

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

**FÍSICA DE MOMENTOS DE DIPOLO ELÉTRICO E MAGNÉTICO
LIMITANDO ACOPLAMENTOS NÃO MÍNIMOS
QUE VIOLAM A SIMETRIA DE LORENTZ**

JONAS BASTOS DE ARAÚJO

ORIENTADOR: DR. MANOEL MESSIAS FERREIRA JR

São Luís

2019

JONAS BASTOS DE ARAÚJO

**FÍSICA DE MOMENTOS DE DIPOLO ELÉTRICO E MAGNÉTICO
LIMITANDO ACOPLAMENTOS NÃO MÍNIMOS
QUE VIOLAM A SIMETRIA DE LORENTZ**

Material apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física
da Universidade Federal do Maranhão para defesa do doutorado.

Área de concentração: Física de partículas elementares e campos;

São Luís

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Bastos de Araújo, Jonas.

Física de momentos de dipolo elétrico e magnético
limitando acoplamentos não mínimos que violam a simetria
de Lorentz / Jonas Bastos de Araújo. - 2019.

154 p.

Orientador(a): Manoel Messias Ferreira Júnior.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
Maranhão, 2019.

1. Acoplamentos não mínimos. 2. Momentos de dipolo
elétrico. 3. Momentos de dipolo magnético. 4. Teorema de
Schiff. 5. Violação da simetria de Lorentz. I. Ferreira
Júnior, Manoel Messias. II. Título.

JONAS BASTOS DE ARAÚJO

**FÍSICA DE MOMENTOS DE DIPOLO ELÉTRICO E
MAGNÉTICO LIMITANDO ACOPLAMENTOS NÃO MÍNIMOS
QUE VIOLAM A SIMETRIA DE LORENTZ**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Maranhão,
para a obtenção do título de Doutor em Física.

Tese aprovada em: ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Dr. Manoel Messias Ferreira Jr (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Universidade Federal do Maranhão

Dr. Marco Schreck
Universidade Federal do Maranhão

Dr. Roldão da Rocha Junior
Universidade Federal do ABC

Dr. Van Sérgio da Silva Alves
Universidade Federal do Pará

São Luís

2019

Não me lembro se ele era verde ou vermelho, amarelo ou azul, ou branco simplesmente. O que depois se passou iria apagar para sempre da minha memória a cor que deveria ter-me ficado pegada aos olhos para sempre, uma vez que aquele era nada mais nada menos que o meu primeiro balão em todos os seis ou sete anos que levava de vida. Íamos nós no Rossio, já de regresso a casa, eu impante como se conduzisse pelos ares, atado a um cordel, o mundo inteiro, quando, de repente, ouvi que alguém se ria nas minhas costas. Olhei e vi. O balão esvaziara-se, tinha vindo a arrastá-lo pelo chão sem me dar conta, era uma coisa suja, enrugada, informe, e dois homens que vinham atrás riam-se e apontavam-me com o dedo, a mim, naquela ocasião o mais ridículo dos espécimes humanos. Nem sequer chorei. Deixei cair o cordel, agarrei-me ao braço da minha mãe como se fosse uma tábua de salvação e continuei a andar. Aquela coisa suja, enrugada e informe era realmente o mundo.

José Saramago nas *Pequenas Memórias*

– I just... What I think... I think the key is, right, is to just stop being afraid of death altogether. Don't you think like it's a little bit arrogant to be scared of dying? Like, in the grand scheme of things, the billions of people, and the millions of years, and the stardust and the mammoths... And Taylor Swift... I don't know, it just seems like...

You don't really matter that much, you know?

Josh Thomas em *Beluga Caviar*

AGRADECIMENTOS

Mesmo admitindo que este trabalho não tenha sido extenso, para mim significa muito dizer que os agradecimentos ocupariam mais páginas que qualquer capítulo, fosse eu aqui descrever toda ajuda que tive durante estes 5 anos. Vou fazer meu melhor.

Agradeço aos meus pais, seu Antônio e dona Nancy, pelo apoio e amores incondicionais, sem os quais seria impossível seguir minha vocação; ao meu irmão, Fernando, pelas inúmeras caronas e conforto na companhia silenciosa; ao Marcos Sampaio, pelo companheirismo e por me motivar e me fazer ver que eu posso mais com o que tenho.

Carrego um sentimento de débito imenso aos Professores Manoel, Casana e Eduardo Diniz (e os muitos demais me perdoem pela omissão), por suas aulas, paixão pela profissão e compromisso com a qualidade, que devo começar a pagar apenas quando/se me tornar Professor.

Agradeço aos meus amigos do esporte, pela companhia e sentimento de que tudo vai acabar bem, mesmo se não; à Letícia dos Santos, por me lembrar de datas importantes e alimentação inesperada – e muito bem-vinda; ao Pedro Silva, pela companhia e ouvidos livres de julgamento; À Lu e Angra, por me ajudarem com burocracias, mesmo quando não merecia; Victor Tsuneichi, Bruno Ribeiro, Virna Paiva, Cláudio Farias, Marcos Queiroga e João Furtado por tanto me ajudarem em tudo; ao Fernando Albuquerque, por sua paixão pelo Lorentz; Brigitte Hiller e Alex Blin, por toda hospitalidade, keks e gentilezas sem tamanho; to Professor Paul Mansfield for the sensible advice; to Brianna Gaddis and Charlotte Muscroft for proofreading my manuscripts, and a big thanks to Gillian Hayes and Craig Robertson for all the tea, coffee and sayings – not necessarily in that order.

DECLARAÇÃO

Esta tese é resultado de pesquisa realizada entre março 2014 até a fevereiro de 2019, sob orientação do Dr. Manoel Messias Ferreira Jr., e contém desenvolvimentos originais não apresentados em qualquer outra instituição para obtenção de quaisquer títulos.

Os capítulos 1, 2 e 3 são introdutórios e contém apanhados históricos e resultados da literatura, cujos créditos foram devidamente dados nas referências bibliográficas.

O capítulo 4 é baseado num trabalho publicado por mim, meu orientador e o Prof. Dr. Rodolfo Casana: *J. B. Araujo, R. Casana, and M. M. Ferreira, Jr.. Constraining CPT-even and Lorentz-violating non-minimal couplings with the electron magnetic and electric dipole moments.* Phys. Rev. D **92**, 025049 (2015)

O capítulo 5 contém resultados que foram publicados pelos mesmos autores: *J. B. Araujo, R. Casana, and M. M. Ferreira, Jr.. General CPT-even dimension-five nonminimal couplings between fermions and photons yielding EDM and MDM.* Phys. Lett. **B760**, 302 (2016)

O capítulo 6 é oriundo do trabalho mais recente dos mesmos autores: *J. B. Araujo, R. Casana, and M. M. Ferreira, Jr.. Lorentz-violating contributions to the nuclear Schiff moment and nuclear EDM.* Phys. Rev. D **97**, 055032 (2018)

O capítulo 7 contém os desenvolvimentos de um trabalho publicado no *Physical Review D*: *J. B. Araujo, A. H. Blin, M. Sampaio, and M. M. Ferreira Jr.. Constraining dimension-6 nonminimal Lorentz-violating electron-nucleon interactions with EDM physics.* Phys. Rev. D **100**, 015046 (2019).

RESUMO

Neste trabalho investigamos momentos de dipolo elétrico (EDMs) e magnético (MDMs) em ambientes com violação da simetria de Lorentz (LV). Num primeiro momento, expomos o modelo padrão e os EDMs e MDMs no cenário usual, bem como o teorema de Schiff – que impõe dificuldades na detecção de EDMs. Feito isto, exploramos as consequências de acoplamentos não mínimos, advindos do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ da eletrodinâmica par sob CPT do modelo padrão estendido (MPE), na equação de Dirac sobre EDMs e MDMs e ponderamos quanto à detectabilidade dos termos gerados. É feita também a análise sideral dos termos LV. Depois disto, repetimos a análise para uma classe de acoplamentos não mínimos que geram EDM e MDM a partir de um tensor $T_{\mu\nu}$, a princípio sem simetrias. Os acoplamentos possíveis são escolhidos em suas formas hermitianas e propostas para detecção são feitas. Em seguida, consideramos um potencial de Coulomb modificado e calculamos seu efeito sobre o momento de Schiff: um termo de interação residual que burla a blindagem (prevista pelo teorema de Schiff) devido às dimensões do núcleo atômico. Observa-se que o termo residual absorve as anisotropias do potencial de Coulomb modificado, que advém da violação da simetria de Lorentz na eletrodinâmica do MPE. No capítulo seguinte, consideramos outra fonte de EDM: acoplamentos P - e T -ímpares LV não mínimos entre elétrons e núcleons (prótons e nêutrons). Neste, depois de ilustrar como obter o EDM de um acoplamento no cenário usual, listamos classes gerais de acoplamentos com tensores LV de rank-1 a rank-4. Depois de listados, classificados sob C , P e T , e aplicado o limite não relativístico aos núcleons, calculou-se as contribuições EDM e usou-se dados experimentais recentes para impor *bounds* nos coeficientes LV. Quando necessário, fez-se a análise sideral dos termos com índices espaciais nos tensores LV.

Palavras-chave: momento de dipolo elétrico, momento de dipolo magnético, violação da simetria de Lorentz, modelo padrão estendido, teorema de Schiff, momento de Schiff, acoplamentos elétron-núcleon.

ABSTRACT

In this work we investigate electric dipole moments (EDMs) and magnetic dipole moments (MDMs) in scenarios with Lorentz symmetry violation (LV). We begin by generally describing the standard model and the EDMs and MDMs in the usual case, as well as the Schiff's theorem, which poses difficulties in their detection. After this, we explore the effects of nonminimal couplings, arising from the tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ of the CPT -even electrodynamics of the standard model extension (SME), in the Dirac equation on the EDMs and MDMs, besides pondering the generated terms' detectability. The sidereal analysis of the LV terms is also performed. Next, we repeat this investigation over a class of nonminimal couplings that generate EDM and MDM via a tensor $T_{\mu\nu}$, with no symmetry in its indices at first. The possible couplings are put forward in hermitian forms and proposals for detection are made. Following this, we considered a modified Coulomb potential and calculated its effect on the Schiff moment: a residual interaction term that circumvents the shielding (predicted by the Schiff's theorem) due to the atomic nucleus' finite size. We concluded that the residual term absorbs the modified Coulomb potential's anisotropies, which are due to the Lorentz symmetry violation in the SME's CPT -even electrodynamics. In the next chapter, we considered another source of EDM: P - and T -odd couplings between electrons and nucleons (protons and neutrons). After outlining how to obtain the EDM contribution from a coupling in the usual case, we listed general classes of couplings with LV tensors of rank-1 to rank-2. Once these were listed, classified according to their behavior under C , P and T , and applied the nonrelativistic limit for the nucleons, their EDM contributions were calculated and their magnitudes limited according to recent experimental data. Whenever applicable, the sidereal analysis was performed on terms with spatial indices in the LV tensors.

Keywords: electric dipole moment, magnetic dipole moment, Lorentz symmetry violation, standard model extension, Schiff moment, electron-nucleon couplings.

PRINCIPAIS RESULTADOS OBTIDOS

Em sistemas atômicos, o momento de dipolo elétrico (EDM) pode ser atribuído ao elétron, ao núcleo, ou mesmo a interações P - e T -ímpares entre os elétrons e núcleons (prótons e nêutrons). Nesta tese consideramos EDMs nestes três cenários:

1. EDMs fermiônicos: férmions adquiriram EDMs advindos de violações na simetria de Lorentz (capítulos 4 e 5) – aqui houve também geração de MDMs fermiônicos;
2. EDMs nucleares: embora a fonte do EDM nuclear não tenha sido violações na simetria de Lorentz, o potencial de Coulomb anisotrópico (do setor eletromagnético puro CPT -par do modelo padrão estendido) modificou a blindagem prevista pelo teorema de Schiff. Desta forma, no capítulo 6, a interação de EDM residual (momento de Schiff) absorveu as anisotropias embutidas no potencial modificado;
3. EDMs advindos de acoplamentos elétron-núcleon: no capítulo 7, consideramos classes gerais de acoplamentos eletron-núcleon que violam P e T e calculamos suas contribuições ao EDM atômico.

Sumário

1	O sucesso da QED e um apanhado histórico do Modelo Padrão	11
2	O modelo padrão estendido (MPE)	20
2.1	Motivações para o MPE	20
2.2	Os setores do MP	22
2.3	O setor de <i>gauge</i> eletromagnético do MPE	24
2.4	O setor par sob <i>CPT</i> da eletrodinâmica do MPE	25
2.4.1	Comportamento do modelo sob as operações discretas <i>C</i> , <i>P</i> e <i>T</i>	28
3	Momentos de dipolo elétrico e magnético do elétron	31
3.1	Da descoberta do <i>spin</i> ao momento magnético anômalo do elétron	31
3.2	Os momentos de dipolo na equação de Dirac	34
3.3	O limite não relativístico da equação de Dirac e o fator giromagnético <i>g</i>	36
3.4	Os fatores de forma para <i>spin</i> $\frac{1}{2}$	39
3.5	O momento magnético anômalo do elétron	40
3.6	O momento dipolo elétrico do elétron	43
3.6.1	Comentários acerca das investigações experimentais	44
3.6.2	O teorema de Schiff	45
4	Um novo acoplamento não mínimo na equação de Dirac	51
4.1	EDMs em acoplamentos <i>CPT</i> -ímpares não mínimos	52
4.2	A equação de Dirac modificada	53
4.3	Comportamento sob <i>C</i> , <i>P</i> e <i>T</i>	57
4.4	Limite não relativístico	59
4.5	Efeitos não relativísticos	63
4.6	Análise Sideral	67

5	Uma classe de acoplamentos não mínimos com EDM e MDM	71
5.1	Um acoplamento axial e um não axial com o tensor $T_{\mu\nu}$ na equação de Dirac	72
5.1.1	O acoplamento não mínimo axial	72
5.1.2	Acoplamento axial: o limite não relativístico	76
5.1.3	O acoplamento não mínimo não axial	80
5.1.4	Acoplamento não axial: o limite não relativístico	80
5.2	Limitando as componentes T_{ij} fora da diagonal principal	82
5.3	Sobreposição com <i>bounds</i> da literatura	83
5.4	Novas possibilidades de acoplamentos não mínimos	86
5.5	Comportamento sob C , P e T	88
6	Contribuições ao momento de Schiff e EDM nuclear advindas da violação da simetria de Lorentz	90
6.1	O teorema de Schiff revisitado	90
6.2	O EDM nuclear e o momento de Schiff	93
6.3	Efeito do potencial coulombiano modificado sobre o momento de Schiff	100
6.3.1	Sobre a detectabilidade do momento de Schiff modificado	108
6.4	EDM nuclear intrínseco oriundo de violações na simetria de Lorentz	109
6.5	Comentários e conclusões	112
7	Limites superiores a EDMs atômicos advindos de acoplamentos LV não mínimos elétron-núcleon de dimensão-6	115
7.1	Cálculo do EDM gerado por um acoplamento e - N : um exemplo	117
7.2	Classes gerais de acoplamentos e - N de dimensão-6 com tensores LV de rank-1 a rank-4	121
7.2.1	Variações siderais	128
7.3	Comentários e conclusões	129
	Conclusões e perspectivas	132
	Apêndices	133
	Referências Bibliográficas	143

Capítulo 1

O sucesso da QED e um apanhado histórico do Modelo Padrão

É difícil superestimar o sucesso do modelo padrão (MP). Os dados coletados pelo grande colisor de hádrons (LHC) confirmaram, e continuam confirmando, numerosas expectativas teóricas. Em parte, o sucesso das investigações, a partir do século XX, vem da inauguração de uma nova versão do método científico¹: frente às muitas propostas para descrever a natureza, deve-se escolher aquelas teorias com maior apelo estético matemático e verificar suas consequências experimentalmente. É fundamental lembrar que o veredito é dado pelo experimento, afinal, a Física é uma ciência experimental². No entanto, a prescrição estética tem se mostrado bastante eficaz em direcionar as investigações acerca da natureza íntima da matéria. Este trabalho conjunto possibilitou medições e acordos entre teoria e experimento tão grandes que supreenderam até os criadores das teorias. Um dos exemplos mais famosos deste mutualismo é a eletrodinâmica quântica (QED), baseada em uma Lagrangiana simples, cujas previsões acerca do momento de dipolo de magnético do elétron concordam com o experimento em uma parte em 10^{12} , ou seja, discrepâncias só aparecem a partir da 12^a casa decimal [2]. Observe este fato comparando os dados experimentais e cálculos do MP, que fornecem, respectivamente:

$$a_{\text{MP}} = 0.001\,159\,652\,182\,79(771) \text{ ,} \tag{1.0.1}$$

$$a_{\text{exp}} = 0.001\,159\,652\,180\,73(28) \text{ .} \tag{1.0.2}$$

Esta pode ter sido uma das razões para Freeman Dyson dizer [3]:

¹P. A. M. Dirac, de acordo com registros [1], acreditava que a natureza segue padrões estéticos simples e elegantes, compatíveis com modelos de equiparável beleza matemática. Pode-se dizer que ele foi o precursor desta tendência, isto é, da estética da teoria ser um critério de escolha.

²Bem, aqui o pleonasma foi proposital, uma vez que toda ciência é, por definição, experimental.

“The main point was that all of us who put QED together, including specially Feynman, considered it a jerry-built and provisional structure which would either collapse or be replaced by something more permanent within a few years. So I find it amazing that it has lasted for fifty years and still agrees with experiments to twelve significant figures. It seems that nature is telling us something. Perhaps she is telling us that she loves sloppiness.”

O sucesso impressionante da QED, em termos de acordo entre teoria e precisão dos experimentos, não é partilhado na mesma magnitude pelos outros setores do MP.

Das quatro interações fundamentais conhecidas (interação forte, eletromagnética, fraca e gravitacional), a gravidade é a única que não tem uma descrição adequadamente incluída no MP. Algumas tentativas foram feitas com o objetivo de incluí-la, mas problemas teóricos graves permanecem sem solução, como a não renormalizabilidade da teoria. Além disto, limitações de natureza experimental também dificultam as investigações, uma vez que a observação direta de efeitos de gravitação quântica estão fora do alcance da tecnologia atual - os experimentos estão longe de sondar a escala de energia de Planck: 1.22×10^{19} GeV. Estas dificuldades, por ora, restringem a descrição da natureza a dois ferramentais complementares³: a relatividade geral e o MP. As teorias de campo que compõem o MP são baseadas na QED, que é a forma atual de descrever as interações eletromagnéticas – aqui vale uma digressão.

Por mais de uma vez, a interação eletromagnética impulsionou mudanças no paradigma científico. Com os experimentos de Faraday e Öersted, tornou-se evidente que fenômenos elétricos e magnéticos estavam relacionados. Este fato foi incorporado nas equações de Maxwell, publicadas entre 1861 e 1862, que eram incompatíveis com o princípio de relatividade de Galileu⁴. Esta incompatibilidade foi sanada por A. Einstein, com o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita, em 1905. A. Einstein, no mesmo ano, propôs uma explicação para o efeito fotoelétrico que favoreceu o desenvolvimento da mecânica quântica⁵ na década de 1920 por E. Schrödinger [4] e W. Heisenberg [5], de maneira independente. Esta teoria quântica não é relativística e, por isso, não fornece uma explicação sobre o *spin*, nem sobre o porquê do fator giromagnético g do elétron ser (*aproximadamente*) igual a 2. A explicação para esta propriedade está contida equação relativística do elétron, desenvolvida por P. A. M Dirac em 1928 [6]. Dentre as mais notáveis previsões de Dirac, consta a existência das anti-partículas. O pósitron, anti-partícula do elétron, foi detectado em 1932 por Carl D. Anderson [7], que recebeu o Nobel em 1936 pela descoberta. Além disto, a equação de Dirac fornece naturalmente $g = 2$, para surpresa do próprio Dirac.

³Complementares no sentido de um cobrir o que o outro não descreve.

⁴Outra característica das equações de Maxwell é que elas prevêem a propagação de ondas eletromagnéticas com a velocidade da luz. A detecção destas ondas foi feita por H. Hertz cerca de vinte anos depois da publicação de Maxwell. Uma vez que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas era igual à velocidade da luz, foi inferida a unificação entre os fenômenos ópticos e eletromagnéticos.

⁵Os saltos temporais neste capítulo serão inevitáveis. Infelizmente numerosas injustiças serão cometidas.

Anderson detectou o pósitron em investigações sobre raios cósmicos, em experimentos que envolviam detectores chamados de câmaras de nuvens. A produção de pósitrons se dava por colisão de partículas muito energéticas advindas de raios cósmicos, um fenômeno compatível com a cinemática relativística. A observação de que colisões entre partículas muito energéticas podem gerar novas partículas levou, em parte, ao desenvolvimento dos aceleradores de partículas.

Na década de 60, experimentos com aceleradores detectaram uma vasta lista de novas “partículas estranhas”, bárions e mésons, antes obtidas apenas com raios cósmicos. O número de novas partículas aumentou tão vertiginosamente que W. Lamb, em seu discurso de recebimento do prêmio Nobel, ironiza [8]

“When the Nobel prizes were first awarded in 1901, physicists knew something of just two objects which are now called “elementary particles”: electron and proton. A deluge of other “elementary” particles appeared after 1930; nêutron, neutrino [...]. I have heard it said that ‘the finder of a new elementary particle used to be rewarded by a Nobel prize, but such a discovery now ought to be punished by a \$10,000 fine.’ ”

Este “dilúvio” de partículas era classificado por carga, massa e *estranheza* (*strangeness*)⁶. Fora isto, não se observava ordem subjacente alguma. Este incômodo foi removido por M. Gell-Mann, em 1961 [9], com o *Eightfold way*, que consistia em organizar os bárions e mésons conhecidos em figuras geométricas regulares, hexágonos e triângulos por exemplo, de acordo com suas cargas e *strangeness*. No entanto, em um dos arranjos, um espaço permanecia vazio, o de carga -1 e *estranheza* -3 , ou seja, não se havia detectado uma partícula com estas propriedades até aquele momento. Isto levou Gell-Mann a predizer a existência de uma partícula com estas propriedades, bem como sua massa e seu tempo de decaimento, o que foi confirmado em 1964, com a detecção do Ω^- [10].

Apesar deste sucesso, o motivo das partículas respeitarem o *Eightfold way*, que era um esquema puramente gráfico, permanecia um mistério (que durou pouco). Gell-Mann e Zweig propuseram, independentemente, que todos os hádrons são compostos de partículas mais elementares, que Gell-Mann chamou de quarks (consulte a Ref. [11] para um apanhado sobre os desenvolvimentos). Os quarks, que possuem carga fracionária, podem se agrupar em pares quark - anti-quark, formando mésons, ou em trios, formando bárions, sempre constituindo cargas inteiras múltiplas de e . Um próton, por exemplo, é formado por três quarks: dois *up*, de carga $+\frac{2}{3}$, e um *down*, de carga $-\frac{1}{3}$. Um méson π^0 , neutro, é formado por um quark *up* e um anti-quark *up*. No entanto, de alguma maneira, nunca se observou algum quark isolado. Estas ideias, e os problemas decorrentes das propostas, requeriam uma descrição por uma teoria quântica de campos, que foi desenvolvida na década de 70.

As teorias quânticas de campo propõem que, para cada interação fundamental conhecida, haja mediado-

⁶*Strangeness* é um número quântico que se conserva nos processos de criação das “partículas estranhas”, que são regidos pela interação forte. Esta quantidade não é conservada necessariamente nos processos de decaimento, que estão relacionados com a interação fraca.

res: elementos que transportem a informação da interação entre as partículas. Estes mediadores são bósons, partículas de *spin* inteiro, que podem conter carga ou não. A QED, desenvolvida principalmente por Feynman, Schwinger, Tomonaga e Dyson, durante o meio do século XX, por exemplo, trata da interação entre léptons (dotados de carga elétrica) e fótons (de carga elétrica nula). Os sucessos desta teoria são muitos, desde a previsão do momento magnético anômalo do elétron, com excelente acordo com o experimento, ao cálculo correto das amplitudes de espalhamento. As técnicas empregadas no desenvolvimento desta teoria, bem como a representação diagramática de Feynman, devido seu sucesso no setor eletromagnético, são utilizadas na descrição das outras interações fundamentais do modelo padrão. Um outro ponto de interesse diz respeito a propriedades matemáticas da teoria, mais especificamente ao tipo de transformação sobre os campos que mantém a teoria invariante. Em outras palavras, procura-se o tipo de simetria de *gauge* que a teoria respeita⁷ - todas as teorias quânticas de campo do MP respeitam simetrias de *gauge*. Por exemplo, o tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, entidade fundamental da eletrodinâmica, permanece invariante se tomarmos $\tilde{A}_\nu = A_\nu + \partial_\nu \phi$, com ϕ uma função escalar bem definida em todo espaço-tempo.

A interação forte, responsável pela coesão do núcleo atômico e relacionada com as “partículas estranhas”, também foi contemplada com uma teoria quântica de campo. A descrição atual envolve os quarks como partículas fundamentais com carga de cor⁸ e os glúons como mediadores da interação, que também possuem carga de cor. Apesar de se basear na QED, a cromodinâmica quântica (QCD)⁹, que descreve esta interação, apresenta algumas características bastante distintas da QED. Uma delas diz respeito à constante de acoplamento. No caso da QED, a constante de acoplamento é a constante de estrutura fina¹⁰ $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ll 1$, o que permite a aplicação da teoria de perturbação e a simplificação dos cálculos, uma vez que poucos termos da expansão perturbativa já oferecem excelente ajuste aos dados. No que diz respeito à QCD, a constante de acoplamento é, em baixas energias, maior que 1, impossibilitando o uso do formalismo perturbativo neste regime. Além disto, os glúons, por possuírem carga de cor, podem interagir entre si, formando estados ligados, diferente dos fótons na QED - isto torna a teoria ainda mais difícil de ser estudada analiticamente.

Felizmente no começo da década de 1970, D. Politzer, F. Wilczek e D. Gross¹¹ mostraram que a constante de acoplamento da QCD se torna muito menor que 1 para altas energias, isto implica que, neste cenário, os quarks e glúons interagem fracamente, ou seja, teoria de perturbação é aplicável. Este resultado de primeira grandeza lhes rendeu o prêmio Nobel em 2004. Outra nuance é o problema de confinamento. De

⁷Uma simetria de *gauge*, ou de *calibre*, significa que podemos *calibrar* os campos de modo a manter a Lagrangiana invariante, ou seja, simétrica.

⁸Os quarks podem apresentar três cores: vermelho, verde e azul (*red*, *green* e *blue*). Os anti-quarks apresentam as respectivas anti-cores. A propósito, eles apresentam também carga de “sabor”, mas esta carga não influencia a interação forte.

⁹De *Quantum Chromodynamics*.

¹⁰A constante de estrutura fina ilustra a natureza da QED: é uma teoria de interação entre cargas (e) quântico-relativística ($\hbar c$).

¹¹Para um resumo dos desenvolvimentos e referências, é recomendável visitar [12]

maneira resumida, até hoje nunca se observou quarks livres, mas somente estados ligados sem cor total ($red+green+blue=white$ ou $cor+[anti-cor]=white$). Caso se tente separar um par quark - anti-quark, outro par quark - anti-quark é formado, gerando dois pares de partículas. É como se a interação aumentasse com a distância ao ponto de acumular energia suficiente para criar duas novas partículas. Analiticamente este resultado ainda não foi provado, principalmente pelas dificuldades em se lidar com teorias que não permitem um tratamento perturbativo. Entretanto, simulações com cálculo de QCD na rede, “*lattice QCD*”, mostram que esse é de fato o caso. Por ora, é uma questão não muito bem resolvida.

A interação fraca, responsável pelas instabilidades no núcleo atômico e outros processos de decaimento, também apresenta algumas características bastante peculiares. A descrição contemporânea desta interação está contida em uma teoria de maior abrangência, a teoria eletrofraca¹². Esta teoria contém uma descrição unificada da interação eletromagnética e da interação fraca em escalas de energia acima dos 100 GeV. Segundo esta descrição, os bósons W^\pm e Z^0 (mediadores da interação fraca) e o fóton se diferenciam em baixas energias devido a uma quebra espontânea de simetria devida ao mecanismo de Higgs. A descrição deste mecanismo, após a detecção do bóson de Higgs pelo *Large Hadron Collider* (LHC), rendeu a Peter Higgs e François Englert [13, 14] o prêmio Nobel de 2013¹³ e, por trabalhos que levaram ao desenvolvimento da teoria eletrofraca, S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg receberam o prêmio Nobel em 1979. Pode-se dizer que esta unificação em altas energias inspirou o desenvolvimento das GUTs, *Grand Unification Theories*, que incorporam mais interações fundamentais e quebras espontâneas de simetrias para justificar quão diferentes são estas em baixas energias¹⁴.

Dentre as características atípicas desta interação, com respeito aos tópicos de interesse deste trabalho, a mais notável é a violação de algumas simetrias discretas, mais especificamente a simetria de paridade (P). De maneira resumida, a operação P inverte as direções dos eixos coordenados espaciais. Esta operação equivale a observar um processo físico através de um espelho com a imagem de ponta-cabeça. A simetria de paridade, para ser verificada na natureza, estabelece que, dado um processo possível X , o processo transformado $P(X)$ é *igualmente*¹⁵ realizável. A violação desta simetria foi proposta por Lee e Yang, em 1956, ao observarem que, diferente do eletromagnetismo, não havia motivos para a inviolabilidade da paridade em processos da interação fraca [16]. A verificação experimental desta hipótese foi realizada no mesmo ano por Wu *et al.* [17].

¹²A teoria que descreve somente as interações fracas é conhecida como *Quantum Flavordynamics* (QFD). Entretanto, esta interação é melhor compreendida em termos da teoria eletrofraca.

¹³Um terceiro trabalho, também de 1964, descreve este mecanismo, vide [15].

¹⁴Espera-se que a escala de unificação das GUTs seja muito superior a 100 GeV, para incluir a interação forte. Observe que a escala de unificação aparenta depender da diferença de intensidade das interações.

¹⁵A palavra “igualmente” se refere à igual probabilidade de ambos os processos ocorrerem, ou seja, a natureza não faria distinção entre os processos X e $P(X)$.

O experimento consistiu em observar decaimentos de cobalto 60, que é radioativo, de acordo com



que é resultado de um decaimento β . A efeito de ilustração, em termos de física nuclear, este decaimento é resultado de



que, por sua vez, na descrição da interação eletrofraca, corresponde à transmutação de um quark *down* em um *up* via troca de W^-



Após este decaimento, eles verificaram que a maioria dos elétrons emitidos apresentava *spin* na direção oposta à do *spin* do núcleo, que inicialmente estava polarizado. Entretanto, o processo transformado por paridade $P(X)$, prevê que os elétrons são emitidos preferencialmente com o *spin* na mesma direção com respeito ao *spin* do núcleo - o que não foi observado com a mesma probabilidade. Apesar da simplicidade da análise, a evidência para violação de paridade é contundente. Neste exemplo a violação não é total, como ocorre com os neutrinos e anti-neutrinos. Para eles, vale a afirmação: neutrinos são *left-handed* e anti-neutrinos são *right-handed*¹⁶. Mas observe que, se se trocar o neutrino pelo anti-neutrino, aplicando a transformação P ¹⁷, nenhuma contradição é encontrada. De fato, seguindo esta linha,

$$\nu_e(\textit{left} - \textit{handed}) \rightarrow \bar{\nu}_e(\textit{right} - \textit{handed}) ,$$

porque P inverte a helicidade. A rigor, trocar a partícula por anti-partícula é o efeito da operação conjugação de carga (C) – quando tomadas juntas, C e P formam a transformação CP , que constitui uma simetria verificada em numerosos experimentos.

A aparente invariância da interação fraca por CP tem implicações experimentais surpreendentes, como por exemplo o decaimento de káons neutros K^0 . Segundo um trabalho de Gell-Mann e Pais [18], um feixe destas partículas decai de duas maneiras distintas, obedecendo à simetria CP , a saber: um processo rápido e outro mais demorado, de modo que perto da fonte de káons, apenas um dos decaimentos é detectado, enquanto que, longe da fonte, apenas o outro é observado. Este trabalho levou Cronin e Greenwood a comentarem

¹⁶Por definição, se o *spin* aponta na direção do momento \mathbf{p} , a partícula é *right-handed*. O caso contrário designa a partícula *left-handed*. Estas denominações dizem respeito à helicidade. É bastante claro que se escolheu a direção do versor $\hat{\mathbf{p}}$ como eixo de polarização.

¹⁷A operação P inverte a helicidade da partícula. Em outras palavras, transforma uma partícula *right-handed* em *left-handed*. Isto ocorre porque a helicidade depende do autovalor ($\pm\frac{1}{2}$) do operador $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}$. Por paridade, o operador de helicidade se transforma como $P(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}) = (-\hat{\mathbf{p}}) \cdot (\mathbf{S})$, onde \mathbf{S} é o operador de *spin*. Logo, por paridade, os autovalores se invertem, o que significa dizer que a helicidade da partícula é invertida.

num *memoir* [19]

“So these gentlemen, Gell-Mann e Pais, predicted that in addition to the short-lived K mesons, there should be long-lived K mesons. They did it beautifully, elegantly and simply. I think theirs is a paper one should read sometime just for its pure beauty of reasoning. It was published in the *Physical review* in 1955. A very lovely thing! You get shivers up and down your spine, specially when you find you understand it. At the time, many of the most distinguished theoreticians thought this prediction was baloney.”

Ainda sobre a (aparente) invariância por CP , D. Griffiths [20] comenta que

“[...]Maybe what we meant by the mirror image of a right-handed electron was a left-handed positron. If we had defined parity from the start to be what we now call CP , the trauma of parity violation might have been avoided (or at least postponed)”

Ao dizer que o trauma da violação da paridade poderia ser postergado, caso P fosse definida como CP , ele se refere à violação de CP verificada em 1964 por Fitch e Cronin [21] - o mesmo que elogiou o trabalho do Gell-Mann e Pais, que tinha por hipótese a invariância por CP . O teste consistiu em verificar se ocorriam decaimentos, devidos aos processos rápidos, longe da fonte. Lembre-se que estes processos, de acordo com o trabalho de Gell-Mann e Pais, não deveriam ocorrer longe da fonte. No entanto, aos 18 m de um feixe de k áons, foram contados 45 dos decaimentos rápidos num total de 22.700 decaimentos. A violação de CP parece pequena, mas é uma assinatura inconfundível¹⁸. Dentro do modelo padrão, esta violação de CP pode ser incluída a partir de uma fase δ na matriz CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) [23, 24], sob a hipótese de existirem pelo menos três gerações de quarks. A propósito, foi este desenvolvimento que os levou a sugerir uma terceira família de quarks, quando nem mesmo o quark *charm*, pertencente à segunda geração, havia sido detectado¹⁹.

A partir destas descobertas, pode-se inferir que existem processos físicos que diferenciam inequivocamente matéria de anti-matéria. Isto pode estar relacionado com a notória assimetria matéria - anti-matéria no universo: um dos maiores mistérios até hoje. Uma resposta conclusiva ainda não foi dada.

Dentre as simetrias discretas fundamentais, faltou mencionar a inversão temporal (T). Macroscopicamente, de acordo com a experiência cotidiana, inverter o sentido do fluxo do tempo não gera uma situação simétrica: seres vivos envelhecem, metais oxidam, fluidos difundem irreversivelmente. Desta forma, é possível diferenciar os “estados” de acordo com o sentido do fluxo temporal. Contudo, a simetria T é a mais difícil de ser verificada experimentalmente, uma vez que inverter o sentido do tempo, pelo menos até o momento, não é realizável.

A princípio, microscopicamente²⁰, as leis físicas aparentam não depender do sentido do fluxo do tempo.

¹⁸Estudos subsequentes de decaimentos semileptônicos mostram violações mais acentuadas, vide por exemplo [22].

¹⁹O quark charm (c) apenas foi detectado em 1974, nos experimentos da chamada Revolução de Novembro.

²⁰Ou mesmo num sistema formado por bolas de bilhar sem atrito que colidem, por exemplo.

Em outras palavras, os processos de espalhamento e decaimento parecem reversíveis temporalmente. A simetria T representaria a indiferença da natureza com respeito ao comportamento de processos apresentando fluxos temporais inversos. Um trabalho de 2012, todavia, com dados coletados pelo detector BaBar no SLAC²¹, alega ter verificado diretamente a violação de T em processos eletrofracos [25]. Neste trabalho, verifica-se diferença nas taxas de transição entre dois estados invertidos temporalmente (um processo e seu T -conjugado), $\bar{B}^0 \rightarrow B_-$ e $B_- \rightarrow \bar{B}^0$. Noutro par de processos, $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$ e $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$, foi verificada diferença nas probabilidades de transição²² [21]. Isto implica dizer que as simetrias discretas C , P , T e CP não correspondem a simetrias exatas da natureza. Neste momento, é importante mencionar o teorema CPT , que é um dos pilares da teoria de campos.

O teorema CPT ²³ afirma que o processo X e o processo transformado $CPT(X)$ são igualmente prováveis na natureza, mesmo nas situações em que C , P , T e CP sejam violadas separadamente. Quando aplicado aos processos eletrofracos mencionados, espera-se que a violação de CP implique na expectativa de uma violação em T , de modo que o processo $CPT(X)$ seja igualmente provável. É fundamental enunciá-lo:

O teorema CPT

Para qualquer teoria quântica de campos local, que possa ser descrita por uma Lagrangiana $\hat{\mathcal{L}}(x)$ hermitiana e invariante de Lorentz, e cujos operadores de campo respeitem o teorema *spin*-estatística, vale que

$$\hat{\Theta}\hat{\mathcal{L}}(x)\hat{\Theta}^{-1} = \hat{\mathcal{L}}(-x) ,$$

onde $\hat{\Theta}$ representa a transformação CPT - em qualquer ordem das operações C , P e T .

É evidente que a integral da ação, as relações de comutação canônicas e as equações de campo não mudam (o sinal negativo no argumento da densidade Lagrangiana não muda o cálculo das integrais). Este teorema foi primeiramente formulado por Schwinger [26], mas sua prova remete a Lüders e Pauli [27, 28]. Observe que todas as condições de validade são de muita relevância física: qualquer um, que se proponha a desenvolver uma teoria nova, vai ter de apostar muito alto. As previsões deste teorema são muito bem verificadas e impõem limites muito restritivos sobre possíveis violações. Dentre as previsões cita-se, por exemplo, que a partícula e sua respectiva anti-partícula devem apresentar a mesma massa m , bem como o mesmo tempo de decaimento médio.

As tentativas de explorar Física além do modelo padrão, em parte motivadas por fenômenos não descritos

²¹O *National Accelerator Laboratory*, na Califórnia, EUA.

²²Este resultado foi mencionado anteriormente, mas no contexto de violação de CP . Por outro lado, se CPT é uma simetria exata, uma violação em CP deve ser contrabalançada por uma violação em T , de modo que o processo CPT -conjugado seja igualmente provável quanto o processo original.

²³Outras terminologias também são utilizadas, como PCT . O importante é saber que a ordem das operações é irrelevante.

pelo MP²⁴, levaram alguns pesquisadores a flexibilizar as hipóteses do teorema *CPT*. Por exemplo, este trabalho considera a quebra da invariância de Lorentz²⁵, no contexto do modelo padrão estendido²⁶ (MPE), e pondera suas consequências com respeito à geração de momento de dipolo magnético anômalo e momento de dipolo elétrico para o elétron.

Existem alguns trabalhos que relacionam a simetria *CPT* à invariância de Lorentz e a suas respectivas violações. De acordo com O. W. Greenberg, em um trabalho publicado em 2002, a violação da simetria *CPT*, em teorias locais, leva inequivocamente à violação da simetria de Lorentz [29]. Entretanto, a simetria *CPT* não exclui a possibilidade de violação da simetria de Lorentz fora do cone de luz (ou seja, podem ocorrer, mas sem interferência causal mediada subluminalmente). Uma das conclusões mais importantes do trabalho de Greenberg diz respeito à localidade. Greenberg esclarece os significados de localidade em teorias quânticas de campos. Segundo ele, localidade pode ser interpretada de três maneiras:

1. Os termos de interação são avaliados no mesmo ponto do espaço-tempo
2. Operadores de observáveis físicos comutam em intervalos tipo espaço
3. Os operadores de campo comutam (anti-comutam) para campos de *spin* inteiro (semi-inteiro) para intervalos tipo espaço.

Ele atenta para o fato de que a localidade pode não ser respeitada no sentido (1), mas ser respeitada nos sentidos (2) e (3), como é o caso da QED no calibre de Coulomb²⁷. Além disto, Greenberg afirma que teorias que violam *CPT*, atribuindo massas diferentes a partículas e anti-partículas, violam obrigatoriamente a localidade no sentido (1). Outros pesquisadores, por outro lado, abrem mão de outros requisitos do teorema *CPT* para mostrar que a violação de Lorentz não implica em violação da simetria *CPT* e vice-versa. Foi o que M. Chaichian *et al.* fizeram em um trabalho de 2011 [30]. Eles propuseram uma classe de teorias de campos interagentes não local com violação da simetria *CPT*, enquanto a invariância de Lorentz foi preservada. Apesar de alegarem que a literatura exclui esta possibilidade, é fácil ver que as condições das provas são bem diferentes. Observe que a proposta destes é de uma teoria não local, enquanto a prova fornecida por Greenberg diz respeito a uma teoria de campos local.

No próximo capítulo expomos uma extensão do MP, na qual se permite pequenas violações tanto na simetria de Lorentz quanto no teorema *CPT*.

²⁴Isto inclui, por exemplo, a assimetria matéria - anti-matéria.

²⁵Vide capítulo 2.

²⁶Um capítulo seguinte vai ser dedicado a uma breve exposição do MPE.

²⁷O calibre de Coulomb consiste em tomar $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Esta condição quebra a covariância da teoria, visto que impõe restrições apenas às componentes espaciais do 4-potencial A^μ .

Capítulo 2

O modelo padrão estendido (MPE)

O modelo padrão estendido (MPE) é uma estrutura teórica mais ampla que o MP, permitindo violações da simetria CPT e quebra da invariância de Lorentz. As aplicações deste modelo abrangem todos os setores do MP e a relatividade geral. Neste capítulo, algumas motivações para o MPE serão expostas, bem como alguns resultados de maior relação com os propósitos do capítulo 4 deste trabalho, que envolvem o setor eletromagnético CPT -par do MPE.

2.1 Motivações para o MPE

É bem sabido que o MP não admite violações da simetria CPT e da invariância de Lorentz. No entanto, é possível ampliá-lo de modo a alocar estas possibilidades, o que configura a extensão do MP. Faz-se necessário, desta maneira, discutir a viabilidade e a relevância fenomenológica destas violações. A primeira delas diz respeito à simetria CPT , que prevê a indistinguibilidade física entre os processos X (usual) e o X' (transformado por CPT), ou seja, estes devem ser igualmente prováveis.

A invariância de Lorentz, por outro lado, diz respeito às propriedades do espaço-tempo, mais especificamente ao seu caráter isotrópico. Em outras palavras, a simetria de Lorentz implica que todas as direções do espaço-tempo são equivalentes, o que está de acordo, pelo menos em larga escala, com o princípio cosmológico de que o universo é homogêneo e isotrópico. Por ora, ambas permanecem firmes aos testes experimentais. Caso detectadas, pequenas violações de CPT e da invariância de Lorentz indicariam, com bastante contundência, sinais de Física¹ atípica. No capítulo 1 se comentou sobre a violação de CPT , entretanto não se discutiu sobre a invariância de Lorentz. Façamos uma digressão.

Os experimentos indicam que o universo em larga escala é homogêneo e isotrópico. Contudo, localmente, é

¹Observe que durante o curso do texto se vem utilizando a palavra “Física” no sentido intuitivo de “fenomenologia”.

evidente que isto não acontece; a Via Láctea e o Sistema Solar, por exemplo, são aproximadamente planares, ou seja, as propriedades no disco da galáxia, como densidade de matéria-energia, não são as mesmas acima ou abaixo deste. Por outro lado, a interação gravitacional é esfericamente simétrica, ou seja, mesmo obedecendo uma dinâmica esfericamente simétrica, o Sistema Solar e a Via Láctea assumiram configurações com simetria aproximadamente cilíndrica. Isto é um exemplo de quebra espontânea de simetria: quando o sistema assume uma configuração que não confere com uma simetria fundamental de sua dinâmica. A proposta de violação da invariância de Lorentz está ligada a um mecanismo de quebra espontânea em teorias de energias mais altas.

A violação desta simetria implica no aparecimento de direções privilegiadas que conferem comportamentos distintos para o sistema físico. Isto é acomodado no MPE a partir da introdução de campos de fundo, fixos, que, ao interagirem com os campos usuais do MP, têm potencial para gerar anisotropias. A introdução de anisotropias por meio de campos de fundo confere comportamentos pouco usuais a muitos sistemas físicos, o que implica em uma extensa gama de possibilidades de verificação experimental. As motivações para considerar tais violações remetem ao artigo original, de Kostelecky e Samuel [31], no qual se propõe o MPE como possibilidade teórica.

As propostas iniciais de Kostelecky e Colladay [32, 33] incluem uma descrição do MPE como um limite a baixas energias de uma teoria mais fundamental, de energias na escala de Planck. Importante lembrar que Kostelecky e Samuel [31] observaram que, em algumas versões de teoria de cordas, há violação da invariância de Lorentz (e possivelmente de CPT) em baixas energias, devido a um mecanismo de quebra espontânea de simetria. Esta violação, por sua vez, deve influenciar todos os setores de interação, por meio de acoplamentos (termos de interação) entre os campos de fundo e os usuais do MP. Desta maneira, conclui-se que, mesmo no caso da teoria mais fundamental apresentar simetrias de Lorentz e CPT , seu limite em baixas energias, por um mecanismo de quebra espontânea de simetria, pode não respeitar tal invariância². Uma vez que a simetria de Lorentz está relacionada a mudanças de referencial, um comentário a mais deve ser feito.

Os campos de fundo, que configuram a quebra da invariância de Lorentz, apresentam uma orientação fixa no espaço-tempo. Assim, apenas transformações referentes às partículas ou campos hão de gerar mudanças observáveis. Em outras palavras, a descrição não muda de observador para observador no espaço-tempo, mas a interação entre as partículas e os campos é alterada caso se aplique transformações aos campos das partículas, devido aos acoplamentos entre estes e os campos de fundo. Matematicamente, isto permite afirmar que, mesmo quando a invariância de Lorentz é perdida³, a Lagrangiana do sistema permanece invariante por transformações de Lorentz sobre o observador (*boosts*, rotações etc.). Esta diferença entre as transformações

²Outro exemplo deste fenômeno é a quebra espontânea de simetria na teoria eletrofraca, comentado no capítulo 1.

³No sentido de perda da isotropia.

sobre o observador e sobre os campos do sistema não existe no cenário invariante de Lorentz usual; esta discordância é resultado da anisotropia do espaço, introduzida pelos campos de fundo.

A efeito de ilustração, considere uma partícula que se move no interior de um cristal anisotrópico. A descrição da partícula não se altera caso se mude de um observador a outro. Entretanto, para a partícula, direções de propagação diferentes apresentam propriedades distintas. Evidentemente, a analogia da violação da invariância de Lorentz resulta das propriedades anisotrópicas do cristal. Para mais comentários acerca do MPE, exemplos, e publicações relevantes, recomenda-se a Ref. [34].

