

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO – UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE

ADRIANO MENDES MAGALHÃES

**PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE SISTEMAS  
DINÂMICOS NÃO LINEARES BASEADA EM MODELO NEBULOSO  
TAKAGI-SUGENO INVERSO: UMA ABORDAGEM DIRETA NO  
CONTEXTO DO ESPAÇO DE ESTADOS COM OBSERVADOR DE  
ESTADOS**

SÃO LUÍS – MA,  
2019



ADRIANO MENDES MAGALHÃES

**PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE SISTEMAS  
DINÂMICOS NÃO LINEARES BASEADA EM MODELO NEBULOSO  
TAKAGI-SUGENO INVERSO: UMA ABORDAGEM DIRETA NO  
CONTEXTO DO ESPAÇO DE ESTADOS COM OBSERVADOR DE  
ESTADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia de eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Orientador: Professor Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

SÃO LUÍS – MA,  
2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Magalhães, Adriano Mendes.

Proposta de identificação recursiva de sistemas dinâmicos não lineares baseada em modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso : uma abordagem direta no contexto do espaço de estados com observador de estados / Adriano Mendes Magalhães. - 2019.

197 p.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2019.

1. Algoritmo de agrupamentos nebulosos de Gustafson-Kessel. 2. Identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares. 3. OKID. 4. Sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno. I. Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II. Título.

ADRIANO MENDES MAGALHÃES

**PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE  
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES BASEADA  
EM MODELO NEBULOSO TAKAGI-SUGENO  
INVERSO: UMA ABORDAGEM DIRETA NO  
CONTEXTO DO ESPAÇO DE ESTADOS COM  
OBSERVADOR DE ESTADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia de eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Dissertação aprovada em 25 de novembro de 2019.

---

**Professor Dr. Ginalber Luiz de  
Oliveira Serra**

Orientador – Universidade Federal do  
Maranhão – UFMA

---

**Professor Dr. Francisco das Chagas de  
Souza**

Membro da banca examinadora –  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

**Professor Dr. Omar Andres Carmona  
Cortes**

Membro da banca examinadora – Instituto  
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia  
do Maranhão – IFMA

SÃO LUÍS – MA  
2019



## AGRADECIMENTOS

Como cristão, inicialmente agradeço a Deus, por estar usando esse mestrado como um meio para consolidar os meus valores e princípios, aproximando-me a cada dia da pessoa de Jesus Cristo. Em seguida, agradeço a meus pais, Ana Maria e Antonio Magalhães, por colocarem-se à disposição para serem instrumentos de Deus na minha vida, abençoando-me no exercício da fé, com conselhos, com provisão e patrocínio em todos os recursos complementares, porém necessários, para a realização dos trabalhos do mestrado. Também agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFMA, em especial ao professor Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra, pela orientação da pesquisa, assim como pela confiança em ceder um espaço e disponibilizar os recursos do laboratório (e grupo) de Inteligência Computacional Aplicada a Tecnologia – ICAT, pertencente ao IFMA, para o desenvolvimento da pesquisa. E falando no ICAT, quero também agradecer a todos os amigos do grupo, em especial Arnaldo Junior, Luis Miguel Torres, Selmo Rodrigues, Hugo Velozo, Jéssica Santos e Anderson Evangelista, pelo fraterno apoio e incentivo para a perseverança da execução e conclusão dos trabalhos da pesquisa.

Além dos agradecimentos acima citados, quero acrescentar um agradecimento à Universidade Federal do Maranhão – UFMA, em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da UFMA, por conceder a honra de cursar o mestrado, assim como de viabilizar o intercâmbio de conhecimentos com professores e colegas de classe, os quais de alguma forma contribuíram significativamente (ainda que por inspiração) para concepção e elaboração de intuições, que, no tempo certo, colaboram para a concretização da pesquisa dessa dissertação.



*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.”  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12:2)*

*“Jesus dizia, pois, aos judeus que criam nele:  
Se vós permanecerdes na minha palavra,  
verdadeiramente sereis meus discípulos;  
E conhecereis a verdade, e a verdade vos libertará.”  
(Bíblia Sagrada, João 8:31-32)*

*“Disse-lhe Tomé: Senhor,  
nós não sabemos para onde vais;  
e como podemos saber o caminho?  
Disse-lhe Jesus: Eu sou o caminho,  
e a verdade e a vida; ninguém vem ao Pai,  
senão por mim.  
(Bíblia Sagrada, João 14:5-6)”*



## RESUMO

Nas áreas de controle e identificação de sistemas, a modelagem inversa, a partir de dados experimentais, é um dos grandes desafios para estratégias de controle baseada em sistemas dinâmicos não lineares. Por isso, nessa dissertação, uma proposta de identificação inversa recursiva de sistemas dinâmicos não lineares baseada em modelo nebuloso Takagi-Sugeno e estruturada no espaço de estados com observador de estados é apresentada, resultando em um modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso. Para obter a <proposição antecedente> desse modelo, essa proposta utiliza a metodologia de agrupamentos nebulosos de Gustafson-Kessel (GK) em uma janela temporal de dados, atendendo aspectos estáticos e dinâmicos de estimação. Já para obter a <proposição consequente> desse modelo, essa proposta utiliza uma estrutura no espaço de estados com observador de Kalman, definida para o mapeamento inverso do sistema em cada ponto de operação, resultando em submodelos locais nebulosos e inversos. Para estimar os parâmetros desses submodelos, utiliza-se a metodologia de identificação do filtro ou observador de Kalman (do inglês *Observer Kalman / Filter Identification* – OKID). Além disso, para demonstrar a aplicabilidade da metodologia proposta, resultados experimentais, referentes a um tanque de reação de agitação contínua, a um *benchmark* de um modelo de Hammerstein e a um helicóptero com dois graus de liberdade, são apresentados como estudos de casos. Em seguida, as análises e considerações finais evidenciam aspectos do experimento ótimo, decorrente de cada estudo de caso.

**Palavras-chave:** identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares. Sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno. Algoritmo de agrupamentos nebulosos de Gustafson-Kessel. OKID.



# ABSTRACT

In the areas of control and system identification, inverse modeling from experimental data is one of the major challenges for nonlinear dynamic systems based control strategies. Therefore, in this dissertation, a proposal for recursive inverse identification of nonlinear dynamic systems based on Takagi-Sugeno fuzzy model and structured in state space with state observer is presented, resulting in a inverse Takagi-Sugeno fuzzy model. To obtain the <antecedent proposition> of this model, this proposal uses the Gustafson-Kessel (GK) fuzzy clustering methodology in a time sliding data window, achieving static and dynamic estimation aspects. In order to obtain the <consequent proposition>, this proposal works with a Kalman observer state-space structure, which has been defining for system inverse mapping at each operation point, resulting in inverse fuzzy local submodels. To estimate the parameters of these submodels, the **K**alman filter / **O**bserver **I**dentification (OKID) methodology is used. Furthermore, to demonstrate the proposed methodology applicability, experimental results, which are concerning to a continuous stirring tank reactor, a Hammerstain model benchmark and a helicopter with two degree of freedom, are presented as case studies. Then, analyzes and final considerations highlight aspects of the optimal experiment, which is resulting from each case study.

**Keywords:** inverse identification of nonlinear dynamic system. Takagi-Sugeno Fuzzy System. Gustafson-Kessel Fuzzy Clustering Algorithm. OKID.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Inversão de um sistema SISO definido por $y(u) = u^2 \forall \{u, y\} \in \mathbb{R}_+$ . . .	30
Figura 2 – Modelo genérico de um sistema nebuloso. Traço contínuo (–): modelo nebuloso Takagi-Sugeno; traço segmentado (– –): modelo nebuloso Mamdani. . . . .	64
Figura 3 – Variáveis linguísticas (nebulosas) da <proposição antecedente> do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO $\tilde{\mathbf{S}}$ , com a descrição do procedimento de mapeamento de seus respectivos conjuntos nebulosos . . . . .	68
Figura 4 – Abordagens para identificação de modelos inversos MIMO . . . . .	80
Figura 5 – Visão geral da metodologia de identificação nebulosa Takagi-Sugeno inversa em um contexto do espaço de estados . . . . .	86
Figura 6 – Fluxograma das etapas de implementação do modelo inverso nebuloso proposto . . . . .	91
Figura 7 – Fluxograma de procedimentos do OKID para o $i$ -ésimo submodelo local inverso . . . . .	95
Figura 8 – Estrutura de identificação inversa nebulosa por aprendizado direto $(\hat{\mathbf{S}}^{-1})^i$ , no contexto do espaço de estados, proposta nessa dissertação. . .	95
Figura 9 – Fluxograma das etapas de implementação do modelo inverso nebuloso proposto . . . . .	114
Figura 10 – CSTR: dados experimentais de entrada e saída obtidos para identificação do modelo inverso. . . . .	127
Figura 11 – CSTR: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE, NMSE, $R^2$ e VAF por experimento, expresso em número de agrupamentos $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial (em batelada), enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva . . . . .	128
Figura 12 – CSTR: mapeamento das métricas de computação $t_c$ e $RAM_c$ por experimento, o qual é expresso por número de agrupamentos $c$ . . . . .	129
Figura 13 – CSTR: comportamento dos centros (pontos de operação) dos agrupamentos	130
Figura 14 – CSTR: valores singulares $[\sigma_t^{(i)}]_{t=1}^c \Big _{i=1}^c$ da $i$ -ésima matriz de Hankel $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ . . . . .	131
Figura 15 – CSTR: magnitude dos autovalores da matriz de estados estimados $\hat{\mathbf{G}}^i(k)$	133
Figura 16 – CSTR: exemplo de resposta ao degrau do modelo do CSTR . . . . .	134
Figura 17 – CSTR: característica de regime estático decorrente da comparação entre o vetor de saída $\tilde{\mathbf{u}}$ do modelo nebuloso inverso proposto e do vetor de entrada $\mathbf{u}$ do sistema. . . . .	135

Figura 18 – CSTR: vetor de estado estimado $\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) = \tilde{\mathbf{x}}_1(kT_s)$ do modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	136
Figura 19 – CSTR: comparação entre a saída do modelo nebuloso $\tilde{u}_1(kT_s)$ e a entrada do sistema $u_1(kT_s)$ . . . . .	136
Figura 20 – CSTR: métricas de qualidade de estimação associada com as saídas do modelo nebuloso inverso $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}_1$ . . . . .	138
Figura 21 – HMBM: dados experimentais de entrada e saída obtidos para identificação do modelo inverso. . . . .	140
Figura 22 – HMBM: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE e NMSE por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva . . . . .	142
Figura 23 – HMBM: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica $R^2$ e VAF por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva . . . . .	143
Figura 24 – CSTR: mapeamento das métricas de computação $t_c$ e $RAM_c$ por experimento, o qual é expresso por número de agrupamentos $c$ . . . . .	144
Figura 25 – HMBM: comportamento dos centros (pontos de operação) dos agrupamentos . . . . .	146
Figura 26 – HMBM: valores singulares $[\sigma_t^{(i)}]_{t=1}^{n^{(i)}} _{i=1}^c$ da $i$ -ésima matriz de Hankel $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ . . . . .	147
Figura 27 – HMBM: magnitude dos autovalores de $\hat{\mathbf{G}}^i(k)$ referente a $i$ -ésima regra, com $i \in [1, c]$ . . . . .	149
Figura 28 – HMBM: característica de regime estático decorrente da comparação entre o vetor de saída $\tilde{\mathbf{u}}$ do modelo nebuloso inverso proposto e do vetor de entrada $\mathbf{u}$ do sistema. . . . .	151
Figura 29 – HMBM: vetor de estados estimados $\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) = [\tilde{\mathbf{x}}_1(kT_s), \tilde{\mathbf{x}}_2(kT_s)]^T$ do modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	152
Figura 30 – HMBM: comparação entre a entrada do sistema $\mathbf{u}(kT_s) = [u_1(kT_s), u_2(kT_s)]^T$ e a saída do modelo nebuloso $\tilde{\mathbf{u}}(kT_s) = [\tilde{u}_1(kT_s), \tilde{u}_2(kT_s)]^T$ . . . . .	153
Figura 31 – HMBM: métricas de qualidade de estimação associada com as saídas do modelo nebuloso inverso $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$ . . . . .	154
Figura 32 – H2DOF: Helicóptero com 2 graus de liberdade Quanser. . . . .	155

Figura 33 – H2DOF: dados experimentais de entrada e saída obtidos para identificação do modelo inverso. . . . .	156
Figura 34 – H2DOF: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE e NMSE por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva . . . . .	158
Figura 35 – H2DOF: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica $R^2$ e VAF por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva . . . . .	159
Figura 36 – CSTR: mapeamento das métricas de computação $t_c$ e $RAM_c$ por experimento, o qual é expresso por número de agrupamentos $c$ . . . . .	160
Figura 37 – H2DOF: comportamento dos centros (pontos de operação) dos agrupamentos . . . . .	161
Figura 38 – H2DOF: valores singulares $[\sigma_\iota^{(i)}]_{\iota=1}^{n^{(i)}} _{i=1}^c$ da $i$ -ésima matriz de Hankel $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ . . . . .	162
Figura 39 – H2DOF: magnitude dos autovalores de $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$ referente a $i$ -ésima regra, com $i \in [1, c]$ . . . . .	164
Figura 40 – H2DOF: vetor de estados estimados $\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) = [\tilde{\mathbf{x}}_1(kT_s), \tilde{\mathbf{x}}_2(kT_s)]^T$ do modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	165
Figura 41 – H2DOF: comparação entre a entrada do sistema $\mathbf{u}(kT_s) = [u_1(kT_s), u_2(kT_s)]^T$ e a saída do modelo nebuloso $\tilde{\mathbf{u}}(kT_s) = [\tilde{u}_1(kT_s), \tilde{u}_2(kT_s)]^T$ . . . . .	166
Figura 42 – H2DOF: métricas de qualidade de estimação associada com as saídas do modelo nebuloso inverso $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$ . . . . .	167



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tópicos de conhecimentos que são pré-requisitos para o entendimento do Capítulo 2. . . . .	40
Tabela 2 – Resumo das características da <proposição antecedente> do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO $\tilde{\mathbf{S}}$ . . . . .	69
Tabela 3 – Resumo das características da <proposição consequente> do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO $\tilde{\mathbf{S}}$ . . . . .	72
Tabela 4 – Resumo dos aspectos positivos e negativos dos algoritmos de agrupamentos nebulosos de Gustafson-Kessel e de máxima verossimilhança nebulosa. . . . .	73
Tabela 5 – Descrições dos parâmetros do Algoritmo 3. . . . .	78
Tabela 6 – Resumo de alguns aspectos positivos e negativos das estruturas de identificação inversa de sistemas dinâmicos MIMO, referentes às Figuras 4b e 4c. . . . .	83
Tabela 7 – Descrições dos parâmetros do modelo não linear do CSTR (Eqs. (4.1) e (4.2)). . . . .	126
Tabela 8 – HMBM: métricas da qualidade de estimação MSE para os experimentos candidatos à ótimo, avaliados entre as saídas $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ do modelo nebuloso inverso resultante. . . . .	141
Tabela 9 – Tendências das métricas de qualidade de estimação. . . . .	189



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- ARX** do inglês *AutoRegressive with eXogenous inputs*, refere-se à representação linear do sistema pelo modelo autorregressivo com entradas externas (AGUIRRE, 2015).
- IMC** do inglês *Internal Model Control*, refer-se à estratégia de controle baseada no modelo identificado de um sistema dinâmico não linear (ECONOMOU; MORARI; PALSSON, 1986).
- MIMO** do inglês *Multiple Input and Multiple Output*, refere-se a um sistema ou modelo de múltiplas entradas e múltiplas saídas.
- MISO** do inglês *Multi Input and Single Output*, refere-se a um sistema ou modelo de múltiplas entradas e uma saída.
- OKID** do inglês *Observer Kalman / Filter Identification*, refere-se ao processo de identificação do filtro de Kalman, (i.e., o modelo do espaço de estados, com o observador de Kalman), conforme descrito em Juang (1994).
- SVM** do inglês *Support Vector Machine*, que traduzido quer tem o significado aproximado por máquina de suporte de vetor.



## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\hat{\bullet}$  Representa uma saída estimada  $\bullet$  de um modelo (matemático) de um sistema ou fenômeno.
- $\tilde{\bullet}$  Representa uma saída estimada nebulosa  $\bullet$  de um modelo (matemático) nebuloso de um sistema ou fenômeno.
- $\in$  Representa o símbolo matemático “pertence”.
- $\triangleq$  Representa o símbolo matemático “igual por definição” (ou simplesmente “por definição”).
- $\mathbb{Z}_+^*$  Associado ao símbolo matemático do conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_+^*$  representa o símbolo matemático do conjunto dos números inteiros positivos e não nulos (ou ainda, estritamente positivos), tal que  $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}$ .
- $L$  Representa a unidade de litros, conforme o Sistema Internacional de Medidas (BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES, 2019, p. 145).



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>27</b>
<b>1.1</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>28</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação e Objetivos da Pesquisa</b>	<b>32</b>
<b>1.3</b>	<b>Contribuições do Trabalho</b>	<b>34</b>
<b>1.4</b>	<b>Produção Bibliográfica</b>	<b>36</b>
1.4.1	Artigos Publicados de Congressos e Conferências	36
<b>1.5</b>	<b>Organização da Dissertação</b>	<b>37</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>Aspectos Teóricos de Identificação e Realização de Sistemas Dinâmicos</b>	<b>41</b>
2.1.1	Aspectos de Realização de Sistemas Dinâmicos	42
2.1.1.1	Os parâmetros de Markov	44
2.1.1.2	A matriz de Hankel	45
2.1.1.3	O algoritmo de realização de autossistemas (ERA)	46
2.1.2	Aspectos de Identificação dos Parâmetros de Markov	49
2.1.2.1	Identificação em batelada dos parâmetros de Markov	50
2.1.2.2	Identificação recursiva dos parâmetros de Markov	56
<b>2.2</b>	<b>Aspectos Teóricos da Sistemas Nebulosos</b>	<b>63</b>
2.2.1	Elementos de sistemas nebulosos	63
2.2.1.1	A base de regras	65
2.2.1.2	A proposição antecedente	66
2.2.1.3	A proposição consequente	70
2.2.2	Agrupamentos nebulosos	71
2.2.2.1	Agrupamento de Gustafson-Kessel	74
2.2.2.2	Determinação da <proposição antecedente> através da matriz de covariância nebulosa: o parâmetro $\beta(\xi)$	75
<b>2.3</b>	<b>Aspectos Teóricos da Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos</b>	<b>80</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>83</b>
<b>3.1</b>	<b>Definições do Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno Inverso</b>	<b>86</b>
a)	A base de dados	87
b)	A base de regras	88
c)	A máquina de inferência	90
<b>3.2</b>	<b>Estimação da Proposição Antecedente</b>	<b>91</b>
<b>3.3</b>	<b>Estimação paramétrica da Proposição Consequente</b>	<b>94</b>

3.3.1	Estimação compensada em batelada dos parâmetros de Markov do observador de Kalman . . . . .	94
3.3.2	Estimação compensada recursiva dos parâmetros de Markov do observador de Kalman . . . . .	99
3.3.3	Desacoplamento dos parâmetros estimados de Markov do observador de Kalman . . . . .	102
3.3.4	Algoritmo de realização de autossistemas (ERA) . . . . .	104
<b>3.4</b>	<b>Aspectos de Implementação . . . . .</b>	<b>109</b>
3.4.1	Aspectos associados à proposição consequente das regras . . . . .	109
3.4.1.1	Determinação da ordem mínima reduzida $n_{min}$ . . . . .	109
3.4.1.2	O estado inicial do $i$ -ésimo submodelo local inverso $\hat{x}_{yu}^i(1)$ . . . . .	111
3.4.2	Aspectos associados ao modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	113
3.4.2.1	Etapa de estimação inicial . . . . .	113
3.4.2.2	Etapa de estimação recursiva . . . . .	115
<b>4</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>4.1</b>	<b>Estudo de caso 01: o tanque de reação de agitação contínua . . . . .</b>	<b>125</b>
4.1.1	Resultados da proposição antecedente . . . . .	127
4.1.2	Resultados da proposição consequente . . . . .	130
4.1.3	Resultados modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	132
<b>4.2</b>	<b>Estudo de caso 02: benchmark de um modelo de Hammerstain . . . . .</b>	<b>139</b>
4.2.1	Resultados da proposição antecedente . . . . .	144
4.2.2	Resultados da proposição consequente . . . . .	145
4.2.3	Resultados modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	148
<b>4.3</b>	<b>Estudo de caso 03: helicóptero com 2 graus de liberdade . . . . .</b>	<b>155</b>
4.3.1	Resultados da proposição antecedente . . . . .	157
4.3.2	Resultados da proposição consequente . . . . .	160
4.3.3	Resultados modelo nebuloso inverso proposto . . . . .	164
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>5.1</b>	<b>Análise dos resultados experimentais . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>5.2</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>172</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>175</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>183</b>
	<b>APÊNDICE A – FILTRO DE COMPENSAÇÃO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS DE MARKOV . . . . .</b>	<b>185</b>

A.1	Filtro de Compensação dos Parâmetros de Markov para a Etapa de Estimação Inicial . . . . .	185
A.2	Filtro de Compensação dos Parâmetros de Markov para a Etapa de Estimação Recursiva . . . . .	186
	<b>APÊNDICE B – MÉTRICAS DE QUALIDADE DE ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA . . . . .</b>	<b>187</b>
	<b>APÊNDICE C – O MODELO NEBULOSO TS INVERSO COM ABORDAGEM DIRETA NO ESPAÇO DE ESTADOS COM OBSERVADOR DE KALMAN DE RE- GIME ESTÁTICO . . . . .</b>	<b>191</b>
	<b>Índice . . . . .</b>	<b>194</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Em identificação de sistemas, um dos grandes desafios consiste na obtenção de modelos matemáticos que representem suficientemente bem o comportamento inverso de um determinado sistema dinâmico (LEE; LIU, 2014; LAI et al., 2017). Nesse contexto, várias técnicas de modelagem inversas de sistemas dinâmicos têm sido desenvolvidos para atender várias aplicações na medicina (BATES, 2009; MELDAU, 2018), nas ciências biológicas (CHATTERJEE et al., 2014; TSIANTIS; BALSACANTO; BANGA, 2018), nas ciências geográficas (SCHLINK; HERTEL, 2018; KOVALETS et al., 2018), assim como em outras áreas da conhecimento (DAI et al., 2017; YUAN; ZHU, 2017; WANG; CISSE, 2017; QIN; JIA, 2018). Dentro de cada uma dessas aplicações, os modelos obtidos devem destacar características inerentes ao mapeamento inverso que são relevantes de acordo com o propósito da identificação, tais como não linearidade, variações paramétricas temporais, incertezas entre outras. Por isso, uma investigação em busca de uma metodologia de identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares no contexto do espaço de estados será realizada, e a introdução desse trabalho de dissertação, decorrente dessa pesquisa, será apresentada no presente capítulo, de acordo com os seguintes tópicos:

- § Seção 1.1: Revisão Bibliográfica;
- § Seção 1.2: Motivação e Objetivos da Pesquisa;
- § Seção 1.3: Contribuições do Trabalho;
- § Seção 1.4: Produção Bibliográfica;
- § Seção 1.5: Organização da Dissertação.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Com a teoria de conjuntos nebulosos, inicialmente proposta por Zadeh (1965), nasce uma nova classe de sistemas, denominados *sistemas nebulosos*. A partir de então, surgiram vários tipos de sistemas nebulosos, os quais podem ser classificados em 3 tipos: *sistemas puramente nebulosos*, *sistemas nebulosos com fuzzificador e defuzzificador* (ou *sistemas nebulosos linguísticos* ou ainda *sistemas nebulosos relacionais*) e *sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno (TS)* (TAKAGI; SUGENO, 1985; BABUŠKA; VERBRUGGEN, 1996a; WANG, 1997).

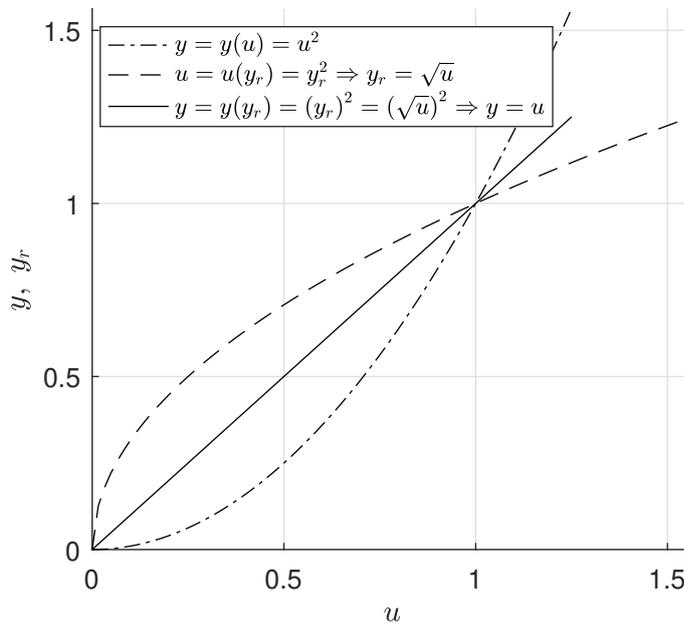
Os sistemas puramente linguísticos apresentam uma estrutura composta por uma *base de regras*, representada por uma coleção de regras de inferência nebulosa, do tipo SE <proposição antecedente> ENTÃO <proposição consequente>, e *máquina de inferência*, que combina estas regras sob forma de mapeamento de *valores ou termos linguísticos* que representam as entradas do sistema, associados à <proposição antecedente> da regra de inferência nebulosa, para *valores ou termos linguísticos* que representam as saídas do sistema, associados à <proposição consequente> da regra de inferência nebulosa (WANG, 1997). Observa-se que as regras de inferência do tipo SE-ENTÃO são intuitivamente acessíveis a qualquer pessoa, por meio da manipulação lógica de valores linguísticos. Nesse contexto, os *valores linguístico* são estabelecidos por meio de conjuntos nebulosos, definidos de forma bem elementar e intuitiva, através valores de pertinência  $\mu \in [0,1] \subset \mathbb{R}_+$ . Estes, por sua vez, designam numericamente a ideia incerta de quanto as informações pertencem ou não pertencem a um conjunto nebuloso. Por exemplo, para a  $k$ -ésima amostra de dados da entrada, atribuindo-se intuitivamente um valor de pertinência  $\mu(k)$  entre 0 e 1, então um valor linguístico será matematicamente definido como o conjunto nebuloso, formado pelo produto cartesiano  $(k, \mu(k)) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{R}_+$ . Em outras palavras, nesse caso, os conjuntos nebulosos são informações puramente linguísticas, e não apresentam qualquer relação matemática com a realidade numérica de variáveis físicas que os representam. Para compensar tal desvantagem, surgiram a classe dos *sistemas nebulosos linguísticos* (WANG, 1997). Como estrutura principal, o sistema nebuloso linguístico apresenta a mesma estrutura do sistema nebuloso puramente linguístico, acrescentando-se mais dois componentes periféricos: o *fuzzificador* e o *defuzzificador* (WANG, 1997). O fuzzificador realiza o mapeamento matemático dos valores físicos para os valores linguísticos das entradas do sistema, por meio de conjuntos nebulosos, ou seja, baseando-se no exemplo anterior, um conjunto nebuloso agora seria definido como o produto cartesiano  $(u(k), \mu[u(k)]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , com  $u(k) \in \mathbb{R}$  sendo o  $k$ -ésimo valor físico de uma entrada  $u$  do sistema. Já o defuzzificador realiza o comportamento inverso ao fuzzificador, efetuando o mapeamento dos valores linguísticos para os valores físicos das saídas do sistema, a partir de conjuntos nebulosos resultantes da máquina de inferência. Observa-se que os sistemas nebulosos linguísticos unem a intuitividade das regras de inferência dos sistemas nebulosos puramente linguísticos, com a capacidade de mapeamento entre a realidade

física e a realidade intuitiva e vice-versa, entre as variáveis de entrada e de saída do sistema. Porém, é particularmente interessante para a área de identificação de sistemas, poder representar a variável de saída, na <proposição consequente>, como uma função dos valores físicos das entradas na <proposição antecedente>. Daí surgem os sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 1985; SUGENO; KANG, 1988), cuja estrutura é praticamente a mesma estrutura do sistema nebuloso linguístico, diferenciando-se pela ausência de defuzzificador, pois a <proposição consequente> da regra de inferência não é linguístico, mas sim uma função matemática dos valores físicos representativos das entradas.

Tanto a classe de sistemas nebulosos linguísticos como a classe de sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno são aplicados em várias abordagens de controle, baseados em modelos nebulosos (SOUSA; KAYMAK, 2002). Por exemplo, Braae e Rutherford (1979 apud SOUSA; KAYMAK, 2002) deduz um controlador nebuloso baseado em modelo nebuloso linguístico; já Pedrycz (1993 apud SOUSA; KAYMAK, 2002) tem investigado métodos para deduzir uma lei de controle, usando modelos relacionais nebulosos; também em Graham e Newell (1988 apud SOUSA; KAYMAK, 2002), um controle nebuloso adaptativo, baseado em modelo relacional nebuloso, é aplicado em um equipamento de nível de líquido em escala laboratorial. Assim, no contexto de tempo discreto, uma ideia bem elementar para controlar um sistema é inverter o seu modelo, e usá-lo em configuração de malha aberta de passo a frente, o que também é válido para aplicações de estratégias de controle, baseadas em modelos nebulosos (SOUSA; KAYMAK, 2002; LATHI, 2007; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2009). A constatação dessa afirmação pode ser matematicamente demonstrada, por exemplo, a partir de um modelo SISO (do inglês *Single Input and Single Output*), definido pelo mapeamento da entrada  $u \in \mathbb{R}_+$  para a saída  $y \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $y : u \mapsto y(u) = u^2$ , conforme ilustrado na Figura 1. Nesse caso, ao trocar as posições entre a variável dependente  $y$  e a variável independente  $u$ , obtém-se o modelo inverso  $u = u(y) = \sqrt{y}$ . No contexto de controle em malha fechada, para uma um sinal de referência de saída  $y_r$ , o ideal seria que se tivesse  $y = y_r$  em regime permanente (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2009; OGATA, 2010). Sendo assim, agora no contexto de malha aberta, se fizer  $y = y_r$  no modelo inverso, e em seguida colocá-lo em série (cascata) com o modelo normal  $y = y(u) = u^2$ , então se obtém  $y = (\sqrt{y_r})^2 = y_r$ , o qual é o mesmo resultado esperado em malha fechada. Por isso que uma estratégia controle em malha aberta, baseada em modelo inverso, é uma forma bem elementar para realizar uma ação de controle eficiente e eficaz, resultando em uma das abordagens da teoria denominada *controle baseado em modelo interno* (do inglês *Internal Model Control* – IMC) (GARCIA; MORARI, 1982; MORARI, 1983; ECONOMOU; MORARI; PALSSON, 1986).

Consequentemente, a ideia do controle IMC, baseada em modelo inverso, combinada com metodologias de inteligência computacional, deu origem a novas perspectivas para o

Figura 1 – Inversão de um sistema SISO definido por  $y(u) = u^2 \forall \{u, y\} \in \mathbb{R}_+$



Fonte: autor dessa dissertação.

desenvolvimento de metodologias de identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares (PSALTIS; SIDERIS; YAMAMURA, 1988; BOULLART; KRIJGSMAN; VINGERHOEDS, 1992; DAI et al., 2003; JUNG; ENQVIST, 2013). Por exemplo, em Hunt et al. (1992), algumas abordagens de aprendizado inverso direto e de aprendizado inverso especializado são apresentadas. Em tais abordagens, as vantagens e desvantagens de cada uma delas são investigadas, no âmbito da utilização em estruturas de identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis via redes neurais, a fim de obter-se aplicações associadas à teoria de controle. Também decorrente da aplicação das técnicas de inteligência computacional, resultados promissores para identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares também têm sido alcançados no contexto nebuloso (BABUŠKA; VERBRUGGEN, 1996b; BOUKEZZOULA; GALICHET; FOULLOY, 2003; DU; ZHANG, 2008; RAHBARI et al., 2018). Por exemplo, em Batur, Srinivasan e Chan (1993), que usa dados de entrada e saída de sistema dinâmicos não lineares SISO para a identificação tanto direta como inversa dos mesmos; também Babuška (1998) investiga aspecto de obtenção de modelo inversos nebulosos do tipo relacional *singleton*. Já Sun, Mu e Li (2009) propõe um algoritmo que reúne as técnicas de SVM (do inglês *Support Vector Machine*) com mínimos quadrados e agrupamento nebuloso *c-means*. Em comum, os três últimos exemplos de identificação inversa nebulosa são direcionados para sistemas dinâmicos não lineares SISO, resultando em modelos inversos nebulosos do mesmo tipo. Por isso, desenvolver metodologias de identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis, ou seja, do tipo MIMO (do inglês *Multiple Input and Multiple Output*), consiste uma oportunidade de

colaboração para a literatura acerca do tema.

## 1.2 Motivação e Objetivos da Pesquisa

Dentre as abordagens de identificação nebulosa inversa de sistemas não lineares citadas na Seção 1.1, certas propriedades internas do sistema dinâmico a ser identificado devem ser acessíveis (BLANKEN; MEIJDENBERG; OOMEN, 2018). Sendo assim, a teoria do espaço de estados se torna particularmente atrativa. A teoria de espaço de estados originalmente foi estabelecida para sistemas dinâmicos lineares do tipo MIMO (ZADEH; DESOER, 1963; NELLES, 2001; AGUIRRE, 2015). Porém, com a propriedade de compensação paralela distribuída inerente à teoria de sistemas nebulosos (LI et al., 1999; SERRA; FERREIRA, 2009), a proposição consequente pode ser representada por modelos lineares e invariantes com o tempo, realizando o mapeamento inverso dinâmico do sistema em torno dos pontos de operação, podendo então a teoria do espaço de estados ser estabelecida. Nesse contexto, verifica-se que as metodologias de identificação nebulosa inversa de sistemas não lineares geralmente têm apresentado modelos ARX como estrutura do consequente das regras, e a teoria de espaço de estados é considerada de acordo com os regressores das saídas e entradas (BABUŠKA, 1998; AHN; ANH, 2010), o que, pela definição de estado, é procedente (OGATA, 2010). Porém, certas características da teoria do espaço de estados, como observabilidade e controlabilidade, podem não ser acessíveis mediante valores de regressores das estruturas de modelo ARX. Além disso, também torna-se interessante obter modelos no espaço de estados oriundos da realização mínima de sistemas, pois todo sistema estruturado no espaço de estados é uma realização mínima de sua matriz de transferência se, e somente se ele for controlável e observável, implicando redução de ordem do sistema original (CHEN, 1999). Em outras palavras, o sistema de realização mínima é equivalente ao sistema original, porém ocupa menos memória na computação do seu processo.

Logo, pelo que foi acima exposto, como também pelo que foi discutido acerca da aplicabilidade de identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares para controle via estratégia IMC, conforme Seção 1.1, motiva-se realizar esta pesquisa, que tem como objetivo geral propor uma metodologia de obtenção estados inversos e de estimação do comportamento das entradas de um sistema dinâmico não linear multivariável, baseado em Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno (TS) Inverso, estruturado no contexto do espaço de estados com realização mínima. De acordo com a metodologia adotada, a estimação paramétrica é obtida diretamente dos dados experimentais de entrada e saída do sistema dinâmico a ser identificado, dispensando-se a manipulação algébrica de leis físicas que regem a natureza do mesmo. Assim, ao decompor o objetivo geral, alguns objetivos específicos são obtidos como segue:

- 1) Apresentar uma fundamentação teórica com os principais tópicos a serem abordados na metodologia;
- 2) Caracterizar o modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso, a partir de abordagem por

aprendizado inverso direto;

- 3) Desenvolver uma metodologia de estimação dos submodelos locais inversos, referentes aos termos da <proposição consequente> das regras de inferência nebulosa, utilizando-se o algoritmo de identificação do filtro / observador de Kalman (do inglês *Observer Kalman / Filter Identification*), tanto em uma etapa de treinamento, para estimação paramétrica via mínimos quadrados ponderados em batelada; quanto em uma etapa adaptativa, para a estimação paramétrica via mínimos quadrados ponderados recursivos;
- 4) Desenvolver uma metodologia, variante com o tempo, para a estimação paramétrica da <proposição antecedente> das regras de inferência nebulosa, a partir do algoritmo de agrupamento nebuloso de Gustafson e Kessel (1979);
- 5) Apresentar resultados experimentais, e as respectivas análises, acerca do algoritmo de identificação nebulosa inversa resultante.

### 1.3 Contribuições do Trabalho

A originalidade da metodologia proposta está na formulação para estimação paramétrica do modelo nebuloso inverso, usando-se uma versão recursiva do OKID, em função do algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafson-Kessel (GK) (BABUŠKA, 1998). Desse forma, as contribuições podem ser destacadas, como segue:

- 1) **Janelamento de dados para implementação iterativa do algoritmo GK.** O algoritmo de Gustafson-Kessel (GK) estima os pontos de operação como centros de agrupamentos obtidos de forma otimizada por iterações, assim como a matriz de partição  $\mathfrak{M}$  com os graus de pertinência  $\mu$  de cada amostra de dados em relação a cada agrupamento, a partir do conjunto (batelada) de dados experimentais do sistema dinâmico a ser identificado (GUSTAFSON; KESSEL, 1979). Para adequá-lo ao contexto recursivo, nessa pesquisa propõe-se uma metodologia que conduza a batelada de dados a se deslocar no decorrer do tempo sob forma de janelamento, permitindo a estimação paramétrica adaptativa, porém mantendo as características de memória do conjunto de dados, com custo de armazenamento limitado ao tamanho do conjunto de dados original.
- 2) **Estimação paramétrica no espaço de estados baseada na versão nebulosa e recursiva do algoritmo OKID.** A metodologia de identificação do filtro de Kalman com observador de estados (do inglês *Observer/Kalman filter IDentification*) permite obter modelos no espaço de estados com realização mínima, a partir de dados experimentais obtidos previamente em batelada, ou a partir de dados experimentais obtidos do sistema a cada instante de tempo, de forma recursiva. (JUANG et al., 1993; JUANG; PHAN, 2004; WU et al., 2015). Conseqüentemente, os estados são estimados via observador, e o modelo resultante apresenta estrutura de um filtro de Kalman (JUANG, 1994). Associando-se essa vantagem com a estratégia de compensação paralela distribuída atribuída a sistemas nebulosos (SERRA; FERREIRA; SILVA, 2009), juntamente com a abordagem direta de identificação inversa de sistema, conforme citado acima, esta pesquisa propõe um submodelo inverso local com abordagem direta baseada em observador de estados inerente à estrutura do filtro de Kalman (observador de Kalman) para o conseqüente das regras. Com isso, algumas vantagens dessa contribuição são destacadas:

- 2.1) **Implementação de filtro de compensação paramétrica para melhoria da estimação dos parâmetros de Markov.** No contexto nebuloso, a cada instante amostral, as informações locais do estado inverso e da saída do modelo inverso local podem apresentar dinâmicas não modeladas, devido a mudanças paramétricas bruscas, decorrentes de deslocamentos bruscos dos pontos de operação, dentro do espaço de dados, inserindo interferências ruidosas nas

combinações lineares que resultam nas saídas do modelo nebuloso inverso. Por isso, nessa pesquisa propõe-se implementar um filtro de compensação paramétrica no contexto nebuloso, a fim de atenuar tais efeitos.

- 2.2) **Redução otimizada da ordem de realização mínima do modelo nebuloso inverso.** Uma etapa do OKID consiste em utilizar o algoritmo de realização de autossistemas ERA (do inglês *Eigensystem Realization Algorithm*). No contexto nebuloso, o ERA utiliza a decomposição de valores singulares SVD (do inglês *Singular Value Decomposition*) da matriz de Hankel, para extrair a ordem de realização mínima, e estimar os parâmetros do modelo inverso com o observador de Kalman em cada ponto de operação. Dentro dos valores singulares que determinam a ordem de realização mínima, podem existir valores singulares menos significativos, decorrentes de informações ruidosas, pouco contribuindo para representar o mapeamento inverso de forma adequada em cada ponto de operação. Para lidar com essa desvantagem, essa pesquisa propõe reduzir a ordem de realização mínima, por meio da solução de um problema de otimização, tendo em vista um fator de significância de cada valor singular com relação ao primeiro valor singular do modelo obtido em cada ponto de operação, para que seja obtida uma ordem de realização mínima reduzida como referência para o modelo inverso de cada ponto de operação.
- 3) **Estimação de estados nebulosos no contexto do mapeamento inversos de sistemas dinâmicos não lineares.** Como resultado do OKID, estados inversos locais no contexto do espaço de estados são estimados com observador de Kalman, e são combinados linearmente para compor o estado nebuloso estimado do mapeamento inverso do sistema. Os estados inversos estimados ainda são novidades que podem ser exploradas em várias aplicações que vão da teoria de controle à análise de comportamento decorrente do mapeamento inverso de sistemas não lineares.
- 4) **Estimação de modelo nebuloso TS inverso com abordagem direta com observador de Kalman para regime permanente.** Como aspecto prático, é importante verificar se o modelo inverso estimado consegue captar ou não a não-linearidade estática inversa do sistema dinâmico a ser identificado. Para isso, a metodologia adotada usa os parâmetros dos modelos locais inversos, estimados em batelada, para análises em regime permanente.

## 1.4 Produção Bibliográfica

Os trabalhos que evidenciam a produção científica do autor dessa dissertação no decorrer da pesquisa, e são estabelecidos conforme a seguinte lista de tópicos:

§§ Seção 1.4.1: Artigos Publicados de Congressos e Conferências;

### 1.4.1 Artigos Publicados de Congressos e Conferências

Os artigos e resumos de trabalhos apresentados em congressos, os quais foram publicados, estão listados como segue:

- 1) \_\_\_\_\_. Proposta de identificação de sistemas dinâmicos não lineares baseada em modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso: Uma abordagem direta no contexto do espaço de estados. In: *Conference Proceedings of XXII Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa: [s.n.], 2018. ISSN 2525-8311. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.20906/CPS/CBA2018-1064>>.
- 2) \_\_\_\_\_. Proposta de modelagem inversa nebulosa recursiva baseada em dados experimentais de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis: uma abordagem no contexto do espaço de estados (resumo). In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. São Carlos: SBMAC, 2019.
- 3) MAGALHÃES, Adriano Mendes; SERRA, Ginalber Luiz de Oliveira. Identificação inversa recursiva multivariável baseada em modelo nebuloso de realização mínima no espaço de estados com observador de Kalman. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente 2019*. [S.l.: s.n.].

## 1.5 Organização da Dissertação

A sequência de tópicos que compõe a proposta dessa dissertação inicia com a fundamentação teórica, apresentada no Capítulo 2. Nesse capítulo, a base de formulações e de teorias, necessárias para delimitar o desenvolvimento da metodologia, são abordadas conforme três aspectos: identificação e realização de sistemas, sistemas nebulosos e modelagem inversa de sistemas. A partir desses aspectos teóricos, a metodologia de identificação nebulosa inversa proposta por essa dissertação é estabelecida, conforme o Capítulo 3. Nesse capítulo, a estratégia de obtenção do modelo nebuloso inverso é detalhada através de suas partes, até finalizar com um algoritmo que permite implementar tal proposta de forma recursiva, a partir de uma etapa de treinamento em batelada. Em seguida, para demonstração prática da metodologia, um conjunto de resultados experimentais é apresentado no Capítulo 4. Tais resultados são baseados em dados experimentais de três estudos de casos de sistemas dinâmicos multivariáveis e não lineares, a saber, um tanque de reação de agitação química, uma planta de *benchmark* de simulação de um modelo Hammerstein e um helicóptero com 2 graus de liberdade. Por fim, uma análise dos resultados e as considerações finais dos mesmos, no sentido de destacar observações e objetivos alcançados na dissertação, são apresentadas como conclusões no Capítulo 5. Além disso, paralelo ao desenvolvimento desses capítulos, algumas notas e apontamentos teóricos, os quais são desenvolvidos pelo autor da dissertação, bem como são necessários para complementar o entendimento da metodologia, são apresentados como apêndices, no fim da dissertação.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O propósito de obter-se o comportamento inverso de um sistema está em poder compensar ou extrair informações referentes às entradas de um sistema, a partir de suas saídas. Por isso, a literatura tem dedicado um nicho de pesquisa para o tema identificação inversa em várias áreas da ciência, inclusive para sistemas de fenômenos não lineares, conforme mencionado no Capítulo 1. Assim, metodologias que utilizam sistemas nebulosos são particularmente interessantes para aplicações no contexto de identificação inversa de sistemas dinâmicos não lineares, devido a propriedade de aproximação universal, além de poderem inserir tanto informações do conhecimento do especialista, como informações associadas a um conjunto de dados que realizam um mapeamento inverso (WANG, 1997; BABUŠKA, 1998).

Nesse contexto, esse capítulo tratará dos aspectos teóricos necessários para desenvolver e implementar a metodologia de identificação inversa nebulosa adaptativa de sistemas dinâmicos não lineares, proposta por essa dissertação. Para isso, assume-se que os tópicos listados na Tabela 1 são conhecidos *a priori*. Além disso, o capítulo está estruturado nos seguintes tópicos:

- § Seção 2.1: Aspectos Teóricos de Identificação e Realização de Sistemas Dinâmicos;
- § Seção 2.2: Aspectos Teóricos da Sistemas Nebulosos;
- § Seção 2.3: Aspectos Teóricos da Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos.

Tabela 1 – Tópicos de conhecimentos que são pré-requisitos para o entendimento do Capítulo 2.

ÁREA DE CONHECIMENTO	TÓPICO DE CONHECIMENTO	LEITURAS RECOMENDADAS E COMPLEMENTARES
Análise de Sistemas	a) Representação de sistemas sob forma de equações diferenciais e equações a diferenças; b) Representação de sistemas baseados em Transformada de Laplace e Transformada Z; c) Representação de sistemas no espaço de estados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para o item a) recomenda-se o Capítulo 2 do Luenberger (1979) ou os Capítulos 2 e 3 do Lathi (2007).</li> <li>• Para o item b) recomenda-se os Capítulos 4 e 5 do Lathi (2007) ou os capítulos 3 e 8 do Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009).</li> <li>• Para o item c) recomenda-se o Capítulo 2 do Chen (1999) ou o capítulo 4 do Luenberger (1979).</li> </ul>
Álgebra Linear Aplicada a Sistemas Lineares	a) Todos os tópicos relativos ao Capítulo 3 do Chen (1999).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Capítulo 03 do Luenberger (1979).</li> </ul>
Modelagem e identificação de sistemas dinâmicos	a) Conceitos básicos de modelagem de sistemas dinâmicos; b) Representação de sistemas e modelos lineares; c) Estimadores de mínimos quadrados, estimadores recursivos e validação de modelos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para os todos os itens, recomenda-se os Capítulos 1, 2, 5, 8, e 12 de Aguirre (2000), assim como Young (1984).</li> </ul>
Sistemas Nebulosos	a) Noções teóricas clássicas sobre conjuntos versus noções teóricas de conjuntos nebulosos; b) Operações com conjuntos nebulosos e variáveis nebulosas; c) Regras de inferência lógica clássica versus regras de inferência nebulosa; d) Noções teóricas de sistemas nebulosos a partir de seus elementos básicos. e) Sistemas nebulosos do tipo Takagi-Sugeno. f) Noções teóricas acerca de agrupamentos nebulosos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para os Itens a) a d), recomenda-se os Capítulos 1 ao 8 de Wang (1997).</li> <li>• Para os Itens e) e f), recomenda-se os Capítulos 1 ao 3 de Babuška (1998).</li> </ul>

Fonte: autor dessa dissertação.

## 2.1 Aspectos Teóricos de Identificação e Realização de Sistemas Dinâmicos

Em diversos setores da ciência, pesquisadores estudam métodos de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas ou fenômenos físicos, proporcionando o surgimento de novas tecnologias que auxiliem no desenvolvimento da humanidade (AGUIRRE, 2015; SHAFIQUE; SAYEED; TSAKALIS, 2018; CHENG et al., 2018; PORTER, 2018). Tais métodos definem uma área da ciência, denominada por *modelagem*.

Dentre as formas utilizadas para obter-se modelos matemáticos, destaca-se a *modelagem caixa branca*, a *modelagem caixa preta* e a *modelagem caixa cinza* (NELLES, 2001; AGUIRRE, 2015; LUGHOFER, 2011). A modelagem caixa branca é conhecida pela utilização de deduções analíticas da teoria estabelecida pela física ou natureza do processo ou fenômeno na obtenção dos modelos (AGUIRRE, 2015). Por isso, o modelo daí resultante apresenta uma estrutura bem definida, cujos parâmetros são invariantes com o tempo, e estão associados diretamente com a natureza do processo que o originou. Por outro lado, a modelagem caixa preta, também conhecida como *identificação de sistemas*, é o tipo de modelagem resultante de uma representação matemática, a qual é completamente obtida, extraída ou aprendida dos dados experimentais, produzindo assim uma resposta que seja compatível com a saída do sistema ou fenômeno identificado, de acordo com uma dada entrada (LUGHOFER, 2011). Logo, apesar de também apresentar uma estrutura bem definida, os parâmetros do modelo resultante não tem relação alguma com o processo, visto que são estimados diretamente dos dados, e não deduzidos das leis que conduzem a natureza do respectivo processo. Além do mais, a associação de aspectos do conhecimento do especialista (parte branca), para auxiliar a identificação do sistema (parte cinza), dá origem a outro tipo de modelagem, denominado modelagem caixa cinza. Nesse caso, a determinação da estrutura do modelo depende fortemente de alguma informação auxiliar, enquanto que os parâmetros do modelo são principalmente determinados pelos dados experimentais (NELLES, 2001).

Um modelo multivariável, ou seja, com múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês *Multiple Input and Multiple Output – MIMO*), pode ser representado por um mapeamento matemático de  $r$  entradas  $u_1, \dots, u_r$  para  $m$  saídas  $y_1, \dots, y_m$ . Assim, dependendo da complexidade estrutural resultante dos tipos de modelagem, dos quais estão acima mencionados, esse mapeamento matemático pode possuir aspectos lineares representativos, baseados em dois tipos de estruturas: a matriz de transferência ou o espaço de estados. No contexto do tempo discreto, a *matriz de transferência* representa um modelo MIMO por meio das funções de transferência que compõem os elementos de sua estrutura. Cada função de transferência é obtido por meio da transformada Z de uma equação a diferenças finitas, a qual representa o mapeamento de cada entrada com cada saída do modelo. Por outro lado, na estrutura descrita no *espaço de estados*, o modelo linear MIMO é representado por duas equações: uma *equação de saídas* (estática), e outra equação a diferenças finitas (dinâmica), dada em função do *vetor de estados*, e por isso denominada *equação de estados*. Quanto a

aplicabilidade na área de engenharia de controle, a estrutura de matriz de transferência possui mais transparência na abstração de informações dinâmicas do modelo, facilitando a implementação de estratégias clássicas de controle, como projetos de controle PID por alocação de pólos ou por análise de reposta em frequência, por exemplo; enquanto que a estrutura do espaço de estados é mais eficiente, no que diz respeito a implementação computacional, além de ser mais indicada para abordagens de controle moderno, como estratégias de controle robusto e preditivo, por exemplo (CHEN, 1999; OGATA, 2010).

Ambas as representações de matriz de transferência e espaço de estados são equivalentes sob condição de ordem mínima, e por isso pode-se obter uma estrutura do espaço de estados, a partir da sua correspondente matriz de transferência, através de metodologias denominadas *estratégias de realização de sistemas* (CHEN, 1999). Assim, a fim de alinhar as abordagens de identificação e realização de sistemas dinâmicos com a metodologia proposta por esta dissertação, nessa seção serão abordados aspectos teóricos inerentes a estas abordagens, conforme os seguintes tópicos:

§§ Seção 2.1.1: Aspectos de Realização de Sistemas Dinâmicos;

§§ Seção 2.1.2: Aspectos de Identificação dos Parâmetros de Markov.

### 2.1.1 Aspectos de Realização de Sistemas Dinâmicos

Dentre a classe de sistemas dinâmicos lineares MIMO a parâmetros concentrados e invariantes com o tempo, destacam-se duas formas de representação: a representação da *matriz de transferência* e a representação no *espaço de estados* (CHEN, 1999; OGATA, 2010; AGUIRRE, 2015). Assim, seja um sistema  $\mathbf{S}$ , do tipo dinâmico, linear, MIMO de  $r$  entradas e  $m$  saídas, causal, de parâmetros concentrados e invariantes no tempo. Logo,  $\mathbf{S}$  pode ser representado pelo modelo  $\widehat{\mathbf{S}}$ , do tipo autorregressivo de entradas externas (do inglês *AutoRegressive with eXogeneous inputs – ARX*), estruturado da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{y}}(\xi) + \mathbf{a}_1 \hat{\mathbf{y}}(\xi - 1) + \cdots + \mathbf{a}_n \hat{\mathbf{y}}(\xi - n) = \mathbf{b}_1 \mathbf{u}(\xi - 1) + \cdots + \mathbf{b}_n \mathbf{u}(\xi - n) \quad (2.1)$$

na qual  $\xi$  é o índice da  $\xi$ -ésima amostra contida dentro de uma sequência de  $l$  dados;  $\mathbf{u}(\xi) = [u_1(\xi), \dots, u_r(\xi)]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  e  $\hat{\mathbf{y}}(\xi) = [\hat{y}_1(\xi), \dots, \hat{y}_m(\xi)]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  são os vetores de entradas do sistema e de saídas do modelo, respectivamente;  $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^{m \times r}$  são as matrizes dos coeficientes, associadas aos regressores das saídas (autorregressores) do modelo e aos regressores das entradas do sistema, respectivamente; com  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  sendo a ordem (mínima) do modelo. Aplicando a transformada Z no modelo ARX da Eq. (2.1), resulta-se em uma matriz de transferência racional própria  $\widehat{\mathbf{S}}(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ , tal que:

$$\mathcal{A}(z) \triangleq \mathbf{I}_m + \mathbf{a}_1 z^{-1} + \cdots + \mathbf{a}_n z^{-n} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}(z) \triangleq \mathbf{b}_1 z^{-1} + \cdots + \mathbf{b}_n z^{-n} \quad (2.3)$$

$$\widehat{\mathbf{S}}(z) \triangleq \mathcal{A}^{-1}(z) \mathbf{B}(z) \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(z) \triangleq \widehat{\mathbf{S}}(z) \mathbf{u}(z) \quad (2.5)$$

na qual  $\mathcal{A}(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathbf{B}(z) \in \mathbb{R}^{m \times r}$  são matrizes polinomiais em  $z$  respectivamente;  $\hat{\mathbf{y}}(z) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $\mathbf{u}(z) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  são os vetores de entradas do sistema e de saídas do modelo, ambos no domínio da frequência, respectivamente. Por outro lado, o mesmo sistema pode ser representado por um modelo, descrito no espaço de estados, da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(\xi + 1) \triangleq \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(\xi) + \mathbf{B} \mathbf{u}(\xi) \quad (2.6a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\xi) \triangleq \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(\xi) + \mathbf{D} \mathbf{u}(\xi) \quad (2.6b)$$

na qual  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  são a *matriz dinâmica ou matriz de estados do modelo*, *matriz de entradas*, *matriz de saídas*, *matriz dos termos de transição direta* (OGATA, 2010), respectivamente;  $\hat{\mathbf{x}}(\xi) = [\hat{x}_1(\xi), \dots, \hat{x}_n(\xi)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o *vetor de estados do modelo*. A partir do modelo, que representa o sistema no espaço de estados, conforme as Eqs. (2.6a) e (2.6b), pode-se obter a matriz de transferência do modelo  $\widehat{\mathbf{S}}(z)$  da Eq. (2.4) da seguinte forma:

$$\widehat{\mathbf{S}}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.7)$$

na qual  $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Contudo, em certas ocasiões, apenas a matriz de transferência está disponível, desejando-se encontrar o modelo no espaço de estados. A esse problema denomina-se *realização de sistemas dinâmicos lineares* (CHEN, 1999).

Uma matriz de transferência  $\mathbf{S}(z)$  é dita *realizável* se, e somente se existe uma representação no espaço de estados conforme as Eqs. (2.6a) e (2.6b), tal que se possa obter a identidade expressada pela Eq. (2.4) (JUANG, 1994; CHEN, 1999). Logo, existe um único mapeamento, que a partir do espaço de estados, chega-se a matriz de transferência; porém, existem vários tipos e dimensões de mapeamentos da matriz de transferência para a representação no espaço de estados, tornando complexo o problema da realização de sistemas (CHEN, 1999). Nessa seção, aspectos da teoria de realização de sistemas dinâmicos lineares serão apresentados, os quais serão combinados com aspectos da teoria de identificação de sistemas, para fundamentar a metodologia da proposta de identificação inversa de sistemas não lineares dessa dissertação.

