

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Sólitons BPS no modelo $CP(2)$
acoplado minimamente com
a ação de Maxwell-Chern-Simons**

Neyver Henry Gonzalez Gutierrez

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2019

Sólitons BPS no modelo $CP(2)$ acoplado minimamente com a ação de Maxwell-Chern-Simons

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em **física**.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
(Doutor em Física - UFMA)

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2019

GUTIERREZ, Neyver Henry Gonzalez.

Sólitons BPS no modelo $CP(2)$ acoplado minimamente
com a ação de Maxwell-Chern-Simons

GUTIERREZ, Neyver Henry Gonzalez.- 2019

85f.

Impresso por computador.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física
Universidade Federal do Maranhão.

1. Vórtices 2. Defeitos Topológicos 3. Sólitons.

CDU 532.527

NEYVER HENRY GONZALEZ GUTIERREZ

**Sólitons BPS no modelo $CP(2)$
acoplado minimamente com
a ação de Maxwell-Chern-Simons**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre **em física**.

BANCA EXAMINADORA

Rodolfo Alván Casana Sifuentes (Orientador)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Carlos Eduardo da Hora Santos
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Frederico Elias Passos dos Santos
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Ao Uriel, meu irmão.

Agradecimentos

A meus pais, Robinson Gonzalez, Aurea Gutierrez, pelo apoio incondicional tanto econômico e motivacional, pela confiança e por ter inculcido os valores necessários para construir um futuro melhor.

Aos meus irmãos, Alex (Jacha), Jaime (Trivi), Nick (Orejas), Kevin (Dodo), Mariela (Pablito) e Uriel (Kuky), por manter a essência da família, apesar da grande distância que nos separa.

Agradeço também aos meus primos Ruben e Jhonny por seus grandes debates sobre as incógnitas fundamentais da vida, sem esquecer o meu primeiro conselheiro na graduação Jorge Espichan, pelo incentivo por seus ensinamentos, apesar de minha lenta aprendizagem.

Aos meus amigos de Curso: Angel, Luis, Andres, Gabriel, César, Tenorio, Daniel, Marcos Lima, Wellington, Railson, Charles, Joelson, Joel Félix, Joel Anderson, Kayman, Arthur, João entre outros.

As pessoas da cidade pequena de Parobamba que apesar das dificuldades continuam lutando para melhorar cada dia mais.

Aos meus Amigos incondicionais: Pilar, Hervyla, Mahily, Lilibeth e Susanita por me escutarem nos dias sombrios.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Casana principalmente pelo grande esforço e paciência apesar das minhas múltiplas confusões em entender a teoria ao longo do período acadêmico.

À CAPES pela contribuição financeira.

*Cualquier lugar puede ser el paraíso, siempre que se
tenga la voluntad de vivir...*

Yui Ikari *“Evangelion”*.

Resumo

A dissertação aborda o estudo de sólitons com simetria radial em $(1 + 2)$ -dimensões em um modelo $CP(2)$ calibrado com o termo de Maxwell-Chern-Simons. A implementação do formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) torna possível encontrar equações diferenciais de primeira ordem (ou equações BPS) que descrevem as soluções (estados BPS) que minimizam a energia total do sistema. O potencial de interação capaz de gerar sólitons BPS obtido através de uma metodologia simples, mas eficaz, será mostrada em detalhes. O fluxo magnético e a energia total BPS são quantizadas pois são diretamente proporcionais ao *winding number* $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$, que caracteriza a topologia não-trivial das soluções. O estudo do comportamento das soluções nas fronteiras (na origem e no infinito) é realizado via a solução das equações BPS linearizadas. Finalmente as soluções completas são obtidas numericamente e os respectivos perfis são apresentados comentando suas principais propriedades.

Palavras-chave: Modelo $CP(2)$ calibrado, Formalismo BPS, Sólitons.

Abstract

The dissertation addresses the study of radial symmetry solitons in (2+1)-dimensions in a model in which the $CP(2)$ -field interacts minimally with an Abelian gauge field ruled by the Maxwell-Chern-Simons term. The implementation of the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) formalism makes possible to find first-order differential equations (BPS equations) whose solutions (BPS states) minimize the total energy of the system. The potential which generates BPS solitons is obtained through a simple but effective methodology will be shown in detail. The magnetic flux and the total BPS energy are directly proportional to the winding number characterizing the non-trivial topology of the solutions, i.e., they are quantized. The analysis of the behavior of the solutions at the boundaries (at the origin and infinite) is performed by solving the linearized BPS equations. Finally, the complete solutions are obtained numerically and the respective profiles are presented which we comment on their main properties.

Key-words: gauged $CP(2)$ model, BPS formalismo, Sólitons.

Sumário

Introdução	1
1 Configurações auto-duais na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs	4
1.1 Densidade de energia e o formalismo BPS	6
1.1.1 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange	8
1.2 BPS MH vórtices com simetria radial	8
1.2.1 Comportamento das soluções em $r = 0$	10
1.2.2 Comportamento das soluções para $r \rightarrow \infty$	11
1.3 Soluções numéricas	12
1.3.1 Representação bidimensional dos vórtices de MH	13
2 Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	15
2.1 Densidade de energia e o formalismo BPS	16
2.2 O modelo BPS de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	18
2.2.1 Implementação do formalismo BPS	20
2.2.2 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange	21
2.3 BPS MCSH vórtices com simetria radial	22
2.3.1 Comportamento das soluções para $r \rightarrow 0$	23
2.3.2 Comportamento das soluções para $r \rightarrow \infty$	24
2.4 Soluções numéricas	25
2.4.1 Representação bidimensional dos vórtices de MCSH	27
3 Sólitons BPS no modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell	30
3.1 Sólitons com simetria radial	32
3.2 Densidade de energia e o formalismo BPS	33
3.3 Caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$	34
3.3.1 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange	36
3.3.2 Comportamento dos campos quando $r \rightarrow 0$	37
3.3.3 Comportamento dos campos quando $r \rightarrow \infty$	37

3.4	Caso $\beta = \frac{\pi}{2}k$	38
3.4.1	Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange	40
3.4.2	Comportamento dos campos em $r \rightarrow 0$	41
3.4.3	Comportamento assintótico dos campos em $r \rightarrow \infty$	41
3.5	Soluções numéricas	42
3.5.1	Representação bidimensional dos sólitons de $M-CP(2)$	43
4	Sólitons BPS no modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell-Chern-Simons	46
4.1	O modelo BPS de Maxwell-Chern-Simons- $CP(2)$	47
4.1.1	Sólitons BPS com simetria radial	48
4.2	O caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$: Formalismo BPS	49
4.2.1	Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange	52
4.2.2	Comportamento dos campos para $r \rightarrow 0$	53
4.2.3	Comportamento dos campos para $r \rightarrow \infty$	54
4.3	Soluções numéricas	55
4.3.1	Comportamento dos valores na origem vs. κ do potencial escalar, campo magnético e densidade de energia BPS	58
4.3.2	Representação bidimensional dos sólitons de $MCS-CP(2)$	59
5	Conclusões e perspectivas	62
A	O modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell-Chern-Simons	65
A.1	Configurações com simetria radial	66
A.1.1	Formalismo BPS frustrado	66
A.1.2	Construindo o modelo BPS para o caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$	71
	Referências Bibliográficas	73

Introdução

A teoria de campos proporciona equações não-lineares cujas soluções independentes do tempo são de grande importância e interesse em muitas áreas da física e da matemática [1]. No entanto, essas equações não-lineares são muito complexas e difíceis de entender devido à falta de soluções simples que satisfaçam o princípio de superposição linear, ou seja, não há soluções simples que formem um espaço vetorial. Tais equações diferenciais não-lineares (equações de Euler-Lagrange), em muitos casos, são de segunda ordem e surgem naturalmente na descrição de vários sistemas físicos. Apesar disso, sob circunstâncias muito especiais, soluções genuínas podem ser obtidas através de um conjunto particular de equações diferenciais acopladas de primeira ordem chamadas de equações BPS [2] cujas soluções são configurações que minimizam a energia total do sistema.

A dissertação trata da investigação sólitons BPS em $(2 + 1)$ -dimensão (correspondente a uma geometria planar), essas soluções planares são chamadas de vórtices. Um vórtice é um fluxo turbulento em rotação espiral com caminhos de corrente fechados, também é um conceito matemático utilizado em dinâmica de fluidos que podem estar relacionadas com a quantidade de movimento de rotação para um fluido.

Em estudos anteriores, os vórtices BPS puramente magnéticos (carga elétrica nula) foram verificados na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [3]. Além disso, foi demonstrado que vórtices emergem dos cenários de Chern-Simons-Higgs [4] e Maxwell-Chern-Simons-Higgs [5], onde se verifica que ambos os modelos suportam vórtices portadores de fluxo magnético e carga elétrica não nula.

Outros exemplos importantes de soluções de primeira ordem incluem os que surgem dos modelos sigma não-lineares ($NLSM$) [6] na presença de um campo de calibre, que têm sido amplamente aplicados no estudo de diferentes aspectos da teoria de campos e da física da matéria condensada [7].

Os vórtices topológicos ou BPS são englobados por um conceito mais geral chamado de sólitons, eles podem ser definidos como ondas não dispersivas que preservam sua forma, energia e estrutura durante a propagação e após colisões. A partir destas características poderia se pensar em sólitons como a estrutura matemática ideal para a descrição de partículas, neste sentido, a existência de sólitons topológicos em um modelo sigma não-linear $O(3)$ calibrado com o campo de

Maxwell foi demonstrada em [8, 9]. Também, nas Refs. [10, 11], os autores estudaram o modelo sigma não-linear $O(3)$ calibrado com o termo de Chern-Simons, estabelecendo a existência de configurações topológicas e não-topológicas. Também, o modelo sigma não-linear $O(3)$ calibrado com um campo de calibre governado pelo termo de Maxwell-Chern-Simons foi estudado em [12, 13].

O modelo $CP(N-1)$ é obtido a partir de uma projeção estereográfica complexa, estes campos existem em uma hiper-superfície de dimensão $N-1$, cuja importância está no fato de apresentar algumas propriedades fundamentais, como liberdade assintótica, confinamento e estrutura de vácuo não trivial dando origem a instantons estáveis, tipicamente inerentes às teorias de Yang-Mills entre outros [14, 15, 16, 17, 21, 22]. Sólitons topológicos aparecem nos modelos $CP(1)$ e $CP(2)$. Na referencia [19] foi estudado o modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell e mostrou a existência de sólitons topológicos.

A dissertação é apresentada da seguinte maneira: no primeiro capítulo estudamos a existência de configurações BPS (ou auto-duais) na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. A implementação do formalismo BPS permite obter equações diferenciais de primeira ordem chamadas de equações BPS que descrevem tais configurações ou estados BPS. Verifica-se que esses estados minimizam energia do sistema que resulta proporcional ao fluxo magnético. Esta condição permite determinar o potencial de auto-interação escalar responsável pelo surgimento de tais estados. Além disso, verificamos que os estados BPS satisfazem as equações de Euler-Lagrange garantindo assim a validade de nosso procedimento. Especificamente, analisamos as configurações tipo vórtice são obtidas usando um Ansatz em coordenadas polares. Com isso, obtém-se que a energia total e o fluxo magnético são quantizados, ou seja, são proporcionais ao winding number ou número de enrolamento m .