2.2 Os setores do MP

O MPE corresponde a uma extensão da estrutura $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_y$ presente no MP. O MPE herda esta propriedade, de modo que a ação S dos sistemas físicos deve assumir a forma

$$S_{\text{MPE}} = S_{\text{MP}} + S_{\text{LV}} , \quad (2.2.1)$$

na qual S_{LV} inclui as interações entre os campos usuais e os tensores de fundo em todos os setores do MP. Antes de abordar sua extensão, é importante comentar sobre a Lagrangiana do MP, que pode ser dividida em quatro setores: fermiônico, de Yukawa, de Higgs e de *gauge* [35]. A Lagrangiana total é

$$\mathcal{L}_{\text{MP}} = \mathcal{L}_{\text{Férmions}} + \mathcal{L}_{\text{Gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} , \quad (2.2.2)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{Férmions}} = \frac{1}{2} \sum_f i \left(\bar{\Psi}_{f,R} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \Psi_{f,R} + \bar{\Psi}_{f,L} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \Psi_{f,L} \right) \quad (2.2.3)$$

é a contribuição dinâmica dos férmions (léptons e quarks) somada sobre os diferentes sabores (*flavors*) f . Observe também a soma sobre as componentes de quiralidade R e L , obtidas a partir dum espinor Ψ como

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\Psi , \quad \Psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\Psi , \quad (2.2.4)$$

nas quais $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ são operadores de projeção. Neste cenário se usa a representação quiral das matrizes de Dirac, em contraste com os demais capítulos, nos quais usamos a representação de Dirac. Além disto, a derivada covariante $\overleftrightarrow{D}_\mu$ carrega as interações eletrofraca e do setor forte

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_c G_\mu^{(a)} Q_{c(a)} + ig_w W_\mu^{(\alpha)} \mathbb{V}_w^\dagger I_{w(\alpha)} \mathbb{V}_w + ig_y B_\mu Y_w , \quad (2.2.5)$$

na qual o operador Q_a é o a -ésimo gerador do grupo $SU(3)_c$ da cromodinâmica quântica; operador $I_{w(\alpha)}$ (*isospin*) é o α -ésimo gerador do grupo $SU(2)_w$ da interação fraca; Y_w é o operador de hipercarga do setor fraco. Além disto, \mathbb{V}_w , expressa pela matriz CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa), contém informações da mistura entre os quarks d , s e b , deixando os demais férmions inalterados.

O setor de *gauge* do modelo padrão é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^{(a)}G^{(a)\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^{(\alpha)}W^{(\alpha)\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (2.2.6)$$

onde $a = 1, \dots, 8$, e $\alpha = 1, 2, 3$, representam a soma sobre os bósons de cada setor. Os tensores dos campos de *gauge* ($G_{\mu\nu}^{(a)}$, $W_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ e $B_{\mu\nu}$) advêm dos seus respectivos campos como

$$G_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu G_\nu^{(a)} - \partial_\nu G_\mu^{(a)} - g_c f_{bc}^a G_\mu^{(b)} G_\nu^{(c)}, \quad (2.2.7)$$

para campo $SU(3)_c$ dos glúons,

$$W_{\mu\nu}^{(\alpha)} = \partial_\mu W_\nu^{(\alpha)} - \partial_\nu W_\mu^{(\alpha)} - g_w \epsilon_{\beta\gamma}^\alpha W_\mu^{(\beta)} W_\nu^{(\gamma)}, \quad (2.2.8)$$

para o campo de *gauge* $SU(2)_w$, e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.2.9)$$

para o campo de *gauge* $U(1)_y$. Cada um destes é invariante por uma transformação de *gauge*, que modifica a derivada covariante (2.2.5), de modo a manter a invariância da Lagrangiana (2.2.2).

O setor de Higgs é composto por

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (\mathbb{D}_\mu \phi)^\dagger \mathbb{D}^\mu \phi - \frac{\chi}{2} \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.2.10)$$

onde a derivada covariante

$$\mathbb{D}_\mu = \partial_\mu - ig_w W_\mu^{(a)} \sigma_{(a)} - ig_y \quad (2.2.11)$$

inclui interações eletrofracas. A quantidade χ distingue a fase simétrica ($\chi = +1$) da não simétrica ($\chi = -1$). Para a fase simétrica, $\langle \phi \rangle = 0$ e a simetria $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_y$ não é perdida; para a fase não simétrica, $\langle \phi \rangle \neq 0$, a simetria por $SU(2)_w \times U(1)_y$ é espontaneamente quebrada, dando origem à distinção entre os bósons massivos (Z^0 e W^\pm) do fóton (γ). Depois da quebra de simetria, $B_{\mu\nu}$ equivale ao campo de Maxwell $F_{\mu\nu}$.

O setor de Yukawa engloba a interação entre os férmions e o Higgs

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_f [h_f \bar{\Psi}_{f,R}(\phi^\dagger \Psi_{f,L}) + h_f^*(\bar{\Psi}_{f,L}\phi)\Psi_{f,R}] , \quad (2.2.12)$$

gerando dinamicamente a massa dos férmions.

Cada um dos setores acima, nas suas versões estendidas (inclusas no MPE) apresenta parcelas pares e ímpares por CPT – exceto o de Yukawa, que é puramente par [33]. Neste capítulo, vamos nos restringir à descrição da extensão do setor de *gauge* eletromagnético, especialmente sua componente par sob CPT .

2.3 O setor de *gauge* eletromagnético do MPE

Restringindo-nos às interações eletromagnéticas do MPE, a Lagrangiana relevante é

$$\mathcal{L}_{\text{LV-EM}} = -\frac{1}{4}(k_F)_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} + \frac{1}{2}(k_{AF})_\alpha\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_\beta F_{\gamma\delta} . \quad (2.3.1)$$

A parcela CPT -par é gerada pelo termo $(k_F)_{\alpha\beta\gamma\delta}$, cujas propriedades e parametrizações são mostradas na Seç. 2.4 e no final deste capítulo – suas componentes não birrefringentes são abordadas na Seç. 5.3. Quanto à parcela ímpar por CPT , esta é composta pelo termo de Carrow-Field-Jackiw (CFJ), $\frac{1}{2}(k_{AF})_\alpha\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_\beta F_{\gamma\delta}$. O tensor de fundo $(k_{AF})_\alpha$ dá origem a diversos fenômenos não usuais⁴ e foi vastamente investigado e limitado por observações experimentais, a serem mencionadas a seguir.

Dentre os fenômenos introduzidos por este termo está a possibilidade de birrefringência da luz no vácuo, sobre os quais dados sobre luz de galáxias distantes fornecem limitações da ordem de $(k_{AF})_0 \leq 10^{-33}$ eV [36]. Além de ter sido imposta esta forte restrição, o modelo foi analisado em diversos outros aspectos. Sua consistência acerca da causalidade foi discutida [37, 38], bem como as contribuições à QED [39, 40, 41, 42, 43]. Houve também a controvérsia da geração radioativa deste termo, através da introdução do $\bar{\psi}$, que gerou bastante discussão na literatura [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. Vale ainda mencionar a emissão de radiação Cherenkov no vácuo [56, 57, 58, 59], modificações no efeito Casimir [60, 61], estudos a temperatura finita com modificações na distribuição de Planck [62, 63, 64, 65] e, conseqüentemente, possíveis efeitos sobre a radiação cósmica de fundo [66, 67, 68, 69, 70].

Este trabalho, entretanto, se desenvolve na parcela par sob CPT do subsetor eletromagnético do MPE, cujas propriedades gerais serão discutidas a seguir.

⁴O termo $(k_0)_\alpha A^\alpha$, segundo Kostelecky e Mewes, produziria instabilidades na teoria, de modo que nem o estado fundamental seria estável.

2.4 O setor par sob CPT da eletrodinâmica do MPE

A contribuição par sob CPT da eletrodinâmica do MPE se dá por meio do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, que se acopla ao tensor eletromagnético $F_{\alpha\beta}$, tal como mostrado na (2.4.1) - termo que foi amplamente estudado por Kostelecky e Mewes [71]. A interação deste campo de fundo com o tensor eletromagnético permite, dentre outros fenômenos, a birrefringência da luz no vácuo [72], como mencionado anteriormente. Estudos permitem concluir que o tensor k_F possui 19 componentes, que geram 10 combinações lineares independentes relacionadas à birrefringência⁵. Para que se possa expor de maneira mais clara algumas propriedades do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, é necessário que se apresente a Lagrangiana da eletrodinâmica par sob CPT do MPE:

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}}^{CPT\text{-par}} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} , \quad (2.4.1)$$

na qual $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$.

O tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ é adimensional e apresenta as simetrias do tensor de Riemann e duplo traço nulo, ou seja

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta} , \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)_{\alpha\beta\nu\mu} , \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\mu\nu\beta\alpha} , \quad (2.4.2)$$

$$(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.4.3)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} + (k_F)_{\mu\alpha\beta\nu} + (k_F)_{\mu\beta\nu\alpha} = 0 , \quad (2.4.4)$$

implicando em apenas 19 componentes independentes. Estas componentes podem ser dispostas em 4 matrizes 3×3 , como é feito no trabalho de Kostelecky e Mewes [71]. Esta prescrição faz uso da analogia entre a eletrodinâmica do MPE no vácuo e a eletrodinâmica usual em meios contínuos. A ideia é definir a equação matricial em 6 dimensões representada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + k_{DE} & k_{DB} \\ k_{HE} & 1 + k_{HB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} , \quad (2.4.5)$$

onde se observa que os índices nas matrizes $k_{DE, DB, HE, HB}$ fazem menção às contribuições aos campos \mathbf{D} e \mathbf{H} advindas de \mathbf{E} e \mathbf{B} . As quatro matrizes contém todas as informações referentes ao tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ e podem ser escritas como⁶

$$(k_{DE})^{jk} = -2(k_F)^{0j0k} \quad (k_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{jab}\epsilon_{kcd}(k_F)^{abcd} \quad (2.4.6)$$

⁵É possível identificar as componentes não birrefringentes e separá-las em duas matrizes 3×3 , $\tilde{\kappa}_{e+}$ e $\tilde{\kappa}_{o-}$.

⁶Esta parametrização deixa invariantes as equações de Maxwell. As anisotropias induzidas pelo tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ são incorporadas nas relações constitutivas.

$$(k_{DB})^{jk} = -2(k_{HE})^{kj} = \epsilon_{kpq}(k_F)^{0jpa} , \quad (2.4.7)$$

para as quais, como vai ser provado a seguir, vale

$$\text{Tr}[k_{DB}] = \text{Tr}[k_{HE}] = 0 \quad (2.4.8)$$

$$\text{Tr}[k_{DE}] = -\text{Tr}[k_{HB}] . \quad (2.4.9)$$

É importante verificar que realmente há apenas 19 componentes independentes no tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. De acordo com as parametrizações (2.4.6,2.4.7) e propriedades (2.4.2,2.4.3), infere-se que

$$(k_{DE})^{jk} \rightarrow \text{simétrica} \rightarrow 6 \text{ componentes,}$$

$$(k_{HB})^{jk} \rightarrow \text{simétrica} \rightarrow 6 \text{ componentes,}$$

$$(k_{DB})^{jk} \rightarrow \text{sem simetria} \rightarrow 9 \text{ componentes,}$$

totalizando 21 componentes livres, isto é, há 2 vínculos que ainda não foram contabilizados. Note que o traço duplo nulo do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ permite escrever

$$(k_F)_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 2(k_F)_{0i}^{0i} + (k_F)_{ij}^{ij} = 0, \quad (2.4.10)$$

onde se identifica

$$2(k_F)_{0i}^{0i} = -(k_{DE})^i_i, \quad (2.4.11)$$

e, com um pouco de manipulações algébricas, observa-se que

$$\begin{aligned} (k_{HB})^{jj} &= \frac{1}{2}\epsilon_{jab}\epsilon_{jcd}(k_F)^{abcd} \\ (k_{HB})^{jj} &= \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})(k_F)^{abcd} = (k_F)^{abab} \\ -(k_{HB})^j_j &= (k_F)^{ab}_{ab}, \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

implicando em

$$\begin{aligned} (k_F)_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= -(k_{DE} + k_{HB})^i_i \\ \text{Tr}[k_{DE}] &= -\text{Tr}[k_{HB}] . \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

O vínculo que resta vem da identidade (2.4.4)

$$(k_F)_{0ijk} + (k_F)_{0jki} + (k_F)_{0kij} = 0 , \quad (2.4.14)$$

que, multiplicada por ϵ_{jkp} , fornece

$$\epsilon_{jkp}(k_F)_{0ijk} + \epsilon_{jkp}(k_F)_{0jki} + \epsilon_{jkp}(k_F)_{0kij} = 0. \quad (2.4.15)$$

Multiplicando agora por δ_{ip} , e sabendo que $(k_{DB})_{jk} = \epsilon_{kpq}(k_F)_{0jpq}$, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_{jkp}(k_F)_{0pjk} + \epsilon_{jkp}(k_F)_{0jkp} + \epsilon_{jkp}(k_F)_{0kpj} &= 0 , \\ \epsilon_{pjk}(k_F)_{0pjk} + \epsilon_{jkp}(k_F)_{0jkp} + \epsilon_{kpj}(k_F)_{0kpj} &= 3(k_{DB})_{pp} = 0 , \\ \text{Tr}(k_{DB}) &= 0 , \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

deixando claro que há $(21 - 1 - 1 = 19)$ componentes independentes do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Quanto às investigações experimentais, especificamente a birrefringência, há a possibilidade da observação de dispersão de pulsos luminosos e mudanças na direção de polarização da luz. As limitações sobre os coeficientes adimensionais relacionados a este efeito é da ordem de 3×10^{-16} a partir da observação de luz produzida por objetos galáticos e extra-galáticos. Restrições da ordem de 2×10^{-32} , sobre outros coeficientes, são possíveis a partir de polarimetria espectral comparativa de objetos cosmológicos distantes. Há outros coeficientes do modelo que não estão relacionados a birrefringência: estes são limitados a partir de testes de alta sensibilidade em osciladores de cavidade estabilizados. Para mais detalhes acerca dos experimentos, recomenda-se a Ref. [34].

Variações na velocidade da luz no vácuo também são esperadas em modelos com violação da simetria de Lorentz. Resultados experimentais, advindos de uma versão moderna do interferômetro de Michelson-Morley, publicados por H. Müller *et al.* em 2003 [73], permitem limitar anisotropias na velocidade da luz de maneira bastante restritiva. O limite imposto por este resultado é $\frac{\Delta_{\theta c}}{c_0} = (2.6 \pm 1.7) \times 10^{-15}$, onde $\Delta_{\theta c}$ representa a variação na velocidade da luz de acordo com a posição da Terra ao longo do ano.

No que diz respeito às modificações possíveis da QED, as possibilidades são muitas. As QEDs modificadas, a partir da introdução de interações do campo eletromagnético com campos de fundo, permitem uma variedade de efeitos potencialmente observáveis. Por exemplo, na QED usual, um fóton, propagando-se no vácuo, não pode decair em mais *on-shell*-fótons (em qualquer ordem tomada na teoria de perturbação). No entanto, segundo um trabalho de Kostelecky e Pickering, publicado em 2003 [74], a violação da simetria de

Lorentz confere amplitude de probabilidade não nula para este processo a partir de correções radiativas. Este trabalho inclui termos não renormalizáveis, o que remete a outro trabalho, de Kostelecky e Mewes, publicado em 2009 [72], que discute, além do comportamento de fótons na presença de campos de fundo, várias propriedades da luz propagando no vácuo. Os coeficientes envolvidos no modelo são limitados por meio de diversos resultados experimentais, dentre eles, os já mencionados dados polarimétricos e dispersivos de raios-gama de fontes distantes e dados experimentais obtidos a partir de cavidades estabilizadas, mencionados na Ref. [75].

As investigações envolvendo o MPE se estendem também à interação da luz com elétrons, prótons, nêutrons, mésons, múons e outras partículas. Estas possibilidades tornam possíveis imposições variadas sobre os coeficientes relacionados à violação da simetria de Lorentz e CPT . A exemplo de testes de violação da invariância de Lorentz e de CPT em cenários com interação entre férmions e o setor eletromagnético, pode-se mencionar o trabalho de Y. Stadnik *et. al* de 2014 [76]. Eles consideram férmions interagentes com campos de fundo e restringem os coeficientes do modelo a partir de dados experimentais relacionados ao fator giro-magnético das partículas. Neste modelo, interações na forma de dipolo, advindas da interação de um campo de fundo com o *spin* das partículas, gerariam efeitos observáveis de violação de CPT .

Um dos objetivos deste trabalho é investigar as implicações de um novo acoplamento par sob CPT do modelo padrão estendido sobre os momentos de dipolo elétrico e momento de dipolo magnético anômalo do elétron. O acoplamento proposto envolve o tensor de rank-4, investigado por Kostelecky e Mewes em 2002, mas esta proposta não está inclusa na extensão original do MP destes autores [72]. Ademais, o modelo exposto no próximo capítulo apresenta propriedades distintas daquelas descritas no trabalho daqueles autores. O modelo proposto por eles não faz menção ao setor fermiônico, mas puramente ao setor fotônico livre. Dentre os tópicos de maior interesse está o comportamento distinto dos termos dos modelos sob transformações discretas C , P e T .

2.4.1 Comportamento do modelo sob as operações discretas C , P e T

É muito importante analisar o comportamento da Lagrangiana de um modelo sob as transformações discretas C , P e T . Este trabalho tem como objetivo limitar alguns modelos de acoplamentos a partir de dados experimentais referentes a momento de dipolo elétrico do elétron. Sabe-se que o termo de dipolo elétrico deve violar P e T , de modo que as componentes envolvidas na geração destes termos devem ser compatíveis com estas violações. Por ora, o relevante é analisar como os termos da Lagrangiana (2.4.1) se comportam sob estas transformações, uma vez que este comportamento está sujeito a alterações dependentes do acoplamento.

O tensor eletromagnético é construído a partir das componentes dos campos elétrico, E^i , e magnético, B^i ,

	C	P	T	CPT
E^i	-	-	+	+
B^i	-	+	-	+
A^0	-	+	+	-
A^i	-	-	-	-
∂_0	+	+	-	-
∂_i	+	-	+	-

Tabela 2.1: Sinais adquiridos por algumas quantidades importantes sob transformações C , P e T .

que estão sujeitas a alterações quando transformadas por C , P e T . As componentes do tensor $(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta}$ são, por outro lado, tomadas como constantes e, por conseguinte, não sofrem alterações por estas transformações discretas. Para que se possa examinar estas propriedades, é necessário contrair os índices da Lagrangiana (2.4.1) para explicitar os campos. Tal procedimento fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MPE}}^{CPT\text{-par}} = & -\frac{1}{4}(2F_{0i}F^{0i} + 2F_{ij}F^{ij}) \\ & -\frac{1}{4}\left(4(k_F)_{0i0j}F^{0i}F^{0j} + 2(k_F)_{0iab}F^{0i}F^{ab} + 2(k_F)_{cd0j}F^{cd}F^{0j} + (k_F)_{abcd}F^{ab}F^{cd}\right). \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Por definição

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k. \quad (2.4.18)$$

Isto nos leva, fazendo uso das parametrizações (2.4.6) e (2.4.7), a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MPE}}^{CPT\text{-par}} = & \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ & + \frac{1}{2}[(k_{DE})^{ij}E^iE^j + (k_{DB})^{ij}E^iB^j - (k_{HB})^{ij}B^iB^j]. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

É conveniente expor em uma tabela o comportamento de algumas quantidades sob as transformações C , P e T . O estudo do comportamento dos modelos sob estas transformações é um importante teste de consistência, posto que permite comparar as propriedades dos termos do modelo com as expectativas experimentais.

A conclusão mais evidente é, como esperado, que a Lagrangiana (2.4.1) é invariante por CPT , tendo em vista as propriedades dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} sob estas transformações. Além disto, é conveniente explicitar como as parcelas referentes às matrizes $k_{DE, DB, HE, HB}$ se comportam sob C , P e T . A classificação se dá a partir dos sinais adquiridos pelos termos aos quais estas estão relacionadas. A tabela 2.2 condensa as conclusões. Para maiores detalhes acerca das propriedades destas e outras quantidades físicas relevantes perante as transformações discretas, consulte o apêndice A.

	C	P	T	CPT	CP
$(k_{DE})_{ij}E^iE^j$	+	+	+	+	+
$(k_{DB})_{ik}E^iB^k$	+	-	-	+	-
$(k_{HE})_{ki}E^iB^k$	+	-	-	+	-
$(k_{HB})_{lk}B^lB^k$	+	+	+	+	+

Tabela 2.2: Sinais adquiridos, pelos termos das matrizes $k_{DE, DB, HE, HB}$, sob C , P e T .

Uma parametrização alternativa

A tabela 2.2 evidencia que a parametrização (2.4.6,2.4.7) permite separar os setores com paridades⁷ distintas do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, mas esta não é a única maneira de fazê-lo. Outra forma, especialmente útil para descrever a birrefringência do vácuo, segue

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = \frac{1}{2}(k_{DE} + k_{HB})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = \frac{1}{2}(k_{DE} - k_{HB})^{jk} - \frac{1}{3}\delta^{jk}\text{Tr}(k_{DE}), \quad (2.4.20)$$

$$(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = \frac{1}{2}(k_{DB} + k_{HE})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \frac{1}{2}(k_{DB} - k_{HE})^{jk}, \quad (2.4.21)$$

$$\kappa_{\text{tr}} = \frac{1}{3}\text{Tr}(k_{DE}). \quad (2.4.22)$$

De acordo com a tabela 2.2, é claro que as matrizes $(\tilde{\kappa}_{e\pm})^{jk}$ apresentam paridade par, enquanto as $(\tilde{\kappa}_{o\pm})^{jk}$ são de paridade ímpar

$$P(\tilde{\kappa}_{e\pm}) \rightarrow \tilde{\kappa}_{e\pm}, \quad (2.4.23)$$

$$P(\tilde{\kappa}_{o\pm}) \rightarrow -\tilde{\kappa}_{o\pm}. \quad (2.4.24)$$

Uma vez expostas as definições, parametrizações e análise do comportamento sob operações discretas, estamos em condições de investigar as implicações de um novo acoplamento não mínimo na equação de Dirac. Antes disso, contudo, exporemos no próximo capítulo uma revisão sobre momentos de dipolo elétrico e magnético na equação de Dirac.

⁷Por “paridade par”, entenda que, sob transformação de paridade (P), o termo em questão não é alterado, enquanto “paridade ímpar” implica em um sinal global de $(-)$ após a transformação de paridade.

Capítulo 3

Momentos de dipolo elétrico e magnético do elétron

Neste capítulo se faz um breve relato histórico acerca dos momentos de dipolo elétrico (EDM) e magnético (MDM) do elétron, suas propriedades e relação com a equação de Dirac. Discute-se, também, o limite não relativístico da equação de Dirac e o comportamento dos termos de EDM e MDM perante as operações discretas C , P e T .

3.1 Da descoberta do *spin* ao momento magnético anômalo do elétron

Dentre as investigações de maior importância do século XX está o estudo das linhas espectrais dos elementos químicos. As linhas de absorção e emissão do espectro atômico do hidrogênio receberam descrições matemático-empíricas que foram posteriormente reproduzidas pelo modelo atômico de Bohr, que continha muitos problemas teóricos. Estudos sobre o espectro atômico permitiram a descoberta do hélio e, posteriormente, quase todos os avanços da astronomia moderna. Os experimentos desenvolvidos neste campo tornaram-se muito precisos rapidamente, de modo que pequenos desvios, com respeito às previsões teóricas, tornaram-se passíveis de observação. Assim descobriu-se que o espectro do hidrogênio possuía linhas espectrais que, quando observadas em maior resolução, revelavam-se como um agrupamento de duas ou mais linhas muito próximas - tratava-se da estrutura fina. Conseqüentes desenvolvimentos ao longo do século levaram à observação de mais subestruturas, como a estrutura hiperfina e o *Lamb shift*¹, devido à ação de mecanismos

¹O *Lamb shift* foi medido por W. Lamb e R. Retherford em 1947 [77]. W. Lamb recebeu o prêmio Nobel em 1955 por estudos relacionados ao *Lamb shift*.

físicos importantes, porém menos significativos em escala de magnitude.

A correção mais significativa sobre o espectro do hidrogênio é a responsável pela estrutura fina. Parte desta correção vem de efeitos relativísticos, desprezados na equação de Schrödinger, não relativística por concepção. A outra parcela se deve ao acoplamento *spin*-órbita. É conveniente lembrar que o trabalho realizado por Stern-Gerlach [78], sem fazer menção alguma à espectroscopia, permitiu concluir que o momento de dipolo magnético intrínseco do elétron (*spin*) é quantizado: assume apenas dois valores. Este grau de liberdade extra para o elétron, configurando um quarto número quântico (além dos n , l e m), já era esperado por Pauli. Independentemente de Stern e Gerlach, os jovens físicos Uhlenbeck e Goudsmit, em 1925, a partir da ideia de um elétron girante², propuseram uma explicação para o efeito Zeeman observado no espectro atômico. Segundo esta proposta, o momento de dipolo magnético

$$\boldsymbol{\mu} = g \left(\frac{q}{2m} \right) \mathbf{S} , \quad (3.1.1)$$

interage com o campo magnético gerado pelo movimento relativo do núcleo com respeito ao elétron. Em outras palavras, no referencial do elétron, o núcleo gira em torno dele, gerando um campo magnético, como o de uma espira de corrente. O modelo de Uhlenbeck e Goudsmit falhava por um fator de 2, o que foi corrigido por Thomas³, que impôs correções cinemático-relativísticas no modelo, relacionadas ao efeito conhecido como precessão de Thomas [79]. Estes desenvolvimentos determinaram que o fator giromagnético deveria ser $g = 2$, algo inédito e inexplicado naquela época.

Até o advento do famoso trabalho de Dirac em 1928 [6], $g = 2$ era apenas um fato experimental, pois não havia teoria alguma que o descrevesse corretamente. Este trabalho contém a equação relativística para o elétron, que fornece automaticamente $g = 2$ no limite não relativístico (vide Seç. 3.3), levando-o a afirmar [1]:

“It gave just the properties one needed for an electron. That was an unexpected bonus for me, completely unexpected.”

Além desta previsão, o *paper* contém uma discussão sobre dois termos adicionais que descreveriam um elétron sob a ação de campos magnéticos e elétricos, a saber

$$\frac{e\hbar}{c}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) + i \frac{e\hbar}{c} \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) , \quad (3.1.2)$$

de acordo com a notação original.

²Esta hipótese é incompatível com a relatividade restrita, uma vez que a velocidade periférica de rotação deveria ser maior que c , revelando o caráter incipiente e provisório das ideias iniciais referentes ao observável *spin*.

³O *spin* \mathbf{S} é duas vezes mais eficaz na produção de dipolo magnético do que o momento angular orbital \mathbf{L} , sendo esta uma maneira simples de explicar o papel desempenhado por $g = 2$.

Em analogia ao termo do momento de dipolo magnético (MDM), a segunda interação representa um momento de dipolo elétrico (EDM), sobre o que Dirac comentou:

“The electric moment, being a pure imaginary, we should not expect to appear in this model. It is doubtful whether the electric moment has any physical meaning, since the Hamiltonian [...] that we started from is real, and the imaginary part only appeared when we multiplied it up in an artificial way in order to make it resemble the Hamiltonian of previous theories.”

Até o momento, nesta seção, foi declarado que $g = 2$, o que não encerra toda a verdade, visto que o fator giromagnético do elétron é ligeiramente diferente de 2, como será explicado a seguir.

Após o período belicoso da 2^a Guerra Mundial, os desenvolvimentos da engenharia de radiofrequência e microondas foram postos rapidamente a serviço dos laboratórios. A detecção da estrutura hiperfina abriu espaço para novas investigações. Uma solução para a discrepância, segundo propôs Schwinger⁴ em 1947 [80], era a existência de uma contribuição adicional de momento de dipolo magnético, ou seja

$$\mu = (1 + a) \frac{q\hbar}{2m}, \quad (3.1.3)$$

onde a é frequentemente chamado de *anomalia*, o que justifica a denominação atual de “momento magnético anômalo” .

Este momento magnético anômalo de fato ajusta a teoria aos dados experimentais. Sobre isto, Schwinger alegou:

“The new Hamiltonian is superior to the original one in essentially three ways: it involves the experimental electron mass rather than the unobservable mechanical mass; an electron now interacts with the radiation field only in the presence of an external field [...] the interaction of an electron with an external field is now subject to a finite radiative correction.”

A linguagem do trecho é típica de QED. Nele, Schwinger esclarece que o valor medido de grandezas físicas inerentes aos férmions, como a massa, sofrem influência da interação. A correção proposta por ele, $a = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.00116$, foi verificada no mesmo ano por Kusch e Foley com precisão de 4% [81]. Daí em diante, medições cada vez mais precisas foram realizadas, havendo uma excelente concordância das medidas experimentais com as previsões teóricas.

⁴Julian Schwinger [1918-1994], nascido em Nova Iorque, foi um dos Físicos mais importantes do século XX. Com um talento muito precoce, foi detentor de numerosos prêmios, dentre eles o Nobel de Física de 1965, dividido com Tomonaga e Feynman. Schwinger é mais famoso por suas contribuições à QED, no entanto ele se envolveu com problemas fundamentais de natureza geral. Os dois volumes do “*Particles, Sources, and Fields*”, de sua autoria, condensam uma abordagem sistemática de partículas interagentes, fornecendo um método geral para o tratamento das interações conhecidas até o momento.

3.2 Os momentos de dipolo na equação de Dirac

A equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 , \quad (3.2.1)$$

proposta em 1928 [6], é um marco histórico para ciência. Na presença de um campo eletromagnético, vale o acoplamento mínimo, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, de modo que a equação de Dirac passa a ser lida na forma

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 . \quad (3.2.2)$$

De uma simplicidade elegante, esta equação funde ideias da mecânica quântica, relatividade restrita e invariância de *gauge*, fornecendo numerosas previsões experimentais. Não obstante, é uma das bases da QED, que serve de modelo para as outras duas interações fundamentais no MP.

Um dos sucessos imediatos desta equação foi a previsão, de maneira muito consistente, do fator giromagnético g correto para o elétron. Este parâmetro expressa a relação entre o *spin* \mathbf{S} e o momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ do elétron, a saber

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S} , \quad (3.2.3)$$

com $g = 2$.

Outro sucesso, não menos aclamado, foi a previsão de anti-partículas. A primeira delas, o pósitron, foi detectada pouco depois por Anderson [7]. As anti-partículas, segundo Dirac, estavam relacionadas com as soluções de energia negativa⁵. Esta descoberta, entretanto, levou a um mistério de implicações bem mais profundas: o porquê da natureza preferir um universo feito de matéria e não anti-matéria. Uma explicação para o tratamento assimétrico entre matéria e anti-matéria pela natureza, muito provavelmente, vai exigir nova Física, além do MP⁶. Neste cenário, é esperado que existam outras causas para violação de *CP*, além daquela descrita pela matriz CKM [23, 24].

A matriz CKM advém de uma proposta para descrever alguns processos semileptônicos. A ideia base é bastante simples: deve-se usar “misturas de quarks” em vez dos quarks “físicos” na teoria, por exemplo

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c, \quad s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c, \quad (3.2.4)$$

representariam os quarks corretos a serem usados. O novo conjunto de quarks pode ser obtido a partir dos

⁵A interpretação atual, devida a Feynman, prescreve que anti-partículas representam partículas cujo fluxo temporal é invertido

⁶Vale mencionar que a violação de *CP* é uma das três condições de Sakharov, juntamente da bariogênese e desequilíbrio térmico. Estas condições são fundamentais para possibilitar a assimetria entre matéria e anti-matéria no universo.

antigo a partir da transformação

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

na qual V_{ud} indica o acoplamento do quark up ao $down$ no processo $u \rightarrow d + W^-$. Os valores das componentes V_{ij} são obtidos de maneira puramente empírica, e os dados mais recentes fornecem [82]

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00015 & 0.22534 \pm 0.00065 & 0.00351^{+0.00015}_{-0.00014} \\ 0.22520 \pm 0.00065 & 0.97344 \pm 0.00016 & 0.0412^{+0.0011}_{-0.0005} \\ 0.00867^{+0.00029}_{-0.00031} & 0.0404^{+0.0011}_{-0.0005} & 0.999146^{+0.000021}_{-0.000046} \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Ainda sobre a violação de CP , é indispensável que se mencione os termos de dipolo propostos por Dirac. Segundo seu *paper*, o Hamiltoniano de dipolo, na notação atual, é

$$H_{\text{dipolo}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.2.7)$$

Sobre o EDM na (3.1.2), pode-se inferir que este deva apontar na direção do $spin$. Desta maneira, o análogo elétrico do momento de dipolo magnético deve ter a forma

$$\mathbf{d} = \eta \left(\frac{q}{2mc} \right) \mathbf{S}, \quad (3.2.8)$$

onde η tem o mesmo papel do fator giromagnético g .

Neste momento é interessante observar como estes termos se transformam sobre C , P e T . Observe a tabela 3.1.

	\mathbf{E}	\mathbf{B}	$\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{d}
C	-	-	-
P	-	+	+
T	+	-	-
CPT	+	+	+

Tabela 3.1: Propriedades de transformação por C , P e T dos termos de EDM e MDM.

Uma vez que as propriedades são multiplicativas, observa-se que o termo de MDM, $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$, é invariante sob C , P e T separadamente, ou seja, também é invariante sob CP ou qualquer outra combinação destas operações. Quanto ao termo de EDM, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, é evidente que há violação de P e T e, conseqüentemente de CP e CT . Sobre a análise do comportamento sob estas transformações, Ramsey faz um comentário bastante pertinente [83]:

“However, it should be emphasized that while such arguments are appealing from the point of view of symmetry, they are not necessarily valid. Ultimately the validity of all such symmetry arguments must rest on experiment.”

A busca por EDMs remete à sugestão de Purcell e Ramsey em 1950 [84]. Segundo eles, a verificação de EDMs em nêutrons evidenciaria violação de CP na interação forte. Pouco depois da sugestão, um experimento em Oak Ridge impôs um limite superior de 5×10^{-20} e cm sobre a magnitude do momento de dipolo do nêutron, $d_{\text{nêutron}}$ [85]. Interessante que tanto esta proposta quanto o experimento precederam as investigações e verificação da violação de paridade na interação fraca.

Segundo o MP, o EDM do elétron deve ser menor que 10^{-38} e cm. Para o múon, o limite superior é 2×10^{-36} e cm. Ambos os valores estão bem distantes do alcance dos experimentos atuais: 1.6×10^{-27} e cm para o elétron e 1.8×10^{-19} e cm para o múon. No que diz respeito ao EDM do nêutron, o limite superior imposto pelo MP é 10^{-32} e cm, enquanto os experimentos sondam até 2.9×10^{-26} e cm. À primeira vista, estes números podem ser bastante desmotivantes, mas um olhar cuidadoso muda esta perspectiva, visto que qualquer verificação experimental, acima dos valores previstos pelo MP, indicaria Física nova. Estas verificações alimentam também a expectativa de que outros mecanismos de violação de CP , que não a matriz CKM, esclareçam o mistério da predominância da matéria sobre a anti-matéria no Universo.

3.3 O limite não relativístico da equação de Dirac e o fator giromagnético g

É bastante instrutivo mostrar que a equação de Dirac, no limite não relativístico, leva automaticamente ao valor “correto” do fator giromagnético. O ponto de partida é a equação de Dirac modificada pelo acoplamento mínimo ($D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$), ou seja, na presença do campo eletromagnético,

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0 , \quad (3.3.1)$$

que pode ser escrita na forma

$$i\gamma^0 \partial_t \Psi = (-i\gamma^i \partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)\Psi , \quad (3.3.2)$$

$$i\partial_t \Psi = (-i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + e\gamma^0 \gamma^0 A_0 - e\gamma^0 \gamma^i A^i + m\gamma^0)\Psi . \quad (3.3.3)$$

Definindo as matrizes

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.4)$$

infere-se que $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$ e que $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{I}_{4 \times 4}$. Além disto, pode-se trabalhar no espaço dos momentos, o que significa tomar $p^i = -i\partial_i$. Estas considerações permitem escrever

$$i\partial_t \Psi = [\alpha^i (p^i - eA^i) + eA_0 + m\gamma^0] \Psi, \quad (3.3.5)$$

que, na forma matricial, é expressa como

$$i\partial_t \Psi = \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} \Psi. \quad (3.3.6)$$

Por razões que em pouco serão claras, definir-se-á o espinor de 4 componentes, Ψ , composto por 2 espinores de 2 componentes cada. Além disto, procura-se soluções cujas funções densidade de probabilidade são independentes do tempo. Estas diretrizes implicam na seguinte forma para o espinor Ψ :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \exp(-iEt), \quad (3.3.7)$$

que, aplicada à (3.3.6), resulta em

$$\begin{pmatrix} E\psi \\ E\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [eA_0 + m]\psi + [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]\chi \\ [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]\psi + [eA_0 - m]\chi \end{pmatrix}, \quad (3.3.8)$$

que equivale a

$$[E - eA_0 - m]\psi - [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]\chi = 0, \quad (3.3.9)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]\psi - [E - eA_0 + m]\chi = 0. \quad (3.3.10)$$

As componentes ψ e χ podem ser isoladas, fornecendo

$$\psi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{E - eA_0 - m} \chi \quad , \quad \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{E - eA_0 + m} \psi \quad . \quad (3.3.11)$$

Observe que os denominadores diferem pelo sinal da massa m . Por esta razão, a componente ψ é chamada de componente maior (*large*) e a χ de componente menor (*small*). No limite não relativístico, vale que a energia E da partícula é praticamente sua massa m , ou seja, a componente maior, ψ , é predominante, justificando sua denominação. Substituindo a segunda equação na primeira das (3.3.11), de modo a isolar a componente ψ , tem-se

$$(E - eA_0 - m)\psi = \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2}{2m} \psi \quad , \quad (3.3.12)$$

$$(E - m)\psi \equiv H\psi = \left(\frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2}{2m} + eA_0 \right) \psi \quad , \quad (3.3.13)$$

onde se usou que o Hamiltoniano não relativístico, H , equivale à diferença $E - m$, sendo E a energia relativística do sistema.

É necessário desenvolver o operador $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2$ a partir de uma identidade muito importante. Observe

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \sigma^i \sigma^j a^i b^j = \frac{1}{2} \{ [\sigma^i, \sigma^j] + \{ \sigma^i, \sigma^j \} \} a^i b^j = \{ i\epsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \} a^i b^j \quad (3.3.14)$$

$$= a^i b^i + i\sigma^k (\epsilon_{ijk} a^i b^j) \quad , \quad (3.3.15)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad . \quad (3.3.16)$$

De acordo com esta identidade, pode-se escrever o operador $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2$ como

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] \quad (3.3.17)$$

$$= (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{p} - e\mathbf{p} \times \mathbf{A} - e\mathbf{A} \times \mathbf{p}] \quad . \quad (3.3.18)$$

É de fundamental importância notar que o operador momento, \mathbf{p} , é um operador diferencial que atua sobre todos os elementos à sua direita. O processo de simplificação do operador $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$ consiste em se deslocar o operador \mathbf{p} para a direita, de modo que este atue somente sobre o espinor ψ . Regressando às operações, é evidente que $\mathbf{p} \times \mathbf{p} = 0$. O último termo entre colchetes, $e\mathbf{A} \times \mathbf{p}$, já satisfaz a prescrição. O termo restante é apenas o $e\mathbf{p} \times \mathbf{A}$. Observe o efeito deste sobre o espinor ψ :

$$e\mathbf{p} \times \mathbf{A}\psi = -ie\nabla \times (\mathbf{A}\psi) = -ie\psi(\nabla \times \mathbf{A}) - ie\nabla\psi \times \mathbf{A} = -ie\mathbf{B}\psi - e\mathbf{A} \times \mathbf{p}\psi \quad . \quad (3.3.19)$$

Por outro lado,

$$i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{p} - e\mathbf{p} \times \mathbf{A} - e\mathbf{A} \times \mathbf{p}] = i\boldsymbol{\sigma} \cdot [ie\mathbf{B}\psi + e\mathbf{A} \times \mathbf{p}\psi - e\mathbf{A} \times \mathbf{p}] = -e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} . \quad (3.3.20)$$

Logo, a (3.3.13) é reescrita como

$$H\psi = \left(\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2m} + eA_0 \right) \psi , \quad (3.3.21)$$

que corresponde à equação de Pauli. Observe que o momento de dipolo magnético, $\boldsymbol{\mu}$, é dado por $\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{e}{2m}\mathbf{S}$, onde se identifica claramente $g = 2$, por comparação com a (3.2.3). O resultado $g = 2$ se aplica a elétrons, pósitrons e férmions sem estrutura interna; o mesmo não acontece com prótons e nêutrons, como será discutido a seguir.

3.4 Os fatores de forma para $spin \frac{1}{2}$

Segundo o modelo padrão, o elétron é um férmion de $spin \frac{1}{2}$ sem estrutura interna, ou seja, é uma partícula elementar. Por outro lado, existem outras partículas de $spin \frac{1}{2}$ que apresentam estruturas internas, a exemplo dos prótons e nêutrons, que apresentam $spin \frac{1}{2}$ e são compostos por três quarks, dois *up* e um *down* e dois *down* e um *up*, respectivamente. A estrutura interna das partículas é responsável por as conferir g bem diferente de 2.

A crença de que o próton apresentava $g = 2$, comportando-se como um férmion elementar, era defendida por Pauli. Esta hipótese foi contrariada após experimentos realizados por Stern e colaboradores, que mediram $g_{\text{próton}} \approx 5.5$ para o próton⁷ [87]. No que diz respeito ao fator giromagnético do nêutron, o valor experimental atual é $g_{\text{nêutron}} = -3.82608545(90)$ ⁸. A primeira medida do MDM do nêutron foi realizada por Bloch e Alvarez, em 1940, em Berkeley [88].

Como mencionado, estes resultados, sob o ponto de vista atual, podem ser interpretados como consequência da estrutura de quarks dentro dos prótons e nêutrons. No entanto, até o momento não existe um tratamento analítico da interação entre quarks para descrever os momentos dipolo elétrico e magnético de hádrons. Pode-se dizer que, no limite de baixas energias, o problema do confinamento e o fato da QCD não admitir ferramentas perturbativas, impedem que se trate o problema de maneira analítica. Uma solução provisória vem com os fatores de forma: funções que englobam efeitos de interações e informações acerca da

⁷Curiosamente, os quarks contribuem uma parcela muito pequena para com o momento dipolo do próton. O modelo de quarks fornece apenas 10-20% do esperado. Apesar de A. W. Thomas [86] alegar que este problema está resolvido, experimentos ainda são inconclusivos. Atualmente se acredita que os glúons, mediadores da interação forte cujo $spin$ é 1, contenham a contribuição que falta.

⁸O sinal negativo indica que, para o nêutron, o momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ aponta na direção oposta ao $spin \mathbf{S}$.

distribuição interna de cargas.

As contribuições efetivas, advindas da distribuição interna de cargas e *spin*, sugerem que o Hamiltoniano de dipolo admita a forma

$$H_{\text{dipolo}} = -\frac{1}{2}(f_m \bar{\Psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \Psi + i f_e \bar{\Psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 \Psi) , \quad (3.4.1)$$

onde Ψ representa o espinor do férmion, enquanto f_e e f_m representam os fatores de forma para a contribuição de EDM e de MDM anômalo, respectivamente. É necessário observar que os fatores de forma $f_{e,m}$ devem ter dimensão de (massa)⁻¹, ou simplesmente dimensão -1 , o que impede a renormalização da teoria. Todavia, isto não impossibilita que estes termos sejam usados em uma teoria efetiva. Estes termos podem ser devidos a correções radiativas, dadas por *loops* em ordens mais altas na teoria de perturbação. Entretanto, a precisão do cálculo é limitada em virtude de se usar teorias efetivas neste regime. A necessidade de se usar modelos e teorias efetivas advém da dificuldade de descrever, com a QCD completa, hádrons em baixas energias. Lembremos que, neste cenário, estamos fora do regime perturbativo da QCD, tornando muito difícil a descrição analítica destes.

3.5 O momento magnético anômalo do elétron

Como mencionado anteriormente, medições muito precisas do espectro atômico evidenciaram desvios de $g = 2$. Estes desvios poderiam ser incorporados na teoria caso se admitisse que g fosse generalizado a partir de um parâmetro de anomalia a

$$g = 2(1 + a) . \quad (3.5.1)$$

Uma das maneiras de abarcar este efeito é incluir na Lagrangiana o termo de interação de Pauli

$$\frac{e}{4m_e} a \bar{\Psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \Psi , \quad (3.5.2)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \quad (3.5.3)$$

na qual $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e γ^μ são as matrizes de Dirac, definidas na (3.3.4).

É muito oportuno fazer uma curta digressão e destacar a interpretação física do bilinear $\bar{\Psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \Psi$ na (3.5.2) – isto é feito de maneira muito elegante na Ref. [89]. Segundo da Rocha e J. Vaz, os bilineares de Dirac representam os observáveis do férmion, por exemplo: $\frac{e}{2m} \bar{\Psi} \sigma^{0i} \Psi$ ($\frac{e}{2m} \bar{\Psi} \sigma^{ij} \Psi$) corresponde à densidade

de momento elétrico (magnético). Observe que o bilinear em questão, a saber,

$$\bar{\Psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \Psi = 2\bar{\Psi} F_{0i} \sigma^{0i} \Psi + \bar{\Psi} F_{ij} \sigma^{ij} \Psi , \quad (3.5.4)$$

representa, de acordo com esta interpretação, acoplamentos entre campo elétrico e densidade de momento elétrico ($F_{0i}\sigma^{0i}$) e entre campo magnético e densidade de momento magnético ($F_{ij}\sigma^{ij}$). A forma destes acoplamentos, contudo, permite apenas contribuições de MDM. Na Seção 3.6, nota-se que um fator de γ^5 transforma as densidades de momento elétrico em magnético e vice-versa, de modo que haverá apenas contribuição de EDM. Estas interpretações fornecem uma transparência notável no significado dos bilineares de Dirac, especialmente na classe de acoplamentos entre férmions abordada no capítulo 7.

Observe ainda que o termo (3.5.2), embora mantenha a invariância de calibre, bem como a covariância de Lorentz⁹, danifica as propriedades de elegância e simplicidade prezadas por Dirac. Hoje se sabe, devido ao teorema da renormalização, que termos desta natureza não podem aparecer em teorias fundamentais, porque correspondem a operadores de dimensão 5. Sobre isto, um breve comentário há de ser feito durante a discussão do primeiro acoplamento não mínimo proposto. Por ora, é relevante dizer que termos de dimensão 5 aparecem em flutuações de *loops* virtuais que podem servir de canal para a detecção de efeitos gerados por partículas de massa além do alcance experimental atual. Junto à violação de *CP*, este é um argumento muito forte de como a detecção de EDMs pode fornecer evidências, ou pelo menos especulações, sobre Física nova.

A maneira mais rigorosa de explicar o momento magnético anômalo do elétron, no entanto, foi encontrada primeiramente por Schwinger, em 1947. Ao usar o ferramental da QED, ele calculou a contribuição quântico-relativística predominante para a :

$$a_{\text{Schwinger}} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.00116 , \quad (3.5.5)$$

onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ é a constante de estrutura fina.

O excelente ajuste aos dados experimentais iniciou uma era de experimentos e cálculos de alta precisão. A QED foi testada de maneira muito intensa e desvios de suas previsões começaram a ser procurados pelo potencial de indicar novas fenomenologias. Como resultado de esforços pioneiros, incluindo os que renderam a H. Dehmelt e seus colaboradores o Nobel [90], o momento magnético anômalo do elétron foi medido com precisão fantástica em 12 casas decimais, ou seja, uma parte por trilhão. O valor mais preciso até 2008,

⁹Não confundir covariância de Lorentz com invariância de Lorentz. A primeira está relacionada a manutenção da forma matemática das leis físicas com respeito a transformações de Lorentz, a segunda está relacionada à homogeneidade e isotropia do espaço.

devido a Hanneke, Fogwell e Gabrielse [91] é

$$a_{\text{exp}} = 0.001\,159\,652\,180\,73(28) , \quad (3.5.6)$$

onde os números entre parênteses representam uma incerteza de 1σ , para mais ou para menos, nas últimas duas casas decimais. Em outras palavras, há $\approx 95\%$ de chance do valor real de a estar entre $a_{\text{exp}} = 0.001\,159\,652\,180\,45$ e $a_{\text{exp}} = 0.001\,159\,652\,181\,01$. Este resultado experimental impressionante pode ser comparado com a predição da QED junto a contribuições advindas de outros setores do MP. Cálculos formidáveis [92] fornecem o resultado

$$\begin{aligned} a^{\text{MP}} = & \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328\,478\,444\,003 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.181\,234\,016\,8 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \\ & - 1.914\,4(35) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 0.0(4.6) 1.181\,234\,016\,8 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + 1.71 \times 10^{-12} , \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

$$a^{\text{MP}} = 0.001\,159\,652\,182\,79(771) , \quad (3.5.8)$$

onde a incerteza atinge os últimos três dígitos.