### 2.1.1.1 Os parâmetros de Markov

Para um conjunto de  $l$  dados, existe um parâmetro de predição  $q \in [1, l) \subset \mathbb{Z}_+^*$ ,  $n \leq q < l$ . Desenvolvendo a Eq. (2.6a) de  $\xi + 1$  até  $\xi + q$  tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(\xi + 1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\xi) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi) \\
\hat{\mathbf{x}}(\xi + 2) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\xi + 1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + 1) \\
&= \mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(\xi) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + 1) \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{x}}(\xi + (q - 1)) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\xi + (q - 2)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 2)) \\
&= \mathbf{A}^{(q-1)}\hat{\mathbf{x}}(\xi) + \mathbf{A}^{(q-2)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi) + \mathbf{A}^{(q-3)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + 1) + \dots + \\
&\quad \mathbf{A}^{(q-(q-2))}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 4)) + \mathbf{A}^{(q-(q-1))}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 3)) + \\
&\quad \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 2)) \tag{2.8} \\
\hat{\mathbf{x}}(\xi + q) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\xi + (q - 1)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 1)) \\
&= \mathbf{A}^q\hat{\mathbf{x}}(\xi) + \mathbf{A}^{(q-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi) + \mathbf{A}^{(q-2)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + 1) + \dots + \\
&\quad \mathbf{A}^{(q-(q-2))}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 3)) + \mathbf{A}^{(q-(q-1))}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 2)) + \\
&\quad \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - 1)) \\
&= \mathbf{A}^q\hat{\mathbf{x}}(\xi) + \sum_{\iota=1}^q \mathbf{A}^{(q-\iota)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (\iota - 1)) \\
&= \sum_{\iota=1}^q \mathbf{A}^{(\iota-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi + (q - \iota)) + \mathbf{A}^q\hat{\mathbf{x}}(\xi)
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado do desenvolvimento da Eq. (2.8) na Eq. (2.6b) para  $\xi + q$ , tem-se:

$$\hat{\mathbf{y}}(\xi + q) = \mathbf{D}\mathbf{u}(\xi + q) + \sum_{\iota=1}^q \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi - (\iota - q)) + \mathbf{C}\mathbf{A}^q\hat{\mathbf{x}}(\xi) \tag{2.9}$$

Se o modelo é assintoticamente estável, o parâmetro  $q$  reduz influência da matriz dinâmica  $\mathbf{A}$  sobre o regime transitório da equação de saídas do modelo da Eq. (2.6b) para todo  $\xi \geq q$ , pois  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{C}\mathbf{A}^\xi\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Por isso, algumas vezes, o parâmetro de predição  $q$  é denominado de *índice de deadbeat* (CHEN, 1999; PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991; WU et al., 2015). Dessa forma, a Eq. (2.9) pode ser reescrita como:

$$\hat{\mathbf{y}}(\xi + q) = \mathbf{D}\mathbf{u}(\xi + q) + \sum_{\iota=1}^q \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\xi - (\iota - q)) \tag{2.10}$$

Visto que o sistema é linear, causal e invariante nos parâmetros, além de  $\mathbf{u}(\xi)$  representar um conjunto de vetores de entradas do sistema, cujos sinais também são causais, desenvolve-se a soma de convolução para  $\hat{\mathbf{y}}(\xi + q)$ , tal que:

$$\begin{aligned}
\delta(\iota) &\xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}} \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(\iota) \\
\delta(\iota)\mathbf{u}(\xi + q - \iota) &\xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}} \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(\iota)\mathbf{u}(\xi + q - \iota) \\
\underbrace{\sum_{\iota=1}^q \delta(\iota)\mathbf{u}[(q + \xi) - \iota]}_{\mathbf{u}(q+\xi)} &\xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}} \underbrace{\sum_{\iota=1}^q \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(\iota)\mathbf{u}[(q + \xi) - \iota]}_{\hat{\mathbf{y}}(q+\xi)} \\
\mathbf{u}(q + \xi) &\xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}} \hat{\mathbf{y}}(q + \xi) \\
\mathbf{u}(\xi + q) &\xrightarrow{\hat{\mathbf{S}}} \hat{\mathbf{y}}(\xi + q)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde  $\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(\iota) \in \mathbb{R}^{m \times r}$  é a resposta do modelo ao pulso unitário de Kronecker  $\delta(\iota) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se } \iota = 0 \\ 0, & \text{se } \iota \neq 0 \end{cases}$  (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991). Assim comparando os somatórios entre as Eqs. (2.10) e (2.11), obtém-se a sequência de respostas aos pulsos unitários de Kronecker tal como:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(0) &\triangleq \mathbf{D} \\
\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(1) &\triangleq \mathbf{CB} \\
\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(2) &\triangleq \mathbf{CAB} \\
&\vdots \\
\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(\iota) &\triangleq \mathbf{CA}^{(\iota-1)}\mathbf{B} \\
&\vdots \\
\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(q-1) &\triangleq \mathbf{CA}^{(q-2)}\mathbf{B} \\
\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{H}}(q) &\triangleq \mathbf{CA}^{(q-1)}\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

como sendo os *parâmetros de Markov* que definem a resposta impulsiva do modelo ARX da Eq. (2.1) (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991).

### 2.1.1.2 A matriz de Hankel

A partir dos parâmetros de Markov, torna-se possível montar algumas estruturas matriciais, as quais são frequentemente utilizadas na teoria de realização de sistemas (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991). Dentre essas estruturas matriciais, destaca-se a *matriz de Hankel*. No contexto do modelo da Eq. (2.1), a estrutura matricial da matriz de Hankel  $\widehat{\mathcal{H}}(\iota - 1) \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times (g+1)r}$  pode ser definida como:

$$\widehat{\mathcal{H}}(\iota-1) \triangleq \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota) & \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+1) & \cdots & \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+g) \\ \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+1) & \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+2) & \cdots & \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+1+g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+p) & \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+p+1) & \cdots & \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota+p+g) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $p \in \mathbb{Z}_+^*$  e  $g \in \mathbb{Z}_+^*$ , são ambos parâmetros inerentes a matriz de Hankel. Por outro lado, substituindo  $\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota-1)}\mathbf{B}$  da Eq. (2.12) na matriz de Hankel da Eq. (2.13) tem-se:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}(\iota-1) &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota-1)}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota)}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota+g-1)}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota)}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota+1)}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota+g)}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota+p-1)}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota+p)}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{(\iota+p+g-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^p \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathcal{O}}_p} \mathbf{A}^{(\iota-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^g\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathcal{C}}_g} \\ &= \widehat{\mathcal{O}}_p \mathbf{A}^{(\iota-1)} \widehat{\mathcal{C}}_g \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $\widehat{\mathcal{O}}_p \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times n}$  e  $\widehat{\mathcal{C}}_p \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)r}$  são as *matrizes de observabilidade e controlabilidade* do modelo, respectivamente. Observa-se que o modelo seja de *realização mínima*, ou seja, *observável e controlável*, se, e somente se  $\text{rank}[\widehat{\mathcal{H}}(\iota-1)] = \text{rank}(\widehat{\mathcal{O}}_p) = \text{rank}(\widehat{\mathcal{C}}_g) = \text{rank}(\mathbf{A}) = n$ , e nesse caso, isso acontecerá se, e somente se  $p+1 \geq n$  e  $g+1 \geq n$  (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991; CHEN, 1999).

### 2.1.1.3 O algoritmo de realização de autossistemas (ERA)

O *algoritmo de realização de autossistemas* (do inglês *Eigensystem Realization Algorithm – ERA*) foi inicialmente proposto por Juang e Pappa (1985), e tem como propósito estabelecer um conjunto de procedimentos que encontre os parâmetros do modelo no espaço de estado, a partir das operações matriciais com duas matrizes de Hankel  $\widehat{\mathcal{H}}(0)$  e  $\widehat{\mathcal{H}}(1)$ . Por esse motivo, o ERA acaba por ser um método de realização na forma balanceada (CHEN, 1999). Nessa seção, esse procedimento será sucintamente descrito.

A partir da Eq. (2.14), observa-se que  $\widehat{\mathcal{H}}(0) \triangleq \widehat{\mathcal{O}}_p \widehat{\mathcal{C}}_g$ . Por outro lado, aplicando a decomposição em valores singulares (do inglês *Singular Value Decomposition – SVD*) da matriz de Hankel  $\widehat{\mathcal{H}}(0)$ , resulta-se em duas matrizes ortogonais quadradas  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times (p+1)m}$  e  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(g+1)r \times (g+1)r}$ , e uma matriz retangular  $\Sigma \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times (g+1)r}$ , a qual é definida como

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

tal que  $\widehat{\mathcal{H}}(0) = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S}^T$ . Conseqüentemente, descrevendo a Eq. (2.15), tem-se as submatrizes de zeros, e a submatriz diagonal  $\boldsymbol{\Sigma}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denominada de *matriz de valores singulares*, a qual é definida como:

$$\boldsymbol{\Sigma}_n \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 \cdots 0 \\ \vdots \cdots \vdots \\ 0 \cdots \sigma_n \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde os  $\sigma_1 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\cdots$ ,  $\sigma_n \in \mathbb{R}_+^*$  são os *valores singulares* de  $\widehat{\mathcal{H}}(0)$ , tal que  $\sigma_1 > \cdots > \sigma_n$ . Contudo,  $\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S}^T \equiv \mathbf{R}_n\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{S}_n^T$ , com  $\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times n}$  e  $\mathbf{S}_n \in \mathbb{R}^{(g+1)r \times n}$  sendo matrizes ortonormais, obtidas pela extração tanto das  $(p+1)m - n$  últimas colunas de  $\mathbf{R}$  e quanto pelas  $(g+1)r - n$  últimas colunas de  $\mathbf{S}$ , respectivamente, tal que  $\text{rank}[\mathbf{R}_n] = \text{rank}[\mathbf{S}_n] = n$ . Logo:

$$\widehat{\mathcal{H}}(0) = \mathbf{R}_n\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{S}_n^T = [\mathbf{R}_n\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n}] [\mathbf{S}_n\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n}]^T \equiv \widehat{\mathcal{O}}_p\widehat{\mathcal{C}}_g \quad (2.17)$$

$$\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1} \cdots 0 \\ \vdots \cdots \vdots \\ 0 \cdots \sqrt{\sigma_n} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\widehat{\mathcal{O}}_p \triangleq \mathbf{R}_n\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n} = \mathbf{R}_n\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \quad (2.19)$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_g \triangleq [\mathbf{S}_n\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n}]^T = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n}\mathbf{S}_n^T = \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\mathbf{S}_n^T \quad (2.20)$$

onde  $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz diagonal, decorrente da raiz quadrada dos elementos de  $\boldsymbol{\Sigma}_n$ .

**Propriedade 1.** Sejam as matrizes  $\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{(p+1)r \times n}$  e  $\mathbf{S}_n \in \mathbb{R}^{(g+1)r \times n}$  matrizes ortonormais de rank  $n$ . Então

$$\mathbf{R}_n^T\mathbf{R}_n = \mathbf{S}_n\mathbf{S}_n^T = \mathbf{I}_n \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz identidade de ordem e rank  $n$ .

**Definição 1.** Seja a definição da matriz de observabilidade  $\widehat{\mathcal{O}}_p \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times n}$  de rank  $n$ , decorrente da Eq. (2.19). Defini-se a *inversa à esquerda* de  $\widehat{\mathcal{O}}_p$  a pseudoinversa  $\widehat{\mathcal{O}}_p^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)m}$  de rank  $n$ , tal que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{O}}_p^\dagger &\triangleq \left(\widehat{\mathcal{O}}_p^T \widehat{\mathcal{O}}_p\right)^{-1} \widehat{\mathcal{O}}_p^T \\
&= \left[\left(\mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\right)^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\right]^{-1} \left(\mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\right)^T \\
&= \left(\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \underbrace{\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n}_{\mathbf{I}_n} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{R}_n^T \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \underbrace{\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{R}_n^T \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T
\end{aligned} \tag{2.22}$$

com a matriz gramiana  $\widehat{\mathcal{O}}_p^T \widehat{\mathcal{O}}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica, não singular e não ortonormal.

**Definição 2.** Seja a definição da matriz de controlabilidade  $\widehat{\mathcal{C}}_g \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)m}$  de rank  $n$ , decorrente da Eq. (2.20). Defini-se a *inversa à direita* de  $\widehat{\mathcal{C}}_g$  a pseudoinversa  $\widehat{\mathcal{C}}_g^\dagger \in \mathbb{R}^{(g+1)r \times n}$  de rank  $n$ , tal que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{C}}_g^\dagger &\triangleq \widehat{\mathcal{C}}_g^T \left(\widehat{\mathcal{C}}_g \widehat{\mathcal{C}}_g^T\right)^{-1} \\
&= \left(\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T\right)^T \left[\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T\right)^T\right]^{-1} \\
&= \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \left[\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \underbrace{\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n}_{\mathbf{I}_n} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\right]^{-1} \\
&= \mathbf{S}_n \underbrace{\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}}_{\mathbf{I}_n} \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \\
&= \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

com a matriz gramiana  $\widehat{\mathcal{C}}_g \left(\widehat{\mathcal{C}}_g\right)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica, não singular e não ortonormal.

Assim, a partir da Eq. (2.15) e das Definições 1 e 2, a matriz de Hankel  $\widehat{\mathcal{H}}(1)$  pode ser escrita como  $\widehat{\mathcal{H}}(1) = \widehat{\mathcal{O}}_p \mathbf{A} \widehat{\mathcal{C}}_g$  o que resulta em:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{H}}(1) &= \widehat{\mathcal{O}}_p \mathbf{A} \widehat{\mathcal{C}}_g \Rightarrow \underbrace{\widehat{\mathcal{O}}_p^\dagger \widehat{\mathcal{H}}(1)}_{\mathbf{I}_n} \widehat{\mathcal{C}}_g^\dagger = \underbrace{\widehat{\mathcal{O}}_p^\dagger \widehat{\mathcal{O}}_p}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{A} \underbrace{\widehat{\mathcal{C}}_g \widehat{\mathcal{C}}_g^\dagger}_{\mathbf{I}_n} \Rightarrow \mathbf{A} = \widehat{\mathcal{O}}_p^\dagger \widehat{\mathcal{H}}(1) \widehat{\mathcal{C}}_g^\dagger \\
\therefore \mathbf{A} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \widehat{\mathcal{H}}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

**Definição 3.** Define-se como matrizes seletoras  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_m \in \mathbb{R}^{(p+1)m \times m}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_r \in \mathbb{R}^{(g+1)r \times r}$  as seguintes matrizes ortonormais:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_m \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{pm \times m} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_r \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{gr \times r} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

onde  $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  são matrizes identidade de ordem  $m$  e  $r$  respectivamente; enquanto que  $\mathbf{0}_{pm \times m} \in \mathbb{R}^{pm \times m}$  e  $\mathbf{0}_{gr \times r} \in \mathbb{R}^{gr \times r}$  são matrizes de zeros respectivamente.

Assim, usando as matrizes seletoras Eqs. (2.25) e (2.26), e a matriz de Hankel genérica da Eq. (2.13), observa-se que:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota) = \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \widehat{\mathcal{H}}(\iota - 1) \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad (2.27)$$

Substituindo a Eq. (2.14) na Eq. (2.27), resulta em:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(\iota) = \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \widehat{\mathcal{O}}_p \mathbf{A}^{\iota-1} \widehat{\mathcal{C}}_g \boldsymbol{\varepsilon}_r \equiv \mathbf{C} \mathbf{A}^{\iota-1} \mathbf{B} \quad (2.28)$$

ou seja,

$$\mathbf{A} = \widehat{\mathcal{O}}_p^\dagger \widehat{\mathcal{H}}(1) \widehat{\mathcal{C}}_g^\dagger = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \widehat{\mathcal{H}}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{B} = \widehat{\mathcal{C}}_g \boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad (2.30)$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \widehat{\mathcal{O}}_p = \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \quad (2.31)$$

com a matriz de transição direta  $\mathbf{D}$  sendo obtida por  $\mathbf{D} = \widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(0)$ , conforme a Eq. (2.12).

No Algoritmo 1, são apresentados os passos do procedimento do ERA, conforme as equações acima deduzidas. Observa-se que o índice de *deadbeat*  $q$  também pode ser definido como a *ordem do modelo*, inicialmente predito a partir dos dados iniciais; enquanto que  $n$  é a ordem de realização mínima do mesmo modelo, devido ao fato de  $\text{rank}[\widehat{\mathcal{H}}(0)] = \text{rank}[\widehat{\mathcal{H}}(1)] = \text{rank}(\widehat{\mathcal{O}}_p) = \text{rank}(\widehat{\mathcal{C}}_g) = \text{rank}(\mathbf{A}) = n$ , implicando  $n \leq q$ . Por isso, o modelo no espaço de estados obtido pelo ERA é uma realização balanceada, observável e controlável (JUANG, 1994; CHEN, 1999; JUANG; PHAN, 2004).

### 2.1.2 Aspectos de Identificação dos Parâmetros de Markov

Como pode-se observar da Seção 2.1.2, o modelo  $\widehat{\mathbf{S}}$  é uma representação do sistema (real)  $\mathbf{S}$ . Por isso, existirá um vetor de erros de aproximação entre o vetor de saídas do sistema  $\mathbf{y}(\xi)$  e o vetor de saídas do modelo resulta num vetor de saídas  $\widehat{\mathbf{y}}(\xi)$ . Nesse contexto, a teoria de *identificação de sistemas* atua no sentido de minimizar esse vetor de erros de aproximação, denominado *erros de estimação*, quando os parâmetros do modelo são estimados a partir de dados experimentais. Nessa seção, serão abordados aspectos teóricos, relativos ao processo de identificação dos parâmetros de Markov, inerentes à representação do espaço de estado do modelo  $\widehat{\mathbf{S}}$ , a partir de dados experimentais.

---

**Algoritmo 1** Procedimento do ERA
 

---

**Entrada:** O parâmetro de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(0)$  e as matrizes de Hankel  $\widehat{\mathcal{H}}(0)$  e  $\widehat{\mathcal{H}}(1)$ , as quais são decorrentes da Eq. (2.13).

**Saída:** Os parâmetros  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  do modelo no espaço de estados, conforme a Eq. (2.6).

1: **Procedimento** ERA  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(0), \widehat{\mathcal{H}}(0), \widehat{\mathcal{H}}(1))$

▷ PASSO 01: Definir as matrizes de  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ , conforme as Eqs. (2.25) e (2.26), respectivamente.

▷ PASSO 02: A partir de  $\widehat{\mathcal{H}}(0)$ ,  $\widehat{\mathcal{H}}(1)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  e  $\widehat{\mathbf{Y}}_{\mathcal{X}}(0)$ , obter os parâmetros  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , conforme as Eqs. (2.29) a (2.31) e a Eq. (2.12), respectivamente.

2: **Retorne**  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$

3: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

### 2.1.2.1 Identificação em batelada dos parâmetros de Markov

O processo de identificação dos parâmetros de Markov começa a partir de um conjunto (ou batelada) de  $l \in \mathbb{Z}_+^*$  dados de entradas e saídas do sistema. Escrevendo Eq. (2.10) em forma matricial tem-se:

$$\hat{\mathbf{y}}(\xi + q) = \widehat{\mathbf{Y}}(l)\mathbf{v}[(\xi - 1) + q] \quad (2.32)$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}(l) \triangleq [\mathbf{D} \ \mathbf{C}\mathbf{B} \ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(q-2)}\mathbf{B} \ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(q-1)}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{v}[(\xi - 1) + q] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\xi + q) \\ \mathbf{u}[(\xi - 1) + q] \\ \mathbf{u}[(\xi - 2) + q] \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\xi + 1) \\ \mathbf{u}(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

onde  $\widehat{\mathbf{Y}}(l) \in \mathbb{R}^{m \times (q+1)r}$ , é a *matriz dos parâmetros de Markov* do modelo, com  $\widehat{\mathbf{y}}_1(l) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times 1}$ ,  $\dots$ ,  $\widehat{\mathbf{y}}_m(l) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times 1}$  sendo os vetores correspondendo aos elementos das linhas de  $\widehat{\mathbf{Y}}(l)$ , os quais estão associados às saídas de  $y_1$  a  $y_m$  do modelo, respectivamente; e  $\mathbf{v}[(\xi - 1) + q] \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times 1}$  é o *vetor de regressores* do sistema. Para  $\xi \in [1, l - q] \subset \mathbb{Z}_+^*$  na Eq. (2.32) tem-se:

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}}(l) = \widehat{\mathbf{Y}}(l)\mathbf{V}(l - 1) \quad (2.35)$$

$$\widehat{\mathfrak{Y}}(l) \triangleq [\hat{\mathbf{y}}(1+q) \cdots \hat{\mathbf{y}}(\xi+q) \cdots \hat{\mathbf{y}}(l)] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1^T(l) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_m^T(l) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{V}(l-1) \triangleq [\mathbf{v}(q) \cdots \mathbf{v}[(\xi-1)+q] \cdots \mathbf{v}(l-1)] \quad (2.37)$$

onde  $\widehat{\mathfrak{Y}}(l) \in \mathbb{R}^{m \times (l-q)}$  é a *matriz de amostras dos vetores de saídas do modelo*, obtida dentro do conjunto de  $l$  dados, com  $\hat{\mathbf{y}}_1(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times 1}, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times 1}$  sendo os vetores correspondendo aos elementos das linhas de  $\widehat{\mathfrak{Y}}(l)$ , os quais estão associados às saídas de  $\hat{y}_1$  a  $\hat{y}_m$  do modelo; e  $\mathbf{V}(l-1) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times (l-q)}$  é a *matriz de regressores*, obtida dentro do mesmo conjunto de  $l$  dados. Além disso, nesse mesmo contexto, sejam a *matriz de amostras dos vetores de saídas do sistema*  $\mathfrak{Y}(l) \in \mathbb{R}^{m \times (l-q)}$ , a *matriz de vetores dos erros de estimação*  $\mathbf{E}(l) \in \mathbb{R}^{m \times (l-q)}$ , e a *matriz de ponderação*  $\mathbf{W}(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times (l-q)}$  definidas respectivamente como:

$$\mathfrak{Y}(l) \triangleq [\mathbf{y}(1+q) \cdots \mathbf{y}(\xi+q) \cdots \mathbf{y}(l)] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T(l) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^T(l) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{E}(l) \triangleq \mathfrak{Y}(l) - \widehat{\mathfrak{Y}}(l) = [\boldsymbol{\varepsilon}(1+q) \cdots \boldsymbol{\varepsilon}(\xi+q) \cdots \boldsymbol{\varepsilon}(l)] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T(l) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^T(l) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{W}(l) \triangleq \begin{bmatrix} \gamma(1+q) \cdots 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma(\xi+q) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \gamma(l) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

com  $\mathbf{y}_1(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times 1}, \dots, \mathbf{y}_m(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times 1}$  sendo os vetores correspondendo aos elementos das linhas de  $\mathfrak{Y}(l)$ , os quais estão associados às saídas de  $y_1$  a  $y_m$  do sistema;  $\gamma(\xi+q) \in (0,1] \subset \mathbb{R}_+^*$  sendo valores escalares de ponderação; e  $\mathbf{e}_1(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times 1}, \dots, \mathbf{e}_m(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times 1}$  sendo os vetores correspondendo aos elementos das linhas de  $\mathbf{E}(l)$ , os quais estão associados às variáveis dos erros de estimação de  $\varepsilon_1 = y_1 - \hat{y}_1$  a  $\varepsilon_m = y_m - \hat{y}_m$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(l) &\triangleq \mathbf{y}_1(l) - \mathbf{V}^T(l-1)\widehat{\mathfrak{Y}}_1(l) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_m(l) &\triangleq \mathbf{y}_m(l) - \mathbf{V}^T(l-1)\widehat{\mathfrak{Y}}_m(l) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como dito anteriormente, a teoria de identificação de sistemas é aplicada nesse contexto, a fim de minimizar o erro de estimação ao  $l - q$  amostras de saídas do sistema e

do modelo. Para isso, uma função de custo quadrática do erro de estimação é estabelecida da seguinte forma:

$$J[\widehat{\mathbf{Y}}(l)] = J \left\{ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)] \\ \vdots \\ J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)] \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{e}_1(l) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{e}_m(l) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)] &\triangleq \mathbf{y}_1^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{y}_1(l) - \mathbf{y}_1^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \widehat{\mathbf{y}}_1(l) - \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{y}_1(l) \\ &\quad + \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \widehat{\mathbf{y}}_1(l) \\ &\quad \vdots \\ J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)] &\triangleq \mathbf{y}_m^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{y}_m(l) - \mathbf{y}_m^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \widehat{\mathbf{y}}_m(l) - \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{y}_m(l) \\ &\quad + \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \widehat{\mathbf{y}}_m(l) \end{aligned} \quad (2.43)$$

que são funções de custo estabelecidas para cada uma das saídas do modelo  $\widehat{\mathbf{S}}$ . Nesse contexto, aplicando a operação vetorial de gradiente sobre tais funções de custo, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \left\{ J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)] \right\} &= \left[ \frac{\partial J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]}{\partial \mathcal{Y}_{11}}, \dots, \frac{\partial J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]}{\partial \mathcal{Y}_{1[(q+1)r]}} \right] \\ &\triangleq \frac{\partial J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)} \\ &= -\mathbf{y}_1^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) - [\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{y}_1(l)]^T \\ &\quad + 2\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \\ &= -2\mathbf{y}_1^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) + 2\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \nabla \left\{ J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)] \right\} &= \left[ \frac{\partial J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]}{\partial \mathcal{Y}_{m1}}, \dots, \frac{\partial J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]}{\partial \mathcal{Y}_{m[(q+1)r]}} \right] \\ &\triangleq \frac{\partial J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)} \\ &= -\mathbf{y}_m^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) - [\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{y}_m(l)]^T \\ &\quad + 2\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \\ &= -2\mathbf{y}_m^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) + 2\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) \end{aligned}$$

e, em seguida, aplicando a operação de obtenção da matriz hessiana em cada uma das funções de custo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\nabla \nabla^T \left\{ J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right] \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{11}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{11}} \right\}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{1[(q+1)r]}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{11}} \right\} \\ \vdots, \dots, \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{11}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{1[(q+1)r]}} \right\}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{1[(q+1)r]}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{1[(q+1)r]}} \right\} \end{bmatrix} \\
&\triangleq \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1(l) \right]}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_1(l)} \right\} = \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)} \left( \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1(l) \right]}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_1(l)} \right\}^T \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)} \left[ -2\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{y}_1(l) + 2\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)\widehat{\mathbf{y}}_1(l) \right] \\
&= 2\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) \\
&\vdots \\
\nabla \nabla^T \left\{ J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right] \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{m1}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{m1}} \right\}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{m[(q+1)r]}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{m1}} \right\} \\ \vdots, \dots, \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{m1}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{m[(q+1)r]}} \right\}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}_{m[(q+1)r]}} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right]}{\partial \mathcal{Y}_{m[(q+1)r]}} \right\} \end{bmatrix} \\
&\triangleq \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)} \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m(l) \right]}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_m(l)} \right\} = \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)} \left( \left\{ \frac{\partial J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m(l) \right]}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_m(l)} \right\}^T \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)} \left[ -2\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{y}_m(l) + 2\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)\widehat{\mathbf{y}}_m(l) \right] \\
&= 2\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

com a matriz  $\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)$  sendo naturalmente simétrica. Conseqüentemente, define-se o *problema de otimização (minimização) estrita local dos erros quadráticos ponderados* como sendo:

$$\left[ \widehat{\mathbf{Y}}(l) \right]^* \triangleq \underset{\widehat{\mathbf{Y}}(l)}{\arg \min} J \left[ \widehat{\mathbf{Y}}(l) \right] = \begin{bmatrix} \arg \min J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right] \\ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \\ \vdots \\ \arg \min J \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right] \\ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) \right]^* \\ \vdots \\ \left[ \widehat{\mathbf{y}}_m^T(l) \right]^* \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

onde  $\widehat{\mathbf{Y}}(l) = [\widehat{\mathbf{Y}}(l)]^*$  é ponto de inflexão local ou candidato local que otimiza Eq. (2.42).

Uma forma de resolver o problema de otimização para obtenção de  $[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]^*$  é quebrá-lo em vários subproblemas de otimização, conforme descrito na Eq. (2.46). Assim, nesse seção, é escolhido o subproblema associado a saída  $y_1$  do sistema (e do modelo) para ser resolvido, ou seja,  $J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]$ , e em seguida, a sua solução é padronizada para as demais saídas do sistema.

**Lema 1.** *Condições suficientes de segunda ordem (CHONG; ŽAK, 2013).*

Seja a função custo  $J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]$  duplamente diferenciável dentro da região onde  $[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^*$  é um ponto interno (ponto de inflexão local ou candidato local a ótimo do respectivo problema de otimização). Se

$$\nabla \left\{ J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)] \right\} \Big|_{\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)=[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^*} = \mathbf{0} \quad (2.47)$$

$$\nabla \nabla^T \left\{ J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)] \right\} \Big|_{\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)=[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^*} > 0 \quad (2.48)$$

então o ponto interno  $\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l) = [\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^*$  é um minimizador estrito local de  $J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]$ .

**Prova.** Tais condições são decorrentes das condições de suficiência de segunda ordem para resolver problemas de otimização multivariável irrestritos, as quais são deduzidas conforme Chong e Žak (2013, p. 92).  $\square$

Seja a matriz  $\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)$  inversível, isto é,  $\text{rank}[\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)] = (q+1)r$ . Com isso, baseando-se na Eq. (2.47), pode-se reescrever a Eq. (2.44) para a saída  $y_1$  do sistema (e do modelo) como sendo:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{y}_1^T(l)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) + 2[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^* \mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ [\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^* \mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) &= \mathbf{y}_1^T(l)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) \Rightarrow \\ [\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^* &= \mathbf{y}_1^T(l)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) [\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Agora, replicando a Eq. (2.49) para todas as saídas do modelo tem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} [\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^* \\ \vdots \\ [\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) [\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1)]^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^T(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) [\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1)]^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} [\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^* \\ \vdots \\ [\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]^* \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T(l) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^T(l) \end{bmatrix}}_{\mathfrak{Y}(l)} \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) [\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1)]^{-1} \therefore \quad (2.50) \\
[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]^* &= \mathfrak{Y}(l) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) [\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1)]^{-1}
\end{aligned}$$

que é o ponto de inflexão da função de custo  $J[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]$ , conforme a Eq. (2.47) do Lema 1. No entanto, para que os pontos de inflexão  $[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^*, \dots, [\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]^*$  da Eq. (2.50) sejam um minimizadores estritos locais das funções de  $J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)], \dots, J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]$ , as matrizes hessianas, decorrentes desses pontos de inflexão, devem ser semidefinidas positivas, respectivamente. Assim, da Eq. (2.45), tem-se que

$$\begin{aligned}
\nabla \nabla^T \left\{ J[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)] \right\} \Big|_{\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)=[\widehat{\mathbf{y}}_1^T(l)]^*} &= 2\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) > 0 \\
&\vdots \quad (2.51)
\end{aligned}$$

$$\nabla \nabla^T \left\{ J[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)] \right\} \Big|_{\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)=[\widehat{\mathbf{y}}_m^T(l)]^*} = 2\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) > 0$$

e conseqüentemente a partir da Eq. (2.51), observa-se que a matriz hessiana, aplicada ao ponto de inflexão  $[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]^*$ , também deve ser semidefinida positiva, ou seja:

$$\nabla \nabla^T \left\{ J[\widehat{\mathbf{Y}}(l)] \right\} \Big|_{\widehat{\mathbf{Y}}(l)=[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]^*} = 2\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) > 0 \quad (2.52)$$

onde a matriz gramiana  $\mathbf{V}(l-1) \mathbf{W}(l) \mathbf{V}^T(l-1) = \mathbf{V}(l-1) \sqrt{\mathbf{W}(l)} [\mathbf{V}(l-1) \sqrt{\mathbf{W}(l)}]^T$  será simétrica e semidefinida positiva de formação, somente se Teorema 1 for atendido.

**Teorema 1.** *Seja a Eq. (2.50) proposta como solução do problema de mínimos quadrados ponderados (ótima) MIMO referente à Eq. (2.46). Se*

$$0 < \gamma(\xi + q) \leq 1 \quad (2.53)$$

$$\text{rank}[\mathbf{V}(l-1)] = (q+1)r \quad (2.54)$$

então a solução é um minimizador local estrito para o problema de otimização em questão.

**Prova.** Se  $0 < \gamma(\xi + q) \leq 1$  e  $\text{rank}[\mathbf{V}(l-1)] = (q+1)r$  (rank linha completo), então, tanto a matriz  $\mathbf{W}(l)$  da Eq. (2.40) será não singular e semidefinida positiva ( $\mathbf{W}(l) > 0$ ), pois todos os seu autovalores serão positivos, quanto a condição (suficiente)  $\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1) > 0$  também será satisfeita. Logo o Lema 1 é satisfeito, e a solução da Eq. (2.50) será um minimizador local estrito para o problema de otimização MIMO, referente à Eq. (2.46).  $\square$

Logo, considerando que todas as linhas da matriz de regressores  $\mathbf{V}(l-1)$  da Eq. (2.37) são linearmente independentes, e a ponderação  $\gamma(\xi + q) \in (0,1] \subset R_+^*$ , como foi dito anteriormente, verifica-se que o ponto de inflexão  $[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]^*$  é um minimizador local estrito de  $J[\widehat{\mathbf{Y}}(l)]$ , e a matriz dos parâmetros de Markov pode ser estimada, no sentido dos mínimos quadrados ponderados, a partir de uma batelada (conjunto) de  $l$  dados, da seguinte forma:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(l) \triangleq \mathfrak{Y}(l)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)\mathbf{P}(l-1) \quad (2.55)$$

onde a matriz  $\mathbf{P}(l-1) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times (q+1)r}$  é simétrica e semidefinida positiva de formação (AGUIRRE, 2015). Porém,  $\mathbf{P}(l-1) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times (q+1)r}$  matematicamente será não singular (invertível) se, e somente se ela for definida positiva, a qual, nesse contexto, será definida como:

$$\mathbf{P}(l-1) \triangleq [\mathbf{V}(l-1)\mathbf{W}(l)\mathbf{V}^T(l-1)]^{-1} \quad (2.56)$$

é a *matriz de covariância ponderada dos parâmetros de Markov*, obtida a partir do conjunto de  $l$  dados.

### 2.1.2.2 Identificação recursiva dos parâmetros de Markov

Na Seção 2.1.2.1, uma formulação referente a estimação em batelada da matriz dos parâmetros de Markov otimizada do modelo  $\widehat{\mathbf{S}}$ , no sentido de mínimos quadrados ponderados, foi deduzida a partir de um conjunto (batelada) de  $l$  dados, resultando nas Eqs. (2.55) e (2.56). Nessa seção, essa formulação será continuada a partir dessas equações, mas agora sob o aspecto de estimação recursiva da matriz dos parâmetros de Markov.

Seja o  $k$  o índice da amostra de elementos definido para o contexto recursivo, tal que  $k \geq l+1$ . Substituindo  $l$  por  $k$  nas Eqs. (2.55) e (2.56) tem-se:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(k) = \mathfrak{Y}(k)\mathbf{W}(k)\mathbf{V}^T(k-1)\mathbf{P}(k-1) \quad (2.57)$$

$$\mathbf{P}(k-1) = [\mathbf{V}(k-1)\mathbf{W}(k)\mathbf{V}^T(k-1)]^{-1} \quad (2.58)$$

e realizando a mesma substituição anterior nas Eqs. (2.34), (2.37), (2.38) e (2.40) obtém-se:

$$\mathfrak{Y}(k) = \left[ \overbrace{\mathbf{y}(1+q) \cdots \mathbf{y}(k-1)}^{\mathfrak{Y}(k-1)} \mid \mathbf{y}(k) \right] = \left[ \mathfrak{Y}(k-1) \mathbf{y}(k) \right] \quad (2.59)$$

$$\mathbf{v}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k-(q-1)] \\ \mathbf{u}(k-q) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{V}(k-2) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(q) & \cdots & \mathbf{v}(k-2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{u}(q+1) \cdots & \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(q) & \cdots & \mathbf{u}(k-2) \\ \mathbf{u}(q-1) \cdots & \mathbf{u}(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(k-q) \\ \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}[k-(q+1)] \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{V}(k-1) = \left[ \overbrace{\mathbf{v}(q) \cdots \mathbf{v}(k-2)}^{\mathbf{V}(k-2)} \mid \mathbf{v}(k-1) \right] = \left[ \mathbf{V}(k-2) \mathbf{v}(k-1) \right] \quad (2.62)$$

$$\mathbf{W}(k) = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \gamma(1+q) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma(k-1) \end{bmatrix}}^{\mathbf{W}(k-1)} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}_\gamma} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{0}_w} \\ \gamma(k) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(k-1) & \mathbf{0}_w \\ \mathbf{0}_\gamma & \gamma(k) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

onde  $\mathfrak{Y}(k) \in \mathbb{R}^{m \times (k-q)}$ ,  $\mathfrak{Y}(k-1) \in \mathbb{R}^{m \times [(k-1)-q]}$ ,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $\mathbf{V}(k-1) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times (k-q)}$ ,  $\mathbf{V}(k-2) \in \mathbb{R}^{(q+1)m \times [(k-1)-q]}$ ,  $\mathbf{v}(k-1) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times 1}$ ,  $\mathbf{W}(k) \in \mathbb{R}^{(k-q) \times (k-q)}$ ,  $\mathbf{W}(k-1) \in \mathbb{R}^{[(k-1)-q] \times [(k-1)-q]}$  e  $\mathbf{0}_\gamma \in \mathbb{R}^{1 \times [(k-1)-q]}$  e  $\mathbf{0}_w \in \mathbb{R}^{[(k-1)-q] \times 1}$ . Então, expandindo a equação de estimação da matriz dos parâmetros de Markov da Eq. (2.57) e a sua respectiva matriz de covariância da Eq. (2.58) no sentido dos mínimos quadrados ponderados recursivos, assim como substituindo as Eqs. (2.59), (2.62) e (2.63) na Eq. (2.57) tem-se:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(k) = \left[ \mathfrak{Y}(k-1) \mathbf{y}(k) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{W}(k-1) & \mathbf{0}_w \\ \mathbf{0}_\gamma & \gamma(k) \end{bmatrix} \left[ \mathbf{V}(k-2) \mathbf{v}(k-1) \right]^T \mathbf{P}(k-1) \quad (2.64)$$

onde  $\mathbf{P}(k-1) \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times (q+1)r}$  é a matriz de covariância dos parâmetros de Markov otimizada no sentido dos mínimos quadrados recursivos, similar a Eq. (2.58). Substituindo as Eqs. (2.62) e (2.63) na Eq. (2.58) tem-se:

$$\mathbf{P}(k-1) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{V}(k-2) & \mathbf{v}(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}(k-1) & \mathbf{0}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{0}_{\gamma} & \gamma(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(k-2) & \mathbf{v}(k-1) \end{bmatrix}^T \right\}^{-1} \quad (2.65)$$

Resolvendo as operações matriciais da Eq. (2.65) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k-1) &= \left\{ \underbrace{\mathbf{V}(k-2)\mathbf{W}(k-1)[\mathbf{V}(k-2)]^T}_{[\mathbf{P}(k-2)]^{-1}} + \mathbf{v}(k-1)\gamma(k)\mathbf{v}^T(k-1) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ [\mathbf{P}(k-2)]^{-1} + \mathbf{v}(k-1)\gamma(k)\mathbf{v}^T(k-1) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.66)$$

aplicando o lema da inversa na Eq. (2.66) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k-1) &= \left\{ [\mathbf{P}(k-2)]^{-1} \right\}^{-1} - \left\{ [\mathbf{P}(k-2)]^{-1} \right\}^{-1} \mathbf{v}(k-1) \left( [\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left\{ [\mathbf{P}(k-2)]^{-1} \right\}^{-1} \mathbf{v}(k-1) \right)^{-1} \mathbf{v}^T(k-1) \left\{ [\mathbf{P}(k-2)]^{-1} \right\}^{-1} \\ &= \mathbf{P}(k-2) - \frac{\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Substituindo a matriz de covariância  $\mathbf{P}(k-1)$  da Eq. (2.67) na Eq. (2.64) tem-se:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathfrak{Y}(k-1) & \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}(k-1) & \mathbf{0}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{0}_{\gamma} & \gamma(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(k-2) & \mathbf{v}(k-1) \end{bmatrix}^T \left\{ \mathbf{P}(k-2) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)} \right\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Simplificando a Eq. (2.68) tem-se:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}(k) &= \left\{ \mathfrak{Y}(k-1)\mathbf{W}(k-1)\mathbf{V}^T(k-2) + \mathbf{y}(k)\gamma(k)\mathbf{v}^T(k-1) \right\} \cdot \\ &\quad \left( \mathbf{P}(k-2) \left\{ \mathbf{I}_{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{v}(k-1)\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)} \right\} \right) \\ &= \widehat{\mathbf{Y}}(k-1) \left\{ \mathbf{I}_{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{v}(k-1)\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)} \right\} + \\ &\quad \mathbf{y}(k)\gamma(k)\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2) \left\{ \mathbf{I}_{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{v}(k-1)\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)} \right\} \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(k-1) = \mathfrak{Y}(k-1) \mathbf{W}(k-1) \mathbf{V}^T(k-2) \mathbf{P}(k-2) \quad (2.70)$$

Na virada da iteração  $k-1$  para a iteração  $k$ , antes da amostragem de dados em  $k$ , o modelo expressará a resposta  $\hat{\mathbf{y}}(k) = \widehat{\mathbf{Y}}(k-1) \mathbf{v}(k-1)$ . Então reescrevendo a Eq. (2.69) tem-se:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(k) = \widehat{\mathbf{Y}}(k-1) - \frac{\hat{\mathbf{y}}(k) \mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2) \mathbf{v}(k-1)} + \Theta(k) \quad (2.71)$$

onde:

$$\Theta(k) = \mathbf{y}(k) \gamma(k) \mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2) \left\{ \mathbf{I}_P - \frac{\mathbf{v}(k-1) \mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2) \mathbf{v}(k-1)} \right\} \quad (2.72)$$

Simplificando a Eq. (2.72) tem-se:

$$\Theta(k) = \mathbf{y}(k) \mathbf{K}(k-1) \quad (2.73)$$

onde:

$$\mathbf{K}(k-1) = \frac{\mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1) \mathbf{P}(k-2) \mathbf{v}(k-1)} \quad (2.74)$$

tal que  $\mathbf{K}(k-1) \in \mathbb{R}^{1 \times [(q+1)r]}$ . Substituindo  $\mathbf{K}(k-1)$  da Eq. (2.74) e  $\Theta(k)$  da Eq. (2.73) na Eq. (2.71) tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}(k) &= \widehat{\mathbf{Y}}(k-1) - \hat{\mathbf{y}}(k) \mathbf{K}(k-1) + \mathbf{y}(k) \mathbf{K}(k-1) \\ &= \widehat{\mathbf{Y}}(k-1) + [\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)] \mathbf{K}(k-1) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Na iteração  $k$ , no momento onde há amostragem de dados do sistema  $\mathbf{y}(k)$  uma atualização do procedimento recursivo deve ser feita em relação à diferença obtida entre a amostra de dados do sistema  $\mathbf{y}(k)$  (atualizada) e a amostra da saída do modelo  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  (ainda referente a amostra passada  $k-1$ , e portanto ainda não atualizada, por ainda  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  no instante  $k$  não ter sido obtida em função  $\mathbf{y}(k)$ , o qual foi recém obtido). Assim a diferença devido à correção entre amostras atualizada e não atualizada do sistema e do modelo, respectivamente, é denominada *vetor inovação*  $\boldsymbol{\eta}(k) = [\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  (AGUIRRE, 2000). Reescrevendo a Eq. (2.75) tem-se:

$$\widehat{\mathbf{Y}}(k) = \widehat{\mathbf{Y}}(k-1) + \boldsymbol{\eta}(k) \mathbf{K}(k-1) \quad (2.76)$$

onde  $\mathbf{K}(k-1)$  é denominado *vetor ganho da inovação*. Substituindo  $\mathbf{K}(k-1)$  da Eq. (2.74) na Eq. (2.67) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k-1) &= \mathbf{P}(k-2) \left( \mathbf{I}_{\mathbf{P}} - \mathbf{v}(k-1) \underbrace{\left\{ \frac{\mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)}{[\gamma(k)]^{-1} + \mathbf{v}^T(k-1)\mathbf{P}(k-2)\mathbf{v}(k-1)} \right\}}_{\mathbf{K}(k-1)} \right) \\ &= \mathbf{P}(k-2) [\mathbf{I}_{\mathbf{P}} - \mathbf{v}(k-1)\mathbf{K}(k-1)] \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde  $\mathbf{I}_{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{(q+1)r \times (q+1)r}$  é a matriz identidade de mesma dimensão das matrizes  $\mathbf{P}$ .

No Algoritmo 2, encontram-se os passos necessários para a estimação recursiva da matriz dos parâmetros de Markov, realizada a cada iteração  $k$ . Nesse algoritmo, o processo de estimação recursiva da matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}(k)$  é observado mediante a necessidade das informações de  $\widehat{\mathbf{Y}}(k-1)$ , referentes às amostras de iterações anteriores, conforme as Eq. (2.76). O mesmo pode ser observado para a matriz de covariância  $\mathbf{P}(k-1)$  na Eq. (2.77). Além disso, no passo 01, observa-se que  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  é a predição da saída do modelo para o instante  $k$ , a qual é devido à matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}(k-1)$  e ao vetor de regressores  $\mathbf{v}(k-1)$  obtidos na iteração  $k-1$ . Por isso, a predição  $\hat{\mathbf{y}}(k)$ , no instante  $k$ , *não é a real estimação* da saída do modelo  $\hat{\mathbf{y}}(k)$ : essa estimação da saída do modelo deverá acontecer logo após a obtenção dos parâmetros  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  pelo Algoritmo 1, ainda na mesma iteração  $k$ , de acordo com a sequência do algoritmo desenvolvido pelo especialista. A predição da saída do modelo  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  é necessária para a correção de alterações relativas ao vetor de saídas do sistema  $\mathbf{y}(k)$ , por meio do vetor ganho de inovação  $\mathbf{K}(k-1)$ . Tais alterações são registradas no vetor inovação  $\boldsymbol{\eta}(k)$ . Por isso, enquanto o vetor inovação  $\boldsymbol{\eta}(k)$  armazena a informação atualizada entre o vetor de saídas do sistema e o vetor de saídas do modelo, decorrente da transição entre a interação  $k-1$  e  $k$ ; o vetor erro de estimação  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  armazena a informação da diferença entre o vetor das saídas do sistema e o vetor da real estimação das saídas do modelo, ambos obtidos na iteração  $k$  (AGUIRRE, 2015).

---

**Algoritmo 2** Procedimento de estimação recursiva da matriz dos parâmetros de Markov.

---

**Entrada:** A saída do sistema  $\mathbf{y}(k)$ ; o escalar de ponderação  $\gamma(k)$ ; o vetor de regressores  $\mathbf{v}(k-1)$ ; a matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}(k-1)$ ; a matriz de covariância dos parâmetros de Markov  $\mathbf{P}(k-2)$ .

**Saída:** A matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}(k)$ ; a matriz de covariância dos parâmetros de Markov  $\mathbf{P}(k-1)$ .

1: **Procedimento** MATRIZRECURSIVADOSPARAMETROSDEMARKOV ( $\mathbf{y}(k), \gamma(k), \mathbf{v}(k-1), \widehat{\mathbf{Y}}(k-1), \mathbf{P}(k-2)$ )

▷ PASSO 01: Realizar a predição da saída do modelo para o instante  $k$ , a partir do instante  $k-1$ , conforme a equação  $\hat{\mathbf{y}}(k) = \widehat{\mathbf{Y}}(k-1)\mathbf{v}(k-1)$ .

▷ PASSO 02: Estimar o vetor de inovação  $\boldsymbol{\eta}(k)$  pela equação  $\boldsymbol{\eta}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)$ .

▷ PASSO 03: Estimar o vetor ganho da inovação  $\mathbf{K}(k-1)$  pela Eq. (2.74).

▷ PASSO 04: Estimar a matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}(k)$  pela Eq. (2.76).

▷ PASSO 04: Estimar a matriz de covariância dos parâmetros de Markov  $\mathbf{P}(k-1)$  pela Eq. (2.77).

2: **Retorne**  $\widehat{\mathbf{Y}}(k), \mathbf{P}(k-1)$

3: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---



## 2.2 Aspectos Teóricos da Sistemas Nebulosos

Em termos de lógica clássica, podemos determinar se um elemento pertence ou não pertence a um conjunto. Isso acontece porque para cada conjunto é atribuído uma proposição que dá sentido semântico ou significado ao conjunto, pelo que é exatamente esta proposição que determina se aquele elemento pertence ou não pertence ao conjunto em questão. Porém, se essa proposição tiver um contexto que reflita a incerteza do conhecimento humano, já não é tão trivial determinar se um elemento pertence ou não pertence ao conjunto, porque este fato também é função direta do conhecimento humano, e não diretamente da lógica clássica. Um exemplo clássico disso é a determinação de uma cor de algum objeto, quando este apresenta alguma variâncias da cor. Dizer que uma caneta pertence ao conjunto das canetas que apresenta a cor azul claro não depende tão somente da capacidade física de uma pessoa de identificar a cor azul claro, mas fundamentalmente depende do *grau de incerteza da inferência realizada pelo conhecimento* desta pessoa acerca da variância da cor azul: o que é azul claro para uma pessoa, para outra pode ser azul turquesa, ou azul piscina e etc. Neste caso não se fala de lógica clássica para se identificar os elementos dos respectivos conjuntos, mas sim de *lógica nebulosa*. Um sistema que usa lógica nebulosa em seus elementos é dito *sistema nebuloso*.

A teoria de sistemas nebulosos é comumente utilizada para representar modelos nebulosos (LEE; LIU, 2014; LAI et al., 2017; RAHBARI et al., 2018). Assim, nessa seção, serão apresentados alguns aspectos teóricos sobre sistemas nebulosos, necessários para o desenvolvimento da metodologia proposta por esse dissertação, conforme a lista dos seguintes tópicos:

§§ Seção 2.2.1: Elementos de sistemas nebulosos;

§§ Seção 2.2.2: Agrupamentos nebulosos.

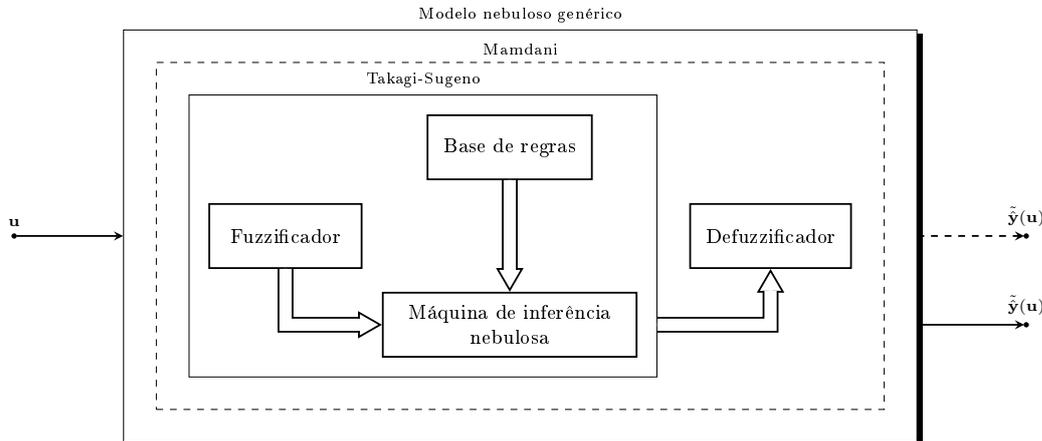
Para maiores detalhes acerca desses aspectos, sugere-se consultar os tópicos listados no campo Sistemas Nebulosos, referente à Tabela 1.

### 2.2.1 Elementos de sistemas nebulosos

Basicamente, um sistema nebuloso é constituído de quatro elementos: fuzzificador, base de regras de inferência nebulosa (ou simplesmente base de regras), máquina de inferência nebulosa (ou simplesmente máquina de inferência) e defuzzificador, conforme ilustrado Figura 2. A base de regras é composta pelas regras que estruturam a inferência nebulosa entre a <proposição antecedente> e a <proposição consequente>. O fuzzificador realiza o mapeamento do domínio físico para o domínio nebuloso das variáveis linguísticas da <proposição antecedente> das regras, as quais estão associadas às entradas do sistema por meio das funções de pertinência. A máquina de inferência é responsável por realizar matematicamente as operações de inferência nebulosa, estruturadas pelas regras da base

de regras. Já o defuzzificador é responsável por mapear os valores da função de pertinência, resultantes da máquina de inferência nebulosa, para valores do domínio físico de cada variável de saída do sistema.

Figura 2 – Modelo genérico de um sistema nebuloso. Traço contínuo (—): modelo nebuloso Takagi-Sugeno; traço segmentado (---): modelo nebuloso Mamdani.



Fonte: adaptada de Wang (1997), Babuška (1998)

A partir desses elementos, encontram-se na literatura uma variedade de estruturas de sistemas nebulosos para diversas finalidades, as quais basicamente são decorrentes de tipos clássicos, como os sistemas nebulosos do tipo Mamdani e do tipo Takagi-Sugeno (WANG, 1997; BABUŠKA, 1998; NELLES, 2001), por exemplo. O sistema nebuloso do tipo Mamdani realiza o processo da regra de inferência nebulosa, envolvendo operações de lógica nebulosa tanto na <proposição antecedente> quanto na <proposição consequente> das regras. Nesse caso, o valor de saída da máquina de inferência é *nebuloso*, o qual é representado por um conjunto nebuloso. Logo, um defuzzificador é requerido para mapear valor nebuloso obtido para um valor no domínio físico, inerente à variável de saída do sistema, conforme observado na Figura 2. Por outro lado, o sistema nebuloso do tipo Takagi-Sugeno também realiza o processo da regra de inferência nebulosa, porém envolvendo operações de lógica nebulosa apenas na <proposição antecedente> das regras, pois a <proposição consequente> é composta por funções matemáticas, cujas variáveis independentes estão diretamente associadas à <proposição antecedente>. Isso significa que o valor de saída decorrente da máquina de inferência já é um valor do domínio físico da variável de saída do sistema, não necessitando de defuzzificador, conforme observado na Figura 2. Para a proposta dessa dissertação, pretende-se combinar diretamente a lógica nebulosa e equações matemáticas, ambas associadas ao comportamento do sistema em *pontos de operação*. Por isso, o modelo nebuloso do tipo Takagi-Sugeno (TS) será utilizado no contexto de modelagem multivariável.

Nessa seção, alguns aspectos de três dos quatro elementos básicos acima citados serão abordados no âmbito do modelo nebuloso do tipo Takagi-Sugeno multivariável MIMO,



para todo  $i \in \{1, \dots, c\} \subset \mathbb{Z}_+^*$ , onde, nesse contexto,  $c \in \mathbb{Z}_+^*$ ,  $c \geq 2$  é o número de conjunto de regras de pontos de operação;  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r$  são as variáveis linguísticas (nebulosas), associadas às entradas escalares individuais de  $\mathbf{S}$ ;  $\hat{y}_1^i, \dots, \hat{y}_r^i$  são as variáveis (escalares) das saídas estimadas de  $\mathbf{S}$  em cada regra  $i$ ;  $\tilde{\mathcal{W}}_1^i, \dots, \tilde{\mathcal{W}}_r^i$  são os  $i$ -ésimos valores linguísticos assumidos pelas variáveis linguísticas das entradas de  $\mathbf{S}$ . Observa-se que, no caso MIMO representado pela Eq. (2.80), ao invés de expressar a base de regras pela  $i$ -ésima regra de inferência MISO  $R^i$ , expressa-se a base de regras pelo  $i$ -ésimo conjunto de  $m$  regras de inferência MISO  $R^{i1}, \dots, R^{im}$ , e para  $c$  conjuntos de  $m$  regras, o modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO de  $\mathbf{S}$  terá, no mínimo,  $cm$  regras.

Uma forma alternativa de expressar a base de regras da Eq. (2.80), é representá-la de forma vetorial, como segue:

$$R^i: \text{SE } \tilde{\mathbf{u}} \text{ é } \tilde{\mathcal{W}}^i \text{ ENTÃO } \hat{\mathbf{y}}^i = f^i(\mathbf{u}) \quad (2.81)$$

para todo  $i \in \{1, \dots, c\} \subset \mathbb{Z}_+^*$ , onde, nesse contexto,  $c \in \mathbb{Z}_+^*$ ,  $c \geq 2$  é o número de regras ou pontos de operação;  $\tilde{\mathbf{u}}$  é uma *variável linguística* (nebulosa) *vetorial*, associada ao vetor  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_r]^T$  de entradas de  $\mathbf{S}$ ; enquanto que  $\hat{\mathbf{y}}^i = [\hat{y}_1^i, \dots, \hat{y}_m^i]^T$  é o vetor de saídas estimadas de  $\mathbf{S}$  na  $i$ -ésima regra.

A estrutura da regra de inferência nebulosa do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO referente à Eq. (2.81) consegue representá-lo completamente na  $i$ -ésima regra. Como consequência, ao compará-la com a Eq. (2.80), verifica-se que há uma redução significativa do número de regras, passando de  $cm$  para  $c$  regras. Além disso, a estrutura vetorial da <proposição consequente> da Eq. (2.81) permite trabalhar diretamente com operações vetoriais, inerentes a teoria de controle moderno, como espaço de estados por exemplo. Por isso, a estrutura da Eq. (2.81) será utilizada como referência para construir a base de regras da metodologia de identificação nebulosa inversa proposta por essa dissertação.

### 2.2.1.2 A proposição antecedente

Observando a proposição antecedente das bases de regras Eqs. (2.80) e (2.81), verifica-se que tais abordagens seguem a estrutura da proposição lógica simples, conforme definida em Eq. (2.79). Uma ideia oculta nessa estrutura é que cada variável nebulosa (linguística) possui vários valores (ou termos) linguísticos associados, os quais podem qualificar o “estado intuitivo” de sua respectiva variável linguística, no momento em que ela está em torno do  $i$ -ésimo ponto de operação. O processo de modelagem matemática, que qualifica tais valores linguísticos, nada mais é do que um mapeamento em forma de função, a qual relaciona um valor físico-numérico da variável nebulosa para o seu respectivo valor (ou termo) linguístico, por meio de uma ponderação entre 0 e 1. Tal ponderação é denominada *grau de pertinência*, e é representado pela letra grega  $\mu$ . De forma genérica, a função matemática que representa o mapeamento acima mencionado é denominada *função de pertinência* (WANG, 1997), tal que  $\mu = \mu(\bullet)$ , onde  $\bullet$  representa a dimensão

físico-numérica da variável nebulosa  $\tilde{\bullet}$ . O conjunto domínio da função  $\mu(\bullet)$  é denominado conjunto *universo de discurso*  $\mathbb{U}\{\bullet\}$ , e a sua natureza numérica é definida pelo especialista. Já o conjunto imagem da função é definido dentro do intervalo real entre 0 e 1. O conjunto de valores definidos pelo par ordenado  $(\bullet, \mu)$  é denominado *conjunto nebuloso*  $\widetilde{\mathbb{O}}$ , e é matematicamente definido como:

$$\widetilde{\mathbb{O}} = \{(\bullet, \mu) \in \mathbb{U}\{\bullet\} \times \mathbb{R} \mid \bullet \in \mathbb{U}\{\bullet\}, \mu \in [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ e } \mu = \mu(\bullet)\} \quad (2.82)$$

Observa-se que o conjunto nebuloso  $\widetilde{\mathbb{O}}$  é exatamente a descrição matemática de um valor (ou termo) linguístico genérico. Assim, cada valor linguístico é descrito por um (único) conjunto nebuloso. Considerando o contexto genérico da Eq. (2.82) para o modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO  $\widetilde{\mathbb{S}}$ , e os universos de discurso  $\mathbb{U}\{u_1\} = \dots = \mathbb{U}\{u_r\} = \mathbb{R}$ , pode-se descrever os conjuntos nebulosos da <proposição antecedente> da base de regras da Eq. (2.80) como sendo:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{U}}_1^i &= \left\{ (u_1, \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_1^i}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid u_1 \in \mathbb{R}, \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_1^i} \in [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ e } \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_1^i} = \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_1^i}(u_1) \right\} \\ &\vdots \\ \widetilde{\mathcal{U}}_r^i &= \left\{ (u_r, \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_r^i}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid u_r \in \mathbb{R}, \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_r^i} \in [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ e } \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_r^i} = \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}_r^i}(u_r) \right\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

os quais, nessa dissertação, são denominado por *conjuntos nebulosos com abordagem escalar*, tendo em vista que o domínio físico das variáveis linguísticas são representados pelas respectivas variáveis escalares. Já para a base de regras da Eq. (2.81), os domínios físicos escalares  $\{u_1, \dots, u_r\}$ , inerentes às variáveis linguísticas  $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r\}$  da base de regras da Eq. (2.80), podem ser concatenados um vetor  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_r]^T$ , e o conjunto nebuloso resultante pode ser representado pela versão vetorial da Eq. (2.82) da seguinte forma:

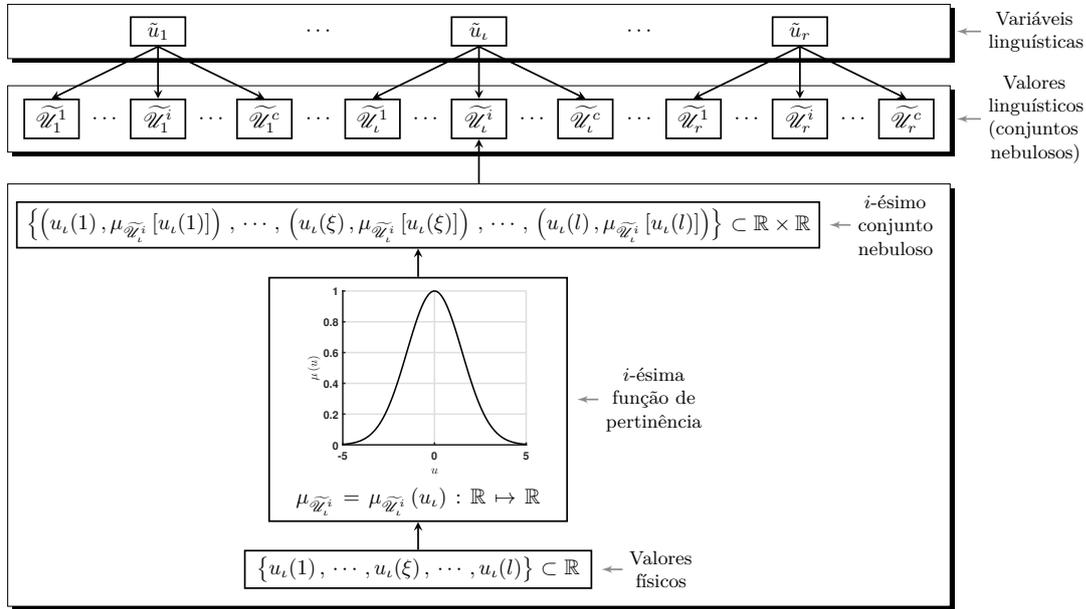
$$\widetilde{\mathcal{U}}^i = \left\{ [\mathbf{u}^T, \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}^i}]^T \in \mathbb{R}^{(r+1) \times 1} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r \times 1}, \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}^i} \in [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ e } \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}^i} = \mu_{\widetilde{\mathcal{U}}^i}(\mathbf{u}) \right\} \quad (2.84)$$

o qual, nessa dissertação, será denominado por *conjunto nebuloso com abordagem vetorial*. A Figura 3 ilustra o procedimento de mapeamento do domínio físico para o domínio nebuloso, realizado pelo fuzzificador, tanto na abordagem escalar, conforme a Figura 3a, quanto na abordagem vetorial, conforme a Figura 3b. Nessa figura,  $i \in [1, c] \subset \mathbb{Z}_+^*$  é o *índice da regra*,  $\iota \in [1, r] \subset \mathbb{Z}_+^*$  é o *índice da variável da variável linguística associada à entrada  $u_\iota$  do vetor de entradas  $\mathbf{u}$*  e  $\xi \in \mathbb{Z}_+^*$  é *índice da amostra de dados no domínio do tempo discreto*.