No segundo capítulo estudaremos a existência de configurações auto-duais na eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Neste cenário tal existência requer a introdução de um campo neutro Ψ que no limite BPS possui a mesma dinâmica do potencial escalar. Desse modo, o formalismo BPS é implementado com sucesso, ou seja, são encontradas as equações de primeira ordem e o potencial responsável das soluções BPS. Além disso, o mínimo da energia do sistema é proporcional ao fluxo magnético. A diferença com o modelo anterior radica de-se a que as soluções ou estados BPS, agora, são configurações portadoras de fluxo magnético e de carga elétrica (não nula). Verifica-se que as soluções tipo vórtice possuem energia e fluxo magnético quantizados.

No terceiro capítulo, a existência de sólitons topológicos (com simetria radial) é analisada num modelo no qual do campo $CP(2)$ está acoplado minimamente com o campo de Maxwell. As configurações deste sistema possuem fluxo magnético e carga elétrica total nulo. O formalismo de BPS foi implementado de forma clara, encontrando as respectivas equações diferenciais de

primeira ordem e o potencial gerador das soluções BPS. A condição imposta para determinar o potencial BPS evita que, desta vez, o limite inferior da energia (energia BPS) seja proporcional ao fluxo magnético. Observa-se que agora a energia BPS depende explicitamente das condições de contorno do campo $CP(2)$. Além disso, tanto a energia BPS como o fluxo magnético são diretamente proporcionais ao número de enrolamento m , pelo que, são ditos quantizados.

No quarto capítulo é investigada a existência de sólitons radialmente simétricos num modelo onde o campo $CP(2)$ é acoplado minimamente a um campo de calibre cuja dinâmica é regida pela ação de Maxwell-Chern-Simons. As configurações do modelo são portadores de fluxo magnético e carga elétrica total não nula proporcional ao fluxo magnético. Similarmente, ao que acontece no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, a implementação do método BPS precisa da introdução de um campo escalar neutro. Assim, são determinadas as equações de primeira diferenciais de primeira ordem e o potencial gerados das configurações BPS. De modo similar ao caso anterior, a determinação do potencial BPS implica que a energia mínima não seja proporcional ao fluxo magnético, porém, depende das condições de fronteira do campo $CP(2)$. Observa-se que a energia BPS e fluxo magnético são quantizados. Finalmente, no quinto capítulo são apresentadas as conclusões, observações e perspectivas.

Capítulo 1

Configurações auto-duais na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs

Os vórtices são estruturas planas em $(2+1)$ -dimensões com energia total finita. Estas estruturas são obtidas como soluções das equações de Euler-Lagrange, mas também podem ser obtidas via uma abordagem alternativa, simples e sofisticada, que provê soluções de mínima energia. Estas soluções surgem a partir da resolução de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas equações BPS. O artigo precursor na descrição de vórtices via uma teoria de campos foi publicado por H. B. Nielsen e P. Olesen [3]. Este modelo foi utilizado por Higgs para ilustrar o mecanismo de geração da massa através do processo conhecido como Mecanismo de Higgs.

A eletrodinâmica planar de Maxwell-Higgs é descrito pela seguinte densidade lagrangiana.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(|\phi|), \quad (1.1)$$

onde definimos o tensor do campo eletromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, com A_μ o campo de gauge, ϕ é o campo de Higgs um escalar complexo, e introduzimos a derivada covariante do campo de Higgs,

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi. \quad (1.2)$$

O parâmetro e representa a constante de acoplamento entre os campos de gauge e de Higgs. Por último, $V(|\phi|)$ é um potencial que provê soluções BPS. A equação de Euler-Lagrange para o campo de gauge é

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu, \quad (1.3)$$

com a corrente conservada J^μ é identificada como

$$J^\mu = ie(\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*(D^\mu\phi)). \quad (1.4)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo Higgs é

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (1.5)$$

O tensor energia-momento da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs é

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{MH} = -F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + (D_\mu \phi)^* D_\nu \phi + (D_\nu \phi)^* D_\mu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.6)$$

onde $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski.

Neste estudo estamos interessados em soluções estacionárias das equações de movimento, de modo que os campos escalares complexos e de calibre são expressas como,

$$A_\mu(t, x_i) \rightarrow A_\mu(x_i), \quad \phi(t, x_i) \rightarrow \phi(x_i). \quad (1.7)$$

A Lei de Gauss estacionária obtida a partir de (1.3) é expressa como

$$\nabla^2 A_0 = 2A_0 e^2 |\phi|^2. \quad (1.8)$$

Observa-se que a Lei de Gauss é satisfeita trivialmente pela condição de calibre $A_0 = 0$. Isso implica que as soluções terão carga elétrica total nula. Ou seja, teremos soluções puramente magnéticas carregando fluxo magnético total não nulo.

A lei de Ampère estacionária obtida a partir de (1.3) é escrita como

$$\epsilon_{kj} \partial_j B = J_k. \quad (1.9)$$

Obtemos essa expressão usando o fato que $F_{ij} = \epsilon_{ij} B$, onde ϵ_{ij} é o tensor de Levi-Civita em duas dimensões ($\epsilon_{12} = 1$) e B representa o campo magnético. A corrente J_i dada por

$$J_k = ie(\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2e^2 A_k |\phi|^2. \quad (1.10)$$

A partir de (1.5) obtemos as expressões

$$D_0 D_0 \phi = -e^2 (A_0)^2 \phi = 0, \quad (1.11)$$

$$D_k D_k \phi = \nabla^2 \phi - 2ie A_k \partial_k \phi - e^2 (A_k)^2 \phi, \quad (1.12)$$

onde usamos as condições de calibre $A_0 = 0$ e $\partial_i A^i = 0$. Desse modo, a equação de movimento estacionária do campo de Higgs resulta

$$D_k D_k \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (1.13)$$

1.1 Densidade de energia e o formalismo BPS

No regime estacionário, a densidade de energia $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{00}^{MH}$ se reduz à seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B^2 + |D_j\phi|^2 + V(|\phi|), \quad (1.14)$$

onde fizemos uso da condição de calibre $A_0 = 0$. A densidade de energia deve ser nula no infinito, assim, impomos

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} B(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_j\phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(|\phi(\mathbf{x})|) = 0. \quad (1.15)$$

A condição imposta sobre o potencial determinará o valor do vácuo do campo de Higgs. A energia total para o sistema MH é dado pela integração da densidade de energia (1.14),

$$E = \int d^2\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}B^2 + |D_j\phi|^2 + V(|\phi|) \right]. \quad (1.16)$$

A fim de minimizar a energia, aplicamos o formalismo BPS que consiste em reescrever a densidade de energia como uma soma de quadrados, mais a carga topológica do modelo (neste caso, provida pela integração do campo magnético) e derivadas totais cuja contribuição (após a integração) será nula.

Assim, reescrevemos os termos da densidade de energia da seguinte maneira,

$$\frac{1}{2}B^2 + V = \frac{1}{2} \left[B \mp \sqrt{2V} \right]^2 \pm B\sqrt{2V}, \quad (1.17)$$

$$|D_j\phi|^2 = |D_{\pm}\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2e}\epsilon_{jk}\partial_j J_k, \quad (1.18)$$

onde usamos a definição

$$D_{\pm}\phi = D_1\phi \pm iD_2\phi, \quad (1.19)$$

e J_k é densidade de corrente definida na Eq. (1.10).

A substituição de (1.17) e (1.18) na expressão (1.16) resulta em

$$E = \int d^2\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \sqrt{2V} \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2V} + e|\phi|^2 \right) \pm \frac{1}{2e}\epsilon_{jk}\partial_j J_k \right\}. \quad (1.20)$$

Nota-se que a condição de contorno $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} D_j\phi(\mathbf{x}) = 0$ em (1.18) implica que a integração do termo $\epsilon_{jk}\partial_j J_k$ fornece um resultado nulo, ou seja, não contribui para a energia total.

A completa implementação do formalismo BPS pode ser atingida se consideramos que o termo multiplicando o campo magnético seja uma constante, assim, escolhemos a quantidade ev^2 com $v = |\phi|$, o valor esperado no vácuo do campo de Higgs. Ou seja,

$$\sqrt{2V} + e|\phi|^2 = ev^2, \quad (1.21)$$

desta condição calculamos a forma do potencial capaz de gerar soluções BPS,

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}e^2(v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (1.22)$$

o potencial possui infinitos vácuos formando um círculo de raio $|\phi| = v$. Ou seja, a condição de contorno para o campo de Higgs no infinito será

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\phi(\mathbf{x})| = v. \quad (1.23)$$

A figura 1.1 representa um potencial $|\phi|^4$ capaz de gerar uma quebra espontânea de simetria.

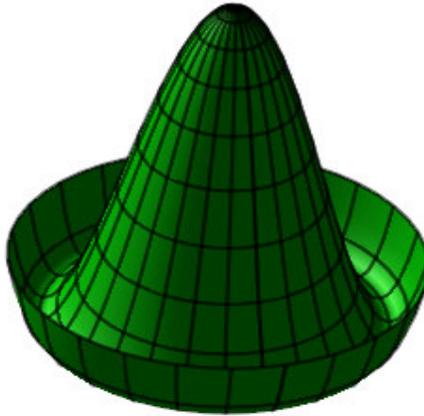


Figura 1.1: Potencial ϕ^4 tipo chapéu mexicano.

Logo a energia total do sistema pode ser escrita como

$$E \geq E_{BPS} + \int d^2\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} [B \mp e(v^2 - |\phi|^2)]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\}, \quad (1.24)$$

onde E_{BPS} representa a energia mínima (limite de Bogomol'nyi) do sistema expressa como

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2\mathbf{x} B = \pm ev^2 \Phi_B, \quad (1.25)$$

desta forma, a energia é proporcional ao fluxo magnético Φ_B . O sistema atinge o mínimo da energia quando os campos satisfizerem a equações de primeira-ordem ou equações BPS,

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (1.26)$$

$$B = \pm e(v^2 - |\phi|^2). \quad (1.27)$$

A partir da equação BPS (1.26) se mostra que a corrente J_k se expressa como

$$J_k = \mp e \varepsilon_{kj} \partial_j |\phi|^2. \quad (1.28)$$

1.1.1 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange

Vamos agora demonstrar que o conjunto de equações BPS (1.26) e (1.27) reproduzem as equações de Euler-Lagrange do campo de gauge (1.9) e do campo de Higgs (1.13).

Primeiro verificamos o setor de Higgs a partir da primeira BPS (1.26), com esse propósito, aplicamos D_{\mp} nela

$$D_{\mp}(D_{\pm}\phi) = D_k(D_k\phi) \pm i[D_1, D_2]\phi = D_k(D_k\phi) \pm eB\phi. \quad (1.29)$$

Assim, a equação BPS (1.26) provê

$$D_k(D_k\phi) \pm eB\phi = 0, \quad (1.30)$$

e usando (1.27), obtemos

$$D_k(D_k\phi) + e\phi(ev^2 - e|\phi|^2) = 0, \quad (1.31)$$

ou, notamos que o segundo termo é a derivada do potencial (1.22) em relação a ϕ^* . Assim, recuperamos a equação de Euler-Lagrange para o campo de Higgs

$$D_k(D_k\phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (1.32)$$

Agora verificamos o setor de gauge, para isso, aplicamos o operador $\varepsilon_{kj}\partial_j$ na segunda BPS (1.27)

$$\varepsilon_{kj}\partial_j B = \mp e\varepsilon_{kj}\partial_j |\phi|^2, \quad (1.33)$$

e usando a equação (1.28) recuperamos a lei de Ampère,

$$\varepsilon_{kj}\partial_j B = J_k. \quad (1.34)$$

Deste modo verificamos que as equações de Euler-Lagrange estacionárias do modelo de Maxwell-Higgs são recuperadas a partir das equações BPS (1.26) e (1.27).

