

Daiana Caroline dos Santos Gomes

**Metodologia para Filtragem de Kalman *Fuzzy*  
Tipo-2 Intervalar Baseada em Modelagem  
Computacional das Componentes Espectrais  
Não-Observáveis de Dados Experimentais**

São Luís – MA

2021



Daiana Caroline dos Santos Gomes

**Metodologia para Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2  
Intervalar Baseada em Modelagem Computacional das  
Componentes Espectrais Não-Observáveis de Dados  
Experimentais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração de Automação e Controle.

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís – MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Gomes, Daiana Caroline dos Santos.

Metodologia para Filtragem de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar Baseada em Modelagem Computacional das Componentes Espectrais Não-Observáveis de Dados Experimentais / Daiana Caroline dos Santos Gomes. - 2021. 153 p.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2021.

1. Estimação paramétrica recursiva. 2. Filtragem de Kalman. 3. Identificação de sistemas. 4. Sistemas fuzzy tipo-2 intervalares. I. Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II. Título.

Daiana Caroline dos Santos Gomes

# **Metodologia para Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Baseada em Modelagem Computacional das Componentes Espectrais Não-Observáveis de Dados Experimentais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração de Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís – MA, 26 de fevereiro de 2021:

---

**Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira  
Serra**  
Orientador – IFMA

---

**Prof. Dr. Francisco das Chagas de  
Souza**  
Membro da banca examinadora – UFMA

---

**Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol  
Attux**  
Membro da banca examinadora – UNICAMP

São Luís – MA  
2021



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força, saúde, coragem e disposição concedidas, essenciais para a conclusão deste trabalho. Sem Ele, nada disso seria possível.

Agradeço aos meus pais, Júlio César e Marylande, e aos meus irmãos, Júlio, Bruna e João, por todo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho. Agradeço também aos meus queridos sobrinhos, Leonardo e Maria Eduarda, por sempre alegrarem meus dias.

Agradeço imensamente ao meu orientador, professor Dr. Ginalber Serra, pelos ricos ensinamentos, pela excelente orientação, pela amizade, paciência e confiança em mim depositada para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos meus ex-orientadores, Danúbia Pires e Orlando Filho, por terem despertado em mim o amor pela pesquisa científica ainda na graduação durante nossos projetos de iniciação científica e pelo incentivo recebido durante o início do mestrado.

Agradeço a todos os amigos do grupo de pesquisa Inteligência Computacional Aplicada à Tecnologia – ICAT do IFMA, em especial aos companheiros de laboratório Anderson Evangelista, Adriano Magalhães, Andressa Cutrim e Antônio Barros, pelas discussões, apoio e incentivo durante os anos de realização deste trabalho. Agradeço também a todos os amigos que fiz na UFMA durante as disciplinas do curso de mestrado.

Agradeço à Universidade Federal do Maranhão – UFMA, em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE, e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão – IFMA pelo apoio estrutural para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo suporte financeiro.

A todos quantos contribuíram, de alguma maneira, para a concretização deste trabalho.



*“Teu Senhor é o poder, a grandeza,  
a honra, a vitória e a majestade; porque  
teu é tudo quanto há nos céus e na terra; teu, Senhor,  
é o reino, e tu te exaltaste por chefe sobre todos.”  
(Bíblia Sagrada, 1 Crônicas 29:11)*



# Resumo

Nesta dissertação, uma metodologia para projeto de filtros de Kalman, usando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares, no domínio do tempo discreto, via decomposição espectral de dados experimentais, é proposta. A metodologia adotada consiste na estimação paramétrica recursiva de submodelos lineares locais, no espaço de estados, do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão da dinâmica inerente aos dados experimentais, usando uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID). O particionamento dos dados experimentais é realizado pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 Gustafson-Kessel. Os ganhos de Kalman intervalares na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar são atualizados de acordo com as componentes não-observáveis calculadas a partir da decomposição espectral recursiva dos dados experimentais. Resultados computacionais ilustram a eficiência da metodologia proposta, quando comparada a outras abordagens largamente citadas na literatura, para filtragem e rastreamento das variáveis de estado do atrator caótico de Lorenz em ambiente ruidoso, bem como para filtragem e rastreamento de trajetórias de referência pelas variáveis de estado do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com atrasos de tempo. Resultados experimentais ilustram a aplicabilidade da metodologia proposta para o rastreamento adaptativo e previsão em tempo real do comportamento de propagação dinâmica do novo coronavírus 2019 (COVID-19) no estado do Maranhão e Brasil.

**Palavras-chave:** Identificação de sistemas. Sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares. Estimação paramétrica recursiva. Filtragem de Kalman.



# Abstract

In this dissertation, a methodology for design of Kalman filters, using interval type-2 fuzzy models, in discrete time domain, via spectral decomposition of experimental data, is proposed. The adopted methodology consists of recursive parametric estimation of local state space linear submodels of interval type-2 fuzzy Kalman filter for tracking and forecasting of the dynamics inherited to experimental data, using an interval type-2 fuzzy version of Observer/Kalman Filter Identification (OKID) algorithm. The partitioning of the experimental data is performed by interval type-2 fuzzy Gustafson-Kessel clustering algorithm. The interval Kalman gains in the consequent proposition of interval type-2 fuzzy Kalman filter are updated according to unobservable components computed by recursive spectral decomposition of experimental data. Computational results illustrate the efficiency of proposed methodology, as compared to approaches widely cited in the literature, for filtering and tracking the state variables of Lorenz's chaotic attractor in a noisy environment, as well as filtering and tracking the reference trajectory through state variables of Chen's chaotic attractor in noisy environment and time delays. Experimental results illustrate the applicability of proposed methodology for adaptive tracking and real time forecasting the dynamic spreading behavior of novel coronavirus 2019 (COVID-19) outbreak in state of Maranhão and Brazil.

**Keywords:** Systems identification. Interval type-2 fuzzy systems. Recursive parametric estimation. Kalman filtering.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 geral gaussiano. Fonte: Autora . . . . .	56
Figura 2 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar gaussiano. Fonte: Autora . . . . .	57
Figura 3 – Conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar gaussiano bidimensional. Fonte: Autora . . . . .	57
Figura 4 – Conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\widetilde{W}^1$ e $\widetilde{W}^2$ . Fonte: Autora . . . . .	58
Figura 5 – Resultado da operação de união entre os conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\widetilde{W}^1$ e $\widetilde{W}^2$ . Fonte: Autora . . . . .	59
Figura 6 – Resultado da operação de interseção entre os conjuntos <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares $\widetilde{W}^1$ e $\widetilde{W}^2$ . Fonte: Autora . . . . .	60
Figura 7 – Resultado da operação de complemento para o conjunto <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{W}^1$ . Fonte: Autora . . . . .	60
Figura 8 – Estrutura de um sistema <i>fuzzy</i> tipo-2. Fonte: Autora . . . . .	61
Figura 9 – Fluxograma da metodologia proposta correspondente aos aspectos computacionais para projeto do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar. . . . .	79
Figura 10 – Análise comparativa para filtragem e rastreamento da variável de estado $x_1$ do atrator caótico de Lorenz, considerando 100 realizações, baseada na métrica MSE: (a) Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017); (b) filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta. . . . .	83
Figura 11 – Análise comparativa para filtragem e rastreamento da variável de estado $x_2$ do atrator caótico de Lorenz, considerando 100 realizações, baseada na métrica MSE: (a) Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017); (b) filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta. . . . .	84
Figura 12 – Análise comparativa para filtragem e rastreamento da variável de estado $x_3$ do atrator caótico de Lorenz, considerando 100 realizações, baseada na métrica MSE: (a) Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017); (b) filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta. . . . .	85
Figura 13 – Conjunto de dados computacionais da variável de estado $x_1$ do atrator caótico de Lorenz corrompida por ruído com $SNR = 0.65$ . . . . .	85
Figura 14 – Comportamento temporal das componentes espectrais $\alpha^j  _{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado $x_1$ do atrator caótico de Lorenz em ambiente ruidoso com $SNR = 0.65$ : (a) Componente não-observável $\alpha^1$ assumida como residual; (b) Componente não-observável $\alpha^2$ assumida como dinamicamente correlacionada a variável de estado $x_1$ . . . . .	86

Figura 15 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares estimadas pelo agrupamento da variável de estado $x_1$ do atrator caótico de Lorenz. . . . .	86
Figura 16 – Comportamento temporal da (a) covariância $R_k$ do ruído de medição associado à variável de estado $x_1$ e do (b) do fator de ponderação $\mathcal{X}_k$ usado para implementação do mecanismo de atualização recursivo do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar. . . . .	87
Figura 17 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz, para o caso de $SNR = 0.65$ . . . . .	88
Figura 18 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal dos ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares, durante atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	88
Figura 19 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{A}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	89
Figura 20 – Comportamento temporal estimado dos elementos da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{B}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	89
Figura 21 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	90
Figura 22 – Comportamento temporal estimado dos elementos da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	90
Figura 23 – Desempenho da abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017) (linha tracejada) para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz (linha sólida), para o caso de $SNR = 0.65$ . . . . .	91
Figura 24 – Trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ para o atrator caótico de Chen: (a) Órbita fechada $r_1(t) \times r_2(t) \times r_3(t)$ ; (b) Trajetórias de referência $r_1(t), r_2(t)$ e $r_3(t)$ a serem rastreadas pelas variáveis de estado $x_1, x_2$ e $x_3$ , respectivamente. . . . .	93

Figura 25 – Conjunto de dados experimentais do atrator caótico de Chen com atrasos de tempo inesperados durante o intervalo de tempo $1,5 \leq t \leq 3,5$ s. . . . .	94
Figura 26 – Comportamento temporal das componentes espectrais $\alpha^j  _{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado $x_1$ do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com falha: (a) Componente não-observável $\alpha^1$ ; (b) Componente não-observável $\alpha^2$ . . . . .	95
Figura 27 – Comportamento temporal das componentes espectrais $\alpha^j  _{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado $x_2$ do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com falha: (a) Componente não-observável $\alpha^1$ ; (b) Componente não-observável $\alpha^2$ . . . . .	96
Figura 28 – Comportamento temporal das componentes espectrais $\alpha^j  _{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado $x_3$ do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com falha: (a) Componente não-observável $\alpha^1$ ; (b) Componente não-observável $\alpha^2$ . . . . .	96
Figura 29 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, para filtragem e rastreamento da trajetória de referência por meio das variáveis de estado $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Chen, para o caso de atrasos de tempo nos estados e entradas. . . . .	97
Figura 30 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal dos ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio de variáveis de estado de atrator caótico de Chen: (a) - (c) Regra 1, (d) - (f) Regra 2. . . . .	98
Figura 31 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{A}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	98
Figura 32 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{B}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	99
Figura 33 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	99

Figura 34 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{D}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2. . . . .	100
Figura 35 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> normalizados instantâneos do sistema de inferência do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar, durante as etapas de treinamento e recursiva para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a) Graus de ativação superiores normalizados instantâneos; (b) Graus de ativação inferiores normalizados instantâneos. . . . .	100
Figura 36 – Dados experimentais de órbitos diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020, no estado do Maranhão. . . . .	104
Figura 37 – Eficiência das componentes não-observáveis, de acordo com o critério VAF, para representação dos dados experimentais de órbitos diários registrados no estado do Maranhão no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020. . . . .	104
Figura 38 – Comportamento temporal das componentes não-observáveis $\alpha^j _{j=1,\dots,7}$ , as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais de órbitos diários por Covid-19 registrados no estado do Maranhão no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020. . . . .	105
Figura 39 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> tipo-2 estimadas a partir do agrupamento dos dados experimentais de órbitos diários registrados no estado do Maranhão. . . . .	106
Figura 40 – Região de confiança gerada pelo filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento dos dados experimentais de órbitos diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020, no estado do Maranhão. . . . .	106
Figura 41 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação da COVID-19 relacionados aos órbitos diários registrados no estado do Maranhão: (a) atualização baseada nos dados de treinamento de 18 de Março a 18 de Maio de 2020; (b) atualização recursiva realizada em 27 de Maio de 2020; (c) atualização recursiva realizada em 24 de Junho de 2020; (d) atualização recursiva realizada em 03 de Julho de 2020; (e) atualização recursiva realizada em 25 de Setembro de 2020; (f) atualização recursiva realizada em 18 de Janeiro de 2021. . . . .	108

Figura 42 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	109
Figura 43 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{A}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	110
Figura 44 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{B}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	111
Figura 45 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	112
Figura 46 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	113
Figura 47 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> instantâneos normalizados do sistema de inferência do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 18 de Março de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado de Maranhão: (a) Graus de ativação <i>fuzzy</i> instantâneos superiores, (b) Graus de ativação <i>fuzzy</i> instantâneos inferiores. . . . .	114
Figura 48 – Eficiência em tempo real, com base no critério de validação VAF, do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalo, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 26 de Janeiro de 2021, no estado de Maranhão. . . . .	115

Figura 49 – Dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020 no Brasil. . . . .	115
Figura 50 – Eficiência das componentes não-observáveis, de acordo com o critério VAF, para representar os dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil. . . . .	116
Figura 51 – Comportamento temporal das componentes não-observáveis espectrais $\alpha^j  _{j=1, \dots, 10}$ , as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil. . . . .	116
Figura 52 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares estimadas a partir do agrupamento dos óbitos diários registrados no Brasil. . . . .	117
Figura 53 – Região de confiança gerada pelo filtro Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020, no Brasil. . . . .	118
Figura 54 – Desempenho do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação da COVID-19 relacionados aos óbitos diários registrados no Brasil: (a) atualização baseada nos dados de treinamento de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020; (b) atualização recursiva realizada em 27 de Maio de 2020; (c) atualização recursiva realizada em 23 de Julho de 2020; (d) atualização recursiva realizada em 28 de Agosto de 2020; (e) atualização recursiva realizada em 13 de Outubro de 2020; (f) atualização recursiva realizada em 18 de Janeiro de 2021. . . . .	119
Figura 55 – Ganhos de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	120
Figura 56 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{A}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	121
Figura 57 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\widetilde{\mathbf{B}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	122

Figura 58 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	123
Figura 59 – Matriz <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3. . . . .	124
Figura 60 – Graus de ativação <i>fuzzy</i> instantâneos normalizados do sistema de inferência do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 29 de Fevereiro a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Graus de ativação <i>fuzzy</i> instantâneos normalizados superiores, (b) Graus de ativação <i>fuzzy</i> instantâneos normalizados inferiores. . . . .	125
Figura 61 – Eficiência em tempo real, com base no critério de validação VAF, do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 26 de Janeiro de 2021, no Brasil. . . . .	126
Figura 62 – Análise comparativa dos resultados de previsão entre as abordagens (HAZARIKA; GUPTA, 2020; SAHAI et al., 2020) e o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar proposto, de acordo com o número de casos acumulados de COVID-19 no Brasil. . . . .	127
Figura 63 – Fluxograma para o algoritmo OKID. Fonte: Adaptado de (JUANG, 1994).	151



# Lista de tabelas

Tabela 1	– Classificação dos sistemas <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalares. . . . .	62
Tabela 2	– Análise de eficiência do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, quando comparado a abordagem (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017), para filtragem e rastreamento das variáveis de estado $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ do atrator caótico de Lorenz para o caso de $SNR = 0.65$ , baseado no critério de validação MSE. . . . .	87
Tabela 3	– Desempenho do algoritmo do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar quando comparado a abordagem em (WU et al., 2015) e outros algoritmos de agrupamento ( <i>Fuzzy C-Means</i> e <i>Possibilistic C-Means</i> ), para filtragem e rastreamento da trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen. . . . .	101
Tabela 4	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e os modelos de aprendizagem de máquina LASSO, ARIMA e a rede neural recorrente LSTM para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no estado do Maranhão. . . . .	113
Tabela 5	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e a abordagem em (FEROZE, 2020) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	121
Tabela 6	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e a abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) para previsão da propagação dinâmica do COVID-19 no Brasil. . . . .	123
Tabela 7	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e a abordagem em (SAHAI et al., 2020) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	124
Tabela 8	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e a abordagem em (MOREAU, 2020) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil. . . . .	125
Tabela 9	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e a abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil. . . . .	126
Tabela 10	– Análise comparativa entre o filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar e os modelos de aprendizagem de máquina LASSO, ARIMA e rede neural recorrente LSTM para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. . . . .	127



# Lista de abreviaturas e siglas

ARIMA	<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>
COVID-19	<i>Corona Virus Disease 2019</i>
FDP	Função de Densidade de Probabilidade
FK	Filtro de Kalman
FKE	Filtro de Kalman Estendido
FKF	Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i>
FKU	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
GK	Gustafson-Kessel
LASSO	<i>Least Absolute Shrinkage and Selection Operator</i>
LIT	Linear Invariante no Tempo
LSTM	<i>Long Short-Term Memory</i>
MAD	<i>Median Absolute Deviation</i>
MAE	<i>Mean Absolute Error</i>
MAPE	<i>Mean Absolute Percentage Error</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
OKID	<i>Observer/Kalman Filter Identification</i>
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
R <sup>2</sup>	Coefficiente de determinação
RDI	Rastro de Incerteza
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
RMSPE	<i>Root Mean Square Percentage Error</i>
SEIR	Susceptível - Exposto - Infecioso - Recuperado
SNR	<i>Signal-Noise Ratio</i>

SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
VAF	<i>Variance Accounted For</i>
WCRVFL	<i>Wavelet-Coupled Random Vector Functional Link</i>

# Lista de símbolos

$\tilde{\mathbf{A}}^i$	Matriz de estados intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{B}}^i$	Matriz de entrada intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{C}}^i$	Matriz de saída intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{D}}^i$	Matriz de transmissão direta intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\tilde{\mathbf{K}}^i$	Matriz de ganho de Kalman intervalar na $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\mathbf{Q}^i$	Matriz de covariância do ruído de processo
$\mathbf{R}^i$	Matriz de covariância do ruído de medição
$\hat{\bullet}$	Estimação de uma variável
“ $-$ ”	Grandeza <i>a priori</i>
“ $+$ ”	Grandeza <i>a posteriori</i>
$\mathcal{N}$	Distribuição de probabilidade gaussiana
$E[ \ ]$	Esperança matemática
$\mathbf{Y}$	Vetor de parâmetros de Markov
$\mathcal{P}$	Matriz de observabilidade
$\mathcal{Q}$	Matriz de controlabilidade
$\tilde{\mu}_{\tilde{W}}$	Valor de pertinência tipo-2 da $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\underline{\mu}_{\tilde{W}}$	Valor de pertinência inferior da $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\bar{\mu}_{\tilde{W}}$	Valor de pertinência superior da $i$ -ésima regra <i>fuzzy</i>
$\in$	Pertence
$\alpha$	Componentes espectrais não-observáveis
$\xi$	Número de componentes espectrais não-observáveis extraídas
$\mathbf{Z}$	Conjunto de dados experimentais



# Sumário

<b>I</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL</b>	<b>31</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>33</b>
<b>1.1</b>	<b>Trabalhos Relacionados</b>	<b>34</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação e Justificativa</b>	<b>35</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>36</b>
1.3.1	Objetivo Geral	36
1.3.2	Objetivos Específicos	36
<b>1.4</b>	<b>Contribuições da Dissertação</b>	<b>36</b>
<b>1.5</b>	<b>Trabalhos Publicados Pela Autora</b>	<b>37</b>
1.5.1	Periódicos	37
1.5.2	Capítulos de Livro	37
1.5.3	Congressos	37
<b>1.6</b>	<b>Organização da Dissertação</b>	<b>38</b>
<b>II</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>41</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DE FILTRAGEM DE KALMAN</b>	<b>43</b>
2.1	Etapa de Propagação	44
2.2	Etapa de Assimilação	45
<b>3</b>	<b>TEORIA DE REALIZAÇÃO DE SISTEMAS</b>	<b>49</b>
3.1	Controlabilidade no Domínio do Tempo Discreto	49
3.2	Observabilidade no Domínio do Tempo Discreto	51
3.3	Conceitos Básicos de Realização	51
<b>4</b>	<b>TEORIA DE SISTEMAS FUZZY TIPO-2</b>	<b>55</b>
4.1	Conjuntos Fuzzy Tipo-2	55
4.2	Operações Básicas Entre Conjuntos Fuzzy Tipo-2 Intervalares	56
4.2.1	União	58
4.2.2	Interseção	58
4.2.3	Complemento	59
4.3	Sistema de Inferência Fuzzy Tipo-2 Intervalar Takagi-Sugeno	61

<b>III</b>	<b>REFERENCIAL METODOLÓGICO</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA: FILTRAGEM DE KALMAN <i>Fuzzy</i> TIPO-2 INTERVALAR</b>	<b>65</b>
<b>5.1</b>	<b>Pré-Processamento por Análise Espectral Singular</b>	<b>65</b>
5.1.1	Etapa de Treinamento	65
5.1.2	Etapa Recursiva	67
<b>5.2</b>	<b>Estimação Recursiva da Covariância do Ruído de Medição</b>	<b>67</b>
<b>5.3</b>	<b>Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar</b>	<b>69</b>
5.3.1	Estimação Paramétrica do Antecedente	70
5.3.2	Estimação Paramétrica do Consequente	72
5.3.2.1	Atualização Recursiva do Sistema de Inferência do Filtro de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar	77
<b>6</b>	<b>ANÁLISE COMPUTACIONAL DA METODOLOGIA PROPOSTA</b>	<b>81</b>
<b>6.1</b>	<b>Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Aplicado ao Atrator Caótico de Lorenz</b>	<b>81</b>
6.1.1	Análise Comparativa e Discussões	87
<b>6.2</b>	<b>Filtragem e Rastreamento de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar Aplicado ao Atrator Caótico de Chen</b>	<b>92</b>
<b>7</b>	<b>ANÁLISE EXPERIMENTAL DA METODOLOGIA PROPOSTA</b>	<b>103</b>
<b>7.1</b>	<b>Análise de Filtragem e Previsão de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar da Propagação Dinâmica da COVID-19 no Estado do Maranhão</b>	<b>103</b>
7.1.1	Análise Comparativa e Discussões	107
<b>7.2</b>	<b>Análise de Filtragem e Previsão de Kalman <i>Fuzzy</i> Tipo-2 Intervalar da Propagação Dinâmica da COVID-19 no Brasil</b>	<b>113</b>
7.2.1	Análise Comparativa e Discussões	120
<b>IV</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL</b>	<b>129</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>131</b>
<b>9</b>	<b>PROPOSTAS DE PESQUISAS FUTURAS</b>	<b>133</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>135</b>

## APÊNDICES

143

	<b>APÊNDICE A – ALGORITMO <i>OBSERVER/KALMAN FILTER IDENTIFICATION</i> (OKID) . . . . .</b>	<b>145</b>
<b>A.1</b>	<b>Cálculo dos Parâmetros de Markov . . . . .</b>	<b>147</b>
A.1.1	Parâmetros de Markov do Sistema . . . . .	147
A.1.2	Parâmetros de Markov do Ganho do Observador . . . . .	148
<b>A.2</b>	<b>Algoritmo de Realização de Autosistemas - ERA . . . . .</b>	<b>148</b>



Parte I

CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL



# 1 Introdução

Em ciências e engenharia, é muito comum a solução de problemas de natureza estocástica como predição, separação e detecção de sinais na presença de ruído aleatório (MACK; HABETS, 2020; GOMEZ-GARCIA et al., 2020; LIU; LIU; BUCKNALL, 2019; ZHU et al., 2019; ZOIREFF; SAMANIEGO; VIDAL, 2021). O filtro de Kalman (FK) é a ferramenta matemática mais conhecida e utilizada para estimação estocástica a partir de medições ruidosas. Ele foi proposto em 1960 por Rudolph E. Kalman em seu artigo intitulado “*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*”, descrevendo uma solução recursiva para o problema da filtragem linear no domínio do tempo discreto (KALMAN, 1960), tornando-se uma abordagem padrão para estimação ótima. Desde sua publicação, o filtro de Kalman foi objeto de extensa pesquisa e aplicações nas áreas de cálculo de órbita, rastreamento de alvos, navegação integrada, posicionamento dinâmico, fusão de dados de sensor, microeconomia, controle, modelagem, processamento digital de imagem, reconhecimento de padrão, segmentação e detecção de borda de imagem, entre outras. Este amplo interesse pelo FK é devido a sua característica de otimalidade, forma conveniente para processamento online em tempo real, fácil formulação e implementação (SERRA, 2018).

O aumento da complexidade dos sistemas dinâmicos práticos tem motivado pesquisas no sentido de estender a teoria de filtragem de Kalman clássica para enfrentar não linearidades e incertezas, utilizando a teoria de sistemas *fuzzy*, principalmente os sistemas *fuzzy* tipo-2, para aplicações na área de modelagem e controle (GIL; OLIVEIRA; PALMA, 2019; BOUHENTALA; GHANAI; CHAFAA, 2019; HWANG; WU; LAI, 2019; EVANGELISTA; SERRA, 2020; SERRA, 2018). Essas recentes aplicações bem sucedidas de sistemas *fuzzy* tipo-2 é devido à sua estrutura baseada em regras capaz de aproximar funções, onde as proposições do antecedente descrevem regiões de operação *fuzzy* (incertezas) e as proposições do consequente expressam o mapeamento não linear do comportamento físico inerente às regiões de operação *fuzzy* correspondentes (ZHANG et al., 2020; MENDEL, 2019; LIANG; MENDEL, 2000).

A metodologia proposta nesta dissertação é baseada no projeto de filtros de Kalman usando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares no domínio do tempo discreto. A formulação de uma nova versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID) é proposta, para atualizar, recursivamente, a proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 utilizando componentes espectrais extraídas dos dados experimentais. Conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares, os quais caracterizam a proposição do antecedente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2, são estimados pelo, também proposto, algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel. Resultados

computacionais de filtragem e rastreamento dos estados de um sistema dinâmico não linear com comportamento caótico em ambiente ruidoso, bem como a filtragem e rastreamento de uma trajetória de referência por meio das variáveis de estado de um sistema dinâmico também com comportamento caótico e sujeito a atrasos de tempo em suas entradas e estados, demonstram a eficiência da metodologia proposta em comparação com outras abordagens amplamente citadas na literatura. A aplicabilidade da metodologia proposta é ilustrada através de resultados experimentais para o rastreamento e previsão em tempo real do comportamento de propagação dinâmica da COVID-19 no estado do Maranhão e Brasil.

## 1.1 Trabalhos Relacionados

Nos últimos anos, estudos envolvendo a integração de sistemas *fuzzy* e filtros de Kalman têm sido propostos na literatura (PIRES; SERRA, 2019; EYOH et al., 2018). Em (WANG et al., 2020), conjuntos *fuzzy* são combinados com um método de otimização baseado no filtro de Kalman estendido com informações linguísticas aplicado ao rastreamento de alvos. De acordo com informações limitadas e incertas de diferentes sensores, a metodologia é capaz de combinar essas informações quando aplicada ao problema de otimização de traços em um alvo de manobra desconhecido na província de Sichuan, na China. Em (ASL et al., 2020), uma metodologia de otimização do filtro de Kalman *Unscented* (FKU) adaptativo é apresentada por meio de um algoritmo *fuzzy* evolucionário denominado *Fuzzy Adaptive Grasshopper Optimization Algorithm*, e é eficientemente aplicada a diferentes problemas práticos, como um manipulador robótico e sistemas servo-hidráulicos, apresentando melhor desempenho quando comparada com versões anteriores do FKU. Em (MATÍA et al., 2021), é proposta uma reformulação na representação da incerteza em filtros de Kalman *fuzzy* (FKF), para minimizar os efeitos de propagação de incertezas que ocorre em outras abordagens presentes na literatura para o FKF. Distribuições de possibilidade trapezoidais são usadas para representar variáveis *fuzzy*, definindo regiões de possibilidade e impossibilidade em conjuntos assimétricos, o que contribui para modelar a incerteza inerente a sensores com mais precisão. Em (BENHAMIDA et al., 2019), um modelo de controle de torque preditivo direto, baseado em um modulador lógico *fuzzy* adaptativo e em filtro de Kalman estendido, é apresentado. A metodologia consiste na modulação do vetor de ciclo de trabalho baseada em lógica *fuzzy* adaptativa, de modo a promover um melhor desempenho no controle de torque em sistemas de acionamento de máquinas, bem como reduzir suas ondulações.

Apesar da extensa literatura neste contexto, ainda existem muitos campos de pesquisa a serem explorados quanto à associação de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy*. Aplicações envolvendo a associação de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy* tipo-2, por exemplo, também têm sido desenvolvidas em diversas áreas a fim de caracterizar e

reduzir os efeitos das incertezas em sistemas dinâmicos (EVANGELISTA; SERRA, 2019; KHANESAR et al., 2012). Em (LIN et al., 2015), um sistema neuro *fuzzy* tipo-2 intervalar é proposto, no qual os pesos das proposições do consequente são ajustados por meio de um algoritmo de filtro de Kalman ordenado por regras para aumentar a eficácia de aprendizagem da rede, usando uma propriedade de auto-evolução que pode gerar regras *fuzzy* automaticamente e descartar características desnecessárias quando aplicada a problemas de identificação de sistemas. Em (TAGHAVIFAR, 2020), um sistema de suspensão ativo para carros elétricos, baseado em um controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) *fuzzy* tipo-2 e filtro de Kalman estendido é proposto para melhorar o projeto do veículo e assim alcançar melhor desempenho e maior conforto na sua condução.

Diferentemente das abordagens anteriormente mencionadas e de outras encontradas na literatura, o escopo desta dissertação é baseada na integração de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares para rastreamento e previsão de dados experimentais incertos. O projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, de acordo com a metodologia proposta, é baseado em componentes espectrais não-observáveis e regiões de incerteza extraídas a partir de dados experimentais.

## 1.2 Motivação e Justificativa

Entre os principais aspectos que caracterizam a complexidade dos problemas em ciências e engenharia estão as não linearidades (BENDAT, 1998), incertezas (MARTYNYUK; YU.; MARTYNYUK-CHERNIENKO, 2019), ambiente ruidoso e não estacionário (HENDRICKS; JANNERUP; SORENSEN, 2008; MOSS; MCCLINTOCK, 1989), variabilidade temporal (TOMÁS-RODRÍGUEZ; BANKS, 2010), entre outros. Abordagens de modelagem computacional que consideram essas complexidades em suas formulações têm melhor desempenho diante de condições de estabilidade e convergência (BONYADI; MICHALEWICZ, 2016), estimação paramétrica polarizada (CHAN et al., 2020), dinâmicas não modeladas (KHAYYAM et al., 2020), e elevados erros de aproximação e previsão (TANG et al., 2020). Em análise de dados, uma preocupação crescente entre pesquisadores está relacionada à presença de diversos tipos de incertezas como imprecisão e incompletude de dados e informações, incertezas paramétricas e estruturais, propagação e acúmulo de incertezas e condições iniciais desconhecidas, que devem ser consideradas em abordagens de modelagem a fim de garantir modelos precisos para problemas do mundo real (WANG; ZHAO, 2013). Embora estudos recentes tenham abordado o processamento de incertezas na formulação de metodologias de análise de dados em diferentes domínios de aplicação, como engenharia (MA; MA, 2020), saúde (HEINTZMAN; KLEINBERG, 2016), epidemiologia (GILBERT et al., 2014), economia (KHAIRALLA; NING; AL-JALLAD, 2018), entre outros, as pesquisas nesta questão ainda estão em aberto. Isso tem motivado o desenvolvimento de ferramentas utilizando a teoria de sistemas *fuzzy* para análise de dados (HURTIK; MOLEK; HULA,

2020; LAN et al., 2020; PIRES; SERRA, 2020), principalmente a partir da associação de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy* tipo-2, que é a motivação particular desta dissertação. A abordagem proposta tem como objetivo superar as limitações da filtragem de Kalman clássica diante de não linearidades de ordem elevada, processando diferentes tipos de incertezas a partir de regiões de operação *fuzzy* intervalares definidas sobre o conjunto de dados experimentais não-estacionário e garantindo um conjunto de possíveis soluções dentro de uma região de confiança.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma metodologia para o projeto de filtros de Kalman com inferência *fuzzy* tipo-2 intervalar, considerando as componentes espectrais não-observáveis extraídas a partir de dados experimentais.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Apresentar uma base teórica sobre modelagem computacional de dados no espaço de estados, filtragem de Kalman, algoritmo OKID, sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares e análise espectral de dados.
- Formula, matematicamente, uma versão *fuzzy* tipo-2 recursiva do algoritmo OKID para estimação paramétrica recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.
- Formular, matematicamente, uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel para estimação paramétrica da proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.
- Formular, matematicamente, um mecanismo de atualização recursivo dos ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares baseado na decomposição espectral dos dados experimentais corrompidos por ruído.
- Validar a metodologia proposta a partir da análise comparativa com outras metodologias largamente citadas na literatura e aplicações a estudos de caso em problemas reais de filtragem e previsão.

## 1.4 Contribuições da Dissertação

As principais contribuições que garantem a originalidade da metodologia proposta são:

- Uma abordagem computacional baseada na integração de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy* tipo-2 para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real de dados experimentais;
- Formulação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado em um mecanismo de distância de similaridade adaptativa capaz de definir regiões de operação específicas associadas ao comportamento e incertezas inerentes ao conjunto de dados experimentais;
- Formulação de um modelo computacional com aprendizagem de máquina inteligente baseado no filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real do comportamento inerente ao conjunto de dados experimentais, a partir das regiões de operação específicas definidas no item anterior.

## 1.5 Trabalhos Publicados Pela Autora

### 1.5.1 Periódicos

- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Machine Learning Model For Computational Tracking and Forecasting the COVID-19 Dynamic Propagation. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2021. DOI 10.1109/JBHI.2021.3052134 (Qualis A1, JCR: 5.223).
- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Computational Approach For Real-Time Interval Type-2 Fuzzy Kalman Filtering and Forecasting via Unobservable Spectral Components of Experimental Data. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2021. DOI 10.1007/s40313-020-00675-9 (Qualis B1).

### 1.5.2 Capítulos de Livro

- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Methodology for Model-Based Fuzzy Kalman Filter Design via Singular Spectral Analysis of Experimental Data. *Applications of Artificial Intelligence in Electrical Engineering*, IGI Global, 1 ed., 2020.
- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Filtro de Kalman Baseado em Modelo *Fuzzy* Takagi – Sugeno via Análise Espectral de Dados Experimentais. *A Produção do Conhecimento na Engenharia Elétrica 2*, Atena Editora, 1 ed., 2020.

### 1.5.3 Congressos

- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Projeto de Filtro de Kalman *Fuzzy* Baseado em Modelo via Decomposição Espectral de Dados Experimentais. In: *Anais do 14º*

Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2019, Ouro Preto – MG.

- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Projeto de Filtro de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar via Decomposição Espectral de Dados Experimentais. In: Anais do 23º Congresso Brasileiro de Automática, 2020, Porto alegre – RS.
- GOMES, D. C. S; SERRA, G. L. O. Filtragem Computacional de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 para Rastreamento e Previsão da Dinâmica de Propagação da COVID-19: Estudo de Caso Aplicado ao Brasil. In: Anais do 23º Congresso Brasileiro de Automática, 2020, Porto alegre – RS.

## 1.6 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada em quatro partes principais: Contextualização Inicial, Fundamentação Teórica, Referencial Metodológico e Contextualização Final.

A Parte I, CONTEXTUALIZAÇÃO INICIAL, é constituída apenas pelo Capítulo 1. Neste capítulo, apresentou-se uma introdução aos tópicos de interesse desta dissertação, a motivação e justificativa, os objetivos geral e específicos, bem como as contribuições da metodologia proposta nesta dissertação. Por fim, foram evidenciados os trabalhos publicados pela autora.

A Parte II, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, é constituída pelos Capítulos 2, 3 e 4. No Capítulo 2, são abordados conceitos e formulações sobre a teoria de filtragem de Kalman, relevantes para o desenvolvimento da metodologia proposta nesta dissertação. No Capítulo 3, são apresentados conceitos sobre a teoria de realização de sistemas. No Capítulo 4, aspectos teóricos sobre sistemas *fuzzy* tipo-2 são detalhados, bem como sua extensão para sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares, os quais constituem a base para a metodologia proposta nesta dissertação.

A Parte III, REFERENCIAL METODOLÓGICO, é constituída pelos Capítulos 5, 6 e 7. No Capítulo 5, é apresentada a metodologia para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares proposto nesta dissertação. Neste capítulo, formulações para o pré-processamento dos dados experimentais por meio da Análise Espectral Singular, estimação paramétrica das proposições do antecedente e consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e seu mecanismo de atualização recursivo, são abordados. No Capítulo 6, resultados computacionais da metodologia proposta são apresentados, bem como análise comparativa com abordagens relevantes presentes na literatura, no sentido de demonstrar a eficiência da metodologia proposta nesta dissertação. No Capítulo 7, resultados experimentais da aplicação da metodologia proposta para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real do comportamento de propagação dinâmica da

COVID-19 são apresentados, no sentido de elucidar a aplicabilidade da metodologia proposta.

A Parte **IV**, CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL, é constituída pelos Capítulos **8** e **9** nos quais apresentam-se, respectivamente, as conclusões da dissertação e as propostas de pesquisas futuras.



Parte II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA



## 2 Teoria de Filtragem de Kalman

O problema de estimação de estados de sistemas dinâmicos está presente em diversas aplicações da engenharia (GROTAS et al., 2019; ZAMZAM; LIU; BERNSTEIN, 2021; NUGROHO; TAHA; QI, 2020). Neste contexto, diversos algoritmos foram desenvolvidos no sentido de estabelecer uma representação interna do comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo. Dentre eles, o filtro de Kalman (FK) é um estimador recursivo ótimo, bastante aplicado atualmente, baseado na combinação de informações sobre a dinâmica do sistema, representado por um modelo no espaços de estados, e medições de sensores (KALMAN, 1960). Neste capítulo, são apresentados conceitos básicos relativos ao filtro de Kalman bem como o funcionamento da sua estrutura no processo de filtragem e estimação de estados de sistemas dinâmicos.