Independente do número de variáveis linguísticas utilizadas em ambas abordagens, um só valor nebuloso resultará de operações entre os conjuntos nebulosos da <proposição antecedente>. Esse valor é denominado *grau de ativação da regra*, e é representado pela letra grega  $\beta$ . No caso da base de regras da Eq. (2.80), todas as proposições simples

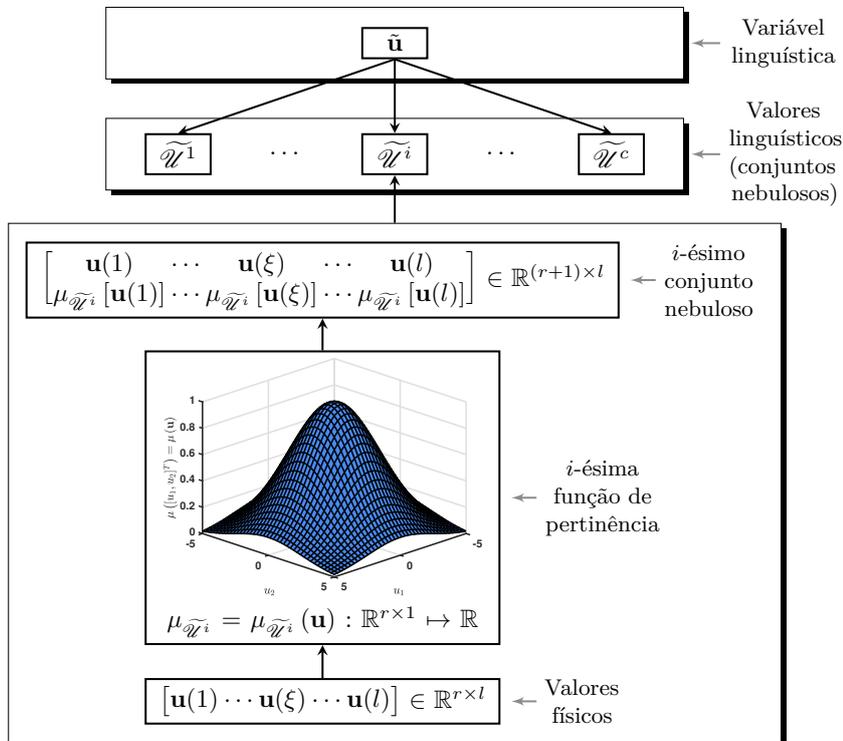
Figura 3 – Variáveis linguísticas (nebulosas) da <proposição antecedente> do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO  $\tilde{\mathbf{S}}$ , com a descrição do procedimento de mapeamento de seus respectivos conjuntos nebulosos.

(a) Referente aos conjuntos nebulosos da Eq. (2.83) (abordagem escalar).



Descrição do procedimento de mapeamento nebuloso, referente ao  $i$ -ésimo valor linguístico da  $i$ -ésima variável linguística

(b) Referente ao conjunto nebuloso da Eq. (2.84) (abordagem vetorial).



Descrição do procedimento de mapeamento nebuloso, referente ao  $i$ -ésimo valor linguístico da respectiva variável linguística

Fonte das Figuras 3a e 3b: autor dessa dissertação.

da <proposição antecedente> estão interligadas pelo operador lógico E, implicando na intersecção dos conjuntos nebulosos das respectivas variáveis linguísticas. Dessa forma, o grau de ativação  $\beta$  para a  $i$ -ésima regra é definido como:

$$\beta^i \triangleq \mu_{\tilde{\mathcal{W}}_1^i} \otimes \cdots \otimes \mu_{\tilde{\mathcal{W}}_r^i} \quad (2.85)$$

onde  $\otimes$  é referente operação nebulosa do tipo norma T (WANG, 1997). Nessa dissertação, o produto será o tipo de norma T a ser utilizado, o que, a partir da Eq. (2.85), resulta em:

$$\begin{aligned} \beta^i &\triangleq \mu_{\tilde{\mathcal{W}}_1^i} \cdot \cdots \cdot \mu_{\tilde{\mathcal{W}}_r^i} \\ &= \prod_{i=1}^r \mu_{\tilde{\mathcal{W}}_i^i} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Já quanto a base de regras da Eq. (2.81), o grau de ativação  $\beta$  é definido diretamente a partir do grau de pertinência  $\mu_{\tilde{\mathcal{W}}^i}$ , estabelecido para a  $i$ -ésima regra, ou seja:

$$\beta^i \triangleq \mu_{\tilde{\mathcal{W}}^i} \quad (2.87)$$

A Tabela 2 resume as características necessárias para a obtenção do grau de ativação da regra, no caso do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO  $\tilde{\tilde{\mathbf{S}}}$ , de acordo com a abordagem utilizada.

Tabela 2 – Resumo das características da <proposição antecedente> do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO  $\tilde{\tilde{\mathbf{S}}}$ .

CARACTERÍSTICA	ABORDAGEM ESCALAR	ABORDAGEM VETORIAL
Base de regras	Eq. (2.80)	Eq. (2.81)
Quantidade de regras	$cm$ regras	$c$ regras
Conjuntos nebuloso da <proposição antecedente>	Eq. (2.83)	Eq. (2.84)
Universo de discurso $\mathbb{U}$ da <proposição antecedente>	Resultante da definição do produto cartesiano de ordem $r$ , tal que $\mathbb{U}\{u_1, \dots, u_r\} \triangleq \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{ordem } r}$	Resultante da definição do espaço vetorial de ordem de ordem $r$ , tal que $\mathbb{U}\{\mathbf{u}\} \triangleq \mathbb{R}^{r \times 1}$
Grau de ativação da regra $\beta$ referente à <proposição antecedente>	$\forall (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{U}\{u_1, \dots, u_r\}$ e $\beta^i \in \mathbb{R}$ , tem-se $\beta^i \triangleq \beta^i(u_1, \dots, u_r)$ , conforme a Eq. (2.86)	$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}\{\mathbf{u}\}$ e $\beta^i \in \mathbb{R}$ , tem-se $\beta^i \triangleq \beta^i(\mathbf{u})$ , conforme a Eq. (2.87)

Fonte: autor dessa dissertação.

Para a  $i$ -ésima regra, o grau de ativação  $\beta$  é obtido em cada amostra de dados; porém, os diferentes valores de  $\beta$  são obtidos dentre as  $c$  regras, cuja a soma pode não ser necessariamente 1 nessa mesma amostra, isto é,  $\beta$  não define um conjunto nebuloso normalizado (WANG, 1997). Por isso, define-se o *grau de ativação normalizado da regra*, representado pela letra grega  $\gamma$ , como o valor normalizado de  $\beta$  em relação às  $c$  regras, para cada amostra de dados, tal que  $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$ , ou seja,

$$\gamma^i \triangleq \frac{\beta^i}{\sum_{i=1}^c \beta^i} \quad (2.88)$$

Uma vez obtido o  $\beta^i$  independente da abordagem utilizada, o grau de ativação normalizado  $\gamma^i$  pode ser obtido pela Eq. (2.88), representando, portanto, a informação característica <proposição antecedente> para a  $i$ -ésima regra.

### 2.2.1.3 A proposição consequente

Como observado nas bases de regras das Eqs. (2.80) e (2.81), uma das características marcantes de um modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO é ter a <proposição consequente> da base de regras representada por uma função matemática, cujas variáveis independentes são geralmente representadas por variáveis (escalares ou vetoriais) que caracterizam o domínio físico das respectivas variáveis nebulosas envolvidas na <proposição antecedente> (BABUŠKA, 1998). Por outro lado, em uma amostra de dados, a saída do modelo nebuloso Takagi-Sugeno não pode ser representada diretamente pelos  $c$  valores daquelas funções de forma independente, e por isso é necessário combiná-los em um único valor. Assim, define-se a *máquina de inferência nebulosa* do modelo Takagi-Sugeno, como sendo o elemento que realiza uma combinação linear da contribuição de cada resposta das funções da <proposição consequente> inerente a cada regra ou ponto de operação  $i$ , mediante uma amostra de dados das variáveis nebulosas da <proposição antecedente>. Assim, no caso da base de regras escalar da Eq. (2.80), a priori para cada modelo MISO $_j$ , a  $j$ -ésima máquina de inferência nebulosa MISO é matematicamente estabelecida como

$$\tilde{y}_j \triangleq \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{y}_j^i \quad (2.89)$$

para cada amostra de dados, onde  $\gamma^i$  é o grau de ativação normalizado e  $\hat{y}_j^i$  é a  $j$ -ésima variável de saída estimada do sistema  $\mathbf{S}$ , ambos referentes à <proposição antecedente> e à <proposição consequente> da  $i$ -ésimo conjunto de regras do modelo nebuloso  $\tilde{\mathbf{S}}$ , respectivamente;  $\tilde{y}_j \in \mathbb{R}$  é  $j$ -ésima variável de saída estimada do modelo nebuloso  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Além disso, se  $j \in [1, m] \subset \mathbb{Z}_+^*$ , então o vetor de saídas estimadas da versão MIMO da base de regras da Eq. (2.80) pode ser escrito como

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{y}_1 = \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{y}_1^i \\ \vdots \\ \tilde{y}_m = \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{y}_m^i \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{y}_1^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{y}_m^i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^c \gamma^i \begin{bmatrix} \hat{y}_1^i \\ \vdots \\ \hat{y}_m^i \end{bmatrix} \therefore \tilde{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{\mathbf{y}}^i \quad (2.90)$$

para cada amostra de dados, onde  $\tilde{\mathbf{y}} \triangleq [\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  é o vetor formado pelas saídas escalares estimadas pelo modelo nebuloso  $\tilde{\mathbf{S}}$ ; e  $\hat{\mathbf{y}} \triangleq [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  é das saídas escalares estimadas no  $i$ -ésimo ponto de operação. Observa-se que  $\gamma^i$  é o mesmo para os submodelos MISO de todas as  $c$  regras, visto que a <proposição antecedente> se mantém para todo o conjunto de regras  $i$ .

Já para o caso da base de regras da Eq. (2.81), define-se o *a máquina de inferência nebulosa vetorial MIMO* para o modelo nebuloso  $\tilde{\mathbf{S}}$ , o resultado vetorial  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  da combinação linear das contribuições do vetor de saídas  $\hat{\mathbf{y}}^i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , estimado no  $i$ -ésimo ponto de operação, ou seja:

$$\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \sum_{i=1}^c \gamma^i \hat{\mathbf{y}}^i \quad (2.91)$$

As características de obtenção da <proposição consequente> do modelo Takagi-Sugeno MIMO  $\tilde{\mathbf{S}}$ , referentes às abordagens escalar e vetorial, Eqs. (2.80) e (2.81) estão resumidas na Tabela 3.

Nota-se que, enquanto o vetor  $\tilde{\mathbf{y}}$  é obtido a partir das contribuições escalares dos  $c$  submodelos MISO na Eq. (2.90), o mesmo vetor é obtido de forma direta, a partir das contribuições vetoriais dos  $c$  submodelos MIMO na Eq. (2.91), envolvendo menos operações computacionais. Por isso, a máquina de inferência definida na Eq. (2.91) será utilizada para o desenvolvimento da metodologia proposta nessa dissertação.

### 2.2.2 Agrupamentos nebulosos

Em um modelo nebuloso Takagi-Sugeno, o qual atua como um estimador de um sistema dinâmico não linear, a <proposição antecedente> de uma regra de inferência nebulosa  $i$  pode ser atribuída ao  $i$ -ésimo ponto de operação de duas formas: a) baseando-se no conhecimento do especialista, acerca do sistema a ser estimado, ou b) baseando-se em centros, definidos por dados (WANG, 1997; NELLES, 2001; BABUŠKA; VEEN; KAYMAK, 2002; LUGHOFER, 2011). Intuitivamente, observa-se que a atribuição de pontos de operação, baseada no conhecimento do sistema, é mais apropriada para modelagem do tipo *caixa branca*, visto que, ao realizar esse tipo de modelagem, o especialista deverá ter o domínio de conhecimento para analisar um fenômeno (físico, químico, biológico, entre outros), extraindo informações em torno desses pontos de operação, e os submodelos daí decorrentes serão suficientes para representar tais informações em um modelo nebuloso. Já

Tabela 3 – Resumo das características da <proposição consequente> do modelo nebuloso Takagi-Sugeno MIMO  $\tilde{\mathbf{S}}$ .

CARACTERÍSTICA	ABORDAGEM ESCALAR	ABORDAGEM VETORIAL
Base de regras	Eq. (2.80)	Eq. (2.81)
Universo de discurso $\mathbb{U}$ da <proposição antecedente>	Resultante da definição do produto cartesiano de ordem $r$ , tal que $\mathbb{U}\{u_1, \dots, u_r\} \triangleq \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{ordem } r}$	Resultante da definição do espaço vetorial de ordem $r$ , tal que $\mathbb{U}\{\mathbf{u}\} \triangleq \mathbb{R}^{r \times 1}$
Grau de ativação normalizado da regra $\gamma$ referente à <proposição antecedente>	$\forall (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{U}\{u_1, \dots, u_r\}$ e $\gamma^i \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ , tem-se $\gamma^i \triangleq \gamma^i(u_1, \dots, u_r)$ decorrente da Eq. (2.88)	$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}\{\mathbf{u}\}$ e $\gamma^i \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ , tem-se $\gamma^i \triangleq \gamma^i(\mathbf{u})$ decorrente da Eq. (2.88)
Submodelos da <proposição consequente> associados aos $c$ pontos de operação	$\forall j \in [1, m] \subset \mathbb{Z}_+^*$ , tem-se $\hat{y}_j^i \triangleq f_j^i(u_1, \dots, u_r)$	$\hat{\mathbf{y}}^i \triangleq f^i(\mathbf{u})$
Márquina de inferência nebulosa MIMO	Eq. (2.90)	Eq. (2.91)

Fonte: autor dessa dissertação.

a atribuição de pontos de operação, baseada em dados, é mais apropriada para modelagem do tipo *caixa preta*, ou do tipo *caixa cinza*. Para isso, algumas metodologias, como computação evolutiva nebulosa ou agrupamentos nebulosos, por exemplo, são particularmente interessantes pelas características adaptativas em aplicações dinâmicas (NELLES, 2001; LUGHOFER, 2011). No caso das metodologias de agrupamentos nebulosos, devido ao particionamento estocástico nebuloso de um conjunto de dados em vários subconjuntos, os pontos de operação são diretamente definidos pelos centros desses subconjuntos, os quais são estimados via média ponderada (MACQUEEN, 1967; BABUŠKA, 1998). Para a proposta de identificação inversa nebulosa de sistemas, abordada nessa dissertação, pretende-se obter submodelos inversos locais, ou seja, em torno de pontos de operação  $i$ , cuja estimação paramétrica é baseada em dados experimentais, independentemente de informações detalhadas acerca do fenômeno. Por isso, os pontos de operação serão determinados a partir dos centros, por meio de agrupamentos nebulosos.

Vários algoritmos de agrupamentos nebulosos, baseados em minimização de funções custo do tipo *c-means*, são propostos na literatura (DUNN, 1974; BEZDEK, 1981;

BABUŠKA, 1998; NELLES, 2001). Porém, uma classe de algoritmos daí decorrentes apresentam uma característica de adaptabilidade da matriz de covariância nebulosa, e dentre estes destacam-se o algoritmo de Gustafson-Kessel (GK) (GUSTAFSON; KESSEL, 1979) e o algoritmo de máxima verossimilhança nebulosa (MVN) (BEZDEK; DUNN, 1975). A Tabela 4 lista um resumo de algumas vantagens (aspectos positivos) e de algumas desvantagens (aspectos negativos) observadas desses algoritmos. Observa-se que os aspectos positivos do algoritmo GK, listados nos itens b) e c), compensam os aspectos negativos do algoritmo MVN, tendo em vista a necessidade de obter-se conjuntos nebulosos bem definidos, independente da inicialização da matriz de partição. Além disso, agrupamentos nebulosos de volumes aproximadamente iguais são admissíveis nas aplicações dessa dissertação, desde que sejam bem definidos no espaço de dados. Por isso, o algoritmo GK será utilizado para estimar do grau de ativação  $\beta$  como característica representante da <proposição antecedente> da base de regras, no que diz respeito aos exemplos e implementações apresentados nessa dissertação.

Tabela 4 – Resumo dos aspectos positivos e negativos dos algoritmos de agrupamentos nebulosos de Gustafson-Kessel e de máxima verossimilhança nebulosa.

ALGORITMO	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS
Gustafson-Kessel	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) Pode detectar automaticamente agrupamentos de diferentes formas e orientações no espaço de dados (BABUŠKA, 1998).</li> <li>b) Pouco sensível a inicialização de partição (BABUŠKA, 1998).</li> <li>c) Os conjuntos nebulosos induzidos pela matriz de partição são compactos, geralmente tem pontos extremos bem definidos, e consequentemente são de fácil interpretação (BABUŠKA, 1998).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) Volumes de agrupamentos nebulosos aproximadamente iguais (BABUŠKA, 1998).</li> <li>b) Apresenta problemas numéricos para conjuntos com poucos dados, ou conjuntos com dados linearmente dependentes (BABUŠKA, 1998).</li> </ul>
Máxima verossimilhança nebulosa	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) A estrutura do algoritmo não possui restrição de volume dos agrupamentos (GATH; GEVA, 1989);</li> <li>b) Volumes de agrupamentos nebulosos variantes entre si (BABUŠKA, 1998);</li> <li>c) Pode detectar automaticamente agrupamentos de tamanhos (volumes), densidades e formas variantes. (BABUŠKA, 1998).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) Necessita de uma boa inicialização, devido a norma de distância exponencial, para tender a convergir para o ponto ótimo local mais próximo (GATH; GEVA, 1989).</li> <li>b) Os conjuntos nebulosos, induzidos pela matriz de partição, são de difícil interpretação, devido as medidas de distância decorrentes de estruturas exponencias (GATH; GEVA, 1989).</li> </ul>

Fonte: autor dessa dissertação.

### 2.2.2.1 Agrupamento de Gustafson-Kessel

Um aspecto negativo do algoritmo GK, listado no item b) da Tabela 4, afirma que há problemas numéricos, caso o conjunto de dados possua amostras linearmente dependentes, ou insuficientes para a adequada definição dos agrupamentos. Para contornar esse aspecto negativo, nessa seção será apresentada uma versão melhorada do algoritmo GK, conforme apresentado por Babuška, Veen e Kaymak (2002). Esse algoritmo servirá como base para os procedimentos de agrupamento nebuloso e de determinação da <proposição antecedente>, utilizados nos exemplos e implementações dessa dissertação.

O algoritmo de agrupamento GK é estabelecido de acordo com o procedimento iterativo de otimização da seguinte função custo (BABUŠKA; VEEN; KAYMAK, 2002):

$$J(\mathbf{Z}; \mathfrak{M}, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{R}^i\}) = \sum_{i=1}^c \sum_{\xi=1}^N (\mu_{i\xi})^{\varrho} \mathcal{D}_{i\xi}^2 \mathfrak{R}^i \quad (2.92)$$

onde a matriz  $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(\xi), \dots, \mathbf{z}(N)] \in \mathbb{R}^{\eta \times N}$  é o conjunto dos vetores de dados  $\mathbf{z}(\xi) \in \mathbb{R}^{\eta \times 1}$ , dos quais serão agrupados;  $\{c, \eta, N, \varrho\} \in \mathbb{Z}_+^*$  são respectivamente o número de clusters, o número de observações (linhas) e o número de amostras (colunas)  $\mathbf{z}(\xi)$  da base de dados  $\mathbf{Z}$  e o expoente de ponderação que determina nebulosidade dos clusters resultantes;  $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^{c \times N}$  é a matriz de partição nebulosa com os graus de pertinência das amostras de dados com relação aos núcleos ou centros dos agrupamentos  $\mathbf{c}_i^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{\eta \times 1}$ , isto é (BABUŠKA, 1998),

$$\mathbf{c}_i^{(\ell)} = \frac{\sum_{\xi=1}^N (\mu_{i\xi}^{(\ell-1)})^{\varrho} \mathbf{z}(\xi)}{\sum_{\xi=1}^N (\mu_{i\xi}^{(\ell-1)})^{\varrho}} \quad (2.93)$$

pertencente à matriz a matriz dos centros (núcleos) dos agrupamentos  $\mathfrak{C} \in \mathbb{R}^{\eta \times c}$ , a qual é definida como

$$\mathfrak{C} = [\mathbf{c}_i^{(\ell)}]_{\eta \times c} \triangleq [\mathbf{c}_1^{(\ell)} \dots \mathbf{c}_i^{(\ell)} \dots \mathbf{c}_c^{(\ell)}] \quad (2.94)$$

onde  $\ell$  é o índice processo iterativo de otimização.  $\mathcal{D}_{i\xi}^2 \mathfrak{R}^i$  é a distância quadrática de Mahalanobis entre a  $\xi$ -ésima amostra de  $\mathbf{Z}$  e o  $i$ -ésimo centro de agrupamento  $\mathbf{c}_i$ , de acordo com matriz de norma induzida  $\mathfrak{R}^i \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ , ou seja (BABUŠKA, 1998):

$$\mathfrak{R}^i = [\nu_i \det(\mathcal{F}^i)]^{1/\eta} (\mathcal{F}^i)^{-1} \quad (2.95)$$

$$\mathcal{D}_{i\xi}^2 \mathfrak{R}^i = (\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)})^T \mathfrak{R}^i (\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)}) \quad (2.96)$$

onde  $\nu_i \in \mathbb{R}$  é o  $i$ -ésimo *valor do volume* (constante) do agrupamento e  $\mathbf{z}(\xi) \in \mathbb{R}^{\eta \times 1}$  o vetor da  $\xi$ -ésima amostra de dados de  $\mathbf{Z}$ .  $\mathcal{F}^i$  é a *matriz de covariância nebulosa* referente ao  $i$ -ésimo agrupamento, definida como (BABUŠKA, 1998):

$$\mathcal{F}^i = \frac{\sum_{\xi=1}^N \left(\mu_{i\xi}^{(\ell-1)}\right)^\varrho \left(\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)}\right) \left(\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)}\right)^T}{\sum_{\xi=1}^N \left(\mu_{i\xi}^{(\ell-1)}\right)^\varrho} \quad (2.97)$$

a qual é simétrica, semipositiva e não singular (AGUIRRE, 2000), e pertencem ao *conjunto de matrizes de covariância nebulosas*  $\mathcal{F}$ , computadas para as  $c$  regras/agrupamentos, o qual é definido como:

$$\mathcal{F} \triangleq \{\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^i, \dots, \mathcal{F}^c\} \quad (2.98)$$

Em (BABUŠKA; VEEN; KAYMAK, 2002) é proposto uma metodologia para truncamento dos autovalores de  $\mathcal{F}^i$ , quando estes tendem a zero, devido à eventuais singularidades obtidas no mecanismo de inversão de  $\mathcal{F}^i$ , decorrentes de mau condicionamento dos dados de  $\mathbf{Z}$ . Assim, a partir das Eqs. (2.93) e (2.95) a (2.97), as  $L$  iterações do processo de otimização são executadas até alcançar uma tolerância mínima  $\vartheta \in R_+^*$  do erro absoluto entre os elementos da *matriz de partição nebulosa*  $\mathfrak{M}$ , a qual matematicamente pode ser definida como:

$$\mathfrak{M} = [\mu_{i\xi}]_{c \times N} \triangleq \begin{bmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1\xi} & \cdots & \mu_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{i1} & \cdots & \mu_{i\xi} & \cdots & \mu_{iN} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{c1} & \cdots & \mu_{c\xi} & \cdots & \mu_{cN} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\mu}(1) \cdots \boldsymbol{\mu}(\xi) \cdots \boldsymbol{\mu}(N)] \quad (2.99)$$

com  $\mu_{i\xi} \in \mathbb{R}$  sendo o *grau de pertinência*, o qual informa quanto cada amostra de dados  $k$  pertence ao agrupamento  $i$ , tal que  $0 < \mu_{i\xi} \leq 1$ .  $\boldsymbol{\mu}(k) = [\mu_{1\xi}, \dots, \mu_{i\xi}, \dots, \mu_{c\xi}]^T \in \mathbb{R}^{c \times 1}$  é o vetor de *graus de pertinência de todas as regras para a  $k$ -amostra*. Os passos do algoritmo GK e a descrição dos valores nominais (padrão) de seus parâmetros são apresentados no Algoritmo 3 e na Tabela 5 respectivamente, conforme proposto em (BABUŠKA; VEEN; KAYMAK, 2002).

### 2.2.2.2 Determinação da <proposição antecedente> através da matriz de covariância nebulosa: o parâmetro $\beta(\xi)$

A partir da matriz de partição nebulosa  $\mathfrak{M}$ , os graus de ativação das regra para a  $k$ -ésima amostra  $\beta(\xi)$  podem ser obtidos por várias metodologias (WANG, 1997; BABUŠKA,

---

**Algoritmo 3** Procedimento do algoritmo de agrupamento de Gustafson-Kessel.
 

---

**Entrada:**  $\mathbf{Z}$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ .

**Saída:**  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathfrak{M}$

1: **Procedimento** GK( $\mathbf{Z}$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ )

▷ PASSO 01: Definir os parâmetros internos da função:

2:  $N \leftarrow \text{colunas}(\mathbf{Z})$

3:  $\eta \leftarrow \text{linhas}(\mathbf{Z})$

4:  $\ell \leftarrow 1$

▷ PASSO 02: Seja a matriz de partição na iteração  $\ell$  definida como  $\mathfrak{M}^{(\ell)} = [\mu_{i\xi}^{(\ell)}]_{c \times N}$ , conforme a Eq. (2.99). Inicialize a matriz de partição  $\mathfrak{M}^{(\ell)}$  com elementos aleatórios  $\mu_{i\xi}^{(1)}$  entre 0 e 1 (usualmente distribuição uniforme).

▷ PASSO 03: Compute a matrix de covariância  $\mathcal{F}^0$  de todo o conjunto de dados.

$$\mathcal{F}^0 = I_\eta \det(\text{cov}(\mathbf{Z}(N)))^{1/\eta} \quad (2.100)$$

5: **Repita**

6:  $\ell = \ell + 1$ ;

7: **Para todo**  $i \in [1, c]$  **Faça**

▷ PASSO 04: Compute os protótipos do centros (médias ou centros), conforme a Eq. (2.93).

▷ PASSO 05: Compute as matrizes de covariância dos agrupamentos, conforme a Eq. (2.97).

▷ PASSO 06: Adicione uma matriz identidade escalonada.

$$\mathcal{F}^i = (1 - \varsigma) \mathcal{F}^i + \varsigma \det(\mathcal{F}^0)^{1/\eta} \mathbf{I}_\eta \quad (2.101)$$

▷ PASSO 07: Extraia os autovalores  $\lambda_{ij}$  e autovetores  $\phi_{ij}$  de  $\mathcal{F}^i$ .

▷ PASSO 08: Encontre  $\lambda_{i \max} = \max_j \lambda_{ij}$  e defina:

$$\lambda_{ij} = \frac{\lambda_{i \max}}{\alpha} \forall j, \text{ tal que } \frac{\lambda_{i \max}}{\lambda_{ij}} > \alpha \quad (2.102)$$

---

Continua no Algoritmo 4 na página 77.

---

**Algoritmo 4** Continuação do Algoritmo 3 da página 76.

---

▷ PASSO 09: Reconstrua  $\mathcal{F}^i$  por

$$\mathcal{F}^i = [\phi_{i1}, \dots, \phi_{i\eta}] \cdot \text{diag}(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i\eta}) \cdot [\phi_{i1}, \dots, \phi_{i\eta}]^{-1} \quad (2.103)$$

8:           **Para todo**  $\xi \in [1, N]$  **Faça**

▷ PASSO 10: Compute as distâncias, conforme as Eqs. (2.95) e (2.96).

9:           **Fim Para**

10:          **Fim Para**

11:          **Para todo**  $i \in [1, c]$  **Faça**

12:           **Para todo**  $\xi \in [1, N]$  **Faça**

▷ PASSO 11: Atualize a matriz de partição.

13:           **Se**  $\mathcal{D}_{i\xi\mathfrak{N}^i} > 0$  **Então**

$$\mu_{i\xi}^{(\ell)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{\mathcal{D}_{i\xi\mathfrak{N}^i}^2}{\mathcal{D}_{j\xi\mathfrak{N}^j}^2} \right)^{1/(\varrho-1)}} \quad (2.104)$$

14:           **Senão**

$$\mu_{i\xi}^{(\ell)} = 0 \quad (2.105)$$

15:           **Fim Se**

16:          **Fim Para**

17:          **Fim Para**

18:          **até**  $\left\| \mathfrak{N}^{(\ell)} - \mathfrak{N}^{(\ell-1)} \right\| \leq \vartheta$  **ou**  $\ell \leq L$

19:           $\mathfrak{N} \leftarrow \mathfrak{N}^{(\ell)}$

▷ PASSO 12: Montar a matriz dos núcleos/centros dos agrupamentos  $\mathfrak{C}$  e o conjunto das matrizes de covariâncias nebulosas  $\mathcal{F}$ , a partir das Eqs. (2.94) e (2.98) respectivamente.

---

Continua no Algoritmo 5 na página 78.

---

---

**Algoritmo 5** Continuação do Algoritmo 4 da página 77.

---

▷ **PASSO 13:** Retorne as saídas do procedimento:

20: **Retorne**  $\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathfrak{M}$

21: **Fim Procedimento**

Fonte: adaptado de (BABUŠKA; VEEN; KAYMAK, 2002).

---

Tabela 5 – Descrições dos parâmetros do Algoritmo 3.

DEFINIÇÃO	PADRÃO	DESCRIÇÃO
$c \in \mathbb{Z}, 1 < c < N$		Número de agrupamentos (ou regras).
$\varrho \in \mathbb{R}, \varrho > 1$	2	Expoente de ponderação da nebulosidade dos agrupamentos.
$\vartheta \in \mathbb{R}, \vartheta > 0$	$10^{-3}$	Tolerância de terminação (otimização).
$L \in \mathbb{Z}, L > 0$	$10^2$	Número de iterações (otimização).
$\boldsymbol{\nu} = [\nu_i]_{c \times 1}$ , com $\nu_i \in \mathbb{R}$ e $\nu_i > 0$	1	Volumes dos $c$ agrupamentos.
$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 10^{15}$	$10^{15}$	Limite do número de condição.
$\varsigma \in \mathbb{R}, 0 \leq \varsigma \leq 1$	0,5	Parametro de ponderação (sintonia).

Fonte: obtido de (BABUŠKA; VEEN; KAYMAK, 2002).

1998; SOUSA; KAYMAK, 2002). Porém, nessa dissertação, o *método probabilístico* será utilizado, devido a sua similaridade com o método de obtenção de graus de pertinência com o algoritmo GK, o que garante uma boa confiabilidade na obtenção de graus de pertinência de agrupamentos não convexos, assim como na obtenção dos graus de ativação das proposições do antecedente, cujos os valores físicos da variáveis linguísticas estão completamente definidos em  $\mathbf{Z}$  (BABUŠKA, 1998). Dessa forma, para o método probabilístico tem-se que  $\beta(\mathbf{N}) \triangleq [\beta^1(\mathbf{N}), \dots, \beta^i(\mathbf{N}), \dots, \beta^c(\mathbf{N})]^T$ , tal que:

$$\beta^i(\mathbf{N}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left[ \frac{\mathcal{D}_{\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i}(\mathbf{N}, \mathbf{c}_i^{\mathbf{N}})}{\mathcal{D}_{\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^j}(\mathbf{N}, \mathbf{c}_j^{\mathbf{N}})} \right]^{2/(e-1)}} \quad (2.106)$$

onde  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{\varpi \times 1}$  é o vetor das  $\varpi$  primeiras linhas de  $\mathbf{Z}$  que representam os valores físicos das variáveis linguísticas da <proposição antecedente>, tal que  $\varpi \leq \eta$ . Seja  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}^i \in \mathbb{R}^{\varpi \times \varpi}$  a submatriz quadrada simétrica não-singular extraída de  $\mathcal{F}^i$  referente às variáveis linguísticas da <proposição antecedente>, formada pelas  $\varpi$  primeiras linhas e  $\varpi$  primeiras colunas de  $\mathcal{F}^i$ ; e  $\mathbf{c}_i^{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}^{\varpi \times 1}$  o vetor extraído de  $\mathbf{c}_i$ , referente às variáveis linguísticas da <proposição antecedente>, formado pelas primeiras  $\varpi$  linhas de  $\mathbf{c}_i$ . A matriz de norma induzida relativa à <proposição antecedente>  $\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i$  e a distância quadrática referente a  $\mathcal{D}_{\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i}^2$  são definidas respectivamente como:

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i = [\rho_i \det(\mathcal{F}_{\mathbf{N}}^i)]^{1/\eta} (\mathcal{F}_{\mathbf{N}}^i)^{-1} \quad (2.107)$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i}^2 = (\mathbf{N} - \mathbf{c}_i^{\mathbf{N}})^T \mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i (\mathbf{N} - \mathbf{c}_i^{\mathbf{N}}) \quad (2.108)$$

Se as variáveis linguísticas da <proposição antecedente> são as mesmas que compõem todas as variáveis observadas, as quais são referentes às linhas de  $\mathbf{Z}$ , então  $\varpi = \eta$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi) = \mathbf{z}(\xi)$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbf{N}}^i = \mathcal{F}^i$ ,  $\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i = \mathfrak{N}^i$  e  $\mathcal{D}_{\mathfrak{N}_{\mathbf{N}}^i}^2 = \mathcal{D}_{i\xi\mathfrak{N}^i}^2$ , ou seja, as Eqs. (2.104) e (2.106) são coincidentes, tal que:

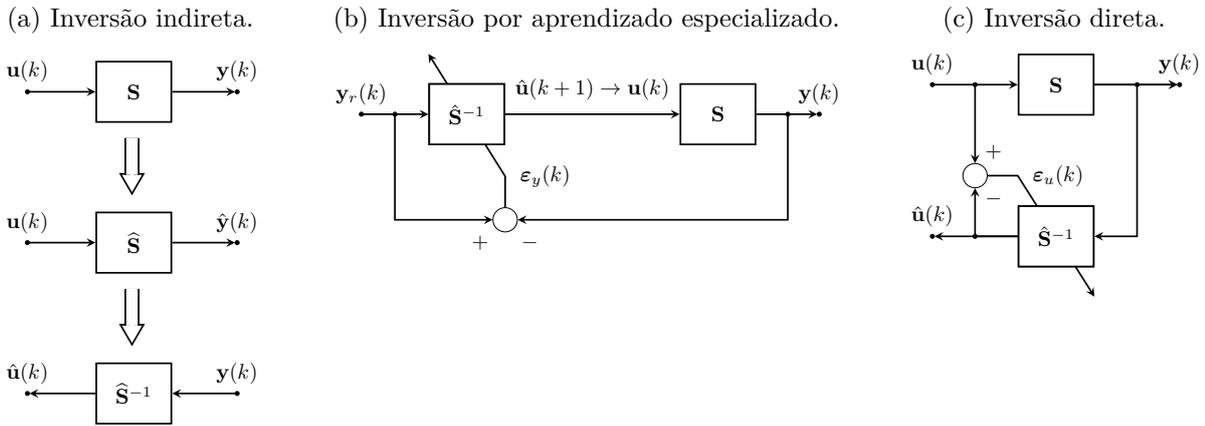
$$\beta(\xi) = \beta[\mathbf{N}(\xi)] = \boldsymbol{\mu}(\xi) \quad (2.109)$$

ou seja, se todas variáveis linguísticas da <proposição antecedente> forem as mesmas listadas nas linhas do espaço de dados  $\mathbf{Z}$ , o qual será particionado em agrupamentos, então pode-se obter o vetor graus de ativação das regras  $\beta(\xi)$ , para a  $\xi$ -ésima amostra, diretamente da matriz de partição  $\mathfrak{N}$ , conforme as Eqs. (2.99) e (2.109).

### 2.3 Aspectos Teóricos da Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos

Como foi dito no Capítulo 1, um dos grandes desafios consiste na obtenção de modelos matemáticos, que representem suficientemente bem o comportamento inverso de um determinado sistema dinâmico (DU; ZHANG, 2008). Sendo assim, no contexto de sistemas dinâmicos, dado um modelo  $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  de um sistema dinâmico MIMO de  $r$  entradas, organizadas no vetor  $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), \dots, u_r(k)]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ , e  $m$  saídas, organizadas no vetor  $\hat{\mathbf{y}}(k) = [\hat{y}_1(k), \dots, \hat{y}_m(k)]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , com  $n$  estados, organizados no vetor  $\hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{x}_1(k), \dots, \hat{x}_n(k)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , tal que  $n \leq m$  e  $n \leq r$ , semelhantemente definido como na Seção 2.1.1, pode-se estimar um modelo inverso MIMO  $\hat{\mathbf{S}}^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  baseando-se em três abordagens (SOUSA; KAYMAK, 2002; JUNG; ENQVIST, 2013), conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Abordagens para identificação inversa de sistemas dinâmicos MIMO.



Fonte das Figuras 4a a 4c: adaptado de Sousa e Kaymak (2002), Jung e Enqvist (2013).

Os vetores  $\hat{\mathbf{u}}(k) = [\hat{u}_1(k), \dots, \hat{u}_r(k)]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ ,  $\varepsilon_y(k) = [\varepsilon_{y_1}(k), \dots, \varepsilon_{y_m}(k)]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $\varepsilon_u(k) = [\varepsilon_{u_1}(k), \dots, \varepsilon_{u_r}(k)]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  são respectivamente o vetor de saídas estimadas do modelo inverso, o vetor dos erros de estimação com relação às saídas do sistema e o vetor dos erros de estimação com relação às entradas do sistema.

A primeira abordagem de identificação inversa é denominada de *identificação por inversão indireta*, conforme ilustrado na Figura 4a. Nesse caso, o modelo direto do sistema  $\hat{\mathbf{S}}$  é estimado na forma padrão (usando dados de entrada  $u_i \forall i \in [1, r] \subset \mathbb{Z}_+^*$  e de saída  $y_j \forall j \in [1, m] \subset \mathbb{Z}_+^*$  do sistema dinâmico). Em seguida, o modelo obtido é invertido, resultando na estimação inversa  $\hat{\mathbf{S}}^{-1}$  (JUNG; ENQVIST, 2013). Já a segunda abordagem de identificação inversa é denominada de *inversão por aprendizado especializado*, conforme ilustrado na Figura 4b. Nesse caso, modelo inverso  $\hat{\mathbf{S}}^{-1}$  é usado em série com o sistema  $\mathbf{S}$ , e os parâmetros do modelo inverso são estimados nesta configuração, por minimização do erro de estimação  $\varepsilon_{y_j}(k)$ , dado pela diferença entre a entrada  $\hat{y}_r$  do modelo inverso  $\hat{\mathbf{S}}^{-1}$  e a saída  $y_j$  do sistema  $\mathbf{S}$ , para todo  $j \in [1, m] \subset \mathbb{Z}_+^*$  (SOUSA; KAYMAK, 2002). Por fim, a

terceira abordagem de identificação inversa é denominada de *inversão por aprendizado direto* (inversão direta), conforme ilustrado pela Figura 4c. Nessa abordagem, o modelo inverso  $\widehat{\mathbf{S}}^{-1}$  é obtido diretamente em paralelo com o sistema  $\mathbf{S}$ , e os parâmetros do modelo inverso são estimados nesta configuração, porém por minimização do erro de estimação  $\varepsilon_{u_i}(k)$ , dado pela diferença entre a entrada  $u_i(k)$  do sistema  $\mathbf{S}$  e a saída  $\hat{u}_i$  do modelo inverso  $\widehat{\mathbf{S}}^{-1}$ , para todo  $i \in [1, r] \subset \mathbb{Z}_+^*$  (SOUSA; KAYMAK, 2002).

Em geral, quando as diferenças entre os sinais das saídas e a os sinais das referências, ou seja, os sinais dos erros de realimentação, são nulos em um sistema MIMO, certamente o conjunto formado pelos sistemas de realimentação, diferenciadores dos erros de realimentação e conjunto de controladores podem ser substituídos por uma sistema inverso, o qual reproduz os sinais de controle, que conduzem ao sistema a obter saídas equivalentes às referências (ECONOMOU; MORARI; PALSSON, 1986), lembrando uma combinação das abordagens das Figuras 4b e 4c. Essa é uma das justificativas para trabalhar-se a ideia de identificação inversa (principalmente voltada para o contexto da teoria de controle (SOUSA; KAYMAK, 2002)), e, seguindo a mesma tendência, uma proposta de identificação inversa nebulosa, baseada no processo de identificação inversa por aprendizado direto da Figura 4c, será apresentada na metodologia dessa dissertação.



### 3 METODOLOGIA

Como foi dito na Seção 2.3, a forma mais simples de controlar um processo por usar um modelo nebuloso é inverter o modelo usá-lo em malha aberta com o sistema, como substituto do conjunto formado pelos sistemas do ramo de realimentação, dos diferenciais dos erros de realimentação e do conjunto de controle. (ECONOMOU; MORARI; PALSSON, 1986; SOUSA; KAYMAK, 2002). A estrutura do modelo nebuloso inverso, daí decorrente, é semelhante a uma combinação das abordagens das Figuras 4b e 4c. Alguns aspectos positivos e negativos dessas estruturas são apresentados na Tabela 6. Como pode-se observar, os aspectos positivos do processo de identificação inversa, por aprendizado especializado, compensam os aspectos negativos do processo de identificação inversa, por aprendizado direto. Porém, este processo de identificação inversa torna-se particularmente interessante, tendo em vista futuras perspectivas para novas estratégias de controle baseado em modelo interno. Além disso, tais perspectivas, alinhadas com aspectos da teoria de controle moderno, como a teoria do espaço de estados com observador de Kalman, por exemplo, apresentam-se como alternativas promissoras, para solucionar os aspectos negativos da identificação inversa por aprendizado direto, principalmente no que diz respeito a sistemas estáveis, pelo menos em uma dada faixa de operação.

Tabela 6 – Resumo de alguns aspectos positivos e negativos das estruturas de identificação inversa de sistemas dinâmicos MIMO, referentes às Figuras 4b e 4c.

ABORDAGEM	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS
Inversão por aprendizado especializado (Figura 4b)	a) Pode-se trabalhar com modelos não bijetores (JORDAN; RUMELHART, 1992; SOUSA; KAYMAK, 2002). b) Pode-se superar dificuldades de excitação de treinamento, desde que os sinais dos vetores de referência $\mathbf{y}_r(k)$ e os vetores das saídas do sistema $\mathbf{y}(k)$ sejam persistentemente excitantes (JORDAN; RUMELHART, 1992; SOUSA; KAYMAK, 2002).	a) Apresenta dificuldades para utilização do modelo inverso resultante em estratégias de controle, devido a <ul style="list-style-type: none"> <li>a.1) não compatibilidade (total) entre modelo estimado da planta (SOUSA; KAYMAK, 2002);</li> <li>a.2) influência de distúrbios (SOUSA; KAYMAK, 2002).</li> </ul>

Continua na próxima página...

Continuação da página anterior...

ABORDAGEM	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS
Inversão por aprendizado direto (Figura 4c)	a) A estrutura pode ser empregada com facilidade em abordagens de controle baseado em modelo interno (ECONOMOU; MORARI; PALSSON, 1986; SOUSA; KAYMAK, 2002);	a) Se o sistema apresentar um mapeamento não bijetor, a identificação inversa não será possível, pois poderá existir muitas soluções de saídas $\hat{\mathbf{u}}(k)$ para uma única entrada $\mathbf{y}(k)$ do modelo inverso (SOUSA; KAYMAK, 2002). b) Pode-se apresentar dificuldades para obter sinais de excitação de treinamento, que sejam adequados para o processo de identificação, porque o modelo inverso daí obtido poderá trabalhar sobre uma faixa de operação e uma largura da banda muito extensas para os vetores de entrada $\mathbf{y}(k)$ , podendo haver problemas de conjuntura numérica, caso os sinais de $\mathbf{y}(k)$ não sejam persistentemente excitantes (SOUSA; KAYMAK, 2002).

Fonte: o autor dessa dissertação.

Portanto, nessa dissertação, propõe-se uma metodologia de modelagem caixa cinza nebulosa adaptativa inversa, cuja estrutura da <proposição consequente> será definida sob o escopo da teoria do espaço de estados com observador de Kalman, baseada em uma versão modificada da abordagem de aprendizado direto da Figura 4c. Além disso, para o processo de estimação paramétrica dos submodelos inversos de cada regra da <proposição consequente>, a partir de dados experimentais, será adotada a metodologia de identificação do filtro / observador de Kalman – OKID (JUANG, 1994; JUANG; PHAN, 2004; WU et al., 2015), onde serão descritos os processos de estimação da matriz dos parâmetros de Markov, tanto no modo em batelada, quanto no modo recursivo, assim como a aplicação do algoritmo ERA, semelhantemente como descrito na Seção 2.2, mas no contexto inverso. Já para reforçar a característica de adaptabilidade do modelo inverso nebuloso, proposto nessa dissertação, a estimação da <proposição antecedente> acontecerá por meio da matriz de partição, decorrente do algoritmo de agrupamento nebuloso GK, a partir da base (janela) de dados variante com o tempo. Todas essas ações são detalhadamente descritas nesse capítulo, de acordo com os seguintes tópicos:

§ Seção 3.1: Definições do Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno Inverso;

§ Seção 3.2: Estimação da Proposição Antecedente;

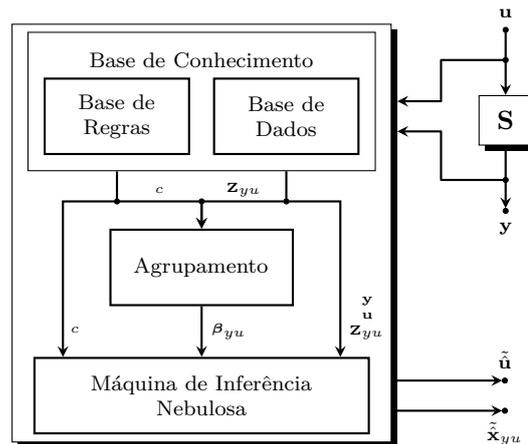
§ Seção 3.3: Estimação paramétrica da Proposição Consequente;

§ Seção 3.4: Aspectos de Implementação.

### 3.1 Definições do Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno Inverso

A metodologia proposta nessa dissertação consiste na formulação do processo de identificação nebulosa inversa adaptativa no contexto do espaço de estados, realizada de forma direta, a partir dos dados de entrada e saída do sistema, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Visão geral da metodologia de identificação nebulosa Takagi-Sugeno inversa em um contexto do espaço de estados.



Fonte: adaptado de (BABUŠKA, 1998).

O sistema **S** é o bloco que representa um dado fenômeno ou processo, do qual se deseja descrever matematicamente o seu comportamento. Nessa dissertação, ele é definido como sendo não linear, de múltiplas entradas  $r$  e de múltiplas saídas  $m$ . Em cada iteração, um conjunto de amostras dos dados de entrada e dos dados de saída são computados como vetores  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , respectivamente. O período de amostragem do sistema é definido como  $T_s$ , e o instante amostral é definido como  $kT_s$ , conforme uma unidade de tempo requerida pelo projetista.

O modelo inverso proposto é do tipo nebuloso Takagi-Sugeno (TS). Um das principais características dos sistemas nebulosos Takagi-Sugeno é a possibilidade de poder utilizar funções matemáticas como estrutura de modelo na proposição consequente. Além disso, cada regra determina uma condição específica pela qual o modelo deve atuar, podendo ser determinada tanto pelo especialista quanto estimada a partir de dados experimentais. Essa condição é denominada ponto de operação. Assim, ao utilizar modelo nebuloso Takagi-Sugeno nessa dissertação, objetiva-se combinar o efeito do mapeamento inverso de submodelos locais em torno dos pontos de operação, para estimar o comportamento inverso de um sistema não linear, resultando na saída nebulosa  $\tilde{\mathbf{u}}$ , a qual estima o vetor de entradas  $\mathbf{u}$ , assim como no estado nebuloso inverso estimado  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu}$ . Nesse contexto, os tópicos serão desenvolvidos como seguem. Na Seção 3.1, será apresentada uma formulação que descrevem em linhas gerais os blocos da base de dados, da base de regras e da máquina de inferência nebulosa do modelo Takagi-Sugeno inverso da Figura 5. Na Seção 3.2, será apresentada a

formulação que descreve a metodologia de estimação da proposição antecedente da base de regras, referente ao bloco agrupamento da Figura 5. Na Seção 3.3, será apresentada a metodologia de estimação do submodelo inverso local no contexto do espaço de estados referente à proposição consequente da base de regras. Na Seção 3.4, alguns aspectos práticos para implementação da metodologia serão discutidos.

Nessa seção, alguns aspectos matemáticas do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso proposto serão apresentados. Estes aspectos contêm descrições de formulações matemáticas inerentes a teoria de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno para os componentes da Figura 5, as quais estarão distribuídas nos seguintes tópicos:

- a) **A base de dados** descreve como serão arrajados os dados capitados do sistema dentro do modelo nebuloso inverso;
- b) **A base de regras** descreve como esses dados serão processados em estruturas intuitivas de decisão;
- c) **A máquina de inferência** descreve o bloco que implementa a base de regras, resultando nas saídas do modelo nebuloso inverso.

a) A base de dados

A base de dados é o bloco da Figura 5 que é responsável por receber o conjunto de dados dos vetores de entrada  $\mathbf{u}$  e saída  $\mathbf{y}$  do sistema  $\mathbf{S}$  e organizá-los conforme uma *matriz (base) de dados*  $\mathbf{Z}_{yu} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times l}$ .

Seja um sistema MIMO não linear  $\mathbf{S}$  de  $r$  entradas  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  e  $m$  saídas  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  referente à Figura 5. Para um conjunto de  $l$  dados iniciais,  $\exists \xi \in \{1, \dots, l\} \subset \mathbb{Z}_+^*$  tal que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(\xi) \\ \vdots \\ u_r(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(\xi) \\ \vdots \\ y_m(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Z}_{yu} = \mathbf{Z}_{yu}(l) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \cdots \mathbf{y}(\xi) \cdots \mathbf{y}(l) \\ \mathbf{u}(1) \cdots \mathbf{u}(\xi) \cdots \mathbf{u}(l) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde  $\xi$  é o índice da amostra do conjunto de dados inicial do sistema  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  e  $l$  é o número de amostras de dados (colunas) de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ . Seja o vetor amostra da conjunto de dados  $\mathbf{z}_{yu}(\xi) \in \mathbb{R}^{(m+r) \times 1}$  definido como:

$$\mathbf{z}_{yu}(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}(\xi) \\ \mathbf{u}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{z}_{yu}(\xi) \in \mathbf{Z}_{yu}(l)$ . Logo a Eq. (3.3) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Z}_{yu}(l) \triangleq [\mathbf{z}_{yu}(1) \cdots \mathbf{z}_{yu}(\xi) \cdots \mathbf{z}_{yu}(l)] \quad (3.5)$$

ou seja, a Eq. (3.5) nada mais é do que conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , escrito na forma dos vetores de dados  $\mathbf{z}_{yu}(\xi)$ .

## b) A base de regras

A base de regras em um modelo nebuloso do tipo Takagi-Sugeno é o bloco da Figura 5 que representa a habilidade do ser humano de tomar decisões estruturadas em regras de inferência do tipo SE  $\langle$  *proposição antecedente*  $\rangle$  ENTÃO  $\langle$  *proposição consequente*  $\rangle$ , onde a proposição consequente de cada regra é definida sob forma de *funções*, as quais relacionam as saídas do sistema nebuloso com as variáveis linguísticas da proposição antecedente. Nessa dissertação, a base de regras é composta por um conjunto de  $c$  regras, e cada regra  $i$ , dentre estas, é caracterizada de acordo com um *ponto de operação*, o qual será definido a partir do *centro ou núcleo* do  $i$ -agrupamento de dados (BABUŠKA, 1998). Por isso, no decorrer das próximas seções, será comum referir-se à expressão “regra” como “regra/agrupamento”, assim como referir-se à função inerente à proposição consequente da  $i$ -ésima regra como o “ $i$ -ésimo submodelo local” ou ainda o “submodelo local  $i$ ”.

Seja  $c \in \mathbb{Z}_+^*$  o *número de regras* da base de regras, tal que  $c > 1$ , e  $i \in \{1, \dots, c\} \subset \mathbb{Z}_+^*$  o *índice da regra, do agrupamento ou do ponto de operação*. Para cada submodelo local  $i$  estimado (a priori) em toda a base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  tem-se:

$$\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{u}_1^i(\xi) \\ \vdots \\ \hat{u}_r^i(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}_{yu_1}^i(\xi + 1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{yu_n}^i(\xi + 1) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  é o número de estados estimados e, conseqüentemente, a *ordem* do submodelo;  $\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  é o *vetor de saídas estimadas* para o  $i$ -ésimo submodelo local, computado para a  $k$ -ésima amostra respectivamente;  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o *vetor de estados estimados* para o  $i$ -ésimo submodelo local, computado para a  $\xi + 1$ -ésima amostra respectivamente.

Para a proposta do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso da Figura 5, dentro da base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , define-se a estrutura da base de regras nos seguintes termos:

$$R^i: \text{SE } \tilde{\mathbf{y}} \text{ é } \tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i \text{ E } \tilde{\mathbf{u}} \text{ é } \tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) = \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i[\mathbf{y}(\xi), \mathbf{u}(\xi)] \\ \hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \hat{\mathbf{u}}^i[\mathbf{y}(\xi), \mathbf{u}(\xi)] \end{cases} \quad (3.8)$$

onde  $\tilde{\mathbf{y}}$  e  $\tilde{\mathbf{u}}$  são variáveis linguísticas da proposição antecedente. Cada *variável linguística* possui  $c$  *valores linguísticos*, os quais são matematicamente representados por *conjuntos nebulosos*, formados pelo mapeamento entre os vetores dos *valores físicos* e os valores escalares das *funções de pertinência*, como exemplificado pela Figura 3b. No caso da base de regras da Eq. (3.8), os  $i$ -ésimos valores das variáveis linguísticas  $\tilde{\mathbf{y}}(\xi)$  e  $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$  são representados pelos conjuntos nebulosos  $\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i$  e  $\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i$ , que são definidos matematicamente como nos moldes da Eq. (2.84), na Seção 2.2.1.2, tal que

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i = \left\{ \left[ \mathbf{y}^T(\xi), \mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}(\xi) \right]^T \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1} \mid \mathbf{y}(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times 1} \text{ e } \mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}(\xi) \in (0,1] \subset \mathbb{R}, \right. \\ \left. \mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}(\xi) = \mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}[\mathbf{y}(\xi)] \right\} \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i = \left\{ \left[ \mathbf{u}^T(\xi), \mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}(\xi) \right]^T \in \mathbb{R}^{(r+1) \times 1} \mid \mathbf{u}(\xi) \in \mathbb{R}^{r \times 1} \text{ e } \mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}(\xi) \in (0,1] \subset \mathbb{R}, \right. \\ \left. \mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}(\xi) = \mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}[\mathbf{u}(\xi)] \right\} \quad (3.10)$$

onde os vetores  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi)$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi)$  estão num contexto de valores físicos, e os escalares  $\mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}(\xi)$  e  $\mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}(\xi)$  são as funções de pertinência para a  $\xi$ -ésima amostra de suas respectivas variáveis linguísticas. Observa-se que os vetores representativos dos valores físicos  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  são os mesmos vetores referentes às saídas e entradas do sistema respectivamente.

A partir de  $\mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}(\xi)$  e  $\mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}(\xi)$ , define-se o *grau de ativação da  $i$ -ésima regra* como sendo um valor escalar  $\beta_{yu}^i(\xi)$  decorrente da operação de lógica nebulosa “E”, a qual pode ser matematicamente representada por qualquer norma T (representada pelo símbolo  $\otimes$ ) (WANG, 1997), tal que:

$$\beta_{yu}^i(\xi) \triangleq \mu_{\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i}(\xi) \otimes \mu_{\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i}(\xi) \quad (3.11)$$

e o *vetor dos graus de ativação de todas as regras* para a  $\xi$ -ésima amostra de dados é o vetor  $\boldsymbol{\beta}_{yu} \in \mathbb{R}^{c \times 1}$  definido como

$$\boldsymbol{\beta}_{yu} = \boldsymbol{\beta}_{yu}(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} \beta_{yu}^1(\xi) \\ \vdots \\ \beta_{yu}^i(\xi) \\ \vdots \\ \beta_{yu}^c(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

conforme na Figura 5.

