

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Cesar Antonio Ibañez Florian

*Dinâmica de sólitons vetoriais em condensados de
Bose-Einstein com interação spin-órbita*

SÃO LUÍS, MARÇO DE 2019

Cesar Antonio Ibañez Florian

*Dinâmica de sólitons vetoriais em condensados de
Bose-Einstein com interação spin-órbita*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro.

SÃO LUÍS, MARÇO DE 2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a)
autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Ibañez Florian, Cesar Antonio.

Dinâmica de sólitons vetoriais em condensados de
Bose-Einstein com interação spin-órbita

Cesar Antonio Ibañez Florian. - 2019.

126 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro.

Co-Orientador(a): Dr. Luis Enrique Arroyo Meza.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Física/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís -
MA, 2019.

1. Sólitons brilhantes. 2. Magnetização de sóliton . 3.
Interação spin-órbita.

Cesar Antonio Ibañez Florian

*Dinâmica de sólitons vetoriais em condensados de
Bose-Einstein com interação spin-órbita*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Batista Hott - UNESP

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva - UFMA

Prof. Dr. Luis Arroyo Meza - UFMA

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro - UFMA

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família, em especial, à minha mãe pelo esforço feito toda sua vida para que possa-me formar, obrigado a meu pai por ser um exemplo de trabalho ao igual que minha mãe. Agradecimientos ao Dr. Jorge Espichán, quem foi meu formador na graduação, ao Dr. Luis Rafael Benito Castro e Dr. Luis Arroyo Meza, pela confiança que eles depositaram em mim, e também por sua imensa paciência. Da mesma forma, quero agradecer de sobre maneira ao Dr. Rodolfo Casana Sifuentes, pela oportunidade concedida e a todas as pessoas que tornaram possível que hoje eu esteja aqui.

Além disso, agradecer a Neyver G., Andres J., Angel V. por suas amizades e tertúlias de final de semana.

À Universidade Federal do Maranhão, pelo espaço cedido e pela oportunidade oferecida.

Às agências de fomento FAPEMA, CAPES e CNPq pelo suporte financeiro.

*“Tudo aquilo que o homem ignora não existe para ele.
Por isso, o universo de cada um se resume ao tamanho
de seu saber.”*

Albert Einstein

Resumo

Na atualidade, a realização experimental de um condensado de Bose-Einstein (BEC, do inglês *Bose-Einstein condensate*) de átomos com interação spin-órbita (SOC, do inglês *spin-orbit coupling*) despertou um novo interesse em estudar as intrigantes e interessantes propriedades do sistema. Por exemplo, um BEC de átomos de ^{87}Rb (com estado hiperfino atômico $f = 1$) armadilhado em forma de charuto (quase-unidimensional), pode ser submetido a um campo magnético externo, o que provoca o efeito Zeeman sobre os estados de seus átomos constituintes. Depois, através de um arranjo de laser, tipo Raman, e para uma determinada frequência dos lasers, é possível induzir uma transição entre os subníveis $m_f = -1$ e $m_f = 0$, levando assim à interação spin-órbita entre os subníveis hiperfinos, e a uma mistura dos estados para cada subnível.

Nesta dissertação, estudamos diversas dinâmicas do vetor sóliton brilhante-brilhante em $(1 + 1)$ dimensões do espaço-tempo que são criadas em um BEC de átomos de dois estados internos com e sem acoplamento spin-órbita, governadas por duas equações de Gross-Pitaevskii acopladas. Para resolver as equações acopladas, empregamos o método variacional comumente usado para esta classe de sistemas. Em ambos os casos, com e sem acoplamento spin-órbita, apresentamos soluções analíticas exatas que resolvem as equações de movimento com diferentes potenciais polinomiais. A partir das soluções analíticas, estudamos a precessão do vetor pseudo-spin $\mathbf{S} = 1/2$ do sistema, o desbalanço do pseudo-spin $\mathbf{S}$ do sóliton, a diferença de fase entre as componentes do sóliton (dinâmica interna do sóliton), o movimento do centro de massa e a evolução do momento linear do sistema (dinâmica externa do sóliton). Mostramos explicitamente a influência do potencial externo na precessão do pseudo-spin do sistema. Por último, estudamos numericamente as condições de estabilidade das soluções solitônicas brilhante-brilhante sob pequenas perturbações em sua condição inicial.

Palavras chave: Condensado de Bose-Einstein (BEC), Potenciais de armadilhamento, Interação spin-órbita (SOC), Sóliton.

Abstract

Nowadays, the experimental realization of a Bose-Einstein condensate (BEC) of atoms with spin-orbit interaction (SOC) has aroused a new interest in studying the intriguing and interesting properties of the system. For example, a BEC of ^{87}Rb atoms (with atomic hyperfine state $f = 1$) trapped in cigar form (quasi-one-dimensional) can be subjected to an external magnetic field, which causes the Zeeman effect on the states of its constituent atoms. Then, through of an arrangement of Raman-type laser and a certain frequency of the lasers, it is possible to induce a transition between the sub-levels $m_f = -1$ and $m_f = 0$, thus leading to spin-orbit coupling, between the hyperfine sub-levels, and a mixture of states for each sub-level.

In this dissertation, we study several dynamics of the bright-bright vector soliton, in $(1 + 1)$ space-time dimensions, which are created in a BEC of two internal state atoms, with and without spin-orbit coupling, governed by two equations of Gross-Pitaevskii coupled. To solve the coupled equations, we employed the variational approximation, being used recently for this type of system. In both cases, with and without spin-orbit coupling, we present exact analytical solutions, which solve the equations of motion with different polynomial potentials. From the analytical solutions, we study the precession of the system pseudo-spin vector $\mathbf{S} = 1/2$, the unbalance of the pseudo-spin S_z of the soliton, the phase difference between the soliton components (internal dynamics of soliton), in addition, we also study the movement of the center of mass of the system, and the evolution of the linear momentum of the system (external dynamics of the soliton). We explicitly show the influence of external potential on the pseudo-spin precession of the system. Finally, we study numerically the stability conditions of the bright-bright soliton solutions, obtained in this work, under small disturbances in their initial condition.

Keywords: Bose Einstein condensate (BEC), Potential trap, spin-orbit interaction (SOC), soliton.

Sumário

Sumário	7
Lista de Figuras	9
1 Introdução	12
2 Condensado de Bose-Einstein e Teoria do Campo Médio	14
2.1 Condensado de Bose-Einstein	14
2.1.1 Ideias básicas do processo de condensação	15
2.1.2 Armadilha óptica magnética	17
2.1.3 Acoplamento spin-órbita	20
2.1.4 Interação Rashba-Dresselhaus	20
2.1.5 Interação Raman	21
2.1.6 Resonância Feshbach	21
2.2 Teoria do Campo Médio TCM	22
2.2.1 Conceitos básicos da TCM	22
2.3 Equação de Gross-Pitaevskii	26
2.4 Redução de Dimensões	27
2.4.1 Redução a uma dimensão	28
2.5 A equação de Gross-Pitaevskii com os termos da interação spin-órbita . . .	29
2.5.1 Hamiltoniana de interação spin-órbita	29
2.5.2 Relação de dispersão	29
2.5.3 Equação de Gross-Pitaevskii com interação spin-órbita	31
3 Sólitons em condensados de Bose Einstein	33
3.1 Soluções solitônicas	33
3.1.1 Equação de Weierstrass	35
3.2 Soluções vetor-sólitons	36
3.2.1 Modelo de Manakov	36
3.2.2 Sóliton brilhante (BS) e sóliton escuro (DS)	37
4 Dinâmica de um condensado de Bose-Einstein em ausência e com interação spin-órbita	38
4.1 Equações de movimento	38
4.2 Dinâmica de um BEC de átomos sem acoplamento spin-órbita ($\lambda = 0$) . . .	44
4.2.1 Caso 1: $V_2(t) = \frac{\gamma_0^2}{2} + \epsilon \cos(\omega_0 t)$; $V_0(t) = V_1(t) = V_3(t) = V_4(t) = 0$.	46
4.2.2 Caso 2: $V_2(t) = \frac{\gamma_0^2}{2}$; $V_1(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$; $V_0(t) = V_3(t) = V_4(t) = 0$.	50

4.2.3	Caso 3: $V_4(t) = V_4$; $V_3(t) = V_3 \operatorname{sn}(\omega_0 t m)$; $V_2(t) = \frac{\gamma_0^2}{2}$; $V_1(t) = V_0(t) = 0$	52
4.3	Dinâmica de um BEC de átomos com acoplamento spin-órbita ($\lambda \neq 0$) . .	54
4.3.1	Caso livre e Sóliton estacionário	54
4.3.2	Caso 4: $V_1(t) = F_0 \operatorname{dn}(\omega_0 t m) \operatorname{sn}(\omega_0 t m)$; $V_2(t) = V_3(t) = V_4(t) = 0$. . .	58
4.4	Análise da estabilidade das soluções	61
5	Conclusões e comentários	64
6	Apêndice	67
6.1	Função de Mathieu	67
6.2	Funções elípticas de Jacobi	68
	Referências Bibliográficas	70

Lista de Figuras

2.1	Curva de potencial químico μ vs a temperatura T para bósons e férmions livres [13].	17
2.2	Interação dos fótons de lasers e bósons [15]	18
2.3	Ação da armadilha magnética depois de desligar os lasers [15]	18
2.4	Esquema básico de Armadilha Óptica Magnética [16]	18
2.5	Armadilha do modelo e efeito Zeeman pra estrutura hiperfina [17]	19
2.6	Modelo unidimensional do efeito Zeemann num MOT [16]	19
2.7	Melaço óptico [18]	20
2.8	Dependência do comprimento de onda da onda espalhada com respecto o campo magnético externo [23]	21
2.9	Na figura à esquerda, podemos observar N partículas interagindo umas com outras e na figura à direita, podemos observar uma partícula interagindo com um potencial efetivo. Sendo esta a ideia central da teoria do campo médio [24].	22
2.10	Relação de dispersão para $\delta_0 = 0$	30
2.11	Relação de dispersão para $\delta_0 \neq 0$	30
3.1	Figura usual do sólito brilhante.	35
3.2	Figura usual do sólito brilhante.	35
3.3	Graficos de sólito brilhante e sólito escuro respectivamente	37
4.1	Evolução no tempo, de S_x e S_y , eq. (4.38), em ausência de acoplamento spin-órbita, com $\delta = 0.05$, $\Omega = 0.5$, $c_1 = 0.5$, e $c_3 = 0$	45
4.2	Dinâmica do S_z , eq. (4.38), e ϕ , eq. (4.39), em ausência de acoplamento spin-órbita, com $\delta = 0.05$, $\Omega = 0.5$, $c_1 = 0.5$, $c_3 = 0$, e $c_4 = 0$	45
4.3	Precessão de $\mathbf{S}$ em ausência de acoplamento spin-órbita, com $\delta = 0.5$, $\Omega = 0.5$, $c_1 = 0$, e $c_3 = 0$	46
4.4	Evolução do potencial de armadilhamento, eq. (4.40), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, e $\omega_0 = 1$	47
4.5	Evolução da largura do sólito, eq. (4.41), com $g = -1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, e $\omega_0 = 1$	47
4.6	Movimento do centro de massa, eq. (4.42), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$	48
4.7	Evolução do momento linear do sistema, eq. (4.43), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $k_0 = -A_1\gamma_0$	48
4.8	Dinâmicas de $ \Psi_1 ^2$ e $ \Psi_2 ^2$, com $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $c_3 = 0$, e $c_4 = -A_2$	48
4.9	Evolução do módulo do sólito do sistema, $ \Psi_{sist} ^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$	48

4.10	Movimento de $\langle z(t) \rangle$, eq. (4.42), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = 1.39$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.	49
4.11	Evolução do momento linear do sistema, eq. (4.43), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = 1.39$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $k_+(0) = 0$.	49
4.12	Comportamento ressonante de $ \Psi_1 ^2$ e $ \Psi_2 ^2$, com $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = 1.39$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.	49
4.13	Dinâmica da amplitude do sólton do sistema, $ \Psi_{sist} ^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\gamma = 1.39$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.	49
4.14	Evolução do centro de massa do sistema, eq. (4.42), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = \gamma_0/2$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.	50
4.15	Dinâmica do momento linear do sistema, eq. (4.43), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = \gamma_0/2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $k_+(0) = 0$.	50
4.16	Progresso, no tempo, de $ \Psi_1 ^2$ e $ \Psi_2 ^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.1$, $\omega_0 = \gamma/2$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.	50
4.17	Dinâmica da amplitude do sólton do sistema, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\omega_0 = \gamma_0/2$, $\epsilon = 0.5$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.	50
4.18	Progresso, no tempo, do potencial, eq. (4.44), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $\omega_0 = 1$.	51
4.19	Valor da largura do sólton η , com $g = -1$ e $\gamma_0 = \sqrt{2}$.	51
4.20	trajetória do centro de massa, eq. (4.45), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, e $A_2 = -F_0/[\gamma_0(\omega_0^2 - \gamma_0^2)]$.	51
4.21	Evolução do momento linear do sistema, eq. (4.46), com $\gamma = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $F_0 = 1$, e $k_0 = -A_1\gamma_0$.	51
4.22	Dinâmica de $ \Psi_1 ^2$, e $ \Psi_2 ^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = -F_0/[\gamma_0(\omega_0^2 - \gamma_0^2)]$, e $\omega_0 = 1$.	52
4.23	Dinâmica de $ \Psi_1 ^2$, e $ \Psi_2 ^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = -F_0/[\gamma_0(\omega_0^2 - \gamma_0^2)]$, e $\omega_0 = 1, 3$.	52
4.24	Perfil do potencial de armadilhamento, eq. 4.47, com $V_4 = 1$, $V_3 = -1$, $\omega_1 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, e $\omega_0 = 3$.	52
4.25	Largura do sólton, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, e $\omega_0 = 1.1$.	52
4.26	Trajetoira de $\langle z(t) \rangle$, eq. 4.48, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, e $\omega_0 = 1.1$.	53
4.27	Evolução de $k_+(t)$, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, e $k_0 = 0$.	53
4.28	Dinâmica de $ \Psi_1 ^2$ e $ \Psi_2 ^2$, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, $\omega_0 = 1.1$, $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, e $c_3 = 0$.	54
4.29	Movimento de $ \Psi_{sist} ^2$, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, $\omega_0 = 1.1$, $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, e $c_3 = 0$.	54
4.30	Precessão de pseudo-spin $\mathbf{S}$ para o caso estacionário.	56
4.31	Evolução do potencial linear externo, eq. (4.71), com $F_0 = 0.5$, $\omega_0 = 1$ e $m = 0.5$.	58
4.32	Precisão de $\mathbf{S}$ com $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\Omega = 0.5$, $m = (\omega_0^2 - 4\Omega^2)/\omega_0^2$.	60
4.33	Dinâmica das componentes de $\mathbf{S}$, eq. 4.73, com $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\Omega = 0.5$, $m = (\omega_0^2 - 4\Omega^2)/\omega_0^2$.	60
4.34	Trajetoira de $\langle z(t) \rangle$, eq. 4.75, e evolução de $\langle k(t) \rangle$, com $\Omega = 0.5$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\delta = 0$, e $c_2 = 0$.	60
4.35	Evolução de $\varphi_-(t)$, eq. 4.77, com $\Omega = 0.5$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\delta = 0$, e $c_3 = 0$.	60
4.36	Caso 1: Movimento periódico, onde $R(z) = [-0.4, 0.4]$, com $g = -7$, $\lambda = 0$.	61
4.37	Caso 1: Movimento periódico, onde $R(z) = [-0.5, 0.5]$, com $g = -7$, $\lambda = 0$, $\omega_0 = \gamma_0/2$.	61

4.38	Caso 1: Movimento quase-periódico, onde $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $\epsilon = 0.5$, $g = -5$, $\lambda = 0$, $\omega_0 = \gamma_0/2$	62
4.39	Caso 2: Consideramos $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $g = -5$, $\lambda = 0$, $\omega_0 = 1$	62
4.40	Caso 3: $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $g = -5$, $\lambda = 0$	63
4.41	Caso 4: Consideramos uma perturbação de $R(z)=[-0.09, 0.09]$, com $\Omega =$ 0.5 , $g = -10$, $\lambda = 10^{-4}$ e $\omega_0 \approx 1$	63
4.42	Caso 4: Consideramos uma perturbação de $R(z)=[-0.25, 0.25]$, com $\Omega =$ 0.5 , $g = -10$, $\lambda = 10^{-4}$ e $\omega_0 \approx 1$	63
6.1	Função de Mathieu para $a = 1$ e $q = 0$	67
6.2	Função de Mathieu para $a = 8$ e $q = 3$	68
6.3	Função de Mathieu para $a = 4$ e $q = 1$	68
6.4	Função dn (t, m) de Jacobi para $m = 0$, $m = 0.5$ e $m = 1$	69
6.5	Função cn (t, m) de Jacobi para $m = 0$, $m = 0.5$ e $m = 1$	69
6.6	Função sn (t, m) de Jacobi para $m = 0$, $m = 0.5$ e $m = 1$	69

Capítulo 1

Introdução

O estudo realizado por Bose no ano 1924 [1] sobre a radiação emitida pelo corpo negro na forma de quanta de energia (também chamada de fótons) levou-o para uma nova descoberta. No entanto, ele não tinha a credibilidade necessária para que suas idéias fossem levadas em conta, esse fato levou a Bose solicitar a ajuda de Albert Einstein, quem ampliou o estudo feito a partículas livres de spin inteiro (bósons) [2], obtendo como resultado o que hoje é conhecido como estatística de Bose-Einstein. Estes estudos teóricos previam um novo estado de agregação da matéria, atualmente conhecido como condensado de Bose-Einstein (BEC), no entanto, as limitações experimentais da época impediram sua verificação experimental, mas como novas técnicas de refrigeração estavam sendo projetadas, a expectativa e preocupação em obter esses condensados foi crescendo e muitos grupos de pesquisadores enfrentaram esse desafio com a intenção de serem os primeiros a alcançá-lo, sendo obtido no ano de 1995 pelos físicos C.E. Wieman, E.A. Cornell et al [3]. Ao mesmo tempo as bases teóricas foram desenvolvidas para descrever a dinâmica de um BEC, sendo que no ano de 1961 L. Pitaevskii e no ano de 1963 E. Gross conseguiram formular a agora conhecida equação de Gross-Pitaevskii, esta formulação emprega o foco da teoria de campo médio. Esta formulação matemática é o pilar fundamental para a descrição das ondas de matéria em BEC conhecidas como sólitons, sendo estes os objetos mais fundamentais na ciência não linear. Com a obtenção experimental de um BEC juntamente com a realização artificial da interação spin-órbita (SOC) em BEC, que levou a um intenso estudo teórico e experimental de suas propriedades. Atualmente, a realização experimental de um BEC de átomos de ^{87}Rb com estado hiperfino $f = 1$, na forma de charuto (quase-unidimensional) e com SOC [6] despertou um grande interesse experimental e teórico. O BEC quando submetido a um campo magnético, o qual origina um efeito Zeeman no estado hiperfino ($f = 1$) de seus constituintes, causando uma divisão do estado em seus três subestados hiperfinos ($m_f = \pm 1$ e $m_f = 0$). O BEC, quando submetido a uma irradiação de lasers do tipo Raman, os fótons de lasers conseguem excitar apenas dois subestados hiperfinos ($m_f = -1$ y $m_f = 0$) [7], a propagação destes subestados ocorre na forma de sóliton, tendo assim um sistema de dois níveis denominado pseudo-spin com uma densidade de pseudo-spin. Uma característica importante deste tipo de sistemas é a propriedade da magnetização [8], que é descrito pela equação de Bloch. Na presente dissertação, a dinâmica do BEC é descrita por duas equações de Gross-Pitaevskii acopladas. O estudo realizado é dividido em duas partes.

Em primeiro lugar, se analisa a dinâmica do BEC na ausência de interação spin-órbita, onde o potencial de armadilhamento outorga diversas propriedades para a dinâmica do BEC (precessão de pseudo-spin, desbalanço de pseudo-spin, sólitons não localizados, entre

outros), assim como diferentes tipos de oscilações, as quais são descritos pela equação de Mathieu, a equação do movimento harmônico forçado, entre outros.

Em segundo lugar, a dinâmica do BEC na presença de interação spin-órbita. Vamos começar essa análise com um breve desenvolvimento de estados estacionários, através da abordagem de ponto fixo [9] para então estudar o caso análogo ao anterior, caso livre e com potencial de armadilhamento, mostrando suas próprias dificuldades e propriedades.

A dinâmica de precessão de pseudo-spin obtida em ambos casos (com e sem interação spin-órbita) mostra independência do potencial de armadilha no caso de não-interação spin-órbita, sendo o contrário na presença da interação spin-órbita, já que com essa interação as equações mostram grande dificuldade em sua resolução devido à dependência do potencial. Para finalizar com a análise da estabilidade das soluções encontradas, onde a intensidade da não linearidade desempenha um papel importante.

O trabalho realizado nesta dissertação permitirá o estudo termodinâmico do sistema, através da função de partição [10], o estudo de texturas em um BEC, assim como aplicações em spintrônica.

Capítulo 2

Condensado de Bose-Einstein e Teoria do Campo Médio

No ano 1924, o físico Setyendra Nath Bose [1] usou os conceitos teóricos da mecânica estatística para explicar a radiação do corpo negro e no ano 1925 o físico Albert Einstein [2] estendeu o estudo para um gás de partículas livres, obtendo como resultado os fundamentos teóricos e a descoberta de um novo estado de agregação de matéria que acontece a temperaturas próximas ao zero ¹ absoluto e para certos átomos. Sob essas condições, os átomos perdem seu caráter corpuscular, manifestando suas propriedades de onda, nessas condições as ondas se sobrepõem, criando assim um único átomo (macro-átomo). No macro-átomo, seus constituintes são idênticos e indistinguíveis, isto é, possuem a mesma dinâmica e as mesmas propriedades físicas. Do ponto de vista da mecânica quântica, todos os átomos estão no estado fundamental.

Para determinar o estado de um sistema constituído por n -corpos interagentes é preciso conhecer a dinâmica de um corpo interagindo com os outros $(n - 1)$ -corpos, se a interação dos $(n - 1)$ -corpos é substituída por um potencial efetivo, o problema é reduzido à interação de um corpo com o potencial efetivo. A grande dificuldade é o tratamento de combinatória gerada pelos termos da interação da mecânica hamiltoniana quando se soma o conjunto dos estados. A teoria do campo médio ajuda a resolver esse problema de combinação.

Por outro lado, a teoria de campo médio estuda o comportamento de grandes e complexos modelos estocásticos a partir de um modelo mais simples. Os modelos complexos consideram um grande número de pequenos componentes individuais que interagem. O efeito sobre um pequeno componente devido a os outros é substituído pela interação com um potencial efetivo, transformando um problema de muitos corpos em um problema de um único corpo interagindo com o potencial efetivo.

A ideia da teoria de campo médio apareceu ² para resolver problemas que descrevem a dinâmica de sistemas composto por muitos corpos interagendo, sendo geralmente difícil de resolver com precisão, a não ser em casos simples, por exemplo o modelo de Ising em uma dimensão.

2.1 Condensado de Bose-Einstein

O trabalho que deu origem ao que agora se conhece como “condensação de Bose-Einstein” [1] tem como ponto de partida a descrição estatística da radiação de corpo negro,

¹O processo para obter um BEC começa confinando os átomos, para depois serem resfriados.

²No trabalho de Pierre Curie [11] e Pierre Weiss para descrever transições de fase [12].

ao aplicar as ideias da mecânica estatística aos quanta de luz [2] expandindo o tratamento a um sistema de partículas livres, mostrando que em temperaturas suficientemente baixas, acontece a condensação do sistema.

2.1.1 Ideias básicas do processo de condensação

Nesta seção vamos expor a transição de um gás de bósons livres a um BEC. Começamos a definir o emsemble grande canônico para um gás de Bose [13]

$$\Xi = \Xi(T, V, \mu) = \prod_j \left\{ \sum_n e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)n} \right\} = \sum_j \left\{ \sum_n e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)n} \right\}, \quad (2.1)$$

em um condensado, todas as partículas ocupam o estado fundamental, por isso calcularemos o valor esperado do número de partículas

$$\langle n_j \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} \ln \Xi. \quad (2.2)$$

Na estatística de Bose-Einstein, a somatória na Eq. (2.1) é realizada de 0 até infinito como

$$\begin{aligned} S &= \sum_n e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)n} = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} + e^{-2\beta(\varepsilon_j - \mu)} + e^{-3\beta(\varepsilon_j - \mu)} + \dots, \\ S &= 1 + e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} [1 + e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} + e^{-2\beta(\varepsilon_j - \mu)} + \dots], \\ S &= 1 + S e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)}, \\ S &= \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_j - \mu)]}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Desde que os termos do somatório (2.3) são positivos, o resultado tem que ser positivo. Portanto, temos que $e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} < 1$. Se consideramos que o menor valor de ε_j , é zero, temos que $e^{\beta\mu} < 1$, portanto, inferimos que o potencial químico é negativo. Substituindo as eqs. (2.1) e (2.3) na eq. (2.2) temos

$$\begin{aligned} \langle n_j \rangle &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} \ln \left[\left\{ [1 - e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)}]^{-1} \right\} \right], \\ \langle n_j \rangle &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} \ln \{1 - e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)}\} \right] = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - 1}, \\ \langle n_j \rangle &= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - 1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

de esta última equação podemos deduzir que a relação $e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} > 1$, está conforme com a condição física $\langle n_j \rangle \geq 0$, para um orbital ou estado qualquer. Portanto, o número de partículas e a energia interna do sistema são:

$$N = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - 1}, \quad (2.5)$$

$$U = \sum_j \varepsilon_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - 1}. \quad (2.6)$$

No contexto quântico, a medida que a temperatura cai, o potencial químico μ também cai a zero, e assim, acontece um fenômeno chamado *condensação de Bose Einstein*. Para estudar a condensação de Bose-Einstein, partimos da Eq. (2.5), no limite clássico

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \ln \left(\frac{N}{V} \right) - \frac{3}{2} \ln T, \quad (2.7)$$

com $\gamma = 2S + 1$, sendo a multiplicidade do spin. Da eq. (2.7) podemos deduzir que para densidades fixas e temperaturas o suficientemente altas, o potencial químico é negativo. Da figura 2.1, podemos inferir que, para temperaturas altas o potencial químico μ (do sistema de partículas) possui o mesmo comportamento. Porém, se a temperatura começa a diminuir, observa-se comportamentos diferentes. Podemos observar na curva de bósons o potencial químico alcança o limite $\{\mu \rightarrow 0^-\}$ para uma determinada temperatura T_0 , e mantém o valor zero para $T \leq T_0$.