O filtro de Kalman consiste de um conjunto de equações recursivas, as quais são utilizadas para a estimação dos estados de um sistema dinâmico representado pelo seguinte modelo linear no espaço de estados (AGUIRRE, 2015; KALMAN, 1960; BROWN; HWANG, 2012; GREWAL, 2008):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \Upsilon_k \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado  $n$ -dimensional no instante  $k$ ;  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas  $m$ -dimensional no instante  $k$ ;  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas  $p$ -dimensional no instante  $k$  e as matrizes  $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são, respectivamente, a matriz de estados, matriz de entrada e matriz de saída. Os termos  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  são, respetivamente, os ruídos de processo (relacionado a perturbações desconhecidas no processo) e de medição (relacionado a incerteza nas medições), os quais são variáveis aleatórias, de média nula, que satisfazem as relações  $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_k$ ,  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k$  e  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^T] = 0$ , e  $\Upsilon_k$  é a matriz que modela o ruído de processo. Para o problema de estimação de estados, a estimativa de estados ótima  $\mathbf{x}_k$  é definida em termos da Função de Densidade de Probabilidade (FDP) condicional  $f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ , isto é, a estimativa ótima do vetor de estados  $\mathbf{x}_k$  é condicionada às medições de  $\mathbf{y}_i, i = 1, \dots, k$ , ou seja,  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_k$ , onde  $k$  denota o instante de tempo atual. O filtro de Kalman convencional adota uma estrutura do tipo *predição-correção* ou *propagação-assimilação* para a estimação ótima do vetor de estados  $\mathbf{x}_k$  baseada no conhecimento da dinâmica do sistema e nas medições realizadas para  $\mathbf{y}$ . As etapas de propagação e assimilação, implementadas pelo algoritmo do filtro de Kalman convencional, são descritas a seguir.

## 2.1 Etapa de Propagação

Considerando a função de densidade de probabilidade de  $\mathbf{x}_k^+$  dada por  $f_k \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{P}_k^+)$ , em que  $f_k$ , por hipótese, é considerada como gaussiana para simplificação das deduções matemáticas,  $\bar{\mathbf{x}}_k^+$  é a média e  $\mathbf{P}_k^+$  é a matriz de covariância do erro de estimação, deseja-se encontrar a função de densidade de probabilidade de  $\mathbf{x}_{k+1}^-$ . Nesta dissertação, o sinal “+” é utilizado para indicar uma grandeza referente ao instante  $k$  após ter sido incluída a informação em  $k$  e o sinal de “-” para indicar uma grandeza referente ao instante  $k$  antes de ser incluída a informação referente ao instante  $k$ . Uma vez que, em processos estocásticos, uma função de densidade de probabilidade gaussiana permanece gaussiana ao ser propagada por um sistema linear e invariante no tempo,  $f^-$  também será gaussiana, ou seja,  $f^- \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-)$ , e é completamente definida pela determinação de  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  e  $\mathbf{P}_{k+1}^-$ .

Substituindo o estado  $\mathbf{x}_k^+$  na Equação (2.1), tem-se:

$$\mathbf{x}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \Upsilon_k \mathbf{w}_k \quad (2.3)$$

Uma vez que a média do ruído dinâmico  $\mathbf{w}_k$ , por hipótese, é nula e o sinal  $\mathbf{u}_k$  é determinístico, utilizando-se a propriedade da ergodicidade (o que permite substituir o valor esperado de uma variável pela sua média temporal), a esperança matemática de  $\mathbf{x}_{k+1}^-$ , na Equação (2.3), é dada por:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.4)$$

Por se tratar de distribuições gaussianas, a estimação do vetor de estado  $\mathbf{x}$  resultará no seu valor médio. Logo, a Equação (2.4) pode ser reescrita como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.5)$$

onde o símbolo “^” indica o valor estimado do vetor de estado.

Definindo-se o erro de estimação na etapa de propagação como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.6)$$

onde o símbolo “~” indica o erro e  $\mathbf{x}_{k+1}$  é o valor verdadeiro do vetor de estado. Substituindo as Equações (2.5) e (2.1) na Equação (2.6):

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = [\mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k] - [\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \Upsilon_k \mathbf{w}_k] \quad (2.7)$$

$$= \mathbf{A}_k (\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k) - \Upsilon_k \mathbf{w}_k \quad (2.8)$$

$$= \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \Upsilon_k \mathbf{w}_k \quad (2.9)$$

Por definição, a matriz de covariância de  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  é dada por (AGUIRRE, 2015):

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbb{E} \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \right) \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbb{E} \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \right)^T \right] \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \right) \left( \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \right)^T \right] \quad (2.11)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] \quad (2.12)$$

A partir da Equação (2.12), percebe-se que a matriz de covariância do vetor de estado estimado é igual a matriz de covariância do erro de estimação para o caso em que a estimativa de  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  é não polarizada, para o qual  $\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] = 0$ . Substituindo a Equação (2.9) na Equação (2.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \Upsilon_k \mathbf{w}_k \right) \left( \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \Upsilon_k \mathbf{w}_k \right)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \mathbf{A}_k^T \right] - \mathbb{E} \left[ \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \Upsilon_k^T \right] - \mathbb{E} \left[ \Upsilon_k \mathbf{w}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \mathbf{A}_k^T \right] + \mathbb{E} \left[ \Upsilon_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \Upsilon_k^T \right] \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \right] \Upsilon_k^T - \Upsilon_k \mathbb{E} \left[ \mathbf{w}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \right] \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbf{w}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \right] = 0$ , pois o ruído de processo na iteração  $k$  não é correlacionado com o erro de estimação, considerando a mesma iteração.

Desse modo, a função de densidade de probabilidade  $f^- \sim \mathcal{N} \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^- \right)$  é caracterizada completamente pelas Equações (2.4) e (2.13).

## 2.2 Etapa de Assimilação

Conforme visto na Seção 2.1, o vetor de estado  $\mathbf{x}_k^+$  é propagado para a próxima iteração a partir do modelo dinâmico, o qual descreve como o vetor de estado muda de uma iteração para outra, resultando em  $\mathbf{x}_{k+1}^-$ . Na etapa de assimilação ou correção, a estimativa do vetor de estados  $\mathbf{x}_{k+1}^-$  é corrigida com a chegada de nova informação (medição) na iteração  $k+1$ , resultando no vetor de estado corrigido  $\mathbf{x}_{k+1}^+$ . Nesta etapa, deseja-se observar o que ocorre com  $f^-$ , caracterizada na etapa de propagação, ao ser realizada a etapa de assimilação, ou seja, deve-se caracterizar a distribuição de  $\mathbf{x}_{k+1}^+$  definida pela distribuição *a posteriori*  $f^+ \sim \mathcal{N} \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+ \right)$ , a partir da distribuição *a priori*,  $f^- \sim \mathcal{N} \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^- \right)$ ,

e da medição que chega nesta iteração,  $\mathbf{y}_{k+1}$ . É possível relacionar as médias de  $f^+$  e  $f^-$  como segue:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left[ \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \left[ \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \quad (2.15)$$

Conforme mencionado anteriormente, por se tratar de distribuições gaussianas, a estimação do vetor  $\mathbf{x}$  pode ser substituído pelo seu valor médio. Logo, a Equação (2.14) pode ser reescrita como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left[ \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \quad (2.16)$$

Para se determinar uma expressão para a matriz de covariância  $\mathbf{P}_{k+1}^-$ , será definido o erro de estimação após a assimilação como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ - \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.17)$$

A partir da Equação (2.17), a matriz de covariância desejada é dada por

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ \right)^T \right] \quad (2.18)$$

Substituindo a Equação (2.16) na Equação (2.17), tem-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left[ \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] - \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.19)$$

Considerando a Equação (2.2), a Equação (2.19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left[ \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] - \mathbf{x}_{k+1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação (2.20) na Equação (2.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1}^+ &= \mathbf{E} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T \right] + \\
&\quad + \mathbf{E} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T \right] + \\
&\quad + \mathbf{E} \left[ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T \right] + \mathbf{E} \left[ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T \right] \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k+1}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \\
&\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \right] \mathbf{K}_{k+1}^T + \\
&\quad + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{E} \left[ \mathbf{v}_k \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k+1}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
&= \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- + \\
&\quad + \mathbf{K}_{k+1} \left( \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right) \mathbf{K}_{k+1}^T \tag{2.21}
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_{k+1}^T \right] = 0$  e  $\mathbf{E} \left[ \mathbf{v}_{k+1} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] = 0$ , uma vez que o ruído de medição em uma iteração não é correlacionado ao erro da estimação corrigida na mesma iteração.

Substituindo a Equação (2.15) no primeiro elemento  $\mathbf{K}_{k+1}$  da última parcela da Equação (2.21), tem-se:

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \tag{2.22}$$

Assim, a distribuição de probabilidade *a posteriori*  $f^+ \sim \mathcal{N} \left( \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+ \right)$  é completamente caracterizada pelas Equações (2.14) e (2.22).

Portanto, o filtro de Kalman discreto é formado pela fusão das etapas de propagação e assimilação, anteriormente descritas, e o seu procedimento de cálculo é resumido pelo conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\
\mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T \\
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \left[ \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left( \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right) \\
\mathbf{P}_k^+ &= \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \tag{2.23}
\end{aligned}$$

onde as condições iniciais  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$  e  $\mathbf{P}_0$  são conhecidas.

## 3 Teoria de Realização de Sistemas

A teoria de realização de sistemas é um campo de pesquisa que envolve o estudo e aplicação de diferentes técnicas e métodos para obtenção de modelos matemáticos, no espaço de estados, que representam o comportamento dinâmico de um sistema ou fenômeno físico. Neste contexto, dois conceitos essenciais são os de *observabilidade* e *controlabilidade*, uma vez que, para a identificação de sistemas, é essencial conhecer se os todos os estados de um sistema podem ser controlados e/ou observados (CHEN, 1999; JUANG, 2011). A controlabilidade está relacionada à condição de um sistema dinâmico atingir um estado desejado pela aplicação de uma ação de controle enquanto a observabilidade está relacionada a possibilidade dos estados internos poderem ser observados a partir das medições de saída do sistema dinâmico (LAWRENCE; WILLIAMS, 2007). Neste capítulo, as teorias de controlabilidade e observabilidade são detalhadamente discutidas, ambas no domínio do tempo discreto, e posteriormente são apresentados conceitos básicos sobre a teoria de realização de sistemas, os quais são essenciais para o entendimento da metodologia proposta nesta dissertação.

### 3.1 Controlabilidade no Domínio do Tempo Discreto

Considerando um sistema dinâmico linear e invariante no tempo (LIT) representado pelo seguinte modelo no espaço de estados no domínio do tempo discreto (JUANG, 1994):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{y}_k$  são os vetores de estado, entrada e saída, com dimensões  $n \times 1$ ,  $m \times 1$  e  $p \times 1$ , respectivamente. As matrizes ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ), com dimensões apropriadas, representam a operação interna do sistema dinâmico linear e são utilizadas para determinar a resposta do sistema para qualquer entrada.

A solução para a representação discreta do sistema dinâmico, dada na Equação (3.1), no instante de tempo  $q$ , é dada por:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{A}^q \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{q-i} \quad (3.3)$$

ou na forma matricial:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{A}^q \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{q-1} \\ \mathbf{u}_{q-2} \\ \mathbf{u}_{q-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{x}_0$  é o estado inicial do sistema dinâmico.

Um estado  $\mathbf{x}_k$  é dito controlável se este pode ser atingido a partir de qualquer estado inicial do sistema, em um intervalo de tempo finito, pela aplicação de uma entrada de controle. Caso todos os estados sejam controláveis, o sistema é dito completamente controlável ou, simplesmente, controlável.

Para que a controlabilidade de um sistema dinâmico seja completamente definida, é necessário e suficiente determinar se o estado nulo, ao invés de todos os estados iniciais, pode ser transferido para todos os estados finais possíveis. Para justificar esta afirmação, a Equação (3.4) é reescrita como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_q = \mathbf{x}_q - \mathbf{A}^q \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{q-1} \\ \mathbf{u}_{q-2} \\ \mathbf{u}_{q-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

o que é equivalente a iniciar pelo estado nulo e chegar ao estado final  $\hat{\mathbf{x}}_q = \mathbf{x}_q - \mathbf{A}^q \mathbf{x}_0$ . Desse modo, se for possível demonstrar que o sistema pode ir do estado nulo  $\mathbf{x}_0 = 0$  para qualquer estado final  $\hat{\mathbf{x}}_q$ , então o sistema pode ir de qualquer estado inicial  $\mathbf{x}_0$  para um ponto final qualquer  $\hat{\mathbf{x}}_q$ .

**Teorema 1.** O sistema dinâmico linear, invariante no tempo, com dimensão finita e discreto no tempo, de  $n$ -ésima ordem, é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times qm}$  tiver posto  $n$ , onde

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

*Prova:* ver (JUANG, 1994; CHEN, 1999).

## 3.2 Observabilidade no Domínio do Tempo Discreto

Um estado  $\mathbf{x}_q$  é dito observável se puder ser completamente determinado a partir do conhecimento da entrada aplicada  $\mathbf{u}_k$  e da saída medida  $\mathbf{y}_k$  sobre o intervalo de tempo finito  $0 < k \leq q$ . Caso todos os estados sejam observáveis, o sistema dinâmico é dito completamente observável ou, simplesmente, observável.

Para que a observabilidade de um sistema dinâmico seja completamente definida, é necessário e suficiente verificar se o seu estado inicial  $\mathbf{x}_0$  com entrada nula, isto é,  $\mathbf{u}_k = 0$ , pode ser completamente determinado a partir da saída  $\mathbf{y}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, q-1$ ), pois o conhecimento do estado inicial  $\mathbf{x}_0$  e da entrada  $\mathbf{u}_k$  permite a obtenção do estado  $\mathbf{x}_{q-1}$  a partir da Equação (3.5).

**Teorema 2.** O sistema dinâmico linear, invariante no tempo, com dimensão finita e discreto no tempo, de  $n$ -ésima ordem, é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{pq \times n}$ , tiver posto  $n$ , onde

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{q-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

*Prova:* ver (JUANG, 1994; CHEN, 1999).

## 3.3 Conceitos Básicos de Realização

Retomando o sistema dinâmico representado pelo modelo no espaço de estados, no domínio do tempo discreto, dado pelas Equações (3.1)-(3.2):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (3.9)$$

Considerando uma entrada do tipo impulso, isto é,  $\mathbf{u}_{s_0} = 1$  ( $s = 1, \dots, m$ ) e  $\mathbf{u}_{s_k} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), e substituindo nas Equações (3.8)-(3.9), os estados do sistema dinâmico se propagam no tempo como segue:

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_0 = \mathbf{D} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
k = 1 &\rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B} \end{cases} \\
k = 2 &\rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \end{cases} \\
k = 3 &\rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_4 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 + \mathbf{B}\mathbf{u}_3 = \mathbf{A}^3\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{x}_3 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{cases} \\
&\vdots \\
&\hspace{15em} (3.10)
\end{aligned}$$

$$k = \dots \rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} = \mathbf{Y}_k \end{cases}$$

o que resulta em uma matriz de resposta ao impulso  $\mathbf{Y}$  com dimensão  $m \times p$ , dada por:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}, \quad \dots, \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \quad (3.11)$$

Esta sequência de matrizes é conhecida como *parâmetros de Markov*, os quais são geralmente utilizados como base em diversos métodos de identificação de sistemas dinâmicos lineares (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991; JUANG et al., 1993). Uma vez que a matriz  $\mathbf{D}$  já está determinada ( $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$ ), somente as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  precisam ser calculadas. Uma realização é o cálculo do tripé  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ , baseado nos parâmetros de Markov, para o qual o modelo no tempo discreto dado nas Equações (3.8)-(3.9) é satisfeito. Segundo Juang e Pappa (1985), realização é o processo de construção da representação de um sistema, em espaço de estados, a partir de dados experimentais. Todo sistema tem um número infinito de realizações, as quais produzirão a mesma resposta para qualquer entrada particular. Realização mínima significa um modelo no espaço de estados com a menor dimensão entre todas realizações possíveis que tenham a mesma relação entrada-saída.

A realização de um sistema inicia-se pela formação de uma matriz de Hankel generalizada  $\mathbf{H} \in \gamma p \times \beta m$ , composta pelos parâmetros de Markov da Equação (3.11):

$$\mathbf{H}(j-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_{j+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{j+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{j+1} & \mathbf{Y}_{j+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{j+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{j+\gamma-1} & \mathbf{Y}_{j+\gamma} & \cdots & \mathbf{Y}_{j+\gamma+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H}(j-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^{j-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^j\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{j+\beta-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^j\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{j+1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{j+\beta-1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{j+\gamma-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{j+\gamma-1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{j+\gamma+\beta-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  estão relacionados ao número de linhas e colunas da matriz de Hankel, respectivamente. Para o caso de  $j = 1$ , tem-se:

$$\mathbf{H}(j-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\gamma & \mathbf{Y}_{1+\gamma} & \cdots & \mathbf{Y}_{\gamma+\beta-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{\beta-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\beta\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\gamma-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^\gamma\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\gamma+\beta-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

É possível perceber que a matriz  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$  não está incluída em  $\mathbf{H}_0$ . Se  $\gamma \geq n$  e  $\beta \geq n$ , onde  $n$  é a ordem do sistema, a matriz  $\mathbf{H}_{j-1}$  tem posto  $n$ . Para confirmar isto, os parâmetros de Markov dados na Equação (3.11) são substituídos na Equação (3.12) e a matriz  $\mathbf{H}_{j-1}$  é decomposta em três termos matriciais como segue:

$$\mathbf{H}_{j-1} = \mathcal{P}_\gamma \mathbf{A}^{j-1} \mathcal{Q}_\beta \quad (3.15)$$

onde  $\mathcal{P}_\gamma$  e  $\mathcal{Q}_\beta$  são dadas por:

$$\mathcal{P}_\gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{Q}_\beta = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}] \quad (3.17)$$

As matrizes  $\mathcal{P}_\gamma$  e  $\mathcal{Q}_\beta$  são, respectivamente, as matrizes de observabilidade e controlabilidade. Se a ordem do sistema for  $n$ , então a dimensão mínima da matriz de estados  $\mathbf{A}$  é  $n \times n$ . Se o sistema dinâmico é observável e controlável, as matrizes  $\mathcal{P}_\gamma$  e  $\mathcal{Q}_\beta$  tem posto  $n$  e, conseqüentemente, a matriz de Hankel, dada na Equação (3.12), também terá posto igual a  $n$ .

Vários métodos de identificação de sistemas foram desenvolvidos baseados nas propriedades da matriz de Hankel composta pelos parâmetros de Markov (amostras de resposta ao impulso). Dentre eles, tem-se o método OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*), no qual os parâmetros do modelo no espaço de estados são determinados a partir do cálculo dos parâmetros de Markov do sistema dinâmico bem como é desenvolvida uma abordagem de ganho direto para o filtro de Kalman, a qual não depende de informações estatísticas ou cálculo de covariâncias (JUANG et al., 1993).

## 4 Teoria de Sistemas *Fuzzy* Tipo-2

O conceito de “*conjunto fuzzy com função de pertinência fuzzy*” foi introduzido em 1975 por L. A. Zadeh, os chamados conjuntos *fuzzy* tipo-2, como uma extensão do conceito de conjuntos *fuzzy* convencionais, também chamados de conjuntos *fuzzy* tipo-1 (ZADEH, 1975). Conjuntos *fuzzy* tipo-2 são caracterizados por funções de pertinência cujo grau de pertencimento de cada elemento nesta função é um conjunto *fuzzy* tipo-1 no intervalo  $[0, 1]$  (KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999). A motivação para a formulação deste conceito está na impossibilidade de se determinar precisamente o grau de pertinência de uma grandeza em um conjunto *fuzzy*, uma vez que somente dados e informações imprecisas estão disponíveis na prática (KARNIK; MENDEL, 1998). Dessa forma, os conjuntos *fuzzy* tipo-2 são muito úteis em situações em que é difícil se determinar o formato preciso das funções de pertinência, permitindo representar diferentes tipos de incerteza em relação aos conjuntos *fuzzy* tipo-1. Neste capítulo, são apresentados conceitos e definições matemáticas sobre conjuntos *fuzzy* tipo-2 gerais e intervalares, bem como algumas operações básicas entre conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares. Por fim, a estrutura adotada por sistemas de inferência *fuzzy* tipo-2 Takagi-Sugeno é apresentada.

### 4.1 Conjuntos *Fuzzy* Tipo-2

Um conjunto *fuzzy* tipo-2 geral, denominado por  $\widetilde{W}$ , definido em um universo de discurso  $\mathcal{U}$ , é formalmente representado por (CASTILLO, 2007):

$$\widetilde{W} = \left\{ \left( \mathbf{u}, \mu_{1_{\widetilde{W}}} \right), \mu_{2_{\widetilde{W}}} \left( \mathbf{u}, \mu_{1_{\widetilde{W}}} \right) \mid \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mu_{1_{\widetilde{W}}} \in [0, 1] \right\} \quad (4.1)$$

onde  $\mu_{1_{\widetilde{W}}}$  é denominado grau de pertinência primário e  $\mu_{2_{\widetilde{W}}}$  é denominado grau de pertinência secundário, o qual está relacionado ao nível de incerteza sobre  $\mu_{1_{\widetilde{W}}}$ , isto é, cada grau de pertinência primário  $\mu_{1_{\widetilde{W}}}$  tem associada uma função de incerteza secundária  $\mu_{2_{\widetilde{W}}}$ . Um exemplo de conjunto *fuzzy* tipo-2 geral gaussiano é ilustrado na Figura 1.

Um caso particular dentro do estudo da lógica *fuzzy* tipo-2 são os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares, os quais são derivados a partir de uma simplificação na função de pertinência tipo-2 mostrada na Figura 1, onde a terceira dimensão assume valor de pertinência sempre igual a 1, isto é,  $\mu_{2_{\widetilde{W}}} \left( \mathbf{u}, \mu_{1_{\widetilde{W}}} \right) = 1$ . Dessa forma, conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares são caracterizados por duas funções de pertinência tipo-1, denominadas função de pertinência superior e função de pertinência inferior, sendo formalmente representados por (LIANG; MENDEL, 2000):

$$\widetilde{W} = \left\{ 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}}(\mathbf{u}) \right] \mid \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \right\} \quad (4.2)$$

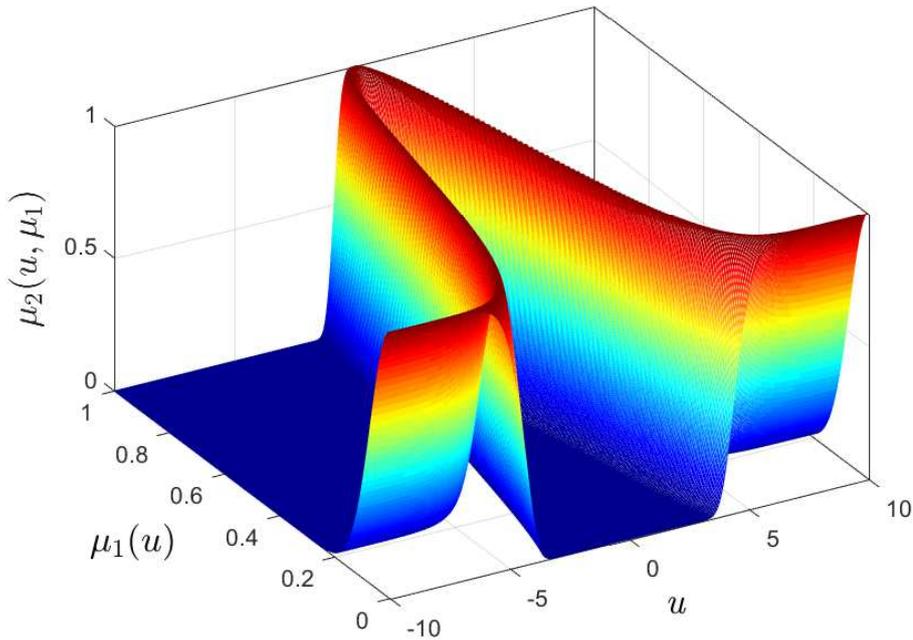


Figura 1 – Conjunto *fuzzy* tipo-2 geral gaussiano. Fonte: Autora

onde  $\underline{\mu}_{\tilde{W}}(\mathbf{u})$  e  $\overline{\mu}_{\tilde{W}}(\mathbf{u})$  são, respectivamente, as funções de pertinência superior e inferior de  $\tilde{W}$ . Os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares definem uma região de incerteza, chamada de *Rastro de Incerteza* (RDI), limitada pelas funções de pertinência superior e inferior, a qual representa a incerteza relacionada ao grau de pertinência primário. Matematicamente, o rastro de incerteza de um conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar é definido como a união de todas as funções de pertinência primárias (MENDEL; JOHN, 2002). A forma assumida pela função de pertinência tipo-2 intervalar é mostrada na Figura 2. Uma maneira simplificada de ilustrar a função de pertinência tipo-2 intervalar está ilustrada na Figura 3, onde a terceira dimensão é suprimida. Devido sua complexidade computacional reduzida quando comparada aos conjuntos *fuzzy* tipo-2 gerais, as funções tipo-2 intervalares são mais largamente empregadas na literatura (ZHENG et al., 2020; NAIK; SINGH, 2021; TURK et al., 2021; TRAN et al., 2020; ZHOU; HAN, 2020). Assim, o presente trabalho tem como objetivo a utilização de sistemas *fuzzy* baseados em conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares.

## 4.2 Operações Básicas Entre Conjuntos *Fuzzy* Tipo-2 Intervalares

Para a implementação de sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares, é necessário o entendimento de algumas operação básicas entre conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares, a saber, as operações de *união*, *interseção* e *complemento*. Sejam dois conjuntos *fuzzy* tipo-2

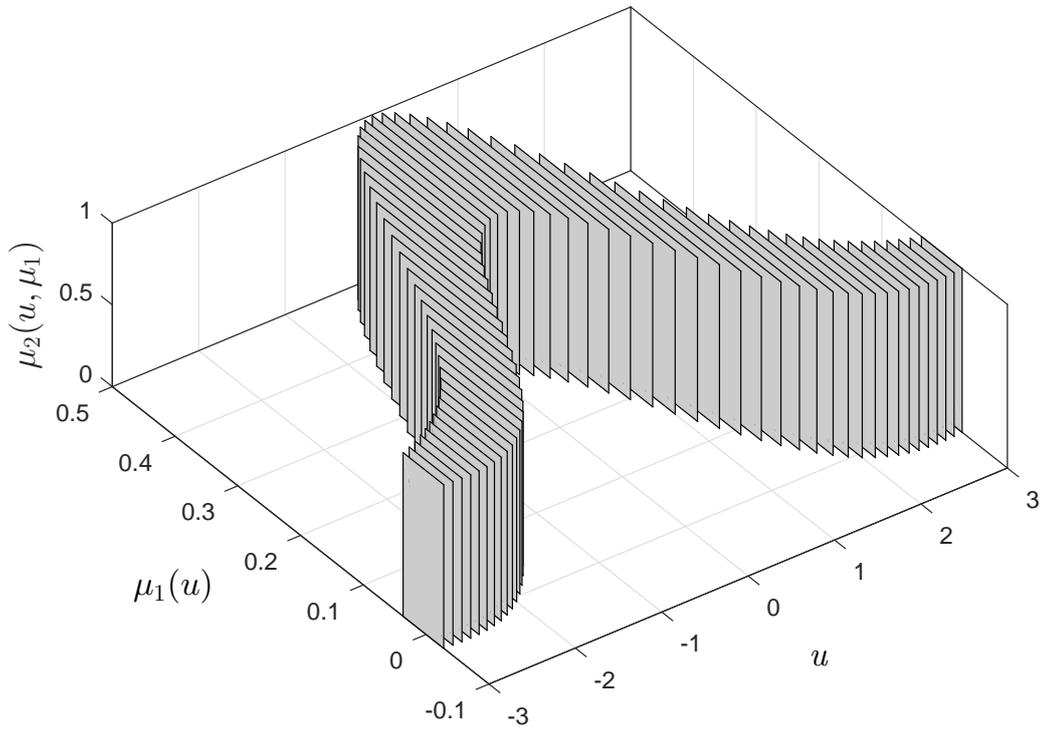


Figura 2 – Conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar gaussiano. Fonte: Autora

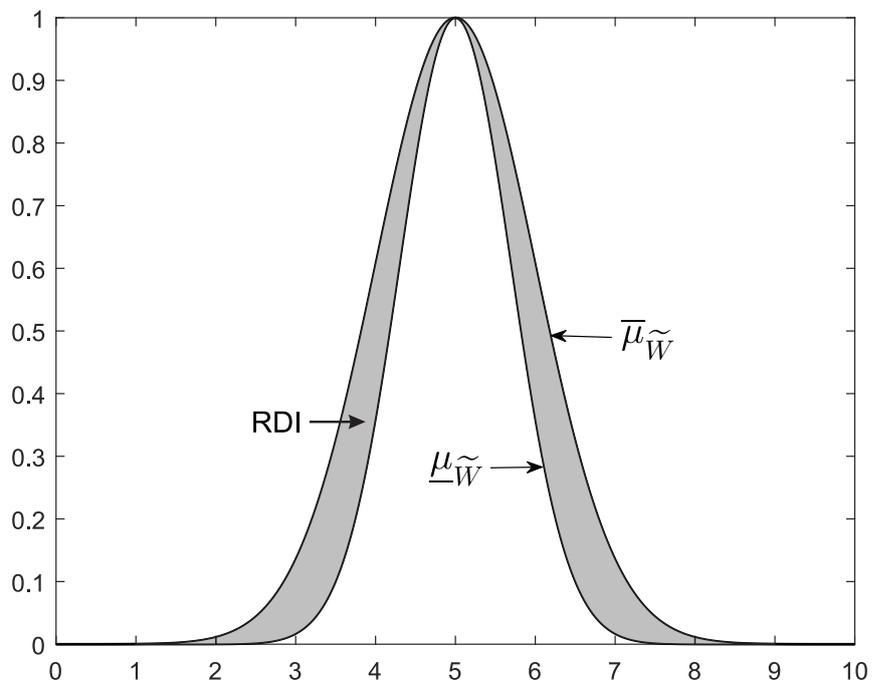


Figura 3 – Conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar gaussiano bidimensional. Fonte: Autora

intervalares,  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ , definidos por

$$\widetilde{W}^1 = \left\{ 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \right] \right\} \quad (4.3)$$

$$\widetilde{W}^2 = \left\{ 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}) \right] \right\} \quad (4.4)$$

os quais são mostrados na Figura 4.

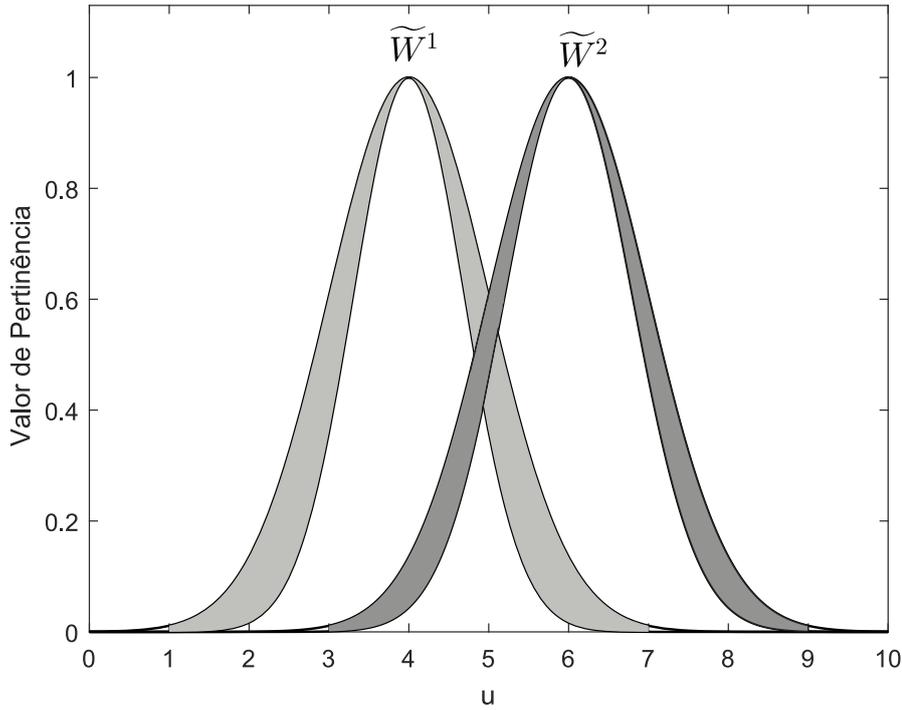


Figura 4 – Conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . Fonte: Autora

### 4.2.1 União

A operação de união entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é, matematicamente, dada por:

$$\widetilde{W}^1 \cup \widetilde{W}^2 = 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cup \underline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cup \overline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}) \right] \quad (4.5)$$

isto é, a operação de união entre dois conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares equivale a união entre as funções de pertinência superiores e entre as funções de pertinência inferiores de  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . O resultado da operação de união entre os conjuntos  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é ilustrado na Figura 5.

### 4.2.2 Interseção

A operação de interseção entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é, matematicamente, dada por:

$$\widetilde{W}^1 \cap \widetilde{W}^2 = 1 / \left[ \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cap \underline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}) \cap \overline{\mu}_{\widetilde{W}^2}(\mathbf{u}) \right] \quad (4.6)$$

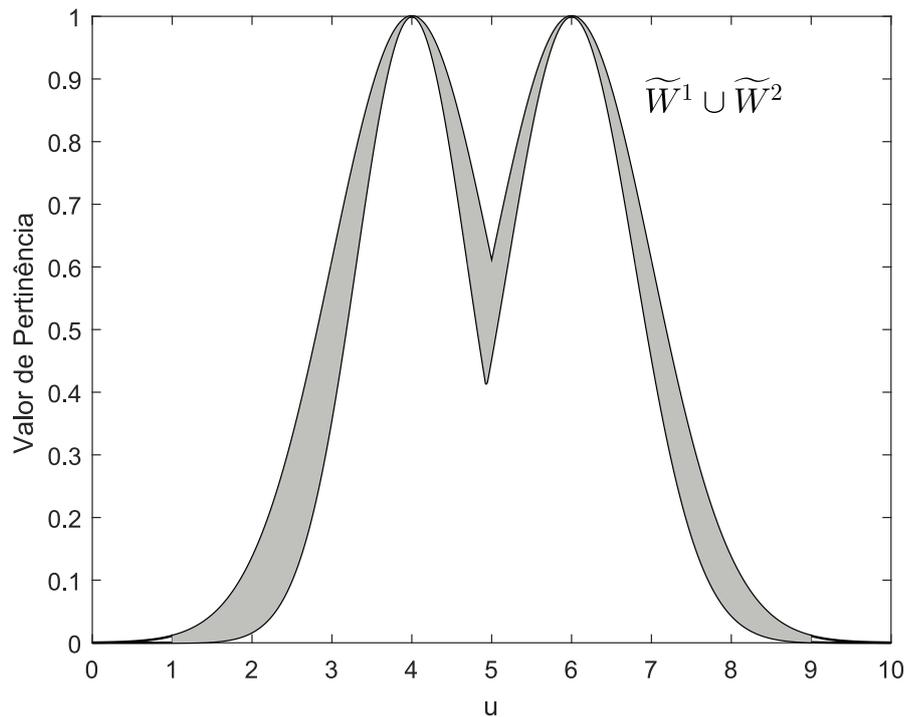


Figura 5 – Resultado da operação de união entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . Fonte: Autora

isto é, a operação de interseção entre dois conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares equivale a interseção entre as funções de pertinência superiores e entre as funções de pertinência inferiores de  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . O resultado da operação de interseção entre os conjuntos  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$  é ilustrado na Figura 6.

### 4.2.3 Complemento

A operação de complemento do conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{W}^1$  é, matematicamente, dada por:

$$\widetilde{W}^{1'} = 1 / [1 - \underline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u}), 1 - \overline{\mu}_{\widetilde{W}^1}(\mathbf{u})] \quad (4.7)$$

isto é, a operação de complemento para um conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar equivale ao complemento das suas funções de pertinência superior e inferior. O resultado da operação de complemento para o conjunto  $\widetilde{W}^1$  é ilustrado na Figura 7.

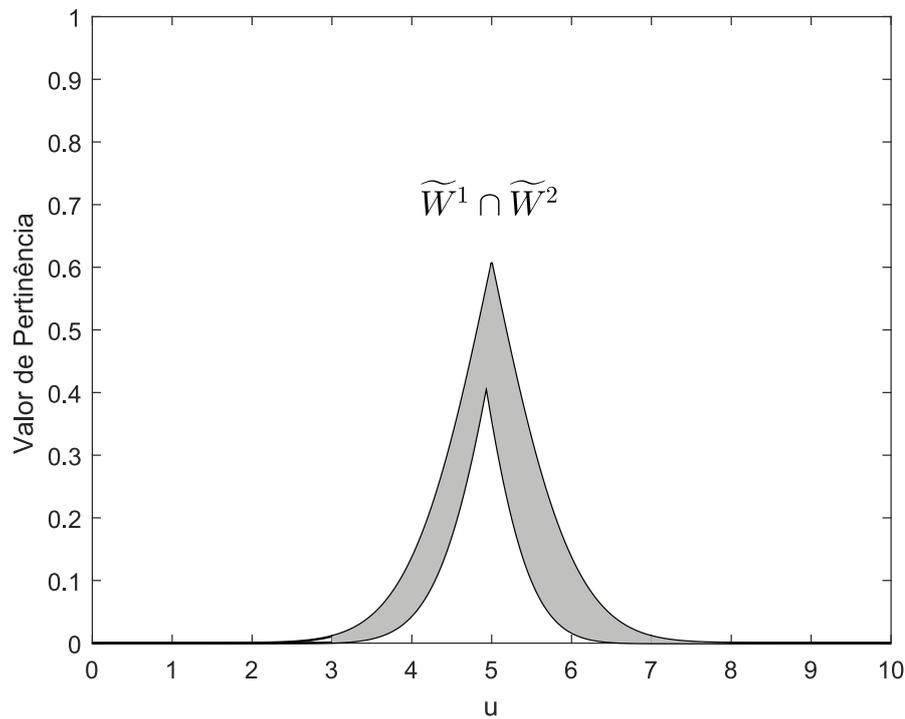


Figura 6 – Resultado da operação de interseção entre os conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\widetilde{W}^1$  e  $\widetilde{W}^2$ . Fonte: Autora

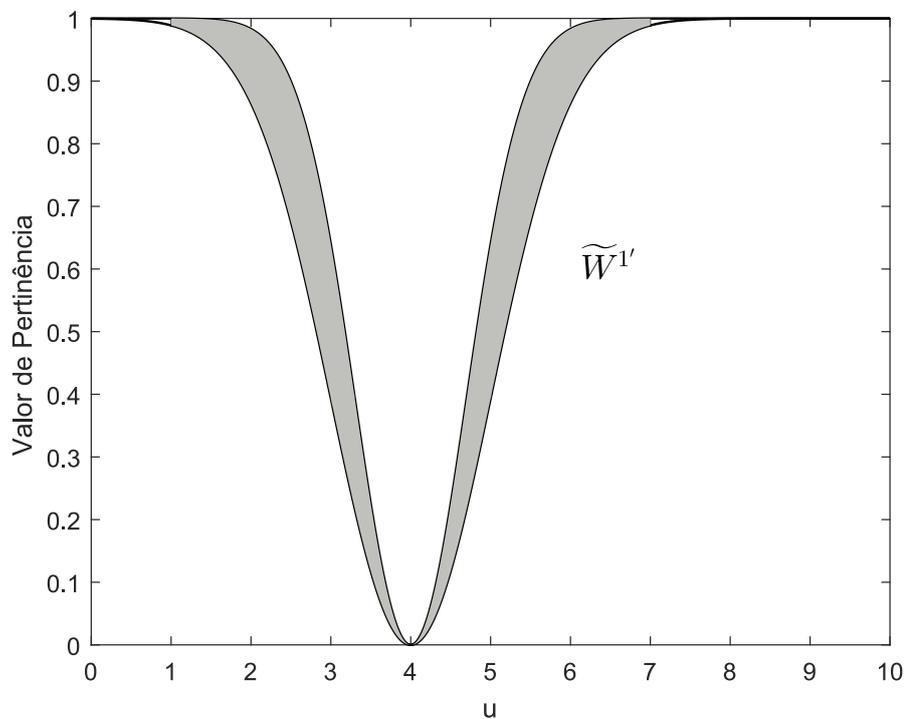


Figura 7 – Resultado da operação de complemento para o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{W}^1$ . Fonte: Autora

### 4.3 Sistema de Inferência Fuzzy Tipo-2 Intervalar Takagi-Sugeno

Os princípios básicos da lógica *fuzzy* não se alteram de sistemas *fuzzy* tipo-1 para sistemas *fuzzy* tipo-2 e, em geral, não são alterados para qualquer sistema *fuzzy* tipo- $n$ , uma vez que são independentes da natureza das funções de pertinência adotadas (CASTILLO, 2011). Os sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares possuem estrutura semelhante à adotada em sistemas *fuzzy* tipo-1, com a diferença que apresentam uma versão estendida dos métodos de defuzzificação. A estrutura de um sistema *fuzzy* tipo-2 é ilustrada na Figura 8 e cada uma das suas etapas são descritas a seguir.

