



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CORREÇÕES EM RELATIVIDADE GERAL ADVINDAS DE MODELOS
COM VIOLAÇÃO ESPONTÂNEA DA SIMETRIA DE LORENTZ POR UM
CAMPO BUMBLEBEE**

ESDRAS BARBOSA DOS SANTOS

ORIENTADOR:

PROF. DR. RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

SÃO LUÍS, MA
AGOSTO DE 2016

Esdras Barbosa dos Santos

Correções em Relatividade Geral advindas de modelos com violação espontânea da simetria de Lorentz por um campo bumblebee

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís, MA
Agosto de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca Setorial - CCET/UFMA

Santos, Esdras Barbosa dos

Correções em Relatividade Geral advindas de modelos com violação espontânea da simetria de Lorentz por um campo bumblebee

Esdras Barbosa dos Santos - São Luís-MA, 2016.

46.p

Impresso por computador (fotocópia)

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Maranhão,
Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

1.Gravitação; 2.Violação de Lorentz; 3.Campo Bumblebee

CDU

Esdras Barbosa dos Santos

Correções em Relatividade Geral advindas de modelos com violação espontânea da simetria de Lorentz por um campo bumblebee

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA
Orientador

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho - UFMA
Examinador Interno

Prof. Dr. Felipe Peixoto Poulis - UFMA
Examinador Interno

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante - UFC
Examinador Externo

São Luís, MA
Agosto de 2016

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio e colaboração durante todos esses anos ao longo da minha vida.

Ao Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, pela sua competente e segura orientação, pela amizade e contribuição para a minha formação acadêmica.

À todos os colegas do Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos - GFTPC/UFMA e demais professores do grupo, os quais contribuíram tanto pela amizade quanto pelas discussões acadêmicas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Somente a consciência individual do agente dá testemunho dos atos sem testemunha, e não há ato mais desprovido de testemunha externa do que o ato de conhecer.”

Olavo de Carvalho

Resumo

O setor gravitacional do Modelo Padrão Estendido (MPE) é estudado, e são exploradas as influências dos termos de violação da simetria de Lorentz em quantidades físicas que testam a Relatividade Geral (RG). Analisamos um modelo específico onde a violação ocorre de forma espontânea, através da dinâmica de um único campo vetorial chamado campo bumblebee. Iniciamos o trabalho fazendo uma discussão geral das transformações de Lorentz e do grupo de Lorentz, que são os elementos básicos que nos permitem falar na existência da simetria de Lorentz. Distinguímos em seguida transformações de observador e de partícula, conceitos estes que são equivalentes na Relatividade Restrita (RR), mas que ganham uma importante distinção em modelos que admitem violação da simetria de Lorentz. Posteriormente, apresentamos um modelo bem conhecido da Teoria Clássica de Campos para ilustrarmos como a quebra espontânea de simetria ocorre num contexto clássico. Em seguida, a lagrangiana do MPE é apresentada, e discutimos em detalhes o setor gravitacional deste modelo. Uma discussão geral dos modelos bumblebee é feita em seguida, e depois apresentamos o modelo teórico com o qual trabalhamos. Após restringirmos a nossa análise para o estado de mínima energia do campo bumblebee, passamos a calcular algumas quantidades físicas de interesse. As equações de movimento do modelo são obtidas, e uma solução de vácuo para um espaço-tempo esféricamente simétrico é encontrada (métrica de Schwarzschild modificada). Fazemos uma breve discussão a respeito da realidade física da modificação encontrada, com a finalidade de mostrar que não se trata de uma quebra aparente que poderia ser eliminada por uma transformação de coordenadas. De posse da métrica encontrada, calculamos algumas quantidades físicas conhecidas que testam a RG e que são medidas experimentalmente com alta precisão. Finalizamos o trabalho impondo para cada teste feito um limite superior para os parâmetros de violação.

Palavras-chave: Violação espontânea da simetria de Lorentz, Modelo bumblebee, Correções da RG.

Abstract

The gravitational sector of Standard Model Extension (SME) is studied, and the effects of Lorentz violating terms in physical quantities that test the General Relativity (GR) are explored. We analyze a specific model where the violation occurs spontaneously, through the dynamics of a single vector called bumblebee field. We initiate this work by making a general discussion about Lorentz transformations and Lorentz group, the basic elements that allow us to speak in Lorentz symmetry. We distinguish between observer and particle transformations, equivalent concepts in Special Relativity (SR) but with an important distinction in Lorentz violating models. After, we present a well known model of Classical Field Theory to illustrate how the symmetry is spontaneously broken at a classical context. We present the lagrangian of MPE and we discuss in details its gravitational sector. A general discussion of bumblebee models is made, and then we present the theoretical model we work. After we restrict our analysis to minimum energy of bumblebee field, we calculate some physical quantities of interest. The field equations of model are obtained and a vacuum solution of a spherically symmetric spacetime is encountered (modified Schwarzschild metric). We make a brief discussion about the physical reality of the modification encountered, with the aim to show it is not a fake modification that could be eliminated by a coordinate transformation. With the found metric, we calculate some known physical quantities that test the GR. We finalize this work by imposing a superior limit on the violating parameters for each test made.

Keywords: Spontaneous violation of Lorentz symmetry, Bumblebee model, GR corrections.

Sumário

1	Introdução	p. 8
2	Simetrias do espaço-tempo em Relatividade	p. 12
2.1	Transformações de Lorentz globais e locais	p. 12
2.2	Transformações de observador e partícula	p. 15
2.3	Violação da simetria de Lorentz	p. 18
2.3.1	Quebra espontânea de simetria em modelos clássicos	p. 18
2.3.2	Violação espontânea da simetria de Lorentz	p. 20
3	Interação gravitacional e violação espontânea de Lorentz no MPE	p. 22
3.1	O setor gravitacional do MPE	p. 22
3.2	O modelo bumblebee	p. 25
3.3	O modelo teórico trabalhado	p. 27
4	Influência dos termos de violação em quantidades físicas que testam a RG	p. 30
4.1	Métrica de Schwarzschild modificada	p. 30
4.2	Geodésicas: Breve revisão	p. 32
4.3	Correções em algumas quantidades físicas que testam a RG	p. 33
4.3.1	Avanço do periélio de Mercúrio	p. 33
4.3.2	Desvio da luz	p. 37
4.3.3	Atraso temporal devido à curvatura do espaço-tempo	p. 40
5	Conclusões e perspectivas	p. 44
	Apêndice A – Cálculo da solução de Schwarzschild modificada	p. 45
A.1	Obtenção das equações de movimento modificadas	p. 45

A.2	Cálculo da métrica de Schwarzschild modificada	p. 48
A.2.1	Caso radial - $b_\mu = (0, f(r), 0, 0)$	p. 49
A.2.2	Caso temporal - $b_\mu = (f(r), 0, 0, 0)$	p. 50
A.2.3	Caso angular θ - $b_\mu = (0, 0, f(r), 0)$	p. 50
A.2.4	Caso angular ϕ - $b_\mu = (0, 0, 0, f(r))$	p. 50

Referências Bibliográficas		p. 51
-----------------------------------	--	-------

1 *Introdução*

É de conhecimento geral que a Física Moderna, que teve suas bases estabelecidas no século XX, se assenta essencialmente em dois pilares: a Relatividade Geral (RG) e o Modelo Padrão da Física de Partículas (MP). A primeira descreve a gravitação a nível clássico, ao passo que a segunda descreve todos os fenômenos físicos envolvendo partículas e campos a nível quântico. Ambas as teorias adquiriram, ao longo do século XX e também do XXI, um enorme sucesso no meio científico, tendo as suas previsões sido testadas com uma boa precisão (desde a previsão do desvio na trajetória de um raio luminoso por influência de um campo gravitacional pela RG até a recente descoberta do bóson de Higgs pelo MP em 2012), de modo que, sem dúvida alguma, a construção destas duas teorias foi fundamental para a formação da nossa atual compreensão do universo, bem como para a nossa forma de pensar a natureza.

Entretanto, é também largamente conhecido que o sucesso das referidas teorias veio acompanhado de um grande problema, ainda sem solução, para a Física do século XX/XXI: o conflito entre a RG e o MP e a impossibilidade de descrevê-las dentro de uma mesma estrutura teórica (problema da unificação). Nos fenômenos descritos pela RG ou pelo MP, o problema da não unificação não gera nenhum conflito, uma vez que nas escalas de energia onde são aplicadas somente é necessário usar uma delas para ter uma boa descrição do fenômeno estudado. Contudo, a busca de uma teoria que descreva consistentemente a unificação da RG com o MP é fundamental, uma vez que isso é crucial para a compreensão de certos fenômenos físicos que envolvem uma mistura entre os tipos de fenômenos descritos pelas duas teorias (como é o caso dos buracos negros ou do universo primordial, onde se tem grandes massas comprimidas em dimensões de distância muito pequenas). Foram muitas as propostas que surgiram desde o século passado para se fazer essa unificação (teoria de cordas, gravitação quântica de laço etc.), de modo que quaisquer pesquisas feitas no sentido de intentar fazer essa unificação ou de elucidar aspectos dessa teoria unificada é de grande importância para a Física como um todo.

A Física atual prevê que a unificação entre a RG e o MP deve ocorrer numa escala de energia altíssima (conhecida como escala de Planck, com aproximadamente 10^{19} GeV de energia), e que é atualmente inacessível aos experimentos. Entretanto, apesar de ser impossível a realização direta de experimentos nesse regime de energia, poderíamos, em princípio, observar em nosso regime de baixas energias (acessíveis aos experimentos atuais) sinais dessa teoria unificada da escala de

Planck. Nesse sentido foi proposto o Modelo Padrão Estendido (MPE), uma teoria de campo efetiva que surge com o intuito de tentar captar alguns sinais indiretos da existência dessa teoria unificada nos regimes de baixas energias.

A proposta central do MPE é dizer que, na escala de Planck, deve ocorrer uma violação da simetria de Lorentz. Esta violação seria tão evidente em regimes de alta energia, a ponto de dois observadores perceberem físicas diferentes pelo simples fato de estarem se movendo entre si com velocidade constante. Em nosso regime de energia, no entanto, não observamos sinais dessa quebra de simetria (a relatividade é perfeitamente válida). Assim, se essa violação existe, devemos supor que os seus efeitos, em nosso atual regime de energia acessível aos experimentos, sejam muito pequenos, uma vez que não são observados. Portanto, os sinais desta violação da simetria de Lorentz, apesar de serem expressivos somente em altas energias, já poderiam ser observados em experimentos altamente sensíveis em regimes de baixas energias.

A proposta do MPE baseia-se na possível quebra ou violação de uma simetria fundamental da natureza (simetria de Lorentz). Essa possibilidade de violação da simetria de Lorentz está hoje amparada em algumas evidências experimentais que sugerem que isto poderia de fato ocorrer, e que servem como motivação para o desenvolvimento e o estudo de modelos com violação da simetria de Lorentz. Como exemplo de duas destas evidências experimentais, podemos citar a sugestão da variação da constante de estrutura fina $\alpha = e^2/\hbar c$ [1-3] (resultante da observação do espectro de estrelas), e o estudo do tempo de vida de raios cósmicos ultra energéticos com níveis de energia acima do limite GZK [4, 5] (partículas estas que seriam esperadas decair muito antes de chegarem à Terra). Neste caso, uma possível explicação para estas evidências é que o valor de c poderia não ser constante, e assim, estas partículas poderiam desenvolver em seus trajetos velocidades maiores que a da luz. Uma outra importante motivação para se estudar modelos com violação da simetria de Lorentz é que isto poderia trazer modificações na física de partículas e campos. Isso ocorre porque o teorema CPT (que estabelece que a simetria CPT não pode ser violada na natureza), tem sua demonstração baseada na impossibilidade de violação da simetria de Lorentz. Deste modo, se a simetria de Lorentz puder ser violada, a simetria CPT também poderia, o que traria em princípio modificações relevantes para o entendimento da física de partículas.

A ideia de que uma quebra da simetria de Lorentz deve ocorrer na escala de Planck já é bem aceita e já ganhou muitos adeptos desde que foi lançada. No entanto, os modos como essa quebra poderia ser implementada nos modelos teóricos são diversos, se dividindo em duas categorias ou formas de violação: a quebra explícita e a quebra espontânea (conforme discutiremos brevemente na última seção do capítulo 2). Particularmente, a quebra espontânea da simetria de Lorentz proposta por Kostelecky e Samuel [6] em 1989 é amplamente aceita pela comunidade como um modo sistemático de introduzir a violação de Lorentz. Estes dois pesquisadores se inspiraram em modelos de teoria de cordas, onde termos que permitem a quebra espontânea da simetria de Lorentz surgem naturalmente (através de algumas quantidades tensoriais que adquirem um valor

esperado de vácuo não nulo), sendo esta a inspiração para a implementação do MPE.

Estudos posteriores indicaram que a gravidade quântica de laço, as teorias de campo não-comutativas, cenários de mundo-brana e modelos de dinâmica aleatória também envolvem a violação da simetria de Lorentz. Estas observações fizeram com que o interesse no estudo da quebra ou violação da simetria de Lorentz crescesse rapidamente nas últimas décadas, uma vez que poderia haver uma forma de testar, entre as teorias candidatas para a gravitação quântica, qual seria a melhor em descrever tais efeitos.

A dissertação segue o seguinte desenvolvimento: No capítulo 2 fazemos a introdução das transformações de Lorentz, os elementos básicos que permitem falar da existência de uma simetria fundamental do espaço-tempo que garante a universalidade das leis da Física para quaisquer observadores inerciais (simetria de Lorentz). É feita, portanto, neste capítulo, uma breve revisão das transformações de Lorentz, grupo de Lorentz e discutidas algumas de suas propriedades. Comenta-se, ainda, brevemente sobre a importante distinção entre invariâncias globais de Lorentz (que ocorrem no contexto do espaço plano da Relatividade Restrita) e invariâncias locais de Lorentz (que ocorrem no contexto de espaços curvos da RG).

Uma discussão mais detalhada do MPE e da ideia introduzida por Kostelecky e Samuel será feita no capítulo 3. Inicialmente, será apresentado o modelo teórico do MPE, para depois se discutir os modelos que implementam a violação espontânea da simetria de Lorentz através da dinâmica de um campo vetorial B_μ . Notamos que, pelo já discutido acima, na construção da lagrangiana que descreve o MPE, é esperado que esta contenha a lagrangiana da RG, a lagrangiana do MP e uma lagrangiana adicional que carregaria em sua estrutura os termos de violação da simetria de Lorentz. Esta lagrangiana deve ser construída de modo tal que, em baixas energias, recuperemos as teorias da RG e do MP. Desse modo, os efeitos da dinâmica dos campos que produzem a quebra espontânea de Lorentz são irrelevantes em energias suficientemente baixas. Essas questões envolvendo a construção da lagrangiana do MPE serão discutidas com mais detalhes na primeira seção do capítulo 3.