A temperatura T_0 é calculada fazendo $\mu = 0$ na Eq. (2.5) e aplicando o limite termodinâmico, que consiste em considerar os valores do número de partículas N , volume V muito grandes, mantendo a densidade $\rho = N/V$ constante. Nesse caso, a somatória se transforma em uma integral: $\sum_j \rightarrow \frac{V\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}$ e também $\varepsilon_j = (\hbar^2 k^2)/2m \rightarrow k^2 = (2m\varepsilon_j)/\hbar^2$

$$N = \frac{V\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d^3\vec{k}}{e^{\beta_0\varepsilon} - 1},$$

onde $d^3\vec{k} = k^2 dk d\theta d\phi$

$$N = \frac{V\gamma}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{\beta_0\varepsilon} - 1} \frac{m}{\hbar^2 k} d\varepsilon,$$

$$N = \frac{V\gamma}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta_0\varepsilon} - 1} d\varepsilon,$$

$$N = \frac{V\gamma C}{\beta_0^{3/2}} \int_0^\infty \frac{(\beta_0\varepsilon)^{1/2}}{e^{\beta_0\varepsilon} - 1} (\beta_0 d\varepsilon), \quad (2.8)$$

com $C = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2}$. Fazemos uso do seguinte resultado

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

sendo $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ a função gamma e $\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$ a função Zeta de Riemann na Eq. (2.8) teremos

$$T_0 = \frac{1}{k_B} \left[\frac{V\gamma C}{N} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \right]^{-2/3}. \quad (2.9)$$

A última equação é conhecida como a *temperatura de Bose-Einstein*. Para temperaturas abaixo de T_0 , os gases de bósons livres tem características que historicamente foram associadas ao Helio líquido.

Com as expressões encontradas, ter uma ideia das condições físicas para atingir um BEC. O primeiro que se deve fazer para obter um BEC é diminuir a temperatura do gás de bósons empregado na condensação, o sistema deve ser confinado, as complicações estão

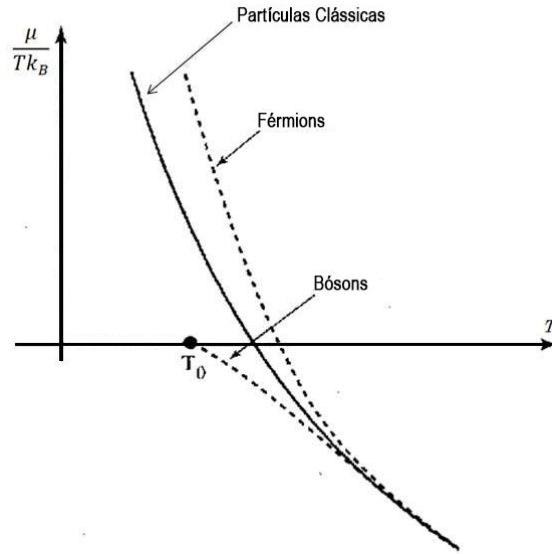


Figura 2.1: Curva de potencial químico μ vs a temperatura T para bósons e férmions livres [13].

em coletar opticamente tais átomos em uma quantidade razoável e que eles tenham um tempo de vida também razoável na armadilha magnética.

Esta dissertação é orientada para descrever a dinâmica de sólitons em BEC com SOC, para alcançar um BEC com interação spin-órbita. O primeiro a entender é o conceito de armadilha óptica magnética ou também chamada *Magneto-Optical Trap* (MOT).

2.1.2 Armadilha óptica magnética

Este tipo de armadilha é o ponto de partida para muitos experimentos com BEC, com sistemas atômicos alcalinos, como é o caso de *Rb*. Essa armadilha que serve para confinar e esfriar os bósons foi demonstrado pela primeira vez em 1987 [14]. Devido ao campo magnético que armadilha, se cria um pequeno vácuo, quase perfeito, o que garante o isolamento dos átomos, do médio exterior e das possíveis interações com as partículas externas. Uma vez formado o vácuo no interior do recipiente é introduzido uma amostra de gás de *Rb* (o átomo de *Rb* se comporta “globalmente” como uma partícula bosônica, já que há um acoplamento entre o spin do núcleo e os elétrons, o que dá um múltiplo inteiro do spin), este tipo de armadilha tem a capacidade de confinar bilhões de átomos. Posteriormente, o resfriamento dos átomos é produzido utilizando duas técnicas: resfriamento e isolamento por lasers e por evaporação através da armadilha magnética. Para a primeira técnica, é necessário que os bósons estejam no ponto de convergência dos lasers, isso produz uma diminuição na temperatura do sistema. A frequência dos lasers é escolhida de maneira que quando um átomo se aproxima a um fóton, o átomo absorve e emite radiação, mas os átomos que estão se afastando deixam passar a radiação. Isso se pode observar na figura 2.2.

A segunda técnica é usar os campos magnéticos para separar os átomos ainda quentes dos frios. Esse procedimento acontece já que os campos magnéticos puxam para fora aos átomos mais quentes, permitindo que aqueles com maior energia escapem do potencial que tem forma de poço, que pode ser observado na figura 2.3.

Observando-se como os átomos de maior energia são puxados para fora, e apenas ficam os átomos de pouca energia, confinando todos os átomos restantes no estado de menor

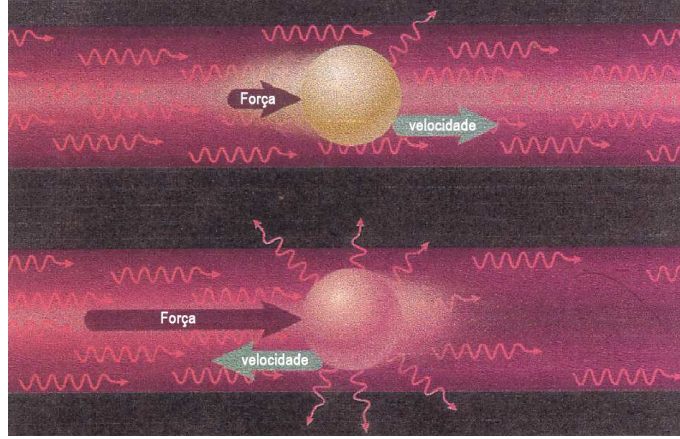


Figura 2.2: Interação dos fótons de lasers e bósons [15]

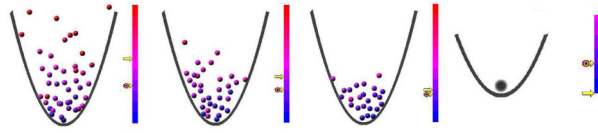


Figura 2.3: Ação da armadilha magnética depois de desligar os lasers [15]

energia.

Depois de ter as ideias do processo de refrigeração, vamos observar um esquema simplificado de uma armadilha óptica magnética, na figura 2.4.

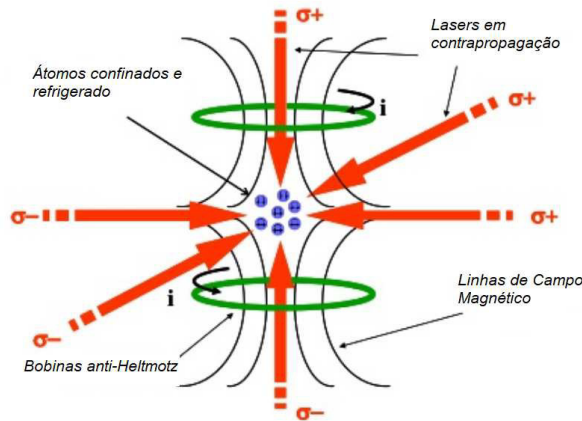


Figura 2.4: Esquema básico de Armadilha Óptica Magnética [16]

No esquema, é observado como o campo magnético das bobinas anti-Helmholtz ³, são as que confinam as partículas que se deseja esfriar, para depois através de lasers em contra propagação de polarização circular ⁴ σ_+ e σ_- , eles criam o melaço óptico, onde os átomo perdem energia cinética e forma o BEC.

Vamos dar uma breve explicação do arranjo experimental mostrado na Figura 2.5 para obter um BEC unidimensional com a interação spin-órbita.

Depois de obter o BEC, através dos campos magnéticos é possível dar uma certa forma.

³Assim chamadas porque as correntes circulam em direções opostas.

⁴A polarização circular é uma onda eletromagnética onde o campo elétrico da onda de passo não cambia a força, se não só de direção, a qual é rotativa.

No modelo em estudo, a intensidade do campo magnético nos eixos x-y é muito mais forte que no eixo z, gerando uma forma de charuto com propriedades anisotrópicas. Os campos magnéticos geram um efeito Zeeman, os lasers Raman excitam dois estados hiperfinos ($|1, -1\rangle = |\uparrow\rangle$ e $|1, 0\rangle = |\downarrow\rangle$), criando assim uma interação spin-órbita artificial [17].

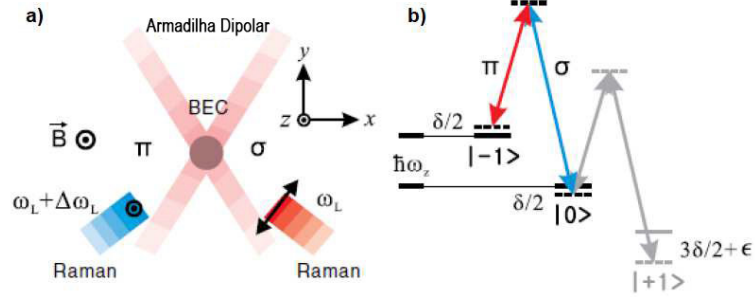


Figura 2.5: Armadilha do modelo e efeito Zeeman pra estrutura hiperfina [17]

A eficiência de um MOT, consiste na ação simultânea de dois mecanismos, explicados a continuação.

1.- Resfriamento Doppler em uma armadilha óptica magnética (MOT)

A intensidade do campo magnético da bobina anti-Helmholtz não é suficiente para conter os átomos em sua totalidade. Os átomos ao redor do centro do MOT interagem com o campo magnético (se encontram sobre a influência do campo magnético), fazendo um desdobramento dos níveis de energia, o que aumenta a probabilidade de absorver fótons mesmo tempo os fótons levam um momento angular devido a sua polarização circular. Para uma melhor ideia, apresentamos a figura 2.6.

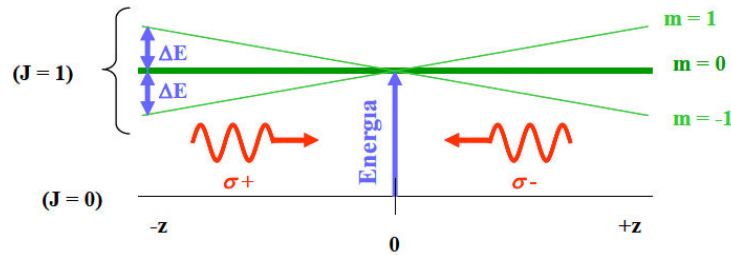


Figura 2.6: Modelo unidimensional do efeito Zeemann num MOT [16]

Quanto mais afastado do centro do MOT, o efeito Zeemann é mais forte (dado que o campo magnético aumenta sua intensidade $\Delta E = \mu B m$). Agora, vamos fazer uma pequena explicação do processo. Para o lado direito ($+z$), próximo do centro o átomo, há mais probabilidade de absorver um fóton com polarização σ_- , que um fóton de polarização σ_+ , pelo qual é excitado o subnível $m = -1$. O mesmo raciocínio para o lado $-z$. No processo de colisão entre fótons e bósons, os fótons diminuem a velocidade dos bósons, empurrando-os para o centro do MOT. Para que esse tipo de interação seja possível, a frequência dos fótons deve ser adequada, por isso é chamado de resfriamento Doppler.

2.- Melaço Óptico

Este processo é mais fácil de explicar, os fótons dos laser criam um médio “viscoso” no ponto de convergência, o que faz que os átomos perdam velocidade, e assim é factível

diminuir a temperatura do sistema. A figura 2.7 mostra um melaço óptico

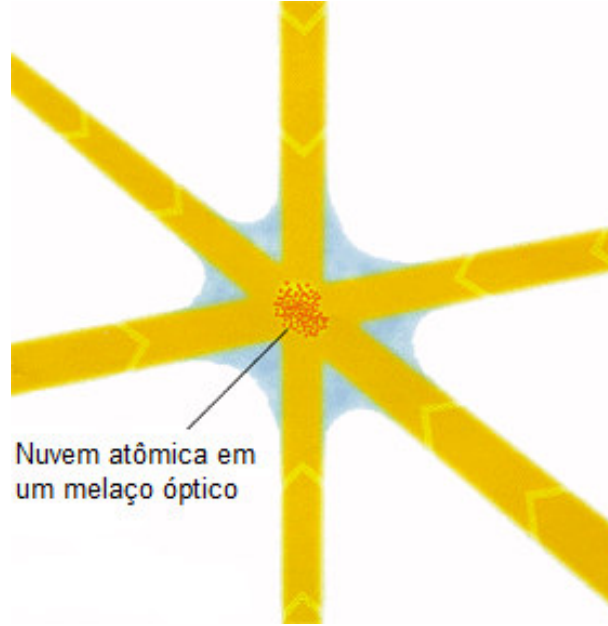


Figura 2.7: Melaço óptico [18]

2.1.3 Acoplamento spin-órbita

Uma partícula carregada (elétron) movendo-se através de um campo elétrico uniforme, percebe um campo magnético relativo a seu movimento, esse campo magnético $\vec{B}$ relativo interage com o spin $\vec{S}$ do elétron, o que fornece a interação spin-órbita. Essa interação é formalmente observada na equação de Pauli [19]. A forma hamiltoniana dessa interação é dada por

$$\hat{H}_{so} = \frac{qg}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B} \quad (2.10)$$

onde q é a carga da partícula, m é a massa da partícula e g o fator giromagnético.

2.1.4 Interação Rashba-Dresselhaus

A interação Rashba-Dresselhaus [20] vêm do estudo de semicondutores, já que a estrutura cristalina fornece uma contribuição adicional ao campo magnético, gerando uma interação spin-órbita diferente do acoplamento spin-órbita mencionada acima. No caso de gases confinados, o potencial eletromagnético (que para o nosso modelo é fornecido pelos lasers Raman) é aquele que fornece esse tipo de interação, e nesse caso é chamado interação Rashba-Dresselhaus. A interação Rashba-Dresselhaus para sistemas de gás condensado é definida pela seguinte Hamiltoniana [21]

$$H_{RD} \propto \frac{\kappa}{m} (\sigma_x p_x + \eta \sigma_y p_y) \quad (2.11)$$

onde κ é a constante de acoplamento, m a massa atômica, σ_x e σ_y as matrizes de Pauli, além de $\eta = 0, 1$ que mede a anisotropia da interação, assim temos que para $\eta = 0$ se tem uma interação Rashba-Dresselhaus e para $\eta = 1$ se tem uma interação puramente de Rashba.

A diferença entre as interações de Rashba-Dresselhaus e a interação usual de spin-órbita é que a interação de Rashba-Dresselhaus acopla o spin ao movimento do centro de massa [22], sendo esta característica de crucial importância nesta dissertação.

2.1.5 Interação Raman

Quando um fóton colide, na maioria das vezes é uma colisão elástica, sendo este chamado colisão de Rayleigh, entretanto, para certas condições há uma colisão inelástica, esse tipo de colisão é conhecido como colisão Raman ou interação Raman. A característica de ser uma colisão inelástica, fornece diferentes propriedades ao sistema em estudo, como pode ser visto neste caso, esse tipo de colisão Raman é o que gera a interação spin-órbita.

2.1.6 Ressonância Feshbach

As interações atômicas, as quais se manifestam por colisões, emitem energia, e essa energia é caracterizada por um comprimento de onda, que é chamado comprimento de onda a , esse parâmetro está relacionado às não-linearidades que aparecem na equação de Gross-Pitaevskii e eles podem ter valores positivos ou negativos, dependendo do comprimento de onda a da onda espalhada, a qual pode ser $a > 0$ (como por exemplo no condensados de Rubídio ou Sódio) ou $a < 0$ (como por exemplo no condensando de Lítio). Sendo para $a > 0$ uma repulsão e para $a < 0$ uma atração entre os bósons. É possível controlar experimentalmente a interação interatômica, mudando a dinâmica das colisões, e portanto, a sinal de “ a ” ou até a sua magnitude. Isso é possível pela aplicação de um campo magnético B externo ao BEC, o qual pode modular o comprimento de onda espalhada, sendo este procedimento conhecido como ressonância Feshbach. O comportamento de a é determinado pela seguinte expressão

$$a(B) = \tilde{a} \left[1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right], \quad (2.12)$$

sendo, $\tilde{a}$ uma constante e ΔB a largura da ressonância. A figura 2.8 mostra o comportamento do parâmetro $a(B)$.

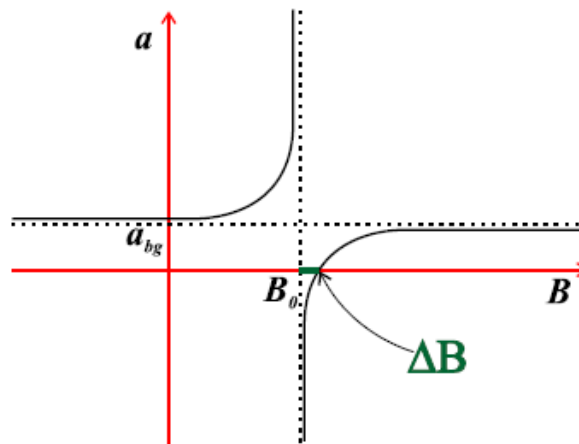


Figura 2.8: Dependência do comprimento de onda da onda espalhada com respecto o campo magnético externo [23]

A possibilidade de controlar as interações e as propriedades das colisões atômicas foi de muita importância para uma variedade de descobertas experimentais, como os sólitons brilhantes, a formação de BEC moleculares entre outros.

2.2 Teoria do Campo Médio TCM

A física de partículas com interações tem muitas complicações por que os movimentos das partículas individuais depende da interação com as outras partículas, ou em outras palavras, o movimento das partículas está em função de seu entorno, sendo este, outras partículas. Por exemplo, para um sistema de partículas eletricamente carregadas, as quais, conseguem interagir por meio das forças de Coulomb, como em um gás de elétrons. Nesse caso, a probabilidade de encontrar dois elétrons muito próximos um em relação ao outro é pequena devido às forças de interação repulsiva. Consequentemente, devido às interações entre as partículas, a posição de uma está em função das outras, há uma densidade suprimida na vizinhança de cada elétron, então, se diz que se tem um buraco.

Porém, apesar desse complicado problema, existem um número de casos onde o tratamento do problema não inclui completamente essas relações, onde se pode obter um bom modelo físico. Nesses casos, é suficiente considerar as “interações promédias”, o que fisicamente significa que o efeito das outras partículas estão incluídos como uma densidade média, ou *campo médio*, deixando o problema como se fosse apenas uma partícula interagindo com um potencial efetivo o que se explica na Figura 2.9

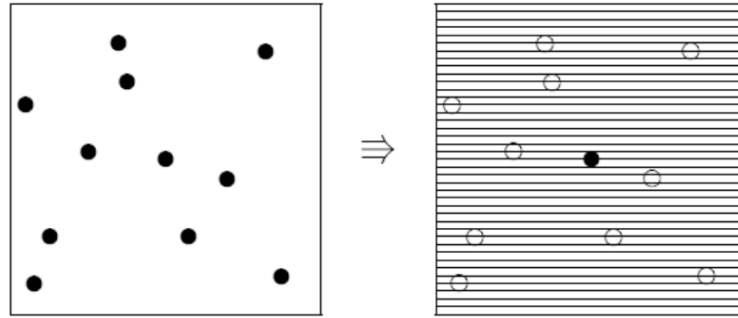


Figura 2.9: Na figura à esquerda, podemos observar N partículas interagindo umas com outras e na figura à direita, podemos observar uma partícula interagindo com um potencial efetivo. Sendo esta a ideia central da teoria do campo médio [24].

Assim, os campos médios são escolhidos adequadamente como aqueles que minimizam a energia livre de Gibbs, para assegurar que o método seja consistente. Esta aproximação é chamada de “*Teoria do Campo Médio*”

2.2.1 Conceitos básicos da TCM

Na literatura, existem vários exemplos da validade física do método de *Campo Médio*, e sua capacidade para explicar diversos fenômenos físicos. Então a estrutura matemática desta teoria será mostrada.

Consideramos o caso mais simples, que é composto de um sistema de duas partículas a e b , as quais são descritas pelos operadores $\hat{a}_\nu \equiv a_\nu$ e $\hat{b}_\mu \equiv b_\mu$, respectivamente. Vamos supor que somente importam as interações entre diferentes estados. A Hamiltoniana é da forma

$$H = H_0 + V_{int}, \quad (2.13)$$

onde

$$H_0 = \sum_{\nu} \xi_{\nu}^a a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + \sum_{\mu} \xi_{\mu}^b b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu}, \quad (2.14)$$

$$V_{int} = \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} a_{\nu}^{\dagger} b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} a_{\nu'}, \quad (2.15)$$

com ξ sendo a constante de expansão associada ao estado correspondente. A eq. (2.14) é a Hamiltoniana livre e a eq. (2.15) é o potencial de interação. Os operadores de densidade $a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'}$ e $b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'}$ têm um pequeno desvio ($\ll 1$) em relação aos seus valores esperados ($\langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle$ e $\langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle$). Por esta razão, vamos definir os operadores de desvio

$$d_{\nu\nu'} = a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} - \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle, \quad (2.16)$$

$$e_{\mu\mu'} = b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} - \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle. \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.17) no potencial de interação (2.15), teremos

$$\begin{aligned} V_{int} &= \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} a_{\nu}^{\dagger} [e_{\mu\mu'} + \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle] a_{\nu'}, \\ V_{int} &= \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} e_{\mu\mu'} + \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle, \\ V_{int} &= \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} d_{\nu\nu'} e_{\mu\mu'} + \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} e_{\mu\mu'} \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle \\ &\quad + \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle, \\ V_{int} &= \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} [a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle + b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle] - \\ &\quad \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle + \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} d_{\nu\nu'} e_{\mu\mu'}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

já que os desvios são muito pequenos ($\ll 1$), o último termo da equação (2.18) pode ser desprezado em uma aproximação de primeira ordem, sendo esta uma consequência da *teoria de campo médio*. Portanto, o Hamiltoniano é da seguinte forma

$$H_{MF} = H_0 + V_{MF}, \quad (2.19)$$

onde o potencial de interação agora tem a seguinte forma

$$V_{MF} = \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} [a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle + b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle] - \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle \langle b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu'} \rangle, \quad (2.20)$$

(2.20) é o potencial do campo médio (já que é um potencial obtido a partir de uma aproximação) onde o subscrito se refere ao seu nome em inglês (Mean Field).

A Hamiltoniana da equação (2.19), contém operadores de uma única partícula (não há produtos misturados), e assim o problema original (um problema de muitos corpos), foi reduzido a um problema de uma única partícula, que em princípio tem solução.

A partir da eq. (2.20), podemos formular o procedimento para a aproximação de campo médio de uma forma diferente: Para uma interação que pode ser expressa como o produto de dois operadores $\hat{A} \equiv A$ e $\hat{B} \equiv B$

$$H_{AB} = A \cdot B, \quad (2.21)$$

a aproximação de campo médio consiste em acoplar os dois operadores através de seus valores esperados ($\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$), isto é

$$H_{AB}^{MF} = A \langle B \rangle + B \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle, \quad (2.22)$$

na eq. (2.22) o valor esperado é calculado, obtendo a seguinte expressão

$$\langle H_{AB}^{MF} \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (2.23)$$

Agora o problema está em como encontrar os valores promédios de $\langle a_\nu^\dagger a_{\nu'} \rangle$ e $\langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle$. Para isso, têm-se dois métodos equivalentes. O primeiro método é calculando os valores promédios de forma auto-consistente, isto é, calculando os valores promédios de $\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a$ e $\bar{\eta}_{\mu\mu'}^b$ como

$$\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a = \langle a_\nu^\dagger a_{\nu'} \rangle, \quad (2.24)$$

$$\bar{\eta}_{\mu\mu'}^b = \langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle, \quad (2.25)$$

usando a eq. (2.19), obtemos as mesmas expressões, o que significa que para $\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a$ (analogamente para $\bar{\eta}_{\mu\mu'}^b$), temos

$$\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a = \langle a_\nu^\dagger a_{\nu'} \rangle_{MF} = \frac{1}{Z_{MF}} \text{Tr} [e^{-\beta H_{MF}} \cdot a_\nu^\dagger a_{\nu'}], \quad (2.26)$$

onde $Z_{MF} = \text{Tr} [e^{-\beta H_{MF}}]$, sendo esta expressão a chamada *função de partição do campo médio*. A eq. (2.26) é uma *equação auto-consistente* de $\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a$ e analogamente é possível obter uma *equação auto-consistente* de $\bar{\eta}_{\mu\mu'}^b$.

