^2 + 2\eta_1^2 B_0 C_0) |\mathbf{p}|^2}{2\eta_2^2 B_0 C_0 + \theta^2}. \quad (4.20)$$

As relações acima podem ser reescritas na forma

$$E^{(\pm)} = \psi^{(\pm)} |\mathbf{p}|, \quad \psi^{(\pm)} = \psi^{(\pm)}(|\mathbf{p}|), \quad (4.21a)$$

onde

$$\psi^{(+)} = \sqrt{\frac{1 + \theta^2 |\mathbf{p}|^2}{2y^2 + \theta^2 |\mathbf{p}|^2}}, \quad \psi^{(-)} = \sqrt{\frac{1 + 2x^2 + \theta^2 |\mathbf{p}|^2}{2y^2 + \theta^2 |\mathbf{p}|^2}}, \quad (4.21b)$$

e

$$x = \sqrt{B_0 C_0 \eta_1} |\mathbf{p}|, \quad y = \sqrt{B_0 C_0 \eta_2} |\mathbf{p}|, \quad (4.22)$$

são coeficientes adimensionais. Podemos observar que x e y são funções lineares para o momento, $|\mathbf{p}|$, e as razões

$$\frac{x}{\theta |\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{B_0 C_0 \eta_1}}{\theta} \equiv \alpha, \quad (4.23)$$

$$\frac{y}{\theta |\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{B_0 C_0 \eta_2}}{\theta} \equiv \beta, \quad (4.24)$$

são adimensionais. Portanto, é razoável investigar as relações de dispersão para as velocidades de grupo e frente de onda.

Causalidade Para o sinal positivo, relação de dispersão (4.18), a velocidade de frente de onda, tem a forma

$$u_{\text{frente}}^{(+)} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2\eta_2^2 B_0 C_0 / \theta^2}}. \quad (4.25)$$

Para o sinal negativo, relação de dispersão (4.20), a velocidade de frente de onda, é dada por:

$$u_{\text{frente}}^{(-)} = \sqrt{\frac{1 + 2\eta_1^2 B_0 C_0 / \theta^2}{1 + 2\eta_2^2 B_0 C_0 / \theta^2}}. \quad (4.26)$$

Agora, as velocidades de frente de onda para ambos os modos são simplesmente fornecidas por

$$u_{\text{frente}}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta^2}}, \quad u_{\text{frente}}^{(-)} = \sqrt{\frac{1 + 2\alpha^2}{1 + 2\beta^2}}. \quad (4.27a)$$

Podemos observar que o modo positivo é sempre menor que 1, enquanto o modo negativo pode ser maior que 1 para $\alpha > \beta$. Para completar a análise da causalidade precisamos obter as velocidades do grupo.

Para o sinal positivo, temos

$$\mathbf{u}_{\text{gr}}^{(+)} = \theta^2 |\mathbf{p}| \left(\frac{1 + \theta^2 |\mathbf{p}|^2}{2\eta_2^2 B_0 C_0 + \theta^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.28)$$

Para o sinal negativo, obtemos

$$\mathbf{u}_{\text{gr}}^{(-)} = (\theta^2 + 2\eta_1^2 B_0 C_0 |\mathbf{p}|) \left(\frac{1 + (\theta^2 + 2\eta_1^2 B_0 C_0) |\mathbf{p}|^2}{2\eta_2^2 B_0 C_0 + \theta^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.29)$$

Usando as definições, obtemos as velocidades de grupo para ambos os modos na forma:

$$u_{\text{gr}}^{(+)} = \frac{\psi^{(+)}}{1 + (\theta |\mathbf{p}|)^{-2}}, \quad (4.30a)$$

$$u_{\text{gr}}^{(-)} = \psi^{(-)} \left\{ 1 - \frac{1}{(\psi^{(-)})^2 [2y^2 + (\theta |\mathbf{p}|)^2]} \right\}. \quad (4.30b)$$

Podemos observar que ambas as expressões não apresentam singularidades. O gráfico da Fig. 4.1 nos mostra que as velocidades de grupo são decrescentes para momentos decrescentes, onde cada modo, sinal positivo e negativo, se comporta como um modo tipo Podolsky neste regime:

$$u_{\text{gr}}^{(\pm)} = \widehat{\Theta}^{(\pm)} |\mathbf{p}|, \quad (4.31)$$

onde

$$\widehat{\Theta}^{(+)} = \frac{\theta}{\sqrt{1 + 2\beta^2}}, \quad \widehat{\Theta}^{(-)} = \frac{(1 + 2\alpha^2)\theta}{\sqrt{1 + 2\beta^2}}. \quad (4.32a)$$

Como este caso é isotrópico, os parâmetros de Podolsky não dependem da direção do momento, mas envolvem os coeficientes que violam a simetria de Lorentz. Vemos que a violação da causalidade pode ocorrer para o modo \ominus dependendo dos parâmetros escolhidos. A velocidade de grupo, para cada modo, aumenta de 0 a um valor finito que é dado pelas expressões obtidas anteriormente para a velocidade frontal,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_{\text{gr}}^{(+)} = u_{\text{frente}}^{(+)}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u_{\text{gr}}^{(-)} = u_{\text{frente}}^{(-)}. \quad (4.33)$$

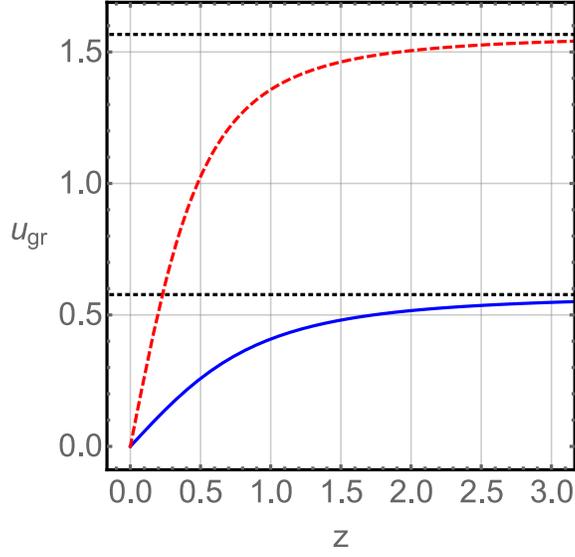


Figura 4.1: Velocidades de grupo das Eq. (4.30) como uma função de $z = \theta|\mathbf{p}|$ para o modo \oplus (azul, linha contínua) com $\beta = 1$ e para o modo \ominus com $\alpha = 1, \beta = 1/3$ (vermelho, tracejadas). As assíntotas horizontais são mostradas pelas linhas pontilhadas pretas.

Assim, a velocidade de grupo do modo \ominus pode atingir valores maiores que 1, quebrando assim a causalidade, o que caracteriza um modo espúrio. Por outro lado, o modo \oplus não viola a causalidade, embora não se comporte como um fóton padrão quando η_1 ou η_2 são iguais a zero. Portanto, é um modo exótico. Podemos observar que nos limites $\alpha \mapsto 0$ e $\beta \mapsto 0$ o tensor de violação de Lorentz desaparece, e recai na relação de dispersão do tipo Podolsky.

Agora vamos estudar as relações de dispersão (4.9a) e (4.9b) para o setor espacial.

Setor anisotrópico de paridade par (com $\theta \neq 0$)

Para a configuração espacial, $B_\mu = (0, \mathbf{B})_\mu$, $C_\mu = (0, \mathbf{C})_\mu$, a relação de dispersão dada pela Eq. (4.9a) tem a forma de uma equação de segundo grau para p_0^2 ,

$$-\theta^2 p_0^4 + (1 - 2\eta_2^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) + 2\theta^2 \mathbf{p}^2) p_0^2 - [\mathbf{p}^2 + \theta^2 \mathbf{p}^4 - 2\eta_2^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}^2] = 0, \quad (4.34)$$

cuja solução é dada por

$$p_0^2 = \frac{1}{\theta^2} + \mathbf{p}^2 - \frac{2\eta_2^2}{\theta^2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}). \quad (4.35)$$

Podemos observar que para $\eta_2 \mapsto 0$, obtemos a relação de dispersão de Podolsky,

$$p_0^2 = \frac{1}{\theta^2} + \mathbf{p}^2. \quad (4.36)$$

Para analisar a relação de dispersão para $\eta_2 \neq 0$, vamos considerar primeiro a situação em que os vetores \mathbf{C} , \mathbf{B} são ortogonais. Adotando o sistema de coordenadas,

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}| (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta), \quad (4.37)$$

em que ϑ é o ângulo que o momento \mathbf{p} faz com o *eixo* z . Sendo assim, os vetores \mathbf{C} e \mathbf{B} apontam ao longo dos eixos x e y , respectivamente:

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{B}| |\mathbf{p}| \sin \vartheta \sin \phi, \quad (4.38)$$

$$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{C}| |\mathbf{p}| \sin \vartheta \cos \phi. \quad (4.39)$$

Assim, a Eq. (4.35) assume a forma:

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + \mathbf{p}^2 \left(1 - \frac{\eta_2^2}{\theta^2} |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin^2 \vartheta \sin 2\phi \right)}. \quad (4.40)$$

Do mesmo modo, como fizemos no setor temporal, vamos analisar a causalidade para esse setor.

Causalidade Para a velocidade de frente de onda, temos

$$u_{\text{frente}} = \sqrt{1 - \frac{\eta_2^2}{\theta^2} |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin^2 \vartheta \sin(2\phi)}, \quad (4.41)$$

em que a velocidade de frente de onda pode ser maior que 1 para alguns valores de ϕ .

Para a velocidade de grupo, escrevemos

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{\mathbf{p} \left(1 - \frac{\eta_2^2}{\theta^2} |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin^2 \vartheta \sin 2\phi \right)}{\sqrt{\frac{1}{\theta^2} + \mathbf{p}^2 \left(1 - \frac{\eta_2^2}{\theta^2} |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin^2 \vartheta \sin 2\phi \right)}}. \quad (4.42)$$

O módulo da velocidade do grupo é dado por

$$u_{\text{gr}} = \sqrt{2 + \frac{y^4 \sin^2 \vartheta - z^2(2 + z^2)}{z^2 [1 + z^2 - y^2 \sin^2 \vartheta \sin(2\phi)]}}, \quad (4.43)$$

onde

$$y = \sqrt{|\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \eta_2} |\mathbf{p}|, \quad z = \theta |\mathbf{p}|. \quad (4.44)$$

A razão $\frac{y}{z}$, é definida como

$$\frac{y}{z} = \frac{\sqrt{|\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \eta_2}}{\theta} \equiv \beta. \quad (4.45)$$

O gráfico da Fig. 4.2 nos mostra o comportamento da velocidade de grupo para valores distintos do parâmetro β e dos ângulos. O parâmetro β pode ser escolhido de forma que o módulo da velocidade de grupo, u_{gr} , cresça continuamente de 0 e se aproxime do seu limite assintótico por baixo para valores crescentes de z . Explicitamente, esse limite é maior que 1 para

$$z|_{u_{\text{gr}}=1} = \frac{\csc \vartheta}{|\beta| \sqrt{\beta^2 - \sin(2\phi)}}, \quad (4.46)$$

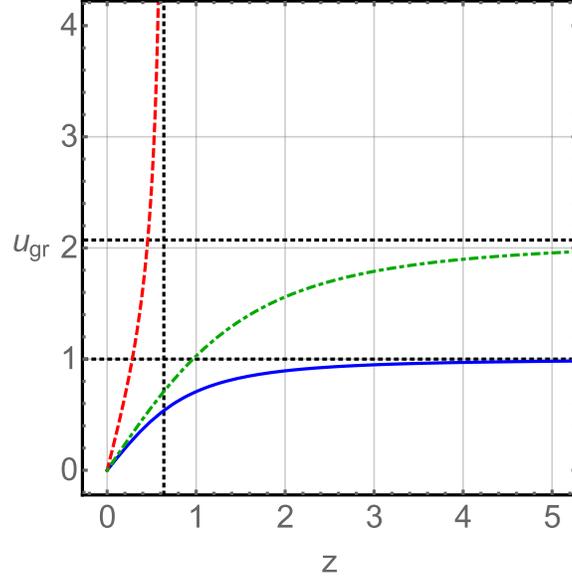


Figura 4.2: Velocidade de grupo da Eq. (4.43) para $\beta = 1$, $\vartheta = \phi = 0$ (azul, linha contínua), para $\beta = 3/2$, $\vartheta = \pi/5$, $\phi = \pi/3$ (verde, linha tracejada e pontilhada), e para $\beta = 2$, $\vartheta = \pi/2$, $\phi = \pi/3$ (vermelho, linha tracejada). As assíntotas são indicadas por linhas pretas pontilhadas.

o que leva a quebra da causalidade. Este valor para z é real apenas para

$$\beta > \sqrt{\sin(2\phi)}. \quad (4.47)$$

Além disso, u_{gr} também exibe uma singularidade para uma escolha adequada dos parâmetros, em que essa singularidade aparece quando a constante z tem a forma

$$z_{\text{sing}} = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 \vartheta \sin(2\phi) - 1}, \quad (4.48)$$

revelando um regime não físico. Para pequenos momentos, a velocidade de grupo da Eq. (4.43) se comporta como

$$u_{\text{gr}} = \check{\Theta} |\mathbf{p}|, \quad (4.49)$$

onde

$$\check{\Theta} = \theta \sqrt{1 + \beta^2 [\beta^2 - 2 \sin(2\phi)] \sin^2 \vartheta}, \quad (4.50)$$

assim, o modo correspondente se propaga como um modo tipo Podolsky com uma massa modificada dependendo da direção do momento. No limite $\beta \mapsto 0$ o tensor de violação de Lorentz desaparece e obtemos o comportamento do modo de Podolsky convencional.

Setor anisotrópico de paridade par, RD 2, (com $\theta \neq 0$)

Agora vamos analisar a relação de dispersão (4.9b) para a configuração espacial. Vamos iniciar pelo caso em que os vetores \mathbf{B} , \mathbf{C} são ortogonais. Temos,

$$\begin{aligned} & \eta_1^4 \left[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{C}^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2) + \mathbf{B}^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2)^2 \right] \\ & - [1 - \theta^2 p_0^2 + \theta^2 \mathbf{p}^2 + [\eta_1^2 - 2\eta_2^2] (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})] [1 - \theta^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2) + [\eta_1^2 - 2\eta_2^2] (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})] = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Simplificando a expressão acima, obtemos uma equação de segundo grau para p_0^2 , cuja solução é dada por

$$(p_0^{(\pm)})^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{z^4 - x^4} \left\{ \mathcal{V}/2 \pm \sqrt{(z^4 - x^4)[x^4 \cos^2 \vartheta - \mathcal{W}] + (\mathcal{V}/2)^2} \right\}, \quad (4.52a)$$

onde

$$\mathcal{V} = 2z^2(1 + z^2) - 2x^4 + \sin^2 \vartheta [x^2 + (x^2 - 2y^2)z^2 \sin(2\phi)], \quad (4.52b)$$

$$\mathcal{W} = [1 + z^2 - y^2 \sin^2 \vartheta \sin(2\phi)] [1 + z^2 + (x^2 - y^2) \sin^2 \vartheta \sin(2\phi)], \quad (4.52c)$$

e

$$x = \sqrt{|\mathbf{B}||\mathbf{C}|\eta_1|\mathbf{p}|}, \quad y = \sqrt{|\mathbf{B}||\mathbf{C}|\eta_2|\mathbf{p}|}, \quad z = \theta|\mathbf{p}|. \quad (4.52d)$$

Esta configuração produz duas relações de dispersão adicionais diferentes. Agora vamos analisar a causalidade para essas relações.

Causalidade O módulo ao quadrado da velocidade de grupo é dado pela expressão a seguir:

$$(u_{\text{gr}}^{(\pm)})^2 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p_0^{(\pm)})^2} \left(\cos^2 \vartheta + \frac{f_{\pm}^2(\vartheta, \phi) + f_{\pm}^2(\vartheta, \pi/2 - \phi)}{g_{\pm}^2(\vartheta, \phi)} \right), \quad (4.53a)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{\pm}(\vartheta, \phi) &= 2y^2(y^2 - x^2) \sin^3 \vartheta \sin(2\phi) \sin \phi \\ &+ (x^2 - 2y^2) \{1 + z^2 [2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi + 1 - (e^{(\pm)})^2]\} \sin \vartheta \sin \phi \\ &+ (x^4 [(e^{(\pm)})^2 - \cos^2 \vartheta] + 2z^2 \{1 + [1 - (e^{(\pm)})^2] z^2\}) \sin \vartheta \cos \phi, \end{aligned} \quad (4.53b)$$

$$\begin{aligned} g_{\pm}(\vartheta, \phi) &= [2(e^{(\pm)})^2 - 1 - \cos^2 \vartheta] x^4 \\ &+ [2 + (x^2 - 2y^2) \sin^2 \vartheta \sin(2\phi)] z^2 + 2 [1 - (e^{(\pm)})^2] z^4, \end{aligned} \quad (4.53c)$$

e

$$e^{(\pm)} \equiv p_0^{(\pm)} / |\mathbf{p}|. \quad (4.54)$$

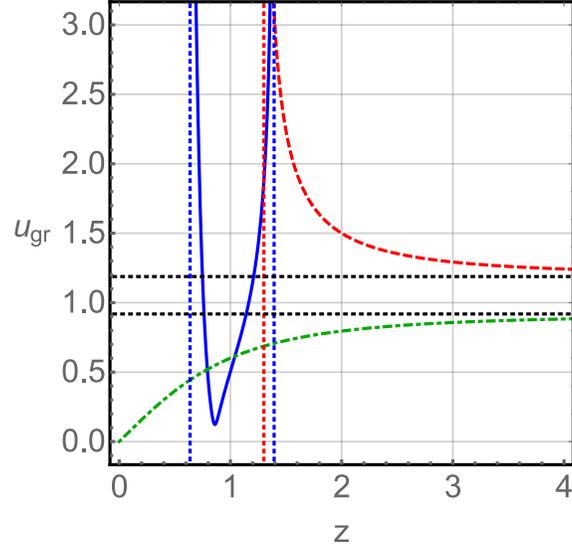


Figura 4.3: Velocidade de grupo da Eq. (4.53a) do modo \oplus para os parametros $\alpha = 3/2$, $\beta = 2$, $\vartheta = \pi/2$, $\phi = \pi/3$ (azul, contínuo), para $\alpha = 3/2$, $\beta = 1$, $\vartheta = \pi/4$, $\phi = 0$ (vermelho, linha tracejada), e para $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$, $\vartheta = \pi/2$, $\phi = \pi/4$ (verde, linha tracejada e pontilhada). As assíntotas verticais nas singularidades são ilustradas por linhas pontilhadas coloridas, enquanto as assíntotas horizontais são mostradas como linhas pontilhadas pretas.

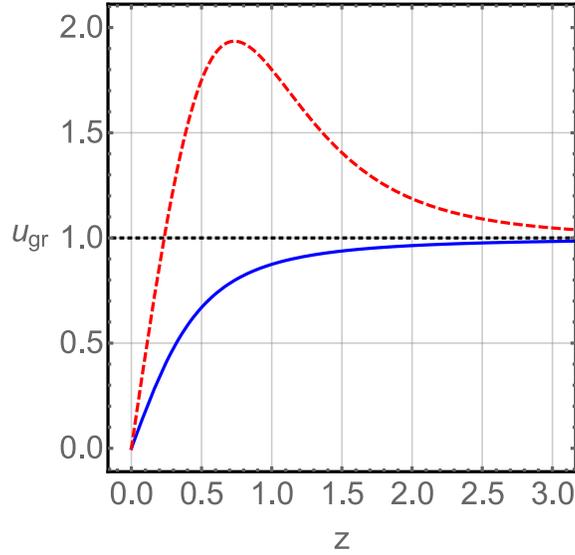


Figura 4.4: Velocidade de grupo da Eq. (4.53a) do modo \ominus para $\alpha = 3/2$, $\beta = 1$, $\vartheta = 0$, $\phi = 0$ (azul, linha contínuo) e para $\alpha = 3/2$, $\beta = 3$, $\vartheta = \pi/2$, $\phi = 0$ (vermelho, linha tracejada). As assíntotas verticais nas singularidades são ilustradas por linhas pontilhadas coloridas, enquanto as assíntotas horizontais são mostradas como linhas pontilhadas pretas.

As Fig. 4.3 e 4.4 mostram a velocidade de grupo para os modos \oplus e \ominus para diferentes

ângulos e diversos valores dos parâmetros

$$\frac{\sqrt{|\mathbf{B}||\mathbf{C}|}\eta_1}{\theta} \equiv \alpha, \quad (4.55)$$

$$\frac{\sqrt{|\mathbf{B}||\mathbf{C}|}\eta_2}{\theta} \equiv \beta. \quad (4.56)$$

Podemos observar que a velocidade de grupo do modo \oplus não é bem comportada para uma ampla faixa dos parâmetros e ângulos, pois exhibe singularidades que se encontram nos seguintes valores de z :

$$z_{\text{sing}}^{(\pm)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\beta^2 - \alpha^2) \sin^2 \vartheta \sin(2\phi) - 2 \pm \alpha^2 \sqrt{4 \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta \sin^2(2\phi)}}}. \quad (4.57)$$

Além disso, quando existem singularidades, a velocidade de grupo pode tornar-se complexa para grandes momentos. Para pequenos momentos, a velocidade de grupo para ambos os modos exhibe o seguinte comportamento assintótico:

$$u_{\text{gr}}^{(\pm)} = \bar{\Theta}^{(\pm)} |\mathbf{p}|, \quad (4.58a)$$

onde

$$\bar{\Theta}^{(\pm)} = \theta \sqrt{1 \mp \alpha^2 + \frac{\sin^2 \vartheta [\alpha^2 (\pm \alpha^2 - 2) \pm 2\beta^2 (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 \mp 2)(\alpha^2 - 2\beta^2) \sin(2\phi)]}{2(\alpha^2 \mp 1)}}}. \quad (4.59)$$

Portanto, esses modos são modificações do modo de Podolsky com parâmetros anisotrópicos que podem se tornar complexos. O modo de Podolsky é reproduzido no limite combinado para $\alpha \mapsto 0$ e $\beta \mapsto 0$. Para certas escolhas, a velocidade de grupo é bem comportada no sentido de que aumenta monotonicamente de 0 até se aproximar de um valor menor que 1, como mostra a curva verde, linha tracejada e pontilhada, na Fig. 4.3. As outras curvas nesta figura correspondem a escolhas de parâmetros que fornecem comportamentos espúrios. Em contraste, o modo \ominus na Fig. 4.4 não exhibe nenhuma singularidade. Parte de 0 e converge para um valor menor que 1 de baixo ou maior que 1 de cima. O último comportamento, entretanto, é interpretado como uma violação da causalidade, o que ocorre para algumas escolhas dos parâmetros. Portanto, o modo representado pela curva vermelha, linha tracejada, é espúrio.

Podemos também apresentar expansões para as velocidades de frente de onda das relações de dispersão (4.52a) no limite em que o parâmetro de Podolsky θ é muito grande em comparação com os coeficientes de violação de Lorentz η_1, η_2 . Nestas condições, obtemos:

$$u_{\text{frente}}^{(+)} \approx 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{z} \right)^2 - \left(\frac{y}{z} \right)^2 \right] \sin^2 \vartheta \sin(2\phi), \quad (4.60a)$$

$$u_{\text{frente}}^{(-)} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} \right)^2 \sin^2 \vartheta \sin(2\phi). \quad (4.60b)$$

Podemos observar que os dois modos podem ser maiores que 1, dependendo dos tamanhos de x, y e do ângulo ϕ , o que viola as premissas da causalidade. Assim, enquanto o modo \oplus é não físico em vários sentidos, o modo \ominus quebra a causalidade para certas escolhas dos parâmetros.

Setor anisotrópico de paridade par, RD 2, (com $\theta \neq 0$) e \mathbf{B} , \mathbf{C} paralelos

Uma outra configuração a ser examinada é o caso em que os vetores \mathbf{B} , \mathbf{C} são paralelos. Assim, a relação de dispersão (4.9b) produz

$$E^{(\pm)} = \zeta^{(\pm)} |\mathbf{p}|, \quad (4.61)$$

onde

$$\zeta^{(\pm)} = \zeta^{(\pm)}(|\mathbf{p}|), \quad (4.62a)$$

$$\zeta^{(+)} = \frac{\sqrt{1 + z^2 - 2y^2 \cos^2 \vartheta}}{z}, \quad \zeta^{(-)} = \sqrt{\frac{1 + z^2 - 2(x^2 \sin^2 \vartheta + y^2 \cos^2 \vartheta)}{z^2 - 2x^2}}. \quad (4.62b)$$

Causalidade A velocidade de frente de onda para ambos os modos são dadas por:

$$u_{\text{frente}}^{(+)} = \sqrt{1 - 2\beta^2 \cos^2 \vartheta}, \quad (4.63a)$$

$$u_{\text{frente}}^{(-)} = \sqrt{\frac{1 - 2(\alpha^2 \sin^2 \vartheta + \beta^2 \cos^2 \vartheta)}{1 - 2\alpha^2}}, \quad (4.63b)$$

onde esses resultados são expressos em termos das razões constantes

$$\frac{x}{z} \equiv \alpha, \quad \frac{y}{z} \equiv \beta. \quad (4.64)$$

Pdemos observar que o modo \oplus da velocidade de frente de onda não excede o valor 1, o que não é verificado para o modo \ominus , pois a $u_{\text{fr}}^{(-)}$ pode ser maior que 1 para $\beta < \alpha$. O próximo passo é obter os módulos das velocidades de grupo:

$$u_{\text{gr}}^{(+)} = \sqrt{\frac{4y^2(y^2 - z^2) \cos^2 \vartheta + z^4}{z^2(1 + z^2 - 2y^2 \cos^2 \vartheta)}}, \quad (4.65a)$$

$$u_{\text{gr}}^{(-)} = \sqrt{\frac{4(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2) \cos^2 \vartheta - (2x^2 - z^2)^2}{(2x^2 - z^2)[1 + z^2 - 2(x^2 \sin^2 \vartheta + y^2 \cos^2 \vartheta)]}}, \quad (4.65b)$$

onde foi usado as definições (4.52d). Ao introduzir os parâmetros α , β nos resultados anteriores, o comportamento assintótico da velocidade de grupo para pequenos momentos tem a forma

$$u_{\text{gr}}^{(\pm)} = \bar{\Theta}^{(\pm)} |\mathbf{p}|, \quad (4.66)$$

onde

$$\bar{\Theta}^{(+)} = \theta \sqrt{1 + 4\beta^2(\beta^2 - 1) \cos^2 \vartheta}, \quad (4.67a)$$

$$\bar{\Theta}^{(-)} = \theta \sqrt{1 - 2\alpha^2 + \frac{4(\alpha^2 - \beta^2)[1 - (\alpha^2 + \beta^2)] \cos^2 \vartheta}{1 - 2\alpha^2}}. \quad (4.67b)$$

Podemos observar que cada modo se assemelha, novamente, a um modo tipo Podolsky anisotrópico. No limite em que a violação de Lorentz desaparece, obtemos a relação de dispersão padrão de Podolsky. Além disso, os modos podem exibir comportamento espúrio, uma vez que singularidades estão presentes para

$$z_{\text{sing}}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2\beta^2 \cos^2 \vartheta - 1}}, \quad (4.68)$$

$$z_{\text{sing}}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2(\alpha^2 \sin^2 \vartheta + \beta^2 \cos^2 \vartheta) - 1}}, \quad (4.69)$$

novamente temos a existência de regimes não físicos como mostra as curvas vermelhas das Figuras 4.5 e 4.6.

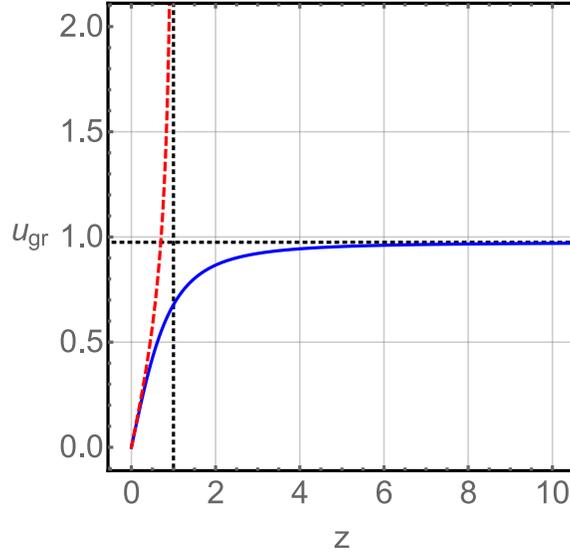


Figura 4.5: Velocidade de grupo da Eq. (4.65) do modo \oplus para os parâmetros $\beta = 1/(2\sqrt{2})$, $\vartheta = \pi/3$ (azul, linha contínua) e para $\beta = 1$, $\vartheta = 0$ (vermelho, linha tracejada). As assíntotas são mostradas como linhas pontilhadas pretas.

Os parâmetros α e β podem ser escolhidos de modo que esses valores sejam complexos, não havendo singularidades. Nesse caso, a velocidade de grupo aumenta de 0 até um valor finito. A curva azul na Fig. 4.5 representa um exemplo para este caso. Se o valor finito for maior do que 1, o modo é espúrio, como mostra um exemplo dado pela curva azul na Fig. 4.6. Verificamos que os modos para a velocidade de grupo excede 1 quando

$$z|_{u_{\text{gr}}^{(+)}=1} = \frac{1}{\sqrt{4\beta^2 - 2|\beta \cos \vartheta|}}, \quad (4.70)$$

$$z|_{u_{\text{gr}}^{(-)}=1} = \sqrt{\frac{1 - 2\alpha^2}{(1 - 2\beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)[1 + \cos(2\vartheta)]}}. \quad (4.71)$$

Podemos fazer as seguintes observações:

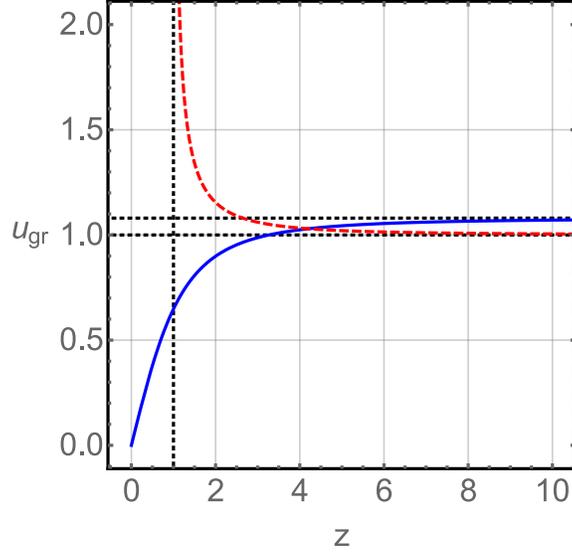


Figura 4.6: Velocidade de grupo da Eq. (4.65) do modo \ominus para os parâmetros $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/(2\sqrt{2})$, $\vartheta = \pi/3$ (azul, linha contínua) e $\alpha = \beta = 1$, $\vartheta = 0$ (vermelho, linha tracejada). As assíntotas são mostradas como linhas pontilhadas pretas.

- a expressão para $z|_{u_{\text{gr}}^{(+)}=1}$ torna-se complexa para $\beta < 1/\sqrt{2}$;
- a expressão para $z|_{u_{\text{gr}}^{(-)}=1}$ torna-se complexa quando $\alpha > 1/\sqrt{2}$, $\beta > 1/\sqrt{2}$, e $\beta > \alpha$ ao mesmo tempo ou quando $\alpha > 1/\sqrt{2} > \beta$ ou quando $1/\sqrt{2} > \beta > \alpha$.