Logo em seguida, fazemos uma discussão geral do modelo que será usado neste trabalho, mediante o qual a quebra espontânea da simetria de Lorentz será implementada, conhecido como modelo bumblebee. Fazemos inicialmente uma discussão geral desses modelos bumblebee, para depois particularizarmos aos termos com os quais nos preocuparemos na presente dissertação. Por fim, discutimos no final deste capítulo o modelo teórico com o qual trabalharemos, bem como deduzimos as equações de campo de Einstein com as modificações implementadas pela quebra espontânea. Assim, a dissertação tem por objetivo verificar as modificações causadas pelos termos de violação de Lorentz em quantidades físicas amplamente conhecidas por testarem a RG.

O MPE incorpora o termos de violação de Lorentz (VL) em todos os setores de interação do Modelo Padrão das Partículas Elementares e da Relatividade Geral. Contudo, nesta dissertação,

focaremos somente no setor gravitacional deste modelo e, visando simplificar as contas, trabalharemos em geometrias com torção nula (geometrias riemannianas), onde a conexão ($\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$) é simétrica em seus índices covariantes. Ressaltamos, no entanto, que numa discussão mais completa do MPE, é necessário usar o formalismo das tetradas (vierbein) no espaço-tempo de Riemann-Cartan [7] (que admite torção não nula). Isto se faz necessário pois o formalismo vierbein admite espinores (que representariam as partículas), além de fazerem uma distinção natural entre transformações de Lorentz locais e transformações gerais de coordenadas, o que não ocorre no formalismo usado para o espaço de Riemann da RG, onde derivadas covariantes atuam em representações do grupo $GL(4, \mathbb{R})$. Neste cenário mais complexo, é adequado discutir o MPE em todos os seus setores (envolvendo tanto setores da RG quanto do MP). Se quisermos, a partir deste cenário geral, recuperarmos o espaço-tempo de Riemann da RG, basta fazermos o limite de torção nula, sendo Minkowski um caso especial onde se tem tanto torção nula quanto curvatura nula.

A discussão poderia então partir deste cenário mais complexo e posteriormente fazermos a restrição para cenários mais simples e assim ver o que ocorre nos espaços-tempos da RG e por fim, da RR. No entanto, a nossa discussão será feita partindo-se do caso mais simples dos espaços da RG, visando posteriormente (como perspectivas futuras para além desta dissertação) uma compreensão mais geral de cenários envolvendo torção não nula. Portanto, o formalismo vierbein é ideal se quisermos estudar os setores do MPE inteiros, mas isto não será necessário neste trabalho, uma vez que nos focaremos somente no setor gravitacional desta teoria efetiva (não incluiremos espinores no desenvolvimento da dissertação).

Por fim, no capítulo 4, mostramos as modificações produzidas pelos efeitos da quebra da simetria de Lorentz em algumas observações ou quantidades físicas que testam a Relatividade Geral. Esses testes incluem o avanço do periélio de Mercúrio, o desvio da luz devido a presença de um campo gravitacional e o atraso do tempo de recepção de um sinal luminoso devido a curvatura do espaço-tempo. Encerramos este último capítulo estabelecendo alguns limites superiores para os parâmetros de violação da simetria de Lorentz.

2 *Simetrias do espaço-tempo em Relatividade*

Discutimos neste capítulo sobre a simetria que desempenha um papel central no presente trabalho: a simetria de Lorentz. Iniciamos fazendo uma discussão geral das transformações de Lorentz e do grupo de Lorentz, estabelecendo em seguida as relações que o definem, e fazendo ao final uma distinção entre invariâncias globais e locais de Lorentz. Posteriormente, fazemos uma breve discussão sobre transformações de observador e de partícula, conceitos estes que ganham uma especial importância em modelos que admitem violação da simetria de Lorentz. Por fim, ilustramos no final do capítulo um exemplo de como ocorre a quebra espontânea de simetria numa teoria clássica de campos, e encerramos falando sobre a violação espontânea da simetria de Lorentz, que é a ideia propriamente dita com a qual iremos lidar neste trabalho.

2.1 Transformações de Lorentz globais e locais

Um dos postulados da Relatividade Restrita (RR) afirma que as leis da Física devem ser invariantes sob transformações de Lorentz. Deste modo, para um dado evento localizado no espaço-tempo pelo quadri-vector x^μ , dois observadores inerciais distintos (S e S') que se movem entre si com velocidade relativa v , o percebem de modo tal que suas coordenadas estejam relacionadas pela seguinte transformação:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz, e onde supomos que os dois observadores se movem entre si de modo que os seus eixos x e x' estejam alinhados. Na RR, qualquer grandeza física (velocidade, momento etc...) é relacionada pelas transformações (2.1) de modo tal a deixarem as leis físicas invariantes.

O estudo de quantidades que não dependem do referencial em que são observadas (escalares de Lorentz) tem um papel central na RR. Um escalar de Lorentz bem conhecido é o elemento de

linha ds , que fornece a distância entre dois pontos do espaço-tempo. Na RR, ele é dado por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.2)$$

A sequência de sinais em (2.2) estabelece uma assinatura que é própria da RR, e define o chamado espaço-tempo de Minkowski. Reescrevendo (2.2) como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

temos que este espaço é caracterizado pela métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$.

As transformações de Lorentz (2.1) podem ainda ser reescritas de uma forma mais simples como a ação de uma matriz de ordem 4×4 (de coeficientes $\Lambda^\mu{}_\nu$) sobre vetores coluna que representam pontos do espaço-tempo. Deste modo sucinto, (2.1) se escreve:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.4)$$

a matriz Λ é chamada matriz de Lorentz e a sua atuação representa a transformação propriamente dita. É ainda imediato de (2.1) que a sua forma matricial é dada por:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Verifica-se que as matrizes (2.5) formam parte de um grupo conhecido como grupo de Lorentz. Este grupo é definido de modo tal que a transformação causada por um de seus elementos deixa o produto escalar de dois quadrivetores invariante. Deste modo, sendo dados dois quadrivetores x^μ e y^μ , a exigência de que $x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu$ implica que as matrizes $\Lambda^\mu{}_\nu$ satisfaçam a igualdade:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.6)$$

As matrizes Λ que satisfazem (2.6) caracterizam o grupo das transformações de Lorentz.

A equação (2.6) pode ser reescrita como:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (2.7)$$

Da relação matricial (2.7), seguem de imediato as propriedades de fechamento, associatividade, existência de elemento neutro e inverso das matrizes Λ , propriedades estas necessárias para a existência de um grupo. Portanto, o grupo de Lorentz pode ser caracterizado pela relação (2.6) ou pela relação (2.7) de modo equivalente.

Para além da matriz de Lorentz (2.5), as matrizes de reversão temporal e espacial, definidas

por

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

também satisfazem a relação (2.7), o que nos diz que estas transformações também estão contidas no grupo de Lorentz. Entretanto, as transformações de Lorentz propriamente ditas (2.5) (representativas de boosts e rotações), podem ser formadas por sucessivas transformações infinitesimais (isto é, são transformações contínuas), ao passo que as transformações T e P não podem (isto é, são transformações discretas).

As transformações de Lorentz consistem de três rotações e três boosts. Uma forma de ver isso com clareza é pela análise dos geradores do grupo de Lorentz considerando-se uma transformação infinitesimal. Para isto, representa-se um elemento do grupo de Lorentz ($\Lambda^\mu{}_\nu$) próximo à identidade:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (2.9)$$

com $|\omega^\mu{}_\nu| \ll 1$. A exigência de que (2.9) satisfaça (2.6), leva de imediato à antissimetria dos elementos $\omega_{\mu\nu}$:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (2.10)$$

onde foram desprezados termos de segunda ordem em ω . Mostra-se assim que os geradores das transformações de Lorentz ($\omega_{\mu\nu}$) possuem apenas seis graus de liberdade, que são identificados com três boosts e três rotações.

Na RR, as equações de movimento para as partículas e para os campos são invariantes pelas transformações de Lorentz (2.1). Nesta teoria, a geometria é descrita pela métrica plana de Minkowski, de modo que as transformações de Lorentz se efetuam do mesmo modo em qualquer ponto do espaço-tempo. Em tais casos, estas simetrias são conhecidas como invariâncias globais de Lorentz.

Na RG, entretanto, a geometria não é mais plana (riemanniana), podendo apresentar curvatura ao longo de sua extensão. Neste caso, as transformações de Lorentz já não são efetuadas do mesmo modo em todo ponto do espaço-tempo, podendo estas transformações deixarem de ser uma simetria do espaço-tempo. Pelo princípio de equivalência, no entanto, a simetria de Lorentz pode ser preservada localmente. Em tais casos, estas são chamadas invariâncias locais de Lorentz. Em qualquer modelo envolvendo gravitação, a exigência de preservação da simetria de Lorentz é central.

Portanto, em cenários sem gravidade (RR, por exemplo), as simetrias de interesse são as transformações globais de Lorentz. Em cenários com gravidade (RG, por exemplo), as simetrias de Lorentz tornam-se locais.

No capítulo que segue, trabalharemos com geometrias riemannianas (características da RG), de modo que a exigência da invariância local de Lorentz na montagem da lagrangiana do modelo será central.

2.2 Transformações de observador e partícula

No estudo de modelos com violação da simetria de Lorentz, um ponto central é a distinção entre dois tipos de transformações: transformações de observador e de partícula. Em teorias que preservam a simetria de Lorentz, a diferença entre estes dois tipos de transformações não tem significado, pois são equivalentes umas das outras. Entretanto, quando a simetria é quebrada, essa equivalência não é mais válida e uma distinção entre estas transformações se faz necessária.

As transformações de observador são entendidas como aquelas onde há somente mudanças entre sistemas de coordenadas, enquanto as quantidades que descrevem as partículas e os campos permanecem inalteradas. As transformações de Lorentz da seção 2.1 podem ser vistas como exemplos de transformações deste tipo. Podemos enxergá-las como somente uma passagem de um sistema de coordenadas para outro, de modo que o sistema físico (que pode ser uma partícula se movendo com velocidade constante numa dada direção, por exemplo) não é afetado. O que há, nesta interpretação, é só uma descrição de como os dois observadores percebem o fenômeno físico.

Por outro lado, as mesmas transformações de Lorentz (2.1), podem ser entendidas como sendo efetuadas diretamente nas partículas e campos (um boost diretamente na partícula, por exemplo), deixando o sistema de coordenadas (observador) fixo. Quando entendidas desta forma, são chamadas transformações de partícula.

Na RR (que preserva a simetria de Lorentz), por exemplo, distinguir entre transformações de observador e partícula não tem muito significado. De fato, consideremos uma partícula no plano cartesiano, conforme mostrado na figura da página seguinte. É fácil mostrar que se quisermos localizar a mesma partícula em dois sistemas de coordenadas S e S' que diferem entre si somente de uma rotação de um ângulo ϕ , a matriz de transformação (de observador) que relaciona as coordenadas da partícula nos dois sistemas é:

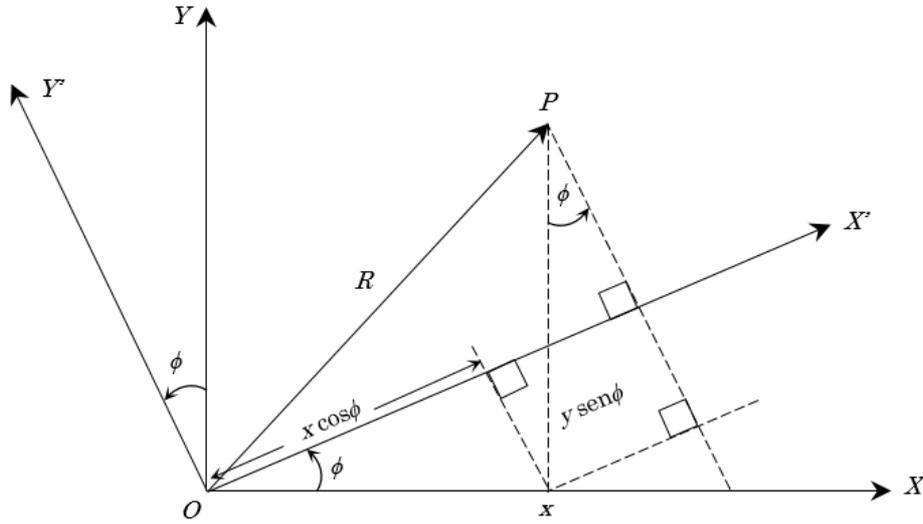
$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Ou ainda, no caso de uma rotação infinitesimal $\delta\phi$:

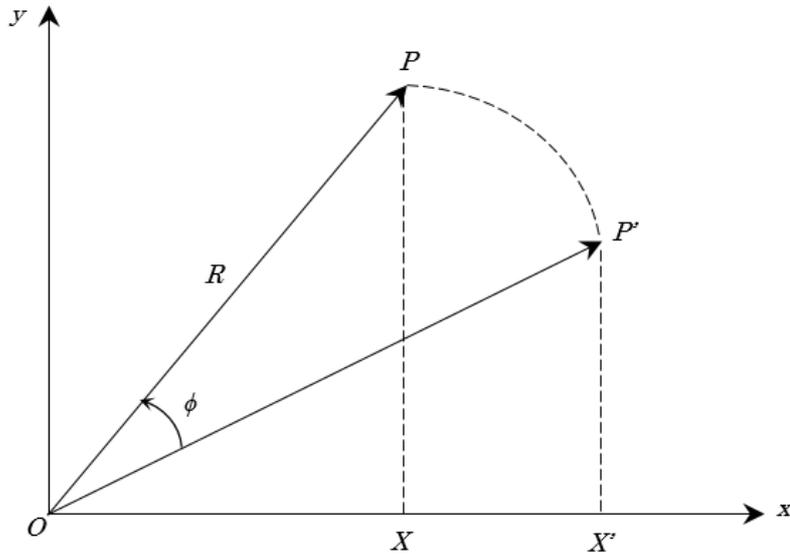
$$R = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Se considerarmos agora somente um único observador (S , digamos), e realizarmos uma rotação ativa da partícula (transformação de partícula) de um ângulo $-\phi$, mostra-se que a matriz de

transformação que leva a partícula de um ponto ao outro é também dada por (2.11). Portanto, na RR (e mais geralmente, em qualquer teoria que não viola a simetria de Lorentz), as transformações de observador e partícula são inteiramente equivalentes. As expressões (2.11) e (2.12) mostram ainda que essa equivalência se dá tanto para rotações finitas quanto infinitesimais.