O segundo método é minimizar a energia livre de Helmholtz F_{MF}

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a} F_{MF} = \frac{d}{d\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a} \left[-\frac{1}{\beta} \ln Z_{MF} \right], \\ 0 &= \frac{1}{Z_{MF}} \frac{dZ_{MF}}{d\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a} = \frac{1}{Z_{MF}} \text{Tr} \left[e^{-\beta H_{MF}} \frac{d}{d\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a} (H_{MF}) \right], \\ 0 &= \frac{1}{Z_{MF}} \text{Tr} \left[e^{-\beta H_{MF}} \left(\sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} (b_\mu^\dagger b_{\mu'} - \langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle) \right) \right], \\ 0 &= \sum_{\nu\nu', \mu\mu'} V_{\nu\mu, \nu'\mu'} (b_\mu^\dagger b_{\mu'} - \langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle), \end{aligned}$$

$$0 = \sum_{\nu\nu',\mu\mu'} V_{\nu\mu,\nu'\mu'} \left(\langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle_{MF} - \bar{\eta}_{\mu\mu'}^b \right). \quad (2.27)$$

Para qualquer valor de (ν, ν') a igualdade é satisfeita, obtendo assim uma *equação auto-consistente* de $\bar{\eta}_{\mu\mu'}^b$ e analogamente é possível obter uma *equação auto-consistente* de $\bar{\eta}_{\nu\nu'}^a$.

Pode-se adquirir um melhor entendimento da física da aproximação de campo médio se analisarmos o termo de energia de interação $\langle V_{int} \rangle$. Da eq. (2.20), temos

$$\langle V_{int} \rangle \approx \sum_{\nu\nu',\mu\mu'} V_{\nu\mu,\nu'\mu'} \langle a_\nu^\dagger a_{\nu'} \rangle \langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle. \quad (2.28)$$

A eq. (2.28) é equivalente a supor que as partículas a e b não têm relação direta. Sendo isso, a ideia central, da aproximação feita no enfoque do campo médio. Por isso fazemos a avaliação de $\langle V_{int} \rangle$ usando a Hamiltoniana de campo médio

$$\langle V_{int} \rangle_{MF} = \frac{1}{Z_{MF}} \text{Tr} \left[e^{-\beta H_{MF}} V_{int} \right]. \quad (2.29)$$

O Hamiltoniano de campo médio pode ser separado em duas partes, uma dependendo de a e a outra em b

$$H_{MF} = H_{MF}^a + H_{MF}^b. \quad (2.30)$$

O fator médio se fatoriza exatamente como na eq. (2.15) obtendo

$$\langle V_{int} \rangle_{MF} = \sum_{\nu\nu',\mu\mu'} V_{\nu\mu,\nu'\mu'} \langle a_\nu^\dagger a_{\nu'} \rangle_{MF} \langle b_\mu^\dagger b_{\mu'} \rangle_{MF}. \quad (2.31)$$

O enfoque de campo médio, portanto, proporciona um método fisicamente consistente para estudar sistemas interagendo onde a interação pode ser substituída por um potencial efetivo.

Devido à complexidade dos sistemas físicos, devemos escolher condições, com o objetivo de eliminar tais complexidades. Às vezes, argumentos de simetria podem ser usados com a finalidade de simplificar o problema. Por exemplo, se o Hamiltoniana onde se está trabalhando tem invariância translacional, então o espaço de momento é uma escolha natural.

Agora, para um sistema de partículas que são descritas pelos operadores c e $c^\dagger$ temos que o valor esperado é

$$\langle c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{1}{V} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle, \quad (2.32)$$

assumindo um sistema homogêneo, temos

$$\langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}') \rangle = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.33)$$

Substituindo a eq. (2.33) na equação (2.32), temos

$$\langle c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (2.34)$$

2.3 Equação de Gross-Pitaevskii

No ano 1961 L. Pitaevskii [4], e no ano 1963 E. Gross [5], utilizam a teoria de campo médio e o parâmetro de ordem usado por L. Landau [25] para descrever a dinâmica de um gás condensado, obtendo como resultado a equação que agora leva seus nomes. O parâmetro de ordem cumpre com a seguinte condição

$$\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = N, \quad (2.35)$$

a qual é uma quantidade conservada, que em condensado representa o número de partículas. As propostas de Gross e Pitaevskii, as quais foram criados de forma independente, é a de descrever a evolução da função de onda macroscópica $\Psi(\mathbf{r}, t)$ por uma equação que leva seus nomes. A seguir se fará uma breve demonstração da equação de Gross-Pitaevskii.

A Hamiltoniana para um sistema de muitos corpos, descrevendo N bósons interagindo, confinados num potencial externo $V_{ext}(\mathbf{r})$, é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}) \\ & + \int d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t) \Psi^\dagger(\mathbf{r}'', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}'', t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $\Psi^\dagger(\mathbf{r})$ e $\Psi(\mathbf{r})$, representam os operadores de campo de criação e destruição de bóson respectivamente, $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é o potencial de interação de dois corpos e $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ o potencial de interação de três corpos. Adotando uma aproximação de campo médio bem comportada, usamos a decomposição para o operador de campo $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi'(\mathbf{r}, t) + \langle \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle$, onde $\langle \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle$ é o valor esperado do campo e nessa expressão é o parâmetro de ordem, que é geralmente conhecido como *função de onda macroscópica do BEC*. O termo $\Psi'(\mathbf{r}, t)$, representa a parte não condensada, que é negligenciada. Da equação de Heisenberg $i\hbar(\partial\Psi/\partial t) = [\Psi, \hat{H}]$, se obtém:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = & \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}, t) \right. \\ & \left. + \int d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t) \Psi^\dagger(\mathbf{r}'', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \Psi(\mathbf{r}'', t) \Psi(\mathbf{r}', t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Logo, simplificamos os potenciais de interação interatômica, $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ os quais podem depender do tempo. Devido às interações interatômicas, os potenciais $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ podem ser expresos da seguinte forma $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ e $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = f\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$, onde g representa a interação de dois corpos e f de três corpos. Então, usando os potenciais tipo delta e substituindo o operador de campo pelo operador de campo clássico ($\Psi(\mathbf{r}, t)$) na equação (2.37), temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}, t) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + f |\Psi(\mathbf{r}, t)|^4 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.38)$$

A função complexa da eq. (2.38), pode ser decomposta em termos da densidade $n(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, e fase $S(\mathbf{r}, t)$ do BEC, isto é $\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)}$. Tendo atenção especial, no termo da fase, já que ela fixa a velocidade atômica da seguinte maneira: Da

densidade de corrente $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$, onde o símbolo $*$ denota a conjugada complexa e da forma de hidrodinâmica $\mathbf{j} = n(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, calcula-se

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \\ \mathbf{j} &= \frac{\hbar}{2mi} \left[\sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{-iS(\mathbf{r}, t)} \nabla \left(\sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)} \nabla \left(\sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{-iS(\mathbf{r}, t)} \right) \right], \\ \mathbf{j} &= \frac{\hbar}{m} n(\mathbf{r}, t) \nabla S(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Então, da eq. (2.39) se obtém a expressão para a velocidade atômica $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t)$. Essa expressão indica que a velocidade é irrotacional, isto é $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$, o que é uma característica dos superfluidos.

Outra maneira de expressar a equação de Gross-Pitaevskii é através do funcional $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\delta E}{\delta \Psi^*}$, sendo uma quantidade conservada

$$E = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + V_{ext} |\Psi|^2 + g |\Psi|^4 + f |\Psi|^6 \right], \quad (2.40)$$

os quatro termos representam a energia cinética, o potencial e a energias de interação de dois e três corpos respectivamente. As eqs. (2.35) e (2.40) mostram que a equação de Gross-Pitaevskii tem duas integrais de movimento que são o número de átomos N e a energia do sistema E (isso é, sendo o potencial V_{ext} independente do tempo). A equação (2.38) também é chamada equação de Schrödinger não linear com não linearidade cúbica-quintica [26].

2.4 Redução de Dimensões

O potencial externo da equação de Gross-Pitaevskii pode ser de muitas formas, sua forma definirá a forma que adota o BEC. Em particular, os primeiros experimentos de BEC estavam confinados em campos magnéticos, e depois foi possível seu confinamento mediante armadilhas puramente ópticas, sendo este realizado no ano 1998, onde o BEC foi primeiro obtido em uma armadilha magnética e depois levado a uma armadilha puramente óptica. Todavia, no ano 2001, foi mostrado que é possível criar e confinar diretamente um BEC em uma armadilha óptica. No caso de armadilhas magnéticas, o potencial externo tem a seguinte forma:

$$V_{MT}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (2.41)$$

Geralmente, as frequências dos osciladores harmônicos ω_x , ω_y e ω_z os quais, estão ao longo das três direções espaciais, são diferentes. As formas que o BEC pode adotar são isotrópicas assim como anisotrópicas, por exemplo para $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r \approx \omega_z$ ele adota uma forma isotrópica esférica, para $\omega_z < \omega_r$ ou $\omega_r < \omega_z$ tem uma forma anisotrópica e alongada. Em especial, os casos fortemente anisotrópicas ($\omega_z \ll \omega_r$ ou $\omega_r \ll \omega_z$), são de interesse especial, já que estão ligados a BEC de baixas dimensões, denominados quase unidimensional (1D) e quase bidimensional (2D), respectivamente.

2.4.1 Redução a uma dimensão

Para reduzir as dimensões da equação de Gross-Pitaevskii de $3D$ para uma equação de $1D$, as frequências devem cumprir com a seguinte relação: $\omega_z \ll \omega_r$ (onde $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$) assim o confinamento transversal (ω_r) do condensado é tão forte que a forma que o BEC adota é de charuto, sendo considerado uma quase dimensão efetiva. Essa relação permite reduzir as dimensões da equação de Gross-Pitaevskii.

Nessa configuração, a função de onda macroscópica separa-se em uma parte transversal (no plano $x - y$, onde $r^2 = x^2 + y^2$) e uma longitudinal (no eixo z), então a função de onda macroscópica é expresso como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(z, t) \Phi(r) e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (2.42)$$

considerando uma armadilha fortemente anisotrópico $\omega_z \ll \omega_\perp \equiv \omega_x = \omega_y$, o potencial externo é reduzido à seguinte expressão

$$V_{ext}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2, \quad (2.43)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$, $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ com o potencial químico μ e a função de onda transversal $\Phi(r)$. Então, substituindo (2.42) e (2.43) na eq. (2.38), temos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_\perp^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \\ \frac{1}{\Phi(r)} \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_\perp^2 - \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 \right) \Phi(r) + \mu \Phi(r) \right] &= \\ \frac{1}{\psi(z, t)} \left\{ -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) \right] + \left[\frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + g |\psi(z, t)|^2 |\Phi(r)|^2 \right] \psi(z, t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Note que na eq (2.44), tem uma solução simples, quando cada lado da igualdade é zero, o lado esquerdo tem a forma de um oscilador e devido ao processo de condensação é correto assumir que ele está no estado mínimo de energia, obtendo assim a seguinte equação

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_\perp^2 - \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 + \mu \right] \Phi(r) = 0. \quad (2.45)$$

a função $\Phi(r)$ como já foi mencionado esta envolvido em um problema para o oscilador harmônico transversal (2.45) com solução $\Phi(r) = \pi^{-1/2} a_r^{-1} e^{-r^2/2a_r^2}$, e seu valor médio

$$\int |\Phi(r)|^2 dr = \pi^{-1} a_r^{-2} \int_0^\infty e^{-r^2/a_r^2} dr = \frac{1}{2a_r \sqrt{\pi}},$$

este valor é substituído no valor de $|\Phi(r)|^2$ do termo do lado direito da eq. (2.44)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + g |\psi(z, t)|^2 |\Phi(r)|^2 \right] \psi(z, t),$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{g}{2a_r \sqrt{\pi}} |\psi(z, t)|^2 \right] \psi(z, t),$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + \tilde{g} |\psi(z, t)|^2 \right] \psi(z, t), \quad (2.46)$$

a eq. (2.46) é a equação de Gross-Pitaevskii unidimensional. Na próxima seção, serão apresentadas soluções analíticas para o caso de $\tilde{g}$ constante, já que esse parâmetro pode variar com o tempo e o espaço.

2.5 A equação de Gross-Pitaevskii com os termos da interação spin-órbita

Nesta seção vamos explicar a influência da interação spin-órbita na teoria de campo médio. Mostraremos como o termo que estabelece a interação spin-órbita aparece na equação de Gross-Pitaevskii. Para alcançar nosso objetivo empregamos a referência [31].

2.5.1 Hamiltoniana de interação spin-órbita

Matematicamente, a ideia básica para descrever um sistema com interação spin-órbita é empregar dois espaços vetoriais de Hilbert, um espaço vetorial complexo bidimensional que descreve o spin-1/2 e outro espaço de dimensão infinita, que descreve o momento linear. O espaço resultante, pode ser expresso através de uma base de seu spin ao longo do eixo z e por seu momento linear. Por meio de este espaço resultante, a Hamiltoniana da interação spin-órbita para uma única partícula [32] [33], pode ser expressa por

$$H_{SOC} = \frac{\left(p - \frac{p_0}{2} \sigma_z\right)^2}{2m} + \beta \frac{\hbar}{2} \sigma_x + \delta_0 \frac{\hbar}{2} \sigma_z, \quad (2.47)$$

onde β é a intensidade de mistura de estados, δ_0 é a intensidade do efeito Zeeman e p_0 é a mudança no momento linear devido ao espalhamento Raman estimulado. Também, a eq.(2.47) expressa a relação de dispersão gerada pela interação spin-órbita.

2.5.2 Relação de dispersão

A relação de dispersão é influenciada pelos termos β e δ_0 , mostrando diferentes comportamentos para diferentes valores deles. Em seguida, vamos analisar dois casos de interesse

1.- Limite de $\beta \rightarrow 0$ e $\delta_0 = 0$

Neste caso, caso, a eq. (2.47) adquire a seguinte forma

$$H = \frac{\left(p - \frac{p_0}{2} \sigma_z\right)^2}{2m}. \quad (2.48)$$

O termo p_0 ainda se mantém na ausência dessas interações, já que ele provém do espalhamento Raman estimulado. A eq. (2.48) é uma Hamiltoniana puramente cinética, que por definição é $\langle H \rangle \geq 0$, mas para o nosso propósito é feito que $\langle H \rangle = 0$ para garantir que é o mínimo de energia, com o que se obtém para o spin-up $2p - p_0 = 0$ e para o spin-down $2p + p_0 = 0$, obtendo a equação de duas parábolas deslocadas.

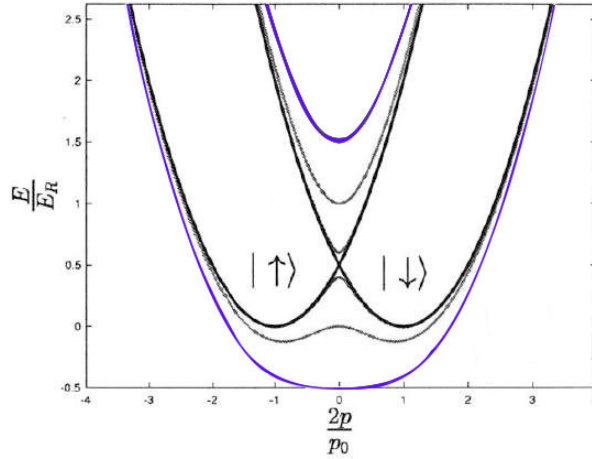


Figura 2.10: Relação de dispersão para $\delta_0 = 0$

Na Figura 2.10, quando $\beta = 0$ os estados de pseudo-spin ($|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$) têm o mesmo mínimo (estados degenerados) quando o valor de β aumenta, a degeneração é quebrada, obtendo-se um único mínimo.

2.- Limite de $\beta \rightarrow 0$ e $\delta_0 \neq 0$

Neste caso, a eq. (2.47) adquire a seguinte forma

$$H = \frac{\left(p - \frac{p_0}{2}\sigma_z\right)^2}{2m} + \delta_0 \frac{\hbar}{2}\sigma_z. \quad (2.49)$$

Dependendo do sinal de δ_0 , este parâmetro favorece um estado de pseudo-spin acima do outro estado de pseudo-spin, quebrando assim a simetria mostrada na figura 2.10. A consequência de que a intensidade do efeito Zeeman seja não nula ($\delta_0 \neq 0$) é que o mínimo da relação de dispersão já não são os mesmos, como acontece no caso anterior, e por esse motivo o mínimo do sistema não é mais zero. Isso pode ser observado na Figura 2.11

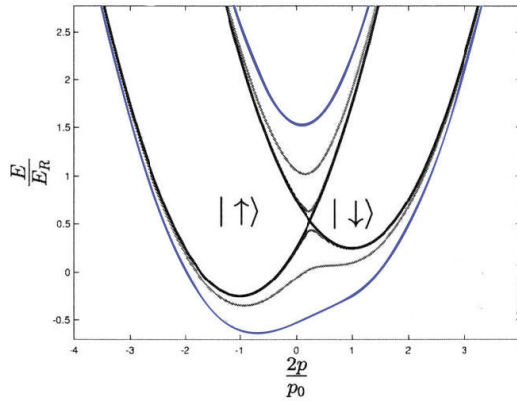


Figura 2.11: Relação de dispersão para $\delta_0 \neq 0$

2.5.3 Equação de Gross-Pitaevskii com interação spin-órbita

Para o estudo de BEC com SOC, é necessário de 2 estados de spin para formar a base do pseudo-spin 1/2 do BEC, o que significa que a dinâmica do BEC já não é mais descrita por uma função de onda escalar agora é descrita por um spinor

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

A eq. (2.50) da origem a um BEC de dois componentes. Assim a descrição do campo médio é dada pela seguinte expressão:

$$H = \int dr^3 \left\{ \vec{\Psi}^* H_{SOC} \Psi + \frac{1}{2} g_{11} |\Psi_1|^2 + g_{12} |\Psi_1| |\Psi_2| + \frac{1}{2} |\Psi_2|^2 \right\},$$

ou

$$H = \int dr^3 \left\{ \vec{\Psi}^\dagger \left[\frac{1}{2m} \left(i\nabla - \frac{p_0}{2} \sigma_z \right)^2 + \frac{\beta}{2} \sigma_x + \frac{\delta}{2} \sigma_z \right] \Psi + \frac{1}{2} g_{11} |\Psi_1|^2 + g_{12} |\Psi_1| |\Psi_2| + \frac{1}{2} g_{22} |\Psi_2|^2 \right\}. \quad (2.51)$$

Os coeficientes g_{ij} são interpretados como uma partícula do estado i que interage com uma partícula do estado j . Na eq. (2.51) se pode observar explicitamente os termos gerados pela interação spin-órbita.

Já conhecida a Hamiltoniana, também é conhecida a densidade Hamiltoniana e portanto a densidade Lagrangiana, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left\{ \Psi^\dagger \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^\dagger \Psi \right\} - \Psi^\dagger \left\{ \frac{1}{2m} \left(i\nabla - \frac{p_0}{2} \sigma_z \right)^2 + \frac{\beta}{2} \sigma_x + \frac{\delta_0}{2} \sigma_z \right\} \Psi + \frac{1}{2} g_{11} |\psi_1|^4 + g_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} g_{22} |\psi_2|^4.$$

Depois de um cálculo, se obtém a seguinte expressão para a densidade lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \left\{ \psi_1^\dagger \dot{\psi}_1 + \psi_2^\dagger \dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1^\dagger \psi_1 - \dot{\psi}_2^\dagger \psi_2 \right\} \\ & - \left\{ \psi_1^\dagger \left[\frac{1}{2m} \left(i\nabla - \frac{p_0}{2} \right)^2 + \frac{\delta}{2} \right] \psi_1 + \frac{\beta}{2} [\psi_1^\dagger \psi_2 + \psi_1 \psi_2^\dagger] + \psi_2^\dagger \left[\frac{1}{2m} \left(i\nabla - \frac{p_0}{2} \right)^2 - \frac{\delta}{2} \right] \psi_2 \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{2} g_{11} |\psi_1|^4 + g_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} g_{22} |\psi_2|^4 \right\}. \end{aligned}$$

Calculando as equações de movimento para cada componente do campo $\psi_1^\dagger$ e $\psi_2^\dagger$ através da equação

$$\partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_j^\dagger)} \right] + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi_j^\dagger)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_j^\dagger} = 0,$$

obtemos

$$i\dot{\psi}_1 = \frac{1}{2m} \left(i\nabla - \frac{p_0}{2} \right)^2 \psi_1 + \frac{\delta}{2} \psi_1 + \frac{\beta}{2} \psi_2 + [g_{11} |\psi_1|^2 + g_{12} |\psi_2|^2] \psi_1, \quad (2.52)$$

$$i\dot{\psi}_2 = \frac{1}{2m} \left(i\nabla - \frac{p_0}{2} \right)^2 \psi_2 - \frac{\delta}{2} \psi_2 + \frac{\beta}{2} \psi_1 + [g_{12} |\psi_1|^2 + g_{22} |\psi_2|^2] \psi_2, \quad (2.53)$$

as eqs. (2.52) e (2.53) são as equações de Gross-Pitaevskii com SOC para o spinor do BEC $\Psi(r)$.

Capítulo 3

Sólitons em condensados de Bose Einstein

No capítulo precedente, foi feita uma breve descrição dos conceitos físicos e matemáticos dos processos experimentais para a obtenção de um BEC com interação spin-orbita e da teoria de campo médio. A equação que governa a dinâmica de um BEC é descrita pela equação de Gross-Pitaevskii, a qual é uma equação obtida através da aproximação de Campo Médio.

Os gases diluídos têm uma densidade ultra baixa o que permite o processo de condensação e, portanto, a obtenção de um BEC em um MOT, estes gases dão origem a uma nova série fenômenos, onde a natureza quântica do sistema é exposta de uma forma única. A teoria pode ser desenvolvida para uma situação estacionária e não estacionária, permitindo a investigação de muitos fenômenos físicos.

3.1 Soluções solitônicas

A equação de Gross-Pitaevskii, também chamada de equação de Schrödinger não-linear (NLSE do inglês, Non-linear Schrödinger equation), tem a forma geral adimensional

$$i\partial_t\Psi(\mathbf{r},t) = -\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\Psi + g(\mathbf{r},t)|\Psi(\mathbf{r},t)|^2\Psi(\mathbf{r},t) + f(\mathbf{r},t)|\Psi(\mathbf{r},t)|^4\Psi(\mathbf{r},t), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, para $V(\mathbf{r},t)$, $g(\mathbf{r},t)$ e $f(\mathbf{r},t)$ funções bem comportadas, o ansatz para resolver a eq. (3.1) é da seguinte forma

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r},t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (3.2)$$

Para o caso unidimensional, sem potencial ($V(\mathbf{r},t) = 0$) e com não linearidade da forma $g(\mathbf{r},t) = g < 0$ (constante) e $f(\mathbf{r},t) = 0$ (caso atrativo), temos a equação (2.46)

$$i\partial_t\Psi(z,t) + \partial_z^2\Psi(z,t) - g|\Psi(z,t)|^2\Psi(z,t) = 0. \quad (3.3)$$

Para procurar soluções solitônicas da eq. (3.3), nós usamos o seguinte ansatz

$$\Psi(z,t) = e^{i(\alpha z - st)}\varphi(\xi), \quad (3.4)$$

fazendo uma mudança de variável $z = \xi + Ut$, além α , s são constantes e $\varphi(\xi)$ uma função real a qual é zero no infinito.

$$i\partial_t \Psi(z, t) = [s\varphi(\xi) - iU\partial_\xi \varphi(\xi)] e^{i(\alpha z - st)},$$

$$\partial_z \Psi(z, t) = [i\alpha\varphi(\xi) + \partial_\xi \varphi(\xi)] e^{i(\alpha z - st)}, \quad (3.5)$$

$$\partial_z^2 \Psi(z, t) = [-\alpha^2\varphi(\xi) + 2i\alpha\partial_\xi \varphi(\xi) + \partial_\xi^2 \varphi(\xi)] e^{i(\alpha z - st)}.$$

Substituímos o sistema de eqs.(3.5) na eq. (3.3) para obter

$$[s - \alpha^2] \varphi(\xi) + [2i\alpha - iU] \partial_\xi \varphi(\xi) + \partial_\xi^2 \varphi(\xi) - g\varphi^3(\xi) = 0, \quad (3.6)$$

fazendo $U = 2\alpha$ e $\alpha^2 - s = \beta$ para simplificar a eq.(3.8), e obtemos

$$\partial_\xi^2 \varphi(\xi) - \beta\varphi(\xi) - g\varphi^3(\xi) = 0. \quad (3.7)$$

Agora, multiplicando por $d\varphi$ e integrando de 0 até um φ , na eq.(3.7)

$$\int_0^\varphi \partial_\xi \varphi d(\partial_\xi \varphi) - \beta \int_0^\varphi \varphi(\xi) d\varphi - g \int_0^\varphi \varphi^3(\xi) d\varphi = 0,$$

$$(\partial_\xi \varphi)^2 - \beta\varphi^2(\xi) - g\frac{\varphi^4(\xi)}{2} = 0. \quad (3.8)$$

Fazendo a mudança de variável $w = \frac{1}{\varphi} \rightarrow \partial_z w = -\frac{1}{\varphi^2} \partial_z \varphi \rightarrow (\partial_z w)^2 = \frac{1}{\varphi^4} (\partial_z \varphi)^2$, para obter

$$(\partial_\xi w)^2 = \beta w^2 + \frac{g}{2},$$

$$\frac{dw}{\sqrt{w^2 - \frac{g}{2\beta}}} = \beta^{1/2} d\xi.$$

Integrando, obtemos a seguinte solução:

$$w = \sqrt{\frac{g}{2\beta}} \cosh(\beta^{1/2} \xi).$$

Substituindo w na equação para φ ($w = \frac{1}{\varphi}$), temos

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\beta}{g}} \operatorname{sech}(\beta^{1/2} \xi). \quad (3.9)$$

Finalmente, substituindo a eq.(3.9) na eq. (3.4) e voltando às variáveis iniciais $U = 2\alpha$ e $-s = \beta - \frac{U^2}{4}$, temos

$$\Psi(z, t) = \sqrt{\frac{2\beta}{g}} e^{i\left[\frac{U}{2}z + \left(\beta - \frac{U^2}{4}\right)t\right]} \operatorname{sech}[\beta^{1/2}(z - Ut)]. \quad (3.10)$$

A eq. (3.10), tem que manter a invariância de translação (z_0) e invariância de rotação (ϕ_0), com o qual temos

$$\Psi(z, t) = \sqrt{\frac{2\beta}{g}} e^{i\left[\frac{U}{2}z + \left(\beta - \frac{U^2}{4}\right)t + \phi_0\right]} \operatorname{sech}[\beta^{1/2}(z - Ut - z_0)]. \quad (3.11)$$