4.3 Conexão com o MPE - não mínimo

Uma questão interessante a se perguntar é se a contribuição com violação Lorentz da Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta^2 D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha},$$

apresentada no capítulo anterior, está contida no Modelo padrão estendido, MPE - não mínimo proposto por Kostelecký e Mewes [67]. Como estamos tratando dos termos com violação de Lorentz, CP-par e de dimensão 6, o primeiro coeficiente de ordem superior a ser considerado é o da dimensão 6, a saber

$$(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} = (k_F^{(6)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}, \quad (4.72)$$

onde omitimos os coeficientes pares de dimensão 4, CPT-par usuais do setor de fótons do MPE, $(k_F^{(4)})^{\kappa\lambda\mu\nu}$. É possível mostrar que a parametrização

$$(k_F^{(6)})^{\mu\nu\rho\sigma\alpha_1\alpha_2} = \eta^2 D^{\nu\sigma} g^{\mu\alpha_1} g^{\rho\alpha_2}, \quad (4.73a)$$

reproduz com sucesso o termo com violação de Lorentz presente na Lagrangiana. De fato,

$$(k_F^{(6)})^{\mu\nu\rho\sigma\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \eta^2 D^{\nu\sigma} g^{\mu\alpha_1} g^{\rho\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma},$$

realizando as contrações, temos

$$(k_F^{(6)})^{\mu\nu\rho\sigma\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \eta^2 D^{\nu\sigma}\partial^\mu F_{\mu\nu}\partial^\rho F_{\rho\sigma},$$

o que demonstra que o termo com violação de Lorentz proposto está contido no MPE-não mínimo [67]. De forma análoga, temos a correspondência

$$(k_F^{(6)})^{\mu\nu\rho\sigma\alpha_1\alpha_2} = \eta_1^2 D^{\nu\sigma}g^{\mu\alpha_1}g^{\rho\alpha_2} - \eta_2^2 D^{\alpha_2\sigma}g^{\mu\alpha_1}g^{\nu\rho}, \quad (4.74)$$

que produz os termos com violação de Lorentz do modelo generalizado da Lagrangiana (4.3), apresentada neste capítulo. As simetrias do tensor $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ devem ser levadas em consideração. Esse tensor de *rank*-4 é antissimétrico no primeiro e no segundo par de índices e simétrico sob uma troca de ambos os pares de índices, o que evidentemente não é o caso para as escolhas nas Eqs. (4.73) e (4.74). Assim, executando a simetrização e anti-simetrização, precisamos reescrever a nossa parametrização, $\eta_1^2 D^{\nu\sigma}g^{\mu\alpha_1}g^{\rho\alpha_2} - \eta_2^2 D^{\alpha_2\sigma}g^{\mu\alpha_1}g^{\nu\rho}$, de modo que ela tenha a simetria do tensor $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$. Dessa maneira, o mapeamento final dos nossos termos para o MPE não mínimo é dado por

$$\begin{aligned} (\hat{k}_F)^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \left[(k_F^{(6)})^{\mu\nu\rho\sigma\alpha_1\alpha_2} - (k_F^{(6)})^{\nu\mu\rho\sigma\alpha_1\alpha_2} - (k_F^{(6)})^{\mu\nu\sigma\rho\alpha_1\alpha_2} + (k_F^{(6)})^{\nu\mu\sigma\rho\alpha_1\alpha_2} \right. \\ &\quad \left. + (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \right] \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Pode-se verificar que este tensor satisfaz a identidade de Bianchi para um conjunto de três índices escolhidos arbitrariamente. Note, no entanto, que esta escolha é restrita apenas aos quatro primeiros índices. Além disso, a anti-simetrização deste conjunto de índices deve ser imposta via Eq. (55) do primeiro artigo da referência [67]. O termo de Podolsky é invariante de Lorentz e, portanto, não pode ser mapeado nos coeficientes do MPE. Porém, ele pode ser introduzido nas equações de campo do setor de fóton *CPT*-par não-mínimo da seguinte forma:

$$M^{\mu\nu}A_\nu = 0, \quad (4.76a)$$

onde

$$M^{\mu\nu} = \left\{ (1 - \theta^2 p^2) [g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}] + 2(\hat{k}_F)^{\mu\alpha\nu\beta} \right\} p_\alpha p_\beta. \quad (4.77)$$

Capítulo 5

Eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo CPT-ímpar com altas derivadas

5.1 Introdução

A fim de melhorar nosso entendimento das extensões do setor de fótons que violam a simetria de Lorentz através de termos de derivadas superiores, agora é razoável buscar investigações semelhantes de uma teoria de CPT-ímpar. Portanto, nesse capítulo, estudamos a eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo MPE não mínimo CPT-ímpar e dimensão 5. Consideramos uma configuração composta de um campo de fundo fixo D_κ onde as 4-derivadas adicionais são contraídas com o tensor métrico, ou seja, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda D_\kappa \square F_{\mu\nu}$. O propagador e as relações de dispersão são obtidas a partir de sua estrutura de pólos. A causalidade e a unitariedade dos modos são analisadas posteriormente. Consideramos também o termo dimensão 5 composto por um campo de fundo fixo T_κ parcialmente contraído com derivadas adicionais, ou seja, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda T_\kappa (T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu}$. As unidades naturais serão usadas: $\hbar = c = 1$.

5.2 Eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo de altas derivadas, CPT-ímpar e dimensão 5: modelo simples

Neste capítulo investigamos a eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-ímpar, dimensão-5, do setor não mínimo do MPE, especificamente representada pelo termo tipo Carroll-Field-Jackiw da densidade de lagrangiana a saber,

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda (\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde o campo de fundo $(\hat{k}_{AF})_\kappa$ que representa o tensor de violação de Lorentz possui a estrutura não mínima seguinte:

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = (k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2}. \quad (5.2)$$

Primeiro caso estudado

Como uma primeira investigação, consideramos um caso especial na forma,

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = \tilde{D}_\kappa X^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2}, \quad (5.3)$$

onde \tilde{D}_κ é um quadri-vetor de violação de Lorentz. A estrutura do tensor é escolhida de modo que as propriedades direcionais do vetor $(\hat{k}_{AF})_\kappa$ são descritas através do tensor \tilde{D}_κ , enquanto o setor não mínimo é parametrizado separadamente pelo tensor simétrico $X^{\mu\nu}$. Assim, a Lagrangiana da teoria a ser considerada tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda \tilde{D}_\kappa X^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (5.4)$$

onde ξ é o parâmetro de fixação de calibre. Podemos considerar o tensor $X^{\mu\nu}$ como sendo diagonal. Nesse contexto, o caso mais simples é o de um tensor $X^{\mu\nu}$ com coeficientes tipo espaços iguais. Então, $X^{\mu\nu}$ é composto de uma parte sem traço $\bar{X}^{\mu\nu}$ e uma parte com traço que deve ser proporcional ao tensor métrico de Minkowski, como mostra a seguir

$$X^{\mu\nu} = \alpha_{\text{tr}} \bar{X}^{\mu\nu} + \alpha g^{\mu\nu}, \quad (5.5a)$$

$$\bar{X}^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1/3, 1/3, 1/3)^{\mu\nu} = \frac{1}{3} [4\xi^\mu \xi^\nu - g^{\mu\nu}], \quad (5.5b)$$

onde $(\xi^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ é puramente tipo tempo e parâmetros $\alpha_{\text{tr}}, \alpha$ foram escolhidos usando a notação usada no setor de fóton CPT - par, onde o coeficiente α_{tr} também está vinculado a uma matriz simétrica sem traço. Como a parte sem traço envolve duas direções, tipo tempo e tipo espaço, ξ^μ e D^μ , sua investigação é provavelmente mais complicada do que a contribuição proporcional ao traço. Portanto, escolhemos $\alpha_{\text{tr}} = 0$, de modo que

$$X^{\mu\nu} = \alpha g^{\mu\nu} \text{ e } (\hat{k}_{AF})_\kappa = \alpha \tilde{D}_\kappa g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = D_\kappa \square,$$

onde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ e $D_\kappa \equiv \alpha \tilde{D}_\kappa$. Assim, o termo de VL assume a forma

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = D_\kappa \square, \quad (5.6a)$$

e a Lagrangeana (5.4) é reescrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (5.7)$$

podendo ser reescrita na forma bilinear em função dos campos A^μ , onde os termos de divergências são desprezados. Assim, a Lagrangeana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu O_{\mu\nu} A^\nu, \quad (5.8a)$$

	$\Theta^\sigma{}_\nu$	$L^\sigma{}_\nu$	$\Omega^\sigma{}_\nu$	$L_\nu{}^\sigma$	$D^\sigma D_\nu$	$D^\sigma \partial_\nu$	$D_\nu \partial^\sigma$
$\Theta_{\mu\sigma}$	$\Theta_{\mu\nu}$	$L_{\mu\nu}$	0	$L_{\nu\mu}$	$D_\mu D_\nu - \rho D_\nu \partial_\mu / \square$	$D_\mu \partial_\nu - \Omega_{\mu\nu} \rho$	0
$L_{\sigma\mu}$	$L_{\nu\mu}$	$-\Gamma_{\nu\mu}$	0	$\Gamma_{\nu\mu}$	0	0	0
$L_{\mu\sigma}$	$L_{\mu\nu}$	$\Gamma_{\nu\mu}$	0	$-\Gamma_{\nu\mu}$	0	0	0
$\Omega_{\mu\sigma}$	0	0	$\Omega_{\mu\nu}$	0	$\rho D_\nu \partial_\mu / \square$	$\Omega_{\mu\nu} \rho$	$D_\nu \partial_\mu$
$D_\mu D_\sigma$	$D_\mu D_\nu - \rho D_\mu \partial_\nu / \square$	0	$\rho D_\mu \partial_\nu / \square$	0	$D^2 D_\mu D_\nu$	$D^2 D_\mu \partial_\nu$	$\rho D_\mu D_\nu$
$D_\mu \partial_\sigma$	0	0	$D_\mu \partial_\nu$	0	$\rho D_\mu D_\nu$	$\rho D_\mu \partial_\nu$	$\square D_\mu D_\nu$
$D_\sigma \partial_\mu$	$D_\nu \partial_\mu - \rho \Omega_{\mu\nu}$	0	$\rho \Omega_{\mu\nu}$	0	$D^2 D_\nu \partial_\mu$	$\square D^2 \Omega_{\mu\nu}$	$\rho D_\nu \partial_\mu$

Tabela 5.1: Álgebra fechada dos projetores tensoriais.

com o tensor $O_{\mu\nu}$ dado por

$$O_{\mu\nu} = \square \left(\Theta_{\mu\nu} - 2L_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \Omega_{\mu\nu} \right), \quad (5.8b)$$

Podemos observar 3 projetores, sendo 2 simétricos, transversal e longitudinal, respectivamente dados por:

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \Omega_{\mu\nu}, \quad \Omega_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad (5.9)$$

enquanto o projetor antissimétrico, envolve o tensor de VL e é descrito pelo operador adimensional a seguir,

$$L_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\kappa \partial^\lambda, \quad (5.10)$$

onde D^κ tem dimensão de massa -1 . Agora vamos avaliar o propagador da teoria, ou seja, devemos encontrar a função de Green $\Delta_{\alpha\beta}$, que é o inverso do operador diferencial $O_{\mu\nu}$, satisfazendo a condição,

$$O_{\mu\sigma} \Delta^\sigma{}_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (5.11)$$

Para que o operador inverso seja encontrado, usamos uma base adequada de projetores, procedimento que obteve sucesso em vários cenários teóricos [105, 106]. Assim, propomos o seguinte Ansatz:

$$\Delta^\sigma{}_\nu = a\Theta^\sigma{}_\nu + bL^\sigma{}_\nu + c\Omega^\sigma{}_\nu + dD^\sigma D_\nu + e(D^\sigma \partial_\nu + D_\nu \partial^\sigma), \quad (5.12)$$

onde os parâmetros a, b, c, d, e são coeficientes a serem determinados. A álgebra dos operadores tensores individuais é exibida na Tabela 5.1, onde usamos algumas definições na forma,

$$\rho \equiv D^\mu \partial_\mu, \quad (5.13)$$

$$\Gamma_{\mu\sigma} \equiv L_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma = (D_\mu \partial_\sigma + D_\sigma \partial_\mu) \rho - D_\mu D_\sigma \square + (D^2 \square - \rho^2) \Theta_{\mu\sigma} - \rho^2 \Omega_{\mu\sigma}. \quad (5.14)$$

A redefinição do tensor $\Gamma_{\mu\sigma} \equiv L_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma$ foi originada da contração $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \epsilon^{\mu\beta\gamma\alpha}$. Partindo da

equação tensorial (5.11), realizando as contrações, após algumas simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\sigma} + \Omega_{\mu\sigma} \stackrel{!}{=} \square \left\{ [a - 4(D^2\square - \rho^2)b] \Theta_{\mu\sigma} + 2(b - a)L_{\mu\sigma} - \left[-4\rho^2b + \frac{c}{\xi} + \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\rho e \right] \Omega_{\mu\sigma} \right. \\ \left. + (d + 4\square b)D_\mu D_\sigma + (e - 4\rho b)D_\mu \partial_\sigma - \left[4\varrho b + \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\frac{\rho}{\square}d + \frac{1}{\xi}e \right] D_\sigma \partial_\mu \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Comparando ambos os lados da Eq. (5.15), os seguintes operadores diferenciais são obtidos na forma:

$$a = \frac{b}{2} = \frac{1}{\boxtimes}, \quad (5.16a)$$

$$c = -\left(\frac{\xi}{\square} + \frac{4\varrho^2}{\boxtimes}\right), \quad (5.16b)$$

$$d = -\frac{4\square}{\boxtimes}, \quad e = \frac{4\varrho}{\boxtimes}, \quad (5.16c)$$

onde

$$\boxtimes = \square [1 + 4(\varrho^2 - D^2\square)]. \quad (5.17)$$

Assim, obtemos o operador inverso procurado:

$$\Delta_{\sigma\nu} = \frac{1}{\boxtimes} \left\{ \eta_{\sigma\nu} + 2L_{\sigma\nu} - \left(\frac{\boxtimes\xi}{\square} + 1 + 4\varrho^2\right) \Omega_{\sigma\nu} - 4\square D_\sigma D_\nu + 4\varrho[D_\sigma \partial_\nu + D_\nu \partial_\sigma] \right\}. \quad (5.18)$$

Para obtermos o propagador no espaço dos momentos basta realizar a substituição $\partial_\mu = -ip_\mu$, na expressão acima, de modo que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\sigma}(p) = \frac{-i}{p^2(1 + 4\Upsilon(p))} \left\{ \eta_{\mu\sigma} - 2i\epsilon_{\mu\sigma\kappa\lambda} D^\kappa p^\lambda - [1 - 4(D \cdot p)^2 + \xi(1 + 4\Upsilon(p))] \frac{p_\mu p_\sigma}{p^2} \right. \\ \left. + 4p^2 D_\mu D_\sigma - 4(D \cdot p)[D_\mu p_\sigma + D_\sigma p_\mu] \right\}, \end{aligned} \quad (5.19a)$$

onde

$$\Upsilon(p) = D^2 p^2 - (D \cdot p)^2. \quad (5.19b)$$

Podemos observar que $\Upsilon(p)$ é uma função adimensional, já que a dimensão de massa de p^μ cancela a dimensão de massa inversa de D^μ .

Algumas observações relevantes:

- Um prefator de i foi adicionado para coincidir com as convenções para o propagador de fótons no caso sem violação de Lorentz. Desta forma, fazendo $D_\kappa = 0$, nosso resultado recupera o propagador de fótons livres [107], como deve ser esperado.

- No apêndice A obtemos o propagador da teoria de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) no gauge de Lorenz, mostrando que este propagador e o presente, dado na Eq. (5.19a), estão ligados por uma simples substituição,

$$\frac{V_\nu}{p^2} \rightarrow 2D_\nu.$$

- O propagador (5.19a) é transversal, exceto para a parte que depende do parâmetro de fixação do gauge:

$$\Delta_{\mu\sigma}(p)p^\sigma = i\xi \frac{p_\mu}{p^2}. \quad (5.20)$$

É interessante lembrar que o propagador (5.19a) tem um termo anti-simétrico, proporcional ao projetor $L_{\mu\sigma}$, enquanto os outros termos são simétricos em relação à permuta $\mu \rightarrow \sigma$, $\sigma \rightarrow \mu$. O propagador de Feynman é definido pelo valor esperado no vácuo do produto T ordenado de operadores de campo avaliados em dois pontos distintos do espaço-tempo,

$$i(D_F)_{\alpha\beta}(x-y) \equiv \langle 0|T(A_\alpha(x)A_\beta(y))|0\rangle. \quad (5.21)$$

A transformada de Fourier é simétrica em relação à combinação de intercambiar os índices e $p^\mu \mapsto -p^\mu$. A parte anti-simétrica do propagador (5.19a) aparece na eletrodinâmica CPT-ímpar, por exemplo, no modelo MCFJ ou na teoria de Chern-Simons em $(1+2)$ dimensões. Mas esta parte não significa que o propagador perca sua simetria. De fato, o propagador continua sendo simétrico em relação às duas operações simultâneas: o intercâmbio de seus índices e a substituição $p^\mu \mapsto -p^\mu$.

5.2.1 Relação de dispersão

Através dos pólos do propagador obtemos duas relações de dispersão na forma:

$$p^2 = 0, \quad (5.22a)$$

$$1 + 4 [D^2 p^2 - (D \cdot p)^2] = 0, \quad (5.22b)$$

como é comum em teorias com operadores de dimensões superiores. O primeiro corresponde ao típico pólo de Maxwell, que também aparece nos modelos de Podolsky e Lee-Wick, bem como nas versões anisotrópicas destes modelos estudados na Ref. [83]. A segunda relação contém informações sobre o termo de derivada superior, de dimensão 5. É razoável compará-la com a equação de dispersão obtida para a teoria MCFJ de dimensão - 4, [25], dada em termos do tensor de fundo $(k_{AF})^\mu$:

$$p^4 + p^2 k_{AF}^2 - (k_{AF} \cdot p)^2 = 0, \quad (5.23)$$

que exhibe uma relação de dispersão de quarta ordem em p , enquanto a Eq. (5.22b) é mais simples, apenas de segunda ordem. Tal comparação revela que a atual teoria do tipo MCFJ de dimensão-5 é totalmente distinta do modelo MCFJ de dimensão-3. A relação de dispersão

menos complexa pode ser atribuída à estrutura simples do tensor de fundo que escolhemos na Eq. (5.6a).

Analisaremos as relações de dispersão para algumas configurações do tensor de VL, onde as direções puramente tipo-tempo e tipo-espaço serão analisadas separadamente.

Setor tipo-tempo Para o tensor de fundo puramente tipo-tempo, $D_\gamma = (D_0, 0)$, temos

$$1 + 4D_0^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2) - 4D_0^2 p_0^2 = 0.$$

Organizando os termos, obtemos

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4D_0^2}, \quad (5.24)$$

que não corresponde a um modo de propagação. É uma relação de dispersão não física, pois não representa uma relação entre energia e momento. Portanto, não há modo de propagação associado ao tensor de fundo tipo-tempo. Esta propriedade é uma diferença importante entre o modelo dimensão-5 que estamos analisando e a teoria de MCFJ. A teoria de MCFJ exibe uma relação de dispersão propagante associada ao tensor de fundo tipo-tempo, embora apresente problemas de consistência [25].

Setor espacial Agora vamos analisar o caso tipo-espaço para o tensor de fundo $D_\gamma = (0, \mathbf{D})$. A relação de dispersão (5.22b), para o setor puramente espacial, tem a forma

$$1 + 4 [\mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2 - \mathbf{D}^2 p_0^2 - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2] = 0.$$

Organizando em função de p_0^2 , temos

$$p_0 = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sqrt{\frac{1}{4} + \mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2} = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sqrt{\frac{1}{4} + |\mathbf{D} \times \mathbf{p}|^2}, \quad (5.25)$$

que também pode ser reescrita como

$$p_0 = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sqrt{\frac{1}{4} + \mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2 \sin^2 \alpha}, \quad (5.26a)$$

onde α representa o ângulo entre \mathbf{D} e \mathbf{p} :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{D}| |\mathbf{p}| \cos \alpha. \quad (5.26b)$$

Trata-se de uma relação de dispersão compatível com a propagação de sinais, cujas propriedades precisam ser examinadas. Estamos interessados em analisar a causalidade clássica [108], que é descrita pelo comportamento da velocidade de grupo e velocidade de frente de onda \mathbf{u}_{gr} e u_{frente} , dadas por:

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} \equiv \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad u_{\text{frente}} \equiv \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}. \quad (5.27)$$

A causalidade é assegurada desde que $u_{\text{gr}} \equiv |\mathbf{u}_{\text{gr}}| \leq 1$ e $u_{\text{frente}} \leq 1$. A fim de verificar se a relação de dispersão (5.25) garante causalidade, avaliaremos a velocidade do grupo e de frente de onda. Para a relação de dispersão (5.26a), a velocidade de frente de onda tem a forma

$$u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sqrt{\frac{1}{4\mathbf{p}^2} + \mathbf{D}^2 \sin^2 \alpha},$$

$$u_{\text{frente}} = \sin \alpha, \quad (5.28)$$

onde $\alpha \in [0, \pi]$. Assim, temos que $u_{\text{frente}} \leq 1$ é assegurada para todo o intervalo de α . Agora vamos investigar o comportamento da velocidade do grupo, escrita na forma:

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{D}|} \sqrt{\frac{1}{4\mathbf{p}^2} + \mathbf{D}^2 \sin^2 \alpha} \right),$$

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \left[\frac{2\mathbf{D}^2 \mathbf{p} \sin^2 \alpha}{2|\mathbf{D}|} \left(\frac{1}{4} + \mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2 \sin^2 \alpha \right)^{-1/2} \right].$$

Organizando, temos

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{|\mathbf{D}| \mathbf{p} \sin^2 \alpha}{\sqrt{\frac{1}{4} + \mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (5.29)$$

ou na forma

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{\mathbf{D}^2 \mathbf{p} - \mathbf{D}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{D}| \sqrt{1/4 + |\mathbf{D} \times \mathbf{p}|^2}}, \quad (5.30)$$

cuja magnitude é

$$u_{\text{gr}} = \frac{|\mathbf{D} \times \mathbf{p}|}{\sqrt{1/4 + |\mathbf{D} \times \mathbf{p}|^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1/(4x^2) + \sin^2 \alpha}}, \quad (5.31)$$

onde $x \equiv |\mathbf{D}| |\mathbf{p}|$ é um parâmetro adimensional. Logo grandes momentos correspondem a grandes valores de x também. No limite de grandes momentos, temos:

$$\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} u_{\text{gr}} = \lim_{x \rightarrow \infty} u_{\text{gr}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{\text{gr}} = 1, \quad (5.32)$$

independente do ângulo α . Note ainda que a velocidade de grupo se anula no limite de $x \rightarrow 0$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_{\text{gr}} = 0, \quad (5.33)$$

que significa ausência do tensor de violação de Lorentz. Podemos então verificar que a velocidade de grupo é menor do que 1, $u_{\text{gr}} \leq 1$. O mesmo vale também para a velocidade de frente de onda $u_{\text{frente}} \leq 1$. Logo a causalidade clássica é bem estabelecida para qualquer valor de x , o que equivale a valores arbitrários de $|\mathbf{D}|$ e momento. A figura 6.4 exhibe o comportamento para a magnitude da velocidade do grupo. O gráfico representa uma velocidade de grupo monótona crescente que atinge o valor assintótico 1, conforme a Eq. (5.32). Este comportamento também

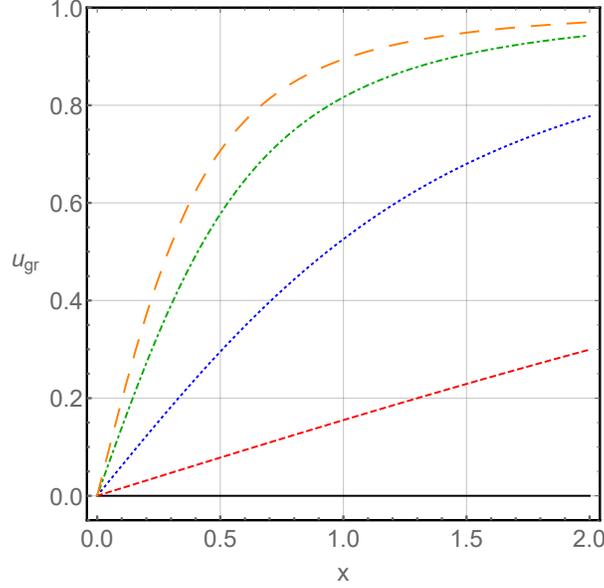


Figura 5.1: Velocidade de grupo da Eq. (5.31) para o caso espacial com $\alpha = 0$ (preto, linha contínua), $\alpha = \pi/40$ (vermelho, linha tracejada), $\alpha = \pi/10$ (azul, linha pontilhada), $\alpha = \pi/4$ (verde, linha tracejada e pontilhada), e $\alpha = \pi/2$ (laranja, linha com traços longos).

é visto para o setor semelhante na teoria MCFJ, onde a causalidade clássica também é assegurada (veja o paper [25]). O modo obtido aqui é exótico no sentido de que não se propaga quando a violação de Lorentz vai a zero. Portanto, não reproduz a relação de dispersão padrão no limite $|\mathbf{D}| \rightarrow 0$. O modo deve ser entendido como um efeito de alta energia que se propaga de maneira bem comportada para grandes momentos.

5.2.2 Unitariedade

A análise da unitariedade está ligada à norma dos estados definidos no espaço de Hilbert. Para que uma teoria seja unitária, a norma de todos os estados deve ser positiva.

Vamos examinar a unitariedade, a exemplo dos capítulos precedentes, calculando a saturação do propagador com a corrente,

$$SP \equiv J^\mu i\Delta_{\mu\nu} J^\nu. \quad (5.34)$$

Como sabemos, a corrente J^μ obedece a lei de conservação, $\partial_\mu J^\mu = 0$, ou,

$$p_\mu J^\mu = 0, \quad (5.35)$$

no espaço dos momentos. De acordo com este método, a unitariedade é garantida sempre que a parte imaginária do resíduo da saturação do propagador, avaliada nos pólos do propagador, é positiva. Uma forma de realizar o cálculo consiste em determinar os autovalores da matriz

propagadora, avaliados em seus próprios pólos, levando-se em consideração a conservação da corrente. Para o propagador encontrado na Eq. (5.19), a saturação vale:

$$SP = -i \left\{ \frac{J^2 + 4p^2(J \cdot D)^2}{p^2 [1 + 4(D^2 p^2 - (D \cdot p)^2)]} \right\}, \quad (5.36)$$

onde usamos:

$$\begin{aligned} J^\mu L_{\mu\alpha} J^\alpha &= -i J^\mu \epsilon_{\mu\alpha\kappa\lambda} J^\alpha D^\kappa p^\lambda = 0, \\ J^2 &= J^\mu \eta_{\mu\nu} J^\nu, \quad (J \cdot D)^2 = J^\mu D_\mu D_\nu J^\nu, \quad J^\mu p_\mu = 0. \end{aligned}$$

A contração do propagador com as correntes equivale a livrar-se de todas as contribuições não físicas. Geralmente são termos que envolvem quadri-momentos com índices livres correspondentes aos índices de Lorentz da função de Green, que implicam em contribuições proporcionais às componentes de momento. Embora o termo $L_{\mu\alpha}$ não tenha essa estrutura, ele desaparece quando acoplado a duas correntes externas devido à sua antissimetria. Portanto, as únicas contribuições do propagador com violação da simetria de Lorentz que têm impacto para física são os da Eq. (5.36).

Agora vamos analisar o resíduo da saturação do propagdor para cada um dos pólos. Para o pólo de Maxwell, $p^2 = 0$, o resíduo da saturação tem a forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=0} = -i \left[\frac{J^2}{1 - 4(D \cdot p)^2} \right] \Big|_{p^2=0} = i \left[\frac{(\mathbf{J}^2 - J_0^2)}{1 - 4(D \cdot p)^2} \right] \Big|_{p^2=0}. \quad (5.37)$$

No pólo $p^2 = 0$, vale $p_0^2 = \mathbf{p}^2$. Da lei de conservação de corrente, $p_0 J_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}$, a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=0} = i \left[\frac{1}{1 - 4(D \cdot p)^2} \left(\mathbf{J}^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2}{p_0^2} \right) \right] \Big|_{p^2=0}.$$

Logo obtemos:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=0} = i \left[\frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2}{[1 - 4(D_0 |\mathbf{p}| - \mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2] \mathbf{p}^2} \right]. \quad (5.38)$$

Portanto, a parte imaginária correspondente tem a forma

$$\text{Im}[\text{Res}(SP)|_{p^2=0}] = \frac{1}{1 - 4(D_0 |\mathbf{p}| - \mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2} \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2}{|\mathbf{p}|^2} > 0. \quad (5.39)$$

Logo a saturação no pólo $p^2 = 0$ só será positiva para pequenos momentos. Ou seja, Para qualquer que seja o coeficiente $D_\mu = (D_0, \mathbf{D})_\mu$, a parte imaginária da saturação (5.39) é positiva para pequenos momentos, mas torna-se negativa à medida que o momento aumenta. Para a configuração tipo-tempo, $D_\mu = (D_0, 0)_\mu$,

$$\text{Im}[\text{Res}(SP)|_{p^2=0}] = \frac{1}{1 - 4D_0^2 |\mathbf{p}|^2} \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2}{|\mathbf{p}|^2} > 0, \quad (5.40)$$

e tipo-espaço, $D_\mu = (0, \mathbf{D})_\mu$,

$$\text{Im}[\text{Res}(SP)|_{p^2=0}] = \frac{1}{1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2} \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2}{|\mathbf{p}|^2} > 0, \quad (5.41)$$

podemos observar que as quantidades (5.40) e (5.41) se tornam negativas para $1/4 < D_0^2|\mathbf{p}|^2$ e $1/4 < (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2$, respectivamente. Assim, a unitariedade não é assegurada para todas as magnitudes possíveis do tensor $D_\mu = (D_0, \mathbf{D})_\mu$.

Para a segunda relação de dispersão, Eq. (5.22b), só faz sentido examinar a configuração espacial, $D_\mu = (0, \mathbf{D})_\mu$, uma vez que a configuração tipo-tempo não representa uma relação física. Neste caso, a relação (5.22b) fornece:

$$p^2 = \frac{1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}. \quad (5.42)$$

A saturação (5.36) é reescrita como

$$SP = -i \left\{ \frac{J^2 + 4p^2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{J})^2}{p^2[1 - 4(\mathbf{D}^2 p^2 - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2)]} \right\},$$

na forma

$$SP = \frac{i}{p^2 - \frac{1-4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} \left[\frac{J^2}{4\mathbf{D}^2 p^2} + \frac{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{J})^2}{\mathbf{D}^2} \right]. \quad (5.43)$$

O resíduo da saturação deste pólo é dado por

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} = i \left[\frac{J^2}{1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2} + \frac{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{J})^2}{\mathbf{D}^2} \right]. \quad (5.44)$$

Devido à conservação da corrente, temos

$$J_0 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})/p_0, \quad (5.45)$$

assim, o quadrado da quadri-corrente pode ser escrito na forma

$$J^2 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2/p_0^2 - \mathbf{J}^2.$$

Usando a relação de dispersão (5.42), temos

$$J^2 = 4\mathbf{D}^2 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2}{(1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2)} - \mathbf{J}^2,$$

$$J^2 = \frac{4\mathbf{D}^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2 - \mathbf{J}^2(1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2)}{(1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2)},$$

organizando, obtemos

$$J^2 = -\frac{\mathbf{J}^2[1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2] + 4\mathbf{D}^2[\mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2]}{1 + 4(\mathbf{D} \times \mathbf{p})^2}. \quad (5.46)$$

No caso da eletrodinâmica usual (sem violação de Lorentz), a conservação de corrente implica que $J^2 < 0$, ou seja, qualquer quadri-corrente física é tipo-espaço. No entanto, essa propriedade não se aplica necessariamente às teorias com violação da simetria de Lorentz, como mostrado pela Eq. (5.46). Inserindo este resultado na Eq. (5.44), obtemos o resíduo

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} = i \left[\frac{J^2}{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2} + \frac{(\mathbf{D}\cdot\mathbf{J})^2}{\mathbf{D}^2} \right] = \frac{i}{\mathbf{D}^2 [1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2]} [\mathbf{D}^2 J^2 + (\mathbf{D}\cdot\mathbf{J})^2].$$

Após algumas simplificações, obtemos

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} = \frac{i}{\mathbf{D}^2} \left\{ \frac{-4\mathbf{D}^4(\mathbf{J}\times\mathbf{p})^2 + (1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2)[4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{J})^2(\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2 - (\mathbf{D}\times\mathbf{J})^2]}{(1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2)[1+4(\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2]} \right\}. \quad (5.47)$$

Existem configurações para as quais a parte imaginária deste último resíduo é positiva, assegurando a unitariedade. Então, para melhor analisar a parte imaginária do resíduo, vamos verificar algumas casos específicos.