(a) Rotação passiva



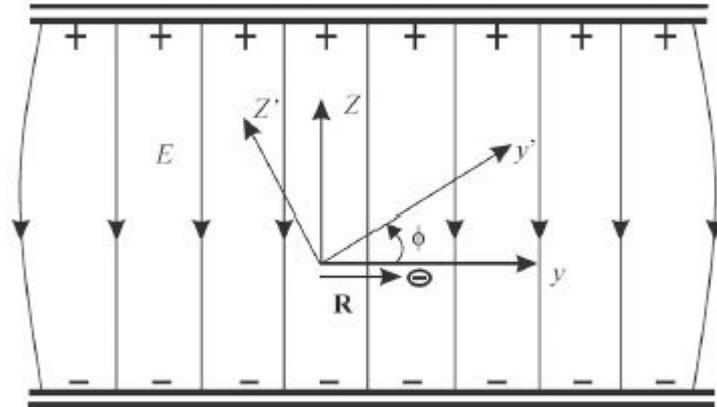
(b) Rotação ativa

Figura 2.1: Rotações passiva e ativa

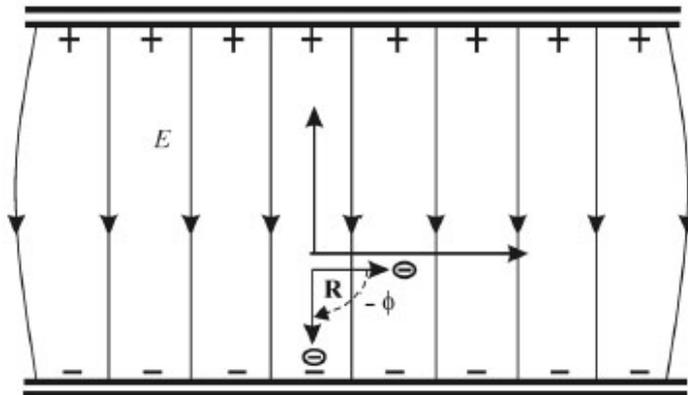
Por outro lado, consideremos o esquema mostrado na figura (2.2), onde se tem uma partícula carregada imersa numa região com um campo de fundo (neste caso, o campo elétrico). Para o caso de uma rotação passiva de um ângulo $\phi = \pi/2$, temos que os dois observadores S e S' concordam que o vetor de posição \mathbf{R} que localiza a partícula carregada é perpendicular ao campo de fundo. Para o caso de uma rotação ativa de $\phi = -\pi/2$, por sua vez, o vetor de posição da partícula carregada após a rotação, é paralelo ao campo de fundo. Portanto, a presença do campo elétrico

de fundo quebra a equivalência entre as duas situações.

É razoável supor que a Física não deve depender de um observador em particular. Sendo assim, uma teoria física deve, por construção, se manter invariante sob transformações de observador. Por esta razão, as transformações de observador não trazem nenhum significado novo como transformações de simetria, pois não é possível perceber nenhuma mudança física decorrente deste tipo de transformação. As transformações de simetria que desempenham um papel fisicamente relevante são as de partícula. Através destas, já é possível perceber uma mudança na física antes e depois da transformação.



(a) Rotação passiva com partícula carregada num campo de fundo



(b) Rotação ativa da partícula carregada num campo de fundo

Figura 2.2: Rotações passiva e ativa para uma partícula carregada num campo de fundo

Sendo assim, na RG, por exemplo, deve-se exigir que as equações de movimento sejam covariantes sob transformações de observador. Os difeomorfismos, por sua vez, são transformações feitas

com um observador fixo, são transformações de partículas feitas nos tensores do campo (métrica, por exemplo) que deixam as equações de movimento invariantes.

De um modo mais geral, mesmo em modelos contendo termos que quebram a simetria de Lorentz, tais termos não devem depender de um referencial em particular, isto é, a lagrangiana da teoria deve continuar sendo invariante por transformações de observador. Está na base do MPE a exigência de que, mesmo com violação de Lorentz, a física deve independer do observador (os resultados dos experimentos físicos não devem depender da perspectiva escolhida de qualquer observador). Assim, ainda nesses casos, a lagrangiana e as equações de movimento da teoria devem ser invariantes sob transformações de observador. No entanto, o mesmo não se sucede com as transformações de partículas. Quando estas são efetuadas em modelos com violação da simetria de Lorentz, a física já pode mudar.

Um ponto importante a ser destacado é que quando a invariância local de Lorentz é quebrada, é somente a transformação de Lorentz de partícula que é quebrada, a teoria permanece independente do observador. Do mesmo modo em RG com violação de Lorentz, a quebra ocorre nas transformações locais de partícula e difeomorfismos. A teoria geral continua covariante sob transformações de observador locais e globais de Lorentz.

A discussão feita acima encerra esta seção sobre transformações de observador e partícula, ideias estas que serão essenciais na discussão do setor gravitacional do MPE no capítulo 3.

2.3 Violação da simetria de Lorentz

A violação da simetria de Lorentz pode se dar de forma explícita ou espontânea. Neste trabalho, contudo, utilizaremos um modelo onde a violação ou quebra da simetria de Lorentz ocorre espontaneamente. No que segue, será comentado em linhas gerais como ocorre esta quebra espontânea. Primeiramente, no entanto, será feita uma recapitulação de como a quebra espontânea de uma simetria ocorre em teorias clássicas de campos.

2.3.1 Quebra espontânea de simetria em modelos clássicos

Nesta subseção, faremos uma breve discussão de como ocorre a quebra espontânea de simetria em teorias clássicas de campos [8]. O protótipo para ilustrar o fenômeno será o modelo $\lambda\phi^4$ com campo escalar complexo, que é descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2, \quad (2.13)$$

com

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (2.14)$$

sendo um campo complexo, ou

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (2.15)$$

com ϕ_1 e ϕ_2 sendo campos reais. Esse modelo é invariante sob transformações globais do grupo $U(1)$, isto é, transformações do tipo

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi, \quad (2.16)$$

ou em termos de ϕ_1 e ϕ_2

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \phi'_1 = \cos\alpha\phi_1 - \sin\alpha\phi_2, \\ \phi_2 &\rightarrow \phi'_2 = \sin\alpha\phi_1 + \cos\alpha\phi_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

com o parâmetro α constante (independente das coordenadas de espaço-tempo), deixam a lagrangiana (2.13) (ou (2.15)) invariante. Portanto, na teoria descrita por (2.15), não existe quebra explícita da simetria $U(1)$ (isso poderia ser feito, por exemplo, pela introdução de termos na lagrangiana que não envolvessem combinações do tipo $\phi_1^2 + \phi_2^2$).

Para ver se o modelo em questão quebra espontaneamente a simetria $U(1)$, é necessário fazer uma análise mais sutil, olhando-se para o estado fundamental da teoria. O estado fundamental é, por definição, a configuração de campos de menor energia. Estes estados podem então ser obtidos pela minimização do funcional de energia da teoria. Lembramos que, numa teoria de campos, o quadrimomento P^μ do campo é dado em termos do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ do modelo pela seguinte expressão:

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}. \quad (2.18)$$

Sabemos da RR que a energia do campo relaciona-se com a componente P^0 do quadrimomento (estamos usando $c = 1$). Portanto, tomando $\mu = 0$ em (2.18), obtemos para uma teoria de campos o seguinte funcional de energia:

$$E = \int d^3x T^{00}, \quad (2.19)$$

sendo T_{00} a componente temporal do tensor de energia-momento. O tensor de energia-momento, por sua vez, é dado em termos da lagrangiana do modelo pela seguinte expressão:

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^I)}\partial_\nu\phi^I - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}, \quad (2.20)$$

sendo ϕ^I o conjunto completo de campos que definem o modelo (para este caso, $\phi^I = (\phi^1, \phi^2) = (\phi, \phi^*)$), e onde subentende-se uma soma no índice I . Tomando a componente T^{00} do tensor de energia-momento, escrevemos para o modelo (2.13) o seguinte funcional de energia:

$$E = \int d^3x (\partial_0\phi^*\partial_0\phi + \partial_i\phi^*\partial_i\phi + V(|\phi|)), \quad (2.21)$$

sendo

$$V(|\phi|) = m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4. \quad (2.22)$$

O estado fundamental deve ser tal que o termo cinético presente em (2.21) se anule, uma vez que se tratam de termos quadráticos e estamos buscando estados de mínima energia. Deste modo, estabelece-se que o campo ϕ seja constante no espaço e no tempo, o que se traduz pela seguinte expressão:

$$\partial_\mu\phi = 0 \quad (2.23)$$

Com o uso de (2.23), encontrar o estado fundamental se resume a minimizar o potencial V descrito em (2.22). Isto é feito impondo-se

$$\frac{\partial V}{\partial|\phi|} = 0, \quad (2.24)$$

o que resulta em:

$$|\phi|(m^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \quad (2.25)$$

Cabe em (2.25) analisar dois casos: $m^2 \geq 0$ e $m^2 < 0$. Para $m^2 \geq 0$, os termos no parênteses são positivos ou iguais a zero, de modo que o mínimo é obtido para $\phi = 0$. Para $m^2 < 0$, o estado de vácuo é tal que $|\phi| = \mu/\sqrt{2\lambda}$. Portanto, no espaço dos campos ϕ_1 e ϕ_2 , o estado fundamental é o conjunto de todos os pontos distribuídos num anel circular de raio $\mu/\sqrt{2\lambda}$. O comportamento destes dois estados de vácuo sob a transformação de simetria (2.16) mostra se no modelo a simetria $U(1)$ é espontaneamente quebrada ou não. Para $\phi = 0$, é evidente que a simetria (2.16) é preservada (o estado $\phi = 0$ é levado nele mesmo sob transformações do grupo $U(1)$). Para o outro caso, tomemos por exemplo o estado de vácuo particular em que $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \mu/\sqrt{2\lambda}$. Fica claro que se aplicarmos a este estado as transformações (2.17), o estado não é levado nele mesmo, quebrando assim a simetria $U(1)$. Portanto, diz-se que, para $m^2 < 0$, a simetria $U(1)$ é quebrada espontaneamente no modelo (2.13).

2.3.2 Violação espontânea da simetria de Lorentz

Conforme discutido na introdução, é esperado que a teoria unificada (da RG com o MP) viole algumas simetrias que em baixas energias são preservadas (como invariância local de Lorentz e difeomorfismos). Uma teoria de campo efetiva, que descreva em baixas energias os efeitos vindos da escala de unificação, pode admitir tanto a violação explícita da simetria de Lorentz quanto a violação espontânea desta simetria [9, 10]. Em linhas gerais, a quebra explícita ocorre quando se tem um termo não covariante aparecendo diretamente na lagrangiana da teoria. Para o caso de uma quebra espontânea, a lagrangiana da teoria se mantém invariante sob transformações de simetria, mas as soluções de vácuo não (conforme exemplo da subseção 2.3.1). Esta violação se dá através de valores esperados de vácuo (VEV's) não nulos adquiridos por campos tensoriais dinâmicos que carregam as informações de quebra da simetria. Neste trabalho, nos focaremos somente em modelos contendo este último tipo de violação.

Como visto na subseção anterior, numa teoria clássica de campos, a quebra espontânea da simetria é induzida pela presença de um termo potencial na lagrangiana. A minimização deste termo potencial é que permite achar o estado de vácuo que pode quebrar a simetria original do modelo. Portanto, se se deseja construir um modelo com violação espontânea, é central que se inclua um termo potencial na lagrangiana da teoria efetiva. Foi esta a ideia introduzida por Kostelecký e Samuel [5], onde eles incluíram um termo potencial na lagrangiana que força um valor esperado de vácuo não nulo para um campo vetorial chamado de campo de bumblebee, que será responsável por quebrar espontaneamente a simetria de Lorentz. Os detalhes deste fenômeno serão apresentados no próximo capítulo.

3 *Interação gravitacional e violação espontânea de Lorentz no MPE*

Iniciamos este capítulo fazendo uma apresentação da lagrangiana geral do MPE, para depois particularizarmos nossa atenção ao seu setor gravitacional, que é o setor que nos interessa no presente trabalho. Mostramos em seguida como a lagrangiana deste setor pode ser construída como uma série de potências, e discutimos algumas de suas propriedades. Posteriormente, fazemos uma discussão geral dos modelos através dos quais a violação espontânea da simetria de Lorentz será implementada, conhecidos como modelos bumblebee. Após essa discussão inicial, encerramos o capítulo apresentando o modelo teórico com o qual trabalharemos nesta dissertação.

3.1 O setor gravitacional do MPE

O Modelo Padrão Estendido é uma teoria de campo efetiva que incorpora os efeitos da violação da simetria de Lorentz tanto na RG como no MP. Portanto, é esperado que a lagrangiana do MPE tenha a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{RG} + \mathcal{L}_{LV} \quad (3.1)$$

sendo \mathcal{L}_{MP} a lagrangiana que descreve todos os campos do modelo padrão da física de partículas, \mathcal{L}_{RG} a lagrangiana que descreve o campo gravitacional (tal como descrito pela Relatividade Geral) e \mathcal{L}_{LV} a lagrangiana que contém os termos de violação da simetria de Lorentz. Neste trabalho, nos focamos somente em explorar a interação gravitacional em conjunto com as modificações que podem ser causadas pela presença dos termos de violação, isto é, com a soma $\mathcal{L}_{RG} + \mathcal{L}_{LV}$ de (3.1) (de agora em diante denominada simplesmente $\mathcal{L}_{gravidade}$). Quaisquer influências que possam advir de interações próprias do MP serão desprezadas.

A ação puramente gravitacional do MPE pode ser escrita como:

$$S_{gravidade} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \mathcal{L}_{gravidade}, \quad (3.2)$$

sendo $1/2\kappa = 1/16\pi G \approx 3 \times 10^{36} \text{ GeV}^2$ a constante de acoplamento gravitacional. A lagrangiana $\mathcal{L}_{gravidade}$ pode ser convenientemente separada em duas partes:

$$\mathcal{L}_{gravidade} = \mathcal{L}_{LI} + \mathcal{L}_{LV}, \quad (3.3)$$

sendo \mathcal{L}_{LI} a lagrangiana que contém os termos invariantes de Lorentz e \mathcal{L}_{LV} a lagrangiana que contém os termos de violação de Lorentz. A lagrangiana (3.3), combinada com os setores de matéria e de gauge do MPE (e ainda possivelmente com outros setores ainda não observados na nossa escala de energia), levariam a uma descrição da teoria subjacente na escala de Planck.