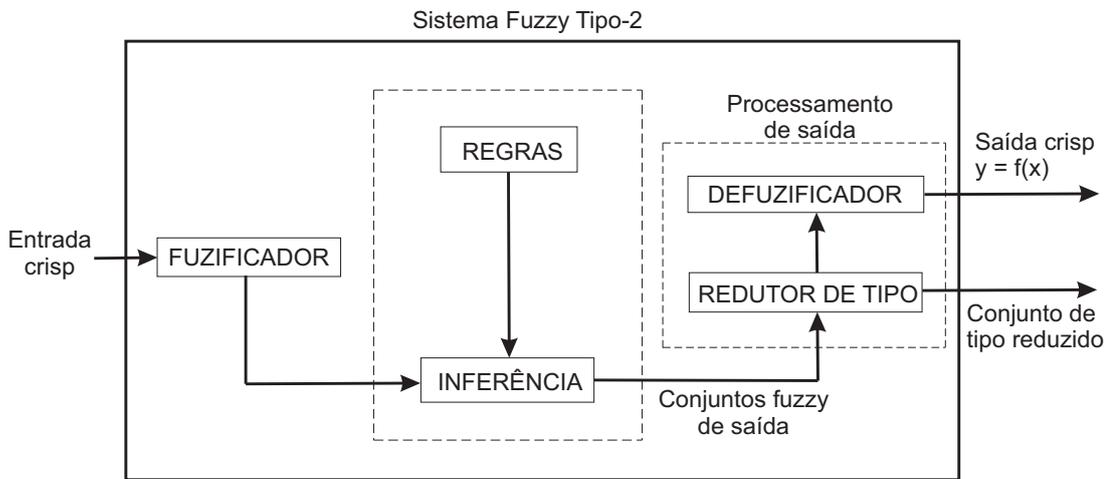


Figura 8 – Estrutura de um sistema *fuzzy* tipo-2. Fonte: Autora

1. *Fuzificador*: Realiza o mapeamento das entradas *crisp* para os conjuntos *fuzzy* tipo-2, fornecendo os graus de ativação de cada regra *fuzzy* para o bloco de inferência.
2. *Regras*: Este bloco é composto por um conjunto de regras *fuzzy* do tipo SE-ENTÃO, onde as proposições do antecedente e consequente são caracterizadas por conjuntos *fuzzy* tipo-2. A forma generalizada de uma regra *fuzzy* é dada por:

$$R^{(i)} : \text{SE } u_1 \text{ é } \tilde{W}^{1(i)} \text{ e } u_2 \text{ é } \tilde{W}^{2(i)} \text{ e } \dots \text{ e } u_p \text{ é } \tilde{W}^{p(i)} \text{ ENTÃO } \tilde{y}^{(i)} = \tilde{Y}^{(i)} \quad (4.8)$$

onde  $u_j$  são as variáveis de entrada,  $\tilde{W}^{j(i)}$  são os conjuntos *fuzzy* tipo-2 do antecedente,  $\tilde{y}^{(i)}$  é a proposição do consequente e  $\tilde{Y}^{(i)}$  é o conjunto *fuzzy* tipo-2 de saída, tal que  $j = 1, \dots, p$ .

3. *Inferência*: Realiza a composição das regras *fuzzy*, a partir dos operadores de união e interseção, resultando em um mapeamento dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 de entrada para os conjuntos *fuzzy* tipo-2 de saída.

4. *Redutor de Tipo*: Este bloco é responsável pela redução de tipo do conjunto *fuzzy* tipo-2 obtido na saída do bloco de inferência em um intervalo  $\tilde{y} = [y^r, y^l]$ , onde  $y^r$  e  $y^l$  representam os limites superior e inferior, respectivamente. Os métodos mais empregados atualmente para a redução de tipo são os algoritmos propostos em (KARNIK; MENDEL, 2001; WU; MENDEL, 2009).
5. *Defuzzificador*: Realiza o cálculo da saída crisp  $y$  do sistema *fuzzy* tipo-2, a partir do intervalo  $\tilde{y} = [y^r, y^l]$ , onde o valor defuzzificado é dado pela média dos valores de  $y^r$  e  $y^l$ .

Os sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares Takagi-Sugeno são caracterizados por regras *fuzzy* SE-ENTÃO que descrevem as relações de entrada-saída do sistema, em que a proposição do antecedente é descrita por conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares e a proposição do conseqüente por uma função matemática. Eles podem ser classificados de acordo com a tabela abaixo (KAYACAN, 2011):

Tabela 1 – Classificação dos sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares.

	Modelo I	Modelo II
proposição do antecedente	Conjuntos <i>Fuzzy</i> Tipo-2	Conjuntos <i>Fuzzy</i> Tipo-2
proposição do conseqüente	Parâmetros com incerteza	Parâmetros <i>crisp</i>

A estrutura de sistema *fuzzy* tipo-2 intervalar Takagi-Sugeno adotada nesta dissertação é baseada no modelo A2-C1 (antecedente tipo-2 e conseqüente tipo-1), cuja regra *fuzzy* generalizada é dada por:

$$R^{(i)} : \mathbf{SE} \mathbf{u}_1 \text{ é } \tilde{W}^{1(i)} \text{ e } \mathbf{u}_2 \text{ é } \tilde{W}^{2(i)} \text{ e } \dots \text{ e } \mathbf{u}_p \text{ é } \tilde{W}^{p(i)} \mathbf{ENTÃO} \tilde{y}^{(i)} = \sum_{j=1}^p \tilde{a}_j^{(i)} x_j + \tilde{b}_j^{(i)} \quad (4.9)$$

onde  $\tilde{y}^{(i)} = [\underline{y}^{(i)}, \bar{y}^{(i)}]$  é a saída intervalar da  $i$ -ésima regra *fuzzy*,  $\tilde{a}_j^{(i)}$  e  $\tilde{b}_j^{(i)}$  são parâmetros incertos definidos por  $\tilde{a}_j^{(i)} = [\underline{a}_j^{(i)}, \bar{a}_j^{(i)}] = [a_j^i + \mathcal{I}_{a_j^i}^i, a_j^i - \mathcal{I}_{a_j^i}^i]$  e  $\tilde{b}_j^{(i)} = [\underline{b}_j^{(i)}, \bar{b}_j^{(i)}] = [b_j^i + \mathcal{I}_{b_j^i}^i, b_j^i - \mathcal{I}_{b_j^i}^i]$ . Desse modo, os parâmetros das funções matemáticas definidas na proposição do conseqüente de cada regra *fuzzy* são incertos e são processados pelo sistema *fuzzy* tipo-2 como valores intervalares.

Na metodologia proposta nesta dissertação, uma modificação na estrutura do modelo *fuzzy* A2-C1 foi adotada, onde as etapas de redução de tipo e defuzzificação foram suprimidas de modo que todo o processamento dos dados experimentais é realizado de forma intervalar, proporcionando a redução da complexidade computacional envolvida para o desenvolvimento e implementação prática do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar proposto neste trabalho.

Parte III

REFERENCIAL METODOLÓGICO



## 5 Metodologia Proposta: Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar

Neste capítulo, a metodologia proposta para o projeto do modelo computacional do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar a partir de dados experimentais, é apresentada. Formulações para o pré-processamento dos dados experimentais por análise espectral, estimação paramétrica das proposições do antecedente e conseqüente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e seu mecanismo de atualização recursivo, são abordadas.

### 5.1 Pré-Processamento por Análise Espectral Singular

A técnica de Análise Espectral Singular é uma ferramenta matemática para análise e decomposição de séries temporais complexas em componentes mais simples dentro dos dados originais. Tais componentes não-observáveis apresentam características relevantes sobre o comportamento da série temporal correspondente (ELSNER, 2002). Nas seções a seguir, são apresentadas as etapas de treinamento e recursiva para a decomposição espectral de dados experimentais.

#### 5.1.1 Etapa de Treinamento

Seja o conjunto de dados experimentais inicial referente às  $p$  séries temporais sob análise, com  $N_b$  amostras, dado por:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{y}_{N_b}]^T, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p \times N_b} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ , com  $k = 1, \dots, N_b$ , é o vetor de séries temporais no instante de tempo  $k$ . A partir deste conjunto de dados inicial, uma matriz trajetória  $\mathbf{H}$  é definida, para cada uma das dimensões de  $\mathbf{y}$ , considerando um conjunto de  $\rho$  vetores atrasados com dimensão  $\delta$ , o qual é um número inteiro definido pelo usuário com  $2 \leq \delta \leq N_b - 1$  e  $\rho = N_b - \delta + 1$ , dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_\rho \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{\rho+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_\delta & y_{\delta+1} & y_{\delta+2} & \cdots & y_{N_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\delta \times \rho} \quad (5.2)$$

e a matriz  $\mathbf{S}$  obtida como segue:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta} \quad (5.3)$$

Aplicando-se o procedimento de Decomposição em Valores Singulares (do inglês *Singular Value Decomposition* - SVD) à matriz  $\mathbf{S}$ , é obtido um conjunto de autovalores em ordem decrescente tal que  $\sigma^1 \geq \sigma^2 \geq \dots \geq \sigma^\delta \geq 0$  com seus respectivos autovetores  $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^\delta$ . Considerando  $d = \max\{\varsigma, \text{such that } \sigma^\varsigma > 0\}$ , e  $\mathbf{V}^\varsigma = \mathbf{H}^T \phi^\varsigma / \sqrt{\sigma^\varsigma}$  com  $\varsigma = 1, \dots, d$ , a decomposição em valores singulares da matriz trajetória  $\mathbf{H}$ , pode ser reescrita conforme abaixo:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 + \dots + \mathbf{H}^d \quad (5.4)$$

onde a matriz  $\mathbf{H}^\varsigma|_{\varsigma=1, \dots, d}$  é elementar (possui posto igual a 1), e é dada por:

$$\mathbf{H}^\varsigma = \sqrt{\sigma^\varsigma} \phi^\varsigma \mathbf{V}^{\varsigma T}, \quad \mathbf{H}^\varsigma \in \mathbb{R}^{\delta \times \rho} \quad (5.5)$$

O reagrupamento de  $\mathbf{H}^\varsigma|_{\varsigma=1, \dots, d}$  em  $\xi$  termos matriciais linearmente independentes  $\mathbf{I}^j|_{j=1, \dots, \xi}$ , tal que  $\xi \leq d$ , resulta em

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2 + \dots + \mathbf{I}^\xi \quad (5.6)$$

As componentes não-observáveis  $\alpha^j|_{j=1, \dots, \xi}$  extraídas a partir dos dados experimentais, obtidas a partir das matrizes  $\mathbf{I}^j|_{j=1, \dots, \xi}$ , são dadas por:

$$\alpha_k^j = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{k+1} I_{\nu, k-\nu+1}^j & 1 \leq k \leq \delta^* \\ \frac{1}{\delta^*} \sum_{\nu=1}^{\delta^*} I_{\nu, k-\nu+1}^j & \delta^* \leq k \leq \rho^* \\ \frac{1}{N_b - k + 1} \sum_{\nu=k-\rho^*+1}^{N-\rho^*+1} I_{\nu, k-\nu+1}^j & \rho^* < k \leq N_b \end{cases} \quad (5.7)$$

onde  $\delta^* = \min(\delta, \rho)$ ,  $\rho^* = \max(\delta, \rho)$ , tal que  $\delta$  e  $\rho$  estão associados ao número de linhas e colunas da matriz trajetória  $\mathbf{H}$  definida na Equação (5.2), respectivamente, e  $N_b = \delta + \rho - 1$  é o comprimento do conjunto de dados experimentais inicial.

### 5.1.2 Etapa Recursiva

Após a inicialização do algoritmo de análise espectral singular na etapa de treinamento, os próximos passos são repetidos a cada instante de tempo  $k = N_b + 1, N_b + 2, \dots$ , conforme formulado a seguir. O valor de  $\rho$  é incrementado por:

$$\rho = k - \delta + 1 \quad (5.8)$$

A matriz  $\mathbf{S}$  é atualizada, recursivamente, como segue:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_{k-1} + \mathbf{\Xi}_k, \quad \mathbf{S}_k \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta} \quad (5.9)$$

onde  $\mathbf{\Xi}_k = \boldsymbol{\psi}_k \boldsymbol{\psi}_k^T \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta}$  com  $\boldsymbol{\psi}_k = [y_\rho, y_{\rho+1}, \dots, y_k]^T \in \mathbb{R}^{\delta \times 1}$ . Aplicando o procedimento de SVD à matriz  $\mathbf{S}_k$ , o conjunto de autovalores  $\sigma_k^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^\delta$  e seus respectivos autovetores  $\boldsymbol{\phi}_k^1, \boldsymbol{\phi}_k^2, \dots, \boldsymbol{\phi}_k^\delta$  são atualizados no instante  $k$ , tal que  $y_k$  pode ser reescrito por:

$$y_k = h_k^1 + h_k^2 + \dots + h_k^d \quad (5.10)$$

onde  $h_k^\zeta = \kappa_k^\zeta \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\phi}_k^\zeta$ , com  $\zeta = 1, \dots, d$ , tal que  $\kappa_k^\zeta$  corresponde ao último elemento do autovetor  $\boldsymbol{\phi}_k^\zeta$ . Finalmente, o reagrupamento de  $h_k^\zeta |_{\zeta=1, \dots, d}$  em  $\xi$  termos disjuntos  $I_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$ , resulta em

$$y_k = I_k^1 + I_k^2 + \dots + I_k^\xi \quad (5.11)$$

tal que  $I_k^j = \alpha_k^j$ , com  $j = 1, \dots, \xi$  e  $k = N_b + 1, N_b + 2, \dots$ , representam as amostras das componentes não-observáveis extraídas no instante de tempo  $k$ . A Análise Espectral Singular Recursiva, de acordo com a metodologia proposta, é implementada conforme descrito no Algoritmo 1.

## 5.2 Estimação Recursiva da Covariância do Ruído de Medição

Na metodologia adotada nesta dissertação, é realizada a estimação da covariância do ruído de medição inerente às séries temporais sob análise baseada nas componentes não-observáveis extraídas por meio da análise espectral singular descrita na Seção 5.1. As componentes espectrais que apresentam menores autovalores associados, são assumidas com comportamento residual e são utilizadas como conjunto de dados para estimação

**Algoritmo 1:** Análise Espectral Singular Recursiva**entrada:**  $\mathbf{y}, \delta, \xi$ **saída** :  $\alpha_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$ 

%Etapa de treinamento;

**Passo 1:** Calcular  $\rho = N_b - \delta + 1$ ;**Passo 2:** Construir a matriz trajetória  $\mathbf{H}$  - Eq. (5.2);**Passo 3:** Calcular a matriz  $\mathbf{S}$  - Eq. (5.3);**Passo 4:** Aplicar o método de SVD à matriz  $\mathbf{S}$  e obter o conjunto de autovalores  $\sigma^1 \geq \sigma^2 \geq \dots \geq \sigma^\delta \geq 0$  com seus respectivos autovetores  $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^\delta$ ;**Passo 5:** Reescrever a SVD da matriz  $\mathbf{S}$  na forma da Eq. (5.4);**Passo 6:** Reagrupar as matrizes  $\mathbf{H}^\zeta |_{\zeta=1, \dots, d}$  em  $\xi$  termos matriciais linearmente independentes  $\mathbf{I}^j |_{j=1, \dots, \xi}$  - Eq. (5.6);**Passo 7:** Calcular as componentes não-observáveis  $\alpha_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$  - Eq. (5.7);

%Etapa recursiva;

**while**  $k \geq N_b + 1$  **do****Passo 1:** Atualizar  $\rho$  - Eq. (5.8);**Passo 2:** Atualizar a matriz  $\mathbf{S}_k$  - Eq. (5.9);**Passo 3:** Atualizar o conjunto de autovalores com seus respectivos autovetores aplicando o método de SVD em  $\mathbf{S}_k$ ;**Passo 4:** Reescrever a amostra  $y_k$  na forma da Eq. (5.10);**Passo 5:** Reagrupar os termos  $h_k^\zeta |_{\zeta=1, \dots, d}$  em  $\xi$  termos disjuntos  $I_k^j |_{j=1, \dots, \xi}$ , tal que  $I_k^j = \alpha_k^j$  - Eq. (5.11);**end**

recursiva da covariância  $R$  do ruído de medição, inerente aos dados experimentais. A covariância inicial do ruído de medição, denominado por  $v$ , é dada por:

$$R = E(vv^T) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} v_j v_j^T \quad (5.12)$$

onde  $N_b$  é o comprimento do conjunto de dados experimentais utilizado na etapa de treinamento para parametrização inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e  $v$  é assumido como a componente espectral  $\alpha^j$  que apresenta comportamento residual. A atualização recursiva da covariância  $R$ , nos instantes de tempo  $k = N_b + 1, N_b + 2, \dots$ , é dada por:

$$R_k = \frac{k-1}{k} R_{k-1} + \frac{1}{k} v_k v_k^T \quad (5.13)$$

Uma vez que a covariância  $R$  do ruído de medição  $v$  foi calculada, um fator adaptativo  $\mathcal{X}_k$ , com  $k = N_b + 1, N_b + 2, \dots$ , é proposto, para ser utilizado como fator de ponderação para a implementação do mecanismo de atualização recursivo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, como segue:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_k = 1 & \text{para } R_k < 1 \\ \mathcal{X}_k = R_k^{-1} & \text{para } 1 \leq R_k \leq 1000 \\ \mathcal{X}_k = 1 \times 10^{-3} & \text{para } R_k > 1000 \end{cases} \quad (5.14)$$

O algoritmo para a estimação recursiva da covariância  $R$  do ruído de medição e do fator de ponderação  $\mathcal{X}_k$ , de acordo com a metodologia proposta, é implementado conforme descrito no Algoritmo 2.

**Algoritmo 2:** Estimação Recursiva da Covariância do Ruído de Medição e Fator de Ponderação

```

entrada:  $\alpha^j$ 
saida :  $\mathcal{X}_k, R_k$ 
%Etapa de treinamento;
Calcular a covariância inicial  $R$  do ruído de medição - Eq. (5.12);
Calcular o fator adaptativo inicial  $\mathcal{X}_k$  - Eq. (5.14);
%Etapa Recursiva;
while  $k \geq N_b + 1$  do
    | Atualizar  $R_k$  - Eq. (5.13);
    | Atualizar  $\mathcal{X}_k$  - Eq. (5.14);
end

```

### 5.3 Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar

A estrutura adotada para o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar apresenta a  $i^{\text{a}}$   $i \in [1, 2, \dots, c]$ -ésima regra *fuzzy* dada por:

$$R^{(i)} : \quad \begin{array}{l} \text{SE } \mathbf{Z}_k \text{ É } \widetilde{W}^i \\ \text{ENTÃO} \end{array} \begin{cases} \widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \mathcal{X}_k \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{y}}_k^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (5.15)$$

com  $n$ -ésima ordem,  $m$  entradas,  $p$  saídas, onde  $\mathbf{Z}_k$  é a variável linguística do antecedente;  $\widetilde{W}^i$  é conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar;  $\widetilde{\mathbf{x}}_k^i \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados intervalar estimado;  $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas intervalar estimado e  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de entrada. As matrizes  $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\widetilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$  e  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  são, respectivamente, as matrizes de estados, entrada, saída, transmissão direta e ganho de Kalman, os quais são parâmetros incertos que descrevem a dinâmica do conjunto de dados experimentais dentro de uma região de incerteza. O erro residual  $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i$  para a  $i$ -ésima regra *fuzzy* é definido como  $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i = \mathbf{y}_k - \widetilde{\mathbf{y}}_k^i$ , onde  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  é a série temporal real e  $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i$  é a estimação intervalar da série temporal pelo  $i$ -ésimo submodelo linear, e  $\boldsymbol{\chi}_k$  é o fator de ponderação, conforme formulado na Seção 5.2, o qual está relacionado ao nível de filtragem a ser aplicado pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar sobre os dados experimentais.

O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar aproxima o comportamento dinâmico inerente aos dados experimentais por meio da soma ponderada de filtros de Kalman definidos na proposição do consequente das regras *fuzzy* na forma da Equação (5.15), de acordo com o grau de ativação intervalar normalizado  $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$  de cada regra, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\chi}_k \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \quad (5.16)$$

$$\widetilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \quad (5.17)$$

com  $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = [\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)]$ , onde  $\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$  e  $\overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$  corresponde aos graus de ativação superior e inferior no  $i$ -ésimo conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar, respectivamente, e  $c$  é o número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, tal que:

$$\sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = 1, \quad \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \geq 0 \quad (5.18)$$

### 5.3.1 Estimação Paramétrica do Antecedente

O particionamento dos dados experimentais implica na definição das regiões de operação e, necessariamente, do número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. Uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel foi proposto, a qual é formulada a seguir.

Seja um conjunto de dados experimentais  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{p \times N_b}$ , previamente coletado, escolha-se o número de agrupamentos  $c$ , tal que  $1 < c < N_b$ ; a matriz de partição inicial intervalar aleatória  $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0)} \in \mathbb{R}^{c \times N_b}$ ; a tolerância  $\mathcal{E} > 0$  e o expoente de ponderação intervalar  $\widetilde{m} = [\underline{m}, \overline{m}]$ , onde  $\underline{m}$  e  $\overline{m}$  correspondem, respectivamente, ao expoente de ponderação das funções de pertinência superior e inferior do conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widetilde{W}^i$ .

**Repetir** para  $l = 1, 2, \dots$

**Passo 1** - Calcular os centros dos agrupamentos  $\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$ :

$$\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)} = \frac{\sum_{k=1}^{N_b} \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\tilde{m}} \mathbf{Z}_k}{\sum_{k=1}^{N_b} \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\tilde{m}}}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{Z}_k$  são os dados experimentais na amostra  $k$  e  $\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$  é o grau de pertinência intervalar de  $\mathbf{Z}_k$  no  $i$ -ésimo agrupamento.

**Passo 2** - Calcular as matrizes de covariância  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  dos agrupamentos:

$$\tilde{\mathbf{F}}^i = \frac{\sum_{k=1}^{N_b} \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\tilde{m}} (\mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}) (\mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T}{\sum_{k=1}^{N_b} \left( \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\tilde{m}}}, \quad (5.20)$$

$1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N_b$

**Passo 3** - Calcular as distâncias  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i$  entre a amostra  $\mathbf{Z}_k$  e o centro  $\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$  do  $i$ -ésimo agrupamento:

$$\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i = \sqrt{(\mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T \left[ \det(\tilde{\mathbf{F}}^i)^{1/n} (\tilde{\mathbf{F}}^i)^{-1} \right] (\mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{v}}^{i(l)})} \quad (5.21)$$

**Passo 4** - Atualizar a matriz de partição intervalar  $\tilde{\mathbf{U}}^{(l)}$ :

Se  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i > 0$  para  $1 \leq i \leq c, 1 \leq k \leq N_b$

$$\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \left[ \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right] \quad (5.22)$$

onde

$$\underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \min \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \underline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j / \underline{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i \right)^{2/(\tilde{m}-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \bar{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^j}^j / \bar{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i \right)^{2/(\tilde{m}-1)}} \right] \quad (5.23)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \max \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{D_{k\mathbf{F}^i}^j}{D_{k\mathbf{F}^i}^i} \right)^{2/(m-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{\bar{D}_{k\mathbf{F}^i}^j}{\bar{D}_{k\mathbf{F}^i}^i} \right)^{2/(\bar{m}-1)}} \right] \quad (5.24)$$

Senão

$$\tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = [0, 0] \text{ com } \underline{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) \in [0, 1] \text{ e } \bar{\mu}_{\tilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) \in [0, 1]$$

Até  $\|\tilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{U}}^{(l-1)}\| < \mathcal{E}$

O algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel, de acordo com a metodologia proposta, é implementado conforme descrito no Algoritmo 3.

**Algoritmo 3:** Algoritmo de Agrupamento *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Gustafson-Kessel

**entrada:**  $\mathbf{Z}, \tilde{m}, \mathcal{E}, \tilde{\mathbf{U}}^{(0)}$

**saída:**  $\tilde{\mathbf{U}}$

$l = 0;$

**repeat**

$l = l + 1;$

**for**  $i = 1$  **to**  $c$  **do**

**Passo 1:** Calcular os centros dos agrupamentos  $\tilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$  - Eq. (5.19);

**Passo 2:** Calcular as matrizes de covariância dos agrupamentos  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  - Eq. (5.20);

**Passo 3:** Calcular as distâncias  $\tilde{D}_{k\tilde{\mathbf{F}}^i}^i$  - Eq. (5.21);

**Passo 4:** Atualizar a matriz de partição intervalar  $\tilde{\mathbf{U}}^{(l)}$  - Eq. (5.22)-(5.24);

**end**

**until**  $\|\tilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{U}}^{(l-1)}\| < \mathcal{E};$

### 5.3.2 Estimação Paramétrica do Consequente

Uma vez que o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar é obtido utilizando-se a abordagem de modelagem caixa preta, faz-se necessário a estimação das matrizes que compõem a proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar a partir de dados experimentais, conforme formulado na Equação (5.15). Neste sentido, uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID) é proposto. Os valores de pertinência tipo-2 intervalares obtidos a partir das partições definidas sobre os dados experimentais, os quais foram estimados pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel, foram considerados

como critério de ponderação para o cálculo da proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. O algoritmo *fuzzy* tipo-2 intervalar OKID é formulado a seguir.

Seja o conjunto de dados experimentais  $\mathbf{Z}$ , tal que  $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_k \ \boldsymbol{\alpha}_k^*]^T$ , onde  $\boldsymbol{\alpha}_k^*$  corresponde às componentes espectrais mais significativas extraídas a partir dos dados experimentais. Escolher o número de parâmetros de Markov apropriado  $q$  e executar os seguinte passos:

**Passo 1** - Calcular a matriz de regressores  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdots & \mathbf{u}_{N_b-1} \\ \mathbf{Z}_{q-1} & \mathbf{Z}_q & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-2} \\ \mathbf{Z}_{q-2} & \mathbf{Z}_{q-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-q-1} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

**Passo 2** - Calcular os parâmetros de Markov do observador intervalares  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$ :

$$\mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^c \widetilde{\Gamma}^i \Lambda^T \widetilde{\mathbf{Y}}^{iT} \quad (5.26)$$

onde

$$\widetilde{\Gamma}^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_q) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_{q+1}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_{N_b-1}) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

é a matriz diagonal de ponderação da  $i$ -ésima regra *fuzzy* obtida a partir do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel e

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{Y}}^i &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_k^i & \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{B}}_k^i & \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{B}}_k^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i(q-1)} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}}_0 & \widetilde{\mathbf{Y}}_1 & \widetilde{\mathbf{Y}}_2 & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

são os parâmetros de Markov do observador intervalares da  $i$ -ésima regra *fuzzy* tal que

$$\widetilde{\mathbf{A}}_k^i = [\widetilde{\mathbf{A}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{C}}_k^i] \quad (5.29)$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}_k^i = \left[ \widetilde{\mathbf{B}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{D}}_k^i, -\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \right] \quad (5.30)$$

e  $\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} \approx 0$  para  $k \geq q$ , onde  $q$  é o número de parâmetros de Markov do observador (JUANG, 1994). Manipulando a Equação (5.26):

$$\Lambda \widetilde{\Gamma}^i \mathbf{y}^T = \Lambda \widetilde{\Gamma}^i \Lambda^T \widetilde{\mathbf{Y}}^i \quad (5.31)$$

onde  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_{N_b}] \in \mathbb{R}^{p \times N_b}$  corresponde ao conjunto de dados experimentais. Considerando  $\widetilde{\mathbf{U}}^i = \Lambda \widetilde{\Gamma}^i \Lambda^T$  e  $\widetilde{\mathbf{S}}^i = \Lambda \widetilde{\Gamma}^i \mathbf{y}^T$ , a Equação (5.31) é reescrita como segue:

$$\widetilde{\mathbf{U}}^i \widetilde{\mathbf{Y}}^i = \widetilde{\mathbf{S}}^i \quad (5.32)$$

A Equação (5.32) é solucionada por meio do método de fatoração QR, o qual é numericamente robusto uma vez que evita operações de inversa de matrizes (CHEN, 1999). Aplicando fatoração QR ao termo  $\widetilde{\mathbf{U}}^i$  no lado direito da Equação (5.32), obtém-se:

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^i \widetilde{\mathbf{R}}^i \widetilde{\mathbf{Y}}^i = \widetilde{\mathbf{S}}^i \quad (5.33)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{Q}}^i$  é uma matriz ortogonal, tal que  $(\widetilde{\mathbf{Q}}^i)^{-1} = (\widetilde{\mathbf{Q}}^i)^T$  e  $\widetilde{\mathbf{R}}^i$  é uma matriz triangular superior. Uma vez que a matriz  $\widetilde{\mathbf{R}}^i$  é triangular superior, a Equação (5.33) pode ser solucionada por substituição retroativa, obtendo-se assim o vetor de parâmetros de Markov do observador  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$ .

**Passo 3** - Calcular os parâmetros de Markov do ganho do observador e os parâmetros de Markov do sistema:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (5.34)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}^i \widetilde{\mathbf{Y}}_0^i \quad (5.35)$$

$$= \left[ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \left( \widetilde{\mathbf{A}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \left( \widetilde{\mathbf{B}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \right), -\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \left( \widetilde{\mathbf{A}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \right] \quad (5.36)$$

$$= \left[ \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)}, -\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.37)$$

Logo, os parâmetros de Markov do sistema são obtidos como segue:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (5.38)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)} - \sum_{\iota=1}^j \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{para } j = 1, \dots, q \quad (5.39)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = - \sum_{\iota=1}^q \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{para } j = q + 1, \dots, \infty \quad (5.40)$$

e os parâmetros de Markov do ganho do observador são obtidos por:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_1^{i^o} = \widetilde{\mathbf{Y}}_1^{i(2)} = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (5.41)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} - \sum_{\iota=1}^{j-1} \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i^o}, \quad \text{para } j = 2, \dots, q \quad (5.42)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = - \sum_{\iota=1}^q \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i^o}, \quad \text{para } j = q + 1, \dots, \infty \quad (5.43)$$

**Passo 4** - Construir a matriz de Hankel  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$ :

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}}_j^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta-1}^i \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+2}^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma-1}^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma}^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são inteiros arbitrários suficientemente grandes definidos pelo usuário.

**Passo 5** - Para  $j = 1$ , decompor a matriz de Hankel  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(0)$  usando Decomposição em Valores Singulares:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(0) = \widetilde{\mathbf{\Xi}}^i \widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i \widetilde{\mathbf{\Psi}}^{iT} \quad (5.45)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \alpha p}$  e  $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times \beta m}$  são matrizes ortogonais e  $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \beta m}$  é a matriz diagonal de valores singulares definida como:

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

tal que  $n$  é o número de valores singulares significativos e determina a ordem mínima do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. Logo, a dimensão das matrizes na Equação (5.45)

é reduzida para a ordem mínima, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_n^i(0) = \widetilde{\mathbf{\Xi}}_n^i \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \widetilde{\mathbf{\Psi}}_n^{iT} \quad (5.47)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{\Xi}}_n^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times n}$ ,  $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_n^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times n}$ ,  $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são as matrizes resultantes após a redução para a ordem mínima.

**Passo 6** - Calcular as matrizes de observabilidade e controlabilidade:

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \widetilde{\mathbf{\Xi}}_n^i \left( \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{1/2} \quad (5.48)$$

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left( \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{1/2} \widetilde{\mathbf{\Psi}}_n^{iT} \quad (5.49)$$

onde

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^2} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^{\gamma-1}} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

é a matriz de observabilidade e

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left[ \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^2} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \cdots \quad \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^{\beta-1}} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \right] \quad (5.51)$$

é a matriz de controlabilidade.

**Passo 7** - Calcular as matrizes que compõem a proposição do consequente do filtro de Kalman fuzzy tipo-2 intervalar:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_k^i = \left( \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{-1/2} \widetilde{\mathbf{\Xi}}_n^{iT} \widetilde{\mathbf{H}}_n^i(1) \widetilde{\mathbf{\Psi}}_n^{iT} \left( \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{-1/2} \quad (5.52)$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}_k^i = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \widetilde{\mathcal{Q}}_\beta^i \quad (5.53)$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_k^i = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \quad (5.54)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_k^i = \widetilde{\mathbf{Y}}_0^i \quad (5.55)$$

**Passo 8** - Calcular a matriz de ganho de Kalman intervalar:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (5.56)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o}$  são os parâmetros de Markov do ganho do observador calculados no Passo 3,  $\widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$  é a matriz de observabilidade calculada no Passo 6 e  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$  é a matriz de ganho de Kalman intervalar. Manipulando a Equação (5.56):

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\beta^{iT} \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\widetilde{\mathcal{P}}_\beta^{iT} \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i \widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (5.57)$$

Considerando  $\widetilde{\mathfrak{A}}^i = -\widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \widetilde{\Gamma}^i \widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$  e  $\widetilde{\mathfrak{N}}^i = \widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \widetilde{\Gamma}^i \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i'o}$ , a Equaco (5.57)  reescrita como segue:

$$\widetilde{\mathfrak{A}}^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{N}}^i \quad (5.58)$$

A Equaco (5.58)  solucionada pela aplicaco do mtodo de fatoraco QR ao termo  $\widetilde{\mathfrak{A}}^i$  e obtm-se a matriz de ganho de Kalman intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$  da mesma forma como feito no Passo 2 para determinaco dos parmetros de Markov do observador intervalares.

### 5.3.2.1 Atualizaco Recursiva do Sistema de Inferncia do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar

Aps a estimaco inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, os filtros de Kalman, definidos na proposico do conseqente do sistema de inferncia, so atualizados recursivamente nos instantes de tempo  $k = N_b + 1, k = N_b + 2, \dots$ , a cada nova amostra do conjunto de dados experimentais. Considerando o vetor de regressores, no instante  $k$ , dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{Z}_k \\ \mathbf{Z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{k-q} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

os parmetros de Markov do observador intervalares  $\widetilde{\mathbf{Y}}_k^i$  so obtidos pela atualizaco recursiva de (5.32), como segue:

$$\widetilde{\mathfrak{U}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{U}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (5.60)$$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{N}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{y}_k^T \quad (5.61)$$

Uma vez que  $\widetilde{\mathfrak{U}}_k^i$  e  $\widetilde{\mathfrak{N}}_k^i$  foram atualizados e aplicando-se fatoraco QR em  $\widetilde{\mathfrak{U}}_k^i$ , os parmetros de Markov do observador  $\widetilde{\mathbf{Y}}_k^i$  so atualizados. A proposico do conseqente das regras *fuzzy*  atualizado recursivamente repetindo os Passos 3 a 7. De forma similar, a matriz de ganho de Kalman intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$   obtida pela atualizaco recursiva da Equaco (5.58), como segue:

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{A}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (5.62)$$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{N}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (5.63)$$

Uma vez que  $\widetilde{\mathfrak{A}}_k^i$  e  $\widetilde{\mathfrak{N}}_k^i$  foram atualizados e aplicando-se o método de fatoração QR em  $\widetilde{\mathfrak{A}}_k^i$ , a matriz de ganho de Kalman *fuzzy* intervalar é atualizada a cada instante de tempo  $k$ .