A eq. (3.11) é a representação matemática de um sóliton brilhante. Um sóliton se espalha

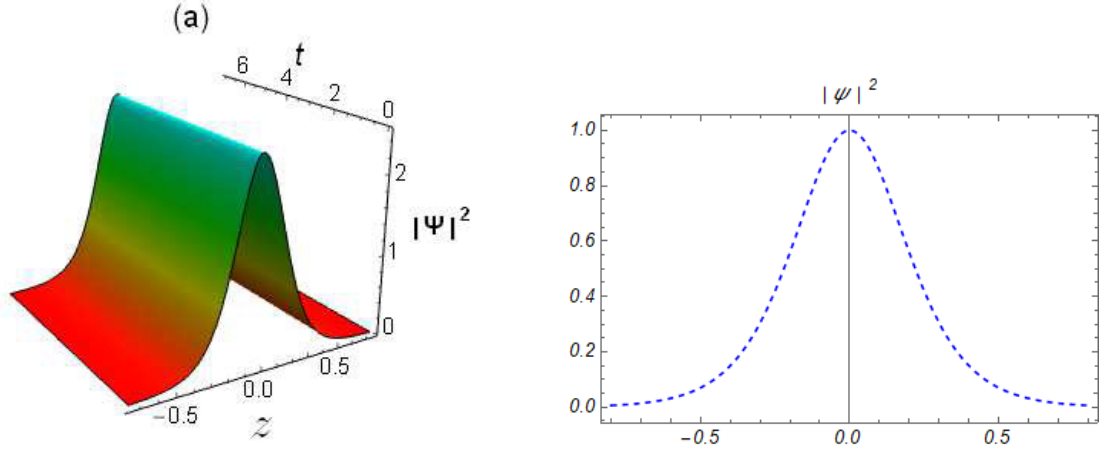


Figura 3.1: Figura usual do sóliton brilhante.

sem efeitos de dispersão, além que suas colisões são elásticas. Graficamente um sóliton brilhante é representado na figura 3.1

Para a solução da *NLSE* com não linearidade cúbica-quíntica ($g \neq 0$ e $f \neq 0$), se fez um procedimento similar, obtendo a seguinte expressão

$$\Psi(z, t) = \frac{2\beta^{1/2} e^{i\left[\frac{Uz}{2} + \left(\beta + \frac{U^2}{4}\right)t + \phi_0\right]}}{\left[2\beta^{1/2} \sqrt{\frac{g^2}{4\beta} + \frac{4f}{3}} \cosh[2\beta^{1/2}(z - Ut + z_0)] + g\right]^{1/2}}. \quad (3.12)$$

A eq. (3.12) mantém a forma de sóliton brilhante, a qual é mostrada na figura 3.2

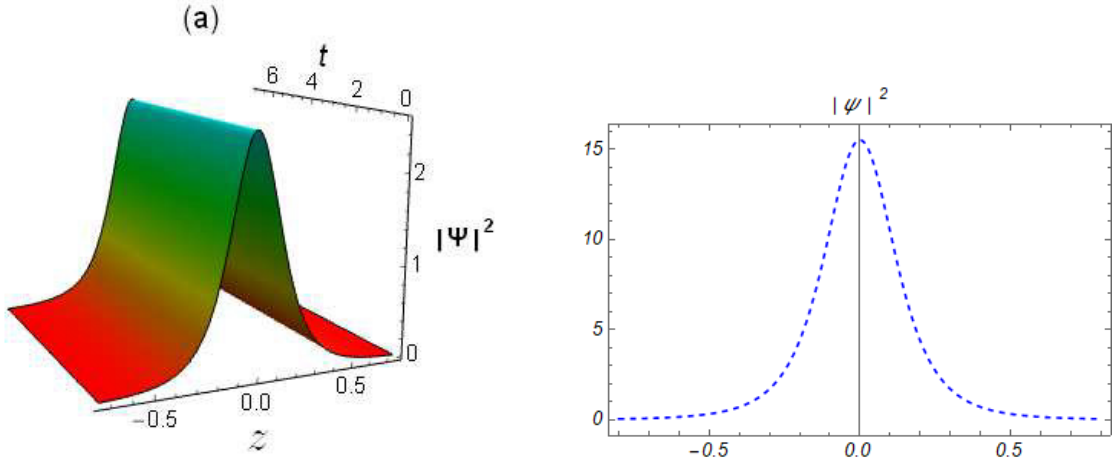


Figura 3.2: Figura usual do sóliton brilhante.

3.1.1 Equação de Weierstrass

As soluções solitônicas da equação de Schrödinger não linear (*NLSE*)

$$i\partial_t \Psi = -\partial_z^2 \Psi + a_1 |\Psi|^2 \Psi + a_2 |\Psi|^4 \Psi \quad (3.13)$$

onde $\Psi \equiv \Psi(z, t) \in \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{R}$ e $\{a_1, a_2\} \neq \{0, 0\}$, pode ser expresso em termos das funções elípticas de Jacobi. Isso é possível ao mapear a eq.(3.8) em uma equação de Weierstrass $\wp(t, g_2, g_3)$, como foi realizado em [27, 28].

A técnica aqui apresentada baseia-se no método de redução simétrica [29], a essência deste método consiste em reescrever a eq. (3.13) em termos dos invariantes de um determinado grupo de simetria, cujo o objetivo é reduzir o número de variáveis independentes. Em alguns casos (dependendo dos valores de a_1 e a_2), ele pode ser resolvido em termos de funções elementares ou em termos das funções elípticas de Jacobi. Fazendo uso das invariâncias das soluções solitônicas, esta abordagem de solução é viável. A solução analítica exata é reduzida a uma equação diferencial ordinária, que é dada em termos da função elíptica de Weierstrass $\wp(t, g_2, g_3)$.

A equação fundamental de Weierstrass é dada por

$$\wp' = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad (3.14)$$

e pode ser escrita na forma

$$\wp' = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3), \quad (3.15)$$

onde g_j são os invariantes de Weierstrass e e_k são as raízes de Weierstrass. Esses parâmetros têm as seguintes propriedades:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2, \quad (3.16)$$

$$H_i^2 = 2e_i^2 + e_j e_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j, i \neq k; j \neq k, \quad (3.17)$$

a eq. (3.16) é denominada *determinante de Weierstrass*, dependendo do seu valor a função Weierstrass adota uma expressão específica em termos de funções elípticas de Jacobi, e a eq.(3.17) é denominado como o período médio, das soluções da equação de Weierstrass. Para uma abordagem mais ampla sobre as propriedades da função de Weierstrass rever a referência [30]. Na presente dissertação, as soluções para as equações diferenciais acopladas dos componentes da densidade de spin são resolvidas por esta abordagem e, por sua vez, é possível encontrar as expressões dos parâmetros varacionais dinâmicos do sistema em estudo.

3.2 Soluções vetor-sólitons

3.2.1 Modelo de Manakov

No modelo de Manakov a propagação da luz é estudada, obtendo soluções tipo vetor sóliton. Sendo um dos primeiros modelos a obter este tipo de soluções. As equações acopladas do modelo de Manakov são as seguintes:

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi (|E_1|^2 + |E_2|^2) \right\} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = 0$$

A partir dessa equação se obtém as soluções solitônicas de duas componentes, chamadas vetor sólitons.

O objetivo desta dissertação não é aprofundar os resultados obtidos sob a abordagem de Manakov, no entanto, é de utilidade didática mostrar as soluções de vetores solitônicos.

3.2.2 Sóliton brilhante (BS) e sóliton escuro (DS)

As interações não-lineares e a dispersão nas colisões de átomos geram pacotes de ondas localizadas, que se movem sem efeito de dispersão ou efeito de distorção, isto é, como um pacote compacto. No caso de uma interação atômica atrativa para sóliton brilhantes e interação atômica repulsiva para sóliton escuros, os pacotes de onda localizados chamados sóltons brilhantes e escuros são gerados em um BEC. Uma das muitas características do sóliton, é a sua colisão elástica, já que um sóliton retém sua estrutura, sua forma, tendo este tipo de propriedade ao colidir.

Devido à atração e repulsão atômica que surge no BEC um soliton brilhante e/ou escuro surge, adotando as formas mostradas na figura 3.3. O perfil matemático é $\Psi_{BS}(z, t) \propto \text{sech}(z)$ no caso de sóliton brilhantes e $\Psi_{DS}(z, t) \propto \tanh(z)$ para sóliton escuros. Sua formação está intimamente relacionada com a armadilha potencial, já que no caso de sóltons 2D e 3D estes colapsam. Para o caso de 2D, o colapso está relacionado ao número de átomos, já que acima de um número crítico, o sóliton entra em colapso. Que para o caso de 3D, esse colapso ocorre para um número arbitrário de átomos.

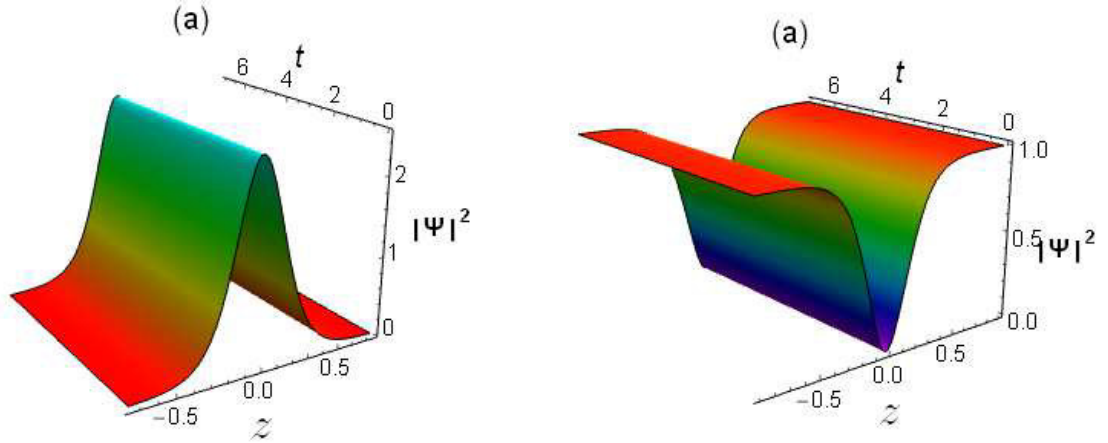


Figura 3.3: Graficos de sóliton brilhante e sóliton escuro respectivamente

Na figura 3.3 pode-se observar como a superfície é denotada por uma cor vermelho, o que quer dizer que é a parte quente do condensado no caso do sóliton brilhante a parte de acima é uma cor luminoso, a parte inferior de um sóliton escuro é um obscuro, aquelas essas cores são o origem do nome dos sóltons.

Capítulo 4

Dinâmica de um condensado de Bose-Einstein em ausência e com interação spin-órbita

Como já foi mencionado na seção anterior, a dinâmica de um BEC é descrita pela equação de Gross-Pitaevskii (equação de Schrödinger não-linear). Também foi mostrado que, a expressão matemática com perfil de sóliton brilhante (função secante hiperbólica) é solução da equação de Gross-Pitaevskii com não linearidade cúbica.

Por outro lado, através da técnica da ressonância de Feshbach, podemos modular a intensidade das interações interatômicas entre os bósons (os coeficientes das não-linearidades na equação diferencial), o que leva à criação de sólitons brilhantes em um BEC, sendo eles os objetos mais fundamentais da física não-linear. Na verdade, além das interações internas, o comportamento macroscópico das BECs é altamente sensível às condições externas, principalmente ao potencial de armadilhamento externo. Por esse motivo, é muito importante estudar novas e diferentes dinâmicas dos sólitons brilhantes em diversos potenciais.

Nesta seção vamos desenvolver e estudar a dinâmica de um BEC de átomos com dois estados hiperfinos na ausência e na presença de interação spin-órbita para diferentes potenciais de armadilhamento. Focaremos nossa atenção na dinâmica do centro de massa do sistema, e também nas propriedades intrínsecas, por exemplo: o pseudo-spin e a diferença de fase, que estão associadas à dinâmica. Para estudar as diferentes dinâmicas do sistema, vamos empregar o método de aproximação variacional, proposto por B. A. Malomed [34, 35], e em particular, recentemente e exitosamente empregada por L. Wen [50].

4.1 Equações de movimento

Vamos estudar sólitons brilhantes em BEC de átomos que possuem dois estados hiperfinos diferentes, cuja dinâmica orbital está acoplada a estes dois níveis de energia interna. A interação spin-órbita dá origem a uma ampla variedade de propriedades dinâmicas. Primeiro, estudamos a dinâmica dos sólitons e do spin do sistema quando o potencial de armadilhamento está desligado. Depois, é realizado um estudo onde o potencial será de grande importância na dinâmica do sistema. Nosso foco é estudar a dinâmica do sóliton sob a influência do SOC induzido por lasers Raman no BEC. O efeito dos lasers Raman é acoplar o grau de liberdade spin ao movimento do sóliton, este tipo de acoplamento é

conhecido como acoplamento Rashba. Nesta dissertação se estuda a dinâmica do sóliton, onde haverá uma atenção especial na dinâmica do centro de massa que é afetado pelo SOC induzido pelos lasers Raman e de como o potencial tem influência na precessão de spin, a qual é descrita pela equação de Bloch.

A densidade lagrangiana que descreve a dinâmica quase-unidimensional do BEC com SOC ao longo do eixo z é dado pela expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{i}{2} \{ [\Psi_1^* \partial_t \Psi_1 + \Psi_2^* \partial_t \Psi_2] - [\Psi_1 \partial_t \Psi_1^* + \Psi_2 \partial_t \Psi_2^*] \} - \frac{1}{2} \{ |\partial_z \Psi_1|^2 + |\partial_z \Psi_2|^2 \} \\ & - i\lambda \{ \Psi_1^* \partial_z \Psi_1 - \Psi_2^* \partial_z \Psi_2 \} - V(z, t) \{ |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 \} - \Omega \{ \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_1 \} \\ & - \delta \{ |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 \} - \left\{ \frac{1}{2} g_{11} |\Psi_1|^4 + g_{12} |\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2 + \frac{1}{2} g_{22} |\Psi_2|^4 \right\},\end{aligned}\quad (4.1)$$

As equações de Euler-Lagrange para os campos Ψ_σ^* são dadas por

$$\partial_z \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z \Psi_\sigma^*)} \right] + \partial_t \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Psi_\sigma^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma^*} = 0, \quad (4.2)$$

com $\sigma = 1, 2$, as quais podem ser obtidas usando a densidade Lagrangeana (4.1) e podem ser escritas como

$$\begin{aligned}i\partial_t \Psi_1 = & -\frac{1}{2} \partial_z^2 \Psi_1 + i\lambda \partial_z \Psi_1 + V(z, t) \Psi_1 + \Omega \Psi_2 + \delta \Psi_1 \\ & + (g_{11} |\Psi_1|^2 + g_{12} |\Psi_2|^2) \Psi_1.\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}i\partial_t \Psi_2 = & -\frac{1}{2} \partial_z^2 \Psi_2 - i\lambda \partial_z \Psi_2 + V(z, t) \Psi_2 + \Omega \Psi_1 - \delta \Psi_2 \\ & + (g_{12} |\Psi_1|^2 + g_{22} |\Psi_2|^2) \Psi_2.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Podemos reescrever as eqs. (4.3) e (4.4) em sua forma matricial da seguinte forma

$$\begin{aligned}i\partial_t \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = & -\frac{1}{2} \partial_z^2 \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} + i\lambda \partial_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} + V(z) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \\ & + \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} g_{11} |\Psi_1|^2 + g_{12} |\Psi_2|^2 & 0 \\ 0 & g_{12} |\Psi_1|^2 + g_{22} |\Psi_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Neste ponto, introduzimos as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

e escrevemos

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} |\Psi_1|^2 + g_{12} |\Psi_2|^2 & 0 \\ 0 & g_{12} |\Psi_1|^2 + g_{22} |\Psi_2|^2 \end{pmatrix},$$

de modo que a equação matricial que governa a dinâmica de um BEC com SOC seja escrita como

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \left[-\frac{1}{2} \partial_z^2 + i\lambda \sigma_z \partial_z + V(z, t) + \Omega \sigma_x + \delta \sigma_z + \mathcal{G} \right] \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde Ψ_1 e Ψ_2 , são as componentes do vetor sóliton que descrevem a dinâmica do BEC, representando, por exemplo os estados hiperfinos $|1, -1\rangle$ e $|1, 0\rangle$, respectivamente.

A interpretação física de cada um dos termos que aparecem na equação de Gross-Pitaevskii, eq.(4.6) é

- O parâmetro λ caracteriza a intensidade da interação spin-órbita gerado por lasers Raman. $\lambda = k_L a_\perp$, onde $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$, é o comprimento de onda e $\omega_\perp$ frequência), com k_L sendo o momento linear transferido pelos lasers Raman;
- O parâmetro Ω caracteriza a mistura de estados devido ao espalhamento Raman estimulado (acoplamento Raman);
- O parâmetro δ caracteriza a intensidade do efeito Zeeman entre os estados do BEC;
- O termo $V(z)$ é o potencial harmônico que armadilha o BEC.

Como já foi dito acima, nós queremos estudar as diferentes dinâmicas dos sólitons brilhantes. Por esse motivo, vamos usar um ansatz da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t) &= \sqrt{\frac{\eta}{2}} \sin(\theta) \operatorname{sech}(\eta z + \xi) e^{i(k_1 z + \varphi_1)}, \\ \Psi_2(z, t) &= \sqrt{\frac{\eta}{2}} \cos(\theta) \operatorname{sech}(\eta z + \xi) e^{i(k_2 z + \varphi_2)},\end{aligned}\quad (4.7)$$

onde os parâmetros η , θ , k_j , φ_j , ξ_j são parâmetros variacionais que dependem da coordenada temporal. O propósito do método variacional é descrever a dinâmica do sistema através desses parâmetros variacionais. Cada parâmetro variacional está relacionado a alguma característica da dinâmica do sóliton como por exemplo:

- O parâmetro θ está relacionado com o desbalanço de “spin” entre as componentes do sóliton, e a qual é definido pela expressão

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} (|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2) dz = -\cos(2\theta). \quad (4.8)$$

A partir da eq. (4.8), temos que para $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, teremos $\Delta = 0$, ou seja, o sistema possui o mesmo valor de pseudo-spin para cima e para baixo.

- O parâmetro η^{-1} determina a largura do sóliton.
- Os parâmetros k_j são os número de onda.
- Finalmente, os parâmetros φ_j são as fases das componentes dos sólitons.

Utilizando o ansatz (4.7), podemos encontrar o centro de massa do soliton $\langle z \rangle$ através da relação

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z (|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) dz = -\frac{\xi(t)}{\eta(t)}, \quad (4.9)$$

o momento linear do sistema, dado pela expressão

$$\begin{aligned}\langle k \rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_1^* \partial_z \Psi_1 + \Psi_2^* \partial_z \Psi_2) dz \\ &= k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta = k_+(t) - k_-(t) \cos[2\theta(t)],\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde $k_+ = (k_1 + k_2)/2$, $k_- = (k_1 - k_2)/2$, e a energia do sistema

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= i \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_1^* \partial_t \Psi_1 + \Psi_2^* \partial_t \Psi_2) dz \\
&= \frac{\xi}{\eta} (k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta) - (\varphi_1 \sin^2 \theta + \varphi_2 \cos^2 \theta) \\
&= -\langle z(t) \rangle \{ \partial_t k_+(t) - \cos[2\theta(t)] \partial_t k_-(t) \} \\
&\quad - \{ \partial_t \varphi_+(t) - \cos[2\theta(t)] \partial_t \varphi_-(t) \},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $\varphi_+ = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$, $\varphi_- = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$. Agora, introduzimos o potencial de armadilhamento de quarto grau que vamos utilizar, dado pela expressão

$$V(z, t) = V_0(t) + V_1(t)z + V_2(t)z^2 + V_3(t)z^3 + V_4(t)z^4. \tag{4.12}$$

A lagrangiana do sistema, é obtida substituindo o ansatz, eq. (4.7), na densidade lagrangiana, eq. (4.1), considerando g_{ij} igual a g , isto é, uma intensidade não linear constante e integrando ao longo do eixo z .

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dz, \tag{4.13}$$

da eq. (4.13), o resultado é

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{\xi}{\eta} \dot{k}_+ \cos(2\theta) + \frac{\xi}{\eta} \dot{k}_- + \cos(2\theta) (\dot{\varphi}_-) - \dot{\varphi}_+ - \frac{1}{2} k_+^2 + \cos(2\theta) k_+ k_- \\
&\quad - \frac{1}{2} k_-^2 - \frac{1}{6} \eta^2 - \left(V_0 - V_1 \frac{\xi}{\eta} + V_2 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{12\eta^2} - V_3 \frac{\xi(\pi^2 + 4\xi^2)}{4\eta^3} \right. \\
&\quad \left. + V_4 \frac{7\pi^4 + 120\pi^2\xi^2 + 240\xi^4}{240\eta^4} \right) + \lambda k_- - \lambda \cos(2\theta) k_+ \\
&\quad - \Omega \frac{\pi k_-}{\eta} \cos\left(-\frac{2k_- \xi}{\eta} + 2\varphi_-\right) \frac{\sin(2\theta)}{\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} + \delta \cos(2\theta) - \frac{1}{6} g \eta,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $\dot{k}_{\pm} = dk_{\pm}/dt$, $\dot{\varphi}_{\pm} = d\varphi_{\pm}/dt$. Neste ponto, os parâmetros variacionais do sistema são $\xi(t)$, $\eta(t)$, $k_+(t)$, $k_-(t)$, $\theta(t)$, $\varphi_-(t)$, $\varphi_+(t)$, e as equações de Euler-Lagrange para cada um dos parâmetros são

$$\begin{aligned}
\dot{k}_+ &= 2\Omega \frac{\pi k_-^2}{\eta} \frac{\sin(2\theta)}{\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} \sin(\phi) + \cos(2\theta) \dot{k}_- \\
&\quad + \left(-V_1 + 2V_2 \frac{\xi}{\eta} - V_3 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} \right),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\dot{\theta} = -\Omega \frac{\pi k_-}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} \sin(\phi), \tag{4.16}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] = -\lambda \cos(2\theta) + k_- \cos(2\theta) - k_+, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_- &= -\delta + \lambda k_+ - k_- k_+ + \frac{\xi}{\eta} \dot{k}_- \\ &\quad - \Omega \frac{\pi k_-}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} \cos(\phi) \cot(2\theta),\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}&k_- (\lambda - k_-) + k_- (k_- - \lambda) \cos^2(2\theta) \\ &= -\Omega \frac{\pi k_-}{\eta} \frac{\sin(2\theta)}{\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} \cos(\phi) \left[\frac{\pi k_-}{\eta} \coth\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right) - 1 \right],\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} + V_2 \frac{\pi^2}{6\eta^2} - V_3 \frac{\pi^2 \xi}{2\eta^3} + V_4 \frac{7\pi^4 + 60\pi^2 \xi^2}{60\eta^4} \\ &= \Omega \frac{\pi k_-}{\eta} \frac{\sin(2\theta)}{\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} \cos(\phi) \left[\frac{\pi k_-}{\eta} \coth\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right) - 1 \right],\end{aligned}\quad (4.20)$$

onde $\phi(t) = -2k_- \frac{\xi}{\eta} + 2\varphi_-$ é a diferença de fase das componentes do sóliton.

As expressões (4.15)-(4.20) são as equações de movimento que governam a dinâmica do BEC com SOC. Elas são equações diferenciais não-lineares que interligam os parâmetros variacionais. Baseado nas equações de movimento, podemos deduzir algumas outras equações diferenciais auxiliares para os parâmetros variacionais, as quais nos permitem achar as soluções analíticas exatas das equações dinâmicas.

Usando as eqs. (4.15) e (4.16), temos

$$\begin{aligned}\dot{k}_+ &= -2\dot{\theta} \sin(2\theta) k_- + \cos(2\theta) \dot{k}_- \\ &\quad + \left(-V_1 + 2V_2 \frac{\xi}{\eta} - V_3 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} \right),\end{aligned}$$

integrando com respeito ao tempo, temos

$$k_+ = k_- \cos(2\theta) + I(t) + k_0, \quad (4.21)$$

onde o termo $I(t)$ é da forma

$$I(t) = \int \left(-V_1 + 2V_2 \frac{\xi}{\eta} - V_3 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} \right) dt, \quad (4.22)$$

sendo k_0 a constante de integração. Das eqs. (4.10) e (4.21), concluímos que o momento linear do sistema é expresso por

$$\langle k(t) \rangle = k_+ - k_- \cos(2\theta) = +I(t) + k_0. \quad (4.23)$$

Derivamos com respeito ao tempo a eq. (4.17), obtendo

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] = 2\lambda \dot{\theta} \sin(2\theta) + k_- \cos(2\theta) - 2\dot{\theta} k_- \sin(2\theta) + \cos(2\theta) \dot{k}_- - \dot{k}_+.$$

Substituindo as eqs. (4.15) e (4.16) na última expressão, obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + 2V_2 \frac{\xi}{\eta} - V_3 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} = V_1 - 2\Omega \lambda \frac{\pi k_-}{\eta} \frac{\sin(2\theta) \sin(\phi)}{\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)}. \quad (4.24)$$

A equação (4.24) descreve a dinâmica do centro de massa. Podemos reescrever as eqs. (4.17) e (4.18) na forma

$$2k_- \frac{d}{dt} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] = -2\lambda k_- \cos(2\theta) + 2k_-^2 \cos(2\theta) - 2k_- k_+,$$

$$2\dot{\phi}_- - 2\frac{\xi}{\eta} \dot{k}_- = -2\delta + 2\lambda k_+ - 2k_- k_+ - 2\Omega \frac{\pi k_- \cos(\phi) \cot(2\theta)}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)},$$

a partir dessas duas últimas expressões e da eq. (4.21), chegamos à relação

$$\dot{\phi} = -2\delta + 2k_0\lambda + 2k_- (2\lambda - k_-) \cos(2\theta) - 2\Omega \frac{\pi k_- \cos(\phi) \cot(2\theta)}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} + 2\lambda I(t). \quad (4.25)$$

Esta última expressão é a equação dinâmica da diferença de fase.