Configuração em que \mathbf{p} paralelo a \mathbf{J}

Podemos escolher \mathbf{p} paralelo a \mathbf{J} , em que a Eq. (5.46) é reduzida a

$$J^2 = -\frac{\mathbf{J}^2[1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2]}{1+4(\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2}. \quad (5.48)$$

Neste cenário, a Eq. (5.44) assume a forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}, \mathbf{p}\parallel\mathbf{J}} = i \left[-\frac{\mathbf{J}^2}{1+4(\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2} + \frac{(\mathbf{D}\cdot\mathbf{J})^2}{\mathbf{D}^2} \right]. \quad (5.49)$$

Podemos observar que, para grandes momentos, o termo negativo pode ser suprimido, desde que $\mathbf{D} \not\parallel \mathbf{p}$, ou seja, os vetores \mathbf{D} e \mathbf{p} não podem estar na mesma direção, assegurando $(\mathbf{D}\times\mathbf{p}) \neq 0$. Temos que a segunda contribuição é positiva e não depende do momento, então a parte imaginária do resíduo pode ser positiva para grandes momentos. Conseqüentemente, existem configurações de campo de fundo, para grandes momentos, em que a unitariedade é assegurada. Este resultado fortalece a interpretação de que o modo associado com a relação de dispersão (5.25), em que \mathbf{p} paralelo a \mathbf{J} , representa um modo propagante consistente apenas no regime de altas energias. Este comportamento representa um modo exótico. De forma mais específica, se θ é o ângulo entre \mathbf{D} e \mathbf{J} , temos

$$(\mathbf{D}\cdot\mathbf{J})^2 = \mathbf{D}^2\mathbf{J}^2 \cos^2 \theta, \quad (\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2 = \mathbf{D}^2\mathbf{p}^2 \sin^2 \theta. \quad (5.50)$$

Assim, o resíduo (5.49) pode ser reescrito na forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}, \mathbf{p}\parallel\mathbf{J}} = i \left[-\frac{\mathbf{J}^2}{1+4\mathbf{D}^2\mathbf{p}^2 \sin^2 \theta} + \mathbf{J}^2 \cos^2 \theta \right], \quad (5.51)$$

cuja simplificação leva a:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}, \mathbf{p}\parallel\mathbf{J}} = i\mathbf{J}^2 \sin^2 \theta \left(\frac{4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2 - 1}{4(\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2 + 1} \right), \quad (5.52)$$

e cuja parte imaginária é positiva para

$$(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2 > \frac{1}{4}, \quad (5.53)$$

condição que estabelece a preservação da unitariedade para esta configuração.

Configuração em que $\mathbf{D} \perp \mathbf{p}$ com $\mathbf{p} \nparallel \mathbf{J}$

Um outro caso particular possível a ser investigado é $\mathbf{D} \perp \mathbf{p}$ com $\mathbf{p} \nparallel \mathbf{J}$, para o qual temos:

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{p} = 0, \quad (\mathbf{D}\times\mathbf{p})^2 = \mathbf{D}^2\mathbf{p}^2, \quad (5.54)$$

com o quê, a Eq. (5.46) assume a forma

$$J^2 = - \left[\frac{\mathbf{J}^2 + 4\mathbf{D}^2[\mathbf{J}^2\mathbf{p}^2 - (\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2]}{1 + 4\mathbf{D}^2\mathbf{p}^2} \right]. \quad (5.55)$$

Para melhor examiná-lo, usamos o seguinte sistema de coordenadas:

$$\mathbf{D} = |\mathbf{D}|\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{p} = |\mathbf{p}|\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{z}} = |\mathbf{J}|\cos\alpha, \quad (5.56)$$

no qual vale, usando as relações entre as coordenadas cartesianas e esféricas,

$$J_x = |\mathbf{J}|\sin\alpha\cos\phi, \quad J_y = |\mathbf{J}|\sin\alpha\sin\phi, \quad J_z = |\mathbf{J}|\cos\alpha.$$

Logo

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{J} = |\mathbf{J}||\mathbf{D}|\sin\alpha\cos\phi, \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{p} = |\mathbf{J}||\mathbf{p}|\sin\alpha\sin\phi, \quad (5.57a)$$

onde ϕ é o ângulo entre o *eixo* x e a projeção do vetor \mathbf{J} no plano x - y . Para esta configuração, o resíduo da Eq. (5.44) se reduz a

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} = i \left[J^2 + \frac{\mathbf{J}^2\mathbf{D}^2\sin^2\alpha\cos^2\phi}{\mathbf{D}^2} \right], \quad (5.58)$$

com

$$J^2 = -\mathbf{J}^2 \left[\frac{1 + 4\mathbf{D}^2\mathbf{p}^2[1 - \sin^2\alpha\sin^2\phi]}{1 + 4\mathbf{D}^2\mathbf{p}^2} \right]. \quad (5.59)$$

Após simplificações, encontramos:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=\frac{1-4(\mathbf{D}\cdot\mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} = -i\mathbf{J}^2 \left(\frac{(1 + 4\mathbf{D}^2\mathbf{p}^2)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\phi}{1 + 4\mathbf{D}^2\mathbf{p}^2} \right). \quad (5.60)$$

Podemos observar que a parte imaginária da expressão acima é sempre negativa, o que demonstra que a unitariedade é violada para qualquer escolha do momento e dos ângulos. Uma investigação semelhante para $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$ produz um resíduo cuja parte imaginária pode ser nula ou negativa, conforme vamos mostrar a seguir.

Configuração $\mathbf{D} \perp \mathbf{p}$ com $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$

Agora vamos investigar o caso particular em que $\mathbf{D} \perp \mathbf{p}$, com $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$, para o qual decorre,

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}) = 0, (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 = \mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2, \mathbf{D} \cdot \mathbf{p} = 0, (\mathbf{D} \times \mathbf{p})^2 = \mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2. \quad (5.61)$$

Assim, obtemos

$$J^2 = -\mathbf{J}^2 \left[\frac{1 + 4\mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2}{1 + 4\mathbf{D}^2 \mathbf{p}^2} \right] = -\mathbf{J}^2. \quad (5.62)$$

Para examiná-lo, usamos o mesmo sistema de coordenadas apresentado na Eq. (5.56), em que o resíduo da Eq. (5.44) se reduz a

$$\text{Res}(SP)|_{p^2 = \frac{1 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2}{4\mathbf{D}^2}} = i\mathbf{J}^2 [\sin^2 \alpha \cos^2 \phi - 1], \quad (5.63)$$

onde usamos a Eq. (5.62). Portanto, para $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$ o resíduo produzido possui a parte imaginária nula ou negativa, também implicando em violação da unitariedade.

Para resumir, enquanto a causalidade é assegurada para qualquer configuração do campo de fundo D^μ para o setor tipo-espaço, a unitariedade pode ser violada.

Agora examinaremos uma versão mais geral desse primeiro modelo.

5.3 Eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo de altas derivadas, CPT- ímpar de dimensão 5: segundo modelo

Na última seção, analisamos uma extensão não mínima do setor eletromagnético CPT-ímpar de dimensão 5, especificamente representada pela densidade de lagrangeana (5.4), na qual o termo de dimensão-5 foi escrito como:

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda (\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}. \quad (5.64)$$

Como uma segunda possibilidade de estudo, propomos

$$(k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2} = T_\kappa T^{\alpha_1} T^{\alpha_2}, \quad (5.65)$$

de modo que o coeficiente não-mínimo assume a forma:

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = (k_{AF}^{(5)})_\kappa^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = T_\kappa T^{\alpha_1} T^{\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = T_\kappa (T \cdot \partial)^2, \quad (5.66)$$

onde T_κ é um quadri-vetor, violador da simetria de Lorentz, cuja dimensão de massa é

$$[T_\kappa] = -1/3, \quad (5.67)$$

ou, equivalentemente, $[T_\kappa]^3 = -1$. Comparado com o modelo anterior, parametrização (5.6a), o campo de fundo agora também está contraído com as derivadas adicionais, podendo gerar efeitos de anisotropia adicionais. Supõe-se que essa estrutura torne as propriedades da teoria atual mais interessantes do que as anteriormente estudadas.

Modificar a teoria de Maxwell, incluindo este termo em sua densidade de lagrangeana, leva a uma teoria anisotrópica do tipo CFJ de derivada superior de dimensão 5, descrita por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda T_\kappa(T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (5.68)$$

Reescrevemos a lagrangeana (5.68),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu \Xi_{\mu\nu} A^\nu, \quad (5.69a)$$

onde o operador $\Xi_{\mu\nu}$ é dado por

$$\Xi_{\mu\nu} = \square\Theta_{\mu\nu} - 2\tilde{L}_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}\square\Omega_{\mu\nu}. \quad (5.69b)$$

Comparando o operador $\Xi_{\mu\nu}$ com a Eq. (5.8b), vemos que agora não é possível colocar em evidência o operador d'Alembertian. Os projetores $\Theta_{\mu\nu}$, $\Omega_{\mu\nu}$ são dados pela Eq. (5.9), enquanto o tensor antissimétrico, $\tilde{L}_{\mu\nu}$, tem a forma

$$\tilde{L}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\kappa\lambda\nu}T^\kappa(T \cdot \partial)^2 \partial^\lambda, \quad (5.70)$$

e advém do segundo termo da lagrangeana, de fato:

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda T_\kappa(T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu} = -A^\nu \epsilon_{\kappa\mu\lambda\nu}T^\kappa(T \cdot \partial)^2 \partial^\lambda A^\mu = -A^\nu L_{\nu\mu}A^\mu.$$

Importante destacar que a Eq. (5.68) está diretamente ligada ao setor de fótons da teoria de Myers-Pospelov ([70]). Em [110, 111], certas propriedades do setor de fótons desta teoria foram estudadas. A Eq. (5.68) corresponde à teoria estudada nas últimas referências, com a correspondência $T^\mu = g^{1/3}n^\mu$, onde g é a constante de acoplamento e n^μ parametriza uma direção preferencial. A escolha do gauge fixing é $\xi = -1$. O artigo [110] é principalmente dedicado ao estudo da causalidade clássica. A unitariedade é analisada em [111] para um campo de fundo T_μ tipo-luz com base na validade do teorema óptico em *tree-level*.

A seguir, vamos discutir aspectos da causalidade clássica desta teoria. Além disso, a análise para a unitariedade, através do resíduo do propagador saturado, será realizada para diferentes configurações do vetor de fundo.

Para determinar o propagador da lagrangeana (5.68), podemos propor um *Ansatz* na forma:

$$\Delta^\mu{}_\alpha = a\Theta^\mu{}_\alpha + b\tilde{L}^\mu{}_\alpha + c\Omega^\mu{}_\alpha + eT^\mu T_\alpha + f(T^\mu \partial_\alpha + T_\alpha \partial^\mu), \quad (5.71)$$

que satisfaz a seguinte identidade

$$\Xi_{\nu\mu}\Delta^\mu{}_\alpha = \eta_{\nu\alpha}. \quad (5.72)$$

Realizando as contrações tensoriais da identidade acima, obtemos a álgebra fechada para os operadores tensoriais $\Theta_{\nu\mu}$, $\tilde{L}_{\mu\nu}$, $\Omega_{\nu\mu}$, $T_\nu T_\mu$, $T_\nu \partial_\mu$, e $T_\mu \partial_\nu$ em que são os mesmos apresentados na Tab. 5.1 com a substituição $D_\mu \rightarrow T_\mu$. Assim, temos

$$\rho \equiv T^\mu \partial_\mu, \quad (5.73a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu} \equiv \tilde{L}_{\nu\mu} \tilde{L}^\mu{}_\alpha = - [T_\alpha T_\nu \square - (T_\nu \partial_\alpha + T_\alpha \partial_\nu) \rho + (\rho^2 - T^2 \square) \Theta_{\nu\alpha} + \Omega_{\nu\alpha} \rho^2] \rho^4. \quad (5.73b)$$

Para encontrar os operadores a, b, c, e, f , partimos da equação tensorial (5.72), usando a álgebra fechada dos operadores. Após realizar algumas simplificações algébricas, obtemos

$$a = \frac{\square}{\Lambda}, \quad b = \frac{2}{\square} a, \quad c = -\frac{\xi}{\square} - 4 \frac{\rho^6}{\square \Lambda}, \quad e = -4 \frac{\rho^4}{\Lambda}, \quad f = 4 \frac{\rho^5}{\square \Lambda}, \quad (5.74a)$$

onde

$$\Lambda = \square^2 + 4(\rho^2 - T^2 \square) \rho^4. \quad (5.74b)$$

Assim, obtemos o propagador no espaço dos momentos na forma:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\alpha}(p) &= \frac{-i}{p^2 \{p^4 + 4[T^2 p^2 - (T \cdot p)^2](T \cdot p)^4\}} [p^4 \eta_{\mu\alpha} - 2i p^2 (T \cdot p)^2 \varepsilon_{\mu\kappa\lambda\alpha} T^\kappa p^\lambda \\ &\quad + \{(1 + \xi) [4(T \cdot p)^6 - p^4] - 4\xi T^2 p^2 (T \cdot p)^4\} \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \\ &\quad + 4p^2 (T \cdot p)^4 T_\mu T_\alpha - 4(T \cdot p)^5 (T_\mu p_\alpha + T_\alpha p_\mu)] . \end{aligned} \quad (5.75)$$

Assim como no modelo anterior, as partes do propagador independentes do gauge fixing são transversais, como podemos verificar a seguir:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\alpha}(p) p^\alpha &= \frac{-i}{p^2 \{p^4 + 4[T^2 p^2 - (T \cdot p)^2](T \cdot p)^4\}} [p^4 p_\mu \\ &\quad + \{(1 + \xi) [4(T \cdot p)^6 - p^4] - 4\xi T^2 p^2 (T \cdot p)^4\} p_\mu \\ &\quad + 4p^2 (T \cdot p)^5 T_\mu - 4(T \cdot p)^5 T_\mu p^2 - 4(T \cdot p)^6 p_\mu] , \end{aligned}$$

simplificando,

$$\Delta_{\mu\alpha}(p) p^\alpha = \frac{i}{p^2 \{p^4 + 4[T^2 p^2 - (T \cdot p)^2](T \cdot p)^4\}} \xi [p^4 + 4T^2 p^2 (T \cdot p)^4 - 4(T \cdot p)^6] p_\mu ,$$

de modo que resulta:

$$\Delta_{\mu\alpha}(p) p^\alpha = \frac{i\xi p_\mu}{p^2}, \quad (5.76)$$

mesmo resultado obtido anteriormente, que consta na Eq. (5.20).

5.3.1 Relação de dispersão

Conforme observado no primeiro modelo, os pólos do propagador fornecem duas equações de dispersão, a saber:

$$p^2 = 0, \quad (5.77)$$

$$p^4 + 4[T^2 p^2 - (T \cdot p)^2](T \cdot p)^4 = 0. \quad (5.78)$$

A primeira relação é o pólo de Maxwell, enquanto a segunda relação contém informações do termo de dimensão 5. Analisaremos a segunda relação de dispersão para duas configurações do tensor de VL, que exhibe direções preferenciais no espaço-tempo.

É importante notar que a relação de dispersão (5.78) é diferente da Eq. (5.22b), pois nesse novo modelo a relação continua fazendo sentido quando o tensor de VL desaparece, enquanto a relação de dispersão (5.22b) não faz sentido quando o tensor de fundo tende a zero. Portanto, a classificação "exótico" não será usada aqui. A relação de dispersão originada da Eq. (5.78) pode ser denominada espúrio, quando exhibe um comportamento não físico, ou não convencional.

Configuração tipo-tempo do tensor de fundo, $T_\gamma = (T_0, 0)$

Para o campo de fundo tipo-tempo, $T_\gamma = (T_0, 0)$, a Eq. (5.78) assume a forma:

$$p_0^4 (1 - 4T_0^6 \mathbf{p}^2) - 2\mathbf{p}^2 p_0^2 + \mathbf{p}^4 = 0, \quad (5.79)$$

cujas soluções são dadas por

$$p_0^\pm = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|}}. \quad (5.80a)$$

Comparando a Eq. (5.80a) com a relação de dispersão (5.24) da configuração tipo-tempo do modelo anterior, que é não física, agora temos uma relação de dispersão que designa propagação de sinal, com dois modos propagantes distintos p_0^+ e p_0^- . A notação \oplus/\ominus representa os sinais dos dois modos. A energia é bem definida para o modo \ominus , mas não é bem definida para o modo \oplus . Este último é definido fisicamente apenas para $|\mathbf{p}| < 1/(2|T_0|^3)$. Assumimos o coeficiente T_0 não negativo: $T_0 \geq 0$.

Configuração para o tensor de fundo tipo-espaço

Para o campo de fundo puramente espacial, $T_\gamma = (0, \mathbf{T})$, a relação de dispersão correspondente tem a forma:

$$p_0^4 - 2p_0^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^4 + 4[-\mathbf{T}^2 p_0^2 + \mathbf{T}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2](\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 = 0.$$

Obtemos uma equação de segundo grau, para $x = p_0^2$, na forma

$$x^2 - 2[\mathbf{p}^2 + 2\mathbf{T}^2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4]x + [\mathbf{p}^4 + 4(\mathbf{T}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2)(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4] = 0, \quad (5.81)$$

cuja solução para p_0^2 é dada por

$$p_{0\pm}^2 = \mathbf{p}^2 + 2\mathbf{T}^2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 \pm 2|\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}|^3 \sqrt{\mathbf{T}^4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 + 1}. \quad (5.82)$$

Podemos reescrever a solução acima em função do ângulo α entre \mathbf{T} e \mathbf{p} , definido na expressão a seguir:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{T}||\mathbf{p}| \cos \alpha. \quad (5.83a)$$

Obtemos então:

$$p_0^\pm = |\mathbf{p}| \left(1 + 2|\mathbf{T}|^6 |\mathbf{p}|^2 \cos^4 \alpha \pm 2|\mathbf{T}|^3 |\mathbf{p}| \cos^3 \alpha \sqrt{|\mathbf{T}|^6 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \alpha + 1} \right)^{1/2}. \quad (5.84a)$$

Podemos observar que $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3$ e $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 \mathbf{T}^2$ têm dimensão de massa igual a 2, enquanto $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4$ é adimensional. É possível mostrar que a energia (5.84a) é real para qualquer valor do campo de fundo e direção relativa a \mathbf{p} , ou seja, $p_0^2 > 0$.

Quando as ondas eletromagnéticas se propagam ao longo de uma direção perpendicular a \mathbf{T} , a violação de Lorentz não tem nenhum efeito e a relação de dispersão recai na usual,

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2.$$

Vemos que as Eqs. (5.80a) e (5.84a), na faixa de momento adequada, representam relações de dispersão compatíveis com a propagação de sinais, cujas propriedades precisam ser examinadas. Do mesmo modo como analisamos para o modelo anterior, vamos investigar a causalidade clássica por meio da velocidade de grupo, \mathbf{u}_{gr} , e da velocidade de frente de onda, u_{frente} , definida na Eq. (5.27). Agora vamos obter e avaliar essas velocidades para as relações de dispersão originadas da relação de dispersão (5.78).

Causalidade: setor tipo-tempo

Para a relação de dispersão (5.80a), a velocidade de frente de onda é dada por:

$$u_{\text{frente}}^\pm = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0^\pm}{|\mathbf{p}|} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|}} = 0. \quad (5.85)$$

Para a velocidade do grupo, temos:

$$\mathbf{u}_{\text{gr}}^\pm = \frac{\partial p_0^\pm}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1 \mp T_0^3 |\mathbf{p}|}{(1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|)^{3/2}} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (5.86)$$

cujos módulos, $u_{\text{gr}}^\pm = \sqrt{\mathbf{u}_{\text{gr}}^\pm \mathbf{u}_{\text{gr}}^\pm}$, vale:

$$u_{\text{gr}}^\pm = \frac{1 \mp |T_0|^3 |\mathbf{p}|}{(1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|)^{3/2}}, \quad (5.87)$$

que contém a velocidade de grupo do modo p_0^+ e p_0^- ,

$$u_{\text{gr}}^+ = \frac{1 - |T_0|^3 |\mathbf{p}|}{(1 - 2 |T_0|^3 |\mathbf{p}|)^{3/2}} \Big|_{|\mathbf{p}| < 1/(2|T_0|^3)}, \quad u_{\text{gr}}^- = \frac{1 + |T_0|^3 |\mathbf{p}|}{(1 + 2 |T_0|^3 |\mathbf{p}|)^{3/2}}, \quad (5.88)$$

respectivamente. É fácil notar que a velocidade u_{gr}^\pm , só faz sentido quando $|\mathbf{p}| < 1/(2|T_0|^3)$, pois garante energias reais para este modo.

O comportamento das velocidades de grupo está ilustrado a seguir:

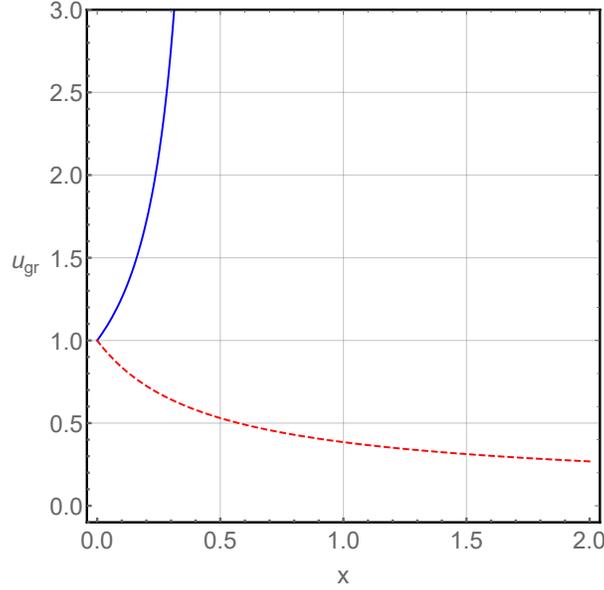


Figura 5.2: Velocidade de grupo da Eq. (5.88) onde o azul, linha contínua, representa o modo \oplus e o vermelho, linha tracejada, representa o modo \ominus .

Podemos observar que, para grandes momentos, a velocidade de grupo para o modo negativo, u_{gr}^- , é simplesmente dado por

$$\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} u_{\text{gr}}^- = 0. \quad (5.89)$$

Os resultados obtidos para a velocidade de frente de onda e velocidade de grupo, no limite de grandes momentos, mostram que não há propagação de sinais. Portanto, de acordo com o gráfico, u_{gr}^- é bem definida para qualquer momento, enquanto u_{gr}^+ exibe uma singularidade em $|\mathbf{p}| = 1/(2|T_0|^3)$ e torna-se complexa para $|\mathbf{p}| \geq 1/(2|T_0|^3)$, logo a causalidade é violada para o modo positivo. Assim, o modo positivo deve ser considerado espúrio, já que se trata de um modo totalmente não causal. Já o modo negativo não é nem espúrio nem exótico, mas é, de fato, um modo não convencional que não se propaga para grandes momentos.

Causalidade: setor espacial

Agora vamos investigar as propriedades da relação de dispersão (5.84a). A velocidade de frente de onda é calculada como

$$u_{\text{frente}}^{\pm} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0^{\pm}}{|\mathbf{p}|} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 2|\mathbf{T}|^6 |\mathbf{p}|^2 \cos^4 \alpha \pm 2|\mathbf{T}|^6 |\mathbf{p}|^2 \cos^4 \alpha}, \quad (5.90)$$

que fornece para os dois modos os resultados,

$$u_{\text{frente}}^+ = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} 2\sqrt{|\mathbf{T}|^6 |\mathbf{p}|^2 \cos^4 \alpha} = \infty, \quad (5.91)$$

$$u_{\text{frente}}^- = 1. \quad (5.92)$$

Podemos verificar que a velocidade de frente de onda é divergente para o modo p_0^+ , o que novamente indica uma quebra da causalidade para este modo. Em contraste, a velocidade de frente de onda para o modo p_0^- é bem comportada.

Do mesmo modo, calculamos agora a velocidade de grupo, obtendo:

$$\mathbf{u}_{\text{gr}}^{\pm} = \frac{\sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} [\mathbf{p} + 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \mathbf{T}^2 \mathbf{T}] \pm (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T} [3 + 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4]}{\sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} \sqrt{\mathbf{p}^2 + 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 \mathbf{T}^2 \pm 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}}}, \quad (5.93)$$

cujo módulo é dado por,

$$u_{\text{gr}}^{\pm} = \frac{\sqrt{2[4x^3 \cos^4 \alpha + 3x \cos^2 \alpha]^2 + (x^2/4) \sin^2(2\alpha) + 1 \pm U(x)}}{\sqrt{1 + x^2 \cos^2 \alpha} \sqrt{2x^2 \cos^4 \alpha + 1 \pm 2x \cos^3 \alpha \sqrt{1 + x^2 \cos^2 \alpha}}}, \quad (5.94a)$$

onde foi feito $|\mathbf{T}|^3 |\mathbf{p}| \equiv x$ e

$$U(x) = 2x \cos^3 \alpha [(2 + 4x^2 \cos^2 \alpha)^2 - 1] \sqrt{1 + x^2 \cos^2 \alpha}, \quad (5.94b)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{T}| |\mathbf{p}| \cos \alpha, \quad (5.95)$$

para melhor escrever e analisar a expressão para a velocidade de grupo.

Os gráficos mostrados nas Fig. 5.3 e 5.4 mostram o comportamento da velocidade do grupo para os modos p_0^+ e p_0^- para diferentes ângulos. Podemos observar que para o modo p_0^+ , o módulo da velocidade de grupo é igual a 1, $u_{\text{gr}}^+ = 1$, quando o campo de fundo vai a zero, e pode ser maior ou menor que 1 dependendo do ângulo. Para $\alpha \in [0, \pi/2)$, a velocidade de grupo torna-se cada vez maior para $x > 0$, o que implica em violação da causalidade, conforme o gráfico. Para corroborar os dados do gráfico podemos atribuir alguns valores para α nesse intervalo $[0, \pi/2)$. Assim, o módulo da velocidade de grupo para $\alpha = 0$ assume a forma:

$$u_{\text{gr}}^+|_{\alpha=0} = \frac{\sqrt{2[4x^3 + 3x]^2 + 1 + 2x[(2 + 4x^2)^2 - 1] \sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{2x^2 + 1 + 2x \sqrt{1 + x^2}}} > 1, \quad (5.96a)$$

$$U(x)|_{\alpha=0} = 2x[(2 + 4x^2)^2 - 1] \sqrt{1 + x^2}, \quad (5.97a)$$

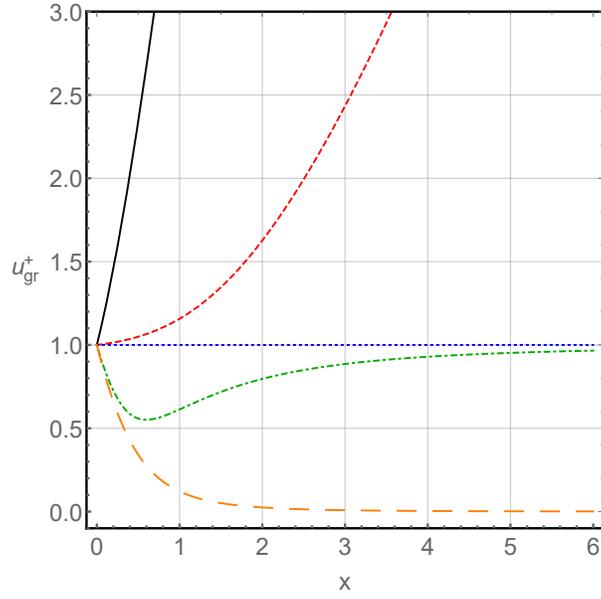


Figura 5.3: Velocidade de grupo da Eq. (5.94a) para o modo \oplus para $\alpha = 0$ (preto, linha contínua), $\alpha = 2\pi/5$ (vermelho, linha tracejada), $\alpha = \pi/2$ (azul, linha pontilhada), $\alpha = 9\pi/10$ (verde, linha tracejada e pontilhada), e $\alpha = \pi$ (laranja, linha com traços longos).

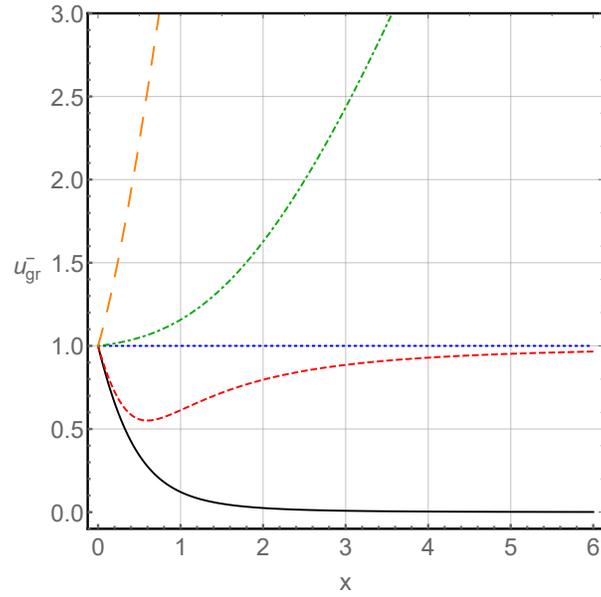


Figura 5.4: Velocidade de grupo da Eq. (5.94a) para o modo \ominus para $\alpha = 0$ (preto, linha contínua), $\alpha = \pi/10$ (vermelho, linha tracejada), $\alpha = \pi/2$ (azul, linha pontilhada), $\alpha = 3\pi/5$ (verde, linha tracejada e pontilhada), e $\alpha = 9\pi/10$ (laranja, linha com traços longos)

violando a causalidade. Para $\alpha = \pi/2$, temos

$$u_{\text{gr}}^+|_{\alpha=\pi/2} = \sqrt{1 + U(x)} = 1, \quad (5.98a)$$

onde

$$U(x)|_{\alpha=\pi/2} = 0, \quad (5.99)$$

que é o limite para ter a causalidade assegurada. Podemos observar também que para $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, o módulo da velocidade de grupo torna-se cada vez menor que 1 para $x > 0$. Para $\alpha = \pi$, temos

$$u_{\text{gr}}^+|_{\alpha=\pi} = \frac{\sqrt{2[4x^3 + 3x\alpha]^2 + 1 + U(x)}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{2x^2+1-2x\sqrt{1+x^2}}}, \quad (5.100)$$

onde

$$U(x) = -2x[(2+4x^2)^2 - 1]\sqrt{1+x^2}, \quad x \equiv |\mathbf{T}|^3|\mathbf{p}|. \quad (5.101a)$$

Para $\alpha = \pi$, a velocidade de grupo diminui monotonicamente com x até chegar a zero. Para grandes momentos o módulo da velocidade de grupo aumenta novamente e se aproxima de 1, que é um comportamento compatível com a causalidade clássica. Para $\alpha = \pi/2$, a velocidade de grupo corresponde ao resultado padrão, $u_{\text{gr}} = 1$, já que a relação de dispersão assume a forma $p_0 = |\mathbf{p}|$ para esse ângulo. Da mesma forma, temos que o comportamento geral do modo negativo é análogo quando α é substituído por $\pi - \alpha$.

Portanto, o modo positivo não se propaga para grandes momentos quando o momento aponta em uma direção oposta a \mathbf{T} e um comportamento semelhante ocorre para o modo negativo quando o momento é paralelo a \mathbf{T} . Assim, esses resultados mostram que o modo positivo preserva a causalidade para $\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \leq 0$, enquanto o modo negativo preserva a causalidade para $\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \geq 0$.

Para concluir, o modo positivo é espúrio para qualquer escolha de α devido à Eq. (5.88), enquanto o modo negativo é apenas espúrio para $\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \leq 0$.