1.2 BPS MH vórtices com simetria radial

As soluções tipo vórtices de interesse são expressas em coordenadas polares (r, θ) e terão simetria rotacional. Com esse intuito usamos o seguinte (similar ao proposto por Abrikosov [24] no estudo de vórtices supercondutores) para o campo de Higgs

$$\phi(r, \theta) = vg(r)e^{im\theta}, \quad (1.35)$$

onde a função real $g(r)$ é bem comportada em todo o eixo radial e satisfaz as seguintes condições de contorno na origem e no infinito,

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = g(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = g(\infty) = 1, \quad (1.36)$$

respectivamente. O parâmetro m na equação (1.35) é um número inteiro não nulo chamado de número de enrolamento (do inglês *winding number*) caracterizando a topologia não trivial das soluções. A condição $g(0) = 0$ garante que o campo de Higgs ϕ seja unívoco na origem, e a condição $g(\infty) = 1$ garante que o campo de Higgs atinja seu valor de vácuo estabelecido em (1.23).

O *Ansatz* em coordenadas polares para o campo de calibre é encontrado a partir da primeira equação BPS (1.26). Então, usamos o *Ansatz* (1.35) e as expressões que transformam um vetor e o operador derivada de coordenadas cartesianas para polares

$$A_1 = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad , \quad A_2 = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta, \quad (1.37)$$

$$\partial_1 = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \quad , \quad \partial_2 = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta,$$

na equação BPS (1.26) $D_\pm \phi = 0$ ou $D_1 \phi \pm i D_2 \phi = 0$. Após a separação das partes real e imaginária obtemos

$$\left[\frac{dg}{dr} \mp g \left(\frac{m}{r} - e A_\theta \right) \right] \cos \theta \pm e g A_r \sin \theta = 0, \quad (1.38)$$

$$\left[\frac{dg}{dr} \mp g \left(\frac{m}{r} - e A_\theta \right) \right] \sin \theta \mp e g A_r \cos \theta = 0, \quad (1.39)$$

cujas soluções válidas para todo θ são

$$\frac{dg}{dr} = \pm g \left(\frac{m}{r} - e A_\theta \right), \quad e \quad e g A_r = 0. \quad (1.40)$$

Assim, a componente radial do campo de calibre é nula, $A_r = 0$, e escolhemos o seguinte parametrização para a componente angular, A_θ ,

$$A_\theta = -\frac{a(r) - m}{er}. \quad (1.41)$$

A função $a(r)$ é regular em todo o eixo radial e satisfaz as seguintes condições de contorno na origem e no infinito,

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = a(0) = m, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a(\infty) = 0, \quad (1.42)$$

respectivamente. A condição $a(0) = m$ garante a finitude do potencial A_θ na origem, e a condição $a(\infty) = 0$ garante que $\lim_{r \rightarrow \infty} D_\theta \phi \rightarrow 0$. O campo magnético é expresso como

$$B(r) = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr}, \quad (1.43)$$

com isso, o fluxo magnético é facilmente calculado

$$\Phi_B = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (rB) dr d\theta = \frac{2\pi}{e} [a(0) - a(\infty)] = \frac{2\pi}{e} m. \quad (1.44)$$

A partir da equação (1.25) a energia BPS total resulta

$$E_{BPS} = \pm 2\pi v^2 m = 2\pi v^2 |m|, \quad (1.45)$$

onde consideramos o sinal + para $m > 0$ e o sinal - para $m < 0$. Assim, verificamos que tanto o fluxo magnético como a energia BPS são quantizados.

As equações BPS (1.26) e (1.27) agora são expressas como

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (1.46)$$

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm ev^2 (1 - g^2). \quad (1.47)$$

Observa-se que as soluções para $m < 0$ podem facilmente ser obtidas a partir das soluções para $m > 0$: $g(r) \rightarrow g(r)$ e $a(r) \rightarrow -a(r)$. Na seguinte seção será mostrada a compatibilidade entre as equações BPS, (1.46) e (1.47), e as condições de fronteira (1.36) e (1.42) satisfeitas pelos campos $g(r)$ e $a(r)$, respectivamente.

1.2.1 Comportamento das soluções em $r = 0$

Para estudar o comportamento das soluções das equações BPS (1.46) e (1.47) na origem ($r \rightarrow 0$) usamos as condições de contorno estabelecidas nas equações (1.36) e (1.42), e representamos os campos da seguinte maneira,

$$a(r) = m + \delta a(r), \quad g(r) = 0 + \delta g(r), \quad (1.48)$$

onde as funções $\delta a(r)$ e $\delta g(r)$ devem ser nulas na origem. A substituição das equações (1.48) nas equações BPS (1.46) e (1.47) e considerando as contribuições a primeira ordem de $\delta a(r)$ e $\delta g(r)$, obtemos

$$\frac{d\delta g}{dr} = \pm \frac{m\delta g}{r}, \quad -\frac{1}{er} \frac{d\delta a}{dr} = \pm ev^2, \quad (1.49)$$

cujas soluções são

$$\delta g(r) = G_0 r^{|m|}, \quad \delta a(r) = \mp \frac{e^2 v^2}{2} r^2. \quad (1.50)$$

Logo, o comportamento das soluções BPS na origem são dadas por

$$g(r) \simeq G_0 r^{|m|}, \quad (1.51)$$

$$a(r) \simeq m \mp \frac{e^2 v^2}{2} r^2, \quad (1.52)$$

dessas expressões é fácil verificar que os campos são bem comportados na origem.

1.2.2 Comportamento das soluções para $r \rightarrow \infty$

A continuação estudamos o comportamento dos campos no limite $r \rightarrow \infty$ considerando as condições de contorno estabelecidas nas equações (1.36) e (1.42). Para resolver as equações BPS neste limite expressamos os campos da seguinte maneira,

$$a(r) = 0 + \delta a(r) \quad , \quad g(r) = 1 - \delta g(r), \quad (1.53)$$

onde as funções $\delta a(r)$ e $\delta g(r)$ se anulam no limite $r \rightarrow \infty$. A substituição de (1.53) nas equações BPS (1.46) e (1.47) e considerando apenas os termos lineares, obtemos

$$(\delta g)' = \mp \frac{(\delta a)}{r} \quad , \quad \frac{(\delta a)'}{r} = \mp 2e^2 v^2 (\delta g). \quad (1.54)$$

Combinando essas equações obtemos as seguintes equações diferenciais de segunda ordem,

$$(\delta g)'' + \frac{(\delta g)'}{r} - 2e^2 v^2 (\delta g) = 0, \quad (1.55)$$

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{r} - 2e^2 v^2 (\delta a) = 0, \quad (1.56)$$

cujas soluções são

$$\delta g(r) = G^{(1)} K_0(Mr) \simeq \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-Mr}, \quad (1.57)$$

$$\delta a(r) = \pm M G^{(1)} r K_1(Mr) \simeq \pm M G_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}, \quad (1.58)$$

onde $G^{(1)}$, G_∞ são constantes determinadas numericamente. As funções $K_0(x)$ e $K_1(x)$ são as funções de Bessel de segunda classe para ordem zero e um, respectivamente. O parâmetro M representa as massas do campo de Higgs e do campo de calibre no limite de Bogomol'nyi,

$$M = \sqrt{2}ev. \quad (1.59)$$

Desse modo, quando $r \rightarrow \infty$, as soluções se comportam como

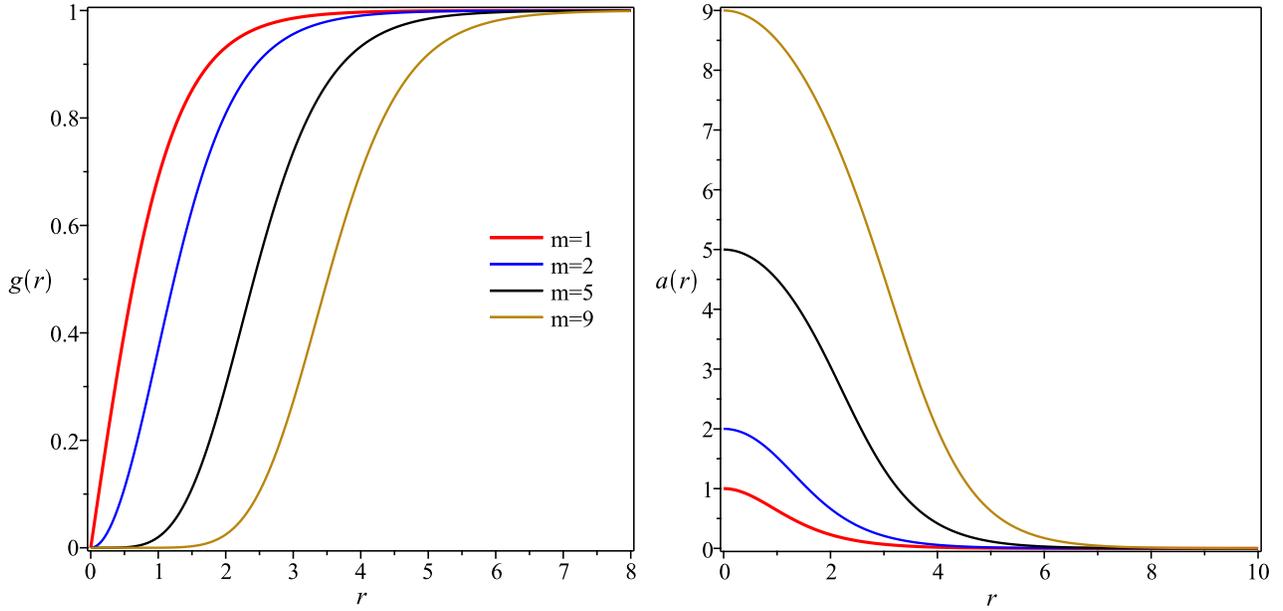
$$g(r) \simeq 1 - \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-Mr}, \quad (1.60)$$

$$a(r) \simeq \pm M G_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}. \quad (1.61)$$

As expressões mostram que as soluções são bem comportadas no infinito.