Para descrever a dinâmica do pseudo-spin do sistema, definimos a função pseudo-spinor do sistema $\chi^T = (\chi_1^*, \chi_2^*)$ pela expressão:

$$\chi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Psi_\sigma, \quad (4.26)$$

onde $\rho = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$. Substituindo o ansatz, eq. (4.7), na eq. (4.26), teremos que as componentes do pseudo-spinor são

$$\chi_1 = \frac{\Psi_1}{\sqrt{\rho}} = \sin(\theta) \exp[i(k_1 z + \varphi_1)] \quad ; \quad \chi_2 = \frac{\Psi_2}{\sqrt{\rho}} = \cos(\theta) \exp[i(k_2 z + \varphi_2)]. \quad (4.27)$$

Agora, definimos o vetor pseudo-spin $\mathbf{S} = 1/2$ do sistema, pela expressão

$$\mathbf{S} = \chi^T \boldsymbol{\sigma} \chi, \quad (4.28)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ e σ_i , com $i = x, y, z$, são as matrizes de Pauli, eq. (4.5). Para encontrar as componentes do vetor pseudo-spin $\mathbf{S}$, substituímos as eqs. (4.5) e (4.27) na eq. (4.28), obtendo

$$S_x(t) = \chi^T \sigma_x \chi = \sin(2\theta) \cos(\phi) \quad ; \quad S_y(t) = \chi^T \sigma_y \chi = -\sin(2\theta) \sin(\phi);$$

$$S_z(t) = \chi^T \sigma_z \chi = -\cos(2\theta). \quad (4.29)$$

A partir das componentes de $\mathbf{S}$, podemos encontrar suas equações de movimento. Derivando com respeito ao tempo cada componente de $\mathbf{S}$, eq. (4.29), teremos

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= 2 \cos(2\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - \sin(2\theta) \sin(\phi) \dot{\phi}, \\ \dot{S}_y &= -2 \cos(2\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} - \sin(2\theta) \cos(\phi) \dot{\phi}, \\ \dot{S}_z &= -2 \sin(2\theta) \dot{\theta}, \end{aligned}$$

nessas últimas expressões, substituímos as eqs. (4.16), (4.25), e (4.29), obtendo

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= 2(-\delta + k_0\lambda) S_y + 2k_- (-2\lambda + k_-) S_y S_z + 2\lambda I S_y, \\ \dot{S}_y &= 2(\delta - k_0\lambda) S_x + 2k_- (2\lambda - k_-) S_x S_z \\ &\quad - 2\Omega \frac{\pi k_-}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} S_z - 2\lambda I S_x, \\ \dot{S}_z &= 2\Omega \frac{\pi k_-}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} S_y. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Essas últimas expressões, eq. (4.30), são as equações de movimento que governam a dinâmica do pseudo-spin do sistema. As equações de movimento do pseudo-spin do sistema são um conjunto de equações diferenciais não-lineares, mas elas se tornam lineares quando o coeficiente $k_- (2\lambda - k_-)$ toma o valor zero. Podemos reescrever a eq. (4.30) na forma vetorial, dada pela expressão

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \mathbf{B}_{ef}, \quad (4.31)$$

onde

$$\mathbf{B}_{ef} = \left(-2\Omega \frac{\pi k_-}{\eta \sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)}, 0, 2\lambda I - 2(\delta - k_0\lambda) - 2k_- (2\lambda - k_-) S_z \right). \quad (4.32)$$

A eq. (4.31) representa a equação de Bloch para a precessão do pseudo-spin do sistema $\mathbf{S}$ em um campo magnético efetivo $\mathbf{B}_{ef}$.

Neste ponto, queremos ressaltar que, para determinar as soluções analíticas exatas correspondentes a cada parâmetro variacional, as que descrevem a evolução do sistema, resolveremos o conjunto de expressões algébricas formada pelas eqs. (4.19) e (4.20), as equações diferenciais auxiliares, eqs. (4.21)-(4.25), e as equações dinâmicas das componentes do vetor pseudo-spin S . As soluções analíticas encontradas para este conjunto de expressões algébricas, serão também as soluções analíticas do conjunto das equações de movimento do sistema.

Em seguida, procedemos à resolução do conjunto de expressões algébricas, para descrever diferentes dinâmicas de um BEC com diferentes potenciais. Devido a que os parâmetros variacionais, que descrevem a dinâmica do sistema, estão interligadas através das equações dinâmicas, encontrar as soluções analíticas das equações dinâmicas requer um grande esforço matemático. Por esse motivo, simplificaremos essas equações tomando em consideração algumas situações físicas experimentalmente realizáveis assumindo valores para alguns parâmetros. Em particular, analisaremos a dinâmica do sistema em ausência de acoplamento spin-órbita ($\lambda = 0$) e em presença dele ($\lambda \neq 0$).

4.2 Dinâmica de um BEC de átomos sem acoplamento spin-órbita ($\lambda = 0$)

Nesta seção vamos estudar, a partir das soluções analíticas, a dinâmica de um sistema em ausência da intensidade de acoplamento spin-órbita. Este sistema, foi recentemente estudado por L. Wen [36] no caso em que o coeficiente da mistura dos estados internos do BEC possui uma dependência espacial z .

Na ausência de acoplamento spin-órbita ($\lambda = 0$) entre os estados internos dos átomos do sistema, a eq. (4.19), toma a forma

$$-k_-^2 \sin^2(2\theta) = -\Omega \frac{\pi k_-}{\eta} \frac{\sin(2\theta)}{\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right)} \cos(\phi) \left[\frac{\pi k_-}{\eta} \coth\left(\frac{\pi k_-}{\eta}\right) - 1 \right],$$

esta última expressão é satisfeita quando k_- assume o valor de zero. Nesta situação, as eqs. (4.20), (4.21)-(4.25) são reduzidas à forma

$$-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} + V_2 \frac{\pi^2}{6\eta^2} - V_3 \frac{\pi^2 \xi}{2\eta^3} + V_4 \frac{7\pi^4 + 60\pi^2 \xi^2}{60\eta^4} = 0; \quad (4.33)$$

$$k_+(t) = I(t) + k_0; \quad (4.34)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + 2V_2 \frac{\xi}{\eta} - V_3 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} = V_1; \quad (4.35)$$

$$\dot{\phi} = -2\delta - 2\Omega \cos(\phi) \cot(2\theta); \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= -2\delta S_y, \\ \dot{S}_y &= 2\delta S_x - 2\Omega S_z, \\ \dot{S}_z &= 2\Omega S_y. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Com base no conjunto de expressões obtidas, eqs (4.33)-(4.37), podemos afirmar que o potencial que armadilha o sistema tem influência na dinâmica externa do sólton, ou seja na largura do sólton η , no centro de massa do sistema $\langle z \rangle = -\frac{\xi}{\eta}$, e no momento linear total do sistema k_+ . Do mesmo modo, a dinâmica interna do sólton, ou seja a evolução da diferença de fase entre os componentes do sólton ϕ e o vetor pseudo-spin $\mathbf{S}$ do sistema, não é influenciado pelo potencial de armadilhamento, no caso de ausência do acoplamento spin-órbita nos estados do sistema.

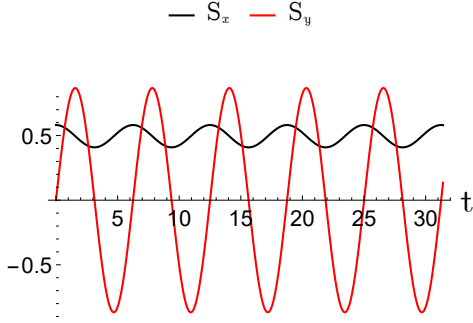


Figura 4.1: Evolução no tempo, de S_x e S_y , eq. (4.38), em ausência de acoplamento spin-órbita, com $\delta = 0.05$, $\Omega = 0.5$, $c_1 = 0.5$, e $c_3 = 0$.

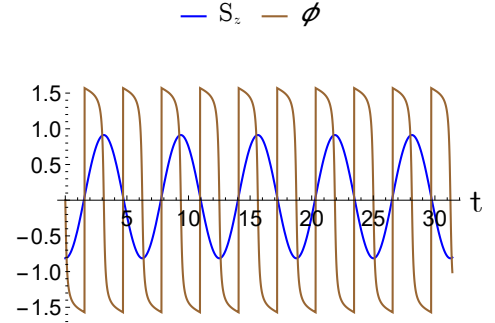


Figura 4.2: Dinâmica do S_z , eq. (4.38), e ϕ , eq. (4.39), em ausência de acoplamento spin-órbita, com $\delta = 0.05$, $\Omega = 0.5$, $c_1 = 0.5$, $c_3 = 0$, e $c_4 = 0$.

Das equações dinâmicas das componentes de $\mathbf{S}$, teremos

$$S_x(t) = -\frac{\delta}{\Omega} S_z(t) + c_1 \quad ; \quad \ddot{S}_z + 4(\Omega^2 + \delta^2) S_z = 4\delta\Omega c_1,$$

então as componentes de $\mathbf{S}$ são

$$\begin{aligned} S_x(t) &= -\frac{\delta}{\Omega} c_2 \cos(\omega t + c_3) + \frac{4\Omega^2}{\omega^2} c_1 \quad ; \quad S_y(t) = -\frac{\omega}{2\Omega} c_2 \sin(\omega t + c_3); \\ S_z(t) &= c_2 \cos(\omega t + c_3) + \frac{4\delta\Omega}{\omega^2} c_1 \quad ; \quad \frac{4\Omega^2}{\omega^2} c_1^2 + \frac{\omega^2}{4\Omega^2} c_2^2 = 1; \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $\omega = 2\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$. As expressões da eq. (4.38) são as oscilações de Rabi [37]. As Figuras 4.1 e 4.2 mostram a evolução das componentes de $\mathbf{S}$. Também a precessão do vetor pseudo-spin $\mathbf{S}$ é mostrado na Figura 4.3.

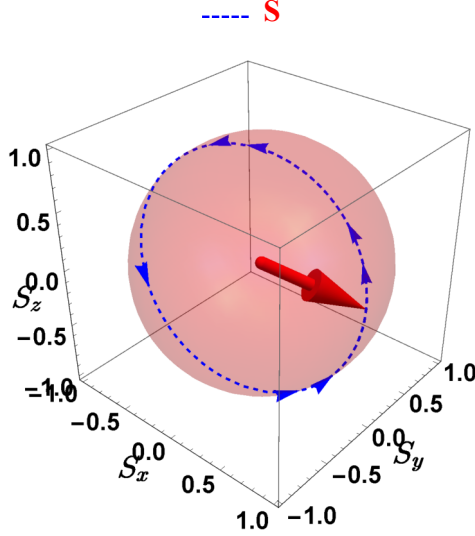


Figura 4.3: Precessão de $\mathbf{S}$ em ausência de acoplamento spin-órbita, com $\delta = 0.5$, $\Omega = 0.5$, $c_1 = 0$, e $c_3 = 0$.

Agora, usando as soluções analíticas das componentes do pseudo-spin $\mathbf{S}$, encontramos a solução analítica da diferença de fase das componentes do sóliton $\phi(t)$, eq. (4.36), da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -2\delta - 2\Omega \cos(\phi) \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \\ &= -2\delta - 2\Omega \cos(\phi) \sin(2\theta) \frac{\cos(2\theta)}{\sin^2(2\theta)} = -2\delta + 2\Omega \frac{S_x S_z}{1 - S_z^2}.\end{aligned}$$

Integrando esta última relação, obtemos

$$\phi(t) = \arctan \left[-\frac{\omega}{2\delta} \tan(\omega t + c_3) \right] + c_4. \quad (4.39)$$

O perfil do progresso no tempo da diferença de fase é exibido na Figura 4.2.

Em seguida, estudaremos diferentes dinâmicas do sistema, através da trajetória seguida pelo seu centro de massa $\langle z \rangle = -\xi(t)/\eta$ e a evolução do momento linear do sistema $k_+(t)$, para vários potenciais de armadilhamento. Queremos mencionar que a dinâmica do sistema para o caso livre, sem potencial, foi extensivamente estudada por M. V. Tratnik e J. E. Sipe [38], no contexto da óptica não-linear.

4.2.1 Caso 1: $V_2(t) = \frac{\gamma_0^2}{2} + \epsilon \cos(\omega_0 t)$; $V_0(t) = V_1(t) = V_3(t) = V_4(t) = 0$.

Começamos com o potencial harmônico, que armadilha o sistema, com frequência dependente do tempo, da forma

$$V(z, t) = \left[\frac{\gamma_0^2}{2} - \epsilon \cos(\omega_0 t) \right] z^2, \quad (4.40)$$

onde γ_0 , ω_0 , e ϵ são parâmetros reais com $\epsilon \in \left[-\frac{\gamma_0^2}{2}, \frac{\gamma_0^2}{2} \right]$.

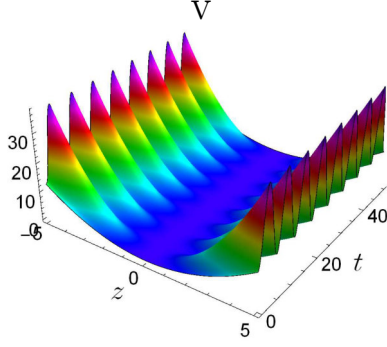


Figura 4.4: Evolução do potencial de armadilhamento, eq. (4.40), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, e $\omega_0 = 1$.

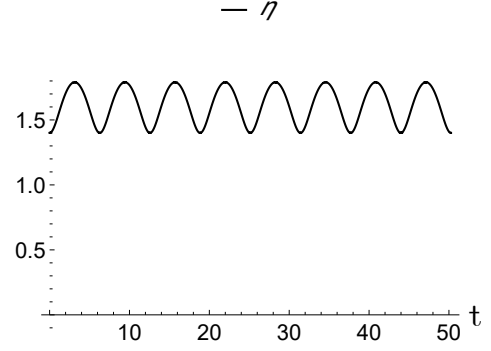


Figura 4.5: Evolução da largura do sóliton, eq. (4.41), com $g = -1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, e $\omega_0 = 1$.

Esse potencial foi empregado para estudar a dinâmica do sóliton através da equação de Schrödinger não-linear com coeficientes moduláveis no espaço-tempo por J. Beitia [39], e A. Avelar [40], também, estudos de estruturas semelhantes em fibras ópticas com uma dispersão variável foram realizadas em [41] e [42]. A Figura 4.4 mostra a evolução do potencial.

Substituindo a eq. (4.40) nas eqs. (4.33)-(4.35), temos:

$$-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} + \left(\frac{\gamma_0^2}{2} - \epsilon \cos(\omega_0 t)\right) \frac{\pi^2}{6\eta^2} = 0 \quad ; \quad k_+(t) = I(t) + k_0;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + (\gamma_0^2 - 2\epsilon \cos(\omega_0 t)) \frac{\xi}{\eta} = 0;$$

com $I(t) = \int [\gamma_0^2 - 2\epsilon \cos(\omega_0 t)] \frac{\xi}{\eta} dt$. As soluções destas últimas expressões são

$$\eta(t) = -\frac{g}{8} + \frac{\sqrt{\Delta(t)}}{8} + \frac{1}{2} \left[\frac{3g^2}{16} - \frac{\Delta(t)}{16} - \frac{g^3}{8\sqrt{\Delta(t)}} \right]^{1/2}, \quad (4.41)$$

$$\langle z(t) \rangle = -\frac{\xi(t)}{\eta(t)} = A_1 M_S \left[\frac{4\gamma_0^2}{\omega_0^2}, \frac{4\epsilon}{\omega_0^2}, \frac{\omega_0}{2} t \right] + A_2 M_C \left[\frac{4\gamma_0^2}{\omega_0^2}, \frac{4\epsilon}{\omega_0^2}, \frac{\omega_0}{2} t \right], \quad (4.42)$$

$$k_+(t) = I(t) + k_0, \quad (4.43)$$

com $c_1 = 0$, M_S e M_C são as funções de Mathieu, A_1 , A_2 e c_4 são constantes de integração, e

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= g^2 + \frac{2^{19/3} \pi^{4/3} [V_2(t)]^{2/3}}{3g^{2/3}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2048\pi^2 V_2(t)}{27g^4}} \right)^{-1/3} \\ &\quad - 2^{8/3} \pi^{2/3} g^{2/3} [V_2(t)]^{1/3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2048\pi^2 V_2(t)}{27g^4}} \right)^{1/3}, \\ I(t) &= - \int [\gamma_0^2 - 2\epsilon \cos(\omega_0 t)] \langle z(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Podemos inferir da eq. (4.41), que o parâmetro η oscila com a mesma frequência da armadilha, devido à dependencia de η e $V_2(t)$. Na Figura 4.5, mostramos a evolução da largura do sóliton.

Assim, a partir da eq. (4.42), podemos destacar três tipos diferentes de comportamento, para diferentes escolhas dos parâmetros ϵ e ω_0 :

Movimento periódico, com $\epsilon = 0$

Nesta situação, as funções de Mathieu estão numa região de transição entre a fase estável e instável. Além disso, o potencial é harmônico com frequência constante γ_0 , por esse motivo a largura do sóliton é constante. Também, as funções M_S , M_C , $I(t)$ são reduzidas à forma

$$M_S \left[\frac{4\gamma_0^2}{\omega_0^2}, \frac{4\epsilon}{\omega_0^2}, \frac{\omega_0}{2}t \right] = \sin(\gamma_0 t) \quad ; \quad M_S \left[\frac{4\gamma_0^2}{\omega_0^2}, \frac{4\epsilon}{\omega_0^2}, \frac{\omega_0}{2}t \right] = \cos(\gamma_0 t),$$

$$I(t) = A_1 \gamma_0 \cos(\gamma_0 t) - A_2 \gamma_0 \sin(\gamma_0 t).$$

Assim, o comportamento periódico dos $\langle z(t) \rangle$, $k_{\pm}(t)$, e da amplitude das componentes do sóliton $|\Psi_1|^2$, $|\Psi_2|^2$, e do sistema, $|\Psi_{sist}|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$, são mostrados nas Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9, respectivamente.

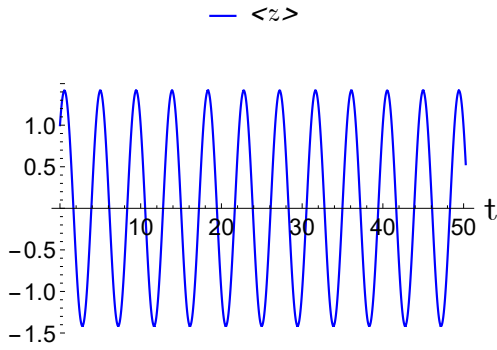


Figura 4.6: Movimento do centro de massa, eq. (4.42), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.

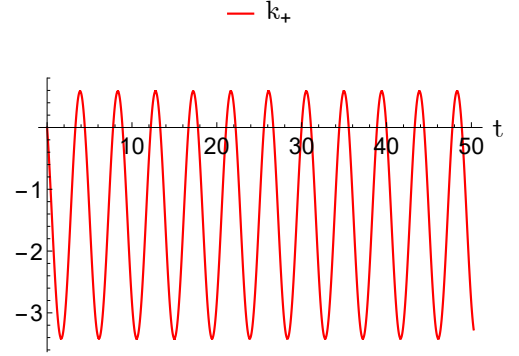


Figura 4.7: Evolução do momento linear do sistema, eq. (4.43), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $k_0 = -A_1 \gamma_0$.

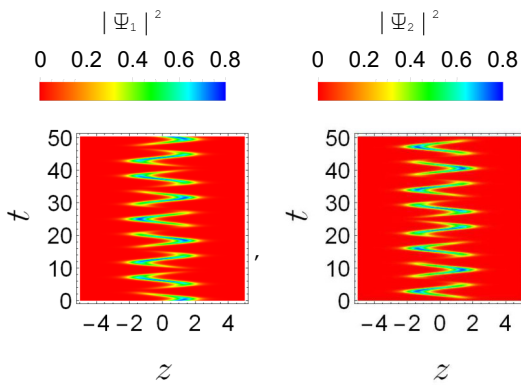


Figura 4.8: Dinâmicas de $|\Psi_1|^2$ e $|\Psi_2|^2$, com $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $c_3 = 0$, e $c_4 = -A_2$.

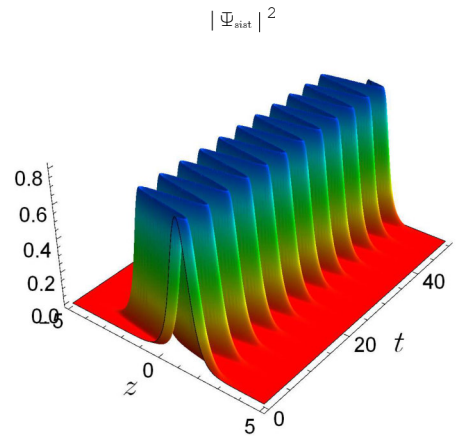


Figura 4.9: Evolução do módulo do sóliton do sistema, $|\Psi_{sist}|^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$.

Ressonância, com $\epsilon \neq 0$ e $\omega_0 \approx \gamma_0$

Nesta ocasião, as funções de Mathieu estão na região de fase instável. Ademais, o potencial é harmônico com frequência dependente do tempo, por esse motivo a largura do sólton depende só do tempo, Figura 4.5. O comportamento ressonante de $\langle z(t) \rangle$, $k_+(t)$, das amplitudes das componentes do sólton $|\Psi_1|^2$, $|\Psi_2|^2$ e do sistema $|\Psi_{sist}|^2$, são mostrados nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, respectivamente.

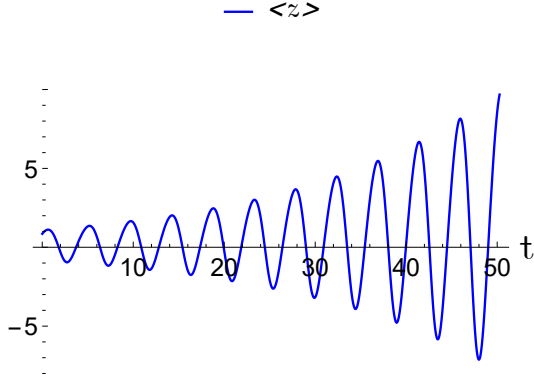


Figura 4.10: Movimento de $\langle z(t) \rangle$, eq. (4.42), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = 1.39$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.

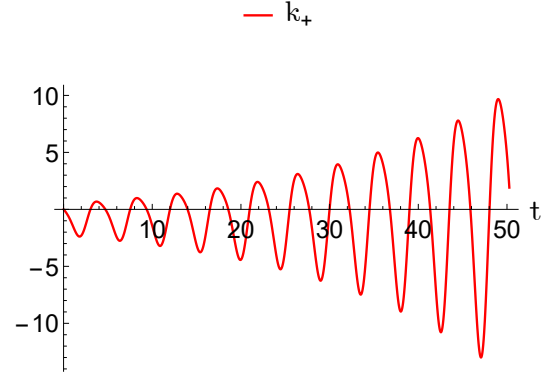


Figura 4.11: Evolução do momento linear do sistema, eq. (4.43), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = 1.39$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $k_+(0) = 0$.

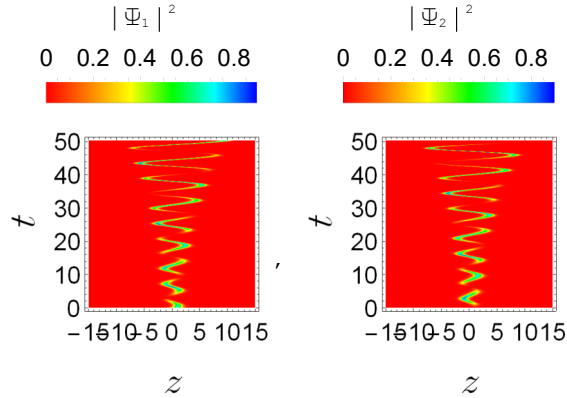


Figura 4.12: Comportamento ressonante de $|\Psi_1|^2$ e $|\Psi_2|^2$, com $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\omega_0 = 1.39$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.

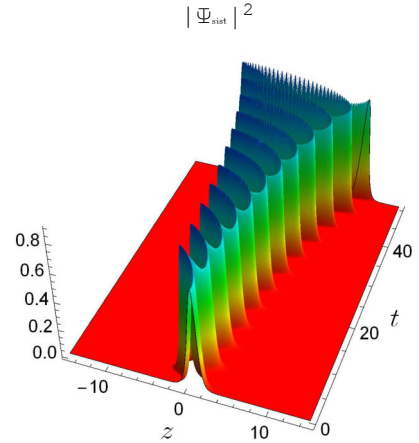


Figura 4.13: Dinâmica da amplitude do sólton do sistema, $|\Psi_{sist}|^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0.5$, $\gamma = 1.39$, $A_1 = 1$, e $A_2 = 1$.

Movimento quase-periódico, com $\epsilon \neq 0$ e $\omega_0 \neq \gamma_0$

Neste cenário, as funções de Mathieu estão na região de fase estável. Finalmente, a evolução de $\langle z(t) \rangle$, $k_+(t)$, $\phi(t)$, e da amplitude do sólton do sistema, $|\Psi_{sist}|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$, são mostrados nas Figuras 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17, respectivamente.

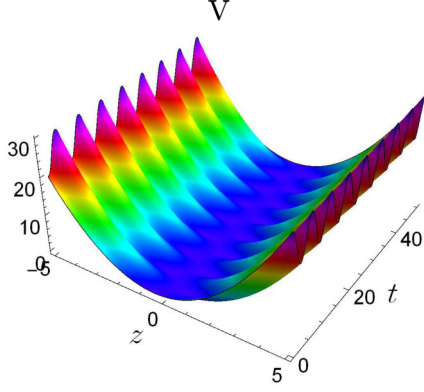


Figura 4.18: Progresso, no tempo, do potencial, eq. (4.44), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $\omega_0 = 1$.