O algoritmo *fuzzy* tipo-2 intervalar *Observer/Kalman Filter Identification*, de acordo com a metodologia proposta, é implementado conforme descrito no Algoritmo 4. No

**Algoritmo 4:** Algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar

**entrada:**  $\mathbf{Z}, \gamma, \beta, q, \widetilde{\Gamma}^i$

**saída** :  $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i, \widetilde{\mathbf{B}}_k^i, \widetilde{\mathbf{C}}_k^i, \widetilde{\mathbf{D}}_k^i, \widetilde{\mathbf{K}}_k^i$

Construir a matriz de regressores  $\mathbf{\Lambda}$  - Eq. (5.25);

*%Etapa de treinamento;*

**for**  $i = 1$  **to**  $c$  **do**

**Passo 1:** Calcular os parâmetros de Markov do observador intervalares  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$  - Eq. (5.31)-(5.33);

**Passo 2:** Calcular os parâmetros de Markov do sistema intervalares  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$  - Eq. (5.38)-(5.40);

**Passo 3:** Calcular os parâmetros de Markov do ganho do observador intervalares  $\widetilde{\mathbf{Y}}^{i^o}$  - Eq. (5.41)-(5.43);

**Passo 4:** Construir as matrizes de Hankel  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(0)$  e  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(1)$  - Eq. (5.44);

**Passo 5:** Decompor  $\widetilde{\mathbf{H}}^i(0)$  utilizando o método de SVD - Eq. (5.45) e determinar a ordem mínima  $n$  do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar - Eq. (5.46);

**Passo 6:** Calcular a matriz de observabilidade  $\widetilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$  - Eq. (5.48) e a matriz de controlabilidade  $\widetilde{\mathcal{Q}}_\beta^i$  - Eq. (5.49);

**Passo 7:** Calcular as matrizes  $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i, \widetilde{\mathbf{B}}_k^i, \widetilde{\mathbf{C}}_k^i, \widetilde{\mathbf{D}}_k^i$  - Eq. (5.52)-(5.55);

**Passo 8:** Calcular a matriz de ganho de Kalman intervalar  $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$  - Eq. (5.56)-(5.58);

**end**

*%Atualização recursiva do filtro de Kalman fuzzy tipo-2 intervalar;*

**while**  $k \geq N_b + 1$  **do**

Construir o vetor de regressores  $\boldsymbol{\lambda}_k$  - Eq. (5.59);

**for**  $i = 1$  **to**  $c$  **do**

Atualizar os parâmetros de Markov do observador intervalares - Eq. (5.60)-(5.61);

Repetir do **Passo 3** ao **Step 7** descritos na etapa de treinamento;

Atualizar a matriz de ganho de Kalman intervalar - Eq. (5.62)-(5.63)

**end**

**end**

sentido de ilustrar as etapas sequenciais dos aspectos computacionais para o projeto

do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, para melhor compreensão dos leitores, um fluxograma da metodologia proposta é mostrado na Figura 9.

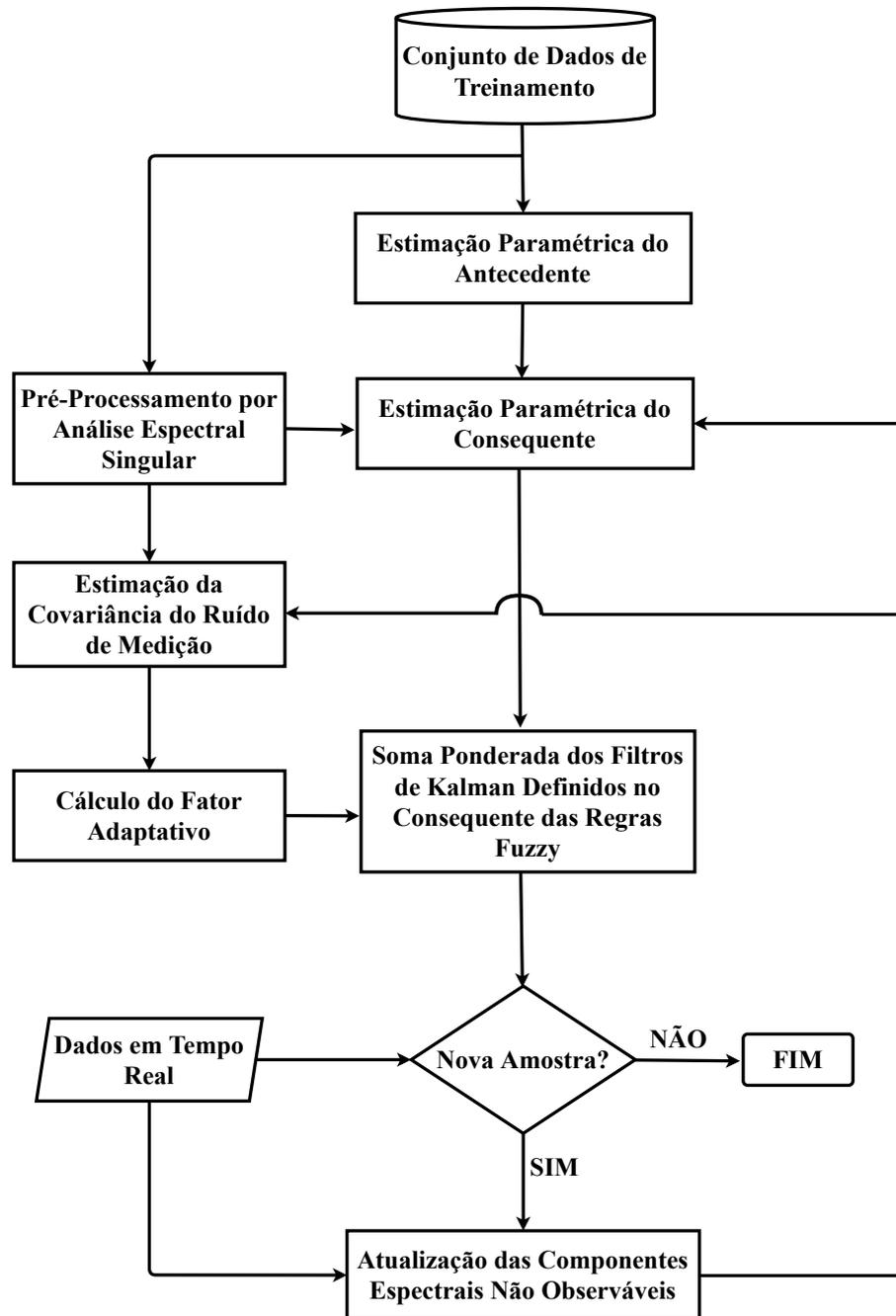


Figura 9 – Fluxograma da metodologia proposta correspondente aos aspectos computacionais para projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.

Uma possível limitação do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar proposto é a determinação de alguns parâmetros ( $\gamma$ ,  $\beta$  e  $q$ ) para a estimação paramétrica da proposição do consequente, o que requer alguma intuição do especialista e depende do conjunto de dados experimentais. Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ , relacionados à dimensão e posto da matriz de Hankel definida na Equação (5.44), devem ser escolhidos de tal maneira que um bom condicionamento possa ser garantido para estimação paramétrica da proposição do

consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar através das Equações (5.52)-(5.55), apresentando valores típicos no intervalo  $\frac{N_b}{10} < \gamma, \beta < \frac{N_b}{2}$ , onde  $N_b$  é o comprimento do conjunto de dados experimentais (JUANG, 1994; HANGOS; BOKOR; SZEDERKENYI, 2004). O valor de  $q$  está relacionado ao número de parâmetros de Markov do observador, ou seja, os fatores mais representativos da resposta ao impulso do conjunto de dados experimentais, de acordo com a Equação (5.28), tal que  $\mathbf{CA}^k\mathbf{B} \approx 0$ , para  $k \geq q$ , implica na matriz truncada  $\widetilde{\mathbf{Y}}^i$ , de modo a fornecer uma solução única para a estimação paramétrica da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, cujos valores típicos estão no intervalo  $1 \leq q \leq 10$  (CALLIER; DESOER, 1991; ANTSAKLIS; ASTOLFI, 2020).

## 6 Análise Computacional da Metodologia Proposta

Neste capítulo, resultados computacionais a partir da filtragem e rastreamento das variáveis de estado de um sistema dinâmico não linear com comportamento caótico em ambiente ruidoso, bem como filtragem e rastreamento de uma trajetória de referência pelas variáveis de estado de um sistema dinâmico não linear sujeito a atrasos de tempo, de modo a ilustrar a eficiência da metodologia proposta quando comparada a abordagens largamente citadas na literatura, são apresentados.

### 6.1 Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Aplicado ao Atrator Caótico de Lorenz

Nesta seção, resultados computacionais para filtragem e rastreamento dos estados de um sistema dinâmico não linear, com comportamento caótico, em ambiente ruidoso, para análise comparativa com a abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017), largamente citada na literatura, são apresentados. O sistema dinâmico não linear sob análise consiste no atrator caótico de Lorenz, descrito por (HUANG; ZHANG; ZHAO, 2015):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varrho(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \varpi x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \varkappa x_3\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde  $\varrho = 10$ ,  $\varkappa = 8/3$  e  $\varpi = 28$  proporcionam ao sistema não linear um comportamento caótico. A aproximação do modelo dado na Equação (6.1) para o domínio do tempo discreto é dada por:

$$\begin{aligned}x_{1_{k+1}} &= x_{1_k} + \Delta t \varrho (x_{2_k} - x_{1_k}) \\ x_{2_{k+1}} &= x_{2_k} + \Delta t (\varpi x_{1_k} - x_{2_k} - x_{1_k} x_{3_k}) \\ x_{3_{k+1}} &= x_{3_k} + \Delta t (x_{1_k} x_{2_k} - \varkappa x_{3_k})\end{aligned}\tag{6.2}$$

onde o tempo de amostragem foi definido como  $\Delta t = 1 \text{ ms}$ , gerando um conjunto de dados a partir do atrator caótico de Lorenz com comprimento total de 10000 amostras, tal que as primeiras 4000 amostras foram usadas na etapa de treinamento para parametrização inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.

Uma vez que o problema de interesse, nesta dissertação, é baseado nas séries temporais relacionadas às variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz, a variável  $\mathbf{u}_k$ , na Equação (5.15) da metodologia proposta, é considerada como um sinal de ruído branco de baixa amplitude. As componentes não-observáveis associadas à variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz foram extraídas por meio da abordagem da análise espectral singular, de acordo com a Seção 5.1, para pré-processamento do conjunto de dados. A variável de estado ruidosa  $x_1$  foi decomposta em 2 componentes espectrais, onde a componente com comportamento residual foi usada para estimação da covariância  $R$  do ruído de medição e do fator de ponderação  $\mathcal{X}$ , e a outra componente, assumindo comportamento correlacionado a dinâmica nominal da variável de estado  $x_1$ , foi usada para parametrização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. As partições dos dados computacionais sobre a variável de estado ruidosa  $x_1$  foram definidas pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel, tal que a proposição do antecedente, o número de regras e a proposição do conseqüente, do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, puderam ser estimadas com sucesso. Para implementação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar, os seguintes parâmetros foram adotados: número de agrupamentos  $c = 2$ , expoente de ponderação  $\tilde{m} = [1.5, 2.0]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-5}$ . De acordo com os dados computacionais das variáveis de estado  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz, as componentes não-observáveis obtidas a partir da variável de estado ruidosa  $x_1$  e os valores de pertinência normalizados *fuzzy* tipo-2 intervalares, a parametrização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi realizada a partir das etapas de treinamento e recursiva. A estimação paramétrica da proposição do conseqüente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, na Equação (5.15), considera as partições sobre a variável de estado ruidosa  $x_1$  como critério de ponderação e os seguintes valores de parâmetros:  $q = 1$  (associado ao número de parâmetros de Markov do observador),  $\gamma = 10$  (associado ao número linhas da matriz de Hankel) e  $\beta = 10$  (associado ao número de colunas da matriz de Hankel). A relação sinal ruído (*Signal Noise Ratio* - SNR) sobre a variável de estado  $x_1$  foi variada, tal que o objetivo final foi a filtragem e rastreamento das variáveis de estado nominais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz a partir do conjunto de dados experimentais ruidosos. Os valores de erro quadrático médio (*Mean Square Error* - MSE), usado como critério de validação, para diferentes níveis de SNR, considerando o efeito de 100 realizações no processo de filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , são mostrados nas Figuras 10-12, respectivamente. É observado o melhor desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, para filtragem e rastreamento das variáveis de estado do atrator caótico de Lorenz, considerando os valores de MSE obtidos pelos limites superior e inferior da saída intervalar do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 quando comparados aos valores de MSE obtidos pela abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017).

Considerando o caso particular de  $SNR = 0.65$ , o comportamento dinâmico para

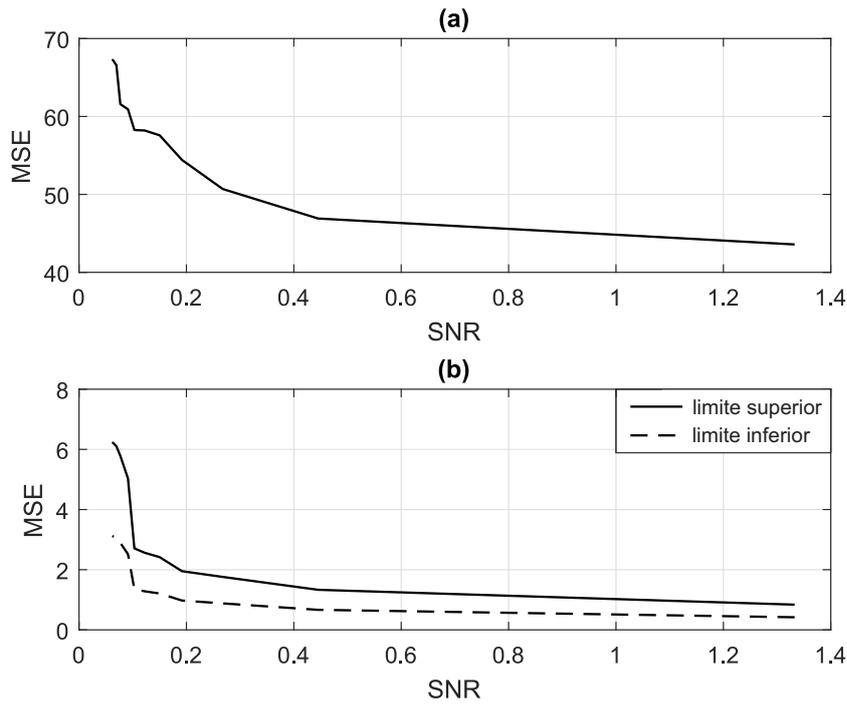


Figura 10 – Análise comparativa para filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz, considerando 100 realizações, baseada na métrica MSE: (a) Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017); (b) filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta.

os casos nominal e ruidoso da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz, são mostrados na Figura 13. De acordo com os dados experimentais da variável de estado  $x_1$  mostrados na Figura 13, as componentes não-observáveis pre-processadas, mostradas na Figura 14, e os valores de pertinência normalizados *fuzzy* tipo-2 intervalares, mostrados na Figura 15, a estimação paramétrica do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi obtida a partir das etapas treinamento e recursiva. A componente com comportamento residual foi usada para estimação da covariância do ruído de medição  $R_k$  e do fator de ponderação  $\mathcal{X}$ , e a outra componente, assumindo-se correlacionada a dinâmica nominal da variável de estado  $x_1$ , foi usada para parametrização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. Como pode ser observado na Figura 14, a componente não-observável  $\alpha^1$ , por apresentar um comportamento residual, foi usada para a estimação da covariância do ruído de medição  $R_k$  e do fator de ponderação  $\mathcal{X}$ , e a componente não-observável  $\alpha^2$ , por apresentar comportamento correlacionado à dinâmica nominal da variável de estado  $x_1$ , foi usada para parametrização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. Baseado na estimação da covariância  $R_k$  do ruído de medição associado a variável de estado  $x_1$ , o fator de ponderação  $\mathcal{X}_k$  a ser usado para implementação do mecanismo de atualização recursivo

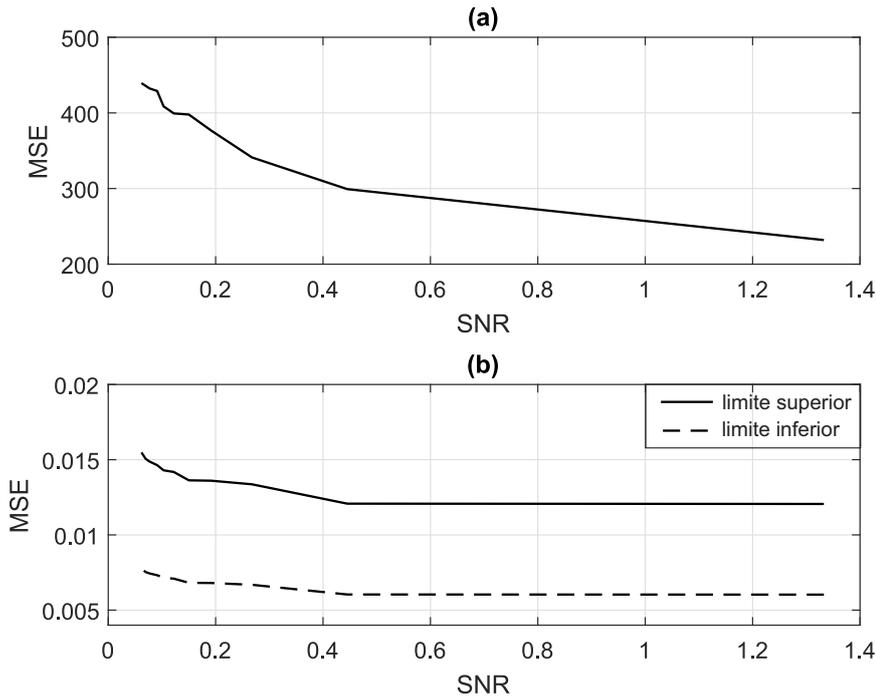


Figura 11 – Análise comparativa para filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_2$  do atrator caótico de Lorenz, considerando 100 realizações, baseada na métrica MSE: (a) Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017); (b) filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta.

do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, é dado por:

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} R_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

O comportamento temporal da covariância estimada  $R_k$  do ruído de medição e do fator de ponderação  $\mathbf{X}_k$ , os quais estão associados com a filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz, pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, são mostrados na Figura 16. A região de confiança, conforme mostrada na Figura 17, obtida a partir do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar considerando as incertezas estimadas pelas funções de pertinência tipo-2 intervalares mostradas na Figura 15, inerente aos dados ruidosos do atrator caótico de Lorenz, ilustra sua eficiência para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . A estimação das matrizes de ganho de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{K}}^i |_{i=1, \dots, 2}$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz, é mostrado na Figura 18. A estimação recursiva das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 2$ , na proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva, para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz, são mostrados nas Figuras 19-22. O desempenho da

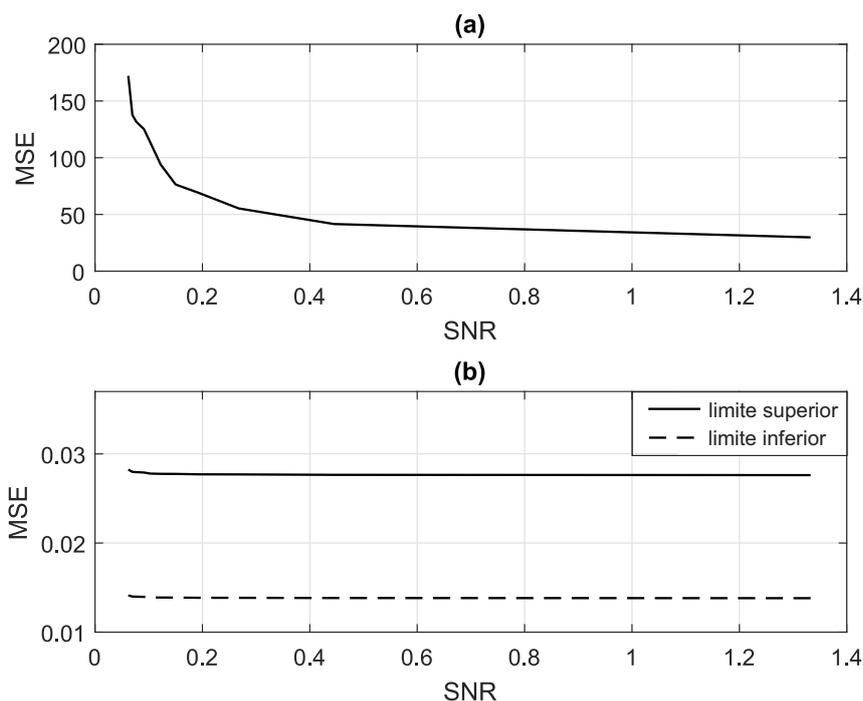


Figura 12 – Análise comparativa para filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz, considerando 100 realizações, baseada na métrica MSE: (a) Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017); (b) filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta.

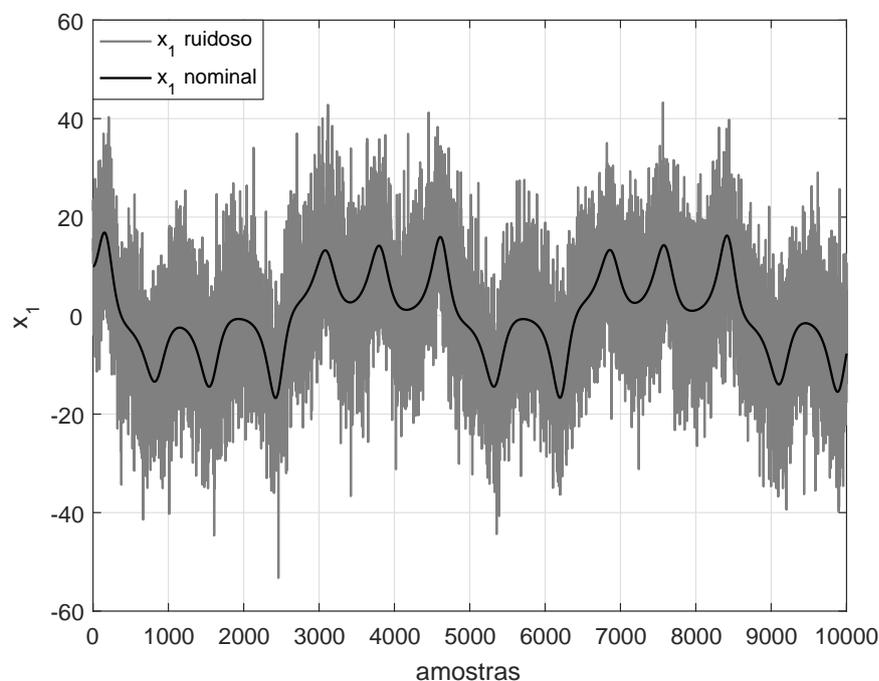


Figura 13 – Conjunto de dados computacionais da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz corrompida por ruído com  $SNR = 0.65$ .

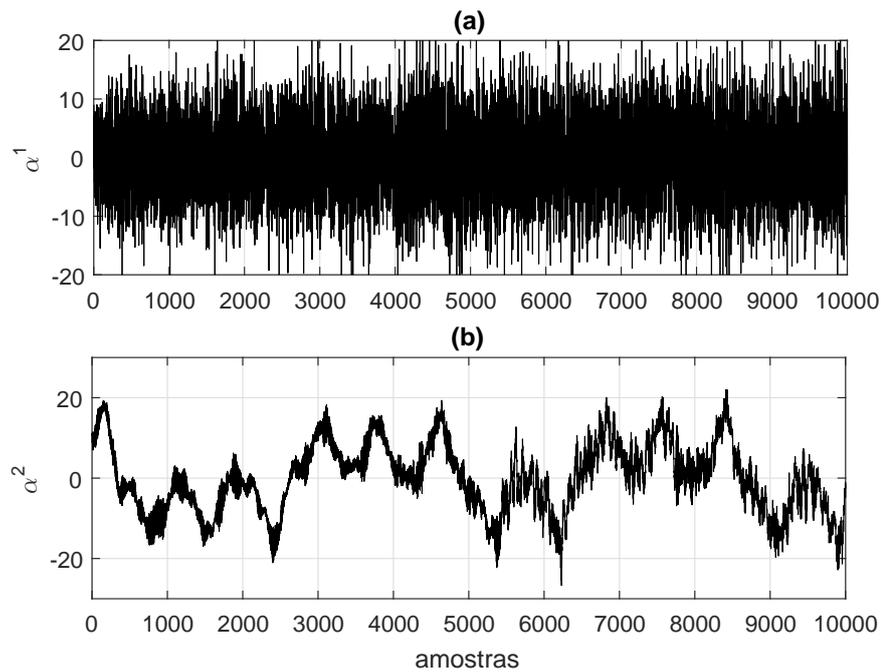


Figura 14 – Comportamento temporal das componentes espectrais  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz em ambiente ruidoso com  $SNR = 0.65$ : (a) Componente não-observável  $\alpha^1$  assumida como residual; (b) Componente não-observável  $\alpha^2$  assumida como dinamicamente correlacionada a variável de estado  $x_1$ .

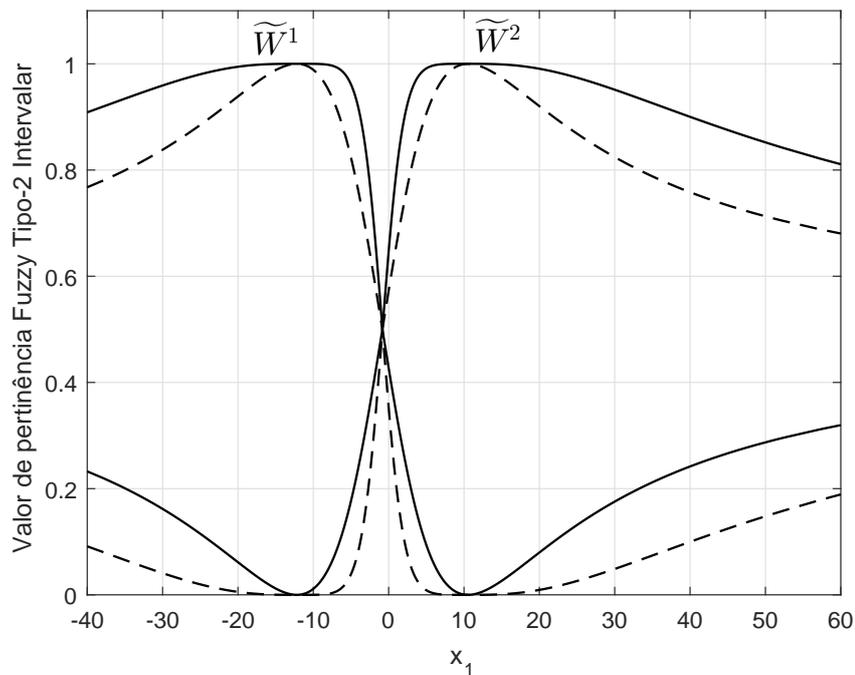


Figura 15 – Funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares estimadas pelo agrupamento da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz.

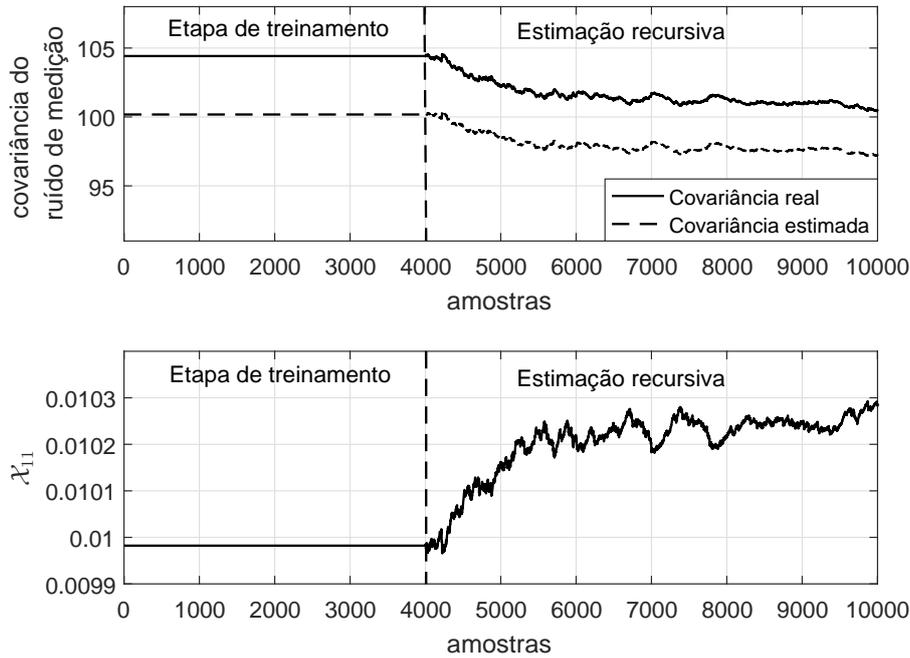


Figura 16 – Comportamento temporal da (a) covariância  $R_k$  do ruído de medição associado à variável de estado  $x_1$  e do (b) do fator de ponderação  $\chi_k$  usado para implementação do mecanismo de atualização recursivo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.

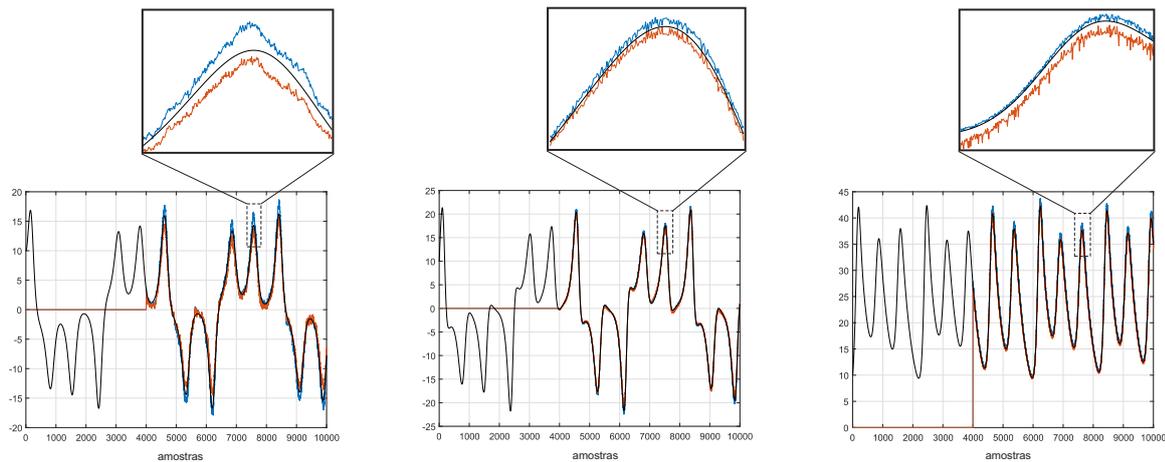
abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017) para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz é mostrado na Figura 23. A análise de eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar comparado a abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017), para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz para o caso de  $SNR = 0.65$ , baseado no critério de validação MSE, é mostrada na Tabela 2.

Tabela 2 – Análise de eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, quando comparado a abordagem (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017), para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz para o caso de  $SNR = 0.65$ , baseado no critério de validação MSE.

Metodologia	$MSE_{x_1}$	$MSE_{x_2}$	$MSE_{x_3}$
Abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017)	33.7164	173.6338	23.6985
limite superior do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	1.6826	0.0145	0.1033
limite inferior do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	2.1672	0.1255	0.1571

### 6.1.1 Análise Comparativa e Discussões

Nesta seção, uma discussão mais detalhada sobre os resultados mostrados nas Figuras 10-12, Figura 29, Figura 23 e Tabela 2, de acordo com a análise comparativa



- (a) Região de confiança obtida através do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz.
- (b) Região de confiança obtida através do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_2$  do atrator caótico de Lorenz.
- (c) Região de confiança obtida através do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz.

Figura 17 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz, para o caso de  $SNR = 0.65$ .

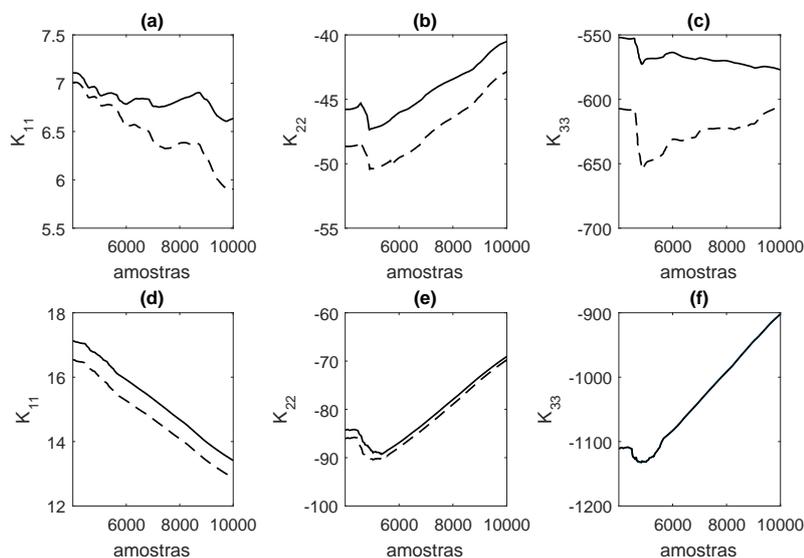


Figura 18 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal dos ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, durante atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

da metodologia proposta com a abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017), é apresentada.

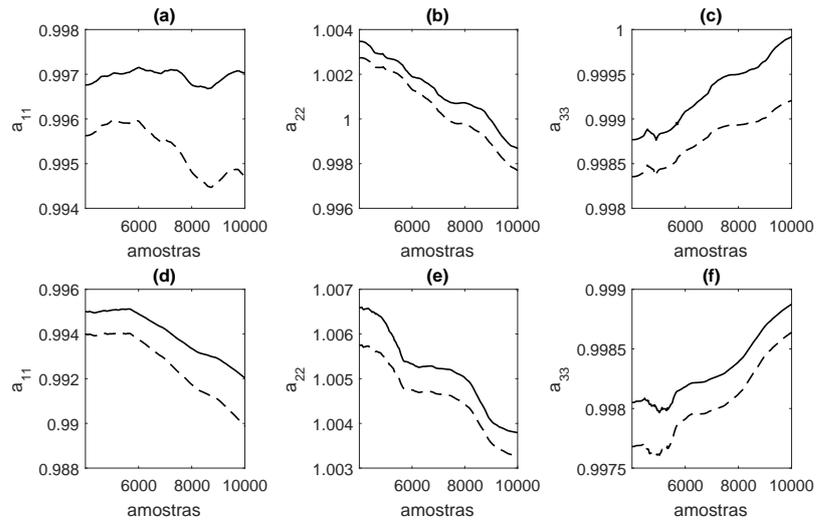


Figura 19 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

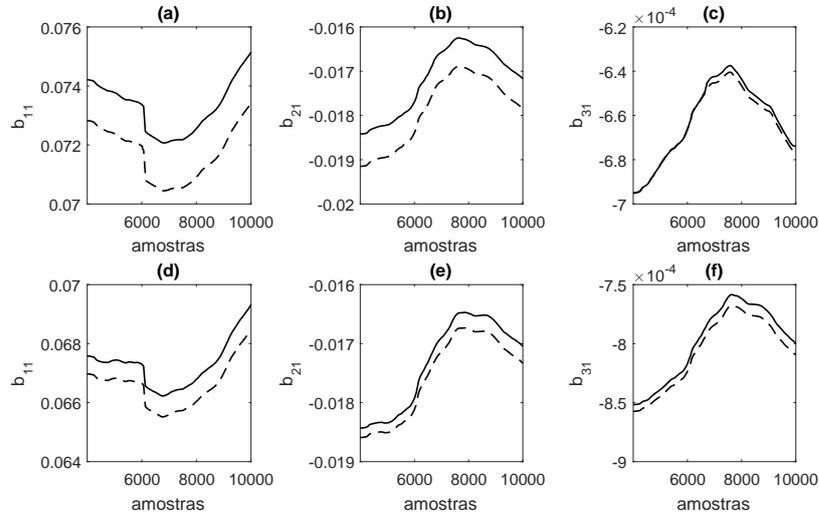


Figura 20 – Comportamento temporal estimado dos elementos da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

A metodologia adotada em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017) considera o procedimento de projeto do filtro de Kalman *fuzzy* a partir da discretização do modelo não linear caótico de Lorenz dado na Equação (6.1), da linearização em pontos específicos de operação das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e da definição de funções de pertinência com formato pré-estabelecido para particionar o comportamento dinâmico do estado  $x_1$ . A discretização adotada para o projeto do filtro de Kalman *fuzzy* é baseada na

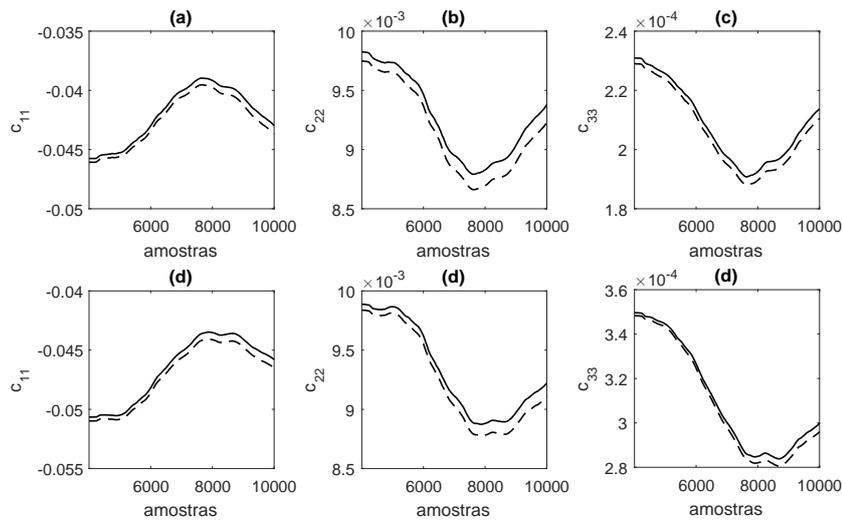


Figura 21 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

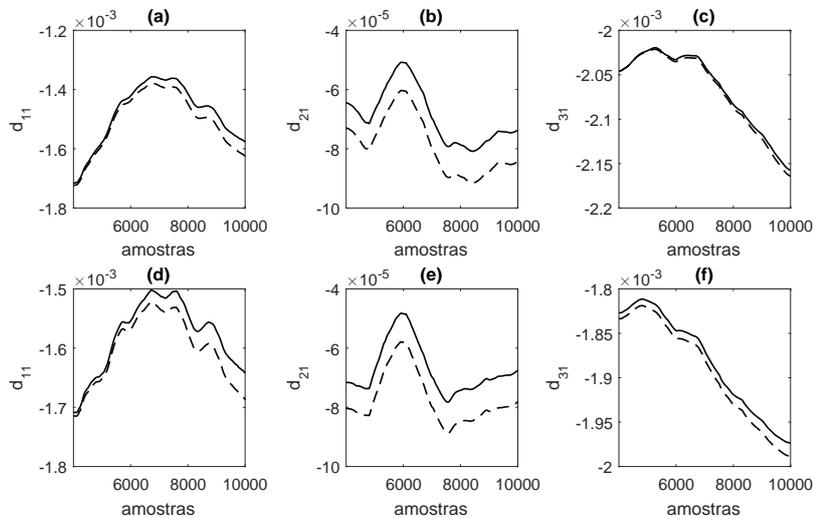
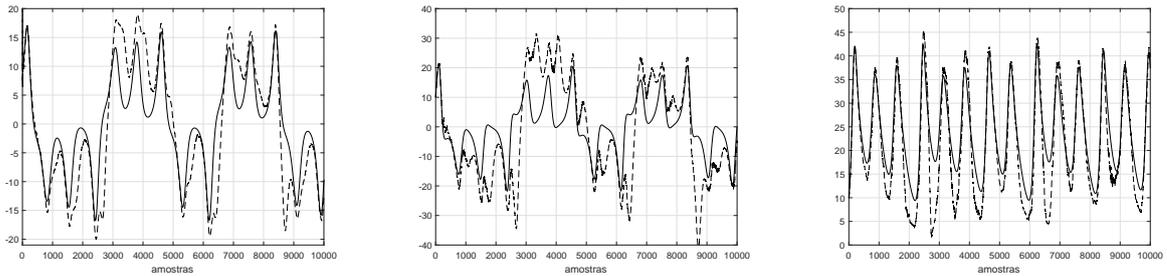


Figura 22 – Comportamento temporal estimado dos elementos da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , durante atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

amostra atual (no instante  $k$ ) do comportamento dinâmico do atrator caótico de Lorenz, descartando informações prévias das amostras, o que implica em um projeto de filtro baseado em um modelo discreto limitado dinamicamente e o erro de filtragem acumulado na amostra  $k$  é propagado, de forma recorrente, para novas aproximações, principalmente em ambientes com alta variabilidade de dados experimentais, como sistemas dinâmicos caóticos em ambiente ruidoso, limitando o desempenho de filtragem para erros elevados



(a) Filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Lorenz. (b) Filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_2$  do atrator caótico de Lorenz. (c) Filtragem e rastreamento da variável de estado  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz.