1.3 Soluções numéricas

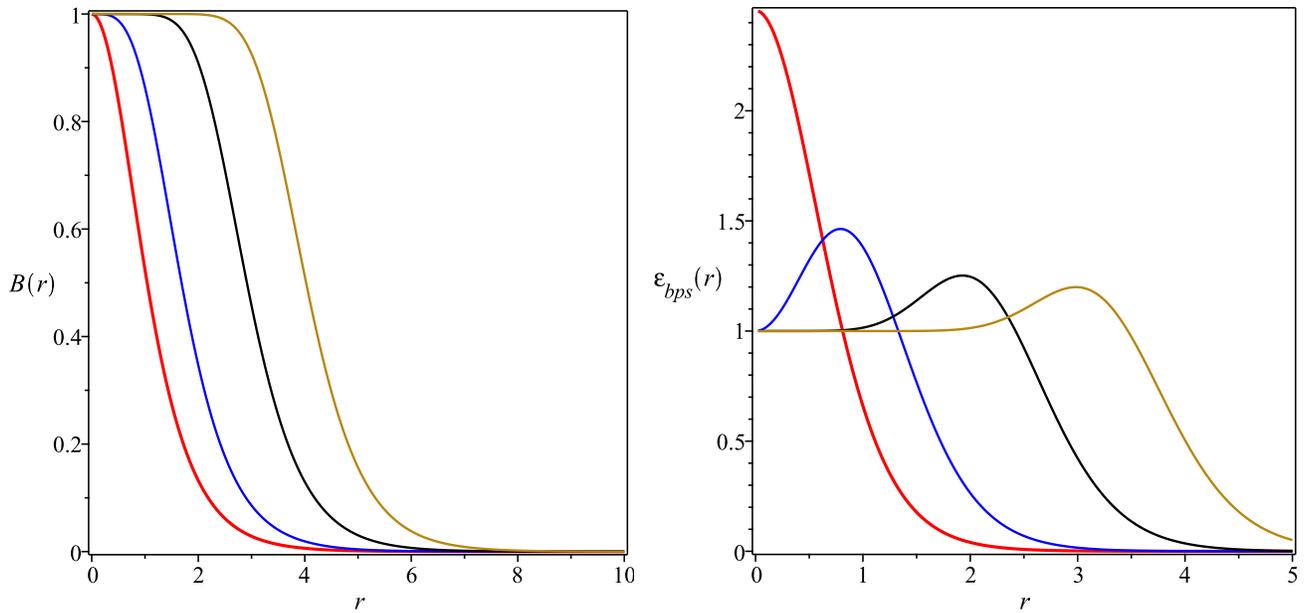
O sistema de equações BPS (1.46) e (1.47) não tem soluções analíticas. Assim, um modo eficaz e preciso de ver o comportamento completo é calcular as soluções via métodos numéricos. Em nosso caso, usaremos as rotinas do programa Maple e consideramos $e = 1$ e $v = 1$. As soluções são mostradas nas figuras 1.2(a) a 1.3(b) para alguns valores de m .



(a) Campo de Higgs $g(r)$

(b) Campo gauge $a(r)$

Figura 1.2:



(a) Campo magnético $B(r)$

(b) Densidade de energia BPS (1.62)

Figura 1.3:

A figura 1.2(a) mostra os perfis para o campo $g(r)$ para vários valores de m . Observa-se que à medida que m aumenta os perfis gradativamente são mais largos e atingem o valor de vácuo mais lentamente. Na figura 1.2(b) observamos os perfis para $a(r)$. Verificamos o valor na origem $a(0) = m$ e na medida que m aumenta, o perfil fica mais largo.

Os perfis do campo magnético são representados na figura 1.3(a). Note que nas proximidades da origem as diferentes configurações do campo sempre convergem para um mesmo valor $B(r \rightarrow 0) = ev^2$. Para $m = 1$, o perfil é um *lump* localizado na origem. Os perfis ficam mais largos quando m é grande. A densidade de energia BPS expressa por

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2, \quad (1.62)$$

está representada na figura 1.3(b). O perfil para $m = 1$ é um *lump* localizado na origem. Para $m \geq 2$, os perfis tem o mesmo valor na origem $\mathcal{E}_{BPS}(0) = e^2v^4$ e formam anéis cada vez mais largos enquanto m cresce.

1.3.1 Representação bidimensional dos vórtices de MH

Uma maneira alternativa de visualizar as soluções tipo vórtice é considerar sua representação bidimensional para vários valores de m . As figuras representadas em (1.4)-(1.7) mostram os plots dos campos e da densidade de energia BPS. Nos gráficos são representadas as intensidades ou magnitudes dos campos como funções do raio r : as partes mais coloridas caracterizam a maior intensidade, as partes mais claras serão aquelas com menor intensidade, e a cor branca representa uma intensidade nula. Pode-se identificar claramente a simetria radial das soluções.

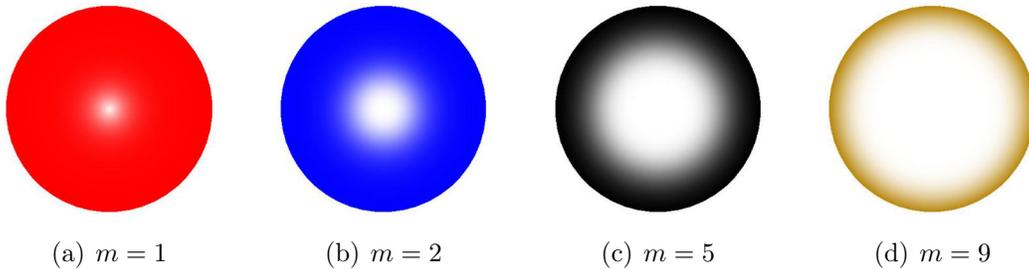


Figura 1.4: Campo de Higgs $g(r)$: Os plots mostram que quando o valor de m aumenta, o campo atinge o valor de vácuo cada vez mais longe da origem.

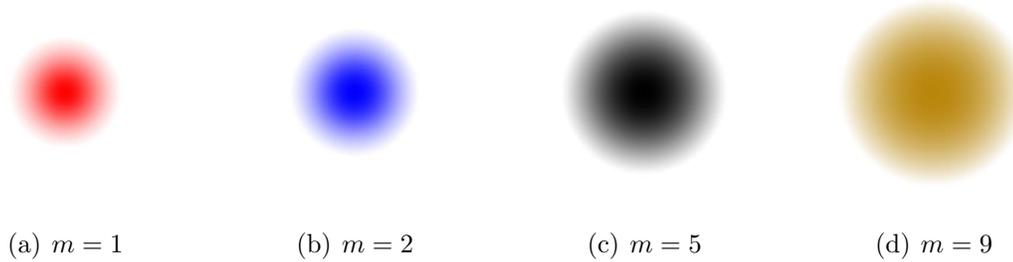


Figura 1.5: Campo $a(r)$: Os plots mostram que o núcleo com intensidade maior do campo, entorno da origem, cresce quando o valor de m aumenta.

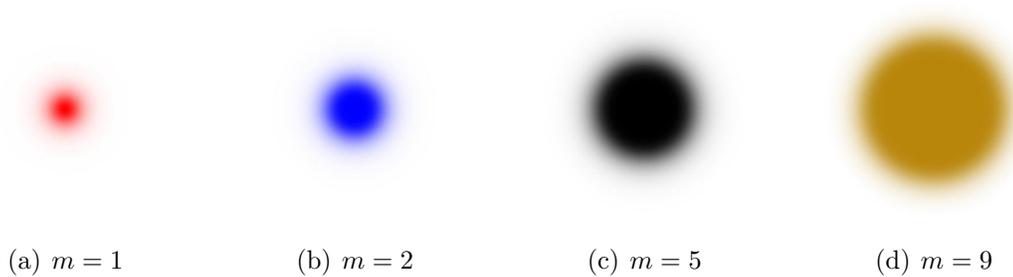


Figura 1.6: Campo magnético: Os gráficos indicam que o campo magnético está altamente concentrado entorno da origem, e que a área coberta cresce gradualmente toda vez que m aumenta seu valor.

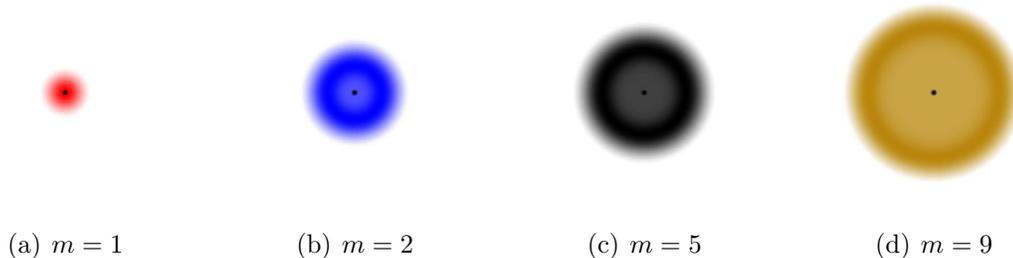


Figura 1.7: Densidade de energia BPS: Observa-se que o formato anelar fica mais evidente para maiores valores de m .

Capítulo 2

Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Neste capítulo estudaremos um modelo construído adicionando à eletrodinâmica de Maxwell-Higgs o termo Chern-Simons (CS) [25], é o chamado modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH) [5]. É conhecido que o termo de Chern-Simons por si só não tem dinâmica mas interfere na dinâmica do sistema quando é acoplado à outros campos tais como o de Maxwell ou campos escalares (Higgs) [4, 25]. No caso do modelo de Chern-Simons-Higgs, a presença do termo de Chern-Simons é responsável pelo surgimento de vórtices possuindo carga elétrica total não nula além de também produzir soluções BPS [4].

O modelo de MCSH é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu\phi|^2 - U . \quad (2.1)$$

O primeiro é o termo de Maxwell, o segundo é o termo Chern-Simons e κ é a constante de acoplamento. A derivada covariante $D_\mu\phi$ é a mesma definida em (1.2). Por último, U é um potencial que provê soluções tipo vórtices.

A equação de movimento para o campo de calibre obtida da lagrangiana (2.1) é dada por,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = J^\mu , \quad (2.2)$$

onde a corrente J^μ é dada por (1.4).

Da mesma forma a equação de movimento para o campo de Higgs gerado por (2.1) é

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi^*} = 0 . \quad (2.3)$$

O tensor energia-momento da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(0)} = -F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha + (D_\mu\phi)^*D_\nu\phi + (D_\nu\phi)^*D_\mu\phi - g_{\mu\nu}\check{\mathcal{L}}^{(0)} , \quad (2.4)$$

onde $\check{\mathcal{L}}^{(0)}$ é a densidade Lagrangiana (2.1) sem o termo de Chern-Simons.