A partir  $\beta_{yu}^i(\xi)$ , define-se o *grau de ativação normalizado da  $i$ -ésima regra* como sendo um valor escalar de ponderação que indica o quanto cada regra de inferência está influenciando na resposta final do modelo, mediante os valores físicos das variáveis linguísticas da proposição antecedente. Matematicamente, para a  $i$ -ésima regra tem-se:

$$\gamma_{yu}^i(\xi) \triangleq \frac{\beta_{yu}^i(\xi)}{\sum_{i=1}^c \beta_{yu}^i(\xi)} \quad (3.13)$$

e conseqüentemente obtém-se o *vetor de grau de ativação normalizado*  $\boldsymbol{\gamma}_{yu} = \boldsymbol{\gamma}_{yu}(\xi) \in \mathbb{R}^{c \times 1}$  como sendo

$$\boldsymbol{\gamma}_{yu} = \boldsymbol{\gamma}_{yu}(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_{yu}^1(\xi) \\ \vdots \\ \gamma_{yu}^i(\xi) \\ \vdots \\ \gamma_{yu}^c(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde  $0 < \gamma_{yu} \leq 1$ .

### c) A máquina de inferência

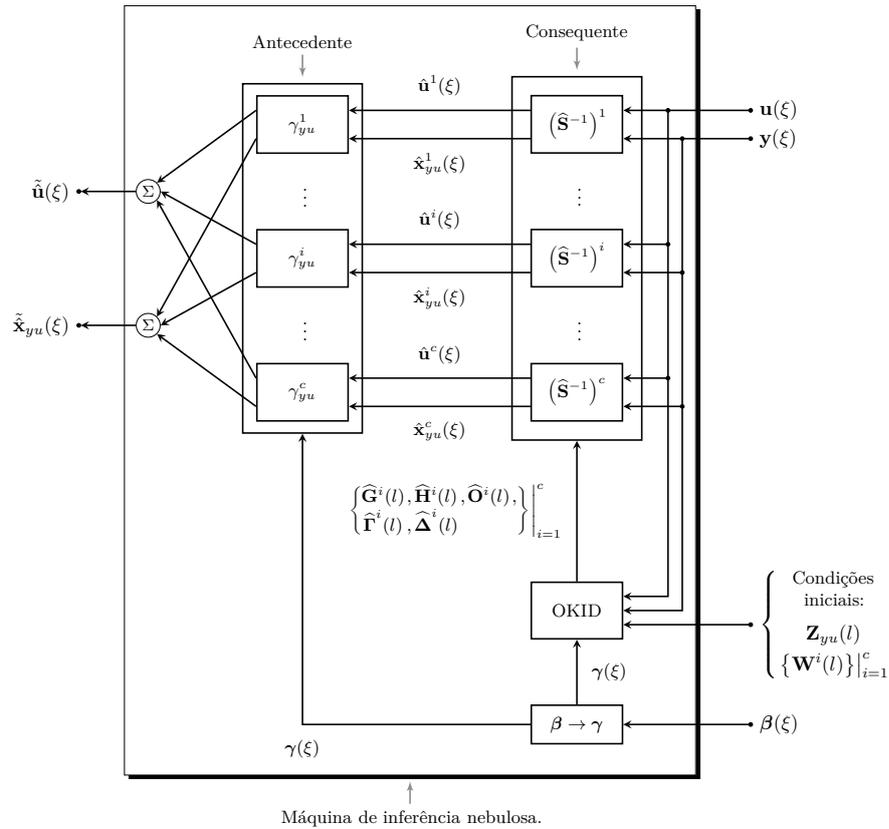
A máquina de inferência é o bloco da Figura 5 que implementa a base de regras do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso. É composta pela combinação linear entre a parte do antecedente (representada pelos graus de ativação normalizados) e a parte do conseqüente (representada pelos submodelos locais). Dessa forma, a partir da base de regras da Eq. (3.8), definem-se o *estado estimado nebuloso* e a *entrada estimada nebulosa do sistema* como sendo os vetores  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu} = \tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\xi) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ , tais que

$$\tilde{\mathbf{x}}_{yu} = \tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi) \triangleq \sum_{i=1}^c \gamma_{yu}^i(\xi) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) \quad (3.15)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\xi) \triangleq \sum_{i=1}^c \gamma_{yu}^i(\xi) \hat{\mathbf{u}}^i(\xi) \quad (3.16)$$

Observa-se que as Eqs. (3.15) e (3.16) são as saídas resultantes do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso, conforme proposto na Figura 6.

Figura 6 – Fluxograma das etapas de implementação do modelo inverso nebuloso proposto.



Fonte: autor dessa dissertação.

### 3.2 Estimação da Proposição Antecedente

Como observado nas definições do bloco base de regras na Seção 3.1, a proposição antecedente é representada pelo grau de ativação das regras  $\beta_{yu}(\xi)$ , cuja estimação é realizada pelo bloco do agrupamento da Figura 5, nos moldes da Seção 2.2.2.

Na Seção 3.1, foi apresentada a estrutura da base de dados  $\mathbf{Z}_{yu} = \mathbf{Z}_{yu}(l)$ , utilizada principalmente para a estimação da proposição antecedente via algoritmo GK para cada amostra de dados  $\mathbf{z}_{yu}(\xi)$ . A mesma base de dados é utilizada para a estimação paramétrica em batelada dos submodelos locais da proposição consequente. Nessa seção propõe-se realizar um *janelamento da base de dados*  $\mathbf{Z}_{yu} = \mathbf{Z}_{yu}(k)$ , com o propósito de movimentar a batelada de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  para aplicar no algoritmo GK, descrito no Algoritmo 3 da Seção 2.2.2.1, no decorrer do tempo, obtendo amostras instantâneas de  $\beta_{yu}(k)$ . Dessa forma a proposição antecedente das regras será computada a cada amostra  $k$ , porém baseada em uma pequena memória de  $l$  dados.

Para implementar a movimentação de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  da Eq. (3.5), a técnica FILO (*Frist Input – Last Output*) de empilhamento de dados será usada. Nesse caso, a ideia do empilhamento FILO consiste em realizar um movimento entre as colunas de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  a cada amostra  $k$ , no sentido da última coluna para a primeira coluna, para que a primeira

coluna que entrou na matriz no instante  $k$  seja a última coluna a sair da matriz, depois de  $l - k + 1$  amostras, resultando no deslizeamento da janela de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  ao longo das amostras, tal que:

$$\mathbf{Z}_{yu}(k) = [\mathbf{z}_{yu}(k - l + 1) \cdots \mathbf{z}_{yu}(k - l + \xi) \cdots \mathbf{z}_{yu}(k)] \quad (3.17)$$

na qual  $\xi$  é o índice das colunas (elementos) da base de dados em batelada  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ ,  $k$  é o índice de amostragem do sistema (utilizado na etapa recursiva) e  $l$  é o número de dados (colunas) de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ . Observa-se que fazendo  $k = l$  na Eq. (3.17), obtém-se a base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  da Eq. (3.5). Além disso,  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$  tem a mesma natureza matemática de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , ou seja,  $\mathbf{Z}_{yu}(k) \in \mathbb{R}^{(m+r) \times l}$ .

Uma vez obtido a matriz de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$  em cada amostra  $k \geq l$ , o vetor  $\beta_{yu}(k)$  pode ser estimado através da matriz de partição decorrente do algoritmo GK. Visto que as variáveis que compõem as linhas da matriz  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$  são as mesmas variáveis físicas, que caracterizam os conjuntos nebulosos das variáveis linguísticas da proposição composta do antecedente da base de regras da Eq. (3.8), então, baseando na Seção 2.2.2.2, obtém-se que  $\beta_{yu}^i(\xi) = \beta_{yu}^i[\mathbf{z}_{yu}(\xi)] = \mu_{i\xi}$ , para todo  $\xi \in [k - l + 1, k] \subset \mathbb{Z}_+^*$ . Em seguida, obtém-se  $\beta_{yu}^i(\xi)$  de cada elemento da matriz de partição  $\mathfrak{M}(k) \triangleq [\mu_{i\xi}]_{c \times l}$ , decorrente do algoritmo GK, aplicado *a priori* sobre  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ . Esse conjunto de etapas são resumidas no procedimento *GKOverDataSlidingWindow*, descrito no Algoritmo 6.

---

**Algoritmo 6** Algoritmo do procedimento *GKOverDataSlidingWindow*.
 

---

**Entrada:**  $\mathbf{Z}_{yu}(k-1)$ ,  $\mathbf{z}_{yu}(k)$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ .

**Saída:**  $\beta_{yu}(k)$ ,  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ .

1: **Procedimento** GKOVERDATASLIDINGWINDOW ( $\mathbf{Z}_{yu}(k-1)$ ,  $\mathbf{z}_{yu}(k)$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ )

▷ PASSO 01: Implementar o janelamento de dados da Eq. (3.17) a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(k-1)$ .

2:  $\mathbf{Z}_{yu}(k) \leftarrow \mathbf{Z}_{yu}(k-1)$

▷ PASSO 1.1: Excluir a primeira coluna de  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ .

▷ PASSO 1.2: Inserir o vetor  $\mathbf{z}_{yu}(k)$  após a última coluna de  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ .

▷ PASSO 02: A partir da base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ , do número de agrupamentos  $c$ , e dos parâmetros  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ , nessa ordem, executar o procedimento GK, conforme Algoritmo 3.

▷ PASSO 03: Extrair a  $k$ -ésima (última) coluna  $\boldsymbol{\mu}(k)$  da matriz  $\mathfrak{M}$  e fazer  $\beta_{yu}(k) \leftarrow \boldsymbol{\mu}(k)$ , semelhante a Eq. (2.109) na Seção 2.2.2.2.

3: **Retorne**  $\beta_{yu}(k)$ ,  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ .

4: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

### 3.3 Estimação paramétrica da Proposição Consequente

Como visto na Seção 3.1, o processo realizado pelo bloco da máquina de inferência do modelo neboluso TS inverso na Figura 5 é matematicamente implementado pelas Eqs. (3.15) e (3.16). Nelas constam as ponderações, decorrentes da proposição antecedente (representadas pelos graus de ativação normalizado de cada regra  $\gamma_{yu}^i(\xi)$ ), assim como os submodelos locais, decorrentes da proposição consequente da base de regras da Eq. (3.8). Nessa dissertação, a metodologia *Observer Kalman Identification* (OKID) será utilizada como estratégia de estimação paramétrica das estruturas dos submodelos locais inversos, os quais representarão a proposição consequente.

A estrutura de cada submodelo local inverso  $i$  será definida pela abordagem de inversão direta (i.e., inversão por aprendizado direto, conforme apresentado na Seção 2.3), no contexto espaço de estados com observador de Kalman. Logo, o OKID deverá estimar os  $c$  conjuntos de parâmetros das estruturas desses submodelos em dois momentos: a) num primeiro momento, a partir de um conjunto inicial de dados (estimação em batelada); e b) num segundo momento, a partir de cada amostra de dados  $\mathbf{z}_{yu}(k)$  obtida do sistema (estimação recursiva). Nesse dois momentos, o OKID será utilizado de acordo com os procedimentos da Figura 7.

Dessa forma, as formulações matemáticas dos procedimentos da Figura 7 constituem a metodologia de estimação paramétrica da proposição consequente proposta nessa dissertação, as quais serão descritas nessa seção. A priori, as equações para estimação da  $i$ -ésima matriz do parâmetros de Markov do observador de Kalman são obtidas tanto em batelada, para treinamento do modelo, conforme na Seção 3.3.1, quanto de forma recursiva (adaptativa), conforme na Seção 3.3.3. Em seguida, as equações decorrentes ao processo de desacoplamento dos parâmetros estimados de Markov são apresentadas de acordo com a Seção 3.3.3. Por fim, as equações inerentes ao procedimento *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) são apresentadas tanto para a estimação paramétrica da estrutura do  $i$ -ésimo submodelo local, conforme na Seção 3.3.4.

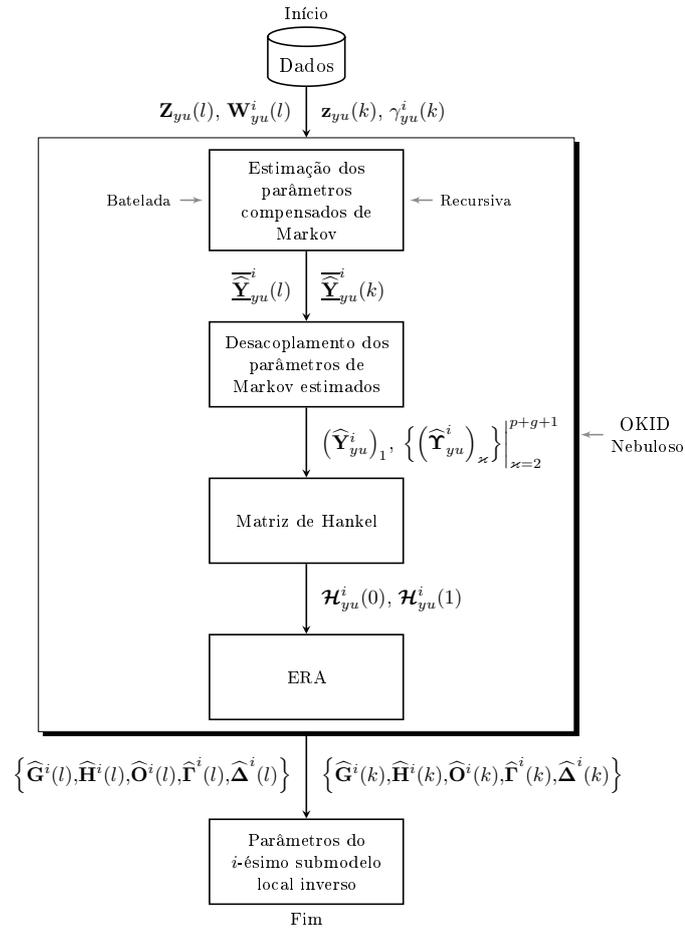
#### 3.3.1 Estimação compensada em batelada dos parâmetros de Markov do observador de Kalman

Baseando-se na Figura 4c da Seção 2.3, define-se o  $i$ -ésimo submodelo inverso local MIMO obtido por aprendizado direto, no contexto do espaço de estados, com o vetor de saídas estimadas  $\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \hat{\mathbf{u}}^i = \hat{\mathbf{u}}^i [\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi), \mathbf{y}(\xi)]$  e vetor de estados estimados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) = \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i = \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i [\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi), \mathbf{y}(\xi), \mathbf{e}^i(\xi)]$ , conforme na Figura 8.

No contexto de estimação paramétrica em batelada (*off-line*) a partir de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , a estrutura do submodelo da Figura 8 é definida no *espaço de estados com o observador de estados de Kalman* da seguinte forma:

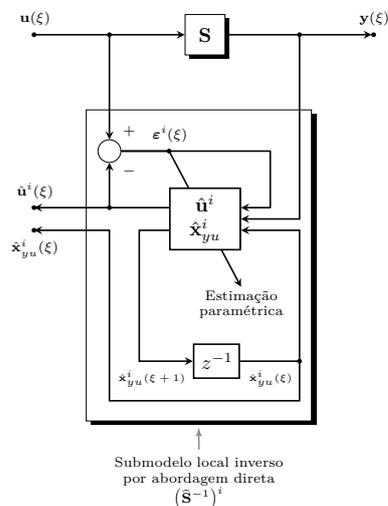
$$\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) = \widehat{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{y}(\xi) - \widehat{\mathbf{O}}^i [\mathbf{u}(\xi) - \hat{\mathbf{u}}^i(\xi)] \quad (3.18)$$

Figura 7 – Fluxograma de procedimentos do OKID para o  $i$ -ésimo submodelo local inverso.



Fonte: o autor dessa dissertação.

Figura 8 – Estrutura de identificação inversa nebulosa por aprendizado direto  $(\hat{\mathbf{S}}^{-1})^i$ , no contexto do espaço de estados, proposta nessa dissertação.



Fonte: adaptado de (SOUSA; KAYMAK, 2002).

$$\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi) \quad (3.19)$$

onde  $\xi$  é o índice associado à *sequência de amostras dos dados no espaço de dados em batelada*, e os parâmetros a serem estimados  $\widehat{\mathbf{G}}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i \in \mathbb{R}^{r \times m}$  são definidos como a *matriz dinâmica*, a *matriz de entradas*, a *matriz do observador de estados*, a *matriz de saídas* e a *matriz de transição direta* (entrada para a saída), respectivamente. Reescrevendo as Eqs. (3.18) e (3.19) tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) = \overline{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi) \quad (3.20)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi) \quad (3.21)$$

onde as Eqs. (3.20) e (3.21) representam o  $i$ -ésimo submodelo local inverso no *espaço do observador de Kalman*, tal que:

$$\overline{\mathbf{G}}^i \triangleq \widehat{\mathbf{G}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.22)$$

$$\overline{\mathbf{H}}^i \triangleq [\widehat{\mathbf{H}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\mathbf{\Delta}}^i, -\widehat{\mathbf{O}}^i] \in \mathbb{R}^{n \times (m+r)} \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{z}_{yu}(\xi)$  é o vetor da  $\xi$ -ésima amostra de dados de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , definido conforme a Eq. (3.4);  $\overline{\mathbf{G}}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\overline{\mathbf{H}}^i \in \mathbb{R}^{n \times (m+r)}$  são a *matriz dinâmica do observador de Kalman* e a *matriz de entradas do observador de Kalman* respectivamente.

Seja  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1) \neq \mathbf{0}$  o estado inicial e  $q \in \mathbb{Z}_+$  um parâmetro de predição associado aos estados. Expandindo a Eq. (3.20) até  $\xi + q$  tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) &= \overline{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi) \\ \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 2) &= \overline{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) + \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + 1) \\ &= \left[ \overline{\mathbf{G}}^i \right]^2 \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \overline{\mathbf{G}}^i \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi) + \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + 1) \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + (q - 1)) &= \overline{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + (q - 2)) + \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q - 2)) \\ &= \left[ \overline{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-1)} \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \left[ \overline{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-2)} \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi) + \left[ \overline{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-3)} \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + 1) + \dots + \\ &\quad \left[ \overline{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-(q-2))} \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q - 4)) + \left[ \overline{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-(q-1))} \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q - 3)) + \\ &\quad \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q - 2)) \\ \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + q) &= \overline{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + (q - 1)) + \overline{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q - 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-1)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi) + \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-2)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + 1) + \dots + \\
&\quad \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-(q-2))} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-3)) + \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-(q-1))} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-2)) + \\
&\quad \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-1)) \\
&= \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \sum_{\iota=1}^q \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-\iota)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (\iota-1)) \\
&= \sum_{\iota=1}^q \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(\iota-1)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-\iota)) + \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da expansão da Eq. (3.24) na Eq. (3.21) para  $\xi + q$  tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{u}}^i(\xi + q) &= \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + q) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi + q) \\
&= \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-1)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi) + \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-2)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + 1) + \dots + \\
&\quad \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-(q-2))} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-3)) + \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-(q-1))} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-2)) + \\
&\quad \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-1)) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi + q) \\
&= \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \sum_{\iota=1}^q \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-\iota)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (\iota-1)) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi + q) \\
&= \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi + q) + \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \sum_{\iota=1}^q \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(\iota-1)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-\iota)) + \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

O parâmetro  $q$  apresentado anteriormente é denominado *índice de deadbeat*. O papel do índice de deadbeat é conduzir a convergência da matriz dinâmica do observador de Kalman  $\widehat{\mathbf{G}}^i$  para a matriz nula  $\mathbf{0}$ , desde que os módulos dos autovalores de  $\widehat{\mathbf{G}}^i$  estejam entre 0 e 1, bem como os estados estimados sejam limitados. (CHEN, 1999; JUANG, 1994; WU et al., 2015). Consequentemente, a parcela  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^q \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi)$  convergirá para  $\mathbf{0}$  e a Eq. (3.25) resultará em:

$$\widehat{\mathbf{u}}^i(\xi + q) = \widehat{\mathbf{\Delta}}^i \mathbf{y}(\xi + q) + \sum_{\iota=1}^q \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(\iota-1)} \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{z}_{yu}(\xi + (q-\iota)) = \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \mathbf{v}_{yu} [(\xi - 1) + q] \tag{3.26}$$

como sendo a equação do  $i$ -ésimo submodelo local inverso linear invariante no tempo de  $q$  passos a frente, onde:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta}^i \\ \widehat{\Gamma}^i \widehat{\mathbf{H}}^i \\ \widehat{\Gamma}^i \widehat{\mathbf{G}}^i \widehat{\mathbf{H}}^i \\ \widehat{\Gamma}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^2 \widehat{\mathbf{H}}^i \\ \dots \\ \widehat{\Gamma}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-2)} \widehat{\mathbf{H}}^i \\ \widehat{\Gamma}^i \left[ \widehat{\mathbf{G}}^i \right]^{(q-1)} \widehat{\mathbf{H}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_1 \\ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_2 \\ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_3 \\ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_4 \\ \dots \\ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_q \\ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{q+1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_{yu} [(\xi - 1) + q] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(\xi + q) \\ \mathbf{z}_{yu}[\xi + (q - 1)] \\ \mathbf{z}_{yu}[\xi + (q - 2)] \\ \mathbf{z}_{yu}[\xi + (q - 3)] \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{yu}(\xi + 1) \\ \mathbf{z}_{yu}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

sendo  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times [m+q(m+r)]}$  a matriz dos *parâmetros de Markov do espaço do observador de Kalman*, ou ainda de *resposta ao pulso unitário de  $q$  passos a frente* (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991; JUANG, 1994), com  $\left( \widehat{\mathbf{y}}_{yu}^i \right)_1 \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times 1}$  a  $\left( \widehat{\mathbf{y}}_{yu}^i \right)_r \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times 1}$  sendo os *vetores dos parâmetros de Markov associados com as variáveis de saída 1 a  $r$  do submodelo local*, e  $\mathbf{v}_{yu} [(\xi - 1) + q] \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times 1}$  o *vetor de regressores do espaço em batelada*. Para obter a  $i$ -ésima matriz dos parâmetros de Markov referente à Eq. (3.27) na amostra  $l$ , a partir da base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , desenvolve-se as Eqs. (3.26) e (3.28) no sentido dos *mínimos quadrados ponderados em batelada* para  $1 \leq \xi \leq (l - q)$ , conforme descrito na Seção 2.1.2.1, resultando em:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l) = \mathbf{u}(l) \mathbf{W}_{yu}^i(l) [\mathbf{V}_{yu}(l - 1)]^T \mathbf{P}_{yu}^i(l - 1) \quad (3.29)$$

com:

$$\mathbf{u}(l) = [\mathbf{u}(1 + q) \cdots \mathbf{u}(\xi + q) \cdots \mathbf{u}(l)] \quad (3.30)$$

$$\mathbf{W}_{yu}^i(l) = \begin{bmatrix} \gamma_{yu}^i(1 + q) \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_{yu}^i(\xi + q) \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \gamma_{yu}^i(l) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{V}_{yu}(l - 1) = [\mathbf{v}_{yu}(q) \cdots \mathbf{v}_{yu}[(\xi - 1) + q] \cdots \mathbf{v}_{yu}(l - 1)] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{P}_{yu}^i(l - 1) = \left\{ \mathbf{V}_{yu}(l - 1) \mathbf{W}_{yu}^i(l) [\mathbf{V}_{yu}(l - 1)]^T \right\}^{-1} \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{u}(l) \in \mathbb{R}^{r \times (l-q)}$ ,  $\mathbf{W}_{yu}^i(l) \in \mathbb{R}^{(l-q) \times (l-q)}$ ,  $\mathbf{V}_{yu}(l-1) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times (l-q)}$  e  $\mathbf{P}_{yu}^i(l-1) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times [m+q(m+r)]}$  são a *matriz dos valores medidos da entrada do sistema*, a *matriz de ponderação nebulosa para a  $i$ -ésima regra*, a *matriz de regressores para o mapeamento inverso*, a *matriz de covariância ponderada*, associada a  $i$ -ésima matriz dos parâmetros de Markov, todas respectivamente computadas dentro do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ .

De posse da matriz  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l)$  para cada regra  $i$ , as respectivas versões compensadas recursivas  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi)$  serão estimadas dentro da base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , conforme o Apêndice A, como parte da etapa de estimação inicial, resultando em:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l) & \text{se } 1 \leq \xi \leq \tau \\ \left[1 - \frac{1}{T_f}\right] \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi - 1) + \frac{1}{T_f} \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi - \tau) & \text{se } \tau < \xi \leq l \end{cases} \quad (3.34)$$

onde  $T_f \in \mathbb{Z}_+^*$  é a *constante de suavização exponencial*, estabelecida em número de amostras pelo projetista, e  $\tau \in \mathbb{Z}_+^*$  é a *constante de atualização paramétrica descorrelacionada*.

### 3.3.2 Estimação compensada recursiva dos parâmetros de Markov do observador de Kalman

Na Seção 3.3.1, foi apresentada uma formulação que resultou nas Eqs. (3.29) e (3.33), as quais são fundamentais para a etapa de estimação em batelada da matriz dos parâmetros de Markov otimizada, no sentido de mínimos quadrados ponderados, a partir de um conjunto (batelada) de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ . Nessa seção será apresentada uma formulação da etapa recursiva de estimação da matriz dos parâmetros de Markov do  $i$ -ésimo submodelo local inverso, a partir das Eqs. (3.29) e (3.33).

Seja o  $k$  o índice da amostra de elementos definido para o contexto recursivo, tal que  $k \geq l + 1$ . Substituindo  $l$  por  $k$  nas Eqs. (3.29) e (3.33) tem-se:

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k) = \mathbf{u}(k) \mathbf{W}_{yu}^i(k) [\mathbf{V}_{yu}(k-1)]^T \mathbf{P}_{yu}^i(k-1) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{P}_{yu}^i(k-1) = \left\{ \mathbf{V}_{yu}(k-1) \mathbf{W}_{yu}^i(k) [\mathbf{V}_{yu}(k-1)]^T \right\}^{-1} \quad (3.36)$$

e realizando a mesma substituição anterior nas Eqs. (3.30) a (3.32) obtém-se:

$$\mathbf{u}(k) = \left[ \overbrace{\mathbf{u}(1+q) \cdots \mathbf{u}(k-1)}^{\mathbf{u}(k-1)} \mid \mathbf{u}(k) \right] = \left[ \mathbf{u}(k-1) \mid \mathbf{u}(k) \right] \quad (3.37)$$

$$\mathbf{v}_{yu}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{z}_{yu}(k-1) \\ \mathbf{z}_{yu}(k-2) \\ \mathbf{z}_{yu}(k-3) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{yu}[k-(q-1)] \\ \mathbf{z}_{yu}(k-q) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{V}_{yu}(k-2) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{yu}(q) & \cdots & \mathbf{v}_{yu}(k-2) \\ \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \mathbf{y}(q+1) & \cdots & \mathbf{y}(k-1) \\ \mathbf{z}_{yu}(q) & \cdots & \mathbf{z}_{yu}(k-2) \\ \mathbf{z}_{yu}(q-1) & \cdots & \mathbf{z}_{yu}(k-3) \\ \mathbf{z}_{yu}(q-2) & \cdots & \mathbf{z}_{yu}(k-4) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{z}_{yu}(2) & \cdots & \mathbf{z}_{yu}(k-q) \\ \mathbf{z}_{yu}(1) & \cdots & \mathbf{z}_{yu}[k-(q+1)] \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{V}_{yu}(k-1) = \left[ \overbrace{\mathbf{v}_{yu}(q) \cdots \mathbf{v}_{yu}(k-2)}^{\mathbf{V}_{yu}(k-2)} \mid \mathbf{v}_{yu}(k-1) \right] = \left[ \mathbf{V}_{yu}(k-2) \ \mathbf{v}_{yu}(k-1) \right] \quad (3.40)$$

$$\mathbf{W}_{yu}^i(k) = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{ccc} \gamma_{yu}^i(1+q) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_{yu}^i(k-1) \end{array} \right]}^{\mathbf{W}_{yu}^i(k-1)} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{0}_\gamma} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right]}^{\mathbf{0}_\mathbf{w}} \\ \gamma_{yu}^i(k) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{W}_{yu}^i(k-1) & \mathbf{0}_\mathbf{w} \\ \mathbf{0}_\gamma & \gamma_{yu}^i(k) \end{array} \right] \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{r \times (k-q)}$ ,  $\mathbf{u}(k-1) \in \mathbb{R}^{r \times [(k-1)-q]}$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ ,  $\mathbf{V}_{yu}(k-1) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times (k-q)}$ ,  $\mathbf{V}_{yu}(k-2) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times [(k-1)-q]}$ ,  $\mathbf{v}_{yu}(k-1) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times 1}$ ,  $\mathbf{W}_{yu}^i(k) \in \mathbb{R}^{(k-q) \times (k-q)}$ ,  $\mathbf{W}_{yu}^i(k-1) \in \mathbb{R}^{[(k-1)-q] \times [(k-1)-q]}$  e  $\mathbf{0}_\gamma \in \mathbb{R}^{1 \times [(k-1)-q]}$  e  $\mathbf{0}_\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{[(k-1)-q] \times 1}$ . Então, expandindo a equação de estimação da matriz dos parâmetros de Markov da Eq. (3.35) e a sua respectiva matriz de covariância da Eq. (3.36) no sentido dos mínimos quadrados ponderados recursivos, conforme na Seção 2.1.2.2, obtém-se:

$$\boldsymbol{\eta}^i(k) = \mathbf{u}(k) - \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-1) \mathbf{v}_{yu}(k-1) \quad (3.42)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i(k-1) = [\mathbf{v}_{yu}(k-1)]^T \mathbf{P}_{yu}^i(k-2) \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}_{yu}^i(k-1) = \frac{\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i(k-1)}{[\gamma_{yu}^i(k)]^{-1} + \boldsymbol{\Xi}_{yu}^i(k-1) \mathbf{v}_{yu}(k-1)} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{P}_{yu}^i(k-1) = \mathbf{P}_{yu}^i(k-2) \left[ \mathbf{I}_{\mathbf{P}_{yu}^i} - \mathbf{v}_{yu}(k-1) \mathbf{K}_{yu}^i(k-1) \right] \quad (3.45)$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k) = \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-1) + \boldsymbol{\eta}^i(k) \mathbf{K}_{yu}^i(k-1) \quad (3.46)$$

onde, para cada regra  $i$  e em cada amostra  $k \geq l+1$ , tem-se  $\boldsymbol{\eta}^i(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  como sendo o vetor de inovação;  $\mathbf{K}_{yu}^i(k-1) \in \mathbb{R}^{1 \times [m+q(m+r)]}$  como sendo o vetor do ganho de inovação e  $\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i(k-1) \in \mathbb{R}^{1 \times [m+q(m+r)]}$  como sendo o vetor comum ao numerador e denominador do ganho da inovação;  $\mathbf{P}_{yu}^i(k-1) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times [m+q(m+r)]}$  como sendo a matriz de covariância de estimação recursiva associada aos parâmetros de Markov e  $\mathbf{I}_{\mathbf{P}_{yu}^i}$  como sendo a matriz identidade de mesma dimensão das matrizes  $\mathbf{P}_{yu}^i$  e  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k) \in \mathbb{R}^{r \times [m+q(m+r)]}$  é a matriz dos parâmetros de Markov recursivamente estimados. No contexto de compensação paramétrica, conforme abordado no Apêndice A, substituindo  $k$  por  $k-\tau$  nas Eqs. (3.42) a (3.46) obtém-se as equações que resultam na estimação recursiva da matriz dos parâmetros compensados de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$  como sendo:

$$\boldsymbol{\eta}^i(k-\tau) = \mathbf{u}(k-\tau) - \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k-(\tau+1)] \mathbf{v}_{yu}[k-(\tau+1)] \quad (3.47)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i[k-(\tau+1)] = \{\mathbf{v}_{yu}[k-(\tau+1)]\}^T \mathbf{P}_{yu}^i[k-(\tau+2)] \quad (3.48)$$

$$\mathbf{K}_{yu}^i[k-(\tau+1)] = \frac{\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i[k-(\tau+1)]}{[\gamma_{yu}^i(k-\tau)]^{-1} + \boldsymbol{\Xi}_{yu}^i[k-(\tau+1)] \mathbf{v}_{yu}[k-(\tau+1)]} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{P}_{yu}^i[k-(\tau+1)] = \mathbf{P}_{yu}^i[k-(\tau+2)] \left\{ \mathbf{I}_{\mathbf{P}_{yu}^i} - \mathbf{v}_{yu}[k-(\tau+1)] \mathbf{K}_{yu}^i[k-(\tau+1)] \right\} \quad (3.50)$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-\tau) = \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k-(\tau+1)] + \boldsymbol{\eta}^i(k-\tau) \mathbf{K}_{yu}^i[k-(\tau+1)] \quad (3.51)$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k) = [1-f_T] \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-1) + f_T \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-\tau) \quad (3.52)$$

visto que as entradas das matrizes regressivas de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k-(\tau+1)]$  nas Eqs. (3.47) e (3.51) são definidas a partir de seus correspondentes compensados, ou seja,  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k-(\tau+1)] \triangleq \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k-(\tau+1)]$ , resultando em  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-\tau) = \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-\tau)$ . Além disso, o vetor  $\mathbf{v}_{yu}[k-(\tau+1)]$  é obtido ao substituir  $k$  por  $k-\tau$  na Eq. (3.38), resultando em

$$\mathbf{v}_{yu}[k-(\tau+1)] = \mathbf{v}_{yu}[(k-\tau)-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k-\tau) \\ \mathbf{z}_{yu}[(k-\tau)-1] \\ \mathbf{z}_{yu}[(k-\tau)-2] \\ \mathbf{z}_{yu}[(k-\tau)-3] \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{yu}[(k-\tau)-(q-1)] \\ \mathbf{z}_{yu}[(k-\tau)-q] \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Dessa forma, os passos do procedimento recursivo de obtenção da matriz (ótima) dos parâmetros compensados de Markov, a cada instante amostral  $k$ , podem ser organizados na sequência das Eqs. (3.47) a (3.52), conforme descritos no Algoritmo 7.

---

**Algoritmo 7** Algoritmo do procedimento *RecursiveCompensatedMarkovParameters*.

---

**Entrada:**  $T_f$ ,  $\mathbf{u}(k - \tau)$ ,  $\gamma_{yu}^i(k - \tau)$ ,  $\mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)]$ ,  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$ ,  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - 1)$ ,  $\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 2)]$ .

**Saída:**  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$ ,  $\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$ .

1: **Procedimento** RECURSIVECOMPENSATEDMARKOVPARAMETERS  $\left( T_f, \mathbf{u}(k - \tau), \gamma_{yu}^i(k - \tau), \mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)], \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)], \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - 1), \mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 2)] \right)$

▷ **PASSO 01:** Obter o valor de  $f_T$  como  $f_T = 1/T_f$ .

▷ **PASSO 02:** Obter o vetor de inovação amostral para a compensação paramétrica  $\boldsymbol{\eta}^i(k - \tau)$  por meio da Eq. (3.47).

▷ **ETAPA 03:** Calcular o vetor do ganho de inovação amostral  $\mathbf{K}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$  por meio das Eqs. (3.48) e (3.49).

▷ **ETAPA 04:** Calcular a matriz de covariância recursiva associada aos parâmetros de Markov  $\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$  por meio da Eq. (3.50).

▷ **ETAPA 05:** Calcular as matriz dos parâmetros compensados de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - \tau)$  e  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$ , no sentido dos mínimos quadrados ponderados recursivos, conforme as Eqs. (3.51) e (3.52) respectivamente.

2: **Retorne**  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$ ,  $\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$

3: **Fim Procedimento**

Fonte: os autor da dissertação.

---

### 3.3.3 Desacoplamento dos parâmetros estimados de Markov do observador de Kalman

Cada elemento da matriz dos parâmetros de Markov do observador de Kalman estimados nas Eqs. (3.29) e (3.46) combinam tanto o *conjunto de parâmetros de Markov estimados associados com o submodelo local* (sem observador local), quanto o *conjunto de parâmetros de Markov associados com o ganho do observador local*. Consequentemente para computá-los, é necessário desacoplá-los. A partir de  $\widehat{\mathbf{G}}^i$  e  $\widehat{\mathbf{H}}^i$  nas Eqs. (3.22), (3.23) e (3.27),  $\forall \varkappa \in \mathbb{Z}_+^*$ ,  $\varkappa \geq 2$ , pode-se obter (JUANG, 1994; WU et al., 2015):

$$\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_1 = \widehat{\Delta}^i \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa} &= \widehat{\Gamma}^i \left[\widehat{\mathbf{G}}^i\right]^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{H}}^i = \widehat{\Gamma}^i \left(\widehat{\mathbf{G}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\Gamma}^i\right)^{\varkappa-2} \left[\widehat{\mathbf{H}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\Delta}^i, -\widehat{\mathbf{O}}^i\right] \\
&\quad \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^{(1)} \qquad \qquad \qquad \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^{(2)} \\
&\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
&= \left[ \widehat{\Gamma}^i \left(\widehat{\mathbf{G}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\Gamma}^i\right)^{\varkappa-2} \left(\widehat{\mathbf{H}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\Delta}^i\right), -\widehat{\Gamma}^i \left(\widehat{\mathbf{G}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i \widehat{\Gamma}^i\right)^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{O}}^i \right] \\
&= \left[ \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^{(1)}, -\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^{(2)} \right]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1^{(1)} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1 \in \mathbb{R}^{r \times (m+r)}$ . Assim a partir das Eqs. (3.54) e (3.55), o conjunto de parâmetros de Markov estimados associados com o submodelo local  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$  e  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$  pode ser obtido como segue: (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991; WU et al., 2015):

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1 \triangleq \widehat{\Delta}^i = \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_1 \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa} &\triangleq \widehat{\Gamma}^i \left[\widehat{\mathbf{G}}^i\right]^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{H}}^i \\
&= \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^{(1)} - \sum_{\iota=1}^{\varkappa-1} \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\iota+1}^{(2)} \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa-\iota}, \forall \varkappa \in [2, q+1] \subset \mathbb{Z}_*^+
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa} &\triangleq \widehat{\Gamma}^i \left[\widehat{\mathbf{G}}^i\right]^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{H}}^i \\
&= -\sum_{\iota=1}^q \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\iota+1}^{(2)} \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa-\iota}, \forall \varkappa \in [q+2, \infty) \subset \mathbb{Z}_*^+
\end{aligned} \tag{3.58}$$

e o conjunto de parâmetros de Markov associados com o ganho do observador local  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_2^o \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^o \in \mathbb{R}^{r \times r}$  pode ser obtido como segue (PHAN; JUANG; LONGMAN, 1991; WU et al., 2015):

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_2^o \triangleq \widehat{\Gamma}^i \widehat{\mathbf{O}}^i = \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_2^{(2)} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^o &\triangleq \widehat{\Gamma}^i \left[\widehat{\mathbf{G}}^i\right]^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{O}}^i \\
&= \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^{(2)} - \sum_{\iota=1}^{\varkappa-2} \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\iota+1}^{(2)} \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa-\iota}^o, \forall \varkappa \in [3, q+1] \subset \mathbb{Z}_*^+
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa}^o &\triangleq \widehat{\Gamma}^i \left[\widehat{\mathbf{G}}^i\right]^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{O}}^i \\
&= -\sum_{\iota=1}^q \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\iota+1}^{(2)} \left(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i\right)_{\varkappa-\iota}^o, \forall \varkappa \in [q+2, \infty) \subset \mathbb{Z}_*^+
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Uma vez encontrado os parâmetros desacoplados  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa}$  e  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)^o$ , monta-se a *conjunto de parâmetros de Markov estimados e desacoplados do submodelo local com observador de estados* como segue:

$$(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa} \triangleq [(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa}, (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)^o] \equiv \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i [\widehat{\mathbf{G}}^i]^{\varkappa-2} \widehat{\mathbf{HO}}^i \quad \forall \varkappa \in \mathbb{Z}_+, \varkappa \geq 2 \quad (3.62)$$

onde  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa} \in \mathbb{R}^{r \times (m+r)}$  e  $\widehat{\mathbf{HO}}^i \triangleq [\widehat{\mathbf{H}}^i \widehat{\mathbf{O}}^i] \in \mathbb{R}^{n \times (m+r)}$ .

### 3.3.4 Algoritmo de realização de autossistemas (ERA)

Uma vez obtido os  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa}$  a partir de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}(l)$ , conforme a Seção 3.3.3, torna-se necessário estimar os parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i$  para cada submodelo local descrito nas Eqs. (3.18) e (3.19). Uma metodologia que pode ser utilizada para esse propósito é *algoritmo de realização de autossistemas*, ou simplesmente ERA (do inglês *Eigensystems Realization Algorithm*). O ERA utiliza as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$  em suas definições, para obter modelos de realização mínima (observável e controlável) balanceados. (JUANG, 1994; CHEN, 1999; WU et al., 2015).

A matriz de Hankel pode ser genericamente definida como:

$$\mathcal{H}_{yu}^i(\varkappa - 2) \triangleq \begin{bmatrix} (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+1} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+g-1} \\ (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+1} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+2} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+p-1} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+p} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\varkappa+p+g-2} \end{bmatrix} = \mathcal{O}_p^i [\widehat{\mathbf{G}}^i]^{\varkappa-2} \mathcal{C}_g^i \quad (3.63)$$

$\forall \varkappa \geq 2$ , onde  $\mathcal{H}_{yu}^i(\varkappa - 2) \in \mathbb{R}^{pr \times g(m+r)}$ , e  $p \geq 0$  e  $g \geq 0$  são inteiros arbitrários suficientemente grande, tal que  $pr < g(m+r)$  e  $p \geq q$ , para que o ERA seja executado via matriz de Hankel e os modelos de realização realização mínima sejam obtidos (JUANG, 1994; WU et al., 2015).

$$\mathcal{O}_p^i = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \\ \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \widehat{\mathbf{G}}^i \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i [\widehat{\mathbf{G}}^i]^{p-1} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathcal{C}_g^i = [\widehat{\mathbf{HO}}^i \widehat{\mathbf{G}}^i \widehat{\mathbf{HO}}^i \cdots [\widehat{\mathbf{G}}^i]^{g-1} \widehat{\mathbf{HO}}^i] \quad (3.65)$$

com  $\widehat{\mathbf{HO}}^i \in \mathbb{R}^{n \times (m+r)}$ .  $\mathcal{O}_p^i \in \mathbb{R}^{pr \times n}$  e  $\mathcal{C}_g^i \in \mathbb{R}^{n \times g(m+r)}$  são respectivamente as *matrizes de confiabilidade e controlabilidade* do  $i$ -ésimo submodelo local inverso, ambas de rank  $n$ . No Algoritmo 8, propõe-se o procedimento *Markov2Hankel*. Esse procedimento é responsável por obter o conjunto de parâmetros de Markov estimados e desacoplados

$\left\{ \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}, \dots, \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa+p+g-2} \right\}$ , como descrito pelas equações da Seção 3.3.3, assim como as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$  para  $\varkappa \in \{2,3\}$ , conforme a Eq. (3.63).

---

**Algoritmo 8** Algoritmo do procedimento *Markov2Hankel*.

---

**Entrada:**  $m, r, p, g, \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i$ .

**Saída:**  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_1, \mathcal{H}_{yu}^i(0), \mathcal{H}_{yu}^i(1)$ .

1: **Procedimento** MARKOV2HANKEL  $\left( m, r, p, g, \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)$

▷ **PASSO 01:** Realizar o desacoplamento da matriz parâmetros de Markov estimados  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$  conforme a seção 3.3.3.

2: **Para todo**  $\varkappa \in [1, p+g+1] \subset \mathbb{Z}_+^*$  **Faça**

▷ **PASSO 1.1:** Obter a submatriz do parâmetro de Markov local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$  a partir da matriz estimada dos parâmetros de Markov local  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i$ , conforme a Eq. (3.27).

▷ **PASSO 1.2:** Extrair as submatrizes  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}^{(1)}$  e  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}^{(2)}$  a partir da submatriz do parâmetro de Markov local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$  conforme as Eqs. (3.54) e (3.55).

3: **Se**  $\varkappa \leq q+1$  **Então**

▷ **PASSO 1.3:** Para  $\varkappa = 1$ , obter a submatriz do parâmetro Markov local desacoplado  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$ , conforme a Eq. (3.56).

▷ **PASSO 1.4:** Para  $\varkappa = 2$ , obter a submatriz do parâmetro Markov desacoplado do submodelo local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$  e submatriz do parâmetro Markov desacoplado do ganho do observador de Kalman local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}^o$ , conforme as Eqs. (3.57) e (3.59) respectivamente.

▷ **PASSO 1.5:** Para  $\varkappa > 2$ , obter a submatriz do parâmetro Markov desacoplado do submodelo local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$  e submatriz do parâmetro Markov desacoplado do ganho do observador de Kalman local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}^o$ , conforme as Eqs. (3.57) e (3.60) respectivamente.

4: **Senão**

▷ **PASSO 1.6:** Obter a submatriz do parâmetro Markov desacoplado do submodelo local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}$  e submatriz do parâmetro Markov desacoplado do ganho do observador de Kalman local  $\left( \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i \right)_{\varkappa}^o$ , conforme as Eqs. (3.58) e (3.61) respectivamente.

5: **Fim Se**

---

Continuação no Algoritmo 9 na página 106.

---

No contexto nebuloso, pode-se utilizar o ERA para estimar submodelos locais de realização mínima que adequadamente represente o mapeamento inverso do sistema em

---

**Algoritmo 9** Continuação do Algoritmo 8 da página 105.
 

---

▷ **PASSO 1.7:** Para  $\varkappa \geq 2$ , montar a submatriz do conjunto dos parâmetros de Markov desacoplados tanto do submodelo local quanto do ganho do observador de Kalman local, conforme a Eq. (3.62).

6: **Fim Para**

▷ **PASSO 1.7:** Para  $\varkappa \in \{2,3\}$ , montar as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$  respectivamente, a partir da Eq. (3.63).

7: **Retorne**  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$

8: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

torno do  $i$ -ésimo ponto de operação. Para isso, a primeira etapa do ERA é realizar uma fatoração da matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ , usando a operação de *decomposição de valores singulares*, ou SVD (do inglês *Singular Values Decomposition*), tal que:

$$\mathcal{H}_{yu}^i(0) \triangleq \mathbf{R}^i \boldsymbol{\Sigma}^i (\mathbf{S}^i)^T \equiv \mathbf{R}_n^i \boldsymbol{\Sigma}_n^i (\mathbf{S}_n^i)^T = \underbrace{\left[ \mathbf{R}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{1/2} \right]}_{\mathcal{O}_p^i} \underbrace{\left[ (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{1/2} (\mathbf{S}_n^i)^T \right]}_{\mathcal{C}_g^i} \equiv \mathcal{O}_p^i \mathcal{C}_g^i \quad (3.66)$$

onde  $\mathbf{R}^i \in \mathbb{R}^{pr \times pr}$  e  $\mathbf{S}^i \in \mathbb{R}^{g(m+r) \times g(m+r)}$  são *matrizes ortogonais*, com  $\mathbf{R}_n^i \in \mathbb{R}^{pr \times n}$  e  $\mathbf{S}_n^i \in \mathbb{R}^{g(m+r) \times n}$  sendo *matrizes ortonormais* de rank  $n$ , obtidas ao extrair-se as  $n$  primeiras colunas de  $\mathbf{R}^i$  e  $\mathbf{S}^i$  respectivamente. Como consequência, as matrizes de observabilidade e controlabilidade resultam em  $\mathcal{O}_p^i = \mathbf{R}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{1/2}$  e  $\mathcal{C}_g^i = (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{1/2} (\mathbf{S}_n^i)^T$ , ambas de rank  $n$ . A matriz retangular  $\boldsymbol{\Sigma}^i \in \mathbb{R}^{pr \times g(m+r)}$  é denominada *matriz de valores singulares*, e contém em sua estrutura a matriz diagonal  $\boldsymbol{\Sigma}_n^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de rank  $n$ , denominada de **matriz de valores singulares de ordem mínima**, tal que:

$$\boldsymbol{\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_n^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^i \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)_{|1}^{n_{min}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)_{|n_{min}+1}^n \end{array} \right] \quad (3.68)$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}_n^i)|_1^{n_{min}} \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \sigma_{i}^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{n_{min}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}_n^i)|_{n_{min}+1}^n \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_{n+1}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \sigma_{i}^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

onde  $n, n_{min} \in \mathbb{Z}_+^*$  são a *ordem de realizao mínima* e a *ordem de realizao mínima reduzida* para cada submodelo local  $i$  respectivamente. Os valores singulares de  $\boldsymbol{\Sigma}_n^i$  são tais que  $\sigma_1^{(i)} \geq \cdots \geq \sigma_{n_{min}}^{(i)} \gg \sigma_{n_{min}+1}^{(i)} \geq \cdots \geq \sigma_n^{(i)}$ . Eles podem ser separados em duas matrizes diagonais: a *matriz de valores singulares significativos*  $(\boldsymbol{\Sigma}_n^i)|_1^{n_{min}} \in \mathbb{R}^{n_{min} \times n_{min}}$ , desenvolvida a Eq. (3.69), e a *matriz de valores singulares não significativos*  $(\boldsymbol{\Sigma}_n^i)|_{n_{min}+1}^n \in \mathbb{R}^{(n-n_{min}) \times (n-n_{min})}$ , desenvolvida na Eq. (3.70). Os valores singulares não significativos são relativamente pequenos, por conterem mais informações ruidosas do que do sistema, e por isso podem ser eliminados sem comprometer o comportamento do modelo resultante (JUANG, 1994; WU et al., 2015). Dessa forma, obtm-se as matrizes ortonormais  $\mathbf{R}_{n_{min}}^i \in \mathbb{R}^{pr \times n_{min}}$ ,  $\mathbf{S}_{n_{min}}^i \in \mathbb{R}^{g(m+r) \times n_{min}}$  pela extração das  $n_{min}$  primeiras colunas de  $\mathbf{R}^i$  e  $\mathbf{S}^i$  respectivamente, assim como a matriz diagonal não singular  $\boldsymbol{\Sigma}_{n_{min}}^i = (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)|_1^{n_{min}}$  tal que:

$$\overline{\mathcal{H}}_{yu}^i(0) \triangleq \mathbf{R}_{n_{min}}^i \boldsymbol{\Sigma}_{n_{min}}^i (\mathbf{S}_{n_{min}}^i)^T \approx \mathcal{H}_{yu}^i(0) \quad (3.71)$$

A fatoração da matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  via SVD, como foi apresentada anteriormente, permite obter a realização mínima do modelo inverso no espaço de estados com observador de Kalman, conforme a estrutura de modelo das Eqs. (3.18) e (3.19). No entanto, em aplicações recursivas, a fatoração via SVD é realizada a cada amostragem de dados, o que torna a estimacão paramétrica dos submodelos locais inversos computacionalmente muito dispendiosa. Para lidar com essa desvantagem, destacam-se algumas metodologias promissoras. Em Wu et al. (2015), uma abordagem acelerada do ERA  proposta para realizar a identificação de sistema dinâmico não lineares SISO, denominada *speed up ERA* (ERA acelerado), pelo se estima um modelo no espaço de estados com observador de Kalman, na forma cannica do observador, sem a aplicação do SVD no processo de estimacão. Já em Torres (2018), uma melhoria do *speed up ERA*  proposta, ao colocá-lo no contexto nebuloso, estimando modelos que realizam a identificação de sistemas dinâmicos não lineares MIMO em pontos de operação, cujas estruturas estão no espaço de estados na forma cannica do observador, sem utilizar o observador de Kalman

e sem utilizar o SVD no processo de estimação. Ao combinar essas duas abordagens, será apresentado, nessa dissertação, um conjunto de equações decorrentes do *speed up ERA* no contexto nebuloso, para a implementação do bloco ERA da Figura 7, a fim de identificar, inversamente, sistemas MIMO não lineares em cada ponto de operação, sem a utilização do SVD no processo de estimação. Tal conjunto de equações, denominado por *Speed up ERA Inverso Nebuloso com Observador de Kalman*, possui uma estrutura de realização mínima reduzida, de ordem  $n_{min}$  na forma canônica do observador, e com observador de Kalman, cujos parâmetros podem ser estimados da seguinte forma:

$$\widehat{\Gamma}^i = \boldsymbol{\mathcal{E}}_r^T \boldsymbol{\mathcal{E}}_{n_{min}} \quad (3.72)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}^i = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{n_{min}}^T \boldsymbol{\mathcal{H}}_{yu}^i(1) [\boldsymbol{\mathcal{E}}_{n_{min}}^T \boldsymbol{\mathcal{H}}_{yu}^i(0)]^\dagger \quad (3.73)$$

$$\widehat{\mathbf{H}\mathbf{O}}^i = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{n_{min}}^T \boldsymbol{\mathcal{H}}_{yu}^i(0) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m+r} \quad (3.74)$$

$$\widehat{\mathbf{H}}^i = \text{as primeiras } m \text{ colunas de } \widehat{\mathbf{H}\mathbf{O}}^i \quad (3.75)$$

$$\widehat{\mathbf{O}}^i = \text{as últimas } r \text{ colunas de } \widehat{\mathbf{H}\mathbf{O}}^i \quad (3.76)$$

$$\widehat{\Delta}^i = (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1 = (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1 \quad (3.77)$$

com  $\widehat{\mathbf{H}\mathbf{O}}^i = [\widehat{\mathbf{H}}^i \widehat{\mathbf{O}}^i] \in \mathbb{R}^{n_{min} \times (m+r)}$ , e

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_r \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(p-1)r \times r} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{n_{min}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{min}} \\ \mathbf{0}_{(pr-n_{min}) \times n_{min}} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m+r} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m+r} \\ \mathbf{0}_{(g-1)(m+r) \times (m+r)} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

onde  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_r \in \mathbb{R}^{pr \times r}$ ,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{n_{min}} \in \mathbb{R}^{pr \times n_{min}}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m+r} \in \mathbb{R}^{g(m+r) \times (m+r)}$  são as matrizes seletoras supracitadas. As matrizes  $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\mathbf{I}_{n_{min}} \in \mathbb{R}^{n_{min} \times n_{min}}$ ,  $\mathbf{I}_{m+r} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$  e  $\mathbf{0}_{(p-1)r \times r} \in \mathbb{R}^{(p-1)r \times r}$ ,  $\mathbf{0}_{(pr-n_{min}) \times n_{min}} \in \mathbb{R}^{(pr-n_{min}) \times n_{min}}$ ,  $\mathbf{0}_{(g-1)(m+r) \times (m+r)} \in \mathbb{R}^{(g-1)(m+r) \times (m+r)}$  são as matrizes identidade e matrizes de zeros, respectivamente. Por isso, baseado nas Eqs. (3.72) a (3.80), desenvolve-se o procedimento denominado *SpeedUpERA4InverseFuzzyOKID*, conforme o Algoritmo 10.

---

**Algoritmo 10** Algoritmo do procedimento *SpeedUpERA4InverseFuzzyOKID*.

---

**Entrada:**  $n_{min}$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ .

**Saída:**  $\widehat{\mathbf{G}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i$

1: **Procedimento** SPEEDUPERA4FUZZYOKID  $(n_{min}, m, r, p, g, (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1, \mathcal{H}_{yu}^i(0), \mathcal{H}_{yu}^i(1))$

▷ **PASSO 01:** Definir as matrizes de  $\mathcal{E}_r$ ,  $\mathcal{E}_{n_{min}}$  e  $\mathcal{E}_{m+r}$  a partir das Eqs. (3.78) a (3.80) respectivamente.

▷ **PASSO 02:** Estimar os parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i$  por meio das Eqs. (3.72) a (3.77) respectivamente.

2: **Retorne**  $\widehat{\mathbf{G}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i$

3: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

### 3.4 Aspectos de Implementação

Nas Seções 3.1 a 3.3 foram apresentadas as formulações que descrevem a essência da teoria proposta por esta dissertação. Porém, em termos de implementação, existem aspectos práticos que devem ser considerados para complementar a teoria proposta.

Nessa seção, alguns aspectos práticos serão apresentados em duas partes, conforme as necessidades de implementação da proposta. Na primeira parte, serão abordados os aspectos práticos, associados à <proposição consequente> das regras, conforme a Seção 3.4.1 respectivamente. Já na segunda parte, serão abordados alguns aspectos práticos do modelo nebuloso inverso propriamente dito, proposto por essa dissertação, conforme a Seção 3.4.2.

#### 3.4.1 Aspectos associados à proposição consequente das regras

##### 3.4.1.1 Determinação da ordem mínima reduzida $n_{min}$ .

Devido a estimação dos estados e das saídas nebulosas do modelo inverso apresentado pelas Eqs. (3.15) e (3.16), a *ordem de realização mínima*  $n$  e a *ordem de realização mínima reduzida*  $n_{min}$  que representam o modelo inverso, também foram igualmente definidas para os submodelos locais de todas as  $c$  regras/agrupamentos. Isso implica que tais submodelos locais terão a mesma ordem ao serem estimados a partir das matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ , conforme apresentado na Seção 3.3.4. Porém, sob aspectos práticos,  $n$  e  $n_{min}$  são estimados individualmente para cada submodelo local de regra/agrupamento  $i$ . Nesse item, um procedimento de estimação de  $n$  e  $n_{min}$  de forma otimizada será proposto, a partir da operação de SVD aplicada sobre  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ .

Seja a decomposição de valores singulares de  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  realizada de tal forma que se tenha  $\mathcal{H}_{yu}^i(0) = \Lambda_{yu}^i \Sigma_{yu}^i (\mathbf{S}_{yu}^i)^T$ , onde  $\Lambda_{yu}^i \in \mathbb{R}^{pr \times pr}$  e  $\mathbf{S}_{yu}^i \in \mathbb{R}^{g(m+r) \times g(m+r)}$  são matrizes ortogonais e  $\Sigma_{yu}^i \in \mathbb{R}^{pr \times g(m+r)}$  é a matriz diagonal. Define-se a *matriz de valores singulares*, a matriz  $\Sigma_{yu}^i$  descrita como:

$$\Sigma_{yu}^i \triangleq \begin{bmatrix} (\Sigma_{yu}^i)|_1^{n^{(i)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

e a *matriz de valores singulares de ordem mínima*, a matriz  $(\Sigma_{yu}^i)|_1^{n^{(i)}} \in \mathbb{R}^{n^{(i)} \times n^{(i)}}$  definida como:

$$(\Sigma_n^i)|_1^{n^{(i)}} \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} (\Sigma_n^i)|_1^{n_{min}^{(i)}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (\Sigma_n^i)|_{n_{min}^{(i)}+1}^{n^{(i)}} \end{array} \right] \quad (3.82)$$

$$(\Sigma_n^i)|_1^{n_{min}^{(i)}} \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \sigma_l^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{n_{min}^{(i)}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$(\Sigma_n^i)|_{n_{min}^{(i)}+1}^{n^{(i)}} \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_{n_{min}^{(i)}+1}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \sigma_l^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{n^{(i)}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

onde  $n^{(i)}, n_{min}^{(i)} \in \mathbb{Z}_+^*$  são a **ordem de realização mínima** e a **ordem de realização mínima reduzida** para cada submodelo local  $i$  respectivamente. Os valores singulares de  $(\Sigma_{yu}^i)|_1^{n^{(i)}}$  são tais que  $\sigma_1^{(i)} \geq \dots \geq \sigma_{n_{min}^{(i)}}^{(i)} \gg \sigma_{n_{min}^{(i)}+1}^{(i)} \geq \dots \geq \sigma_{n^{(i)}}^{(i)}$ . Eles podem ser separados em duas matrizes diagonais: a *matriz de valores singulares significativos*  $(\Sigma_{yu}^i)|_1^{n_{min}^{(i)}} \in \mathbb{R}^{n_{min}^{(i)} \times n_{min}^{(i)}}$ , desenvolvida a Eq. (3.83), e a *matriz de valores singulares não significativos*  $(\Sigma_{yu}^i)|_{n_{min}^{(i)}+1}^{n^{(i)}} \in \mathbb{R}^{(n^{(i)}-n_{min}^{(i)}) \times (n^{(i)}-n_{min}^{(i)})}$ , desenvolvida na Eq. (3.84). Como dito anteriormente na Seção 3.3.4, os valores singulares não significativos são relativamente pequenos por conterem mais informações ruidosas do que sistema, ocupando espaço em memória de informações que pouco contribuem para representar adequadamente o mapeamento inverso local. Para isso, nessa dissertação, propõem-se um procedimento que será dividido em duas partes. Na primeira parte, o procedimento proposto extrai de forma

otimizada os primeiros  $n_{min}^i$  valores singulares mais significativos dentre os  $n^i$  valores singulares não nulos, a partir de um critério que estabelece o grau de importância do valor singular  $\sigma_{\iota+1}^{(i)}$  com relação ao valor singular  $\sigma_1^{(i)}$ , denominado *fator de seleção*  $\phi_\sigma$ , tal que  $\phi_\sigma \in \{0, \dots, 1\} \subset \mathbb{R}_+$ . Em seguida, na segunda parte, o procedimento seleciona  $n$  e  $n_{min}$  dentre os  $c$  valores de  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$  obtidos na primeira parte.

Fundamentalmente a primeira parte do procedimento proposto consiste em solucionar o seguinte problema de otimização

$$n_{min}^i = \arg \max_{\iota} \left( 1 - \frac{\sigma_{\iota+1}^i}{\sigma_1^i} \right) \quad (3.85)$$

s.a

$$\iota \in \{1, \dots, n^i\} \subset \mathbb{Z}_+^*$$

$$\left( 1 - \frac{\sigma_{\iota+1}^i}{\sigma_1^i} \right) \leq \phi_\sigma$$

onde  $\sigma_1^{(i)}, \sigma_{\iota+1}^{(i)} \in \mathbb{R}_+$  são os *valores singulares* 1 e  $\iota + 1$  dos  $n^{(i)}$  valores singulares da matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ , tal que  $\sigma_1^{(i)} \geq \sigma_2^{(i)} \geq \dots \geq \sigma_{\iota+1}^{(i)} \geq \dots \geq \sigma_{n^i}^{(i)}$ . Observa-se que quanto mais próximo for  $\phi_\sigma$  de 1, menos seletivo é a restrição e maior é o valor de  $n_{min}$ ; do contrário, quanto mais próximo for  $\phi_\sigma$  de 0, mais seletivo é a restrição e menor é o valor de  $n_{min}$  (no mínimo,  $n_{min}$  é 1).

Para resolver o problema de otimização da Eq. (3.85) de forma computacional e obter  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$ , propõe-se o procedimento *NMinTrackin*, conforme o Algoritmo 11.

De posse de cada  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$  no contexto nebuloso inverso, a segunda parte do procedimento consiste em selecionar  $n$  e  $n_{min}$  de tal forma que expressem a máxima quantidade de informações que descreverão adequadamente o comportamento inverso do sistema, ou seja,

$$n = \max_{i=1}^c \left( n^{(i)} \right) \quad (3.86)$$

$$n_{min} = \max_{i=1}^c \left( n_{min}^{(i)} \right) \quad (3.87)$$

onde  $n_{min} \leq n$ . Portanto a partir do Algoritmo 11 e das Eqs. (3.86) e (3.87) implementa-se as duas partes do procedimento de estimação  $n$  e  $n_{min}$  proposto por esta dissertação. Assim os submodelos locais obtidos poderão ser realizados de ordem mínima reduzida  $n_{min}$  para todos os  $c$  pontos de operação.

#### 3.4.1.2 O estado inicial do $i$ -ésimo submodelo local inverso $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1)$ .

Uma vez estimados os parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)$  na etapa em batelada do OKID, conforme descrito nas Seções 3.3.1, 3.3.3 e 3.3.4, deve-se obter os estados de cada submodelo inverso local  $i$  na etapa de treinamento da batelada de dados

---

**Algoritmo 11** Algoritmo do procedimento *NMinTracking*.
 

---

**Entrada:**  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ ,  $\phi_\sigma$

**Saída:**  $n_{min}^{(i)}$ ,  $n^{(i)}$ .

1: **Procedimento** NMINTRACKING ( $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ ,  $\phi_\sigma$ )

▷ **PASSO 01:** Obter a matriz de valores singulares  $\Sigma_{yu}^i$  a partir da decomposição em valores singulares da matriz  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ .

▷ **PASSO 02:** Obter  $n^{(i)}$  como sendo o número de elementos não nulos da matriz  $\Sigma_{yu}^i$ .

▷ **PASSO 03:** Extrair os  $n^{(i)}$  primeiros elementos não nulos da diagonal principal de  $\Sigma_{yu}^i$ , resultando na matriz  $(\Sigma_{yu}^i)_{n^{(i)}}$ , semelhante na Eq. (3.67), tal que:  $\sigma_1^{(i)} \geq \sigma_2^{(i)} \geq \dots \geq \sigma_{n^{(i)}}^{(i)}$ .

▷ **PASSO 04:** Acrescentar um escalar nulo após ao último elemento do conjunto de elementos da diagonal principal da matriz  $(\Sigma_{yu}^i)_{n^{(i)}}$ , tal que,  $\sigma_1^{(i)} \geq \sigma_2^{(i)} \geq \dots \geq \sigma_{n^{(i)}}^{(i)} \geq 0$ .

▷ **PASSO 05:** Executar o algoritmo computacional que solucionará o problema de otimização da Eq. (3.85).

2: **Se**  $n^{(i)} \geq 2$  **Então**

3:      $\iota \leftarrow 0$

4:      $\delta \leftarrow 0$

5:     **Enquanto**  $(\delta \leq \phi_\sigma)$  e  $(\iota \leq n^{(i)} - 1)$  **Faça**

6:          $\iota \leftarrow \iota + 1$

7:          $\delta \leftarrow 1 - \frac{\sigma_{\iota+1}^{(i)}}{\sigma_1^{(i)}}$

8:          $n_{min}^{(i)} \leftarrow \iota$

9:     **Fim Enquanto**

10: **Senão**

11:      $n_{min}^{(i)} \leftarrow 1$

12: **Fim Se**

13: **Retorne**  $n_{min}^{(i)}$ ,  $n^{(i)}$ .

14: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

$\mathbf{Z}_{yu}(l)$ . Porém, para a primeira amostra de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , computada em  $\kappa = 1$ , não existe as respostas dos  $i$ -ésimos submodelos inversos locais, nem dos respectivos estados estimados. Por isso, nessa seção será proposto uma metodologia de obtenção do vetor de saídas  $\hat{\mathbf{u}}_{yu}^i(1)$  para a estimação do vetor de estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1)$ .

Se a resposta do modelo nebuloso inverso deve ser mais próxima possível da entrada do sistema no instante  $\kappa = 1$ , de acordo com a sua respectiva ponderação, então  $\hat{\mathbf{u}}^i(1) \approx \mathbf{u}(1)\gamma_{yu}^i(1)$ , e a partir da Eq. (3.19) tem-se:

$$\mathbf{u}(1)\gamma_{yu}^i(1) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)\mathbf{y}(1) \quad (3.88)$$

Resolvendo a Eq. (3.88) para  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1) &= \mathbf{u}(1)\gamma_{yu}^i(1) - \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)\mathbf{y}(1) \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1) &= \underbrace{\left\{ \left[ \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \right]^T \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \right\}^{-1} \left[ \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \right]^T}_{\left[ \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \right]^\dagger} \left[ \mathbf{u}(1)\gamma_{yu}^i(1) - \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)\mathbf{y}(1) \right] \therefore \\ \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1) &= \left[ \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \right]^\dagger \left[ \mathbf{u}(1)\gamma_{yu}^i(1) - \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)\mathbf{y}(1) \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde  $[\bullet]^\dagger$  designa a operação de *pseudoinversa* de  $\bullet$ . É a partir da Eq. (3.89) que serão estimados os valores iniciais do vetor de estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1)$  de cada submodelo local inverso  $i$ , conforme proposto anteriormente.

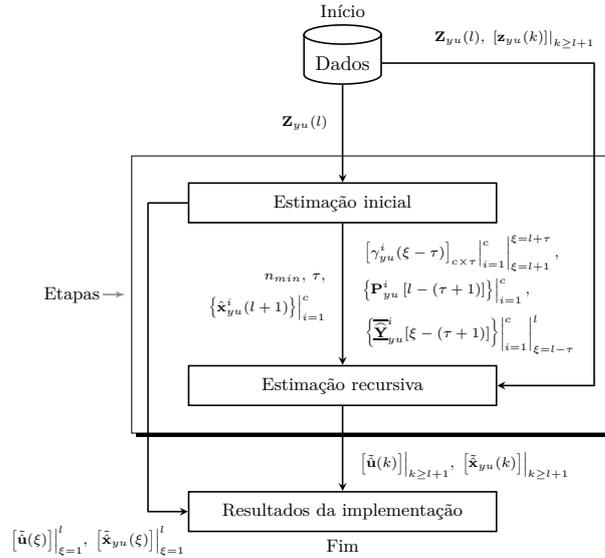
### 3.4.2 Aspectos associados ao modelo nebuloso inverso proposto

Uma vez estabelecidas as formulações e os aspectos práticos que constituem a metodologia proposta neste dissertação, o modelo nebuloso TS inverso resultante deve ser obtido por meio identificação inversa com abordagem direta do sistema, primeiramente a partir de um conjunto de dados de entrada e saída previamente obtidos do sistema. Em seguida para a identificação inversa deverá acontecer para conjunto de dados que é amostrado em cada instante amostral  $k$ . Por isso, a implementação da metodologia proposta nessa dissertação acontecerá em três etapas, a saber a) etapa em batelada, b) etapa de treinamento e c) etapa recursiva, conforme o fluxograma de implementação da do modelo nebuloso inverso proposto por esta dissertação, ilustrado na Figura 9.

#### 3.4.2.1 Etapa de estimação inicial

Nessa etapa, a estrutura de implementação em batelada da base de regras relativa a Eq. (3.8) é computada como:

Figura 9 – Fluxograma das etapas de implementação do modelo inverso nebuloso proposto.



Fonte: o autor dessa dissertação.

$$\begin{aligned}
 & R^i: \text{SE } \tilde{\mathbf{y}} \text{ é } \widetilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i \text{ E } \tilde{\mathbf{u}} \text{ é } \widetilde{\mathcal{U}}_{yu}^i \\
 \text{ENTÃO } & \left\{ \begin{aligned}
 & \hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \widehat{\Gamma}^i(l) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\Delta}^i(l) \mathbf{y}(\xi) \\
 & \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1) = \widehat{\mathbf{G}}^i(l) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{H}}^i(l) \mathbf{y}(\xi) \\
 & \quad - \widehat{\mathbf{O}}^i(l) [\mathbf{u}(\xi) - \hat{\mathbf{u}}^i(\xi)]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

a partir de um conjunto (batelada ou base) de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ .

Na proposição antecedente da Eq. (3.90), o vetor grau de ativação  $\beta_{yu}(\xi)$  referente à Eq. (3.12) é obtido diretamente da base de dados inicial (batelada de dados)  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  por meio do algoritmo GK, conforme a Seção 3.2. O algoritmo GK também define cada ponto de operação (inverso)  $i$  do sistema, como sendo cada centro ou núcleo de cada agrupamento  $i$ . Em seguida, o vetor de grau de ativação normalizado  $\gamma_{yu}(\xi)$  referente a Eq. (3.14) é obtido a partir do vetor  $\beta_{yu}(\xi)$  conforme a Eq. (3.13).

Já na proposição consequente, para cada agrupamento/regra  $i$ , o OKID em batelada será a estratégia de estimação paramétrica do  $i$ -ésimo submodelo inverso local da Eq. (3.90), de acordo com a Figura 7. Primeiramente os parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l)$  são estimados conforme a Eq. (3.29). Em seguida, são obtidas as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ , além de  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$ . Dentre os  $c$  agrupamentos,  $n$  e  $n_{min}$  serão estimados conforme descrito na Seção 3.4.1.1, de tal forma que o  $i$ -ésimo submodelo inverso apresentará estrutura local no contexto do espaço de estados com observador Kalman, de ordem  $n_{min}$ , com predição de passo a frente. Isso significa que cada um dos  $c$  submodelos inversos estimados realizará um mapeamento inverso com abordagem direta sobre os dados do sistema, conforme em (SOUSA; KAYMAK, 2002), e os estados utilizados são locais, inerentes ao próprio

submodelo em torno de cada ponto de operação. Essa etapa finaliza com identificação inversa do sistema em torno de cada ponto de operação  $i$ , via metodologia (*speed up*) ERA, conforme descrito na Seção 3.3.4, resultando nos parâmetros do submodelo inverso local  $\widehat{\mathbf{G}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)$  e da matriz de covariância  $\mathbf{P}_{yu}^i(l-1)$ .

O propósito dessa etapa é preparar (treinar) as matrizes dos parâmetros de Markov compensados  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi)$  de cada agrupamento/regra  $i$  em cada amostra  $\xi$  de dados de  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , de acordo com a Eqs. (3.29) e (3.34), assim como obter o estado estimado inicial para o início da etapa recursiva  $\widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)$ . Por isso o modelo nebuloso TS inverso proposto será simulado para cada amostra de dados sistema  $\mathbf{z}_{yu}(\xi)$  dentro da batelada de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , conforme a base de regras da Eq. (3.90).

### 3.4.2.2 Etapa de estimação recursiva

Para todo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$ , tal que  $k \geq l+1$ , considera-se a estrutura da base de regras a ser implementada na versão recursiva da Eq. (3.8) como sendo:

$$R^i: \text{SE } \tilde{\mathbf{y}}(k) \text{ é } \widetilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i(k) \text{ E } \tilde{\mathbf{u}}(k) \text{ é } \widetilde{\mathcal{U}}_{yu}^i(k)$$

$$\text{ENTÃO } \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{u}}^i(k) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(k)\widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(k)\mathbf{y}(k) \\ \widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k+1) = \widehat{\mathbf{G}}^i(k)\widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k) + \widehat{\mathbf{H}}^i(k)\mathbf{y}(k) - \\ \widehat{\mathbf{O}}^i(k) [\mathbf{u}(k) - \hat{\mathbf{u}}^i(k)] \end{array} \right.$$
(3.91)

Da parte da proposição antecedente, a base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  passa a ser janelada no tempo, tornando-se  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$  conforme a Eq. (3.17). A partir de  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ , o algoritmo GK é aplicado, resultando nos conjuntos nebulosos  $\widetilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i(k)$  e  $\widetilde{\mathcal{U}}_{yu}^i(k)$ , os quais são expressos conforme o vetor de grau de ativação da  $i$ -ésima regra  $\beta_{yu}^i(k)$ , como apresentado na Seção 3.2. O vetor de grau de ativação normalizado  $\gamma_{yu}^i(k)$  de cada regra  $i$  é estimado a partir de  $\beta(k)$  pela Eq. (3.13).

Quanto a parte da proposição consequente, os submodelos são estimados via OKID, conforme a Figura 7, porém de forma recursiva (adaptativa). Para cada regra/agrupamento  $i$  no instante amostral  $k$ , a partir de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k-1) = \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l)$ ,  $\mathbf{P}_{yu}^i(k-2) = \mathbf{P}_{yu}^i(l-1)$  e  $\gamma_{yu}^i(k)$ , os parâmetros de Markov compensados  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$  são estimados de forma ótima, por meio dos mínimos quadrados ponderados recursivos, conforme descrito na Seção 3.3.2. A partir de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$ , obtêm-se as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$  e os parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(k)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(k)$  do submodelo inverso local em torno dos pontos de operação, por meio do (*speed up*) ERA, conforme descrito na Seção 3.3.4. De posse dos valores de  $\widehat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k)$  e  $\hat{\mathbf{u}}^i(k)$  para todos os  $c$  submodelos inversos locais,  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)$  e  $\tilde{\mathbf{u}}(k)$  são computados por meio das Eqs. (3.15) e (3.16). O Algoritmo 16 descreve o procedimento completo de implementação do modelo inverso nebuloso TK com abordagem direta no contexto

---

**Algoritmo 12** Algoritmo de implementação da etapa de estimação inicial do modelo nebuloso inverso proposto na Figura 9.

---

**Entrada:**  $l, \mathbf{Z}_{yu}(l), c, \varrho, \vartheta, L, \boldsymbol{\nu}, \alpha, \varsigma, T_f, p, g, q$  e  $\phi_\sigma$ .

**Saída:**  $\{\tilde{\mathbf{u}}(\xi)\}_{\xi=1}^l, \{\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi)\}_{\xi=1}^l, \tau, n_{min}, [\gamma_{yu}^i(\xi - \tau)]_{c \times \tau} \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau}, \{\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)\}_{i=1}^c,$   
 $\{\mathbf{P}_{yu}^i[l - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c$  e  $\{\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[\xi - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau+1}$ .

1: **Procedimento** INITIALESTIMATIONSTEP ( $l, \mathbf{Z}_{yu}(l), c, \varrho, \vartheta, L, \boldsymbol{\nu}, \alpha, \varsigma, T_f, p, g, q, \phi_\sigma$ )

- ▷ **PASSO 01:** Realizar a etapa de estimação em batelada da proposição antecedente da base de regras da Eq. (3.90) sobre a base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , para todas as  $c$  regras/agrupamentos.
- ▷ **PASSO 1.1:** Obter  $\beta_{yu}(\xi)$  como sendo o vetor  $\boldsymbol{\mu}(\xi)$ , referente a  $\xi$ -ésima coluna da matriz de partição  $\mathbf{U}$ , a partir da execução do procedimento GK, conforme o Algoritmo 3.

2: **Para todo**  $i \in \{1, \dots, c\}$  **Faça**

3: **Para todo**  $\xi \in \{1, \dots, l\}$  **Faça**

- ▷ **PASSO 1.2:** A partir de  $\beta_{yu}(\xi)$ , computar o grau de ativação normalizado  $\gamma_{yu}^i(\xi)$  por meio das Eqs. (3.12) e (3.13).

4: **Fim Para**

- ▷ **PASSO 1.3:** Para  $\xi \in \{1, \dots, l - q\}$ , computar as matrizes de ponderação  $\mathbf{W}_{yu}^i(l)$  a partir de  $\gamma_{yu}^i(\xi + q)$ , conforme a Eq. (3.31).

5: **Fim Para**

- ▷ **PASSO 02:** Realizar a etapa de estimação em batelada da proposição consequente da base de regras da Eq. (3.90) sobre a base de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , por meio do procedimento de realização do OKID nebuloso da Figura 7, para todas as  $c$  regras/agrupamentos.
- ▷ **PASSO 2.1:** Para  $\xi \in \{1, \dots, l - q\}$ , montar as matrizes  $\boldsymbol{\mathfrak{U}}(l)$  e  $\mathbf{V}_{yu}(l - 1)$ , conforme as Eq. (3.30) e Eqs. (3.28) e (3.32) respectivamente.

6: **Para todo**  $i \in \{1, \dots, c\}$  **Faça**

- ▷ **PASSO 2.2:** Montar a matriz de covariância dos dados  $\mathbf{P}_{yu}^i(l - 1)$ , conforme a Eq. (3.33).
- ▷ **PASSO 2.3:** Estimar a matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l)$ , conforme Eq. (3.29).
- ▷ **PASSO 2.4:** Para  $\xi \in \{1, \dots, l\}$ , estimar a matriz dos parâmetros compensados de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi)$ , conforme Eq. (3.34).
- ▷ **PASSO 2.5:** A partir de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l)$ , estimar a matriz  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1$  e as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$  por meio do procedimento *Markov2Hankel*, conforme o Algoritmo 8.
- ▷ **PASSO 2.6:** A partir da matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ , computar a ordem de realização mínima  $n^i$  e a ordem de realização mínima reduzida  $n_{min}^{(i)}$  submodelo local de cada regra  $i$ , por meio do procedimento *NMinTracking*, conforme o Algoritmo 11.

7: **Fim Para**

- ▷ **PASSO 2.7:** A partir de  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$  obtidas para cada regra  $i$ , computar a ordem mínima  $n$  e  $n_{min}$  do modelo nebuloso inverso proposto, conforme as Eqs. (3.86) e (3.87).

Continuação no Algoritmo 13 na página 117.

---

---

**Algoritmo 13** Continuação do Algoritmo 12 da página 116.

---

8:  $\tau \leftarrow n_{min}$

9: **Para todo**  $i \in \{1, \dots, c\}$  **Faça**

▷ PASSO 2.8: A partir dos parâmetros  $n_{min}$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ , estimar os parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)$  por meio do procedimento *SpeedUpERA4InverseFuzzyOKID*, conforme o Algoritmo 10.

10: **Fim Para**

11: **Para todo**  $\xi \in \{1, \dots, l\}$  **Faça**

12: **Para todo**  $i \in \{1, \dots, c\}$  **Faça**

13: **Se**  $\xi = 1$  **Então**

▷ PASSO 03: Estimar os valores iniciais do vetor de estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(1)$  para cada submodelo inverso local  $i$ , conforme a Eq. (3.89).

14: **Fim Se**

▷ PASSO 04: A partir dos parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(l)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)$ , estimar os estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi + 1)$  e as saídas dos submodelos locais  $\hat{\mathbf{u}}^i(\xi)$ , conforme as equações da proposição consequente da base de regras da Eq. (3.90).

15: **Fim Para**

▷ PASSO 05: A partir dos  $c$  estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi)$ , das  $c$  saídas dos submodelos locais  $\hat{\mathbf{u}}^i(\xi)$  e dos  $\gamma_{yu}^i(\xi)$  obtidos na PASSO 1.2, obter o vetor de estados estimados nebulosos  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi)$  e o vetor de saídas estimadas nebulosas  $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$  conforme as Eqs. (3.15) e (3.16).

16: **Fim Para**

17: **Retorne**  $[\tilde{\mathbf{u}}(\xi)]_{\xi=1}^l$ ,  $[\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi)]_{\xi=1}^l$ ,  $\tau$ ,  $n_{min}$ ,  $[\gamma_{yu}^i(\xi - \tau)]_{c \times \tau} \Big|_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau}$ ,  $\{\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)\}_{i=1}^c$ ,  $\{\mathbf{P}_{yu}^i[l - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c$  e  $\{\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[\xi - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau+1}$ .

18: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

do espaço de estados com observador de Kalman proposto, nas etapas em batelada, de treinamento e recursiva, conforme ilustrado na Figura 9.

---

**Algoritmo 14** Algoritmo de implementação da etapa de estimação recursiva do modelo nebuloso inverso proposto na Figura 9.

---

**Entrada:**  $l, \mathbf{Z}_{yu}(l), c, \varrho, \vartheta, L, \boldsymbol{\nu}, \alpha, \varsigma, \tau, T_f, p, g, q, \phi_\sigma, n_{min}, [\gamma_{yu}^i(\xi - \tau)]_{c \times \tau} \Big|_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau},$   
 $\{\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)\}_{i=1}^c, \{\mathbf{P}_{yu}^i[l - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c, \left\{ \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[\xi - (\tau + 1)] \right\}_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau+1}.$

**Saída:**  $[\tilde{\mathbf{u}}(k)]_{k \geq l+1}, [\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)]_{k \geq l+1}.$

1: **Procedimento** RECURSIVEESTIMATIONSTEP  $\left( l, \mathbf{Z}_{yu}(l), c, \varrho, \vartheta, L, \boldsymbol{\nu}, \alpha, \varsigma, \tau, T_f, \right.$   
 $p, g, q, \phi_\sigma, n_{min}, [\gamma_{yu}^i(\xi - \tau)]_{c \times \tau} \Big|_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau}, \{\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)\}_{i=1}^c, \{\mathbf{P}_{yu}^i[l - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c,$   
 $\left. \left\{ \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[\xi - (\tau + 1)] \right\}_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau+1} \right)$

2:  $k \leftarrow l + 1$

3: **Enquanto**  $k \geq l + 1$  **Faça**

▷ **PASSO 01:** Realizar a amostragem das entradas  $\mathbf{u}(k)$  e saídas  $\mathbf{y}(k)$  do sistema e montar o vetor  $\mathbf{z}_{yu}(k)$ .

▷ **PASSO 02:** Realizar a estimação da proposição antecedente da base de regras conforme Eq. (3.91).

▷ **PASSO 2.1:** A partir da janela de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(k-1)$ , da amostra de dados  $\mathbf{z}_{yu}(k)$ , do número de agrupamentos  $c$  e dos parâmetros do algoritmo GK, a saber,  $\varrho, \vartheta, L, \boldsymbol{\nu}, \alpha, \varsigma$ , nessa ordem, obter o vetor grau de ativação das  $c$  regras  $\boldsymbol{\beta}(k)$  e matriz da base de dados deslocada  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ , por meio do procedimento *GKOverDataSlidingWindow*, proposto conforme o Algoritmo 6.

▷ **PASSO 2.2:** Para cada um dos  $c$  elementos de  $\boldsymbol{\beta}_{yu}(k)$ , computar o grau de ativação normalizado  $\gamma_{yu}^i(k)$ , substituindo  $\xi$  por  $k$  nas Eqs. (3.12) e (3.13).

▷ **PASSO 03:** Realizar a estimação da proposição consequente da base de regras da Eq. (3.91), por meio do procedimento de realização do OKID nebuloso da Figura 7, para todas as  $c$  regras/agrupamentos.

▷ **PASSO 3.1:** a partir da janela de dados atualizada  $\mathbf{Z}_{yu}(k-1)$  e do parâmetro de decorrelação  $\tau$ , montar o vetor de entradas do sistema  $\mathbf{u}(k-\tau)$  e o vetor de regressores  $\mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)]$ , conforme as Eq. (3.53) respectivamente.

4: **Para todo**  $i \in \{1, \dots, c\}$  **Faça**

5: **Se**  $k \leq l + \tau$  **Então**

▷ **PASSO 3.2:** A partir do parâmetro de decorrelação  $\tau$ , da matriz dos vetores de graus de ativação normalizados  $[\gamma_{yu}(k-\tau)]_{k=l+1}^{l+\tau}$ , do conjunto de matrizes

$\left\{ \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] \right\}_{i=1}^c \Big|_{k=l+1}^{l+\tau}$ , extrair o vetor do grau de ativação normalizado  $\gamma_{yu}^i(k-\tau)$

e a matriz dos parâmetros compensados de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$ .

6: **Fim Se**

---

**Algoritmo 15** Continuação do Algoritmo 14 da página 119.
 

---

▷ **PASSO 3.3:** A partir do parâmetro  $T_f$ , do vetor  $\mathbf{u}(k - \tau)$ , do escalar  $\gamma_{yu}^i(k - \tau)$ , do vetor  $\mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)]$ , das matrizes  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$ ,  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - 1)$  e  $\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 2)]$ , obter a matriz dos parâmetros compensados de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$  e a matriz de covariância associada com os parâmetros de Markov  $\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]$ , por meio do procedimento *RecursiveCompensatedMarkovParameters*, conforme o Algoritmo 7.

▷ **PASSO 3.4:** A partir de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$ , estimar a matriz  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1$  e as matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$  por meio do procedimento *Markov2Hankel*, conforme o Algoritmo 8.

▷ **PASSO 3.5:** A partir dos parâmetros  $n_{min}$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $(\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_1$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ ,  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ , estimar os parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(k)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(k)$  por meio do procedimento *SpeedUPERA4InverseFuzzyOKID*, conforme o Algoritmo 10.

▷ **PASSO 3.6:** A partir dos parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(k)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(k)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(k)$ , estimar os estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k + 1)$  e as saídas dos submodelos locais  $\hat{\mathbf{u}}^i(k)$ , conforme as equações da proposição consequente da base de regras da Eq. (3.91).

7: **Fim Para**

▷ **PASSO 04:** A partir dos  $c$  estados  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k)$  e das  $c$  saídas dos submodelos locais  $\hat{\mathbf{u}}^i(k)$ , computar o vetor de estados estimados nebulosos  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)$  e o vetor de saídas estimadas nebulosas  $\tilde{\mathbf{u}}(k)$  conforme as Eqs. (3.15) e (3.16), substituindo  $\xi$  por  $k$ .

8: **Fim Enquanto**

9: **Retorne**  $[\tilde{\mathbf{u}}(k)]|_{k \geq l+1}$  e  $[\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)]|_{k \geq l+1}$ .

10: **Fim Procedimento**

Fonte: o autor dessa dissertação.

---

---

**Algoritmo 16** Algoritmo de implementação do modelo inverso nebuloso TK com abordagem direta no contexto do espaço de estados com observador de Kalman, proposto na Figura 9.

---

**Entrada:** A batelada dos  $l$  dados amostrados na forma dos vetores  $\mathbf{u}(\xi)$  de  $r$  entradas e dos vetores  $\mathbf{y}(\xi)$  das  $m$  saídas do sistema respectivamente, tal que  $\xi \in \{1, \dots, l\} \subset \mathbb{Z}_+^*$

**Saída:** a) Como resultados da implementação, decorrentes da etapa de estimação inicial, as matrizes de vetores de saídas e de vetores dos estados estimados do modelo inverso nebuloso proposto  $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi)$ ,  $\forall \xi \in \{1, \dots, l\} \subset \mathbb{Z}_+^*$ , estimados em batelada. b) Como resultados da implementação, decorrentes da etapa de estimação recursiva, as matrizes de vetores de saídas e de vetores dos estados do modelo inverso nebuloso  $\tilde{\mathbf{u}}(k)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+^*$ ,  $k \geq l+1$ , estimados recursivamente.

▷ PASSO 01: Para todo  $\xi \in \{1, \dots, l\} \subset \mathbb{Z}_+^*$ , montar a matriz da base de dados em  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$  a partir dos vetores  $\mathbf{u}(\xi)$  e  $\mathbf{y}(\xi)$ , conforme as Eqs. (3.4) e (3.5).

▷ PASSO 02: Definir os parâmetros. . .

▷ PASSO 2.1: . . . o número de clusters / regras  $c$  e os outros parâmetros  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$  do algoritmo GK, conforme a Tabela 5.

▷ PASSO 2.2: . . .  $p$  e  $g$ ,  $q$  do OKID, atendendo as seguintes restrições:

$$p \in \mathbb{Z}_+^*, p \gg 0 \quad (3.92)$$

ou seja,  $p$  suficientemente grande;

$$g \in \mathbb{Z}_+^*, g \geq \overrightarrow{\mathbb{Z}} \left( \frac{pr}{m+r} \right) \quad (3.93)$$

onde  $\overrightarrow{\mathbb{Z}}(\bullet)$  é o operador de arredondamento para o próximo número inteiro de  $\bullet$  em direção a  $+\infty$ ;

$$q \leq p \quad (3.94)$$

▷ PASSO 2.3: . . .  $\phi_\sigma$  como critério de seleção dos  $c$  valores de  $n_{min}^{(i)}$ .

▷ PASSO 2.4: . . .  $T_f$  o critério de amortização do filtro de compensação do parâmetros estimados de Markov.

▷ PASSO 03: A partir dos argumentos de entrada  $l$ ,  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ ,  $T_f$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $q$  e  $\phi_\sigma$ , realizar a etapa de estimação inicial da Figura 9, obtendo os argumentos de saída  $[\tilde{\mathbf{u}}(\xi)]_{\xi=1}^l$ ,

$[\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi)]_{\xi=1}^l$ ,  $\tau$ ,  $n_{min}$ ,  $[\gamma_{yu}^i(\xi - \tau)]_{c \times \tau} \Big|_{\xi=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau}$ ,  $\{\tilde{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)\}_{i=1}^c$ ,  $\{\mathbf{P}_{yu}^i[l - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c$

e  $\left\{ \overleftarrow{\mathbf{Y}}_{yu}^i[\xi - (\tau + 1)] \right\}_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau+1}$  através do procedimento *IntialEstimationStep*, descrito conforme o Algoritmo 12.

---

**Algoritmo 17** Continuação do Algoritmo 16 da página 121.

---

▷ **PASSO 04:** A partir dos argumentos de entrada  $l$ ,  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $L$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\alpha$ ,  $\varsigma$ ,  $\tau$ ,  $T_f$ ,  $p$ ,  $g$ ,  $q$ ,  $\phi_\sigma$ ,  $n_{min}$ ,  $[\gamma_{yu}^i(\xi - \tau)]_{c \times \tau} \Big|_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau}$ ,  $\{\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(l+1)\}_{i=1}^c$ ,  $\{\mathbf{P}_{yu}^i[l - (\tau + 1)]\}_{i=1}^c$ ,  $\left\{ \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[\xi - (\tau + 1)] \right\}_{i=1}^c \Big|_{\xi=l+1}^{l+\tau+1}$ , realizar a etapa de estimação recursiva da Figura 9, obtendo os argumentos de saída  $[\tilde{\mathbf{u}}(k)]_{k \geq l+1}$ ,  $[\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)]_{k \geq l+1}$  através do procedimento *RecursiveEstimationStep*, descrito conforme o Algoritmo 14.

1: **Retorne** a) as matrizes  $[\tilde{\mathbf{u}}(\xi)]_{\xi=1}^l$ ,  $[\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(\xi)]_{\xi=1}^l$ , a partir da etapa de estimação inicial; e b) as matrizes  $[\tilde{\mathbf{u}}(k)]_{k \geq l+1}$ ,  $[\tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)]_{k \geq l+1}$  a partir da estimação recursiva.

Fonte: o auto dessa dissertação.

---

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Aqui são apresentados os resultados experimentais da implementação da metodologia proposta. Os experimentos serão conduzidos sob três estudos de casos: o tanque de reação de agitação contínua, um *benchmark* de Hammerstain acoplado e um helicóptero com 2 graus de liberdade. Para isso, os seguintes aspectos foram considerados:

- a) **A qualidade de estimação paramétrica e a computação dos estudos de caso.** Em cada estudo de caso, o Algoritmo 16 foi implementado para um conjunto de experimentos através do *software* Matlab R2016, executado em um computador com processador Intel Core I5 2,5 GHz e com memória RAM de 4 GB. Cada experimento é composto por: um número de agrupamentos  $c \in \mathbb{Z}_+^*$ ,  $c \geq 2$ ; um conjunto de métricas de qualidade de estimação paramétrica e um conjunto de métricas de computação. Além disso, cada experimento também está dividido em duas etapas: uma etapa de treinamento e outra etapa adaptativa. Na etapa de treinamento, um processo de estimação paramétrica inicial é feito em batelada; já na etapa adaptativa, um processo de estimação paramétrica acontece de forma recursiva. Dessa forma, as métricas de qualidade de estimação paramétrica foram obtidas de acordo com o Apêndice B, e os seus resultados foram ilustrados para cada componente do vetor de saídas do modelo nebuloso inverso proposto, dividido em dois gráficos: o primeiro, designado pela letra “I”, representa os valores da respectiva métrica, obtidos no processo de estimação paramétrica inicial de cada experimento; já o segunda, designado pela letra “R”, representa os valores da respectiva métrica, computados do acumulado até a última amostra do processo de estimação paramétrica recursiva do respectivo experimento. Quanto às métricas de computação, associadas com cada experimento  $c$ , também foram ilustradas em dois gráficos, a saber, o *tempo de computação*  $t_c$ , em segundos [s], e *memória demandada*  $RAM_c$ , em Mega Bytes [MB]. Devido à natureza da estrutura do submodelo nebuloso local inverso, conforme foi definida para a <proposição consequente> da base de regras, de acordo com a metodologia proposta nessa dissertação, observa-se que o registro dessas métricas é o mesmo para cada experimento realizado, independente das saídas do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso resultante. Assim, tanto o tempo de computação de  $t_c$  foi cronometrado, quanto a memória demandada  $RAM_c$  foi estimada para as variáveis envolvidas nos passos do Algoritmo 16, para cada experimento realizado (isto é, envolvendo as etapas de treinamento e adaptativa).

- b) **As definições paramétricas do procedimento GK.** Para a definição paramétrica da implementação do procedimento de agrupamento GK inerente ao Algoritmo 3,

utilizou-se os valores da Tabela 5, exceto para o número de agrupamentos  $c$ , o qual será definido em cada experimento.

- c) **A análise estática do modelo nebuloso inverso proposto.** A análise de regime permanente será realizada apenas para os estudos de casos do tanque de agitação contínua e do *benchmark* de Hammerstain acoplado, de acordo com a metodologia de identificação nebulosa inversa de regime estático, com abordagem direta no espaço de estados e com observador de Kalman, proposta no Apêndice C.
- d) **O detalhamento dos resultados gráficos de cada estudo de caso.** Os resultados gráficos de cada estudo devem expressar a qualidade de estimação paramétrica adaptativa proposta pela metodologia de identificação nebulosa inversa dessa dissertação, conforme descrito na Apêndice B. Por isso, nessa dissertação, eles serão detalhados para o experimento que alcançar o número de agrupamentos  $c$  ótimo, ou seja, aquele que alcançar o menor MSE (MSE ótimo) no acumulado desse indicador na última amostra da etapa recursiva, dentre as componentes do vetor de saídas dos modelo nebuloso inverso estimado. Consequentemente, tais resultados gráficos estão dispostos em resultados da <proposição antecedente>, resultados da <proposição consequente> e resultados do modelo nebuloso inverso proposto.

#### 4.1 Estudo de caso 01: o tanque de reação de agitação contínua

O tanque de reação de agitação contínua (do inglês *Continuous Stirring Tank Reactor* - CSTR) é uma planta química, cujo o funcionamento básico consiste na reação de dois produtos que são misturados, gerando um composto A, cuja concentração é  $C_a(t)$  em  $[mol/L]$ . A temperatura da mistura é  $T(t)$  em  $[K]$  (Kelvin). A reação exotérmica é controlada pela introdução de um refrigerante com taxa de fluxo  $q_c(t)$   $[L/min]$ . (MORNINGRED et al., 1992; LIGHTBODY; IRWIN, 1997; ALEKSOVSKI; KOCIJAN; DŽEROSKI, 2016). A dinâmica da planta é descrita pelas seguintes equações diferenciais não lineares:

$$\frac{dC_a(t)}{dt} = \frac{q}{v} (C_{a0} - C_a(t)) - k_0 C_a(t) e^{-\frac{E}{RT(t)}} \quad (4.1)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{q}{v} (T_0 - T(t)) - k_1 C_a(t) e^{-\frac{E}{RT(t)}} + k_2 q_c(t) \left( 1 - e^{-\frac{k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{c0} - T(t)) \quad (4.2)$$

onde os valores numéricos dos parâmetros são avaliáveis na Tabela 7.

Esta planta é do tipo SIMO, o qual tem uma entrada  $\mathbf{u}(t) = u_1(t) = q_c(t)$  e duas saídas  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [C_a(t), T(t)]^T$ .

Os dados do processo são obtidos do repositório DaISy (MOOR, 2010), o qual tem 7500 pontos com um período de amostragem de  $T_s = 0,1$  min. = 6 s. Para a realização das simulações, foram estabelecidos os primeiros  $l = 1000$  pontos para o espaço de treinamento (em batelada), e os 2000 pontos subsequentes para o espaço de referente a etapa recursiva, totalizando 3000 pontos simulados, conforme ilustrado na Figura 10.

Nesse estudo de caso, 10 experimentos foram realizados. Cada experimento associado a um número de agrupamento  $c$ , tal que  $c \in \{2, \dots, 11\}$ . Para a execução do OKID e do filtro de compensação paramétrica em cada submodelo inverso local  $i$ , definiu-se os seguintes parâmetros: a constante de predição associada com os estados (*deadbeat* do observador)  $q = 1$  e a constante de observabilidade  $p = 10$ , ambas associadas às matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ ; a constante de controlabilidade  $g = 4$ ; o fator de seleção da ordem de realização mínima reduzida  $\phi_\sigma = 0,5$ ; a constante de suavização exponencial do filtro  $T_f = 40$ . Consequentemente, os mapeamentos das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE, NMSE,  $R^2$ , VAF por experimento estão ilustrados na Figura 11, onde a letra “I” designa o processo de estimação paramétrica inicial em batelada, na etapa de treinamento, e a letra “R” designa o processo de estimação paramétrica recursiva, na etapa adaptativa. Já os mapeamentos das métricas de computação  $RAM_c$  e  $t_c$  por experimento realizado estão ilustradas na Figura 12.

Verificando na Figura 11a observa-se que tanto no processo de estimação paramétrica inicial (em batelada), como no processo de estimação paramétrica recursiva, o experimento com  $c = 2$  agrupamentos é aquele que tem o menor valor de MSE, ou seja, o MSE ótimo. Ainda nas Figuras 11 e 12, observa-se que as métricas NMSE,  $R^2$ , VAF, tempo de computação  $t_c$  e volume de memória RAM ocupada  $RAM_c$  também acompanham essa

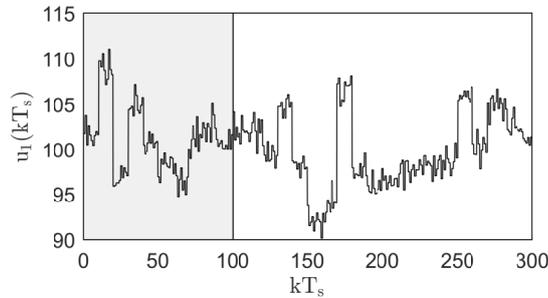
Tabela 7 – Descrições dos parâmetros do modelo não linear do CSTR (Eqs. (4.1) e (4.2)).

DEFINIÇÃO	VALOR NOMINAL	DESCRIÇÃO
$q$	100 L/min	Taxa de fluxo de processo.
$k_0$	$7,2 \cdot 10^{10}$ 1/min	Taxa de fluxo de processo.
$\Delta H$	$-2 \cdot 10^5$ cal/mol	Calor de reação.
$h_a$	$7 \cdot 10^5$ cal/min/K	Coefficiente de transferência de calor.
$\rho, \rho_c$	$1 \cdot 10^3$ g/L	Densidade dos líquidos.
$C_p, C_{pc}$	1 cal/g/K	Calores específicos.
$v$	100 L	Volume do reator.
$E/R$	$1 \cdot 10^4$ K	Energia de reação.
$T_0$	350 K	Temperatura de alimentação.
$T_{c0}$	350 K	Temperatura do líquido refrigerante de entrada.
$C_{a0}$	1 mol/L	Concentração de alimentação de entrada.
$k_1$	$-\frac{\Delta H k_0}{\rho C_p}$	
$k_2$	$\frac{\rho_c C_{pc}}{\rho C_p v}$	
$k_3$	$\frac{h_a}{\rho_c C_{pc}}$	

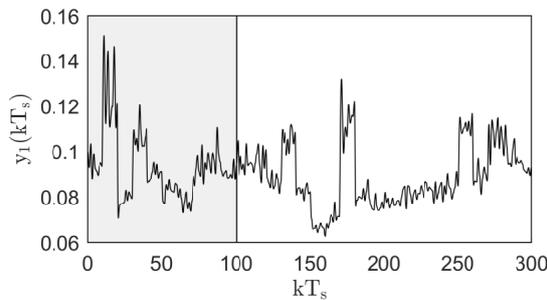
Fonte: obtido de (LIGHTBODY; IRWIN, 1997; MORNINGRED et al., 1992).

Figura 10 – CSTR: dados experimentais de entrada e saída obtidos para identificação do modelo inverso. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $[kT_s]$  em *min*.

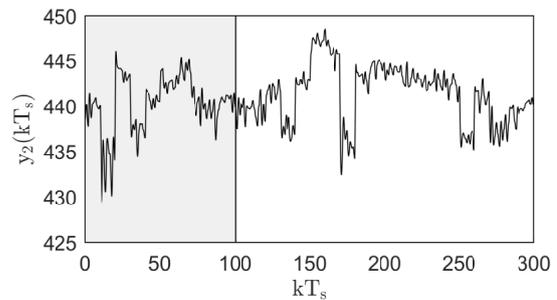
(a) Entrada  $u_1(kT_s)$ . Unidade: eixo  $u_1(kT_s)$  em *L/min*.



(b) Saída  $y_1(kT_s)$ . Unidade: eixo  $y_1(kT_s)$  em *mol/L*.



(c) Saída  $y_2(kT_s)$ . Unidade: eixo  $y_2(kT_s)$  em *K*.



Fontes das Figuras 10a a 10c: o autor desta dissertação.

tendência de otimalidade, e apresentam os seus valores ótimos para o experimento com o número de  $c = 2$  agrupamentos, dentre os 10 experimentos realizados. Por isso, a seguir, serão apresentados os resultados gráficos inerentes ao experimento ótimo, com o número de  $c = 2$  agrupamentos.

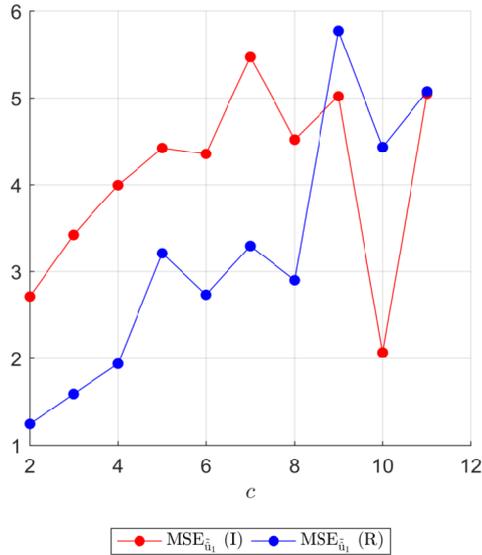
#### 4.1.1 Resultados da proposição antecedente

Nesse seção, os resultados inerentes ao procedimento de estimação da <proposição antecedente> da base de regras do modelo nebuloso inverso serão abordados, conforme obtido pelo experimento ótimo, com  $c = 2$  agrupamentos.

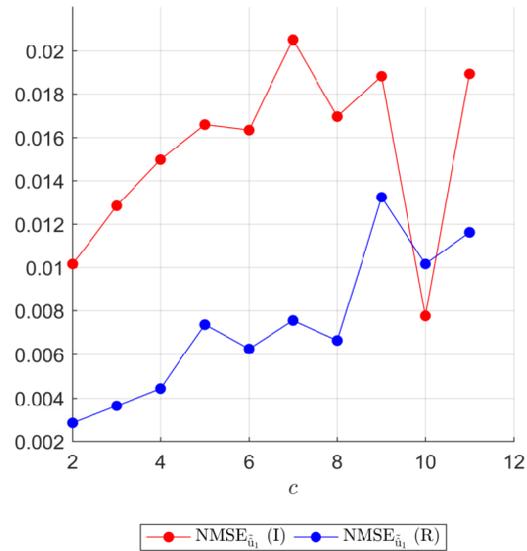
A priori, observa-se as posições dos pontos de operação  $\mathfrak{C}(kT_s)$  conforme a Eq. (2.94), processadas a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(kT_s)$  pelo procedimento de agrupamento GK. Durante a etapa de estimação inicial, tem-se  $k = l$ , e os agrupamentos foram estimados em batelada, diretamente pelo procedimento GK, a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(lT_s)$ , conforme os passos 3.1.1 do Algoritmo 16. Numericamente, os resultados para  $\mathfrak{C}(l) = \mathfrak{C}(lT_s)$  foram:

Figura 11 – CSTR: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE, NMSE,  $R^2$  e VAF por experimento, o qual é expresso por número de argumentos  $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva.

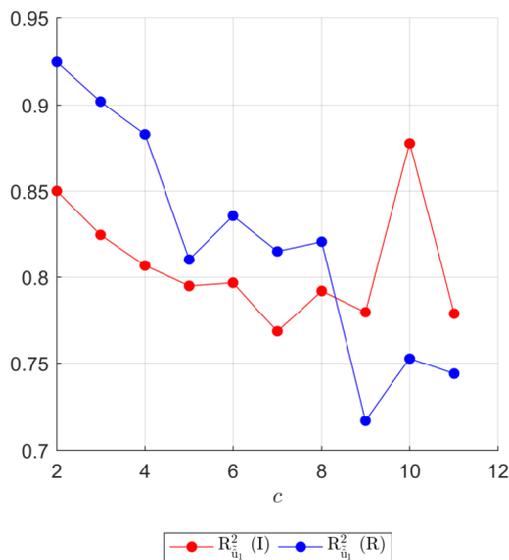
(a) Mapeamento  $c \times \text{MSE}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



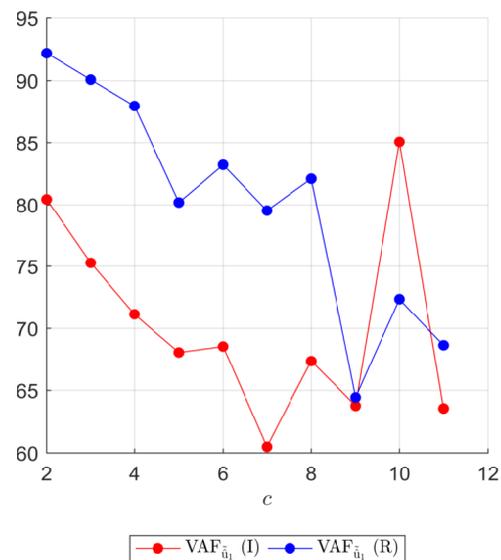
(b) Mapeamento  $c \times \text{NMSE}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



(c) Mapeamento  $c \times R_{\tilde{u}_1}^2$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



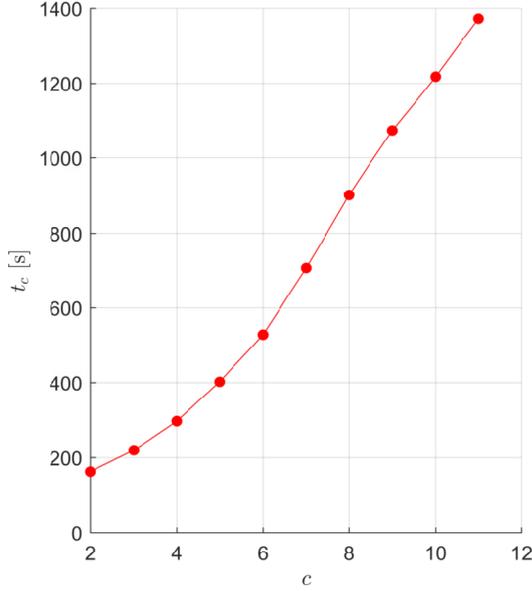
(d) Mapeamento  $c \times \text{VAF}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



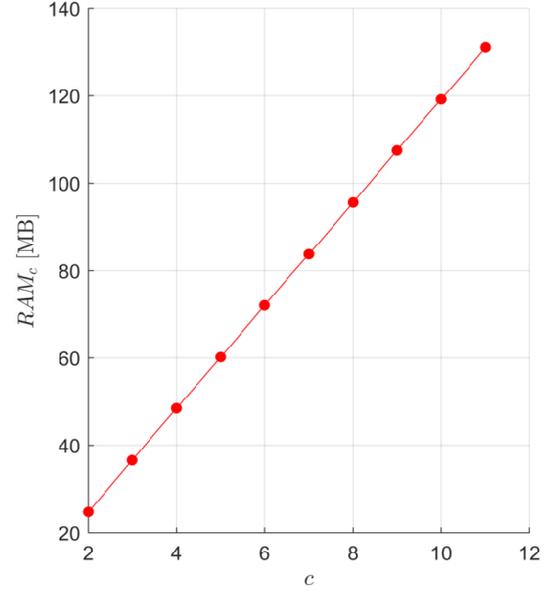
Fontes das Figuras 11a a 11d: autor da dissertação

Figura 12 – CSTR: mapeamento das métricas de computação  $t_c$  e  $RAM_c$  por experimento, o qual é expresso por número de agrupamentos  $c$ .

(a) Mapeamento  $c \times t_c$  associado à computação da saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



(b) Mapeamento  $c \times RAM_c$  associado à computação da saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



Fontes das Figuras 12a e 12b: autor da dissertação

$$\mathfrak{L}(lT_s) = \begin{array}{l} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ u_1 \rightarrow \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathfrak{c}_1(lT_s) \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{c}_2(lT_s) \\ \downarrow \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc} 0,1072 & 0,0861 \\ 437,1768 & 441,8345 \\ 104,9633 & 99,1857 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.3)$$

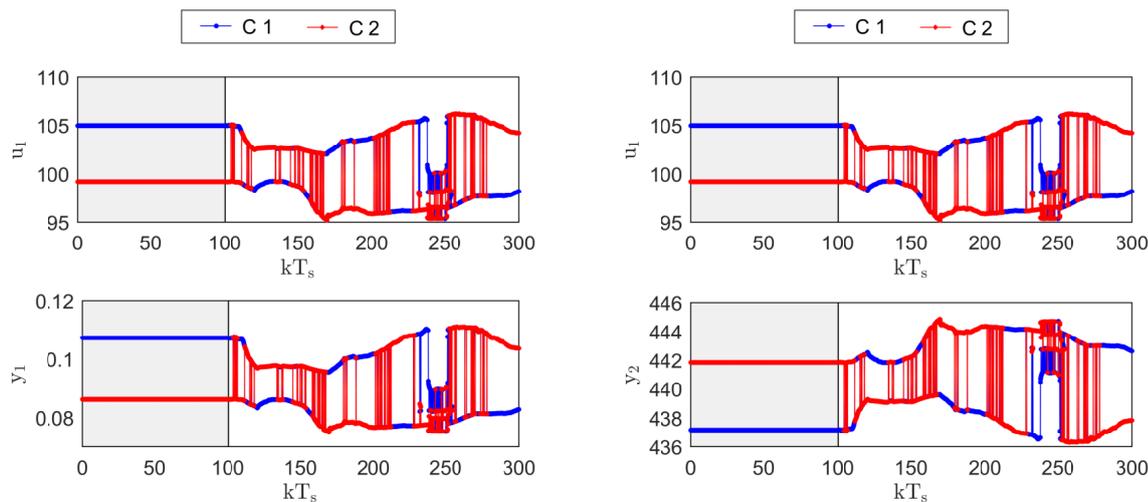
Já etapa de estimação recursiva, os agrupamentos foram estimados por meio da execução do algoritmo GK, a partir da janela de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(kT_s)$ , conforme procedimento *DataBaseSliding4GKAlgorithm*, listado no passo 5.3.1. do Algoritmo 16. Numericamente, os resultados dos pontos de operação  $\mathfrak{L}(kT_s)$ , computados para a última amostra de dados do processo de estimação recursiva, foram:

$$\mathfrak{L}(3000T_s) = \begin{array}{l} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ u_1 \rightarrow \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathfrak{c}_1(3000T_s) \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{c}_2(3000T_s) \\ \downarrow \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc} 0,0827 & 0,1036 \\ 442,62 & 437,84 \\ 98,181 & 104,2 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.4)$$

Portanto, os resultados da dinâmica dos pontos de operação  $\mathfrak{L}(kT_s)$  nos processos de estimação paramétrica inicial e recursiva são computados e ilustrados conforme a Figura 13.

Figura 13 – CSTR: comportamento dos centros (pontos de operação) dos agrupamentos. Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em *min*.

- (a) Mapeamento  $y_1 \times u_1$ . Unidades: eixo  $y_1$  em *mol/L* e eixo  $u_1$  em *L/min*. (b) Mapeamento  $y_2 \times u_1$ . Unidades: eixo  $y_2$  em *K* e eixo  $u_1$  em *L/min*.



Fontes das Figuras 13a e 13b: autor da dissertação

Durante o intervalo de tempo da etapa de treinamento, observa-se que os pontos de operação permanecem estáticos, devido ao agrupamento nebuloso realizado mediante uma janela estática de dados. Porém, quando a janela de dados passa ser dinâmica em relação ao tempo, durante a etapa adaptativa, o agrupamento nebuloso também se torna dinâmico, e a estimação dos pontos de operação se torna variante com o tempo.

#### 4.1.2 Resultados da proposição consequente

A seguir, serão apresentados os resultados inerentes ao procedimento de estimação paramétrica via OKID para cada  $i$  dos  $c$  agrupamentos do referido experimento.

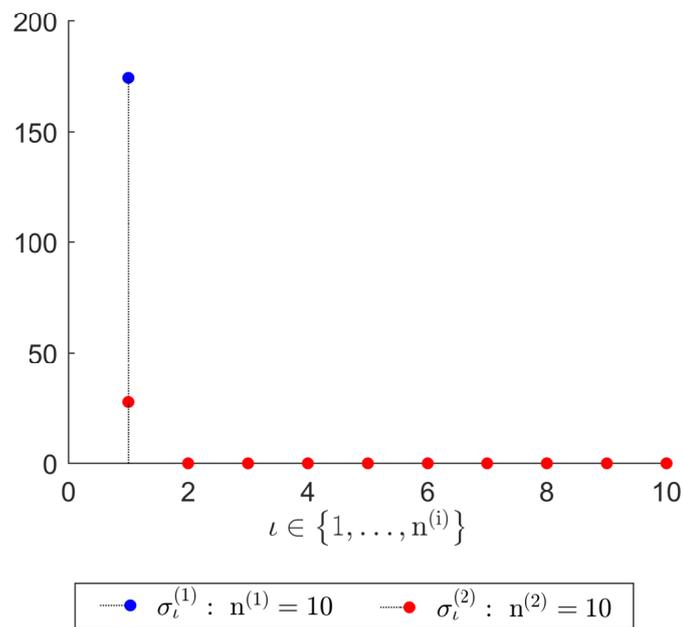
- a) **Estimação do valor de  $n_{min}$ .** De posse das  $c$  matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ , executou-se o procedimento *NMinTracking* para cada agrupamento  $i$ , conforme o passo 3.2.6 do Algoritmo 16, obtendo-se as respectivas matrizes de  $n^{(i)}$  valores singulares não nulos assim como os  $n_{min}^{(i)}$  valores singulares significativos, conforme computados na Figura 14. Nessa figura, o eixo das abscissas é a posição  $\iota$  dos  $n^{(i)}$  valores singulares, tal que  $\iota \in \{1, \dots, n^{(i)}\}$ ; enquanto que o eixo das ordenadas é os seus respectivos valores  $\sigma_{\iota}^{(i)}$ . Uma vez obtidos os valores de  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$  para os  $c$  agrupamentos,

obteve-se os valores de  $n$  e  $n_{min}$  através das Eqs. (3.86) e (3.87), conforme o passo 3.2.7 do Algoritmo 16, resultando nos seguintes valores:

$$n = 10 \quad (4.5)$$

$$n_{min} = 1 \quad (4.6)$$

Figura 14 – CSTR: valores singulares  $[\sigma_\iota^{(i)}]_{\iota=1}^{n^{(i)}}|_{i=1}^c$  da  $i$ -ésima matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ .



Fonte: os autor dessa dissertação.

- b) **A estimação paramétrica da proposição consequente.** Cada agrupamento/regra  $i$  apresenta as respectivas proposições do consequente compostas pelos os submodelos locais inversos com abordagem direta no espaço de estados com observador de Kalman, conforme as Eqs. (3.90) e (3.91). A estimação paramétrica nebulosa do  $i$ -ésimo submodelo local é realizada pela metodologia OKID tanto na etapa de estimação inicial quanto na etapa de estimação recursiva. Na etapa de estimação inicial, os parâmetros são invariantes, decorrentes da identificação em batelada, os quais resultaram em:

$$\{\widehat{\mathbf{G}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \underbrace{\widehat{\mathbf{G}}^1(lT_s)}_{\uparrow}, \underbrace{\widehat{\mathbf{G}}^2(lT_s)}_{\uparrow} \right\} = \left\{ [0,8737], [0,9741] \right\} \quad (4.7)$$

$$\{\widehat{\mathbf{H}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{[52,6002 \ 0,1970]}^{\widehat{\mathbf{H}}^1(lT_s)}, \overbrace{[5,0202 \ 0,0141]}^{\widehat{\mathbf{H}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.8)$$

$$\{\widehat{\mathbf{O}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{[-0,8737]}^{\widehat{\mathbf{O}}^1(lT_s)}, \overbrace{[-0,9741]}^{\widehat{\mathbf{O}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.9)$$

$$\{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{[1]}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^1(lT_s)}, \overbrace{[1]}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.10)$$

$$\{\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{[-212,8898 \ -1,3711]}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^1(lT_s)}, \overbrace{[-67,0833 \ -0,3428]}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.11)$$

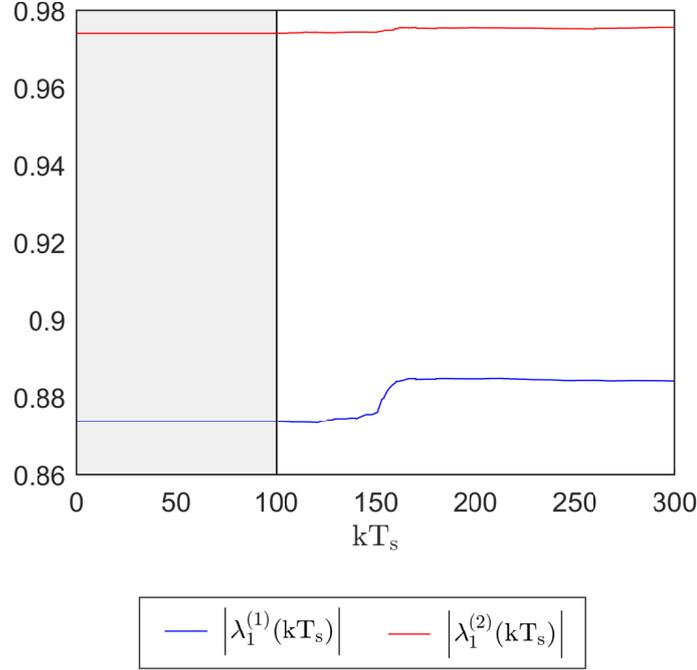
Na etapa de estimação recursiva, a metodologia OKID é executada para cada regra em cada amostra de dados, resultando em submodelos locais inversos variantes com o tempo. Assim, a variação paramétrica na etapa recursiva será apresentada por meio autovalores  $[\lambda_j^{(i)}(kT_s)]_{i=1}^c \Big|_{j=1}^{n_{min}}$ , extraídos da matriz de estados  $\{\widehat{\mathbf{G}}^i(kT_s)\}_{i=1}^c$ . Como os autovalores podem ser complexos, eles serão exibidos em valor absoluto (módulo), como ilustrado na Figura 15.

#### 4.1.3 Resultados modelo nebuloso inverso proposto

Nesse seção, os resultados inerentes às respostas de comparação estática e dinâmica do modelo inverso e as respostas das métricas de qualidade de estimação MSE, NMSE, R<sup>2</sup> e VAF serão apresentados como seguem.

**a) Comparação de regime estático.** A priori, a resposta de regime estático do sistema foi obtida a partir dos respectivos dados entrada e saída, quando estes alcançam o regime permanente. Para isso, baseou-se no fato de que, se o modelo MIMO é BIBO estável e os sinais das entradas são do tipo degrau, então os sinais das entradas e das saídas alcançam o regime permanente na última amostra de simulação. Logo, o modelo apresentado pelas Eqs. (4.1) e (4.2) foi simulado computacionalmente, coletando-se as últimas amostras da entradas e das saídas dos 81 valores de regime permanente das respostas ao degrau, conforme ilustrado na Figura 16, obtidos a

Figura 15 – CSTR: magnitude dos autovalores da matriz de estados estimados  $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$ .  
 Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva).  
 Unidades:  $kT_s$  em *min.*



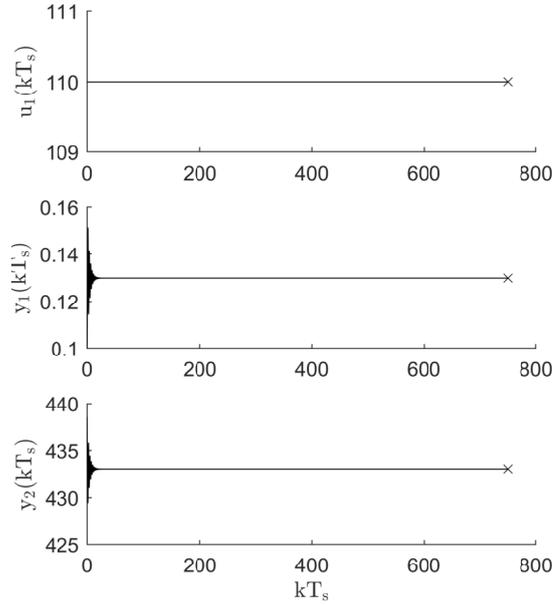
Fonte: o autor dessa dissertação.

partir de 9 valores escolhidos em ordem crescente entre 90 e 110  $L/min$ , os quais foram dispostos em grade, na forma do mapeamento de produto cartesiano  $9 \times 9$ .

Quanto ao modelo nebuloso inverso proposto, primeiramente foi necessário obter as condições de estimação em batelada de  $\underline{\gamma}_{yu}(\underline{z}_{yu})$ , referente a proposição antecedente, assim como estimar os parâmetros dos submodelos locais inverso, referente a proposição conseqüente, conforme descrito no Seções 3.2 e 3.3. Para a estimação em batelada da proposição antecedente, o modelo nebuloso inverso proposto contou com os centros  $\mathfrak{C}(l) = \mathfrak{C}(lT_s)$  da Eq. (4.3) e com conjunto de matrizes de covariância  $\mathcal{F}(l) = \mathcal{F}(lT_s)$ , o qual resultou em:

$$\mathcal{F}(lT_s) = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 0,0001 & -0,019 & 0,0166 \\ -0,019 & 3,7017 & -3,3434 \\ 0,0166 & -3,3434 & 4,614 \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0,0067 & 0,0079 \\ -0,0067 & 1,6046 & -1,9158 \\ 0,0079 & -1,9158 & 2,5516 \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.12)$$

Figura 16 – CSTR: exemplo de resposta ao degrau do modelo do CSTR. Os “x” representam a última amostra de dado da simulação para a respectiva variável. Unidades: eixo  $kT_s$  em *min*, eixo  $u_1(kT_s)$  em *L/min*,  $y_1(kT_s)$  em *mol/L*,  $y_2(kT_s)$  em *K*.



Fonte: o autor dessa dissertação.

Já para os submodelos locais inversos de regime estático referentes à proposição consequente, os parâmetros  $\widehat{\mathcal{A}}^i(l) = \widehat{\mathcal{A}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathcal{B}}^i(l) = \widehat{\mathcal{B}}^i(lT_s)$  e  $\widehat{\mathcal{C}}^i(l) = \widehat{\mathcal{C}}^i(lT_s)$  foram obtidos a partir dos parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(l) = \widehat{\mathbf{G}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(l) = \widehat{\mathbf{H}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(l) = \widehat{\mathbf{O}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(lT_s)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l) = \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(lT_s)$  estimados em batelada, conforme descritos nas Eqs. (4.7) a (4.11), o que resultou em:

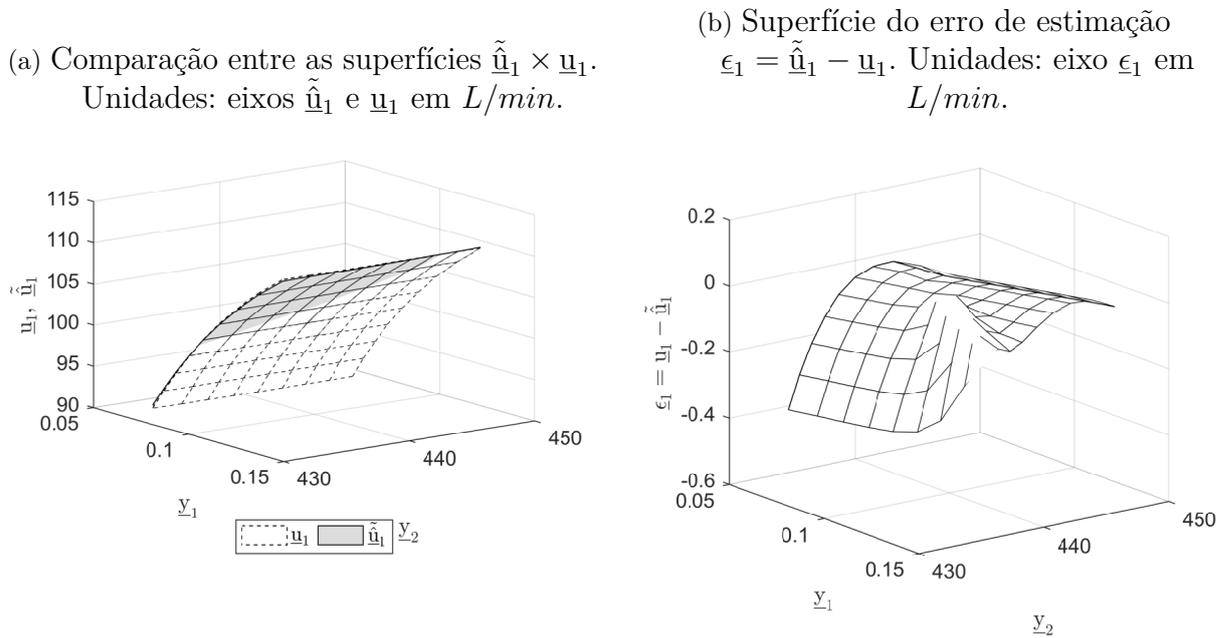
$$\left\{ \widehat{\mathcal{A}}^i(lT_s) \right\}_{i=1}^c = \left\{ \underbrace{\widehat{\mathcal{A}}^1(lT_s)}_{[0,1263]}, \underbrace{\widehat{\mathcal{A}}^2(lT_s)}_{[0,0259]} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left\{ \widehat{\mathcal{B}}^i(lT_s) \right\}_{i=1}^c = \left\{ \underbrace{\widehat{\mathcal{B}}^1(lT_s)}_{[203,7375 \ 0,1892]}, \underbrace{\widehat{\mathcal{B}}^2(lT_s)}_{[126,9627 \ 0,2004]} \right\} \quad (4.14)$$

$$\left\{ \widehat{\mathcal{C}}^i(lT_s) \right\}_{i=1}^c = \left\{ \underbrace{\widehat{\mathcal{C}}^1(lT_s)}_{[-6,9206]}, \underbrace{\widehat{\mathcal{C}}^2(lT_s)}_{[-37,6532]} \right\} \quad (4.15)$$

O mesmo conjunto de 81 valores de regime estático do sistema, também foram utilizados no modelo nebuloso inverso proposto na versão de regime estático, conforme as Eqs. (C.17) e (C.18) do Apêndice C. A característica de regime estático, decorrente da comparação da superfície da saída do modelo nebuloso inverso proposto  $\tilde{\underline{u}}_1$  e a superfície da entrada do sistema  $\underline{u}_1$ , está ilustrada na Figura 17.

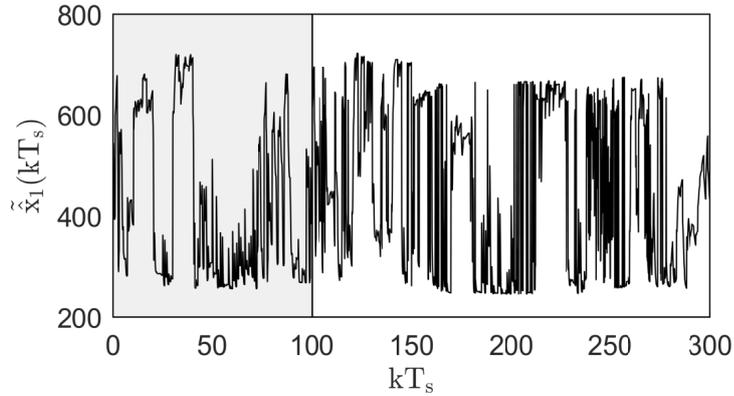
Figura 17 – CSTR: característica de regime estático decorrente da comparação do vetor de saída  $\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{u}}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto e a superfície da entrada  $\underline{u} = \underline{u}_1$  do sistema. Unidades:  $\underline{y}_1$  em  $mol/L$ , eixo  $\underline{y}_2$  em  $K$ .



Fontes das Figuras 17a e 17b: autor da dissertação.

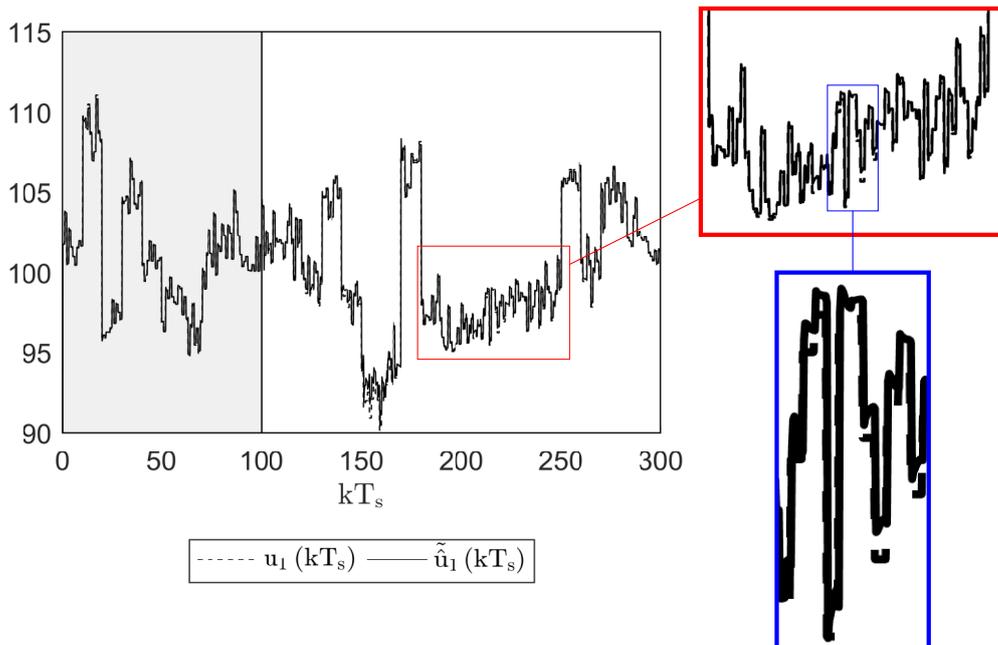
- b) Estados nebulosos inversos e comparação de regime dinâmico.** Para cada amostra de dados do sistema, o  $i$ -ésimo vetor de estados locais inversos foi estimado conforme a equação de estados da Eq. (3.18), e o vetor de estados do modelo nebuloso inverso proposto foi estimado conforme a Eq. (3.15), tanto na etapa de estimação inicial com na etapa de estimação recursiva, resultando na Figura 18. Em seguida, estimaram-se o  $i$ -ésimo vetor de saídas do submodelo local inverso, conforme a equação de saída da Eq. (3.19), e o vetor de saídas do modelo nebuloso inverso proposto, conforme a Eq. (3.16). A Figura 19 ilustra a comparação entre as dinâmicas dos sinais das entradas do sistema e os sinais das saídas do modelo nebuloso inverso proposto, nas etapas de estimação inicial e recursiva.
- c) Métricas de qualidade de estimação.** As amostras temporais das métricas de qualidade de estimação (MSE, NMSE,  $R^2$  e VAF), referente ao experimento ótimo

Figura 18 – CSTR: vetor de estado estimado  $\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) = \tilde{\hat{\mathbf{x}}}_1(kT_s)$  do modelo nebuloso inverso proposto. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em *min*.



Fonte: o autor dessa dissertação.

Figura 19 – CSTR: comparação entre a saída do modelo nebuloso  $\tilde{\hat{u}}_1(kT_s)$  e a entrada do sistema  $u_1(kT_s)$ . Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $kT_s$  em *min*, eixos  $\tilde{\hat{u}}_1(kT_s)$  (modelo nebuloso inverso proposto) e  $u_1(kT_s)$  (sistema) em *L/min*.

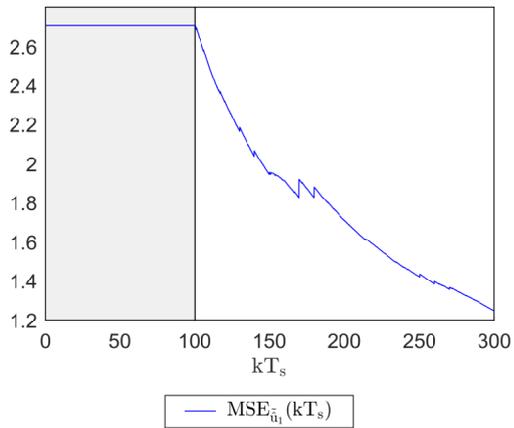


Fonte: o autor da dissertação.

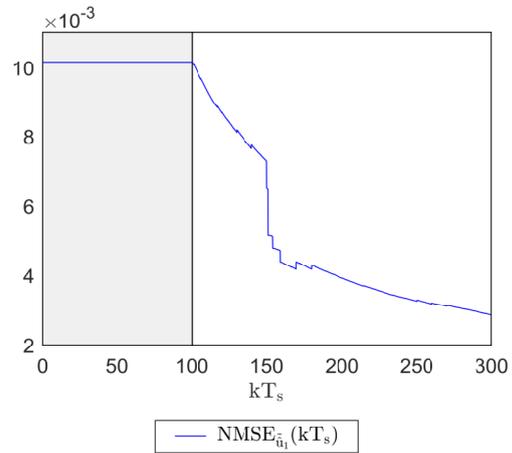
com  $c = 2$  agrupamentos, foram calculados a partir dos valores de  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$  e de  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$  em cada amostra de dados, utilizando a formulação do Apêndice B. Como resultado, os comportamentos temporais dessas métricas foram obtidos tanto na etapa de estimação inicial, quanto na etapa de estimação recursiva, conforme ilustrado Figura 20. Nessa figura, os comportamentos estáticos das métricas de qualidade de estimação, na etapa de estimação inicial, se devem à forma como os cálculos das métricas são realizados, envolvendo, de uma só vez, todas as amostras do conjunto de dados inerente a essa etapa. Já na etapa de estimação recursiva, os comportamentos de tais métricas se tornam dinâmicos, pois estas são calculadas de forma recursiva a cada amostra de dados, a partir dos seus respectivos resultados previamente obtidos na etapa de estimação inicial.

Figura 20 – CSTR: métricas de qualidade de estimação associada com as saídas do modelo nebuloso inverso  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_1$ . Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

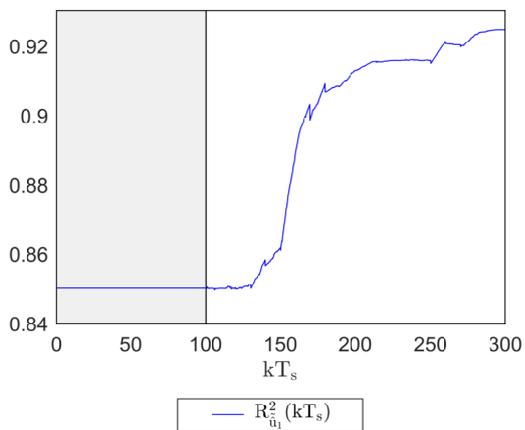
(a) Métrica do erro médio quadrático (MSE)



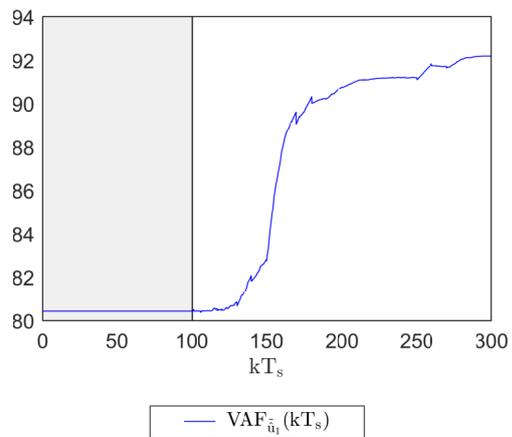
(b) Métrica do erro médio quadrado normalizado (NMSE)



(c) Métrica do índice de confiabilidade (coeficiente de determinação)  $R^2$



(d) Métrica da variância representativa (VAF)



Fonte das Figuras 20a a 20d: o autor da dissertação.

## 4.2 Estudo de caso 02: benchmark de um modelo de Hammerstain

Nesse estudo de caso, será aplicado em uma análise inversa do benchmark de um modelo de Hammerstain (do inglês *Hammerstain Model BenchMark*) do tipo MIMO (do inglês *Multi Input and Multi Output*), com  $r$  entradas e  $m$  saídas, o qual se encontra descrito em (SANTOS; SERRA, 2018). Esse modelo apresenta a seguinte formulação:

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{A}_w \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_w \mathbf{u}^{\odot 2}(k) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{A}_y \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{B}_y \mathbf{w}(k-1) \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{u}(k) \triangleq [u_a(k)]_{r \times 1} \quad \forall u_a(k) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{w}(k) \triangleq [w_a(k)]_{m \times 1} \quad \forall w_a(k) \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{y}(k) \triangleq [y_a(k)]_{m \times 1} \quad \forall y_a(k) \in \mathbb{R}$  são definidos respectivamente como o *vetor de entradas do modelo*, o *vetor de saídas em regime estático do modelo* e *vetor de saídas do modelo*, todos adimensionais. A Eq. (4.16) é a *equação da não linearidade de regime estático* do modelo de Hammerstain, enquanto que a Eq. (4.17) é a *equação linear de regime dinâmico* do modelo de Hammerstain. Na Eq. (4.16), o vetor  $\mathbf{u}^{\odot 2}(k)$  é definido conforme o produto de Hadamard (produto elemento a elemento), representado pelo operador binário  $\odot$ , tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\odot 2}(k) &\triangleq \mathbf{u}(k) \odot \mathbf{u}(k) = [u_a^2(k)]_{r \times 1} \\ \Rightarrow u_a^2(k) &= u_a(k) \cdot u_a(k) \quad \forall u_a(k) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Os parâmetros  $\mathbf{A}_w \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\mathbf{B}_w \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\mathbf{A}_y \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $\mathbf{B}_y \in \mathbb{R}^{r \times r}$  são definidos como:

$$\mathbf{A}_w \triangleq \begin{bmatrix} 1,6740 & -0,5816 \\ -0,1410 & -0,1614 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{B}_w \triangleq \begin{bmatrix} 0,8370 & -0,2908 \\ 0,0705 & 0,0807 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A}_y \triangleq \begin{bmatrix} -0,025 & -0,1000 \\ 0,190 & -0,0500 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

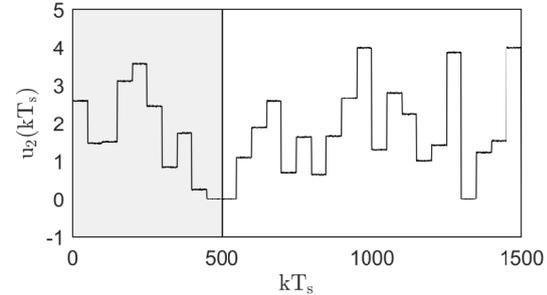
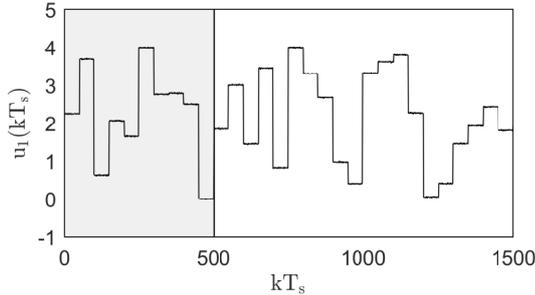
$$\mathbf{B}_y \triangleq \begin{bmatrix} 1,025 & 0,100 \\ -0,190 & 1,050 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Os dados do processo são obtidos por meio de simulação computacional. Foram gerados 1500 pontos com período amostragem de  $T_s = 1$  s. Para a realização da simulação, foram estabelecidos os primeiros  $l = 500$  pontos para a etapa de estimação inicial (em batelada), e os 1000 pontos subsequentes para a etapa de estimação recursiva. O sinal de cada variável de entrada foi criado em duas componentes: a componente principal e

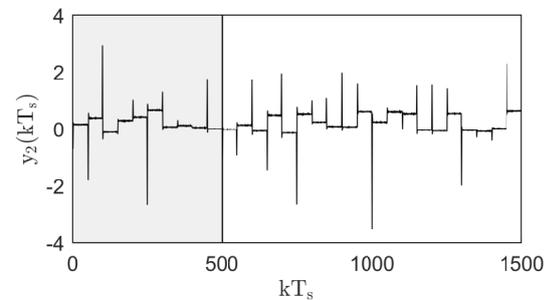
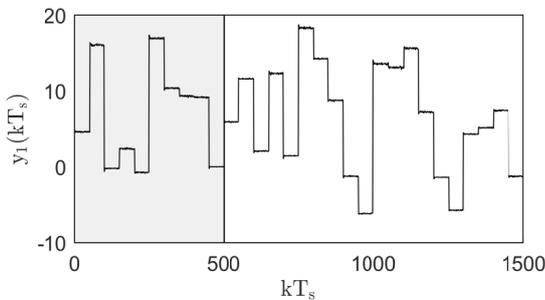
a componente do ruído de pequena intensidade. A componente principal de cada sinal de entrada foi criada a partir de um sinal do tipo ruído branco de banda limitada, com valor médio de 2, potência de 80 e saturação entre 0 e 4. Tal componente pode apresentar pequenas regiões estáticas, o que, possivelmente, pode resultar em problemas de mal condicionamento de dados. Para evitá-los, e ainda evitar interferir significativamente na dinâmica da componente principal, uma componente de ruído de pequena intensidade, do tipo ruído branco de banda limitada, com relação sinal ruído de  $SNR = 60$  dB, também foi adicionada à componente principal. Ambas as componentes, inerentes ao sinal de uma variável de entrada, foram criadas usando o método *twister* de geração de números aleatórios, e compartilhando da mesma semente. Porém, as sementes foram definidas com valores distintos entre as variáveis (ou sinais) de entrada. A Figura 21 ilustra os resultados da simulação computacional, referentes as variáveis de entrada e saída do modelo de Hammerstain, representado pelas Eqs. (4.16) e (4.17).

Figura 21 – HMBM: dados experimentais de entrada e saída obtidos para identificação do modelo inverso. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

(a) Entrada  $u_1(kT_s)$ . Unidade: eixo  $u_1(kT_s)$  adimensional. (b) Entrada  $u_2(kT_s)$ . Unidade: eixo  $u_2(kT_s)$  adimensional.



(c) Entrada  $y_1(kT_s)$ . Unidade: eixo  $y_1(kT_s)$  adimensional. (d) Entrada  $y_2(kT_s)$ . Unidade: eixo  $y_2(kT_s)$  adimensional.



Fontes das Figuras 21a a 21d: o autor desta dissertação.

Nesse estudo de caso, 6 experimentos foram realizados. Cada experimento associado a um número de agrupamento  $c$ , tal que  $c \in \{2, \dots, 7\}$ . Para a execução do OKID e do filtro

de compensação paramétrica em cada submodelo inverso local  $i$ , definiu-se os seguintes parâmetros: a constante de predição associada com os estados (*deadbeat* do observador)  $q = 1$ ; a constante de observabilidade  $p = 10$  e a constante de controlabilidade  $g = 5$ , ambas associadas às matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ ; o fator de seleção da ordem de realização mínima reduzida  $\phi_\sigma = 0,875$ ; a constante de suavização exponencial do filtro de compensação paramétrica  $T_f = 40$ . Consequentemente, os mapeamentos das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE, NMSE  $R^2$  e VAF por experimento, obtidos para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante, estão ilustrados nas Figuras 22 e 23, onde a letra “I” designa a etapa de estimação inicial, e a letra “R” designa a etapa de estimação recursiva. Já os mapeamentos das métricas de computação  $t_c$  e  $RAM_c$  por experimento estão ilustrados na Figura 24.

Verificando as Figuras 22a e 22b, observa-se os experimentos  $c \in \{2,3,5,7\}$  são candidatos à ótimo, por apresentaram os menores valores das métricas MSE desse estudo de caso, conforme a Tabela 8.

Tabela 8 – HMBM: métricas da qualidade de estimação MSE para os experimentos candidatos à ótimo, avaliados entre as saídas  $\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.

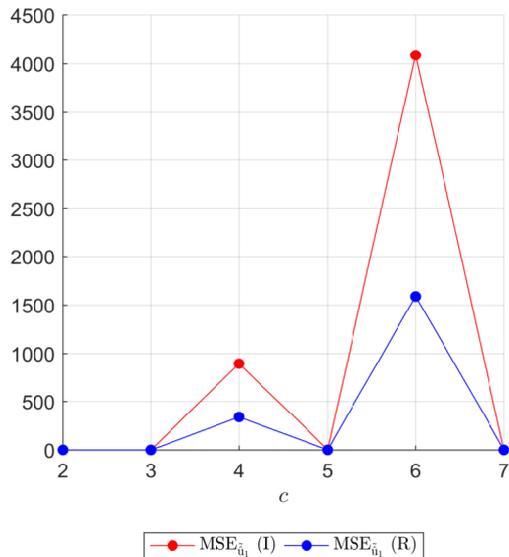
c	MSE PARA $\hat{u}_1$		MSE PARA $\hat{u}_2$	
	I	R	I	R
<b>2</b>	0,0596	<b>0,0555</b>	0,0233	<b>0,0509</b>
3	0,0572	0,0678	0,0212	0,0523
5	0,0539	0,0995	0,0211	0,0744
7	0,0493	0,2174	0,0179	0,1154

Fonte: autor dessa dissertação.

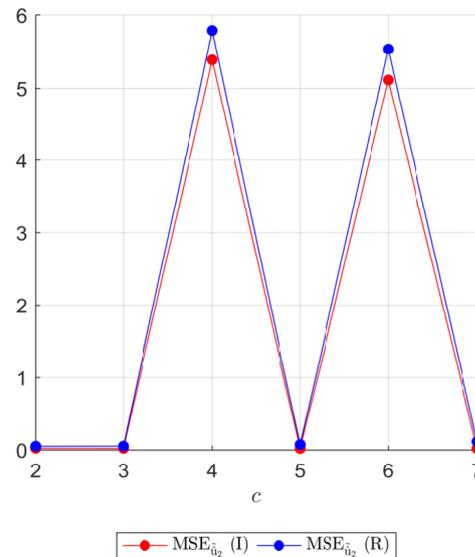
Consequentemente, o experimento com  $c = 2$  agrupamentos é aquele que tem o menor valor de MSE na etapa recursiva dentre as saídas do modelo, ou seja, o MSE ótimo. Ainda nas Figuras 22 a 24, observa-se que as métricas NMSE,  $R^2$ , VAF também seguem suas respectivas tendências de otimalidade, e apresentam os seus valores ótimos para o experimento com  $c = 2$  agrupamentos, dentre os 6 experimentos realizados. Por isso, a

Figura 22 – HMBM: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE e NMSE por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos  $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva.

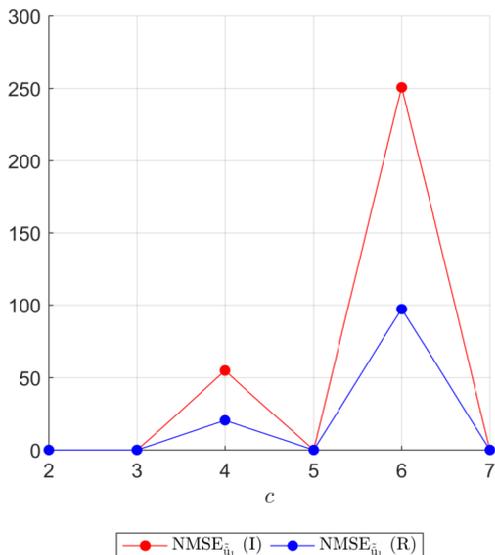
(a) Mapeamento  $c \times \text{MSE}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(b) Mapeamento  $c \times \text{MSE}_{\tilde{u}_2}$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(c) Mapeamento  $c \times \text{NMSE}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(d) Mapeamento  $c \times \text{NMSE}_{\tilde{u}_2}$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.

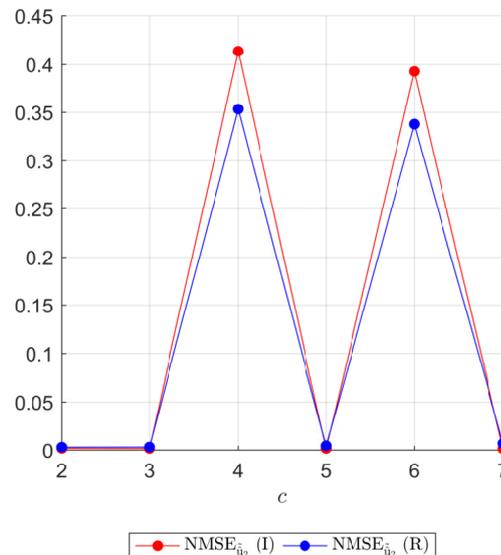
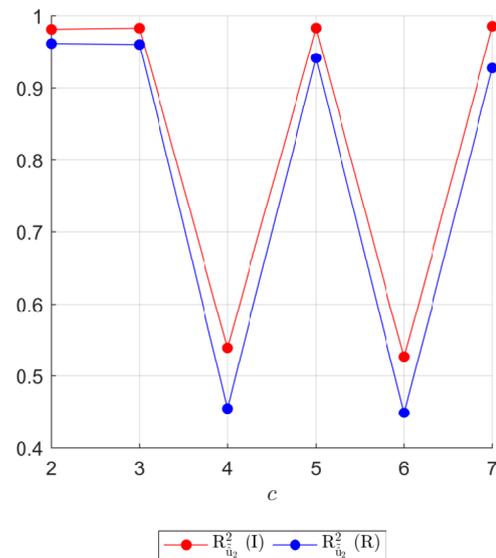
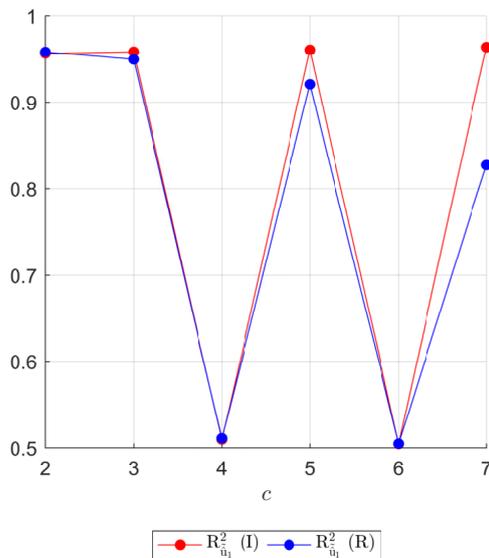
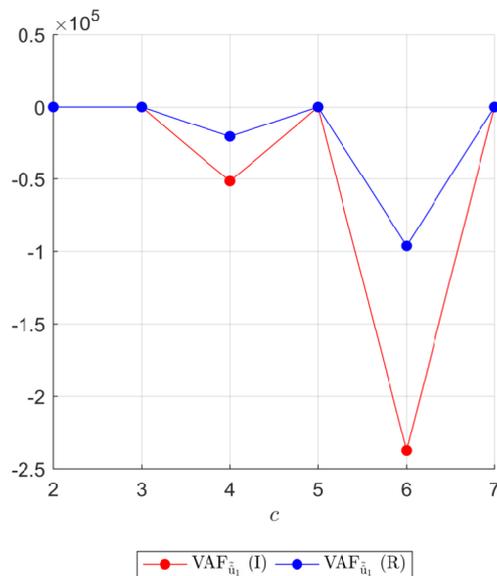


Figura 23 – HMBM: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica  $R^2$  e VAF por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos  $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva.

- (a) Mapeamento  $c \times R_{\tilde{u}_1}^2$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.
- (b) Mapeamento  $c \times R_{\tilde{u}_2}^2$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.



- (c) Mapeamento  $c \times VAF_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



- (d) Mapeamento  $c \times VAF_{\tilde{u}_2}$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.

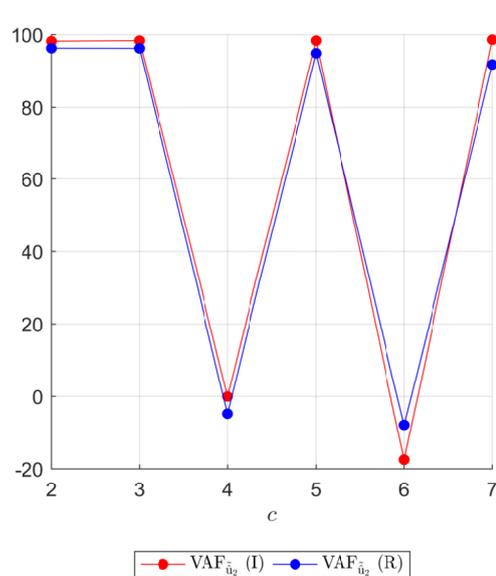
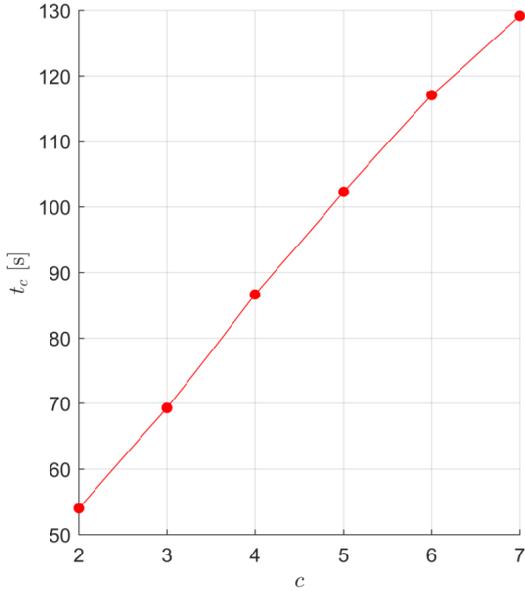
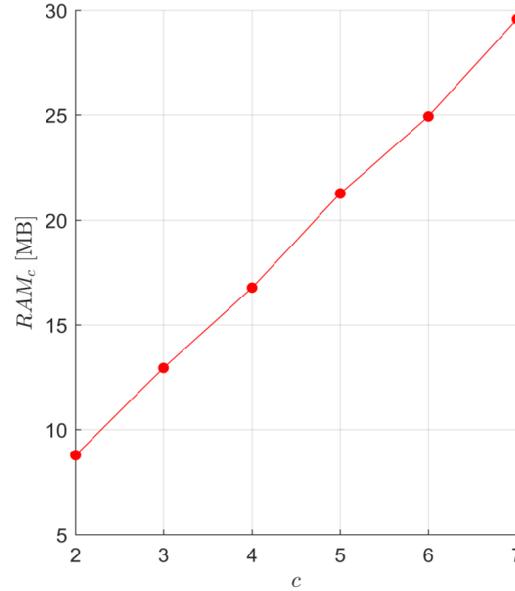


Figura 24 – HMBM: mapeamento das métricas de computação  $t_c$  e  $RAM_c$  por experimento, o qual é expresso por número de agrupamentos  $c$ .

(a) Mapeamento  $c \times t_c$  associado à computação da saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



(b) Mapeamento  $c \times RAM_c$  associado à computação da saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



Fontes das Figuras 24a e 24b: autor da dissertação

seguir, serão apresentados os resultados gráficos inerentes ao experimento ótimo, com o número de  $c = 2$  agrupamentos.

#### 4.2.1 Resultados da proposição antecedente

Nesse seção, os resultados inerentes ao procedimento de estimação da proposição antecedente da base de regras do modelo inverso serão abordados, conforme obtido pelo experimento ótimo, com  $c = 2$  agrupamentos.

A priori, observa-se as posições dos pontos de operação  $\mathfrak{L}(kT_s)$  conforme a Eq. (2.94), processadas a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(kT_s)$  pelo procedimento de agrupamento GK. Durante a etapa de estimação inicial, tem-se  $k = l$ , e os agrupamentos foram estimados em batelada, diretamente pelo procedimento GK a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(lT_s)$ , conforme os passos 3.1.1 do Algoritmo 16. Numericamente, os resultados para  $\mathfrak{L}(l)$  foram:

$$\begin{array}{rcc}
& \epsilon_1(lT_s) & \epsilon_2(lT_s) \\
& \downarrow & \downarrow \\
\mathfrak{L}(lT_s) = & \begin{array}{l} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 12,3685 & 1,2298 \\ 0,2568 & 0,1573 \\ 3,1319 & 1,3635 \\ 1,3437 & 2,2348 \end{bmatrix}
\end{array} \quad (4.23)$$

Já etapa recursiva, os agrupamentos foram estimados por meio da execução do algoritmo GK a partir da janela de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(kT_s)$ , conforme procedimento *DataBaseSliding4GKAlgorithm*, listado no passo 5.3.1 do Algoritmo 16. Numericamente os resultados para  $\mathfrak{L}(kT_s)$ , computados para a última amostra de dados da etapa de estimação recursiva, foram:

$$\begin{array}{rcc}
& \epsilon_1(1500T_s) & \epsilon_2(1500T_s) \\
& \downarrow & \downarrow \\
\mathfrak{L}(1500T_s) = & \begin{array}{l} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} -2,6118 & 9,7995 \\ 0,3797 & 0,1859 \\ 0,8149 & 2,7584 \\ 3,1130 & 1,5263 \end{bmatrix}
\end{array} \quad (4.24)$$

Portanto, os resultados da dinâmica dos pontos de operação  $\mathfrak{L}(kT_s)$  nos processos de estimação paramétrica inicial e recursiva são computados e ilustrados conforme a Figura 25.

#### 4.2.2 Resultados da proposição consequente

A seguir, serão apresentados os resultados inerentes ao procedimento de estimação paramétrica via OKID para cada  $i$  dos  $c$  agrupamentos do referido experimento.

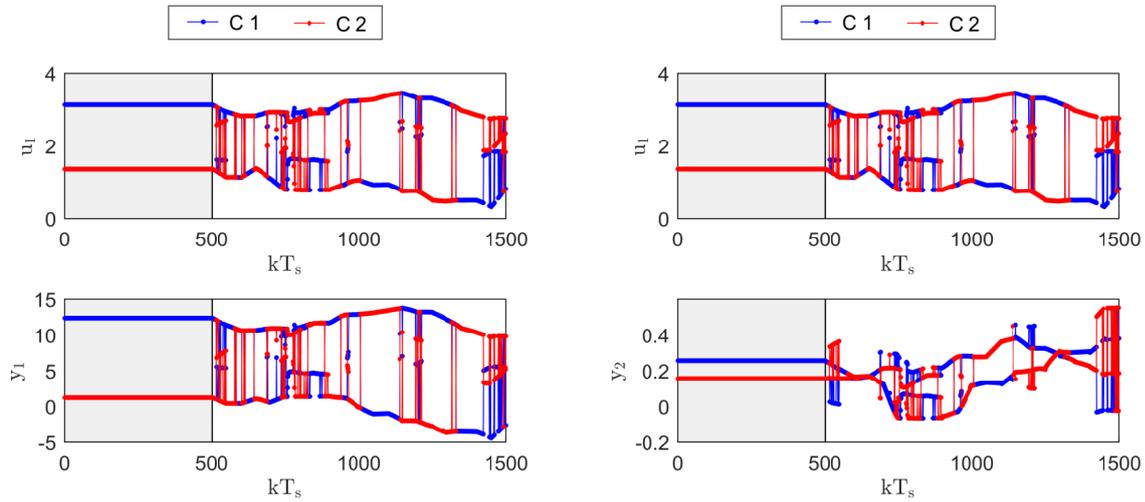
- a) **Estimação do valor de  $n_{min}$ .** De posse das  $c$  matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ , executou-se o procedimento *NMinTracking* para cada agrupamento  $i$ , conforme o passo 3.2.6 do Algoritmo 16, obtendo-se as respectivas matrizes de  $n^{(i)}$  valores singulares não nulos assim como os  $n_{min}^{(i)}$  valores singulares significativos, conforme computados na Figura 26. Nessa figura, o eixo das abscissas é a posição  $\iota$  dos  $n^{(i)}$  valores singulares, tal que  $\iota \in \{1, \dots, n^{(i)}\}$ ; enquanto que o eixo das ordenadas é os seus respectivos valores  $\sigma_\iota^{(i)}$ . Uma vez obtidos os valores de  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$  para os  $c$  agrupamentos, obteve-se os valores de  $n$  e  $n_{min}$  através das Eqs. (3.86) e (3.87), conforme o passo 3.2.7 do Algoritmo 16, resultando nos seguintes valores:

$$n = 20 \quad (4.25)$$

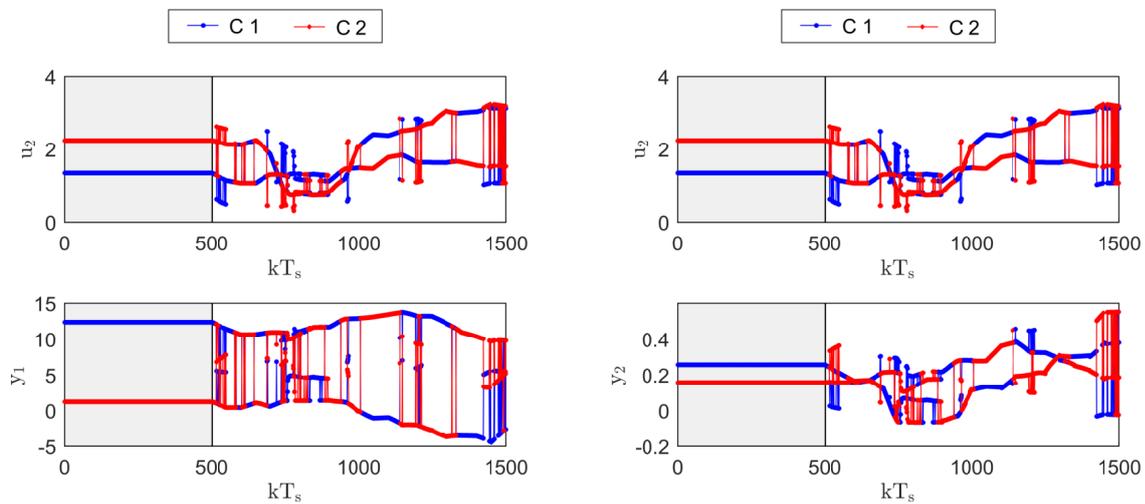
$$n_{min} = 2 \quad (4.26)$$

Figura 25 – HMBM: comportamento dos centros (pontos de operação) dos agrupamentos. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em s.

(a) Mapeamento  $y_1 \times u_1$ . Unidades: eixos  $y_1$  e  $u_1$  adimensionais. (b) Mapeamento  $y_2 \times u_1$ . Unidades: eixos  $y_2$  e  $u_1$  adimensionais.

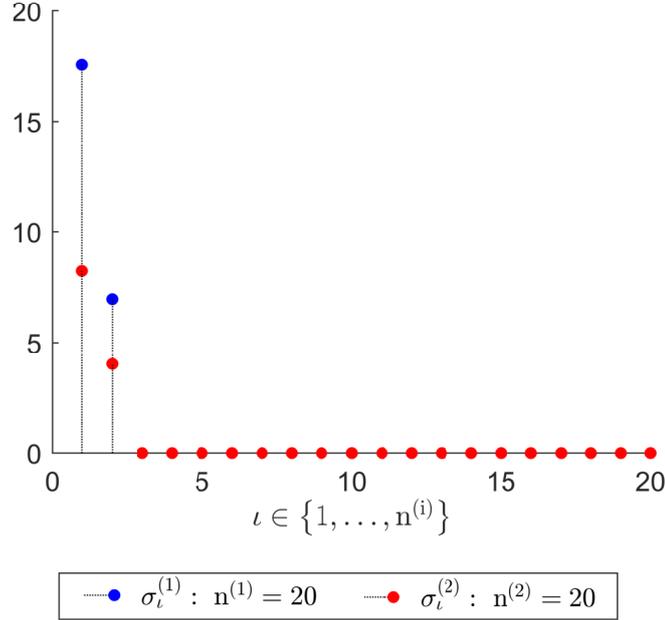


(c) Mapeamento  $y_1 \times u_2$ . Unidades: eixos  $y_1$  e  $u_2$  adimensionais. (d) Mapeamento  $y_2 \times u_2$ . Unidades: eixos  $y_2$  e  $u_2$  adimensionais.



Fonte das Figuras 25a a 25d: autor da dissertação

Figura 26 – HMBM: valores singulares  $[\sigma_\iota^{(i)}]_{\iota=1}^{n^{(i)}}{}^c$  da  $i$ -ésima matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ .



Fonte: autor dessa dissertação.

- b) **A estimação paramétrica da proposição consequente.** Cada agrupamento/regra  $i$  apresenta as respectivas proposições do consequente compostas pelos os submodelos locais inversos com abordagem direta no espaço de estados com observador de Kalman, conforme as Eqs. (3.90) e (3.91). A estimação paramétrica nebulosa dos  $i$ -ésimo submodelo local é realizada pela metodologia OKID, tanto na etapa de estimação inicial quanto na etapa de estimação recursiva. Na etapa de estimação inicial, os parâmetros são invariantes, decorrentes da identificação em batelada, os quais resultaram em:

$$\{\widehat{\mathbf{G}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\mathbf{G}}^1(lT_s) \\ \uparrow \\ \begin{bmatrix} 1,1001 & -0,0048 \\ -0,0627 & 1,0064 \end{bmatrix}, \begin{array}{c} \widehat{\mathbf{G}}^2(lT_s) \\ \uparrow \\ \begin{bmatrix} 0,9248 & 0,0575 \\ -0,0028 & 1,0116 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

$$\{\widehat{\mathbf{H}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\mathbf{H}}^1(lT_s) \\ \uparrow \\ \begin{bmatrix} -0,0295 & 0,1602 \\ 0,0176 & -0,1589 \end{bmatrix}, \begin{array}{c} \widehat{\mathbf{H}}^2(lT_s) \\ \uparrow \\ \begin{bmatrix} 0,0026 & -0,1008 \\ -0,0012 & -0,1145 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

$$\{\widehat{\mathbf{O}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} -1,1001 & 0,0048 \\ 0,0627 & -1,0064 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{O}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -0,9248 & -0,0575 \\ 0,0028 & -1,0116 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{O}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.29)$$

$$\{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.30)$$

$$\{\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} -0,0008 & 0,1409 \\ -0,0074 & -0,1344 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -0,0070 & -0,0813 \\ -0,0169 & -0,0973 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.31)$$

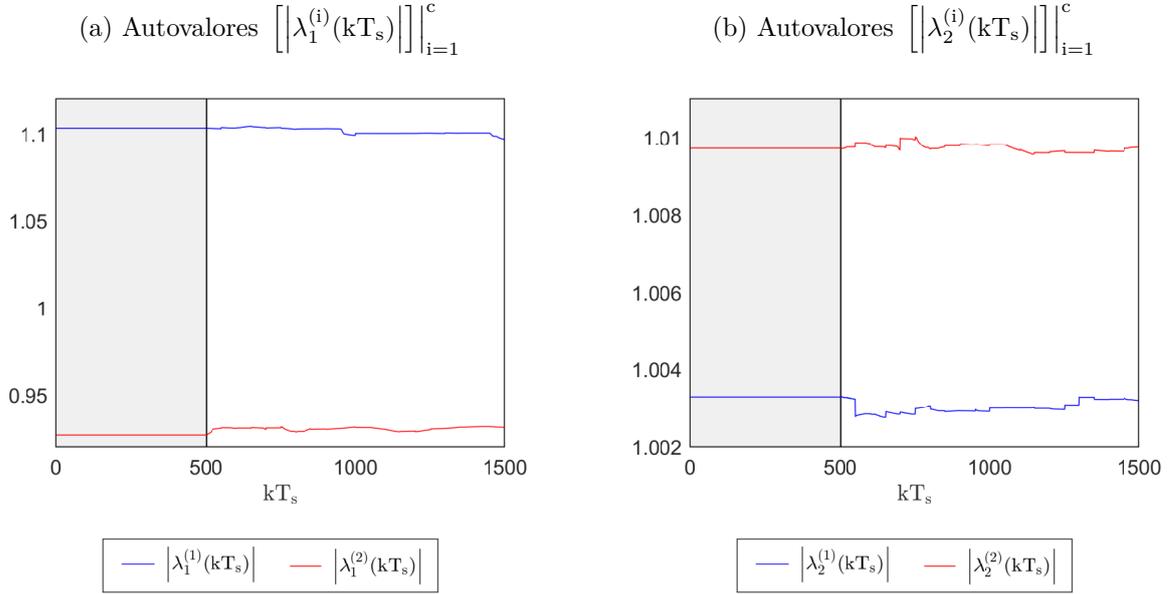
Na etapa de estimação recursiva, a metodologia OKID é executada para cada regra em cada amostra de dados, resultando em submodelos locais inversos variantes com o tempo. Assim, a variação paramétrica na etapa recursiva será apresentada por meio autovalores  $[\lambda_j^{(i)}(kT_s)]_{i=1}^c \Big|_{j=1}^{n_{min}}$ , extraídos da matriz de estados  $[\widehat{\mathbf{G}}^i(kT_s)]_{i=1}^c$ . Como os autovalores podem ser complexos, eles serão exibidos em valor absoluto (módulo), como ilustrado na Figura 27.

#### 4.2.3 Resultados modelo nebuloso inverso proposto

Nesse seção, os resultados inerentes às respostas de comparação estática e dinâmica do modelo inverso e as respostas das métricas de qualidade de estimação MSE, NMSE, R<sup>2</sup> e VAF serão apresentados como seguem.

**a) Comparação de regime estático.** Nesse estudo de casos, as respostas de regime estático do sistema foram obtidas de 81 vetores de saída do modelo não linear de regime estático do modelo de Hammerstain, conforme a Eq. (4.16), a partir de 81 vetores de entrada, cujos valores foram obtidos a partir de 9 valores escolhidos em ordem crescente entre 0 e 4, e dispostos em grade, na forma do mapeamento de produto cartesiano 9×9. Quanto ao modelo nebuloso inverso proposto, primeiramente foi necessário obter as condições de estimação em batelada de  $\underline{\gamma}_{yu}(\underline{\mathbf{z}}_{yu})$ , referente a proposição antecedente, assim como estimar os parâmetros dos submodelos locais inverso, referente a proposição consequente, conforme descrito no Apêndice C. Para a estimação em batelada da proposição antecedente, o modelo nebuloso inverso

Figura 27 – HMBM: magnitude dos autovalores de  $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$  referente a  $i$ -ésima regra, com  $i \in [1, c]$ . Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em  $s$ .



Fonte das Figuras 27a e 27b: o autor da dissertação.

proposto contou com os centros  $\mathfrak{C}(l)$  da Eq. (4.23) e com conjunto de matrizes de covariância  $\mathcal{F}(l) = \mathcal{F}(lT_s)$ , estimado em batelada, o qual resultou em:

$$\mathcal{F}(lT_s) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}^1(lT_s) \\ \uparrow \\ \left[ \begin{array}{cccc} 6,6558 & 0,3380 & 1,0974 & 0,9038 \\ 0,3380 & 0,0944 & 0,0596 & 0,0683 \\ 1,0974 & 0,0596 & 0,2640 & 0,1885 \\ 0,9038 & 0,0683 & 0,1885 & 0,3395 \end{array} \right] \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}^2(lT_s) \\ \uparrow \\ \left[ \begin{array}{cccc} 2,3802 & -0,0101 & 0,5912 & 0,2489 \\ -0,0101 & 0,0851 & 0,0499 & 0,0947 \\ 0,5912 & 0,0499 & 0,4173 & 0,4486 \\ 0,2489 & 0,0947 & 0,4486 & 0,8212 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

Já para os submodelos locais inversos de regime estático, referente à proposição consequente, os parâmetros  $\widehat{\mathcal{A}}^i(l) = \widehat{\mathcal{A}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathcal{B}}^i(l) = \widehat{\mathcal{B}}^i(lT_s)$  e  $\widehat{\mathcal{C}}^i(l) = \widehat{\mathcal{C}}^i(lT_s)$  foram obtidos a partir dos parâmetros  $\widehat{\mathbf{G}}^i(l) = \widehat{\mathbf{G}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^i(l) = \widehat{\mathbf{H}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathbf{O}}^i(l) = \widehat{\mathbf{O}}^i(lT_s)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(lT_s)$  e  $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l) = \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(lT_s)$  estimados em batelada, conforme descritos nas Eqs. (4.7) a (4.11), o que resultou em:

$$\left\{ \widehat{\mathbf{A}}^i(lT_s) \right\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} -0,1001 & 0,0048 \\ 0,0627 & -0,0064 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{A}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,0752 & -0,0575 \\ 0,0028 & -0,0116 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{A}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.33)$$

$$\left\{ \widehat{\mathbf{B}}^i(lT_s) \right\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 0,3058 & -0,6356 \\ 0,2459 & 17,0791 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{B}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,1326 & 7,5184 \\ 0,1204 & 11,5924 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{B}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.34)$$

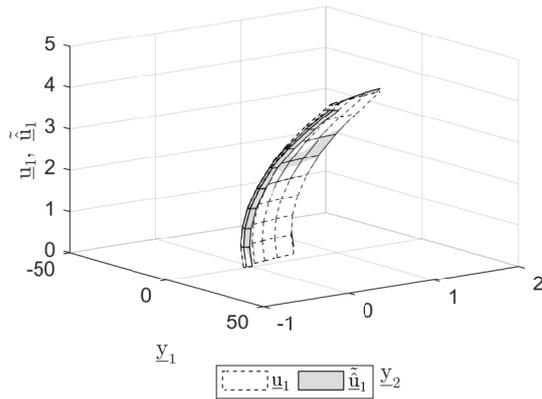
$$\left\{ \widehat{\mathbf{C}}^i(lT_s) \right\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 19,8151 & 14,0817 \\ 184,4273 & 295,2745 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{C}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -15,2964 & 80,7167 \\ -3,9118 & 106,5384 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{C}}^2(lT_s)} \right\} \quad (4.35)$$

O mesmo conjunto de vetores de regime estático do sistema, anteriormente obtidos pela Eq. (4.16), também foram utilizados no modelo nebuloso inverso proposto na versão de regime estático (permanente), conforme as Eqs. (C.17) e (C.18). A característica de regime estático, decorrente da comparação da superfície da saída do modelo nebuloso inverso proposto  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  e a superfície da entrada do sistema  $\mathbf{u}_1$ , está ilustrada na Figura 28.