Neste cálculo se truncou os coeficientes numéricos de dois e três *loops* na sua incerteza (devido a incerteza nas massas do múon e do lépton tau) - devidas à QED, e se incluiu o último termo devido aos outros setores do MP. Quanto a este, dos 1.71×10^{-12} , o setor da interação forte, por meio dos *loops* hadrônicos, responde pela contribuição 1.68×10^{-12} ; os 0.03×10^{-12} restantes vêm dos efeitos eletrofracos. Considerando apenas efeitos do MP, pode-se inferir o valor atual mais preciso da contante de estrutura fina¹⁰

$$\alpha^{-1}(a_{\text{exp}}) = 137.035\,999\,084(51) , \quad (3.5.9)$$

cuja incerteza vem do erro experimental e das aproximações nos cálculos.

Uma outra maneira de medir a constante de estrutura fina é a partir da Física atômica de baixas energias ou de determinações a partir de Física da matéria condensada [93]. Esta via alternativa fornece o valor

$$\alpha_{\text{Rydberg}}^{-1}(a) = 137.035\,999\,450(620) , \quad (3.5.10)$$

que é compatível com o fornecido pela QED, mas sujeito a erros bem maiores que a^{MP} .

¹⁰A princípio, contudo, podem existir efeitos além do MP que contribuam para o valor da constante de estrutura fina. Portanto, não se pode inferir o valor da constante de estrutura fina a partir do valor de a^{MP} , porque, ao se fazer isto, automaticamente se ignora as contribuições de Física além do MP.

Estes valores permitem impor limites às contribuições de possível Física nova. Para tanto, as contribuições devem satisfazer

$$|a(\text{Física nova})| \leq |a_{\text{exp}} - a^{MP}| \approx 10^{-12} . \quad (3.5.11)$$

3.6 O momento dipolo elétrico do elétron

É evidente que, na equação de Dirac (3.2.1), não há contribuições de dipolo elétrico. Por outro lado, da mesma forma que as correções sobre g são introduzidas por meio da (3.5.2), pode-se fazer com o momento de dipolo elétrico. O termo que o origina, de acordo com a Ref. [94], é

$$-\frac{i}{2} d_e \bar{\Psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 \Psi . \quad (3.6.1)$$

Este termo, da mesma forma que o de MDM, apresenta dimensão 5. É conveniente repetir que o termo de dipolo $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ transforma-se, sob paridade e reversão temporal, como

$$P(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \rightarrow -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad T(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \rightarrow -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} , \quad (3.6.2)$$

ou seja, viola P e T .

Uma vez que influências de outros setores do MP são esperadas, inclusive do setor eletrofraco, em que estas simetrias são violadas, em algum nível deve-se ter d_e não nulo, respondendo por tais violações. De fato, o valor previsto pelo MP, advindo de *quark mixing* via matriz CKM, é aproximadamente

$$|d_e^{\text{MP}}| \approx 10^{-38} e \cdot \text{cm} , \quad (3.6.3)$$

que, de acordo com a Seq. 3.2, está a 9 ordens de magnitude além do alcance experimental atual ($8.7 \times 10^{-29} e \cdot \text{cm}$) [95]. As esperanças são diminutas de se chegar a este nível de sensibilidade. Por outro lado, qualquer observação acima da minúscula predição do MP, há de evidenciar Física nova, mesmo que esta venha de energias mais altas. Alguns modelos que envolvem supersimetria fornecem valores para d_e já bastante próximos dos sondáveis pelos experimentos atuais [96]. Outros modelos que fornecem EDM para o elétron, distintos do valor previsto pelo MP, são dignos de atenção. Neste sentido, a Física de EDM constitui uma investigação muito importante de novas possibilidades teóricas. Os modelos principais deste trabalho preveem ajustes de EDM e MDM a partir da quebra da simetria de Lorentz, com magnitudes dependentes dos parâmetros de violação da mesma.

3.6.1 Comentários acerca das investigações experimentais

As investigações acerca de EDMs são de extrema importância teórica. Desta maneira, é indispensável também comentar brevemente os princípios experimentais utilizados em sua detecção, ilustrando que se trata de um campo experimental deveras rico.

À primeira vista, um palpite seria dispor o elétron na região de interesse e tentar observar a variação de energia sob a ação de um campo elétrico¹¹. Esta opção é bastante ingênua, porque o elétron seria acelerado rapidamente e sairia da região de observação. Uma segunda opção é usar moléculas ou átomos neutros sob a ação de um campo elétrico externo. Caso se escolha uma molécula ou átomo com apenas um elétron desemparelhado¹², poder-se-á atribuir a detecção de um EDM a este elétron sem par. Observe que o efeito do campo elétrico, supostamente uniforme, resume-se a polarizar o átomo (ou molécula) e eventualmente gerar um efeito Stark¹³. Entretanto, esta é só metade da história. Há também a possibilidade de atribuir o EDM a alguma partícula nuclear desemparelhada.

A primeira alternativa pode ser revisitada com mais cautela. Considere que, em vez de sob a ação de um campo elétrico, o elétron livre está em uma região com apenas um campo magnético no referencial do laboratório. Todavia, no referencial do elétron que se move, existe, além do campo magnético, um campo elétrico não nulo. Este campo elétrico há de se acoplar com o EDM, o que alteraria ligeiramente a velocidade de precessão do *spin*. Esta é a ideia fundamental por trás do trabalho de Nelson, Schupp, Pidd e Crane, publicado em 1959 [97]. Este método, a propósito, ainda é o único disponível para sondar o EDM do múon.

No que diz respeito às investigações do EDM do elétron, a segunda opção é a mais viável. Neste caso, visto que o átomo é neutro, não pode haver aceleração, de modo que a força média sobre cada partícula carregada é nula. Este regime é não relativístico, então existem apenas forças eletrostáticas, e o campo elétrico médio sobre cada partícula carregada também se anula. Isto se deve ao fato da polarização interna contrabalançar o campo elétrico externo aplicado. Estas conclusões parecem indicar que é impossível a observação de EDMs em sistemas atômicos e moleculares pelo segundo método. Este impedimento resume o teorema de Schiff, a ser demonstrado em breve.

Este teorema leva a crer que é impossível detectar EDMs em átomos no regime não relativístico. Todavia, P. G. H. Sandars mostrou que o teorema de Schiff falha quando efeitos relativísticos são considerados [98, 99], ou seja, as buscas ainda podem ser executadas usando moléculas e átomos neutros.

¹¹A variação de energia neste caso, seria $\Delta U = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, proporcional ao campo elétrico \mathbf{E} .

¹²Uma vez que os elétrons emparelhados têm *spins* em direções opostas, o efeito total de um possível EDM não é observável para os pares.

¹³Resumidamente, o efeito Stark é um desvio espectral de um átomo, ou divisão das suas linhas espectrais, devido à ação de um campo elétrico externo.

3.6.2 O teorema de Schiff

A ideia principal do teorema de Schiff é que há blindagem do EDM de partículas pontuais em sistemas eletrostáticos não relativísticos, tal como em átomos, impedindo que este manifeste EDM, muito embora seus componentes o possam apresentar. Este teorema, ao implicar que o termo de dipolo elétrico, $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E}$, não contribui para com o espectro, sugere que o EDM seja indetectável em experimentos¹⁴. A demonstração do teorema de Schiff é realizada a seguir para o termo $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E}$; todavia, é igualmente válida para o termo $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$, da equação de Pauli¹⁵, adequada para a descrição de férmions no regime não relativístico.

O ponto de partida é o Hamiltoniano relativístico (3.3.5), advindo da equação de Dirac com o acoplamento mínimo, na ausência de potencial vetor \mathbf{A} :

$$H_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0 - e(\Phi_{\text{Coulomb}} + \Phi_{\text{ext}}) , \quad (3.6.4)$$

onde Φ_{Coulomb} e Φ_{ext} designam os potenciais coulombiano e externo, respectivamente. A interação de EDM é introduzida como uma pequena perturbação por meio do Hamiltoniano

$$H_{\text{EDM}} = -d_e \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} . \quad (3.6.5)$$

Denotando $\Phi = \Phi_{\text{Coulomb}} + \Phi_{\text{ext}}$, é possível reescrever o Hamiltoniano de EDM como um comutador. Para isto, considere a operação

$$i \frac{d_e}{e} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, e\Phi] \Psi = i \frac{d_e}{e} \left(-i \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla (e\Phi \Psi) + ie\Phi \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla \Psi \right) , \quad (3.6.6)$$

$$= i \frac{d_e}{e} \left(-i \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla e\Phi) \right) \Psi = \frac{d_e}{e} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla (e\Phi) \Psi , \quad (3.6.7)$$

$$i \frac{d_e}{e} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, e\Phi] \Psi = -d_e \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \Psi , \quad (3.6.8)$$

onde se usou $\mathbf{p} = -i\nabla$ e $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ¹⁶. Observe que o efeito do operador $-d_e \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E}$, sobre o espinor Ψ , é idêntico ao do comutador $i \frac{d_e}{e} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, e\Phi]$. Além disto, a definição do operador Hamiltoniano (3.6.4) permite escrever

$$e\Phi = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0 - H_0 , \quad (3.6.9)$$

¹⁴No *abstract* da Ref. [100], Schiff alega que efeitos de segunda ordem e os relativísticos são *desinteressantemente pequenos*. Em contrapartida, ainda neste *paper*, o autor afirma haver correções em primeira ordem, caso a partícula possua, além de dipolo elétrico, momento de dipolo magnético.

¹⁵O Hamiltoniano de Pauli, para o acoplamento mínimo, é dado pela 3.3.21. As matrizes 4×4 , Σ^i , são o análogo relativístico das matrizes de Pauli, σ^i .

¹⁶A hipótese de potencial vetor nulo permite concluir que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

que leva a

$$[\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, e\Phi] = [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0 - H_0] , \quad (3.6.10)$$

$$= [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] + [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, m\gamma^0] - [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] . \quad (3.6.11)$$

Por outro lado, $[\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] = m[\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \gamma^0] = 0$, de modo que vale

$$[\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, e\Phi] = -[\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] , \quad (3.6.12)$$

permitindo, com auxílio da (3.6.8), concluir que

$$-d_e \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} = -i \frac{d_e}{e} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] , \quad (3.6.13)$$

ou seja

$$H_{\text{EDM}} = -i \frac{d_e}{e} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] . \quad (3.6.14)$$

De acordo com a teoria de perturbação, a correção em primeira ordem do espectro do sistema é dada pelo valor esperado

$$\Delta E_\psi = \langle \psi | H_{\text{EDM}} | \psi \rangle , \quad (3.6.15)$$

onde $|\psi\rangle$ é o autoestado do Hamiltoniano H_0 com autovalor E_ψ . A partir da (3.6.14), tem-se que

$$\langle \psi | H_{\text{EDM}} | \psi \rangle = \langle \psi | -i \frac{d_e}{e} [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] | \psi \rangle = -i \frac{d_e}{e} (E_\psi - E_\psi) \langle \psi | \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi \rangle , \quad (3.6.16)$$

$$\langle \psi | H_{\text{EDM}} | \psi \rangle = 0 , \quad (3.6.17)$$

que, segundo a (3.6.13), equivale a

$$\langle \psi | \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} | \psi \rangle = 0 . \quad (3.6.18)$$

Este resultado mostra que, de fato, o termo $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E}$ é incapaz de alterar o espectro do sistema em primeira ordem, pelas razões descritas no início da seção. O campo elétrico médio é um resultado paralelo bastante ilustrativo, podendo ser obtido por um procedimento já familiar. Vale escrever

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{e} [\mathbf{p}, e\Phi] = -\frac{i}{e} [\mathbf{p}, (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0 - H_0)] = \frac{i}{e} [\mathbf{p}, H_0] , \quad (3.6.19)$$

onde se usou que $[\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] = [\mathbf{p}, \gamma^0] = 0$, o que permite calcular o campo elétrico médio para qualquer

autoestado $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\mathbf{E}|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{i}{e}[\mathbf{p}, H_0]|\psi\rangle = (E_{\Psi} - E_{\Psi})\langle\psi|\frac{i}{e}\mathbf{p}|\psi\rangle = 0 , \quad (3.6.20)$$

ou seja, o campo elétrico médio para qualquer autoestado, ou mistura de autoestados, é nulo - como esperado.

Neste momento deve-se estudar o termo de EDM (3.6.1) introduzido por Salpeter no contexto da equação de Dirac [94]. Segundo esta proposta, o termo da Lagrangiana que fornece o dipolo elétrico é

$$\mathcal{L}_{\text{EDM(S)}} = -\frac{i}{2}d_e\bar{\Psi}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\Psi . \quad (3.6.21)$$

que, contraídos os índices, fornece

$$\mathcal{L}_{\text{EDM(S)}} = -\frac{i}{2}d_e\bar{\Psi}[2F_{0j}\sigma^{0j} + F_{ij}\sigma^{ij}]\gamma^5\Psi . \quad (3.6.22)$$

A partir das definições

$$F_{0j} = E^j , \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k , \quad \sigma^{0j} = i\alpha^j , \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijl}\Sigma^l , \quad (3.6.23)$$

e das na (3.3.4), conclui-se que

$$\mathcal{L}_{\text{EDM(S)}} = -\frac{i}{2}d_e\bar{\Psi}[2iE^j\alpha^j - \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}B^k\Sigma^l]\gamma^5\Psi , \quad (3.6.24)$$

$$\mathcal{L}_{\text{EDM(S)}} = -id_e\bar{\Psi}[iE^j\alpha^j - B^k\Sigma^k]\gamma^5\Psi , \quad (3.6.25)$$

onde o subscrito (S) indica que este é o termo de EDM advindo da proposta de Salpeter. Em seguida, note que

$$\alpha^j\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} = \Sigma^j , \quad (3.6.26)$$

$$\Sigma^k\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \alpha^k , \quad (3.6.27)$$

permitindo escrever

$$\mathcal{L}_{\text{EDM(S)}} = d_e\bar{\Psi}[\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}]\Psi . \quad (3.6.28)$$

Desta forma, a Lagrangiana completa vale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{EDM(S)}} , \quad (3.6.29)$$

com $\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi$ correspondendo à Lagrangiana de Dirac acoplada minimamente ($D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$). As equações de Euler-Lagrange para o espinor Ψ fornecem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = (i\gamma^\mu D_\mu - m + d_e[\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}])\Psi = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\Psi})} = 0, \quad (3.6.30)$$

onde se evidencia a equação de Dirac modificada

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m + d_e[\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}])\Psi = 0. \quad (3.6.31)$$

Para se explicitar o Hamiltoniano, é necessário isolar o termo $i\partial_t \Psi$, o que é realizado a seguir:

$$i\partial_t \Psi = (-i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + e\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu + m\gamma^0 - d_e[\gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\gamma^0 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}])\Psi, \quad (3.6.32)$$

$$i\partial_t \Psi = (-i\alpha^i \partial_i + eA_0 - e\alpha^i A^i + m\gamma^0 - d_e[\gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{B}])\Psi, \quad (3.6.33)$$

$$i\partial_t \Psi = \{\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + eA_0 + m\gamma^0 - d_e[\gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{B}]\}\Psi, \quad (3.6.34)$$

onde se usou $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, $\gamma^0 \alpha^i = \gamma^i$ e $\gamma^0 \gamma^i = \alpha^i$. Evidentemente, o termo $-d_e[\gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{B}]$ corresponde à contribuição de EDM para com o Hamiltoniano total

$$H_{\text{EDM(S)}} = -d_e(\gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.6.35)$$

Este Hamiltoniano vai ser considerado uma pequena perturbação sobre o Hamiltoniano 3.6.4. Supondo potencial vetor \mathbf{A} e campo magnético \mathbf{B} nulos, o Hamiltoniano de EDM passa a valer

$$H_{\text{EDM(S)}} = -d_e \gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma}, \quad (3.6.36)$$

que difere do considerado por Schiff por um fator de γ^0 , alterando muitas das conclusões sobre o EDM. O fator γ^0 , nesta proposta, contraria a conclusão de Schiff de que efeitos relativísticos são secundários, visto que γ^0 deve aparecer em uma correção em primeira ordem no espectro. Seguindo o raciocínio, a correção de energia, em primeira ordem, deve então ser o valor esperado do termo $H_{\text{EDM(S)}} = -d_e \gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$ que, por um procedimento idêntico ao utilizado anteriormente, tem a forma

$$\Delta E = \langle \psi | H_{\text{EDM(S)}} | \psi \rangle, \quad (3.6.37)$$

$$= \langle \psi | -d_e \gamma^0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Sigma} | \psi \rangle = i \frac{d_e}{e} \langle \psi | [\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, e\Phi] | \psi \rangle, \quad (3.6.38)$$

$$\Delta E = i \frac{d_e}{e} \langle \psi | [\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0 - H_0)] | \psi \rangle , \quad (3.6.39)$$

que equivale a

$$\Delta E = i \frac{d_e}{e} \langle \psi | [\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] + m[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \gamma^0] - [\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] | \psi \rangle . \quad (3.6.40)$$

É necessário calcular os comutadores da (3.6.40), o que é feito com o auxílio das identidades

$$\alpha^i = \gamma^5 \Sigma^i = \Sigma^i \gamma^5 , \quad \gamma^0 \Sigma^i = \Sigma^i \gamma^0 , \quad (3.6.41)$$

$$\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5 , \quad \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}^2 . \quad (3.6.42)$$

O comutador $[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}]$ fornece

$$[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] = \gamma^0 \Sigma^i \alpha^k p^i p^k - \alpha^k \gamma^0 \Sigma^i p^i p^k , \quad (3.6.43)$$

$$= (\gamma^0 \Sigma^i \gamma^5 \Sigma^k - \gamma^5 \Sigma^k \gamma^0 \Sigma^i) p^i p^k , \quad (3.6.44)$$

$$= (\gamma^0 \gamma^5 \Sigma^i \Sigma^k - \gamma^5 \gamma^0 \Sigma^k \Sigma^i) p^i p^k = 2\gamma^0 \gamma^5 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} , \quad (3.6.45)$$

ou seja

$$[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] = 2\gamma^0 \gamma^5 \mathbf{p}^2 . \quad (3.6.46)$$

Quanto ao segundo comutador $[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \gamma^0]$, tem-se

$$[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \gamma^0] = \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \gamma^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} , \quad (3.6.47)$$

$$[\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, \gamma^0] = 0 . \quad (3.6.48)$$

Evidentemente o terceiro comutador tem valor esperado nulo

$$\langle \psi | [\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] | \psi \rangle = (E_\psi - E_\psi) \langle \psi | \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi \rangle , \quad (3.6.49)$$

$$\langle \psi | [\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}, H_0] | \psi \rangle = 0 , \quad (3.6.50)$$

permitindo concluir que a correção de energia vale

$$\Delta E = 2i \frac{d_e}{e} \langle \psi | \gamma^0 \gamma^5 \mathbf{p}^2 | \psi \rangle . \quad (3.6.51)$$

Claramente a correção em primeira ordem¹⁷ (3.6.51) é de natureza relativística, visto que envolve as matrizes de Dirac. A diferença deste cenário, se comparado ao da demonstração do teorema de Schiff, é a presença do fator γ^0 , que tem dois papéis importantes: explicitar a natureza relativística do EDM e permitir correções em primeira ordem no espectro. Deve-se ressaltar que a demonstração original do teorema, por Schiff, é feita no contexto da equação de Schrödinger, não relativística por concepção. Observe que, na demonstração acima¹⁸, usa-se as matrizes de *spin* relativísticas 4×4 , Σ , enquanto Schiff, em seu trabalho [100], utiliza as matrizes de Pauli 2×2 , σ . Este comentário torna evidente a evolução das ideias acerca dos EDMs e motiva um pequeno apanhado dos desenvolvimentos no tópico.

A proposta do termo (3.6.1) no trabalho de Salpeter [94], além de efeitos de EDM, implica em contribuições para com o *Lamb shift* e introduz impurezas¹⁹ em estados quânticos do átomo de hidrogênio. Schiff, em 1963, publica o teorema que, aparentemente, desmotiva investigações experimentais no regime não relativístico. Esta dificuldade foi contestada por Sandars [98] em 1965. Neste trabalho, ele alega que correções são detectáveis se efeitos relativísticos forem considerados, além de afirmar que, para elementos alcalinos pesados (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr), o EDM atômico²⁰ pode ser muito maior que o do elétron livre, devido a alta polarizabilidade destes elementos. Vale mencionar que a (3.6.36) consta na Ref. [98], quando Sandars mostra que o EDM atômico do césio (Cs) é mais de 100 vezes o do elétron livre. Em um trabalho posterior [99], Sandars tabela o *enhancement factor*²¹ dos átomos alcalinos no estado fundamental e vê-se que, para o frâncio, o EDM atômico é mais de 1000 vezes o do elétron livre. Recentemente, Flambaum e Kozlov desenvolveram uma versão do teorema de Schiff para íons e moléculas, o que amplia as possibilidades experimentais [101]. A este respeito, vale lembrar que o experimento que melhor restringe o EDM do elétron, até o momento, foi realizado com moléculas de monóxido de tório (ThO) [95].

Uma vez discutido o teorema de Schiff e descrito como efeitos relativísticos permitem contorná-lo em primeira ordem, estamos em condições de analisar um novo acoplamento não mínimo na equação de Dirac.

¹⁷Observe que a correção é um valor real, visto que o valor esperado $\langle \psi | \gamma^0 \gamma^5 \mathbf{p}^2 | \psi \rangle$ é imaginário puro, porque o operador $\gamma^0 \gamma^5 \mathbf{p}^2$ é anti-hermitiano.

¹⁸Lembrando, novamente, que o mesmo resultado vale para a versão não relativística do termo $\mathbf{E} \cdot \Sigma$, ou seja, $\mathbf{E} \cdot \sigma$, contanto que se utilize o Hamiltoniano da equação de Pauli.

¹⁹Um estado impuro designa um estado que é uma mistura de dois ou mais auto-estados de um operador. Neste caso, alguns autoestados do Hamiltoniano do átomo de hidrogênio, antes puros, passam a ser misturas de autoestados (estados impuros) com a introdução do termo de EDM.

²⁰O EDM de um átomo, a princípio, pode ser devido a algum elétron ou núcleon (próton ou nêutron) desemparelhado.

²¹Trata-se da razão $\frac{d_{\text{átomo}}}{d_e}$, onde $d_{\text{átomo}}$ e d_e são as magnitudes do EDM do átomo e do elétron livre, respectivamente.

Capítulo 4

Um novo acoplamento não mínimo na equação de Dirac

Neste capítulo, será estudado um acoplamento não mínimo, axial, CPT -par¹, que viola a simetria de Lorentz. Este acoplamento estabelece uma interação extra entre o campo eletromagnético e férmions no contexto da equação de Dirac. O acoplamento não mínimo advém de um termo adicionado à Lagrangiana de Dirac, modificando a derivada covariante, que agora inclui a interação do elétron com o tensor CPT -par do setor de *gauge* do MPE, $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Os resultados desta investigação foram publicados e constam na Ref. [102].

O acoplamento proposto é uma versão axial de um já existente na literatura [103], que implica em efeitos de EDM e contribuições ao MDM de férmions. A partir de dados experimentais, os termos do modelo têm suas magnitudes limitadas, permitindo impor, sobre os coeficientes de violação da simetria de Lorentz, *bounds*² bastante restritivos. É importante lembrar que os acoplamentos não mínimos, da Ref. [103] e o proposto a seguir neste capítulo, não contém derivadas superiores, em contraste com os da proposta de Kostelecky e Mewes [72]. Outros trabalhos também incorporam acoplamentos sem derivadas superiores, como é o caso da Ref. [104], onde apenas termos CPT -ímpares, candidatos a interações de EDM, são considerados.

Este capítulo é iniciado com uma visita ao trabalho de Bolokhov, Pospelov e Romalis [104], no qual acoplamentos não mínimos CPT -ímpares são investigados e se pondera a possibilidade de usar dados experimentais para limitar a magnitude dos mesmos.

¹Por economia, entenda CPT -par como a propriedade de invariância por CPT .

²Um *bound* é entendido como um limite superior para alguma quantidade.

4.1 EDMs em acoplamentos CPT -ímpares não mínimos

O estudo de termos de EDM e MDM configura uma área de investigação muito vasta, apresentando numerosas possibilidades teóricas. Um cenário de grande relevância foi considerado por Bolokhov, Pospelov e Romalis [104]. Neste trabalho, investiga-se o papel de termos CPT -ímpares em contribuições de EDM. Os autores partem da Lagrangiana de Dirac que, além do acoplamento mínimo, contém os termos

$$\mathcal{L}_{CPT\text{-ímpar}} = - \sum_i \bar{\Psi}_i (\tilde{a}_\mu \gamma^\mu + \tilde{b}_\mu \gamma^\mu \gamma^5 + \tilde{c}_\mu \gamma_\alpha F^{\alpha\mu} + \tilde{d}_\mu \gamma_\alpha \gamma_5 F^{\alpha\mu} + \tilde{f}_\mu \gamma_\alpha \gamma^5 \tilde{F}^{\alpha\mu} + \tilde{g}_\mu \gamma_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu}) \Psi_i, \quad (4.1.1)$$

onde $\tilde{F}^{\alpha\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$ é o tensor dual do $F_{\lambda\rho}$, e a soma em i indica que se consideram todos os férmions do sistema.

Os autores, com o intuito de encontrar candidatos a geradores de EDM, classificaram os termos de acordo com o comportamento sob C , P e T , vide tabela 4.1. Por simplicidade, eles consideraram que, no referencial do laboratório, os tensores $\tilde{a}_\mu, \dots, \tilde{g}_\mu$ têm a forma $x_\mu = (x_0, 0, 0, 0)$; logo, a Lagrangiana anterior vale

$$\mathcal{L}_{CPT\text{-ímpar}} = - \sum_i \bar{\Psi} (\tilde{a}_0 \gamma^0 + \tilde{b}_0 \gamma^0 \gamma^5 + \tilde{c}_0 \gamma_\alpha F^{\alpha 0} + \tilde{d}_0 \gamma_\alpha \gamma_5 F^{\alpha 0} + \tilde{f}_0 \gamma_\alpha \gamma^5 \tilde{F}^{\alpha 0} + \tilde{g}_0 \gamma_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0}) \Psi, \quad (4.1.2)$$

que pode ser generalizada facilmente para tensores $\tilde{a}_\mu, \dots, \tilde{g}_\mu$ com componentes espaciais.

	C	P	T	CPT	CP
$\tilde{a}_0 \gamma^0$	-	+	+	-	-
$\tilde{b}_0 \gamma^0 \gamma^5$	+	-	+	-	-
$\tilde{c}_0 \gamma_\alpha F^{\alpha 0}$	+	+	-	-	+
$\tilde{d}_0 \gamma_\alpha \gamma_5 F^{\alpha 0}$	-	-	-	-	-
$\tilde{f}_0 \gamma_\alpha \gamma^5 \tilde{F}^{\alpha 0}$	-	+	+	-	-
$\tilde{g}_0 \gamma_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0}$	+	-	+	-	-

Tabela 4.1: Comportamento dos termos da Lagrangiana $\mathcal{L}_{CPT\text{-ímpar}}$.

Observaram, assim, que apenas o termo $\tilde{d}_0 \gamma_\alpha \gamma_5 F^{\alpha 0}$ viola as simetrias P e T - comportamento compatível com um termo de EDM. Desta maneira, eles se restringiram a estudá-lo, a começar por escrever a contribuição ao Hamiltoniano. Desconsiderando os outros termos, a Lagrangiana modificada se torna

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \bar{\Psi} (\tilde{d}_0 \gamma_\alpha \gamma_5 F^{\alpha 0}) \Psi, \quad (4.1.3)$$

de onde, por meio das equações de Euler-Lagrange, obtém-se

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m + \tilde{d}_0 \gamma_\alpha \gamma_5 F^{\alpha 0}) \Psi = 0. \quad (4.1.4)$$

Isolando o termo com a derivada temporal, encontramos

$$i\partial_t\Psi = (-i\alpha^i\partial_i + eA_0 - e\alpha^iA^i + m\gamma^0 + \gamma^0\tilde{d}_0\gamma^i\gamma_5F^{i0})\Psi \quad (4.1.5)$$

$$i\partial_t\Psi = (H_0 + \tilde{d}_0\Sigma^iE^i)\Psi, \quad (4.1.6)$$

onde se usou que $F^{i0} = E^i$, $\gamma^0\gamma^i\gamma_5 = \Sigma^i$, e $H_0 = -i\alpha^i\partial_i + eA_0 - e\alpha^iA^i + m\gamma^0$.

Admitindo que \tilde{d}_0 seja pequeno o suficiente, pode-se tratar o termo $\tilde{d}_0\Sigma^iE^i$ como uma perturbação sobre o Hamiltoniano H_0 . Entretanto, se se tratarem de elétrons ou múons apenas, evidentemente o termo $\tilde{d}_0\Sigma^iE^i$, desprovido do fator γ^0 , é incapaz de alterar o espectro do sistema, segundo o teorema de Schiff, descrito na Seç. 3.6.2. Desta forma, não podemos usar os dados experimentais do EDM para a limitação de \tilde{d}_0 . Entretanto, como observam os autores, pode-se usar o termo $\tilde{d}_0\Sigma^iE^i$ para férmions sujeitos à interação forte, que é o caso dos quarks. A partir deste ponto, para aplicar limites sobre a magnitude de \tilde{d}_0 , os autores adentram o domínio da QCD, que está fora do escopo desta tese.

É possível limitar outros termos da Lagrangiana (4.1.2) a partir de outros efeitos físicos. Por exemplo, no trabalho de Stadnik, Roberts e Flambaum [76], são procurados termos que alterem a frequência de precessão do *spin* dos férmions. Esta investigação é realizada com parte da Lagrangiana (4.1.2), a saber

$$\mathcal{L}_{\text{Stadnik}} = -\sum_i \bar{\Psi}(\tilde{c}_\mu\gamma_\alpha F^{\alpha\mu} + \tilde{d}_\mu\gamma_\alpha\gamma_5 F^{\alpha\mu} + \tilde{f}_\mu\gamma_\alpha\gamma^5\tilde{F}^{\alpha\mu} + \tilde{g}_\mu\gamma_\alpha\tilde{F}^{\alpha\mu})\Psi, \quad (4.1.7)$$

onde os tensores $\tilde{c}_\mu, \dots, \tilde{g}_\mu$ têm a forma $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e a contribuição relevante é

$$H_{\text{MDM}} = \tilde{f}^0\Sigma^iB^i, \quad (4.1.8)$$

que é capaz de diferenciar o fator giromagnético g dos férmions de seus respectivos anti-férmions.

4.2 A equação de Dirac modificada

Nesta seção, apresenta-se a equação de Dirac modificada por um acoplamento *CPT*-par, não mínimo, axial, com posterior análise do regime não relativístico. De posse do Hamiltoniano não relativístico, efeitos novos serão inferidos e suas respectivas magnitudes serão limitadas. O ponto de partida é a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0.$$

A derivada covariante D_μ , que carrega o acoplamento não mínimo axial, é tomada como

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\gamma^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (4.2.1)$$

cuja inserção na equação de Dirac, fornece

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - \frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu F^{\alpha\beta} - m \right] \Psi = 0. \quad (4.2.2)$$

É importante mencionar que o termo do acoplamento não mínimo advém da Lagrangiana³

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - \frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu F^{\alpha\beta} - m \right] \Psi, \quad (4.2.3)$$

na qual se nota o termo que viola a simetria de Lorentz, $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu F^{\alpha\beta}$, que apresenta dimensão 5. Com respeito a esta característica do termo, é oportuna uma digressão.

Como descrito no capítulo 2, o tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ é adimensional, bem como as matrizes γ^μ . Em unidades naturais ($c = \hbar = 1$), o tensor $F^{\alpha\beta}$ tem dimensão de (massa)², ou apenas dimensão 2 (as derivadas ∂_μ e potencial A^μ têm, cada um, dimensão 1), e o espinor Ψ apresenta dimensão $\frac{3}{2}$, garantindo que a densidade de probabilidade seja adimensional. Para que a ação S permaneça adimensional, deve-se impor que a Lagrangiana tenha dimensão 4, porque cada dx da integral $S = \int \mathcal{L}dx^4$ tem dimensão -1 . Tendo em vista o bilinear $\lambda_A \bar{\Psi}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu F^{\alpha\beta}\Psi$, conclui-se que a constante λ tem dimensão -1 . Por outro lado, teorias com constantes de acoplamento com dimensões negativas de massa não são renormalizáveis, o que não impede o uso destas como teorias efetivas. Vale lembrar que termos de dimensão 5, ou mais, aparecem em teorias quânticas de campos, resultantes de flutuações relacionadas a *loops*. Estes termos não apenas aparecem, como são previstos, e podem ser resultados de *loops* associados a partículas cujas massas possivelmente estão fora do alcance experimental dos aceleradores. Esta ideia contrabalança o fato de tais termos não serem renormalizáveis [105, 106].

Voltando ao termo que viola a simetria de Lorentz, é possível escrevê-lo de outra forma, visto que as matrizes γ^5 e γ^μ anti-comutam, isto é

$$\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu F^{\alpha\beta} = -\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu F^{\alpha\beta}. \quad (4.2.4)$$

Antes de se trabalhar sobre o termo extra, $\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu F^{\alpha\beta}$, é importante lembrar as propriedades do

³A rigor, esta densidade Lagrangiana não é real. Acontece que ambas as escolhas, $\frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^*)$ e \mathcal{L} , fornecem as mesmas equações de movimento.

tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ que, de acordo com a Ref. [71], apresenta as simetrias

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta} , \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\mu\nu\beta\alpha} \quad (4.2.5)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)_{\alpha\beta\mu\nu} , \quad (4.2.6)$$

e duplo traço nulo, isto é:

$$(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.2.7)$$

Estes vínculos permitem que $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ possua apenas 19 componentes independentes. Além disto, define-se quatro matrizes 3×3 a partir do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, a saber

$$(k_{DE})_{jk} = -2(k_F)_{0j0k} , \quad (k_{HB})_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{jpk}\epsilon_{klm}(k_F)_{pqlm} , \quad (4.2.8)$$

$$(k_{DB})_{jk} = -(k_{HE})_{kj} = \epsilon_{kpq}(k_F)_{0jpk} . \quad (4.2.9)$$

As propriedades de simetria do tensor $(k_F)_{\alpha\beta\mu\nu}$ permitem escrever

$$\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu F^{\alpha\beta} = -i\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)F^{\alpha\beta} , \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\lambda_A}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu F^{\alpha\beta} = -i\frac{\lambda_A}{2}\gamma^5(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} , \quad (4.2.11)$$

onde se usou a definição do tensor

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \quad (4.2.12)$$

cujas componentes são

$$\sigma^{0i} = i\alpha^i , \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\Sigma^k . \quad (4.2.13)$$

Realizando a contração dos índices na expressão (4.2.11), obtém-se

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = 4(k_F)_{0i0j}\sigma^{0i}F^{oj} + 2(k_F)_{0iab}\sigma^{0i}F^{ab} + (k_F)_{ijab}\sigma^{ij}F^{ab} , \quad (4.2.14)$$

que, com o auxílio das matrizes 3×3 (4.2.8), (4.2.9), das definições (4.2.13) e das componentes do tensor eletromagnético

$$F^{0i} = -E^i , \quad F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k , \quad (4.2.15)$$

pode ser reescrita como

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = 2\sigma^{0i}[(k_{DE})_{ij}E^j - (k_{DB})_{ij}B^j] + \epsilon_{kij}\sigma^{ij}[(k_{HE})_{kq}E^q - (k_{HB})_{kq}B^q] . \quad (4.2.16)$$

Por economia, é razoável definir

$$(k_{DE})_{ij}E^j = \mathbb{E}^i , \quad (k_{DB})_{ij}B^j = \mathbb{B}^i \quad (4.2.17)$$

$$(k_{HE})_{kq}E^q = \tilde{\mathbb{E}}^k , \quad (k_{HB})_{kq}B^q = \tilde{\mathbb{B}}^k \quad (4.2.18)$$

$$\mathbb{E}^i - \mathbb{B}^i = \mathbb{Z}^i , \quad \tilde{\mathbb{E}}^k - \tilde{\mathbb{B}}^k = \tilde{\mathbb{Z}}^k . \quad (4.2.19)$$

Portanto, tem-se que

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = 2\left[i\alpha^i\mathbb{Z}^i + \Sigma^k\tilde{\mathbb{Z}}^k\right] . \quad (4.2.20)$$

A reinserção da (4.2.20) na (4.2.2) permite escrever

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - i\frac{\lambda_A}{2}\gamma^5(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - m\right\}\Psi = 0 , \quad (4.2.21)$$

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \lambda_A\gamma^5\left[\alpha^i\mathbb{Z}^i - i\Sigma^k\tilde{\mathbb{Z}}^k\right] - m\right\}\Psi = 0 , \quad (4.2.22)$$

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \lambda_A\left[\Sigma^i\mathbb{Z}^i - i\alpha^k\tilde{\mathbb{Z}}^k\right] - m\right\}\Psi = 0 , \quad (4.2.23)$$

onde se usou que

$$\gamma^5\Sigma^k = \alpha^k , \quad \gamma^5\alpha^k = \Sigma^k , \quad (4.2.24)$$

permitindo escrever a Lagrangiana (4.2.3) como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \lambda_A\left[\Sigma^i\mathbb{Z}^i - i\alpha^k\tilde{\mathbb{Z}}^k\right] - m\right\}\Psi , \quad (4.2.25)$$

cuja equação de Euler-Lagrange associada é

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \lambda_A\left[\Sigma^i\left((k_{DE})_{ij}E^j - (k_{DB})_{ij}B^j\right)^i - i\alpha^k\left((k_{HE})_{kq}E^q - (k_{HB})_{kq}B^q\right)^k\right] - m\right\}\Psi = 0 . \quad (4.2.26)$$

O próximo passo para encontrar o Hamiltoniano relativístico é isolar a derivada temporal, o que é obtido

após a multiplicação por γ^0 , seguido pela reorganização dos termos. Este procedimento resulta em

$$i\partial_t\Psi = \left\{ -i\gamma^0\gamma^i\partial_i + eA_0 + e\gamma^0\gamma^iA_i - \lambda_A\gamma^0\left[\Sigma^i\mathbb{Z}^i - i\alpha^k\tilde{\mathbb{Z}}^k\right] + m\gamma^0 \right\}\Psi \equiv \hat{H}\Psi, \quad (4.2.27)$$

onde se usou que $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}_{4\times 4}$. Observe que o termo $\lambda_A\gamma^0\Sigma^i\mathbb{Z}^i$ é uma generalização do $\gamma^0(\Sigma^iE^i - \Sigma^iB^i)$, que advém do termo de Salpeter (3.6.35). Isto permite dizer que, dada a presença do fator γ^0 , este termo também contorna o teorema de Schiff, implicando em correções de energia em primeira ordem no espectro do sistema. Para avaliar os efeitos, é necessário escrever o Hamiltoniano da (4.2.27) na forma matricial. Se Ψ é representada no espaço dos momentos, pode-se fazer $-i\partial_i = p^i$. Esta consideração leva imediatamente a

$$i\partial_t\Psi = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + eA_0 - \lambda_A\gamma^0\left[\Sigma^i\mathbb{Z}^i - i\alpha^k\tilde{\mathbb{Z}}^k\right] + m\gamma^0 \right\}\Psi, \quad (4.2.28)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = \alpha^i(p^i - eA^i)$, no qual identificamos o momento canônico,

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (4.2.29)$$

As definições (3.3.4) permitem escrever o Hamiltoniano matricial como

$$H = \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} - \lambda_A \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} & -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbb{Z}} \\ i\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbb{Z}} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} \end{pmatrix}. \quad (4.2.30)$$

Antes de calcularmos os efeitos não relativísticos, façamos uma pausa para analisar o comportamento dos termos do modelo sob C , P e T .

4.3 Comportamento sob C , P e T

A maneira com que os termos na equação de Dirac se transformam, perante simetrias discretas, fornece um importante teste de consistência do modelo. Por isso, antes de investigar efeitos observáveis no regime não relativístico, é importante verificar se o comportamento sob C , P e T dos setores $k_{DE,DB,HE,HB}$ do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ permanece inalterado se comparado com a classificação usual destes coeficientes no setor eletromagnético [71].

As matrizes $k_{DE,DB,HE,HB}$ aparecem na Ref. [103] como uma versão não axial do acoplamento proposto neste capítulo, e na Ref. [71] como uma extensão da eletrodinâmica livre do MP. A proposta do acoplamento

não axial (sem o fator γ^5) advém da derivada covariante não mínima

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{\lambda}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\nu F^{\alpha\beta} , \quad (4.3.1)$$

na qual a constante de acoplamento λ aparece sem o índice A , denotando que o acoplamento não é axial. O comportamento sob C , P , e T dos quatro setores do tensor $\lambda(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ deste acoplamento consta na tabela 4.2:

	C	P	T	CPT	CP
$\lambda(k_{DE})_{ij}$	+	+	+	+	+
$\lambda(k_{DB})_{ij}$	+	-	-	+	-
$\lambda(k_{HE})_{ij}$	+	-	-	+	-
$\lambda(k_{HB})_{ij}$	+	+	+	+	+

Tabela 4.2: Comportamento dos termos adicionais na equação de Dirac da Ref. [103].

Observe que o comportamento dos setores sob estas operações discretas é o mesmo do modelo eletromagnético puro da Ref. [71], como mostrado na tabela 2.2, que convém ser repetida:

	C	P	T	CPT	CP
$(k_{DE})_{ij}$	+	+	+	+	+
$(k_{DB})_{ij}$	+	-	-	+	-
$(k_{HE})_{ij}$	+	-	-	+	-
$(k_{HB})_{ij}$	+	+	+	+	+

Pode-se classificar também os termos na equação de Dirac modificada pelo acoplamento não mínimo axial (4.2.26). Os quatro termos entre colchetes da (4.2.26) são o objeto desta análise⁴, tendo seus comportamentos sob C , P e T explicitados na tabela 4.3:

	C	P	T	CPT	CP
$\lambda_A(k_{DE})_{ij}$	+	-	-	+	-
$\lambda_A(k_{DB})_{ij}$	+	+	+	+	+
$\lambda_A(k_{HE})_{ij}$	+	+	+	+	+
$\lambda_A(k_{HB})_{ij}$	+	-	-	+	-

Tabela 4.3: Comportamento dos termos adicionais na equação de Dirac modificada pelo acoplamento não mínimo axial.

É evidente a violação de CP com o primeiro termo adicional, que é justamente o que vai gerar o EDM do férmion, sendo consistente com o modelo.

Evidentemente há diferenças no comportamento dos termos k_{DE} , k_{DB} , k_{HE} e k_{HB} nos os acoplamentos não mínimos axial e não axial. Observa-se que há uma troca de papéis: o termo k_{HE} passa a ser o responsável

⁴Vide procedimento no Apêndice A.

por gerar o EDM, enquanto na versão não axial, k_{DE} é o responsável por isto. O mesmo vale para k_{DB} , que passa a ser responsável por gerar a contribuição de MDM, antes causada pelo k_{DB} . Isto acontece por se ter incluído o fator γ^5 no acoplamento não mínimo.

4.4 Limite não relativístico

Para que seja possível encontrar correções teóricas aplicáveis sobre alguns sistemas quânticos, é importante acessar o limite não relativístico do modelo. A análise dos efeitos do Hamiltoniano não relativístico e a comparação com dados experimentais torna possível impor limites à magnitude do acoplamento proposto, sendo este um dos objetivos do trabalho. O primeiro passo é considerar soluções do tipo $\Psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \exp(-iEt)$, que geram densidades de probabilidade independentes do tempo, e são compatíveis com alguns dos cenários experimentais mais frequentes, como os experimentos que envolvem estados estacionários, incluindo o espectro do átomo de hidrogênio. Esta escolha de solução leva diretamente a

$$\begin{pmatrix} E\psi(\mathbf{x}) \\ E\chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} - \lambda_A \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} & -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbb{Z}} \\ i\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbb{Z}} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.4.1)$$

Por economia, é razoável definir

$$H_{11} = \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z}, \quad H_{12} = i\lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbb{Z}}. \quad (4.4.2)$$

Desta maneira, a equação matricial torna-se

$$\begin{pmatrix} E\psi(\mathbf{x}) \\ E\chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{11} & -H_{12} \\ H_{12} & -H_{11} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (4.4.3)$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} E\psi \\ E\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [eA_0 + m - H_{11}]\psi + [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}]\chi \\ [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}]\psi + [eA_0 - m + H_{11}]\chi \end{pmatrix}, \quad (4.4.4)$$

cujas componentes podem ser expressas como

$$[E - eA_0 - m + H_{11}]\psi - [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}]\chi = 0, \quad (4.4.5)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}]\psi - [E - eA_0 + m - H_{11}]\chi = 0. \quad (4.4.6)$$

Para campos fracos e velocidades $v \ll c = 1$, a componente menor, χ , vale aproximadamente

$$\chi \approx \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}]\psi}{2m}, \quad (4.4.7)$$

onde foi usado que, no limite não relativístico, vale aproximar $E - eA_0 + m + H_{12} \approx 2m$.

A equação para χ , uma vez reinserida na (4.4.5), fornece

$$[E - eA_0 - m + H_{11}]\psi = \frac{1}{2m}[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}]\psi. \quad (4.4.8)$$

Por outro lado, sabe-se que $[E - m]\psi \approx \hat{H}_{\text{NR}}\psi$, ou seja

$$H_{\text{NR}}\psi = [eA_0 - H_{11}]\psi + \frac{1}{2m}[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}]\psi. \quad (4.4.9)$$

O termo $[eA_0 - H_{11}]\psi = [eA_0 - \lambda\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z}]\psi$ já está determinado. A tarefa agora consiste em calcular, em primeira ordem nos parâmetros de violação, os efeitos da parcela

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}] &\approx [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 \\ &+ H_{12}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Para se encontrar uma forma mais adequada para este termo, cálculos adicionais devem ser efetuados. Faz-se necessário, então, explicitar os efeitos da (4.4.10) sobre o espinor de duas componentes ψ . Esta tarefa exige que se mencione uma identidade envolvendo as matrizes de Pauli e vetores:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \sigma^i \sigma^j a^i b^j = \frac{1}{2} \{ [\sigma^i, \sigma^j] + \{ \sigma^i, \sigma^j \} \} a^i b^j = \{ i\epsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \} a^i b^j, \quad (4.4.11)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (4.4.12)$$

a partir da qual, é evidente que

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})], \quad (4.4.13)$$

$$= \pi^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{p} - e\mathbf{p} \times \mathbf{A} - e\mathbf{A} \times \mathbf{p}]. \quad (4.4.14)$$

Para simplificá-la, deve-se explicitar seu efeito sobre o espinor ψ . De acordo com isto, obtém-se

$$\pi^2\psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p} \times (\mathbf{p}\psi) - e\mathbf{p} \times (\mathbf{A}\psi) - e\mathbf{A} \times (\mathbf{p}\psi)] . \quad (4.4.15)$$

O termo entre colchetes é simplificado caso se faça $\mathbf{p} = -i\nabla$. Imediatamente o termo $\mathbf{p} \times (\mathbf{p}\psi)$ é eliminado, enquanto o segundo se torna

$$e\mathbf{p} \times (\mathbf{A}\psi^i) = -ie\nabla \times (\mathbf{A}\psi) = -ie[\psi\nabla \times \mathbf{A} + \nabla\psi \times \mathbf{A}] = ie\mathbf{B}\psi , \quad (4.4.16)$$

de modo que

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2\psi = \pi^2\psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [ie\mathbf{B}\psi + ie\nabla\psi \times \mathbf{A} + ie\mathbf{A} \times \nabla\psi] = \pi^2\psi - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\psi , \quad (4.4.17)$$

o que mostra que o operador $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2$ é equivalente a

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} . \quad (4.4.18)$$

Observe que todos os esforços empregados tiveram como objetivo explicitar o efeito do operador diferencial \mathbf{p} sobre o sistema, o que implica em movê-lo para a direita de todos os outros, de modo a atuar somente e diretamente sobre o espinor ψ . Este procedimento elimina a necessidade de se escrever termos advindos da aplicação de \mathbf{p} sobre os outros fatores.