No regime estacionário, da equação (2.2) extraímos a lei de Gauss do modelo

$$\nabla^2 A_0 + \kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2. \quad (2.5)$$

É fácil verificar que a condição de calibre $A_0 = 0$ não satisfaz mais a lei de Gauss. Isso implica que as soluções do sistema além de carregar fluxo magnético também possuem carga elétrica total não nula. Tal afirmação é facilmente demonstrada integrando a lei de Gauss,

$$Q = \kappa \Phi_B, \quad (2.6)$$

onde Φ_B é o fluxo magnético e definimos a carga elétrica total Q como

$$Q = \int d^2 \mathbf{x} 2e^2 A_0 |\phi|^2. \quad (2.7)$$

A lei de Ampère estacionária é

$$\epsilon_{ij} \partial_j B + \kappa \epsilon_{ij} \partial_j A_0 = J_i. \quad (2.8)$$

A equação para o campo de Higgs independente do tempo é

$$D_k D_k \phi + e^2 (A_0)^2 \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0. \quad (2.9)$$

2.1 Densidade de energia e o formalismo BPS

No regime estacionário, a densidade de energia $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{T}_{00}^{(0)}$ é expressa como

$$\mathcal{E}^{(0)} = \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} B^2 + |D_j \phi|^2 + U. \quad (2.10)$$

Ela deve ser nula quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, assim, além das condições de contorno (1.15) devemos impor,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_j A_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.11)$$

A energia total de sistema é dada pela integração da densidade de energia (2.10) resultando,

$$\mathcal{E}^{(0)} = \int d^2 \mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} B^2 + |D_j \phi|^2 + U \right]. \quad (2.12)$$

A fim de minimizar a energia aplicamos o formalismo BPS, para isso reescrevemos os termos do campo magnético e do potencial da seguinte maneira,

$$\frac{1}{2} B^2 + U = \frac{1}{2} \left[B \mp \sqrt{2U} \right]^2 \pm B\sqrt{2U}, \quad (2.13)$$

e usando a identidade (1.18) na expressão (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(0)} = \int d^2\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \sqrt{2\mathcal{U}} \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2\mathcal{U}} + e|\phi|^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 \pm \frac{1}{2e} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Os dois primeiros termos da segunda linha acima são reescritos, usando a lei de Gauss (2.5), da seguinte maneira,

$$\frac{1}{2} (\partial_i A_0)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 = \frac{1}{2} \kappa A_0 B + \frac{1}{2} \partial_i (A_0 \partial_i A_0), \quad (2.15)$$

e substituídos na energia (2.14)

$$\mathcal{E}^{(0)} = \int d^2\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \sqrt{2\mathcal{U}} \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2\mathcal{U}} + e|\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \kappa A_0 \right) + \frac{1}{2} \partial_i (A_0 \partial_i A_0) \pm \frac{1}{2e} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right\}. \quad (2.16)$$

Sob as condições de contorno, já estabelecidas, as derivadas totais não contribuem à energia total do sistema, assim, temos

$$\mathcal{E}^{(0)} = \int d^2\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \sqrt{2\mathcal{U}} \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2\mathcal{U}} + e|\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \kappa A_0 \right) \right\}. \quad (2.17)$$

Com o objetivo de obter uma energia total mínima, proporcional ao fluxo magnético, impomos que o fator multiplicando ao campo magnético seja constante e igual a ev^2 ,

$$\sqrt{2\mathcal{U}} + e|\phi|^2 \pm \frac{\kappa A_0}{2} = ev^2. \quad (2.18)$$

Desta condição obtemos o potencial,

$$U(|\phi|, A_0) = \frac{1}{2} \left(ev^2 - e|\phi|^2 \mp \frac{\kappa A_0}{2} \right)^2. \quad (2.19)$$

Dada a condição de contorno $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_0(\mathbf{x}) = 0$, em (2.11), o campo de Higgs deve satisfazer a condição de contorno introduzida na equação (1.23). Contudo, a forma do potencial quebra a simetria de calibre do modelo (2.1) devido à presença do campo A_0 .

Apesar disso, continuaremos com a implementação do formalismo BPS. Assim, a energia total (2.17) é reescrita como

$$\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{E}_{BPS}^{(0)} + \int d^2\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp \left(ev^2 - e|\phi|^2 \mp \frac{\kappa A_0}{2} \right) \right]^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \right\}, \quad (2.20)$$

onde $\mathcal{E}_{BPS}^{(0)}$ representa a energia mínima (limite de Bogomol'nyi) do sistema, já definida em (1.25). Este limite será saturado quando os campos satisfaçam as seguintes equações auto-duais ou BPS,

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (2.21)$$

$$B = \pm (ev^2 - e|\phi|^2) - \frac{\kappa A_0}{2}. \quad (2.22)$$

A continuação, a fim de verificar se este conjunto de equações BPS é consistente, ou seja, produz soluções reais do modelo (2.1), vamos determinar elas são capazes de gerar as equações de Euler-Lagrange do campo de gauge (2.8) e do campo de Higgs (2.9).

Para recuperar a equação de movimento do campo de Higgs seguimos o procedimento padrão o qual consiste em aplicar D_{\mp} na primeira BPS (2.21),

$$D_{\mp}(D_{\pm}\phi) = D_k(D_k\phi) \pm i[D_1, D_2]\phi = D_k(D_k\phi) \pm eB\phi. \quad (2.23)$$

Assim, a equação BPS (2.21) proporciona

$$D_k(D_k\phi) \pm eB\phi = 0, \quad (2.24)$$

e usando (2.22) obtemos

$$D_k(D_k\phi) + e\phi \left(ev^2 - e|\phi|^2 \mp \frac{\kappa A_0}{2} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Aqui notamos que o segundo termo é a derivada do potencial (2.19) em relação a ϕ^* , assim, temos que

$$D_k(D_k\phi) - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0. \quad (2.26)$$

Note que a equação acima está em clara discordância com (2.9), diferencia-se pela falta do termo $e^2(A_0)^2\phi$. Deste modo verificamos que a equação de Euler-Lagrange para o campo de Higgs não é recobrada a partir das equações BPS. No caso da lei de Ampère aplicamos o operador $\varepsilon_{kj}\partial_j$ na segunda BPS (2.22)

$$\varepsilon_{kj}\partial_j B = \mp e\varepsilon_{kj}\partial_j|\phi|^2 - \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{kj}\partial_j A_0, \quad (2.27)$$

e usando a equação (1.28) obtemos

$$\varepsilon_{kj}\partial_j B + \frac{\kappa}{2}\varepsilon_{kj}\partial_j A_0 = eJ_k. \quad (2.28)$$

Na comparação com (2.8) vemos que esta difere no fator ($\frac{1}{2}$) no segundo termo.

Desta forma fica demonstrado que apesar do modelo (2.1) possuir um sistema de equações BPS (2.21) e (2.22) estas não reproduzem as equações de Euler-Lagrange (2.8) e (2.9). Ou seja, o modelo descrito pela densidade Lagrangiana (2.1) não possui soluções BPS verdadeiras.

2.2 O modelo BPS de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Tal situação pode ser resolvida pela introdução de um campo escalar neutro, Ψ , interagindo com o campo de Higgs e compondo o potencial. No limite BPS, o campo neutro deve satisfazer

uma equação de movimento igual à do potencial escalar A_0 . Assim, no regime estacionário, o campo neutro deve contribuir com a seguinte densidade de energia,

$$\frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 + e^2 \Psi^2 |\phi|^2, \quad (2.29)$$

que é gerada a partir da seguinte densidade Lagrangiana

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - e^2 \Psi^2 |\phi|^2. \quad (2.30)$$

Consequentemente, o modelo BPS de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \kappa \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu \phi|^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - e^2 \Psi^2 |\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi). \quad (2.31)$$

A equação de movimento para o campo de calibre obtida da lagrangiana (2.31) é a mesma dada pela equação (2.2),

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = J^\mu, \quad (2.32)$$

onde a corrente J^μ é dada por (1.4).

A equação de movimento para o campo de Higgs gerado por (2.31) é um pouco diferente de (2.3) devido a interação com o campo escalar neutro,

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} + e^2 \Psi^2 \phi = 0. \quad (2.33)$$

A equação de movimento do campo neutro é

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi + 2e^2 \Psi |\phi|^2 + \frac{\partial U}{\partial \Psi} = 0. \quad (2.34)$$

O tensor energia-momento do modelo BPS de Maxwell-Chern-Simons-Higgs é

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{MCSH} = -F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + (D_\mu \phi)^* D_\nu \phi + (D_\nu \phi)^* D_\mu \phi + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}}, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{\mathcal{L}}$ é a densidade Lagrangiana (2.31) sem o termo de Chern-Simons.

As versões estacionárias das equações de movimento são apresentadas a seguir. Da equação de movimento (2.32) obtemos a lei de Gauss

$$\nabla^2 A_0 + \kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.36)$$

e a lei de Ampère,

$$\epsilon_{ij} \partial_j B + \kappa \epsilon_{ij} \partial_j A_0 = J_i. \quad (2.37)$$

A equação estacionária do campo de Higgs é

$$D_k D_k \phi + e^2 [(A_0)^2 - \Psi^2] \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0, \quad (2.38)$$

e a do campo neutro resulta

$$\nabla^2 \Psi - 2e^2 \Psi |\phi|^2 - \frac{\partial U}{\partial \Psi} = 0. \quad (2.39)$$

2.2.1 Implementação do formalismo BPS

A densidade de energia estacionária, $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{00}^{MCSH}$, do modelo (2.31) resulta

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2} B^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + |D_j \phi|^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 + e^2 \Psi^2 |\phi|^2 + U. \quad (2.40)$$

Para ter uma densidade de energia nula no infinito, além das condições de contorno (1.15) e (2.11), o campo neutro Ψ deve cumprir,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_j \Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.41)$$

A energia total do sistema é

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} B^2 + U + |D_j \phi|^2 + \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + e^2 \Psi^2 |\phi|^2 \right\}, \quad (2.42)$$

aplicando o método BPS para a minimização de energia e a identidade (1.18), obtemos

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp \sqrt{2U}]^2 + |D_{\pm} \phi|^2 + \frac{1}{2} [(\partial_j A_0) \mp (\partial_j \Psi)]^2 + e^2 |\phi|^2 [A_0 \mp \Psi]^2 \right. \\ \left. \pm B (e |\phi|^2 + \sqrt{2U}) \pm (\partial_j \Psi) \partial_j A_0 \pm 2e^2 A_0 \Psi |\phi|^2 \pm \frac{1}{2e} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right\}. \quad (2.43)$$

Usamos a lei de Gauss estacionária (2.36) para expressar o termo $2e^2 |\phi|^2 A_0 \Psi$ como

$$2e^2 A_0 \Psi |\phi|^2 = \Psi (\partial_i \partial_i A_0) + \kappa B \Psi. \quad (2.44)$$

Substituindo na energia total (2.43) obtemos

$$E = \int d^2x \left\{ |D_{\pm} \phi|^2 + \frac{1}{2} [B \mp \sqrt{2U}]^2 + \frac{1}{2} [(\partial_j A_0) \mp (\partial_j \Psi)]^2 + e^2 |\phi|^2 [A_0 \mp \Psi]^2 \right. \\ \left. \pm B (e |\phi|^2 + \sqrt{2U} + \kappa \Psi) \pm \partial_j (\Psi \partial_j A_0) \pm \frac{1}{2e} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right\}. \quad (2.45)$$

As condições de contorno (2.11) e (2.41) garantem que a derivada total $\partial_j (\Psi \partial_j A_0)$ não contribui para a energia total. O mesmo acontece com o termo incluindo a corrente J_k .

A implementação do formalismo BPS será concluída se impusermos que o termo que está multiplicando o campo magnético seja uma constante, ou seja,

$$e |\phi|^2 + \sqrt{2U} + \kappa \Psi = ev^2. \quad (2.46)$$

Essa condição permite determinar o potencial BPS do modelo:

$$U(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2} (ev^2 - e |\phi|^2 - \kappa \Psi)^2. \quad (2.47)$$

Logo, a energia total do sistema pode ser escrita como:

$$E = E_{BPS} + \int d^2\mathbf{x} \left\{ |D_{\pm}\phi|^2 + \frac{1}{2} [B \mp (ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa\Psi)]^2 + \frac{1}{2} [(\partial_j A_0) \mp (\partial_j \Psi)]^2 + e^2 |\phi|^2 [A_0 \mp \Psi]^2 \right\}, \quad (2.48)$$

onde E_{BPS} representa a energia mínima (limite de Bogomol'nyi) do sistema,

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2\mathbf{x} B = \pm ev^2 \Phi_B, \quad (2.49)$$

Este limite será saturado quando os campos satisfizerem as seguintes equações auto-duais ou BPS:

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (2.50)$$

$$B = \pm (ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa\Psi), \quad (2.51)$$

$$A_0 \mp \Psi = 0, \quad (2.52)$$

$$(\partial_j A_0) \mp (\partial_j \Psi) = 0. \quad (2.53)$$

No entanto, as duas últimas equações somente são satisfeitas se escolhermos $\Psi = \pm A_0$.