5.3.2 Unitariedade

A análise da unitariedade será feita usando o mesmo procedimento aplicado na Seç. 5.2.2. Para o propagador encontrado na Eq. (5.75), a saturação é dada por

$$SP = -i \left\{ \frac{p^2 J^2 + 4(T \cdot p)^4 (T \cdot J)^2}{p^4 + 4[T^2 p^2 - (T \cdot p)^2] (T \cdot p)^4} \right\}. \quad (5.102)$$

Podemos observar que, ao contrário do primeiro modelo, o pólo de Maxwell cancela no propagador saturado. Para analisar a unitariedade vamos analisar as configurações tipo-tempo e tipo-espaço para o campo de fundo T_γ .

Configuração tipo-tempo, $T_\gamma = (T_0, 0)$

Para a configuração tipo tempo, $T_\gamma = (T_0, 0)$, a relação de dispersão é dada pela Eq. (5.80a). Assim, o propagador saturado tem a forma:

$$SP|_{\text{tipo tempo}} = -i \left[\frac{p^2 J^2 + 4T_0^6 p_0^4 J_0^2}{(1 - 4T_0^6 \mathbf{p}^2)(p^2 - p_+^2)(p^2 - p_-^2)} \right], \quad (5.103a)$$

onde

$$p_{\pm}^2 \equiv p_{0\pm}^2 - \mathbf{p}^2,$$

$$p_{\pm}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{1 \mp 2|T_0|^3|\mathbf{p}|} - \mathbf{p}^2 = \pm \frac{2|T_0|^3|\mathbf{p}|^3}{1 \mp 2|T_0|^3|\mathbf{p}|}. \quad (5.104a)$$

Fisicamente a expressão p_+^2 só faz sentido para $|\mathbf{p}| < 1/(2|T_0|^3)$ em que é maior que zero. Além disso, podemos observar que $p_-^2 < 0$ para todos os valores de $|\mathbf{p}|$. Além disso, temos a seguinte relação

$$p_+^2 - p_-^2 = \frac{2|T_0|^3|\mathbf{p}|^3}{1 - 2|T_0|^3|\mathbf{p}|} + \frac{2|T_0|^3|\mathbf{p}|^3}{1 + 2|T_0|^3|\mathbf{p}|} = \frac{4|T_0|^3|\mathbf{p}|^3}{1 - 4T_0^6\mathbf{p}^2}. \quad (5.105)$$

A quadri-corrente ao quadrado pode ser escrita convenientemente, usando a conservação da corrente, $J_0 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})/p_0$, na forma

$$J^2 = \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2 - \mathbf{J}^2 p_{0\pm}^2}{p_{0\pm}^2}.$$

Assim, o quadrado da quadri-corrente pode ser reescrito usando a relação de dispersão. Assim, obtemos:

$$J^2 = - \left[\frac{\mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2 + p_{\pm}^2 \mathbf{J}^2}{p_{0\pm}^2} \right] = - \frac{1}{p_{0\pm}^2} [(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_{\pm}^2 \mathbf{J}^2]. \quad (5.106)$$

Observe que $p_-^2 < 0$ de acordo com a Eq. (5.104a), e que não torna a quadri-corrente ao quadrado negativa para todas as configurações possíveis. Agora, usamos a Eq. (5.106) para escrever os resíduos para ambos os pólos.

Para o modo positivo do pólo, temos

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_+^2} = - \frac{i}{p_{0+}^2} \left[- \frac{[(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_+^2 \mathbf{J}^2]}{(1 - 4T_0^6\mathbf{p}^2)(p_+^2 - p_-^2)} p_+^2 + \frac{4T_0^6 p_{0+}^4 J_0^2 p_{0+}^2}{(1 - 4T_0^6\mathbf{p}^2)(p_+^2 - p_-^2)} \right], \quad (5.107a)$$

usando a relação (5.105) e a conservação da corrente, obtemos as seguintes expressões

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_+^2} = \frac{i}{p_{0+}^2} \left[\frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 p_+^2 + p_+^4 \mathbf{J}^2 - 4T_0^6 p_{0+}^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2}{4|T_0|^3|\mathbf{p}|^3} \right], \quad (5.108a)$$

para o modo positivo e para o modo negativo, temos

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_-^2} = - \frac{i}{p_{0-}^2} \left[\frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 p_-^2 + p_-^4 \mathbf{J}^2 - 4T_0^6 p_0^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2}{4|T_0|^3|\mathbf{p}|^3} \right]. \quad (5.109a)$$

Podemos escrever uma forma compacta para os dois pólos, de acordo com a expressão a seguir:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \pm \frac{i}{p_{0\pm}^2} \left[\frac{p_{\pm}^2 (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_{\pm}^4 \mathbf{J}^2 - 4T_0^6 p_{0\pm}^4 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2}{4|T_0|^3|\mathbf{p}|^3} \right]. \quad (5.110)$$

Para melhor analisar esta expressão podemos escolher algumas configurações.

Configuração em que $\mathbf{J} \parallel \mathbf{p}$ Para o caso particular $\mathbf{J} \parallel \mathbf{p}$, temos

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 = 0, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{J}||\mathbf{p}|, \quad (5.111)$$

assim, o resíduo (5.110) é dado na forma:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \pm i p_{0\pm}^2 \mathbf{J}^2 \left[\frac{p_{\pm}^4/p_{0\pm}^4 - 4T_0^6 \mathbf{p}^2}{4|T_0|^3 |\mathbf{p}|^3} \right]. \quad (5.112)$$

Para simplificar e facilitar a análise, façamos:

$$\frac{p_{\pm}^4}{p_{0\pm}^4} = \left(\pm \frac{2|T_0|^3 |\mathbf{p}|^3}{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|} \right)^2 \left(\frac{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2} \right)^2 = 4T_0^6 |\mathbf{p}|^2,$$

o que leva a saturação na forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \pm i p_{0\pm}^2 \mathbf{J}^2 \left[\frac{4T_0^6 |\mathbf{p}|^2 - 4T_0^6 \mathbf{p}^2}{4|T_0|^3 |\mathbf{p}|^3} \right] = 0, \quad (5.113)$$

obtendo um resultado nulo para a saturação. Um resíduo nulo é, em princípio, compatível com a unitariedade e significa que o pólo correspondente não contribui para observáveis físicos.

Configuração em que $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$

Outra configuração particular é $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$, logo

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 = \mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (5.114)$$

Para esta configuração, o resíduo (5.110) se reduz a

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \pm i \frac{p_{\pm}^2}{p_{0\pm}^2} \mathbf{J}^2 \left[\frac{\mathbf{p}^2 + p_{\pm}^2}{4|T_0|^3 |\mathbf{p}|^3} \right]. \quad (5.115)$$

Podemos simplificar usando as relações

$$\frac{p_{\pm}^2}{p_{0\pm}^2} = \left(\pm \frac{2|T_0|^3 |\mathbf{p}|^3}{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|} \right) \left(\frac{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2} \right) = \pm 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|, \quad (5.116)$$

e

$$p_{0\pm}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|},$$

obtemos o resíduo na forma:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = i \frac{\mathbf{J}^2}{2} \left[\frac{1}{1 \mp 2|T_0|^3 |\mathbf{p}|} \right]. \quad (5.117)$$

O resultado acima nos mostra que a unitariedade é assegurada para ambos os modos, desde que as relações de dispersão associadas sejam reais, o que requer $|\mathbf{p}| < 1/(2|T_0|^3)$.

Alternativamente, usando as relações obtida, o resíduo (5.110) pode ser reescrito de modo a preservar as análises feitas para $\mathbf{J} \parallel \mathbf{p}$ e $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$ da seguinte maneira:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \mp i \frac{p_{\pm}^2 J^2 + (2|T_0|^3 p_{0\pm}^2 J_0)^2}{4(|T_0| |p_z|)^3} = \frac{i}{2} \frac{(J_x)^2 + (J_y)^2}{1 \mp 2|T_0|^3 |p_z|}, \quad (5.118)$$

onde o momento espacial aponta ao longo do eixo-z, logo

$$\mathbf{p} = (0, 0, p^z). \quad (5.119)$$

Devido à invariância de Lorentz do observador e à isotropia da teoria considerada, tal escolha não restringe a generalidade, confirmando os resultados particulares obtidos para $\mathbf{J} \parallel \mathbf{p}$ e $\mathbf{J} \perp \mathbf{p}$. Para o modo positivo, \oplus , a parte imaginária do resíduo é definida positiva para $|\mathbf{p}| < 1/(2|T_0|^3)$, garantindo a unitariedade no intervalo do momento em que a relação de dispersão (5.80a) é real. Mas a unitariedade deste modo é violada para $|\mathbf{p}| \geq 1/(2|T_0|^3)$, quando a energia associada torna-se complexa.

Podemos observar que para o modo negativo, \ominus , a parte imaginária do resíduo não é negativa, ou seja, é maior do que zero, garantindo unitariedade para todo o momento. Essas propriedades estão de acordo com as observações feitas na Seç. 5.3.1 e Fig. 4.2. Em contraste com o modo \oplus , o modo \ominus é bem comportado com respeito à causalidade clássica e à unitariedade. No entanto, é interessante mencionar que a quebra da causalidade clássica não implica necessariamente em violação da unitariedade, como pode ser visto para o modo espúrio \oplus onde $|\mathbf{p}| \in [0, 1/(2|T_0|^3))$.

Configuração espacial $T_\gamma = (0, \mathbf{T})$

Para o caso puramente espacial, $T_\gamma = (0, \mathbf{T})$, o propagador saturado é dado por

$$SP|_{\text{espacial}} = -i \left\{ \frac{p^2 J^2 + 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2}{p^4 - 4[\mathbf{T}^2 p^2 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2] (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4} \right\}. \quad (5.120)$$

Para esse setor anisotrópico temos dois pólos,

$$p_{\pm}^2 \equiv p_{0\pm}^2 - \mathbf{p}^2 = 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \left[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \pm \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} \right],$$

assim, obtemos

$$SP|_{\text{espacial}} = -i \left[\frac{p^2 J^2 + 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2}{(p^2 - p_+^2)(p^2 - p_-^2)} \right]. \quad (5.121a)$$

A quadri-corrente ao quadrado pode ser escrito como na Eq. (5.106). Observamos que $p_+^2 \leq 0$ para $\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \leq 0$ e $p_-^2 < 0$ para $\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \geq 0$. Portanto, a condição padrão $J^2 < 0$ para uma

corrente conservada não é necessariamente válida no contexto de violação de Lorentz. Com base neste resultado, escrevemos o resíduo do pólo $p^2 = p_+^2$ na forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_+^2} = -i \left[\frac{p_+^2 J^2 + 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2}{(p_+^2 - p_-^2)} \right], \quad (5.122)$$

onde

$$(p_+^2 - p_-^2) = 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}, \quad (5.123)$$

$$J^2 = -\frac{1}{p_{0+}^2} [(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_+^2 \mathbf{J}^2]. \quad (5.124)$$

Logo para o pólo $p^2 = p_+^2$ o resíduo do propagador saturado assume a forma:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_+^2} = \frac{i}{p_{0+}^2} \left[\frac{p_+^2 (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_+^4 \mathbf{J}^2 - 4p_{0+}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2}{4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}} \right]. \quad (5.125)$$

Para o modo negativo, $p^2 = p_-^2$, o resíduo do propagador saturado é dado por:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_-^2} = -\frac{i}{p_{0-}^2} \left[\frac{p_-^2 (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_-^4 \mathbf{J}^2 - 4p_{0-}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2}{4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}} \right]. \quad (5.126)$$

onde

$$(p_-^2 - p_+^2) = -4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}, \quad (5.127)$$

$$J^2 = -\frac{1}{p_{0-}^2} [(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_-^2 \mathbf{J}^2]. \quad (5.128)$$

Podemos também escrever na forma compacta os dois modos na forma:

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \pm \frac{i}{p_{0\pm}^2} \left[\frac{p_{\pm}^2 (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 + p_{\pm}^4 \mathbf{J}^2 - 4p_{0\pm}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2}{4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}} \right]. \quad (5.129)$$

O resultado obtido acima também pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} &= \frac{\pm i}{4p_{0\pm}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}} \left\{ 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \left[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \pm \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} \right] (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 \right. \\ &\quad \left. + 4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^6 \left[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \pm \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} \right]^2 \mathbf{J}^2 - 4p_{0\pm}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2 \right\}, \quad (5.130) \end{aligned}$$

onde foi usado a expressão de p_{\pm}^2 . Para simplificar a expressão acima podemos fazer a seguinte definição:

$$\Upsilon_{\pm} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \pm \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}, \quad (5.131a)$$

logo, obtemos

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = i \left[\frac{N_{\pm}}{2p_{0\pm}^2 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}} \right], \quad (5.132a)$$

onde

$$N_{\pm} = \mp \left\{ 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \left[\mathbf{p}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2 - \mathbf{J}^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \right] - \Upsilon_{\pm} \left[4(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{J} \times \mathbf{T})^2 + (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 \right] \right\}. \quad (5.133)$$

Com base nas novas quantidades da Eq. (5.131a), as relações de dispersão modificadas podem ser expressas de forma resumida como segue:

$$p_{0\pm}^2 = \mathbf{p}^2 + 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \Upsilon_{\pm}. \quad (5.134)$$

Uma outra relação útil neste contexto é

$$\Upsilon_{\pm}^2 = 1 + 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \left[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \pm \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} \right] = 1 + 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \Upsilon_{\pm}. \quad (5.135)$$

Podemos observar que o resíduo da Eq. (5.132a) apesar de parecer simples, não é uma análise trivial. De acordo com os critérios para a unitariedade, o pólo $p^2 = p_{\pm}^2$ tem a unitariedade assegurada desde que $N_{\pm} \geq 0$. Para as configurações $\mathbf{J} \parallel \mathbf{p}$ e $\mathbf{T} \perp \mathbf{p}$, o primeiro termo simplesmente desaparece, ou seja, a unitariedade pode ser demonstrada para esses casos particulares. Assim, para melhor compreensão vamos analisar alguns casos particulares.

Configuração em que $\mathbf{J} \parallel \mathbf{p}$ Para essa configuração, temos

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{p}) = 0. \quad (5.136)$$

Se o momento aponta, por exemplo, na direção z , \mathbf{p}_z , logo

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) = T_z p_z, \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J}) = T_z J_z, \quad (5.137)$$

obtemos

$$\begin{aligned} N_{\pm} &= \mp \left\{ 2(T_z p_z) \left[p_z^2 T_z^2 J_z^2 - J_z^2 T_z^2 p_z^2 \right] - \Upsilon_{\pm} \left[4(T_z p_z)^4 (\mathbf{J} \times \mathbf{T})^2 \right] \right\}, \\ N_{\pm} &= \pm \Upsilon_{\pm} \left[4(T_z p_z)^4 (\mathbf{J} \times \mathbf{T})^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Assim, o resíduo da Eq. (5.132a), para essa configuração, tem a unitariedade assegurada e assume a forma

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = \pm i \frac{2\Upsilon_{\pm} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^4 (\mathbf{J} \times \mathbf{T})^2}{p_{0\pm}^2 \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4}} > 0, \quad (5.139)$$

onde

$$p_{0\pm}^2 = \mathbf{p}^2 + 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^3 \Upsilon_{\pm}, \quad (5.140)$$

$$\Upsilon_{\pm} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{T}^2 \pm \sqrt{1 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{T}^4} > 0. \quad (5.141a)$$

Configuração em que $\mathbf{T} \perp \mathbf{p}$ Para essa configuração, temos

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{p}) = \mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2,$$

logo o resíduo da Eq. (5.132a), é dado por

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=p_{\pm}^2} = i \left[\frac{N_{\pm}}{2p_{0\pm}^2} \right], \quad (5.142a)$$

onde

$$\begin{aligned} N_{\pm} &= \mp \{ -\Upsilon_{\pm} (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 \}, \quad \Upsilon_{\pm} = \pm 1, \\ p_{0\pm}^2 &= \mathbf{p}^2, \quad p_{\pm}^2 = p_{0\pm}^2 - \mathbf{p}^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.144)$$

assim, obtemos

$$\text{Im}[\text{Res}(SP)|_{p^2=0}] = \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2}{2|\mathbf{p}|^2} > 0. \quad (5.145)$$

Podemos observar que a configuração $\mathbf{T} \perp \mathbf{p}$ recai no resíduo do propagador saturado de Maxwell,

$$\text{Res}(SP)|_{p^2=0} = i \left[\frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2}{\mathbf{p}^2} \right] > 0, \quad (5.146a)$$

logo as excitações associadas a este modo propagante são unitárias.

O fator 2 no denominador é devido a existência de duas relações de dispersão distintas para o tensor de violação de Lorentz diferente de zero. Assim, cada relação de dispersão contribui com o resíduo fornecendo o resíduo padrão de Maxwell.

Em contraste, para a maioria das outras escolhas, um cálculo da inequação $N_{\pm} \geq 0$ parece ser muito complicado. O que podemos fazer para um caso geral, é empregar a invariância rotacional do observador e escolher um sistema de coordenadas de modo que o momento aponte na direção do terceiro eixo e \mathbf{T} , \mathbf{J} esteja no plano formado pelo primeiro e terceiro eixo. Assim, consideramos

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\mathbf{p}| \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = |\mathbf{T}| \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = |\mathbf{J}| \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.147)$$

com $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Inserindo essas representações no lado esquerdo da inequação, $N_{\pm} \geq 0$, temos

$$\mp \{ 2|\mathbf{T}||\mathbf{p}| \cos \alpha (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2 |\mathbf{p}|^2 + 4(|\mathbf{T}||\mathbf{p}| \cos \alpha)^4 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2 \Upsilon_{\pm} - 2|\mathbf{J}|^2 \Upsilon_{\pm}^2 (|\mathbf{T}||\mathbf{p}| \cos \alpha)^3 - \Upsilon_{\pm} (\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 \} \geq 0,$$

onde

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{T}||\mathbf{p}| \cos \alpha, \quad (5.148)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{J})^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{T}|^2 |\mathbf{J}|^2 [\cos(2\theta - 2\alpha) + 1], \quad (5.149)$$

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{p})^2 = \mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 = |\mathbf{J}|^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta, \quad (5.150)$$

$$\Upsilon_{\pm} = |\mathbf{T}|^3 |\mathbf{p}| \cos \alpha \pm \sqrt{1 + |\mathbf{T}|^6 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \alpha}, \quad \Upsilon_{\pm}^2 = 1 + 2|\mathbf{T}|^3 |\mathbf{p}| \cos \alpha \Upsilon_{\pm}. \quad (5.151a)$$

Substituindo as expressões acima, obtemos

$$\mp |\mathbf{J}|^2 |\mathbf{p}|^2 \{ |\mathbf{T}|^3 |\mathbf{p}| \cos \alpha [\cos (2\theta - 2\alpha) + 1] + 2 |\mathbf{p}|^2 |\mathbf{T}|^6 \Upsilon_{\pm} \cos^4 \alpha [\cos (2\theta - 2\alpha) + 1] - 2 \Upsilon_{\pm}^2 |\mathbf{T}|^3 |\mathbf{p}| \cos^3 \alpha - \Upsilon_{\pm} \sin^2 \theta \} \geq 0. \quad (5.152)$$

Para simplificar podemos definir

$$\xi \equiv |\mathbf{p}| |\mathbf{T}|^3, \quad (5.153a)$$

assim, podemos escrever a inequação, $N_{\pm} \geq 0$, na forma:

$$\frac{N_{\pm}}{\mathbf{J}^2 \mathbf{p}^2} \equiv g_{\pm}(\xi, \theta, \alpha) \geq 0, \quad (5.154a)$$

$$g_{\pm}(\xi, \theta, \alpha) = \pm 4\xi^3 (1 + \sin^2 \alpha) (\sin \theta - \sin \alpha \cos \theta)^2 + [4\xi^2 (\sin \theta - \sin \alpha \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] \sqrt{1 + (1 + \sin^2 \alpha)^2 \xi^2} \pm \xi [(2 + \cos^2 \alpha) \sin^2 \theta - 2 \sin \alpha \sin(2\theta)]. \quad (5.154b)$$

Agora temos que o lado esquerdo da nova desigualdade são funções de $\xi \geq 0$ e dos dois ângulos α e θ . É um desafio provar que $g_{\pm}(\xi, \theta, \alpha)$ é sempre positivo para ξ e para os ângulos em geral. Os gráficos dessas funções para uma dada escolha de ξ são apresentados nas Fig. 4.5 e 4.6.

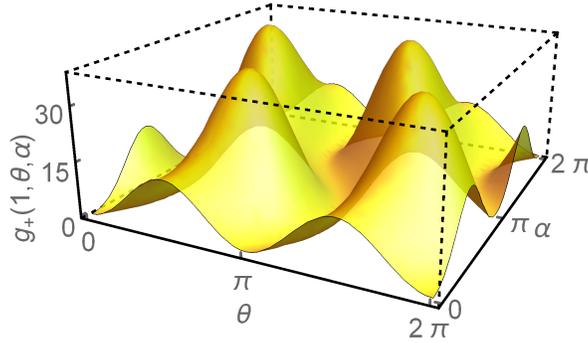


Figura 5.5: Funções $g_{\pm}(1, \theta, \alpha)$ da Eq. (5.154a) para o modo \oplus .

De acordo com os gráficos, ambas as funções, provavelmente, não fornecem valores negativos. Podemos também fazer investigações numéricas que permitem determinar os zeros da função $g_{\pm}(1, \theta, \alpha)$ como mostra nas Fig.4.7 e 4.8.

Vemos que não existem zeros isolados, no entanto, eles estão ao longo de uma linha. O cálculo da primeira e da segunda derivada nestes pontos nos mostra que são mínimos locais. Mínimos além dos que acabamos de citar não foram encontrados. Dessa forma, há fortes indicações numéricas de que $g_{\pm}(1, \theta, \alpha)$ é positivo. Resultados análogos podem ser obtidos para $\xi \neq 1$, garantindo a unitariedades para todas as configurações no caso puramente espacial.

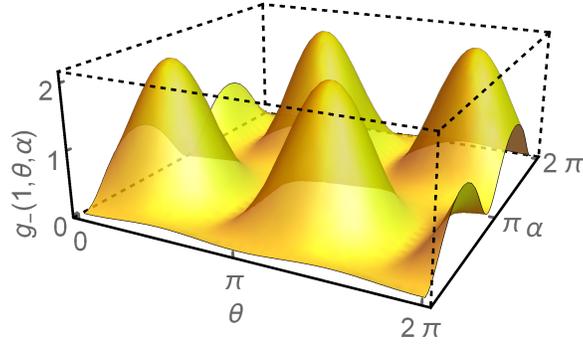


Figura 5.6: Funções $g_{\pm}(1, \theta, \alpha)$ da Eq. (5.154a) para o modo \ominus .

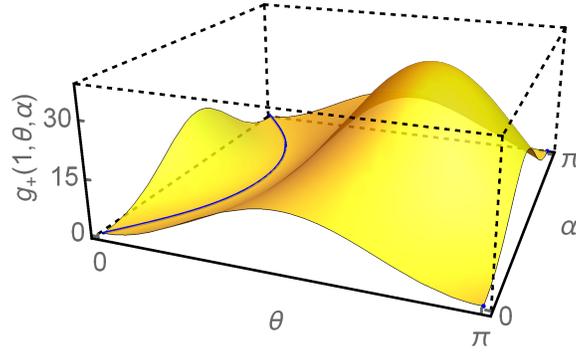


Figura 5.7: Funções $g_{\pm}(1, \theta, \alpha)$ da Eq. (5.154a) no intervalo $\alpha, \theta \in [0, \pi]$ para o modo \oplus . Os zeros obtidos numericamente encontram-se ao longo das linhas azuis.

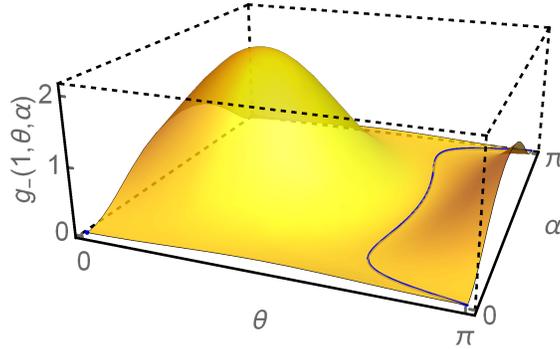


Figura 5.8: Funções $g_{\pm}(1, \theta, \alpha)$ da Eq. (5.154a) no intervalo $\alpha, \theta \in [0, \pi]$ para o modo \ominus . Os zeros obtidos numericamente encontram-se ao longo das linhas azuis.

5.4 Soluções clássicas

Exploramos um termo de dimensão 5 do setor CPT-ímpar do MPE não mínimo. Nesse contexto, vamos analisar os aspectos clássicos das equações de Maxwell modificadas, bem como o cálculo do 4-potencial A_{μ} , que fornecerá os campos magnéticos e elétricos transformados pelo termo de altas derivadas.

5.4.1 Equações de movimento

Partindo da Lagrangeana do modelo CPT-ímpar, escrita na Eq. (5.7), adicionamos o termo de interação com as fontes e suprimimos o termo de fixação de calibre, escrevendo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}D_{\kappa}A_{\lambda}\square F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}. \quad (5.155)$$

A equação de movimento modificada para derivadas de ordens superiores advém da equação de Euler-Lagrange com termos de ordens superiores:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\kappa}} - \partial_{\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\rho}A_{\kappa})} + \partial_{\alpha}\partial_{\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\rho}\partial_{\alpha}A_{\kappa})} - \partial_{\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\partial_{\rho}\partial_{\alpha}A_{\kappa})} = 0.$$

Efetuada as derivadas, obtemos a equação de movimento,

$$\partial_{\rho}F^{\rho\kappa} + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu}D_{\beta}\square F_{\mu\nu} = J^{\kappa}, \quad (5.156)$$

onde J^{ν} é a 4-densidade de corrente, $J^{\nu} = (\rho, \mathbf{J})$, sendo ρ e \mathbf{J} a densidade de carga e a densidade de corrente, respectivamente. A Eq. (5.156) conduz às duas equações de Maxwell não-homogêneas modificadas pelo termo em altas derivadas,

$$\partial_i F^{i0} + \epsilon^{\beta 0\mu\nu} D_{\beta} \square F_{\mu\nu} = \rho, \quad (5.157)$$

$$\partial_{\rho} F^{\rho i} + \epsilon^{\beta i\mu\nu} D_{\beta} \square F_{\mu\nu} = J^i, \quad (5.158)$$

que fornecem a lei de Gauss e a lei de Ampère modificada, dadas, respectivamente, na forma a seguir:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 2\square(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) = \rho, \quad (5.159)$$

$$-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})^i + 2\square D_0 \mathbf{B} - 2\square(\mathbf{D} \times \mathbf{E})^i = J^i. \quad (5.160)$$

Podemos observar que essas equações se reduzem às equações de Maxwell tradicionais no limite em que $D_{\mu} = 0$. Além disso, as equações homogêneas são

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.161)$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.162)$$

5.4.2 Soluções clássicas estacionárias para potencial escalar e vetor

Nesta seção, usaremos o método de Green (na formulação tensorial) para obter as soluções clássicas da eletrodinâmica no regime estacionário. Tais soluções permitirão verificar como o termo de altas derivadas altera o comportamento da teoria usual de Maxwell. Neste contexto, o passo inicial consiste em escrever as equações de onda e obter a função de Green que soluciona tais equações.

Através da equação de movimento, podemos obter a equação de onda na forma

$$\square A^\kappa + \epsilon^{\beta\kappa\mu\nu} D_\beta \square (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = J^\kappa, \quad (5.163)$$

onde foi usado o gauge de Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. Usando-se a antissimetria do símbolo de Levi-civita, a Eq. (5.156) pode ser reescrita na forma

$$\square A^\kappa - 2L^{\kappa\lambda} \square A_\lambda = J^\kappa, \quad (5.164)$$

onde

$$L_{\kappa\lambda} = \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} D^\mu \partial^\nu. \quad (5.165)$$

A equação de onda no espaço dos momentos pode ser reescrita em função do 4-potencial A^α , na forma

$$\Lambda^{\kappa\alpha} A_\alpha(p) = j^\kappa(p), \quad (5.166)$$

onde

$$\Lambda^{\kappa\alpha} = \square (g^{\kappa\alpha} - 2L^{\kappa\alpha}), \quad (5.167)$$

que no espaço dos momentos se escreve como:

$$\Lambda^{\kappa\alpha} = -p^2 (g^{\kappa\alpha} + i2\epsilon^{\kappa\alpha\mu\nu} D_\mu p_\nu). \quad (5.168)$$

Para solucionar A_α , temos que inverter o operador $\Lambda^{\kappa\alpha}$, e contrair tensorialmente sua inversa com a Eq. (5.166), ou seja,

$$A_\alpha(p) = (\Lambda^{\kappa\alpha})^{-1} J^\kappa(p). \quad (5.169)$$

No fundo, esse procedimento pode ser melhor formalizado através do método de Green tensorial. Sabendo que $\Lambda^{\kappa\alpha}$ representa um operador diferencial na Eq. (5.166), a função de Green correspondente, $G_{\alpha\mu}$, satisfaz:

$$\Lambda^{\kappa\alpha} G_{\alpha\mu} = \delta_\mu^\kappa, \quad (5.170)$$

com o 4-potencial A_α sendo dado por:

$$A_\alpha(p) = G_{\alpha\kappa} J^\kappa(p).$$

A função de Green no espaço de posição é escrita usando a transformada de Fourier de $G_{\alpha\kappa}(p)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{p})$, respectivamente:

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G_{\alpha\kappa}(p) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad (5.171)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{J}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \quad (5.172)$$

onde $G_{\alpha\kappa}(p) = (\Lambda^{\kappa\alpha})^{-1}$. Nesse contexto, vale:

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \int G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J^\kappa(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (5.173)$$

onde

$$J_0(\mathbf{r}') = q\delta^3(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}') = q\mathbf{v}\delta^3(\mathbf{r}'). \quad (5.174)$$

Podemos observar que

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}},$$

dessa forma $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ resulta em,

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} q\mathbf{v}\delta^3(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3}. \quad (5.175)$$

Agora podemos propor o *Ansatz*

$$G_{\alpha\mu} = ag_{\alpha\mu} + bL_{\alpha\mu}. \quad (5.176)$$

Usando a identidade (5.170), escrevemos:

$$-p^2 (g^{\kappa\alpha} + i2\epsilon^{\kappa\alpha\eta\nu} D_\eta p_\nu) (ag_{\alpha\mu} - ib\epsilon_{\alpha\mu\beta\rho} D^\beta p^\rho) = \delta_\mu^\kappa. \quad (5.177)$$

Resolvendo os produtos tensoriais da Eq. (5.177), e considerando apenas a primeira ordem do background D^κ , temos

$$-p^2 (a\delta_\mu^\kappa - ib\epsilon_{\mu\beta\rho}^\kappa D^\beta p^\rho + i2a\epsilon^{\kappa\eta\nu} D_\eta p_\nu) = \delta_\mu^\kappa, \quad (5.178)$$

$$-p^2 [a\delta_\mu^\kappa - ibL^\kappa_\mu(p) + i2aL^\kappa_\mu(p)] = \delta_\mu^\kappa. \quad (5.179)$$

Assim, obtemos os valores para as constantes a e b ,

$$a = -\frac{1}{p^2}, \quad b = -\frac{2}{p^2}, \quad (5.180)$$

com isso, a expressão para o operador $G_{\alpha\mu}$ pode ser escrito como,

$$G_{\alpha\mu}(p) = -\frac{1}{p^2} [g_{\alpha\mu} - i2\epsilon_{\alpha\mu\kappa\lambda} D^\kappa p^\lambda]. \quad (5.181)$$

Substituindo a expressão acima na solução (5.169), obtemos a expressão para o potencial,

$$A_\alpha(p) = -\frac{1}{p^2} [J_\alpha - 2i\epsilon_{\alpha\kappa\beta\lambda} D^\beta p^\lambda J^\kappa]. \quad (5.182)$$

Solução estacionária para o potencial escalar e campo elétrico

Partindo da expressão (5.173), usando as definições da Eq. (5.174) e fixando $\alpha = 0$, a solução estacionária para o potencial escalar assume a forma

$$A_0(\mathbf{r}) = q \int G_{00}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + q\mathbf{v}^i \int G_{0i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (5.183)$$

Integrando o resultado acima, escrevemos o potencial escalar

$$A_0(\mathbf{r}) = G_{00}(\mathbf{r}) q + G_{0i}(\mathbf{r}) q\mathbf{v}^i, \quad (5.184)$$

onde as componentes da função de Green, $G_{00}(\mathbf{r})$, $G_{0i}(\mathbf{r})$, precisam ser calculadas. Para isso, vamos inserir a transformada de Fourier de $G_{\alpha\kappa}(p)$ para a função de Green. Partindo da Eq. (5.171) e substituindo o operador $G_{\alpha\kappa}(p)$ dado pela Eq. (5.181), temos

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\kappa} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + 2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (5.185)$$

Para a componente $G_{00}(\mathbf{r})$,

$$G_{00}(\mathbf{r}) = g_{00} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (5.186)$$

o resultado é

$$G_{00}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi R}, \quad (5.187)$$

onde R é a norma do vetor de posição. A solução da integral (5.187) é encontrada no Apêndice C, através da Eq. (C.10),

$$L(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi R}.$$

Agora vamos calcular a componente $G_{0i}(\mathbf{r})$, logo

$$G_{0i}(\mathbf{r}) = F_{0i}(\mathbf{r}) = 2i\epsilon_{0ijk} D^j \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (5.188)$$

obtemos

$$G_{0i}(\mathbf{r}) = -\epsilon_{0ij3} D^j \frac{1}{2\pi R^2}, \quad (5.189)$$

cuja solução pode ser encontrada na Eq. (C.24) do Apêndice C,

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = 2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = -\epsilon_{\alpha\kappa\mu 3} D^\mu \frac{1}{2\pi R^2}.$$

Por fim, para a componente $G_{ij}(\mathbf{r})$,

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = g_{ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + i2\epsilon_{ij0k} D^0 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (5.190)$$

vemos que as integrais são as mesmas integrais das componentes $G_{00}(\mathbf{r})$ e $G_{0i}(\mathbf{r})$, logo:

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = g_{ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \frac{2i\epsilon_{ij0k} D^0}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{g_{ij}}{4\pi R} - \frac{\epsilon_{0ij3} D^0}{2\pi R^2}. \quad (5.191)$$

Uma vez obtido as componentes da função de Green, podemos escrever uma solução para o potencial escalar para uma carga pontual e uma corrente com violação de Lorentz dada por:

$$A_0(\mathbf{r}) = G_{00}(\mathbf{r}) q + G_{0i}(\mathbf{r}) q \mathbf{v}^i, \quad (5.192)$$

onde $G_{00}(\mathbf{r})$ e $G_{0i}(\mathbf{r})$ são dadas pelas expressões (5.187) e (5.189), respectivamente. Assim, obtemos

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi R} + q \frac{(D^x \mathbf{v}^y - D^y \mathbf{v}^x)}{2\pi R^2}, \quad (5.193)$$

ou na forma

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi R} + \frac{q}{2\pi R^2} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{z}, \quad (5.194)$$

onde \hat{z} é um vetor unitário apontando ao longo do eixo z. Podemos observar que a contribuição que vem da violação da simetria de Lorentz decai mais rapidamente que a contribuição usual. Além disso, observamos que mesmo no caso estacionário, devido à presença do background, D_i , temos uma contribuição para o potencial escalar sendo gerada por uma corrente. No limite em que o tensor de violação tende a zero, recuperamos o resultado usual,

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi R}, \quad (5.195)$$

como desejado. Logo o potencial escalar reproduz o comportamento puro coulombiano. Vemos, portanto, que neste caso o potencial não é alterado.