Agora a atenção deve se voltar ao operador $H_{12}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$. De acordo com a definição de H_{12} na (4.4.2), tem-se

$$H_{12}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = i\lambda_A(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{Z}})[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] , \quad (4.4.19)$$

$$i\lambda_A(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{Z}})[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] = i\lambda_A\{\tilde{\mathbf{Z}} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\tilde{\mathbf{Z}} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]\} , \quad (4.4.20)$$

que já está de acordo com a prescrição adotada: o operador \mathbf{p} à direita de todos os outros, atuando somente sobre o espinor. O termo $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12}$, por outro lado, precisa ser estudado quanto ao seu efeito sobre ψ . A princípio se tem que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12} = i\lambda_A[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})](\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}) = i\lambda_A\{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{Z}} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \tilde{\mathbf{Z}}]\} . \quad (4.4.21)$$

Uma vez explicitado que $\mathbf{p} = -i\nabla$, por meio de identidades do cálculo vetorial, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12} = i\lambda_A\{(-i\nabla - e\mathbf{A}) \cdot (\tilde{\mathbf{Z}}\psi) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(-i\nabla - e\mathbf{A}) \times (\tilde{\mathbf{Z}}\psi)]\}, \quad (4.4.22)$$

$$= i\lambda_A\{-i[(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{Z}})\psi + \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \nabla\psi] - e(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{Z}})\psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [-i\nabla \times (\tilde{\mathbf{Z}}\psi)] - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \tilde{\mathbf{Z}})\psi\}, \quad (4.4.23)$$

$$= i\lambda_A\{-i[(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{Z}})\psi + \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \nabla\psi] - e\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}\psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \{-i[(\nabla \times \tilde{\mathbf{Z}})\psi + \nabla\psi \times \tilde{\mathbf{Z}}]\} - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \tilde{\mathbf{Z}})\psi\}. \quad (4.4.24)$$

Rearranjar as expressões, de modo a deixar o operador \mathbf{p} à direita de todos os outros, resulta em

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12} &= i\lambda_A\{-i(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{Z}})\psi + \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{p}\psi - e\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}\psi \\ &\quad + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [-i(\nabla \times \tilde{\mathbf{Z}})\psi - \tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{p}\psi] + ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{A})\psi\}. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

A diferença presente na (4.4.10) vale

$$\begin{aligned} H_{12}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12} &= i\lambda_A\{\tilde{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{p} - e\tilde{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{A} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{p}) - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{A})\} \\ &\quad - \lambda_A\{-i(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{Z}}) + \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{p} \\ &\quad - e\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{Z}}) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{p}) + ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{A})\}, \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

que leva imediatamente a

$$\begin{aligned} H_{12}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})H_{12} &= i\lambda_A\{2i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{p}) - 2ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{A})\} \\ &\quad - \lambda_A\{-i(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{Z}}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{Z}})\}. \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

Alguns termos podem ser reescritos caso se trabalhe com as componentes; evidentemente este procedimento não pode mudar a posição do operador \mathbf{p} . Isto gera

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{p}) = \sigma^i \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{p})^i = \sigma^i \epsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{Z}}^j p^k = \tilde{\mathbf{Z}}^j \epsilon_{ijk} \sigma^i p^k \quad (4.4.28)$$

$$= -\tilde{\mathbf{Z}}^j \epsilon_{jik} \sigma^i p^k = -\tilde{\mathbf{Z}}^j (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})_j = -\tilde{\mathbf{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}), \quad (4.4.29)$$

e, de maneira similar,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\tilde{\mathbf{Z}} \times \mathbf{A}) = \sigma^i \epsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{Z}}^j A^k = -\tilde{\mathbf{Z}}^j \epsilon_{jik} \sigma^i A^k = -\tilde{\mathbf{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}), \quad (4.4.30)$$

levando à forma

$$H_{12}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})LV2 = i\lambda_A \{ -2i\tilde{\mathbb{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}) + 2ie\tilde{\mathbb{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}) \} \\ - \lambda_A \{ -i(\nabla \cdot \tilde{\mathbb{Z}}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbb{Z}}) \} . \quad (4.4.31)$$

Inserindo os resultados (4.4.18) e (4.4.31) no Hamiltoniano não relativístico (4.4.9), temos

$$H = eA_0 - \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} + \frac{1}{2m} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] + \frac{\lambda_A}{m} \tilde{\mathbb{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}) \\ - \frac{\lambda_A e}{m} \tilde{\mathbb{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}) - \frac{\lambda_A}{2m} \nabla \cdot \tilde{\mathbb{Z}} - i \frac{\lambda_A}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbb{Z}}) , \quad (4.4.32)$$

que, para campos constantes, vale

$$H = eA_0 - \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} + \frac{1}{2m} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] + \frac{\lambda_A}{m} \tilde{\mathbb{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}) - \frac{\lambda_A e}{m} \tilde{\mathbb{Z}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}) . \quad (4.4.33)$$

Evidentemente existem contribuições para com os momentos de dipolo elétrico e magnético no termo

$$H_{\text{dipolo}} = \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} = \lambda_A \sigma^k [(k_{DE})_{kj} E^j - (k_{DB})_{kj} B^j] , \quad (4.4.34)$$

que são abordadas em seguida.

4.5 Efeitos não relativísticos

Uma vez calculado o Hamiltoniano não relativístico, é razoável propor alguma configuração específica, por exemplo, campos uniformes em uma direção fixa $\hat{\mathbf{z}}$. Isto nos leva a

$$H_{\text{dipolo}} = \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} = \lambda_A \sigma^k [(k_{DE})_{k3} E^3 - (k_{DB})_{k3} B^3] . \quad (4.5.1)$$

É também possível impor que os feixes estejam polarizados em uma direção, o que elimina a necessidade de usar matrizes de Pauli de direções diferentes da polarização. Caso se escolha a polarização na direção $\hat{\mathbf{z}}$, o Hamiltoniano de dipolo se torna

$$H_{\text{dipolo}} = \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} = \lambda_A \sigma^z [(k_{DE})_{3j} E^j - (k_{DB})_{3j} B^j] . \quad (4.5.2)$$

Se se tomar ambas as imposições, temos

$$H_{\text{dipolo}} = \lambda_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{Z} = \lambda_A \sigma^z [(k_{DE})_{33} E^3 - (k_{DB})_{33} B^3] . \quad (4.5.3)$$

A partir destas considerações, uma das previsões possíveis diz respeito ao espectro do átomo de hidrogênio. De fato, o termo de dipolo elétrico,

$$H_{\text{EDM}} = \lambda_A \sigma^k (k_{DE})_{kj} E^j , \quad (4.5.4)$$

implica na correção de energia

$$\Delta_E = \lambda_A \langle n, j, m_j | \sigma^z (k_{DE})_{3j} E^j | n, j, m_j \rangle , \quad (4.5.5)$$

onde se supôs um feixe polarizado e se escolheu os *kets* $|n, j, m_j\rangle$, que são compatíveis com a soma de momentos angulares ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$) no átomo de hidrogênio. No entanto, os *kets* $|n, j, m_j\rangle$ não são autoestados das matrizes de Pauli, de modo que é preciso escrevê-los como combinações lineares dos mesmos. Da relação de completeza do espaço dos *kets*, após a omissão do índice n , tem-se

$$|jm_j\rangle = \sum_{m, m_s} |mm_s\rangle \langle mm_s | jm_j \rangle = \sum_{m, m_s} \langle mm_s | jm_j \rangle |mm_s\rangle \quad (4.5.6)$$

Os coeficientes $\langle mm_s | jm_j \rangle$, da matriz mudança de base $|n, j, m_j\rangle \rightarrow |n, m, \downarrow \uparrow\rangle$, são conhecidos como coeficientes de Clebsch-Gordan. A soma dupla, presente na mudança de base, pode ser simplificada tendo em vista as propriedades destes coeficientes⁵. Para $j = l + \frac{1}{2}$, obtém-se

$$|j = l + \frac{1}{2}, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} |m \downarrow\rangle + \sqrt{\frac{(l+m+1)}{2l+1}} |m \uparrow\rangle , \quad (4.5.7)$$

enquanto, para $j = l - \frac{1}{2}$, vale

$$|j = l - \frac{1}{2}, m_j\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+1)}{2l+1}} |m \downarrow\rangle - \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} |m \uparrow\rangle . \quad (4.5.8)$$

Logo, o valor esperado (4.5.5), após os produtos entre os *bras* e *kets*, para $j = l \pm \frac{1}{2}$, é

$$\Delta_E = \pm \lambda_A (k_{HE})_{3j} E^j \frac{m_j}{2l+1} , \quad (4.5.9)$$

onde m_j é responsável por dividir a linha espectral em $2j + 1$ linhas, resultando em um efeito similar ao efeito

⁵O cálculo destes coeficientes consta no Apêndice B.

Zeeman magnético, mas de natureza elétrica, que pode ser gerado tanto por um campo elétrico externo quanto pela interação coulombiana entre o elétron e o núcleo. Por outro lado, as medidas das energias das linhas espectrais são muito precisas, permitindo detectar desvios da ordem de 10^{-10} eV. Para o estado fundamental, $l = 0$ e $m_j = \pm\frac{1}{2}$, o raio atômico vale $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$, e a magnitude do campo elétrico correspondente é aproximadamente $E \approx 5.1 \times 10^{11} \text{ N/C} \approx 1.2 \times 10^6 (\text{eV})^2$. Desta forma, infere-se que

$$|\lambda(k_{HE})_{3j}E^j| < 10^{-10} \text{ eV} \rightarrow |\lambda_A(k_{HE})_{3j}| < 8 \times 10^{-17} (\text{eV})^{-1}. \quad (4.5.10)$$

Uma outra abordagem de limitação do EDM, bem mais efetiva, pode ser adotada. Começa-se extraíndo do termo $\lambda_A \sigma^k (k_{DE})_{kj} E^j$, no Hamiltoniano (4.4.34), a parcela

$$H_{EDM} = \lambda_A [(k_{DE})_{11} \sigma^1 E^1 + (k_{DE})_{22} \sigma^2 E^2 + (k_{DE})_{33} \sigma^3 E^3], \quad (4.5.11)$$

e impondo a condição

$$(k_{DE})_{11} = (k_{DE})_{22} = (k_{DE})_{33} = \frac{\text{Tr}[k_{DE}]}{3}, \quad (4.5.12)$$

pode-se reescrever a (4.5.11) como

$$H_{EDM} = \lambda_A \frac{\text{Tr}[k_{DE}]}{3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}. \quad (4.5.13)$$

Comparação com o termo de dipolo da (3.2.7), $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, permite usar o resultado experimental da Ref. [95] para limitar a magnitude do fator $\frac{\text{Tr}[k_{DE}]}{3}$. Segundo o resultado experimental, o valor da magnitude do momento de dipolo d_e respeita

$$d_e \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1}, \quad (4.5.14)$$

que implica em

$$\lambda_A \frac{\text{Tr}[k_{DE}]}{3} \equiv d_e \rightarrow |\lambda_A \text{Tr}[k_{DE}]| \leq 1.1 \times 10^{-24} (\text{eV})^{-1}. \quad (4.5.15)$$

Vale mencionar que, comparado ao modelo da Ref. [103], os limites impostos sobre os setores análogos são bem mais restritivos. Os *bounds* de MDM, a ser discutido a seguir, e EDM apresentam melhorias da ordem de 10^4 e 10^8 , respectivamente.

No que diz respeito ao termo de dipolo magnético, é evidente que este deve contribuir para o momento magnético anômalo do elétron pelo termo $\lambda_A (k_{DB})_{kj} \sigma^k B^j$ no Hamiltoniano (4.4.34). Este tem dipolo $\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$, com $\mu = g\mu_B = g\frac{e}{2m_e}$. A teoria de Dirac prevê que o fator giromagnético g valha exatamente 2. Entretanto, a abordagem da teoria de campos fornece correções sobre g advindas, principalmente, do acoplamento entre o campo de Dirac e o campo eletromagnético. O valor experimental mais preciso, até

2008, é $g = 2(1 + a_{\text{exp}})$, com $a_{\text{exp}} = \frac{\alpha}{2\pi} + \dots = 0.001\,159\,652\,180\,79(28)$ representando a anomalia [2]. A incerteza experimental em a é de 2.8 partes em 10^{13} , isto é, $\Delta a = 2.8 \times 10^{-13}$. Em termos de magnitude, há duas parcelas em a : correções em *tree-level*, que usualmente dominam as primeiras 5 casas decimais, e correções radiativas, que geram ajustes mais finos. De acordo com a discussão do capítulo 3, o valor teórico mais preciso, até 2008, é $a^{\text{MP}} = 0.001\,159\,652\,182\,79(771)$ [92], que não entra em conflito com o valor experimental, apesar de apresentar barra de erro maior. Entretanto, é o experimento quem dá as cartas, de modo que o erro experimental deve ser utilizado para limitar a contribuição de MDM⁶. Segundo os cálculos da seção anterior, o termo total de dipolo magnético vale

$$H_{\text{MDM}} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \lambda_A \sigma^k (k_{DB})_{kj} B^j , \quad (4.5.16)$$

que, ao se tomar o campo \mathbf{B} e a polarização dos *spins* na direção $\hat{\mathbf{z}}$, é escrita como

$$H_{\text{MDM}} = -\frac{e}{2m}\sigma^z B_0 - \lambda_A \sigma^z (k_{DB})_{33} B_0 = -\left(\frac{e}{2m} + \lambda_A (k_{DB})_{33}\right)\sigma^z B_0 , \quad (4.5.17)$$

que equivale a

$$H_{\text{MDM}} = -\frac{e}{2m}\left(1 + \frac{2m}{e}\lambda_A (k_{DB})_{33}\right)\sigma^z B_0 \equiv -\mu_B(1 + \delta)\sigma^z B_0 , \quad (4.5.18)$$

onde se identificou o termo $\frac{2m}{e}\lambda_A (k_{DB})_{33}$ com o desvio δ , que não pode ser confundido com a .

O desvio a é característico da interação usual (acoplamento mínimo), de modo que δ deve ser responsável por desvios ainda menores, não inclusos em a . Desta forma, como discutido, o desvio δ deve ser menor que $\Delta a = 2.8 \times 10^{-13}$, ou seja

$$\frac{2m}{e}\lambda_A (k_{DB})_{33} \leq \Delta a \rightarrow |\lambda_A (k_{DB})_{33}| \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1} , \quad (4.5.19)$$

onde se usou que $e = \sqrt{1/137}$ e $m = 5.11 \times 10^5 \text{ eV}$. Evidentemente, os termos $\lambda(k_{DB})_{11}$ e $\lambda(k_{DB})_{22}$ sofrem as mesmas restrições em magnitude, visto que a situação é idêntica se se alterar a polarização do feixe bem como a direção do campo \mathbf{B} .

⁶A rigor, o MPE não pode contrariar as previsões do MP. Esta imposição nos levaria a crer que o limite superior deveria ser 10^{-12} , ou seja, até onde o MP concorda com o experimento. Entretanto, isto descreditará o experimento, visto que consideraria erros maiores que os medidos. Desta maneira, a única opção que não contraria o MP e a medida experimental é tomar a contribuição de MDM menor que Δa .

4.6 Análise Sideral

Os tensores que quebram a simetria de Lorentz, por hipótese, são constantes apenas para referenciais inerciais. Desta maneira, visto que a Terra translada em torno do Sol e rotaciona em torno do próprio eixo, esta condição deixa de ser satisfeita. Portanto, espera-se que, no referencial do laboratório, os tensores de violação de Lorentz apresentem dependência temporal. O primeiro passo para esta análise é escolher um referencial inercial adequado.

O mais próximo de um referencial inercial ideal, nas redondezas do planeta Terra, é o Sol. A aproximação se justifica porque o período de rotação do Sol, em torno do centro da galáxia, é por volta de 230 milhões de anos. Como eixos de coordenadas no Sol, é comum, na literatura [72, 107, 108], adotar o eixo Z coincidindo com o eixo de rotação da Terra e o eixo X na direção que liga o centro da Terra ao Sol no equinócio de inverno do ano 2000. A abordagem dos efeitos da rotação e translação da Terra sobre os tensores $(k_{DE})_{ij}$, $(k_{DB})_{ij}$, $(k_{HE})_{ij}$ e $(k_{HB})_{ij}$ depende da duração dos experimentos. Para experimentos de curta duração, até poucas semanas, a translação pode ser desprezada e a análise é feita apenas considerando a rotação. Caso se trate de experimentos longos, que durem meses, deve-se levar em conta a translação e a rotação. A diferença entre as duas abordagens consiste no tratamento matemático. No presente trabalho, apenas o primeiro caso vai ser explorado⁷, que é útil para experimentos de EDM e MDM.

Ao se desconsiderar o movimento de translação, supõe-se que a Terra permanece na mesma posição com respeito ao Sol, mas rotacionando. Desta maneira, a relação entre os tensores $A_i^{(\text{Lab})}$ e $A_i^{(\text{Sol})}$, medidos no laboratório e no referencial do Sol, respectivamente, é feita por meio de uma matriz de rotação. Sob esta operação, um tensor de rank-1, A_i , transforma-se como

$$A_i^{(\text{Lab})} = \mathcal{R}_{ik} A_k^{(\text{Sol})} \quad (4.6.1)$$

onde \mathcal{R}_{ik} é uma componente da matriz de rotação. Para tensores de rank-2, vale

$$K_{ij}^{(\text{Lab})} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{jl} K_{kl}^{(\text{Sol})} . \quad (4.6.2)$$

Falta, então, calcular a matriz de rotação relevante para a presente análise. Denotando um referencial, que não rotaciona⁸, no centro da Terra com os eixos X , Y , Z , e um referencial girante na superfície da Terra, na colatitude χ , com os eixos x , y , z , é possível evidenciar os ângulos importantes. Observe a fig. 4.6.1, na qual $\Omega = \frac{2\pi}{23\text{h}56\text{min}}$ corresponde à velocidade angular de rotação do planeta em torno do próprio eixo.

⁷Para um tratamento generalizado, recomenda-se consultar o Apêndice A da Ref. [108].

⁸Este referencial coincide com o do Sol, visto que está em repouso com respeito a este. Por isto se escolhe o mesmo conjunto de eixos para ambos: X, Y, Z .

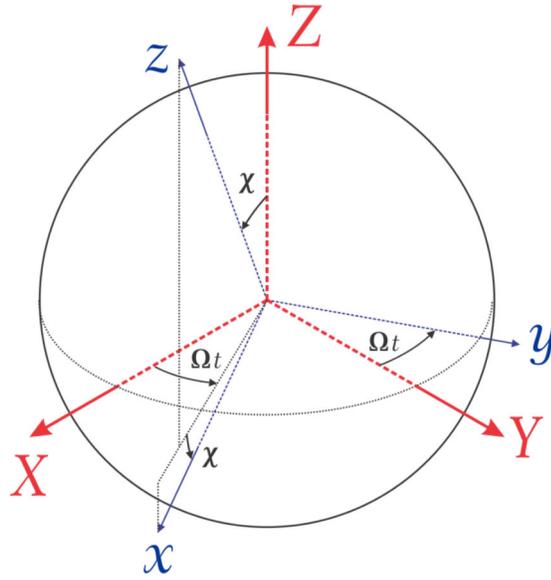


Figura 4.6.1: Rotação do referencial do centro da Terra para um na superfície na colatitude χ .

É fácil concluir que o referencial do laboratório, com eixos x, y, z , é resultado de duas rotações sucessivas sobre o referencial do Sol, com eixos X, Y, Z : uma de um ângulo Ωt em torno de Z seguida de outra de um ângulo χ com respeito ao *novo* eixo Y . Em termos de matrizes, temos

$$\mathcal{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6.3)$$

que implica em

$$\mathcal{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \Omega t & \cos \chi \sin \Omega t & -\sin \chi \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ \sin \chi \cos \Omega t & \sin \chi \sin \Omega t & \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (4.6.4)$$

onde χ corresponde à colatitude do laboratório e Ω à velocidade angular de rotação da Terra em torno do eixo Z . Lembrando que i e j designam a i -ésima linha e j -ésima coluna, respectivamente.

A partir da lei de transformação (4.6.2) e da matriz de rotação (4.6.4), é possível escrever como um tensor qualquer K_{ij} se transforma entre os referenciais do laboratório e do Sol, bastando especificar os índices i e j .

Aplicando estas transformações sobre os tensores da seção anterior, por exemplo, $(k_{DB})_{33}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
(k_{DB})_{33} \rightarrow (k_{DB})_{11}^{(\text{Lab})} &= \mathcal{R}_{31}\mathcal{R}_{31}(k_{DB})_{11}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{31}\mathcal{R}_{32}(k_{DB})_{12}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{31}\mathcal{R}_{33}(k_{DB})_{13}^{(\text{Sol})} \\
&+ \mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{31}(k_{DB})_{21}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{32}(k_{DB})_{22}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{32}\mathcal{R}_{33}(k_{DB})_{23}^{(\text{Sol})} \\
&+ \mathcal{R}_{33}\mathcal{R}_{31}(k_{DB})_{31}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{33}\mathcal{R}_{32}(k_{DB})_{32}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{33}\mathcal{R}_{33}(k_{DB})_{33}^{(\text{Sol})} ,
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

que, uma vez substituídos os elementos da matriz de rotação, equivale a

$$\begin{aligned}
(k_{DB})_{33} \rightarrow (k_{DB})_{33}^{(\text{Lab})} &= (\sin^2 \chi \cos^2 \Omega t)(k_{DB})_{11}^{(\text{Sol})} + (\sin \chi^2 \cos \Omega t \sin \Omega t)(k_{DB})_{12}^{(\text{Sol})} + (\sin \chi \cos \chi \cos \Omega t)(k_{DB})_{13}^{(\text{Sol})} \\
&+ (\sin^2 \chi \sin \Omega t \cos \Omega t)(k_{DB})_{21}^{(\text{Sol})} + (\sin^2 \chi \sin^2 \Omega t)(k_{DB})_{22}^{(\text{Sol})} + (\sin \Omega t \sin \chi \cos \chi)(k_{DB})_{23}^{(\text{Sol})} \\
&+ (\cos \Omega t \cos \chi \sin \chi)(k_{DB})_{31}^{(\text{Sol})} + (\sin \Omega t \cos \chi \sin \chi)(k_{DB})_{32}^{(\text{Sol})} + \cos^2 \chi (k_{DB})_{33}^{(\text{Sol})} .
\end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Experimentalmente, uma das quantidades relevantes é a média temporal destas quantidades tensoriais, visto que o experimento é repetido diversas vezes. Esta operação elimina todos os termos com argumento Ωt , exceto os que apresentam fatores $\cos^2 \Omega t$ e $\sin^2 \Omega t$, cujas médias temporais são

$$\langle \cos^2 \Omega t \rangle = \langle \sin^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2} . \tag{4.6.7}$$

Desta maneira, a média temporal de $(k_{DB})_{33}$ vale

$$|\langle (k_{DB})_{33}^{(\text{Lab})} \rangle| = \left| \frac{1}{2} \sin^2 \chi (k_{DB})_{11}^{(\text{Sol})} + \frac{1}{2} \sin^2 \chi (k_{DB})_{22}^{(\text{Sol})} + \cos^2 \chi (k_{DB})_{33}^{(\text{Sol})} \right| \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1} , \tag{4.6.8}$$

em termos da colatitude do laboratório e das componentes $(k_{DB})_{11,22,33}^{(\text{Sol})}$, medidas no referencial do Sol. A mesma análise pode ser executada para as componentes $(k_{HE})_{3j}$, bastando especificar a componente j em questão. Quanto ao traço do tensor $(k_{DB})_{ij}$, presente no *bound* (4.5.15), vale que

$$\text{Tr}[(k_{DB})^{(\text{Lab})}] = \text{Tr}[(k_{DB})^{(\text{Sol})}] , \tag{4.6.9}$$

visto que o traço de uma matriz é invariante por rotação. O mesmo vale para a média do traço, o que permite escrever a (4.5.15) como

$$|\langle \lambda_A \text{Tr}[k_{DE}^{(\text{Lab})}] \rangle| = |\langle \lambda_A \text{Tr}[k_{DE}^{(\text{Sol})}] \rangle| \leq 1.1 \times 10^{-24} (\text{eV})^{-1} . \tag{4.6.10}$$

No próximo capítulo estenderemos esta análise a uma classe de acoplamentos não mínimos na equação de

Dirac, desta vez advindos de um tensor $T_{\mu\nu}$, sem propriedades de simetria a princípio.

Capítulo 5

Uma classe de acoplamentos não mínimos com EDM e MDM

Neste capítulo, uma nova classe de acoplamentos não mínimos vai ser examinada com respeito, exclusivamente, à geração de EDMs e MDMs. A proposta inclui termos de interação entre férmions e fótons, de dimensão-5 e CPT -pares, por meio de um tensor de fundo, $T_{\mu\nu}$, que viola a simetria de Lorentz. Vale ressaltar que os termos propostos não exibem derivadas superiores, não estando, portanto, inclusos na proposta da Ref. [72], e que o tensor $T_{\mu\nu}$, a princípio, não tem simetria definida nos índices. No que diz respeito à matemática, este capítulo não difere do anterior, exceto pelo cuidado em incluir apenas interações hermitianas à Lagrangiana do modelo.

O procedimento consiste em propor derivadas covariantes não mínimas, analisar o comportamento sob C , P e T , e acessar os Hamiltonianos não relativísticos advindos de cada proposta. Veremos que nem todas as propostas geram contribuições de EDM e/ou MDM e que uma interpretação não usual permite limitar setores do tensor $T_{\mu\nu}$ outrora não acessíveis. Além disto, há de se comentar as eventuais sobreposições de *bounds*, obtidos nestas propostas, com outros obtidos no capítulo anterior. Estes resultados foram publicados, vide Ref. [109].

Começemos por um exemplo incluindo um modelo axial e um não axial, cujos desenvolvimentos hão de se repetir aos demais.

5.1 Um acoplamento axial e um não axial com o tensor $T_{\mu\nu}$ na equação de Dirac

Os acoplamentos deste capítulo devem incluir, necessariamente, férmions de Dirac, Ψ , o tensor eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, matrizes γ^μ e, claro, o tensor $T_{\mu\nu}$. Os termos novos, por meio da derivada covariante não mínima D_μ , devem contribuir com bilineares na Lagrangiana, que deve conter apenas termos hermitianos. Nesta seção, analisaremos dois acoplamentos que diferem por um fator de γ^5 : o que o contém é um acoplamento axial, o que não, é não axial. Analisemos primeiro o modelo com acoplamento axial.

5.1.1 O acoplamento não mínimo axial

Uma proposta simples para um acoplamento axial advém da derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu - i\lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \gamma_\beta \gamma^5 ,$$

com λ_1 real¹, que deve ser aplicada à equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 , \quad (5.1.1)$$

fornecendo a seguinte equação de Dirac modificada

$$\left\{ i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma^5 - m \right\} \Psi = 0 . \quad (5.1.2)$$

Observe que o termo extra, $\lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma^5$, vem do bilinear

$$LV_1 = \bar{\Psi} \lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma^5 \Psi , \quad (5.1.3)$$

que não é hermitiano. Observe:

$$LV_1^\dagger = [\Psi^\dagger \gamma^0 \lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma_\beta \Psi]^\dagger ,$$

$$LV_1^\dagger = \lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \Psi^\dagger (\gamma_\beta)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^5)^\dagger (\gamma^0)^\dagger (\Psi^\dagger)^\dagger = \lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\gamma_\beta)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \Psi ,$$

$$LV_1^\dagger = -\lambda_1 T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} \bar{\Psi} \gamma_\beta \gamma^\mu \gamma^5 \Psi \neq LV_1 , \quad (5.1.4)$$

¹Assim como as demais constantes de acoplamento deste trabalho

onde se usou $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$ e $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

Obviamente a contribuição (5.1.3) não é hermitiana, o que é um problema. Este fato nos obriga a tomar a derivada covariante na seguinte forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu - i\frac{\lambda_1}{2}(T_{\mu\nu}F^{\nu\beta} - T_\nu^\beta F_\mu^\nu)\gamma_\beta\gamma^5, \quad (5.1.5)$$

que advém da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - eA_\mu\gamma^\mu + \frac{\lambda_1}{2}(T_{\mu\nu}F^{\nu\beta} - T_\nu^\beta F_\mu^\nu)\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5 - m]\Psi \quad (5.1.6)$$

na qual os termos que violam a simetria de Lorentz são

$$LV_{1'} = \frac{\lambda_1}{2}(T_{\mu\nu}F^{\nu\beta} - T_\nu^\beta F_\mu^\nu)\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5 \equiv \frac{1}{2}(LV_1 + LV_1^\dagger), \quad (5.1.7)$$

sendo claramente hermitiana. Para fins de conferência, note que o primeiro termo entre parênteses da (5.1.6) corresponde à contribuição $\frac{1}{2}LV_1$. Quanto ao segundo termo entre parênteses da (5.1.6), a saber, $-\bar{\Psi}\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\beta F_\mu^\nu\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5\Psi$, temos

$$-\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\beta F_\mu^\nu\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5\Psi = -\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\mu F_\beta^\nu\bar{\Psi}\gamma^\beta\gamma_\mu\gamma^5\Psi,$$

onde se renomeou os índices. Adiante, escrevemos

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\beta F_\mu^\nu\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5\Psi &= -\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\mu F_\beta^\nu\bar{\Psi}\gamma^\beta\gamma_\mu\gamma^5\Psi, \\ -\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\beta F_\mu^\nu\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5\Psi &= -\frac{\lambda_1}{2}T_{\mu\nu}F^{\nu\beta}\bar{\Psi}\gamma_\beta\gamma^\mu\gamma^5\Psi, \\ -\frac{\lambda_1}{2}T_\nu^\beta F_\mu^\nu\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5\Psi &= -\frac{\lambda_1}{2}F_{\mu\nu}T^{\nu\beta}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5\Psi = \frac{1}{2}LV_1^\dagger, \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

o que prova a hermiticidade. Em outras palavras, a escolha da derivada covariante (5.1.5) fornece uma contribuição hermitiana à Lagrangiana (5.1.6).

O próximo passo é calcular o Hamiltoniano relativístico, que vem da equação de Dirac modificada pela derivada covariante (5.1.5), a saber

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - eA_\mu\gamma^\mu + \frac{\lambda_1}{2}(T_{\mu\nu}F^{\nu\beta} - T_\nu^\beta F_\mu^\nu)\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma^5 - m]\Psi = 0, \quad (5.1.9)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& [i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - i\frac{\lambda_1}{2}(i)(T_{\mu\nu}F^\nu{}_\beta \gamma^\mu \gamma^\beta - T_{\beta\nu}F^\nu{}_\mu \gamma^\mu \gamma^\beta)\gamma^5 - m]\Psi = 0 , \\
& [i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - i\frac{\lambda_1}{2}(i)(T_{\mu\nu}F^\nu{}_\beta \gamma^\mu \gamma^\beta - T_{\mu\nu}F^\nu{}_\beta \gamma^\beta \gamma^\mu)\gamma^5 - m]\Psi = 0 , \\
& \{i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - i\lambda_1 T_{\mu\nu} F^\nu{}_\beta [\frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\mu)]\gamma^5 - m\}\Psi = 0 , \\
& \{i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - i\lambda_1 T_{\mu\nu} F^\nu{}_\beta \sigma^{\mu\beta} \gamma^5 - m\}\Psi = 0
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

que está relacionada à Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \{i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - i\lambda_1 T_{\mu\nu} F^\nu{}_\beta \sigma^{\mu\beta} \gamma^5 - m\} \Psi \tag{5.1.11}$$

onde se identificou $\sigma^{\mu\beta} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\mu)$. O Hamiltoniano então vale

$$H\Psi = i\partial_t \Psi = \{H_0 + i\lambda_1 T_{\mu\nu} F^\nu{}_\beta \gamma^0 \sigma^{\mu\beta} \gamma^5\} \Psi , \tag{5.1.12}$$

no qual

$$H_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + eA_0 + m\gamma^0 \tag{5.1.13}$$

é o Hamiltoniano do acoplamento mínimo e

$$H_{LV} = i\lambda_1 T_{\mu\nu} F^\nu{}_\beta \gamma^0 \sigma^{\mu\beta} \gamma^5 , \tag{5.1.14}$$

corresponde à parcela do Hamiltoniano com violação de Lorentz. É necessário contrair os índices deste e computar as contribuições separadamente, como a seguir:

$$\begin{aligned}
H_{LV} &= i\lambda_1 [T_{00} F^0{}_i \gamma^0 \sigma^{0i} + T_{0j} F^j{}_i \gamma^0 \sigma^{0i} + T_{i\nu} F^\nu{}_\beta \gamma^0 \sigma^{i\beta}] \gamma^5 \\
&= i\lambda_1 [T_{00} F^0{}_i \gamma^0 \sigma^{0i} + T_{0j} F^j{}_i \gamma^0 \sigma^{0i} + T_{i0} F^0{}_j \gamma^0 \sigma^{ij} + T_{ij} F^j{}_0 \gamma^0 \sigma^{i0} + T_{ij} F^j{}_k \gamma^0 \sigma^{ik}] \gamma^5 \\
&= i\lambda_1 [T_{00} F_{0i} \gamma^0 \sigma^{0i} - T_{0j} F_{ji} \gamma^0 \sigma^{0i} + T_{i0} F_{0j} \gamma^0 \sigma^{ij} - T_{ij} F_{0j} \gamma^0 \sigma^{0i} - T_{ij} F_{jk} \gamma^0 \sigma^{ik}] \gamma^5 ,
\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

na qual deve-se usar $F_{0j} = E^j$, $F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k$, $\sigma^{0i} = i\alpha^i$ e $\sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\Sigma^k$, e as formas matriciais

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.16)$$

e as identidades

$$\alpha^i \gamma^5 = \Sigma^i, \quad \gamma^0 \Sigma^i \gamma^5 = \gamma^0 \alpha^i \gamma^5 \gamma^5 = \gamma^i, \quad (5.1.17)$$

forneendo

$$\begin{aligned} H_{\text{LV}} &= i\lambda_1 [iT_{00}\gamma^0\alpha^i E^i + iT_{0j}\epsilon_{jik}B^k\gamma^0\alpha^i + T_{i0}\epsilon_{ijk}E^j\gamma^0\Sigma^k - iT_{ij}E^j\gamma^0\alpha^i + T_{ij}\epsilon_{jkl}\epsilon_{ikm}B^l\gamma^0\Sigma^m]\gamma^5 \\ &= \lambda_1 [-T_{00}\gamma^0 E^i \Sigma^i - T_{0j}\epsilon_{jik}B^k\gamma^0\Sigma^i + iT_{i0}\epsilon_{ijk}E^j\gamma^k + T_{ij}E^j\gamma^0\Sigma^i + iT_{ij}(\delta_{ji}\delta_{lm} - \delta_{jm}\delta_{li})B^l\gamma^m] \\ &= \lambda_1 [-T_{00}\gamma^0 E^i \Sigma^i + T_{ij}\gamma^0 E^j \Sigma^i - \epsilon_{ijk}T_{0i}B^k\gamma^0\Sigma^j + i\epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\gamma^k + iTB^i\gamma^i - iT_{ij}B^i\gamma^j], \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

onde $T = \text{Tr}[T_{ij}]$. A forma matricial é escrita como

$$H_{\text{LV}} \equiv \begin{pmatrix} H_{11} & -H_{12} \\ H_{12} & -H_{11} \end{pmatrix}$$

$$H_{\text{LV}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 [-T_{00}E^i\sigma^i + T_{ij}E^j\sigma^i - T_{0i}(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i] & -i\lambda_1 (\epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\sigma^k - TB^i\sigma^i + T_{ij}B^i\sigma^j) \\ i\lambda_1 (\epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\sigma^k - TB^i\sigma^i + T_{ij}B^i\sigma^j) & -\lambda_1 [-T_{00}E^i\sigma^i + T_{ij}E^j\sigma^i - T_{0i}(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i] \end{pmatrix}, \quad (5.1.19)$$

É fácil ver que há contribuição efetiva de EDM no termo

$$H_{\text{EDM}} = \lambda_1 [-T_{00}\gamma^0 E^i \Sigma^i + T_{ij}\gamma^0 E^j \Sigma^i] \quad (5.1.20)$$

da (5.1.18), enquanto não há contribuição *usual* para o MDM. É importante lembrar que o fator de γ^0 , no termo de EDM, é responsável pela indução e detectabilidade do EDM em primeira ordem no espectro. Deve-se agora calcular o Hamiltoniano no limite não relativístico.

5.1.2 Acoplamento axial: o limite não relativístico

Pelas mesmas razões expostas no capítulo anterior, propor-se-á uma solução da forma

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \exp(-iEt), \quad (5.1.21)$$

que matricialmente vale

$$\begin{pmatrix} E\psi \\ E\chi \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{11} & -H_{12} \\ H_{12} & -H_{11} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (5.1.22)$$

$$\begin{pmatrix} E\psi \\ E\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA_0 + m + H_{11} & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12} & eA_0 - m - H_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (5.1.23)$$

onde

$$H_{11} = \lambda_1[-T_{00}E^i\sigma^i + T_{ij}E^j\sigma^i - T_{0i}(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i], \quad H_{12} = i\lambda_1(\epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\sigma^k - TB^i\sigma^i + T_{ij}B^i\sigma^j). \quad (5.1.24)$$

Em componentes, tem-se

$$[E - eA_0 - m - H_{11}]\psi - [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - H_{12}]\chi = 0, \quad (5.1.25)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}]\psi - [E - eA_0 + m + H_{11}]\chi = 0, \quad (5.1.26)$$

a partir das quais a aplicação do limite não relativístico ($E - eA_0 + m + H_{11} \approx 2m$) fornece

$$\chi \approx \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + H_{12}]\psi}{2m}, \quad (5.1.27)$$

implicando em

$$[E - m]\psi = H_{\text{NR}}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + eA_0 + H_{11} \right]\psi + \frac{1}{2m}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})H_{12} - H_{12}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})]\psi, \quad (5.1.28)$$

onde se usou $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ e se considerou apenas termos em primeira ordem nos parâmetros de violação da

simetria de Lorentz. O Hamiltoniano não relativístico, então, assume a forma

$$H_{\text{NR}} = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\pi}^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] + eA_0 - [\lambda_1 T_{00} E^i \sigma^i - \lambda_1 T_{ij} E^j \sigma^i] - \lambda_1 T_{0i} (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i + \frac{1}{2m} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) H_{12} - H_{12} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})], \quad (5.1.29)$$

no qual se observa claramente os termos de EDM $\lambda_1 T_{00} E^i \sigma^i$ e $-\lambda_1 T_{ij} E^j \sigma^i$, que não são passíveis da supressão descrita no teorema de Schiff, gerando efeitos a *tree-level*. Isto permite usar os dados experimentais da Ref. [95] para limitá-los. Começemos pelo termo $\lambda_1 T_{00} E^i \sigma^i$, que pode ser identificado com

$$|\lambda_1 T_{00} E^i \sigma^i| \equiv |\mathbf{d}_e| \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}, \quad (5.1.30)$$

evidenciando que $\lambda_1 T_{00}$ faz o papel da magnitude do momento de dipolo elétrico \mathbf{d}_e . Considerando, por exemplo, que o campo elétrico é da forma $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{z}}$, pode-se usar o limite experimental sobre $|\mathbf{d}_e|$ para impor

$$|\mathbf{d}_e| \equiv |\lambda_1 T_{00}| \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1}. \quad (5.1.31)$$

Por outro lado, o termo $\lambda_1 T_{ij} E^j \sigma^i$ também gera EDM. Considerando que os elementos da diagonal principal de T_{ij} são iguais a $\frac{\text{Tr}[T_{ij}]}{3} = \frac{T}{3}$, podemos impor o seguinte sobre o traço T :

$$|\lambda_1 T| \leq 1.1 \times 10^{-24} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.1.32)$$

que não apresenta variações siderais - por se tratar do traço, de modo que, no referencial do laboratório, o *bound* não é alterado

$$|\lambda_1 T^{(\text{Sol})}| = |\lambda_1 T^{(\text{Lab})}| \leq 1.1 \times 10^{-24} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.1.33)$$

Sobre uma componente específica T_{ii} , temos

$$|\lambda_1 T_{ii}^{(\text{Lab})}| \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.1.34)$$

que, de acordo com as transformações (4.6.2) e (4.6.4), após se aplicar a média temporal, é relacionado ao *bound* no referencial do Sol como

$$\langle \lambda_1 T_{ii}^{(\text{Lab})} \rangle = \lambda_1 [\langle (\mathcal{R}_{i1})^2 \rangle T_{11}^{(\text{Sol})} + \langle (\mathcal{R}_{i2})^2 \rangle T_{22}^{(\text{Sol})} + \langle (\mathcal{R}_{i3})^2 \rangle T_{33}^{(\text{Sol})}], \quad (5.1.35)$$

que implica em

$$|\lambda_1[\langle(\mathcal{R}_{i1})^2\rangle T_{11}^{(\text{Sol})} + \langle(\mathcal{R}_{i2})^2\rangle T_{22}^{(\text{Sol})} + \langle(\mathcal{R}_{i3})^2\rangle T_{33}^{(\text{Sol})}]| \leq 3.8 \times 10^{-25} \text{ (eV)}^{-1} , \quad (5.1.36)$$

na qual se usou as médias temporais $\langle\mathcal{R}_{i1}\mathcal{R}_{i2}\rangle = \langle\mathcal{R}_{i1}\mathcal{R}_{i2}\rangle = \langle\mathcal{R}_{i1}\mathcal{R}_{i2}\rangle = 0$, dada a dependência em $\cos\omega t$ e $\sin\omega t$.

Mas estes não são os únicos *bounds* possíveis. Observe que, ainda considerando iguais os elementos da diagonal principal de T_{ij} , podemos escrever²

$$[\lambda_1 T_{00} E^i \sigma^i - \lambda_1 T_{ij} E^j \sigma^i] = \lambda_1 [T_{00} - T_{ii}] E^i \sigma^i , \quad (5.1.37)$$

e conseqüentemente,

$$\lambda_1 [T_{00} - T_{ii}] \leq 3.8 \times 10^{-25} \text{ (eV)}^{-1} . \quad (5.1.38)$$

MDM não usual

O Hamiltoniano (5.1.29) obviamente não apresenta termos usuais de MDM, o mais próximo disto é o termo $-\lambda_1 T_{0i} (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i$, que pode ser escrito como

$$-\lambda_1 T_{0i} (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i = -\lambda_1 (T_{0i} \epsilon_{ijk} \sigma^j) B^k = -\lambda_1 \tilde{\sigma}^k B^k , \quad (5.1.39)$$

onde se definiu

$$\tilde{\sigma}^k = T_{0i} \epsilon_{ijk} \sigma^j . \quad (5.1.40)$$

O operador de *spin* (5.1.40) mistura componentes distintas σ^j , como numa rotação. Esta interpretação de $\tilde{\sigma}$, como um operador de *spin* rotacionado, permite usar os dados experimentais acerca do MDM anômalo para impor limites sobre os parâmetros de violação da simetria de Lorentz. Para que isto seja possível, entretando, deve-se considerar uma configuração experimental não usual. Façamos uma pequena digressão.

Numa interação usual de dipolo, é necessário que alguma componente do campo, \mathbf{E} ou \mathbf{B} , aponte na direção do *spin* $\boldsymbol{\sigma}$, de modo que o produto $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ ou $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ seja não nulo. Num cenário como este, com o operador de *spin* rotacionado, é possível haver interação de MDM mesmo quando o *spin* é perpendicular aos campos. Por exemplo, tome uma partícula com *spin* na direção z e um campo magnético na direção x no termo (5.1.39)

$$-\lambda_1 \tilde{\sigma}^k B^k = -\lambda_1 (T_{0i} \epsilon_{i31} \sigma^3) B^1 = -\lambda_1 (T_{02} \epsilon_{231} \sigma^3) B^1 , \quad (5.1.41)$$

²Aqui vou ignorar os elementos fora da diagonal de T_{ij} .

$$-\lambda_1 \tilde{\sigma}^k B^k = -\lambda_1 T_{02} \sigma^3 B^1, \quad (5.1.42)$$

evidenciando que a interação geraria alterações no espectro da partícula. De acordo com a discussão no capítulo anterior, a interação total de MDM, por comparação com a (4.5.16), vale

$$H_{\text{MDM}} = -\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \lambda_1 \tilde{\sigma}^k B^k, \quad (5.1.43)$$

que, sob as condições impostas acima, torna-se apenas

$$H_{\text{MDM}} = -\lambda_1 T_{02} (\sigma^3 B^1). \quad (5.1.44)$$

Aqui temos um ponto aparentemente delicado, porque a interação usual $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ é nula para a configuração proposta, ou seja

$$H_{\text{MDM}} = \mu_B \left[0 + \frac{2m}{e} \lambda_1 T_{02} \right] \sigma^3 B^1 \equiv -\mu_B (0 + a) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (5.1.45)$$

de maneira similar à (4.5.18). Propõe-se então que, mesmo neste cenário, valha usar a discrepância Δa entre o MP e o experimento para impor o *bound*³

$$\frac{2m}{e} \lambda_1 T_{02} \leq \Delta a \rightarrow |\lambda_1 T_{02}| \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.1.46)$$

onde se usou $\Delta a = 2.8 \times 10^{-13}$, $e = \sqrt{4\pi/137}$ e $m = 5.11 \times 10^5$ eV. O mesmo procedimento para as demais possibilidades de direção do campo \mathbf{B} e do *spin* fornece

$$|\lambda_1 T_{0i}^{(\text{Lab})}| \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.1.47)$$

resultado claramente condicionado à possibilidade de se medir interações quando o *spin* da partícula é preparado perpendicularmente ao campo magnético \mathbf{B} aplicado. O *bound* (5.1.47), feita a análise sideral, transforma-se como

$$T_{0i}^{(\text{Lab})} = \mathcal{R}_{0\alpha} \mathcal{R}_{i\beta} T_{\alpha\beta}^{(\text{Sol})}, \quad (5.1.48)$$

$$T_{0i}^{(\text{Lab})} = \mathcal{R}_{i\beta} T_{0\beta}^{(\text{Sol})} = \mathcal{R}_{ij} T_{0j}^{(\text{Sol})} = \mathcal{R}_{i1} T_{01}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{i2} T_{02}^{(\text{Sol})} + \mathcal{R}_{i3} T_{03}^{(\text{Sol})},$$

que, aplicada a média temporal, torna-se

$$\langle T_{0i}^{(\text{Lab})} \rangle = (-\delta_{i1} \sin \chi + \delta_{i3} \cos \chi) T_{03}^{(\text{Sol})}, \quad (5.1.49)$$

³Segundo o MP, a anomalia a continua existindo, porque advém de correções da QED, de modo que a divergência entre o MP e o experimento continuaria valendo Δa .

$$|\lambda_1(-\delta_{i1} \sin \chi + \delta_{i3} \cos \chi) T_{03}^{(\text{Sol})}| \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1} . \quad (5.1.50)$$

na qual χ corresponde à colatitude do laboratório. Note que a média temporal eliminou a dependência nas demais componentes $T_{0i}^{(\text{Sol})}$ com $i \neq 3$.