A porção invariante de Lorentz (\mathcal{L}_{LI}) pode ser expressa como uma série de potências da curvatura, torção e derivadas covariantes:

$$\mathcal{L}_{LI} = eR - 2e\Lambda + \dots \quad (3.4)$$

onde escrevemos explicitamente somente os termos dominantes em baixas energias. O primeiro termo de (3.4) é a conhecida lagrangiana de Einstein-Hilbert da RG, enquanto o segundo é aquele que contém a constante cosmológica (estamos fazendo $e = \sqrt{-g}$). A lagrangiana (3.4) é aquela que, quando acoplada a campos de matéria, produz as conhecidas equações de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento. As reticências em (3.4) representam termos de ordem superior na curvatura, torção e derivadas covariantes. Esses termos produziriam correções nas equações de campo (3.5) e existem na literatura trabalhos com esses termos de ordem superior (vide Ref. [11], por exemplo). No entanto, neste trabalho consideraremos somente os termos explícitos mostrados em (3.4).

Em relação à porção que viola a simetria de Lorentz (\mathcal{L}_{LV}), esta é construída contraindo-se os tensores responsáveis pela quebra da simetria de Lorentz (chamados coeficientes para a violação de Lorentz) com os tensores característicos da RG para produzirem quantidades que são tanto invariantes de Lorentz por transformações de observador locais quanto por transformações de observador globais. A lagrangiana \mathcal{L}_{LV} pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LV} = & e(k_T)^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + e(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} \\ & + e(k_{TT})^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu} T_{\alpha\beta\gamma} T_{\lambda\mu\nu} \\ & + e(k_{DT})^{\kappa\lambda\mu\nu} D_{\kappa} T_{\lambda\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sendo $T_{\mu\nu}^{\lambda}$ o tensor de torção (não confundir com o tensor de energia-momento de dois índices do capítulo 2), D_{μ} a derivada covariante e $(k_T)^{\lambda\mu\nu}$, $(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu}$, $(k_{TT})^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu}$ e $(k_{DT})^{\kappa\lambda\mu\nu}$ as quantidades que carregam a quebra de simetria (coeficientes para a violação de Lorentz).

Na equação (3.6), todos os coeficientes para a violação de Lorentz são reais e admite-se ainda que eles possuam as mesmas simetrias em seus índices dos tensores com os quais estão contraídos. Quanto à dimensão destes coeficientes, é imediato que $(k_T)^{\lambda\mu\nu}$ deve ter dimensão de massa, enquanto os demais devem ser adimensionais (em unidades $\hbar = c = 1$). De fato, neste sistema de

unidades, vale a relação:

$$L = T = M^{-1}, \quad (3.7)$$

onde L , T e M denotam as unidades de comprimento, tempo, e massa, respectivamente. Das expressões que definem a torção, o tensor de curvatura, e a derivada covariante, concluímos que:

$$[T_{\mu\nu}^{\lambda}] = L^{-1}, \quad (3.8)$$

$$[R_{\kappa\lambda\mu\nu}] = L^{-2}, \quad (3.9)$$

$$[D_{\kappa}] = L^{-1}, \quad (3.10)$$

onde $[X]$ denota a dimensão da quantidade X . Considerando que a lagrangiana deve ser adimensional, obtemos finalmente que

$$[(k_T)^{\lambda\mu\nu}] = M, \quad (3.11)$$

$$[(k_R)^{\kappa\lambda\mu\nu}] = 1, \quad (3.12)$$

$$[(k_{TT})^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu}] = 1, \quad (3.13)$$

$$[(k_{DT})^{\kappa\lambda\mu\nu}] = 1. \quad (3.14)$$

Do mesmo modo que antes, as reticências em (3.6) representam termos de ordem superior nos tensores de curvatura, torção e derivadas covariantes. Para baixas energias, no entanto, os termos dominantes da violação de Lorentz estão todos explicitados em (3.6). Os termos contidos nas reticências só desempenhariam um papel importante na medida em que o nível de energia fosse se aproximando da escala de energia de Planck.

Em modelos com torção nula ($T_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$), todos os termos envolvendo a torção na lagrangiana (3.6) desaparecem, sobrando apenas o segundo termo. Esse termo único de sobra pode ser expandido de modo a ser representado como uma soma de três termos envolvendo novos coeficientes para a violação de Lorentz acoplados com o tensor de curvatura e suas contrações (tensor de Ricci e escalar de curvatura). A lagrangiana \mathcal{L}_{LV} pode assim ser escrita da seguinte forma (conforme [5]):

$$\mathcal{L}_{LV} = euR + es^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + et^{\kappa\lambda\mu\nu}R_{\kappa\lambda\mu\nu} \quad (3.15)$$

sendo u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\kappa\lambda\mu\nu}$ os novos coeficientes para a violação de Lorentz. Do mesmo modo como antes, os coeficientes $s^{\mu\nu}$ e $t^{\kappa\lambda\mu\nu}$ devem ter as mesmas simetrias em seus índices dos tensores de Ricci e Riemann, respectivamente.

A lagrangiana (3.15) em conjunto com a lagrangiana (3.4), formam a lagrangiana de interesse para o presente trabalho. Além disso, estabelecemos ainda $\Lambda = 0$ e $t^{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$, de modo que estaremos interessados somente nas correções que possam advir dos coeficientes u e $s^{\mu\nu}$. Portanto, $\mathcal{L}_{gravidade}$ se escreve:

$$\mathcal{L}_{gravidade} = e(1 + u)R + es^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

que será a lagrangiana explorada neste trabalho.

3.2 O modelo bumblebee

A próxima questão natural que se apresenta é de como a quebra da simetria de Lorentz será realizada na lagrangiana (3.16). Como já discutido no capítulo 2, essa quebra da simetria pode ser explícita ou espontânea. No entanto, nos focaremos nesta última.

Existem na literatura modelos que propõem uma forma usual e simples de causar a quebra espontânea da simetria de Lorentz com o auxílio de um campo vetorial B_μ . Nesses modelos, a violação pode ser implementada através da dinâmica deste único campo vetorial. Eles são chamados de modelos bumblebee e o campo B_μ recebe a designação de campo bumblebee.

Em modelos bumblebee, um potencial V (responsável por induzir um valor esperado de vácuo não nulo para o campo vetorial B_μ) é incluído na ação. Este potencial é construído como uma função de um escalar X , que envolve combinações misturando o campo B_μ e a métrica $g_{\mu\nu}$. O potencial tem seu mínimo estabelecido quando $\frac{\partial V}{\partial X} = 0$. Neste valor mínimo do potencial, o campo B_μ tem um valor de vácuo não nulo designado por $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$, que será o responsável por causar a quebra espontânea da simetria local de Lorentz.

Em muitos modelos bumblebee, o potencial V é uma função do escalar $X = B^\mu B_\mu \pm b^2$, sendo b uma constante com dimensão de massa. O mínimo do potencial é alcançado, por construção, para $X = 0$. Neste caso, o vetor de vácuo b_μ é espontaneamente induzido para ser um vetor tipo-tempo ou tipo-espaco (a depender da escolha do sinal na expressão do escalar X), satisfazendo $b^\mu b_\mu = \mp b^2$. Portanto, é exigido que o potencial $V(B^\mu)$ tenha a seguinte dependência funcional:

$$V(B^\mu) = V(B^\mu B_\mu \pm b^2) \quad (3.17)$$

A dinâmica do campo B_μ é determinada pela estrutura da ação que define o modelo específico sob estudo. Em geral, a lagrangiana \mathcal{L}_B para um único campo bumblebee B_μ , num cenário com gravidade e matéria, pode ser escrita como uma soma de termos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gB} + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_J \quad (3.18)$$

sendo \mathcal{L}_g a lagrangiana puramente gravitacional, \mathcal{L}_{gB} a lagrangiana que descreve o acoplamento da gravidade com o campo bumblebee (chamado acoplamento gravidade-bumblebee), \mathcal{L}_K a que contém o termo cinético para B_μ , \mathcal{L}_V a que contém o termo potencial (que inclui o termo que induz a violação espontânea da simetria de Lorentz) e \mathcal{L}_J a que contém os termos de acoplamento do campo B_μ com a matéria (fontes do campo gravitacional).

São possíveis diversas formas para as várias lagrangianas que aparecem em (3.18), e para certos propósitos algumas podem ser feitas nulas. Como um exemplo explícito contendo todos os termos de (3.18), podemos considerar a seguinte lagrangiana (conforme a Ref. [12]):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa}(eR + \xi eB^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}eB_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - eV(B_\mu B^\mu \pm b^2) - eB_\mu J^\mu \quad (3.19)$$

No modelo-exemplo (3.19), a lagrangiana gravitacional \mathcal{L}_g é logo identificada com aquela da Relatividade Geral, a interação específica gravidade-bumblebee (\mathcal{L}_{gB}) é controlada pela constante de acoplamento ξ e o último termo em (3.19) representa a interação matéria-bumblebee envolvendo a corrente de matéria J^μ .

A lagrangiana \mathcal{L}_V contém o termo potencial responsável por induzir a violação espontânea da simetria de Lorentz. Na sua estrutura, b^2 é uma constante positiva real relacionada ao valor de vácuo b_μ do campo bumblebee, enquanto o sinal \mp em V é escolhido dependendo se b_μ é tipo-tempo ou tipo-espaço. A forma funcional de V é em geral escolhida como a de um polinômio quadrático do tipo $V(x) = \lambda x^2/2$ (sendo λ uma constante de acoplamento real) ou como a forma linear $V(x) = \lambda x$ (sendo λ um campo multiplicador de Lagrange).

Por fim, a porção cinética \mathcal{L}_K de (3.19) envolve um tensor $B_{\mu\nu}$ do campo B_μ (semelhante ao tensor $F_{\mu\nu}$ do campo eletromagnético para o potencial A_μ) definido como:

$$B_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu \quad (3.20)$$

sendo D_μ a derivada covariante apropriada para o espaço-tempo escolhido. Em espaços-tempos com torção nula (como é o caso do espaço-tempo de Riemann ou Minkowski), é imediato que a expressão (3.20) se reduz a $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Para este trabalho, nos concentramos nas contribuições à RG advindas de regiões de vácuo, o que nos permite estabelecer $\mathcal{L}_J = 0$ em (3.19). Portanto, partimos de uma ação geral na seguinte forma:

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \pm b^2) \right], \quad (3.21)$$

com $\sigma = \xi/2\kappa$. O potencial é escolhido como tendo a forma quadrática:

$$V = \frac{\lambda}{2} (B_\mu B^\mu \pm b^2)^2 \quad (3.22)$$

As equações de movimento para o campo B_μ são obtidas variando a ação (3.21) e aplicando à ela o princípio de mínima ação ($\delta S_B = 0$), o que nos fornece:

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \pm b^2) \right] &= 0 \\ \int d^4x \sqrt{-g} \{ -\partial_\mu B^{\mu\nu} + 2V' B^\nu - 2\sigma B_\mu R^{\mu\nu} \} \delta B_\nu &= 0 \\ \partial_\mu B^{\mu\nu} - 2V' B^\nu + 2\sigma B_\mu R^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde V' denota a derivada do potencial com relação ao argumento $(B_\mu B^\mu \pm b^2)$.

Esta ideia de usar um potencial para quebrar a simetria de Lorentz espontaneamente e assim forçar um valor de vácuo não nulo para B^μ , foi introduzida por Kostelecky e Samuel [13, 14].

A questão natural que se apresenta é de como um modelo que é invariante de Lorentz pode violar essa simetria, ou em outras palavras, quais os mecanismos que tornam essa quebra possível.

Seguindo os modelos da teoria clássica de campos, sabe-se que deve ser incluído um termo potencial na lagrangiana (3.16). Esta inclusão é feita indiretamente fazendo uso da lagrangiana do campo bumblebee (3.19) (que já tem em sua estrutura um termo potencial). Basta assim fazer a conexão entre as lagrangianas (3.16) e (3.19), o que será feito na próxima seção.

É importante ainda dizer que, quando usamos a condição $b_\mu b^\mu = b^2$, já está implícito que estamos trabalhando com a solução de vácuo responsável pela quebra da simetria de Lorentz. É sempre um campo que quebra a simetria (conforme nos modelos clássicos). Neste caso, é um campo vetorial que quebra a simetria, que é uma extensão natural de um escalar.

3.3 O modelo teórico trabalhado

O modelo teórico que iremos trabalhar é portanto aquele descrito pela lagrangiana (3.16), com a violação espontânea da simetria de Lorentz implementada por um modelo bumblebee. A ação do modelo se escreve portanto:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} [(1+u)R + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu}] - V(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) \right\} \quad (3.24)$$

A conexão entre o modelo descrito pela ação (3.24) e o modelo bumblebee (3.21) é feita mediante as relações (conforme Ref. [6]):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4} \xi B^\alpha B_\alpha \\ s^{\mu\nu} &= \xi \left(B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Notamos ainda que, tal como definido acima, o traço do tensor $s^{\mu\nu}$ é nulo.

Implementando as relações (3.25) na ação (3.24), obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left[R + \frac{1}{4} \xi B^\alpha B_\alpha R + (\xi B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} \xi g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha) R_{\mu\nu} \right] - V(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - V(B^\alpha B_\alpha \pm b^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Notamos agora claramente, que as formas dos coeficientes de violação u e $s^{\mu\nu}$, dados em (3.25), foram escolhidas de modo tal a restar somente o termo envolvendo a contração $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$, que fornece o acoplamento entre o campo bumblebee (descrito por B_μ) e a geometria (ou gravidade, descrita por $R_{\mu\nu}$), conforme visto em (3.26).

Uma consideração importante a ser feita agora diz respeito ao tratamento da dinâmica do campo bumblebee. Conforme já discutido anteriormente, é assumido que o campo B_μ induz a violação da simetria local de Lorentz e que, portanto, ele deve adquirir um valor esperado de vácuo não-nulo que denotaremos por b_μ . Se representarmos as flutuações do campo bumblebee em torno dessa solução de vácuo por \tilde{B}_μ , temos que o campo B_μ pode ser decomposto da seguinte

forma:

$$B_\mu = b_\mu + \tilde{B}_\mu. \quad (3.27)$$

Deste modo, toda a dinâmica do campo bumblebee B_μ na representação (3.27) fica a cargo da flutuação \tilde{B}_μ .