O potencial escalar gera o campo elétrico

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0,$$

logo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi R^2} \hat{r} + \epsilon_{ij3} D^i v^j \frac{q}{\pi R^3} \hat{r}, \quad (5.196)$$

ou na forma

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi R^2} \hat{r} + (D \times v)_3 \frac{q}{\pi R^3} \hat{r}, \quad (5.197)$$

onde $\hat{r} = \frac{\mathbf{R}}{R}$. O campo elétrico tem uma contribuição, $(D \times v)_3 \frac{q}{2\pi R^3} \hat{r}$, que é gerado por uma corrente. Por outro lado, o potencial escalar sem o tensor de violação de Lorentz produz o campo elétrico, dado por

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi R^2} \hat{r}, \quad (5.198)$$

que é o resultado padrão para uma carga pontual.

Solução estacionária para o potencial vetorial e campo magnético

Para a solução estacionária, fixando $\alpha = i$ na expressão (5.173) e usando as definições da Eq. (5.174), a solução estacionária para o potencial vetorial é dada por:

$$A_i(\mathbf{r}) = q \int G_{i0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + q\mathbf{v}^j \int G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (5.199)$$

Integrando o resultado acima, escrevemos o potencial escalar

$$A_i(\mathbf{r}) = qG_{i0}(\mathbf{r}) + q\mathbf{v}^j G_{ij}(\mathbf{r}). \quad (5.200)$$

Usando os resultados obtidos para $G_{0i}(\mathbf{r})$ e $G_{ij}(\mathbf{r})$ dados pelas expressões (5.189) e (5.191), respectivamente, escrevemos

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_{0ij3} D^j}{2\pi R^2} q + \frac{g_{ij}}{4\pi R} q\mathbf{v}^j - \frac{\epsilon_{0ij3} D^0}{2\pi R^2} q\mathbf{v}^j. \quad (5.201)$$

Configuração $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ e $J_0 = 0$ Para a configuração $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ e $J_0 = 0$, obtemos o potencial vetorial,

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{qv_i}{4\pi R} - \epsilon_{0ij3} D^0 v^j \frac{q}{2\pi R^2},$$

podendo ser reescrito como

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{v}_i}{4\pi R} - \epsilon_{0ijn} D^0 \mathbf{v}^j \frac{q}{2\pi R^2} \delta_{n3}. \quad (5.202)$$

O potencial vetorial produz o campo magnético \mathbf{B} , que pode ser obtido através da expressão

$$\mathbf{B}_i = (\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (5.203)$$

Logo o campo magnético em coordenadas cartesianas é dado a seguir:

$$\mathbf{B}_i = \epsilon_{ijk} \left(\frac{qv_k}{4\pi} \partial_j \frac{1}{R} - 2\epsilon_{kl0n} D^0 v^l \frac{q}{4\pi} \delta_{n3} \partial_j \frac{1}{R^2} \right), \quad (5.204)$$

onde

$$\begin{aligned} \partial_i \frac{1}{R} &= -\frac{1}{R^3} r_i, \\ \partial_i \frac{1}{R^2} &= -\frac{2}{R^4} r_i, \end{aligned}$$

assim, obtemos

$$\mathbf{B}_i = -\epsilon_{ijk} \left(\frac{qv_k}{4\pi} \frac{1}{R^3} r_j - 4\epsilon_{kl0n} D^0 v^l \frac{q}{4\pi} \delta_{n3} \frac{1}{R^4} r_j \right), \quad (5.205)$$

$$\mathbf{B}_i = \epsilon_{ijk} \frac{q}{4\pi} \frac{r_k}{R^3} \left[v_j + 4\epsilon_{jl03} D^0 v^l \frac{1}{R} \right]. \quad (5.206)$$

Podemos observar que o novo termo tem um comportamento do tipo R^{-3} que, por sua vez, tende a zero mais rapidamente que o termo usual.

Configuração $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $J_0 \neq 0$ Para a configuração $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $J_0 \neq 0$, o potencial vetorial tem a forma:

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi R^2} \epsilon_{0ij3} D^j. \quad (5.207)$$

Partindo do potencial vetorial, obtemos o campo magnético \mathbf{B} em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{B}_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad (5.208)$$

logo o campo magnético é escrito como

$$\mathbf{B}_i = \frac{q}{\pi R^4} \epsilon_{ijk} \epsilon_{0kl3} D^l r_j, \quad (5.209)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{q}{\pi R^4} (\epsilon_{ij1} D^2 r_j - \epsilon_{ij2} D^1 r_j),$$

onde

$$\begin{aligned}\epsilon_{0kl3} &= \delta_{k1}\delta_{l2} - \delta_{k2}\delta_{l1}, \\ \partial_i \frac{1}{R^2} &= -\frac{2}{R^4} r_i.\end{aligned}$$

Podemos observar que a presença do tensor de violação, D_i , faz com que uma carga em repouso produza um potencial vetorial e conseqüentemente um campo magnético. É interessante notar que o campo magnético em questão tem um comportamento diferente do usual, isto é, decai com uma potência R^{-3} . Além disso, podemos notar que o campo não pode ser escrito na forma de um rotacional, portanto, ele não é perpendicular ao plano formado pelo vetor posição e pelo campo de fundo.

Capítulo 6

Eletrodinâmica planar tipo Chern-Simons com altas derivadas e violação de Lorentz

6.1 Introdução

A teoria de Chern-Simons é uma nova teoria de gauge definida em $2 + 1$ dimensões, diferente da teoria planar de Maxwell, desenvolvida e investigada no início dos anos 80 [112, 113]. Podemos encontrar na literatura estudos da teoria planar em Mecânica Quântica que estuda a redução do espaço de fase [114] e a construção da teoria de campos não relativística com interação Chern-Simons [115]. Aspectos gerais importantes da teoria de Chern-Simons podem ser encontrados na referência [116]. Nessa referência aborda também a quantização canônica da teoria de Chern Simons e vórtices de Chern-Simons.

A teoria de Chern-Simons, quando acoplada a campos de matéria, produz efeitos diferentes da teoria de Maxwell usual. Uma característica interessante é que as densidades de carga e corrente obtidas da equação de Euler-Lagrange produzem alguns efeitos, são eles: a densidade de carga é proporcional ao campo magnético, logo onde quer que haja carga existe campo magnético, e a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico [116]. Um dos efeitos do acoplamento da teoria de Chern-Simons com os campos de matéria são os chamados anyons. Anyons são quase partículas que satisfazem uma estatística fracionária. Essa estatística é característica de modelos planares.

Outra característica é que o termo de Chern-Simons é de primeira ordem nas derivadas espaço-temporais, o que torna a sua estrutura canônica significativamente diferente da teoria de Maxwell. O termo de Chern-Simons é apresentado a seguir:

$$\mathcal{S}_{CS} = \frac{k}{2} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (6.1)$$

vemos assim que o fato do termo de CS conter apenas 1 derivada também proporciona dimensão

de massa para a constante k , já que a estrutura $A_\mu \partial_\nu A_\rho$ possui dimensão de massa 2, pois em $2 + 1$ dimensões vale $[A_\mu] = 1/2$.

À primeira vista, não é óbvio que o termo Chern-Simons é invariante de gauge, uma vez que depende explicitamente de A_μ . No entanto, uma transformação de calibre da forma $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$, implementada na equação (6.1), nos fornece o seguinte resultado

$$\mathcal{S}_{CS} \rightarrow \mathcal{S}_{CS} + \frac{k}{2} \int d^3x \partial_\mu (\omega \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho). \quad (6.2)$$

Vemos, portanto, que a mudança na ação após a implementação da transformação de calibre é dada por uma derivada total, que não contribui em situações onde os campos se anulam no infinito, estabelecendo a invariância de calibre. Contudo, existem algumas situações em que a derivada total não desaparece, por exemplo, se considerarmos problemas na versão não-abeliana da teoria CS, os efeitos de contorno podem ser relevantes [116], dessa forma o termo de superfície não mais será negligenciado.

Essa teoria é estudada em várias áreas da física, por exemplo, em um torus com matéria não relativística e relativística [117], em correção perturbativa de um loop na teoria de gauge não abeliana na presença de campos de Higgs [118], em teorias de super cordas [119], em defeitos topológicos [120], em teorias com violação de Lorentz [121].

Na literatura podemos encontrar também estudos da teoria de Chern-Simons com altas derivadas. A teoria de Chern-Simons com altas derivadas foi proposta por Deser & Jackiw [122], em que nesse paper foi estudado a extensão da derivada para dimensão $D=3$, $1+2$ dimensão do espaço, em que foi calculado o propagador e algumas análises foram feitas. Vários estudos também foram feitos para a teoria de Chern-Simons com altas derivadas em diversas áreas da física. Na referência [123] foi investigado formulações Lagrangianas e Hamiltonianas da teoria Abeliana de Chern-Simons de ordem superior em $2 + 1$ dimensões. Na referência [124] encontramos um estudo para eletrodinâmica quântica massiva não comutativa. Na referência [125] foi estudado as propriedades quânticas da extensão de Deser-Jackiw.

O nosso intuito neste capítulo é propor uma teoria tipo Chern-Simons, em $1 + 2$ dimensões, dotada de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz que aparentemente não tem nada proposto ainda nesse sentido na literatura. Destacamos que na Ref. [126] foi obtida uma extensão não-mínima da eletrodinâmica do MPE para $(1 + 2)$ -dimensões, onde foram usadas técnicas conhecidas, como redução dimensional. O setor eletromagnético deste modelo possui duas contribuições que estão relacionadas à violação da simetria de Lorentz, uma contribuição CPT-par, $F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}$, e uma contribuição CPT-ímpar, $\varepsilon^{\lambda\mu\nu} A_\lambda(\hat{k}_{AF}) F_{\mu\nu}$. Esta última contribuição, como podemos ver, está relacionada a uma generalização do termo tipo Chern-Simons e será melhor examinada na próxima seção.

6.2 Teoria de Chern-Simons não-mínima

Agora tentaremos generalizar o termo usual de Chern-Simons para acomodar uma possível

anisotropia espacial (violação de Lorentz) na ação. Para fazer isso, propomos a seguinte estrutura genérica:

$$\mathcal{S}_{NCS} = \frac{\theta}{2} \int d^3x A_\mu \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \quad (6.3)$$

Se considerarmos que θ tem dimensão de massa um, como na teoria usual de Chern-Simons, então o operador $\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho}$ será adimensional. O operador em questão pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} = \sum_{d \geq 3}^{\infty} \mathcal{Q}^{(d)\mu\nu\rho\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}. \quad (6.4a)$$

Separando as contribuições pares e ímpares, obtemos:

$$\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} = \sum_{\substack{d \geq 3 \\ \text{ímpar}}}^{\infty} \mathcal{K}^{(d)\mu\nu\rho\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}} + \sum_{\substack{d \geq 4 \\ \text{par}}}^{\infty} \mathcal{T}^{(d)\mu\nu\rho\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (6.5)$$

o que é equivalente a escrever

$$\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} = \widehat{\mathcal{K}}^{\mu\nu\rho} + \widehat{\mathcal{T}}^{\mu\nu\rho}. \quad (6.6)$$

O primeiro operador na equação acima possui sempre um número par de derivadas, enquanto que a segunda contribuição possui um número ímpar de derivadas contraídas aos coeficientes de controle.

Podemos verificar imediatamente as seguintes regras de dimensão de massa:

$$[\mathcal{K}^{(d)\mu\nu\rho\alpha_1 \dots \alpha_{(d)}}] = [m]^{3-d}, \quad (6.7a)$$

$$[\mathcal{T}^{(d)\mu\nu\rho\alpha_1 \dots \alpha_{(d)}}] = [m]^{3-d}. \quad (6.7b)$$

Em princípio, não impomos qualquer simetria sobre o tensor $\widehat{\mathcal{Q}}$. No entanto, precisamos investigar como a transformação de calibre muda a ação, aplicando a transformação $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$ na ação (6.3):

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \frac{\theta}{2} \int d^3x (A_\mu + \partial_\mu \omega) \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu (A_\rho + \partial_\rho \omega), \quad (6.8a)$$

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \frac{\theta}{2} \int d^3x (A_\mu + \partial_\mu \omega) \left(\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \omega \right), \quad (6.8b)$$

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \frac{\theta}{2} \int d^3x \left(A_\mu \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + \partial_\mu \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + A_\mu \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \omega + \partial_\mu \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \omega \right). \quad (6.8c)$$

Se consideramos que $\widehat{\mathcal{Q}}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, obtemos

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \frac{\theta}{2} \int d^3x A_\mu \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{2} \int d^3x \partial_\mu \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho, \quad (6.9)$$

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \mathcal{S}_{NCS} + \frac{\theta}{2} \int d^3x \partial_\mu \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \quad (6.10)$$

Adicionalmente, sabemos que

$$\partial_\mu \left(\omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \right) = \partial_\mu \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (6.11a)$$

Dessa forma

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \mathcal{S}_{NCS} + \frac{\theta}{2} \int d^3x \partial_\mu \left(\omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \right) - \frac{\theta}{2} \int d^3x \omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (6.12a)$$

Se impusermos agora que o operador $\widehat{\mathcal{Q}}$ seja antissimétrico também nos dois primeiros índices, então decorre $\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu A_\rho = 0$. Ademais sabemos que a segunda integral pode ser reescrita em termos de uma integral de superfície,

$$\mathcal{S}_{NCS} \rightarrow \mathcal{S}_{NCS} + \frac{\theta}{2} \oint dS_\mu \left(\omega \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \right).$$

Portanto, a transformação de calibre gera uma variação na ação por uma derivada total, como no caso usual de Chern-Simons. Notamos ainda que não impomos simetria sobre a troca do primeiro e do último índice. Porém, por consistência das duas simetrias já definidas, a única opção possível para o tensor $\widehat{\mathcal{Q}}$ é que seja também antissimétrico perante a troca desses índices, $\widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} = -\widehat{\mathcal{Q}}^{\rho\nu\mu}$. Desta forma, o tensor $\widehat{\mathcal{Q}}$ revela-se totalmente antissimétrico.

6.3 Equação de movimento

A equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\beta)} \right) + \partial_\gamma \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\sigma A_\beta)} \right) - \dots + (-1)^n \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} A_\beta)} \right) = 0, \quad (6.13)$$

Assim, a equação do movimento para a Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{NCS} = \frac{\theta}{2} A_\mu \widehat{\mathcal{Q}}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = \frac{\theta}{2} A_\mu \left(\widehat{\mathcal{K}}^{\mu\nu\rho} + \widehat{\mathcal{T}}^{\mu\nu\rho} \right) \partial_\nu A_\rho, \quad (6.14)$$

é obtida a seguir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NCS}}{\partial A_\beta} = \left(\widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho} + \widehat{\mathcal{T}}^{\beta\nu\rho} \right) \partial_\nu A_\rho, \quad (6.15a)$$

$$-\partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NCS}^{(d=3)}}{\partial (\partial_\sigma A_\beta)} \right) = -\partial_\sigma \left[A_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\beta)} \mathcal{K}^{(3)\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \right] = -\mathcal{K}^{(3)\mu\sigma\beta} \partial_\sigma A_\mu, \quad (6.15b)$$

$$\partial_\gamma \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NCS}^{(d=4)}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\sigma A_\beta)} \right) = \partial_\gamma \partial_\sigma \left[A_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\gamma \partial_\sigma A_\beta)} \mathcal{T}^{(4)\mu\nu\rho\alpha_1} \partial_{\alpha_1} \partial_\nu A_\rho \right] = \mathcal{T}^{(4)\mu\sigma\beta\gamma} \partial_\gamma \partial_\sigma A_\mu, \quad (6.15c)$$

⋮

Após alguns passos, obtemos

$$\frac{\theta}{2} \left(\widehat{\mathcal{T}}^{\beta\nu\rho} + \widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho} \right) \partial_\nu A_\rho - \frac{\theta}{2} \widehat{\mathcal{K}}^{\rho\nu\beta} \partial_\nu A_\rho + \frac{\theta}{2} \widehat{\mathcal{T}}^{\rho\nu\beta} \partial_\nu A_\rho = 0, \quad (6.16)$$

$$\frac{\theta}{2} \left(\widehat{\mathcal{T}}^{\beta\nu\rho} + \widehat{\mathcal{T}}^{\rho\nu\beta} \right) \partial_\nu A_\rho + \frac{\theta}{2} \left(\widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho} - \widehat{\mathcal{K}}^{\rho\nu\beta} \right) \partial_\nu A_\rho = 0. \quad (6.17)$$

Já que os operadores $\widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho}$ e $\widehat{\mathcal{T}}^{\beta\nu\rho}$ são totalmente antissimétricos, o resultado acima reduz-se a:

$$\frac{\theta}{2} \widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho} F_{\nu\rho} = 0. \quad (6.18)$$

Obsevamos que o operador $\widehat{\mathcal{T}}^{\beta\nu\rho}$ não contribui para as equações de movimento. Isto é um indício de que este operador pode ser reescrito na ação como uma derivada total. Podemos ainda reescrever a equação acima usando o seguinte resultado:

$$\widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho} \stackrel{!}{=} \varepsilon^{\beta\nu\rho} \widehat{\mathcal{K}}. \quad (6.19)$$

Dessa forma, podemos expressar o operador $\widehat{\mathcal{K}}$ como mostrado a seguir:

$$\widehat{\mathcal{K}} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \widehat{\mathcal{K}}^{\alpha\beta\gamma}. \quad (6.20)$$

Usando este resultado, a equação de movimento assume a forma:

$$\frac{\theta}{2} \varepsilon^{\beta\nu\rho} \widehat{\mathcal{K}} F_{\nu\rho} = 0, \quad (6.21)$$

que, por sua vez, possui uma estrutura similar àquela da teoria de Chern-Simons. Note que para $d = 3$, recuperamos a teoria de Chern-Simons. Vemos também que para $d = 5$ obtemos uma teoria tipo-Deser-Jackiw, isto é, uma teoria anisotrópica com duas derivadas adicionais. Ressaltamos ainda que o operador $\widehat{\mathcal{K}}$ possui a mesma estrutura que o operador \hat{k}_{AF} obtido recentemente na Ref. [126] via redução dimensional. Ambos os operadores foram obtidos via métodos diferentes e a técnica empregada aqui corrobora os resultados obtidos em [126].

6.4 Eletrodinâmica de Deser-Jackiw

A extensão derivativa de Chern-Simons foi proposta por Deser e Jackiw em 1999 [122]. Neste trabalho foi analisada a extensão derivativa de CS anexando à ação de Maxwell e o resultado obtido foi um par de excitações. Um não tem massa, que corresponde ao fóton padrão, e o outro é um modo massivo obtido a partir do termo com altas derivadas. Este último equivale um estado fantasma. Esse resultado foi decomposto tanto por meio do propagador quanto por meio da decomposição hamiltoniana.

O termo tipo Chern-Simons com altas derivadas inicialmente proposto por Deser-Jackiw [122], é dado por:

$$\frac{\vartheta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu \square A^\rho, \quad (6.22)$$

onde os campos A_μ possuem dimensão de massa igual a $1/2$. Assim, o termo completo, constitui uma estrutura com dimensão 3 (dimensão de massa), de modo que o parâmetro ϑ possui dimensão de massa igual a -1 , ou seja, $[\vartheta] = [m]^{-1}$. Logo o operador de campo tem dimensão de massa 4.

Outro aspecto importante a ser destacado diz respeito à natureza da nova extensão. Enquanto o termo CS tem uma origem topológica, o termo de Deser-Jackiw não é. Porém, como apontado na referencia [122], ele depende explicitamente da geometria do fundo.

O nosso intuito agora é analisar uma eletrodinâmica sem o termo de Maxwell por meio do cálculo do propagador e analisar a causalidade clássica através dos polos desse propagador. A princípio, vamos partir da Lagrangeana de CS com a extensão derivativa de CS.

6.4.1 Propagador planar de Chern-Simons com Deser-Jackiw sem Maxwell

Para calcular o propagador, devemos inserir na Lagrangeana um termo de fixação de calibre para eliminar a singularidade do operador. Assim, temos

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + \frac{\vartheta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu \square A^\rho + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.23)$$

ou na forma bilinear,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu \Lambda_{\nu\mu} A^\mu, \quad (6.24)$$

onde

$$\Lambda_{\nu\mu} = (k + \vartheta \square) \varepsilon_{\nu\rho\mu} \partial^\rho - \frac{1}{\xi} \square \Omega_{\nu\mu}, \quad (6.25)$$

em que aparecem 2 projetores, $\varepsilon_{\nu\rho\mu} \partial^\rho = L_{\nu\mu}$, $\Omega_{\nu\mu}$. No intuito de obter o propagador, propomos o *Ansatz* também composto por estes 2 projetores, mas a operação tensorial $L_{\nu\mu} L^\mu_\alpha$ produz o resultado $-\square \Theta_{\nu\alpha}$. Assim, o *Ansatz* deverá ser composto por 3 projetores, a saber:

$$\Delta^\mu_\alpha = a \Theta^\mu_\alpha + b L^\mu_\alpha + c \Omega^\mu_\alpha, \quad (6.26)$$

que satisfaz a identidade (5.72) e a álgebra fechada é dada pela Tabela 6.1.

	Θ^μ_α	L^μ_α	Ω^μ_α
$\Theta_{\nu\mu}$	$\Theta_{\nu\alpha}$	$L_{\nu\alpha}$	0
$\Omega_{\nu\mu}$	0	0	$\Omega_{\nu\alpha}$
$L_{\nu\mu}$	$L_{\nu\alpha}$	$-\square \Theta_{\nu\alpha}$	0

Tabela 6.1: Álgebra fechada

Assim, obtemos o propagador da teoria de Chern-Simons com Deser-Jackiw na forma:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 (k - \vartheta p^2)} \left[i \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi (k - \vartheta p^2) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (6.27)$$

em que os pólos do propagador fornece

$$p^2 (k - \vartheta p^2) = 0. \quad (6.28)$$

Podemos observar que a primeira relação de dispersão representa um fóton padrão, mesmo sem o termo dinâmico de Maxwell,

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2. \quad (6.29)$$

Já a segunda relação de dispersão

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{k}{\vartheta}, \quad (6.30)$$

obtida sem o termo de Maxwell, produz um termo semelhante com a relação de dispersão do modelo Maxwell-Deser-Jackiw (*D.11*), em que o segundo termo de ambas as relações, $\frac{k}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta^2} = m^2$, representam um termo de massa ao quadrado, como deveria ser. Ou seja, possuem a mesma estrutura. Assim, temos que o termo de altas derivadas de Deser-Jackiw tem dinâmica produzindo propagação.

Neste caso, a relação de dispersão fornece

$$p_0 = \sqrt{\frac{\vartheta \mathbf{p}^2 + k}{\vartheta}}, \quad (6.31)$$

que representa uma relação fisicamente aceitável.

Para análise da causalidade clássica vamos calcular a velocidade de grupo e velocidade de frente de onda,

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} \equiv \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad u_{\text{frente}} \equiv \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}, \quad (6.32)$$

respectivamente. Para a velocidade de grupo, temos

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\vartheta \mathbf{p}^2 + k}{\vartheta + \vartheta_1 V^{00}}}} \left(\frac{\vartheta \mathbf{p}}{\vartheta + \vartheta_1 V^{00}} \right), \quad (6.33)$$

cujo o módulo tem a forma

$$u_{\text{gr}} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \frac{k}{\vartheta}}} |\mathbf{p}|. \quad (6.34)$$

Para a velocidade de frente de onda, obtemos

$$u_{\text{frente}} = 1, \quad (6.35)$$

que é um resultado compatível com a causalidade clássica. O gráfico da velocidade de grupo é apresentado pela Figura 6.1 a seguir:

De acordo com o gráfico podemos concluir que o módulo da velocidade de grupo é sempre menor que 1. Logo, a causalidade clássica é assegurada para a teoria de Chern-Simons com Deser-Jackiw.

Agora vamos acoplar a esta teoria um campo de fundo e analisar os modos de propagação.

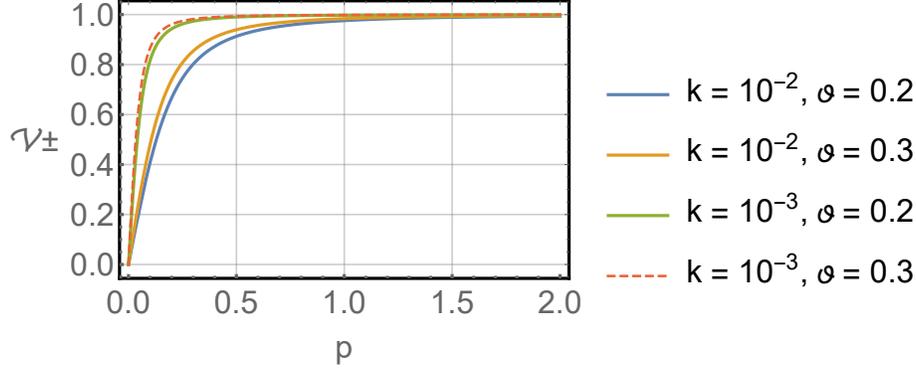


Figura 6.1: Comportamento do módulo da velocidade de grupo

6.5 Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons modificada por termo CPT-ímpar de altas derivadas

Supondo a existência de um campo tensorial de fundo, surgem outras alternativas (invariantes de calibre) para a estrutura tipo Chern-Simons com altas derivadas. Portanto, a única forma para montar um termo tipo Chern-Simons com altas derivadas e violação de Lorentz, que seja invariante de gauge, é:

$$\frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \widehat{V}^\nu \partial^\rho A^\rho, \quad (6.36)$$

onde obrigatoriamente o campo de fundo, \widehat{V} , deve ter a forma

$$\widehat{\mathcal{K}} \equiv \widehat{V} = \sum_{d=\text{ímpar}} V^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (6.37)$$

de acordo com o estudo feito na seção anterior.

Observando a equação (6.20), vemos que o novo operador $\widehat{\mathcal{K}}$ possui agora um número par de índices que estão contraídos com as 4-derivadas. Dessa forma, a parametrização (6.37) acima leva essa propriedade em consideração.

Para uma análise mais simples consideramos duas derivadas adicionais, em que o operador de altas derivadas é estruturado em termos de um tensor de fundo de rank-2, $V^{\alpha_1 \alpha_2}$, na forma

$$\widehat{V}^{(5)} = V^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = -V^{\alpha_1 \alpha_2} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}. \quad (6.38)$$

É importante situar o operador (6.38) dentro do operador de altas derivadas (6.4a). Considerando a ação (6.3), tomando o termo com duas derivadas adicionais, que equivale a $d=5$ na forma geral da série apresentada na seção anterior, escrevemos:

$$\widehat{\mathcal{K}}^{(5)\mu\nu\rho} = \mathcal{K}^{\mu\nu\rho\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2}, \quad (6.39)$$

onde o coeficiente não-mínimo de rank-5, $\mathcal{K}^{\mu\nu\rho\alpha_1\alpha_2}$, agora tem a forma

$$\mathcal{K}^{\mu\nu\rho\alpha_1\alpha_2} = \varepsilon^{\mu\nu\rho} V^{\alpha_1 \alpha_2}, \quad (6.40)$$

assim, escrevemos

$$\widehat{\mathcal{K}}^{(5)\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho} V^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \varepsilon^{\mu\nu\rho} \widehat{V}^{(5)}. \quad (6.41)$$

Logo o termo mais simples para trabalhar CS com altas derivadas e violação da simetria de Lorentz é:

$$\mathcal{L}_{NCS} = \frac{\vartheta_1}{2} A_\mu \left(\widehat{\mathcal{K}}^{\beta\nu\rho} \right) \partial_\nu A_\rho = \frac{\vartheta_1}{2} A_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho} V^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \partial_\nu A_\rho, \quad (6.42)$$

onde ϑ_1 tem dimensão de massa 1, o coeficiente não mínimo, $V^{\alpha_1\alpha_2}$, tem dimensão de massa $[m]^{-2}$ e $\widehat{\mathcal{K}}^{(5)\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho} \widehat{V}^{(5)}$ é adimensional.

Assim, com o termo (6.42) podemos montar uma Lagrangiana tipo Chern-Simons em altas derivadas com violação de Lorentz e invariante de gauge na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\alpha_1} \partial_{\alpha_1} \partial_\lambda) \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.43)$$

em que o termo $\frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\alpha_1} \partial_{\alpha_1} \partial_\lambda) \partial^\nu A^\rho$ tem dimensão de massa 3, como deveria ser, para que a ação seja adimensional.

Para efeito de análise mais geral, podemos considerar uma eletrodinâmica tipo Chern-Simons com os termos de dimensão-4, $A^\mu \partial^\nu \square A^\rho$ e $A^\mu \partial_\lambda \partial_\beta \partial^\nu A^\rho$. O primeiro termo dá origem ao termo de Deser-Jackiw enquanto o segundo irá acoplar-se ao campo de fundo violador da simetria de Lorentz. Neste caso, escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\varkappa}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{k}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + \frac{\vartheta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu \square A^\rho + \frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\beta} \partial_\lambda \partial_\beta) \partial^\nu A^\rho \\ & + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \end{aligned} \quad (6.44)$$

onde o parâmetro \varkappa foi introduzido como uma espécie de constante dielétrica da teoria. Para $\varkappa = 1$, temos o termo usual de Maxwell no vácuo.