5.1.3 O acoplamento não mínimo não axial

Agora devemos abordar a versão não axial do acoplamento acima. O desenvolvimento é bastante simples, visto que, ao se remover um fator $-i\gamma^5$ da derivada covariante (5.1.5), a hermiticidade é preservada. Logo, tomemos a derivada covariante como

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{\lambda'_1}{2} (T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} - T^\beta_{\nu\mu} F^\nu_\mu) \gamma^\beta , \quad (5.1.51)$$

que advém da Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu + i\frac{\lambda'_1}{2} (T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} - T^\beta_{\nu\mu} F^\nu_\mu) \gamma^\mu \gamma_\beta - m] \Psi \\ &= \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu + i\frac{\lambda'_1}{2} (T_{\mu\nu} F^{\nu\beta} - T^\beta_{\nu\mu} F^\nu_\mu) \gamma^\mu \gamma_\beta (\gamma^5 \gamma^5) - m] \Psi \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

na qual inserimos o fator $\gamma^5 \gamma^5 = 1$ que vai ser útil a seguir. Observe que a diferença entre a Lagrangiana axial (5.1.6) e a não axial (5.1.52) é apenas um fator de $i\gamma^5$ pela direita. Portanto, por comparação com a (5.1.10), podemos escrever a equação de Dirac modificada para o acoplamento não mínimo não axial como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \{ i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu + \lambda'_1 T_{\mu\nu} F^\nu_\beta \sigma^{\mu\beta} - m \} \Psi . \quad (5.1.53)$$

5.1.4 Acoplamento não axial: o limite não relativístico

O Hamiltoniano relativístico é obtido facilmente se compararmos a (5.1.6) com a (5.1.53). É fácil ver que os Hamiltonianos relacionados diferem apenas por um fator $i\gamma^5$ na parcela H_{LV} . Em outras palavras, para obter o Hamiltoniano relativístico do acoplamento não axial, já na forma matricial, basta multiplicar H_{LV} na (5.1.22) por $i\gamma^5$ pela direita, fornecendo

$$\begin{pmatrix} E\psi \\ E\chi \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} H_{11} & -H_{12} \\ H_{12} & -H_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} , \quad (5.1.54)$$

$$\begin{pmatrix} E\psi \\ E\chi \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} eA_0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & eA_0 - m \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -H_{12} & H_{11} \\ -H_{11} & H_{12} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (5.1.55)$$

de modo que podemos usar os desenvolvimentos anteriores para obter o Hamiltoniano não relativístico, bastando fazer $H_{11} \rightarrow -iH_{12}$ e $H_{12} \rightarrow -iH_{11}$ na (5.1.28). Esta substituição leva a

$$H_{\text{NR}(2)}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi}^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) + eA_0 - H_{12} \right] \psi - \frac{i}{2m} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})H_{11} - H_{11}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})] \psi, \quad (5.1.56)$$

onde vale lembrar que

$$H_{11} = \lambda'_1 [-T_{00}E^i\sigma^i + T_{ij}E^j\sigma^i - T_{0i}(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B})^i], \quad H_{12} = i\lambda'_1 (\epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\sigma^k - TB^i\sigma^i + T_{ij}B^i\sigma^j), \quad (5.1.57)$$

forneecendo

$$\begin{aligned} H_{\text{NR}(2)} = & \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + eA_0 + \lambda'_1 \epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\sigma^k - \lambda'_1 TB^i\sigma^i + \lambda'_1 T_{ij}B^i\sigma^j \\ & - \frac{i}{2m} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})H_{11} - H_{11}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})], \end{aligned} \quad (5.1.58)$$

na qual $T = \text{Tr}[T_{ij}]$.

O Hamiltoniano não relativístico (5.1.58) contém claramente contribuições de MDM nos termos $-\lambda'_1 TB^i\sigma^i$ e $\lambda'_1 T_{ij}B^i\sigma^j$, mas nenhuma usual de EDM, apenas $\lambda'_1 \epsilon_{ijk}T_{i0}E^j\sigma^k$. Quanto à contribuição de MDM

$$H_{\text{MDM-LV}} = -\lambda'_1 (TB^i\sigma^i - T_{ij}B^i\sigma^j), \quad (5.1.59)$$

supondo os elementos da diagonal principal do tensor T_{ij} iguais a $T_{ii} = \frac{T}{3}$, podemos escrever o Hamiltoniano total de MDM como

$$H_{\text{MDM}} = -\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \lambda'_1 (TB^i\sigma^i - T_{ii}B^i\sigma^i) = -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{2m}{e} \lambda'_1 T \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (5.1.60)$$

onde identificamos $\frac{2}{3} \frac{2m}{e} \lambda'_1 T$ com δ na (4.5.18), ou seja

$$H_{\text{MDM}} = -\mu_B (1 + \delta) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{2m}{e} \lambda'_1 T \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (5.1.61)$$

permitindo, sob a condição $\frac{2}{3} \frac{2m}{e} \lambda'_1 T \leq \Delta a$, aplicar o seguinte *bound* sobre o traço

$$|\lambda'_1 T| \leq 3.5 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.1.62)$$

que não está sujeito a variações siderais. Sobre uma componente da diagonal principal qualquer, temos

$$|\lambda'_1 T_{ii}^{(\text{Lab})}| \leq 1.17 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1} , \quad (5.1.63)$$

cujas variações siderais levam a

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 T_{ii}^{(\text{Lab})} \rangle &= \lambda'_1 [\langle (\mathcal{R}_{i1})^2 \rangle T_{11}^{(\text{Sol})} + \langle (\mathcal{R}_{i2})^2 \rangle T_{22}^{(\text{Sol})} + \langle (\mathcal{R}_{i3})^2 \rangle T_{33}^{(\text{Sol})}] , \\ |\lambda'_1 (\langle (\mathcal{R}_{i1})^2 \rangle T_{11}^{(\text{Sol})} + \langle (\mathcal{R}_{i2})^2 \rangle T_{22}^{(\text{Sol})} + \langle (\mathcal{R}_{i3})^2 \rangle T_{33}^{(\text{Sol})})| &\leq 1.17 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1} . \end{aligned} \quad (5.1.64)$$

EDM não usual

O Hamiltoniano (5.1.58) apresenta apenas uma contribuição da forma

$$\lambda'_1 \epsilon_{ijk} T_{i0} E^j \sigma^k = -\lambda'_1 T_{i0} \epsilon_{ikj} \sigma^k E^j = -\lambda'_1 \tilde{\sigma}^j E^j , \quad (5.1.65)$$

onde se tomou

$$\tilde{\sigma}^j = T_{i0} \epsilon_{ikj} \sigma^k \quad (5.1.66)$$

como um operador de *spin* rotacionado, permitindo usar a mesma análise empregada na Seç. 5.1.2, desta vez aplicada ao EDM. Usando novamente os dados experimentais da Ref. [95] e identificando $|\mathbf{d}_e| \equiv |\lambda'_1 T_{i0}|$, podemos impor

$$|\lambda'_1 T_{i0}^{(\text{Lab})}| \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1} , \quad (5.1.67)$$

que está sujeito a variações siderais. Em termos das componentes $T_{i0}^{(\text{Sol})}$, pode-se escrever

$$|\lambda'_1 (-\delta_{i1} \sin \chi + \delta_{i3} \cos \chi) T_{30}^{(\text{Sol})}| \leq 3.8 \times 10^{-25} . \quad (5.1.68)$$

5.2 Limitando as componentes T_{ij} fora da diagonal principal

Vamos ilustrar como uma interpretação não usual permitiria limitar componentes T_{ij} com $i \neq j$. Começemos por considerar um aparato experimental capaz de detectar *shifts* no espectro quando o campo \mathbf{E} , ou \mathbf{B} , aponta numa direção perpendicular ao *spin* $\boldsymbol{\sigma}$. Tomemos, por exemplo, a interação

$$\lambda_1 T_{ij} E^j \sigma^i , \quad (5.2.1)$$

presente no Hamiltoniano (5.1.29), quando o campo \mathbf{E} aponta na direção $\hat{\mathbf{x}}$ e a partícula tem *spin* na direção $\hat{\mathbf{z}}$, ou seja

$$\lambda_1 T_{31} E^1 \sigma^3 . \quad (5.2.2)$$

Nesta configuração, o termo $T_{00} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ tem valor esperado nulo, restando apenas a interação (5.2.2), que pode então ser limitada

$$|\lambda_1 T_{31}| \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1} . \quad (5.2.3)$$

Esta está sujeita a variações siderais, de acordo com as tranformações descritas nas (4.6.4) e (4.6.2).

O procedimento acima pode ser usado para limitar quaisquer outras componentes $\lambda_1 T_{ij}$ fora da diagonal principal. Note que o mesmo raciocínio pode ser empregado para impor *bounds* sobre as componentes de MDM $\lambda'_1 T_{ij}$ (fora da diagonal principal) no acoplamento não axial.

5.3 Sobreposição com *bounds* da literatura

É necessário esclarecer neste momento se há alguma correspondência entre os *bounds* encontrados neste capítulo e os do capítulo anterior - listados também na Ref. [102]. Para tanto, considere que o tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ pode ser usado para definir a parcela não birrefringente

$$\kappa_{\nu\beta} = (k_F)_{\nu\alpha\beta}^\alpha , \quad (5.3.1)$$

cujos traço κ^ν_ν é nulo, dado que $(k_F)^{\alpha\nu}_{\alpha\nu} = 0$. Além da relação (5.3.1), vale

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} \kappa_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} \kappa_{\nu\alpha} + g_{\nu\beta} \kappa_{\mu\alpha} - g_{\nu\alpha} \kappa_{\mu\beta}) , \quad (5.3.2)$$

que, quando substituída na Lagrangiana (4.2.3), fornece

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - \frac{\lambda_A}{2} (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu F^{\alpha\beta} - m] \Psi \quad (5.3.3)$$

$$= \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - i\frac{\lambda_A}{2} (i)(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^5 F^{\alpha\beta} - m] \Psi . \quad (5.3.4)$$

Usando $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ e a (5.3.2), obtemos

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - i\lambda_A (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 F^{\alpha\beta} - m] \Psi \quad (5.3.5)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\Psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m \\
&- i\frac{\lambda_A}{2}(\kappa_{\nu\beta} F_\mu^\beta \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 + 2\kappa_{\nu\alpha} F_\mu^\alpha \sigma^{\nu\mu} \gamma^5 - \kappa_{\mu\beta} F_\nu^\beta \sigma^{\mu\nu} \gamma^5)]\Psi,
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

onde se identifica claramente o termo $-i\bar{\Psi}\kappa_{\nu\alpha}F_\mu^\alpha\sigma^{\nu\mu}\gamma^5\Psi$ com o presente na Lagrangiana do acoplamento não mínimo axial (5.1.11)

$$-i\lambda_A\bar{\Psi}\kappa_{\nu\alpha}F_\mu^\alpha\sigma^{\nu\mu}\gamma^5\Psi \sim -i\lambda_1\bar{\Psi}T_{\nu\alpha}F_\mu^\alpha\sigma^{\nu\mu}\gamma^5\Psi, \tag{5.3.7}$$

bastando trocar $\lambda_1 T_{\nu\alpha} \leftrightarrow \lambda_A \kappa_{\nu\alpha}$. Vale também verificar se as relações acima também se aplicam ao acoplamento proposto na Ref. [103], a saber

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + \frac{\lambda^{(e)}}{2}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - m]\Psi. \tag{5.3.8}$$

Usando a prescrição (5.3.2), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\Psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m \\
&+ \frac{\lambda^{(e)}}{2}\frac{1}{2}(\kappa_{\nu\beta} F_\mu^\beta \sigma^{\mu\nu} + 2\kappa_{\nu\alpha} F_\beta^\alpha \sigma^{\nu\beta} - \kappa_{\mu\beta} F_\nu^\beta \sigma^{\mu\nu})]\Psi,
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

de onde se pode extrair o termo $\frac{\lambda^{(e)}}{2}\kappa_{\nu\alpha}F_\beta^\alpha\sigma^{\nu\beta}$, e identificá-lo com o termo extra da Lagrangiana (5.1.53)

$$\frac{\lambda^{(e)}}{2}\kappa_{\nu\alpha}F_\beta^\alpha\sigma^{\nu\beta} \sim \lambda_1' T_{\mu\nu} F_\beta^\nu \sigma^{\mu\beta}, \tag{5.3.10}$$

que evidencia a similaridade entre $\kappa_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. Uma análise apressada concluiria que os acoplamentos deste capítulo já foram investigados anteriormente. Não é bem o caso, uma vez que o tensor $T_{\mu\nu}$ não apresenta simetria definida (em ambas a propostas até o momento), enquanto $\kappa_{\nu\alpha}$ deve apresentar traço nulo. No entanto, algumas correspondências podem ser feitas de maneira segura.

Considerando o setor $(k_{DE})_{jk}$ do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ e a (5.3.2), temos

$$\begin{aligned}
&(k_{DE})_{jk} = -2(k_F)_{0j0k} \\
&= \frac{1}{2}(-2)(g_{00}\kappa_{jk} - g_{0k}\kappa_{\nu\alpha} + g_{jk}\kappa_{00} - g_{j0}\kappa_{0k}) = -(\kappa_{jk} - \delta_{jk}\kappa_{00}),
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

de onde se conclui

$$(k_{DE})^{jk} = \delta^{jk}\kappa_{00} - \kappa^{jk}, \tag{5.3.12}$$

de modo que, para uma componente específica $(k_{DE})^{ii}$, temos

$$(k_{DE})^{ii} = \kappa_{00} - \kappa^{ii} . \quad (5.3.13)$$

Por outro lado, sabemos que $\kappa_{\nu\alpha}$ tem traço nulo, ou seja

$$\kappa^\nu{}_\beta = \kappa^0{}_0 + \kappa^i{}_i = \kappa_{00} - 3\kappa_{ii} = 0 , \quad (5.3.14)$$

e, assumindo que as três componentes κ_{ii} são iguais, conclui-se que

$$(k_{DE})^{ii} = \frac{2}{3}\kappa_{00} , \quad \text{Tr}[(k_{DE})] = 2\kappa_{00} . \quad (5.3.15)$$

Podemos agora estabelecer um vínculo entre os *bounds* obtidos para $\lambda_A(k_{DE})$ e os obtidos neste capítulo sobre $\lambda'T_{\mu\nu}$. Por exemplo, observe que, identificando $\lambda_A\kappa_{00}$ com $\lambda'T_{00}$, podemos obter uma relação entre os *bounds* sobre $\lambda_A\text{Tr}[(k_{DE})]$ e λ_1T_{00} , fazendo uso da (5.3.15). Isto é mostrado na tabela 5.1, que lista as correspondências entre os *bounds* das Refs. [102, 103] e os deste capítulo.

	$\lambda_A(k_F)$ da Ref. [102]	correspondência
MDM	$ \lambda_A(k_{DB})_{33} \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}$	não existe
EDM	$ \lambda_A\text{Tr}[k_{DE}] \leq 1.1 \times 10^{-24} (\text{eV})^{-1}$	$ \lambda_1T_{00} \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1}$
	$\lambda(k_F)$ da Ref. [103]	correspondência
MDM	$ \lambda(k_{HB})_{33} \leq 2.35 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}$	$ \lambda_1T \leq 3.5 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}$
EDM	$ \lambda(k_{HE})_{11} \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1}$	não existe

Tabela 5.1: Correspondências entre os *bounds* expressos na literatura, Refs. [103, 102], e os obtidos para $T_{\mu\nu}$.

Quanto ao *bound* sobre o MDM da Ref. [102], é necessário escrever o tensor $(k_{DB})_{jk}$ como

$$(k_{DB})_{jk} = -(k_{HE})_{kj} = \epsilon_{kpq}(k_F)_{0j pq} \quad (5.3.16)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_{kpq}(g_{0p}\kappa_{jq} - g_{0q}\kappa_{jp} + g_{jq}\kappa_{0p} - g_{jp}\kappa_{0q}) = \frac{1}{2}\epsilon_{kpq}(-\delta_{jq}\kappa_{0p} + \delta_{jp}\kappa_{0q}) , \quad (5.3.17)$$

ou seja

$$(k_{DB})_{jk} = -(k_{HE})_{kj} = \epsilon_{kjp}\kappa_{0p} . \quad (5.3.18)$$

Note que qualquer elemento da diagonal principal de $(k_{DB})_{jk}$ (ou $(k_{HE})_{kj}$) é nulo, de modo que não pode haver correspondência entre os *bounds* sobre $(k_{DB})_{ii}$ e o possível correspondente em $T_{\mu\nu}$. O mesmo pode ser afirmado sobre as componentes $(k_{HE})_{ii}$, relacionadas ao EDM, limitadas na Ref. [103], que não podem ser

comparadas com as analisadas neste capítulo. Ainda nesta referência, quanto às componentes de MDM, é necessário escrever a relação

$$(k_{HB})_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{j pq} \epsilon_{klm} (k_F)_{pqlm} \quad (5.3.19)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \epsilon_{j pq} \epsilon_{klm} (g_{pl} \kappa_{qm} - g_{pm} \kappa_{ql} + g_{qm} \kappa_{pl} - g_{ql} \kappa_{pm}) , \quad (5.3.20)$$

que pode ser escrita como

$$(k_{HB})^{jk} = -\delta^{jk} \text{Tr}[\kappa_{ij}] + \kappa^{kj} . \quad (5.3.21)$$

Desta forma, para uma componente específica $(k_{HB})^{ii}$, vale

$$(k_{HB})^{ii} = -\text{Tr}[\kappa_{ij}] + \frac{\text{Tr}[\kappa_{ij}]}{3} = -\frac{2}{3} \text{Tr}[\kappa_{ij}] , \quad (5.3.22)$$

permitindo escrever

$$\lambda^{(e)} (k_{HB})^{33} = -\frac{2}{3} \lambda^{(e)} \text{Tr}[\kappa_{ij}] , \quad (5.3.23)$$

que, junto da (5.3.10), evidencia a relação entre os traços $\text{Tr}[\kappa_{ij}]$ e $\text{Tr}[T_{ij}]$.

A discussão acima mostra que a correspondência entre os *bounds* obtidos neste capítulo e os da literatura não é total. Vale lembrar que neste capítulo limitamos também componentes fora da diagonal principal, que não estão relacionadas ao traço. Este procedimento permitiu limitar elementos que outrora não foram sujeitos a *bounds*, não havendo, portanto, correspondência com os obtidos anteriormente nas Refs. [102, 103].

5.4 Novas possibilidades de acoplamentos não mínimos

Os acoplamentos não mínimos expostos até o momento não englobam todas as possibilidades aceitáveis. Poderíamos, a princípio, considerar um acoplamento com contração total entre os $T_{\mu\nu}$ e $F^{\mu\nu}$, por meio da derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \lambda_2 T_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^5 , \quad (5.4.1)$$

relacionada à Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu + \lambda_2 T_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^5 - m] \Psi \quad (5.4.2)$$

$$= \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu + 4\lambda_2 T_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \gamma^5 - m] \Psi \quad (5.4.3)$$

que, evidentemente, não apresenta interação de *spin*, exceto a usual. Portanto, o acoplamento (5.4.1), bem como sua versão não axial, são irrelevantes em nossa análise, cujo foco, vale lembrar, são termos de EDM e

MDM advindos de acoplamentos não mínimos.

Outra possibilidade seria tomar acoplamentos em que os tensores $T_{\alpha\nu}$ e $F_{\mu\beta}$ não apresentem índices mutuamente contraídos, apenas com matrizes γ^η , como por exemplo

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \bar{\lambda} T_{\{\alpha\nu} F_{\mu\beta\}} \gamma^{\{\beta} \gamma^\alpha \gamma^{\nu\}} , \quad (5.4.4)$$

em que $\{\}$ denota qualquer permutação possível entre os índices. Dentre os possíveis, consideremos

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \bar{\lambda} T_{\alpha\nu} F_{\mu\beta} \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu , \quad (5.4.5)$$

cujas versão adequada, isto é, que gera uma contribuição hermitiana, deve ser

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{\lambda_3}{4} (T_{\alpha\nu} F_{\mu\beta} + T_{\mu\beta} F_{\alpha\nu}) \gamma^\beta \sigma^{\alpha\nu} . \quad (5.4.6)$$

A (5.4.6), inserida na equação de Dirac, fornece

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu + i\frac{\lambda_3}{4} [T_{\alpha\nu} \frac{1}{2} F_{\mu\beta} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\beta] + T_{\mu\beta} (2\eta^{\mu\beta} - \gamma^\beta \gamma^\mu) F_{\alpha\nu}] \sigma^{\alpha\nu}\} \Psi = 0 , \quad (5.4.7)$$

onde se usou $\gamma^\mu \gamma^\beta = 2g^{\mu\beta} - \gamma^\beta \gamma^\mu$. Agora é importante propor uma simetria para $T_{\mu\beta}$. Caso $T_{\mu\nu}$ seja simétrico, teríamos apenas a contribuição $\lambda_3 T_{\beta}^{\alpha} F_{\alpha\nu} \sigma^{\nu\alpha}$, que corresponde à interação usual de MDM, vide (3.4.1). Tomando-o antissimétrico, temos a equação de Dirac modificada

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu + \frac{\lambda_3}{8} (T_{\alpha\nu} F_{\mu\beta} + T_{\mu\beta} F_{\alpha\nu}) \sigma^{\mu\beta} \sigma^{\alpha\nu}] \Psi = 0 , \quad (5.4.8)$$

que gera o Hamiltoniano

$$i\partial_t \Psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + eA_0 + m\gamma^0 + H_{LV3}] \Psi \equiv H \Psi , \quad (5.4.9)$$

no qual

$$H_{LV3} = -\frac{\lambda_3}{8} (T_{\alpha\nu} F_{\mu\beta} + T_{\mu\beta} F_{\alpha\nu}) \gamma^0 \sigma^{\mu\beta} \sigma^{\alpha\nu} . \quad (5.4.10)$$

O procedimento para encontrar o Hamiltoniano não relativístico foi empregado repetidas vezes. Por economia, vamos citar o resultado

$$\begin{aligned} H_{NR(3)} = & \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\pi}^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] + eA_0 + \lambda_3 T_{0i} E^i + \lambda_3 T_{ij} \epsilon_{ijk} B^k \\ & + \frac{1}{2m} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) H_{12}^{(3)} - H_{12}^{(3)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})] , \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

onde é clara a falta de interações de EDM ou MDM nos termos $\lambda_3 T_{0i} E^i + \lambda_3 T_{ij} \epsilon_{ijk} B^k$, visto que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} não se acoplam ao *spin* da partícula.

Uma outra escolha seria tomar a seguinte derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{\lambda_4}{4}(T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta} - T_{\mu\beta}F_{\alpha\nu})\gamma^\beta\sigma^{\alpha\nu}, \quad (5.4.12)$$

que já está em sua forma adequada, de modo a gerar uma contribuição hermitiana. Novamente consideramos $T_{\alpha\nu}$ antissimétrico, de modo que a equação de Dirac modificada, para este caso, é

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu + ie\gamma^\mu A_\mu - i\frac{\lambda_4}{8}(T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta} - T_{\mu\beta}F_{\alpha\nu})\sigma^{\mu\beta}\sigma^{\alpha\nu}]\Psi = 0, \quad (5.4.13)$$

cujos Hamiltoniano relativístico apresenta a parcela

$$H_{LV(4)} = i\frac{\lambda_4}{8}(T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta} - T_{\mu\beta}F_{\alpha\nu})\gamma^0\sigma^{\mu\beta}\sigma^{\alpha\nu}, \quad (5.4.14)$$

e o Hamiltoniano não relativístico corresponde a

$$\begin{aligned} H_{NR(4)} &= \frac{1}{2m}[\boldsymbol{\pi}^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] + eA_0 + \lambda_4\epsilon_{ijk}T_{0i}E^j\sigma^k + \lambda_4T_{ij}\sigma^iB^j \\ &+ \frac{1}{2m}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})H_{12}^{(4)} - H_{12}^{(4)}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})]. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Aplicando a interpretação não usual do *spin* rotacionado, é possível impor, sobre o termo de EDM, o limite

$$|\lambda_4 T_{0i}| \leq 3.8 \times 10^{-25} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.4.16)$$

e sobre o termo de MDM

$$|\lambda_4 T| \leq 3.5 \times 10^{-20} (\text{eV})^{-1}, \quad (5.4.17)$$

nos quais foram empregados os mesmos procedimentos das Seções 5.1.1-5.

5.5 Comportamento sob C , P e T

O comportamento dos termos limitados acima encontra-se na tabela 5.2. Observe como a classificação sob as operações discretas C , P e T é condizente com a geração de EDM pelos termos $\lambda_1 T_{00}$, $\lambda_1 T_{ij}$, $\lambda'_1 T_{i0}$ e $\lambda_4 T_{0i}$, que são C - e P -ímpares, como esperado de termos de EDM. Os demais termos são responsáveis pela geração de MDM, que é par sob qualquer uma das operações discretas ou combinações.

	$\lambda_1 T_{00}$	$\lambda_1 T_{0i}$	$\lambda_1 T_{ij}$	$\lambda'_1 T_{00}$	$\lambda'_1 T_{i0}$	$\lambda'_1 T_{ij}$	$\lambda_4 T_{0i}$	$\lambda_4 T_{ij}$
C	+	+	+	+	+	+	+	+
P	-	+	-	+	-	+	-	+
T	-	+	-	+	-	+	-	+
CPT	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabela 5.2: Comportamento sob C , P e T dos modelos propostos com o tensor $T_{\mu\alpha}$.

Comentário sobre acoplamentos não mínimos redundantes

É possível propor outros acoplamentos similares à forma (5.4.5), como por exemplo, os relacionados aos termos $\bar{\lambda}\bar{\Psi}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\Psi$ ou $\bar{\lambda}\bar{\Psi}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\Psi$. No entanto, dada a antissimetria dos tensores $T_{\alpha\nu}$ e $F_{\mu\beta}$, estas propostas tornam-se redundantes a menos de um sinal pela troca de índices. Uma possibilidade distinta seria tomar a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\bar{\lambda}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu, \quad (5.5.1)$$

que gera a seguinte parcela na densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{LV} = -\bar{\lambda}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu\Psi. \quad (5.5.2)$$

Usando $\gamma^\alpha\gamma^\beta = -\gamma^\beta\gamma^\alpha + 2g^{\alpha\beta}$, podemos escrever a (5.5.2) como

$$\mathcal{L}_{LV} = -\bar{\lambda}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\bar{\Psi}\gamma^\mu(-\gamma^\beta\gamma^\alpha + 2g^{\alpha\beta})\gamma^\nu\Psi \quad (5.5.3)$$

$$= \bar{\lambda}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\nu\Psi - 2\bar{\lambda}T_{\alpha\nu}F_{\mu\beta}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi, \quad (5.5.4)$$

cujos termos são idênticos aos da (5.4.1) e (5.1.53), sob a condição de se tomar antissimétrico o tensor $T_{\alpha\nu}$. A relação de anti-comutação das matrizes γ^μ permite recuperar os acoplamentos já descritos, evidenciando que as demais possibilidades são fisicamente redundantes. Por economia, omitiu-se as versões hermitianas dos acoplamentos, mas isto não muda as conclusões.

Capítulo 6

Contribuições ao momento de Schiff e EDM nuclear advindas da violação da simetria de Lorentz

Até o momento, consideramos efeitos de EDM e MDM advindos de correções relativísticas, que compõem uma maneira de contornar o teorema de Schiff exposto na Seç. 3.6.2. Outra maneira de fazê-lo é levar em conta as dimensões das partes interagentes e considerar suas distribuições de carga. Uma escolha interessante é considerar um sistema composto por um átomo cujo núcleo contém o EDM, e não os elétrons (como até o momento foi feito). Nesta configuração, iremos examinar os efeitos das dimensões do núcleo sobre a blindagem do EDM descrita pelo teorema de Schiff. Feito isto, veremos que a blindagem deixa de ser completa e que passa a existir um termo residual em primeira ordem no EDM: o momento de Schiff. Uma vez analisado o cenário usual, iremos verificar se a eletrodinâmica do modelo padrão estendido (MPE), por meio de um potencial coulombiano modificado, tem algum efeito sobre a blindagem de Schiff.

6.1 O teorema de Schiff revisitado

Antes de expor a interação residual conhecida como momento de Schiff, revisitemos o teorema de Schiff em uma formulação mais adaptada às discussões deste capítulo.

Seguindo o roteiro da demonstração original [100], consideremos um átomo cujo núcleo possui um EDM

d . Numa região com um campo elétrico externo \mathbf{E}_0 , o Hamiltoniano que descreve o sistema é

$$H = K + V_0 + V + U + W , \quad (6.1.1)$$

no qual temos a energia cinética

$$K = \sum_i^N -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_i^2} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_N^2} , \quad (6.1.2)$$

onde \mathbf{q}_N é a posição do núcleo. A interação eletrostática elétron-elétron e elétron-núcleo é

$$V_0 = \sum_{i>j} \frac{e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} - \sum_i^N \frac{Ze^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|} , \quad (6.1.3)$$

a interação entre as cargas e o campo elétrico externo é dada por

$$V = - \sum_i^N (-e\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{E}_0 - Ze\mathbf{q}_N \cdot \mathbf{E}_0 , \quad (6.1.4)$$

e o potencial do dipolo do núcleo com o campo gerado pela nuvem eletrônica é

$$U = -\mathbf{d} \cdot [-\nabla (\text{potencial no núcleo gerado pela nuvem eletrônica})] , \quad (6.1.5)$$

$$U = -e\mathbf{d} \cdot \sum_i^N \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|^3} . \quad (6.1.6)$$

Enquanto a energia do EDM nuclear sob efeito do campo elétrico externo equivale a

$$W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 . \quad (6.1.7)$$

Schiff mostrou que, definindo o operador deslocamento

$$Q = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N} , \quad (6.1.8)$$

é possível mostrar que

$$[Q, V_0] = U , \quad [Q, V] = W \quad (6.1.9)$$

além de

$$[Q, K] = 0 . \quad (6.1.10)$$

Isto permite escrever o Hamiltoniano (6.1.1) como

$$H = K + V_0 + V + [Q, K + V_0 + V] , \quad (6.1.11)$$

$$H = H_0 + [Q, H_0] , \quad (6.1.12)$$

onde $H_0 = K + V_0 + V$ é o Hamiltoniano do átomo na ausência de interações de EDM. Acontece que o Hamiltoniano (6.1.12), em primeira ordem no EDM \mathbf{d} (ou em Q), equivale a

$$H' = e^Q H_0 e^{-Q} . \quad (6.1.13)$$

Para deixar isto transparente, observe que

$$H' = e^Q H_0 e^{-Q} = \left(1 + Q + \frac{Q^2}{2!} \dots \right) H_0 \left(1 - Q + \frac{Q^2}{2!} \dots \right) , \quad (6.1.14)$$

cuja aproximação em primeira ordem em Q é

$$H' = e^Q H_0 e^{-Q} \approx H_0 + [Q, H_0] . \quad (6.1.15)$$

Por outro lado, se podemos escrever uma equação de autovalor para H_0 ,

$$H_0 |\psi\rangle = E_\psi |\psi\rangle , \quad (6.1.16)$$

podemos transformá-la usando o operador e^Q

$$e^Q H_0 |\psi\rangle = e^Q E_\psi |\psi\rangle \rightarrow e^Q H_0 e^{-Q} (e^Q |\psi\rangle) = E_\psi (e^Q |\psi\rangle) . \quad (6.1.17)$$

Usando que $H' = e^Q H_0 e^{-Q} \approx H_0 + [Q, H_0]$, concluímos que

$$(H_0 + [Q, H_0]) (e^Q |\psi\rangle) \approx H' (e^Q |\psi\rangle) = E_\psi (e^Q |\psi\rangle) , \quad (6.1.18)$$

ou seja, H' (dependente de EDM em primeira ordem) e H_0 (independente de EDM) têm o mesmo espectro. Este é o teorema de Schiff: em primeira ordem, efeitos de EDM não são detectáveis em sistemas pontuais, eletrostáticos e não relativísticos.

6.2 O EDM nuclear e o momento de Schiff

Momentos de dipolo elétrico, dado o comportamento sob simetrias discretas, devem ter como fonte interações que violem P e T , e conseqüentemente CP , caso o teorema CPT seja de fato respeitado pela natureza. No que diz respeito às interações fortes, espera-se que haja violação de CP , o que motivou alguns autores a supor que isto possa gerar uma distribuição assimétrica de carga no núcleo e, conseqüentemente, EDM nuclear [101, 110].

Segundo esta proposta, a distribuição de carga do núcleo é $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r})$, na qual $\rho_0(\mathbf{r})$ corresponde à parcela esfericamente simétrica e $\delta\rho(\mathbf{r})$ representa flutuações de carga advindas de interações nucleares que violam T e P (e CP). A densidade $\rho_0(\mathbf{r})$ é normalizada, $\int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r = 1$, e o momento de dipolo nuclear é dado por

$$\mathbf{d} = d \frac{\mathbf{I}}{I} = Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} , \quad (6.2.1)$$

onde \mathbf{I} é o *spin* do núcleo. Além disto, impõe-se que a função $\delta\rho(\mathbf{r})$ seja ímpar nas coordenadas \mathbf{r} .

Consideremos então um átomo de número atômico Z e nuvem eletrônica composta por N elétrons - permitindo a possibilidade de se lidar com íons ($Z \neq N$). Podemos escrever o Hamiltoniano deste átomo numa região com um campo elétrico externo \mathbf{E}_0

$$H = K + V_0 + V + U + W , \quad (6.2.2)$$

no qual temos a energia cinética

$$K = \sum_i^N -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_i^2} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_N^2} , \quad (6.2.3)$$

a interação eletrostática elétron-elétron e elétron- $\rho_0(\mathbf{r})$

$$V_0 = \sum_{i>j} \frac{e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} - Ze^2 \sum_i^N \int \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3r , \quad (6.2.4)$$

a interação entre as cargas e o campo elétrico externo

$$V = - \sum_i^N (-e\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{E}_0 - Ze\mathbf{q}_N \cdot \mathbf{E}_0 , \quad (6.2.5)$$

o potencial da flutuação de carga com a nuvem eletrônica

$$U = -Ze^2 \sum_i^N \int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3r , \quad (6.2.6)$$

e a energia do EDM nuclear sob efeito do campo elétrico externo

$$W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 . \quad (6.2.7)$$

Acima, \mathbf{R}_i denota a posição do i -ésimo elétron, \mathbf{q}_N a posição do núcleo, e \mathbf{r} é a variável de integração cuja origem corresponde ao centro do núcleo. O objetivo é escrever o Hamiltoniano numa forma mais concisa, o que pode ser logrado se o expandirmos em termos de $\frac{r}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|}$, dado que as dimensões do núcleo são bem menores que o raio atômico. Por simplicidade, escrevemos

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3r = \int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} d^3r , \quad (6.2.8)$$

onde $\tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N$. Observe que a separação elétron-núcleo é muito maior do que as dimensões do núcleo, contidas na variável de integração \mathbf{r} . Precisamos então expandir o termo entre colchetes a seguir

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} d^3r = \int \delta\rho(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} \right] d^3r . \quad (6.2.9)$$

Sabemos que

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{R} - r^i \partial_i \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2} r^i r^j \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{6} r^i r^j r^k \partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{R} \right) \dots , \quad (6.2.10)$$

de modo que escrevemos

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} d^3r = \int \delta\rho(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} - r^i \partial_i \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + \frac{1}{2} r^i r^j \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) - \frac{1}{6} r^i r^j r^k \partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \dots \right] d^3r . \quad (6.2.11)$$

A menos duma translação, esta expansão continua válida, o que nos leva a

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} d^3r = \int \delta\rho(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} - r^i \partial_i \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + \frac{1}{2} r^i r^j \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) - \frac{1}{6} r^i r^j r^k \partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \dots \right] d^3r , \quad (6.2.12)$$

na qual o primeiro e terceiro termos são nulos, dado que a flutuação de carga $\delta(\mathbf{r})$ é ímpar. Sobra então

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} d^3r = - \int \delta\rho(\mathbf{r}) r^i d^3r \left[\partial_i \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] - \frac{1}{6} \int \delta\rho(\mathbf{r}) r^i r^j r^k d^3r \left[\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] . \quad (6.2.13)$$

Por outro lado, existe a identidade

$$\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{R} \right) = \left[\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{5} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 \right] \frac{1}{R} + \frac{1}{5} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 \left(\frac{1}{R} \right), \quad (6.2.14)$$

cujo termo entre colchetes, segundo a literatura [101, 110, 111], corresponde a um operador de octupolo, cuja contribuição pode ser desconsiderada. Aplicando a definição (6.2.1) e a (6.2.14) na expansão (6.2.13), obtemos

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} d^3r = -\frac{1}{Ze} d^i \left[\partial_i \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] - \frac{1}{30} \int \delta\rho(\mathbf{r}) r^i r^j r^k d^3r (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right). \quad (6.2.15)$$

Usando as identidades

$$\partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) = -\frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)^k}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|^3}, \quad \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N) \quad (6.2.16)$$

encontramos que

$$\int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3r = \frac{1}{Ze} \mathbf{d} \cdot \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|^3} + 4\pi \frac{1}{10} \int \delta\rho(\mathbf{r}) d^3r (\mathbf{r}^2 r_k \partial_k) [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)]. \quad (6.2.17)$$

Isto permite reescrever a parcela U do Hamiltoniano (6.2.2)

$$U = -Ze^2 \sum_i^N \int \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3r \quad (6.2.18)$$

como

$$U = -e\mathbf{d} \cdot \sum_i^N \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|^3} - 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_i [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)], \quad (6.2.19)$$

onde ∇_i denota derivação nas coordenadas $(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)$.

O resultado acima exhibe algumas propriedades interessantes. Por exemplo, o primeiro termo representa a interação de um dipolo pontual \mathbf{d} com o campo elétrico gerado pela nuvem eletrônica, como esperado. No entanto, por não se tratar de um dipolo pontual, há um termo extra que contém informações sobre as dimensões do núcleo – note a integral $\int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r}$. Este cenário é visivelmente distinto do abordado por Schiff na derivação do teorema da Ref. [100]. Neste trabalho, Schiff define o operador deslocamento, dado por

$$Q = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N} \quad (6.2.20)$$

e o aplica no cálculo de alguns comutadores. Podemos efetuá-los de maneira similar, realizando as devidas

expansões. O primeiro deles é $[Q, V_0]$, que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} [Q, V_0]\Psi &= \left[\frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N} V_0 - V_0 \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N} \right] \Psi = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N} (V_0 \Psi) - V_0 \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N} \Psi, \\ [Q, V_0]\Psi &= \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} (V_0) \Psi. \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Substituindo V_0 da (6.2.4), temos

$$\frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} (V_0) = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} \left\{ \sum_{i>j} \frac{e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} - Ze^2 \sum_i^N \int \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3 r \right\}, \quad (6.2.22)$$

ou seja,

$$[Q, V_0] = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} \left[-Ze^2 \sum_i^N \int \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3 r \right]. \quad (6.2.23)$$

Por outro lado, dada a forma do denominador, vale que $\nabla_{\mathbf{q}_N} = -\nabla_{\mathbf{R}_i}$, de modo que

$$[Q, V_0] = e\mathbf{d} \cdot \left[\sum_i^N \nabla_{\mathbf{R}_i} \int \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} d^3 r \right], \quad (6.2.24)$$

onde podemos, como anteriormente, efetuar uma expansão em termos de $\frac{r}{\tilde{R}_i}$. Aplicando a expansão (6.2.11), obtemos

$$\begin{aligned} [Q, V_0] &= ed_j \sum_i^N \partial_{j(\mathbf{R}_i)} \int \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q} - \mathbf{r}|} d^3 r \\ &= ed^j \sum_i^N \partial_{j(\mathbf{R}_i)} \int \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} - r^k \partial_{k(\tilde{\mathbf{R}}_i)} \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + \frac{1}{2} r^k r^l \partial_{k(\tilde{\mathbf{R}}_i)} \partial_{l(\tilde{\mathbf{R}}_i)} \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) - \frac{1}{6} r^i r^j r^k \partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \dots \right] d^3 r. \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Observando que $\partial_{j(\mathbf{R}_i)} = \partial_{j(\tilde{\mathbf{R}}_i)}$ e lembrando que $\rho_0(\mathbf{r})$ é uma função par, pode-se escrever

$$\begin{aligned} [Q, V_0] &= ed^j \sum_i^N \partial_{j(\mathbf{R}_i)} \int \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} + \frac{1}{2} r^k r^l \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] d^3 r \\ &= ed^j \left\{ \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \left[\partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] + \frac{1}{2} \int r^k r^l \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \left[\partial_j \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Desprezando os termos de octopolo, como feito anteriormente, podemos usar

$$\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{\tilde{R}_i} \right) \approx \frac{1}{5} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{R}}_i} \right), \quad (6.2.27)$$

e obter

$$[Q, V_0] = ed^j \sum_i^N \left\{ \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \left[\partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] + \frac{1}{10} \int r^k r^l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r (\delta_{jk} \partial_l + \delta_{jl} \partial_k + \delta_{kl} \partial_j) \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right\}, \quad (6.2.28)$$

cujo segundo termo é proporcional a

$$d^j \int r^k r^l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r (\delta_{jk} \partial_l + \delta_{jl} \partial_k + \delta_{kl} \partial_j). \quad (6.2.29)$$

Podemos simplificá-lo usando a simetria da função $\rho_0(\mathbf{r})$. Aplicando as deltas, obtemos

$$d^j \int r^k r^l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r (\delta_{jk} \partial_l + \delta_{jl} \partial_k + \delta_{kl} \partial_j) = \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r (2r^k r^l d^k \partial_l + r^2 d^j \partial_j). \quad (6.2.30)$$

Mas dada a simetria radial da função $\rho_0(\mathbf{r})$, vale que

$$\int r^k r^l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{kl} \frac{1}{3} \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r, \quad (6.2.31)$$

permitindo escrever

$$d^j \int r^k r^l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r (\delta_{jk} \partial_l + \delta_{jl} \partial_k + \delta_{kl} \partial_j) = \frac{5}{3} d^j \left[\int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right] \partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right). \quad (6.2.32)$$

Substituir a anterior na (6.2.28) resulta em

$$[Q, V_0] = ed^j \sum_i^N \left\{ \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \left[\partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] + \frac{1}{10} \frac{5}{3} \left[\int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right] \partial_j \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right\}, \quad (6.2.33)$$

onde podemos usar a identidade

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{x} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x}) \quad (6.2.34)$$

para escrever

$$[Q, V_0] = ed^j \sum_i^N \left\{ -\frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)^j}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|^3} - 4\pi \frac{1}{10} \frac{5}{3} \left[\int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right] \partial_j \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right\}. \quad (6.2.35)$$

Agora, se subtrairmos e somarmos o termo $4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_i [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)]$, obtemos

$$[Q, V_0] = e d_j \sum_i^N \left\{ -\frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)^j}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N|^3} - 4\pi \frac{1}{10} \frac{5}{3} \left[\int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right] \partial_{j(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] \right\} \\ - 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^N \nabla_i [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] + 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_i [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] , \quad (6.2.36)$$

que pode ser escrita em termos da parcela U do Hamiltoniano (6.2.2)

$$[Q, V_0] = U + 4\pi e \sum_i^N \left\{ -\frac{1}{10} \frac{5}{3} \mathbf{d} \cdot \left[\int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right] \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] \right\} \\ + \frac{Ze}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] . \quad (6.2.37)$$

Podemos rearranjar os demais termos e encontrar

$$U = [Q, V_0] - 4\pi e \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} - \frac{5}{3} \mathbf{d} \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right\} \cdot \sum_i^N \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] , \quad (6.2.38)$$

onde o vetor entre chaves é o momento de Schiff

$$\mathbf{S} = \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} - \frac{5}{3} \mathbf{d} \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right\} , \quad (6.2.39)$$

cujas definição permite escrever U na forma

$$U = [Q, V_0] - 4\pi e \mathbf{S} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] . \quad (6.2.40)$$

Antes de comentar sobre o momento de Schiff, calculemos um outro comutador bem mais simples, $[Q, V]$, a seguir

$$[Q, V] = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} (V) = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} \left[-\sum_i^{N_e} (-e\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{E}_0 - Ze\mathbf{q}_N \cdot \mathbf{E}_0 \right] , \\ = -\mathbf{d} \cdot [(\mathbf{q}_N \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N}) \mathbf{E}_0 + (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N}) \mathbf{q}_N + \mathbf{q}_N \times (\nabla_{\mathbf{q}_N} \times \mathbf{E}_0) + \mathbf{E}_0 \times (\nabla_{\mathbf{q}_N} \times \mathbf{q}_N)] , \quad (6.2.41)$$

onde usamos a identidade

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) . \quad (6.2.42)$$

Conclui-se que

$$[Q, V] = -\mathbf{d} \cdot [(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N}) \mathbf{q}_N] = -d^i E_0^j \partial_{q^j} q^i = -d^i E_0^j \delta_{ij}, \quad (6.2.43)$$

$$[Q, V] = W. \quad (6.2.44)$$

Substituindo as (6.2.40) e (6.2.44) no Hamiltoniano

$$H = K + V_0 + V + U + W, \quad (6.2.45)$$

obtemos

$$H = (K + V_0 + V) + [Q, V_0 + V] - 4\pi e \mathbf{S} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)]. \quad (6.2.46)$$

Por outro lado, sabemos que $[Q, K] = 0$, logo

$$H = (K + V_0 + V) + [Q, K + V_0 + V] - 4\pi e \mathbf{S} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)]. \quad (6.2.47)$$

Se definirmos

$$H_0 = K + V_0 + V \quad (6.2.48)$$

como o Hamiltoniano livre de interações de EDM, podemos concluir que

$$H = H_0 + [Q, H_0] - 4\pi e \mathbf{S} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)], \quad (6.2.49)$$

onde

$$H_{\text{Schiff}} = -4\pi e \mathbf{S} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)], \quad (6.2.50)$$

no qual há uma contribuição em primeira ordem no EDM nuclear \mathbf{d} (dentro no momento de Schiff (6.2.39)), evidenciando que o teorema de Schiff não se aplica a este caso. Podemos, neste momento, traçar um paralelo entre estas conclusões e o teorema de Schiff.

Na demonstração original do teorema de Schiff, vide Seq. 6.1, sob a condição de partículas pontuais¹, não há a contribuição residual $4\pi e \mathbf{S} \cdot \sum \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)]$, de modo que o Hamiltoniano total, nesta condição, seria²

$$H' = H_0 + [Q, H_0]. \quad (6.2.51)$$

¹Não é bem assim, apesar das alegações da literatura. No trabalho original, Schiff supõe que as densidades de carga e de dipolo elétrico são iguais. A escolha de partículas pontuais configura um caso particular de densidade. O teorema não é contornado, por exemplo, se se escolher partículas esféricas com distribuições uniformes de carga elétrica e dipolo elétrico.

²É fácil ver que, no limite de partículas pontuais, o momento de Schiff é nulo.

Quando, no entanto, leva-se em conta as dimensões das partículas envolvidas, há a possibilidade de burlar a blindagem prevista pelo teorema, e efeitos de primeira ordem passam a ser observáveis por meio da interação residual que constitui o momento de Schiff

$$H_{\text{Schiff}} = -4\pi e\mathbf{S} \cdot \sum_i^{N_e} \nabla_{(\mathbf{R}_i)} [\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)] . \quad (6.2.52)$$

A delta de Dirac $\delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N)$ presente na (6.2.52), numa abordagem relativística, é substituída pela superposição de funções de onda de paridades diferentes [112]. Nesta abordagem, a delta de Dirac é substituída por uma função polinomial e, no limite $|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N| \rightarrow 0$, tem-se que

$$H_{\text{Schiff}} = -4\pi\mathbf{S} \cdot \nabla(\psi_s^\dagger \psi_p)|_{\mathbf{R}-\mathbf{q}_N \rightarrow 0} , \quad (6.2.53)$$

onde ψ_s e ψ_p indicam as funções de onda dos orbitais considerados. Efeitos relativísticos e suas correções ao momento de Schiff num ambiente com violações na simetria de Lorentz, em virtude de suas magnitudes, não vão ser investigados neste trabalho.

6.3 Efeito do potencial coulombiano modificado sobre o momento de Schiff

Uma vez reproduzido o caso usual, estamos em condições de examinar o cenário modificado de interesse. Na seção anterior, consideramos um átomo cujo núcleo possui EDM e vimos que o tamanho do núcleo permite contornar o teorema de Schiff, permitindo a detecção dum termo em primeira ordem no EDM. Nesta seção, o objetivo é investigar os efeitos de um potencial coulombiano anisotrópico sobre o momento de Schiff. Espera-se que as anisotropias deste potencial alterem a blindagem prevista por Schiff e que a interação residual (6.2.52) absorva algum efeito da anisotropia do potencial³.