Figura 23 – Desempenho da abordagem em (PÁRAMO-CARRANZA et al., 2017) (linha tracejada) para filtragem e rastreamento das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Lorenz (linha sólida), para o caso de  $SNR = 0.65$ .

(FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1997; SERRA, 2018). A linearização adotada considera a aplicação de derivadas parciais ao atrator caótico de Lorenz em pontos específicos das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , o que implica em um projeto de filtro limitado dinamicamente a determinados pontos de operação (LUENBERGER, 1979; CHEN, 1999; ANTSAKLIS; LIU, 2003). Assim, à medida que o comportamento dinâmico do atrator caótico de Lorenz, em ambiente ruidoso, se distancia dos pontos de operação estabelecidos, os erros de aproximação aumentam nas etapas de previsão e atualização do filtro de Kalman *fuzzy* discreto e polariza a estimação das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . As partições do universo de discurso adotadas para a variável de estado  $x_1$  consideram regiões de operação com funções de pertinência pré-estabelecidas a partir do conhecimento do especialista, descartando qualquer grau de similaridade do comportamento dinâmico da variável de estado  $x_1$ , o que implica no aumento dos erros de filtragem (WANG, 1997; BABUSKA, 1998; SATO-ILIC; JAIN, 2006).

Por outro lado, a metodologia para projeto de filtros de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, proposta nesta dissertação, considera o pré-processamento dos dados dinâmicos ruidosos das variáveis de estado do atrator caótico de Lorenz, o cálculo de uma medida de similaridade adaptativa intervalar relacionada ao comportamento dinâmico da variável de estado  $x_1$ , resultando em funções de pertinência com diferentes formatos e orientações para estimar modelos regionais úteis para caracterizar o comportamento dinâmico do atrator caótico de Lorenz. O método de pré-processamento adotado para o projeto do filtro de Kalman *fuzzy* é baseado na decomposição espectral dos dados dinâmicos ruidosos da variável de estado  $x_1$ , resultando em componentes espectrais não-observáveis com padrões de comportamento interpretáveis. Isto permite descartar as componentes espectrais associadas à característica de ruído para melhor caracterização matemática do atrator caótico de Lorenz nas regiões de operação, atualizada recursivamente a cada tempo de amostragem  $k$ , a fim de reduzir os erros de filtragem (GOLYANDINA; ZHIGLJAVSKY, 2013;

ABDOLLAHZADE et al., 2015; HOSSEIN et al., 2015; JUANG, 1994; QI; TAO; JIANG, 2019). Para particionar os dados dinâmicos da variável de estado  $x_1$ , um mecanismo de similaridade adaptativo intervalar é adotado para definir regiões de operação representadas por funções de pertinência intervalares, com diferentes formatos e orientações, adaptadas à estrutura topológica associada à variabilidade dos dados dinâmicos, de modo a minimizar os erros de filtragem (BABUSKA, 1998; HÖPPNER et al., 1999; CHAOMURILIGE; YU; YANG, 2017).

## 6.2 Filtragem e Rastreamento de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar Aplicado ao Atrator Caótico de Chen

Nesta seção, resultados computacionais para filtragem e rastreamento de uma trajetória de referência por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen, em ambiente ruidoso e com atrasos de tempo, para análise comparativa com a abordagem em (WU et al., 2015), são apresentados. O atrator caótico de Chen é descrito por (CHEN; UETA, 1999):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \eta(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (\vartheta - \eta)x_1 + \vartheta x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \hbar x_3\end{aligned}\tag{6.4}$$

onde os parâmetros  $\eta = 35$ ,  $\vartheta = 28$  e  $\hbar = 3$  proporcionam um comportamento caótico ao sistema dinâmico. A aproximação do modelo dado na Equação (6.4) para o domínio do tempo discreto é dada por:

$$\begin{aligned}x_{1_{k+1}} &= x_{1_k} + \Delta t \eta (x_{2_k} - x_{1_k}) \\ x_{2_{k+1}} &= x_{2_k} + \Delta t ((\vartheta - \eta) x_{1_k} - \vartheta x_{2_k} - x_{1_k} x_{3_k}) \\ x_{3_{k+1}} &= x_{3_k} + \Delta t (x_{1_k} x_{2_k} - \hbar x_{3_k})\end{aligned}\tag{6.5}$$

onde o tempo de amostragem foi definido como  $\Delta t = 2.5 \text{ ms}$ . Um conjunto de dados do atrator caótico de Chen, considerando a condição inicial  $\mathbf{x}_0 = [-10 \ 0 \ 37]^T$ , com comprimento total de 4000 amostras, foi gerado. De acordo com este conjunto de dados experimentais, uma trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  foi construída repetindo artificialmente a parte  $\mathbf{x}(1696)$ ,  $\mathbf{x}(1697)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}(1982)$  dos dados originais com uma porção suavemente interpolada  $\{\check{\mathbf{x}}(1983), \check{\mathbf{x}}(1984), \check{\mathbf{x}}(1985)\}$  obtida da seguinte forma (WU et al., 2015):

$$\check{\mathbf{x}}(1982 + \omega) = \mathbf{x}(1982) + \frac{\omega}{4} [\mathbf{x}(1696) - \mathbf{x}(1982)]\tag{6.6}$$

com  $\omega = 1, 2, \dots, N - 1$  ( $N = 4$  para este experimento). A órbita fechada de referência e a trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  são mostradas nas Figuras 24a e 24b, respectivamente, de modo que a trajetória de referência  $\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ r_3(t)]^T$  deve ser rastreada pelas variáveis

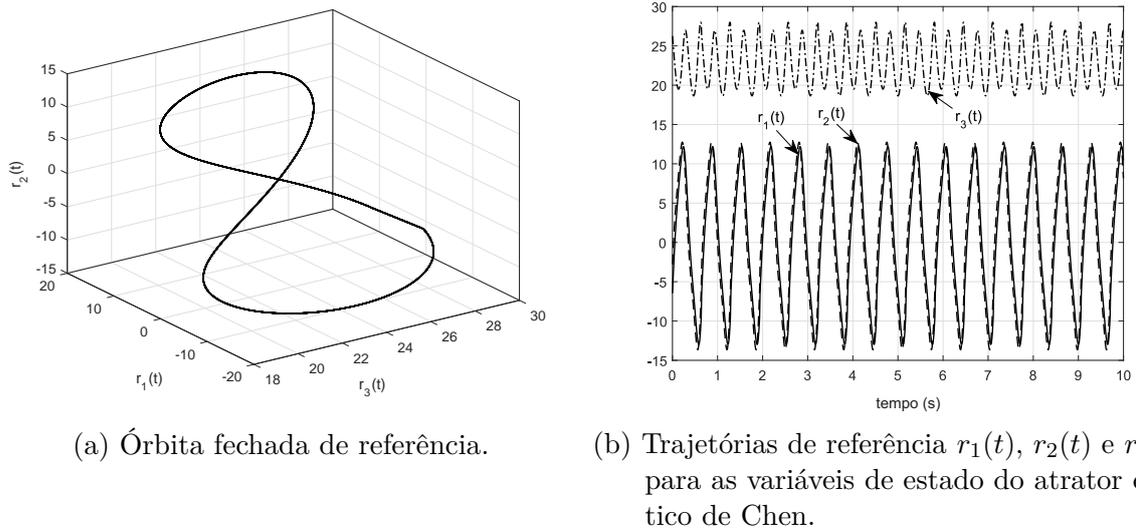


Figura 24 – Trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  para o atrator caótico de Chen: (a) Órbita fechada  $r_1(t) \times r_2(t) \times r_3(t)$ ; (b) Trajetórias de referência  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  e  $r_3(t)$  a serem rastreadas pelas variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente.

de estado do atrator caótico de Chen. A variável  $\mathbf{u}_k$ , na Equação 5.15 da metodologia proposta, é considerada como sinal de ruído branco com variância de cada entrada dada por (WU et al., 2015):

$$\sigma(u_{\mathcal{M}}(t)) = 0.5\% \times [\max r_{\mathcal{M}}(kT) - \min r_{\mathcal{M}}(kT)], \quad \mathcal{M} = 1, \dots, 3 \quad (6.7)$$

resultando em

$$\sigma(\mathbf{u}(t)) = [0.129 \quad 0.135 \quad 0.055]^T \quad (6.8)$$

onde  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t)]^T$  é o vetor de entrada aplicado ao sistema dinâmico do atrator caótico de Chen. No contexto de aplicação do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$ , a ocorrência de atrasos de tempo nas entradas e estados é considerada, de modo que o sistema dinâmico do atrator

caótico de Chen é descrito por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\eta & \eta & 0 \\ \vartheta - \eta & \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t - \tau_1) \\ x_2(t - \tau_2) \\ x_3(t - \tau_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_1(t - \tau_1)x_3(t - \tau_3) \\ x_1(t - \tau_1)x_2(t - \tau_2) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} u_1(t - \tau_4) \\ u_2(t - \tau_5) \\ u_3(t - \tau_6) \end{bmatrix} + w(t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t - \tau_1) \\ x_2(t - \tau_2) \\ x_3(t - \tau_3) \end{bmatrix} + v(t) \quad (6.10)$$

onde  $w(t)$  e  $v(t)$  são, respectivamente, os ruídos brancos de processo e medição, de modo que as covariâncias são definidas como  $\text{cov}(w) = 0.02$  e  $\text{cov}(v) = 0.002$ . Os atrasos de tempo nos estados são  $\tau_1 = 5$  ms,  $\tau_2 = 3,75$  ms,  $\tau_3 = 2,5$  ms e o atrasos nas entradas são  $\tau_4 = \tau_5 = \tau_6 = 2,5$  ms para o intervalo de tempo  $1,5 \text{ s} \leq t \leq 3,5 \text{ s}$ . O conjunto de dados resultante para este contexto é mostrado na Figura 25. O objetivo é projetar o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  a partir dos dados com falha mostrados na Figura 25. As primeiras 200

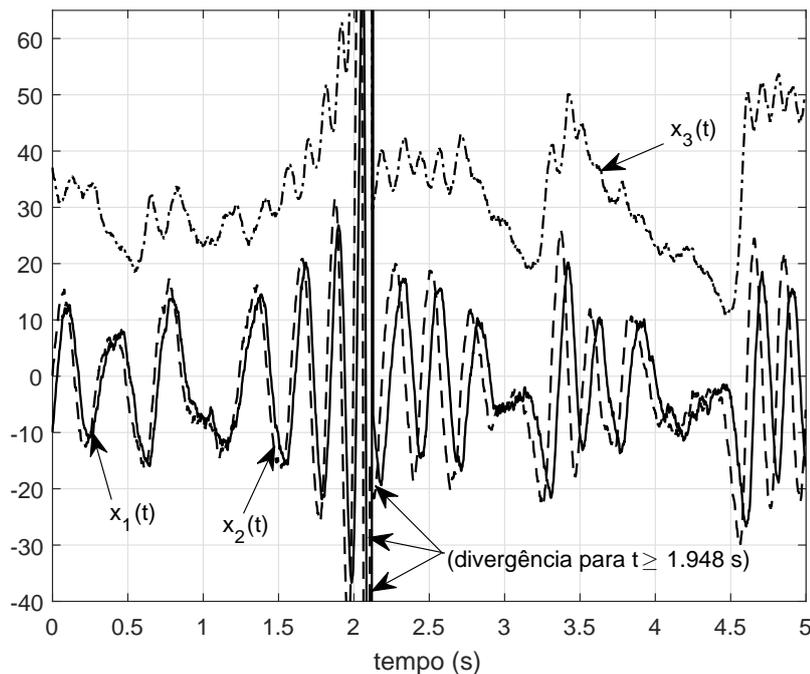


Figura 25 – Conjunto de dados experimentais do atrator caótico de Chen com atrasos de tempo inesperados durante o intervalo de tempo  $1,5 \text{ s} \leq t \leq 3,5 \text{ s}$ .

amostras foram usadas na etapa de treinamento para a parametrização inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. As componentes não-observáveis associadas às variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Chen foram extraídas pela abordagem de análise espectral singular, conforme apresentado na Seção 5.1, para pré-processamento do conjunto de dados experimentais. As variáveis de estado ruidosas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  foram decompostas em 2 componentes espectrais, as quais são mostradas nas Figuras 26-28. A componente espectral  $\alpha^2$ , extraída de cada variável de estado, assumindo correlação com a dinâmica nominal das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , foram utilizadas para parametrização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. A matriz de ponderação  $\mathbf{X}_k$  para implementação do

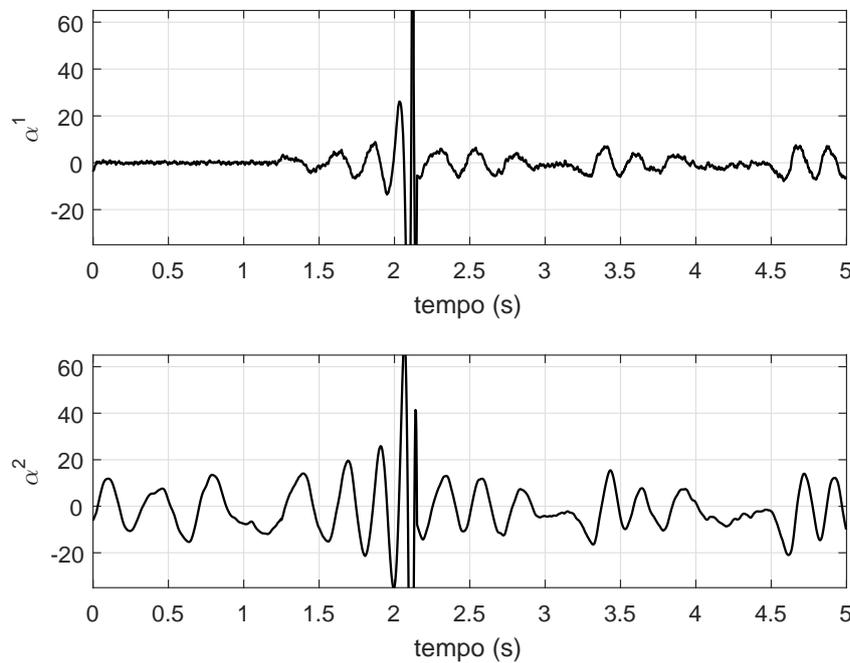


Figura 26 – Comportamento temporal das componentes espectrais  $\alpha^j|_{j=1,\dots,2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com falha: (a) Componente não-observável  $\alpha^1$ ; (b) Componente não-observável  $\alpha^2$ .

mecanismo de atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar é definida como uma matriz identidade quando aplicada para o processo de filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$ . As partições dos dados computacionais da variável ruidosa  $\mathbf{Z} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  foram definidas pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel, tal que a proposição do antecedente, o número de regras e a proposição do conseqüente, do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, puderam ser estimados com sucesso. Para implementação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar, os seguintes parâmetros foram adotados: número de agrupamentos  $c = 2$ , expoente de ponderação intervalar  $\tilde{m} = [1.5 \ 2]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-5}$ . A estimação paramétrica da proposição do conseqüente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, na

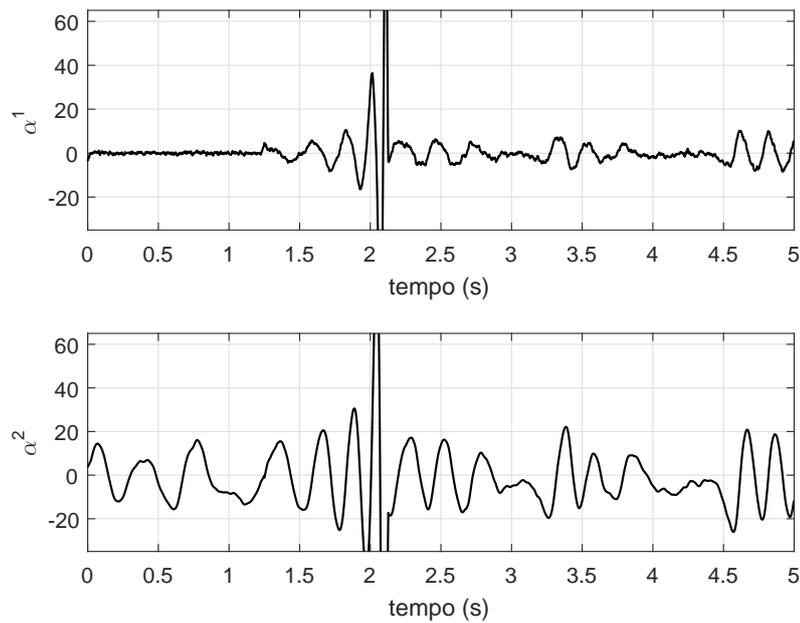


Figura 27 – Comportamento temporal das componentes espectrais  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado  $x_2$  do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com falha: (a) Componente não-observável  $\alpha^1$ ; (b) Componente não-observável  $\alpha^2$ .

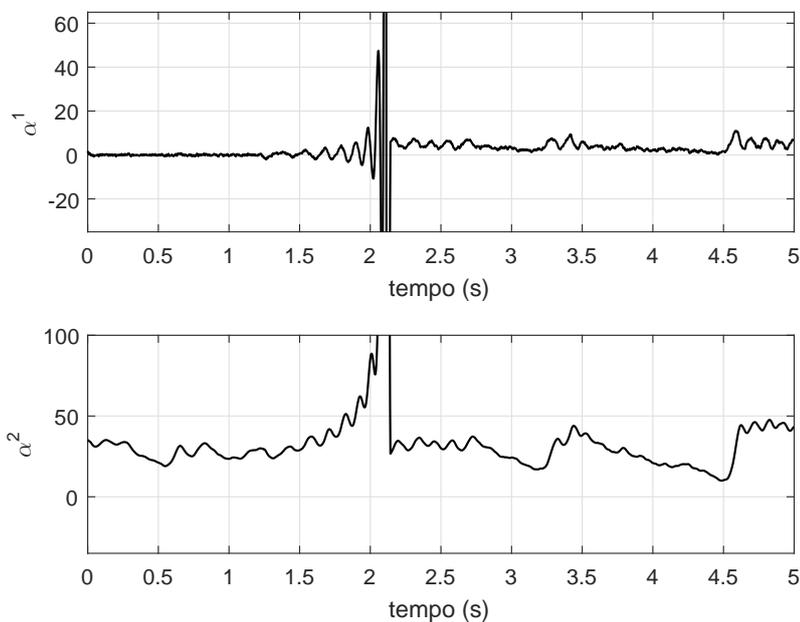
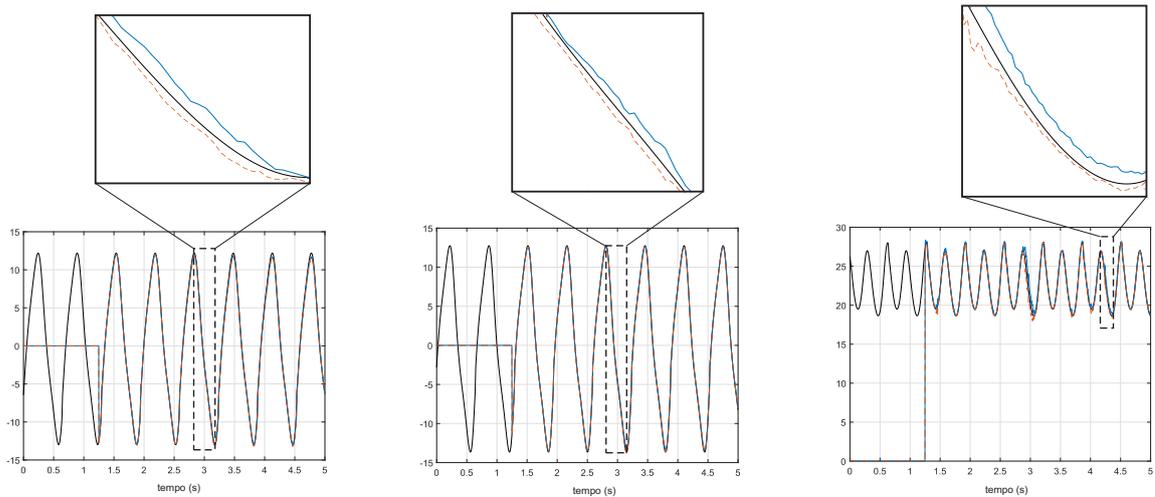


Figura 28 – Comportamento temporal das componentes espectrais  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 2}$ , as quais foram extraídas da variável de estado  $x_3$  do atrator caótico de Chen em ambiente ruidoso e com falha: (a) Componente não-observável  $\alpha^1$ ; (b) Componente não-observável  $\alpha^2$ .

Equação (5.15), considera as partições na variável ruidosa  $\mathbf{Z} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  como critério



- (a) Região de confiança criada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $r_1(t)$  pela variável de estado  $x_1$  do atrator caótico de Chen.
- (b) Região de confiança criada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $r_2(t)$  pela variável de estado  $x_2$  do atrator caótico de Chen.
- (c) Região de confiança criada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $r_3(t)$  pela variável de estado  $x_3$  do atrator caótico de Chen.

Figura 29 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, para filtragem e rastreamento da trajetória de referência por meio das variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do atrator caótico de Chen, para o caso de atrasos de tempo nos estados e entradas.

de ponderação e os valores dos parâmetros:  $q = 1$ ,  $\gamma = 10$  e  $\beta = 10$ . As regiões de confiança, conforme mostradas nas Figuras 29a-29c, obtidas a partir do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, considerando as incertezas estimadas pelas funções de pertinência tipo-2 intervalares inerentes aos dados ruidosos do atrator caótico de Chen, ilustra sua eficiência para rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$ . A estimação das matrizes de ganho de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{K}}^i |_{i=1, \dots, 2}$  durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$ , é mostrada na Figura 30. A estimação recursiva das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 2$ , na proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva, para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen, são mostradas nas Figuras 31-34. Os graus de ativação instantâneos superior e inferior relacionados ao sistema de inferência de filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen, são mostrados na Figura 35. A eficiência do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar em comparação com a abordagem (WU et al., 2015) e outros algoritmos de agrupamento (*Fuzzy C-Means* e *Possibilistic C-Means*), para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por

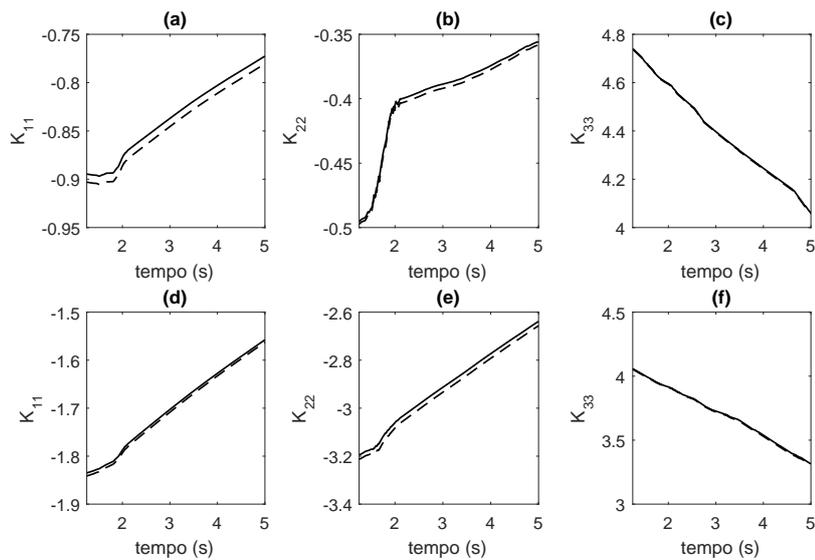


Figura 30 – Comportamento temporal estimado dos elementos da diagonal principal dos ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio de variáveis de estado de atrator caótico de Chen: (a) - (c) Regra 1, (d) - (f) Regra 2.

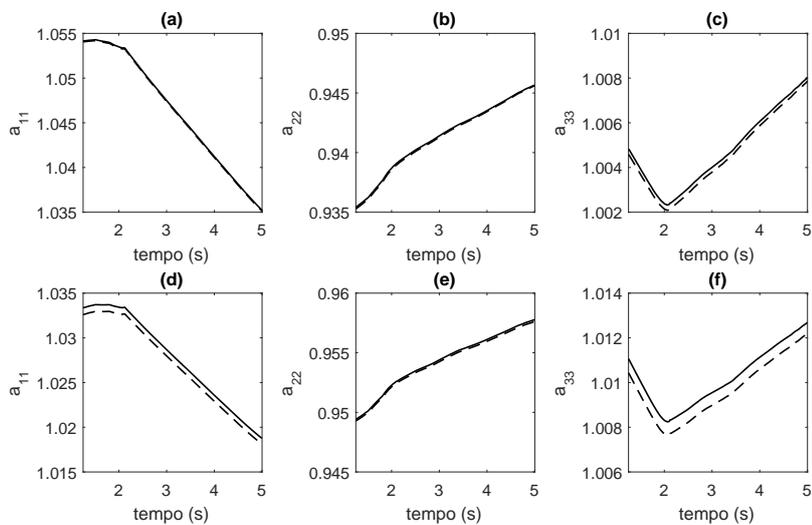


Figura 31 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen, baseado no critério de validação do Erro Absoluto Médio (*Mean Absolute Error* - MAE), é mostrada na Tabela 3.

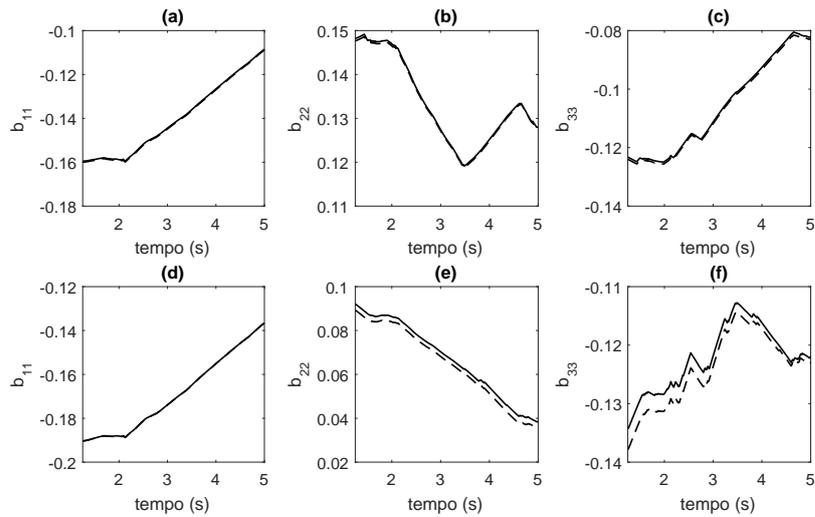


Figura 32 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

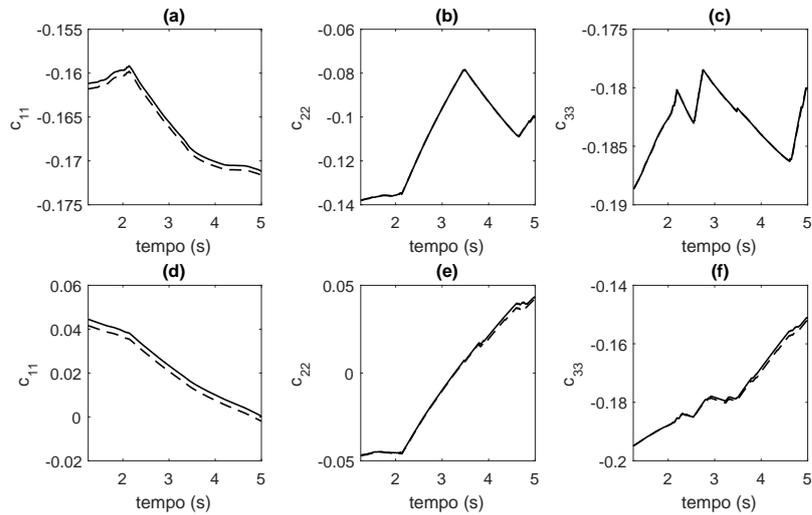


Figura 33 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{C}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

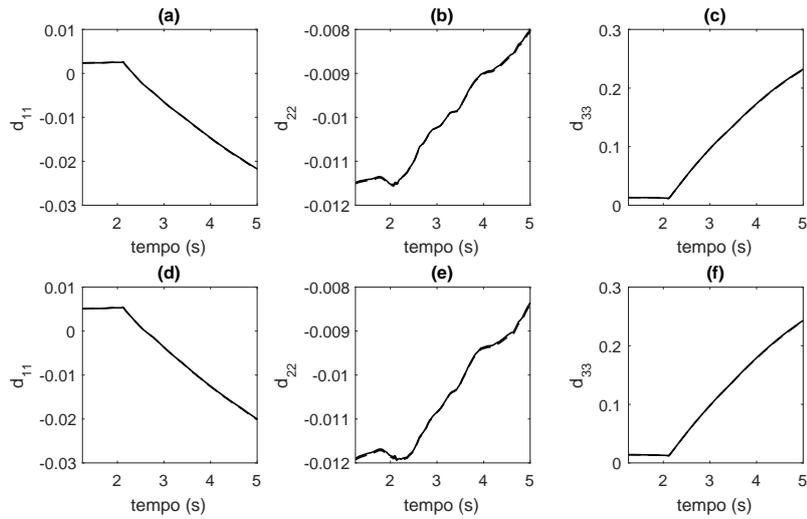


Figura 34 – Comportamento temporal da estimação dos elementos da diagonal principal da matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\widehat{\mathbf{D}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a)-(c) Regra 1, (d)-(f) Regra 2.

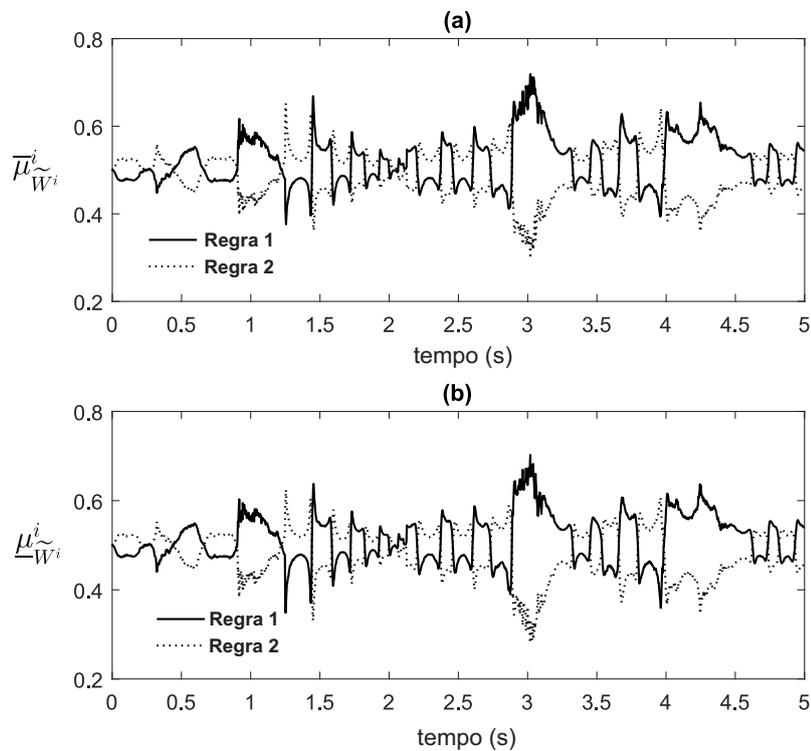


Figura 35 – Graus de ativação *fuzzy* normalizados instantâneos do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante as etapas de treinamento e recursiva para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen: (a) Graus de ativação superiores normalizados instantâneos; (b) Graus de ativação inferiores normalizados instantâneos.

Tabela 3 – Desempenho do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar quando comparado a abordagem em (WU et al., 2015) e outros algoritmos de agrupamento (*Fuzzy C-Means* e *Possibilistic C-Means*), para filtragem e rastreamento da trajetória de referência  $\mathbf{r}(t)$  por meio das variáveis de estado do atrator caótico de Chen.

Metodologia	$\mathbf{MAE}_{r_1(t)}$	$\mathbf{MAE}_{r_2(t)}$	$\mathbf{MAE}_{r_3(t)}$
Abordagem em (WU et al., 2015)	403.92	555.41	415.14
Algoritmo de agrupamento <i>Fuzzy C-Means</i>	0.3793	0.5209	0.8221
Algoritmo de agrupamento <i>Possibilistic C-Means</i>	0.5830	0.4892	0.4202
Limite inferior do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	0.3435	0.0308	0.1800
Limite superior do filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	0.3166	0.0205	0.5843



## 7 Análise Experimental da Metodologia Proposta

Neste capítulo, resultados experimentais para análise de previsão do comportamento de propagação dinâmica do novo Coronavírus, considerando os dados experimentais de óbitos diários registrados por Covid-19 no estado do Maranhão e Brasil, são apresentados.

### 7.1 Análise de Filtragem e Previsão de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar da Propagação Dinâmica da COVID-19 no Estado do Maranhão

Nesta seção, resultados experimentais para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real da propagação dinâmica da Covid-19 no estado do Maranhão são apresentados. Os dados experimentais correspondentes às notificações de óbitos diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020 no estado do Maranhão, são mostrados na Figura 36, os quais foram obtidos a partir da base de dados fornecida pela Secretaria de Estado da Saúde<sup>1</sup>. Uma vez que o problema de interesse, nesta dissertação, é baseado nas séries temporais relacionadas aos óbitos diários registrados no Maranhão, a variável  $\mathbf{u}_k$ , na Equação (5.15) da metodologia proposta, é considerada como um sinal de ruído branco com baixa amplitude. O pré-processamento dos dados experimentais pela análise espectral singular foi capaz de extrair as componentes não-observáveis associadas ao conjunto de dados experimentais de óbitos diários notificados. A métrica *Variance Accounted For* (VAF) foi considerada como critério para avaliar o número apropriado de componentes a serem extraídas, dentro da faixa de 2 a 15 componentes, para melhor representação dos dados experimentais, conforme mostrado na Figura 37. Conforme pode ser visto, considerando o balanço custo-benefício para aplicação prática computacional da metodologia proposta, o número apropriado de componentes não-observáveis obtido foi  $\xi = 7$ , com valor de VAF de 99.92% de eficiência para a representação mais precisa possível dos dados experimentais e que, ao mesmo tempo, reduz a carga computacional do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. As componentes não-observáveis espectrais, as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais referentes aos óbitos diários registrados no estado do Maranhão no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020, são mostradas na Figura 38.

As partições dos dados experimentais relacionados aos óbitos diários registrados foram definidas pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel,

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://painel-covid19.saude.ma.gov.br/>>

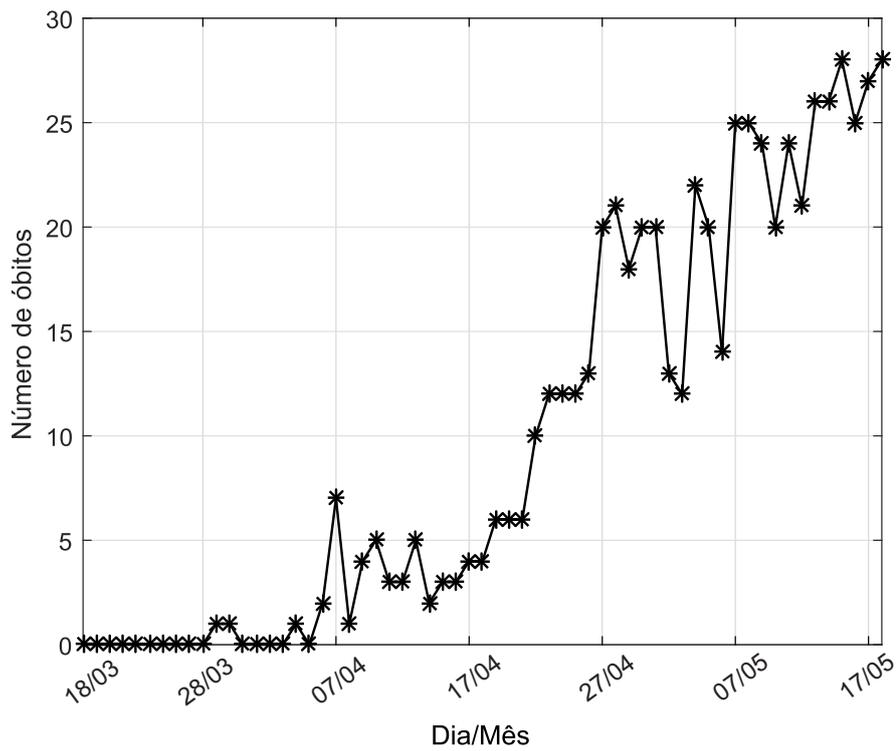


Figura 36 – Dados experimentais de órbitas diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020, no estado do Maranhão.