Para analisar melhor as implicações da Lagrangiana acima sobre os modos propagantes associados, vamos calcular o propagador do campo de calibre, cujos polos fornecem as relações de dispersão da teoria. A lagrangeana pode então ser reescrita na forma bilinear,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu \Xi_{\nu\mu} A^\mu, \quad (6.45)$$

onde

$$\Xi_{\nu\mu} = \varkappa \square \Theta_{\nu\mu} + k \varepsilon_{\nu\rho\mu} \partial^\rho + \vartheta \varepsilon_{\nu\rho\mu} \partial^\rho \square + \vartheta_1 \varepsilon_{\nu\rho\mu} (V^{\lambda\beta} \partial_\lambda \partial_\beta) \partial^\rho - \frac{1}{\xi} \square \Omega_{\nu\mu}, \quad (6.46)$$

que pode também ser lido na forma,

$$\Xi_{\nu\mu} = \varkappa \square \Theta_{\nu\mu} + \left(k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V} \right) L_{\nu\mu} - \frac{1}{\xi} \square \Omega_{\nu\mu}, \quad (6.47)$$

se usamos o projetor

$$L_{\nu\mu} = \epsilon_{\nu\sigma\mu} \partial^\sigma = -L_{\mu\nu}. \quad (6.48)$$

Logo, na forma quadrática (6.45) aparecem 3 projetores, $\Theta_{\nu\mu}, L_{\nu\mu}, \Omega_{\nu\mu}$. No intuito de obter o propagador, propomos o *Ansatz* também composto por estes 3 projetores,

$$\Delta^\mu{}_\alpha = a\Theta^\mu{}_\alpha + bL^\mu{}_\alpha + c\Omega^\mu{}_\alpha, \quad (6.49)$$

que satisfaz a identidade

$$\Xi_{\nu\mu}\Delta^\mu{}_\alpha = g_{\nu\alpha}. \quad (6.50)$$

Os 3 operadores contidos na Lagrangeana forma uma álgebra fechada, mostrada na Tabela 6.1.

As contrações tensoriais apresentadas permite reescrever a identidade (5.72) na forma,

$$\varkappa a \square \Theta_{\nu\alpha} + b \varkappa \square L_{\nu\alpha} + \left(k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V} \right) (a L_{\nu\alpha} - b \square \Theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{\xi} c \square \Omega_{\nu\alpha} = \Theta_{\nu\alpha} + \Omega_{\nu\alpha}, \quad (6.51)$$

que permite obter um sistema de 3 equações:

$$a \varkappa \square - b \left(k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V} \right) \square = 1, \quad (6.52)$$

$$b \varkappa \square + a \left(k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V} \right) = 0, \quad \frac{1}{\xi} \square c = 1, \quad (6.53)$$

cuja solução fornece as seguintes expressões para as constantes a, b, c :

$$a = \frac{\varkappa}{\Xi}, \quad b = -\frac{k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V}}{\square \Xi}, \quad c = -\frac{\xi}{\square}, \quad (6.54)$$

com

$$\Xi = \left[\varkappa^2 \square + \left(k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V} \right)^2 \right]. \quad (6.55)$$

Desta forma, o operador inverso é obtido,

$$\Delta_{\mu\alpha} = \frac{1}{\square \Xi} \left[\varkappa \square \Theta_{\mu\alpha} - \left(k + \vartheta \square + \vartheta_1 \widehat{V} \right) L_{\mu\alpha} - \xi \Xi \Omega_{\mu\alpha} \right]. \quad (6.56)$$

Sabendo que o propagador de Feynman do campo de calibre é definido como

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = i \Delta_{\mu\alpha}(x - y), \quad (6.57)$$

no espaço dos momentos escrevemos:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 F(p)} \left[\varkappa p^2 \Theta_{\mu\alpha}(p) + i \left(-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \right) \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi F(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (6.58)$$

onde

$$F(p) = \varkappa^2 p^2 - \left(k - \vartheta p^2 - \vartheta_1 V^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \right)^2, \quad (6.59)$$

$$L_{\nu\alpha}(p) = -i \epsilon_{\nu\sigma\alpha} p^\sigma, \quad V = V^{\lambda\beta} \partial_\lambda \partial_\beta = -V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta. \quad (6.60)$$

A relação de dispersão da teoria representada pela Lagrangiana (6.44) pode ser extraída dos pólos do propagador (6.58), a saber:

$$\varkappa^2 p^2 - \left(-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta \right)^2 = 0. \quad (6.61)$$

Para obter informações sobre os modos propagantes, é necessário analisar a relação de dispersão (6.61) para algumas configurações tensor $V^{\alpha\beta}$. É também oportuno ressaltar que a Lagrangiana (6.44) congrega algumas opções de teorias planares que podem ser examinadas com mais cuidado. A seguir explicitamos algumas dessas opções:

- Se $\varkappa = 0$, $k \neq 0$, $\vartheta \neq 0$, $\vartheta_1 \neq 0$, temos uma eletrodinâmica planar de Chern-Simons, com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas e sem termo de Maxwell.
- Se $\varkappa \neq 0$, $k \neq 0$, $\vartheta \neq 0$, $\vartheta_1 \neq 0$, temos uma eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas.
- Se $\varkappa \neq 0$, $k = 0$, $\vartheta \neq 0$, $\vartheta_1 \neq 0$, temos uma eletrodinâmica planar de Maxwell com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas.

No Apêndice D vamos mostrar algumas propostas destas Lagrangeanas planares. A seguir vamos analisar uma proposta sem o termo de Maxwell.

6.6 Eletrodinâmica planar de Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas

Partindo da expressão (6.44) e escolhendo $\varkappa = 0$, $k \neq 0$, $\vartheta \neq 0$, $\vartheta_1 \neq 0$, temos uma eletrodinâmica planar de Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas (e sem termo de Maxwell), dada pela seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + \frac{\vartheta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu \square A^\rho + \frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\beta} \partial_\lambda \partial_\beta) \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.62)$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho (\square\vartheta + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} \partial_\lambda \partial_\beta) + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.63)$$

vemos que $V^{\lambda\beta} \propto g^{\lambda\beta}$ produz o termo de Deser-Jackiw. O propagador é obtido por adaptação direta da expressão (6.58),

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 F_1(p)} \left[i (-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta) \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi F_1(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (6.64)$$

com

$$F_1(p) = -(-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta)^2. \quad (6.65)$$

Para a Lagrangiana (6.44), a relação de dispersão é

$$\vartheta p^2 - k + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta = 0. \quad (6.66)$$

Podemos verificar que, se fizermos $k = \vartheta_1 = 0$, a relação de dispersão gerada pelo termo de Deser-Jackiw reproduz a relação de dispersão usual de Maxwell.

O tensor $V^{\alpha\beta}$ tem três tipos de componentes, V^{00}, V^{0i}, V^{ij} , sendo V^{00} chamada de componente temporal-isotrópica. Desta forma, a relação (6.44) é escrita como:

$$\vartheta p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1(V^{00}p_0^2 + V^{0i}p_0p_i + V^{ij}p_ip_j) - k = 0, \quad (6.67)$$

$$(\vartheta + \vartheta_1V^{00})p_0^2 - \vartheta_1V^{0i}p^ip_0 + (\vartheta_1V^{ij}p_ip_j - \vartheta \mathbf{p}^2 - k) = 0, \quad (6.68)$$

cuja solução é

$$p_0 = \frac{1}{2(\vartheta + \vartheta_1V^{00})} \left[\vartheta_1V^{0i}p^i \pm \sqrt{\Delta} \right], \quad (6.69)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= (\vartheta_1V^{0i}p^i)^2 - 4(\vartheta + \vartheta_1V^{00})(\vartheta_1V^{ij}p_ip_j - \vartheta \mathbf{p}^2 - k), \\ \Delta &= (\vartheta_1V^{0i}p^i)^2 + 4(\vartheta + \vartheta_1V^{00})[\vartheta \mathbf{p}^2 + k - \vartheta_1V^{ij}p_ip_j]. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Para analisar melhor vamos considerar as componentes individuais.

Configuração isotrópica-temporal: $V^{00} \neq 0, V^{0i} = V^{ij} = 0$.

Neste caso, a relação de dispersão é

$$p_0 = \frac{1}{2(\vartheta + \vartheta_1V^{00})} \sqrt{4(\vartheta + \vartheta_1V^{00})[\vartheta \mathbf{p}^2 + k]}, \quad (6.71)$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{\vartheta \mathbf{p}^2 + k}{\vartheta + \vartheta_1V^{00}}}, \quad (6.72)$$

que representa uma relação fisicamente aceitável.

Para análise da causalidade vamos calcular a velocidade de grupo e velocidade de frente de onda,

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} \equiv \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad u_{\text{frente}} \equiv \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}, \quad (6.73)$$

respectivamente. Para a velocidade de grupo, temos

$$\mathbf{u}_{\text{gr}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\vartheta \mathbf{p}^2 + k}{\vartheta + \vartheta_1V^{00}}}} \left(\frac{\vartheta \mathbf{p}}{\vartheta + \vartheta_1V^{00}} \right), \quad (6.74)$$

cujo o módulo tem a forma

$$u_{\text{gr}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\vartheta |\mathbf{p}|^2 + k}{\vartheta + \vartheta_1V^{00}}}} \left(\frac{\vartheta |\mathbf{p}|}{\vartheta + \vartheta_1V^{00}} \right).$$

Para a velocidade de frente de onda, temos

$$u_{\text{frente}} = \sqrt{\frac{\vartheta}{\vartheta + \vartheta_1V^{00}}} < 1. \quad (6.75)$$

O gráfico da velocidade de grupo é apresentado pela Figura 6.2 a seguir:

De acordo com o gráfico podemos concluir que o módulo da velocidade de grupo é sempre menor que 1. Logo, para a configuração isotrópica-temporal a causalidade é assegurada.

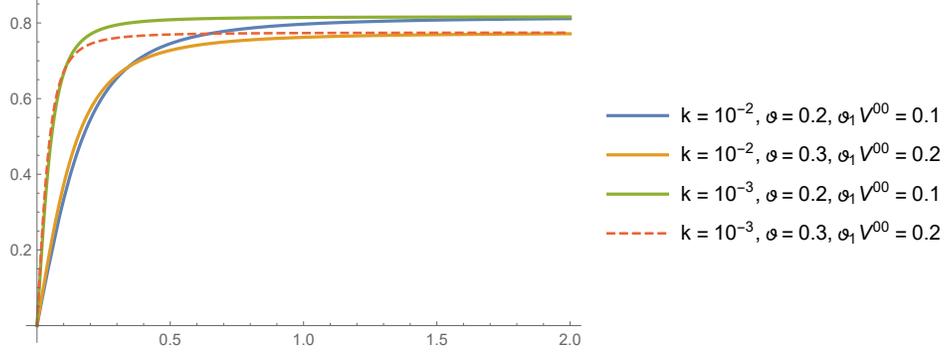


Figura 6.2: Velocidade de grupo para a configuração isotrópica

Configuração anisotrópica-temporal: $V^{00} = 0, V^{0i} \neq 0, V^{ij} = 0$.

Neste caso, a relação de dispersão é

$$p_0 = \frac{1}{2\vartheta} \left[\vartheta_1 V^{0i} p^i \pm \sqrt{(\vartheta_1 V^{0i} p^i)^2 + 4\vartheta [\vartheta \mathbf{p}^2 + k]} \right]. \quad (6.76)$$

Para o módulo da velocidade de grupo, temos

$$u_{\text{gr}} = \frac{1}{2\vartheta} \sqrt{\frac{(\vartheta_1 V^{0j})^2 \pm \frac{(2\vartheta_1^3 V^{0i} p^i (V^{0j})^2 + 8\vartheta^2 \vartheta_1 V^{0j} p^j)}{\sqrt{\vartheta_1^2 (V^{0i} p^i)^2 + 4\vartheta [\vartheta |\mathbf{p}|^2 + k]}}}{\vartheta_1^2 (V^{0i} p^i)^2 + 4\vartheta [\vartheta |\mathbf{p}|^2 + k]} + \frac{(\vartheta_1^2 V^{0i} p^i (V^{0j})^2 + 8\vartheta^2 V^{0j} p^j) \vartheta_1^2 V^{0i} p^i + 16\vartheta^4 |\mathbf{p}|^2}{\vartheta_1^2 (V^{0i} p^i)^2 + 4\vartheta [\vartheta |\mathbf{p}|^2 + k]}}$$

Podemos fazer a seguinte definição $V^{0i} = C^i$, assim, podemos escrever

$$u_{\text{gr}} = \frac{1}{2\vartheta} \sqrt{\frac{\vartheta_1^2 (8\vartheta^2 - \vartheta_1^2 \mathbf{C}^2) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + 16\vartheta^4 |\mathbf{p}|^2}{\vartheta_1^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\vartheta [\vartheta \mathbf{p}^2 + k]} - \vartheta_1^2 \mathbf{C}^2 \pm \frac{2\vartheta_1 (\vartheta_1^2 \mathbf{C}^2 - 4\vartheta^2) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})}{\sqrt{\vartheta_1^2 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\vartheta [\vartheta \mathbf{p}^2 + k]}}}, \quad (6.77)$$

ou na forma

$$u_{\text{gr}} = \frac{1}{2\vartheta} \sqrt{\frac{\vartheta_1^2 (8\vartheta^2 - \vartheta_1^2 \mathbf{C}^2) |\mathbf{C}|^2 \cos^2 \theta + 16\vartheta^4}{\vartheta_1^2 |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \theta + 4\vartheta [\vartheta \mathbf{p}^2 + k]} |\mathbf{p}|^2 - \vartheta_1^2 \mathbf{C}^2 \pm \frac{2\vartheta_1 (\vartheta_1^2 \mathbf{C}^2 - 4\vartheta^2) |\mathbf{C}| |\mathbf{p}| \cos \theta}{\sqrt{\vartheta_1^2 |\mathbf{C}|^2 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \theta + 4\vartheta [\vartheta \mathbf{p}^2 + k]}}}, \quad (6.78)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{C} e \mathbf{p}

$$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{C}| |\mathbf{p}| \cos \theta.$$

Para a velocidade de frente de onda

$$\frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{2\vartheta} \left[-\vartheta_1 |\mathbf{C}| \cos \theta \pm \sqrt{(\vartheta_1 |\mathbf{C}| \cos \theta)^2 + 4\vartheta \left[\vartheta + \frac{k}{|\mathbf{p}|^2} \right]} \right], \quad (6.79)$$

apenas o modo positivo é físico e será analisado. Logo, obtemos:

$$u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{2\vartheta} \left[\sqrt{\vartheta_1^2 |\mathbf{C}|^2 \cos^2 \theta + 4\vartheta^2} - \vartheta_1 |\mathbf{C}| \cos \theta \right]. \quad (6.80)$$

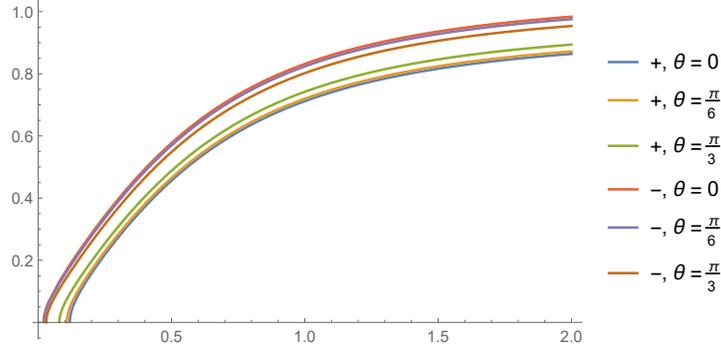


Figura 6.3: Velocidade de grupo para a configuração anisotrópica-temporal

O comportamento para o módulo da velocidade de grupo é mostrado na Figura 6.3.

De acordo com a Figura 6.2, para os valores apresentados, o módulo da velocidade de grupo é sempre ≤ 1 , mas a velocidade de frente de onda pode ser maior que 1, violando a causalidade.

Configuração anisotrópica-espacial: $V^{00} = 0, V^{0i} = 0, V^{ij} \neq 0$.

Neste caso, a relação de dispersão

$$p_0 = \sqrt{\frac{\vartheta \mathbf{p}^2 + k - \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j}{\vartheta}}. \quad (6.81)$$

A velocidade de grupo é dada por:

$$u_{\text{gr}}^k = \frac{(p^k - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{kj} p_j)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{k}{\vartheta} - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{ij} p_i p_j}}, \quad (6.82)$$

cujo o módulo tem a forma:

$$u_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 - 2\frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{kj} p_k p_j + \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^2 V^{kj} p_j V^{kl} p_l}{|\mathbf{p}|^2 + \frac{k}{\vartheta} - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{ij} p_i p_j}}$$

ou na forma

$$u_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 + \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{kl} p_l - 2p_k\right) \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{kj} p_j}{|\mathbf{p}|^2 + \frac{k}{\vartheta} - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{ij} p_i p_j}}. \quad (6.83)$$

Para a velocidade de frente de onda

$$u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\vartheta \mathbf{p}^2 + k - \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j}{\vartheta \mathbf{p}^2}},$$

temos

$$u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{k}{\vartheta \mathbf{p}^2} - \frac{\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j}{\vartheta \mathbf{p}^2}}. \quad (6.84)$$

Para prosseguirmos temos que parametrizar o campo de fundo V^{ij} em função de 2 vetores, D^i e F^j , na forma:

$$V^{ij} = \frac{1}{2} (D^i F^j + D^j F^i). \quad (6.85)$$

Assim a velocidade de frente de onda tem a forma

$$u_{\text{frente}} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{k}{\vartheta \mathbf{p}^2} - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) \frac{\vartheta_1}{\vartheta \mathbf{p}^2}}, \quad (6.86)$$

fazendo

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{D}| |\mathbf{p}| \cos \alpha,$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) = |\mathbf{F}| |\mathbf{p}| \cos \beta,$$

obtemos a velocidade de frente de onda na forma

$$u_{\text{frente}} = \sqrt{1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} |\mathbf{D}| |\mathbf{F}| \cos \alpha \cos \beta}. \quad (6.87)$$

Podemos observar que se os vetores \mathbf{D} e \mathbf{F} forem paralelos a velocidade de frente de onda será menor do que 1. Caso contrário, se os vetores forem anti-paralelos a velocidade de frente de onda será maior que 1, violando a causalidade clássica.

Para o módulo da velocidade de grupo, temos:

$$u_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} 2 (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) + \left(\frac{\vartheta_1}{2\vartheta}\right)^2 [-\mathbf{D}^2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{p})^2 - 2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{F}^2]}{|\mathbf{p}|^2 + \frac{k}{\vartheta} - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{p})}}, \quad (6.88)$$

ou em função dos ângulos α e β ,

$$u_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 - \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta^2} |\mathbf{D}|^2 |\mathbf{F}|^2 |\mathbf{p}|^2 [\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha] - \left(\frac{\vartheta_1}{2\vartheta} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}) + 2\right) \frac{\vartheta_1}{\vartheta} |\mathbf{D}| |\mathbf{F}| |\mathbf{p}|^2 \cos \alpha \cos \beta}{|\mathbf{p}|^2 + \frac{k}{\vartheta} - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} |\mathbf{D}| |\mathbf{F}| |\mathbf{p}|^2 \cos \alpha \cos \beta}}. \quad (6.89)$$

O comportamento para o módulo da velocidade de grupo é ilustrado na Figura 6.4.

De acordo com o gráfico, vemos que para os ângulos $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, linha fina contínua, o módulo da velocidade de grupo é maior do que 1, ou seja, quando os vetores forem anti-paralelos a causalidade clássica é violada.

Assim concluímos que a relação de dispersão (6.72) corresponde a modo propagante, cuja dinâmica advém da presença dos termos de altas derivadas e a causalidade é assegurada. As relações (6.81)e (6.76) exibem um radicando que não é positivo definido, de modo que podem exibir instabilidades para determinados valores dos parâmetros envolvidos. Neste cenário, vale observar o contraponto em relação à Lagrangiana pura de Chern-Simons, $k \neq 0$, $\vartheta = 0$, $\vartheta_1 = 0$, que não possui modos propagantes.

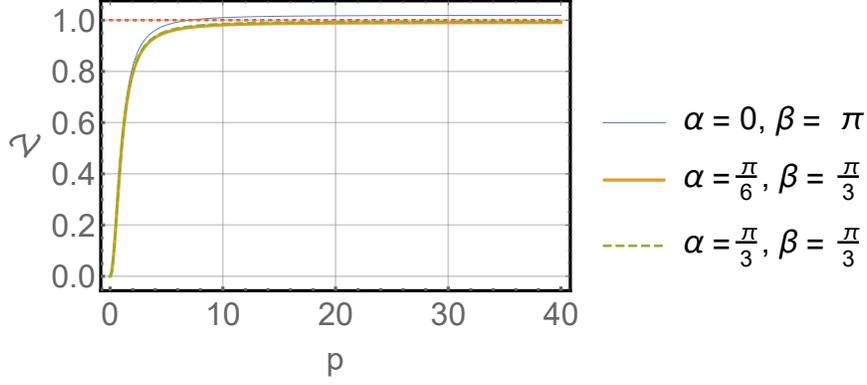


Figura 6.4: Velocidade de grupo para a configuração anisotrópica

6.7 Equações de movimento

Para as equações de movimento vamos partir da Lagrangiana (D.26) em que examinamos um modelo na ausência do termo de Chern-Simons padrão, dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu\Box A^\rho + \frac{\vartheta_1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu(V^{\lambda\beta}\partial_\lambda\partial_\beta)\partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (6.90)$$

Através da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} + \partial_\alpha\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} - \partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} = 0, \quad (6.91)$$

obtemos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -J^\kappa, \quad \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\kappa)} = -\partial_\rho F^{\rho\kappa}, \quad (6.92)$$

$$\partial_\alpha\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} = 0, \quad \partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\rho\partial_\alpha A_\kappa)} = -\vartheta L^{\beta\kappa}\Box A_\beta - \vartheta_1 L^{\beta\kappa}(V_{\alpha\sigma}\partial^\sigma\partial^\alpha)A_\beta. \quad (6.93)$$

Assim, a equação de movimento, na ausência de fontes, assume a forma:

$$\partial_\rho F^{\rho\kappa} + \vartheta L^{\beta\kappa}\Box A_\beta + \vartheta_1 L^{\kappa\varrho}(V_{\beta\sigma}\partial^\sigma\partial^\beta)A_\varrho = 0, \quad (6.94)$$

onde

$$L_{\nu\mu} = \varepsilon_{\nu\lambda\mu}\partial^\lambda = -L_{\mu\nu}.$$

Para obtermos uma expressão para a Lei de Ampère modificada fazamos: $\kappa \rightarrow i$ e $\rho, \varrho \rightarrow 0, j$ na expressão (6.94), obtemos

$$-\partial_t E^i + \partial_j \epsilon^{ji} b - \vartheta \Box E^j - \vartheta_1 (V_{\beta\sigma} \partial^\sigma \partial^\beta) E^j = 0. \quad (6.95)$$

Para a Lei de Gauss, fazamos: $\kappa \rightarrow 0$ e $\rho, \varrho \rightarrow i$ e j , logo

$$\partial_i E^i = \vartheta \Box \partial_j A_i + \vartheta_1 (V_{\beta\sigma} \partial^\sigma \partial^\beta) \partial_j A_i, \quad (6.96)$$

ou na forma

$$\begin{aligned}\partial_i E^i + \frac{1}{2}\vartheta\Box F_{ij} + \frac{1}{2}\vartheta_1 (V_{\beta\sigma}\partial^\sigma\partial^\beta) F_{ij} &= 0, \\ \partial_i E^i &= \frac{1}{2}\vartheta\Box\epsilon_{ij}b + \frac{1}{2}\vartheta_1 (V_{\beta\sigma}\partial^\sigma\partial^\beta) \epsilon_{ij}b.\end{aligned}\quad (6.97)$$

Assim, obtemos as duas equações de Maxwell não homogêneas, modificadas pelo termo de Deser-Jackiw com VL, na forma:

$$-\partial_t\mathbf{E} + \partial_j\epsilon^{ji}b - \vartheta\Box\mathbf{E} - \vartheta_1\hat{V}\mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (6.98)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2}\vartheta\Box\epsilon_{ij}b - \frac{1}{2}\vartheta_1\hat{V}\epsilon_{ij}b = \rho, \quad (6.99)$$

onde foi usado

$$F_{ij} = -\epsilon_{ij}b, \quad F^{0i} = -E^i, \quad (6.100)$$

$$\hat{V} = V_{\beta\sigma}\partial^\sigma\partial^\beta. \quad (6.101)$$

As equações de Maxwell homogêneas advêm da identidade de Bianchi e não são modificadas pelo campo de fundo.

Partindo da equação de movimento e usando o gauge de Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, a equação de onda, no espaço dos momentos, é dada por:

$$[-p^2 g^{\kappa\alpha} + i\epsilon^{\kappa\lambda\alpha} p_\lambda (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2)] A_\alpha = J^\kappa(p), \quad (6.102)$$

$$\Lambda^{\kappa\alpha} A_\alpha(p) = j^\kappa(p),$$

onde

$$\Lambda^{\kappa\alpha} = -p^2 g^{\kappa\alpha} + i\epsilon^{\kappa\lambda\alpha} p_\lambda (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2). \quad (6.103)$$

Para solucionar A_α , temos que inverter o operador $\Lambda^{\kappa\alpha}$. A solução é dada por:

$$A_\alpha(p) = (\Lambda^{\kappa\alpha})^{-1} J^\kappa(p), \quad (6.104)$$

ou na forma

$$A_\alpha(p) = G_{\alpha\kappa} J^\kappa(p) \quad (6.105)$$

que satisfaz a identidade

$$\Lambda^{\kappa\alpha} G_{\alpha\mu} = \delta_{\mu}^{\kappa}.$$

A função de Green, em 1+2 dimensões, em função do operador inverso, $(\Lambda^{\kappa\alpha})^{-1}$, tem a forma:

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} (\Lambda_{\kappa\alpha})^{-1}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (6.106)$$

Propondo o *Ansatz*

$$G_{\alpha\mu} = ag_{\alpha\mu} - ib\epsilon_{\alpha\lambda\mu} p^\lambda, \quad (6.107)$$

temos

$$[-p^2 g^{\kappa\alpha} + i\epsilon^{\kappa\lambda\alpha} p_\lambda (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2)] [a g_{\alpha\mu} - ib\epsilon_{\alpha\vartheta\mu} p^\vartheta] = \delta_\mu^\kappa. \quad (6.108)$$

Resolvendo as contrações tensoriais, obtemos:

$$-ap^2 \delta_\mu^\kappa + ibp^2 \epsilon_{\lambda\mu}^\kappa p^\lambda + ia\epsilon_{\lambda\mu}^\kappa p^\lambda (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2) + bp^2 (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2) (\delta_\mu^\kappa - \Omega_\mu^\kappa) = \delta_\mu^\kappa. \quad (6.109)$$

Podemos observar que aparece o projetor Ω_μ^κ , logo temos que incluí-lo no *Ansatz* e inverter novamente

$$[-p^2 g^{\kappa\alpha} + i\epsilon^{\kappa\lambda\alpha} p_\lambda (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2)] [a g_{\alpha\mu} - ib\epsilon_{\alpha\vartheta\mu} p^\vartheta + c\Omega_{\alpha\mu}] = \delta_\mu^\kappa. \quad (6.110)$$

Após realizar as contrações tensoriais novamente, encontramos o sistema de equações a seguir:

$$-ap^2 \delta_\mu^\kappa + ibp^2 \epsilon_{\lambda\mu}^\kappa p^\lambda - cp^2 \Omega_\mu^\kappa + ia\epsilon_{\lambda\mu}^\kappa p^\lambda (\vartheta_1 V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta + \vartheta p^2) + bp^2 \vartheta_1 (V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta) (\delta_\mu^\kappa - \Omega_\mu^\kappa) = \delta_\mu^\kappa. \quad (6.111)$$

Resolvendo o sistema acima, escrevemos os valores para os coeficientes a , b , c , na forma:

$$a = -\frac{1}{p^2 + (\vartheta_1 \hat{V} + \vartheta p^2)^2}, \quad (6.112)$$

$$b = -\frac{\vartheta_1 \hat{V} + \vartheta p^2}{p^2 \left[p^2 + (\vartheta_1 \hat{V} + \vartheta p^2)^2 \right]}, \quad c = -\frac{(\vartheta_1 \hat{V} + \vartheta p^2)^2}{p^2 \left[p^2 + (\vartheta_1 \hat{V} + \vartheta p^2)^2 \right]}, \quad (6.113)$$

onde

$$\hat{V} = V_{\beta\sigma} p^\sigma p^\beta. \quad (6.114)$$

Expandindo e considerando apenas a primeira ordem do background, os coeficientes a , b assumem a forma:

$$a = -\frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{\vartheta_1^2 \hat{V}^2}{p^2} \right)^{-1} = -\frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{\vartheta_1^2 \hat{V}^2}{p^2} \right) \approx -\frac{1}{p^2}, \quad (6.115)$$

$$b = -\frac{\vartheta_1 \hat{V}}{p^4 \left[1 + \frac{\vartheta_1^2 \hat{V}^2}{p^2} \right]} = -\frac{\vartheta_1 \hat{V}}{p^4} \left(1 + \frac{\vartheta_1^2 \hat{V}^2}{p^2} \right)^{-1} \approx -\frac{\vartheta_1 \hat{V}}{p^4}. \quad (6.116)$$

Assim, a expressão para o operador $G_{\alpha\mu}$ tem a forma

$$G_{\alpha\mu} = -\frac{1}{p^2} \left[g_{\alpha\mu} + i\frac{\vartheta_1}{p^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu} p^\beta (V_{\lambda\sigma} p^\sigma p^\lambda) \right]. \quad (6.117)$$

Substituindo a expressão acima na Eq. (6.105), obtemos a expressão para o 4-potencial,

$$A_\alpha = -\frac{1}{p^2} \left[J_\alpha + i\frac{\vartheta_1}{p^2} \epsilon_{\alpha\beta\kappa} p^\beta (V_{\lambda\sigma} p^\sigma p^\lambda) J^\kappa \right]. \quad (6.118)$$

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho fizemos um estudo do setor de *gauge*, CPT-par e CPT-ímpar, do Modelo Padrão Estendido não mínimo. No capítulo 2, mostramos a eletrodinâmica de Podolsky, analisamos a teoria, calculamos o propagador e analisamos as relações de dispersão e os modos de propagação.

No capítulo 3, abordamos uma eletrodinâmica dotada de termos com violação de Lorentz, de dimensão de massa 6. Consideramos aspectos como a avaliação do propagador, as relações de dispersão e os modos de propagação. Primeiro, uma eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo anisotrópico do tipo Podolsky de dimensão de massa 6 foi examinado. Para certas escolhas de parâmetro, todos os modos, que advém do termo com derivada superior, exibem um comportamento não físico. O módulo da velocidade de grupo pode ser maior que 1, violando a causalidade clássica, pode ter singularidades ou desaparecer para pequenos momentos, ou seja, ausência de propagação. Os dois primeiros comportamentos descritos são interpretados como não físicos e nos referimos às relações de dispersão com essas características como espúrias. Características tais como a diminuição das velocidades de grupo e frente de onda, para pequenos momentos, indicam que esses modos se desvinculam do regime de baixa energia. De acordo com os critérios utilizados neste trabalho, um modo dotado de tais propriedades foi denominado exótico, desde que não envolvesse singularidades, nem velocidades superluminais.