O potencial anisotrópico em unidades naturais de Lorentz-Heaviside ($\hbar = c = 1$, $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$), gerado por uma carga pontual q , é dado por

$$A_0(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r} \left((1-n) + \kappa^{ij} \frac{r^i r^j}{2r^2} \right) , \quad (6.3.1)$$

que foi amplamente investigado na Ref. [113] e advém da eletrodinâmica do MPE, comentada no capítulo 2. O tensor κ^{ij} corresponde ao $(k_{e-})^{ij}$ da eletrodinâmica do MPE, é simétrico, evidentemente par sob

³Observe que este potencial apenas modifica a maneira com que as cargas e EDM interagem, não sendo, pelo menos num primeiro momento, uma fonte de EDM.

transformações de paridade, e de traço nulo. Ainda, $n = \text{Tr}(k_{DE})/3$, onde $(k_{DE})^{ij} = -2(k_F)^{0i0j}$, com $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ correspondendo ao tensor da eletrodinâmica modificada do MPE (2.4.1).

Para calcular os efeitos deste potencial sobre o momento de Schiff, devemos escrever o novo Hamiltoniano na forma (6.2.49). O ponto de partida é escrevê-lo para um átomo numa região com um campo elétrico externo \mathbf{E}_0

$$H = K + V_{0(\text{LV})} + V + U_{(\text{LV})} + W, \quad (6.3.2)$$

no qual K representa a energia cinética,

$$K = - \sum_i^N \frac{1}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_i^2} - \frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_N^2}, \quad (6.3.3)$$

enquanto o potencial (V), devido ao campo externo, é

$$V = - \sum_i^N (-e\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{E}_0 - Ze\mathbf{q}_N \cdot \mathbf{E}_0. \quad (6.3.4)$$

Acima, $W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0$ é a interação entre o EDM nuclear e o campo externo. Além disto, \mathbf{R}_i e \mathbf{q}_N correspondem às posições do i -ésimo elétron e do centro do núcleo, respectivamente, enquanto \mathbf{r} é medido a partir do centro do núcleo. O potencial anisotrópico entre os constituintes do átomo (elétron-elétron e elétrons-núcleo) agora inclui contribuições oriundas do potencial que viola a simetria de Lorentz (6.3.1), isto é

$$\begin{aligned} V_{0(\text{LV})} = e^2 \sum_{i>j}^N & \left[\frac{(1-n)}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} + \kappa^{kl} \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^k (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^l}{2|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3} \right] \\ & - Ze^2 \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{(1-n)}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|} + \kappa^{kl} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{2|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right] d^3r, \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

na qual $\tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N$ corresponde à posição do i -ésimo elétron relativa ao núcleo.

Uma extensão similar vale para o potencial $U_{(\text{LV})} = U_{(\text{is})} + U_{(\text{an})}$, que encerra a interação entre a nuvem eletrônica e a flutuação de carga $\delta\rho(r)$. As parcelas isotrópicas e anisotrópicas de $U_{(\text{LV})}$ são escritas como

$$U_{(\text{is})} = -Ze^2 \sum_i^N \int \delta\rho(\mathbf{r}) (1-n) \frac{d^3r}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|}, \quad (6.3.6)$$

$$U_{(\text{an})} = -Ze^2 \sum_i^N \int \delta\rho(\mathbf{r}) \left[\frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right] d^3r. \quad (6.3.7)$$

A parcela isotrópica, a menos do fator $(1-n)$ é idêntica à contribuição usual (6.2.18). Faz-se necessário,

então, expandir a parcela anisotrópica em potências de $|\tilde{\mathbf{R}}_i|^{-1}$. Usando a seguinte forma da série de Taylor

$$f(\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}) = [1 + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla)^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla)^3 + \dots]f(\mathbf{r}) \quad (6.3.8)$$

podemos escrever, tomando $\mathbf{r} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_i$ e $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow -\mathbf{r}$,

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} &\approx \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - r^m \partial_m \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right) \\ &+ \frac{1}{2} r^m r^p \partial_m \partial_p \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right) - \frac{1}{6} r^m r^p r^q \partial_m \partial_p \partial_q \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right). \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Por outro lado, vale que

$$\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} = -\partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l, \quad (6.3.10)$$

que leva à expansão

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} &\approx -r^m \left\{ -3 \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l (\tilde{\mathbf{R}}_i)^m}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^5} + \frac{[\delta_{mk} (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l + \delta_{ml} (\tilde{\mathbf{R}}_i)^k]}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right\} \\ &+ \frac{1}{6} r^m r^p r^q \left[\partial_k \partial_m \partial_p \partial_q \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l + \partial_p \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ml} + \partial_m \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{pl} + \partial_m \partial_p \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ql} \right], \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

onde se usou que a função $\delta(\mathbf{r})$ é ímpar para desconsiderar as potências pares em \mathbf{r} .

Aqui há um passo delicado: $\partial_k \partial_m \partial_p \partial_q \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right)$ possui quatro derivadas parciais, de modo que não podemos usar a identidade

$$\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{R} \right) = \left[\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{5} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 \right] \frac{1}{R} + \frac{1}{5} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 \left(\frac{1}{R} \right), \quad (6.3.12)$$

sem gerar ambiguidades na escolha de 3 dos 4 índices possíveis. Oportunamente, há outra abordagem, presente nas Refs. [114, 115], na qual, em vez de desconsiderar o operador de octupolo acima, os autores desprezam o octupolo de carga, cuja densidade é

$$o_{ijk} = r^i r^j r^k - \frac{r^2}{5} (\delta_{ij} r^k + \delta_{ik} r^j + \delta_{jk} r^i) \approx 0, \quad (6.3.13)$$

de modo que podemos substituir

$$r^i r^j r^k = \frac{r^2}{5} (\delta_{ij} r^k + \delta_{ik} r^j + \delta_{jk} r^i). \quad (6.3.14)$$

Acontece que ambas as opções (desprezar o octupolo de carga ou o operador de octupolo) fornecem o mesmo resultado no cenário isotrópico usual. Em nosso caso, todavia, é necessário desprezar primeiro o termo de octupolo de carga, $r^i r^j r^k \rightarrow \frac{r^2}{5}(\delta_{ij} r^k + \delta_{ik} r^j + \delta_{jk} r^i)$, para então aplicar $\partial_i \partial_j \partial_k (\frac{1}{R}) \rightarrow \frac{1}{5}(\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{kj} \partial_i) \partial^2 (\frac{1}{R})$. Substituindo a (6.3.14) na expansão (6.3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \approx -r^m \left\{ -3 \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l (\tilde{\mathbf{R}}_i)^m}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^5} + \frac{[\delta_{mk} (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l + \delta_{ml} (\tilde{\mathbf{R}}_i)^k]}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right\} \\ + \frac{1}{10} \left[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^i \partial_i \partial_k \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + (2r^p \partial_p \partial_l \partial_k + r^l \partial_k \partial^2) \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

que pode ser reescrita, se manipularmos as derivadas por meio do operador de octupolo (6.2.14), como

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \approx -r^m \left\{ -3 \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l (\tilde{\mathbf{R}}_i)^m}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^5} + \frac{[\delta_{mk} (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l + \delta_{ml} (\tilde{\mathbf{R}}_i)^k]}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right\} \\ + \frac{1}{10} \left[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^i \partial_i \partial_k + \left(\frac{2}{5} \delta_{kl} r^i \partial_i + \frac{9}{5} r^l \partial_k \right) \right] \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right). \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Agora alegamos que o termo $(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^i \partial_i \partial_k \partial^2 (\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|})$, quando somado sobre i , apresenta média nula, visto que os átomos considerados possuem muitos elétrons, formando uma nuvem simétrica (em média). Dito isto, podemos escrever a expansão de $U_{(\text{LV})}$

$$\begin{aligned} U_{(\text{LV})} \approx (1-n) \left\{ -e\mathbf{d} \cdot \sum_i^N \frac{\tilde{\mathbf{R}}_i}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^N \nabla_i [\delta(\tilde{\mathbf{R}}_i)] \right\} \\ + e \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} d^m \partial_m \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] + 4\pi \sum_i^N \int r^2 \delta\rho(\mathbf{r}) \frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{Ze^2}{10} \times \left[\frac{2}{5} \delta_{kl} r^i \partial_i + \frac{9}{5} r^l \partial_k \right] d^3r \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i), \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

na qual usamos a identidade (6.2.34).

De acordo com o procedimento adotado na seção anterior, o próximo passo é obter $U_{(\text{LV})}$ em termos do comutador $[Q, V_{0(\text{LV})}]$. Este comutador é similar ao (6.2.21)

$$[Q, V_{0(\text{LV})}] = \frac{\mathbf{d}}{Ze} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_N} [V_{0(\text{LV})}] \Psi, \quad (6.3.18)$$

$$\begin{aligned} [Q, V_{0(\text{LV})}] = \frac{d^i}{Ze} \partial_{i(\mathbf{q}_N)} \left\{ \sum_{i>j}^N \left[(1-n) \frac{e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} + \kappa^{kl} \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^k (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^l}{2|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3} \right] \right. \\ \left. - Ze^2 \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \left[(1-n) \frac{1}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} + \kappa^{kl} \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r})^k (\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r})^l}{2|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|^3} \right] d^3r \right\}, \end{aligned}$$

$$[Q, V_{0(LV)}] = -\frac{d^i}{Ze} Z e^2 \partial_{i(\mathbf{q}_N)} \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{(1-n)}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} + \kappa^{kl} \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r})^k (\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r})^l}{2|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|^3} \right] d^3 r. \quad (6.3.19)$$

Por outro lado, dada a dependência dos integrandos em $\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N$, é válido afirmar que

$$\partial_{p(\mathbf{q})} F(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N) = -\partial_{p(\mathbf{R}_i)} F(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N), \quad (6.3.20)$$

de modo que podemos escrever

$$[Q, V_{0(LV)}] = -\frac{d^p}{Ze} \partial_p \left\{ -Z e^2 \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{(1-n)}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|} + \kappa^{kl} \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r})^k (\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r})^l}{2|\mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N - \mathbf{r}|^3} \right] d^3 r \right\}, \quad (6.3.21)$$

onde tomamos

$$\partial_p \equiv \partial_{p(\mathbf{R}_i)}. \quad (6.3.22)$$

A primeira parcela da (6.3.21), a menos do fator $(1-n)$, corresponde à contribuição usual (6.2.24), que já calculamos. A partir daqui, como anteriormente, usaremos $\tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{q}_N$. Calculemos a parcela anisotrópica

$$e d^p \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \kappa^{kl} \partial_p \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{2|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right) d^3 r. \quad (6.3.23)$$

A partir da expansão (6.3.9), selecionamos os termos pares, dada a simetria esférica de $\rho_0(\mathbf{r})$, obtendo

$$e d^p \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) \partial_p \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} + \frac{1}{2} r^m r^q \partial_m \partial_q \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right) \right] d^3 r. \quad (6.3.24)$$

Trabalhemos o segundo termo

$$\partial_m \partial_q \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right) = \partial_m \partial_q \left[-\partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l \right], \quad (6.3.25)$$

$$= -\partial_m \left[\partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l + \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ql} \right], \quad (6.3.26)$$

$$= -[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l \partial_m \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ml} + \partial_m \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ql}]. \quad (6.3.27)$$

Isto permite escrever a expansão como

$$\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \approx \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - \frac{1}{2} r^m r^q \left[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l \partial_m \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ml} + \partial_m \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \delta_{ql} \right], \quad (6.3.28)$$

ou seja,

$$\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \approx \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - \frac{1}{2} \left[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^m r^q \partial_m \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + 2r^l r^q \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right]. \quad (6.3.29)$$

Reinserindo este resultado na parcela anisotrópica (6.3.23), obtemos

$$ed^p \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \kappa^{kl} \partial_p \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{2|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right) d^3 r = ed^p \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \partial_p \left\{ \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - \frac{1}{2} \left[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^m r^q \partial_m \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + 2r^l r^q \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right] \right\} \quad (6.3.30)$$

$$= \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r d^p \partial_p \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] - ed^p \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{1}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \left[(\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^m r^q \partial_k \partial_p \partial_m \partial_q \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + 2r^l r^q \partial_p \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right]. \quad (6.3.31)$$

Alegando novamente que os termos de octupolo são negligenciáveis⁴, podemos escrever

$$\partial_p \partial_q \partial_k \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) = \frac{1}{5} (\delta_{pq} \partial_k + \delta_{pk} \partial_q + \delta_{qk} \partial_p) \partial^2 \left(\frac{1}{R} \right), \quad (6.3.32)$$

e encontrar que

$$ed^p \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \kappa^{kl} \partial_p \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{2|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right) d^3 r = e \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r d^p \partial_p \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] - ed^p \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{1}{10} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \left\{ (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l r^m r^q \partial_k \partial_p \partial_m \partial_q \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) + 2(r^p r^l \partial_k + \delta_{pk} r^l r^q \partial_q + r^l r^k \partial_p) \partial^2 \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|} \right) \right\}. \quad (6.3.33)$$

⁴Aqui novamente temos quatro derivadas. No entanto, alegaremos posteriormente que este termo apresenta média nula.

A partir deste ponto, vamos eliminar a contribuição do termo com fator $(\mathbf{R}_i - \mathbf{q})^l$, visto que possui valor médio nulo. Quanto aos demais, é possível simplificar os termos da segunda linha da (6.3.33) usando a simetria esférica de $\rho_0(\mathbf{r})$. Expandindo-os, temos

$$2d^p \frac{\kappa^{kl}}{2} \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) (r^p r^l \partial_k + \delta_{pk} r^l r^q \partial_q + r^l r^k \partial_p) \quad (6.3.34)$$

$$= d^p \kappa^{kl} \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) r^p r^l \partial_k + d^p \kappa^{kl} \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) \delta_{pk} r^l r^q \partial_q + d^p \kappa^{kl} \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) r_l r_k \partial_p, \quad (6.3.35)$$

na qual se observa que os termos cruzados $r_i r_j$, com $i \neq j$, são nulos - exatamente como na Eq. (6.2.31), implicando em

$$= d^p \kappa^{kl} \frac{1}{3} \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) r^2 \partial_k + d^k \kappa^{kl} \frac{1}{3} \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) r^2 \partial_l, \quad (6.3.36)$$

onde usamos que $\text{Tr}[\kappa] = 0$. Esta simplificação, junto da identidade (6.2.34), permite reescrever a parte anisotrópica como

$$ed^p \sum_i^N \int \rho_0(\mathbf{r}) \kappa^{kl} \partial_p \left(\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{2|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right) d^3r = e \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r d^p \partial_p \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] + e \frac{4\pi}{10} \sum_i^N \left(\frac{2}{3} \kappa^{kl} d_k \partial_l \right) \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) r^2 \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i). \quad (6.3.37)$$

Agora podemos organizar o comutador

$$[Q, V_{0(\text{LV})}] = (1-n) \left[-e\mathbf{d} \cdot \sum_i^N \frac{\tilde{\mathbf{R}}_i}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^N \nabla_i [\delta(\tilde{\mathbf{R}}_i)] \right] + 4\pi e \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} - \frac{5}{3} \mathbf{d} \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right\} \cdot \sum_i^N \nabla_{(\tilde{\mathbf{R}}_i)} [\delta(\tilde{\mathbf{R}}_i)] + e \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r d^p \partial_p \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] + e \frac{4\pi}{10} \sum_i^N \left(\frac{2}{3} \kappa^{kl} d^k \partial_l \right) \int d^3r \rho_0(\mathbf{r}) r^2 \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i). \quad (6.3.38)$$

Precisamos escrever $[Q, V_{0(\text{LV})}]$ em termos de $U_{(\text{LV})}$. Para tanto, lembremos do resultado

$$U_{(\text{LV})} \approx (1-n) \left\{ -e\mathbf{d} \cdot \sum_i^N \frac{\tilde{\mathbf{R}}_i}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^N \nabla_i [\delta(\tilde{\mathbf{R}}_i)] \right\} + e \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} d^m \partial_m \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] + 4\pi \sum_i^N \int r^2 \delta\rho(\mathbf{r}) \frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{Ze^2}{10} \times \left[\frac{2}{5} \delta_{kl} r^i \partial_i + \frac{9}{5} r^l \partial_k \right] d^3r \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i). \quad (6.3.39)$$

Comparando-as, é fácil ver que se somarmos e subtrairmos o termo

$$4\pi \sum_i^N \int r^2 \delta\rho(\mathbf{r}) \frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{Ze^2}{10} \times \left[\frac{2}{5} \delta_{kl} r^i \partial_i + \frac{9}{5} r^l \partial_k \right] d^3 r \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i) \quad (6.3.40)$$

da (6.3.38), podemos escrever o comutador $[Q, V_{0(\text{LV})}]$ como

$$\begin{aligned} [Q, V_{0(\text{LV})}] = & U_{(\text{LV})} - 4\pi \sum_i^N \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3 r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \left[(1-n)r^k - \frac{9}{10} \kappa^{kl} r^l \right] \right. \\ & \left. - \frac{5}{3} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \left[(1-n)d^k - \frac{2}{5} \kappa^{kl} d^l \right] \right\} \partial_k \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i) , \end{aligned} \quad (6.3.41)$$

onde identificamos o momento de Schiff modificado

$$\mathbb{S}^k = \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3 r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \left[(1-n)r^k - \frac{9}{10} \kappa^{kl} r^l \right] - \frac{5}{3} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \left[(1-n)d^k - \frac{2}{5} \kappa^{kl} d^l \right] \right\} . \quad (6.3.42)$$

Podemos ainda identificar as contribuições usual e anisotrópica

$$\mathbb{S}^k = (1-n)S^k - S_{(\text{LV})} , \quad (6.3.43)$$

onde

$$S^k = \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3 r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^k - \frac{5}{3} d^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \right\} \quad (6.3.44)$$

corresponde ao momento de Schiff usual e

$$S_{(\text{LV})}^k = \frac{\kappa^{kl}}{10} \left\{ \frac{9}{10} Ze \int d^3 r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^l - \frac{2}{3} d^l \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \right\} \quad (6.3.45)$$

à contribuição anisotrópica ao momento de Schiff. Com estas definições, podemos escrever o comutador $[Q, V_{0(\text{LV})}]$ como

$$[Q, V_{0(\text{LV})}] = U_{(\text{LV})} - 4\pi \mathbb{S}^k \sum_i^N \partial_k \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i) . \quad (6.3.46)$$

Além disto, as relações de comutação $[Q, V] = W$ e $[Q, K] = 0$ continuam valendo, o que permite escrever o Hamiltoniano total na forma

$$H = H_{0(\text{LV})} + [Q, H_{0(\text{LV})}] - 4\pi \mathbb{S}^k \sum_i^N \partial_k \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i) , \quad (6.3.47)$$

$$H_{\text{Schiff}(\text{LV})} = -4\pi \mathbb{S}^k \sum_i^N \partial_k \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i) , \quad (6.3.48)$$

que apresenta a mesma forma do Hamiltoniano (6.2.49). Observa-se que a violação na simetria de Lorentz altera o “peso” do momento de Schiff usual pelo fator $(n-1)$, além de contribuir com uma parcela anisotrópica não mais necessariamente paralela ao *spin* nuclear - isto tem um efeito importante na detectabilidade dos termos de violação da simetria de Lorentz.

6.3.1 Sobre a detectabilidade do momento de Schiff modificado

As contribuições S^k e $S_{(LV)}^k$ apesar de terem a mesma fonte (flutuações de carga no núcleo atômico), têm propriedades bem distintas. A primeira, a menos do módulo, é qualitativamente idêntica à contribuição usual da Eq. (6.2.39). A segunda, ao contrário da primeira, não aponta na mesma direção do EDM nuclear \mathbf{d} , e isto tem um efeito muito importante na sua detectabilidade.

Dada a forma da contribuição anisotrópica

$$S_{(LV)}^k = \frac{\kappa^{kl}}{10} \left\{ \frac{9}{10} Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^l - \frac{2}{3} d^l \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right\}, \quad (6.3.49)$$

podemos definir

$$S_{(LV)}^k = \kappa^{kl} \tilde{S}^l, \quad (6.3.50)$$

onde

$$\tilde{S}^l = \frac{1}{10} \left\{ \frac{9}{10} Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^l - \frac{2}{3} d^l \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right\}. \quad (6.3.51)$$

Observemos que \tilde{S}^l e o momento de Schiff usual S^k (6.2.39) têm a magnitude muito similar e apontam na mesma direção do *spin* nuclear \mathbf{I} , ou seja $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{S} \mathbf{I}$. Com base nisto, escrevemos

$$\mathbb{S}^k = S \mathbf{I}^k + \tilde{S} (\kappa^{kl} \mathbf{I}^l), \quad (6.3.52)$$

que evidencia o efeito do *background* anisotrópico sobre o EDM nuclear. Isto permite inferir que esta parcela advém de um EDM $(\mathbf{d}_{LV})^k = \alpha \kappa^{kl} \mathbf{d}^l$, onde α é uma constante e \mathbf{d} é o EDM nuclear na ausência de violações na simetria de Lorentz. Um cenário parecido foi considerado no capítulo anterior, no qual interpretou-se $\kappa^{kl} \mathbf{d}^l$ como um EDM rotacionado pelo *background* anisotrópico. Neste momento vamos realizar uma digressão acerca dos experimentos usuais de EDM.

Nestes experimentos, uma partícula com *spin* \mathbf{I} e momentos de dipolo magnético e elétrico $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{I}$ e $\mathbf{d} = d \mathbf{I}$, respectivamente, é posta numa região sob a ação de campos elétricos e magnéticos. A interação resultante é $U = -(\boldsymbol{\mu} \mathbf{B} + d \mathbf{E}) \cdot \mathbf{I}$ que, para campos \mathbf{E} e \mathbf{B} paralelos, vai gerar uma precessão de Larmor de frequência $\omega_i = (\mu B + dE)/2$ (para sistemas de *spin* $\frac{1}{2}$). Se se inverte a direção do campo elétrico, a

frequência de precessão passa a ser $\omega_i = (\mu B - dE)/2$, de maneira que a variação da frequência vale $\Delta\omega = dE$ - esta é a quantidade medida. Desta maneira, qualquer variação na frequência de precessão (causada pela inversão do campo elétrico) evidenciaria a existência de um EDM d não nulo.

É fácil ver que a frequência de Larmor usual seria nula caso o *spin* do sistema fosse preparado perpendicular à direção dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . No cenário proposto neste capítulo, podemos ter um produto escalar $\mathbf{d}_{LV} \cdot \mathbf{E}$ não nulo mesmo quando o campo $\mathbf{E} \perp \mathbf{d}$, visto que o *background* de violação de Lorentz (LV) “rotaciona” o EDM \mathbf{d} . Desta forma, a variação na frequência ω , após inversão do campo elétrico, seria $\Delta\omega = \mathbf{d}_{LV} \cdot \mathbf{E}$, o que fornece uma maneira de separar a contribuição usual da que tem origem LV. Podemos usar dados experimentais e estimativas teóricas para impor limites superiores ao momento de Schiff LV - isto vai ser feito nos comentários finais do capítulo.

6.4 EDM nuclear intrínseco oriundo de violações na simetria de Lorentz

Dado o comportamento do EDM sob transformações discretas P e T , espera-se que suas fontes sejam interações ímpares por P e T , separadamente. Em um cenário de Física par por CPT , os termos de EDM são ímpares por P , T e, conseqüentemente, por CP . Se considerarmos Física ímpar por CPT , o EDM pode ser tanto par ou ímpar por CP . Estas possibilidades motivam investigar se há fontes de EDM além da proposta dos autores [101, 110].

Um cenário a se ponderar consiste num momento de dipolo elétrico LV intrínseco, a princípio sem relação com o *spin* nuclear. Esta possibilidade pode surgir de termos ímpares por P e T pertencentes aos setores de quark (o par e o ímpar por CPT) do modelo padrão estendido [32, 33, 116]. Também há a chance do EDM advir de interações não mínimas de dimensão-5 entre quarks e o campo eletromagnético [104]. Supõe-se então que, uma vez gerado, o EDM seja distribuído uniformemente no núcleo atômico e que interaja com a nuvem eletrônica. Durante este processo, não desconsideramos a flutuação de carga $\delta\rho(\mathbf{r})$, de modo que o efeito do EDM gerado por esta e o do EDM intrínseco LV são somados. Dito isto, os potenciais (6.3.6) e (6.3.7) são reescritos como

$$U'_{(\text{is})} = -e(1-n)\mathbf{d}_{\text{ilv}} \cdot \sum_i^N \frac{\tilde{\mathbf{R}}_i}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - Ze^2 \sum_i^N \int \delta\rho(\mathbf{r})(1-n) \frac{d^3r}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|}, \quad (6.4.1)$$

$$U'_{(\text{an})} = e \frac{\kappa^{kl}}{2} \sum_i^N \left[-3 \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l \mathbf{d}_{\text{ilv}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_i}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^5} + 2 \frac{(\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] - Ze^2 \sum_i^N \int \delta\rho(\mathbf{r}) \left[\frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^k (\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r})^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i - \mathbf{r}|^3} \right] d^3r, \quad (6.4.2)$$

onde vale uma observação bem simples: os primeiros termos de ambas correspondem à interação de um dipolo

pontual⁵ \mathbf{d}_{ilv} com o campo gerado pela nuvem eletrônica.

Podemos expandi-las como antes, observando que a única diferença é adicionar, ao EDM \mathbf{d}_δ advindo de $\delta\rho(\mathbf{r})$, a parcela \mathbf{d}_{ilv} . Isto nos permite, fazendo uso da (6.3.17), escrever

$$U'_{(\text{LV})} \approx (1-n) \left\{ -e(\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}}) \cdot \sum_i^N \frac{\tilde{\mathbf{R}}_i}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} - 4\pi \frac{Ze^2}{10} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \mathbf{r} \cdot \sum_i^N \nabla_i [\delta(\tilde{\mathbf{R}}_i)] \right\} \\ + e \sum_i^N \frac{\kappa^{kl}}{2} (\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}})^m \partial_m \left[\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)^k (\tilde{\mathbf{R}}_i)^l}{|\tilde{\mathbf{R}}_i|^3} \right] + 4\pi \sum_i^N \int r^2 \delta\rho(\mathbf{r}) \frac{\kappa^{kl}}{2} \frac{Ze^2}{10} \times \left[\frac{2}{5} \delta_{kl} r^i \partial_i + \frac{9}{5} r^l \partial_k \right] d^3r \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i). \quad (6.4.3)$$

Devemos também modificar o operador deslocamento Q , que deve ser escrito como

$$Q' = \frac{(\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}})}{Ze} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N}, \quad (6.4.4)$$

de modo que o comutador (6.3.41) assume a forma

$$[Q, V_{0(\text{LV})}] = U'_{(\text{LV})} - 4\pi \sum_i^N \frac{1}{10} \left\{ Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 \left[(1-n)r^k - \frac{9}{10} \kappa^{kl} r^l \right] \right. \\ \left. - \frac{5}{3} \int \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \left[(1-n)(\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}})^k - \frac{2}{5} \kappa^{kl} (\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}})^l \right] \right\} \partial_k \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i), \quad (6.4.5)$$

onde se nota que $V_{0(\text{LV})}$ não mudou de forma com a inclusão do EDM intrínseco.

Uma vez que as relações de comutação $[Q, V] = W$ e $[Q, K] = 0$ ainda valem, o termo de interação residual $H'_{\text{Schiff}(\text{LV})}$ tem sua forma preservada

$$H'_{\text{LV}} = H'_{0(\text{LV})} + [Q', H'_{0(\text{LV})}] + H'_{\text{Schiff}(\text{LV})}, \quad (6.4.6)$$

$$H'_{\text{Schiff}(\text{LV})} = -4\pi (\mathbb{S}')^k \sum_i^N \partial_k \delta(\tilde{\mathbf{R}}_i), \quad (6.4.7)$$

com $(\mathbb{S}')^k$ composto por

$$(\mathbb{S}')^k = (1-n)(S')^k + [S'_{(\text{LV})}]^k. \quad (6.4.8)$$

As componentes $(S')^k$ e $[S'_{(\text{LV})}]^k$ são bastante similares às (6.3.44) e (6.3.45): basta fazer $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}}$

$$(S')^k = \frac{1}{10} \left[Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^k - \frac{5}{3} (\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right], \quad (6.4.9)$$

⁵Isto é consistente com um dipolo uniformemente distribuído no núcleo.

$$\left[S'_{(\text{LV})}\right]^k = \frac{\kappa^{kl}}{10} \left[\frac{9}{10} Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^l - \frac{2}{3} (\mathbf{d}_\delta + \mathbf{d}_{\text{ilv}})^l \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right]. \quad (6.4.10)$$

Podemos extrair o termo proporcional a \mathbf{d}_{ilv} da (6.4.9) de modo a escrever a (6.4.8) em termos do momento de Schiff usual S^k

$$(\mathbb{S}')^k = (1-n)(S)^k + (1-n) \frac{1}{6} (\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r + \left[S'_{(\text{LV})}\right]^k, \quad (6.4.11)$$

da qual podemos manter apenas os termos em primeira ordem nos parametros LV e escrever⁶

$$(\mathbb{S}')^k \approx (1-n)S^k + \frac{1}{6} (\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r + S_{(\text{LV})}^k, \quad (6.4.12)$$

na qual S^k e $S_{(\text{LV})}^k$ são dadas pelas (6.3.44) e (6.3.45).

Deixa-se bastante claro, então, que a inclusão de um EDM LV intrínseco não altera as conclusões do teorema de Schiff, apenas modifica a forma do momento de Schiff, que agora passa a ter uma contribuição extra $\frac{1}{6} (\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r$ (que é nula para um núcleo pontual). Lembremos, contudo, que estas conclusões dizem respeito ao setor par sob P da eletrodinâmica modificada do modelo padrão estendido. Nesta eletrodinâmica, existe também uma parte ímpar por P que altera o potencial coulombiano da seguinte maneira

$$A_{0(\text{ímpar})}(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r} \left((1 + c_\kappa) - \frac{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^2} \right), \quad (6.4.13)$$

onde $c_\kappa = -\frac{\kappa^2}{2}$ e κ^i está relacionado ao tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, mencionado nos capítulos anteriores, da seguinte forma:

$$\kappa^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (k_{DB})^{jk}, \quad (k_{DB})^{jk} = \epsilon^{kpq} (k_F)^{0jpq}. \quad (6.4.14)$$

Claramente esta eletrodinâmica vai afetar o momento de Schiff em segunda ordem nos parâmetros LV, basta fazermos $\kappa^{ij} \rightarrow -\kappa^i \kappa^j$ na (6.3.45), que se torna

$$S_{(\text{LV})}^k = -\frac{\kappa^k \kappa^l}{10} \left\{ \frac{9}{10} Ze \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) r^2 r^l - \frac{2}{3} d^l \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r \right\}, \quad (6.4.15)$$

que pode ser desprezado, visto que depende dos parametros LV em segunda ordem. A parte isotrópica S^k tem peso $(1 - c_\kappa)$ que, pelas mesmas razões, pode ser tomada como aproximadamente igual a 1. Caso incluamos

⁶no último termo, $S'_{(\text{LV})}$, supomos que \mathbf{d}_{ilv} também depende de parâmetros LV, de modo que, em primeira ordem nos parâmetros LV, $S'_{(\text{LV})} = S_{(\text{LV})}$.

o EDM LV intrínseco, os únicos termos relevantes em primeira ordem ao momento de Schiff são

$$(\mathbb{S}_{(\text{ímpar})})^k \approx S^k - \frac{1}{6}(\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3r . \quad (6.4.16)$$

6.5 Comentários e conclusões

Investigamos as implicações ao momento de Schiff oriundas de termos LV por meio de um potencial de Coulomb modificado. Adicionamos, em seguida, um EDM LV intrínseco ao núcleo e notamos que há interação em primeira ordem em \mathbf{d}_{ilv} . Obtivemos três expressões para o momento de Schiff, a saber, as (6.3.43), (6.4.12) e (6.4.8), representando diferentes cenários possíveis. Estas expressões indicam que o momento de Schiff modificado não é mais paralelo ao *spin* \mathbf{I} da partícula, implicando em sutilezas com respeito à detectabilidade do mesmo, como comentado na Seq. 6.3.1.

Em experimentos típicos de EDM, o *spin* do átomo é preparado em uma direção específica⁷ e então é colocado numa região com campos elétricos e magnéticos controlados. Uma maneira de isolar o efeito da contribuição LV é preparar o *spin* na mesma direção do campo magnético \mathbf{B} , digamos, $\mathbf{B} = B\hat{z}$ e $|s_z \pm\rangle$ e aplicar um campo elétrico na direção \hat{x} . Observemos que, devido à rotação causada pelo *background* LV, há uma componente não nula do momento de Schiff da (6.3.52) na direção \hat{x}

$$\mathbb{S}^{(x)} = \tilde{S}(\kappa^{13}I^z) , \quad (6.5.1)$$

de modo que qualquer variação na frequência de precessão seria devida à componente $\kappa^{13}\tilde{S}$. Esta configuração fornece um meio de impor limites superiores aos parâmetros LV, observando que a magnitude do momento de Schiff modificado \tilde{S} é similar à do momento de Schiff usual S .

Na Ref. [117], o EDM nuclear de alguns átomos foi estimado em termos de seus momentos de Schiff; dentre estes, o de mercúrio ^{199}Hg apresenta o limite superior mais restritivo [118]. De acordo com as estimativas, o EDM $d(^{199}\text{Hg})$ vale

$$d(^{199}\text{Hg}) = -2.8 \times 10^{-17} (S/e \text{ fm}^3) e \text{ cm} , \quad (6.5.2)$$

enquanto o melhor limite experimental até o momento é

$$|d(^{199}\text{Hg})| < 7.4 \times 10^{-30} e \text{ cm} . \quad (6.5.3)$$

⁷Vale lembrar que, para experimentos que medem EDM nuclear, escolhe-se um átomo sem elétrons desemparelhados, de modo que podemos atribuir o *spin* a algum núcleon (próton ou nêutron) desemparelhado.

Podemos usar a estimativa e valor experimental para impor o limite

$$\langle \mathbb{S}^{(x)} \rangle_{\pm} = |\kappa^{xz} \tilde{S}| \lesssim 2.6 \times 10^{-13} \text{ e fm}^3 . \quad (6.5.4)$$

É crucial observar que este *bound* é imposto no referencial da Terra (onde o laboratório e aparato experimental estão localizados) e que os coeficientes LV não são constantes nesta, pois a Terra não é um referencial inercial. O mais próximo de um referencial inercial seria o Sol, para o qual os coeficientes LV são aproximadamente constantes. É necessário, portanto, realizar a análise sideral, ou seja, traduzir o *bound* (6.5.4) em termos dos coeficientes LV medidos no referencial do Sol. Este procedimento já foi realizado na Seção 4.6 por meio das transformações (4.6.1) e (4.6.2). Desta forma, após a média temporal, temos

$$\langle \kappa^{xz} \rangle^{(\text{Lab})} = \frac{1}{2} \sin \chi \cos \chi [\kappa^{XX} + \kappa^{YY} - 2\kappa^{ZZ}]^{(\text{Sol})} , \quad (6.5.5)$$

que, lembrando do traço $\text{Tr}[\kappa]=0$, pode ser reescrito como

$$\langle \kappa^{xz} \rangle^{(\text{Lab})} = \frac{1}{2} \sin \chi \cos \chi [\kappa^{XX} + \kappa^{YY} + \kappa^{ZZ} - 3\kappa^{ZZ}]^{(\text{Sol})} = -\frac{3}{2} \sin \chi \cos \chi [\kappa^{ZZ}]^{(\text{Sol})} , \quad (6.5.6)$$

permitindo reescrever o *bound* (6.5.4) na forma

$$|\tilde{S} \sin \chi \cos \chi [\kappa^{ZZ}]^{(\text{Sol})}| < 1.73 \times 10^{-13} \text{ e fm}^3 . \quad (6.5.7)$$

Caso se considere que S e \tilde{S} têm a mesma ordem de magnitude ($\sim 10^{-12} \text{ e fm}^3$), a princípio é possível que os coeficientes LV sejam da ordem de $\kappa^{ij} \sim 10$. Esta possibilidade merece investigações mais aprofundadas. Quanto à inserção de um EDM LV intrínseco, a Ref. [117] não a leva em conta nas estimativas do momento de Schiff. Caso considerados, espera-se que termos \mathbf{d}_{ilv} nas (6.4.12) e (6.4.16) modifiquem estas estimativas.

Pode-se especular sobre as propriedades dos termos relacionados a \mathbf{d}_{ilv} , como, por exemplo, este não ser paralelo ao *spin* nuclear \mathbf{I} . O vetor \mathbf{d}_{ilv} aponta, neste caso, numa direção fixa determinada por parâmetros do *background* LV (sem relação com o *spin* nuclear). Cenários com estas propriedades, a título de exemplo, são presentes em acoplamentos não mínimos, como os abordados nas Refs. [119, 120], nas quais o *background* LV é acoplado diretamente ao tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$. Nesta configuração, o EDM \mathbf{d}_{ilv} é incapaz de causar precessão, sendo limitado gerar um torque que pode causar dissipação e diminuição da frequência de precessão. Vale lembrar que este não é o caso dos acoplamentos estudados nos capítulos anteriores e nas Refs. [102, 109], nos quais os EDMs e MDMs gerados são escritos em função do *spin* das partículas.

Também existe a possibilidade do EDM intrínseco \mathbf{d}_{ilv} ser resultado de interações LV no setor forte. Neste

caso, espera-se que \mathbf{d}_{ilv} possa ser escrito em termos do *spin* nuclear \mathbf{I} e dos parâmetros LV nas interações fortes, o que permitiria aplicar o procedimento que levou ao *bound* (6.5.4) para limitar a magnitude de \mathbf{d}_{ilv} .

É importante considerar um cenário em que podemos separar as repercussões dos coeficientes LV pares (κ^{ij}) e ímpares (κ^i), sob paridade (P), no momento de Schiff. Poderíamos escolher, por exemplo, o momento de Schiff modificado pela eletrodinâmica ímpar

$$(\mathbb{S}_{(\text{ímpar})})^k \approx S^k - \frac{1}{6}(\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r \quad (6.5.8)$$

para focar nos efeitos advindos de \mathbf{d}_{ilv} . Escolhendo campos magnéticos e elétricos perpendiculares à direção do *spin*, podemos separar o momento de Schiff efetivo

$$(\mathbb{S}_{(\text{ímpar})})^k \approx -\frac{1}{6}(\mathbf{d}_{\text{ilv}})^k \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r . \quad (6.5.9)$$

Considerando $|\mathbf{d}_{\text{ilv}}| = \beta|\mathbf{d}_\delta|$, e que a integral tem a mesma ordem de grandeza que o momento de Schiff \tilde{S} , $|\mathbf{d}_\delta| \int r^2 \rho_0(\mathbf{r}) d^3 r = \eta \tilde{S} \mid n \sim 1$, escrevemos

$$|(\mathbb{S}_{(\text{ímpar})})^k| \approx \frac{1}{6}|\beta\eta\tilde{S}(\hat{d}_{\text{ilv}})^k| \sim \frac{1}{6}|\beta\tilde{S}(\hat{d}_{\text{ilv}})^k| . \quad (6.5.10)$$

Se tomarmos um \hat{d}_{ilv} na direção x teremos

$$|(\mathbb{S}_{(\text{ímpar})})^x| \approx \frac{1}{6}\beta\tilde{S} , \quad (6.5.11)$$

que, por meio do processo que levou ao *bound* (6.5.4), permite-nos inferir o seguinte: qualquer valor não nulo de β , compatível com medidas experimentais, pode indicar a existência de EDM nuclear intrínseco devido a efeitos de violação da simetria de Lorentz (\mathbf{d}_{ilv}).

Este é um problema novo que deve ser devidamente investigado, cuja solução provavelmente depende de se descobrir a estrutura teórica de que \mathbf{d}_{ilv} é oriundo.

Capítulo 7

Limites superiores a EDMs atômicos advindos de acoplamentos LV não mínimos elétron-núcleon de dimensão-6

Nos capítulos anteriores, consideramos que um EDM (d) era uma propriedade dos férmions ou, no caso do núcleo atômico, de interações P - e T -ímpares no núcleo. Além destas possibilidades, um EDM atômico pode ser devido a interações P - e T -ímpares entre os elétrons e os núcleons (prótons e nêutrons). Estas interações, cujos termos apresentam dimensão de massa igual a 6, são entendidas como acoplamentos elétron-núcleon (e - N) com forma geral

$$(\bar{N}\Gamma_1 N) (\bar{\psi}\Gamma_2 \psi) , \quad (7.0.1)$$

onde $\Gamma_{1,2}$ são combinações das matrizes de Dirac, e N (ψ) corresponde ao espinor do núcleon (elétron). Os acoplamentos do cenário usual estão listados na figura 7.0.1. Observe que, dada a identidade

$$i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} , \quad (7.0.2)$$

o bilinear pseudotensor é, na verdade, um bilinear de tensor.

Tendo em vista a Ref. [89] e a discussão presente na Sec. 3.5, a interpretação física dos bilineares na figura 7.0.1 é transparente. O primeiro termo tem uma interpretação mais dificultosa, visto que os bilineares escalares ($\bar{\psi}\psi = \sigma$) e pseudoescalares ($\bar{\psi}i\gamma_5\psi = \omega$) podem ser interpretados mais facilmente em conjunto como uma densidade de probabilidade ($\rho^2 = \sigma^2 + \omega^2$). O segundo é mais simples: trata-se de um acoplamento da

$\bar{N}N \cdot \bar{e}\gamma^5 e$	S-PS (scalar-pseudoscalar)
$\bar{N}\gamma^\mu N \cdot \bar{e}\gamma_\mu\gamma^5 e$	V-A (vector-axial vector)
$\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N \cdot \bar{e}\sigma_{\mu\nu}\gamma^5 e$	T-PT (tensor-pseudotensor)
$\bar{N}\gamma^\mu\gamma^5 N \cdot \bar{e}\gamma_\mu e$	A-V (axial vector-vector)
$\bar{N}\gamma^5 N \cdot \bar{e}e$	PS-S (pseudoscalar-scalar).

Figura 7.0.1: Acoplamentos e - N usuais extraídos da Ref. [105].

densidade de corrente nuclear com a densidade de corrente quiral eletrônica. O terceiro, por outro lado, é uma interação entre densidades de momento magnético e elétrico – de fato, este termo de interação é melhor limitado por meio do momento de Schiff. Esta análise pode ser estendida a todos os acoplamentos entre bilineares fermiônicos na tabela da figura 7.3.1.

No que diz respeito a seus comportamentos sob transformações C , P e T , dos acoplamentos ilustrados na figura 7.0.1, apenas o primeiro, o terceiro e o quinto são compatíveis com geração de EDM. Esta classificação é feita com o auxílio da tabela 7.1 e, uma vez selecionados, escreve-se a Lagrangiana com os acoplamentos P - e T -ímpares

$$\mathcal{L}_{CP} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_j \left[C_S \bar{N}_j N_j \bar{\psi} i \gamma^5 \psi + C_P \bar{N}_j i \gamma_5 N_j \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} C_T \bar{N}_j \sigma^{\mu\nu} N_j \bar{\psi} \sigma^{\alpha\beta} \psi \right], \quad (7.0.3)$$

onde a soma é efetuada sobre todos os núcleons; as contantes C_S , C_T , C_P são adimensionais e G_F é a constante de Fermi. Dentre estes, a contribuição dominante advém do acoplamento escalar-pseudoescalar $C_S \bar{N}_j N_j \bar{\psi} i \gamma^5 \psi$ [121, 122, 123, 124]. Além disto, este acoplamento é similar ao termo dominante no que é conhecido como “não conservação da paridade em sistemas atômicos” (PNC), que tem origem no acoplamento da corrente axial eletrônica neutra com a corrente fraca nucleônica neutra via troca do bóson Z^0 [105, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131]. Dados experimentais recentes permitiram impor $C_S < 7.3 \times 10^{-10}$ [132].

	$\psi\psi$	$\psi i \gamma_5 \psi$	$\psi \gamma^0 \psi$	$\psi \gamma^i \psi$	$\psi \gamma^0 \gamma_5 \psi$	$\psi \gamma^i \gamma_5 \psi$	$\psi \sigma^{0i} \psi$	$\psi \sigma^{ij} \psi$
P	+	−	+	−	−	+	−	+
T	+	−	+	−	+	−	+	−
C	+	+	−	−	+	+	−	−

Tabela 7.1: Comportamento dos bilineares de Dirac sob transformações discretas

Os outros dois acoplamentos, o tensor-pseudotensor e escalar-pseudoescalar, foram investigados na Ref. [133] via cálculos atômicos envolvendo o núcleo do átomo ^{199}Hg . Vale lembrar que, além de efeitos de EDM, interações P - e T -ímpares estão relacionadas, por exemplo: à polarização atômica em átomos pesados, a elementos de matriz não nulos, e a transições M1 proibidas [134, 135, 136].

Neste capítulo pretendemos estudar classes gerais de acoplamentos e - N , relacionados a tensores LV de rank-1 a rank-4. Estas classes abrangem acoplamentos não mostrados na figura 7.0.1, e que foram recentemente propostos em [137]. Esta referência explora todos os acoplamentos possíveis, mas trata de espinores idênticos e não impõe *bounds* nos parâmetros LV. Aqui vamos selecionar os acoplamentos e - N que podem gerar EDM e mostrar como extrair a contribuição destes para com o EDM atômico. Feito isto, iremos usar os dados experimentais recentes e estimativas numéricas da literatura para impor *bounds* nas magnitudes dos acoplamentos. Para ilustrar o procedimento, na seção a seguir veremos como calcular o d_{equiv} advindo do acoplamento $C_{SP}\bar{N}_j N_j \bar{\psi} i\gamma_5 \psi$.

7.1 Cálculo do EDM gerado por um acoplamento e - N : um exemplo

Nesta seção seguiremos o roteiro das Refs. [105, 121, 128], considerando a Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CP} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_j C_S \bar{N}_j N_j \bar{\psi} i\gamma_5 \psi . \quad (7.1.1)$$

Confirma-se, por meio da tabela 7.1, que este acoplamento de fato é P - e T -ímpar. A seguir deve-se implementar o limite não relativístico para os núcleons, o que é feito considerando, do bilinear $\bar{N}_j N_j$, apenas a parcela quadrática na componente maior ϕ_N , isto é

$$\begin{aligned} \bar{N}_j N_j &= \begin{pmatrix} \phi_N^* & \chi_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_N \\ \chi_N \end{pmatrix} \\ &\approx |\phi_N|^2 , \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

na qual podemos identificar

$$n(\mathbf{r}) = |\phi_N|^2 , \quad (7.1.3)$$

onde $n(\mathbf{r})$ corresponde à densidade de probabilidade do núcleon. Após isto, teremos a Lagrangiana para o elétron apenas

$$\mathcal{L}_{CP-e} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} C_S A n(\mathbf{r}) \bar{\psi} i\gamma_5 \psi , \quad (7.1.4)$$

cuja contribuição ao Hamiltoniano é obtida, em termos práticos, trocando-se $\bar{\psi}$ por $-\gamma^0$. Isto nos leva a

$$\mathcal{H}_{CP}\psi = i\frac{G_F}{\sqrt{2}} C_S A n(\mathbf{r}) \gamma^0 \gamma_5 \psi , \quad (7.1.5)$$

onde o fator do número de massa, A , vem da soma sobre todos os núcleons. Observe que o fator $n(\mathbf{r})$ limita

o efeito do Hamiltoniano (7.1.5) à região interna ao núcleo ($r < R_N$). O próximo passo é calcular a correção ao espectro, ou seja, o seguinte *shift*

$$\Delta E = \langle \Psi | \mathcal{H}_{CP} | \Psi \rangle , \quad (7.1.6)$$

onde o espinor $|\Psi\rangle$ corresponde ao espinor do elétron de valência em um átomo sob um campo elétrico externo $\mathbf{E} = E_z \hat{z}$. Fazemos uma curta digressão para escrevermos os espinores $|\Psi\rangle$. Para tanto, considere o Hamiltoniano do elétron de valência em um átomo sob a ação apenas do potencial interno $\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r})$,

$$H_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0 - e\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}) , \quad (7.1.7)$$

cujos autoestados são denotados por $|\psi_n\rangle$. Uma vez sob o efeito de um campo elétrico externo $\mathbf{E} = E_z \hat{z}$, o estado fundamental $|\psi_0\rangle$ deve ser corrigido como

$$|\Psi\rangle = |\psi_0\rangle + eE_z |\eta\rangle , \quad (7.1.8)$$

onde

$$|\eta\rangle = \sum_{n \neq 0} \frac{|\psi_n\rangle \langle \psi_n | z | \psi_0 \rangle}{E_0 - E_n} , \quad (7.1.9)$$

que deixa evidente o fato de $|\psi_0\rangle$ e $|\eta\rangle$ terem paridades opostas. A partir daqui, vamos nos restringir ao elétron de valência do átomo de tálio ($A = 205$ and $Z = 81$), usando os dados da Ref. [121], em que $\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r})$ é adotado como o potencial modificado de Tiez

$$\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r > R_N & \frac{(Z-1)}{r(1+br)^2} \exp(-ar) + \frac{1}{r} \\ r < R_N & \left[\frac{(Z-1)}{(1+br)^2} \exp(-ar) + 1 \right] \left(3 - \frac{r^2}{R_N^2} \right) \frac{1}{2R_N} \end{cases} , \quad (7.1.10)$$

onde $R_N = 1.34 \times 10^{-4} a_0$ é o raio do núcleo em unidades do raio de Bohr (a_0), $a = 0.2579$ e $b = 2.5937$ em unidades atômicas, $\hbar = e = m_e = 1$ e $c = \alpha^{-1} = 137.036$. Este potencial aproxima os efeitos das camadas eletrônicas internas ao de uma blindagem, evidente nos termos exponenciais decrescentes.