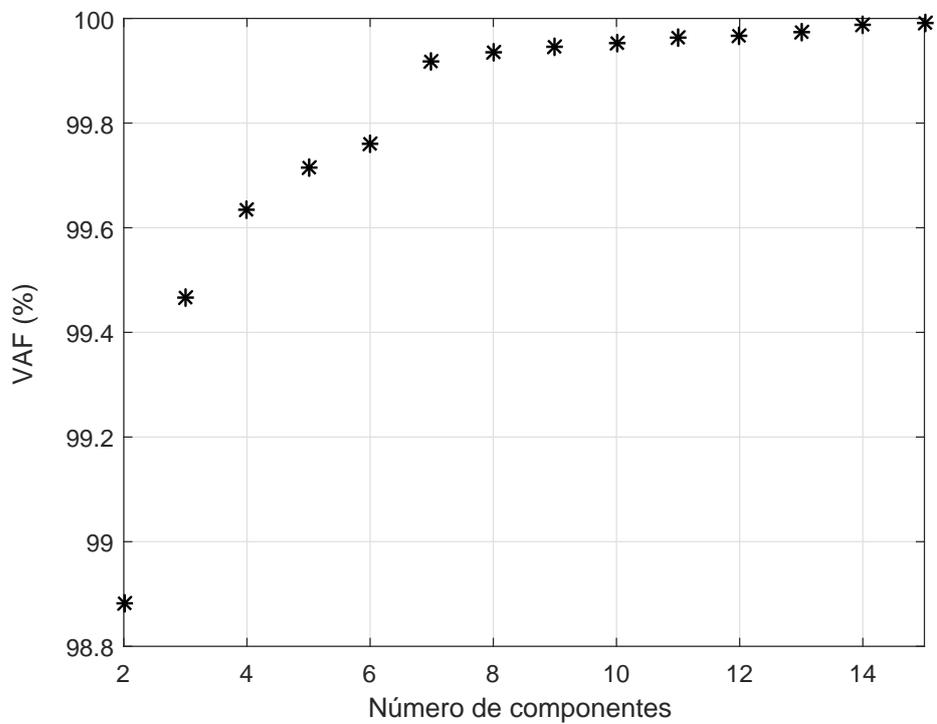


Figura 37 – Eficiência das componentes não-observáveis, de acordo com o critério VAF, para representação dos dados experimentais de órbitas diários registrados no estado do Maranhão no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020.

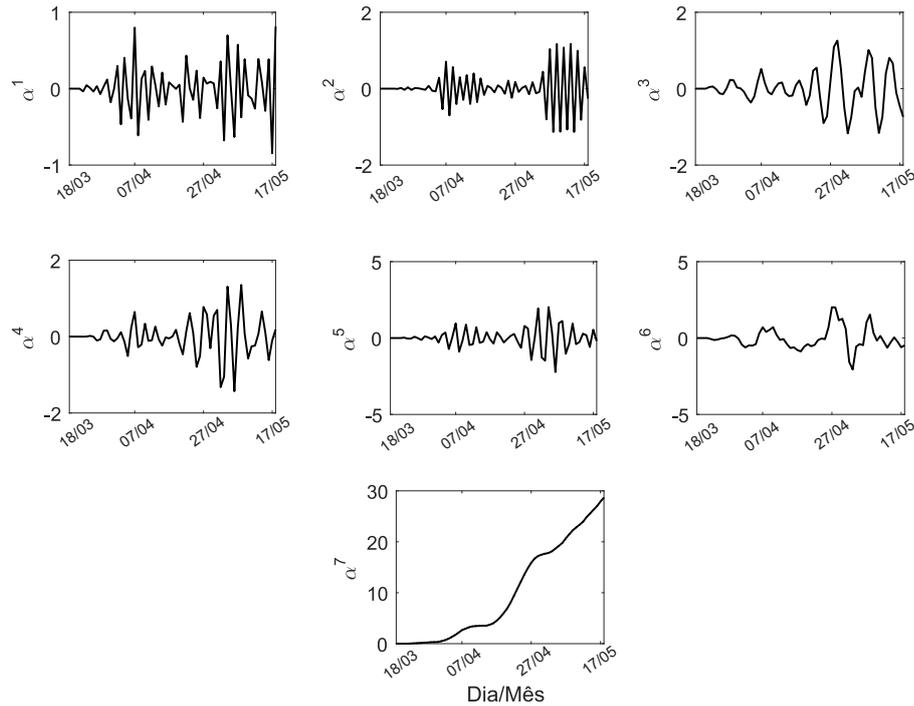


Figura 38 – Comportamento temporal das componentes não-observáveis  $\alpha^j |_{j=1, \dots, 7}$ , as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais de óbitos diários por Covid-19 registrados no estado do Maranhão no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020.

conforme mostrado na Figura 39, tal que a proposição do antecedente, o número de regras e a proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foram estimadas com sucesso. Para a implementação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 proposto, os seguintes parâmetros foram adotados: número de agrupamentos  $c = 3$ , expoente de ponderação intervalar  $\tilde{m} = [2.0, 2.3]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-5}$ .

A implementação do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, para estimação paramétrica da proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, na Equação (5.15), considera as partições definidas sobre os óbitos diários, mostradas na Figura 39, como critério de ponderação, e os valores de parâmetros  $q = 1$ ,  $\gamma = 5$  e  $\beta = 5$ . De acordo com os dados experimentais de óbitos diários registrados no estado do Maranhão mostrados na Figura 36, as componentes não-observáveis pré-processadas mostradas na Figura 38 e os valores de pertinência normalizados *fuzzy* tipo-2 intervalares mostrados na Figura 39, a estimação paramétrica inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foi obtida pela etapa de treinamento. A região de confiança, conforme mostrada na Figura 40, obtida pela estimação inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, leva em consideração as incertezas estimadas pelas funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares mostradas na Figura 39, inerentes aos dados experimentais, e ilustra a sua eficiência para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020 no estado do Maranhão. A partir da

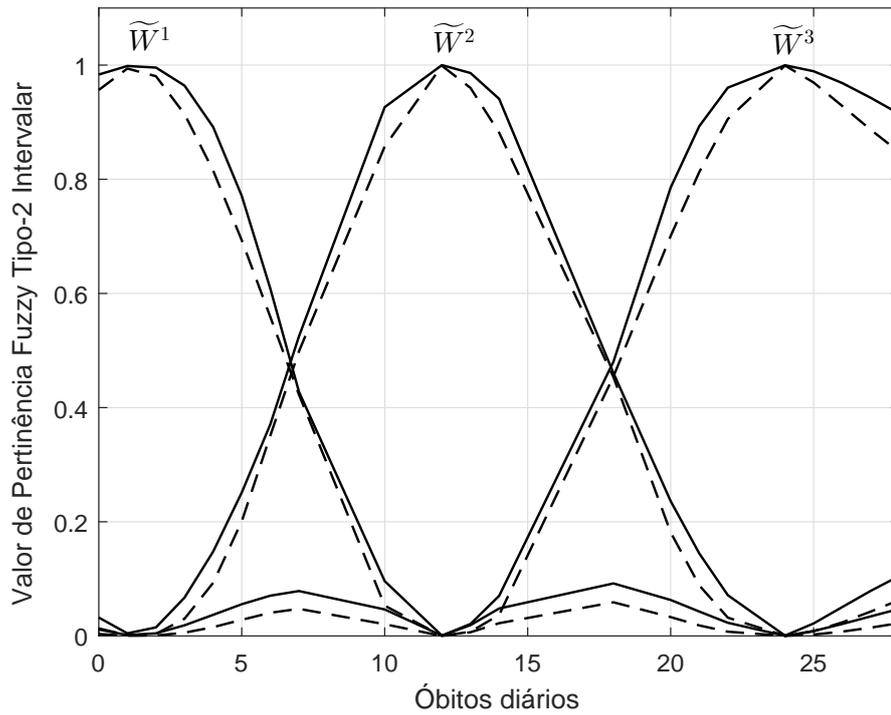


Figura 39 – Funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 estimadas a partir do agrupamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no estado do Maranhão.

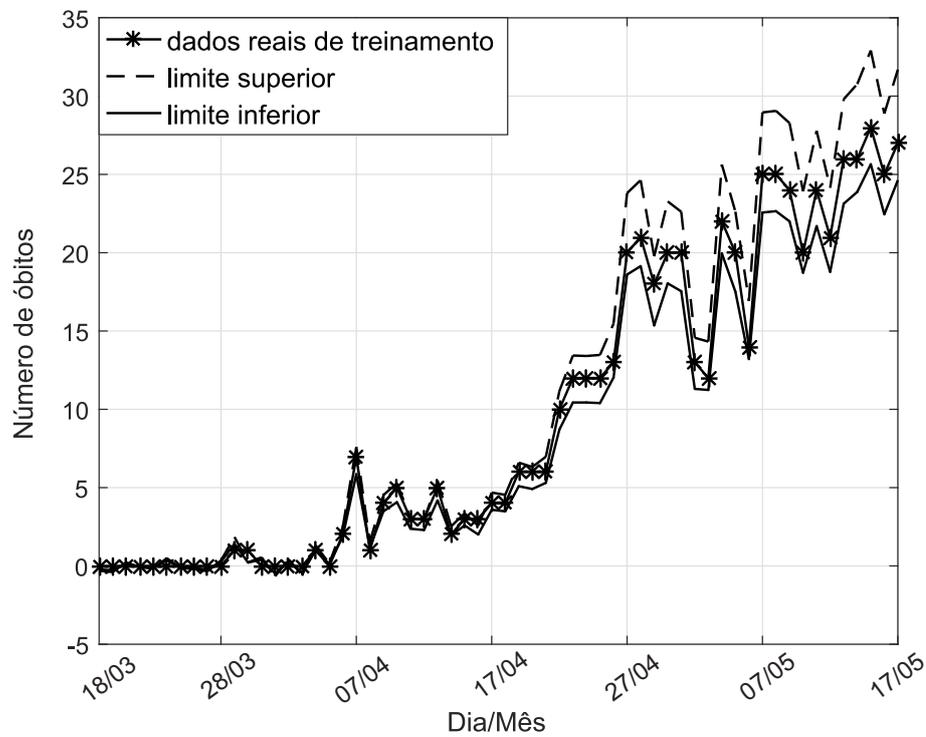
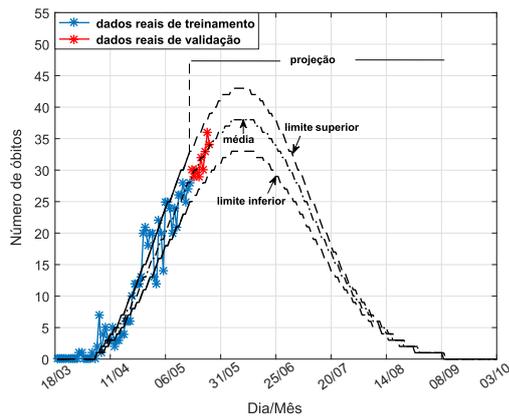


Figura 40 – Região de confiança gerada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020, no estado do Maranhão.

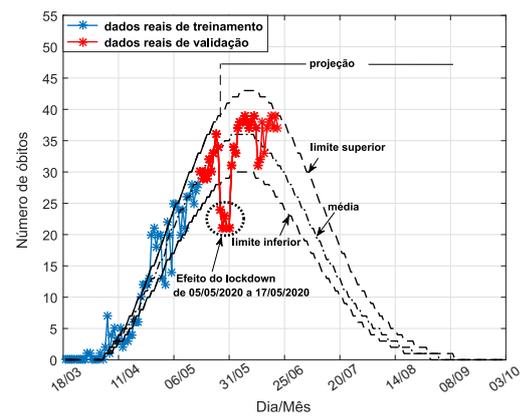
região de confiança mostrada na Figura 40, projeções de distribuição normal intervalares foram estimadas, estabelecendo um limite superior e outro inferior para a previsão de futuros registros de óbitos diários no estado do Maranhão. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado em sua estimação inicial pela etapa de treinamento a partir do conjunto de dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 18 de Março a 18 de Maio de 2020, para previsão de futuros óbitos diários é mostrada na Figura 41a. A eficiência do modelo de distribuição normal intervalar é medida no sentido de que se as projeções estimadas não são mais suficientes para representar o conjunto de dados epidemiológicos experimentais, uma atualização no filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar é necessária para um novo rastreamento e previsão da propagação dinâmica da Covid-19 relacionada a futuros (validação) óbitos diários. De acordo com esse critério, os resultados de atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão da propagação dinâmica da Covid-19 relacionada aos óbitos diários, são mostrados nas Figuras 41b-41d. Devido às mudanças apresentadas pela dinâmica dos dados epidemiológicos experimentais, o ajuste de curvas senoidais amortecidas para os limites superior e inferior é mais adequado para a projeção das previsões estimadas a partir do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. Desse modo, os novos resultados obtidos a partir da atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar são mostrados nas Figuras 41e-41f. Pode ser visto a eficiência na adaptabilidade das projeções estimadas pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, o que ilustra a sua aplicabilidade para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real da propagação dinâmica na Covid-19. A estimação das matrizes de ganho de Kalman  $\tilde{\mathbf{K}}^i |_{i=1, \dots, 3}$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, é mostrada na Figura 42. A estimação recursiva das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 3$ , na proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva, no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, são mostradas nas Figuras 43-46. Os graus de ativação *fuzzy* instantâneos superiores e inferiores relacionados ao sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante suas etapas de treinamento e recursiva, no período de 18 de Março de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, são mostrados na Figura 47. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no estado do Maranhão, no período de 19 de Maio de 2020 a 26 de Janeiro de 2021, foi validado pelo critério *Variance Accounted For* (VAF), conforme mostrado na Figura 48.

### 7.1.1 Análise Comparativa e Discussões

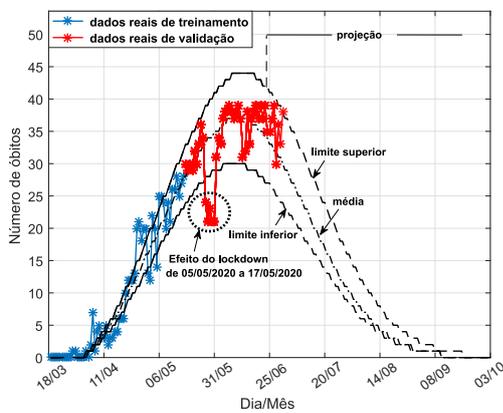
Nesta seção, uma discussão mais detalhada sobre os resultados apresentados na Seção 7.1, de acordo com a análise comparativa da metodologia proposta com os modelos



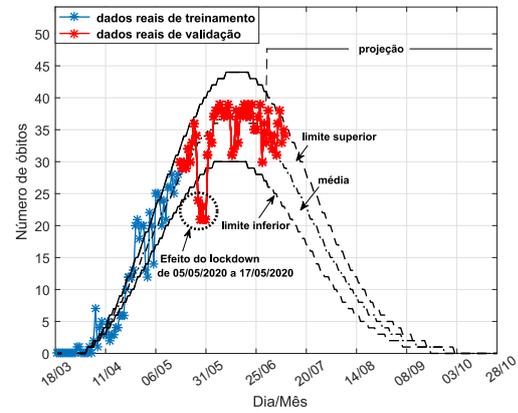
(a) Previsão no período de 19 de Maio a 27 de Maio de 2020, para o estado do Maranhão.



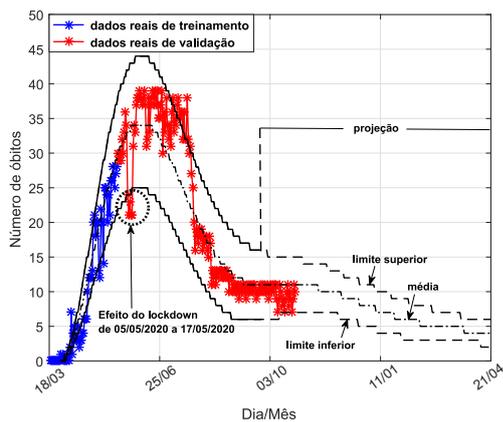
(b) Previsão no período de 28 de Maio a 24 de Junho de 2020, para o estado do Maranhão.



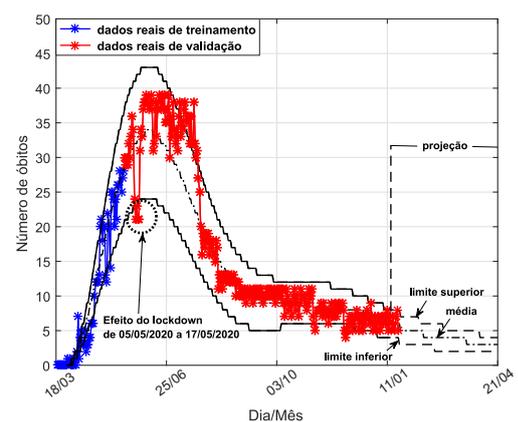
(c) Previsão no período de 25 de Junho a 03 de Julho de 2020, para o estado do Maranhão.



(d) Previsão no período de 04 de Julho a 12 de Julho de 2020, para o estado do Maranhão.



(e) Previsão no período de 26 de Setembro de 2020 a 30 de Outubro de 2021, para o estado do Maranhão.



(f) Previsão no período de 18 de Janeiro de 2021 em diante, para o estado do Maranhão.

Figura 41 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação da COVID-19 relacionados aos óbitos diários registrados no estado do Maranhão: (a) atualização baseada nos dados de treinamento de 18 de Março a 18 de Maio de 2020; (b) atualização recursiva realizada em 27 de Maio de 2020; (c) atualização recursiva realizada em 24 de Junho de 2020; (d) atualização recursiva realizada em 03 de Julho de 2020; (e) atualização recursiva realizada em 25 de Setembro de 2020; (f) atualização recursiva realizada em 18 de Janeiro de 2021.

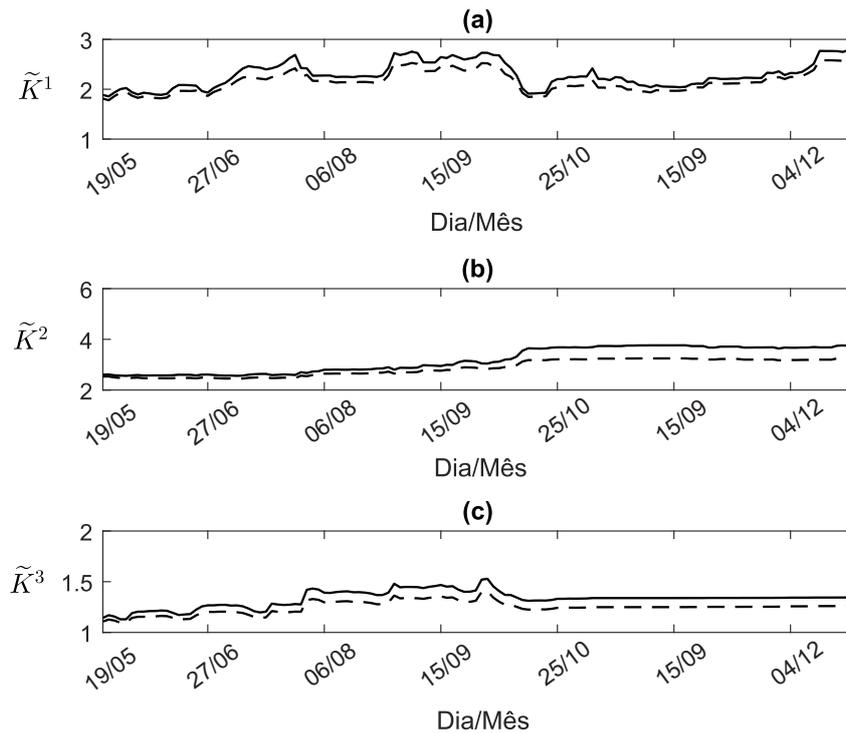


Figura 42 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

de aprendizagem de máquina LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*), ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) e com a rede neural recorrente do tipo LSTM (*Long Short-Term Memory*), considerando as métricas RMSE (*Root Mean Square Error*), MAE (*Mean Absolute Error*), RMSPE (*Root Mean Square Percentage Error*),  $R^2$  (coeficiente de determinação), MAD (*Median Absolute Deviation*) e MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), é apresentada.

Os modelos de aprendizagem de máquina utilizados para fins de comparação com a metodologia propsta nesta dissertação são brevemente descritos a seguir:

- ***Least Absolute Shrinkage and Selection Operator - LASSO***: Em aprendizagem de máquina, LASSO constitui um método de análise de regressão que realiza a seleção e regularização de variáveis. Quando existem múltiplas variáveis correlacionadas, ou seja, variáveis com o mesmo padrão de comportamento, esta técnica seleciona apenas uma dessas variáveis, penalizando o efeito das demais, para a obtenção da saída de um modelo de regressão (MARSLAND, 2014). Esta característica aumenta a interpretabilidade do modelo e constitui uma das principais vantagens desta técnica. Nesta dissertação, para fins de comparação, a técnica de regularização do LASSO foi utilizada com um modelo linear de regressão, a partir da minimização da seguinte

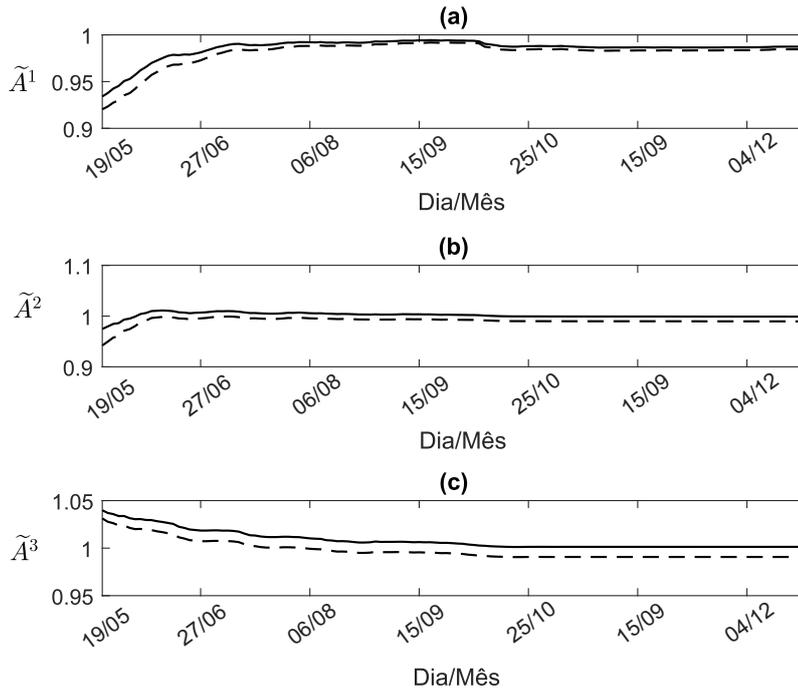


Figura 43 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

função custo:

$$J = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - x_i^T \beta)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \quad (7.1)$$

onde  $N$  é o número de observações realizadas;  $y_i$  é a resposta para a  $i$ -ésima observação;  $x_i$  corresponde ao vetor de dados na  $i$ -ésima observação;  $\lambda$  é o parâmetro de regularização, tal que  $\lambda > 0$ , e  $\beta$  é o vetor com os coeficientes da regressão linear. De acordo com a Equação (7.1), a regularização dos coeficientes em  $\beta$ , isto é, a restrição de seus valores, pela técnica do LASSO, é obtida por meio do termo  $\lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$  de forma que ao minimizar a função de custo, automaticamente os coeficientes também sejam minimizados.

- **Autoregressive Integrated Moving Average - ARIMA:** Modelos ARIMA são empregados para a representação e previsão de séries temporais com comportamento não-estacionário, comumente encontradas em aplicações práticas. Nesta classe de modelos, a característica não-estacionária da série temporal é eliminada aplicando-se o operador de diferenciação, sendo a série diferenciada representada por um modelo ARMA (*Autoregressive Moving Average*) (AGUIRRE, 2015). Para recuperar a série temporal original, é necessário efetuar a operação inversa, isto é, a integração do sinal de saída do modelo ARMA. Por esta razão, este procedimento é chamado de modelagem ARIMA, em que o “I” indica o processo de integração envolvido. A

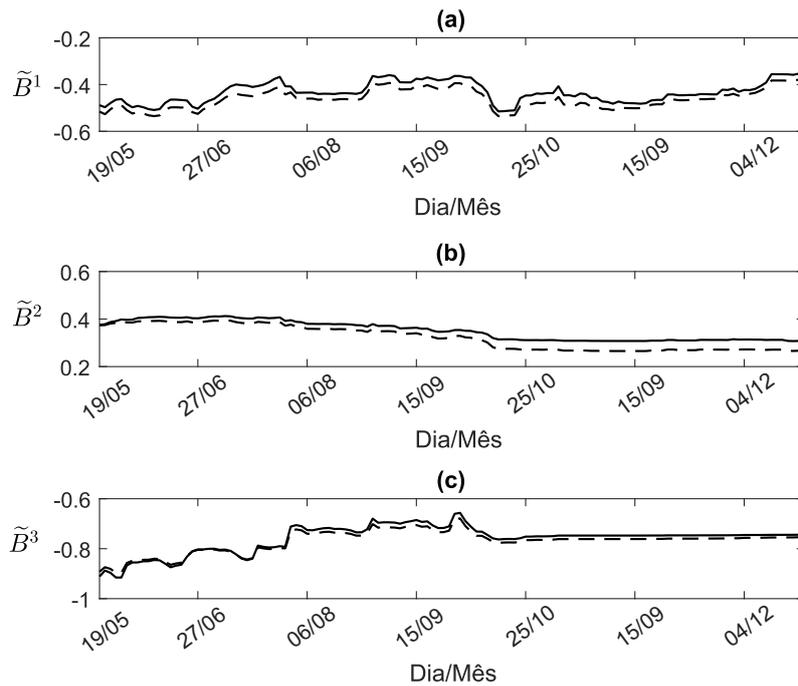


Figura 44 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{B}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

parte auto-regressiva (AR) do modelo ARIMA indica que a variável de interesse no instante de tempo atual é função de seus valores passados enquanto a parte de média móvel (MA) indica que o erro de regressão é uma combinação linear dos valores de erro atual e passados. Comumente os modelos ARIMA são denotados por  $ARIMA(p, d, q)$ , onde os parâmetros  $p$ ,  $d$  e  $q$  são inteiros não negativos, tal que  $p$  é a ordem do modelo auto-regressivo,  $d$  é o grau de diferenciação e  $q$  é a ordem do modelo de média móvel.

- **Rede Neural Recorrente do tipo *Long Short-Term Memory* - LSTM:** As redes neurais de memória de curto e longo prazo, as chamadas LSTMs, tem a capacidade de aprender dependências de longo prazo, apresentando grande eficiência em aplicações de predição e sendo amplamente empregadas atualmente. Assim como as redes neurais padrão, as redes LSTM também apresentam uma estrutura em cadeia composta por módulos repetidos onde informações podem ser armazenadas, gravadas ou lidas em uma célula. A célula, por sua vez, toma decisões sobre o que armazenar e quando permitir leituras, gravações e apagamentos, por meio de portas que controlam a passagem de informações das memórias de curto e longo prazo. Para mais informações sobre as redes neurais recorrentes LSTM ver (MANDIC, 2001).

A análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e os modelos

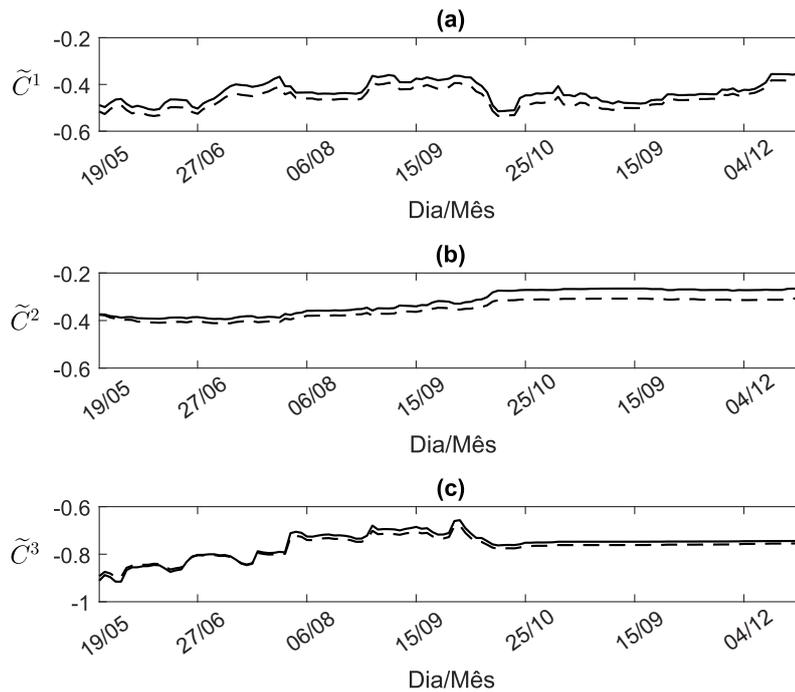


Figura 45 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{C}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

de aprendizado de máquina LASSO, ARIMA e a rede neural recorrente do tipo LSTM, para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no estado do Maranhão, considerando um horizonte de previsão de 10 dias, é mostrada na Tabela 4. O modelo de aprendizado de máquina LASSO, embora aumente a interpretabilidade do modelo ao eliminar variáveis irrelevantes que não estão associadas à propagação dinâmica da COVID-19, pode levar a estimações paramétricas polarizadas e, conseqüentemente, a um desempenho inferior em relação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar (SHUMWAY; STOFFER, 2000). O modelo de aprendizado de máquina ARIMA é rápido em velocidade de processamento, mas pode levar a estimativas imprecisas, uma vez que não considera a não estacionariedade relacionada ao conjunto de dados experimental, o que causa seu desempenho inferior em comparação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar (BISHOP, 2006). O modelo de aprendizado de máquina baseado na rede neural recorrente LSTM é capaz de fornecer estimações precisas com a limitação de não considerar as incertezas inerentes à propagação dinâmica da COVID-19, o que resulta em um desempenho inferior em relação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 (BISHOP, 2006). Por outro lado, as incertezas inerentes ao conjunto de dados experimentais são processadas pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar por meio da aproximação do comportamento dinâmico em regiões de operação *fuzzy* intervalares definidas sobre as flutuações dinâmicas da propagação da COVID-19, proporcionando redução nos erros de rastreamento e previsão.

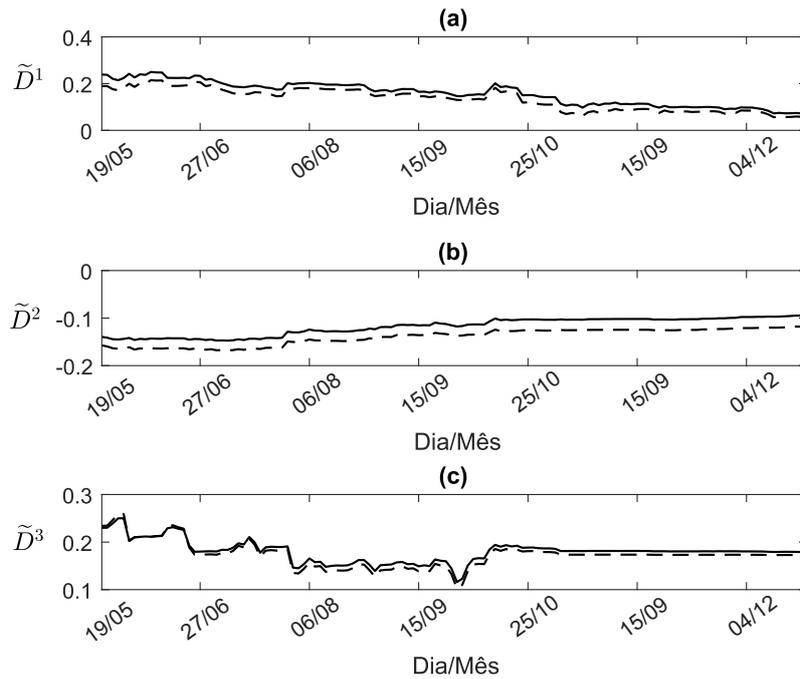


Figura 46 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{D}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado do Maranhão: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

Tabela 4 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e os modelos de aprendizagem de máquina LASSO, ARIMA e a rede neural recorrente LSTM para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no estado do Maranhão.

Modelo	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
LASSO	9.092	8.661	1.2041	0.5631	122.3	0.1153
ARIMA	4.3365	3.8337	1.3758	0.8716	125.67	0.1006
LSTM	2.6914	2.3312	0.6515	0.9666	87.34	0.0566
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	1.5074	0.7532	0.4522	0.9871	34.65	0.0397

## 7.2 Análise de Filtragem e Previsão de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar da Propagação Dinâmica da COVID-19 no Brasil

Os dados experimentais correspondentes às notificações de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020, no Brasil, são apresentados na Figura 49, os quais foram extraídos de relatórios oficiais divulgados pelo Ministério da Saúde do Brasil<sup>2</sup>. Uma vez que o problema de interesse, nesta dissertação, está baseado nas séries temporais relacionadas aos óbitos diários registrados no Brasil, a variável  $u_k$ , na Equação (5.15) da metodologia proposta, é considerada como um sinal de ruído branco com baixa amplitude. O pré-processamento dos dados experimentais por análise espectral singular foi capaz de

<sup>2</sup> Disponível em: <<https://covid.saude.gov.br/>>

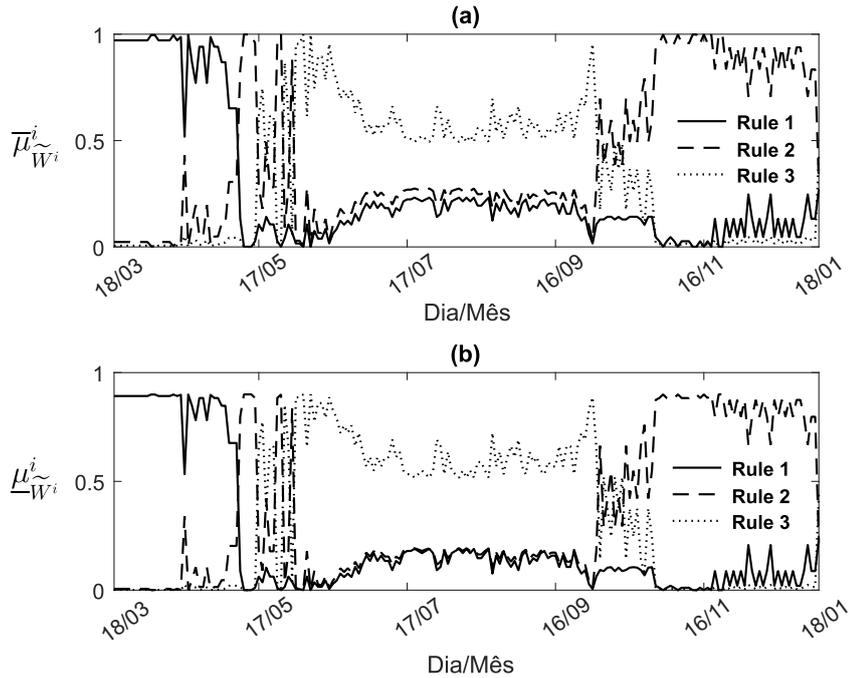


Figura 47 – Graus de ativação *fuzzy* instantâneos normalizados do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 18 de Março de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no estado de Maranhão: (a) Graus de ativação *fuzzy* instantâneos superiores, (b) Graus de ativação *fuzzy* instantâneos inferiores.

extrair os componentes não-observáveis associadas aos óbitos óbitos. A métrica *Variance Accounted For* (VAF) foi considerada como critério para avaliação do número adequado de componentes a serem extraídas, dentro da faixa de 2 a 15 componentes, para melhor representação dos dados experimentais, conforme mostrado na Figura 50. Conforme pode ser visto, considerando o balanço custo-benefício para a aplicação prática computacional da metodologia proposta, o número apropriado de componentes não-observáveis obtido foi  $\xi = 10$ , com valor de VAF de 99.98% de eficiência para a representação mais precisa possível dos dados experimentais e que, ao mesmo tempo, reduz a carga computacional do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. As componentes espectrais não-observáveis, extraídas a partir dos dados experimentais referentes aos óbitos diários registrados no Brasil, são mostradas na Figura 51. As partições dos dados experimentais relacionados aos óbitos diários registrados no Brasil foram definidas pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel, conforme mostrado na Figura 52, tal que a proposição do antecedente, o número de regras e a proposição do conseqüente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 foram estimadas com sucesso. Para implementação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 proposto, os seguintes parâmetros foram adotados: número de agrupamentos  $c = 3$ , expoente de ponderação intervalar  $\tilde{m} = [1.5, 2.3]$  e tolerância  $\mathcal{E} = 10^{-5}$ .

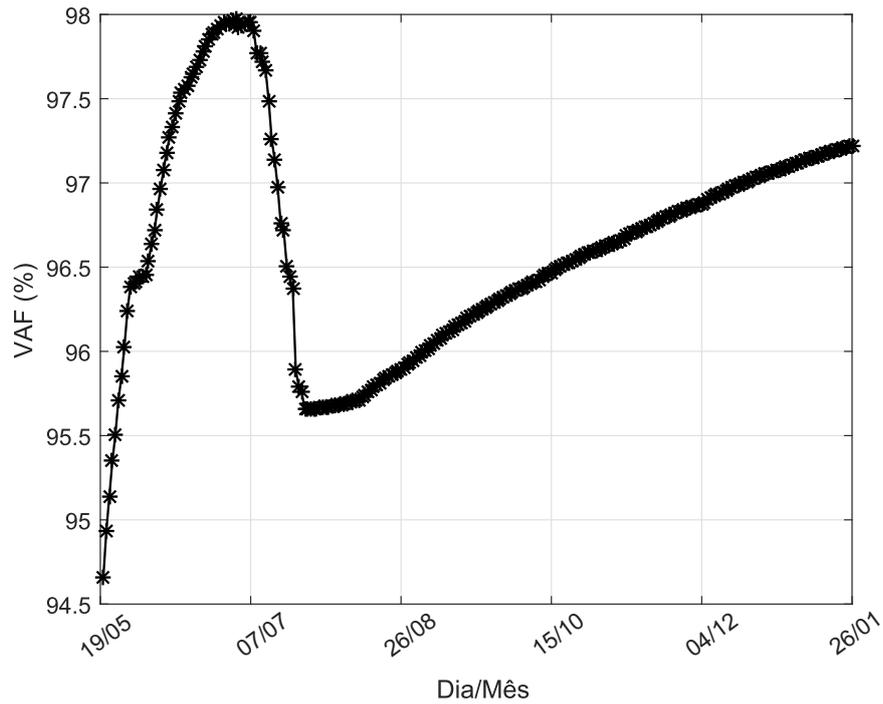


Figura 48 – Eficiência em tempo real, com base no critério de validação VAF, do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalo, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 26 de Janeiro de 2021, no estado de Maranhão.