Assim, as configurações auto-duais do modelo de MCSH são descritas pelas equações BPS:

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (2.54)$$

$$B = \pm (ev^2 - e|\phi|^2) - \kappa A_0, \quad (2.55)$$

e a lei de Gauss (2.36).

2.2.2 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange

Antes de mostrarmos a equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange, vamos a reescrever as últimas no limite BPS, ou seja, quando $\Psi = \pm A_0$ é satisfeito.

Primeiro, expressamos o potencial nesse limite,

$$U(|\phi|, A_0) = \frac{1}{2} (ev^2 - e|\phi|^2 \mp \kappa A_0)^2. \quad (2.56)$$

As equações para o campo de calibre são as mesmas dadas por (2.36) e (2.37).

$$\nabla^2 A_0 + \kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2, \quad (2.57)$$

$$\epsilon_{ij} \partial_j B + \kappa \epsilon_{ij} \partial_j A_0 = J_i. \quad (2.58)$$

Por outro lado, a respectiva equação do campo de Higgs (2.59) resulta

$$D_k D_k \phi + e\phi (ev^2 - e|\phi|^2 \mp \kappa A_0) = 0, \quad (2.59)$$

onde já usamos a condição $\Psi = \pm A_0$.

A equação do campo escalar usando a condição $\Psi = \pm A_0$ transforma em

$$\nabla^2 A_0 \pm \kappa (ev^2 - e|\phi|^2 \mp \kappa A_0) = 2e^2 A_0 |\phi|^2. \quad (2.60)$$

Observa-se que as equações (2.57) e (2.60) são exatamente iguais se usamos a segunda equação BPS (2.55) para o campo magnético. Isto é esperado devido à condição $\Psi = \pm A_0$.

A lei de Ampère (2.58) é recuperada aplicando o operador $\epsilon_{kj}\partial_j$ na equação BPS (2.55), ou seja,

$$\epsilon_{kj}\partial_j B + \kappa\epsilon_{kj}\partial_j A_0 = \mp e\epsilon_{kj}\partial_j |\phi|^2 = J_k, \quad (2.61)$$

onde usamos a equação (1.28) que fornece a densidade de corrente no limite BPS.

Para recuperar a equação de movimento do campo de Higgs (2.59), seguimos o procedimento padrão, o qual consiste em aplicar D_\mp na primeira BPS (2.54), obtendo-se

$$D_k (D_k \phi) \pm eB\phi = 0, \quad (2.62)$$

e usando (2.55) atingimos nosso objetivo

$$D_k D_k \phi + e\phi (ev^2 - e|\phi|^2 \mp \kappa A_0) = 0. \quad (2.63)$$

2.3 BPS MCSH vórtices com simetria radial

Para esse propósito usamos o *Ansatz* dado pelas equações (1.35) e (1.41) para descrever o campo de Higgs e para a componente vetorial do campo de gauge. Além disso, introduzimos a parametrização do potencial escalar A_0 . Assim, temos

$$\phi = vg(r)e^{im\theta}, \quad A_\theta = -\frac{a(r) - m}{er}, \quad A_0 = A_0(r), \quad (2.64)$$

respectivamente, onde $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, representa o número de enrolamento.

As funções $g(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$ são bem comportadas em todo o eixo radial e satisfazem as mesmas condições de fronteira que em (1.36), (1.42) e (2.11),

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = g(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = a(0) = m, \quad \lim_{r \rightarrow 0} A_0(r) = A_0(0), \quad (2.65)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = g(\infty) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = a(\infty) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dA_0}{dr} = A_0'(\infty) = 0. \quad (2.66)$$

Consequentemente, as equações BPS (2.54), (2.55) e a lei de Gauss (2.57) são expressas como:

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.67)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) - \kappa A_0, \quad (2.68)$$

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - \kappa \frac{a'}{er} = 2e^2 v^2 g^2 A_0, \quad (2.69)$$

Note-se que se fizermos $\kappa \rightarrow -\kappa$ as soluções mudam da seguinte maneira: $g \rightarrow g$, $a \rightarrow a$, $A_0 \rightarrow -A_0$.

A densidade de energia BPS será expressa por:

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2 + 2e^2 v^2 (A_0 g)^2 + (A_0')^2. \quad (2.70)$$

O fluxo magnético é dado por

$$\Phi_B = \frac{2\pi}{e} m, \quad (2.71)$$

e a energia BPS é

$$E_{BPS} = \pm 2\pi v^2 m = 2\pi v^2 |m|, \quad (2.72)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a $m > 0$ ($m < 0$).

2.3.1 Comportamento das soluções para $r \rightarrow 0$

O comportamento dos campos na origem é analisado considerando as condições de contorno (2.65) e usando a seguinte representação para eles:

$$g(r) = 0 + \delta g(r), \quad a(r) = m - \delta a(r), \quad A_0(r) = A_0(0) + \delta A_0(r), \quad (2.73)$$

e após substituídas nas equações (2.67), (2.68) e (2.69) obtemos:

$$(\delta g)' \mp \frac{m(\delta g)}{r} = 0, \quad (2.74)$$

$$\frac{1}{er} (\delta a)' \mp ev^2 + \kappa A_0(0) + \kappa (\delta A_0) = 0, \quad (2.75)$$

$$(\delta A_0)'' + \frac{1}{r} (\delta A_0)' + \frac{\kappa}{er} (\delta a)' = 0. \quad (2.76)$$

As soluções destas equações são dadas por:

$$\delta g(r) = C_0 r^{|m|} + \dots, \quad (2.77)$$

$$\delta a(r) = \frac{1}{2} e [\pm ev^2 - \kappa A_0(0)] r^2 + \dots, \quad (2.78)$$

$$\delta A_0(r) = -\frac{1}{4}\kappa [\pm ev^2 - \kappa A_0(0)] r^2 + \dots \quad (2.79)$$

Assim, o comportamento dos perfis na origem são expressos como:

$$g(r) = C_0 r^{|m|} + \dots, \quad (2.80)$$

$$a(r) = m - \frac{1}{2}e [\pm ev^2 - \kappa A_0(0)] r^2 + \dots, \quad (2.81)$$

$$A_0(r) = \omega_0 - \frac{1}{4}\kappa [\pm ev^2 - \kappa A_0(0)] r^2 + \dots \quad (2.82)$$

Isso mostra que as soluções das equações BPS e a lei de Gauss são bem comportadas na origem em concordância com as condições de contorno impostas em (2.65).

2.3.2 Comportamento das soluções para $r \rightarrow \infty$

O comportamento dos campos para $r \rightarrow \infty$ é analisado considerando as condições de contorno (2.66) e usando a seguinte representação:

$$a(r) = 0 + \delta a(r), \quad g(r) = 1 - \delta g(r), \quad A_0(r) = 0 + \delta A_0(r), \quad (2.83)$$

e após substituídas nas equações (2.67), (2.68) e (2.69) obtemos

$$(\delta g)' \pm \frac{(\delta a)}{r} = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{(\delta a)'}{er} \pm 2ev^2 (\delta g) - \kappa (\delta A_0) = 0, \quad (2.85)$$

$$(\delta A_0)'' + \frac{(\delta A_0)'}{r} - \frac{\kappa (\delta a)'}{e r} - 2e^2 v^2 (\delta A_0) = 0. \quad (2.86)$$

Esse conjunto de equações podem ser reescritas da seguinte maneira,

$$(\delta g)'' + \frac{(\delta g)'}{r} - 2e^2 v^2 (\delta g) = \mp e \kappa (\delta A_0), \quad (2.87)$$

$$(\delta A_0)'' + \frac{(\delta A_0)'}{r} - (\kappa^2 + 2e^2 v^2) (\delta A_0) = \mp 2\kappa e v^2 (\delta g), \quad (2.88)$$

$$(\delta a)'' - \frac{(\delta a)'}{r} - 2e^2 v^2 (\delta a) = e \kappa r (\delta A_0)', \quad (2.89)$$

cujas soluções são

$$\delta g(r) = C_{(g)} K_0(Mr) \approx C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}, \quad (2.90)$$

$$\delta a(r) = \pm MC_{(g)} r K_1(Mr) \approx \pm MC_\infty \sqrt{r} e^{-Mr} \quad (2.91)$$

$$\delta A_0(r) = \pm \frac{M}{e} \frac{\kappa}{|\kappa|} C_{(\omega)} K_0(Mr) \approx \pm \frac{M}{e} \frac{\kappa}{|\kappa|} C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}. \quad (2.92)$$

onde C_∞ é uma constante real positiva e M é massa dos bósons no limite BPS,

$$M = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 8(ev)^2 - |\kappa|}}{2}. \quad (2.93)$$

No limite quando $\kappa \rightarrow \infty$, obtemos

$$M_{CSH} \simeq \frac{2(ev)^2}{\kappa}, \quad (2.94)$$

que representa a massa das soluções BPS do modelo de Chern-Simons-Higgs [4].

Por outro lado, quando $\kappa \rightarrow 0$, obtemos

$$M_{MH} \simeq \sqrt{2}ev, \quad (2.95)$$

a massa dos bósons (no limite BPS) do modelo de Maxwell-Higgs (1.59). Finalmente, expressamos os comportamentos dos perfis no infinito,

$$g(r) \approx 1 - C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}, \quad (2.96)$$

$$a(r) \approx \pm MC_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}, \quad (2.97)$$

$$A_0(r) \approx \pm \frac{M}{e} \frac{\kappa}{|\kappa|} C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}. \quad (2.98)$$

2.4 Soluções numéricas

Para obter as soluções numéricas das equações BPS (2.67), (2.68) e a lei de Gauss (2.69) fixamos os parâmetros $e = 1$, $v = 1$ e $\kappa = 1$ para vários valores de m . As soluções são mostradas nas figuras 2.1(a) -2.3(b).

Na figura 2.1(a) percebe-se que o campo de Higgs tem um comportamento muito semelhante ao do modelo MH. Contudo, para um m fixo, a convergência ao valor do vácuo é mais lenta pois $M_{MCSH} < M_{MH}$. Assim, é perceptível que a convergência mais lenta fará que os vórtices tenham

maior raio ou alcance. A figura 2.1(b) mostra que o campo $a(r)$ tende assintoticamente para zero à medida que nos afastamos da origem. Na origem, o valor do campo é igual a m .