Como mencionado, os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\eta\rangle$ têm paridade oposta (o estado fundamental $|\psi_0\rangle$ tem $l = 1$ e $|\eta\rangle$ tem $l = 0$). Em componentes, o estado fundamental e a perturbação são dados por

$$(\psi_0)_{J=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}}^{l=1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{r} G_{l,J=\frac{1}{2}}(r) \phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^l \\ \frac{1}{r} F_{l,J=\frac{1}{2}}(r) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^l \end{pmatrix} , \quad (7.1.11)$$

$$\eta_{J=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}}^{l=0} = \begin{pmatrix} \frac{i}{r} G_{l,J=\frac{1}{2}}^S(r) \phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^l \\ \frac{1}{r} F_{l,J=\frac{1}{2}}^S(r) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^l \end{pmatrix}, \quad (7.1.12)$$

nas quais

$$\phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{l=0} = \begin{pmatrix} Y_0^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{l=1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1 \end{pmatrix}, \quad (7.1.13)$$

onde Y_l^m corresponde aos harmônicos esféricos normalizados. As componentes $G_{l,J=\frac{1}{2}}$ e $F_{l,J=\frac{1}{2}}$, doravante chamadas apenas de G e F , respeitam as seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d}{dr}G + \frac{1}{r}G = \alpha \left(W_0 + \frac{2}{\alpha^2} + \Phi_i \right) F, \quad (7.1.14)$$

$$\frac{d}{dr}F - \frac{1}{r}F = -\alpha (W_0 + \Phi_i) G, \quad (7.1.15)$$

onde, para o estado fundamental do tálio, $W_0 = E_\psi - mc^2 = -.225$, em unidades atômicas. A perturbação $|\eta\rangle$, por sua vez, respeita

$$(H_0 - E) |\eta\rangle = -z|\psi_0\rangle, \quad (7.1.16)$$

que é conhecida como a equação de Sternheimer – daí o superscrito S [138, 139]. Desta forma, as componentes de $|\eta\rangle$ são soluções das seguintes equações diferenciais acopladas

$$r \frac{d}{dr}G^S - G^S - \alpha r \left(W_0 + \Phi_i + \frac{2}{\alpha^2} \right) F^S = -\frac{\alpha r^2}{3} F \quad (7.1.17)$$

$$r \frac{d}{dr}F^S + F^S + \alpha r (W_0 + \Phi_i) G^S = \frac{\alpha r^2}{3} G, \quad (7.1.18)$$

onde ignoramos os subscritos. Vale ressaltar que, embora o estado fundamental seja normalizado, $\int dr (F^2 + G^2) = 1$, da perturbação se exige apenas que as componentes F^S e G^S vão a zero distante da origem. Estas soluções, especialmente as F e F^S na figura 7.1.1, são fundamentais no cálculo dos *enhancement factors* de átomos pesados – estes fatores indicam que, devido a efeitos relativísticos, o EDM do átomo pode exceder o do elétron em até 3 ordens de magnitude [98, 99, 140, 141]. Com estas informações, já temos o suficiente para calcular o *shift* ΔE da (7.1.6). Usando as componentes das (7.1.11) e (7.1.12), escrevemos

$$\Delta E = (\langle \psi_0 | + eE_z \langle \eta |) \mathcal{H}_{CP} (|\psi_0\rangle + eE_z |\eta\rangle), \quad (7.1.19)$$

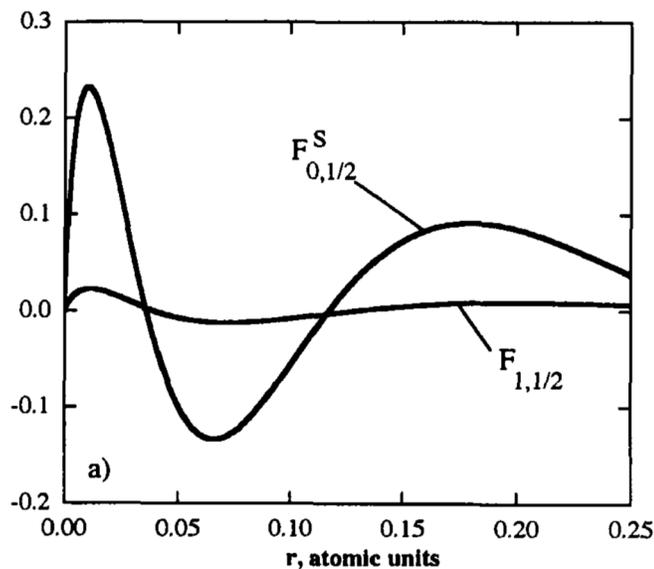


Figura 7.1.1: Gráficos de F e F^S para o estado fundamental do tálio [121].

que vale

$$\begin{aligned} \Delta E &= eE_z \langle \psi_0 | \mathcal{H}_{CP} | \eta \rangle + eE_z \langle \eta | \mathcal{H}_{CP} | \psi_0 \rangle \\ &= 2eE_z \Re (\langle \psi_0 | \mathcal{H}_{CP} | \eta \rangle) , \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

onde usamos o fato dos espinores $|\psi_0\rangle$ e $|\eta\rangle$ terem paridades opostas. A partir da (7.1.20), a contribuição ao EDM atômico advinda da interação (7.1.1) pode ser lida do *shift* como

$$\Delta E = d_{\text{equiv}} E_z , \quad (7.1.21)$$

onde

$$d_{\text{equiv}} = 2e \Re (\langle \psi_0 | \mathcal{H}_{CP} | \eta \rangle) . \quad (7.1.22)$$

A partir das componentes das (7.1.11) e (7.1.12), podemos calcular o EDM equivalente gerado pelo Hamiltoniano (7.1.5). Obtemos

$$d_{\text{equiv}} = 2e \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{3AC_S}{4\pi R_N^3} \int_0^{R_N} (G F^S + G^S F) dr , \quad (7.1.23)$$

onde usamos $n = 3/4\pi R_N^3$. De acordo com as Refs. [105, 121], para o tálio, o d_{equiv} vale

$$d_{\text{equiv}} = 6.8 \times 10^4 C_S G_F \quad (7.1.24)$$

em unidades atômicas. Desta forma, supondo que esta seja a única fonte de EDM atômico, d_{equiv} não pode ser maior que o limite superior experimental sobre o EDM do elétron, $|\mathbf{d}_e| < 1.1 \times 10^{-29} e \cdot \text{cm}$ [132]. De maneira mais precisa, este limite experimental deve ser lido, de acordo com [132], como

$$|\mathbf{d}_e| + |\mathbf{d}_{[e-N \text{ escalar-pseudoescalar}]}| < 1.1 \times 10^{-29} e \cdot \text{cm} , \quad (7.1.25)$$

permitindo impor o *bound*

$$C_S < 7.3 \times 10^{-10} , \quad (7.1.26)$$

caso assumamos que acoplamentos $e-N$ sejam a única fonte de EDM atômico, ou seja, que $|\mathbf{d}_e| = 0$.

Ilustrado o método, estamos em condições de abordar as classes gerais de acoplamentos $e-N$.

7.2 Classes gerais de acoplamentos $e-N$ de dimensão-6 com tensores LV de rank-1 a rank-4

A maneira mais simples de estender os acoplamentos da figura 7.0.1, mantendo a dimensão de massa igual a 6, é considerar um tensor de fundo $(k_{XX})_\mu$ e desconsiderar acoplamentos com $F_{\mu\nu}$ e derivadas. Os acoplamentos teriam, então, a forma

$$\mathcal{L}_{LV} = (k_{XX})_\mu [(\bar{N} \Gamma_1 N) (\bar{\psi} \Gamma_2 \psi)]^\mu , \quad (7.2.1)$$

indicando que o índice superior μ pertence a Γ_1 ou Γ_2 . Além disto, o subscripto XX em $(k_{XX})_\mu$ vai identificar os dois bilineares como: escalar (S), pseudoescalar (P), vetor (V), vetor axial (A) e tensor (T) – estes equivalem às 16 matrizes 4×4 linearmente independentes. Visto que pretendemos manter a dimensão-6, os operadores $\Gamma_{1,2}$ devem ser as matrizes

$$\mathbb{I}_{4 \times 4} , i\gamma^5 , \gamma^\mu , \gamma^\mu \gamma_5 , \sigma^{\mu\nu} , \quad (7.2.2)$$

onde $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, com $\sigma^{0j} = i\alpha^j$, $\sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \Sigma^k$.

Uma vez que estamos interessados na geração de EDM, devemos focar nas componentes que violam P e

T , devido à compatibilidade com EDM. A princípio, podemos ter $\Gamma_1, \Gamma_2 = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, i\gamma^5, 1$, o que fornece as seguintes possibilidades:

$$\Gamma_1 = \gamma^\mu, \Gamma_2 = 1; \Gamma_1 = \gamma^\mu, \Gamma_2 = i\gamma^5; \Gamma_1 = \gamma^\mu \gamma^5, \Gamma_2 = 1; \Gamma_1 = \gamma^\mu \gamma^5, \Gamma_2 = i\gamma^5; \quad (7.2.3)$$

e as combinações correspondentes às trocas entre Γ_1 e Γ_2 , pois estamos lidando com espiniores diferentes. As oito possibilidades estão contidas na tabela 7.2. Vale lembrar que os acoplamentos com o tensor de rank-1 são CPT -ímpares, de modo que os eventuais termos de EDM ainda são P - e T -ímpares, mas são CP -pares – termos de EDM usuais violam CP .

Acoplamento	Componente P - e T -ímpar	NRL	EDM
$(k_{SV})_\mu (NN)(\psi\gamma^\mu\psi)$	$(k_{SV})_i (NN)(\psi\gamma^i\psi)$	NS	sim
$(k_{VS})_\mu (N\gamma^\mu N)(\psi\psi)$	$(k_{VS})_i (N\gamma^i N)(\psi\psi)$	S	–
$(k_{VP})_\mu (N\gamma^\mu N)(\psi i\gamma^5\psi)$	$(k_{VP})_0 (N\gamma^0 N)(\psi i\gamma^5\psi)$	NS	sim
$(k_{PV})_\mu (Ni\gamma^5 N)(\psi\gamma^\mu\psi)$	$(k_{PV})_0 (Ni\gamma^5 N)(\psi\gamma^0\psi)$	S	–
$(k_{SA})_\mu (NN)(\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{AS})_\mu (N\gamma^\mu\gamma^5 N)(\psi\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{PA})_\mu (Ni\gamma^5 N)(\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{AP})_\mu (N\gamma^\mu\gamma^5 N)(\psi i\gamma^5\psi)$	nenhuma	–	–

Tabela 7.2: Acoplamentos CPT -ímpares com tensor de rank-1 LV e bilineares de Dirac.

Outros acoplamentos CPT -ímpares com um tensor de rank-1 podem ser propostos usando o operador $\sigma^{\mu\nu}$. As opções à primeira vista seriam

$$\Gamma_1 = \gamma^\mu, \Gamma_2 = \sigma^{\mu\nu}; \Gamma_1 = \gamma^\mu \gamma^5, \Gamma_2 = \sigma^{\mu\nu} \quad (7.2.4)$$

às quais devemos adicionar as combinações relativas a $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$, gerando quatro possibilidades, dispostas na tabela 7.3. Estes acoplamentos, contudo, são casos particulares de acoplamentos de rank-3. Observe, por exemplo

$$(\kappa_{VT})_\nu (\bar{N}\gamma_\mu N) (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) = (\kappa_{VT})_\nu g_{\alpha\beta} (\bar{N}\gamma^\alpha N) (\bar{\psi}\sigma^{\beta\nu}\psi) \equiv (k_{VT})_{\nu\alpha\beta} (\bar{N}\gamma^\alpha N) (\bar{\psi}\sigma^{\beta\nu}\psi) . \quad (7.2.5)$$

Conseqüentemente, todos os acoplamentos de rank-1 (rank-2) com contrações entre bilineares são reparametrizações de acoplamentos de rank-3 (rank-4), isto é, são redundantes. Além disto, bilineares com $\gamma_\nu \sigma^{\mu\nu}$ podem ser propostos, mas não são contribuições de fato novas, dada a redundância no produto $\gamma_\nu \sigma^{\mu\nu} = 3i\gamma^\mu$.

Nas tabelas 7.2 e 7.3, “S” e “NS” representam “suprimido” e “não suprimido”, respectivamente. Um acoplamento é dito suprimido quando o bilinear do núcleon mistura as componentes *large* (ϕ_N) e *small* (χ_N)

Acoplamento	Componente P - e T -ímpar	NRL	EDM
$(k_{VT})_\nu (\bar{N}\gamma_\mu N)(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{AT})_\nu (\bar{N}\gamma_\mu\gamma_5 N)(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$	$(k_{AT})_0 (\bar{N}\gamma_i\gamma_5 N)(\psi\sigma^{i0}\psi)$	NS	sim
$(k_{TV})_\nu (\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N)(\psi\gamma_\mu\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{TA})_\nu (\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N)(\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi)$	$(k_{TA})_0 (\bar{N}\sigma^{i0} N)(\psi\gamma_i\gamma_5\psi)$	S	–

Tabela 7.3: Alguns acoplamentos redundantes CPT -ímpares com as matrizes γ^μ , $\sigma^{\mu\nu}$ e γ_5 .

– isso se dá com bilineares $\bar{N}\Gamma N$ em que Γ apresenta blocos diagonais nulos, como γ^5 ou γ^i , por exemplo. Claramente estamos interessados em bilineares que resultam apenas em produtos de componentes *large*. Ainda de acordo com a tabela 7.2, vemos que os termos

$$(k_{SV})_i (\bar{N}N)(\bar{\psi}\gamma^i\psi), (k_{VP})_0 (\bar{N}\gamma^0 N)(\bar{\psi}i\gamma_5\psi) \quad (7.2.6)$$

são P - e T -ímpares e não são suprimidos no regime não relativístico dos núcleons. Escrevemos, então, a contribuição para com a Lagrangiana advinda da classe dos acoplamentos com o tensor rank-1

$$\mathcal{L}_{LV-1} = \sum_N [(k_{SV})_i (\bar{N}N)(\bar{e}\gamma^i e) + (k_{VP})_0 (\bar{N}\gamma^0 N)(\bar{e}i\gamma_5 e)] \quad (7.2.7)$$

Em seguida, podemos estender esta análise a acoplamentos com um tensor de rank-2, $(k_{XX})_{\mu\nu}$ – as possibilidades estão listadas na tabela 7.4.

Acoplamento	Componente P - e T -ímpar	NRL	EDM
$(k_{VV})_{\mu\nu} (\bar{N}\gamma^\mu N)(\psi\gamma^\nu\psi)$	$(k_{VV})_{i0} (\bar{N}\gamma^i N)(\psi\gamma^0\psi)$ $(k_{VV})_{0i} (\bar{N}\gamma^0 N)(\psi\gamma^i\psi)$	S NS	– sim
$(k_{AV})_{\mu\nu} (\bar{N}\gamma^\mu\gamma_5 N)(\psi\gamma^\nu\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{VA})_{\mu\nu} (\bar{N}\gamma^\mu N)(\psi\gamma^\nu\gamma_5\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{AA})_{\mu\nu} (\bar{N}\gamma^\mu\gamma_5 N)(\psi\gamma^\nu\gamma_5\psi)$	$(k_{AA})_{0i} (\bar{N}\gamma^0\gamma_5 N)(\psi\gamma^i\gamma_5\psi)$ $(k_{AA})_{i0} (\bar{N}\gamma^i\gamma_5 N)(\psi\gamma^0\gamma_5\psi)$	S NS	– sim
$(k_{TS})_{\mu\nu} (\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N)(\psi\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{TP})_{\mu\nu} (\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N)(\psi i\gamma_5\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{ST})_{\mu\nu} (\bar{N}N)(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{PT})_{\mu\nu} (\bar{N}i\gamma_5 N)(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$	nenhuma	–	–

Tabela 7.4: Acoplamentos CPT -pares com tensor de rank-2 LV e bilineares de Dirac.

Selecionando apenas os acoplamentos P - e T -ímpares não suprimidos, obtemos a contribuição à Lagrangiana. Ressaltamos que estes acoplamentos são compatíveis com EDMs usuais, dado que são, além de ímpares por P e T , CP -ímpares. A contribuição dos tensores de rank-2 é

$$\mathcal{L}_{LV-2} = \sum_N [(k_{VV})_{0i} (\bar{N}\gamma^0 N)(\bar{e}\gamma^i e) + (k_{AA})_{i0} (\bar{N}\gamma^i\gamma_5 N)(\bar{e}\gamma^0\gamma_5 e)_N] \quad (7.2.8)$$

Seguindo o roteiro da seção anterior, aplicando o limite não relativístico para os núcleons, e usando as definições das matrizes de Dirac em (3.3.4), obtemos as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned}\bar{N}N, \bar{N}\gamma^0N &\rightarrow n(\mathbf{r}), \\ \bar{N}\gamma_i\gamma_5N, \bar{N}i\sigma^{0i}\gamma_5N &\rightarrow -\langle\sigma^i\rangle_N \cdot n(\mathbf{r}), \\ \bar{N}\sigma^{ij}N &\rightarrow \epsilon_{ijk}\langle\sigma^k\rangle_N \cdot n(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

onde $n(r)$ é a densidade de probabilidade dos núcleons, tomada igual tanto para nêutrons quanto para prótons; e o vetor $\langle\sigma^k\rangle_N$ é o valor esperado do spin do núcleon. Observe que, embora as densidades formem uma soma coerente, a soma sobre os spins, devido ao princípio de exclusão de Pauli, resulta apenas no spin do núcleon desemparelhado. Dito isto, a partir das (7.2.7) e (7.2.8), podemos escrever as Lagrangianas efetivas para o elétron:

$$\mathcal{L}_{LVe-1} = [(k_{SV})_i A(\bar{e}\gamma^i e) + (k_{VP})_0 A(\bar{e}i\gamma_5 e)] \cdot n(\mathbf{r}) \quad (7.2.9)$$

para os acoplamentos com um tensor LV rank-1, e

$$\mathcal{L}_{LVe-2} = [A(k_{VV})_{0i} (\bar{e}\gamma^i e) + (k_{AA})_{i0} \langle\sigma^i\rangle_N (\bar{e}\gamma^0\gamma_5 e)] \cdot n(\mathbf{r}) \quad (7.2.10)$$

para um tensor de rank-2. Começamos pelo Hamiltoniano advindo da (7.2.9), que é

$$H_{LVe-1} = [-(k_{SV})_i A\gamma^0\gamma^i - (k_{VP})_0 Ai\gamma^0\gamma_5] \cdot n(\mathbf{r}) . \quad (7.2.11)$$

Seguindo o roteiro da seção anterior, o *shift* no espectro, gerado por cada parcela do Hamiltoniano P - e T -ímpar, é dado por

$$\Delta E = \langle\Psi|H_{P,T}|\Psi\rangle = 2eE_z\Re \left[\int \psi_0^\dagger H_{P,T}\eta d^3r \right], \quad (7.2.12)$$

de modo que o EDM equivalente pode ser lido a partir de

$$\frac{\Delta E}{E_z} = 2e\Re [\langle\psi_0|H_{P,T}|\eta\rangle] \equiv d_{\text{equiv}} . \quad (7.2.13)$$

Aplicando esta prescrição para as parcelas do Hamiltoniano (7.2.11), e usando os espinores (7.1.11) e (7.1.12), vemos que o acoplamento com $(k_{SV})_i$ gera uma contribuição puramente complexa, vide Eq. (7.2.14),

incapaz de promover *shifts* no espectro e EDM. Vale escrever as integrais

$$\langle \psi_0 | \gamma^0 \gamma^i | \eta \rangle = i \delta_{i3} \int_0^{R_N} \left[\frac{1}{3} F^S(r) G(r) + G^S(r) F(r) \right] dr , \quad (7.2.14)$$

$$\langle \psi_0 | \gamma_5 | \eta \rangle = i \int_0^{R_N} [-F^S(r) G(r) + G^S(r) F(r)] dr , \quad (7.2.15)$$

$$\langle \psi_0 | i \gamma^i | \eta \rangle = \delta_{i3} \int_0^{R_N} \left[-\frac{1}{3} F^S(r) G(r) + G^S(r) F(r) \right] dr , \quad (7.2.16)$$

onde a delta de kronecker indica a única componente não nula, devido à estrutura do operador e integrais angulares.

Para a segunda componente do Hamiltoniano (7.2.11), $(k_{VP})_0$, temos uma contribuição idêntica à do caso escalar-pseudoescalar ilustrado acima, isto é:

$$|d_{1\text{-equiv}}| = 2eA (k_{VP})_0 n(r) |\Re [\langle \psi_0 | (i\gamma^0 \gamma_5) | \eta \rangle]| , \quad (7.2.17)$$

ou

$$|d_{1\text{-equiv}}| = 2e (k_{VP})_0 \frac{3A}{4\pi R_N^3} \int_0^{R_N} [F^S(r) G(r) + G^S(r) F(r)] dr , \quad (7.2.18)$$

onde usamos uma densidade de probabilidade uniforme, $n = 3/4\pi R_N^3$. A partir disto, usando o valor da integral atômica em (7.1.24), extraído das Refs. [105], e a medida experimental atual $|\mathbf{d}_e| < 1.1 \times 10^{-29} e \cdot \text{cm}$, da Ref. [132], podemos impor o seguinte limite superior:

$$|(k_{VP})_0| < 1.6 \times 10^{-15} (\text{GeV})^{-2} . \quad (7.2.19)$$

Dado que o *bound* (7.2.19) diz respeito à componente temporal $(k_{VP})_0$, conclui-se que este não é sujeito a variações siderais, diferente dos em [102, 109]. No que diz respeito ao Hamiltoniano de rank-2, isto é

$$H_{LVe-2} = [-(k_{VV})_{0i} A \gamma^0 \gamma^i - (k_{AA})_{i0} \langle \sigma^i \rangle_N \gamma_5] \cdot n(\mathbf{r}) , \quad (7.2.20)$$

vê-se que, uma vez que as integrais (7.2.14) e (7.2.15) são complexas, não há contribuição de EDM.

Avançando, podemos escrever os acoplamentos de rank-3 e rank-4 – listados nas tabelas 7.5 e 7.6. As Lagrangianas respectivas são

$$\mathcal{L}_{LV-3} = \sum_N \left[(k_{AT})_{i0j} (\bar{N} \gamma^i \gamma_5 N) (\bar{\psi} \sigma^{0j} \psi) + (k_{AT})_{ij0} (\bar{N} \gamma^i \gamma_5 N) (\bar{\psi} \sigma^{j0} \psi) + (k_{TA})_{0ij} (\bar{N} \sigma^{ij} N) (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma_5 \psi) \right] , \quad (7.2.21)$$

Acoplamento de rank-3	Componente P - e T -ímpar	NRL	EDM
$(k_{VT})_{\alpha\mu\nu} (\bar{N}\gamma^\alpha N)(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{AT})_{\alpha\mu\nu} (\bar{N}\gamma^\alpha\gamma_5 N)(\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)$	$(K_{AT})_{0ij} (\bar{N}\gamma^0\gamma_5 N)(\psi\sigma^{ij}\psi)$	S	–
	$(K_{AT})_{i0j} (\bar{N}\gamma^i\gamma_5 N)(\bar{\psi}\sigma^{0j}\psi)$	NS	sim
	$(K_{AT})_{ij0} (\bar{N}\gamma^i\gamma_5 N)(\bar{\psi}\sigma^{j0}\psi)$	NS	sim
$(k_{TV})_{\alpha\mu\nu} (\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N)(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)$	nenhuma	–	–
$(k_{TA})_{\alpha\mu\nu} (\bar{N}\sigma^{\mu\nu} N)(\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\psi)$	$(K_{TA})_{0ij} (\bar{N}\sigma^{ij} N)(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi)$	NS	sim
	$(K_{TA})_{i0j} (\bar{N}\sigma^{0j} N)(\bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi)$	S	–
	$(K_{TA})_{ij0} (\bar{N}\sigma^{j0} N)(\bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi)$	S	–

Tabela 7.5: Acoplamentos CPT -ímpares com tensor de rank-3 LV e bilineares de Dirac.

Acoplamento de rank-4	Componente P - e T -ímpar	NRL	EDM
$(K_{TT})_{\alpha\beta\mu\nu} (\bar{N}\sigma^{\alpha\beta} N)(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)$	$(K_{TT})_{0ijk} (\bar{N}\sigma^{0i} N)(\psi\sigma^{jk}\psi)$	S	–
	$(K_{TT})_{i0jk} (\bar{N}\sigma^{i0} N)(\bar{\psi}\sigma^{jk}\psi)$	S	–
	$(K_{TT})_{ij0k} (\bar{N}\sigma^{ij} N)(\bar{\psi}\sigma^{0k}\psi)$	NS	sim
	$(K_{TT})_{ijk0} (\bar{N}\sigma^{ij} N)(\bar{\psi}\sigma^{k0}\psi)$	NS	sim

Tabela 7.6: Acoplamentos CPT -pares com tensor de rank-4 LV e bilineares de Dirac.

$$\mathcal{L}_{LV-4} = \sum_N \left[(K_{TT})_{ij0k} (\bar{N}\sigma^{ij} N)(\bar{\psi}\sigma^{0k}\psi) + (K_{TT})_{ijk0} (\bar{N}\sigma^{ij} N)(\bar{\psi}\sigma^{k0}\psi) \right], \quad (7.2.22)$$

que, no limite não relativístico dos núcleons, geram as seguintes Lagrangianas para o elétron

$$\mathcal{L}_{LVe-3} = \sum_N \left[(k_{AT})_{i0j} (-\langle\sigma^i\rangle_N)(\bar{\psi}\sigma^{0j}\psi) + (k_{AT})_{ij0} (-\langle\sigma^i\rangle_N)(\bar{\psi}\sigma^{j0}\psi) + (k_{TA})_{0ij} (\epsilon_{ijk}\langle\sigma^k\rangle_N)(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi) \right] \cdot n(\mathbf{r}), \quad (7.2.23)$$

e

$$\mathcal{L}_{LVe-4} = \sum_N \left[(k_{TT})_{ij0k} (\epsilon_{ijl}\langle\sigma^l\rangle_N)(\bar{\psi}\sigma^{0k}\psi) + (k_{TT})_{ijk0} (\epsilon_{ijl}\langle\sigma^l\rangle_N)(\bar{\psi}\sigma^{k0}\psi) \right] \cdot n(\mathbf{r}). \quad (7.2.24)$$

Os Hamiltonianos para os acoplamentos com rank-3 e rank-4 são

$$H_{LVe-3} = \left[(k_{AT})_{i0j} \langle\sigma^i\rangle_N i\gamma^0 \alpha^j - (k_{AT})_{ij0} \langle\sigma^i\rangle_N i\gamma^0 \alpha^j - (k_{TA})_{0ij} \epsilon_{ijk} \langle\sigma^k\rangle_N \gamma_5 \right] \cdot n(\mathbf{r}), \quad (7.2.25)$$

$$H_{LVe-4} = \left[- (k_{TT})_{ij0k} \epsilon_{ijl} \langle\sigma^l\rangle_N i\gamma^0 \alpha^k + (k_{TT})_{ijk0} \epsilon_{ijl} \langle\sigma^l\rangle_N i\gamma^0 \alpha^k \right] \cdot n(\mathbf{r}), \quad (7.2.26)$$

nos quais o termo $(k_{TA})_{0ij}$, de acordo com a Eq. (7.2.15), não gera contribuição real. Podemos redefinir os tensores no Hamiltoniano de rank-4 como $(k_{TT})_{ij0k} \epsilon_{ijl} = (K_{TT})_{0kl}$, e escrever

$$H_{LVe-4} = \left[- (K_{TT})_{0kl} \langle\sigma^l\rangle_N i\gamma^k + (K_{TT})_{0kl} \langle\sigma^l\rangle_N i\gamma^k \right] \cdot n(\mathbf{r}). \quad (7.2.27)$$

As contribuições de EDM, no caso de rank-3, são

$$d_{3\text{-equiv}}^{(1)} = 2e (k_{AT})_{i03} \langle \sigma^i \rangle_N \Re [\langle \psi_0 | i\gamma^3 | \eta \rangle] , \quad (7.2.28)$$

$$d_{3\text{-equiv}}^{(2)} = -2e (k_{AT})_{i30} \langle \sigma^i \rangle_N \Re [\langle \psi_0 | i\gamma^3 | \eta \rangle] , \quad (7.2.29)$$

enquanto as de rank-4 são

$$d_{4\text{-equiv}}^{(1)} = -2e (K_{TT})_{03l} \langle \sigma^l \rangle_N \Re [\langle \psi_0 | i\gamma^3 | \eta \rangle] , \quad (7.2.30)$$

$$d_{4\text{-equiv}}^{(2)} = 2e (K_{TT})_{30l} \langle \sigma^l \rangle_N \Re [\langle \psi_0 | i\gamma^3 | \eta \rangle] . \quad (7.2.31)$$

Ressaltamos que a presença do fator ϵ_{ijk} na Eq. (7.2.26) induz um efeito similar a uma rotação no spin nuclear $\langle \sigma^l \rangle_N$ ou no tensor LV $(k_{TT})_{ijk0}$, acoplando componentes ortogonais de $\langle \sigma^l \rangle_N$ e $(k_{TT})_{ij03}$. Desta forma, digamos que se tome $i = 1$, logo $j = 2$ e devemos usar um estado de spin $\langle \sigma^z \rangle_N$ para obter a contribuição de EDM advinda de $(k_{TT})_{1203}$, que corresponde a $(K_{TT})_{033}$. Vale ainda lembrar que a ausência do fator de A ($A = 205$ para o tálio) implica em bounds 205 vezes maiores que os obtidos em (7.2.16), sendo menos restritivos por duas ordens de magnitude, pois.

Visto que o tálio tem um núcleon de valência com spin $\langle \sigma^z \rangle_N = \pm 1$ [127], e assumindo que

$$\int_0^{R_N} \left[-\frac{1}{3} F^S(r)G(r) + G^S(r)F(r) \right] \approx \int_0^{R_N} [F^S(r)G(r) + G^S(r)F(r)] , \quad (7.2.32)$$

na falta do valor preciso da integral (7.2.16), obtemos os seguintes *bounds* para os tensores de rank-3

$$|(k_{AT})_{i03}| < 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} , \quad (7.2.33)$$

$$|(k_{AT})_{i30}| < 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} , \quad (7.2.34)$$

e os seguintes para os de rank-4:

$$|(K_{TT})_{03l}| < 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} , \quad (7.2.35)$$

$$|(K_{TT})_{30l}| < 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} , \quad (7.2.36)$$

que estão sujeitos a variações siderais.

7.2.1 Variações siderais

Diferente do *bound* sobre a componente em (7.2.19), os em (7.2.28)-(7.2.31) estão sujeitos a variações siderais. Desta forma, devemos escrever os resultados em termos das componentes no referencial do Sol, onde são aproximadamente constantes. Repetiremos a seguir o procedimento da Sec. 4.6. De acordo com a transformação na Eq. (4.6.2), as componentes $(k_{AT})_{i03}$ e $(k_{AT})_{i30}$ se tornam

$$(k_{AT})_{i03}^{(\text{Lab})} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{3l} (k_{AT})_{k0l}^{(\text{Sol})} , \quad (7.2.37)$$

$$(k_{AT})_{i30}^{(\text{Lab})} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{3l} (k_{AT})_{kl0}^{(\text{Sol})} . \quad (7.2.38)$$

Para as componentes $(k_{AT})_{i03}^{(\text{Lab})}$, temos as seguintes médias para $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \langle (k_{AT})_{103}^{(\text{Lab})} \rangle &= \frac{1}{4} \left[(k_{AT})_{101}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{202}^{(\text{Sol})} - 2 (k_{AT})_{303}^{(\text{Sol})} \right] \sin 2\chi \\ \langle (k_{AT})_{203}^{(\text{Lab})} \rangle &= \left[- (k_{AT})_{102}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{201}^{(\text{Sol})} \right] \sin \chi \\ \langle (k_{AT})_{303}^{(\text{Lab})} \rangle &= \left[\frac{1}{2} \left((k_{AT})_{101}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{202}^{(\text{Sol})} \right) \sin^2 \chi + (k_{AT})_{303}^{(\text{Sol})} \cos^2 \chi \right] , \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

e expressões similares para $(k_{AT})_{130}^{(\text{Lab})}$, $(k_{AT})_{230}^{(\text{Lab})}$ and $(k_{AT})_{330}^{(\text{Lab})}$. O mesmo procedimento deve ser feito para as componentes $(K_{TT})_{03l}$; para $l = 1, 2, 3$, temos:

$$\begin{aligned} \langle (K_{TT})_{031}^{(\text{Lab})} \rangle &= \frac{1}{4} \left[(K_{TT})_{011}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{022}^{(\text{Sol})} - 2 (K_{TT})_{033}^{(\text{Sol})} \right] \sin 2\chi \\ \langle (K_{TT})_{032}^{(\text{Lab})} \rangle &= \left[- (K_{TT})_{012}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{021}^{(\text{Sol})} \right] \sin \chi \\ \langle (K_{TT})_{033}^{(\text{Lab})} \rangle &= \left[\frac{1}{2} \left((K_{TT})_{011}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{022}^{(\text{Sol})} \right) \sin^2 \chi + (K_{TT})_{033}^{(\text{Sol})} \cos^2 \chi \right] , \end{aligned} \quad (7.2.40)$$

e expressões similares para as componentes $(K_{TT})_{30l}$. Desta forma, a análise sideral permite escrever, por exemplo, o *bound* (7.2.35) como:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} \left[(K_{TT})_{011}^{(\text{Sun})} + (K_{TT})_{022}^{(\text{Sun})} - 2 (K_{TT})_{033}^{(\text{Sun})} \right] \sin 2\chi \right| &< 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} \\ \left| \left[(K_{TT})_{012}^{(\text{Sun})} - (K_{TT})_{021}^{(\text{Sun})} \right] \sin \chi \right| &< 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} \\ \left| \left[\frac{1}{2} \left((K_{TT})_{011}^{(\text{Sun})} + (K_{TT})_{022}^{(\text{Sun})} \right) \sin^2 \chi + (K_{TT})_{033}^{(\text{Sun})} \cos^2 \chi \right] \right| &< 3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2} . \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

Por clareza, os *bounds* (7.2.33)-(7.2.36), em termos das quantidades no referencial do Sol, estão listadas na tabela 7.7.

Componente	Bound
$ (k_{VP})_0^{(\text{Sol})} $	$1.6 \times 10^{-15} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} (k_{AT})_{101}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{202}^{(\text{Sol})} - 2(k_{AT})_{303}^{(\text{Sol})} \sin 2\chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} -(k_{AT})_{102}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{201}^{(\text{Sol})} \sin \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{2} (k_{AT})_{101}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{202}^{(\text{Sol})} \sin^2 \chi + (k_{AT})_{303}^{(\text{Sol})} \cos^2 \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} (k_{AT})_{110}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{220}^{(\text{Sol})} - 2(k_{AT})_{330}^{(\text{Sol})} \sin 2\chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} -(k_{AT})_{120}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{210}^{(\text{Sol})} \sin \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{2} (k_{AT})_{110}^{(\text{Sol})} + (k_{AT})_{220}^{(\text{Sol})} \sin^2 \chi + (k_{AT})_{330}^{(\text{Sol})} \cos^2 \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} (K_{TT})_{011}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{022}^{(\text{Sol})} - 2(K_{TT})_{033}^{(\text{Sol})} \sin 2\chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} (K_{TT})_{012}^{(\text{Sol})} - (K_{TT})_{021}^{(\text{Sol})} \sin \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{2} (K_{TT})_{011}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{022}^{(\text{Sol})} \sin^2 \chi + (K_{TT})_{033}^{(\text{Sol})} \cos^2 \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} (K_{TT})_{101}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{202}^{(\text{Sol})} - 2(K_{TT})_{303}^{(\text{Sol})} \sin 2\chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{4} (K_{TT})_{102}^{(\text{Sol})} - (K_{TT})_{201}^{(\text{Sol})} \sin \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$
$ \frac{1}{2} (K_{TT})_{101}^{(\text{Sol})} + (K_{TT})_{202}^{(\text{Sol})} \sin^2 \chi + (K_{TT})_{303}^{(\text{Sol})} \cos^2 \chi $	$3.2 \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-2}$

Tabela 7.7: *Bounds* sobre tensores LV de ranks de 1 a 4.

7.3 Comentários e conclusões

Como mencionado no início do capítulo, os acoplamentos tratados acima foram propostos inicialmente na Ref. [137]. Um ponto a se ressaltar, entretanto, é que os acoplamentos tratados neste capítulo são formados por espinores distintos. Por exemplo, aqui consideramos $(k_{SV})_\mu (\bar{N}N)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ e $(k_{VS})_\mu (\bar{N}\gamma^\mu N)(\bar{\psi}\psi)$ separadamente – isto duplica a quantidade de acoplamentos possíveis. A título de completude, os acoplamentos da Ref. [137] encontram-se na figura 7.3.1.

Ainda sobre esta referência, vale mencionar que, na primeira linha dos acoplamentos de dimensão-6 sem derivadas na tabela da figura 7.3.1, há os termos

$$(k_{SS}) (\bar{N}N)(\bar{\psi}\psi), (k_{PP}) (\bar{N}i\gamma_5 N)(\bar{\psi}i\gamma_5\psi), (k_{SP}) (\bar{N}N)(\bar{\psi}i\gamma_5\psi), (k_{PS}) (\bar{N}i\gamma_5 N)(\bar{\psi}\psi), \quad (7.3.1)$$

que não violam a simetria de Lorentz. Destes, apenas os dois últimos são P - e T -ímpares e geram EDM, mas apenas o terceiro não é suprimido no regime não relativístico dos núcleons, isto é

$$\mathcal{L}_{\psi\psi}^{(6)} = i(\kappa_{SP}) (\bar{\psi}\psi) (\bar{\psi}\gamma^5\psi). \quad (7.3.2)$$

TABLE III. Terms of low mass dimension $d \leq 6$ in the Lagrange density for single-fermion QED.

Component	Expression
\mathcal{L}_0	$\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m_\psi)\psi + \text{h.c.} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
$\mathcal{L}_\psi^{(3)}$	$-im_5\bar{\psi}\gamma_5\psi - a^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - b^\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi - \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
$\mathcal{L}_\psi^{(4)}$	$\frac{1}{2}c^{\mu\alpha}\bar{\psi}\gamma_\mu iD_\alpha\psi + \frac{1}{2}d^{\mu\alpha}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu iD_\alpha\psi + \frac{1}{2}e^\alpha\bar{\psi}iD_\alpha\psi + \frac{1}{2}if^\alpha\bar{\psi}\gamma_5 iD_\alpha\psi + \frac{1}{4}g^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}iD_\alpha\psi + \text{h.c.}$
$\mathcal{L}_{\psi D}^{(5)}$	$-\frac{1}{2}m^{(5)\alpha\beta}\bar{\psi}iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi - \frac{1}{2}im_5^{(5)\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5 iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi$ $-\frac{1}{2}a^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi - \frac{1}{2}b^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi - \frac{1}{4}H^{(5)\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.}$
$\mathcal{L}_{\psi F}^{(5)}$	$-\frac{1}{2}m_F^{(5)\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}im_{5F}^{(5)\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\psi - \frac{1}{2}a_F^{(5)\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{1}{2}b_F^{(5)\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi - \frac{1}{4}H_F^{(5)\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
$\mathcal{L}_{\psi D}^{(6)}$	$\frac{1}{2}c^{(6)\mu\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta}iD_{\gamma)}\psi + \frac{1}{2}d^{(6)\mu\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta}iD_{\gamma)}\psi$ $+\frac{1}{2}e^{(6)\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}iD_{(\alpha}iD_{\beta}iD_{\gamma)}\psi + \frac{1}{2}if^{(6)\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}\gamma_5 iD_{(\alpha}iD_{\beta}iD_{\gamma)}\psi + \frac{1}{4}g^{(6)\mu\nu\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}iD_{(\alpha}iD_{\beta}iD_{\gamma)}\psi + \text{h.c.}$
$\mathcal{L}_{\psi F}^{(6)}$	$\frac{1}{4}c_F^{(6)\mu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu iD_\gamma\psi + \frac{1}{4}d_F^{(6)\mu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu iD_\gamma\psi$ $+\frac{1}{4}e_F^{(6)\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}iD_\gamma\psi + \frac{1}{4}if_F^{(6)\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5 iD_\gamma\psi + \frac{1}{8}g_F^{(6)\mu\nu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}iD_\gamma\psi + \text{h.c.}$
$\mathcal{L}_{\psi\partial F}^{(6)}$	$-\frac{1}{2}m_{\partial F}^{(6)\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha F_{\beta\gamma})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}im_{5\partial F}^{(6)\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha F_{\beta\gamma})\bar{\psi}\gamma_5\psi$ $-\frac{1}{2}a_{\partial F}^{(6)\mu\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha F_{\beta\gamma})\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{1}{2}b_{\partial F}^{(6)\mu\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha F_{\beta\gamma})\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi - \frac{1}{4}H_{\partial F}^{(6)\mu\nu\alpha\beta\gamma}(\partial_\alpha F_{\beta\gamma})\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
$\mathcal{L}_{\psi\psi}^{(6)}$	$k_{SS}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) - k_{PP}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\psi) + ik_{SP}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\psi)$ $+ (k_{SV})^\mu(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) + (k_{SA})^\mu(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) + \frac{1}{2}(k_{ST})^{\mu\nu}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)$ $+ i(k_{PV})^\mu(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) + i(k_{PA})^\mu(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) + \frac{1}{2}i(k_{PT})^{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)$ $+ \frac{1}{2}(k_{VV})^{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) + \frac{1}{2}(k_{AA})^{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\psi) + (k_{VA})^{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\psi)$ $+ \frac{1}{2}(k_{VT})^{\lambda\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_\lambda\psi)(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi) + \frac{1}{2}(k_{AT})^{\lambda\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\lambda\psi)(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi) + \frac{1}{8}(k_{TT})^{\kappa\lambda\mu\nu}(\bar{\psi}\sigma_{\kappa\lambda}\psi)(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)$
$\mathcal{L}_A^{(1)}$	$-(k_A)^\mu A_\mu$
$\mathcal{L}_A^{(3)}$	$\frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu}$
$\mathcal{L}_A^{(4)}$	$-\frac{1}{4}(k_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}$
$\mathcal{L}_A^{(5)}$	$-\frac{1}{4}k^{(5)\alpha\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}\partial_\alpha F_{\mu\nu}$
$\mathcal{L}_A^{(6)}$	$-\frac{1}{4}k_{\partial}^{(6)\alpha\beta\kappa\lambda\mu\nu}F_{\kappa\lambda}\partial_\alpha\partial_\beta F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}k_F^{(6)\kappa\lambda\mu\nu\rho\sigma}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$

Figura 7.3.1: Acoplamentos propostos na tabela III da Ref. [137]

Tal acoplamento é equivalente à interação escalar-pseudoescalar, gerando uma contribuição que vale

$$d_{\text{equiv-}\kappa_{SP}} = 2eA\kappa_{SP} \frac{3}{4\pi R_N^3} \int_0^{R_N} (F^S(r)G(r) + G^S(r)F(r)) dr , \quad (7.3.3)$$

cujo coeficiente κ_{SP} deve satisfazer

$$\kappa_{SP} < 1.6 \times 10^{-15} (\text{GeV})^{-2} . \quad (7.3.4)$$

Claramente, dada a natureza escalar do coeficiente κ_{SP} , este não sofre variações siderais. É conveniente retornar a atenção aos acoplamentos aqui abordados e resumir os procedimentos e resultados.

Nas tabelas 7.2, 7.4, 7.5 e 7.6, listamos todas as possibilidades de acoplamentos e - N com tensores LV de rank-1 a rank-4 e, com auxílio da tabela 7.1, extraímos as componentes compatíveis com geração de EDM. Após isto, aplicamos o limite não relativístico aos núcleons e alguns acoplamentos foram desconsiderados por serem suprimidos neste limite. Os acoplamentos não suprimidos tiveram suas contribuições para com o Hamiltoniano calculadas em (7.2.11), (7.2.20), (7.2.25) e (7.2.27), tendo suas respectivas contribuições de EDM avaliadas usando a prescrição em (7.2.13), por meio de métodos de não conservação de paridade em sistemas atômicos. Devido à estrutura matricial, alguns acoplamentos não geram contribuição ao EDM, sendo portanto descartados. Daí se usou os dados experimentais atuais mais precisos, da Ref. [132], para impor *bounds* de até $1.6 \times 10^{-33} (\text{eV})^{-2}$ sobre os coeficientes LV. Além disto, foi feita a análise sideral das componentes dos tensores LV com índices espaciais.

Conclusões e perspectivas

Esta tese começou com um estudo de acoplamentos não mínimos num cenário pouco explorado até então: o de momentos de dipolo elétrico. Notamos que as contribuições contornam a blindagem descrita pelo teorema de Schiff por meio de efeitos relativísticos, gerando EDM e MDM a tree level para férmions. Usamos durante todo o trabalho as medidas experimentais mais recentes, de modo que pudemos impor *bounds* bastante restritivos sobre os coeficientes de violação da simetria de Lorentz.

Num segundo momento, investigamos como um potencial eletrostático modificado altera a blindagem do EDM nuclear num sistema atômico. Observamos que o termo residual, chamado de momento de Schiff, absorve as anisotropias do potencial modificado. Estendemos a análise propondo uma fonte extra de EDM, a princípio sem relação com o spin – pretendemos estudar, na estrutura do MPE, como se daria a geração de um EDM intrínseco. Um ponto chave a ser estudado no futuro é como detectar este EDM intrínseco; uma possibilidade são configurações experimentais que meçam decoerência. Neste caso, a quantidade mais importante a ser medida seria o tempo T_2 , que dá a escala de tempo de perda da coerência da amostra após ser submetida a pulsos de radiofrequência. A precisão destas medidas é muito alta e tem potencial para fornecer bons *bounds* sobre EDMs intrínsecos advindos de violações na simetria de Lorentz. Neste sentido, o objetivo seria usar modelos de interação entre spins, por meio de equações mestras, para quantificar os efeitos de um EDM intrínseco sobre o tempo de decoerência T_2 .