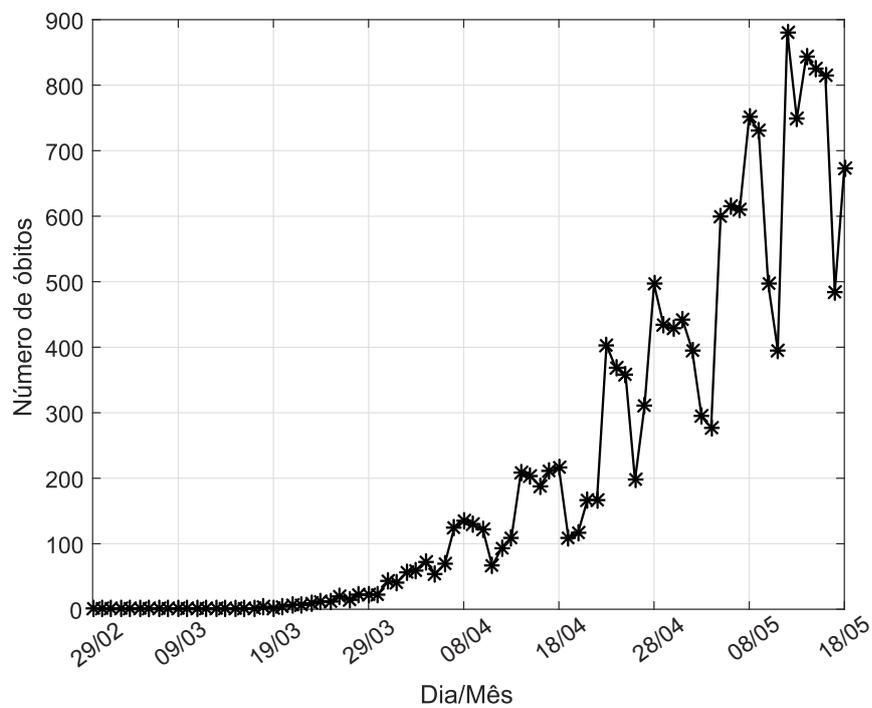


Figura 49 – Dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020 no Brasil.

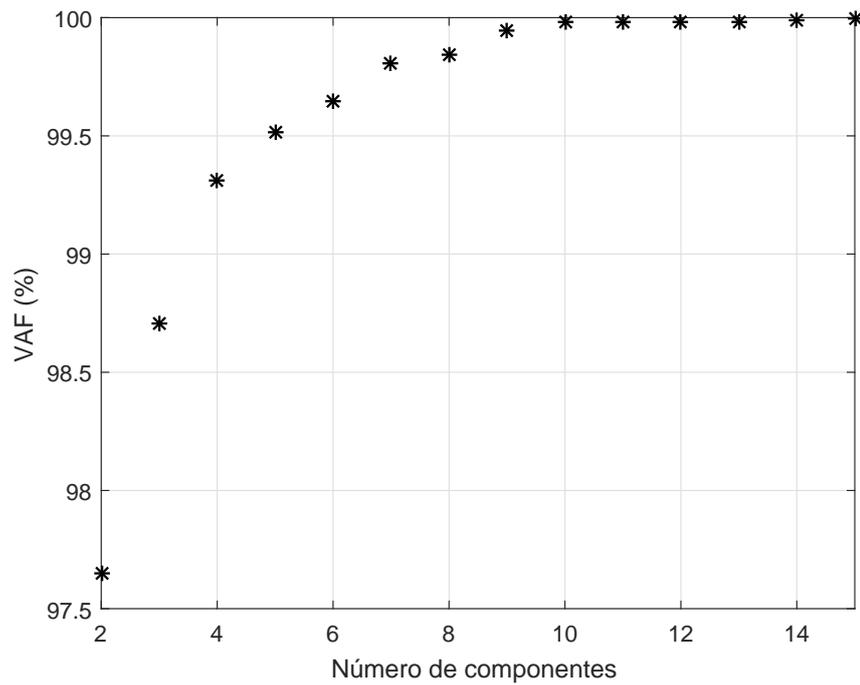


Figura 50 – Eficiência das componentes não-observáveis, de acordo com o critério VAF, para representar os dados experimentais de órbitas diárias registradas no Brasil.

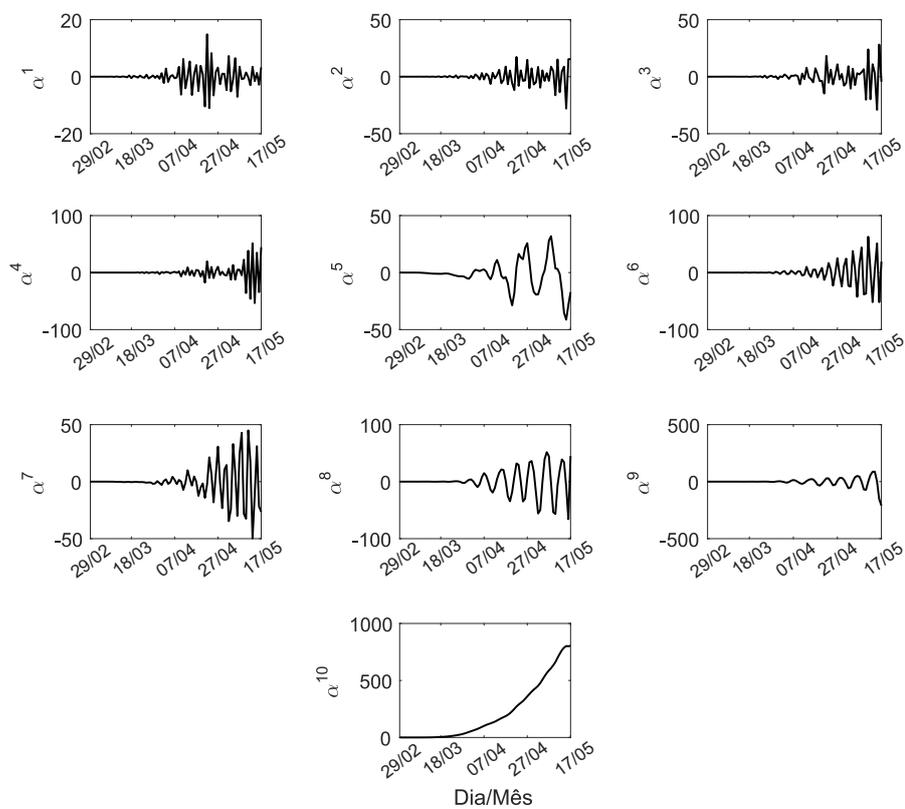


Figura 51 – Comportamento temporal das componentes não-observáveis espectrais  $\alpha^j | j=1, \dots, 10$ , as quais foram extraídas a partir dos dados experimentais de órbitas diárias registradas no Brasil.

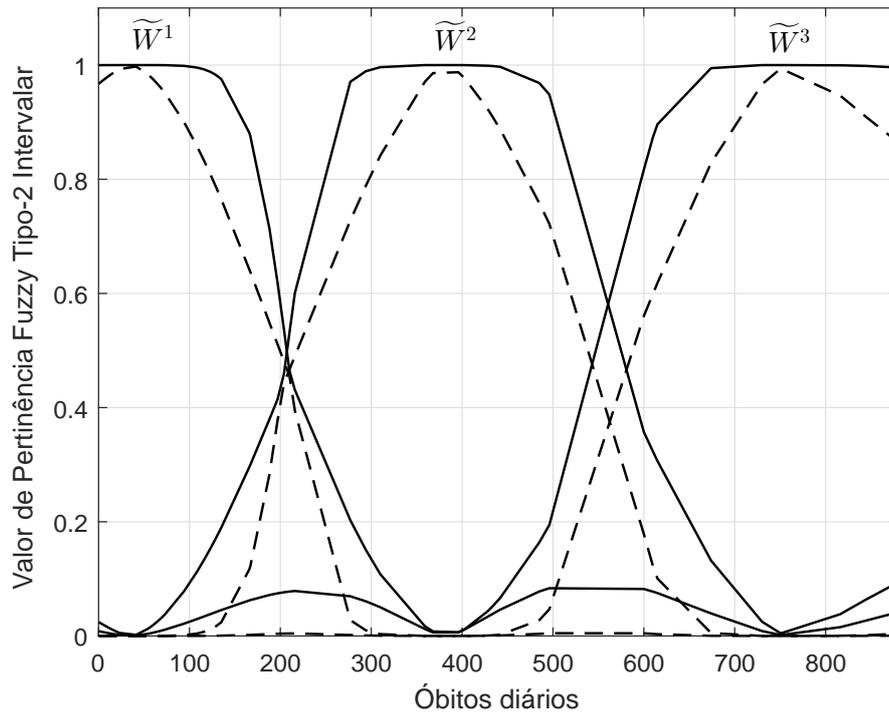


Figura 52 – Funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares estimadas a partir do agrupamento dos óbitos diários registrados no Brasil.

A implementação do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, para estimação paramétrica da proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, na Equação (5.15), considera as partições sobre os óbitos diários, mostradas na Figura 52, como critério de ponderação, e os valores de parâmetros:  $q = 1$ ,  $\gamma = 15$  e  $\beta = 15$ . De acordo com os dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil mostrados na Figura 49, as componentes não-observáveis pré-processadas mostradas na Figura 51 e os valores de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares mostrados na Figura 52, a estimação paramétrica inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 foi obtida pela etapa de treinamento. A região de confiança, conforme mostrada na Figura 53, obtida pela estimação inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, considera as incertezas estimadas pelas funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares mostradas na Figura 52, e ilustra a sua eficiência para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020 no Brasil.

A partir da região de confiança mostrada na Figura 53, foram estimadas as projeções de distribuição normal intervalares, estabelecendo um limite superior e outro inferior para a previsão de futuros registros de óbitos diários no Brasil. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado em sua estimação inicial pela etapa de treinamento a partir do conjunto de dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020 no Brasil, para previsão de futuros (validação) óbitos diários,

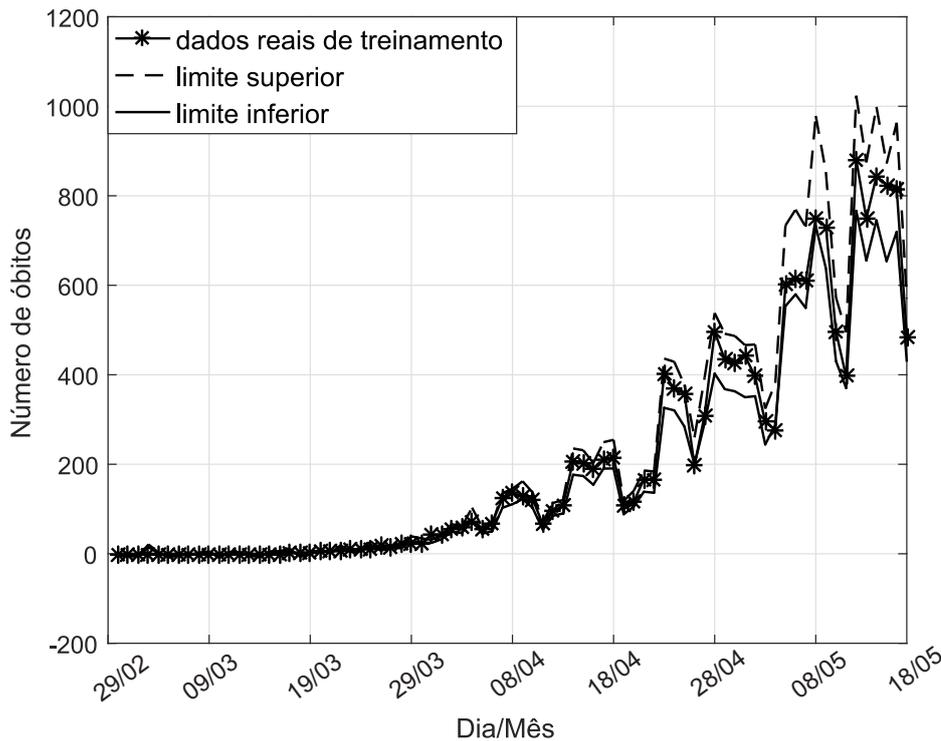
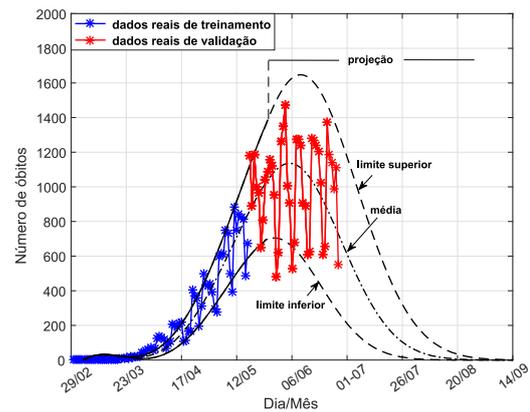
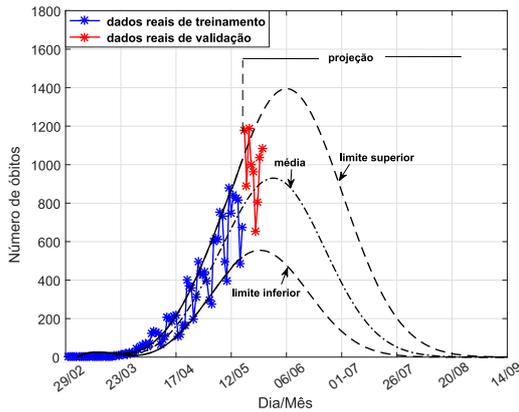


Figura 53 – Região de confiança gerada pelo filtro Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020, no Brasil.

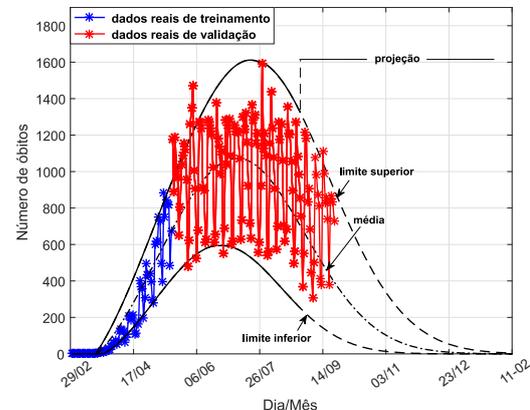
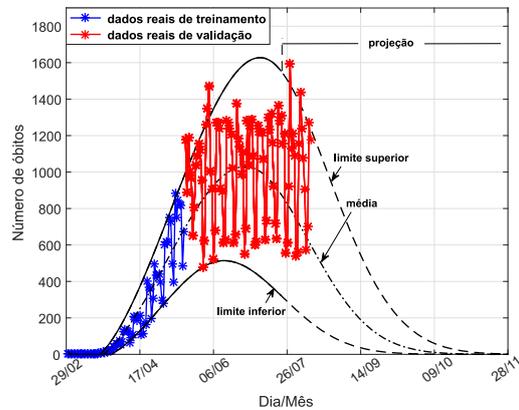
é mostrado na Figura 54a. Os resultados de atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão da propagação dinâmica da Covid-19 relacionada aos óbitos diários, são mostrados nas Figuras 54b-54d. Os resultados de previsão obtidos pelo ajuste de senoides amortecidas à saída intervalar do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 são mostrados nas Figuras 54e-54f. A previsão intervalar mostrada na Figura 54e, obtida em 13 de Outubro de 2020, indica o início da segunda onda da pandemia do novo coronavírus no Brasil para meados do mês de Novembro de 2020, o que foi confirmado pelas notificações de óbitos diários seguintes, conforme ilustrado na Figura 54f. A estimação das matrizes de ganho de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{K}}^i |_{i=1, \dots, 3}$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, é mostrada na Figura 55. A estimação recursiva das matrizes *fuzzy* tipo-2 intervalares  $\tilde{\mathbf{A}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^i$  e  $\tilde{\mathbf{D}}^i$ , com  $i = 1, \dots, 3$ , na proposição do consequente do sistema de inferência do filtro Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva, no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, são mostradas nas Figuras 56-59.

Os graus de ativação instantâneos superiores e inferiores relacionados ao sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante suas etapas de treinamento e recursiva, no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, são mostrados na Figura 60. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica



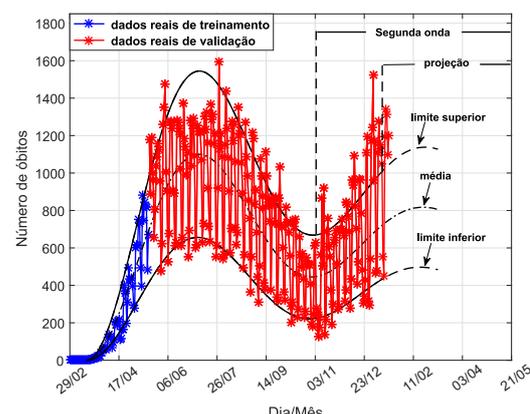
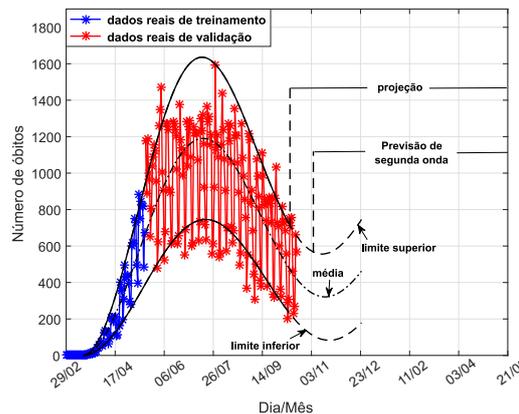
(a) Previsão no período de 19 de Maio a 27 de Maio de 2020 para o Brasil.

(b) Previsão no período de 28 de Maio a 30 de Junho de 2020 para o Brasil.



(c) Previsão no período de 24 de Julho a 14 de Agosto de 2020 para o Brasil.

(d) Previsão no período de 29 de Agosto a 25 de Setembro de 2020 para o Brasil.



(e) Previsão no período de 14 de Outubro a 31 de Outubro de 2020 para o Brasil.

(f) Previsão no período de 18 de Janeiro de 2021 em diante para o Brasil.

Figura 54 – Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação da COVID-19 relacionados aos óbitos diários registrados no Brasil: (a) atualização baseada nos dados de treinamento de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020; (b) atualização recursiva realizada em 27 de Maio de 2020; (c) atualização recursiva realizada em 23 de Julho de 2020; (d) atualização recursiva realizada em 28 de Agosto de 2020; (e) atualização recursiva realizada em 13 de Outubro de 2020; (f) atualização recursiva realizada em 18 de Janeiro de 2021.

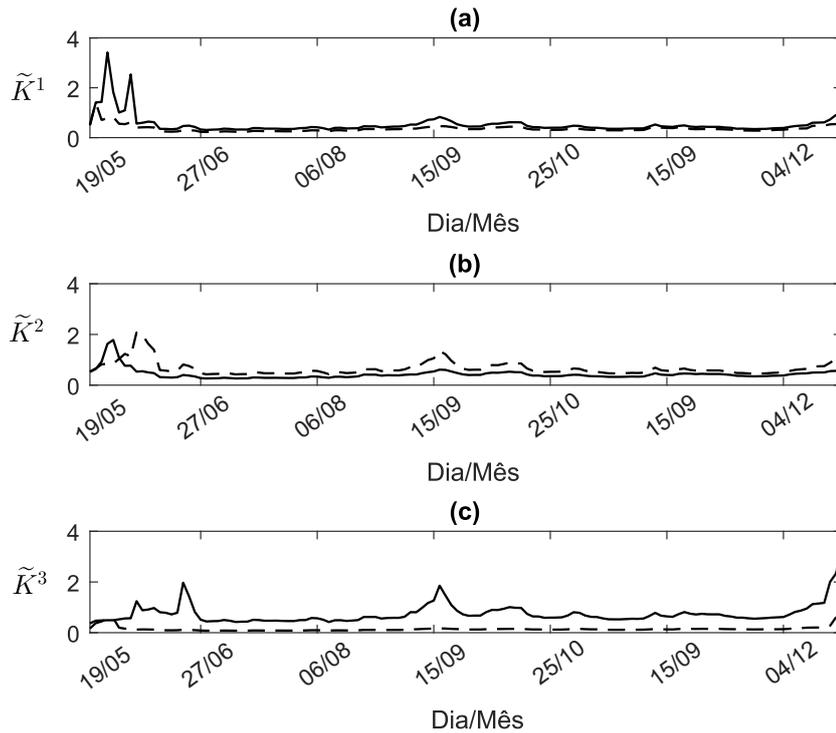


Figura 55 – Ganhos de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

da COVID-19, relacionados aos óbitos diários registrados no Brasil, no período de 19 de Maio de 2020 a 26 de Janeiro de 2021, foi validada pelo critério *Variance Accounted For* (VAF), conforme mostrado na Figura 61.

### 7.2.1 Análise Comparativa e Discussões

Nesta seção, uma discussão mais detalhada sobre os resultados apresentados na Seção 7.2, de acordo com a análise comparativa da metodologia proposta nesta dissertação com as abordagens em (FEROZE, 2020; HAZARIKA; GUPTA, 2020; SAHAI et al., 2020; MOREAU, 2020; DJILALI; GHANBARI, 2020) bem como com os modelos de aprendizagem de máquina LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*), ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) e com a rede neural recorrente do tipo LSTM (*Long Short-Term Memory*), considerando as métricas RMSE (*Root Mean Square Error*), MAE (*Mean Absolute Error*), RMSPE (*Root Mean Square Percentage Error*),  $R^2$  (coeficiente de determinação), MAD (*Median Absolute Deviation*) e MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), é apresentada.

A abordagem em (FEROZE, 2020) é baseada em modelos de séries temporais com estrutura Bayesiana para a previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil,

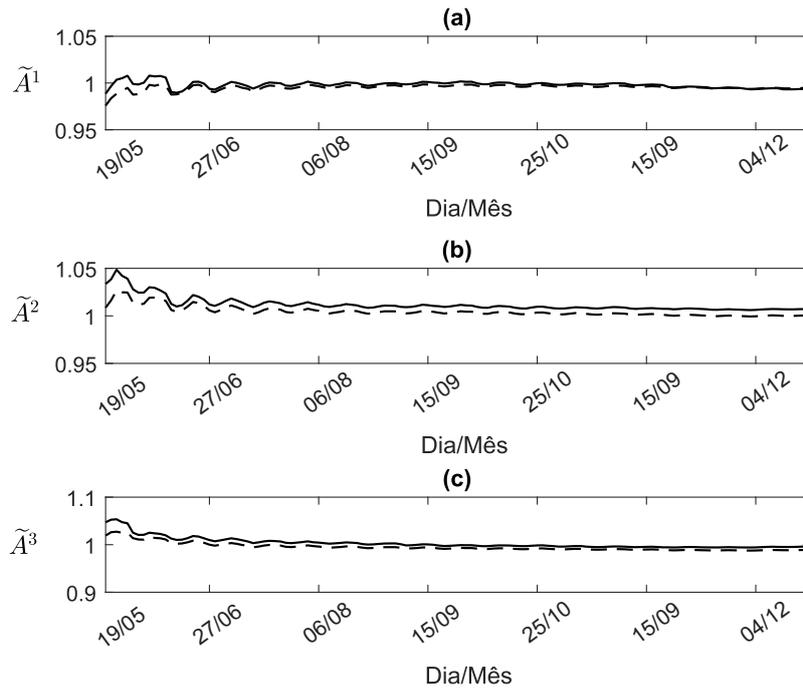


Figura 56 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{A}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

dentro de um horizonte de 30 dias. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, em comparação com a abordagem proposta em (FEROZE, 2020), é mostrada na Tabela 5. Conforme pode ser visto, embora o modelo bayesiano proposto em (FEROZE, 2020) seja adaptativo, apresenta um desempenho inferior em relação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, uma vez que é baseado em um mecanismo de inferência bayesiana influenciado por distribuições de probabilidade previamente calculadas, o que contribui para o aumento dos erros de previsão (BERGER, 1993).

Tabela 5 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e a abordagem em (FEROZE, 2020) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
abordagem em (FEROZE, 2020)	3669.000	2533	0.0873	0.657	22080	0.00820
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	531.472	97	0.0249	0.989	6298	0.00234

Na abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) é proposta a rede *Wavelet-Coupled Random Vector Functional Link* (WCRVFL), baseada em transformada *wavelet*, para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil, dentro de um horizonte de 60 dias, usando um procedimento de normalização do conjunto de dados a partir da seguinte

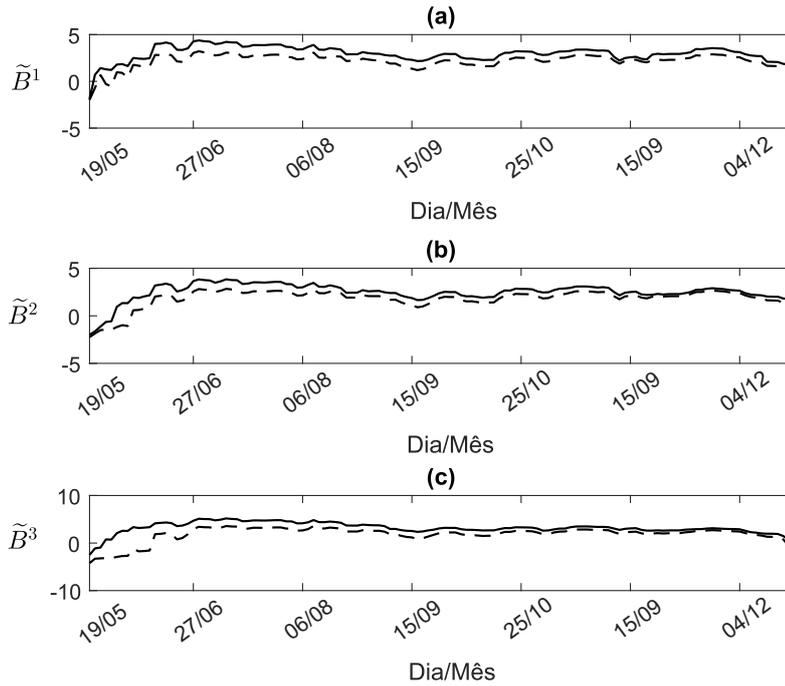


Figura 57 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{\mathbf{B}}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

formulação:

$$\check{z}_k = \frac{z_k - \min(\mathbf{Z})}{\max(\mathbf{Z}) - \min(\mathbf{Z})}, \quad k = 1, 2, \dots, N_b \quad (7.2)$$

onde  $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_{N_b}]^T$  é o conjunto de dados experimentais,  $\check{z}_k$  é o valor normalizado de  $z_k$ , e  $\min(\mathbf{Z})$  e  $\max(\mathbf{Z})$  são os valores máximo e mínimo de  $\mathbf{Z}$ , respectivamente. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, comparado à abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020), é mostrada na Tabela 6. Conforme pode ser visto, uma vez que a abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) utiliza diferentes tipos de transformada *wavelet* para processar a não estacionariedade do conjunto de dados experimentais, esta apresenta resultados competitivos em relação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, porém seu desempenho é ligeiramente inferior devido à sua limitação quanto a determinação do número ótimo de nós da camada oculta da rede WCRVFL, o ajuste da escala da faixa de randomização uniforme para o estimador *wavelet* e quanto a precisão dos dados disponíveis.

A abordagem em (SAHAI et al., 2020) é baseada no modelo *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) para a previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil, dentro de um horizonte de 77 dias. A eficiência do filtro Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, em comparação com a abordagem em (SAHAI et al., 2020), é mostrada na Tabela 7. A abordagem em (SAHAI et al., 2020) é rápida na velocidade de processamento,

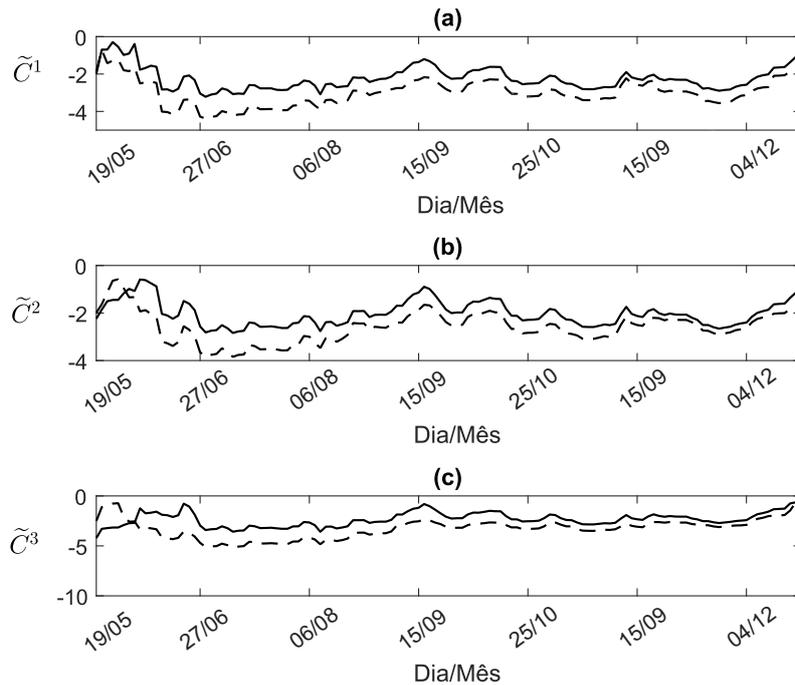


Figura 58 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{C}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

Tabela 6 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e a abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020) para previsão da propagação dinâmica do COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
abordagem em (HAZARIKA; GUPTA, 2020)	0.006190	0.004880	0.2359	0.999450	0.176	0.00745
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	0.003388	0.000701	0.00339	0.999677	0.1655	0.00701

mas apresenta desempenho inferior em relação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar por considerar apenas características lineares para modelagem da propagação dinâmica da COVID-19, o que tende a aumentar os erros de previsão para dados epidemiológicos variantes no tempo (ZHANG, 2003). Diferentemente da abordagem em (SAHAI et al., 2020), o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar considera uma compensação paralela e distribuída associada a cada uma das regiões de operação intervalares definidas sobre o conjunto de dados experimentais para melhor aproximar as flutuações variantes no tempo da propagação dinâmica do COVID-19.

A abordagem em (MOREAU, 2020) é baseada na modelagem estatística de novos casos diários e novos óbitos diários causados por COVID-19 usando a distribuição de probabilidade de Weibull, para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, em comparação com a abordagem em (MOREAU, 2020), é mostrada na Tabela 8. A abordagem em (MOREAU, 2020),

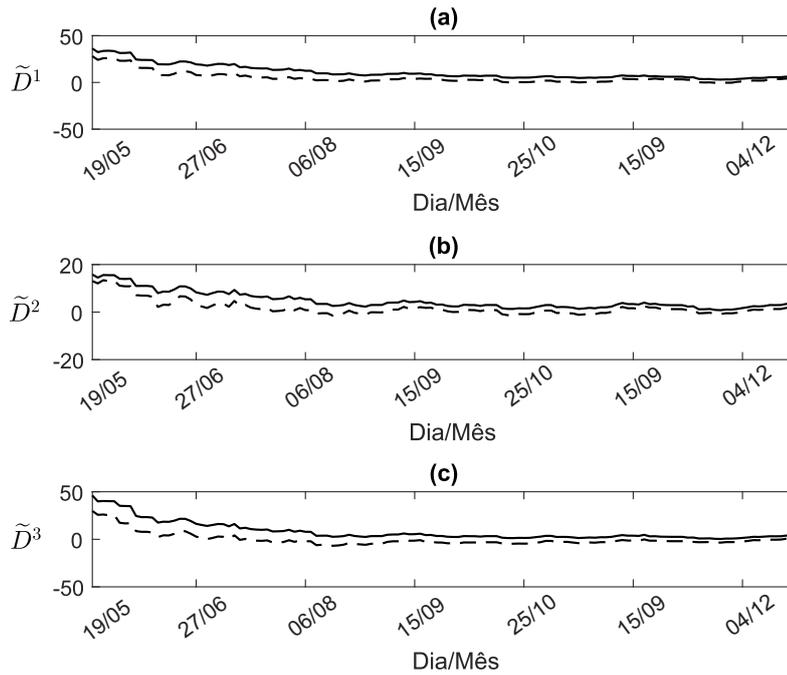


Figura 59 – Matriz *fuzzy* tipo-2 intervalar  $\tilde{D}^i$ , durante a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Regra 1, (b) Regra 2, (c) Regra 3.

Tabela 7 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e a abordagem em (SAHAI et al., 2020) para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
abordagem em (SAHAI et al., 2020)	922.83	170.77	0.00407	0.609	33614	3.701
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	563.15	104.21	0.002486	0.998	97	0.0025494

embora utilize a distribuição Weibull, a qual é adequada para a modelagem de dados experimentais da vida real, apresenta resultados ligeiramente inferiores em comparação com o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, uma vez que não considera a variabilidade na dinâmica do conjunto de dados experimentais para atualizar as previsões obtidas para a propagação da COVID-19 (LAI; MURTHY; XIE, 2006). Por outro lado, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar apresenta maior eficiência devido ao seu mecanismo de parametrização recursiva para rastreamento adaptativo e previsão em tempo real do conjunto de dados experimentais.

A abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020) é baseada em um modelo SEIR (Susceptível - Exposto - Infectado - Recuperado) estruturado pela idade dos indivíduos para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil. A análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e a abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020) é mostrada na Tabela 9. A abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020), embora

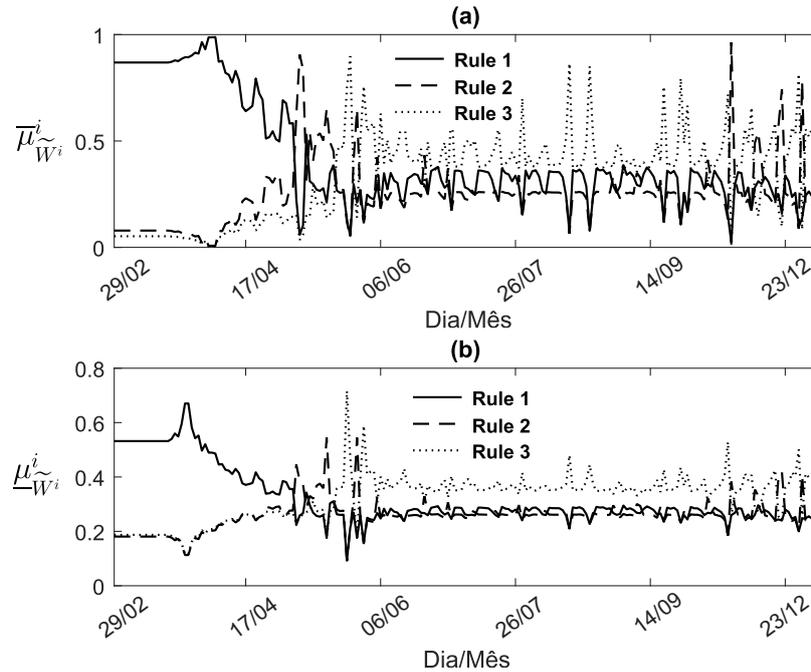


Figura 60 – Graus de ativação *fuzzy* instantâneos normalizados do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 29 de Fevereiro a 18 de Janeiro de 2021, no Brasil: (a) Graus de ativação *fuzzy* instantâneos normalizados superiores, (b) Graus de ativação *fuzzy* instantâneos normalizados inferiores.

Tabela 8 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e a abordagem em (MOREAU, 2020) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
abordagem em (MOREAU, 2020)	2554.71	939.14	1.092	0.87	19849	0.0217
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	2265.9	832.97	0.9687	0.9809	17605	0.0193

considere o efeito da idade dos indivíduos na taxa de mortalidade pela COVID-19 para melhor adequação do modelo SEIR, apresenta baixa eficiência em comparação ao filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar uma vez que não considera as incertezas inerentes ao conjunto de dados experimentais e considera uma taxa de transmissão da COVID-19 constante ao longo do período da pandemia (MARTCHEVA, 2015). O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar é mais preditivo para o comportamento real do conjunto de dados epidemiológicos no Brasil que a abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020), devido à sua medida de similaridade adaptativa para definição de regiões de operação *fuzzy* intervalares que melhor caracterizam a dinâmica e as incertezas do conjunto de dados epidemiológicos experimentais.

Considerando os resultados de previsão disponíveis nas abordagens (HAZARIKA;

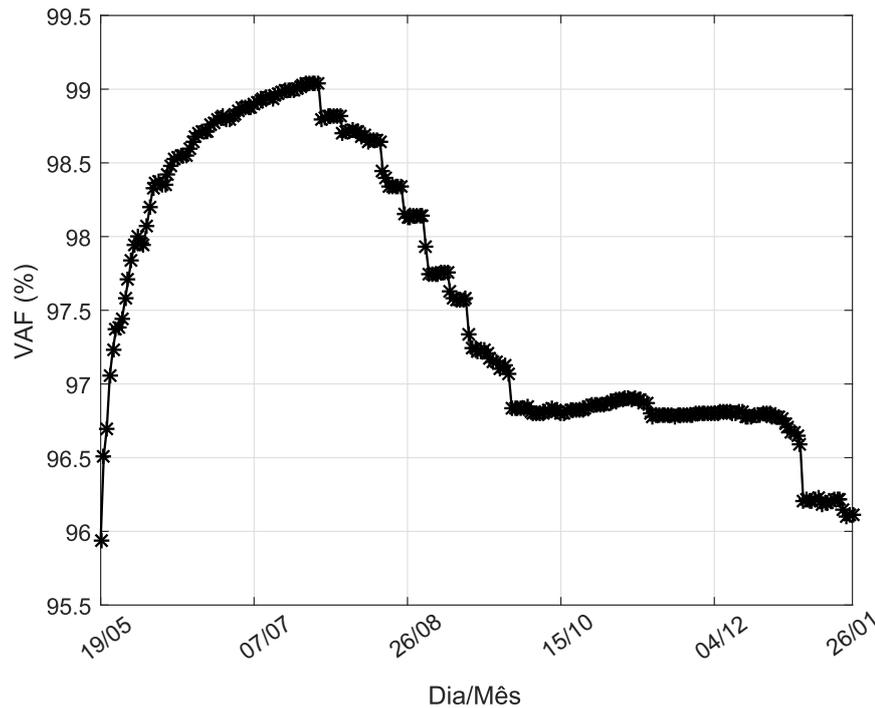


Figura 61 – Eficiência em tempo real, com base no critério de validação VAF, do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19 relacionados aos óbitos diários no período de 19 de Maio de 2020 a 26 de Janeiro de 2021, no Brasil.

Tabela 9 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e a abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil.