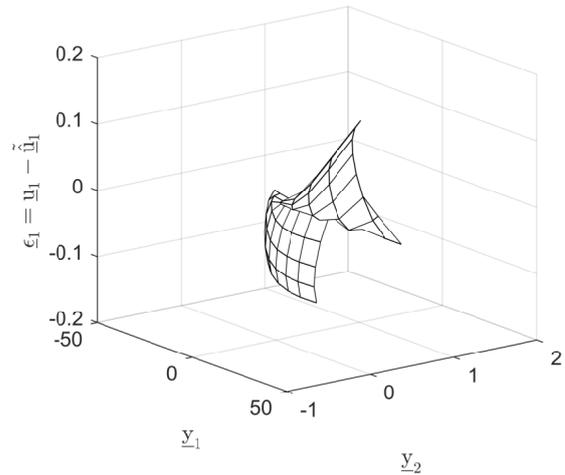
- b) **Estados nebulosos inversos e comparação de regime dinâmico.** Para cada amostra de dados do sistema, o  $i$ -ésimo vetor de estados locais inversos foi estimado conforme a equação de estados da Eq. (3.18), e o vetor de estados do modelo nebuloso inverso proposto foi estimado conforme a Eq. (3.15), tanto na etapa de estimação inicial com na etapa de estimação recursiva, resultando na Figura 29. Em seguida, estimaram-se o  $i$ -ésimo vetor de saídas do submodelo local inverso, conforme a equação de saída da Eq. (3.19), e o vetor de saídas do modelo nebuloso inverso proposto, conforme a Eq. (3.16). A Figura 30 ilustra a comparação entre as dinâmicas dos sinais das entradas do sistema e os sinais das saídas do modelo nebuloso inverso proposto, nas etapas de estimação inicial e recursiva.

Figura 28 – HMBM: característica de regime estático decorrente da comparação do vetor de saída  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$  do modelo nebuloso inverso proposto e a superfície da entrada  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$  do sistema. Unidades: eixos  $y_1$  e  $y_2$  adimensionais.

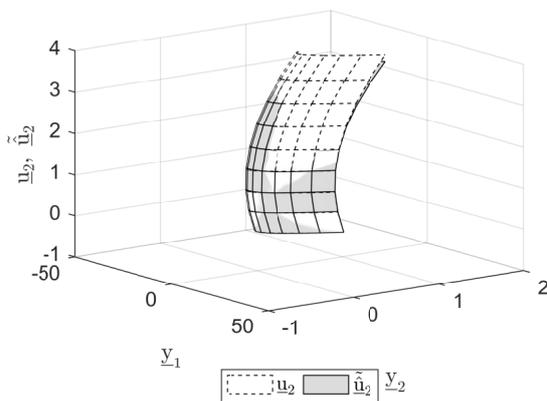
(a) Comparação entre as superfícies  $\tilde{u}_1 \times u_1$ .  
Unidades: eixos  $\tilde{u}_1$  e  $u_1$  adimensionais.



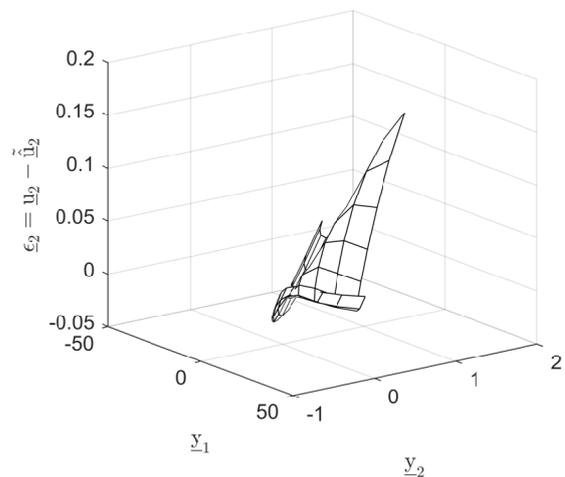
(b) Superfície do erro de estimação  $\epsilon_1 = \tilde{u}_1 - u_1$ . Unidades: eixos  $\epsilon_1$  adimensional.



(c) Comparação entre as superfícies  $\tilde{u}_2 \times u_2$ .  
Unidades: eixos  $\tilde{u}_2$  e  $u_2$  adimensionais.

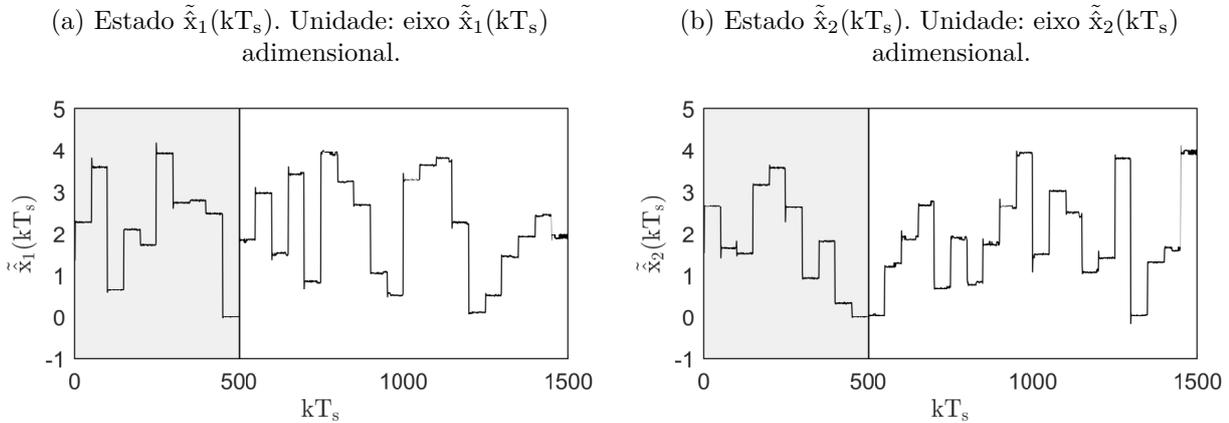


(d) Superfície do erro de estimação  $\epsilon_2 = \tilde{u}_2 - u_2$ . Unidade: eixos  $\epsilon_2$  adimensional.



Fontes das Figuras 28a a 28d: autor dessa dissertação.

Figura 29 – HMBM: vetor de estados estimados  $\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) = [\tilde{x}_1(kT_s), \tilde{x}_2(kT_s)]^T$  do modelo nebuloso inverso proposto. Etapas: região  $\blacksquare$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimativa recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

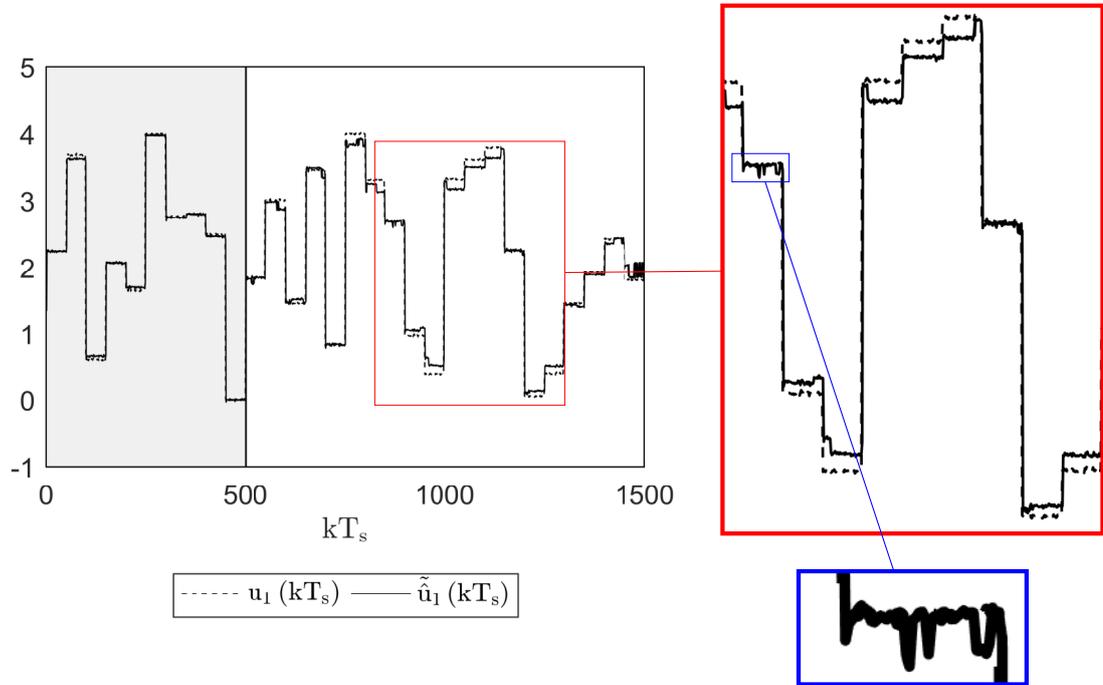


Fonte das Figuras 29a e 29b: autor dessa dissertação.

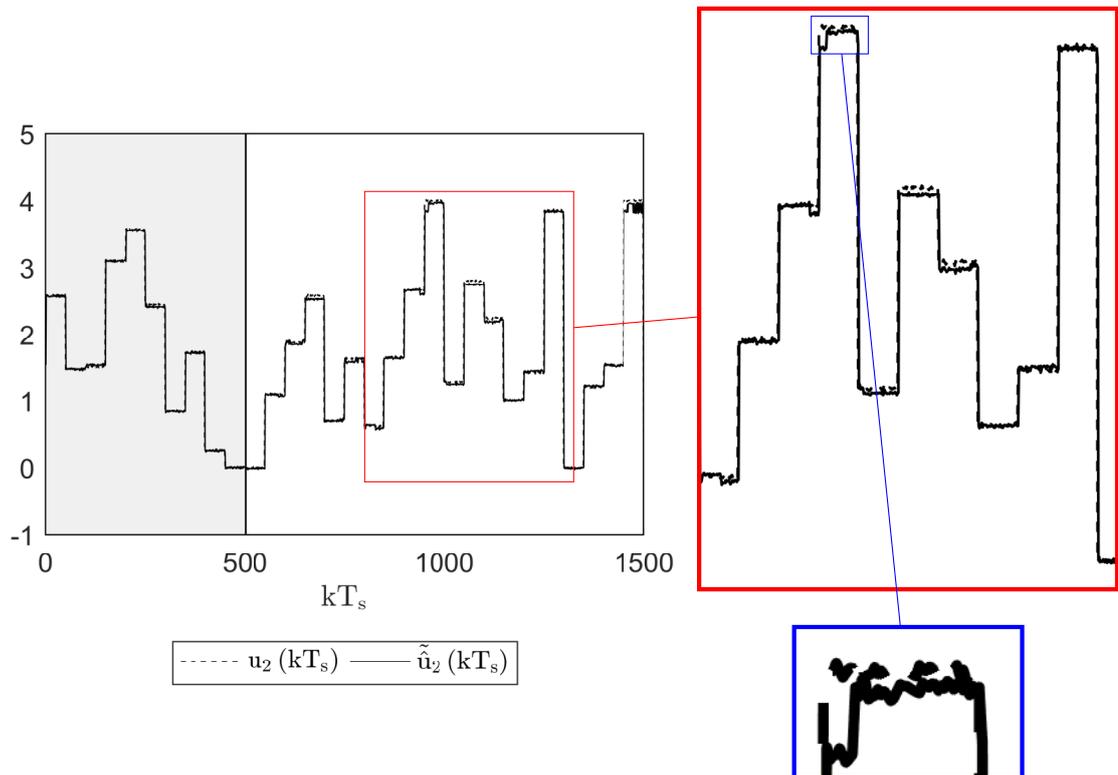
- c) **Métricas de qualidade de estimação.** As amostras temporais das métricas de qualidade de estimação (MSE, NMSE,  $R^2$  e VAF), referente ao experimento ótimo com  $c = 2$  agrupamentos, foram calculados a partir dos valores de  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$  e de  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$  em cada amostra de dados, utilizando a formulação do Apêndice B. Como resultado, os comportamentos temporais dessas métricas foram obtidos tanto na etapa de estimação inicial, quanto na etapa de estimação recursiva, conforme ilustrado Figura 31. Nessa figura, os comportamentos estáticos das métricas de qualidade de estimação, na etapa de estimação inicial, se devem à forma como os cálculos das métricas são realizados, envolvendo, de uma só vez, todas as amostras do conjunto de dados inerente a essa etapa. Já na etapa de estimação recursiva, os comportamentos de tais métricas se tornam dinâmicos, pois estas são calculadas de forma recursiva a cada amostra de dados, a partir dos seus respectivos resultados previamente obtidos na etapa de estimação inicial.

Figura 30 – HMBM: comparação entre a entrada do sistema  $\mathbf{u}(kT_s) = [u_1(kT_s), u_2(kT_s)]^T$  e a saída do modelo nebuloso  $\tilde{\mathbf{u}}(kT_s) = [\tilde{u}_1(kT_s), \tilde{u}_2(kT_s)]^T$ . Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em s.

(a) Unidades: eixos  $u_1(kT_s)$  (sistema) e  $\tilde{u}_1(kT_s)$  (modelo inverso nebuloso proposto) adimensionais.



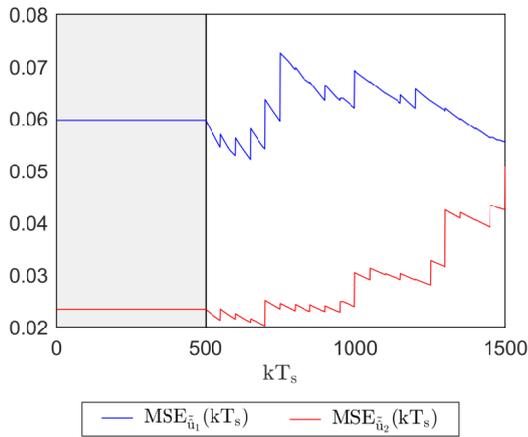
(b) Unidades: eixos  $u_2(kT_s)$  (sistema) e  $\tilde{u}_2(kT_s)$  (modelo inverso nebuloso proposto) adimensionais.



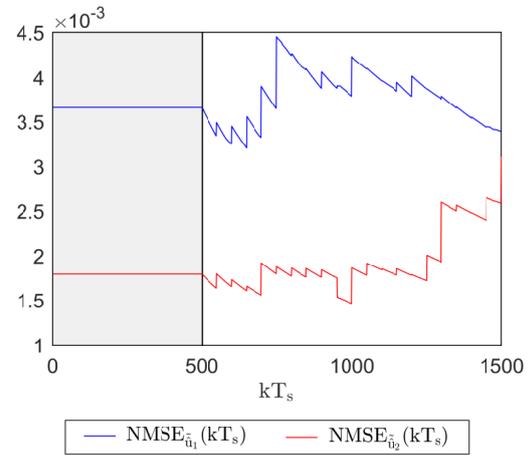
Fonte das Figuras 30a e 30b: autor dessa dissertação.

Figura 31 – HMBM: métricas de qualidade de estimação associada com as saídas do modelo nebuloso inverso  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$ . Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

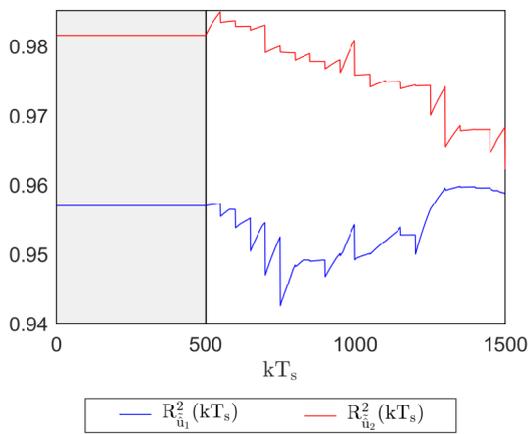
(a) Métrica do erro médio quadrático (MSE)



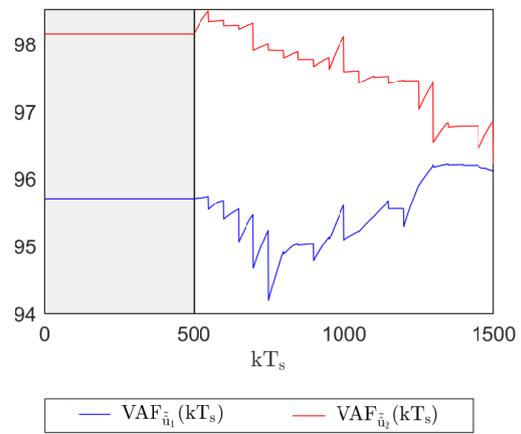
(b) Métrica do erro médio quadrado normalizado (NMSE)



(c) Métrica do índice de confiabilidade (coeficiente de determinação)  $R^2$



(d) Métrica da variância representativa (VAF)



Fonte das Figuras 31a a 31d: o autor da dissertação.

## 4.3 Estudo de caso 03: helicóptero com 2 graus de liberdade

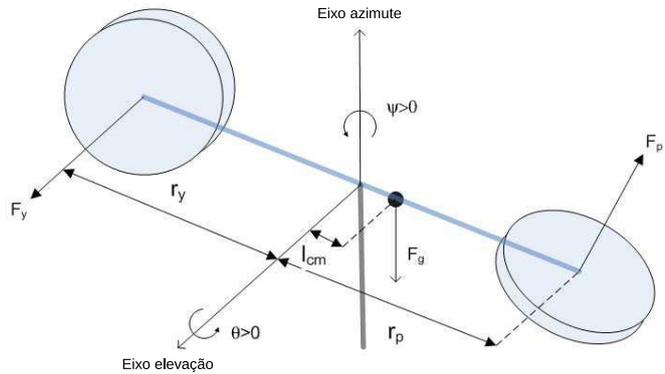
Nesse estudo de casos, a aplicabilidade da metodologia proposta será demonstrada através dos resultados experimentais da identificação nebulosa inversa de um helicóptero com dois graus de liberdade (do inglês *Helicopter with 2 Degrees Of Freedoms – H2DoF*), como mostrado na Figura 32 (FILHO; SERRA, 2017; PIRES; SERRA, 2018; FILHO; SERRA, 2018).

Figura 32 – H2DOF: Helicóptero com 2 graus de liberdade Quanser.

(a) Imagem da planta



(b) Diagrama dinâmico



Fontes das Figuras 32a e 32b: adaptado de (QUANSER, 2006).

O vetor de entradas do Helicóptero 2DoF, é definido como  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T \triangleq [V_\theta, V_\psi]^T$ , com  $V_\theta \in \mathbb{R}_+^*$  e  $V_\psi \in \mathbb{R}_+^*$  são níveis de tensão CC dos motores que proporcionam o torque nos eixos de elevação e azimute, dados em volts ( $V$ ) respectivamente, e o vetor de saídas é definido como  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T \triangleq [\theta, \psi]^T$ , com  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$  e  $\psi \in \mathbb{R}_+^*$  sendo as posições angulares de elevação e azimute, dados em graus ( $^\circ$ ), respectivamente. A formulação referente à modelagem caixa branca da Figura 32b encontra-se em (QUANSER, 2006). Conseqüentemente, o modelo matemático obtido é descrito conforme a seguinte equação:

$$\mathcal{D}(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \mathcal{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \dot{\mathbf{y}} + \mathcal{G}(\mathbf{y}) = \mathcal{K} \mathbf{u} \quad (4.36)$$

onde

$$\mathcal{D}(\mathbf{y}) \triangleq \begin{bmatrix} J_{eq,p} + m_{heli} l_{cm}^2 & 0 \\ 0 & J_{eq,y} + m_{heli} l_{cm}^2 \cos^2(y_1) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \triangleq \begin{bmatrix} B_p & m_{heli} l_{cm}^2 \sin(y_1) \cos(y_1) \dot{y}_2 \\ -2m_{heli} l_{cm}^2 \sin(y_1) \cos(y_1) \dot{y}_2 & B_y \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{y}) \triangleq \begin{bmatrix} m_{heli} g l_{cm} \cos(y_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

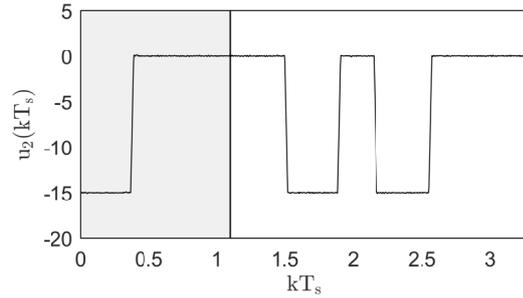
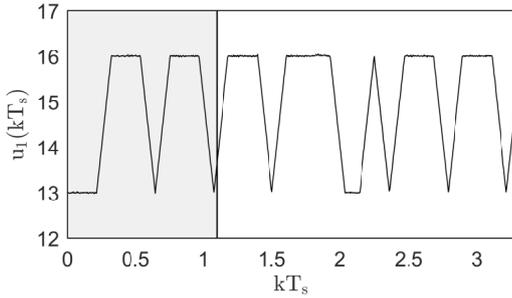
$$\mathcal{K} \triangleq \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{py} \\ K_{yp} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

com  $\mathcal{D}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathcal{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathcal{G}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  e  $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Os parâmetros escalares  $\{J_{eq,p}, J_{eq,y}, m_{heli}, l_{cm}, B_p, B_y, g, K_{pp}, K_{py}, K_{yp}, K_{yy}\} \in \mathbb{R}$  estão especificados em (QUANSER, 2006).

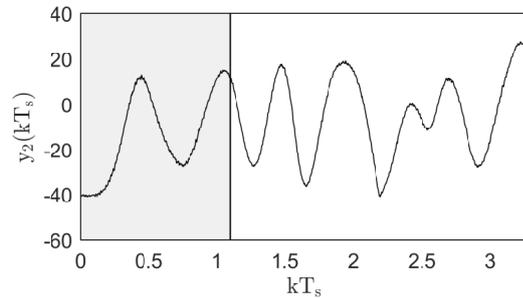
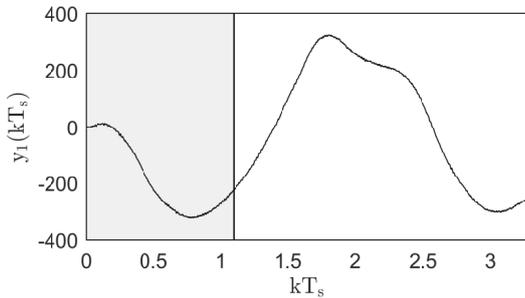
Um conjunto de dados experimentais de entrada e saída foram obtidos do Helicóptero 2DoF, com 1096 pontos e período de amostragem  $T_s = 3 \cdot 10^{-3}$  s, conforme ilustrado na Figura 33. Nesta aplicação, os  $l = 365$  primeiros pontos foram utilizados para a estimação inicial em batelada, e os 731 pontos restantes foram usados para a etapa de estimação recursiva.

Figura 33 – H2DOF: dados experimentais de entrada e saída obtidos para identificação do modelo inverso. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $[kT_s]$  em  $s$ .

- (a) Entrada  $u_1(kT_s)$ . Unidade: eixo  $u_1(kT_s)$  em  $V$  (volts).      (b) Entrada  $u_2(kT_s)$ . Unidade: eixo  $u_1(kT_s)$  em  $V$  (volts).



- (c) Entrada  $y_1(kT_s)$ . Unidade: eixo  $y_1(kT_s)$  em  $^\circ$  (graus).      (d) Entrada  $y_2(kT_s)$ . Unidade: eixo  $y_2(kT_s)$  em  $^\circ$  (graus).



Fontes das Figuras 33a a 33d: o autor desta dissertação.

Nesse estudo de casos, 10 experimentos foram realizados. Cada experimento associado está associado a um número de agrupamentos  $c$ , tal que  $c \in \{2, \dots, 11\}$ . Para a execução do OKID e do filtro de compensação paramétrica em cada submodelo inverso local  $i$ , definiu-se os seguintes parâmetros: a constante de predição associada com os estados

(*deadbeat* do observador)  $q = 1$ ; a constante de observabilidade  $p = 10$  e a constante de controlabilidade  $g = 5$ , ambas associadas às matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$  e  $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$ ; o fator de seleção da ordem de realização mínima reduzida  $\phi_\sigma = 0,875$ ; a constante de suavização exponencial do filtro de compensação paramétrica  $T_f = 40$ . Consequentemente, os mapeamentos das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE, NMSE  $R^2$  e VAF por experimento, obtidos para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante, estão ilustrados nas Figuras 34 e 35, onde a letra “I” designa a etapa de estimação inicial, e a letra “R” designa a etapa de estimação recursiva. Já os mapeamentos das métricas de computação  $t_c$  e  $RAM_c$  por experimento estão ilustrados na Figura 36.

Verificando as Figuras 34a e 34b, observa-se que experimento com  $c = 3$  agrupamentos apresenta o menor valor de MSE na etapa recursiva, dentre as saídas do modelo, ou seja, o MSE ótimo. Ainda nas Figuras 34 e 35, observa-se que as métricas NMSE,  $R^2$ , VAF também seguem suas respectivas tendências de otimalidade, e apresentam os seus valores ótimos para o experimento com  $c = 3$  agrupamentos. Porém, o mesmo não se observa com o tempo de computação  $t_c$  e memória demandada  $RAM_c$ , conforme ilustrado na Figura 36, visto que  $t_c(c = 2) < t_c(c = 3)$  e  $RAM_c(c = 2) < RAM_c(c = 3)$ . Por isso, tendo em vista o critério do MSE ótimo, a seguir, serão apresentados os resultados gráficos inerentes ao experimento ótimo, com o número de  $c = 3$  agrupamentos.

#### 4.3.1 Resultados da proposição antecedente

Nesse seção, os resultados inerentes ao procedimento de estimação da proposição antecedente da base de regras do modelo inverso serão abordados, conforme obtido pelo experimento ótimo, com  $c = 3$  agrupamentos.

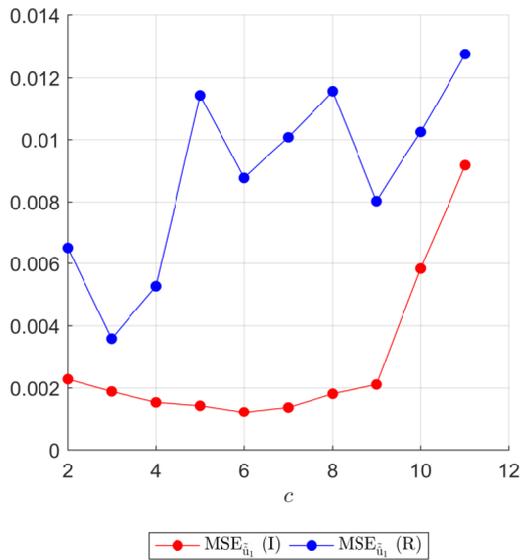
A priori, observa-se as posições dos pontos de operação  $\mathfrak{C}(kT_s)$  conforme a Eq. (2.94), processadas a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(kT_s)$  pelo procedimento de agrupamento GK. Durante a etapa da estimação inicial, onde  $k = l$ , os agrupamentos foram estimados em batelada, diretamente pelo procedimento GK, a partir do conjunto de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(lT_s)$ , conforme os passos 3.1.1 do Algoritmo 16. Numericamente, os resultados para  $\mathfrak{C}(l) = \mathfrak{C}(lT_s)$  foram:

$$\mathfrak{C}(lT_s) = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \epsilon_1(lT_s) \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \epsilon_2(lT_s) \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \epsilon_3(lT_s) \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc} -295,8137 & -10,8884 & -182,8716 \\ -11,6060 & -33,0437 & 8,8843 \\ 15,1808 & 13,5461 & 15,6595 \\ -0,0113 & -14,9479 & -1,1351 \end{array} \right] & & (4.41) \end{array}$$

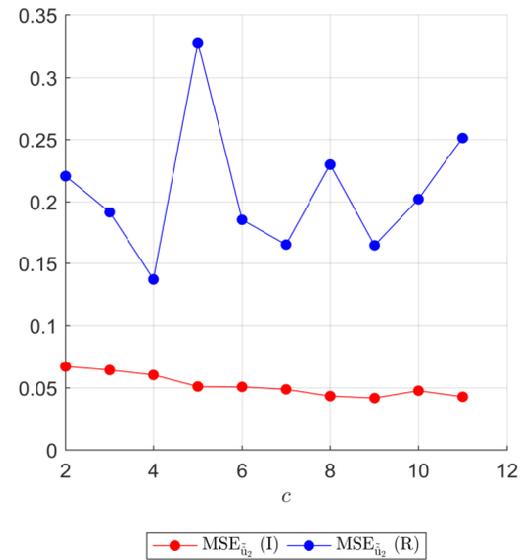
Já etapa de estimação recursiva, os agrupamentos foram estimados por meio da execução do algoritmo GK, a partir da janela de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(kT_s)$ , conforme procedimento *DataBaseSliding4GKAlgorithm*, listado no passo 5.3.1 do Algoritmo 16. Numericamente os

Figura 34 – H2DOF: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica MSE e NMSE por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos  $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva.

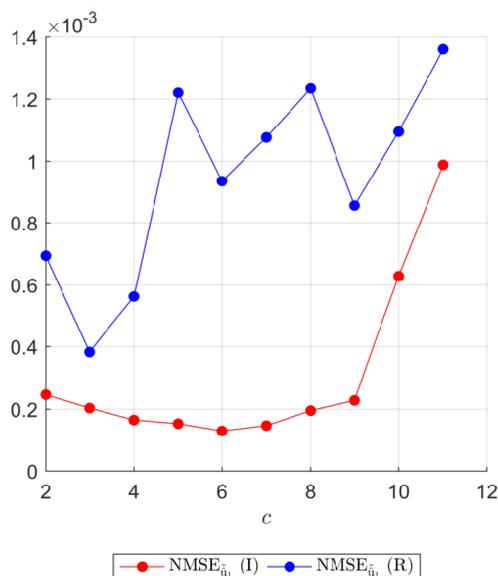
(a) Mapeamento  $c \times \text{MSE}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(b) Mapeamento  $c \times \text{MSE}_{\tilde{u}_2}$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(c) Mapeamento  $c \times \text{NMSE}_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(d) Mapeamento  $c \times \text{NMSE}_{\tilde{u}_2}$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.

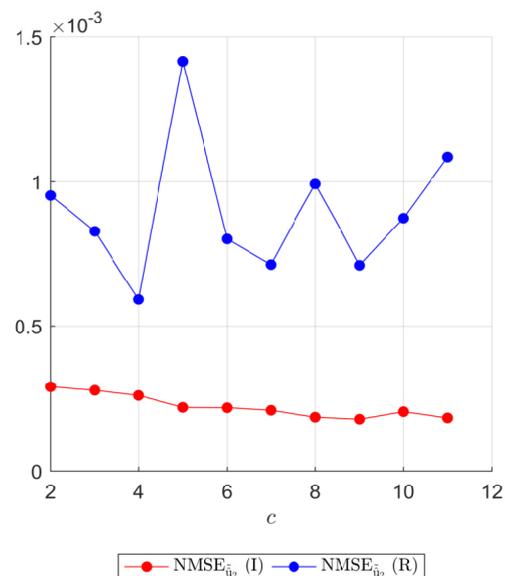
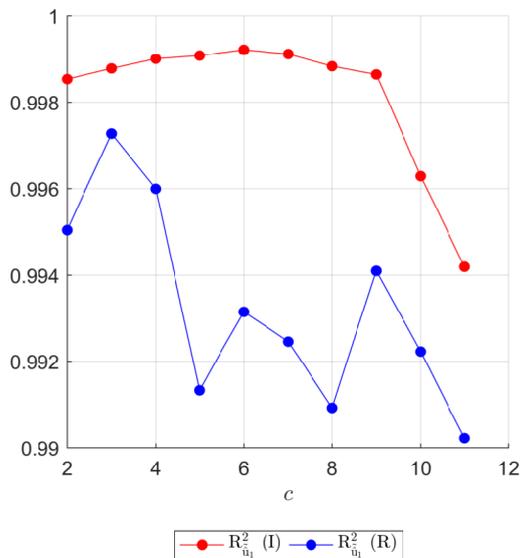
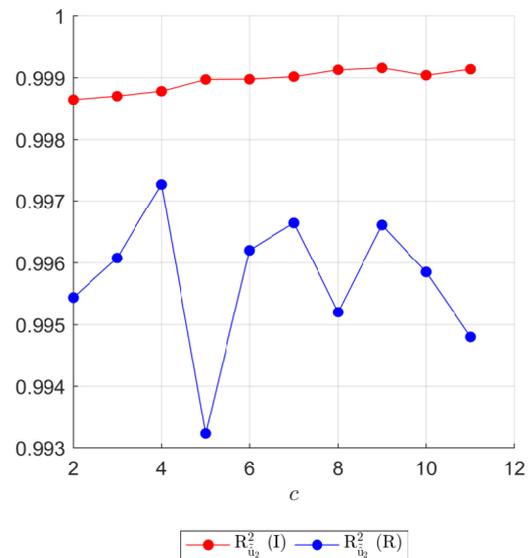


Figura 35 – H2DOF: mapeamento das métricas de qualidade de estimação paramétrica  $R^2$  e VAF por experimento realizado para cada saída do modelo nebuloso inverso resultante. Cada experimento é expresso por um número de agrupamentos  $c$ . Em cada métrica, a letra “I” se refere à estimação paramétrica inicial, enquanto que a letra “R” se refere à estimação paramétrica recursiva.

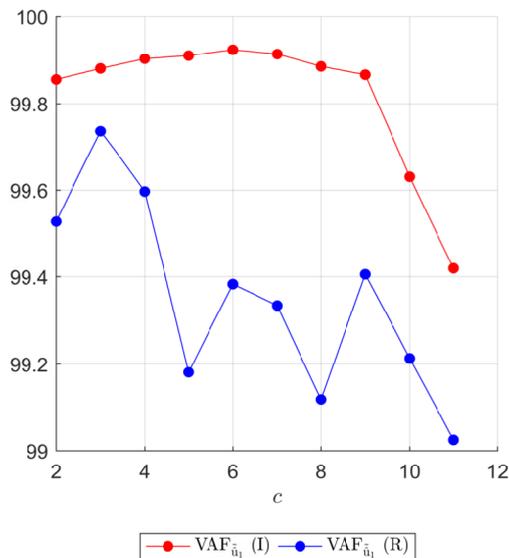
(a) Mapeamento  $c \times R_{\tilde{u}_1}^2$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(b) Mapeamento  $c \times R_{\tilde{u}_2}^2$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(c) Mapeamento  $c \times VAF_{\tilde{u}_1}$  associado à saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso resultante.



(d) Mapeamento  $c \times VAF_{\tilde{u}_2}$  associado à saída  $\tilde{u}_2$  do modelo nebuloso inverso resultante.

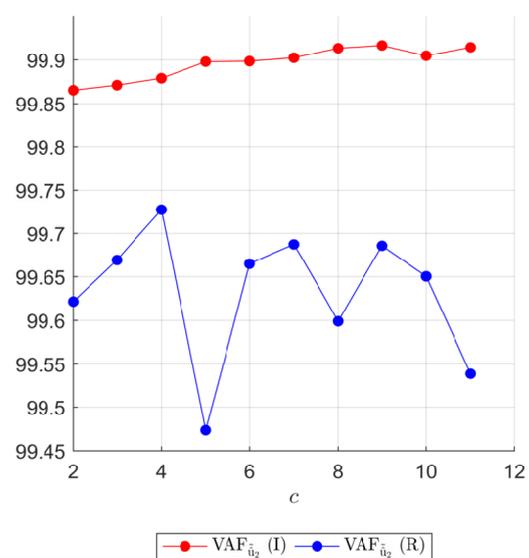
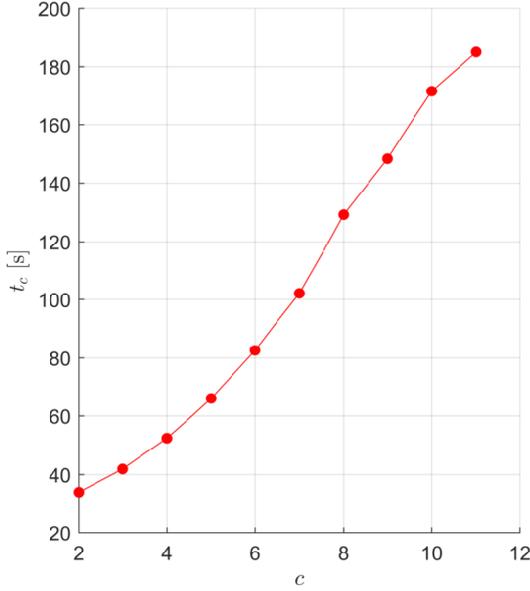
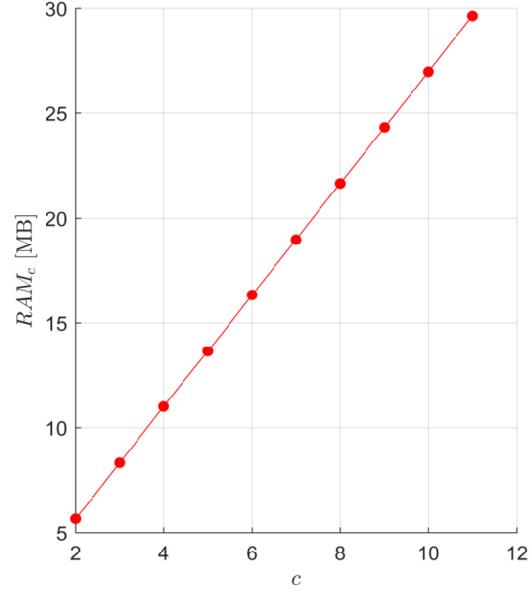


Figura 36 – H2DOF: mapeamento das métricas de computação  $t_c$  e  $RAM_c$  por experimento, o qual é expresso por número de agrupamentos  $c$ .

(a) Mapeamento  $c \times t_c$  associado à computação da saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



(b) Mapeamento  $c \times RAM_c$  associado à computação da saída  $\tilde{u}_1$  do modelo nebuloso inverso proposto.



Fontes das Figuras 36a e 36b: autor da dissertação

resultados para  $\mathfrak{L}(kT_s)$ , computados para a última amostra de dados da etapa de estimação recursiva, foram:

$$\mathfrak{L}(1096T_s) = \begin{array}{l} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \end{array} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \mathfrak{c}_1(1096T_s) \\ \downarrow \\ -270,5469 \\ -0,1923 \\ 15,0275 \\ -0,0060 \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{c}_2(1096T_s) \\ \downarrow \\ 170,7365 \\ -15,0810 \\ 14,7808 \\ -14,9719 \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{c}_3(1096T_s) \\ \downarrow \\ -65,6249 \\ 1,2907 \\ 15,8283 \\ -1,9072 \end{array} \end{array} \quad (4.42)$$

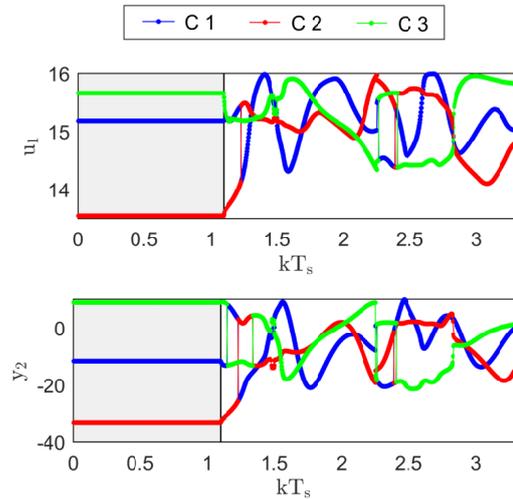
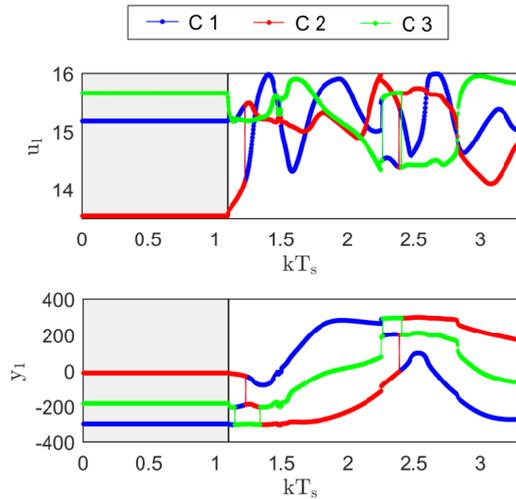
Portanto, os resultados da dinâmica dos pontos de operação  $\mathfrak{L}(kT_s)$  nos processos de estimação paramétrica inicial e recursiva são computados e ilustrados conforme a Figura 37.

#### 4.3.2 Resultados da proposição consequente

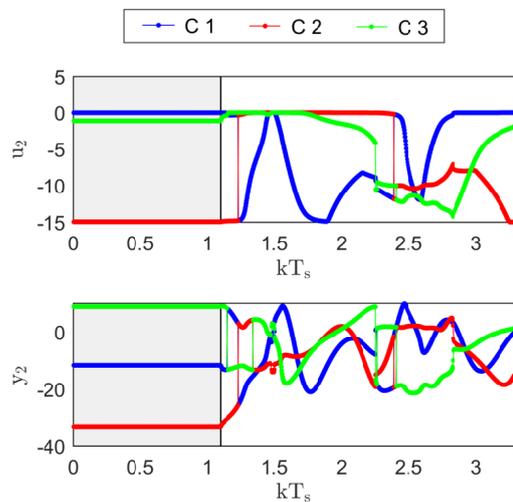
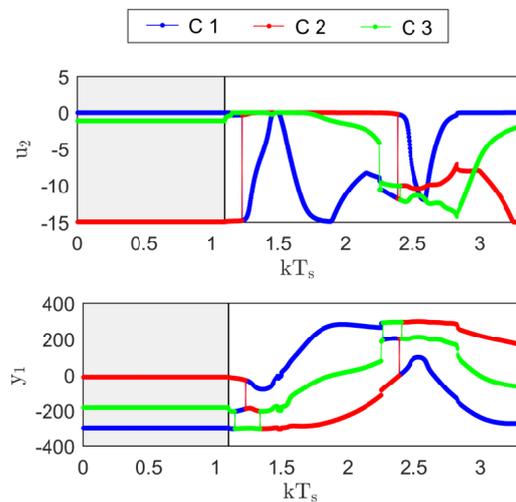
A seguir, serão apresentados os resultados inerentes ao procedimento de estimação paramétrica via OKID para cada  $i$  dos  $c$  agrupamentos do referido experimento.

Figura 37 – H2DOF: comportamento dos centros (pontos de operação) dos agrupamentos. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

- (a) Mapeamento  $y_1 \times u_1$ . Unidades: eixo  $y_1$  em  $^\circ$  (graus) e  $u_1$  em  $V$  (volts). (b) Mapeamento  $y_2 \times u_1$ . Unidades: eixo  $y_2$  em  $^\circ$  (graus) e  $u_1$  em  $V$  (volts).



- (c) Mapeamento  $y_1 \times u_2$ . Unidades: eixo  $y_1$  em  $^\circ$  (graus) e  $u_2$  em  $V$  (volts). (d) Mapeamento  $y_2 \times u_2$ . Unidades: eixo  $y_2$  em  $^\circ$  (graus) e  $u_2$  em  $V$  (volts).



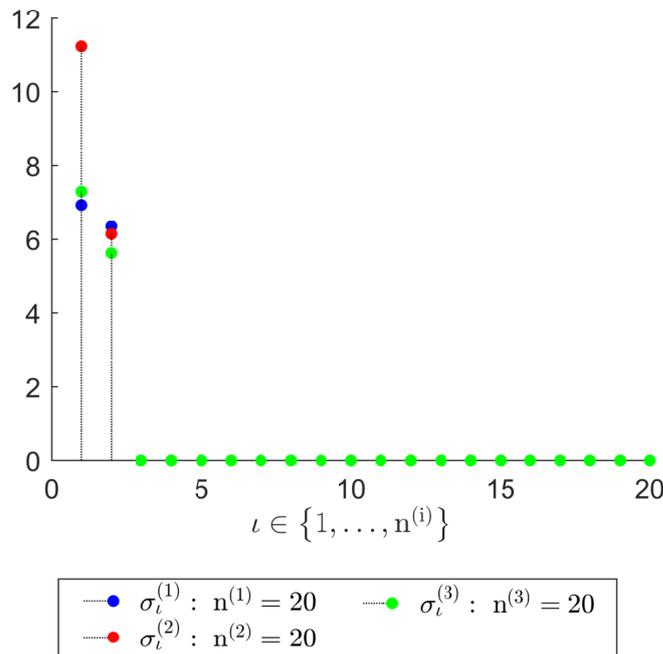
Fonte das Figuras 37a a 37d: autor da dissertação

a) **Estimação do valor de  $n_{min}$ .** De posse das  $c$  matrizes de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ , executou-se o procedimento *NMinTracking* para cada agrupamento  $i$ , conforme o passo 3.2.6 do Algoritmo 16, obtendo-se as respectivas matrizes de  $n^{(i)}$  valores singulares não nulos assim como os  $n_{min}^{(i)}$  valores singulares significativos, conforme computados na Figura 38. Nessa figura, o eixo das abscissas é a posição  $\iota$  dos  $n^{(i)}$  valores singulares, tal que  $\iota \in \{1, \dots, n^{(i)}\}$ ; enquanto que o eixo das ordenadas é os seus respectivos valores  $\sigma_\iota^{(i)}$ . Uma vez obtidos os valores de  $n^{(i)}$  e  $n_{min}^{(i)}$  para os  $c$  agrupamentos, obteve-se os valores de  $n$  e  $n_{min}$  através das Eqs. (3.86) e (3.87), conforme o passo 3.2.7 do Algoritmo 16, resultando nos seguintes valores:

$$n = 20 \quad (4.43)$$

$$n_{min} = 2 \quad (4.44)$$

Figura 38 – H2DOF: valores singulares  $[\sigma_\iota^{(i)}]_{\iota=1}^{n^{(i)}}|_{i=1}^c$  da  $i$ -ésima matriz de Hankel  $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ .



Fonte: o autor dessa dissertação.

b) **A estimação paramétrica da proposição consequente.** Cada agrupamento/regra  $i$  apresenta as respectivas proposições do consequente compostas pelos os submodelos locais inversos com abordagem direta no espaço de estados com observador de Kalman, conforme as Eqs. (3.90) e (3.91). A estimação paramétrica nebulosa do  $i$ -ésimo submodelo local é realizada pela metodologia OKID, tanto na etapa de estimação inicial quanto na etapa de estimação recursiva. Na etapa de estimação

inicial, os parâmetros são invariantes, decorrentes da identificação em batelada, os quais resultaram em:

$$\{\widehat{\mathbf{G}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 0,9960 & -0,0037 \\ 0,0111 & 0,9867 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{G}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,9961 & -0,0059 \\ 0,0715 & 1,0423 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{G}}^2(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 1,0034 & 0,0009 \\ 0,0098 & 0,9696 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{G}}^3(lT_s)} \right\} \quad (4.45)$$

$$\{\widehat{\mathbf{H}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} -0,0001 & -0,0025 \\ 0,0006 & -0,0001 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{H}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -0,0002 & 0,0007 \\ 0,0036 & 0,0093 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{H}}^2(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,0003 & -0,0007 \\ 0,0010 & 0,0074 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{H}}^3(lT_s)} \right\} \quad (4.46)$$

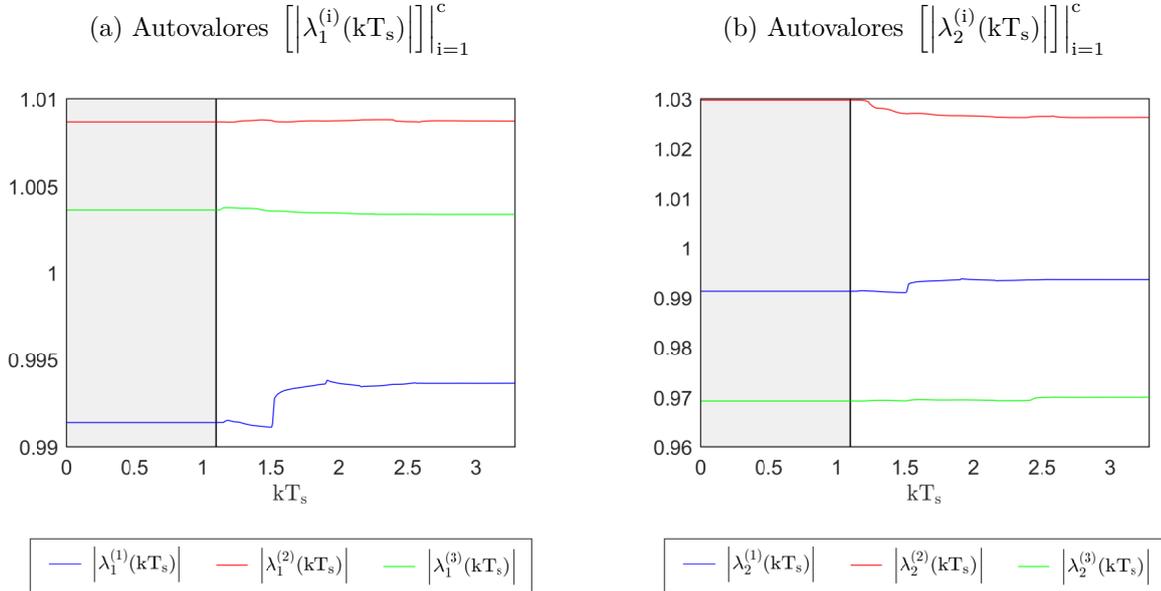
$$\{\widehat{\mathbf{O}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} -0,9960 & 0,0037 \\ -0,0111 & -0,9867 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{O}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -0,9961 & 0,0059 \\ -0,0715 & -1,0423 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{O}}^2(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -1,0034 & -0,0009 \\ -0,0098 & -0,9696 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{O}}^3(lT_s)} \right\} \quad (4.47)$$

$$\{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^2(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^3(lT_s)} \right\} \quad (4.48)$$

$$\{\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(lT_s)\}_{i=1}^c = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 0,0015 & 0,0054 \\ -0,0037 & 0,0020 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^1(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} -0,0024 & 0,0228 \\ 0,0015 & -0,0150 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^2(lT_s)}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0,0004 & -0,0078 \\ -0,0084 & 0,0132 \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{\Delta}}^3(lT_s)} \right\} \quad (4.49)$$

Na etapa de estimação recursiva, a metodologia OKID é executada para cada regra em cada amostra de dados, resultando em submodelos locais inversos variantes com o tempo. Assim, a variação paramétrica na etapa recursiva será apresentada por meio autovalores  $[\lambda_j^{(i)}(kT_s)]_{i=1}^c \Big|_{j=1}^{n_{min}}$ , extraídos da matriz de estados  $\{\widehat{\mathbf{G}}^i(kT_s)\}_{i=1}^c$ . Como os autovalores podem ser complexos, eles serão exibidos em valor absoluto (módulo), como ilustrado na Figura 39.

Figura 39 – H2DOF: magnitude dos autovalores de  $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$  referente a  $i$ -ésima regra, com  $i \in [1, c]$ . Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $kT_s$  em  $s$ .



Fonte das Figuras 39a e 39b: o autor da dissertação.

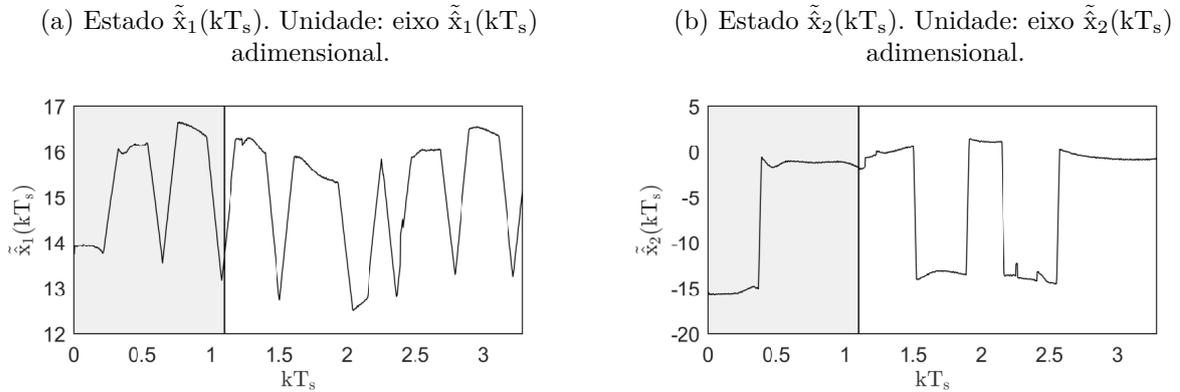
#### 4.3.3 Resultados modelo nebuloso inverso proposto

Nesse seção, os resultados inerentes às respostas de comparação estática e dinâmica do modelo inverso e as respostas das métricas de qualidade de estimação MSE, NMSE,  $R^2$  e VAF serão apresentados como seguem.

a) **Estados nebulosos inversos e comparação de regime dinâmico.** Para cada amostra de dados do sistema, o  $i$ -ésimo vetor de estados locais inversos foi estimado conforme a equação de estados da Eq. (3.18), e o vetor de estados do modelo nebuloso inverso proposto foi estimado conforme a Eq. (3.15), tanto na etapa de estimação inicial com na etapa de estimação recursiva, resultando na Figura 40. Em seguida, estimaram-se o  $i$ -ésimo vetor de saídas do submodelo local inverso, conforme a equação de saída da Eq. (3.19), e o vetor de saídas do modelo nebuloso inverso proposto, conforme a Eq. (3.16). A Figura 41 ilustra a comparação entre as dinâmicas dos sinais das entradas do sistema e os sinais das saídas do modelo nebuloso inverso proposto, nas etapas de estimação inicial e recursiva.

b) **Métricas de qualidade de estimação.** As amostras temporais das métricas de qualidade de estimação (MSE, NMSE,  $R^2$  e VAF), referente ao experimento ótimo com  $c = 3$  agrupamentos, foram calculados a partir dos valores de  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$  e de  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$  em cada amostra de dados, utilizando a formulação do Apêndice B. Como resultado, os comportamentos temporais dessas métricas foram obtidos tanto

Figura 40 – H2DOF: vetor de estados estimados  $\tilde{\mathbf{x}}(kT_s) = [\tilde{x}_1(kT_s), \tilde{x}_2(kT_s)]^T$  do modelo nebuloso inverso proposto. Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimativa recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

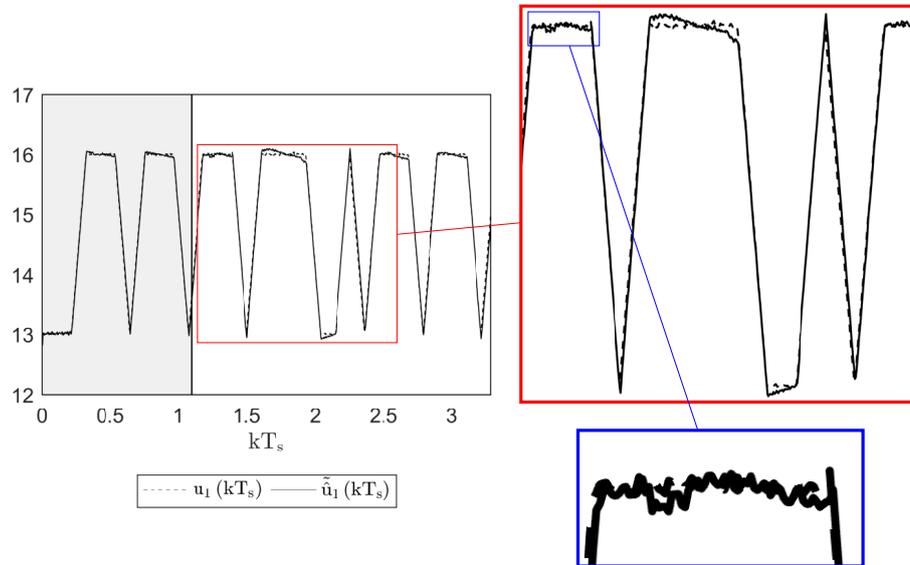


Fonte das Figuras 40a e 40b: autor dessa dissertação.

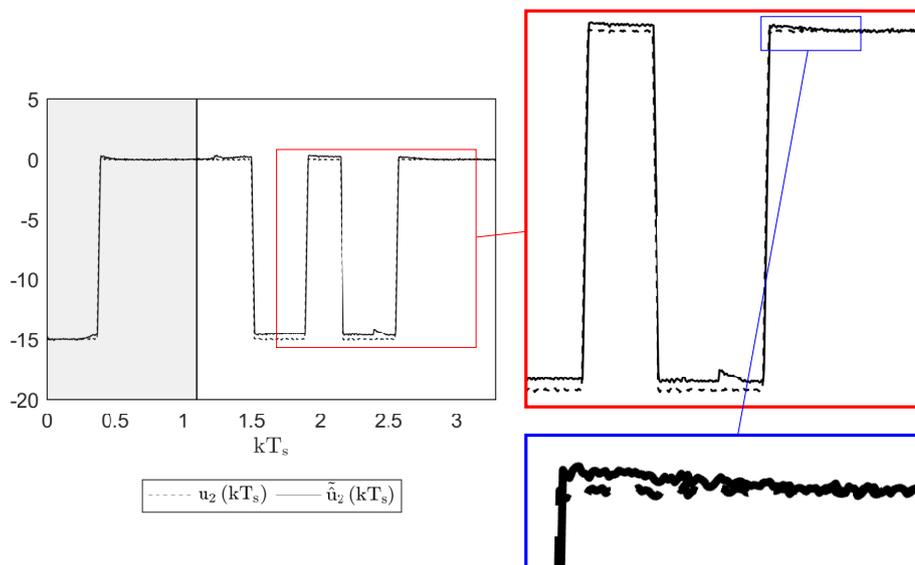
na etapa de estimação inicial, quanto na etapa de estimação recursiva, conforme ilustrado Figura 42. Nessa figura, os comportamentos estáticos das métricas de qualidade de estimação, na etapa de estimação inicial, se devem à forma como os cálculos das métricas são realizados, envolvendo, de uma só vez, todas as amostras do conjunto de dados inerente a essa etapa. Já na etapa de estimação recursiva, os comportamentos de tais métricas se tornam dinâmicos, pois estas são calculadas de forma recursiva a cada amostra de dados, a partir dos seus respectivos resultados previamente obtidos na etapa de estimação inicial.