Além destes cenários, consideramos o caso em que o EDM não é propriedade das partículas, sendo gerado por interações P - e T -ímpares entre os núcleons e elétrons num sistema atômico/molecular. Investigamos uma classe geral de acoplamentos elétron-nucleon quanto à geração de EDM e, usando dados experimentais e estimativas numéricas, impusemos *bounds* sobre os acoplamentos relacionados a EDM. Ainda precisamos calcular uma integral atômica cujo resultado não consta na literatura – estamos a trabalhar nisso.

Apêndice A - a equação de Dirac e as operações C , P e T

Neste apêndice, vão ser expostas as propriedades da equação de Dirac perante as transformações C , P e T ¹. O ponto de partida é a equação de Dirac acoplada minimamente, a saber

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi = 0 , \quad (7.3.5)$$

onde se identifica $\partial_\mu + ieA_\mu$ com a derivada covariante, D_μ , referente ao acoplamento mínimo. Há de ser determinado, também, o comportamento dos operadores relacionados aos bilineares de Dirac, do campo eletromagnético e do potencial A_μ .

Vale ressaltar que a forma dos operadores referentes às transformações C , P e T depende dos objetos sobre os quais atuam. Por exemplo, estes operadores apresentam forma matricial quando atuam sobre os bilineares de Dirac; quando atuam sobre o potencial A_μ e campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , geram um fator de ± 1 .

Conjugação de carga

Sob conjugação de carga C , o potencial A_μ e os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} se transformam como

$$A_\mu \xrightarrow{C} -A_\mu \quad \mathbf{E}, \mathbf{B} \xrightarrow{C} -\mathbf{E}, -\mathbf{B} , \quad (7.3.6)$$

porque, uma vez invertidos os sinais das cargas elétricas, o potencial escalar A_0 e o potencial vetor A_i adquirem um fator de -1 , bem como os campos elétrico e magnético.

Quando atua sobre os bilineares de Dirac, o operador conjugação de carga, \mathcal{C} , deve transformar o espinor

¹Neste apêndice, as operações vão receber designações simbólicas diferentes dos operadores que representam. As operações C , P e T são executadas pelos operadores \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} , respectivamente.

Ψ no espinor da anti-partícula, Ψ_C . A escolha adequada é tomar

$$\hat{\mathcal{C}} \equiv U \bar{k} , \quad (7.3.7)$$

onde \bar{k} toma o complexo conjugado do objeto a ser transformado e

$$U \equiv i\gamma^2 . \quad (7.3.8)$$

É fácil notar que $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}^\dagger = (\hat{\mathcal{C}})^{-1}$ e $(\hat{\mathcal{C}})^2 = \mathbb{I}$. Vejamos o efeito deste operador sobre a equação de Dirac (7.3.5)

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi = 0 \quad (7.3.9)$$

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m](\hat{\mathcal{C}})^{-1}\hat{\mathcal{C}}\Psi = \hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m](\hat{\mathcal{C}})^{-1}\Psi_C = 0 , \quad (7.3.10)$$

onde se identificou

$$\hat{\mathcal{C}}\Psi = \Psi_C . \quad (7.3.11)$$

Resta então se calcular $\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m](\hat{\mathcal{C}})^{-1}$, o que vai ser feito por partes. A matriz γ^2 é representada por

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.3.12)$$

O termo

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu(\partial_\mu)](\hat{\mathcal{C}})^{-1} = i\gamma^2 \bar{k}(i\gamma^\mu) i\gamma^2 \bar{k} \partial_\mu , \quad (7.3.13)$$

observe que a derivada ∂_μ não sofre a ação do operador $\hat{\mathcal{C}}$. O operador \bar{k} atua sobre tudo à sua direita, de modo que

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu(\partial_\mu)](\hat{\mathcal{C}})^{-1} = i\gamma^2 (i\gamma^\mu)^* (-i) (-\gamma^2) \bar{k} \bar{k} \partial_\mu = i\gamma^2 (i\gamma^\mu)^* i\gamma^2 \partial_\mu \quad (7.3.14)$$

$$= i\gamma^2 (i\gamma^0 + i\gamma^1 + i\gamma^2 + i\gamma^3)^* i\gamma^2 \partial_\mu . \quad (7.3.15)$$

Observe que a matriz γ^2 é a única que apresenta componentes imaginárias, de modo que a conjugação complexa altera apenas esta; vale que $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$. Além disto, as relações de anti-comutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} =$

$2\eta^{\mu\nu}$ podem ser usadas, de modo que

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu(\partial_\mu)](\hat{\mathcal{C}})^{-1} = -\gamma^2(-i\gamma^0 - i\gamma^1 + i\gamma^2 - i\gamma^3)\gamma^2\partial_\mu \quad (7.3.16)$$

$$= -\gamma^2(i\gamma^2\gamma^0 + i\gamma^2\gamma^1 + i\gamma^2\gamma^2 + i\gamma^2\gamma^3)\partial_\mu \quad (7.3.17)$$

$$= (i\gamma^0 + i\gamma^1 + i\gamma^2 + i\gamma^3)\partial_\mu \quad (7.3.18)$$

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu(\partial_\mu)](\hat{\mathcal{C}})^{-1} = i\gamma^\mu\partial_\mu . \quad (7.3.19)$$

Dois resultados paralelos são dignos de nota

$$\hat{\mathcal{C}}\gamma^\mu(\hat{\mathcal{C}})^{-1} = -\gamma^\mu , \quad \hat{\mathcal{C}}(i\gamma^\mu)(\hat{\mathcal{C}})^{-1} = i\gamma^\mu . \quad (7.3.20)$$

O segundo termo pode ser trabalhado

$$\hat{\mathcal{C}}[e\gamma^\mu A_\mu](\hat{\mathcal{C}})^{-1} = \hat{\mathcal{C}}[e\gamma^\mu A_\mu](\hat{\mathcal{C}})^{-1} \quad (7.3.21)$$

$$= \hat{\mathcal{C}}e(\hat{\mathcal{C}})^{-1}\hat{\mathcal{C}}\gamma^\mu(\hat{\mathcal{C}})^{-1}\hat{\mathcal{C}}A_\mu(\hat{\mathcal{C}})^{-1} = (-e)(-\gamma^\mu)(-A_\mu) \quad (7.3.22)$$

$$\hat{\mathcal{C}}[e\gamma^\mu A_\mu](\hat{\mathcal{C}})^{-1} = -e\gamma^\mu A_\mu . \quad (7.3.23)$$

O último é trivial, porque a massa m não se altera por conjugação de carga

$$\hat{\mathcal{C}}m(\hat{\mathcal{C}})^{-1} = m . \quad (7.3.24)$$

Desta forma, sob C , a equação de Dirac se transforma como

$$\hat{\mathcal{C}}[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi = 0 \xrightarrow{C} [i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi_C = 0 . \quad (7.3.25)$$

Observe a alteração de sinal no segundo termo, evidenciando que a equação de Dirac agora descreve um pósitron. A não invariância da equação de Dirac por C não acarreta nenhum problema, visto que esta passa a descrever a anti-partícula do elétron, como era de se esperar.

Paridade

Sob paridade, o potencial A_μ e os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} se transformam como

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A_0 \quad A_i \xrightarrow{\mathcal{P}} -A_i \quad \mathbf{E}, \mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{E}, \mathbf{B} . \quad (7.3.26)$$

O tratamento distinto das componentes do potencial vetor se deve ao comportamento das fontes sob paridade. Observe que derivadas espaciais também adquirem um fator de -1 , de modo que o campo magnético permanece inalterado e o campo elétrico é invertido.

No contexto da equação de Dirac, o operador de paridade, matricialmente, é definido como

$$\hat{\mathcal{P}} \equiv i\gamma^0 . \quad (7.3.27)$$

Aplicando-o à equação de Dirac, temos

$$\hat{\mathcal{P}}[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\Psi . \quad (7.3.28)$$

Definamos $\hat{\mathcal{P}}\Psi = \Psi_{\mathcal{P}}$ e observemos que $\hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\mathcal{P}}^{-1}$ e que $\hat{\mathcal{P}}^\dagger\hat{\mathcal{P}} = \mathbb{I}$. É válido esclarecer que o operador $\hat{\mathcal{P}}$ atua sobre as derivadas espaciais, trocando-as de sinal, ou seja

$$\hat{\mathcal{P}}\partial_i\hat{\mathcal{P}}^{-1} = -\partial_i , \quad (7.3.29)$$

as derivadas temporais, por outro lado, permanecem inalteradas. Isto permite verificar o comportamento do primeiro termo

$$\hat{\mathcal{P}}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\hat{\mathcal{P}}^{-1} = i\hat{\mathcal{P}}(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i)\hat{\mathcal{P}}^{-1} \quad (7.3.30)$$

$$= i\left[\hat{\mathcal{P}}\gamma^0\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\partial_0\hat{\mathcal{P}}^{-1} + \hat{\mathcal{P}}\gamma^i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\partial_i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\right] \quad (7.3.31)$$

$$= i\left[\hat{\mathcal{P}}\gamma^0\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\partial_0\hat{\mathcal{P}}^{-1} + \hat{\mathcal{P}}\gamma^i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\partial_i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\right] . \quad (7.3.32)$$

A forma do operador $\hat{\mathcal{P}}$, bem como as relações de anti-comutação das matrizes de γ^μ permitem escrever

$$\hat{\mathcal{P}}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\hat{\mathcal{P}}^{-1} = i\left[\gamma^0 \partial_0 + (-\gamma^i)(-\partial_i)\right] = i\gamma^\mu \partial_\mu . \quad (7.3.33)$$

Os resultados secundários são importantes

$$\hat{\mathcal{P}}\gamma^0\hat{\mathcal{P}}^{-1} = \gamma^0 \quad \hat{\mathcal{P}}\partial_0\hat{\mathcal{P}}^{-1} = \partial_0 \quad (7.3.34)$$

$$\hat{\mathcal{P}}\gamma^i\hat{\mathcal{P}}^{-1} = -\gamma^i \quad \hat{\mathcal{P}}\partial_i\hat{\mathcal{P}}^{-1} = -\partial_i . \quad (7.3.35)$$

O segundo termo se transforma como

$$\hat{\mathcal{P}}\gamma^\mu A_\mu\hat{\mathcal{P}}^{-1} = \hat{\mathcal{P}}(\gamma^0 A_0 + \gamma^i A_i)\hat{\mathcal{P}}^{-1} = \gamma^\mu A_\mu . \quad (7.3.36)$$

O terceiro termo é indiferente à transformação, logo

$$\hat{\mathcal{P}}[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi = 0 \xrightarrow{\mathcal{P}} [i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi_{\mathcal{P}} = 0 . \quad (7.3.37)$$

Inversão temporal

O potencial A_μ e os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , perante inversão temporal, se transformam como

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} A_0 \quad A_i \xrightarrow{\mathcal{T}} -A_i \quad \mathbf{E}, \mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{E}, -\mathbf{B} . \quad (7.3.38)$$

Observe novamente o comportamento distinto das componentes do potencial A_μ . Isto se justifica porque as fontes do potencial vetor, A_i , são cargas em movimento, cuja velocidade é invertida por $\hat{\mathcal{T}}$. As derivadas temporais são as únicas alteradas por $\hat{\mathcal{T}}$, de modo que apenas o campo magnético herda o fator -1 .

Na forma matricial, o operador de inversão temporal assume a forma

$$\hat{\mathcal{T}} \equiv i\gamma^1\gamma^3\bar{k} , \quad (7.3.39)$$

onde \bar{k} é operador responsável por tomar o conjugado complexo do objeto sobre o qual atua. É evidente que $\hat{\mathcal{T}}^{-1} = \hat{\mathcal{T}}^\dagger$.

Aplicando o operador inversão temporal sobre a equação de Dirac, obtém-se

$$\hat{\mathcal{T}}[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\hat{\mathcal{T}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}\Psi = 0 , \quad (7.3.40)$$

onde é conveniente definir o espinor T -transformado, $\hat{\mathcal{T}}\Psi = \Psi_{\mathcal{T}}$. Novamente, trabalhar-se-á os termos

separadamente

$$\hat{\mathcal{T}}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\hat{\mathcal{T}}^{-1} = -i\hat{\mathcal{T}}(\gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i)\hat{\mathcal{T}}^{-1} \quad (7.3.41)$$

$$= [\hat{\mathcal{T}}i\gamma^0\hat{\mathcal{T}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}\partial_0\hat{\mathcal{T}}^{-1} + \hat{\mathcal{T}}i\gamma^i\hat{\mathcal{T}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}\partial_i\hat{\mathcal{T}}^{-1}] . \quad (7.3.42)$$

O operador inversão temporal não altera as derivadas espaciais. Explicitando a forma do operador $\hat{\mathcal{T}}$

$$\hat{\mathcal{T}}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\hat{\mathcal{T}}^{-1} = [i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^0)(-i\gamma^3\gamma^1)(-\partial_0) + i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^i)^*(-i\gamma^3\gamma^1)\partial_i] \quad (7.3.43)$$

$$= [i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^0)(-i\gamma^3\gamma^1)(-\partial_0) + i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^i)^*(-i\gamma^3\gamma^1)\partial_i] . \quad (7.3.44)$$

Por partes, tem-se que

$$i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^0)(-i\gamma^3\gamma^1)(-\partial_0) = i\gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^3\gamma^1\partial_0 = i\gamma^0\partial_0 \quad (7.3.45)$$

e as três componentes do segundo termo

$$-i\gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^3\gamma^1\partial_1 = i\gamma^1\partial_1 \quad (7.3.46)$$

$$i\gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^3\gamma^1\partial_2 = i\gamma^2\partial_2 \quad (7.3.47)$$

$$-i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^3\gamma^1\partial_3 = i\gamma^3\partial_3 \quad (7.3.48)$$

Isto permite escrever

$$\hat{\mathcal{T}}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\hat{\mathcal{T}}^{-1} = i\gamma^\mu\partial_\mu \quad (7.3.49)$$

além dos resultados paralelos

$$\hat{\mathcal{T}}\gamma^0\hat{\mathcal{T}}^{-1} = \gamma^0 \quad \hat{\mathcal{T}}\gamma^i\hat{\mathcal{T}}^{-1} = -\gamma^i . \quad (7.3.50)$$

O segundo termo, $\hat{\mathcal{T}}(e\gamma^\mu A_\mu)\hat{\mathcal{T}}^{-1}$, é rapidamente calculado com auxílio dos resultados em (7.3.50)

$$e\hat{\mathcal{T}}\gamma^\mu\hat{\mathcal{T}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}A_\mu\hat{\mathcal{T}}^{-1} = e\gamma^\mu A_\mu . \quad (7.3.51)$$

A parcela referente à massa m novamente é indiferente, permitindo escrever a equação de Dirac T -transformada

$$\hat{\mathcal{T}}[i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{T}} \quad [i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m]\Psi_{\mathcal{T}} = 0 . \quad (7.3.52)$$

Observa-se então que a equação de Dirac, com o acoplamento mínimo, é invariante por paridade e inversão

temporal. Quanto à conjugação de carga, há a inversão de um sinal, o que não representa uma inconsistência, visto que a equação transformada passa a descrever um pósitron sob ação do mesmo campo eletromagnético.

Existem alguns outros operadores matriciais relacionados aos bilineares de Dirac e sua análise, com respeito às transformações C , P e T , é necessária. Resumiremo-nos aos operadores γ^5 , $\sigma^{\mu\nu}$ e Σ^k . Começemos pelo γ^5 . Por conjugação de carga, temos

$$\hat{C}\gamma^5\hat{C}^{-1} = i\gamma^2\gamma^5i\gamma^2 = \gamma^2\gamma^2\gamma^5 = -\gamma^5, \quad (7.3.53)$$

por paridade,

$$\hat{P}\gamma^5\hat{P}^{-1} = i\gamma^0\gamma^5(-i\gamma^0) = -\gamma^5. \quad (7.3.54)$$

e por inversão temporal,

$$\hat{T}\gamma^5\hat{T}^{-1} = i\gamma^1\gamma^3\gamma^5(-i\gamma^3\gamma^1) = \gamma^5. \quad (7.3.55)$$

Frequentemente a matriz γ^5 vem multiplicada por i , o que confere um fator de -1 nas transformações que envolvem conjugação complexa, ou seja, em C e T . O comportamento do tensor $\sigma^{\mu\nu}$ depende da componente em questão, da definição

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \sigma^{0i} = i\alpha^i \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\Sigma^k \quad (7.3.56)$$

$$\alpha^i = \gamma^0\gamma^i, \quad (7.3.57)$$

as componentes σ^{0i} , por conjugação de carga, respeitam

$$\hat{C}i\alpha^1\hat{C}^{-1} = i\gamma^2(-i\gamma^0\gamma^1)i\gamma^2 = i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = -i\alpha^1 \quad (7.3.58)$$

$$\hat{C}i\alpha^2\hat{C}^{-1} = i\gamma^2(i\gamma^0\gamma^2)i\gamma^2 = -i\gamma^0\gamma^2 = -i\alpha^2 \quad (7.3.59)$$

$$\hat{C}i\alpha^3\hat{C}^{-1} = i\gamma^2(-i\gamma^0\gamma^3)i\gamma^2 = i\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^2 = -i\alpha^3 \quad (7.3.60)$$

$$\hat{C}\sigma^{0i}\hat{C}^{-1} = -\sigma^{0i}. \quad (7.3.61)$$

Por paridade, vale

$$\hat{P}i\alpha^i\hat{P}^{-1} = i\gamma^0(i\gamma^0\gamma^i)(-i\gamma^0) = i\gamma^i\gamma^0 = -i\alpha^i, \quad (7.3.62)$$

e sob inversão temporal

$$\hat{T}i\alpha^1\hat{T}^{-1} = i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^0\gamma^1)(-i\gamma^3\gamma^1) = i\gamma^0\gamma^1 = i\alpha^1 \quad (7.3.63)$$

$$\hat{T}i\alpha^2\hat{T}^{-1} = i\gamma^1\gamma^3(i\gamma^0\gamma^2)(-i\gamma^3\gamma^1) = i\gamma^0\gamma^2 = i\alpha^2 \quad (7.3.64)$$

$$\hat{T}i\alpha^3\hat{T}^{-1} = i\gamma^1\gamma^3(-i\gamma^0\gamma^3)(-i\gamma^3\gamma^1) = i\gamma^0\gamma^3 = i\alpha^3 \quad (7.3.65)$$

$$\hat{T}\sigma^{0i}\hat{T}^{-1} = \sigma^{0i} . \quad (7.3.66)$$

O comportamento do operador Σ^k é idêntico ao das componentes do operador σ^{ij} , de acordo com a (7.3.56), logo, basta que estudemos um deles. Escolhamos σ^{ij} . Vejamos o comportamento da seguinte quantidade por conjugação de carga é

$$\hat{C}(i\gamma^i\gamma^j)\hat{C}^{-1} = \hat{C}(i\gamma^i)\hat{C}^{-1}\hat{C}(\gamma^j)\hat{C}^{-1} = -i\gamma^i\gamma^j \rightarrow \hat{C}\sigma^{ij}\hat{C}^{-1} = -\sigma^{ij} , \quad (7.3.67)$$

onde se usou a (7.3.20). Observe que o sinal adquirido por este termo é o mesmo que σ^{ij} recebe após esta operação. Este artifício vai ser utilizado nos cálculos seguintes.

Por paridade, fazendo uso da (7.3.35), temos

$$\hat{P}(i\gamma^i\gamma^j)\hat{P}^{-1} = (i\gamma^i\gamma^j) \rightarrow \hat{P}(\sigma^{ij})\hat{P}^{-1} = \sigma^{ij} , \quad (7.3.68)$$

e sob inversão temporal, tendo em vista a (7.3.50), obtemos

$$\hat{T}(i\gamma^i\gamma^j)\hat{T}^{-1} = -(i\gamma^i\gamma^j) \rightarrow \hat{T}(\sigma^{ij})\hat{T}^{-1} = -\sigma^{ij} . \quad (7.3.69)$$

Visto que as propriedades são multiplicativas, o comportamento de um produto de operadores pode ser inferido a partir do comportamento dos fatores. Alguns resultados paralelos, que vão ser frequentemente utilizados na análise de alguns bilineares, podem ser alocados na tabela

	C	P	T	CPT
γ^μ	-	$(-1)^\delta$	$(-1)^\delta$	-
γ^5	-	-	+	+
$i\alpha^i$	-	-	+	+
Σ^k	-	+	-	+
\mathbf{E}	-	-	+	+
\mathbf{B}	-	+	-	+

para $\delta = 0 \rightarrow (-1)^\delta = 1$; para $\delta = 1, 2, 3 \rightarrow (-1)^\delta = -1$

Apêndice B - Coeficientes de Clebsch-Gordan para a transformação

$$|jm_j\rangle \rightarrow |mm_s\rangle$$

Neste apêndice serão calculados os coeficientes de Clebsch-Gordan para a transformação $|jm_j\rangle \rightarrow |mm_s\rangle$, onde $|jm_j\rangle$ é autoestado dos operadores \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 e J_z , enquanto $|mm_s\rangle$ é autoestado dos operadores \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , L_z e S_z^2 .

Da relação de completeza, vale que

$$|jm_j\rangle = \sum_{m,m_s} |mm_s\rangle \langle mm_s|jm_j\rangle = \sum_{m,m_s} \langle mm_s|jm_j\rangle |mm_s\rangle, \quad (7.3.70)$$

onde os $\langle mm_s|jm_j\rangle$ correspondem aos coeficientes de Clebsch-Gordan da mudança de base. É possível mostrar que apenas os coeficientes que satisfazem

$$m_j = m + m_s \quad (7.3.71)$$

podem ser não nulos. Para isto, considere

$$(J_z - L_z - S_z)|jm_j\rangle = 0. \quad (7.3.72)$$

Multiplicando por $\langle mm_s|$ pela esquerda e tendo em vista a hermiticidade dos operadores L_z e S_z , conclui-se que

$$(m_j - m - m_s)\langle mm_s|jm_j\rangle = 0. \quad (7.3.73)$$

²Em verdade deveria-se escrever $|l, S; jm_j\rangle$ e $|l, S; mm_s\rangle$, o que foi omitido tendo em vista que ambos são autoestados de \mathbf{L}^2 e \mathbf{S}^2 .

Logo, a não ser que $m_j = m + m_s$, o coeficiente $\langle mm_s | jm_j \rangle$ deve ser nulo. Esta conclusão é fundamental para que a dupla soma presente na (7.3.70) seja mais facilmente calculada. Outro dado crucial é que j deve satisfazer

$$|l - \frac{1}{2}| \leq j \leq l + \frac{1}{2}. \quad (7.3.74)$$

Desta forma, com l fixo, j apenas pode assumir dois valores, $l \pm \frac{1}{2}$. O mesmo pode ser dito sobre m_s , que vale $\pm \frac{1}{2}$. Estas considerações permitem escrever a soma dupla (7.3.70) como

$$|j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle = \langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} | m \downarrow \rangle + \langle m \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} | m \uparrow \rangle. \quad (7.3.75)$$

É possível calcular o coeficiente $\langle m \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} \rangle$ e, a partir deste, calcular o $\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \rangle$. Uma vez que m_j está condicionado à orientação do *spin*, $m_j = m \pm \frac{1}{2}$, para *spins up* e *down*, respectivamente, iremos mencionar apenas m_j nos *kets*. Considere a operação sobre a (7.3.75)

$$J_- |j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle = (L_- + S_-) \left(\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j | m \downarrow \rangle + \langle m \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j | m \uparrow \rangle \right) \quad (7.3.76)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(l + \frac{1}{2} + m_j)(l + \frac{1}{2} - m_j + 1)} |j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle \\ &= \sqrt{(l + m)(l - m + 1)} \left(\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j | m - 1, \downarrow \rangle + \langle m \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j | m - 1, \uparrow \rangle \right) \\ & \quad + \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)} \langle m \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j | m \downarrow \rangle. \end{aligned} \quad (7.3.77)$$

Ao multiplicá-la por $\langle m - 1, \uparrow |$ pela esquerda, tem-se

$$\sqrt{(l + \frac{1}{2} + m_j)(l + \frac{1}{2} - m_j + 1)} \langle m - 1, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j - 1 \rangle = \sqrt{(l + m)(l - m + 1)} \langle m \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle, \quad (7.3.78)$$

Agora, caso se faça $m_j \rightarrow m_j + 1$ e $m \rightarrow m + 1$, obtém-se

$$\sqrt{(l + \frac{1}{2} + m_j + 1)(l + \frac{1}{2} - m_j)} \langle m, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle = \sqrt{(l + m + 1)(l - m)} \langle m + 1, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j + 1 \rangle, \quad (7.3.79)$$

por outro lado, vale notar que para estes autoestados, $m_j = m + \frac{1}{2}$. Escrevendo as raízes em termos apenas de l e m_j , obtemos

$$\langle m, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle = \sqrt{\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{l + m_j + \frac{3}{2}}} \langle m + 1, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j + 1 \rangle. \quad (7.3.80)$$

A aplicação sucessiva desta relação permite que se escreva

$$\langle m, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle = \sqrt{\frac{(l + m_j + \frac{1}{2})}{2l + 1}} \langle l, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle . \quad (7.3.81)$$

Oras, mas o produto interno $\langle l, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle$ deve satisfazer

$$\langle l, \uparrow | j = l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle = 1 , \quad (7.3.82)$$

porque $\langle l, \uparrow |$ e $| j = l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \rangle$ representam o mesmo estado (o *ket* com m máximo, $m = l$, e *spin up* equivale àquele com $m_j = l + \frac{1}{2}$ e $j = l + \frac{1}{2}$).

Falta agora calcular o coeficiente $\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \rangle$ da (7.3.75). Isso é bastante simples, porque $| j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle$ está normalizado, logo

$$|\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \rangle|^2 + \frac{(l + m + 1)}{2l + 1} = 1 \quad (7.3.83)$$

$$|\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \rangle| = \sqrt{\frac{l - m}{2l + 1}} , \quad (7.3.84)$$

onde se pode fazer a escolha

$$\langle m \downarrow | j = l + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{l - m}{2l + 1}} \quad (7.3.85)$$

Neste momento uma consideração cabe: estamos realizando uma mudança de base em duas dimensões ($| j = l \pm \frac{1}{2}, m_j \rangle \rightarrow | m \uparrow \rangle, | m \downarrow \rangle$), que pode ser representada por uma matriz de rotação, ou seja

$$\begin{pmatrix} | j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle \\ | j = l - \frac{1}{2}, m_j \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | m \uparrow \rangle \\ | m \downarrow \rangle \end{pmatrix} , \quad (7.3.86)$$

de modo que podemos identificar

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{(l + m + 1)}{2l + 1}} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{l - m}{2l + 1}} , \quad (7.3.87)$$

levando a

$$| j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle = \sqrt{\frac{l - m}{2l + 1}} | m \downarrow \rangle + \sqrt{\frac{(l + m + 1)}{2l + 1}} | m \uparrow \rangle , \quad (7.3.88)$$

$$| j = l - \frac{1}{2}, m_j \rangle = \sqrt{\frac{(l + m + 1)}{2l + 1}} | m \downarrow \rangle - \sqrt{\frac{l - m}{2l + 1}} | m \uparrow \rangle . \quad (7.3.89)$$

Observe que $| j = l + \frac{1}{2}, m_j \rangle$ e $| j = l - \frac{1}{2}, m_j \rangle$ são, de fato, ortogonais.

Referências Bibliográficas

- [1] Abraham Pais et. al. *Paul Dirac: The Man and his Work*. Cambridge University Press, New York, 1998.
- [2] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse. Cavity control of a single-electron quantum cyclotron: Measuring the electron magnetic moment. *Physical Review A*, 83(26), 2011.
- [3] F. Dyson. Private communication to BRL, December 2006.
- [4] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 384(361), 1926.
- [5] W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33(879), 1925.
- [6] P. A. M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron. *The Royal Society Preceedings A*, 117(610), 1928.
- [7] C. D. Anderson. The Apparent Existence of Easily Deflectable Positives. *Science*, 76(238), 1932.
- [8] The Nobel Foundation. Les Prix Nobel. Stockholm, 1955.
- [9] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman. *The Eightfold Way*. Benjamin, New York, 1964.
- [10] V. E. Barnes et al. Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three. *Physical Review Letters*, 12(204), 1964.
- [11] O. W. Greenberg. Resource Letter Q-1: Quarks. *American Journal of Physics*, 50(1074), 1982.
- [12] D. Gross and F. Wilczek. A watershed: the emergence of QCD, Janeiro 2013.
- [13] P. W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Physical Review Letters*, 13(508), 1964.

- [14] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Physical Review Letters*, 13(321), 1964.
- [15] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Global Conservation Laws and Massless Particles. *Physical Review Letters*, 13(585), 1964.
- [16] T. D. Lee and C. N. Yang. Question of Parity Conservation in Weak Interactions. *Physical Review*, 104(254), 1956.
- [17] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson. Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay. *Physical Review*, 105(1413), 1957.
- [18] M. Gell-Mann and A. Pais. Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation. *Physical Review*, 97(1387), 1955.
- [19] J. W. Cronin and M. S. Greenwood. CP symmetry violation. *Physics Today*, 35(7), 1982.
- [20] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, 2nd edition, 2008.
- [21] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay. Evidence for the 2π Decay of the K^0 Meson. *Physical Review Letters*, 13(138), 1964.
- [22] S. Gjesdal et al. The phase φ_{\pm} of CP violation in the $K_0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ decay. *Physics Letters*, 52(119), 1974.
- [23] N. Cabibbo. Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Physical Review Letters*, 10(531), 1963.
- [24] M. Kobayashi and T. Maskawa. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, 49(652), 1973.
- [25] J. P. Lees et al. Observation of Time-Reversal Violation in the B^0 Meson System. *Physical Review Letters*, 109(211801), 2012.
- [26] J. Schwinger. The Theory of Quantized Fields. I. *Physical Review*, 82(914), 1951.
- [27] W. Pauli. *Niels Bohr and the Development of Physics*. Pergmon Press, 1955.
- [28] G. Lüders. Proof of the TCP theorem. *Annals of Physics*, 2(1), 1957.
- [29] O. W. Greenberg. CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance. *Physical Review Letters*, 89(23), 2002.

- [30] M. Chaichian, A. D. Dolgov, V. A. Novikov, and A. Tureanu. CPT violation does not lead to violation of Lorentz invariance and vice versa. *Physics Letters B*, 699(177), 2011.
- [31] V. Alan Kostelecky and S. Samuel. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, 39(2), 1989.
- [32] D. Colladay and A. Kostelecky. CPT violation and the standard model. *Physical Review D*, 58(6760), 1997.
- [33] D. Colladay and A. Kostelecky. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, 58(116002), 1998.
- [34] Alan Kostelecky. Background Information on Lorentz and CPT Violation.
- [35] Tristan Hübsch. *Advanced Concepts in Particle and Field Theory*. Cambridge University Press, 2015.
- [36] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. *Physical Review D*, 41(1231), 1990.
- [37] A. P. Baëta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayël-Neto. Aspects of causality and unitarity and comments on vortex-like configurations in an abelian model with a Lorentz-breaking term. *Physical Review D*, 67(085021), 2003.
- [38] A. P. Baëta Scarpelli and J. A. Helayël-Neto. Lorentz-violating SO(3) model: Discussing unitarity, causality, and 't Hooft-Polyakov monopoles. *Physical Review D*, 73(105020), 2006.
- [39] C. Adam and F.R. Klinkhamer. Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons-like term. *Nuclear Physics B*, 607(247), 2001.
- [40] C. Adam and F.R. Klinkhamer. Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics. *Nuclear Physics B*, 657(214), 2003.
- [41] A. A. Andrianov and R. Soldati. Lorentz symmetry breaking in Abelian vector-field models with Wess-Zumino interaction. *Physical Review D*, 51(5961), 1995.
- [42] A. A. Andrianov and R. Soldati. Patterns of Lorentz symmetry breaking in QED by CPT-odd interaction. *Physics Letters B*, 435(449), 1998.
- [43] A. A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo. Dynamical Lorentz symmetry breaking from a (3+1)-dimensional axion-Wess-Zumino model. *Physical Review D*, 59(025002), 1998.

- [44] R. Jackiw and V. Alan Kostelecký. Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics. *Physical Review D*, 82(3572), 1999.
- [45] J.-M. Chung and B. K. Chung. Induced Lorentz- and CPT-violating Chern-Simons term in QED: Fock-Schwinger proper time method. *Physical Review D*, 63(105015), 2001.
- [46] Guy Bonneau. Regularisation: many recipes, but a unique principle: Ward identities and normalisation conditions. The case of CPT violation in QED. *Nuclear Physics B*, 593(398), 2001.
- [47] Oswaldo M. Del Cima, Jakson M. Fonseca, Daniel H. T. Franco, and Olivier Piguet. Lorentz and CPT violation in QED revisited: A missing analysis. *Physics Letters B*, 688(258), 2010.
- [48] F. A. Brito, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, E. Passos, and C. Wotzasek. Induced Chern-Simons-like action in Lorentz-violating massless QED. *Physical Review D*, 78(125023), 2008.
- [49] M. Pérez-Victoria. Exact Calculation of the Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in QED. *Physical Review Letters*, 83(2518), 1999.
- [50] Manuel Pérez-Victoria. Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED. *Journal of High Energy Physics*, 2001, 2001.
- [51] O. A. Battistel and G. Dallabona. Role of ambiguities and gauge invariance in the calculation of the radiatively induced Chern-Simons shift in extended QED. *Nuclear Physics B*, 610(316), 2001.
- [52] A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller. Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework. *Physical Review D*, 64(046013), 2001.
- [53] Tiago Mariz and Jose R. Nascimento and Eduardo Passos and Rubens F. Ribeiro and Francisco A. Brito. A remark on lorentz violation at finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, 10(019), 2005.
- [54] Jose R. Nascimento, Eduardo Passos, Albert Yu. Petrov, and Francisco A. Brito. Lorentz-CPT violation, radiative corrections and finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, 06(016), 2007.
- [55] F. A. Brito, J. R. Nascimento, E. Passos, and A. Yu. Petrov. The ambiguity-free four-dimensional Lorentz-breaking Chern-Simons action. *Physics Letters B*, 664(112), 2008.
- [56] Ralf Lehnert and Robertus Potting. Vacuum Čerenkov Radiation. *Physical Review Letters*, 93(110402), 2004.

- [57] Ralf Lehnert and Robertus Potting. Čerenkov effect in Lorentz-violating vacua. *Physical Review D*, 70(125010), 2004.
- [58] Brett Altschul. Čerenkov radiation in a Lorentz-violating and birefringent vacuum. *Physical Review D*, 75(105003), 2007.
- [59] C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer. Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics. *Nuclear Physics B*, 734(1), 2006.
- [60] Mariana Frank and Ismail Turan. Casimir force in a Lorentz violating theory. *Physical Review D*, 74(033016), 2006.
- [61] O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky. Casimir effect within D=3+1 Maxwell-Chern-Simons electrodynamics. *Physical Review D*, 81(025015), 2010.
- [62] J. M. Fonseca, A. H. Gomes, and W. A. Moura-Melo. Emission and absorption of photons and the black-body spectrum in Lorentz-odd electrodynamics. *Physics Letters B*, 671(280), 2009.
- [63] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr., and Josberg S. Rodrigues. Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy. *Physical Review D*, 78(125013), 2008.
- [64] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. F. Santos, and A. J. da Silva. Free energy of Lorentz-violating QED at high temperature. *Physical Review D*, 81(045013), 2010.
- [65] F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, and C. Wotzasek. Lorentz-violating Chern-Simons action under high temperature in massless QED. *Physics Letters B*, 681(495), 2009.
- [66] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Lorentz-Violating Electrodynamics and the Cosmic Microwave Background. *Physical Review Letters*, 99(011601), 2007.
- [67] V. Alan Kostelecky and M. Mewes. Astrophysical Tests of Lorentz and CPT Violation with Photons. *The Astrophysical Journal Letters*, 689(1), 2008.
- [68] J.-Q. Xia, H. Li, X. Wang, and X. Zhang. Testing CPT symmetry with CMB measurements. *Astronomy and Astrophysics*, 483(3), 2008.
- [69] Jun-Qing Xia, Hong Lib, and Xinmin Zhang. Probing CPT violation with CMB polarization measurements. *Physics Letters B*, 687(129), 2010.
- [70] Bo Feng, Mingzhe Li, Jun-Qing Xia, Xuelei Chen, and Xinmin Zhang. Searching for CPT Violation with Cosmic Microwave Background Data from WMAP and BOOMERANG. *Physical Review Letters*, 96(221302), 2006.

- [71] V. Alan Kostelecky and M. Mewes. Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics. *Physical Review D*, 66(056005), 2002.
- [72] V. Alan Kostelecky and M. Mewes. Electrodynamics with Lorentz-violating Operators of Arbitrary Dimension. *Physical Review D*, 80(015020), 2009.
- [73] H. Müller, S. Herrmann, C. Braxmaier, S. Schiller, and A. Peters. Modern Michelson-Morley Experiment using Cryogenic Optical Resonators. *Physical Review Letters*, 91(2), 2003.
- [74] V. Alan Kostelecky and A. G. M. Pickering. Vacuum Photon Splitting in Lorentz-violating Quantum Electrodynamics. *Physical Review Letters*, 91(3), 2003.
- [75] V. Alan Kostelecky and M. Mewes. Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics. *Physical Review Letters*, 87(25), 2001.
- [76] Y. V. Stadnik, B. M. Roberts, and V. V. Flambaum. Tests of CPT and Lorentz Symmetry from Muon Anomalous Magnetic Moment. *Physical Review D*, 90(045035), 2014.
- [77] W. Lamb and R. Retherford. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method. *Physical Review*, 72(241), 1947.
- [78] W. Gerlach and O. Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, 9(349), 1922.
- [79] L. H. Thomas. The Motion of the Spinning Electron. *Nature*, 117(514), 1926.
- [80] J. Schwinger. On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. *Physical Review*, 73(416), 1948.
- [81] P. Kusch and H. M. Foley. Precision Measurement of the Ratio of the Atomic "g Values" in the $P_{\frac{3}{2}}^2$ and $P_{\frac{1}{2}}^2$ States of Gallium. *Physical Review*, 72(1256), 1947.
- [82] J. Beringer et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Physical Review D*, 86(010001), 2012.
- [83] N. F. Ramsey. Time Reversal, Charge Conjugation, Magnetic Pole Conjugation, and Parity. *Physical Review*, 109(225), 1958.
- [84] E. M. Purcell and N. F. Ramsey. On the Possibility of Electric Dipole Moments for Elementary Particles and Nuclei. *Physical Review*, 78(807), 1950.

- [85] J. H. Smith, E. M. Purcell, and N. F. Ramsey. Experimental Limit to the Electric Dipole Moment of the Neutron. *Physical Review*, 108(120), 1957.
- [86] A. W. Thomas. The Spin of the Proton. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 61(219), 2008.
- [87] I. Estermann, R. Frisch, and O. Stern. Magnetic Moment of the Proton. *Nature*, 132(169), 1933.
- [88] Luis W. Alvarez and F. Bloch. A Quantitative Determination of the Neutron Moment in Absolute Nuclear Magnetons. *Physical Review*, 57(111), 1940.
- [89] Jayme Vaz Jr and Roldão da Rocha Jr. *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors*. Oxford University Press, 2016.
- [90] Robert S. Van Dyck, Jr., Paul B. Schwinberg, and Hans G. Dehmelt. New high-precision comparison of electron and positron g factors. *Physical Review Letters*, 59(26), 1987.
- [91] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant. *Physical Review Letters*, 100(120801), 2008.
- [92] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio. Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, 77(053012), 2008.
- [93] Malo Cadoret, Estefania de Mirandes, Pierre Cladé, Saïda Guellati-Khélifa, Catherine Schwob, François Nez, Lucile Julien, and François Biraben. Combination of Bloch Oscillations with a Ramsey-Bordé Interferometer: New Determination of the Fine Structure Constant. *Physical Review Letters*, 101(230801), 2008.
- [94] E. E Salpeter. Some Atomic Effects of an Electronic Dipole Moment. *Physical Review*, 112(5), 1958.
- [95] The ACME Collaboration: J. Baron et al. Order of Magnitude Smaller Limit on the Electric Dipole Moment of the Electron. *Science*, 343(6168):269–272, 2014.
- [96] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein. Electroweak precision observables in the minimal supersymmetric standard model. *Physics Reports*, 425(265), 2006.
- [97] D. F. Nelson, A. A. Schupp, R. W. Pidd, and H. R. Crane. Search for an Electric Dipole Moment of the Electron. *Physical Review Letters*, 2(492), 1959.
- [98] P. G. H. Sandars. The electric dipole moment of an atom. *Physics Letters*, 14(194), 1965.
- [99] P. G. H. Sandars. Enhancement factor for the electric dipole moment of the valence electron in an alkali atom. *Physics Letters*, 22(290), 1966.

- [100] L. I. Schiff. Measurability of Nuclear Electric Dipole Moments. *Physical Review*, 132(2194), 1963.
- [101] V. V. Flambaum and A. Kozlov. Extension of the Schiff theorem to ions and molecules. *Physical Review A*, 85(022505), 2012.
- [102] Jonas B. Araujo, Rodolfo Casana, and Manoel M. Ferreira Jr. Constraining CPT-even and Lorentz-violating nonminimal couplings with the electron's magnetic and electric dipole moments. *Physical Review D*, 92(025049), 2015.
- [103] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. Passos, F. E. P. dos Santos, and E. O. Silva. New CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling in the Dirac equation. *Physical Review D*, 87(047701), 2013.
- [104] Pavel A. Bolokhov, Maxim Pospelov, and Michael Romalis. Electric dipole moments as probes of CPT invariance. *Physical Review D*, 78(057702), 2008.
- [105] W. J. Marciano and B. Lee Roberts, editors. *Lepton Dipole Moments*. Advanced Series in High Energy Physics. World Scientific, 2010.
- [106] Daniel V. Schroeder Michael E. Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [107] Robert Bluhm, V. Alan Kostelecky, Charles D. Lane, and Neil Russell. Probing Lorentz and CPT violation with space-based experiments. *Physical Review D*, 68(125008), 2003.
- [108] André Herkenhoff Gomes. *Some Contributions to the study of a Quantum Electrodynamics with Lorentz Symmetry Violation*. PhD thesis, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, Minas Gerais, Brasil, 2014.
- [109] Jonas B. Araujo, Rodolfo Casana, and Manoel M. Ferreira Jr. General CPT-even dimension-5 nonminimal couplings between fermions and photons yielding EDM and MDM. *Physics Letters B*, 760(302), 2016.
- [110] O. P. Sushkov, V. V. Flambaum, and I. B. Khriplovich. Possibility of investigating P- and T-odd nuclear forces in atomic and molecular experiments. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 87(1521), 1984.
- [111] V. V. Flambaum and A. Kozlov. Screening and finite-size corrections to the octupole and Schiff moments. *Physical Review C*, 85(068502), 2012.
- [112] V. V. Flambaum and J. S. M. Ginges. Nuclear Schiff moment and time-invariance violation in atoms. *Physical Review A*, 65(032113), 2002.

- [113] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr., A.R. Gomes, and Paulo R.D. Pinheiro. Stationary solutions for the parity-even sector of the CPT-even and Lorentz-covariance-violating term of the standard model extension. *The European Physical Journal C*, 62(573), 2009.
- [114] N. Auerbach, V. V. Flambaum, and V. Spevak. Collective T- and P-odd Electromagnetic Moments in Nuclei with Octupole Deformations. *Physical Review Letters*, 76(23), 1996.
- [115] V. Spevak, N. Auerbach, and V. V. Flambaum. Enhanced T-odd, P-odd electromagnetic moments in reflection asymmetric nuclei. *Physical Review C*, 56(3), 1997.
- [116] S. Coleman and S. L. Glashow. High-energy tests of Lorentz invariance. *Physical Review D*, 59(116008), 1999.
- [117] V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, and J. S. M. Ginges. Electric dipole moments of Hg, Xe, Rn, Ra, Pu, and TlF induced by the nuclear Schiff moment and limits on time-reversal violating interactions. *Physical Review A*, 66(012111), 2002.
- [118] B. Graner, Y. Chen, E. G. Lindahl, and B. R. Heckel. Reduced Limit on the Permanent Electric Dipole Moment of ^{199}Hg . *Physical Review Letters*, 116(161601), 2016.
- [119] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr, and J. A. Helayël-Neto. Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications. *The European Physical Journal C*, 41(421), 2005.
- [120] H. Belich, L. P. Colatto, T. Costa-Soares, J. A. Helayël-Neto, and M. T. D. Orlando. Magnetic moment generation from non-minimal couplings in a scenario with Lorentz-symmetry violation. *The European Physical Journal C*, 62(425), 2009.
- [121] B. Bederson and H. Walther. *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, volume 40. Academic Press, London, 1999.
- [122] Maxim Pospelov and Adam Ritz. CKM benchmarks for electron electric dipole moment experiments. *Physical Review D*, 89(056006), 2014.
- [123] S. M. Barr. T- and P-odd electron-nucleon interactions and the electric dipole moment of large atoms. *Physical Review D*, 45(4148), 1992.
- [124] Xiao-Gang He and Bruce McKellar. Constraints on CP violating four-fermion interactions. *Physics Letters B*, 390(318), 1997.

- [125] M. A. Bouchiat and C. C. Bouchiat. Weak neutral currents in atomic physics. *Physics Letters B*, 48(111), 1974.
- [126] C. Bouchiat. A limit on scalar-pseudoscalar weak neutral currents from a new interpretation of atomic electric dipole measurements. *Physics Letters B*, 57(284), 1975.
- [127] I. B. Khriplovich. *Parity Nonconservation in Atomic Phenomena*. CRC Press, Philadelphia, 1 edition, 1991.
- [128] I. B. Khriplovich and S. K. Lamoreaux. *CP Violation Without Strangeness*. Springer, Berlin, 1997.
- [129] Ann-Marie Mårtensson-Pendrill. Calculation of a P- and T-nonconserving Weak Interaction in Xe and Hg with Many-Body Perturbation Theory. *Physical Review Letters*, 54(1153), 1985.
- [130] E. A. Hinds, C. E. Loving, and P. G. H. Sandars. Limits on P and T violating neutral current weak interactions. *Physics Letters B*, 62(97), 1976.
- [131] P. G. Silvestrov V. A. Dzuba, V. V. Flambaum. Bounds on electric dipole moments and T-violating weak interactions of the nucleons. *Physics Letters B*, 154(93), 1985.
- [132] ACME. Improved limit on the electric dipole moment of the electron. *Nature*, 562(355), 2018.
- [133] K. Yanase, N. Yoshinaga, K. Higashiyama, and N. Yamanaka. Electric dipole moment of ^{199}Hg atom from P, CP-odd electron-nucleon interaction. *arXiv:1805.00419*.
- [134] David V. Neuffer and Eugene D. Commins. Calculation of parity-nonconserving effects in the $6^2_{P_{1/2}} - 7^2_{P_{1/2}}$ forbidden M1 transition in thallium. *Physical Review A*, 16(844), 1977.
- [135] David V. Neuffer and Eugene D. Commins. Calculation parity-nonconserving effects in forbidden M1 transitions in cesium. *Physical Review A*, 16:1760, 1977.
- [136] W. R. Johnson. Calculations of P- and CP-violating matrix elements for heavy atoms. *Physica Scripta*, 36(5), 1987.
- [137] A. Kostelecky and Z. Li. Gauge field theories with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *arXiv:1812.11672v1*.
- [138] R. M. Sternheimer. Electronic Polarizabilities of the Alkali Atoms. *Physical Review*, 127(1220), 1962.
- [139] P. G. H. Sandars and R. M. Sternheimer. Electric-dipole-moment enhancement factor for the thallium atom, and a new upper limit on the electric dipole moment of the electron. *Physical Review A*, 11(473), 1975.

- [140] P. G. H. Sandars. The electric-dipole moments of an atom I. Some general considerations. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 1(499), 1968.
- [141] P. G. H. Sandars. The electric-dipole moments of an atom II. The contribution from an electric-dipole moment on the electron with particular reference to the hydrogen atom. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 1(511), 1968.