Os resultados obtidos indicam que uma eletrodinâmica modificada por este tipo de termo com violação de Lorentz e derivadas superiores pode fornecer uma propagação de sinais fisicamente aceitável apenas no limite para grandes momentos. Tal interpretação poderia recuperar um comportamento significativo da teoria no caso de ser possível estabelecer um corte adequado. Para pequenos momentos, alguns dos modos correspondem a modificações que violam a simetria de Lorentz da relação de dispersão do tipo Podolsky, que não são necessariamente não físicas. Também encontramos relações de dispersão fornecendo velocidades de grupo maiores que 1 ou divergentes em alguns pontos, que são comportamentos que caracterizam modos de propagação espúrios. Fizemos uma breve discussão sobre a unitariedade para a Lagrangiana modificada e verificamos que o resultado da nossa análise foi que as derivadas de tempo adicionais na densidade de Lagrange provavelmente prejudicam a unitariedade. Este comportamento

é esperado e já foi observado em teorias de derivadas superiores invariantes de Lorentz, bem como modificações alternativas de derivadas superiores com violação de Lorentz do setor de fótons e férmions.

No capítulo 4, analisamos uma extensão mais geral da eletrodinâmica modificada na presença de um termo adicional Lee-Wick anisotrópico de dimensão de massa 6. Novamente, o propagador foi calculado e as relações de dispersão correspondentes foram obtidas a partir dele. Posteriormente, essas relações de dispersão foram examinadas no que diz respeito à propagação de sinais. A estrutura desse segundo modelo é mais envolvente em comparação com a primeira teoria em consideração. As relações de dispersão modificadas estão associadas a modos exóticos e espúrios, como foi observado no primeiro modelo. Existem opções de parâmetros que estão conectadas a questões de causalidade. Outra observação foi que algumas das relações de dispersão podem apresentar singularidades, ou seja, tornam-se não físicas por um determinado intervalo de momentos, o que é suficiente para classificar esses modos como espúrios. No entanto, também encontramos setores para os quais as relações de dispersão não sofrem com nenhum dos problemas mencionados. Portanto, podem ser considerados bem comportados de acordo com os critérios em que se baseia o presente trabalho.

No capítulo 5, analisamos a eletrodinâmica de Maxwell modificada por termos de derivadas superiores de dimensão 5 e CPT-ímpar que fazem parte do setor de fótons da extensão não mínima do modelo padrão. O primeiro termo de dimensão cinco a ser tratado é um tipo de contribuição do tipo CFJ com derivada superior. O propagador da teoria foi calculado por meio da álgebra para os operadores envolvidos. Com base neste propagador, foram investigados os modos de propagação da teoria devido à presença de violação de Lorentz.

A análise das relações de dispersão obtidas a partir dos pólos propagadores revelou que o setor puramente tipo tempo não representa uma relação física, pois os modos não representam relação de energia e momento. Para o setor espacial os modos de propagação são físicos no regime de altas energias. Para este setor, a causalidade clássica é preservada para qualquer escolha do tensor de violação de Lorentz. Além disso, uma análise da unitariedade a *tree-level* foi realizada contraindo o propagador com as correntes conservadas, J^μ , e estudando a estrutura de pólos da expressão resultante. Constatamos que as relações de dispersão descrevem modos não-unitários, em geral, mas para alguns casos particulares a unitariedade é preservada. Este propagador possui uma analogia com a teoria MCFJ, que foi mostrado no Apêndice A. Mas as relações de dispersão e a física relacionada são diferentes entre esses dois modelos.

O segundo termo de dimensão cinco examinado é um tipo de contribuição anisotrópica do tipo CFJ com derivada superior, que pode ser identificado com o setor de fótons da teoria de Myers-Pospelov. O propagador foi novamente calculado e as relações de dispersão foram obtidas a partir dos pólos para um campo de fundo tipo tempo e espacial. Para o tensor de violação de Lorentz puramente temporal, um modo foi considerado não físico, enquanto o segundo geralmente obedece à causalidade e unitariedade, como mostrado na Eq. (5.118). Para a configuração espacial, também obtemos dois modos. Um modo tem a causalidade assegurada

apenas para certos regimes especiais de propagação, quando $\alpha \in [0, \pi/2]$. O outro modo tem a causalidade violada para todos os ângulos de α . No entanto, as investigações numéricas indicam que a unitariedade é preservada para configurações arbitrárias dentro deste cenário apesar da causalidade ser violada.

Nossos resultados revelam que a quebra da causalidade não implica necessariamente em violação da unitariedade. Os modos bem comportados podem ser adequados como base para estudar a quantização de teorias de campos CPT-ímpar, não mínimo em trabalhos futuros.

No que diz respeito aos nossos resultados, podemos concluir com segurança que o setor de fótons da teoria de Myers-Pospelov é bem comportado com respeito à unitariedade para um grande número de parâmetros. Também se sabe que uma violação da causalidade clássica nem sempre produz uma violação da causalidade no nível microscópico, como foi demonstrado para modelos mínimos particulares; [127]. Portanto, modos não causais nesse sentido ainda podem ser de interesse.

No capítulo 6, propomos uma teoria tipo Chern-Simons, em $1 + 2$ dimensões, dotada de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz. Que consiste na generalização do termo usual de Chern-Simons para acomodar uma possível anisotropia espacial na ação. Obtivemos uma equação de movimento que, por sua vez, possui uma estrutura similar àquela da teoria de Chern-Simons. Observamos que para $d = 3$, recuperamos a teoria de Chern-Simons. Observamos também que para $d = 5$ reproduz uma teoria tipo-Deser-Jackiw, isto é, uma teoria anisotrópica com duas derivadas adicionais.

Ainda no capítulo 6, analisamos o termo de Deser-Jackiw com o termo de Chern-Simons, sem o termo de Maxwell. Observamos que a primeira relação de dispersão representa um fóton padrão, mesmo sem o termo dinâmico de Maxwell. Já a segunda relação de dispersão, obtida sem o termo de Maxwell, produz um termo semelhante com a relação de dispersão do modelo Maxwell-Deser-Jackiw, em que o segundo termo de ambas as relações, $\frac{k}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta^2} = m^2$, representam um termo de massa ao quadrado, como deveria ser. Ou seja, possuem a mesma estrutura. Assim, temos que o termo de altas derivadas de Deser-Jackiw tem dinâmica produzindo propagação. Analisamos a causalidade clássica e para a velocidade de frente de onda, obtivemos $u_{\text{fr}} = 1$, e de acordo com o gráfico concluímos que o módulo da velocidade de grupo é sempre menor que 1. Logo, a causalidade clássica é assegurada para a teoria de Chern-Simons com Deser-Jackiw. Após essa análise, estudamos um termo de dimensão de massa 3 acoplado a um campo de fundo. Após o cálculo do propagador, analisamos os modos de propagação da teoria e a causalidade. Verificamos que para a configuração isotrópica-temporal a causalidade é assegurada. Para a configuração anisotrópica-temporal a velocidade de frente de onda pode ser maior que 1, violando a causalidade. Para a configuração anisotrópica-espacial observamos que se os vetores \mathbf{D} e \mathbf{F} forem paralelos a velocidade de frente de onda será menor do que 1. Caso contrário, se os vetores forem anti-paralelos a velocidade de frente de onda será maior que 1, violando a causalidade clássica. Do mesmo modo, o comportamento para o módulo da velocidade de grupo, de acordo com o gráfico obtido, observamos que para os

ângulos $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, linha fina contínua, o módulo da velocidade de grupo é maior do que 1, ou seja, quando os vetores forem anti-paralelos a causalidade clássica é violada.

Assim concluímos que a relação de dispersão isotrópica corresponde a modo propagante, cuja dinâmica advém da presença dos termos de altas derivadas e a causalidade é assegurada. Já as relações anisotrópicas exibem um radicando que não é positivo definido, de modo que podem exibir instabilidades para determinados valores dos parâmetros envolvidos.

Apêndice A

Comparação com o propagador da teoria MCFJ

É importante comparar o nosso propagador (5.19) com o propagador da teoria MCFJ, pois existe semelhanças entre os dois modelos. Para fazer essa comparação vamos partir da densidade de Lagrange de MCFJ que é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{MCFJ}} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_{\beta}A_{\alpha}F_{\rho\varphi} + \frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2, \quad (\text{A.1})$$

onde V_{β} é o tensor de violação de lorentz e o último termo é o termo de fixação de gauge.

No intuito de calcular o propagador da teoria vamos reescrever a Lagrangeana acima na forma quadrática em função dos campos bilineares A^{μ} , ma forma:

$$\mathcal{L}_{\text{MCFJ}} = \frac{1}{2}A^{\beta} \boxplus_{\beta\alpha} A^{\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\boxplus_{\beta\alpha}$ é o operador tensorial dado por

$$\boxplus_{\beta\alpha} = \square\Theta_{\beta\alpha} - \frac{1}{\xi}\square\Omega_{\beta\alpha} + S_{\beta\alpha}, \quad (\text{A.3a})$$

onde

$$S^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\beta\alpha\varphi\rho}V_{\varphi}\partial_{\rho}. \quad (\text{A.4})$$

Usando a identidade

$$\boxplus_{\beta\alpha}\Delta_{\nu}^{\alpha} = g_{\beta\nu}, \quad (\text{A.5})$$

onde Δ_{ν}^{α} é operador inverso de $\boxplus_{\beta\alpha}$. Lembrando que

$$g_{\beta\nu} = \Theta_{\beta\nu} + \Omega_{\beta\nu}, \quad (\text{A.6})$$

onde os projetores transversal e longitudinal estão dados, respectivamente, por

$$\Theta_{\beta\nu} = g_{\beta\nu} - \Omega_{\beta\nu}, \quad (\text{A.7})$$

$$\Omega_{\beta\nu} = \partial_{\beta}\partial_{\nu}/\square. \quad (\text{A.8})$$

Assim, podemos propor a seguinte forma para Δ_ν^α , em termos dos projetores conhecidos,

$$\Delta_\nu^\alpha = a\Theta_\nu^\alpha + b\Omega_\nu^\alpha + cS_\nu^\alpha. \quad (\text{A.9})$$

onde a , b e c são constantes a serem determinadas. Estes operadores satisfazem uma álgebra tensorial fechada. Usando uma álgebra semelhante à da Tab. 5.1 e soluciando o sistema que advém da identidade, obtemos o seguinte propagador:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\nu} = \frac{1}{\square [\square^2 - (V^2\square - \lambda^2)]} & \left[\square^2\Theta_{\alpha\nu} - \{\xi [\square^2 - (V^2\square - \lambda^2)] + \lambda^2\} \Omega_{\alpha\nu} \right. \\ & \left. - \square(S_{\alpha\nu} + V_\alpha V_\nu) + \lambda(V_\alpha\partial_\nu + V_\nu\partial_\alpha) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde $\lambda \equiv V^\mu\partial_\mu$. No espaço dos momentos o propagador tem a forma

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 [p^4 - (V \cdot p)^2 + V^2 p^2]} & \left[p^4\Theta_{\alpha\nu}(p) - \{\xi [p^4 - ((V \cdot p)^2 - V^2 p^2)] - (V \cdot p)^2\} \frac{p_\alpha p_\nu}{p^2} \right. \\ & \left. + p^2 S_{\alpha\nu}(p) + p^2 V_\alpha V_\nu - (V \cdot p)(V_\alpha p_\nu + V_\nu p_\alpha) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.11a})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\nu}(p) = -\frac{i}{p^2} & \left[1 - \frac{(V \cdot p)^2}{p^4} + \frac{V^2 p^2}{p^4} \right]^{-1} \left\{ \eta_{\alpha\nu} - \left[1 - \frac{(V \cdot p)^2}{p^4} + \xi \left(1 - \frac{(V \cdot p)^2}{p^4} + \frac{V^2 p^2}{p^4} \right) \right] \frac{p_\alpha p_\nu}{p^2} \right. \\ & \left. + \frac{S_{\alpha\nu}(p)}{p^2} + \frac{V_\alpha V_\nu}{p^2} - \frac{V \cdot p}{p^4} (V_\alpha p_\nu + V_\nu p_\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11b})$$

Fazendo a substituição

$$\frac{V^\mu}{p^2} \mapsto 2D^\mu, \quad (\text{A.12})$$

na relação de dispersão

$$[p^4 - (V \cdot p)^2 + V^2 p^2] = 0, \quad (\text{A.13})$$

que advém do pólo do propagado, obtemos

$$1 - \frac{(V \cdot p)^2}{p^4} + \frac{V^2 p^2}{p^4} \mapsto 1 - 4(D \cdot p)^2 + 4D^2 p^2, \quad (\text{A.14a})$$

$$\frac{S_{\alpha\nu}(p)}{p^2} \mapsto 2L^{\beta\alpha}(p), \quad (\text{A.14b})$$

que ao ser inserido na Eq. (A.11a), leva ao propagador (5.19) do primeiro modelo de dimensão 5, o modelo simoles, que foi examinado. Além disso, esse propagador, tal como está, corresponde à Eq. (3.3) do primeiro artigo da Ref. [26] para $V^\mu \mapsto mk_\mu$, $\xi \mapsto -\xi$ e $n^\mu \mapsto p^\mu$.

Apêndice B

Mapeamento dos modelos de dimensão 5 para o MPE não-mínimo

Vamos mapear as Lagrangianas naquelas apresentadas em [75]. Os termos, de dimensão 5, modificados com altas derivadas e tensor de violação de Lorentz que consideramos neste artigo são os seguintes

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu}, \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda T_\kappa (T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu}, \quad (\text{B.15b})$$

onde D_μ e T_μ são os campos de fundo de cada um dos modelos. Como os operadores de campo relacionados são de dimensão de massa 5, a Lagrangiana correta deve ser $\mathcal{L}_A^{(5)}$ de sua Tab. III com o tensor do observador $k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu}$. Apenas as partes antissimétricas em ϱ , λ e μ , ν contribuem. Ao realizar uma integração parcial e negligenciar os termos de divergência total, a Lagrangeana $\mathcal{L}_A^{(5)}$ pode ser escrita em uma forma mais adequada:

$$\mathcal{L}_A^{(5)} = -\frac{1}{4} k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu} F_{\varrho\lambda} \partial_\alpha F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu} \partial_\varrho A_\lambda \partial_\alpha F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu} A_\lambda \partial_\varrho \partial_\alpha F_{\mu\nu}. \quad (\text{B.16})$$

Comparando o resultado acima com as densidades de Lagrange \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 , temos

$$k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu} = \eta^{\alpha\varrho} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa, \quad (\text{B.17a})$$

$$k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu} = T^\alpha T_\varrho \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} T_\kappa. \quad (\text{B.17b})$$

Podemos observar que ambos os termos são simétricos em α , ϱ devido à simetria das duas derivadas do espaço-tempo. O problema é que os tensores não são anti-simétricos em ρ , λ . Portanto, eles devem ser anti-simetrizados manualmente. Por exemplo, para a primeira Lagrangiana, obtemos

$$k^{(5)\alpha\varrho\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} [\eta^{\alpha\varrho} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa - \eta^{\alpha\lambda} \epsilon^{\kappa\varrho\mu\nu} D_\kappa]. \quad (\text{B.18})$$

Inserindo o termo acima na Lagrangeana $\mathcal{L}_A^{(5)}$ após realizar a integração parcial podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_A^{(5)} &= \frac{1}{4} [\eta^{\alpha\varrho} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa - \eta^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\kappa\varrho\mu\nu} D_\kappa] A_\lambda \partial_\varrho \partial_\alpha F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4} [\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu} - \varepsilon^{\kappa\varrho\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \partial_\varrho \partial^\lambda F_{\mu\nu}] \\
&= \frac{1}{4} [\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} D_\kappa A_\lambda \square F_{\mu\nu} - 2D_\kappa A_\lambda \partial^\lambda \partial_\varrho \tilde{F}^{\kappa\varrho}] , \tag{B.19}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o tensor dual do campo eletromagnético. A segunda contribuição desaparece devido às equações homogêneas de Maxwell $\partial_\varrho \tilde{F}^{\varrho\kappa} = 0$ que ainda são válidas na presença de violação de Lorentz. Portanto, não é necessário anti-simetrizar os tensores em ϱ, λ manualmente, pois por meio dos mapeamentos das Eqs. (B.17) são válidos como estão. O mesmo argumento vale para a segunda modificação.

Apêndice C

Integrais da solução estacionária para o potencial escalar e vetorial

A seguir mostraremos as soluções das integrais usadas para obter o potencial escalar e vetorial das Eqs. (5.194), (5.202) e (5.207).

Partindo da Eq. (5.185)

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\kappa} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + 2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (\text{C.1})$$

vamos calcular as soluções das respectivas integrais,

$$L(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (\text{C.2})$$

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = 2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p^k e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (\text{C.3})$$

Reescrevendo as integrais nas coordenadas esféricas $d^3\mathbf{p} = \mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}| \sin\alpha d\alpha d\phi$,

$$L(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_0^\pi \sin\alpha e^{ipR\cos\alpha} d\alpha \quad (\text{C.4})$$

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_0^\pi \sin\alpha e^{ipR\cos\alpha} p^k d\alpha, \quad (\text{C.5})$$

e fazendo uma mudança de variáveis na integral em α , da equação $A(\mathbf{r})$, obtemos:

$$\int_0^\pi \sin\alpha e^{ipR\cos\alpha} d\alpha = - \int_1^{-1} e^{ipRu} du = - \left[\frac{e^{ipRu}}{ipR} \right]_{u=\mp 1} = \frac{-i(e^{ipR} - e^{-ipR})}{pR}. \quad (\text{C.6})$$

Substituindo a integral em α na equação (C.4), podemos escrever

$$L(\mathbf{r}) = -i \frac{1}{(2\pi)R} \left[\int_0^\infty \frac{e^{ipR}}{|\mathbf{p}|(2\pi)} d|\mathbf{p}| - \int_0^\infty \frac{e^{-ipR}}{|\mathbf{p}|(2\pi)} d|\mathbf{p}| \right]. \quad (\text{C.7})$$

Calculando o valor principal,

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipR}}{|\mathbf{p}| (2\pi)} d|\mathbf{p}| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ipR}}{|\mathbf{p}| (2\pi)} d|\mathbf{p}| + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ipR}}{|\mathbf{p}| (2\pi)} d|\mathbf{p}| \right\} = \frac{i}{2}, \quad (\text{C.8})$$

obtemos a solução para a primeira integral,

$$L(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = -i \frac{1}{(2\pi)R} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ipR}}{|\mathbf{p}| (2\pi)} d|\mathbf{p}| + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ipR}}{|\mathbf{p}| (2\pi)} d|\mathbf{p}| \right], \quad (\text{C.9})$$

$$L(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = -i \frac{1}{(2\pi)R} \left[\frac{i}{2} \right] = \frac{1}{4\pi R}, \quad (\text{C.10})$$

logo

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{g_{\alpha\kappa}}{4\pi R} + \frac{2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \int_0^{\pi} \sin \alpha e^{ipR \cos \alpha} p^k d\alpha. \quad (\text{C.11})$$

Para a segunda integral,

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu k} D^\mu}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \int_0^{\pi} \sin \alpha e^{ipR \cos \alpha} p^k d\alpha,$$

vamos usar coordenadas esféricas para cada componente de p^i ,

$$\begin{cases} p^x = |\mathbf{p}| \cos \phi \sin \alpha, \\ p^y = |\mathbf{p}| \sin \phi \sin \alpha, \\ p^z = |\mathbf{p}| \cos \alpha, \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

logo

$$\begin{aligned} F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) &= \frac{2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu x} D^\mu}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^{\infty} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha e^{ipR \cos \alpha} d\alpha + \\ &\frac{2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu y} D^\mu}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \int_0^{\infty} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha e^{ipR \cos \alpha} d\alpha + \\ &\frac{2i\epsilon_{\alpha\kappa\mu z} D^\mu}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \int_0^{\pi} \cos \alpha \sin \alpha e^{ipR \cos \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Resolvendo as integrais, vemos que as componentes p^x e p^y se anulam devido as integrações no ângulo ϕ . Dessa forma, obtemos

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = i\epsilon_{\alpha\kappa\mu z} D^\mu \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \int_0^{\pi} \cos \alpha \sin \alpha e^{ipR \cos \alpha} d\alpha. \quad (\text{C.14})$$

A integral $\int_0^{\pi} \cos \alpha \sin \alpha e^{ipR \cos \alpha} d\alpha$ pode ser resolvida na seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos \alpha \sin \alpha e^{ipR \cos \alpha} d\alpha &= - \int_1^{-1} u e^{ipRu} du = \frac{e^{ipRu}}{p^2 R^2} (ipRu - 1) \Big|_1^{-1}, \\ &= \frac{(e^{ipR} - e^{-ipR})}{p^2 R^2} - \frac{(e^{ipR} + e^{-ipR})}{pR} i. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima no potencial (C.14),

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = i\epsilon_{\alpha\kappa\mu z} D^\mu \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \left[\frac{(e^{ipR} - e^{-ipR})}{|\mathbf{p}|^2 R^2} - \frac{(e^{ipR} + e^{-ipR})}{|\mathbf{p}| R} i \right], \quad (\text{C.15})$$

e usando o valor principal, escrevemos

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha\kappa\mu z} D^\mu \left[-\frac{1}{2\pi R^2} + \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| (e^{ipR} + e^{-ipR}) \right]. \quad (\text{C.16})$$

Para resolver a integral $\int_0^\infty d|\mathbf{p}| (e^{ipR} + e^{-ipR})$, vamos reescrevê-la da seguinte maneira

$$\int_0^\infty d|\mathbf{p}| (e^{ipR} + e^{-ipR}) = \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| e^{ipR}.$$

Para resolver a integral acima precisamos do artifício de variáveis complexa mostrado a seguir:

$$\int_C e^{izR} dz = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} e^{izR} dz + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^\rho e^{ixR} dx. \quad (\text{C.17})$$

Por um lado temos que

$$\int_C e^{izR} dz = 0, \quad (\text{C.18})$$

pois e^{izR} é uma função analítica no plano complexo. Por outro lado,

$$0 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} e^{izR} dz + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^\rho e^{ixR} dx. \quad (\text{C.19})$$

Precisamos calcular a primeira integral. Fazendo $z = \rho e^{i\theta}$, obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi i\rho e^{i\theta} e^{i\rho e^{i\theta} R} d\theta = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi i\rho e^{i\theta} e^{i\rho \cos\theta R} e^{-\rho \sin\theta R} d\theta. \quad (\text{C.20})$$

Usando a propriedade

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| dz, \quad (\text{C.21})$$

obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi i\rho e^{i\theta} e^{i\rho \cos\theta R} e^{-\rho \sin\theta R} d\theta \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi \rho e^{-\rho \sin\theta R} d\theta \rightarrow 0. \quad (\text{C.22})$$

Portanto, concluímos que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ixR} dx = 0. \quad (\text{C.23})$$

Assim, a segunda integral possui a solução seguinte:

$$F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = -\epsilon_{\alpha\kappa\mu z} D^\mu \frac{1}{2\pi R^2}. \quad (\text{C.24})$$

Por fim, a função de Green dada na Eq. (C.1) tem a solução seguinte

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\kappa} L(\mathbf{r}) + F_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}), \quad (\text{C.25})$$

$$G_{\alpha\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{g_{\alpha\kappa}}{4\pi R} - \epsilon_{\alpha\kappa\mu z} D^\mu \frac{1}{2\pi R^2}. \quad (\text{C.26})$$

Apêndice D

Alternativas para trabalhar CS com altas derivadas

D.1 Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Deser-Jackiw

Além dos modelos estudados, podemos também citar alguns casos mais simples. Fazendo-se $\vartheta_1 = 0$ e $\varkappa = 1$, temos a teoria de MCS com termo de altas derivadas tipo Deser-Jackiw [122], ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{k}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho + \frac{\vartheta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu\Box A^\rho + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (\text{D.1})$$

cujo propagador tem a forma

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 Z(p)} \left[p^2 \Theta_{\mu\alpha}(p) + i(\vartheta p^2 - k) \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi Z(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (\text{D.2})$$

que fornece a relação de dispersão a seguir

$$Z(p) = p^2 - (k - \vartheta p^2)^2 = 0, \quad (\text{D.3})$$

ou melhor,

$$\vartheta^2 p^4 - p^2(1 + 2\vartheta k) + k^2 = 0. \quad (\text{D.4})$$

As soluções correspondentes são:

$$p^2 = \frac{1}{2\vartheta^2} \left[(1 + 2\vartheta k) \pm \sqrt{1 + 4\vartheta k} \right], \quad (\text{D.5})$$

que fornecem dois modos massivos, com massas quadráticas dadas por:

$$M_\pm^2 = \frac{1}{2\vartheta^2} \left[(1 + 2\vartheta k) \pm \sqrt{1 + 4\vartheta k} \right]. \quad (\text{D.6})$$

Neste caso, vemos que a presença do termo de altas derivadas não traz, em princípio, modificações significativas aos modos progantes da teoria de MCS, que também são massivos.

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_\pm^2}, \quad (\text{D.7})$$

tipicamente causais.

D.1.1 Eletrodinâmica de Maxwell-Deser-Jackiw

Um caso particular simples da Lagrangiana (6.44) é obtido com $\varkappa = 1$, $\vartheta_1 = 0$ e $k = 0$, o que corresponde à eletrodinâmica planar de Maxwell-Deser-Jackiw, ou simplesmente,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu\Box A^\rho + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,$$

cujo propagador da teoria de Chern-Simons em altas derivadas de Deser-Jackiw tem a forma:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 F'(p)} \left[p^2 \Theta_{\mu\alpha}(p) + i p^2 \vartheta \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi F'(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (\text{D.8})$$

onde

$$F'(p) = p^2 - (p^2 \vartheta)^2 = p^2 (1 - p^2 \vartheta^2),$$

logo

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 (1 - p^2 \vartheta^2)} \left[\Theta_{\mu\alpha}(p) + i \vartheta \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi (1 - p^2 \vartheta^2) \frac{p^\mu p_\alpha}{p^2} \right]. \quad (\text{D.9})$$

As relações de dispersão são dadas por

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2, \quad (\text{D.10})$$

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\vartheta^2}, \quad (\text{D.11})$$

representa um modo não massivo e um modo massivo, que equivale a mesma relação de dispersão (D.5) quando $k = 0$.

D.2 Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas

Partindo da expressão (6.44) e escolhendo $\varkappa = 1$, $k \neq 0$, $\vartheta = 0$, $\vartheta_1 = 0$, temos a famosa eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons (MCS). Supondo agora que $\vartheta \neq 0$, $\vartheta_1 \neq 0$, adicionamos termos tipo Chern-Simons de altas derivadas sobre o modelo MCS. A Lagrangiana é a seguinte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{k}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho + \frac{\vartheta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu\Box A^\rho + \frac{\vartheta_1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu(V^{\lambda\beta}\partial_\lambda\partial_\beta)\partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (\text{D.12})$$

cujo propagador é obtido a partir da Eq. (6.58) fazendo-se $\varkappa = 1$,

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 F_2(p)} \left[p^2 \Theta_{\mu\alpha}(p) + i (-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta) \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi F_2(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (\text{D.13})$$

onde

$$F_2(p) = p^2 - (-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta)^2. \quad (D.14)$$

Para a Lagrangiana (D.12), a relação de dispersão é

$$p^2 - (-k + \vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta)^2 = 0. \quad (D.15)$$

Precisamos examinar como o termo de altas derivadas anisótropico afeta o comportamento da teoria da relação de dispersão. A Eq. (D.15) fornece:

$$p^2 - (-k + \vartheta p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1 V^{00} p_0^2 + \vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i + \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j)^2 = 0, \quad (D.16)$$

$$p^2 - [(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i + \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - k]^2 = 0. \quad (D.17)$$

Por ser deveras complicada, tal relação de dispersão pode ser preferencialmente examinada em algumas configurações específicas do tensor de fundo.

Configuração isotrópica-temporal do tensor de fundo: $V^{00} \neq 0, V^{0i} = 0, V^{ij} = 0.$

A relação de dispersão (D.17) assume a forma

$$p^2 - [a p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 - k]^2 = 0, \quad (D.18)$$

$$a^2 p_0^4 - [2a\vartheta \mathbf{p}^2 + 2ak + 1] p_0^2 + [2\vartheta k \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^2 + k^2 + \vartheta \mathbf{p}^4] = 0, \quad (D.19)$$

onde

$$a = (\vartheta + \vartheta_1 V^{00}),$$

produzindo a solução

$$p_0^2 = \frac{2a\vartheta \mathbf{p}^2 + 2ak + 1 \pm \sqrt{4a\vartheta \mathbf{p}^2 + 4ak + 1 - 4a^2 (1 + \vartheta \mathbf{p}^2 - \vartheta^2 \mathbf{p}^2) \mathbf{p}^2}}{2a^2}. \quad (D.20)$$

Configuração anisotrópica-espacial do tensor de fundo: $V^{00} = 0, V^{0i} = 0, V^{ij} \neq 0.$

Nesse caso a relação de dispersão (D.17) produz

$$p^2 - [\vartheta p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - k]^2 = 0,$$

a forma

$$\begin{aligned} & -\vartheta^2 p_0^4 + (1 + 2\vartheta^2 \mathbf{p}^2 - 2\vartheta \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j + 2k\vartheta) p_0^2 \\ & + (2\vartheta \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - 1 - \vartheta^2 \mathbf{p}^2 - 2\vartheta k) \mathbf{p}^2 + 2k\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - \vartheta_1^2 (V^{ij} p_i p_j)^2 - k^2 = 0, \end{aligned} \quad (D.21)$$

cuja solução é dada por

$$p_0^2 = \frac{(1 + 2\vartheta^2 \mathbf{p}^2 - 2\vartheta \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j + 2k\vartheta) \pm \sqrt{(1 + 2\vartheta^2 \mathbf{p}^2 - 2\vartheta \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j + 2k\vartheta)^2 + 4\vartheta^2 c}}{2\vartheta^2}, \quad (D.22)$$

onde

$$c = (2\vartheta\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - 1 - \vartheta^2 \mathbf{p}^2 - 2\vartheta k) \mathbf{p}^2 + 2k\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - \vartheta_1^2 (V^{ij} p_i p_j)^2 - k^2. \quad (\text{D.23})$$

Configuração anisotrópica-espaçial-temporal do tensor de fundo: $V^{00} = 0, V^{0i} \neq 0, V^{ij} = 0$.

Nesse caso a relação de dispersão (D.17) assume a forma:

$$p^2 - [\vartheta p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i - k]^2 = 0, \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} & -\vartheta^2 p_0^4 - 2\vartheta\vartheta_1 V^{0i} p_i p_0^3 + \left(1 + 2k\vartheta - (\vartheta_1 V^{0i} p_i)^2 + 2\vartheta^2 \mathbf{p}^2\right) p_0^2 + \\ & 2\vartheta\vartheta_1 \mathbf{p}^2 V^{0i} p_i p_0 + 2k\vartheta_1 V^{0i} p_i p_0 - \vartheta^2 \mathbf{p}^4 - 2k\vartheta \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2 - k^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Como podemos ver a equação acima é complicada. Sendo assim, não vamos abordar este caso.

D.3 Eletrodinâmica de Maxwell com termos tipo Chern-Simons de altas derivadas

Nessa seção, examinamos um modelo similar ao da seção anterior, mas na ausência do termo de Chern-Simons padrão, com Lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\vartheta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu \square A^\rho + \frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\beta} \partial_\lambda \partial_\beta) \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (\text{D.26})$$

cujo propagador é

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 F_3(p)} \left[p^2 \Theta_{\mu\alpha}(p) + i (\vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta) \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi F_3(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (\text{D.27})$$

onde

$$F_3(p) = p^2 - (\vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta)^2. \quad (\text{D.28})$$

A relação de dispersão é

$$p^2 - (\vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta)^2 = 0, \quad (\text{D.29})$$

$$\vartheta^2 p^4 + (2\vartheta\vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta - 1) p^2 + (\vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta)^2 = 0, \quad (\text{D.30})$$

bastante complicada, que pode ser analisada para alguns setores específicos do tensor de fundo, parametrizados pelas componentes, V^{00}, V^{0i}, V^{ij} .

Configuração isotrópica-temporal do tensor de fundo: $V^{00} \neq 0, V^{0i} = 0, V^{ij} = 0$.