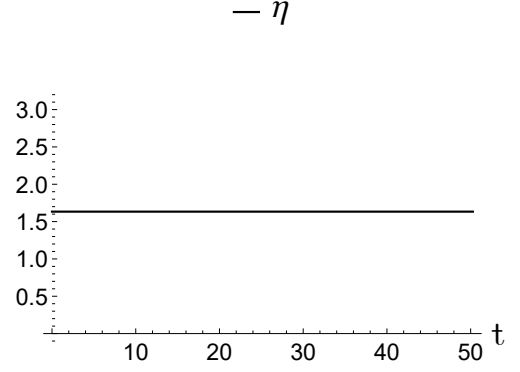


Figura 4.19: Valor da largura do sóliton η , com $g = -1$ e $\gamma_0 = \sqrt{2}$

Para o potencial, eq. (4.44), as eqs. (4.33)-(4.35), tomam a forma

$$-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} + \frac{\gamma_0^2}{2} \frac{\pi^2}{6\eta^2} = 0 \quad ; \quad k_+(t) = I(t) + k_0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + \gamma_0^2 \frac{\xi}{\eta} = F_0 \cos(\omega_0 t),$$

onde $I(t) = -\frac{F_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \gamma_0^2 \int \frac{\xi}{\eta} dt$. Nesta ocasião, a largura do sóliton η é constante, e toma o mesmo valor do caso 1 para $\epsilon = 0$ na eq. (4.41), Figura 4.19.

As outras soluções analíticas do sistema são

$$\langle z(t) \rangle = -\frac{\xi(t)}{\eta(t)} = A_1 \sin(\gamma_0 t) + A_2 \cos(\gamma_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \gamma_0^2} \cos(\omega_0 t), \quad (4.45)$$

$$k_+(t) = A_1 \gamma_0 \cos(\gamma_0 t) - A_2 \gamma_0 \sin(\gamma_0 t) + \frac{\omega_0 F_0}{\gamma_0^2 - \omega_0^2} \sin(\omega_0 t) + k_0, \quad (4.46)$$

com $c_1 = 0$, A_1 , A_2 , e c_5 são constantes de integração. A partir dessas últimas expressões, podemos deduzir que para $\omega_0 \cong \gamma_0$ o termo associado a F_0 aumenta acentuadamente, e quando $\omega_0 = \gamma_0$ se produz o fenômeno de ressonância devido à modulação da intensidade do potencial linear. A dinâmica de $\langle z(t) \rangle$, $k_+(t)$, $\phi(t)$, $|\Psi_1|^2$, e $|\Psi_2|^2$ são mostrados nas Figuras 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 em todas elas foi empregado: $\omega_0 = 1$ e $\omega_0 = 1.3 \approx \gamma_0$.

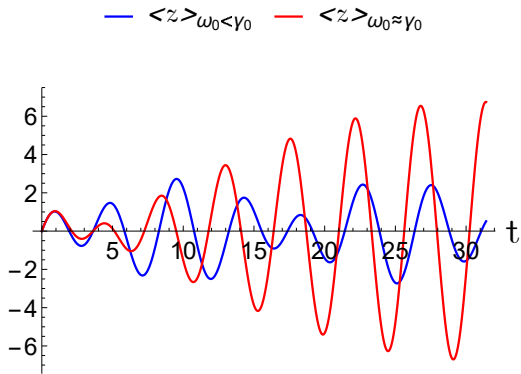


Figura 4.20: trajetória do centro de massa, eq. (4.45), com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, e $A_2 = -F_0 / [\gamma_0 (\omega_0^2 - \gamma_0^2)]$.

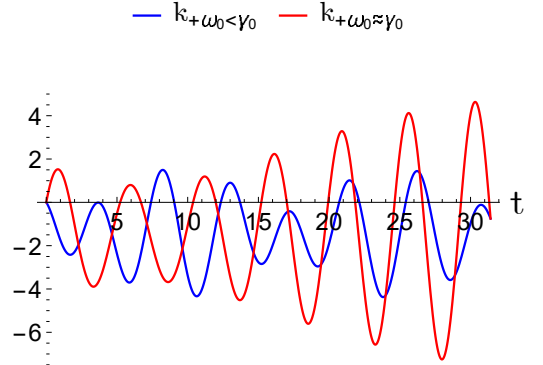


Figura 4.21: Evolução do momento linear do sistema, eq. (4.46), com $\gamma = \sqrt{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $F_0 = 1$, e $k_0 = -A_1 \gamma_0$.

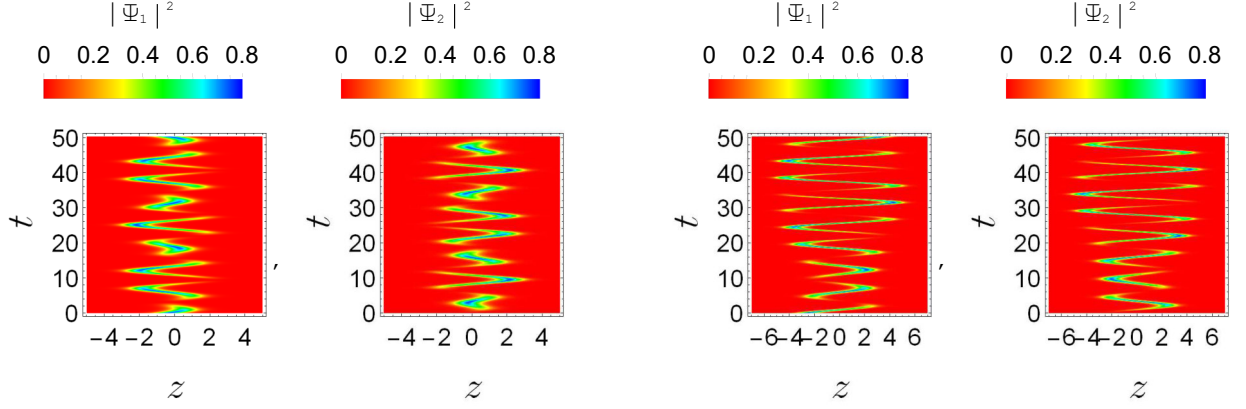


Figura 4.22: Dinâmica de $|\Psi_1|^2$, e $|\Psi_2|^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = -F_0/[\gamma_0(\omega_0^2 - \gamma_0^2)]$, e $\omega_0 = 1$.

Figura 4.23: Dinâmica de $|\Psi_1|^2$, e $|\Psi_2|^2$, com $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = -F_0/[\gamma_0(\omega_0^2 - \gamma_0^2)]$, e $\omega_0 = 1, 3$.

4.2.3 Caso 3: $V_4(t) = V_4$; $V_3(t) = V_3 \operatorname{sn}(\omega_0 t|m)$; $V_2(t) = \frac{\gamma_0^2}{2}$; $V_1(t) = V_0(t) = 0$.

Neste caso, o potencial anarmônico que armadilha o sistema é da forma

$$V(z, t) = V_4 z^4 + V_3 \operatorname{sn}(\omega_0 t|m) z^3 + \frac{\gamma_0^2}{2} z^2, \quad (4.47)$$

onde V_4 , V_3 , γ_0 , ω_0 , e $\operatorname{sn}(\omega_0 t|m)$ é a função elíptica de Jacobi com parâmetro elíptico $0 \leq m \leq 1$ [48]. Estudos recentes mostram que a física dos potenciais anarmônicos e sistemas confinados por esses potenciais é bastante rica. Por exemplo, a introdução de uma anarmonicidade quártica adicional ao potencial da armadilha harmônica evita a perda de um condensado de Bose-Einstein que gira rapidamente [49]. Um potencial de estrutura semelhante foi criado experimentalmente no interior de um guia de onda para estudar a dinâmica de um BEC [51]. O perfil do potencial anarmônico é mostrado na Figura 4.24.

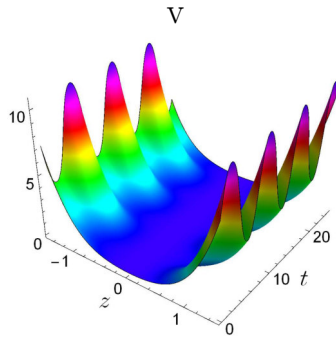


Figura 4.24: Perfil do potencial de armadilhamento, eq. 4.47, com $V_4 = 1$, $V_3 = -1$, $\omega_1 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, e $\omega_0 = 3$.

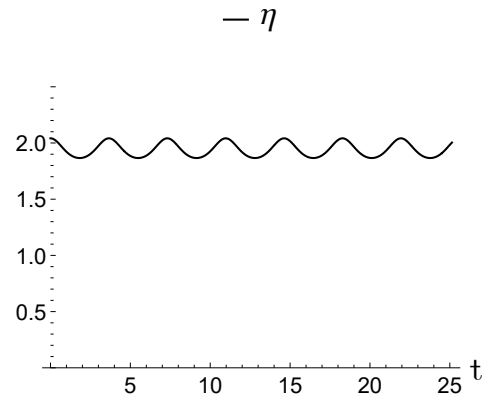


Figura 4.25: Largura do sólito, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, e $\omega_0 = 1.1$.

Com o potencial quártico as equações da largura, do momento linear do sistema, e do

centro de massa, eq. (4.33)-(4.35), tomam a forma:

$$-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} + \frac{\gamma_0^2}{2} \frac{\pi^2}{6\eta^2} - V_3 \frac{\pi^2}{2} \text{sn}(\omega_0 t|m) \frac{\xi}{\eta^3} + V_4 \frac{7\pi^4 + 60\pi^2 \xi^2}{60\eta^4} = 0;$$

$$k_+(t) = I(t) + k_0;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + 2 \frac{\gamma_0^2}{2} \frac{\xi}{\eta} - V_3 \text{sn}(\omega_0 t|m) \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} = 0;$$

com

$$I(t) = \gamma_0^2 \int \left(\frac{\xi}{\eta} - V_3 \text{sn}(\omega_0 t|m) \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} \right) dt.$$

A solução analítica que encontramos para a equação do centro de massa é dada pela expressão

$$\langle z(t) \rangle = -\frac{\xi(t)}{\eta(t)} = A \text{sn}(\omega_0 t|m), \quad (4.48)$$

$$A = \pm \sqrt{\frac{\gamma_0^2 - \omega_0^2}{4V_4}}, \quad m = \frac{\gamma_0^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2},$$

onde $V_3 = -4V_4A$ e $\frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \leq \omega_0 < \gamma_0$.

Empregando a eq. (4.48), encontramos que a largura do sólton é a solução real positiva de uma equação de sexto grau, da forma:

$$\eta^6 + \frac{g}{2}\eta^5 + \left[3\pi^2 A^2 V_4 \text{sn}^2(\omega_0 t|m) - \frac{\pi^2 \gamma_0^2}{4} \right] \eta^2 - \frac{7\pi^4}{20} V_4 = 0, \quad (4.49)$$

e o momento linear do sistema é dada pela expressão

$$k_+(t) = \frac{2A^3 V_4}{\omega_0 m} \text{cn}(\omega_0 t|m) \text{dn}(\omega_0 t|m) + k_0. \quad (4.50)$$

A evolução da largura do sólton é mostrado na Figura 4.25. O perfil da trajetória do centro de massa $\langle z(t) \rangle$, do momento linear do sistema $k_+(t)$, das amplitudes das componentes do sólton $|\Psi_1|^2$, $|\Psi_2|^2$ e do sistema $|\Psi_{\text{sistema}}|^2$ são apresentadas nas Figuras 4.26, 4.27, 4.28 e 4.29, respectivamente.

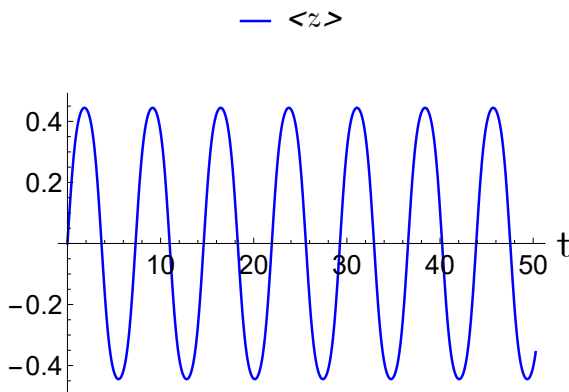


Figura 4.26: Trajetória de $\langle z(t) \rangle$, eq. 4.48, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, e $\omega_0 = 1.1$.

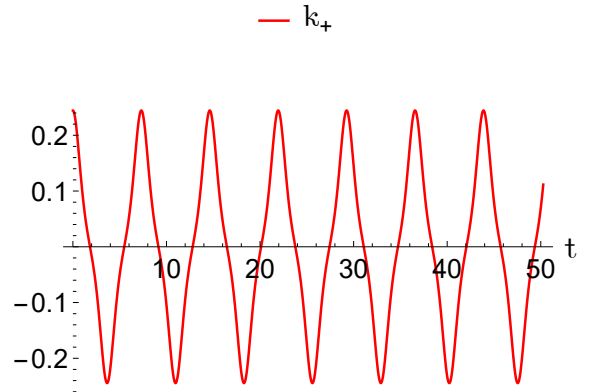


Figura 4.27: Evolução de $k_+(t)$, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, e $k_0 = 0$.

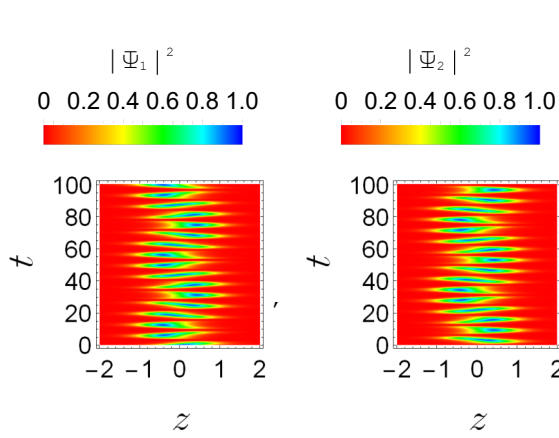


Figura 4.28: Dinâmica de $|\Psi_1|^2$ e $|\Psi_2|^2$, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, $\omega_0 = 1.1$, $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, e $c_3 = 0$.

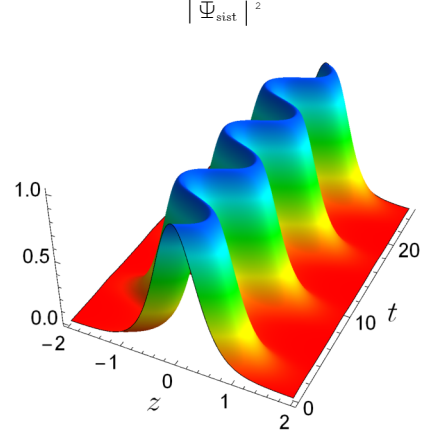


Figura 4.29: Movimento de $|\Psi_{sist}|^2$, com $V_4 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $g = -1$, $\omega_0 = 1.1$, $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, e $c_3 = 0$.

Até agora, estudamos três modelos, que exibem equações dinâmicas, da trajetória do centro de massa $\langle z(t) \rangle$ e da evolução do momento linear do sistema $k_+(t)$, que apresentam soluções analíticas exatas. A partir das soluções analíticas, que resolvem as equações de movimento, podemos deduzir diferentes dinâmicas oscilatórias para $\langle z(t) \rangle$ e $k_+(t)$. O estudo da estabilidade, das soluções analíticas exatas, às perturbações ao longo do tempo será realizado e apresentado, abaixo, para todos os casos.

Em seguida, estudaremos diferentes dinâmica de um BEC com acoplamento spin-órbita.

4.3 Dinâmica de um BEC de átomos com acoplamento spin-órbita ($\lambda \neq 0$)

Nesta seção fazemos $\lambda \neq 0$. Nós assumimos, a mesma aproximação realizada por Wen *et. al* [50] para simplificar a eq. (4.19), e também mostramos brevemente os resultados obtidos por eles, para o caso livre e estudamos com um potencial de armadilhamento.

Portanto, assumindo que $k_-(t) = \lambda$ e no caso de acoplamento fraco $\pi\lambda \ll \eta$ (ou $x = \frac{\pi\lambda}{\eta} \approx 0$), teremos

$$x \coth(x) \approx 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \dots \quad ; \quad \sinh(x) \approx x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots,$$

com esses últimos resultados e em primeira aproximação, a equação de movimento, eq. (4.19), é uma identidade.

Em seguida, vamos estudar diversas dinâmicas do sistema. Vamos começar analisando o caso sem potencial (caso livre) e nos focaremos em achar soluções solitônicas estacionárias.

4.3.1 Caso livre e Sóliton estacionário

Como dissemos acima, este caso foi amplamente estudado por Wen *et. al* [50], mas aqui nos concentraremos em encontrar sólitons estacionários. Nesta ocasião, analisaremos

as eqs. (4.15)-(4.20), que tomam a forma

$$\begin{aligned} \dot{k}_+ &= 2\Omega\lambda\sin(2\theta)\sin(\phi) \quad ; \quad \dot{\theta} = -\Omega\sin(\phi), \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\xi}{\eta}\right] &= k_+ \quad ; \quad \dot{\varphi}_- = -\delta - \Omega\cos(\phi)\cot(2\theta), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} = 0. \quad (4.52)$$

Para alcançar nosso objetivo, usaremos o método dos pontos fixos [34–36]: fazemos as derivadas temporais dos parâmetros varacionais igual a zero *i.e.* $\frac{dA}{dt} = 0$.

A partir da eq. (4.52), teremos que a largura do sóliton é

$$\eta = -\frac{g}{2}. \quad (4.53)$$

Agora, aplicamos o método de pontos fixos à equação (4.51), teremos

$$\begin{aligned} 0 &= 2\Omega\lambda\sin(2\theta_\star)\sin(\phi_\star) \quad ; \quad 0 = -\Omega\sin(\phi_\star), \\ 0 &= -\lambda\cos(2\theta_\star) + \lambda\cos(2\theta_\star) + k_{+\star} \quad ; \quad 0 = -\delta - \Omega\cos(\phi_\star)\cot(2\theta_\star), \end{aligned}$$

onde os parâmetros com subscripto $\star$ estão indicando os valores deles nos pontos fixos. Das últimas relações encontramos

$$k_{+\star} = 0 \quad ; \quad \phi_\star = n\pi \quad ; \quad \theta_\star = \frac{1}{2} \arctan\left[\frac{\Omega(-1)^{n+1}}{\delta}\right], \quad (4.54)$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. O valor de $\theta_\star$ mostra que no começo o desbalanço de spin do sistema é diferente de zero, e depende da intensidade do efeito Zeeman, já que o efeito Zeeman é quem separa o estado hiperfino dos átomos de ^{87}Rb , tendo uma relação com o spin do sistema. Da eq. (4.54) e da suposição $k_-(t) = \lambda$, encontramos

$$k_1(t) = k_{1\star} = \lambda \quad ; \quad k_2(t) = k_{2\star} = 0. \quad (4.55)$$

Finalmente, a solução estacionária, eq. (4.7), do sistema cuja dinâmica é governada pelas eqs. (4.3) e (4.4), é da forma

$$\begin{aligned} \Psi_1(z, t) &= \sqrt{-\frac{g}{4}}\sin(\theta_\star)\operatorname{sech}\left[-\frac{g}{2}(z + \langle z \rangle_\star)\right] e^{\iota(\lambda z + \varphi_{1\star})}, \\ \Psi_2(z, t) &= \sqrt{-\frac{g}{4}}\cos(\theta_\star)\operatorname{sech}\left[-\frac{g}{2}(z + \langle z \rangle_\star)\right] e^{\iota\varphi_{2\star}}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde $\theta_\star$ é dada pela expressão eq. (4.54) e $\langle z \rangle_\star$, $\varphi_{1\star}$, $\varphi_{2\star}$ são constantes reais que satisfazem a relação: $\phi_\star = -2\lambda\langle z \rangle_\star + \varphi_{1\star} - \varphi_{2\star} = n\pi$. Da eq. (4.56), inferimos que as componentes do vetor pseudo-spin $\mathbf{S}$ são dadas pela eq. (4.57) e a sua precessão na Figura 4.30

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \sin(2\theta_\star)\cos\phi_\star = -\frac{\Omega}{\sqrt{\delta^2 + \Omega^2}} \quad ; \quad S_y(t) = -\sin(2\theta_\star)\sin\phi_\star = 0; \\ S_x(t) &= -\cos(2\theta_\star) = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \Omega^2}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

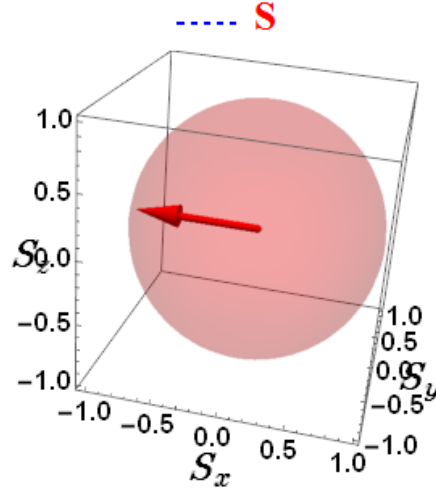


Figura 4.30: Precessão de pseudo-spin $\mathbf{S}$ para o caso estacionário.

Neste ponto, é importante analisar a estabilidade, para pequenas perturbações, do sóliton estacionário. Para tanto, perturbamos os parâmetros variacionais, a partir de seus pontos fixos, na forma

$$A(t) = A_\star + \tilde{A}(t),$$

onde $\tilde{A}(t)$ é uma pequena perturbação dependente do tempo e $A_\star$ são os pontos fixos (constantes). Ora, substituindo os parâmetros variacionais perturbados nas eqs. (4.51) e (4.25), obtemos as equações de movimento das perturbações dos parâmetros variacionais

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (k_{+\star} + \tilde{k}) &= 2\lambda\Omega \sin(2\theta_\star + 2\tilde{\theta}) \sin(\phi_\star + \tilde{\phi}), \\ \frac{d}{dt} (\theta_\star + \tilde{\theta}) &= -\Omega \sin(\phi_\star + \tilde{\phi}), \\ \frac{d}{dt} (\langle z \rangle_\star + \tilde{\langle z \rangle}) &= k_{+\star} + \tilde{k}_+, \\ \frac{d}{dt} (\phi_\star + \tilde{\phi}) &= -2\delta + 2\lambda (k_{+\star} + \tilde{k}_+) \\ &\quad - 2\Omega \cos(\phi_\star + \tilde{\phi}) \cot(2\theta_\star + 2\tilde{\theta}). \end{aligned}$$

A aproximação linear das funções trigonométricas entorno da perturbação, são da forma

$$\begin{aligned} \sin(x_\star + \tilde{x}) &\approx \sin(x_\star) + \cos(x_\star) \tilde{x}, \\ \cos(x_\star + \tilde{x}) &\approx \cos(x_\star) - \sin(x_\star) \tilde{x}, \\ \cot(x_\star + \tilde{x}) &\approx \cot(x_\star) - \csc^2(x_\star) \tilde{x}, \end{aligned}$$

assim, usando a aproximação linear e a eq. (4.54), as equações das perturbações dos parâmetros variacionais são reduzidas à forma

$$\frac{d\tilde{k}_+}{dt} = 2\lambda\Omega (-1)^n \sin(2\theta_\star) \tilde{\phi}, \quad (4.58)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = -\Omega (-1)^n \tilde{\phi}, \quad (4.59)$$

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = \tilde{k}_+, \quad (4.60)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dt} = 2\lambda\tilde{k}_+ + 4\Omega(-1)^n \csc^2(2\theta_*)\tilde{\theta}. \quad (4.61)$$

Para encontrar as soluções analíticas, que resolvem as equações diferenciais das perturbações variacionais, procedemos da seguinte maneira: Derivamos com respeito ao tempo e a eq. (4.61), e substituímos as eqs. (4.58) e (4.59), teremos

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\phi} + [4\Omega^2 \csc^2(2\theta_*) - 4(-1)^n \lambda^2 \Omega \sin(2\theta_*)]\tilde{\phi} = 0.$$

A função analítica da perturbação $\tilde{\phi}$, que resolve a última expressão, é dada pela relação

$$\tilde{\phi}(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad (4.62)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\sin^2(2\theta_*)} \left[1 - \frac{(-1)^n \lambda^2}{\Omega} \sin^3(2\theta_*) \right]}, \quad (4.63)$$

e A_1 e ϕ_1 são constantes de integração. A partir da eq. (4.63), inferimos que

$$\begin{aligned} \text{Quando } n \text{ é par ou zero} & : \Omega \geq \lambda^2 \sin^3(2\theta_*), \\ \text{Quando } n \text{ é ímpar} & : \Omega \geq -\lambda^2 \sin^3(2\theta_*), \end{aligned}$$

esses últimas relações, mostram o vínculo entre a intensidade de acoplamento spin-órbita λ e a intensidade Ω com o parâmetro θ_* . As outras soluções dos parâmetros variacionais, são obtidas substituindo a eq. (4.62) nas eqs. (4.58)-(4.60) e integrando, obtendo as expressões

$$\begin{aligned} \tilde{k}_+(t) &= \frac{2\lambda\Omega(-1)^n A_1}{\omega \csc(2\theta_*)} \sin(\omega t + \phi_1) + \tilde{k}_{+0}, \\ \tilde{\theta}(t) &= -\frac{\Omega(-1)^n A_1}{\omega} \sin(\omega t + \phi_1) + \tilde{\theta}_0, \\ \langle \widetilde{z(t)} \rangle &= -\frac{2\lambda\Omega(-1)^n A_1}{\omega^2 \csc(2\theta_*)} \cos(\omega t + \phi_1) + \tilde{k}_{+0}t + \langle \widetilde{z} \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Por último, substituímos as soluções, eqs. (4.62) e (4.64), na eq. (4.61) obtemos a relação

$$0 = 2\lambda\tilde{k}_{+0} + \frac{4\tilde{\Omega}(-1)^n}{\sin^2(2\theta_*)}\tilde{\theta}_0.$$

Dessa última relação, deduzimos que quando $\tilde{\theta}_0 = \tilde{k}_{+0} = 0$ as perturbações dos parâmetros variacionais, eqs. (4.62) e (4.64), são funções harmônicas, o que mostra que os pontos fixos são linearmente estáveis e, portanto os sólitons estacionários eq. (4.56), dentro do método dos parâmetros variacionais.