Figura 41 – H2DOF: comparação entre a entrada do sistema  $\mathbf{u}(kT_s) = [u_1(kT_s), u_2(kT_s)]^T$  e a saída do modelo nebuloso  $\tilde{\mathbf{u}}(kT_s) = [\tilde{u}_1(kT_s), \tilde{u}_2(kT_s)]^T$ . Etapas: região  (estimação inicial), região  (estimação recursiva). Unidade: eixo  $kT_s$  em  $s$ .

(a) Unidades: eixos  $u_1(kT_s)$  (sistema) em  $V$  e  $\tilde{u}_1(kT_s)$  (modelo inverso nebuloso proposto) em  $V$ .

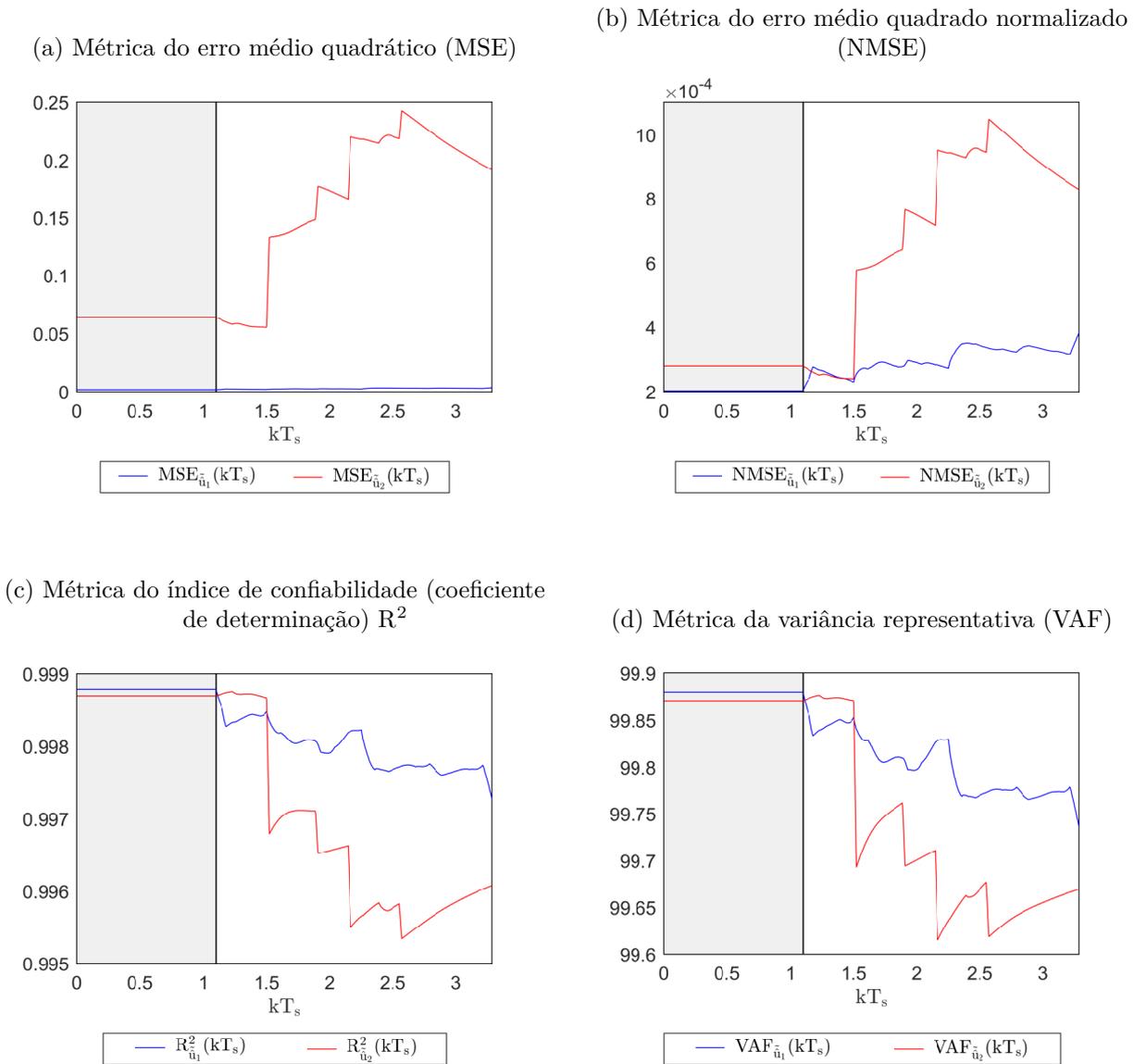


(b) Unidades: eixos  $u_2(kT_s)$  (sistema) em  $V$  e  $\tilde{u}_2(kT_s)$  (modelo inverso nebuloso proposto) em  $V$ .



Fonte das Figuras 41a e 41b: o autor da dissertação.

Figura 42 – H2DOF: métricas de qualidade de estimação associada com as saídas do modelo nebuloso inverso  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$ . Etapas: região  $\square$  (estimação inicial), região  $\square$  (estimação recursiva). Unidades: eixo  $kT_s$  em  $s$ .



Fonte das Figuras 42a a 42d: o autor da dissertação.



## 5 CONCLUSÃO

### 5.1 Análise dos resultados experimentais

Analisando os resultados de ambos os estudos de caso, verifica-se:

- a) **O conjunto de dados dos estudos de caso permitem trabalhar tanto características dinâmicas (variações rápidas e pequenas) quanto características estáticas (variações lentas e grandes) em torno de pontos de operação do sistema.** Isso se deve à característica aleatória dos conjunto de dados, com oscilações rápidas e pequenas em torno de pontos de operação, os quais também oscilam aleatoriamente, porém com grandes variações lentas, conforme as Figuras 10a a 10c para o estudo de caso 01, e as Figuras de 21a a 21d para o estudo de caso 02. Além disso, dados mais oscilatórios e contínuos são semelhantes ao comportamento oscilatório estático das funções senoidais, como ilustrado nas Figuras de 33a a 33d, para o estudo de caso 03. Como resultado, o modelo nebuloso TS inverso estimado com baixo número de agrupamentos e de boa qualidade, que permita gerar condições iniciais bem adequadas para estimação recursiva do modelo nebuloso TS inverso proposto, conforme observado nas métricas MSE, NMSE  $R^2$  e VAF nas Figura 11, para o estudo de caso 01, nas Figuras 22 e 23, para o estudo de caso 02 e Figuras 22 e 23, para o estudo de caso 03.
- b) **O número de agrupamentos ótimo foi de  $c = 2$  para os dois primeiros estudos de casos, e  $c = 3$  para o último estudo de caso** Isso se deve ao desempenhos da qualidade de estimação e computacional, que caem com o aumento do número de regras/agrupamentos. Com o aumento do número de agrupamentos/regras, aumenta o número de pontos de operação. Porém, dependendo da natureza dos dados agrupados, os pontos de operação podem ficar mal localizados por vários motivos, dentre eles a) os dados que definem os agrupamentos podem estar muito concentrados entre si; b) os agrupamentos podem estar muito dispersos entre si, principalmente se a natureza dos dados tiver mudanças muito bruscas de ponto de operação; c) os pontos de operação podem estar sobrepostos, entre outras. Por essas razões, os submodelos locais são mal estimados, e a qualidade de estimação cai. Além disso, aumentar o número de agrupamentos também significa aumentar o número de operações aritméticas de ponto flutuante em função do aumento do número de matrizes armazenadas na memória RAM. Como resultado, há o aumento do tempo de computação ( $t_c$ ) e do consumo de recursos de armazenamento em memória RAM ( $RAM_c$ ). Essa análise pode ser confirmada observando a Figura 12, para o estudo de

caso 01; a Figura 24, para o estudo de caso 02, e a Figura 36 para o estudo de caso 03.

- c) **O deslocamento dos pontos de operação ficou alternado entre os agrupamentos dos estudos de casos 01 e 02, no decorrer da etapa de estimação recursiva.** Na etapa de treinamento, referente à estimação paramétrica inicial, os pontos de operação foram estimados de uma só vez, a partir da batelada de dados previamente definida. Como resultado, apresentam um comportamento estático durante essa etapa. Porém, na etapa adaptativa, referente a estimação paramétrica recursiva, os pontos de operação associados aos agrupamentos passam a serem estimados à cada amostra de dados, apresentando uma dinâmica alternada entre si nos casos 01 e 02, e praticamente contínua no caso 03. Essa análise pode ser confirmada pelas Figuras 13a e 13b, para o estudo de caso 01; pelas Figuras 25a a 25d, para o estudo de caso 02, e pelas Figuras 37a a 37d. Isso se deve à característica de variabilidade brusca e aleatória entre os pontos de operação, ao observar o conjunto de dados utilizado para identificação dos sistemas, associados aos estudos de casos 01 e 02. Por outro lado, uma característica distinta é perceptível para o caso 03, pois os dados das saídas do sistema são mais contínuos, como pouca alternância entre os pontos de operação, embora os dados das entradas apresentem variações bruscas. Portanto, verifica-se que o comportamento dinâmico dos pontos de operação são significativamente influenciados pela natureza dos seus respectivos sistemas.
- d) **A variação dos parâmetros dos submodelos inversos locais apresentam características peculiares para cada estudo de caso.** Nessa dissertação, os resultados da estimação paramétrica da proposição consequente de cada regra/agrupamento  $i$  são representados pelo módulo dos autovalores  $|\lambda_a^{(i)}(kT_s)|$  da matriz de estados do submodelo  $\widehat{\mathbf{G}}^i(kT_s)$ , sem o observador de Kalman. Os módulo autovalores  $|\lambda_a^{(i)}(kT_s)|$  também dão uma informação da estabilidade assintótica dos submodelos locais inversos sem o observador de Kalman, visto os submodelos foram estimados por uma metodologia de realizam mínima, naturalmente decorrente do ERA. No estudo de caso 01, o único autovalor expressa estabilidade tanto para o submodelo inverso local  $i = 1$  quanto para o submodelo inverso local  $i = 2$  durante toda a etapa recursiva, conforme observado na Figura 15. Apesar de um aumento limitado dos valores, eles entraram em regime permanente a ponto de não saírem do círculo unitário, não instabilizando os submodelos locais inversos. Nos estudos de casos 02 e 03, os autovalores  $|\lambda_1^{(i)}(kT_s)|$  e  $|\lambda_2^{(i)}(kT_s)|$  expressam instabilidade, tanto para o submodelo inverso local 1, quanto para o submodelo inverso local 2, conforme observado nas Figuras 27a, 27b e 39b. Isso se deve porque o CSTR provavelmente é um sistema de fase não mínima, além do HMBM e do H2DOF provavelmente serem de fase mínima. Consequentemente as identificações inversa locais (ou seja, em cada ponto

de operação  $i$ ) do HMBM e do H2DOF resultam em submodelos locais inversos instáveis.

- e) **A não linearidade estática inversa foi adequadamente mapeada pelo modelo nebuloso TS inverso de regime estático, resultante da metodologia proposta nessa dissertação, conforme os estudos de casos 01 e 02.** A partir dos dados de regime permanente, juntamente com os parâmetros dos submodelos inversos locais estimados em batelada, estimaram-se os parâmetros dos submodelos inversos locais de regime permanente, conforme as Eqs. (4.13) a (4.15) para o estudo de caso 01, e as Eqs. (4.33) a (4.35) para o estudo de caso 02. Como resultado, a superfície de mapeamento estático não linear inversos do sistema foi praticamente coberta pela superfície de mapeamento do modelo nebuloso TS inverso estático resultante, com nível de erro pequeno, conforme observado nas Figuras 17a e 17b para estudo de caso 01, e nas Figuras 28a e 28d para o estudo de caso 02.
- f) **De acordo com o número de agrupamentos, o modelo nebuloso TS inverso proposto consegue estimar adequadamente a dinâmica inversa do sistema.** No estudo de caso 01, verifica-se que os estados, estimados pelo modelo nebuloso TS inverso resultante, apresentaram muita oscilação no intervalo entre 200 a 800 durante as estimações inicial e recursiva, no que diz respeito ao estudo de caso 01, conforme apresentado na Figura 18. Já no estudo de caso 02, os estados, estimados pelo modelo nebuloso TS inverso resultante, apresentaram um comportamento aleatório com oscilações lentas entre 0 e 4, conforme apresentado na Figuras 29a e 29b. Pelo que se observa, o modelo nebuloso TS inverso resultante internamente se adapta à natureza dos conjunto de dados de entrada e saída do sistema em cada ponto de operação, e externaliza com as saídas dos modelos, conforme ilustrado na Figura 19 para o estudo de caso 01, e nas Figuras 30a e 30b para o estudo de caso 02. Nos estudos de casos 02 e 03, destaca-se o fato do observador Kalman estabilizar o modelo nebuloso TS inverso proposto, uma vez que este apresenta polos instáveis nos submodelos inversos locais.
- g) **As métricas de qualidade de estimação também confirmam os resultado do comportamento temporal, referente à comparação amostral entre as entradas do sistema e as saídas do modelo nebuloso TS inverso resultante.** A Tabela 9 resume os requisitos para obter comportamento ótimo das métricas de qualidade de estimação para os resultados apresentados. Portanto, para o estudo de caso 01, verifica-se que a dinâmica das métricas MSE, NMSE,  $R^2$ , VAF apresentam crescimento em direção à tendência ótima durante a etapa recursiva, conforme observado na Figura 20. Já para os estudos de casos 02 e 03, verifica-se que a dinâmica dessas métricas apresentam crescimento em direção à tendência não ótima, durante a estimação recursiva, conforme observado nas Figuras 31 e 42. Porém,

nesses casos, essa etapa finaliza com um desempenho próximo da tendência ótima daquelas métricas, comprovando assim a adequada exatidão e precisão dos modelos nebulosos TS inversos estimados.

## 5.2 Considerações finais

Como previamente mencionado, a formulação apresentada estruturou uma metodologia de identificação nebulosa TS inversa adaptativa com abordagem direta, no contexto do espaço de estados com observador de Kalman, proposta por essa dissertação. Apresentou-se também as formulações para as seguintes contribuições:

- a) uma metodologia de estimação da matriz de partição otimizada  $\mathfrak{M}$  com custo computacional limitado, para implementação da metodologia de agrupamento GK em etapa de estimação paramétrica recursiva (adaptativa).
- b) uma metodologia de estimação de submodelo local inverso com abordagem direta, no contexto do espaço de estados com observador de Kalman, a partir da metodologia OKID, com teorema que determina uma condição suficiente para a estimação dos parâmetros de Markov via mínimos quadrados ponderados para a etapa de estimação em batelada. Também foi apresentada a extensão da estimação do parâmetros de Markov no contexto dos mínimos quadros ponderados para a etapa de estimação recursiva (adaptativa).
- c) uma metodologia de implantação de filtro de compensação paramétrica de melhoria da estimação dos parâmetros de Markov, tanto para a etapa de treinamento quanto para a etapa recursiva.
- d) uma metodologia de estimação de modelo nebuloso TS inverso com abordagem direta de regime estático, no contexto do espaço de estados com observador de Kalman.

Um algoritmo com o procedimento de implementação de metodologia de identificação inversa também foi proposto nessa dissertação, juntamente com as contribuições daí decorrentes. Três estudos de casos foram realizados com seus respectivos experimentos para demonstrar a aplicabilidade desse algoritmo. Cada experimento de cada estudo de caso foi qualificado por métricas de qualidade de estimação e de computação. A formulação referente às métricas de qualidade de estimação foi apresentada, enfatizando o significado qualitativo de cada uma, assim como as tendências que expressam seus respectivos valores ótimos. Os resultados gráficos dos estudos de caso foram apresentados para experimento com o número de agrupamentos ótimo para a etapa recursiva, cuja análise conclui que:

- a) o conjunto de dados foi adequado para a identificação dos sistemas;

- b) combinado com o janelamento temporal da matriz de dados em batelada, o algoritmo GK constituiu uma boa estratégia de estimação otimizada da matriz de partição a cada instante de tempo da etapa de estimação;
- c) o modelo nebuloso TS inverso de abordagem direta, definido no contexto do espaço de estado com observador de Kalman, obtido com  $c = 2$  agrupamentos para os casos 01 e 02, e com  $c = 3$  agrupamentos, para o caso 03, apresentaram desempenhos adequados em qualidade de estimação e custo computacional adequado ao final da etapa recursiva, comparando com os outros experimentos realizados, apontando uma tendência de otimalidade para um número reduzido de regras/agrupamentos durante a etapa recursiva;
- d) a comparação entre as saídas do modelo nebuloso TS inverso resultante com as entradas dos sistemas, bem como o desempenho em qualidade de estimação e computação, foram considerados adequados para representar as entradas dos sistemas dos estudos de casos avaliados.

Portanto, nesse mesmo contexto de identificação inversa nebulosa de sistemas não lineares, temáticas como abordagens de inteligência computacional, aplicadas aos sistemas nebulosos evolutivos, ou aplicadas aos sistemas nebulosos de tipo 2, são particularmente interessantes para propostas de futuras pesquisas.



## REFERÊNCIAS

AGUIRRE, Luis Antonio. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Minas Gerais: UFMG, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 40, 59 e 75.

\_\_\_\_\_. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 4. ed. Minas Gerais: UFMG, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 19, 32, 41, 42, 56 e 60.

AHN, Kyoung Kwan; ANH, Ho Pham Huy. Inverse double narx fuzzy modeling for system identification. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 15, n. 1, p. 136–148, February 2010. Citado na página 32.

ALEKSOVSKI, Darko; KOCIJAN, Juš; DŽEROSKI, Sašo. Ensembles of fuzzy linear model trees for the identification of multioutput systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 24, n. 4, p. 916–929, August 2016. Citado na página 125.

ANGELOV, Plamen; FILEV, Dimitar P.; KASABOV, Nikola. *Evolving Intelligent Systems: Methodology and applications*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010. Citado na página 188.

BABUŠKA, Robert. *Fuzzy Modeling for Control*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. v. 27. Citado 15 vezes nas páginas 30, 32, 34, 39, 40, 64, 65, 70, 72, 73, 74, 75, 79, 86 e 88.

BABUŠKA, R.; VEEN, P. J. van der; KAYMAK, U. Improved covariance estimation for Gustafson-Kessel clustering. In: *Fuzzy Systems, 2002. FUZZ-IEEE'02. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 2, p. 1081–1085. Citado 4 vezes nas páginas 71, 74, 75 e 78.

BABUŠKA, R.; VERBRUGGEN, H. B. An overview of fuzzy modeling for control. *Control Engineering Practice*, v. 4, n. 11, p. 1593–1606, nov. 1996. Citado na página 28.

\_\_\_\_\_. Recent advances in fuzzy modeling and control. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 29, n. 7, p. 43–54, 1996. Citado na página 30.

BATES, Jason H. T. *Lung Mechanics: An Inverse Modeling Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. Citado na página 27.

BATUR, Celal; SRINIVASAN, Arvind; CHAN, Chein-Chung. Inverse fuzzy model controllers. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Francisco, USA: IEEE, 1993. (1993), p. 772–776. Citado na página 30.

BEZDEK, J. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function*. New York: Plenum Press, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 73.

BEZDEK, J.; DUNN, J. Optimal fuzzy partition: a heuristic for estimating the parameters in a mixture of normal distributions. *IEEE Transactions Computers C-24*, p. 835 – 838, 1975. Citado na página 73.

- BLANKEN, Lennart; MEIJDENBERG, Ids van den; OOMEN, Tom. Inverse system estimation for feedforwards: A kernel-based approach for non-causal system. *IFAC PapersOnLine*, v. 51, n. 15, p. 1050–1055, 2018. Citado na página 32.
- BOUKEZZOULA, Reda; GALICHET, Sylvie; FOULLOY, Laurent. Nonlinear internal model control: Application of inverse model based fuzzy control. *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS*, v. 11, n. 6, p. 814–829, December 2003. Citado na página 30.
- BOULLART, L.; KRIJGSMAN, A.; VINGERHOEDS, R. A. *Applications of Artificial Intelligence in Process Control*. Oxford: Pergamon Press, 1992. Citado na página 30.
- BRAAE, M.; RUTHERFORD, D. A. Theoretical and linguistic aspects of the fuzzy logic controller. *Automatica*, v. 15, n. 5, p. 553–577, set. 1979. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(79\)90005-0](https://doi.org/10.1016/0005-1098(79)90005-0)>. Citado na página 29.
- BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. *The International System of Units*. 9. ed. Sèvres Cedex, 2019. Disponível em: <<https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9.pdf>>. Citado na página 21.
- CHATTERJEE, Shre Kumar et al. Forward and inverse modelling approaches for prediction of light stimulus from electrophysiological response in plants. *Measurement*, v. 53, p. 101–116, July 2014. Citado na página 27.
- CHEN, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. 3rd.. ed. New York: Oxford University Press, 1999. Citado 9 vezes nas páginas 32, 40, 42, 43, 44, 46, 49, 97 e 104.
- CHENG, Sonsong et al. Identification for hammerstein nonlinear armax system based on multi-innovation fractional order stochastic gradient. *Signal Processing*, v. 142, p. 1–10, January 2018. Citado na página 41.
- CHONG, Edwin K. P.; ŽAK, Stanislaw H. *AN INTRODUCTION TO OPTIMIZATION*. 4th.. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Citado na página 54.
- DAI, X. et al. Ann generalised inversion for the linearization and decoupling control of nonlinear systems. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, v. 150, n. 3, p. 267–277, maio 2003. Citado na página 30.
- DAI, Yajie et al. Modelling and inverse investigation of the fracture process for a magnesia spinel refractory using a heterogeneous continuum model. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 187, p. 438–448, September 2017. Citado na página 27.
- DRAPER, Norman R.; SMITH, Harry. *Applied Regression Analysis*. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. Citado na página 188.
- DU, Haiping; ZHANG, Nong. Application of evolving takagi-sugeno fuzzy model to nonlinear system identification. *Applied Soft Computing*, v. 8, n. 1, p. 676–686, January 2008. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 80.
- DUNN, J. A fuzzy relative of the isodata process and its use in detecting compact well-separated clusters. *J. Cybern*, v. 3, n. 3, p. 32 – 37, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 73.

ECONOMOU, Constantin G.; MORARI, Manfred; PALSSON, Bernhard O. Internal model control: extension to nonlinear system. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, v. 25, p. 403–411, 1986. Citado 5 vezes nas páginas 19, 29, 81, 83 e 84.

FILHO, Orlando Donato Rocha; SERRA, Ginalber Luiz de Oliveira. Adaptive neuro fuzzy black box modeling based on instrumental variable evolving algorithm. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 28, n. 1, p. 50–67, February 2017. Citado na página 155.

\_\_\_\_\_. Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment. *Fuzzy sets and Systems*, v. 338, p. 50–89, May 2018. Citado na página 155.

FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. *Feedback control of dynamic systems*. 6. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 40.

GARCIA, Carlos. E.; MORARI, Manfred. Internal model control. a unifying review and some new results. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, v. 21, p. 308–323, 1982. Citado na página 29.

GATH, I.; GEVA, A. Unsupervised optimal fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, n. 7, p. 773–781, 1989. Citado na página 73.

GRAHAM, Bruce P.; NEWELL, Robert B. Fuzzy identification and control of a liquid level rig. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 26, n. 3, p. 255–273, jun. 1988. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(88\)90122-4](https://doi.org/10.1016/0165-0114(88)90122-4)>. Citado na página 29.

GUSTAFSON, Donald E.; KESSEL, William C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In: *Proceedings of the 1978 IEEE Conference on Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes*. San Diego: IEEE, 1979. p. 761–766. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 73.

HUNT, K. J. et al. Neural networks for control systems – a survey. *Automatica*, v. 28, n. 2, p. 1083–1112, 1992. Citado na página 30.

JORDAN, Michael I.; RUMELHART, David E. Forward models. *Cognitive Science*, v. 16, n. 3, p. 307–354, 1992. Citado na página 83.

JUANG, Jer-Nan. *Applied System Identification*. 4. th. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1994. Citado 10 vezes nas páginas 19, 34, 43, 49, 84, 97, 98, 102, 104 e 107.

JUANG, Jer-Nan; PAPPA, Richard S. AN EIGENSYSTEM REALIZATION ALGORITHM FOR MODAL PARAMETER IDENTIFICATION AND MODEL REDUCTION. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985. Citado na página 46.

JUANG, Jer-Nan et al. IDENTIFICATION OF OBSERVER/KALMAN FILTER MARKOV PARAMETERS: THEORY AND EXPERIMENTS. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 16, n. 2, p. 320–329, 1993. Citado na página 34.

JUANG, Jer-Nan; PHAN, Mihn Q. *IDENTIFICATION AND CONTROL OF MECHANICAL SYSTEMS*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 34, 49 e 84.

JUNG, Ylva; ENQVIST, Martin. Estimating models of inverse systems. In: *52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. Florence: IEEE, 2013. (52), p. 7143–7148. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 80.

KOVALETS, Ivan V. et al. Inverse identification of unknown finite-duration air pollutant release from a point source in urban environment. *Atmospheric Environment*, v. 181, p. 82–96, May 2018. Citado na página 27.

LAI, Guanyu et al. Fuzzy adaptive inverse compensation method to tracking control of uncertain nonlinear systems with generalized actuator dead zone. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 25, n. 1, p. 191–204, February 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 63.

LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 40.

LEE, Ming-Hui; LIU, Ying-Wei. Input load identification of nonlinear tower structural system using intelligent inverse estimation algorithm. *Procedia Engineering*, v. 79, p. 540–549, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 63.

LI, Jing et al. Parallel distributed compensation for takagi-sugeno fuzzy models: multiobjective controller design. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego: IEEE, 1999. p. 1832–1836. Citado na página 32.

LIGHTBODY, G.; IRWIN, G. W. Nonlinear control structures based on embedded neural system models. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 4, n. 3, p. 553–567, May 1997. Citado 2 vezes nas páginas 125 e 126.

LUENBERGER, David G. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, models, and applications*. New York: John Wiley & Sons, 1979. Citado na página 40.

LUGHOFER, Edwin. *Evolving Fuzzy Systems: Methodologies, advanced concepts and applications*. Verlag: Springer, 2011. v. 27. Citado 5 vezes nas páginas 41, 71, 72, 187 e 188.

MACQUEEN, J. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In: *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Statistics*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1967. p. 281–297. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/euclid.bsm/1200512992>>. Citado na página 72.

MAGALHÃES, Adriano Mendes; SERRA, Ginalber Luiz de Oliveira. Identificação inversa recursiva multivariável baseada em modelo nebuloso de realização mínima no espaço de estados com observador de Kalman. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente 2019*. [S.l.: s.n.]. Citado na página 36.

\_\_\_\_\_. Proposta de identificação de sistemas dinâmicos não lineares baseada em modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso: Uma abordagem direta no contexto do espaço de estados. In: *Conference Proceedings of XXII Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa: [s.n.], 2018. ISSN 2525-8311. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.20906/CPS/CBA2018-1064>>. Citado na página 36.

\_\_\_\_\_. Proposta de modelagem inversa nebulosa recursiva baseada em dados experimentais de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis: uma abordagem no contexto do espaço de estados (resumo). In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. São Carlos: SBMAC, 2019. Citado na página 36.

MELDAU, Eva-Lisa. *Deep Neural Networks for Inverse De-Identification of Medical Case Narratives in Reports of Suspected Adverse Drug Reactions*. Dissertação (Master thesis in Computer Science) — KTH ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTER SCIENCE, Stockholm, February 2018. Citado na página 27.

MOOR, Bart De. *DaISy (Database for the Identification of Systems)*. Leuven: STADIUS, Department of Electrical Engineering (ESAT), Faculty of Engineering, KU Leuven, 2010. Disponível em: <<http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/>>. Citado na página 125.

MORARI, Manfred. Internal model control – theory and applications. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 16, n. 21, p. 1–18, 1983. Citado na página 29.

MORNINGRED, J. Duane et al. An adaptive nonlinear predictive controller. *Chemical Engineering Science*, v. 47, n. 4, p. 755–762, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 125 e 126.

NELLES, Oliver. *Nonlinear System Identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Verlag: Springer, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 32, 41, 64, 71, 72 e 73.

OGATA, Katsuhiko. *Modern Control Engineering*. 15. ed. Boston: Prentice Hall, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 29, 32, 42 e 43.

PEDRYCZ, Witold. *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1993. Citado na página 29.

PHAN, Mihn; JUANG, Jer-Nan; LONGMAN, Richard W. ON MARKOV PARAMETERS IN SYSTEM IDENTIFICATION. *NASA Technical Memorandum*, n. 104156, October 1991. Citado 5 vezes nas páginas 44, 45, 46, 98 e 103.

PIRES, Danúbia; SERRA, Ginalber. An approach for fuzzy Kalman filter modeling based on evolving clustering of experimental data. v. 35, n. 2, p. 1819–1834, August 2018. Citado na página 155.

PORTER, Norman Wayne. The value of system dynamics modeling in policy analytics and planning. In: *Policy Analytics, Modelling, and Informatics: Innovative Tools for Solving Complex Social Problems*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 123–150. Citado na página 41.

PSALTIS, Demetri; SIDERIS, Athanasios; YAMAMURA, Alan A. A multilayered neural network controller. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 8, n. 2, p. 17–21, abr. 1988. Citado na página 30.

QIN, Yanding; JIA, Rurui. Adaptive hysteresis compensation of piezoelectric actuator using direct inverse modelling approach. *IET Micro & Nano Letters*, v. 13, n. 2, p. 180–183, February 2018. Citado na página 27.

- QUANSER. *Quanser 2 DOF Helicopter User and Control Manual: Methodology and applications*. Ontario: Quanser Consulting Inc, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 155 e 156.
- RAHBARI, Omid et al. A novel state of charge and capacity estimation technique for electric vehicles connected to a smart grid based on inverse theory and a metaheuristic algorithm. *Energy*, v. 155, p. 1047–1058, July 2018. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 63.
- SANTOS, Jéssica A.; SERRA, Ginalber L. O. Recursive identification approach of multivariable nonlinear dynamic systems based on evolving fuzzy hammerstein models. In: *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 32–39. Citado na página 139.
- SCHLINK, Uwe; HERTEL, Daniel. Inverse modelling of snow depths. *Environmental Modelling & Software*, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2018.01.010>>. Citado na página 27.
- SERRA, Ginalber Luiz de Oliveira; FERREIRA, Carlos Cesar Teixeira. Parallel distributed compensation based robust fuzzy control. In: *2009 IEEE Symposium on Industrial Electronics & Applications*. Kuala Lumpur: IEEE, 2009. p. 795–800. Citado na página 32.
- SERRA, Ginalber L. O.; FERREIRA, Carlos Cesar T.; SILVA, Joabe A. Development method for a robust pid fuzzy controller of lpv systems. In: *2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. San Diego: IEEE, 2009. p. 826–830. Citado na página 34.
- SHAFIQUE, Ashfaque; SAYEED, Mohamed; TSAKALIS, Konstantinos. Nonlinear dynamical systems with chaos and big data: A case study of epileptic seizure prediction and control. In: *Guide to Big Data Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2018. cap. 13, p. 329–369. Citado na página 41.
- SOUSA, João M. C.; KAYMAK, Uzay. *Fuzzy Decision Making in Modeling and Control*. New Jersey: World Scientific, 2002. v. 27. World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems. Citado 9 vezes nas páginas 29, 75, 79, 80, 81, 83, 84, 95 e 114.
- SUGENO, M; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 28, n. 1, p. 15–33, out. 1988. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0165-0114\(88\)90113-3](https://doi.org/10.1016/0165-0114(88)90113-3)>. Citado na página 29.
- SUN, ChangYin; MU, ChaoXu; LI, XunMing. A weighted LS-SVM approach for the identification of a class of nonlinear inverse system. *Science in China Series F: Information Sciences*, v. 52, n. 5, p. 770–779, May 2009. Citado na página 30.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, Jan 1985. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- TORRES, Luís Miguel Magalhães. *Metodologia Nebulosa para Identificação Recursiva no Espaço de Estados Baseado em Agrupamento Evolutivo de Dados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, mar. 2018. Citado na página 107.
- TSIANTIS, Nikolaos; BALSACANTO, Eva; BANGA, Julio R. Optimality and identification of dynamic models in systems biology: an inverse optimal control framework. *Bioinformatics*, p. 1–8, 2018. Citado na página 27.

- WANG, Jing; CISSE, Bouna Mohamed. A generalized voltage control algorithm for smooth transition operation of microgrids. In: CAO, Wen-Ping; YANG, Jin (Ed.). *Development and Integration of Microgrids*. Rijeka: InTech, 2017. cap. 4. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.69402>>. Citado na página 27.
- WANG, Li-Xi. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Upper Saddle River: Prentice-Hall International, 1997. Citado 12 vezes nas páginas 28, 39, 40, 64, 65, 66, 69, 70, 71, 75, 79 e 89.
- WONG, Kwan Y.; POLAK, Elijah. Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 12, p. 707–718, 1967. Citado na página 185.
- WU, C. Y. et al. A novel on-line observer kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic system. *Journal of the Franklin Institute*, v. 352, p. 1119–1151, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 34, 44, 84, 97, 102, 103, 104 e 107.
- YOUNG, Peter C. *Recursive Estimation and Time Series Analysis: An introduction with 54 figures*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. Communication and Control Engineering Series. Citado 3 vezes nas páginas 40, 185 e 186.
- YUAN, Xiaming; ZHU, Jihong. Inverse dynamic modeling and analysis of a coaxial helicopter's swashplate mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, v. 113, p. 208–230, July 2017. Citado na página 27.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, jun. 1965. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)>. Citado na página 28.
- ZADEH, Lofti A.; DESOER, Charles A. *Linear System Theory*. New York: McGraw-Hill, 1963. Citado na página 32.



## Apêndices



## APÊNDICE A – FILTRO DE COMPENSAÇÃO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS DE MARKOV

Na Seção 3.3.4, foi apresentado um procedimento que extrai a ordem de realização mínima reduzida do  $i$ -ésimo submodelo local  $n_{min}^{(i)}$ , partir de  $(\Sigma_{yu}^i)|_1^{n^{(i)}}$  e padroniza para todos os submodelos locais, para que tenham a mesma ordem  $n_{min}$ .  $n_{min}^{(i)}$  é exatamente a ordem da  $i$ -ésima matriz de valores singulares significativos  $(\Sigma_{yu}^i)|_1^{n_{min}^{(i)}}$ , a qual guarda valores singulares que não sofrem influência de ruído decorrente dos dados, resultando em parâmetros que descrevam melhor uma dinâmica mais próxima do que seria a dinâmica “pura” (sem interferência de ruídos) do sistema. Porém, no contexto nebuloso, a cada instante de amostragem  $k$ ,  $\hat{\mathbf{u}}^i(k)$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k+1)$  podem apresentar dinâmicas não modeladas por mudanças paramétricas bruscas, decorrentes de deslocamentos bruscos dos pontos de operação (centros dos agrupamentos), dentro do espaço de dados  $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ , inserindo interferências ruidosas na combinação nebulosa que resulta em  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(k)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}_{yu} = \tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k)$ . Por isso nesse apêndice propõe-se implementar um filtro de compensação paramétrica no contexto nebuloso, a fim de atenuar esses efeitos negativos desse problema.

O filtro de compensação paramétrica implementado nessa dissertação foi inicialmente proposto em (WONG; POLAK, 1967; YOUNG, 1984), e tinha como finalidade realizar a compensação paramétrica descorrelacionada de ruído, decorrente de identificação de sistemas via variável instrumental. Os detalhes conceituais do filtro de compensação paramétrica podem ser encontrados na seção de identificação por variável instrumental em (YOUNG, 1984). Nessa dissertação, o mesmo filtro de compensação paramétrica será utilizado para refinamento dos parâmetros estimados de Markov no contexto nebuloso, conforme descrito nas Seções 3.3.1 e 3.3.2, a partir das páginas 94 e 99.

A priori, a implementação do filtro em todo o processo de identificação inversa acontece em duas etapas: a) a etapa de treinamento, onde serão obtidas as matrizes dos parâmetros de Markov compensados  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\kappa)$ , dentro do espaço de dados em batelada  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ ; e b) a etapa recursiva, onde os as matrizes de parâmetros do espaço de Markov compensados  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$  são obtidos de forma recursiva, a cada amostra de dados que chega para processamento.

### A.1 Filtro de Compensação dos Parâmetros de Markov para a Etapa de Estimação Inicial

Nessa etapa as matrizes dos parâmetros compensados de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi)$  de cada regra  $i$  são obtidas em cada amostra de dados  $\xi$ , dentro do espaço de dados em batelada  $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ , através seguinte filtro (YOUNG, 1984):

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi) = \left[1 - \frac{1}{T_f}\right] \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi - 1) + \frac{1}{T_f} \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi - \tau) \quad (\text{A.1})$$

quando  $\xi > \tau$ .  $T_f \in \mathbb{Z}_+^*$  é a *constante de suavização exponencial*, estabelecida em número de amostras pelo projetista, e  $\tau \in \mathbb{Z}_+^*$  é a *constante de atualização paramétrica descorrelacionada* definida nessa dissertação como:

$$\tau \triangleq n_{min} \quad (\text{A.2})$$

Enquanto  $\xi \leq \tau$ , a matriz  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(\xi)$  recebe a matriz dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(l)$ , anteriormente estimados em batelada.

## A.2 Filtro de Compensação dos Parâmetros de Markov para a Etapa de Estimação Recursiva

Nessa etapa a compensação paramétrica das matrizes dos parâmetros de Markov cada regra  $i$  é realizada a cada intervalo de amostragem  $k$ . Uma vez que as matrizes dos parâmetros de Markov  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$  foram estimados recursivamente, a versão compensada dessas matrizes é estimada pelo seguinte filtro (YOUNG, 1984):

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k) = \left[1 - \frac{1}{T_f}\right] \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - 1) + \frac{1}{T_f} \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - \tau) \quad (\text{A.3})$$

onde  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - \tau)$  é a  $i$ -ésima matriz de parâmetros normais (não compensados) de Markov, estimada diretamente das Eqs. (3.42) a (3.46) ao substituir  $k$  por  $k - \tau$  (YOUNG, 1984). Por isso que, para efeitos de estimação recursiva compensada de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$ , a obtenção da matriz  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - \tau)$  deve ser feita considerando a versão compensada de  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - 1)$  ao substituir  $k$  por  $k - \tau$ , isto é,  $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[(k - \tau) - 1] \triangleq \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[(k - \tau) - 1]$ .

## APÊNDICE B – MÉTRICAS DE QUALIDADE DE ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA

As métricas de qualidade de estimação adotadas para avaliar a qualidade dos modelos resultantes são obtidas pela comparação entre as entradas do sistema  $\mathbf{u}(k)$  e as saídas do modelo inverso nebuloso proposto  $\tilde{\mathbf{u}}(k)$ . Para o registro das métricas, considera-se  $\mathbf{u}(k) \triangleq [u_a(k)]_{r \times 1}$  e  $\tilde{\mathbf{u}}(k) \triangleq [\tilde{u}_a(k)]_{r \times 1}$ , tal que  $u_a(k), \tilde{u}_a(k) \in \mathbb{R}$ .

O erro quadrático médio (do inglês *Mean Square Error* – MSE) é uma métrica diretamente associada com a estimação de modelo obtido via técnica de otimização convexa de mínimos quadrados (e suas variantes). Essa métrica fornece uma informação de exatidão da estimação, ou seja, o quanto o erro quadrático entre a resposta desejada do sistema e a resposta do modelo foi minimizado. Por isso quanto menor o valor do MSE, melhor (mais exata) é a estimativa do modelo obtido. A expressão do MSE para cada variável de saída do modelo é definida como (LUGHOFER, 2011):

$$\text{MSE}_{\tilde{u}_a}(k) = \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k [\tilde{u}_a(\xi) - u_a(\xi)]^2 \quad (\text{B.1})$$

O erro quadrático médio normalizado (do inglês *Normalized Mean Square Error* – NMSE), é a versão do MSE normalizada entre 0 e 1. Tem como finalidade dar uma informação mais genérica de exatidão das estimativas quanto a minimização quadrática do erro entre as saídas do modelo e a resposta desejada do sistema. Isso permite analisar a qualidade de metodologias de identificação de sistemas, mesmo que as unidades das variáveis estimadas entre as metodologias não sejam as mesmas. A expressão do NMSE para cada variável de saída do modelo é definida como (LUGHOFER, 2011):

$$\text{NMSE}_{\tilde{u}_a}(k) = \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k \left[ \frac{\tilde{u}_a(\xi) - u_a(\xi)}{\max(u_a) - \min(u_a)} \right]^2 \quad (\text{B.2})$$

onde os termos  $\max(u_a)$  e  $\min(u_a)$  designam os valores máximo e mínimo obtidos entre as amostras computadas de  $\xi = 1$  a  $\xi = k$ .

O índice quadrático de confiabilidade (do inglês *Reliability Squared Index* –  $R^2$ ) é um métrica quadrática normalizada entre 0 e 1, a qual informa o grau de confiabilidade em precisão entre as estimativas geradas pelo modelo e a média das amostras da variável de interesse do sistema. Em termos amostrais, seja a média aritmética do vetor de respostas das variáveis desejadas do sistema  $\bar{\mathbf{u}}(k) \triangleq [\bar{u}_a(k)]_{r \times 1}$ , com  $\bar{u}_a \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\bar{u}_a(k) = \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k u_a(\xi) \quad (\text{B.3})$$

Então a métrica  $R_{\tilde{u}_a}^2(k)$  pode ser computada como (LUGHOFER, 2011; DRAPER; SMITH, 1998):

$$R_{\tilde{u}_a}^2(k) = \frac{\sum_{\xi=1}^k [\tilde{u}_a(\xi) - \bar{u}_a(\xi)]^2}{\sum_{\xi=1}^k [\tilde{u}_a(\xi) - \bar{u}_a(\xi)]^2 + \sum_{\xi=1}^k [u_a(\xi) - \tilde{u}_a(\xi)]^2} \quad (\text{B.4})$$

Observa-se que  $\tilde{u}_a \rightarrow u_a$  se, e somente se  $R_{\tilde{u}_a}^2 \rightarrow 1$ , ou seja, a estimativa gerada pelo modelo está variando em torno de um valor médio coincidente com o valor real da variável de interesse do sistema, e portanto o modelo é confiável para explicá-la de forma precisa. Senão  $\tilde{u}_a \rightarrow \bar{u}_a$  se, e somente se  $R_{\tilde{u}_a}^2 \rightarrow 0,5$ , ou seja, a estimativa gerada pelo modelo está variando em torno de um valor médio coincidente com o valor médio da variável de interesse sistema (e não com o valor real), e no máximo a estimativa do modelo consegue explicar o comportamento médio da variável de interesse do sistema. Senão  $\tilde{u}_a \gg \bar{u}_a$  ou  $\tilde{u}_a \ll \bar{u}_a$  se, e somente se  $R_{\tilde{u}_a}^2 < 0,5$ , ou seja, a estimativa gerada pelo modelo está variando em torno de um valor médio muito distante do valor médio da variável de interesse do sistema (e conseqüentemente do respectivo valor real), sendo o modelo totalmente não confiável para explicar a variável de interesse do sistema de forma precisa. Portanto são considerados modelos totalmente descartáveis aqueles que obtém  $R_{\tilde{u}_a}^2 \leq 0,5$  (LUGHOFER, 2011).

Uma outra métrica de precisão decorrente de análise de variância que é usada para mensurar a qualidade das estimativa do modelo é a variância representativa (do inglês *Variance Accounted For* – VAF). O VAF é uma métrica que computa o percentual de variância representativa entre as estimativas do modelo e os valores reais da variável de interesse do sistema. Para  $\mathbf{u}(k) \triangleq [u_a(k)]_{r \times 1}$  e  $\tilde{\mathbf{u}}(k) \triangleq [\tilde{u}_a(k)]_{r \times 1}$ , tal que  $u_a(k), \tilde{u}_a(k) \in \mathbb{R}$ , tem-se (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010):

$$\text{VAF}_{\tilde{u}_a}(k) = \left[ 1 - \frac{\text{var} [\tilde{u}_a(k) - u_a(k)]}{\text{var} [u_a(k)]} \right] \cdot 100\% \quad (\text{B.5})$$

onde  $\bar{u}_a(k)$  é dado pela Eq. (B.3) e:

$$\overline{\tilde{u}_a - u_a}(k) = \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k [\tilde{u}_a(\xi) - u_a(\xi)] \quad (\text{B.6})$$

$$\text{var}[u_a(k)] = \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k [u_a(\xi) - \bar{u}_a(k)]^2 \quad (\text{B.7})$$

$$\text{var}[\tilde{u}_a(k) - u_a(k)] = \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k \left\{ [\tilde{u}_a(\xi) - u_a(\xi)] - \overline{\tilde{u}_a - u_a(k)} \right\}^2 \quad (\text{B.8})$$

onde  $\text{var}[\bullet]$  significa a variância de  $\bullet$ . Observa-se que  $\tilde{u}_a \rightarrow u_a$  se, e somente se  $\text{VAF}_{\tilde{u}_a} \rightarrow 100\%$ , ou seja, não existe diferença entre  $\tilde{u}_a$  e  $u_a$ , e o modelo explica (representa) com precisão a variável de interesse do sistema. Do contrário  $\tilde{u}_a \gg u_a$  ou  $\tilde{u}_a \ll u_a$  se, e somente se,  $\text{VAF}_{\tilde{u}_a} \rightarrow -\infty\%$ , e o modelo não explica com precisão a variável de interesse do sistema.

A Tabela 9 resume os requisitos para obter comportamento ótimo das métricas de qualidade de estimação acima apresentadas.

Tabela 9 – Tendências das métricas de qualidade de estimação.

TENDÊNCIAS	MSE	NMSE	R <sup>2</sup>	VAF [%]
Ótima	MSE $\rightarrow 0$	NMSE $\rightarrow 0$	R <sup>2</sup> $\rightarrow 1$	VAF $\rightarrow 100$
Não ótima	MSE $\rightarrow \infty$	NMSE $\rightarrow \infty$	R <sup>2</sup> $\rightarrow 0$	VAF $\rightarrow -\infty$

Fonte: o autor dessa dissertação.



## APÊNDICE C – O MODELO NEBULOSO TS INVERSO COM ABORDAGEM DIRETA NO ESPAÇO DE ESTADOS COM OBSERVADOR DE KALMAN DE REGIME ESTÁTICO

Dependendo da natureza e da quantidade de dados do sistema, o *modelo nebuloso TS inverso com abordagem direta no espaço de estados com observador de Kalman*, estimado em batelada, pode representar adequadamente a dinâmica inversa do sistema. Logo, é possível extrair o comportamento não linear da dinâmica inversa do sistema, a partir de uma análise de regime permanente (estático) do modelo, estimado em batelada. Como resultado, obtém-se o *modelo nebuloso TS inverso com abordagem direta no espaço de estados com observador de Kalman de regime estático*.

A priori, partindo da proposição consequente da Eq. (3.90) tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) = \widehat{\mathbf{G}}^i(l)\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi - 1) + \widehat{\mathbf{H}}^i(l)\mathbf{y}(\xi - 1) - \widehat{\mathbf{O}}^i(l) [\mathbf{u}(\xi - 1) - \hat{\mathbf{u}}^i(\xi - 1)] \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i(l)\mathbf{y}(\xi) \quad (\text{C.2})$$

o que, em regime permanente, resulta em:

$$\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi) = \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(\xi - 1) = \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{yu}^i \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}(\xi - 1) = \underline{\mathbf{y}} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}(\xi - 1) = \underline{\mathbf{u}} \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{\mathbf{u}}^i(\xi) = \hat{\mathbf{u}}^i(\xi - 1) = \underline{\hat{\mathbf{u}}}^i \quad (\text{C.6})$$

Então a Eq. (C.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i &= \widehat{\mathbf{G}}^i(l)\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i + \widehat{\mathbf{H}}^i(l)\underline{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{O}}^i(l) [\underline{\mathbf{u}} - \underline{\hat{\mathbf{u}}}^i] \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\hat{\mathbf{x}}}_{yu}^i &= [\mathbf{I}_{n_{min}} - \widehat{\mathbf{G}}^i(l)]^{-1} \{ \widehat{\mathbf{H}}^i(l)\underline{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{O}}^i(l) [\underline{\mathbf{u}} - \underline{\hat{\mathbf{u}}}^i] \} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

e reescrevendo a Eq. (C.2) com as Eqs. (C.3) a (C.7) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{u}}^i &= \hat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i + \hat{\mathbf{\Delta}}^i(l) \mathbf{y} \\
 &= \hat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) \left( [\mathbf{I}_{n_{min}} - \hat{\mathbf{G}}^i(l)]^{-1} \{ \hat{\mathbf{H}}^i(l) \mathbf{y} \right. \\
 &\quad \left. - \hat{\mathbf{O}}^i(l) [\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^i] \} \right) + \hat{\mathbf{\Delta}}^i(l) \mathbf{y} \dots \\
 \therefore \hat{\mathbf{u}}^i &= \hat{\mathbf{A}}^i(l) [\hat{\mathbf{B}}^i(l) \mathbf{y} - \hat{\mathbf{C}}^i(l) \mathbf{u}] \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^i(l) [\hat{\mathbf{B}}^i(l), -\hat{\mathbf{C}}^i(l)] \mathbf{z}_{yu}
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

onde  $\mathbf{z}_{yu} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times 1}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  e  $\hat{\mathbf{C}}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  são definidos como:

$$\mathbf{z}_{yu} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

$$\hat{\mathbf{A}}^i(l) \triangleq \{ \mathbf{I}_r - \hat{\mathbf{C}}^i(l) \}^{-1} \tag{C.10}$$

$$\hat{\mathbf{B}}^i(l) \triangleq \hat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) [\mathbf{I}_{n_{min}} - \hat{\mathbf{G}}^i(l)]^{-1} \hat{\mathbf{H}}^i(l) + \hat{\mathbf{\Delta}}^i(l) \tag{C.11}$$

$$\hat{\mathbf{C}}^i(l) \triangleq \hat{\mathbf{\Gamma}}^i(l) [\mathbf{I}_{n_{min}} - \hat{\mathbf{G}}^i(l)]^{-1} \hat{\mathbf{O}}^i(l) \tag{C.12}$$

O vetor  $\mathbf{z}_{yu} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times 1}$  é denominado *vetor de dados do sistema em regime permanente*. Os parâmetros  $\hat{\mathbf{A}}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  e  $\hat{\mathbf{C}}^i(l) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  são parâmetros de regime permanente associados com os parâmetros do modelo local inverso com abordagem direta do observador de Kalman estimado em batelada  $\hat{\mathbf{G}}^i(l)$ ,  $\hat{\mathbf{H}}^i(l)$ ,  $\hat{\mathbf{O}}^i(l)$ ,  $\hat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)$  e  $\hat{\mathbf{\Delta}}^i(l)$ , referente ao conseqüente da Eq. (3.90).

Em seguida, quanto a proposição antecedente, observa-se que o conjunto de matrizes de covariância nebulosa  $\mathcal{F}(l) = \{\mathbf{F}^1(l), \dots, \mathbf{F}^i(l), \dots, \mathbf{F}^c(l)\}$  e os centros estimados  $\mathcal{C}(l) = [\mathbf{c}_1(l), \dots, \mathbf{c}_i(l), \dots, \mathbf{c}_c(l)]$ , decorrentes das Eqs. (2.95) e (2.96) em batelada, são as características que representam os conjuntos  $c$  nebulosos do sistema, dentro do conjunto dos  $l$  dados. Por isso, a partir de qualquer vetor  $\mathbf{z}_{yu}$  e mediante  $\mathcal{F}(l)$  e  $\mathcal{C}(l)$ , pode-se obter o vetor  $\boldsymbol{\gamma}_{yu}$  que represente a ponderação nebulosa com características de regime estático do sistema em batelada. Das Eqs. (2.107) e (2.108), define-se *matriz de norma induzida em batelada*  $\mathfrak{N}^i(l) \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$  e o *vetor de distância quadrática de Mahalanobis em batelada para regime permanente*  $\mathcal{D}_{\mathfrak{N}^i(l)}^2(\mathbf{z}_{yu}) = [\mathcal{D}_{\mathfrak{N}^i(l)}^2(\mathbf{z}_{yu})]_{c \times 1}$ , com  $\mathcal{D}_{\mathfrak{N}^i(l)}^2(\mathbf{z}_{yu}) \in \mathbb{R}_+$  como sendo:

$$\mathfrak{N}^i(l) \triangleq \{ \rho_i \det [\mathbf{F}^i(l)] \}^{1/n} [\mathbf{F}^i(l)]^{-1} \tag{C.13}$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{N}^i(l)}^2(\mathbf{z}_{yu}) \triangleq [\mathbf{z}_{yu} - \mathbf{c}_i(l)]^T \mathfrak{N}^i(l) [\mathbf{z}_{yu} - \mathbf{c}_i(l)] \tag{C.14}$$

$\forall i \in \{1, \dots, c\} \subset \mathbb{Z}_+^*$ .  $\rho_i$  é um parâmetro do procedimento GK definido conforme a Tabela 5. Dessa forma pode-se obter o vetor *grau de ativação*  $\underline{\beta}_{yu}(\mathbf{z}_{yu}) = [\beta_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu})]_{c \times 1}$ , com  $\beta_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu}) \in \{0, \dots, 1\} \subset \mathbb{R}$ , e o vetor *grau de ativação normalizado*  $\underline{\gamma}_{yu}(\mathbf{z}_{yu}) = [\gamma_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu})]_{c \times 1}$ , com  $\gamma_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu}) \in \{0, \dots, 1\} \subset \mathbb{R}$ , ambos para o regime permanente, como sendo:

$$\underline{\beta}_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left[ \frac{\mathcal{D}_{\mathfrak{R}^i(l)}(\mathbf{z}_{yu})}{\mathcal{D}_{\mathfrak{R}^j(l)}(\mathbf{z}_{yu})} \right]^{2/(\varrho-1)}} \quad (\text{C.15})$$

$$\underline{\gamma}_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu}) = \frac{\underline{\beta}_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu})}{\sum_{j=1}^c \underline{\beta}_{yu}^j(\mathbf{z}_{yu})} \quad (\text{C.16})$$

onde  $\varrho$  é um parâmetro do procedimento GK definido conforme a Tabela 5.

Assim a base de regras da Eq. (3.90) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} R^i: \text{ SE } \tilde{\mathbf{y}} \text{ é } \tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i \text{ E } \tilde{\mathbf{u}} \text{ é } \tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i \\ \text{ ENTÃO } \hat{\mathbf{u}}^i = \hat{\mathcal{A}}^i(l) \left[ \hat{\mathcal{B}}^i(l) \tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathcal{C}}^i(l) \tilde{\mathbf{u}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

onde  $\tilde{\mathcal{Y}}_{yu}^i$  e  $\tilde{\mathcal{U}}_{yu}^i$  são os  $i$  conjuntos nebulosos obtidos em regime permanente das variáveis nebulosas de regime estático das saídas  $\tilde{\mathbf{y}}$  e das entradas  $\tilde{\mathbf{u}}$  do sistema, cujos valores físicos são  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente. Finalmente a máquina de inferência pode ser definida como:

$$\tilde{\mathbf{u}} \triangleq \sum_{i=1}^c \underline{\gamma}_{yu}^i(\mathbf{z}_{yu}) \hat{\mathbf{u}}^i \quad (\text{C.18})$$

a qual implementará o *modelo nebuloso TS inverso com abordagem direta no espaço de estados com observador de Kalman de regime estático*.



## ÍNDICE

- A**  
 agrupamento nebuloso, 72  
 algoritmo  
   de agrupamento nebuloso  
   de Gustafson-Kessel, 74
- B**  
 base de regras, 28, 65
- C**  
 caixa  
   branca, 71  
   cinza, 72  
   preta, 72  
 conjunto nebuloso, 67
- D**  
 defuzzificador, 28
- E**  
 equação  
   de estados, 41  
   de saídas, 41  
 ERA, 46  
 erro  
   de estimação, 49  
 espaço  
   de estados, 42  
 espaço de estados, 41  
 estimador, 65
- F**  
 função de pertinência, 66  
 fuzzificador, 28
- G**  
 grau  
   de ativação  
     da regra, 67–70  
     normalizado da regra, 70  
   de pertinência, 66–69
- I**  
 identificação de sistemas, 41  
 índice  
   da amostra de dados de tempo  
     discreto, 67  
   da regra, 67  
   variável  
     linguística, 67  
   de *deadbeat*, 44, 49  
 inversão  
   indireta, 80  
   por aprendizado  
     direto, 81  
     especializado, 80
- L**  
 lógica nebulosa, 63
- M**  
 Mamdani, 64  
 mapeamento  
   nebuloso, 65  
 matriz  
   de controlabilidade  
     do modelo, 46  
   de entradas, 43  
   de estados, 43  
   de Hankel, 45  
   de observabilidade  
     do modelo, 46  
   de ponderação, 51  
   de regressores, 51  
   de saídas, 43

- de transferência, 41, 42
  - do modelo, 42, 43
- de valores singulares, 47
- de vetores
  - dos erros de estimação, 51
- dinâmica, 43
- dos parâmetros de Markov, 50
- dos termos de transição direta, 43
- MIMO, 41
- modelagem, 41
  - caixa branca, 41
  - caixa cinza, 41
  - caixa preta, 41
- modelo
  - ARX, 42
  - de realização mínima, 46
  - matemático, 41
  - nebuloso, 65
    - MIMO, 65
    - MISO, 65
  - observável e controlável, 46
- máquina de inferência, 28
- máquina de inferência nebulosa, 70
  - escalar MIMO, 70
  - escalar MISO, 70
  - vetorial MIMO, 71
- mínimos
  - quadrados
    - ponderados, 56
- Mínimos Quadrados
  - Ponderados, 53
- O
- OKID, 33, 84
- ordem
  - de realização mínima, 49
- P
- parâmetro
  - de Markov, 45
- ponto
  - candidato local a ótimo, 54
  - de inflexão
    - local, 54
- pontos de operação, 64, 71
- R
- realização
  - de sistemas, 42
  - de sistemas dinâmicos lineares, 43
- S
- SISO, 29
- sistema
  - MIMO
    - não linear, 65
  - nebuloso
    - linguístico, 28
- sistema nebuloso, 63
- sistemas
  - dinâmicos
    - lineares, 42
  - nebulosos
    - com fuzzyficador e defuzzificador, 28
    - linguísticos, 28
    - relacionais, 28
  - nebulosos de Takagi-Sugeno, 28
  - nebulosos, 28
  - puramente nebulosos, 28
- SVD, 46
- T
- Takagi-Sugeno, 64
- termo
  - linguístico, 28
- U
- universo de discurso, 67
- V
- valor

- linguístico, 28
- valor singular, 47
- variáveis nebulosas, 65
- variável nebulosa
  - vetorial, 66
- vetor
  - de estados, 41
  - de regressores, 50
  - do sistema, 50
- dos erros de estimação
  - da entrada do sistema, 80
  - da saída do sistema, 80
- ganho
  - da inovação, 60
- inovação, 59