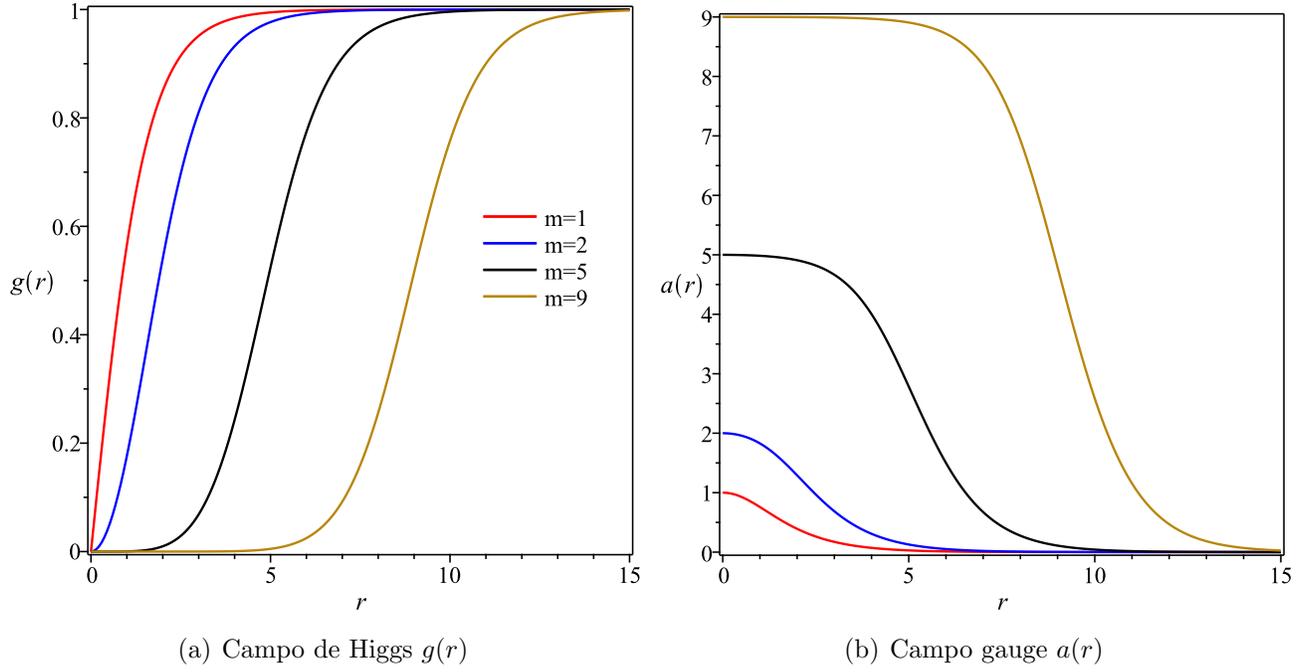


Figura 2.1:

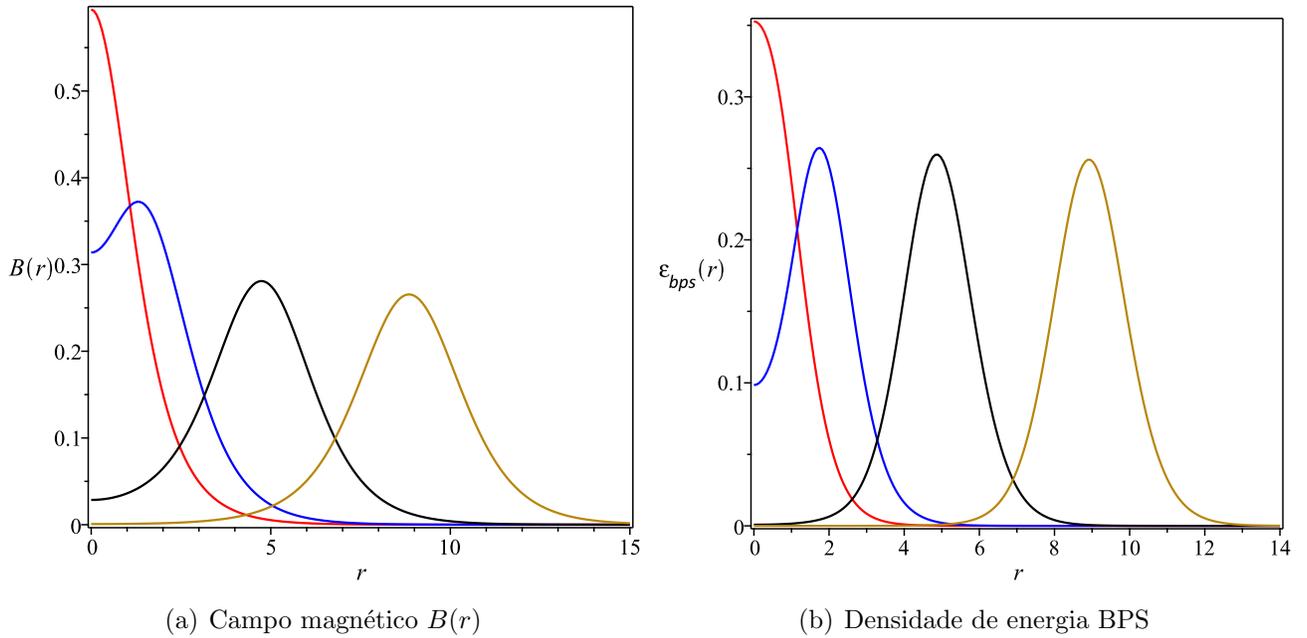


Figura 2.2:

Na figura 2.2(a) o perfil do campo magnético é bem diferenciado neste modelo. Somente para $m = 1$ teremos um perfil centralizado na origem (lump), enquanto que para valores de $m > 1$ o

campo magnético forma um anel ao redor da origem, sendo que a localização do máximo cresce à medida que m aumenta. Também, observá-se que o valor do campo magnético na origem diminui enquanto m aumenta. A densidade de energia BPS é apresentada na figura 2.2(b). Para $m = 1$, o perfil é um *lump*, enquanto que para valores de $m \geq 2$, os perfis adquirem o formato de um anel cujo máximo se afasta cada vez mais da origem à medida que m aumenta.

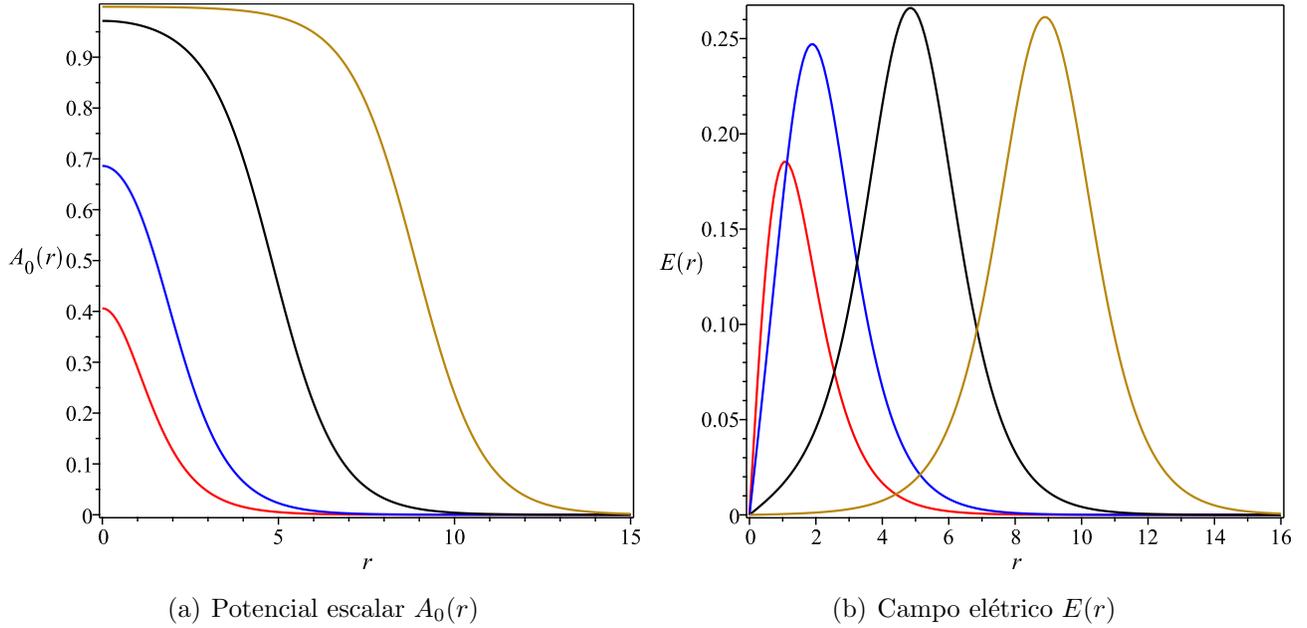


Figura 2.3:

Como já mencionado no início do capítulo, o modelo de MCSH gera vórtices carregados, assim, o potencial escalar e o campo elétrico são mostrados nas figuras 2.3(a) e 2.3(b), respectivamente. O potencial escalar possui um valor finito na origem que fica maior à medida que m aumenta. Os perfis do campo elétrico $E(r)$ mostram que é nulo na origem e formam anéis cujo máximo se afasta da origem com o incremento dos valores de m .

2.4.1 Representação bidimensional dos vórtices de MCSH

Da mesma forma que no modelo anterior, podemos mostrar os resultados numéricos numa forma bidimensional. A leitura dos gráficos é dada em termos da intensidade ou magnitude dos campos, onde na parte mais colorida se representa a maior intensidade, a parte menos colorida significa que a intensidade é pequena e a parte branca indica intensidade nula.

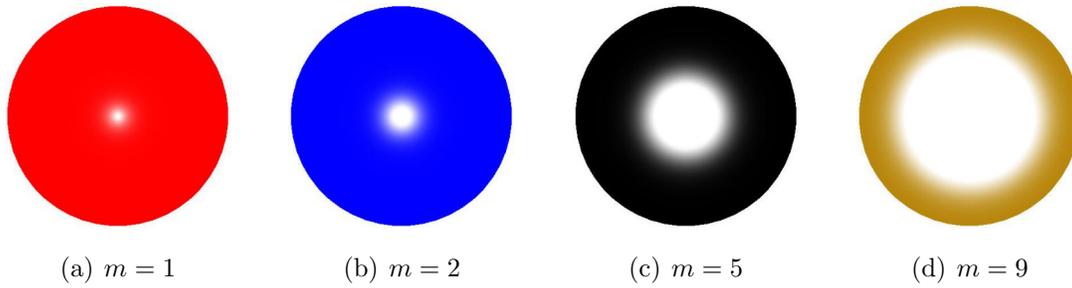


Figura 2.4: Campo de Higgs $g(r)$: Pode-se observar que o valor do vácuo é alcançado mais rapidamente para m menores, mas para valores maiores de m o vácuo é atingido mais lentamente.

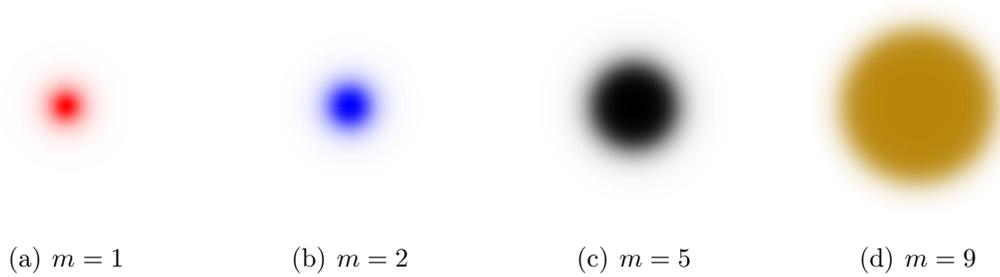


Figura 2.5: Potencial vetorial $a(r)$: Mostra-se que ele está localizado na origem e a largura aumenta cada vez que m cresce.