Ato contínuo, passamos a estudar as dinâmicas do BEC baixo a influência de potenciais polinomiais. Nesta situação, as eqs. (4.20), (4.21)-(4.25) são reduzidas à forma

$$-\frac{g}{6}\eta - \frac{\eta^2}{3} + V_2 \frac{\pi^2}{6\eta^2} - V_3 \frac{\pi^2 \xi}{2\eta^3} + V_4 \frac{7\pi^4 + 60\pi^2 \xi^2}{60\eta^4} = 0; \quad (4.65)$$

$$k_+(t) = \lambda \cos(2\theta) + I(t) + k_0; \quad (4.66)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] + 2V_2 \frac{\xi}{\eta} - V_3 \frac{\pi^2 + 12\xi^2}{4\eta^2} + V_4 \frac{\pi^2 \xi + 4\xi^3}{\eta^3} = V_1 - 2\Omega \lambda \sin(2\theta) \sin(\phi); \quad (4.67)$$

$$\dot{\phi} = -2\delta + 2k_0\lambda + 2\lambda^2 \cos(2\theta) - 2\Omega \cos(\phi) \cot(2\theta) + 2\lambda I; \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= 2(-\delta + k_0\lambda) S_y - 2\lambda^2 S_y S_z + 2\lambda I S_y, \\ \dot{S}_y &= 2(\delta - k_0\lambda) S_x + 2\lambda^2 S_x S_z \\ &\quad - 2\Omega S_z - 2\lambda I S_x, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\dot{S}_z = 2\Omega S_y. \quad (4.70)$$

A partir dessas últimas expressões, eqs. (4.65)-(4.70), deduzimos que o acoplamento spin-órbita λ influencia a dinâmica externa e interna do sóliton, com ou sem potencial. Especificamente, o acoplamento spin-órbita influencia o momento linear k_+ , o centro de massa $-\xi/\eta$, a diferença de fase ϕ , e o pseudo-spin $\mathbf{S}$ do sistema, como foi amplamente estudado por Wen [50]. Enquanto que, o potencial tem influência sobre a dinâmica externa do sóliton, com ou sem acoplamento spin-órbita, e somente influencia a dinâmica interna do sóliton quando o sistema apresenta acoplamento spin-órbita.

Em seguida, apresentamos um caso onde o potencial tem influência sobre a dinâmica do pseudo-spin $\mathbf{S}$ do sistema.

4.3.2 Caso 4: $V_1(t) = F_0 \operatorname{dn}(\omega_0 t|m) \operatorname{sn}(\omega_0 t|m)$; $V_2(t) = V_3(t) = V_4(t) = 0$

Nesta ocasião, o sistema está baixo a ação de um potencial linear, da forma

$$V(z, t) = F_0 \operatorname{dn}(\omega_0 t|m) \operatorname{sn}(\omega_0 t|m) z. \quad (4.71)$$

Esse potencial externo linear é matematicamente semelhante ao potencial considerado na óptica não-linear no modelo isoespectral de Chen e Liu [46]. Recentemente o potencial linear externo foi empregado para estudar a dinâmica de ondas não-lineares extremas por Serkin. [52], e no estudo de sólitons não-autônomos por Li [53] e por Yang. [54]. O perfil do potencial linear é mostrado na Figura 4.31.

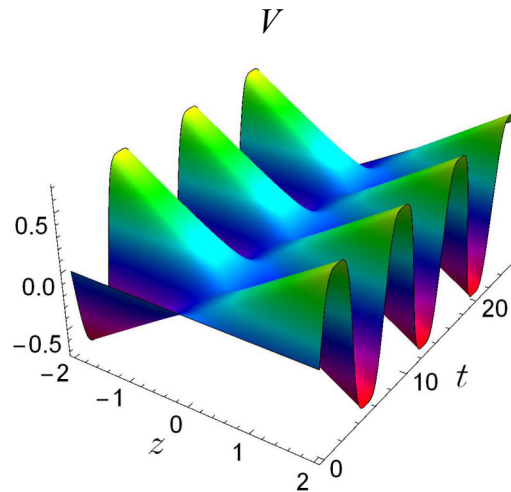


Figura 4.31: Evolução do potencial linear externo, eq. (4.71), com $F_0 = 0.5$, $\omega_0 = 1$ e $m = 0.5$

Com a forma do potencial linear externo, a largura do s3liton η , eq. (4.65), e a integral $I(t)$, tomam a forma

$$\eta = -\frac{g}{2} \quad ; \quad I(t) = \frac{F_0}{\omega_0} \text{cn}(\omega_0 t|m). \quad (4.72)$$

Portanto, usando a 3ltima express3o, as eqs. (4.66)-(4.70) s3o reduzidas 3a forma

$$\begin{aligned} k_+(t) &= -\lambda S_z + \frac{F_0}{\omega_0} \text{cn}(\omega_0 t|m) + k_0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\xi}{\eta} \right] &= F_0 \text{dn}(\omega_0 t|m) \text{sn}(\omega_0 t|m) + 2\Omega \lambda S_y, \\ \dot{\phi} &= -2\delta + 2k_0 \lambda - 2\lambda^2 S_z + 2\Omega \frac{S_x S_z}{1 - S_z^2} + 2\lambda \frac{F_0}{\omega_0} \text{cn}(\omega_0 t|m), \\ \dot{S}_x &= 2(-\delta + k_0 \lambda) S_y - 2\lambda^2 S_y S_z \\ &\quad + 2\lambda \frac{F_0}{\omega_0} \text{cn}(\omega_0 t|m) S_y, \\ \dot{S}_y &= 2(\delta - k_0 \lambda) S_x + 2\lambda^2 S_x S_z - 2\Omega S_z \\ &\quad - 2\lambda \frac{F_0}{\omega_0} \text{cn}(\omega_0 t|m) S_x, \\ \dot{S}_z &= 2\Omega S_y. \end{aligned}$$

As solu33es anal3ticas exatas, que encontramos para as 3ltimas express3es s3o

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \frac{F_0 \lambda + \sqrt{m} \omega_0^2}{2\lambda^2 \Omega} \left[\frac{4\Omega^2 - (1 - 2m) \omega_0^2}{2\sqrt{m} \omega_0^2} - \text{cn}^2(\omega_0 t|m) \right], \\ S_y(t) &= -\frac{F_0 \lambda + \sqrt{m} \omega_0^2}{2\lambda^2 \Omega} \text{dn}(\omega_0 t|m) \text{sn}(\omega_0 t|m), \\ S_z(t) &= \frac{F_0 \lambda + \sqrt{m} \omega_0^2}{\lambda^2 \omega_0} \text{cn}(\omega_0 t|m), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$k_+(t) = -\frac{\sqrt{m} \omega_0}{\lambda} \text{cn}(\omega_0 t|m) + k_0, \quad (4.74)$$

$$\langle z(t) \rangle = -\frac{\xi(t)}{\eta} = -\frac{\sqrt{m}}{\lambda} \frac{\arccos[\text{dn}(\omega_0 t|m)] \text{sn}(\omega_0 t|m)}{\sqrt{1 - \text{dn}^2(\omega_0 t|m)}} + c_1 t + c_2, \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\sqrt{m} \frac{\arccos[\text{dn}(\omega_0 t|m)] \text{sn}(\omega_0 t|m)}{\sqrt{1 - \text{dn}^2(\omega_0 t|m)}} \\ &\quad + \arctan \left[\frac{\sqrt{m}(4\Omega^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^2 - 4\Omega^2} \frac{\text{sn}(\omega_0 t|m)}{\sqrt{1 - m \text{sn}^2(\omega_0 t|m)}} \right], \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde c_1 e c_2 s3o constantes de integra33o, com $F_0 = -\frac{\sqrt{m} \omega_0^2}{\lambda} \left(1 \pm \frac{4\lambda^2 \Omega}{\sqrt{16m\Omega^2 \omega_0^2 + (\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2}} \right)$, $k_0 = c_1 = \delta/\lambda$, e $\delta = 0$. Queremos salientar que, as solu33es anal3ticas exatas, eqs. (4.72)-(4.76), t3mb3m resolvem as equa33es de movimento, eqs. (4.15)-(4.20), juntamente com

a solução analítica de $\varphi_-(t)$, expressa por

$$\begin{aligned} \varphi_-(t) = & \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\sqrt{m}(4\Omega^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^2 - 4\Omega^2} \frac{\text{sn}(\omega_0 t|m)}{\sqrt{1 - m \text{sn}^2(\omega_0 t|m)}} \right] \\ & + \frac{\sqrt{m} \arccos[\text{dn}(\omega_0 t|m)] \text{sn}(\omega_0 t|m)}{2 \sqrt{1 - \text{dn}^2(\omega_0 t|m)}} - \delta t + c_3, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde c_3 é uma constante de integração e com $\delta = 0$.

A precisão do pseupo-spin $\mathbf{S}$ e a evolução de suas componentes são mostradas nas Figuras 4.32 e 4.33.

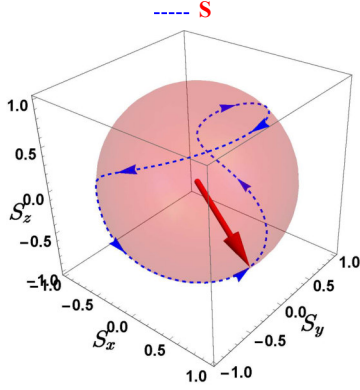


Figura 4.32: Precisão de $\mathbf{S}$ com $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\Omega = 0.5$, $m = (\omega_0^2 - 4\Omega^2)/\omega_0^2$.

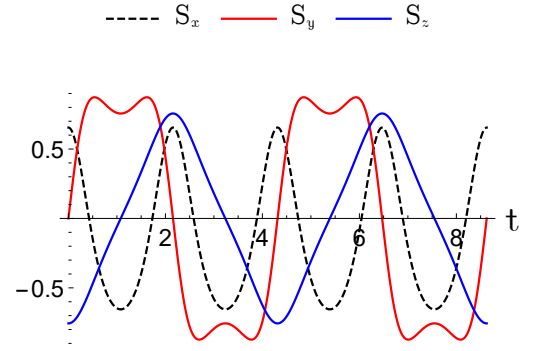


Figura 4.33: Dinâmica das componentes de $\mathbf{S}$, eq. 4.73, com $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\Omega = 0.5$, $m = (\omega_0^2 - 4\Omega^2)/\omega_0^2$.

Do mesmo modo, a dinâmica de $\langle z(t) \rangle$, $k_+(t)$, $\phi(t)$, e $\varphi_-(t)$ são mostrados nas Figuras 4.34 e 4.35.

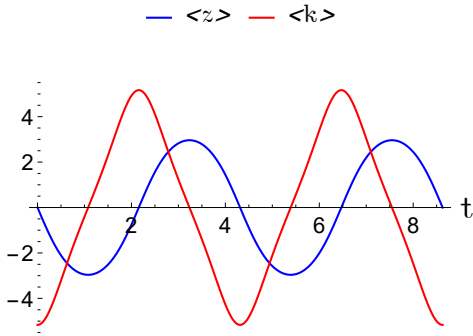


Figura 4.34: Trajetória de $\langle z(t) \rangle$, eq. 4.75, e evolução de $\langle k(t) \rangle$, com $\Omega = 0.5$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\delta = 0$, e $c_2 = 0$.

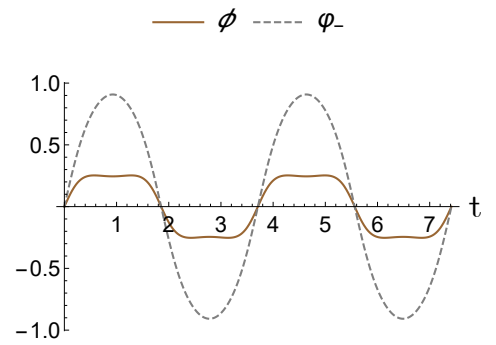


Figura 4.35: Evolução de $\varphi_-(t)$, eq. 4.77, com $\Omega = 0.5$, $\omega_0 = 2$, $\lambda = 0.5\sqrt{\Omega}$, $\delta = 0$, e $c_3 = 0$.

4.4 Análise da estabilidade das soluções

Na seções anteriores, diversos modelos que governam a dinâmica de um sólton vetorial criado num BEC com e sem acoplamento spin-órbita, foram estudadas. Especificamente, foram apresentados 4 modelos teóricos que descrevem a dinâmica de um sólton vetorial em um BEC, sobre a influência de potenciais externos, que poderiam ser realizados experimentalmente. No entanto, as condições experimentais podem provocar o colapso do sólton no BEC, já que esses experimentos estão sujeitos a erros experimentais involuntários, por esta razão, nesta seção será feita uma breve análise da estabilidade das soluções encontradas. Nós analisaremos a estabilidade por meio de simulações numéricas e usamos o primeiro critério de Lyapunov. O primeiro critério de Lyapunov é um dos mais importantes critérios de estabilidade, o qual indica que: Se uma pequena perturbação é feita em relação à posição de equilíbrio do sistema, e se o sistema perturbado mantém um comportamento próximo ao sistema não perturbado, então pode-se dizer que o sistema dinâmico é estável pelo primeiro critério de Lyapunov [65]. As simulações numéricas, são realizadas no software Wolfram Mathematica e empregamos o método de diferenças finitas baseado no algoritmo de Crank-Nicolson [66, 67].

Queremos destacar que, na análise da estabilidade realizada nesta dissertação, o parâmetro g que mede a intensidade da não-linearidade (interação de dois corpos), desempenha um papel importante, já que este parâmetro é responsável por estabilizar a dinâmica do sólton vetorial no BEC quando o sistema é perturbado, já que tem que ser o suficientemente intenso (em valor absoluto) para que o sistema permaneça estável.

No estudo da estabilidade das soluções analíticas, utilizamos os passos $\Delta t = 0.01$ e $\Delta z = 0.02$, no tempo e no espaço, respectivamente. Além disso, introduzimos uma pequena perturbação aleatória na condição inicial dos campos $\Psi_{\alpha num}(z, 0) = \Psi_{\alpha anal}(z, 0) + \Psi_{\alpha pert}(z, 0)$, onde $\alpha = 1, 2$, e a perturbação é da forma

$$\Psi_{\alpha pert}(z, 0) = 0.01R(z) \Psi_{\alpha anal}(z, 0), \quad (4.78)$$

onde $R(z)$ é uma número aleatório entre $[-0.4, 0.4]$ ou entre $[-0.5, 0.5]$. Com essa escolha da perturbação, nós deixamos o sistema evolucionar numericamente e mostramos a amplitude máxima do sistema em cada intervalo do tempo. A comparação entre os resultados numéricos e analíticos, para todas os casos estudados, são exibidos nas Figuras 4.36 e 4.37.

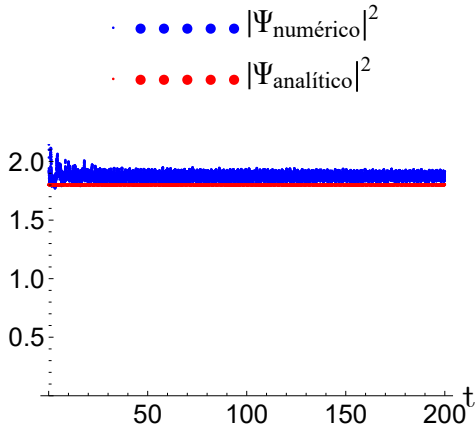


Figura 4.36: Caso 1: Movimento periódico, onde $R(z)=[-0.4, 0.4]$, com $g = -7$, $\lambda = 0$, .

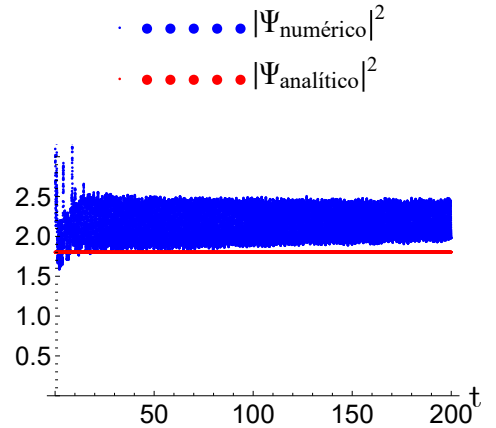


Figura 4.37: Caso 1: Movimento periódico, onde $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $g = -7$, $\lambda = 0$, $\omega_0 = \gamma_0/2$.

No caso 1, usamos os valores de $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $A_1 = A_2 = 1$, $c_3 = \pi/2$, $c_4 = k_0 = 0$, e $\omega = 2\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$.

No *movimento periódico*, a solução numérica perturbada evolui entorno da solução analítica quando $R(z) = [-0.4, 0.4]$, Figura 4.36. Enquanto que, no intervalo de $R(z) = [-0.5, 0.5]$, a solução numérica perturbado evolui com uma leve tendência a afastar-se da solução analítica, Figura 4.37. Por esse motivo, podemos garantir a estabilidade da solução analítica até uma perturbação de $R(z) = [-0.4, 0.4]$.

No *movimento quase-periódico*, quando tomamos $R(z) = [-0.5, 0.5]$, a solução numérica perturbada evolui entorno da solução analítica, Figura 4.38. Por esse motivo, podemos garantir a estabilidade da solução analítica até uma perturbação de $R(z) = [-0.5, 0.5]$.

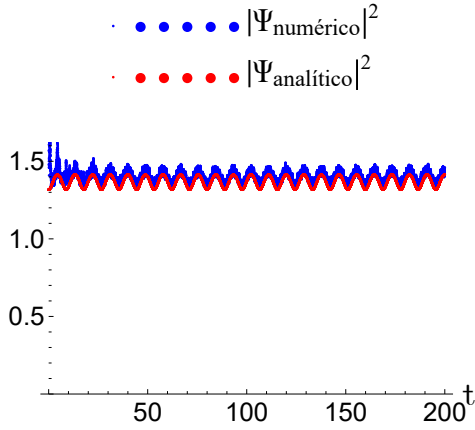


Figura 4.38: Caso 1: Movimiento quase-periódico, onde $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $\epsilon = 0.5$, $g = -5$, $\lambda = 0$, $\omega_0 = \gamma_0/2$.

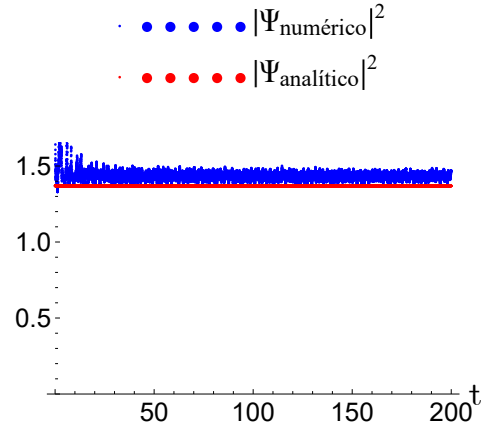


Figura 4.39: Caso 2: Consideramos $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $g = -5$, $\lambda = 0$, $\omega_0 = 1$.

No caso 2, Figura 4.39, empregamos os valores de $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $F_0 = 1$, $A_1 = 1$, $c_2 = \frac{2\Omega}{\omega}$, $A_2 = -\frac{F_0}{\gamma_0(\omega^2 - \gamma_0^2)}$, $c_3 = \pi/2$, $c_4 = k_0 = 0$, e $\omega = 2\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$.

No caso 3, utilizamos os valores de $\Omega = 0.5$, $\delta = 0.05$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\omega = 2\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$, $V_4 = 1$, $A = \frac{\sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{V_4}}$, $\omega_0 = 1.1$, $m = \frac{\gamma_0^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}$, $V_3 = -4V_4A$, $c_3 = \pi/2$, $c_4 = 0$, e $c_2 = 2\Omega/\omega$.

Neste caso, a solução numérica perturbada evolui nas vizinhanças da solução analítica, Figura 4.40. Por consequência, asseveramos que a solução analítica é estable até uma perturbação de $R(z) = [-0.5, 0.5]$. Na Figura 4.39, mostarmos a evolução da solução numérica perturbada entorno da solução analítica. Portanto, garantizamos a estabilidade da solução analítica até uma perturbação de $R(z) = [-0.5, 0.5]$.

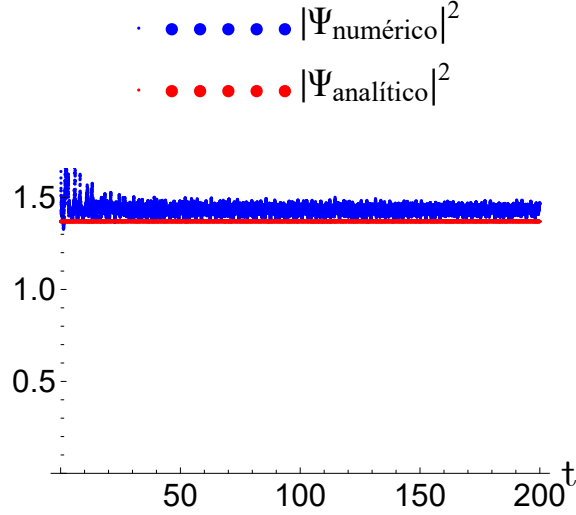


Figura 4.40: Caso 3: $R(z)=[-0.5, 0.5]$, com $g = -5$, $\lambda = 0$.

No caso 4, utilizamos os valores de $\Omega = 0.5$, $\lambda = 10^{-4}$, $\omega_0 \approx 1$, $m_j = \frac{\omega_0^2 - 4\Omega^2}{\omega_0^2}$, $F_0 = -\frac{\sqrt{m_j \omega_0^2}}{\lambda} \left[1 + \frac{4\lambda^2 \Omega}{\sqrt{16m_j \Omega^2 \omega_0^2 + (\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2}} \right]$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $k_0 = 0$ e $g = -10$. Neste caso apresentamos duas perturbações diferentes, na Figura 4.41 observa-se como a evolução do sistema perturbado permanece na vizinhança da solução analítica. Na Figura 4.42 mostramos uma perturbação maior, resultando em um comportamento instável do sistema.

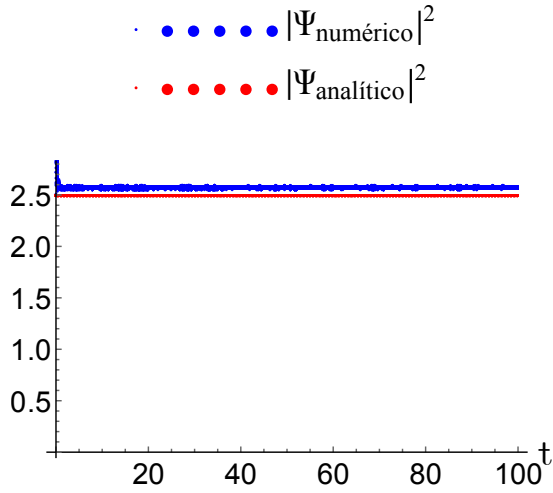


Figura 4.41: Caso 4: Consideramos uma perturbação de $R(z)=[-0.09, 0.09]$, com $\Omega = 0.5$, $g = -10$, $\lambda = 10^{-4}$ e $\omega_0 \approx 1$.

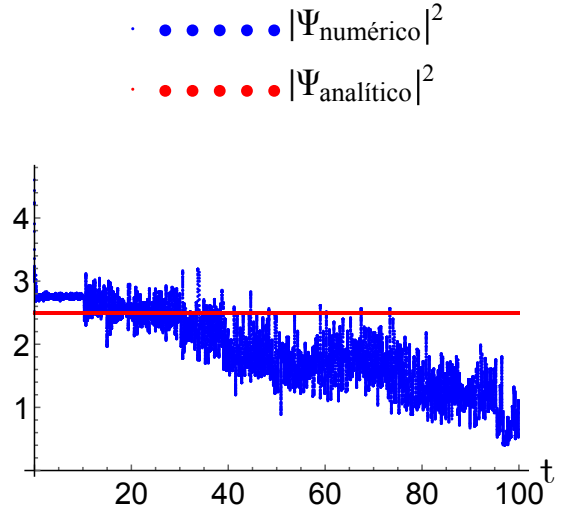


Figura 4.42: Caso 4: Consideramos uma perturbação de $R(z)=[-0.25, 0.25]$, com $\Omega = 0.5$, $g = -10$, $\lambda = 10^{-4}$ e $\omega_0 \approx 1$.

Capítulo 5

Conclusões e comentários

Neste trabalho, estudamos várias dinâmicas de um sólito vetorial brilhante-brilhante, criado em um BEC cujos átomos constituintes possuem dois estados internos hiperfinos, e cujo movimento orbital é acoplado a esses dois níveis hiperfinos (interação spin-órbita). A dinâmica do sólito vetorial é governado por duas equações de Gross-Pitaevskii acopladas, ou também chamadas de equações de Schrödinger não-lineares acopladas, eqs. (4.3) e (4.4). Estas equações acopladas, foram obtidas a partir de uma função de Lagrange, eq. (4.1), dependente de dois parâmetros de ordem, Ψ_1 e Ψ_2 , cada um correspondendo a cada componente do sólito vetorial.

Para resolver as equações acopladas, fue empregada a abordagem variacional [34, 50]. Esse abordagem nos permitiu estudar a dinâmica externa e interna do sólito vetorial. Por dinâmica externa nos referimos ao movimento do centro de massa do sólito $\langle z \rangle$ e à evolução do momento linear do sistema $\langle k \rangle$. A dinâmica interna é dada pela precessão do vetor pseudo-spin $\mathbf{S} = \mathbf{1}/2$ e pela diferença de fase entre os componentes do vetor sólito ϕ . O abordagem variacional consistiu em propor um ansatz, em nosso caso um ansatz da forma de um sólito vetorial brilhante-brilhante, dependente das funções escalares $\eta(t)$, $\theta(t)$, $\xi(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, $\varphi_1(t)$, e $\varphi_2(t)$ chamados parâmetros variacionais, e substituir aquele ansatz na função de Lagrange que agora dependente dos parâmetros variacionais. A partir dessa última função de Lagrange, obtemos as equações de movimento, eqs. (4.15)-(4.20) e (4.30), para cada um dos parâmetros variacionais. Ademais, fazendo uso das eqs. (4.15)-(4.20), construímos a equações que descrevem o movimento do centro de massa do sólito vetorial, eq. (4.24), e a evolução da diferença de fase entre as componentes do sólito vetorial, eq. (4.25).