Implementando a relação (3.27) em (3.26) e a desenvolvendo, chegamos a:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} [R + \xi(b^\mu + \tilde{B}^\mu)(b^\nu + \tilde{B}^\nu)R_{\mu\nu}] - V \right\} \quad (3.28)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R + \xi b^\mu b^\nu R_{\mu\nu} + \xi \tilde{B}^\mu \tilde{B}^\nu R_{\mu\nu} + 2\xi b^\mu \tilde{B}^\nu R_{\mu\nu}) - V(b^\alpha b_\alpha + \tilde{B}^\alpha \tilde{B}_\alpha + 2b^\alpha \tilde{B}_\alpha \pm b^2) \right]. \quad (3.29)$$

Como b_μ é o valor esperado de vácuo, deve valer que $b^\alpha b_\alpha \pm b^2 = 0$ na expressão (3.29). Portanto, esta ação se reduz a:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} [R + \xi b^\mu b^\nu R_{\mu\nu} + \xi \tilde{B}^\mu \tilde{B}^\nu R_{\mu\nu} + 2\xi b^\mu \tilde{B}^\nu R_{\mu\nu}] - V(\tilde{B}^\alpha \tilde{B}_\alpha + 2b^\alpha \tilde{B}_\alpha) \right\} \quad (3.30)$$

Na expressão (3.30) acima, a dinâmica do campo bumblebee está toda a cargo dos termos envolvendo a flutuação \tilde{B}_μ . Esta flutuação só se torna significativa em regiões do espaço-tempo onde a curvatura é grande. Naquelas regiões onde o espaço-tempo é aproximadamente plano (regiões de curvatura desprezível), podemos desprezar os termos dinâmicos envolvendo \tilde{B}_μ e considerarmos somente os termos envolvendo o valor de vácuo b_μ . Usando esta aproximação, a ação (3.30) se reduz a:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \xi b^\mu b^\nu R_{\mu\nu}] \quad (3.31)$$

Portanto, no presente trabalho, analisaremos somente os efeitos advindos da ação (3.31).

Em primeiro lugar, calculemos as equações de movimento resultantes da ação (3.31). Variando esta ação, chegamos às seguintes equações de movimento de Einstein modificadas (os cálculos estão feitos em detalhes no apêndice A):

$$G_{\mu\nu} - (T_{LV})_{\mu\nu} = 0 \quad (3.32)$$

Com o tensor $(T_{LV})_{\mu\nu}$ dado pela seguinte expressão em termos do campo bumblebee B_μ :

$$\begin{aligned} (T_{LV})_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} b^\alpha b^\beta R_{\alpha\beta} + 2b_{(\mu} b^\alpha R_{\alpha\nu)} - D_\alpha D_{(\mu} (b^\alpha b_{\nu)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} D^2 (b_\mu b_\nu) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha D_\beta (b^\alpha b^\beta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Onde a notação $(\mu\nu)$ denota simetria nos índices μ e ν . Exemplo:

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) \quad (3.34)$$

Portanto, a inclusão dos termos de violação de Lorentz modificam as equações do campo gravita-

cional de termos contidos no tensor (3.33). É imediato desta expressão que, se fizermos os termos de violação nulos, recuperamos as equações de campo de Einstein no vácuo.

4 *Influência dos termos de violação em quantidades físicas que testam a RG*

Neste capítulo, mostraremos os resultados propriamente ditos encontrados no trabalho. São feitos os cálculos das modificações de algumas quantidades importantes que testam a RG, e por fim, é estabelecido um limite superior para os parâmetros de violação da simetria de Lorentz.

4.1 Métrica de Schwarzschild modificada

Com a finalidade de estudarmos as implicações decorrentes da inclusão dos termos de violação da simetria de Lorentz na lagrangiana da gravitação, derivemos alguns resultados do nosso modelo (3.31).

Na RG, a solução das equações de campo de Einstein (3.5) no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), com $\Lambda = 0$ e num espaço esfericamente simétrico é dada pela métrica de Schwarzschild. A forma desta solução pode ser escrita como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.1)$$

Sendo m a massa da fonte do campo gravitacional.

A resolução das equações de Einstein modificadas (3.32) para um espaço-tempo com as mesmas propriedades descritas acima, resultaram, para um vetor b_μ tipo-espaço da forma $b_\mu = (0, f(r), 0, 0)$, na seguinte métrica de Schwarzschild modificada (cálculos estes feitos detalhadamente no apêndice A.2):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + (1 + \ell^2\xi)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

onde $b^2 = b^\mu b_\mu = \ell^2 = cte$.

Destacamos que para os casos $b_\mu = (f(r), 0, 0, 0)$ e $b_\mu = (0, 0, 0, f(r))$ não houve nenhuma modificação na métrica de Schwarzschild (4.1), e para o caso $b_\mu = (0, 0, f(r), 0)$ não foi possível encontrar uma solução analítica.

O elemento de linha (4.2) subentende a seguinte métrica modificada:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2m}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \ell^2\xi)(1 - \frac{2m}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Uma discussão interessante que pode ser feita em cima da métrica (4.3) encontrada, é se ela pode recuperar a métrica de Schwarzschild usual (4.1) por uma transformação de coordenadas. Se isso puder ser feito, então a solução (4.2) encontrada não traz nada de novo.

Não há um procedimento sistemático que permite dizer se uma dada solução em RG admite ou não uma transformação que recupera a sua forma original. Se for possível fazer isto na solução (4.2), então a violação encontrada é falsa, no sentido de que só aparenta existir uma violação por causa do sistema de coordenadas que estamos. Por inspeção, justificaremos que se trata de uma quebra verdadeira. Partindo de (4.2) e através de uma transformação de coordenadas, devemos mostrar que é impossível chegar em (4.1). Consideremos por exemplo a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{r} = (1 + \lambda)^{1/2} r \\ \bar{\theta} = (1 + \lambda)^{-1/2} \theta \\ \bar{\phi} = (1 + \lambda)^{-1/2} \phi \end{cases} \quad (4.4)$$

Onde estamos fazendo $\lambda = \ell^2\xi$. Implementando (4.4) em (4.2), obtemos:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(1 + \lambda)^{1/2}}{\bar{r}}\right)d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2m(1 + \lambda)^{1/2}}{\bar{r}}\right)^{-1}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2 \sin^2((1 + \lambda)^{1/2}\bar{\theta})d\bar{\phi}^2 \quad (4.5)$$

Dado que $2m$ é uma constante arbitrária (conforme solução geral do apêndice A), podemos redefinir $2m(1 + \lambda)^{1/2} = 2m'$. Deste modo, (4.5) se torna:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m'}{\bar{r}}\right)d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2m'}{\bar{r}}\right)^{-1}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2 \sin^2((1 + \lambda)^{1/2}\bar{\theta})d\bar{\phi}^2 \quad (4.6)$$

Notamos que para este exemplo específico de transformação, a simetria esférica (característica da solução de Schwarzschild e representada no elemento de linha pelo termo $r^2 d\Omega^2$) é perdida devido a presença do termo $(1 + \lambda)$ no interior do seno, de modo que não existe uma redefinição adicional de parâmetros que leve a (4.1). Portanto, temos indícios de que se trata de uma quebra real e não aparente.

Em termos gerais, quaisquer transformações propostas para as coordenadas t , r , θ e ϕ irão modificar os setores temporal e espacial do elemento de linha (4.2), de modo que o termo λ sempre aparece em algum setor ao final da transformação, impedindo assim que a métrica original seja recuperada. Podemos assim afirmar com segurança de que existe uma modificação real em (4.2).

As diferenças entre os casos com e sem violação estão ilustradas no gráfico abaixo:

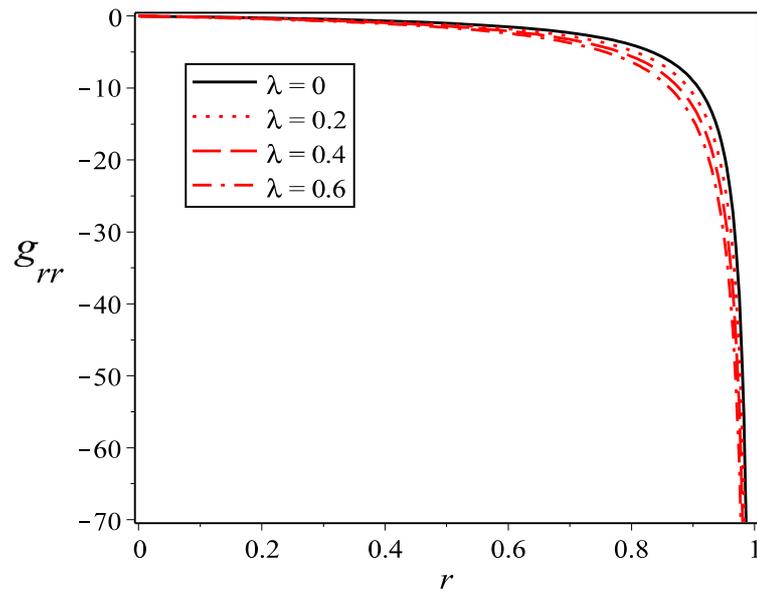


Figura 4.1: Visualização gráfica das modificações do parâmetro de violação λ na componente g_{rr} para $0 < r < 1$.

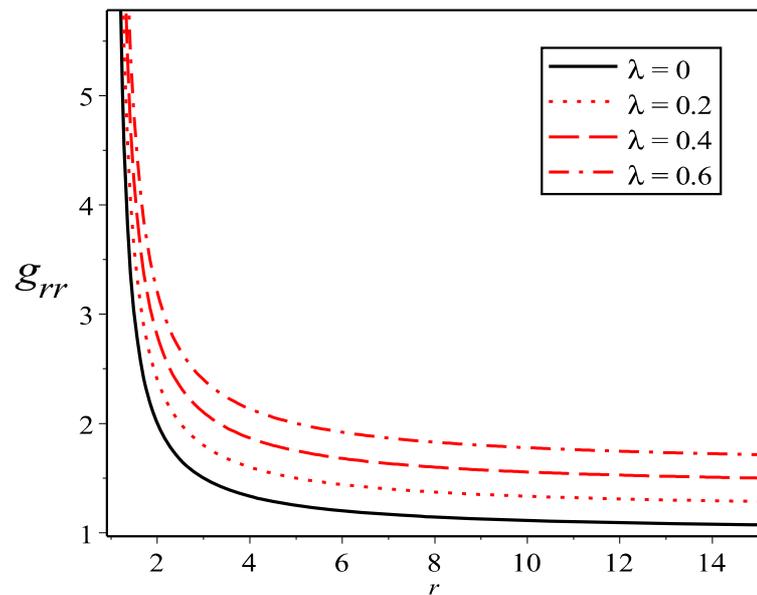


Figura 4.2: Visualização gráfica das modificações do parâmetro de violação λ na componente g_{rr} para $r > 1$.

Como esperado, as diferenças são mais significativas para grandes valores de r .

4.2 Geodésicas: Breve revisão

Por definição, geodésicas são curvas do espaço-tempo que minimizam a distância entre dois pontos deste espaço. A fim de encontrarmos uma equação diferencial que nos forneça todas as geodésicas de um dado espaço, consideremos o intervalo relativístico entre dois pontos P_1 e P_2 do

espaço-tempo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.7)$$

Desta relação, segue uma expressão funcional da distância finita entre esses dois pontos do espaço-tempo:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{1/2} ds \quad (4.8)$$

A minimização do funcional dado em (4.8), nos leva à conhecida equação diferencial das geodésicas:

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0 \quad (4.9)$$

Portanto, sendo dado um espaço-tempo com uma métrica específica, usamos (4.9) para determinar todas as geodésicas associadas a este espaço.

A equação (4.9) pode ainda ser reescrita numa forma mais interessante para fazer contas, que a deixa com a mesma estrutura das equações de movimento de Euler-Lagrange. Isto é feito definindo-se a quantidade $2K = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ (onde os pontos denotam derivadas com relação ao parâmetro comprimento de arco s). Em termos de K , (4.9) se escreve:

$$\frac{\partial K}{\partial x^a} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0, \quad (4.10)$$

onde se tem uma equação do tipo Euler-Lagrange para cada uma das coordenadas x^a do espaço-tempo. Para geodésicas, a quantidade K é constante e é tal que

$$2K = \alpha = \begin{cases} 0, \\ -1, \\ +1, \end{cases} \quad (4.11)$$

onde o valor numérico escolhido para a constante α depende se se trata de uma geodésica nula, tipo-tempo ou tipo-espaço, respectivamente.

4.3 Correções em algumas quantidades físicas que testam a RG

Nesta seção, calcularemos as modificações introduzidas pelos termos de violação de Lorentz em algumas quantidades que testam a RG. Portanto, no que segue, os cálculos serão sempre feitos fazendo-se uso da métrica de Schwarzschild modificada pelos termos de violação de Lorentz.

4.3.1 Avanço do periélio de Mercúrio

Um dos testes experimentais mais conhecidos da RG é o avanço do ponto periélio dos planetas. O cálculo fornecido pela RG para o planeta Mercúrio, por exemplo, concorda com os experimentos com altíssima precisão. No que segue, faremos os cálculos das modificações introduzidas pelos termos de violação de Lorentz para o caso do planeta Mercúrio.

Sabe-se da RG que um corpo massivo esfericamente simétrico produz no seu entorno uma deformação no espaço-tempo cuja geometria é corretamente descrita (em regiões exteriores ao corpo massivo) pela solução de Schwarzschild. No entanto, quando consideramos ainda a presença dos termos de violação de Lorentz do modelo (3.24), a geometria passa a ser corretamente descrita pela métrica dada em (4.3). Estamos interessados em obter as correções advindas desta métrica modificada em algumas quantidades clássicas que testam a RG [15].

Uma partícula teste (que pode representar um planeta, por exemplo) move-se no espaço-tempo descrito acima, descrevendo uma geodésica tipo-tempo. De acordo com (4.11), esta geodésica deve satisfazer:

$$2K = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + (1 + \ell^2 \xi) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = -1 \quad (4.12)$$

As equações de Euler-Lagrange (4.10) para a quantidade K , escritas para cada uma das coordenadas de espaço-tempo, geram as seguintes igualdades:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0 \quad (4.15)$$

Onde os pontos sobre as coordenadas denotam derivadas com relação ao tempo próprio τ . Nas relações acima, bastou escrevermos as equações de Euler-Lagrange para três das coordenadas de espaço-tempo (t , θ e ϕ , respectivamente). A razão disto é que desejamos determinar apenas quatro funções incógnitas, nomeadamente:

$$t = t(\tau), r = r(\tau), \theta = \theta(\tau), \phi = \phi(\tau) \quad (4.16)$$

Sendo assim suficiente apenas quatro equações relacionando essas coordenadas (equações (4.13), (4.14) e (4.15) em conjunto com (4.12), que também constitui um vínculo entre as coordenadas).