Iniciamos considerando o efeito da componente isotrópica, V^{00} , suposta a única componente não nula do background. Assim, a relação de dispersão (D.29) fornece

$$p^2 - (p^2 \vartheta + V^{00} p_0^2 \vartheta_1)^2 = 0, \quad (\text{D.31})$$

$$(\vartheta + \vartheta_1 V^{00})^2 p_0^4 - [1 + 2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2] p_0^2 + (\vartheta^2 \mathbf{p}^4 + \mathbf{p}^2) = 0, \quad (\text{D.32})$$

cuja solução tem a forma

$$p_{0\pm}^2 = \frac{1 + 2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 \pm \sqrt{1 - 4(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta_1 V^{00} \mathbf{p}^2}}{2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00})^2}. \quad (\text{D.33})$$

Podemos observar que para o modo positivo a energia é fisicamente aceitável se

$$(2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 + 1) > \sqrt{-4\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1}, \quad (\text{D.34})$$

e se a raiz for real

$$4\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 < 1. \quad (\text{D.35})$$

Para o modo negativo a energia é fisicamente aceitável se

$$4\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 < 1. \quad (\text{D.36})$$

Causalidade Conforme já vimos nos capítulos anteriores, para a teoria ser causal a velocidade de frente de onda e o módulo da velocidade de grupo devem ser menor ou igual a 1,

$$v_{frente\pm} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{p_{0\pm}}{|\mathbf{p}|} \leq 1,$$

e

$$\mathbf{v}_{g\pm} = \frac{\partial p_{0\pm}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Assim, a relação de dispersão (D.33) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{p_{0\pm}}{|\mathbf{p}|} = \sqrt{\frac{2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 + 1 \mp \sqrt{-4\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1}}{2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00})^2 \mathbf{p}^2}}, \quad (\text{D.37})$$

logo a velocidade de frente de onda é dada por:

$$v_{frente\pm} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 + 1 \mp \sqrt{-4\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1}}{2(\vartheta + \vartheta_1 V^{00})^2 \mathbf{p}^2}},$$

aplicando o limite, obtemos:

$$v_{frente\pm} = \sqrt{\frac{\vartheta}{\vartheta + \vartheta_1 V^{00}}} \leq 1. \quad (\text{D.38})$$

Podemos observar que a velocidade de frente de onda da partícula é menor que 1.

Para a velocidade de grupo, temos

$$\mathbf{v}_{g\pm} = \frac{1}{(\vartheta + \vartheta_1 V^{00})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \sqrt{(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 + 1/2 \mp \sqrt{-\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1/4}},$$

derivando, obtemos

$$\mathbf{v}_{g\pm} = \mathbf{p} \frac{\left[\vartheta \mp \frac{-\vartheta_1 V^{00}}{2\sqrt{-\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1/4}} \right]}{\sqrt{(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 + 1/2 \mp \sqrt{-\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1/4}}}. \quad (\text{D.39})$$

Como queremos estudar o comportamento do módulo da velocidade de grupo, temos

$$v_{g\pm} = |\mathbf{p}| \frac{\left[\vartheta \mp \frac{-\vartheta_1 V^{00}}{2\sqrt{-\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1/4}} \right]}{\sqrt{(\vartheta + \vartheta_1 V^{00}) \vartheta \mathbf{p}^2 + 1/2 \mp \sqrt{-\vartheta_1 V^{00} (\vartheta_1 V^{00} + \vartheta) \mathbf{p}^2 + 1/4}}}, \quad (\text{D.40})$$

cujo o comportamento é representado no gráfico da Fig. C.1 a seguir

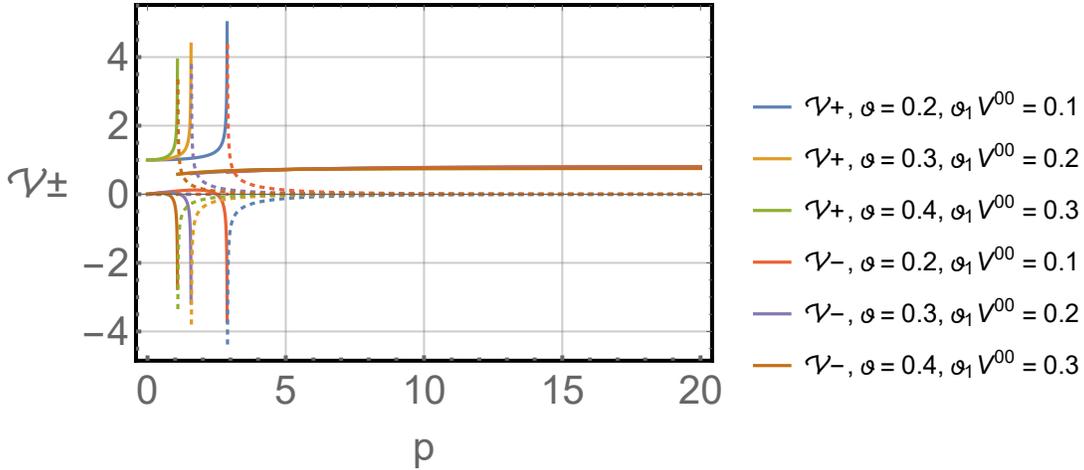


Figura D.1: Velocidade de grupo para a componente isotrópica

O gráfico acima mostra o comportamento da velocidade de grupo para valores distintos dos parâmetros, conforme mostra a legenda Figura 6.1. Podemos observar que o modo positivo da velocidade de grupo representa um modo espúrio, pois a velocidade de grupo é maior que 1. Para o modo negativo a velocidade de grupo é menor que zero. Para determinados valores dos parâmetros ϑ , $\vartheta_1 V^{00}$ tanto o modo positivo quanto o modo negativo podem ser complexos e são representados pelas linhas tracejadas. Para grandes momentos temos que ambos os modos convergem para 1, assim, a causalidade para a componente isotrópica é assegurada apenas para grandes momentos.

No limite em que o tensor de violação é nulo, obtemos a relação de dispersão e os modos de propagação da teoria de Deser-Jackiw.

Configuração anisotrópica-espacial do tensor de fundo: $V^{00} = 0, V^{0i} = 0, V^{ij} \neq 0$.

Neste caso, a expressão (D.30) fornece:

$$\vartheta^2 p^4 + (2\vartheta\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - 1) p^2 + (\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j)^2 = 0, \quad (\text{D.41})$$

cujo desenvolvimento fornece a expressão,

$$p^2 = \frac{1}{2\vartheta^2} \left[1 - 2\vartheta\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j \pm \sqrt{(2\vartheta\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j - 1)^2 - 4\vartheta^2 (\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j)^2} \right], \quad (\text{D.42})$$

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2\vartheta^2} \left[1 - 2\vartheta\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j \pm \sqrt{1 - 4\vartheta\vartheta_1 V^{ij} p_i p_j} \right]}. \quad (\text{D.43})$$

Configuração anisotrópica-temporal do tensor de fundo: $V^{00} = 0, V^{0i} \neq 0, V^{ij} = 0$.

Para esta configuração, a expressão (D.29) produz

$$p^2 - (\vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i)^2 = 0, \quad (\text{D.44})$$

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) - \vartheta^2 (p_0^2 - \mathbf{p}^2)^2 - (\vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i)^2 - 2\vartheta\vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i (p_0^2 - \mathbf{p}^2) = 0, \quad (\text{D.45})$$

que é uma equação complicada para ser resolvida devidos os termos $2\vartheta\vartheta_1 V^{0i} p_0 p_i (p_0^2 - \mathbf{p}^2)$.

D.3.1 Eletrodinâmica de Deser-Jackiw com VL

Partindo da expressão (6.44) e escolhendo $\varkappa = 0, k = 0, \vartheta \neq 0, \vartheta_1 \neq 0$, temos uma eletrodinâmica planar tipo Chern-Simons em altas derivadas modificada pelo termo $\frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\alpha_1} \partial_{\alpha_1} \partial_\lambda) \partial^\nu A^\rho$, acoplado ao tensor de violação de Lorentz, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{\vartheta}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu \square A^\rho + \frac{\vartheta_1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu (V^{\lambda\alpha_1} \partial_{\alpha_1} \partial_\lambda) \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (\text{D.46})$$

produzindo o propagador

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\alpha(y)) | 0 \rangle = -i \frac{1}{p^2 G(p)} \left[i (\vartheta p^2 + \vartheta_1 V^{\lambda\beta} p_\lambda p_\beta) \epsilon_{\mu\sigma\alpha} p^\sigma - \xi G(p) \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right], \quad (\text{D.47})$$

onde

$$G(p) = -(\vartheta p^2 - \vartheta_1 V^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta)^2. \quad (\text{D.48})$$

A relação de dispersão tem a forma

$$(-\vartheta p^2 - \vartheta_1 V^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta)^2 = 0. \quad (\text{D.49})$$

Configuração anisotrópica-espacial do tensor de fundo: $V^{00} = 0, V^{0i} = 0, V^{ij} \neq 0$.

A relação de dispersão (D.49) fornece:

$$\vartheta p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1 V^{ij} p_i p_j = 0, \quad (\text{D.50})$$

que produz a solução:

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{ij} p_i p_j, \quad (\text{D.51})$$

onde deve valer

$$\mathbf{p}^2 > \frac{\vartheta_1}{\vartheta} V^{ij} p_i p_j,$$

para que seja fisicamente aceitável.

Configuração isotrópica-temporal do tensor de fundo: $V^{00} \neq 0, V^{0i} = 0, V^{ij} = 0$.

Neste caso, a expressão (D.49) fornece

$$\vartheta p_0^2 - \vartheta \mathbf{p}^2 + \vartheta_1 V^{00} p_0^2 = 0, \quad (\text{D.52})$$

com a solução dada por

$$p_0^2 = \frac{\vartheta}{(\vartheta + \vartheta_1 V^{00})} \mathbf{p}^2, \quad (\text{D.53})$$

que representa uma solução fisicamente aceitável.

Configuração anisotrópica-temporal do tensor de fundo: $V^{00} = 0, V^{0i} \neq 0, V^{ij} = 0$.

Para essa configuração a expressão (D.49) produz:

$$\vartheta p_0^2 + \vartheta_1 V^{i0} p_i p_0 - \vartheta \mathbf{p}^2 = 0, \quad (\text{D.54})$$

em que a solução tem a forma:

$$p_0 = \frac{-\vartheta_1 V^{i0} p_i \pm \sqrt{(\vartheta_1 V^{i0} p_i)^2 + 4\vartheta^2 \mathbf{p}^2}}{2\vartheta}. \quad (\text{D.55})$$

Para uma solução fisicamente aceitável, temos

$$p_0 = \frac{\sqrt{(\vartheta_1 V^{i0} p_i)^2 + 4\vartheta^2 \mathbf{p}^2} - \vartheta_1 V^{i0} p_i}{2\vartheta}, \quad (\text{D.56})$$

onde

$$\vartheta_1 V^{i0} p_i < \sqrt{(\vartheta_1 V^{i0} p_i)^2 + 4\vartheta^2 \mathbf{p}^2}. \quad (\text{D.57})$$

Assim concluímos que a relação de dispersão tipo tempo corresponde a modo propagante, já as relações anisotrópicas exibem um radicando que não é positivo definido.

As análises feitas na seção 6.6 valem aqui quando $k = 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Colladay and V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998); S.R. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [2] V.A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989); Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991); V.A. Kostelecký and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991); Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996).
- [3] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory,” Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [4] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories,” Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989);
- [5] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings,” Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989).
- [6] V.A. Kostelecký and R. Potting, “CPT and strings,” Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [7] V.A. Kostelecký and R. Potting, “CPT, strings, and meson factories,” Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).
- [8] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999); M. Bojowald, H.A. Morales–Técotl, and H. Sahlmann, Phys. Rev. D **71**, 084012 (2005).
- [9] M. Bojowald, H.A. Morales–Técotl, and H. Sahlmann, “Loop quantum gravity phenomenology and the issue of Lorentz invariance,” Phys. Rev. D **71**, 084012 (2005).
- [10] G. Amelino-Camelia and S. Majid, “Waves on noncommutative space–time and gamma-ray bursts,” Int. J. Mod. Phys. A **15**, 4301 (2000).
- [11] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecký, C.D. Lane, and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).

- [12] F.R. Klinkhamer and C. Rupp, “Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation,” *Phys. Rev. D* **70**, 045020 (2004).
- [13] S. Bernadotte and F.R. Klinkhamer, “Bounds on length scales of classical spacetime foam models,” *Phys. Rev. D* **75**, 024028 (2007).
- [14] S. Hossenfelder, “Theory and phenomenology of space-time defects,” *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 950672 (2014).
- [15] F.R. Klinkhamer, “Z-string global gauge anomaly and Lorentz non-invariance,” *Nucl. Phys. B* **535**, 233 (1998).
- [16] F.R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” *Nucl. Phys. B* **578**, 277 (2000).
- [17] F.R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” *Nucl. Phys. B* **578**, 277 (2000).
- [18] F.R. Klinkhamer and J. Schimmel, “CPT anomaly: a Rigorous result in four dimensions,” *Nucl. Phys. B* **639**, 241 (2002).
- [19] K.J.B. Ghosh and F.R. Klinkhamer, “Anomalous Lorentz and CPT violation from a local Chern-Simons-like term in the effective gauge-field action,” *Nucl. Phys. B* **926**, 335 (2018).
- [20] P. Hořava, “Quantum gravity at a Lifshitz point,” *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
- [21] V.A. Kostelecký and C.D. Lane, *J. Math. Phys.* **40**, 6245 (1999); V.A. Kostelecký and R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001); D. Colladay and V.A. Kostelecký, *Phys. Lett. B* **511**, 209 (2001); R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **68**, 085003 (2003); R. Lehnert, *J. Math. Phys.* **45**, 3399 (2004); B. Altschul, *Phys. Rev. D* **70**, 056005 (2004); G.M. Shore, *Nucl. Phys. B* **717**, 86 (2005).
- [22] W.F. Chen and G. Kunstatter, *Phys. Rev. D* **62**, 105029 (2000); O.G. Kharlanov and V.Ch. Zhukovsky, *J. Math. Phys.* **48**, 092302 (2007); B. Gonçalves, Y.N. Obukhov, and I.L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **80**, 125034 (2009); S.I. Kruglov, *Phys. Lett. B* **718**, 228 (2012); T.J. Yoder and G.S. Adkins, *Phys. Rev. D* **86**, 116005 (2012); S. Aghababaei, M. Haghight, and I. Motie, *Phys. Rev. D* **96**, 115028 (2017).
- [23] B. Gonçalves, M.M. Dias Jr., and B.J. Ribeiro, *Phys. Rev. D* **99**, 096015 (2019); Z. Xiao, *Phys. Rev. D* **94**, 115020 (2016); Z. Xiao, *Phys. Rev. D* **93**, 125022 (2016); Z. Xiao and B.-Q. Ma, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 1359 (2009).
- [24] R. Bluhm, V.A. Kostelecký, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecký, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V.A. Kostelecký, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999); V.A. Kostelecký and C.D. Lane, *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999); R. Bluhm and V.A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **84**,

- 1381 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecký, and C.D. Lane, Phys. Rev. Lett. **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecký, C.D. Lane, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **88**, 090801 (2002).
- [25] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990); A.A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); A.A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); J. Alfaro, A.A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, and R. Soldati, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3271 (2010); A.A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, and R. Soldati, JHEP **0909**, 057 (2009).
- [26] C. Adam and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001); C. Adam and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003); V.Ch. Zhukovsky, A.E. Lobanov, and E.M. Murchikova, Phys. Rev. D **73**, 065016 (2006); Y.M.P. Gomes, P.C. Malta, Phys. Rev. D **94**, 025031 (2016); A. Martín-Ruiz, C.A. Escobar, Phys. Rev. D **95**, 036011 (2017).
- [27] A.P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, and J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **734**, 1 (2006); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); H. Belich, L.D. Bernald, P. Gaete, and J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **73**, 2632 (2013).
- [28] B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007); B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008).
- [29] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002); V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006); C.A. Escobar and M.A.G. Garcia, Phys. Rev. D **92**, 025034 (2015); A. Martín-Ruiz and C.A. Escobar, Phys. Rev. D **94**, 076010 (2016).
- [30] B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).
- [31] A. Moyotl, H. Novales-Sanchez, J.J. Toscano, and E.S. Tututi, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450039 (2014); Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450107 (2014).
- [32] M. Schreck, Phys. Rev. D **86**, 065038 (2012); G. Gazzola, H.G. Fargnoli, A.P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, and M.C. Nemes, J. Phys. G **39**, 035002 (2012); A.P. Baêta Scarpelli, J. Phys. G **39**, 125001 (2012); B. Agostini, F.A. Barone, F.E. Barone, P. Gaete, and J.A. Helayël-Neto, Phys. Lett. B **708**, 212 (2012); L.C.T. Brito, H.G. Fargnoli, and

- A.P. Baêta Scarpelli, Phys. Rev. D **87**, 125023 (2013); S. Tizchang, R. Mohammadi, and S. Xue, Probing Lorentz violation effects via a laser beam interacting with a high-energy charged lepton beam, arXiv:1811.00486.
- [33] V.A. Kostelecký e N. Russell, Data Tables for Lorentz and CPT Violation, Rev. Mod. Phys. **83**, 11 (2011).
- [34] B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 (1942); B. Podolsky and C. Kikuchi, Phys. Rev. **65**, 228 (1944).
- [35] R. Bufalo, B.M. Pimentel, and G.E.R. Zambrano, Phys. Rev. D **86**, 125023 (2012).
- [36] A. Accioly and E. Scatena, Mod. Phys. Lett. A **25**, 269 (2010).
- [37] C.A.P. Galvão and B.M. Pimentel, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
- [38] C. A. Bonin, R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, "Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law", Phys. Rev. D **81**, 025003 (2010);
- [39] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, and G.E.R. Zambrano, J. Math. Phys. **52**, 102902 (2011).
- [40] J. Barcelos-Neto, C.A.P. Galvão, and C.P. Natividade, Z. Phys. C **52**, 559 (1991).
- [41] R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, "Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics", Phys. Rev. D **83**, 045007 (2011).
- [42] A.E. Zayats, Ann. Phys. **342**, 11 (2014).
- [43] J. Gratus, V. Perlick, and R.W. Tucker, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 435401 (2015).
- [44] M. Lazar, Wave Motion **91**, 102388 (2019).
- [45] M. Lazar and J. Leck, Symmetry **12**, 1104 (2020).
- [46] C.A. Bonin, B.M. Pimentel, and P.H. Ortega, Int. J. M. Phys. A **34**, 1950134 (2019).
- [47] P. Fan, J. Xiao, and H. Qin, Phys. Rev. D **104**, 025013 (2021).
- [48] I.G. Oliveira, J.H. Sales, and R. Thibes, Eur. Phys. J. Plus **135**, 713 (2020).
- [49] J. Dai, Nucl. Phys. B **971**, 115497 (2021).
- [50] R. Bufalo, B.M. Pimentel, and D.E. Soto, Phys. Rev. D **90**, 085012 (2014).
- [51] G.P. de Brito, P.C. Malta, and L.P.R. Ospedal, Phys. Rev. D **95**, 016006 (2017).
- [52] D.R. Granado, A.J.G. Carvalho, A.Yu. Petrov, and P.J. Por rio, EPL **129**, 51001 (2020).

- [53] T.D. Lee and G.C. Wick, Nucl. Phys. B **9**, 209 (1969); T.D. Lee and G.C. Wick, Phys. Rev D **2**, 1033 (1970).
- [54] B. Grinstein and D. O’Connell, Phys. Rev. D **78**, 105005 (2008); B. Grinstein, D. O’Connell, and M.B. Wise, Phys. Rev. D **77**, 025012 (2008); J.R. Espinosa, B. Grinstein, D. O’Connell, and M.B. Wise, Phys. Rev. D **77**, 085002 (2008); T.E.J. Underwood and R. Zwicky, Phys. Rev. D **79**, 035016 (2009); R.S. Chivukula, A. Farzinnia, R. Foadi, and E.H. Simmons, Phys. Rev. D **82**, 035015 (2010).
- [55] T.G. Rizzo, JHEP **0706**, 070 (2007); T.G. Rizzo, JHEP **0801**, 042 (2008); E. Álvarez, C. Schat, L. Da Rold, and A. Szykman, JHEP **0804**, 026 (2008); C.D. Carone and R. Primulando, Phys. Rev. D **80**, 055020 (2009).
- [56] R. Turcati and M.J. Neves, Adv. High Energy Phys. **153953**, 1 (2014).
- [57] F.A. Barone, G. Flores-Hidalgo, and A.A. Nogueira, Phys. Rev. D **91**, 027701 (2015).
- [58] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F.E. Barone, F.A. Barone, and P. Gaete, Phys. Rev. D **90**, 105029 (2014).
- [59] F.A. Barone, G. Flores-Hidalgo, and A.A. Nogueira, Phys. Rev. D **88**, 105031 (2013).
- [60] F.A. Barone and A.A. Nogueira, Eur. Phys. J. C **75**, 339 (2015).
- [61] C. W. Bernard and A. Duncan, Phys. Rev. D **11**, 848 (1975).
- [62] D. Barua and S. N. Gupta, Phys. Rev. D **16**, 413 (1977).
- [63] J. Z. Simon, Phys. Rev. D **41**, 3720 (1990).
- [64] R. C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003); P. A. Bolokhov and M. Pospelov, Phys. Rev. D **77**, 025022 (2008).
- [65] C. M. Reyes, L. F. Urrutia, and J. D. Vergara, Phys. Rev. D **78**, 125011 (2008); Phys. Lett. B **675**, 336 (2009).
- [66] M. Ostrogradski, Mem. Acad. St. Pétersbourg VI **4**, 385 (1850).
- [67] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009); M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 116012 (2012); M. Schreck, Phys. Rev. D **89**, 105019 (2014).
- [68] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D **88**, 096006 (2013); M. Schreck, Phys. Rev. D **90**, 085025 (2014).
- [69] J.A.A.S. Reis and M. Schreck, Phys. Rev. D **95**, 075016 (2017).
- [70] R.C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003);

- [71] C.M. Reyes, L.F. Urrutia, and J.D. Vergara, Phys. Lett. B **675**, 336 (2009).
- [72] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira, Jr., and J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005); H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayël-Neto, and M.T.D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009); B. Charneski, M. Gomes, R.V. Maluf, and A.J. da Silva, Phys. Rev. D **86**, 045003 (2012).
- [73] R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., E. Passos, F.E.P. dos Santos, and E.O. Silva, Phys. Rev. D **87**, 047701 (2013); J.B. Araujo, R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., Phys. Rev. D **92**, 025049 (2015); Phys. Lett. B **760**, 302 (2016).
- [74] Y. Ding and V.A. Kostelecký, Phys. Rev. D **94**, 056008 (2016).
- [75] V.A. Kostelecký and Z. Li, Phys. Rev. D **99**, 056016 (2019).
- [76] Y.M.P. Gomes, J.T. Guaitolini Jr., Phys. Rev. D **99**, 055006 (2019).
- [77] V.E. Mouchrek-Santos, M.M. Ferreira Jr., Phys. Rev. D **95**, 071701(R) (2017).
- [78] R. Casana, J.S. Rodrigues, and F.E.P. dos Santos, Phys. Lett. B **790**, 354 (2019).
- [79] L.H.C. Borges, A.G. Dias, A.F. Ferrari, J.R. Nascimento, and A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B **756**, 332 (2016); A.J.G.Carvalho, A.F.Ferrari, A.M.de Lima, J.R.Nascimento, and A.Yu.Petrov, Nucl. Phys. B **942**, 393 (2019).
- [80] L.H.C. Borges, A.F. Ferrari, and F.A. Barone, Eur. Phys. J. C **76**, 599 (2016);
- [81] L. Bonetti, L.R. dos Santos Filho, J.A. Helayël-Neto, and A.D.A.M. Spallicci, Phys. Lett. B **764**, 203 (2017).
- [82] L. Bonetti, L.R. dos Santos Filho, J.A. Helayël-Neto, and A.D.A.M. Spallicci, Eur. Phys. J. C **78**, 811 (2018).
- [83] R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., L. Lisboa-Santos, F.E.P. dos Santos, and M. Schreck, Phys. Rev. D **97**, 115043 (2018).
- [84] L. H. C. Borges, A. F. Ferrari and F. A. Barone, Eur. Phys. J. C **76**, 599 (2016).
- [85] O.W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [86] D. Colladay and V. A. Kostelecký, "CPT Violation and the Standard Model", Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [87] V. A. Kostelecký and S. Samuel, "Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory", Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).

- [88] H. Belich, et al., "Violação da Simetria de Lorentz" *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **29**,57 (2007).
- [89] S. M. Carrol, G. B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [90] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001).
- [91] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **657**, 214 (2003).
- [92] Yakov Itin, *Phys. Rev. D* **70**, 025012 (2004).
- [93] Benjamin R. Edwards, V. Alan Kostelecký, *Physics Letters B*, 795 (2019).
- [94] Kostelecký, V.A., Lunghi, E., Sherrill, N. et al. *J. High Energ. Phys.* 143 (2020).
- [95] V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).
- [96] V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009).
- [97] M. Hayakawa, *Phys. Lett. B* **478**, 394 (2000).
- [98] The leading-order action is constructed in S.M. Carroll et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).
- [99] M.S. Berger and V.A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **65**, 091701 (2002); P.A. Bolokhov, S.G. Nibbelink, and M. Pospelov, *Phys. Rev. D* **72**, 015013 (2005).
- [100] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecký, C.D. Lane and T. Okamoto, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).
- [101] A. I. Alekseev, B. A. Arbuzov and V. A. Baikov - *TMF*, **52**, 187–198 (1982).
- [102] Cuzinatto, R. R.; de Melo, C. A. M., Pompeia and P. J. Second order gauge theory *Ann. Phys.* **322**, 1211 (2007).
- [103] N. Moeller and B. Zwiebach, *JHEP* **0210**, 034 (2002).
- [104] 't Hooft, Gerardus ; Veltman, Martinus J G, *Diagrammar*, Geneva : CERN, 1973.
- [105] A.P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, and J.A. Helayël-Neto, *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003); R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., A.R. Gomes, and F.E.P. dos Santos, *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010).
- [106] A. Moyotl, H. Novales-Sanchez, J.J. Toscano, and E.S. Tututi, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, 1450107 (2014); T.R.S. Santos, R.F. Sobreiro, and A.A. Tomaz, *Phys. Rev. D* **94**, 085027 (2016).

- [107] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books Publishing, L.L.C., Reading; Massachusetts, 1995).
- [108] L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity* (Academic Press, New York and London, 1960).
- [109] M. Veltman, in *Methods in Field Theory*, edited by R. Balian and J. Zinn-Justin (World Scientific, Singapore, 1981).
- [110] C.M. Reyes, Phys. Rev. D **82**, 125036 (2010).
- [111] C.M. Reyes, Phys. Rev. D **87**, 125028 (2013).
- [112] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Annals of Physics **140**, 372 (1982).
- [113] C. R. Hagen, Annals of Physics **157**, 342 (1984).
- [114] G. V. Dunne, R. Jackiw and C. A. Trugenberger, Phys. Rev. D **41**, 661 (1990).
- [115] R. Jackiw and So-Young Pi, Phys. Rev. D **42**, 3500 (1990).
- [116] Gerald V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, arXiv:hep-th/9902115 (1998).
- [117] Ho, Choon-Lin & Hosotani, Yutaka, Physical Review Letters. **70**. 10.1103 (1992).
- [118] Avinash Khare, R.B. MacKenzie, P.K. Panigrahi, M.B. Paranjape, Physics Letters B. **355** (1995).
- [119] Kevin Costello and Bogdan Stefański, Jr. Phys. Rev. Lett. **125**, 121602 (2020).
- [120] R. Casana et al, EPL **127**, 61001 (2019).
- [121] Casana, R., Ferreira, M.M., da Hora, E. et al. Eur. Phys. J. C **74**, 3064 (2014).
- [122] S. Deser, R. Jackiw, Physics Letters B, 451 (1999).
- [123] Kumar, Sarmishtha, International Journal of Modern Physics A, **18**, 10.1142 (2003).
- [124] M. Ghasemkhani and R. Bufalo, Phys. Rev. D **91**, 125013 (2015).
- [125] R. Avila, J.R. Nascimento, A.Y. Petrov, C.M. Reyes e M. Schreck, Phys. Rev. D **101**, 055011 (2020).
- [126] João A. A. S. Reis, Manoel M. Ferreira, Jr., and Marco Schreck, Phys. Rev. D **100**, 095026 (2019).
- [127] F.R. Klinkhamer and M. Schreck, Nucl. Phys. B **848**, 90 (2011).

Anexos

Nas próximas páginas constam os artigos publicados, referente aos capítulos 3, 4 e 5 desta Tese.

D.4 Artigo referente aos Capítulos 3 e 4

PHYSICAL REVIEW D **97**, 115043 (2018)

Maxwell electrodynamics modified by *CPT*-even and Lorentz-violating dimension-6 higher-derivative terms

Rodolfo Casana,^{1,*} Manoel M. Ferreira, Jr.,^{1,†} Letícia Lisboa-Santos,^{1,‡} Frederico E. P. dos Santos,^{2,§} and Marco Schreck^{1,||}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA),
Campus Universitário do Bacanga, São Luís, Maranhão 65080-805, Brazil*

²*Coordenação do Curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia,
Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus Universitário do Bacanga,
São Luís, Maranhão 65080-805, Brazil*

 (Received 25 February 2018; revised manuscript received 18 May 2018; published 28 June 2018)

In this paper, we investigate an electrodynamics in which the physical modes are coupled to a Lorentz-violating background by means of a higher-derivative term. We analyze the modes associated with the dispersion relations obtained from the poles of the propagator. More specifically, we study Maxwell's electrodynamics modified by a Lorentz-violating operator of mass dimension 6. The modification has the form $D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}$; i.e., it possesses two additional derivatives coupled to a *CPT*-even tensor $D_{\beta\alpha}$ that plays the role of the fixed background. We first evaluate the propagator and obtain the dispersion relations of the theory. By doing so, we analyze some configurations of the fixed background and search for sectors where the energy is well defined and causality is assured. A brief analysis of unitarity is included for particular configurations. Afterward, we perform the same kind of analysis for a more general dimension-6 model. We conclude that the modes of both Lagrange densities are possibly plagued by physical problems, including causality and unitarity violation, and that signal propagation may become physically meaningful only in the high-momentum regime.

DOI: 10.1103/PhysRevD.97.115043

D.5 Artigo referente ao Capítulo 5

PHYSICAL REVIEW D **100**, 055036 (2019)

Maxwell electrodynamics modified by a *CPT*-odd dimension-five higher-derivative term

Manoel M. Ferreira, Jr.,^{*} Leticia Lisboa-Santos,[†] Roberto V. Maluf,[‡] and Marco Schreck[§]

*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão,
Campus Universitário do Bacanga, São Luís, Maranhão, 65080-805, Brazil*
and *Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Campus Universitário do Piauí, Caixa
Postal 6030, Fortaleza, Ceará, 60455-760, Brazil*

 (Received 1 April 2019; published 26 September 2019)

In this paper, we consider an electrodynamics of higher derivatives coupled to a Lorentz-violating background tensor. Specifically, we are interested in a dimension-five term of the *CPT*-odd sector of the nonminimal Standard Model extension. By a particular choice of the operator \hat{k}_{AF} , we obtain a higher-derivative version of the Carroll-Field-Jackiw (CFJ) term, $\frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda D_\kappa \square F_{\mu\nu}$, with a Lorentz-violating background vector D_κ . This modification is subject to being investigated. We calculate the propagator of the theory and from its poles, we analyze the dispersion relations of the isotropic and anisotropic sectors. We verify that classical causality is valid for all parameter choices, but that unitarity of the theory is generally not assured. The latter is found to break down for certain configurations of the background field and momentum. In an analog way, we also study a dimension-five anisotropic higher-derivative CFJ term, which is written as $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda T_\kappa (T \cdot \partial)^2 F_{\mu\nu}$ and is directly linked to the photon sector of Myers-Pospelov theory. Within the second model, purely timelike and spacelike T_κ are considered. For the timelike choice, one mode is causal, whereas the other is noncausal. Unitarity is conserved, in general, as long as the energy stays real—even for the noncausal mode. For the spacelike scenario, causality is violated when the propagation direction lies within certain regimes. However, there are particular configurations preserving unitarity and strong numerical indications exist that unitarity is guaranteed for all purely spacelike configurations. The results improve our understanding of nonminimal *CPT*-odd extensions of the electromagnetic sector.

DOI: 10.1103/PhysRevD.100.055036