Baseado nas equações de movimento, nós inferimos que a intensidade do termo de interação spin-órbita, λ , tem uma grande influência na dinâmica do sólito vetorial. Por exemplo, na eq. (4.24), λ acopla S_y com a dinâmica do centro de massa, enriquecendo sua dinâmica, o que foi amplamente estudada por Wen *et al* [50]. Enquanto que, na eq. (4.25), λ é responsável por acoplar o potencial exteno polinomial, através de $I(t)$ à diferença de fase entre os componentes do sólito vetorial ϕ , o que nos permite manipular a dinâmica de ϕ . Também, na equação (4.30) pode-se observar que, λ vincula o potencial externo com S_x e S_y , e por isso o potencial externo tem uma influência sobre a dinâmica da precessão de $\mathbf{S}$ do sistema. Estes são exemplos, de como a interação spin-órbita confere propriedades intrigantes no sistema estudado, o que da motivo a novos estudos teóricos e experimentais. Conseguimos encontrar as soluções analíticas exatas, que resolvem as equações de movimento dos parâmetros variacionais com diferentes potenciais polinomiais, para duas situações diferentes, quando $\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0$.

Na seção 4.2, estudamos a dinâmica do s3l3iton vetorial brilhante-brilhante quando $\lambda = 0$. Nessa situa33o3o, o movimento orbital dos 33tomos n3o depende (ou desacopla) do spin, isto 33, a din33mica externa esta desacoplada da din33mica interna. Isso foi observado, nas equa33o3es de movimento dos par33metros variacionais, eqs. (4.33)-(4.37). A trajet33ria de $\langle z \rangle$ 33 independente de $\mathbf{S}$, eq. (4.35), t33mb33m a evolu33o3o de ϕ n3o 33 influenciada por k , eq. (4.36). Neste caso, a solu33o3o anal33tica dos componentes do vetor de pseudo-spin $\mathbf{S}$ s3o fun33o3es harm33nicas, eq. (4.38), e a solu33o3o da diferen33a de fase ϕ 33 uma fun33o3o peri33odica figuras 4.1-4.3. Enquanto 33s solu33o3es anal33ticas de $\langle z \rangle$ e ϕ , elas foram encontradas explicitamente para tr33s casos de potenciais polinomiais. No caso 1, consideramos um potencial harm33nico com frequ33ncia dependente do tempo. Nessa situa33o3o, descobrimos que a largura η do s3l3iton vetorial toma um valor constante quando $\epsilon = 0$ e tem um comportamento peri33odico quando $\epsilon \neq 0$. Al33m disso, as solu33o3es anal33ticas de $\langle z \rangle$ e k_+ est33o relacionadas 33s fun33o3es de Mathieu, eqs. (4.42) e (4.43). Destacando as propriedades da fun33o3o de Mathieu se tem tr33s tipos de comportamentos din33micos: Os movimentos de $\langle z \rangle$ e k_+ apresentam evolu33o3es peri33odicas quando $\epsilon = 0$, figuras 4.4-4.9, mostram comportamentos ressonantes para $\epsilon \neq 0$ e $\omega_0 \approx \gamma_0$, figuras 4.10-4.13, ou exibem progresso quase-peri33odicas quando, $\epsilon \neq 0$ e $\omega_0 \neq \gamma_0$, figuras 4.14-4.17.

No caso 2, propomos um potencial polinomial quadr33tico composto de um potencial harm33nico com frequ33ncia constante γ_0 , mais um potencial linear com intensidade peri33odica, eq. (4.44). Nesta ocasi33o3o, a largura η do s3l3iton vetorial assume um valor constante. Al33m disso, as solu33o3es anal33ticas de $\langle z \rangle$ e k_+ fun33o3es harm33nicas, com a particularidade de que, quando $\omega_0 \approx \gamma_0$, a trajet33ria do centro de massa 33 cada vez mais deslocada do eixo de propaga33o3o do s3l3iton vetorial (resson33ncia), figuras 4.20-4.23. Queremos mencionar que, no caso da resson33ncia, o soliton tem uma estrutura similar 33s ondas de Faraday, estudadas em [57].

No caso 3, apresentamos um potencial polinomial externo constituido por um potencial harm33nica com frequ33ncia constante, um potencial anharmonico assim33trico (de grau tr33s), cuja intensidade depende do tempo, e um potencial anharmonico sim33trico (de grau quatro), eq. (4.47). Um potencial externo, com estrutura similar, foi criado experimentalmente usando um guia de ondas [51]. Nesta situa33o3o, a largura η do solit33on vetorial evolui periodicamente. Al33m disso, obtivemos solu33o3es anal33ticas para $\langle z \rangle$ e k_+ que se movem periodicamente devido ao potencial assim33trico, figuras (4.26)-(4.29).

Na se33o3o 4.3, analisamos a din33mica de um s3l3iton vetorial quando $\lambda \neq 0$. Como explicamos acima, neste caso as din33micas internas e externas do s3l3iton vetorial est33o ligadas, e por esta raz33o3o, encontrar solu33o3es anal33ticas dos par33metros variacionais requer um maior esfor33o matem33tico. Devido a isso, primeiro estudamos a din33mica do s3l3it33on sem influ33ncia do potencial (caso livre). Nesta situa33o3o, usamos o m33todo de pontos fixos e obtemos solu33o3es anal33ticas estacion33rias, eq. (4.56), t33mb33m descobrimos que os componentes do vetor pseudo-spin $\mathbf{S}$ s3o constantes e dependem de δ e Ω , eq. (4.57). Al33m disso, demonstramos anal33ticamente que a solu33o3o estacion33ria 33 est33vel sob pequenas perturba33o3es, at33 uma aproxima33o3o linear, dos pontos fixos, eq. (4.64).

No caso 4, propomos um potencial linear com intensidade modulada, eq. (4.71). Para este potencial, conseguimos integrar as equa33o3es de movimento dos par33metros variacionais. As solu33o3es anal33ticas de todos os par33metros variacionais s3o exibidas em eqs. (4.73)-(4.76). Neste caso, verificou-se que o movimento de $\langle z \rangle$ e S_z s3o peri33odica com periodicidade $T = 2K(m)$.

A vincula33o3o entre o potencial e os componentes S_x e S_y atrav33s de $I(t)$, modifica o comportamento din33mico da precess33o3o do spin Figura 4.32, mostrando um comportamento

totalmente diferente daquele obtido na ausência da interação spin-órbita.

Em relação à análise de estabilidade, mostra-se que para os diferentes casos estudados na seção anterior, a intensidade da não-linearidade (interação de dois corpos) g é diferente, dependendo do caso em estudo, essa intensidade deve ter um certo valor, mostrando um papel principal na dinâmica do sistema, uma vez que, como mencionado, essa intensidade é responsável pela estabilização do sistema.

Com o conhecimento adquirido no desenvolvimento da presente dissertação, pretendemos estudar a termodinâmica do sistema [10], também planejamos estudar as condições do sistema para apresentar características de superfluidos em $2 + 1$ dimensões do espaço tempo, e devido à eficiência de nosso programa de simulação numérica, pretendemos estudar as propriedades das colisões entre sóliton.

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Função de Mathieu

A maioria das equações em física matemática é o resultado do estudo de problemas práticos. A função Mathieu foi introduzida por É. Mathieu no ano de 1868. A importância desta equação está em poder estudar a estabilidade e a instabilidade do sistema. A equação de Mathieu é

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + [a - 2q \cos(2t)] x(t) = 0 \quad (6.1)$$

onde os parâmetros a , q são reais, a equação (6.1) descreve oscilações com uma frequência variável (dependente do tempo). As soluções para a equação são denotadas como

$$x(t) = A_1 M_s(a, q, t) + A_2 M_c(a, q, t) \quad (6.2)$$

M_s é a função seno de Mathieu e M_c é a função cosseno de Mathieu, quando $q = 0$ ambas funções são reduzidas a seno e cosseno respectivamente. Em seguida, o comportamento das funções de Mathieu para diferentes valores de dos parâmetros a e q serão mostradas

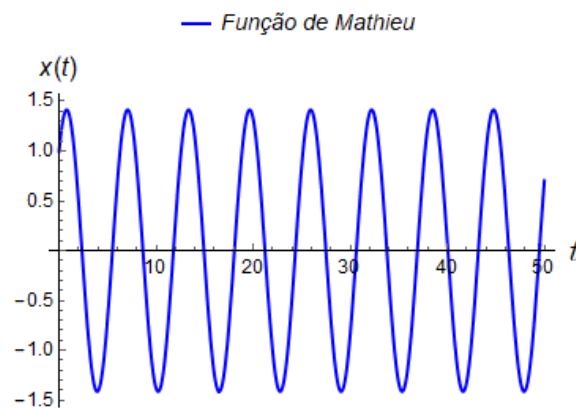


Figura 6.1: Função de Mathieu para $a = 1$ e $q = 0$

Na figura 6.1 observa-se um comportamento oscilante e harmônico, característica das funções trigonométricas, enquanto na figura 6.2 observa-se um comportamento quase periódico e na figura 6.3 um comportamento ressonante. As figuras 6.2 e 6.3 mostram o comportamento estável e instável da função de Mathieu respectivamente.

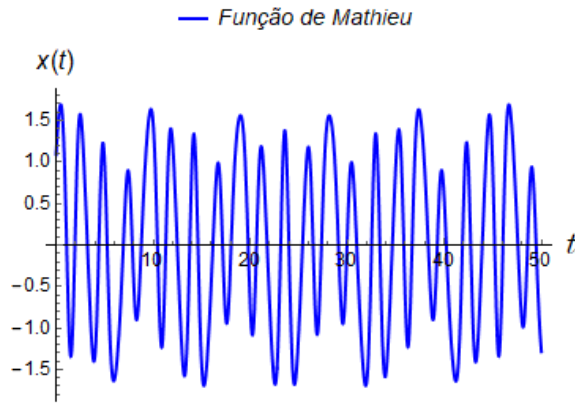


Figura 6.2: Função de Mathieu para $a = 8$ e $q = 3$

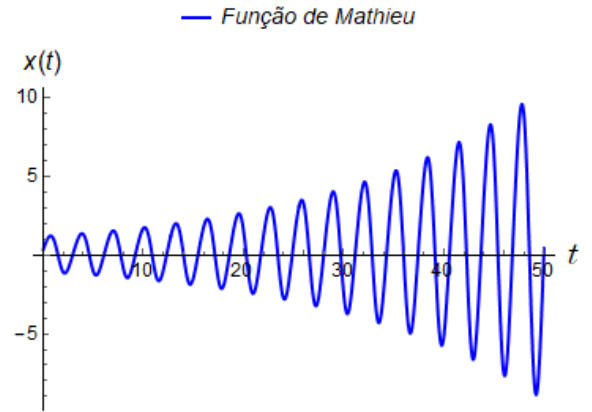


Figura 6.3: Função de Mathieu para $a = 4$ e $q = 1$

6.2 Funções elípticas de Jacobi

As funções elípticas são definidas como soluções de equações diferenciais não lineares, as quais têm a seguinte forma

$$P(y) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 \quad (6.3)$$

tendo como solução

$$x(y, a) = x_0 \pm \int_{y_0}^y \frac{ds}{(a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)^{1/2}} \quad (6.4)$$

As funções elípticas de Jacobi são aquelas em que o polinômio de quarto grau $P(y)$ é expresso da seguinte forma

$$P(y) = (1 - y^2)(1 - my^2) \quad (6.5)$$

com m uma constante positiva. As funções elípticas de Jacobi são uma generalização das funções trigonométricas para oscilações finitas, então definimos o seno de Jacobi $\mathbf{sn}(\mathbf{t}, \mathbf{m})$, o cosseno de Jacobi $\mathbf{cn}(\mathbf{t}, \mathbf{m})$ e a função $\mathbf{dn}(\mathbf{t}, \mathbf{m})$, que possuem diferentes comportamentos para diferentes m .

m	0	1
$\mathbf{sn}(t, m)$	$\mathbf{sen}(t)$	$\mathbf{tanh}(t)$
$\mathbf{cn}(t, m)$	$\mathbf{cos}(t)$	$\mathbf{sech}(t)$
$\mathbf{dn}(t, m)$	1	$\mathbf{sech}(t)$

o comportamento gráfico das funções elípticas de Jacobi para diferentes valores de m será mostrado abaixo

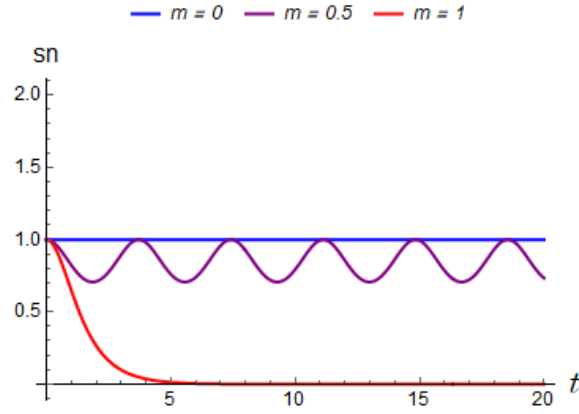


Figura 6.4: Função $\mathbf{dn}(t, m)$ de Jacobi para $m = 0$, $m = 0.5$ e $m = 1$

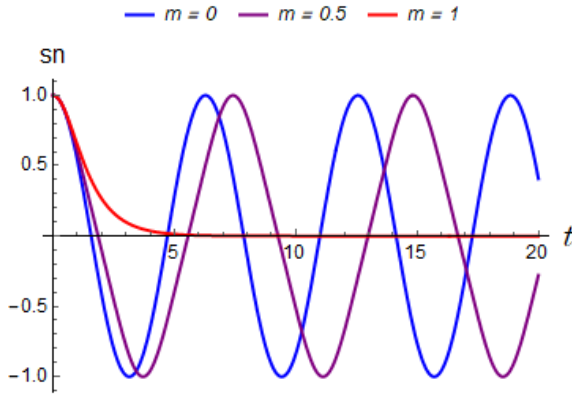


Figura 6.5: Função $\mathbf{cn}(t, m)$ de Jacobi para $m = 0$, $m = 0.5$ e $m = 1$

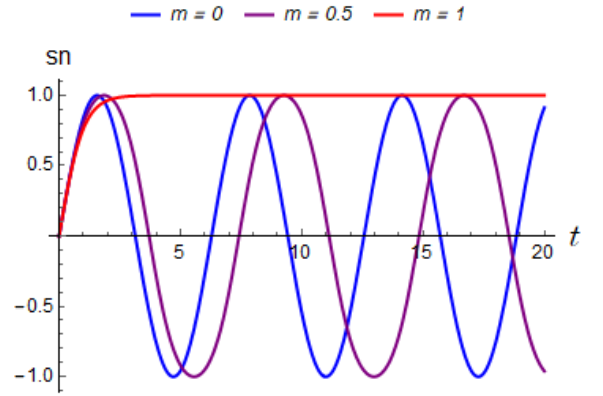


Figura 6.6: Função $\mathbf{sn}(t, m)$ de Jacobi para $m = 0$, $m = 0.5$ e $m = 1$

como podemos ver nas figuras 6.5 e 6.6 para $m \neq 1$, as funções têm um comportamento oscilante enquanto no caso da figura 6.4 para $m = 0$ a função é uma constante. As propriedades mais utilizadas nesta dissertação são

$$\mathbf{sn}^2(t, m) + \mathbf{cn}^2(t, m) = 1$$

$$\mathbf{dn}^2(t, m) + m\mathbf{sn}^2(t, m) = 1$$

para mais detalhes sobre a equação de Mathieu e as funções de Jacobi revisar [30]

Referências Bibliográficas

- [1] S.N. Bose. **Plancks gasetz und lichtquantenhypothese**. Zeitschrift für Physik, 26:168-171 Jul 1924.
- [2] A. Einstein. **Quantentheorie des einatomigen idealen gases**. Verlag der Königlich-Preussischen, pages 3-14, Jan 1925.
- [3] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman and E.A. Cornell. **Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor**. Science Vol. 269. 14 July 1995.
- [4] L. Pitaevskii. **Vortex lines in an imperfect Bose gas**. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, v.13, p. 451-454, 1961.
- [5] E. P. Gross. **Hydrodynamics of a superfluid condensate**. Journal of Mathematical Physics, v. 4, p. 195-207, 1963.
- [6] Lin Wen, Q. Sun et al **Motion of solitons in one-dimensional spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates**. Phys. Revi. A 94, 061602(R) (2016)
- [7] Xi Chen, Ruan-Lei Jiang, Jing Li, Yue Ban and E. Ya. Sherman. **Inverse engineering for fast transport and spin control of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates in moving harmonic traps**. Phys. Revi. A 97, 013631 (2018)
- [8] O. Fialko, J. Brand, and U. Zulicke. **Soliton magnetization dynamics in spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates**. Phys. Revi. A 85, 051605(R) (2012).
- [9] L. Wen, X. Zhang, *et al.* **Dynamics of bright-bright solitons in Bose-Einstein condensate with Raman-induced one-dimensional spin-orbit coupling**. Annals of Physics (2018)
- [10] Jinling Lian, Yuanwei Zhang, et al. **Thermodynamics of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates**. Phys Revi A 86, 063620 (2012).
- [11] Leo P. Kadanoff. **More is the same; Phase Transition and Mean Field Theories**. J Stat Phy (2009) 137:777-797.
- [12] Pierre Weiss. **L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique**. J. Phys. Theor. 1907.
- [13] Sílvia R. A. Salinas. **Introdução à Física Estatística**. Edição 2008.
- [14] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard. **Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure**. Phys. Rev. Lett., 59, 2631 (1987).

- [15] Fernando Huesa González **Gases bosónicos en el estado de menor energía posible forman una sola entidad coherente**
- [16] Javier Campins. **Condensado Bose-Einstein** (recurso de aula virtual), 1 de dezembro do 2016.
- [17] Jin-Yi-Zhang, Si-Cong Ji *et al*, **Collective Dipole Oscillations of a Spin-Orbit Coupled Bose-Einstein Condensate**. PRL 109,115301 (2012)
- [18] **Molasa óptica**. Wikipedia.
- [19] **Mecânica Quântica Avanzada**. Carlos Pena.
- [20] G. Bihlmayer, O. Rader and Winkler **Focus on the Rashba Effect**. New J Phys 17 (2015) 050202
- [21] Gordon Baym and Tomoki Ozawa **Condensation of bosons with Rashba-Dresselhaus spin-orbit coupling**
- [22] Y.-J. Lin, K. Jiménez-García and I. B. Spielman. **Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates**. Nature Letter 471. 3 March 2011
- [23] Giuseppe Smirne **Experiments with Bose-Einstein condensates in optical traps**. Balliol College, University of Oxford Hilary Term 2005.
- [24] Henrik Bruus and Karsten Flensberg. **Introduction to Many-body quantum theory in condensed matter physics**. Copenhagen, 15 August 2002.
- [25] D. T. Haar. **Collected papers of L. D. Landau** . Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [26] Wesley Bueno Cardoso. **Soluções Localizadas em Modelos de Campos Relativísticos e em Condensados de Bose-Einstein**. Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física. 2010.
- [27] A. de Souza Dutra, M. Hott and Filipe F. Bellotti **A mapping function approach applied to some classes of nonlinear equations**. Arxiv (1002.4609)
- [28] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, and M. B. Hott **Wide localized solitons in systems with time- and space-modulated nonlinearities**. Physical Review E, 026605, 2012.
- [29] H. W. Schürmann. **Traveling-wave solutions of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation**. Phys. Revi. E 54.9.
- [30] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun **Handbook of mathematical functions**. Cambridge and MIT. 1954.
- [31] Sean Burchesky. **Spin-Orbit Coupled Bose-Einstein Condensates with Observation of a Stripe Phase**. Massachusetts Institute of Technology. Junho do 2017.
- [32] Junru Li, Wujie Huang, et al. **Spin-Orbit Coupling and Spin Textures in Optical Superlattices**. Phys. Revi. Letters 117, 185301 (2016).

- [33] Junru Li, Wujie Huang, et al. **Supplemental Material for “Spin-Orbit Coupling and Spin Textures in Optical Superlattices”**. Phys. Rev. Letters 117, 185301 (2016).
- [34] B. A. Malomed, *Soliton Management in Periodic Systems*, Springer, Berlin, 2006.
- [35] B. A. Malomed, **Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields**, Progress in Optics, v. 43, p. 71-193, 2002.
- [36] L. Wen, X.-F. Zhang, A.-Y. Hu, J. Zhou, P. Yu, L. Xia, Q. Sun, e A.-C. Ji, **Dynamics of bright-bright solitons in Bose-Einstein condensate with Raman-induced one-dimensional spin-orbit coupling**, Annals of Physics, v. 390, p. 180-191, 2018.
- [37] J. J. Sakurai e J. Napolitano, *Mecânica Quântica Moderna*, Bookman, São Paulo, 2013.
- [38] M. V. Tratnik e J. E. Sipe. **Bound solitary waves in a birefringent optical fiber**, Physical Review A, v. 38, p. 2011-2017, 1988.
- [39] J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik, e V. V. Konotop. **Localized nonlinear waves in systems with time- and space-modulated nonlinearities**. Physical Review Letters, v. 100, 164102, 2008.
- [40] A. T. Avelar, D. Bazeia, e W. B. Cardoso. **Solitons with cubic and quintic nonlinearities modulated in space and time**. Physical Review E, v. 79, 025602(R), 2009.
- [41] Y. S. Kivshar e B. A. Malomed. **Dynamics of solitons in nearly integrable systems**. Reviews of Modern Physics, v. 61, p. 763-915, 1989.
- [42] S. Kumar e A. Hasegawa. **Quasi-soliton propagation in dispersion-managed optical fibers**. Optics Letters, v. 22, p. 372-374, 1997.
- [43] Y. Nogami e F. T. Toyama. **Nonlinear Schrödinger soliton in a time-dependent quadratic potential**. Physical Review E, v. 49, p. 4497-4501, 1994.
- [44] V. N. Serkin, A. Hasegawa, e T. L. Belyaeva. **Nonautonomous solitons in external potentials**. Physical Review Letters, v. 98, 074102, 2007.
- [45] B. A. Malomed, N. N. Rosanov, e S. V. Fedorov. **Dynamics of nonlinear Schrödinger breathers in a potential trap**, Physical Review E, v. 97, 052204, 2018.
- [46] H. -H. Chen e C. -S. Liu. **Solitons in nonuniform media**, Physical Review Letters, v. 37, p. 693-697, 1976.
- [47] H. -H. Chen e C. -S. Liu. **Nonlinear wave and soliton propagation in media with arbitrary inhomogeneities**, Physics of Fluids, v. 21, p. 377-380, 1978.
- [48] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, INC., New York, .1972.
- [49] J. Kim e A. L. Fetter. **Dynamics os rapidly rotating Bose-Einstein condensates in a harmonic plus quartic trap**, Physics Review A, v. 72, 023619, 2005.

- [50] L.Wen, Q. Sun, Y. Chen, D.-S. Wang, J. Hu, H. Chen, W.-M. Liu, G. Juzeliūnas, B. A. Malomed, and A. Ji, **Motion of soliton in one-dimensional spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates**, Physical Review A, v. 94, 061602, 2016.
- [51] H. Ott, J. Fortágh, S. Kraft, A. Günther, D. Komma, e C. Zimmermann. **Nonlinear Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Waveguide**, Physics Review Letters, v. 91, 040402, 2003.
- [52] A. M. -Contla, V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, R. P. -Moreno, M. A. Agüero, C. H. -Tenorio, e L. M. -Lara. **Extreme nonlinear waves in external gravitational-like potential: possible applications for the optical soliton supercontinuum generation and the ocean coast line protection**, Optik, v. 161, p. 181-195, 2018.
- [53] Q. -Y. Li, Z. - D. Li, S. -X. Wang, W. -W. Song, e G. Fu. **Nonautonomous solitons of Bose-Einstein condensation in a linear potential with an arbitrary time-dependence**, Optics Communications, v. 282, p. 1676-1680, 2009.
- [54] Q. Yang e J. -F. Zhang. **Bose-Einstein solitons in time-dependent linear potential**, Optics Communications, v. 258, p. 35-42, 2006.
- [55] V. N. Serkin e A. Hasegawa. **Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model**. Physical Review Letters, v. 85, p. 4502-4505, 2000.
- [56] X. -B. Liu, X. -F. Zhang, e B. Li. **Exact self-similar wave solutions for the generalized (3+1)-dimensional cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients**. Optics Communications, v. 285, p. 779-783, 2012.
- [57] P. Engels, C. Atherton, e M. A. Hoefer. **Observation of Faraday waves in a Bose-Einstein condensate**, v. 98, 095301, 2007.
- [58] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, e D. Bazeia. **Modulation of localized solutions in a system of two coupled nonlinear Schrödinger equations**. Physical Review E, v. 86, 027601, 2012.
- [59] V. E. Zakharov e A. B. Shabat. **Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media**. Journal of Experimental and Theoretical Physics, v. 34, p. 62-69, 1972.
- [60] R. Hirota. **Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation**. Journal of Mathematical Physics, v. 14, p. 805-809, 1973.
- [61] V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, I. V. Alexandrov, e G. M. Melchior. **Novel topological quasi-soliton solutions for the nonlinear cubic-quintic Schrödinger equation model**. Proceeding SPIE, v. 4271, p. 292-302, 2001.
- [62] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, e M. B. Hott, **Physical Review E**, v. 86, p. 026605, 2012.
- [63] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, e M. B. Hott, **Physical Review E**, v. 88, p. 053202, 2013.
- [64] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, M. B. Hott, e P. Roy, **Physical Review E**, v. 91, p. 013205, 2015.

- [65] L. Elsgoltz. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Varacional*. Editorial Mir (Moscu) 1969.
- [66] D. Dubin. **Numerical and analitical methods for scientists and engineers using mathematica**. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
- [67] Q. Chang, E. Jia, e W. Sun. **Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation**. Journal of Computational Physics, v. 148, p. 397-415, 1999.