Se se supõe que a partícula teste se move no plano equatorial, isso implica em fazer $\theta = \pi/2 = cte.$, o que por sua vez implica em $\dot{\theta} = 0$. Levando isto em conta, obtemos de imediato de (4.13) e (4.15) as equações:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k \quad (4.17)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h \quad (4.18)$$

sendo k e h constantes. Substituindo essas equações em (4.12) e fazendo a identificação $u = r^{-1}$, chegamos à seguinte equação:

$$\beta \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \frac{k^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} + 2mu^3 \quad (4.19)$$

com $\beta = 1 + \lambda$, $\lambda = \ell^2 \xi$ e $u = u(\phi)$.

A equação (4.19) é exatamente a equação que obtemos para o movimento de uma partícula teste no espaço-tempo de Schwarzschild, com a única exceção da presença do fator multiplicativo β no primeiro membro de (4.19). Portanto, os termos de violação de Lorentz modificam a equação clássica da RG apenas de um fator multiplicativo. Vejamos então qual a influência disto na expressão que determina o avanço do ponto periélio de um planeta.

Derivando (4.19) com relação a ϕ , reescrevemos esta equação em sua forma mais usual:

$$\beta \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (4.20)$$

A resolução de (4.20) leva à órbita de um planeta.

Notamos que o segundo termo do lado direito de (4.20) é muito pequeno em comparação com o primeiro (para Mercúrio, por exemplo, a razão $3h^2/r^2$ entre estes dois termos é da ordem de 10^{-7}). Considerando isto e seguindo a Ref. [15], resolve-se (4.20) perturbativamente. Propomos a solução:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (4.21)$$

sendo $\epsilon = \frac{3m^2}{h^2}$ um parâmetro adimensional pequeno ($\epsilon \ll 1$). Inserindo (4.21) em (4.20) e separando as diferentes ordens em ϵ , obtemos:

$$\beta \frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + u_0 - \frac{m}{h^2} + \epsilon \left(\beta \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 - \frac{h^2}{m} u_0^2 \right) + O(\epsilon^2) = 0 \quad (4.22)$$

Para a ordem zero em ϵ , temos a equação

$$\beta \frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + u_0 = \frac{m}{h^2}, \quad (4.23)$$

que admite a solução:

$$u_0 = \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cos(\beta^{-1/2} \phi) \right], \quad (4.24)$$

onde e é uma constante arbitrária. Para a primeira ordem em ϵ , temos

$$\beta \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{h^2}{m} u_0^2 = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + 2e \frac{m}{h^2} \cos(\beta^{-1/2} \phi) + \frac{m}{h^2} \frac{e^2}{2} \cos(2\beta^{-1/2} \phi), \quad (4.25)$$

onde já substituímos a solução para u_0 dada em (4.24). Para a equação (4.25), propomos a solução:

$$u_1 = A + B\phi \sin(\beta^{-1/2} \phi) + C \cos(2\beta^{-1/2} \phi) \quad (4.26)$$

Sendo A , B e C constantes a serem determinadas. Inserindo (4.26) em (4.25), determina-se para estas constantes os seguintes valores:

$$A = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right), \quad B = \beta^{-1/2} \frac{me}{h^2}, \quad C = -\frac{me^2}{6h^2}.$$

Portanto, u_1 se escreve:

$$u_1 = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + \beta^{-1/2} \frac{me}{h^2} \phi \sin(\beta^{-1/2}\phi) - \frac{me^2}{6h^2} \cos(2\beta^{-1/2}\phi) \quad (4.27)$$

Substituindo (4.24) e (4.27) em (4.21), e tomando somente a correção envolvendo $\phi \sin(\beta^{-1/2}\phi)$, obtém-se para a função u a seguinte solução aproximada:

$$u \approx \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\beta^{-1/2}\phi) + \epsilon e \beta^{-1/2} \phi \sin(\beta^{-1/2}\phi)] \quad (4.28)$$

O motivo de tomar-se apenas a correção $\phi \sin(\beta^{-1/2}\phi)$, é porque é esta propriamente que gera o avanço do periélio do planeta (para cada revolução, o referido termo torna-se cada vez maior). Em forma mais compacta escrevemos a ordem ϵ :

$$u \approx \frac{m}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\phi \left(\beta^{-1/2} - \epsilon \right) \right] \right\}. \quad (4.29)$$

O argumento do cosseno pode ser ainda expresso como

$$\phi(\beta^{-1/2} - \epsilon) \sim \phi \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \epsilon \right) = \phi \left(1 - \epsilon - \frac{\lambda}{2} \right), \quad (4.30)$$

devido que $\beta^{-1/2} \sim 1 - \frac{\lambda}{2} + \dots$, onde $\lambda = \xi \ell^2$ é o parâmetro da quebra de Lorentz. Assim, temos

$$u \approx \frac{m}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\phi \left(1 - \epsilon - \frac{\lambda}{2} \right) \right] \right\}. \quad (4.31)$$

A solução (4.31) nos diz que a órbita da partícula teste massiva no espaço-tempo de Schwarzschild modificado é aproximadamente uma elipse, mas modificada por dois termos: O termo ϵ previsto pela RG e uma contribuição devido a quebra de Lorentz dada por $\lambda/2$. O período dessa elipse não é mais 2π , sendo dado por:

$$T = \frac{2\pi}{1 - \epsilon - \frac{1}{2}\lambda} \approx 2\pi \left(1 + \epsilon + \frac{1}{2}\lambda \right) = 2\pi + 2\pi\epsilon + \pi\lambda \quad (4.32)$$

Portanto, para além da correção advinda da RG ($2\pi\epsilon$), o termo de violação de Lorentz contribui com uma correção adicional $\pi\lambda$.

A precessão dada puramente pela RG, em unidades não relativísticas e em radianos por revolução, é:

$$2\pi\epsilon \approx \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \quad (4.33)$$

sendo a a medida do semieixo maior da elipse, e a excentricidade da elipse e T o período de revolução do planeta. Para Mercúrio, temos os seguintes valores:

$$a = 5,5546 \times 10^{10} \text{ m} \quad (4.34)$$

$$T = 0,24085 \text{ anos} \quad (4.35)$$

$$e = 0,205615 \quad (4.36)$$

Inserindo esses dados experimentais em (4.33), obtemos aproximadamente 5.0479×10^{-7} raios/órbita (ou 43.186 segundos de arco por século) para o avanço do periélio de Mercúrio. O valor observado experimentalmente é dado por:

$$43.11'' \pm 0.45''/\text{século}, \quad (4.37)$$

sendo $''$ a notação usada para segundos de arco. Como o valor observado concorda com elevada precisão com o valor teórico dado pela expressão (4.33), devemos ter que o efeito adicional calculado em (4.32), se existe, deve estar contido no erro experimental dado em (4.37). O termo $\pi\lambda$ fornece o avanço angular adicional por século advindo dos termos de violação de Lorentz. Assim, usando o erro experimental de $0.45''$, devemos ter

$$\pi\lambda < 2.1816 \times 10^{-6} \text{ rad} \rightarrow \lambda < 6.9 \times 10^{-7} \sim 10^{-6}. \quad (4.38)$$

Portanto, o teste do periélio de Mercúrio nos permite impor um limite superior para o parâmetro de violação. Se estes existem, os experimentos que visam medi-los devem ter uma precisão capaz de enxergar efeitos menores que uma parte em um milhão.

4.3.2 Desvio da luz

Um teste experimental ainda mais conhecido da RG é o teste do desvio sofrido por um raio luminoso em sua trajetória por influência de um campo gravitacional. Esse desvio na trajetória é visto de forma bem natural do ponto de vista da RG, uma vez que corpos massivos (fontes de campo gravitacional) deformam o espaço-tempo ao seu redor e, portanto, influenciam nos trajetos de quaisquer corpos que ali trafegam, massivos ou não.

Os cálculos feitos nesta seção são inteiramente análogos aos da seção anterior. Assim, algumas passagens serão omitidas.

Estamos interessados em calcular as correções na expressão do desvio de um raio luminoso quando este trafega num espaço-tempo definido pela métrica de Schwarzschild modificada (4.3). Sabe-se que, na RG, um raio de luz descreve no espaço-tempo uma geodésica nula (tipo-luz). Usando novamente (4.11), esta geodésica deve satisfazer:

$$2K = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 + (1 + \ell^2\xi)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.39)$$

Onde agora os pontos sobre as coordenadas representam derivadas com relação a um parâmetro afim ϱ e, a constante α em (4.11) foi feita nula por se tratar agora de uma geodésica tipo-luz. Um desenvolvimento similar ao feito anteriormente na seção (4.3.1), nos permite reescrever (4.39) da seguinte forma:

$$\beta \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 \quad (4.40)$$

Considerando mu pequeno ($mu \ll 1$), propomos a solução:

$$u = u_0 + 3mu_1 \quad (4.41)$$

Por substituição de (4.41) em (4.40), obtém-se de imediato que as funções u_0 e u_1 devem satisfazer as seguintes equações diferenciais:

$$\beta \frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + u_0 = 0 \quad (4.42)$$

$$\beta \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = u_0^2 \quad (4.43)$$

A solução de (4.42) é imediata e vale:

$$u_0 = \frac{1}{D} \sin[\beta^{-1/2}(\phi - \phi_0)] \quad (4.44)$$

Sendo D e ϕ_0 constantes arbitrárias. Notamos ainda que a solução (4.44) descreve a equação de uma reta, conforme mostrado na figura abaixo.

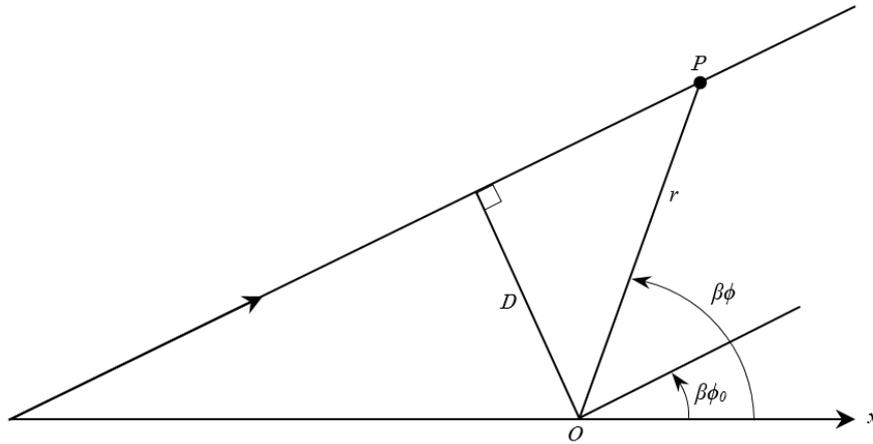


Figura 4.3: Reta determinada por r , ϕ e D

Inserindo (4.44) em (4.43), obtemos para u_1 a seguinte solução:

$$u_1 = \frac{1}{3D^2} \left[1 + C \cos(\beta^{-1/2}\phi) + \cos^2(\beta^{-1/2}\phi) \right] \quad (4.45)$$

Substituindo (4.44) e (4.45) em (4.41), obtemos a seguinte solução aproximada para u :

$$u \approx \frac{1}{D} \sin(\beta^{-1/2}\phi) + \frac{m}{D^2} [1 + C \cos(\beta^{-1/2}\phi) + \cos^2(\beta^{-1/2}\phi)] \quad (4.46)$$

Nesta altura, consideremos o esquema mostrado abaixo, onde se supõe um raio luminoso originado em $r = -\infty$ e que vai até $r = \infty$, passando por uma fonte gravitacional e sofrendo a influência desta fonte.

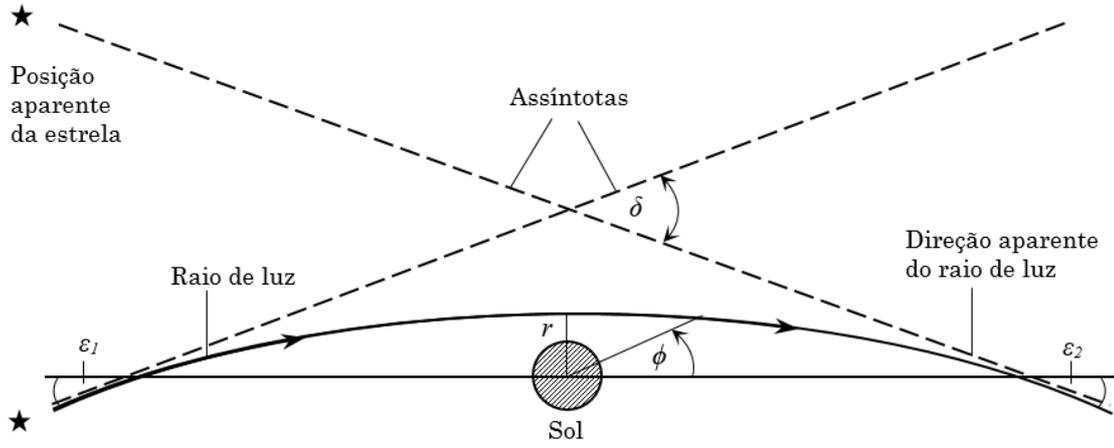


Figura 4.4: Desvio na trajetória de um raio de luz

A análise dos ângulos para os quais $u(\phi) = 0$ nos permite computar o desvio sofrido por um raio de luz na presença de uma fonte que gera um campo gravitacional esfericamente simétrico. Se esses ângulos são $\phi = -\epsilon_1$ e $\phi = \pi + \epsilon_2$, e desprezando termos de ordem $\lambda\epsilon_1$ e $\lambda\epsilon_2$, obtemos:

$$-\frac{1}{D}\epsilon_1 + \frac{m}{D^2}(2 + C) = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\pi}{2}\lambda - \epsilon_2\right) + \frac{m}{D^2}[2 - C] = 0 \quad (4.48)$$

Obtendo-se os seguintes valores para ϵ_1 e ϵ_2

$$\epsilon_1 = \frac{m}{D}(2 + C) \quad (4.49)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\pi}{2}\lambda + \frac{m}{D}[2 - C] \quad (4.50)$$

Desse modo, o ângulo total de desvio é:

$$\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{4m}{D} + \frac{\pi}{2}\lambda, \quad (4.51)$$

O valor predito pela RG do desvio da luz é de $\delta = \frac{4m}{D} = 1,75$ segundos de arco ou $8,4842 \times 10^{-6}$ rad.