Metodologia	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
abordagem em (DJILALI; GHANBARI, 2020)	3052.4	943.71	0.8183	0.85	22542	0.0579
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	2325.6	753.9	0.6730	0.9984	510.73	0.0248

(GUPTA, 2020; SAHAI et al., 2020), no sentido de ilustrar de forma clara e intuitiva o desempenho de previsão de cada método em comparação com o desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar proposto, de acordo com o número de casos acumulados de COVID-19 no Brasil, uma análise comparativa é mostrada na Figura 62.

Por fim, a análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e os modelos de aprendizado de máquina LASSO, ARIMA e a rede neural recorrente do tipo LSTM, para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil, dentro de um horizonte de 10 dias, é mostrada na Tabela 10.

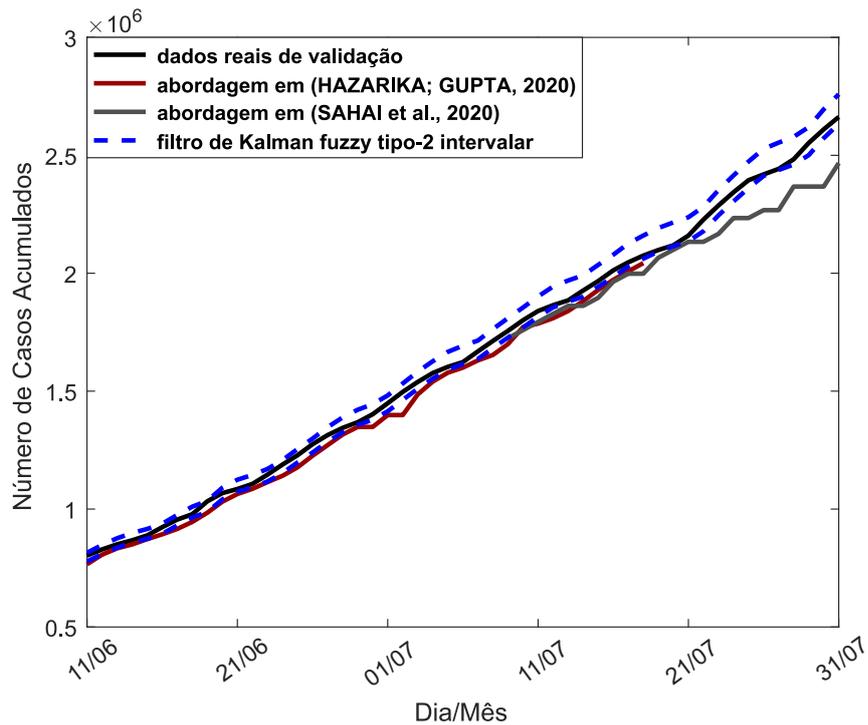


Figura 62 – Análise comparativa dos resultados de previsão entre as abordagens (HAZARIKA; GUPTA, 2020; SAHAI et al., 2020) e o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar proposto, de acordo com o número de casos acumulados de COVID-19 no Brasil.

Tabela 10 – Análise comparativa entre o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar e os modelos de aprendizagem de máquina LASSO, ARIMA e rede neural recorrente LSTM para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

Modelo	RMSE	MAE	RMSPE	R <sup>2</sup>	MAD	MAPE(%)
LASSO	191.5600	163.4643	2.5081	0.7652	234.1	0.1283
ARIMA	203.0832	140.9561	2.6938	0.3680	245.7	0.1106
LSTM	116.0065	94.9875	1.3265	0.8290	193.4	0.0746
filtro de Kalman <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar	10.3586	3.9000	1.0542	0.9984	108.3	0.0427



Parte IV

CONTEXTUALIZAÇÃO FINAL



## 8 Considerações Finais

Nesta dissertação, uma abordagem para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares, baseada em dados experimentais, foi proposta. A metodologia adotada permite atualizar recursivamente os parâmetros do modelo do filtro proposto em tempo real de modo a adaptá-lo às mudanças dinâmicas apresentadas pelo conjunto de dados, bem como permite o processamento das incertezas inerentes à regiões de operação intervalares, estabelecendo uma região de confiança de possíveis soluções como saída do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.

Uma formulação matemática *fuzzy* tipo-2 foi proposta para o algoritmo de agrupamento Gustafsson-Kessel a fim de realizar a estimação paramétrica da proposição do antecedente das regras *fuzzy*. Ainda, uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) foi desenvolvida, em função de componentes espectrais não-observáveis, para identificação dos parâmetros dos submodelos lineares no espaço de estados, definidos no consequente das regras *fuzzy*, baseada no método de fatoração QR, o que garante robustez numérica na estimação dos parâmetros de Markov e evita problemas relacionados a estabilidade e tempo de convergência do algoritmo.

Os resultados computacionais mostraram a eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar projetado, devido ao pré-processamento espectral realizado, no processo de filtragem e rastreamento do conjunto de dados experimentais obtidos a partir do atrator caótico de Lorenz, em ambiente altamente ruidoso, quando comparado com outra abordagem amplamente citada na literatura. A metodologia proposta também foi aplicada ao rastreamento de uma trajetória de referência pelas variáveis de estado do atrator caótico de Chen, em ambiente ruidoso, a partir de dados experimentais com falha, demonstrando maior eficiência quando comparada a outras abordagens presentes na literatura.

A aplicabilidade do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar projetado foi verificada por meio dos resultados experimentais obtidos para o rastreamento adaptativo e previsão em tempo real da propagação dinâmica da COVID-19 no estado do Maranhão e Brasil, apresentando melhor desempenho em relação à outras abordagens propostas na literatura neste contexto e modelos de aprendizagem de máquina, devido seu mecanismo de atualização recursivo e o tratamento de incertezas inerentes a dados epidemiológicos experimentais. Nesta aplicação, especificamente, a metodologia proposta contribui para preencher uma lacuna no que diz respeito ao tratamento e análise dos dados epidemiológicos, com o objetivo de auxiliar os profissionais da saúde, os órgãos governamentais de saúde, e demais setores da sociedade, em caráter preditivo, no diagnóstico sobre a forma e duração da propagação das ondas de infecção epidemiológicas. Assim, com base nos resultados de

previsão é possível tomar decisões e estabelecer planejamentos, com antecipação, no sentido de prevenir maiores danos causados por possíveis avanços epidemiológicos.

## 9 Propostas de Pesquisas Futuras

A metodologia proposta nesta dissertação para projeto de filtros de Kalman utilizando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares, baseado em decomposição espectral de dados experimentais, tendo em vista os resultados alcançados, abre espaço para o desenvolvimento de trabalhos futuros, considerando os seguintes aspectos de interesse:

- Desenvolvimento da metodologia proposta nesta dissertação no contexto de sistemas *fuzzy* tipo-2 evolutivos, a fim de adaptar não somente os parâmetros do modelo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar como também sua estrutura.



## Referências

- ABDOLLAHZADE, M. et al. A new hybrid enhanced local linear neuro-fuzzy model based on the optimized singular spectrum analysis and its application for nonlinear and chaotic time series forecasting. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 295, p. 107–125, feb 2015. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.
- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas*. [S.l.]: Editora UFMG, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 43, 45 e 110.
- ANTSAKLIS, P. J.; ASTOLFI, A. Realizations in linear systems theory. In: *Encyclopedia of Systems and Control*. [S.l.]: Springer London, 2020. p. 1–5. Citado na página 80.
- ANTSAKLIS, P. J.; LIU, D. *Stability and Control of Dynamical Systems with Applications*. [S.l.]: Birkhäuser, 2003. Citado na página 91.
- ASL, R. M. et al. Fuzzy-based parameter optimization of adaptive unscented kalman filter: Methodology and experimental validation. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, p. 54887–54904, 2020. Citado na página 34.
- BABUSKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. [S.l.]: Springer, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.
- BENDAT, J. S. *Nonlinear System Techniques*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. Citado na página 35.
- BENHAMIDA, I. et al. Torque ripple minimization in predictive torque control method of PMSM drive using adaptive fuzzy logic modulator and EKF estimator. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer Science and Business Media LLC, v. 30, n. 6, p. 1007–1018, aug 2019. Citado na página 34.
- BERGER, J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. [S.l.]: Springer New York, 1993. ISBN 0387960988. Citado na página 121.
- BISHOP, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado na página 112.
- BONYADI, M. R.; MICHALEWICZ, Z. Analysis of stability, local convergence, and transformation sensitivity of a variant of the particle swarm optimization algorithm. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 20, n. 3, p. 370–385, jun 2016. Citado na página 35.
- BOUHENTALA, M.; GHANAI, M.; CHAFAA, K. Interval-valued membership function estimation for fuzzy modeling. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 361, p. 101–113, apr 2019. Citado na página 33.
- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2012. Citado na página 43.
- CALLIER, F. M.; DESOER, C. A. Realization theory. In: *Springer Texts in Electrical Engineering*. [S.l.]: Springer New York, 1991. p. 295–314. Citado na página 80.

- CASTILLO, O. *Type-2 Fuzzy Logic in Intelligent Control Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 3642246621. Citado na página 61.
- CASTILLO, P. M. O. *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2007. ISBN 9783540762843. Citado na página 55.
- CHAN, S.-C. et al. A new variable forgetting factor-based bias-compensation algorithm for recursive identification of time-varying multi-input single-output systems with measurement noise. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 69, n. 7, p. 4555–4568, jul 2020. Citado na página 35.
- CHAOMURILIGE; YU, J.; YANG, M.-S. Deterministic annealing gustafson-kessel fuzzy clustering algorithm. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 417, p. 435–453, nov 2017. Citado na página 92.
- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 49, 50, 51, 74 e 91.
- CHEN, G.; UETA, T. YET ANOTHER CHAOTIC ATTRACTOR. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 09, n. 07, p. 1465–1466, jul 1999. Citado na página 92.
- DJILALI, S.; GHANBARI, B. Coronavirus pandemic: A predictive analysis of the peak outbreak epidemic in south africa, turkey, and brazil. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier BV, v. 138, p. 109971, sep 2020. Citado 5 vezes nas páginas 21, 120, 124, 125 e 126.
- ELSNER, J. B. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. *Journal of the American Statistical Association*, Informa UK Limited, v. 97, n. 460, p. 1207–1208, dec 2002. Citado na página 65.
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. de O. Multivariable state-space recursive identification algorithm based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer Science and Business Media LLC, v. 30, n. 6, p. 921–942, oct 2019. Citado na página 35.
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. de O. State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multivariable dynamic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 394, p. 1–39, sep 2020. Citado na página 33.
- EYOH, I. et al. Hybrid learning for interval type-2 intuitionistic fuzzy logic systems as applied to identification and prediction problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 5, p. 2672–2685, oct 2018. Citado na página 34.
- FEROZE, N. Forecasting the patterns of COVID-19 and causal impacts of lockdown in top five affected countries using bayesian structural time series models. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier BV, v. 140, p. 110196, nov 2020. Citado 3 vezes nas páginas 21, 120 e 121.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1997. Citado na página 91.

GIL, P.; OLIVEIRA, T.; PALMA, L. Adaptive neuro-fuzzy control for discrete-time nonaffine nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 27, n. 8, p. 1602–1615, aug 2019. Citado na página 33.

GILBERT, J. A. et al. Probabilistic uncertainty analysis of epidemiological modeling to guide public health intervention policy. *Epidemics*, Elsevier BV, v. 6, p. 37–45, mar 2014. Citado na página 35.

GOLYANDINA, N.; ZHIGLJAVSKY, A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.

GOMEZ-GARCIA, R. et al. Lossy signal-interference filters and applications. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 68, n. 2, p. 516–529, feb 2020. Citado na página 33.

GREWAL, A. P. A. M. S. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB [With CDROM]*. [S.l.]: WILEY, 2008. ISBN 0470173661. Citado na página 43.

GROTAS, S. et al. Power systems topology and state estimation by graph blind source separation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 67, n. 8, p. 2036–2051, apr 2019. Citado na página 43.

HANGOS, K. M.; BOKOR, J.; SZEDERKENYI, G. Input-output models and realization theory. In: *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004. p. 73–96. Citado na página 80.

HAZARIKA, B. B.; GUPTA, D. Modelling and forecasting of COVID-19 spread using wavelet-coupled random vector functional link networks. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 96, p. 106626, nov 2020. Citado 8 vezes nas páginas 19, 21, 120, 121, 122, 123, 126 e 127.

HEINTZMAN, N.; KLEINBERG, S. Using uncertain data from body-worn sensors to gain insight into type 1 diabetes. *Journal of Biomedical Informatics*, Elsevier BV, v. 63, p. 259–268, oct 2016. Citado na página 35.

HENDRICKS, E.; JANNERUP, O.; SORENSEN, P. H. *Linear Systems Control*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. Citado na página 35.

HOSSEIN et al. *Singular Spectrum Analysis of Biomedical Signals*. [S.l.]: Taylor & Francis Ltd., 2015. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.

HÖPPNER, F. et al. *Fuzzy Cluster Analysis: Methods for Classification, Data Analysis and Image Recognition*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. ISBN 0471988642. Citado na página 92.

HUANG, Y.; ZHANG, P.; ZHAO, W. Novel grid multiwing butterfly chaotic attractors and their circuit design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 62, n. 5, p. 496–500, may 2015. Citado na página 81.

HURTIK, P.; MOLEK, V.; HULA, J. Data preprocessing technique for neural networks based on image represented by a fuzzy function. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 7, p. 1195–1204, jul 2020. Citado na página 36.

HWANG, C.-L.; WU, H.-M.; LAI, J.-Y. On-line obstacle detection, avoidance, and mapping of an outdoor quadrotor using EKF-based fuzzy tracking incremental control. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, p. 160203–160216, 2019. Citado na página 33.

JUANG, J. N. *Applied System Identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. Citado 11 vezes nas páginas 19, 49, 50, 51, 74, 80, 91, 92, 145, 150 e 151.

JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 8, n. 5, p. 620–627, sep 1985. Citado na página 52.

JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters: Theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.

JUANG, M. Q. P. J.-N. *Identification and Control of Mechanical Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 0521783550. Citado na página 49.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, ASME International, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar 1960. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 43.

KARNIK, N.; MENDEL, J. Introduction to type-2 fuzzy logic systems. In: *1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence (Cat. No.98CH36228)*. [S.l.]: IEEE, 1998. Citado na página 55.

KARNIK, N.; MENDEL, J.; LIANG, Q. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, n. 6, p. 643–658, 1999. Citado na página 55.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Centroid of a type-2 fuzzy set. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 132, n. 1-4, p. 195–220, feb 2001. Citado na página 62.

KAYACAN, E. *Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design*. Tese (Doutorado) — Institute for Graduate Studies in Science and Engineerin, 2011. Citado na página 62.

KHAIRALLA, M.; NING, X.; AL-JALLAD, N. Modelling and optimisation of effective hybridisation model for time-series data forecasting. *The Journal of Engineering*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 2018, n. 2, p. 117–122, feb 2018. Citado na página 35.

KHANESAR, M. A. et al. Extended kalman filter based learning algorithm for type-2 fuzzy logic systems and its experimental evaluation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 59, n. 11, p. 4443–4455, nov 2012. Citado na página 35.

- KHAYYAM, H. et al. A novel hybrid machine learning algorithm for limited and big data modeling with application in industry 4.0. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, p. 111381–111393, 2020. Citado na página 35.
- LAI, C.-D.; MURTHY, D.; XIE, M. Weibull distributions and their applications. In: *Springer Handbook of Engineering Statistics*. [S.l.]: Springer London, 2006. p. 63–78. Citado na página 124.
- LAN, L. T. H. et al. A new complex fuzzy inference system with fuzzy knowledge graph and extensions in decision making. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, p. 164899–164921, 2020. Citado na página 36.
- LAWRENCE, D. A.; WILLIAMS, R. L. *Linear State-Space Control Systems*. [S.l.]: WILEY, 2007. ISBN 0471735558. Citado na página 49.
- LIANG, Q.; MENDEL, J. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 5, p. 535–550, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 55.
- LIN, C.-T. et al. An interval type-2 neural fuzzy system for online system identification and feature elimination. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 7, p. 1442–1455, jul 2015. Citado na página 35.
- LIU, W.; LIU, Y.; BUCKNALL, R. A robust localization method for unmanned surface vehicle (USV) navigation using fuzzy adaptive kalman filtering. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, p. 46071–46083, 2019. Citado na página 33.
- LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. [S.l.]: Wiley, 1979. Citado na página 91.
- MA, Z.; MA, H. Adaptive fuzzy backstepping dynamic surface control of strict-feedback fractional-order uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 1, p. 122–133, jan 2020. Citado na página 35.
- MACK, W.; HABETS, E. A. P. Deep filtering: Signal extraction and reconstruction using complex time-frequency filters. *IEEE Signal Processing Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 27, p. 61–65, 2020. Citado na página 33.
- MANDIC. *Recurrent Neural Networks for Prediction*. John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0471495174. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/4287763/mandic\\_recurrent\\_neural\\_networks\\_for\\_prediction.html](https://www.ebook.de/de/product/4287763/mandic_recurrent_neural_networks_for_prediction.html)>. Citado na página 111.
- MARSLAND, S. *Machine Learning: An Algorithmic Perspective, Second Edition*. CRC PR INC, 2014. ISBN 1466583282. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/23193906/stephen\\_marsland\\_machine\\_learning\\_an\\_algorithmic\\_perspective\\_second\\_edition.html](https://www.ebook.de/de/product/23193906/stephen_marsland_machine_learning_an_algorithmic_perspective_second_edition.html)>. Citado na página 109.
- MARTCHEVA, M. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. [S.l.]: Springer US, 2015. ISBN 1489976116. Citado na página 125.

MARTYNYUK, A. A.; YU., A.; MARTYNYUK-CHERNIENKO. *Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control*. [S.l.]: CRC Press, 2019. Citado na página 35.

MATÍÁ, F. et al. The fuzzy kalman filter: Improving its implementation by reformulating uncertainty representation. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 402, p. 78–104, jan 2021. Citado na página 34.

MENDEL, J.; JOHN, R. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, n. 2, p. 117–127, apr 2002. Citado na página 56.

MENDEL, J. M. Comparing the performance potentials of interval and general type-2 rule-based fuzzy systems in terms of sculpting the state space. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 27, n. 1, p. 58–71, jan 2019. Citado na página 33.

MOREAU, V. H. Forecast predictions for the COVID-19 pandemic in brazil by statistical modeling using the weibull distribution for daily new cases and deaths. *Brazilian Journal of Microbiology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 51, n. 3, p. 1109–1115, aug 2020. Citado 4 vezes nas páginas 21, 120, 123 e 125.

MOSS, F.; MCCLINTOCK, P. V. E. (Ed.). *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. Citado na página 35.

NAIK, V.; SINGH, S. P. A novel interval type-2 fuzzy-based direct torque control of induction motor drive using five-level diode-clamped inverter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 68, n. 1, p. 149–159, jan 2021. Citado na página 56.

NUGROHO, S. A.; TAHA, A. F.; QI, J. Robust dynamic state estimation of synchronous machines with asymptotic state estimation error performance guarantees. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 35, n. 3, p. 1923–1935, may 2020. Citado na página 43.

PÁRAMO-CARRANZA, L. A. et al. Discrete-time kalman filter for takagi–sugeno fuzzy models. *Evolving Systems*, Springer Science and Business Media LLC, v. 8, n. 3, p. 211–219, apr 2017. Citado 12 vezes nas páginas 13, 14, 21, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89 e 91.

PHAN, M.; JUANG, J.-N.; LONGMAN, R. *On Markov Parameters in System Identification*. [S.l.], 1991. Citado na página 52.

PIRES, D. S.; SERRA, G. L. Methodology for modeling fuzzy kalman filters of minimum realization from evolving clustering of experimental data. *ISA Transactions*, Elsevier BV, v. 105, p. 1–23, oct 2020. Citado na página 36.

PIRES, D. S.; SERRA, G. L. de O. Methodology for evolving fuzzy kalman filter identification. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 3, p. 793–800, feb 2019. Citado na página 34.

QI, R.; TAO, G.; JIANG, B. *Fuzzy System Identification and Adaptive Control*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.

- SAHAI, A. K. et al. ARIMA modelling & forecasting of COVID-19 in top five affected countries. *Diabetes & Metabolic Syndrome: Clinical Research & Reviews*, Elsevier BV, v. 14, n. 5, p. 1419–1427, sep 2020. Citado 8 vezes nas páginas [19](#), [21](#), [120](#), [122](#), [123](#), [124](#), [126](#) e [127](#).
- SATO-ILIC, M.; JAIN, L. C. *Innovations in Fuzzy Clustering: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado na página [91](#).
- SERRA, G. L. de O. (Ed.). *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*. [S.l.]: InTech, 2018. Citado 2 vezes nas páginas [33](#) e [91](#).
- SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. *Time Series Analysis and Its Applications*. [S.l.]: Springer New York, 2000. Citado na página [112](#).
- TAGHAVIFAR, H. EKF estimation based PID type-2 fuzzy control of electric cars. *Measurement*, Elsevier BV, p. 108557, oct 2020. Citado na página [35](#).
- TANG, G. et al. A novel wind speed interval prediction based on error prediction method. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 11, p. 6806–6815, nov 2020. Citado na página [35](#).
- TOMÁS-RODRÍGUEZ, M.; BANKS, S. P. *Linear, Time-varying Approximations to Nonlinear Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer London, 2010. Citado na página [35](#).
- TRAN, V. P. et al. Adaptive second-order strictly negative imaginary controllers based on the interval type-2 fuzzy self-tuning systems for a hovering quadrotor with uncertainties. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 1, p. 11–20, feb 2020. Citado na página [56](#).
- TURK, S. et al. Interval type-2 fuzzy sets improved by simulated annealing for locating the electric charging stations. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 547, p. 641–666, feb 2021. Citado na página [56](#).
- WANG, L.-X. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. [S.l.]: Prentice-Hall International, Inc., 1997. Citado na página [91](#).
- WANG, L.-Y.; ZHAO, W.-X. System identification: New paradigms, challenges, and opportunities. *Acta Automatica Sinica*, Elsevier BV, v. 39, n. 7, p. 933–942, jul 2013. Citado na página [35](#).
- WANG, X. et al. Tracking a maneuvering target by multiple sensors using extended kalman filter with nested probabilistic-numerical linguistic information. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 2, p. 346–360, feb 2020. Citado na página [34](#).
- WU, C.-Y. et al. A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier BV, v. 352, n. 3, p. 1119–1151, mar 2015. Citado 5 vezes nas páginas [21](#), [92](#), [93](#), [97](#) e [101](#).
- WU, D.; MENDEL, J. Enhanced karnik–mendel algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 17, n. 4, p. 923–934, aug 2009. Citado na página [62](#).

- ZADEH, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 8, n. 3, p. 199–249, jan 1975. Citado na página 55.
- ZAMZAM, A. S.; LIU, Y.; BERNSTEIN, A. Model-free state estimation using low-rank canonical polyadic decomposition. *IEEE Control Systems Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 2, p. 605–610, apr 2021. Citado na página 43.
- ZHANG, G. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, Elsevier BV, v. 50, p. 159–175, jan 2003. Citado na página 123.
- ZHANG, L. et al. Fault detection for fuzzy semi-markov jump systems based on interval type-2 fuzzy approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 10, p. 2375–2388, oct 2020. Citado na página 33.
- ZHENG, J. et al. An interval type-2 fuzzy controller based on data-driven parameters extraction for cement calciner process. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, p. 61775–61789, 2020. Citado na página 56.
- ZHOU, S.; HAN, Y. Extended dissipativity and control synthesis of interval type-2 fuzzy systems via line-integral lyapunov function. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 10, p. 2631–2644, oct 2020. Citado na página 56.
- ZHU, X. et al. Signal detection in generalized gaussian distribution noise with nakagami fading channel. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, p. 23120–23126, 2019. Citado na página 33.
- ZOIREFF, G.; SAMANIEGO, D.; VIDAL, B. Dynamic filtering of microwave signals through brillouin-based polarization-sensitive balanced detection. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 27, n. 2, p. 1–6, mar 2021. Citado na página 33.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Algoritmo

## *Observer/Kalman Filter Identification (OKID)*

Considerando-se o sistema dinâmico linear multivariável, no domínio do tempo discreto, descrito por (JUANG, 1994):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (\text{A.2})$$

onde  $x_k$  é o vetor de estados com dimensão  $n \times 1$ ,  $y_k$  é o vetor de saídas com dimensão  $p \times 1$  e  $u_k$  é o vetor de entradas com dimensão  $m \times 1$  com  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sendo as matrizes que descrevem o comportamento dinâmico do sistema com dimensões apropriadas. Quando os estados do sistema dinâmico não podem diretamente medidas, um observador pode ser aplicado para estimar estes estados a partir dos dados de entrada e saída. Adicionando e subtraindo o termo  $Ky_k$  ao lado direito da Equação (A.1), obtém-se o seguinte resultado:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ky_k - Ky_k \quad (\text{A.3})$$

$$= (A + KC)x_k + (B + KD)u_k - Ky_k \quad (\text{A.4})$$

ou

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}v_k \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\bar{A} = A + KC$$

$$\bar{B} = [B + KD, \quad -K] \quad (\text{A.6})$$

$$v_k = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

e  $K$  é uma matriz arbitrária com dimensão  $n \times p$  escolhida de modo a tornar a matriz  $\bar{A}$  tão estável quanto desejado. Considerando condição inicial não nula, ou seja,  $x_0 \neq 0$ , a

Equação (A.5) pode ser estendida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \bar{A}x_k + \bar{B}v_k, \\
x_{k+2} &= \bar{A}x_{k+1} + \bar{B}v_{k+1} \\
&= \bar{A}^2x_k + \bar{A}\bar{B}v_k + \bar{B}v_{k+1}, \\
x_{k+3} &= \bar{A}x_{k+2} + \bar{B}v_{k+2} \\
&= \bar{A}^3x_k + \bar{A}^2\bar{B}v_k + \bar{A}\bar{B}v_{k+1} + \bar{B}v_{k+2}, \\
&\vdots \\
x_{k+q} &= \bar{A}x_{k+q-1} + \bar{B}v_{k+q-1} \\
&= \bar{A}^qx_k + \bar{A}^{p-1}\bar{B}v_k + \bar{A}^{q-2}\bar{B}v_{k+1} + \bar{B}v_{k+q-1}
\end{aligned}$$

De forma análoga, utilizando a Equação (A.2), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
y_{k+q} &= Cx_{k+q} + Du_{k+q} \\
&= C\bar{A}^qx_k + C\bar{A}^{p-1}\bar{B}v_k + C\bar{A}^{q-2}\bar{B}v_{k+1} + C\bar{B}v_{k+q-1} + Du_{k+q}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

O conjunto destas equações, considerando a sequência de  $k = 0, \dots, \ell - 1$  podem ser reescritas como

$$\bar{y} = C\bar{A}^q x + \bar{Y}\bar{V} \tag{A.8}$$

onde

$$\bar{y} = [y_q \quad y_{q+1} \quad y_{q+2} \quad \cdots \quad y_{\ell-1}] \tag{A.9}$$

$$x = [x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{\ell-q-2}] \tag{A.10}$$

$$\bar{Y} = [D \quad C\bar{B} \quad C\bar{A}\bar{B} \quad \cdots \quad C\bar{A}^{q-1}\bar{B}] \tag{A.11}$$

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} u_q & u_{p+1} & \cdots & u_{\ell-1} \\ v_{q-1} & v_q & \cdots & v_{\ell-2} \\ v_{q-2} & v_{q-1} & \cdots & v_{\ell-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_{\ell-q-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\ell \times \ell} \quad (\text{A.12})$$

Uma vez que o termo  $C\bar{A}^q x$  na Equação (A.8) representa o efeito dos instantes de tempo anteriores a  $q-1$  e, considerando-se o caso onde  $\bar{A}^p$  é suficientemente pequeno sendo todos os estados  $x$  limitados, a Equação (A.8) pode ser aproximada por:

$$\bar{y} \approx \bar{Y}\bar{V} \quad (\text{A.13})$$

a qual possui a seguinte solução por mínimos quadrados:

$$\bar{Y} = \bar{y}\bar{V}^T [\bar{V}\bar{V}^T] \quad (\text{A.14})$$

onde o número de amostras do conjunto de dados  $\ell$  deve ser suficientemente grande para que  $[\bar{V}\bar{V}^T]$  exista.

## A.1 Cálculo dos Parâmetros de Markov

Os parâmetros de Markov do observador  $\bar{Y}$ , obtidos por meio da Equação (A.14), incluem os parâmetros de Markov do sistema, os quais serão utilizados para o cálculo das matrizes do sistema  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , e os parâmetros de Markov do ganho do observador que, por sua vez, serão utilizados para o cálculo da matriz de ganho do observador  $K$ .

### A.1.1 Parâmetros de Markov do Sistema

A matriz de parâmetros de Markov  $\bar{Y}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \cdots & C\bar{A}^{(q-1)}\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= [\bar{Y}_0 \quad \bar{Y}_1 \quad \bar{Y}_2 \quad \cdots \quad \bar{Y}_q] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{Y}_0 &= D, \\ \bar{Y}_j &= C\bar{A}^{(j-1)}\bar{B} \\ &= \begin{bmatrix} C(A+KC)^{(j-1)}(B+KD), & -C(A+KC)^{(j-1)}K \end{bmatrix} \\ &= [\bar{Y}_j^{(1)}, -\bar{Y}_j^{(2)}], \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A partir da Equação (A.16), os parâmetros de Markov do sistema são calculados como segue:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \bar{Y}_0 = D \\
Y_j &= \bar{Y}_j^{(1)} - \sum_{\iota=1}^j \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}, \quad \text{para } j = 1, \dots, q \\
Y_j &= - \sum_{\iota=1}^q \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}, \quad \text{para } j = q + 1, \dots, \infty
\end{aligned} \tag{A.17}$$

### A.1.2 Parâmetros de Markov do Ganho do Observador

Os parâmetros de Markov do ganho do observador são dados por:

$$\begin{aligned}
Y_1^o &= \bar{Y}_1^{(2)} = CK \\
Y_j^o &= \bar{Y}_j^{(2)} - \sum_{\iota=1}^{j-1} \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}^o, \quad \text{para } j = 2, \dots, q \\
Y_j^o &= - \sum_{\iota=1}^q \bar{Y}_j^{(2)} Y_{j-\iota}^o, \quad \text{para } j = q + 1, \dots, \infty
\end{aligned} \tag{A.18}$$

## A.2 Algoritmo de Realização de Autosistemas - ERA

O algoritmo de realização de autosistemas (*Eigensystem Realization Algorithm - ERA*), o qual é desenvolvido a partir da teoria de realização mínima, é utilizado para a identificação dos parâmetros do modelo no espaço de estados que descreve o comportamento do sistema dinâmico. A partir dos parâmetros de Markov do sistema, obtidos anteriormente, uma matriz de Hankel  $H(j-1)$  é obtida como segue:

$$H(j-1) = \begin{bmatrix} Y_j & Y_{j+1} & \dots & Y_{j+\beta-1} \\ Y_{j+1} & Y_{j+2} & \dots & Y_{j+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{j+\gamma-1} & Y_{j+\gamma} & \dots & Y_{j+\gamma+\beta-2} \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são inteiros arbitrários suficientemente grandes definidos pelo usuário. Em seguida, considerando-se  $j = 1$ , a matriz de Hankel  $H(0)$  é decomposta em um produto matricial por meio da aplicação do procedimento de Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition - SVD*) como segue:

$$H(0) = \Xi \Sigma \Psi^T \tag{A.20}$$

onde as matrizes  $\Xi$  e  $\Psi$  são ortonormais e  $\Sigma$  é a matriz diagonal de valores singulares definida como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

tal que

$$\Sigma_n = \text{diag} [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_{min}}, \sigma_{n_{min}+1}, \dots, \sigma_n] \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n_{min}} \gg \sigma_{n_{min}+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (\text{A.23})$$

Os valores singulares  $\sigma_{n_{min}+1}, \dots, \sigma_n$  são relativamente pequenos e, portanto, insignificantes para a determinação da realização do sistema dinâmico. Logo, o termo  $n_{min}$  constitui o número de valores singulares mais significativos e determina a ordem mínima de realização. Sejam  $\Xi_{n_{min}}$  e  $\Psi_{n_{min}}$  matrizes formadas pelas primeiras  $n_{min}$  colunas de  $\Xi$  e  $\Psi$ , respectivamente, a Equação (A.20) é reescrita da seguinte forma

$$H(0) = \Xi_{n_{min}} \Sigma_{n_{min}} \Psi_{n_{min}}^T \quad (\text{A.24})$$

A partir da Equação (A.24), as matrizes de observabilidade  $\mathcal{P}_\gamma$  e controlabilidade  $\mathcal{Q}_\beta$  são obtidas como segue

$$\mathcal{P}_\gamma = \Xi_{n_{min}} (\Sigma_{n_{min}})^{1/2} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{Q}_\beta = (\Sigma_{n_{min}})^{1/2} \Psi_{n_{min}}^T \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\mathcal{P}_\gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathcal{Q}_\beta = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{\beta-1}B] \quad (\text{A.28})$$

Por fim, as estimações das matrizes que compõe o modelo no espaço de estados são dadas por:

$$\hat{A} = (\Sigma_{n_{min}})^{-1/2} \Xi_{n_{min}}^T H(1) \Psi_{n_{min}} (\Sigma_{n_{min}})^{-1/2} \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{B} = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \mathcal{Q}_\beta \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{C} = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \mathcal{P}_\gamma \quad (\text{A.31})$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_0 \quad (\text{A.32})$$

onde o símbolo “ $\wedge$ ” significa quantidades estimadas para distinção das quantidades verdadeiras. O ganho do observador  $K$  é obtido a partir dos parâmetros de Markov do ganho do observador como segue:

$$K = \left( \mathcal{P}_\gamma^T \mathcal{P}_\gamma \right) \mathcal{P}_\gamma^T Y^o \quad (\text{A.33})$$

A relação entre o observador identificado e o Filtro de Kalman é estabelecida incluindo os ruídos de processo e medição no modelo descrito pelas Equações (A.1) e (A.2):

$$x_{k+1} = \hat{A}x_k + \hat{B}u_k + w_k \quad (\text{A.34})$$

$$y_k = \hat{C}x_k + \hat{D}u_k + v_k \quad (\text{A.35})$$

onde o ruído de processo  $w_k$  e o ruído de medição  $v_k$  são ruídos brancos, de média zero, com covariâncias  $Q$  e  $R$ , respectivamente, e são considerados como sinais independentes. Então, o filtro de Kalman típico pode ser escrito como:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}u_k + K\varepsilon_k \quad (\text{A.36})$$

$$\hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}u_k \quad (\text{A.37})$$

onde  $\hat{x}_k$  é o vetor de estado estimado e  $\varepsilon_k$  é definido como a diferença entre a medida real  $y_k$  e seu valor estimado  $\hat{y}_k$ . Quando o erro residual  $\varepsilon_k$  é uma sequência aleatória, o ganho do observador  $K$  converge para o ganho do filtro Kalman de estado estacionário para  $K = -G$ , onde  $G$  denota o ganho do filtro de Kalman. Uma discussão mais detalhada sobre este aspecto pode ser obtida em (JUANG, 1994). Na Figura 63 é ilustrado um fluxograma para ilustrar as etapas computacionais de implementação do algoritmo OKID.

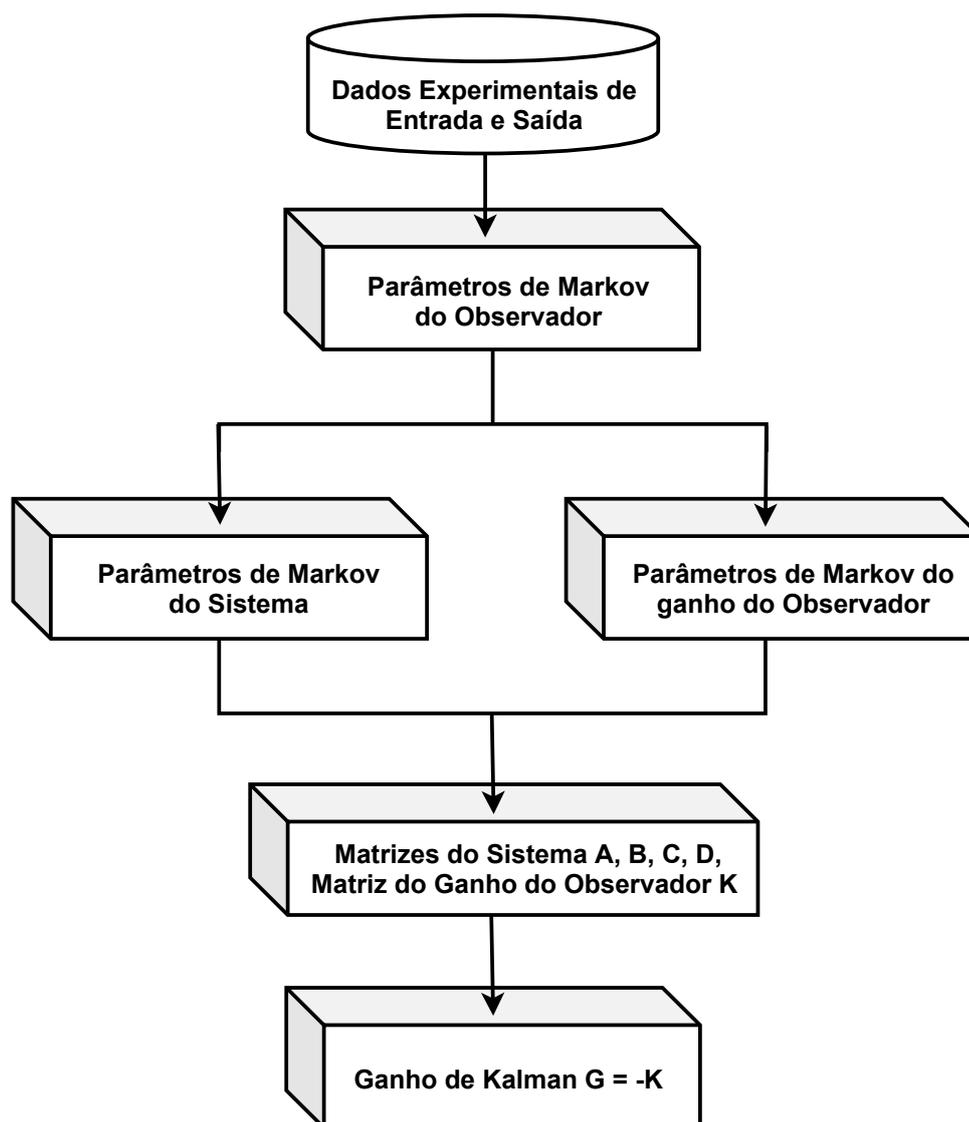


Figura 63 – Fluxograma para o algoritmo OKID. Fonte: Adaptado de (JUANG, 1994).