Quanto aos valores experimentais, foram feitos muitos testes desde o teste original de 1919 por Edington. Os valores oscilam entre 1,28 e 2,73 segundos de arco, conforme tabela da página 193 da referência [16]. Tomemos por exemplo, o resultado de 1952 por G. Van Biesbroeck [17] de 1.70 ± 0.1 .

Portanto, a introdução de termos de violação de Lorentz corrigem o cálculo da RG numa pequena quantidade.

Os dados experimentais resultam, em unidades não-relativísticas, o seguinte valor:

$$\frac{4Gm}{c^2 D} \approx 8.4856 \times 10^{-6}. \quad (4.52)$$

Para impor um limite superior para a contribuição da quebra de Lorentz consideramos o erro experimental igual a 0,1 segundos de arco, então,

$$\frac{\pi}{2} \lambda < 4,8481 \times 10^{-7} \rightarrow \lambda < 3,1 \times 10^{-7} \sim 10^{-7}. \quad (4.53)$$

Comparando com o teste anterior do avanço do periélio de Mercúrio, concluímos que o nosso limite deve ser menor que 10^{-7} .

4.3.3 Atraso temporal devido à curvatura do espaço-tempo

Este último teste se baseia no fato de que o tempo de viagem de um sinal luminoso num espaço-tempo plano é menor do que aquele numa geometria curva. Nesta seção, calcularemos essa diferença temporal nos tempos de viagem, quantidade esta que pode ser medida experimentalmente.

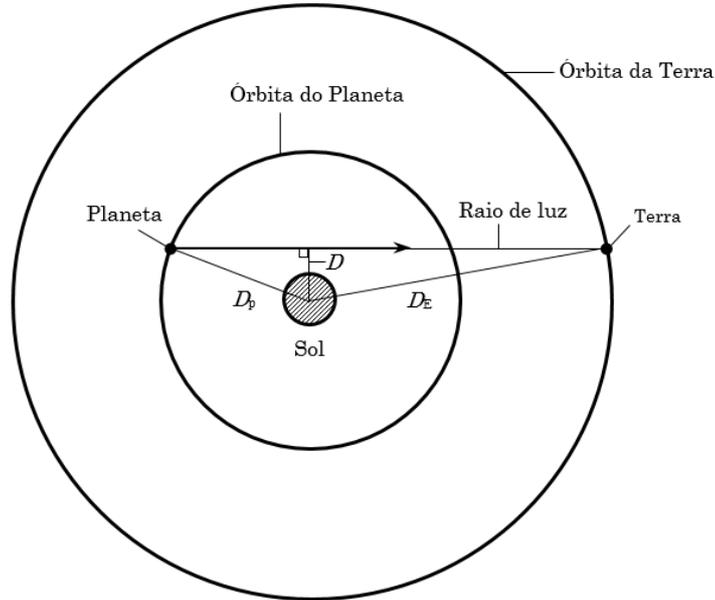


Figura 4.5: Esquema mostrando a interpretação dos parâmetros D_E , D_p e D

Para um raio luminoso, o elemento de linha ds^2 deve satisfazer:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \ell^2 \xi\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 = 0, \quad (4.54)$$

onde já se supõe que o raio percorre o plano equatorial ($\theta = \pi/2$). A curva descrita por um raio luminoso num espaço-tempo na presença dos termos de violação de Lorentz é dada por (4.46). Tomando somente a aproximação em primeira ordem $r \sin(\beta^{-1/2} \phi) = D$ e diferenciando esta

expressão, chegamos a:

$$r^2 d\phi^2 = \beta \frac{D^2}{r^2 - D^2} dr^2, \quad (4.55)$$

onde lembramos que $\beta = 1 + \lambda$, com λ representando a contribuição vinda da quebra de Lorentz.

Inserindo (4.55) em (4.54), obtém-se de imediato a seguinte relação:

$$dt^2 = \beta \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} + \frac{D^2}{r^2 - D^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \right] dr^2. \quad (4.56)$$

Usando a aproximação $(1 - \frac{2m}{r})^n \sim 1 - n\frac{2m}{r} + \dots$, uma vez que $m/r \ll 1$, obtemos:

$$dt^2 \approx \beta \frac{r^2}{r^2 - D^2} \left(1 + \frac{4m}{r} - \frac{2mD^2}{r^3} \right) dr^2. \quad (4.57)$$

Extraíndo a raiz de (4.57) e usando novamente a aproximação em primeira ordem para m/r , chegamos finalmente à expressão:

$$dt \approx \pm \sqrt{\beta} \frac{r}{(r^2 - D^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{mD^2}{r^3} \right) dr \quad (4.58)$$

Integrando (4.58), encontramos para o tempo de viagem de um raio luminoso num espaço-tempo curvo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \tilde{T} = \sqrt{\beta} \left\{ T_0 - m \left[\frac{(D_p^2 - D^2)^{1/2}}{D_p} + \frac{(D_E^2 - D^2)^{1/2}}{D_E} \right] \right. \\ \left. + 2m \ln \left(\frac{[(D_p^2 - D^2)^{1/2} + D_p][(D_E^2 - D^2)^{1/2} + D_E]}{D^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde D_E é a distância da Terra ao Sol, D_p é a distância de um dado planeta ao Sol e D é a distância de máxima aproximação da reta que liga os dois planetas ao Sol (conforme figura 4.5). Sendo que T_0 dado por

$$T_0 = (D_p^2 - D^2)^{1/2} + (D_E^2 - D^2)^{1/2}, \quad (4.60)$$

representa o tempo de viagem do raio luminoso no espaço-tempo plano.

É imediato que se eliminarmos a influência dos termos portadores da quebra de Lorentz, recuperamos a expressão clássica da RG. De fato, fazendo $\lambda = 0$ ou $\beta = 1$ em (4.59), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta T = T - T_0 = 2m \ln \left\{ \frac{[(D_p^2 - D^2)^{1/2} + D_p][(D_E^2 - D^2)^{1/2} + D_E]}{D^2} \right\} \\ - m \left[\frac{(D_p^2 - D^2)^{1/2}}{D_p} + \frac{(D_E^2 - D^2)^{1/2}}{D_E} \right], \end{aligned} \quad (4.61)$$

que é a expressão clássica para o atraso temporal da luz. Observamos que se o espaço-tempo for plano ($m = 0$) o atraso temporal é nulo, $\Delta T = 0$.

A partir da expressão (4.59) podemos escrever a expressão para o atraso temporal da luz na

presença da quebra espontânea da simetria de Lorentz,

$$\Delta\tilde{T} = \tilde{T} - T_0 = \Delta T + \frac{1}{2}\lambda(\Delta T + T_0), \quad (4.62)$$

Aqui, chamamos ainda atenção para o fato de que, se fizermos o espaço plano ($m = 0$) em (4.62), o primeiro termo ΔT é nulo e o termo devido puramente à violação de Lorentz $\frac{1}{2}\lambda(\Delta T + T_0)$ ainda permanece. Assim, o atraso temporal devido a presença da quebra de Lorentz num espaço plano é

$$\Delta\tilde{T}\Big|_{m=0} = \frac{1}{2}\lambda(\Delta T + T_0). \quad (4.63)$$

Isto significa que a violação da simetria de Lorentz causa uma deformação no espaço-tempo, por mínima que seja.

A quantidade $\Delta T = T - T_0$ dada em (4.61) fornece o atraso temporal devido puramente à curvatura do espaço-tempo (num cenário sem violação de Lorentz). O experimento que mede este atraso consiste em enviar pulsos de radar da Terra para algum outro planeta e medir os ecos recebidos (Ref. [18]). Na situação mostrada na figura 4.5, o caminho seguido pelo pulso de radar passa pela região de maior campo gravitacional (maior ponto de aproximação do Sol). É nesta situação onde se observa o maior valor para o atraso temporal ΔT . Quando o planeta em questão é Vênus, o valor experimental obtido é dado por (conforme Ref. [19, 20]):

$$\Delta T = (2.0 \pm 0.2) \times 10^{-4} \text{ (s)}. \quad (4.64)$$

Para limitarmos o parâmetro de violação λ usaremos a equação (4.62). Uma vez que o efeito adicional $\frac{1}{2}\lambda(\Delta T + T_0)$ em (4.62) não é observado experimentalmente, este deve ser menor que o erro dado em (4.64). Portanto, devemos ter:

$$\frac{\lambda}{2}(T_0 + \Delta T) < 0.2 \times 10^{-4}. \quad (4.65)$$

Efetuando os cálculos para o planeta Vênus, e considerando que o pulso de radar passa bem próximo à borda solar, temos os seguintes dados:

$$D_p = 1.082 \times 10^8 \text{ km}, \quad (4.66)$$

$$D_E = 1.496 \times 10^8 \text{ km}, \quad (4.67)$$

$$D = R_S = 6.957 \times 10^5 \text{ km}, \quad (4.68)$$

sendo R_S o raio solar. Isso fornece para T_0 o valor

$$T_0 \approx 860 \text{ s}. \quad (4.69)$$

Substituindo (4.69) e $\Delta T = 2 \times 10^{-4}$ s em (4.65), obtemos para o parâmetro λ a seguinte limitação:

$$\frac{\lambda}{2}(860 + 2 \times 10^{-4}) < 0.2 \times 10^{-4} \rightarrow \lambda < 4.6 \times 10^{-8} \sim 10^{-7}. \quad (4.70)$$

Portanto, este último teste nos sugere uma precisão ainda maior nos experimentos para que se percebam os efeitos da violação da simetria de Lorentz. Assim, a comparação entre os três testes nos diz que λ deve ser menor que 10^{-7} .

5 *Conclusões e perspectivas*

No presente trabalho, foi investigado a influência dos termos de violação da simetria de Lorentz no setor gravitacional do MPE. Os resultados de interesse para os nossos propósitos foram todos obtidos e foi concluído que, com base em testes largamente conhecidos e medidos da Relatividade Geral, os parâmetros de violação, se existem, só podem ter seus efeitos vistos por aparelhos capazes de sondarem distâncias menores que uma parte em dez milhões.

A importância deste trabalho se deu no sentido de elucidar alguns aspectos do MPE a partir de quantidades físicas da RG medidas com alta precisão. Qualquer investigação feita nos setores do MPE é uma tentativa de clarear aspectos de uma teoria unificada que existe na escala de Planck e que admite a violação de uma simetria bem fundamental da natureza (simetria de Lorentz). Fato este que, se confirmado, certamente resultará num grande impacto para o modo como compreendemos o universo.

A nossa investigação mostra-se ainda ser apenas um primeiro passo para pesquisas futuras. O modelo apresentado neste trabalho e com o qual trabalhamos pode ter aplicações nas mais diversas áreas da Física. Como um exemplo destas aplicações, poderíamos estudar o modelo no limite de campo fraco ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) e ver quais as implicações disto no estudo das ondas gravitacionais (como os modos de polarização poderiam ser alterados, por exemplo). Um outro exemplo de aplicação seria solucionar as equações de campo modificadas de Einstein para os casos mais gerais de um buraco negro carregado (Reissner-Nordstrom) ou em rotação (buraco de Kerr).

Para além disto, investigações futuras envolvendo os outros setores do MPE podem ser feitas. Como dito na introdução, podemos estudar o MPE inteiro em cenários mais gerais, de modo que o que fizemos é apenas um trabalho inicial. Por estes motivos, a presente investigação se mostrou bem sucedida para o que havíamos proposto fazer.

APÊNDICE A – Cálculo da solução de Schwarzschild modificada

A.1 Obtenção das equações de movimento modificadas

Nesta seção, vamos deduzir detalhadamente as equações de campo de Einstein modificadas, partindo da ação (3.31). Esta é dada por:

$$S = \int d^4x e(R + \xi b^\mu b^\nu R_{\mu\nu}) = \int d^4x e R + \int d^4x e \xi b^\mu b^\nu R_{\mu\nu} = S_{EH} + S_{LV} \quad (\text{A.1})$$

Sendo o primeiro termo a conhecida ação de Einstein-Hilbert e o segundo a ação que carrega os termos de violação de Lorentz. A variação da ação de Einstein-Hilbert já é conhecida da Relatividade Geral, por isso, iremos nos focar somente na variação de S_{LV} . Implementando a variação com relação à métrica, temos:

$$S_{LV} = \int d^4x e \xi g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} b_\alpha b_\beta R_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \delta S_{LV} &= \int d^4x \delta e \xi g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} b_\alpha b_\beta R_{\mu\nu} + \int d^4x e \xi \delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} b_\alpha b_\beta R_{\mu\nu} + \int d^4x e \xi g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} b_\alpha b_\beta R_{\mu\nu} \\ &+ \int d^4x e \xi g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} b_\alpha b_\beta \delta R_{\mu\nu} = \delta S_{LV}^{(1)} + \delta S_{LV}^{(2)} + \delta S_{LV}^{(3)} + \delta S_{LV}^{(4)} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Desenvolvendo cada termo $\delta S_{LV}^{(i)}$ da soma ($i = 1, 2, 3, 4$), obtemos:

$$\delta S_{LV}^{(1)} = \int d^4x e \left(-\frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} b^\alpha b^\beta R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

$$\delta S_{LV}^{(2)} = \int d^4x e (\xi b_\nu b^\alpha R_{\mu\alpha}) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

$$\delta S_{LV}^{(3)} = \int d^4x e (\xi b_\mu b^\beta R_{\beta\nu}) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.6})$$

$$\delta S_{LV}^{(4)} = \int d^4x e \xi b^\mu b^\nu \delta R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

onde usamos a relação

$$\delta e = \delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} (-g)^{-1/2} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

e

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\gamma} \delta g_{\lambda\gamma}. \quad (\text{A.9})$$

Notamos que os termos (A.4), (A.5) e (A.6) já estão na mesma estrutura (com a variação da métrica $\delta g^{\mu\nu}$ fora do parênteses). Trabalharemos com último termo (A.7), visando deixá-lo na mesma estrutura dos demais. Sabe-se da Relatividade Geral que vale a igualdade $\delta R_{\mu\nu} = D_\alpha(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - D_\nu(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)$ (equação de Palatini). Usando isto, obtemos:

$$\delta S_{LV}^{(4)} = \int d^4x e \xi b^\mu b^\nu [D_\alpha(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - D_\nu(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)] \quad (\text{A.10})$$

A variação da conexão é obtida de imediato de sua expressão. Tem-se:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.11})$$

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.12})$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}[\partial_\mu(\delta g_{\lambda\nu}) + \partial_\nu(\delta g_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda(\delta g_{\mu\nu})] \quad (\text{A.13})$$

Pode-se facilmente mostrar que a variação da conexão acima, quando expressa em termos de derivadas covariantes, é dada por:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}[D_\mu(\delta g_{\gamma\nu}) + D_\nu(\delta g_{\gamma\mu}) - D_\gamma(\delta g_{\mu\nu})] \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.14) em (A.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV}^{(4)} &= \int d^4x e \xi b^\mu b^\nu \left\{ \frac{1}{2}[D_\alpha D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu}) + D_\alpha D_\nu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\mu}) - D_\alpha D_\lambda(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\mu\nu})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}[D_\nu D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\alpha}) + D_\nu D_\alpha(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\mu}) - D_\nu D_\lambda(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\mu\alpha})] \right\} \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Por permuta de índices mudos, vemos claramente que o quinto e o sexto termo são iguais, e portanto, se cancelam. Ficamos então somente com os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV}^{(4)} &= \int d^4x e \xi b^\mu b^\nu \left\{ \frac{1}{2}[D_\alpha D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu}) + D_\alpha D_\nu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\mu}) - D_\alpha D_\lambda(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\mu\nu})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}D_\nu D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\alpha}) \right\} \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Tomemos agora um dos termos da expressão acima e façamos algumas manipulações nele (o que vale para um vale para os demais). Se tomarmos o primeiro, por exemplo, teremos (já tendo incluído o termo $b^\mu b^\nu$):

$$\frac{1}{2}b^\mu b^\nu D_\alpha D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu}) \quad (\text{A.17})$$

O termo (A.17) pode ser convertido em:

$$\frac{1}{2}\{D_\alpha[b^\mu b^\nu D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu})] - D_\alpha(b^\mu b^\nu)D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu})\} \quad (\text{A.18})$$

Pelo teorema da divergência generalizado, o primeiro termo de (A.18) (quando integrado num determinado volume do espaço-tempo) pode ser convertido numa integral de superfície, que se

anula. Portanto, ficamos apenas com o termo:

$$-\frac{1}{2}D_\alpha(b^\mu b^\nu)D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu}) \quad (\text{A.19})$$

Fazendo o mesmo com cada termo de (A.16), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV}^{(4)} = & \int d^4x e\xi \left\{ \frac{1}{2}D_\alpha(b^\mu b^\nu)D_\lambda(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}D_\alpha(b^\mu b^\nu)D_\nu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\mu}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}D_\alpha(b^\mu b^\nu)D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2}D_\nu(b^\mu b^\nu)D_\mu(g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\alpha}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Usando o mesmo artifício matemático usado em (A.17) (de modo que a variação do tensor métrico fique fora da derivada covariante), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV}^{(4)} = & \int d^4x e\xi \left\{ \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}D_\mu D_\alpha(b^\mu b^\nu)\delta g_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}D_\nu D_\alpha(b^\mu b^\nu)\delta g_{\lambda\mu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}D_\lambda D_\alpha(b^\mu b^\nu)\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}D_\mu D_\nu(b^\mu b^\nu)\delta g_{\lambda\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Efetuada algumas trocas de índices, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV}^{(4)} = & \int d^4x e\xi \left\{ \frac{1}{2}g^{\beta\mu}D_\alpha D_\beta(b^\alpha b^\nu) + \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}D_\beta D_\alpha(b^\mu b^\beta) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}D^2(b^\mu b^\nu) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}D_\alpha D_\beta(b^\alpha b^\beta) \right\} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ou ainda, colocando na mesma estrutura das variações (A.4), (A.5) e (A.6) (forma contravariante da variação da métrica), temos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV}^{(4)} = & \int d^4x e\xi \left\{ -\frac{1}{2}D_\alpha D_\mu(b^\alpha b_\nu) - \frac{1}{2}D_\alpha D_\nu(b_\mu b^\alpha) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}D^2(b_\mu b_\nu) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\alpha D_\beta(b^\alpha b^\beta) \right\} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Inserindo (A.4), (A.5), (A.6) e (A.23) em (A.3), e aplicando o princípio de Hamilton, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{LV} = & \int d^4x e\xi \left\{ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}b^\alpha b^\beta R_{\alpha\beta} + b_\nu b^\alpha R_{\mu\alpha} + b_\mu b^\beta R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}D_\alpha D_\mu(b^\alpha b_\nu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}D^2(b_\mu b_\nu) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\alpha D_\beta(b^\alpha b^\beta) - \frac{1}{2}D_\alpha D_\nu(b^\alpha b_\mu) \right\} \delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

De onde tiramos as equações de movimento do nosso trabalho:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \xi \left\{ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}b^\alpha b^\beta R_{\alpha\beta} + b_\nu b^\alpha R_{\mu\alpha} + b_\mu b^\beta R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}D_\alpha D_\mu(b^\alpha b_\nu) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}D^2(b_\mu b_\nu) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\alpha D_\beta(b^\alpha b^\beta) - \frac{1}{2}D_\alpha D_\nu(b^\alpha b_\mu) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Onde já incluímos o tensor de Einstein, advindo da variação da ação S_{EH} .

Reescrevendo a equação (A.25) numa forma mais compacta (usando a parte simétrica de

alguns tensores), obtemos finalmente

$$G_{\mu\nu} + \xi \left\{ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}b^\alpha b^\beta R_{\alpha\beta} + 2b_{(\mu}b^\alpha R_{\alpha\nu)} - D_\alpha D_{(\mu}(b^\alpha b_{\nu)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}D^2(b_\mu b_\nu) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\alpha D_\beta(b^\alpha b^\beta) \right\} = 0, \quad (\text{A.26})$$

que é a equação que queremos resolver.

A.2 Cálculo da métrica de Schwarzschild modificada

Vamos agora calcular a solução de Schwarzschild considerando a equação de movimento (3.32), que inclui os termos de violação de Lorentz. No que segue, faremos as contas usando a assinatura $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$.

Partimos do Ansatz de Schwarzschild, cuja métrica mais geral num espaço esfericamente simétrico tem a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Os cálculos seguem o mesmo procedimento usual. Partindo da métrica acima, calculamos todas as componentes da conexão $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e, de posse destas componentes, calculamos o tensor de curvatura $R_{\beta\gamma}^\alpha$, a partir do qual podemos obter o tensor de Ricci ($R_{\alpha\beta}$) e o escalar de Ricci (R). De posse destes elementos, podemos então montar o tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$. Todas essas contas iniciais são feitas sem fazer ainda referência ao vetor b^μ , coisa que será necessária somente quando calcularmos o segundo termo da equação de movimento ($(T_{LV})_{\mu\nu}$).

Após esses cálculos iniciais, obtemos as seguintes componentes não nulas para o tensor de Einstein:

$$G_{00} = \frac{-A[rB' + B - 1]}{r^2}, \quad (\text{A.28})$$

$$G_{11} = \frac{BA'r + AB - A}{r^2 AB}, \quad (\text{A.29})$$

$$G_{22} = \frac{-r}{4A^2 B^2} \{-2rABA'' + rAA'B' + rBA'(r)^2 + 2B'A^2 - 2ABA'\}, \quad (\text{A.30})$$

$$G_{33} = \frac{-r \sin^2 \theta}{4A^2 B^2} \{-2rABA'' + rAA'B' + rBA'^2 + 2B'A^2 - 2ABA'\}, \quad (\text{A.31})$$

onde as linhas denotam derivadas com relação a r , $A = A(r)$ e $B = B(r)$.

Percebemos claramente que $G_{44} = \sin^2 \theta G_{33}$, ou seja, essas duas componentes do tensor de Einstein são dependentes, de modo que é necessário trabalhar somente com uma delas (G_{33} ,

digamos). Portanto, há apenas três componentes independentes. Vamos partir agora para calcular o outro termo da equação de movimento, que já carrega informações sobre o vetor b_μ . Faremos os cálculos considerando apenas uma componente não nula para este vetor.

A.2.1 Caso radial - $b_\mu = (0, f(r), 0, 0)$

A exigência de que $b_\mu b^\mu = \ell^2$ nos leva a:

$$b_\mu b^\mu = b_r b^r = g^{rr} b_r b_r = B(r) f(r)^2 = \ell^2 \rightarrow f(r) = \ell / \sqrt{B(r)}. \quad (\text{A.32})$$

Portanto, usamos o vetor $b_\mu = (0, \frac{\ell}{\sqrt{B(r)}}, 0, 0)$.

Os valores encontrados para o tensor $(T_{LV})_{\mu\nu}$ foram:

$$\begin{aligned} (T_{LV})_{00} &= -\frac{1}{8} \frac{\ell^2 [2A''Br + B'A'Ar - A'^2Br + 4B'A^2]}{Ar} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\ell^2 [2A''Br + B'A'r + 4BA']}{r} - \frac{1}{4} \frac{BA'^2\ell^2}{A} \\ &- \frac{1}{8} \frac{\ell^2 [2A''BAr^2 + B'A'Ar^2 - A'^2Br^2 + 4B'A^2r + 8A'BAr + 8A^2B]}{Ar^2}, \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T_{LV})_{11} &= -\frac{3}{8} \frac{\ell^2 [2A''BAr + B'A'Ar - A'^2Br + 4B'A^2]}{A^2Br} \\ &+ \frac{1}{8} \frac{\ell^2 [2A''BAr^2 + B'A'Ar^2 - A'^2Br^2 + 4B'A^2r + 8A'BAr + 8A^2B]}{A^2Br^2}, \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T_{LV})_{22} &= \frac{1}{8} \frac{\ell^2 [2A''BAr + B'A'Ar - A'^2Br + 4B'A^2]r}{A^2} \\ &- \frac{1}{2} \frac{\ell^2 [B'rA + BA'r + 4AB]}{A} + B\ell^2 \\ &+ \frac{1}{8} \frac{\ell^2 [2A''BAr^2 + B'A'Ar^2 - A'^2Br^2 + 4B'A^2r + 8A'BAr + 8A^2B]}{A^2}, \quad (\text{A.35}) \end{aligned}$$

$$(T_{LV})_{33} = \sin^2 \theta (T_{LV})_{22}. \quad (\text{A.36})$$

Substituindo as componentes de $(T_{LV})_{\mu\nu}$ e de $G_{\mu\nu}$ em (3.32) e resolvendo a equação resultante, obtemos a seguinte solução:

$$A(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} \quad (\text{A.37})$$

$$B(r) = (1 + k^2\xi)^{-1} \left(1 + \frac{C_2}{C_1 r}\right) \quad (\text{A.38})$$

Identificando $C_1 = 1$ e $C_2 = -2m$, obtemos o elemento de linha de Schwarzschild modificado pelo termo de violação de Lorentz.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + (1 + k^2\xi)^{-1} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{A.39})$$

A.2.2 Caso temporal - $b_\mu = (f(r), 0, 0, 0)$

As contas feitas para este caso levam à própria solução de Schwarzschild (o vetor b_μ não causa nenhuma modificação na solução).

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (\text{A.40})$$

A.2.3 Caso angular θ - $b_\mu = (0, 0, f(r), 0)$

Não foi encontrada solução analítica para este caso.

A.2.4 Caso angular ϕ - $b_\mu = (0, 0, 0, f(r))$

As contas feitas para este caso mostram que todas as componentes do tensor de correção se anulam. Portanto, não há correções no tensor de Einstein, o que leva neste caso à própria solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (\text{A.41})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Songaila and L.L. Cowie, Nature 398, 667 (1999). P.C.W. Davies, T.M. Davies and C.H. Lineweaver Nature 418, 602 (2002). A. Songaila and L.L. Cowie, Nature 428, 132 (2004).
- [2] John D. Barrow and John K. Webb, Scientific American (Brasil) 38, 28 (2005).
- [3] J. K. Webb, J. A. King, M. T. Murphy, V. V. Flambaum, R. F. Carswell, and M. B. Bainbridge. Indications of a Spatial Variation of the Fine Structure Constant. Phys. Rev. Lett. 107, 191101 (2011).
- [4] J.W. Moffat. Spontaneous Violation of Lorentz Invariance and Ultra-High Energy Cosmic Rays. Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1279 (2003); O. Bertolami. Threshold Effects and Lorentz Symmetry. hep-ph/0301191.
- [5] S.R. Coleman and S.L. Glashow. High-energy tests of Lorentz invariance. Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999). V.A. Kostelecky and M. Mewes. Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics. Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics. Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).
- [6] V.A. Kostelecky and S. Samuel. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [7] V. Alan Kostelecký. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).
- [8] Valery Rubakov. Classical Theory of Gauge Fields (1999).
- [9] R. Bluhm. Spacetime symmetry breaking and Einstein-Maxwell theory. Phys. Rev. D **92**, 085015 (2015).
- [10] R. Bluhm. Explicit versus spontaneous diffeomorphism breaking in gravity. Phys. Rev. D **91**, 065034 (2015).
- [11] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen. New ghost-free gravity Lagrangians with propagating torsion. Phys. Rev. D **21**, 3269 (1980).
- [12] Robert Bluhm and V. Alan Kostelecký. Spontaneous Lorentz Violation, Nambu-Goldstone Modes, and Gravity. Phys. Rev. D **71**, 065008 (2005).
- [13] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel. Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories. Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989).
- [14] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989).
- [15] Ray d’Inverno. Introducing Einstein’s relativity (1992).
- [16] Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity (1972).

-
- [17] G. Van Biesbroeck. The relativity shift at the 1952 february 25 eclipse of the sun. *Astron. J.*, 58, 87 (1953).
- [18] Irwin I. Shapiro. Fourth Test of General Relativity. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 789 (1964).
- [19] Irwin I. Shapiro, Gordon H. Pettengill, Michael E. Ash, Melvin L. Stone, William B. Smith, Richard P. Ingalls, and Richard A. Brockelman. Fourth Test of General Relativity: Preliminary Results. *Phys. Rev. Lett.* 20, 1265 (1968); Erratum *Phys. Rev. Lett.* **21**, 266 (1968).
- [20] Irwin I. Shapiro, Michael E. Ash, Richard P. Ingalls, William B. Smith, Donald B. Campbell, Rolf B. Dyce, Raymond F. Jurgens, and Gordon H. Pettengill. Fourth Test of General Relativity: New Radar Result. *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1132 (1971).
- [21] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos e M.T.D. Orlando, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **29**, 55 (2007).