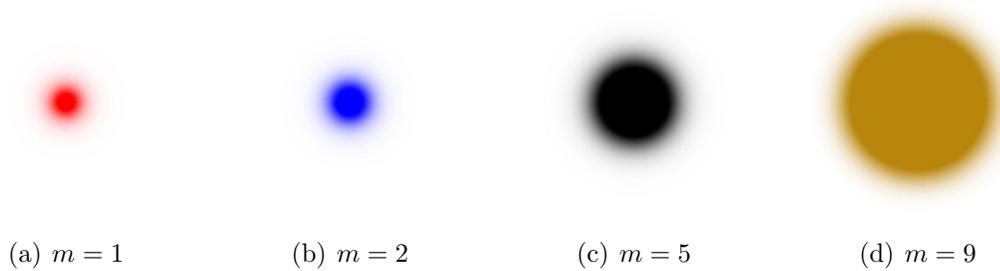


Figura 2.6: Potencial escalar $A_0(r)$: A largura dos perfis cresce na medida que os valores de m aumentam.

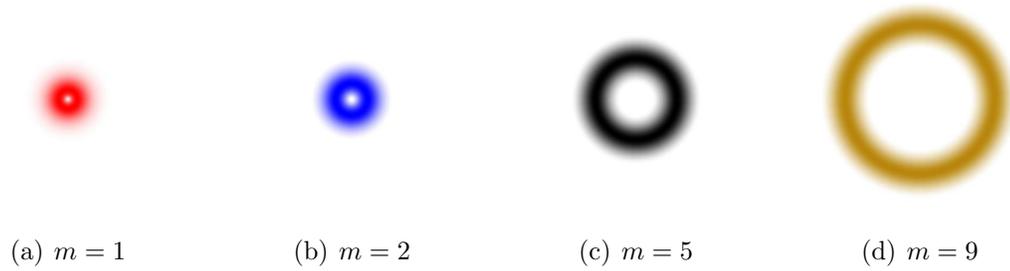


Figura 2.7: Campo elétrico $E(r)$: Os perfis independentemente do valor de m sempre são anéis cujos raios aumentam quando os valores de m se incrementam.

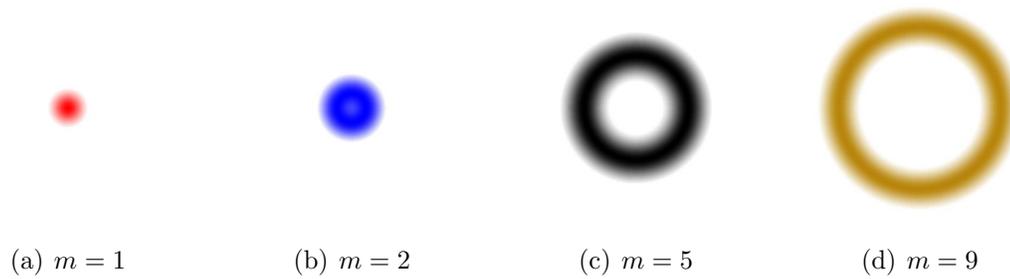


Figura 2.8: Campo magnético $B(r)$: Os perfis gradualmente adquirem o formato de anéis na medida que m aumenta.

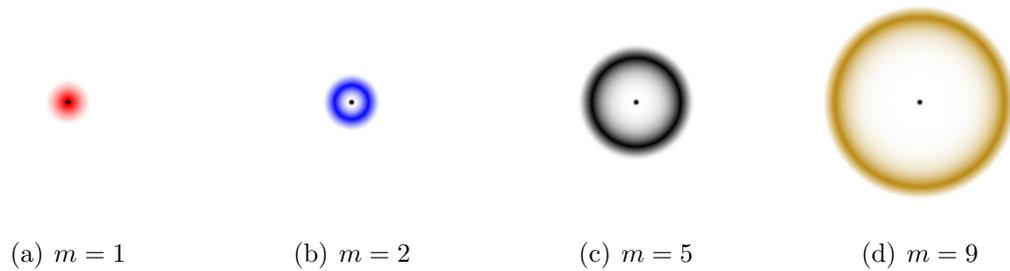


Figura 2.9: Densidade de energia BPS: Com o incremento dos valores de m , os perfis adquirem o formato de anéis mais rapidamente que no caso do campo magnético.

Capítulo 3

Sólitos BPS no modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell

O modelo $CP(N)$ é um modelo efetivo cuja importância se deve a que apresenta propriedades não perturbativas similares às dos modelos de Yang-Mills. Por exemplo, parte do espectro hadrônico da cromodinâmica quântica pode ser considerado como soluções solitônicas dos modelos $CP(N)$ [18].

Neste capítulo, estudaremos um modelo composto do campo $CP(2)$ acoplado minimamente a um campo de gauge abeliano, especificamente, o campo de Maxwell. Esse sistema que chamaremos de modelo de Maxwell- $CP(2)$ foi proposto por Lugynov [19] quem mostrou a presença de sólitos topológicos e sugere a existência de estruturas BPS. A existência de tais estruturas foi mostrada explicitamente em [20]. O modelo abeliano de Maxwell- $CP(2)$ é descrito pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (P_{ab}D_{\mu}\phi_b)^*(P_{ac}D^{\mu}\phi_c) - V(\phi_3). \quad (3.1)$$

O campo de calibre descrito por A_{μ} define o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. O campo $CP(2)$ descrito pelo campo complexo ϕ_a ($a = 1, 2, 3$) satisfaz o vínculo

$$\phi_a\phi_a^* = h, \quad (3.2)$$

P_{ac} é um projetor definido como

$$P_{ab} = \delta_{ab} - h^{-1}\phi_a\phi_b^*. \quad (3.3)$$

O acoplamento mínimo entre o campo de calibre e o campo $CP(2)$ é dado pela derivada covariante definida por

$$D_{\mu}\phi_a = \partial_{\mu}\phi_a - igA_{\mu}Q_{ab}\phi_b, \quad (3.4)$$

o parâmetro g é a constante de acoplamento. A matriz de carga Q_{ab} é real, simétrica e de traço nulo (para preservar a invariância de calibre local)

$$\text{tr}(Q_{ab}) = 0. \quad (3.5)$$

Finalmente $V(\phi_3)$ é um potencial que provê as soluções tipo vórtices BPS.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre obtida a partir da densidade Lagrangiana (3.1) é

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu, \quad (3.6)$$

com J^μ a densidade de corrente conservada,

$$J^\mu = -ig \left(\phi_b^* Q_{bc} \overleftrightarrow{D}^\mu \phi_c \right) + igh^{-1} \phi_c Q_{cm} \phi_m^* (\phi_b^* \overleftrightarrow{D}^\mu \phi_b). \quad (3.7)$$

onde o operador $\overleftrightarrow{D}^\mu$ é definido como segue

$$u^* \overleftrightarrow{D}^\mu v = u^* (D^\mu v) - (D^\mu u)^* v. \quad (3.8)$$

A respectiva equação de movimento para o campo $CP(2)$ é dada pela expressão

$$P_{bm} \left(2P_{ma} D_\mu (P_{ac} D^\mu \phi_c) - D_\mu (D^\mu \phi_m) + \frac{\partial V(\phi_3)}{\partial \phi_m^*} \right) = 0. \quad (3.9)$$

O tensor energia-momento do modelo Maxwell- $CP(2)$ é dado por

$$\mathcal{T}_{\lambda\rho} = -F_{\lambda\mu} F_\rho{}^\mu + (P_{ab} D_\lambda \phi_b)^* P_{ac} D_\rho \phi_c + (P_{ab} D_\rho \phi_b)^* P_{ac} D_\lambda \phi_c - g_{\lambda\rho} \mathcal{L}. \quad (3.10)$$

As soluções que procuramos pertencem ao regime estacionário, assim, primeiro escrevemos as respectivas equações do campo de calibre. A partir de (3.6) obtemos a lei de Gauss,

$$\nabla^2 A_0 = \rho, \quad (3.11)$$

com a densidade de carga elétrica ρ dada por

$$\rho = 2g^2 A_0 (Q_{bc} Q_{nc} \phi_c \phi_b^* - h^{-1} Q_{cm} Q_{bn} \phi_c \phi_m^* \phi_b \phi_n^*). \quad (3.12)$$

Observa-se que a lei de Gauss (3.11) é satisfeita identicamente pela condição de calibre $A_0 = 0$, o que torna as soluções eletricamente neutras, ou seja, possuem carga elétrica total nula.

Similarmente, a partir da equação (3.6) obtemos a lei de Ampère,

$$\partial_k B = -\varepsilon_{kj} J_j, \quad (3.13)$$

com J_j , a densidade de corrente elétrica, definida como

$$J_j = -ig \phi_b^* Q_{bc} \overleftrightarrow{D}_j \phi_c + igh^{-1} \phi_c Q_{cm} \phi_m^* (\phi_b^* \overleftrightarrow{D}_j \phi_b). \quad (3.14)$$

3.1 Sólitos com simetria radial

Com o intuito de buscar soluções solitônicas com simetria radial escolheremos o ansatz,

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \sqrt{h} \begin{pmatrix} e^{im\theta} \sin \alpha(r) \cos \beta(r) \\ e^{in\theta} \sin \alpha(r) \sin \beta(r) \\ e^{i\ell\theta} \cos \alpha(r) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

onde r, θ representam as coordenadas polares. Pode-se perceber que a condição (3.2) é satisfeita pela parametrização (3.15). Os parâmetros $m, n, \ell \in \mathbb{Z}$ são os números de enrolamento (*winding numbers*). Com essa parametrização, o potencial de auto-interação somente dependerá da função α , ou seja, $V = V(\alpha)$. A parametrização para o campo de gauge é dada por

$$A_i = -\frac{1}{gr^2} \epsilon_{ij} x_j A(r), \quad (3.16)$$

onde ϵ_{ij} é o tensor bidimensional do Levi-Civita ($\epsilon_{12} = +1$). Com tal parametrização, o campo magnético é representado como

$$B(r) = \frac{1}{gr} \frac{dA(r)}{dr}. \quad (3.17)$$

As funções reais $\alpha(r)$ e $A(r)$ são regulares na origem [20], e no infinito dependem das configurações que serão estabelecidos no futuro. Então, vamos primeiro estabelecer o valor dos campos na origem

$$\alpha(0) = 0, \quad A(0) = 0. \quad (3.18)$$

Dado que os campos $\phi_a(r, \theta)$ devem ser regulares na origem, necessariamente, o valor do *winding number* ℓ será nulo ($\ell = 0$), garantindo assim uma solução unívoca ou univaluada na origem. Por outro lado, o valor da função $\alpha(r)$ (campo ϕ_3) quando $r \rightarrow \infty$ será determinado da condição,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\phi_3) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(\alpha) = 0. \quad (3.19)$$

Para representar Q_{ab} usaremos as matrizes do subgrupo de Cartan do grupo $SU(3)$, especificamente, as matrizes λ_3 e λ_8 representadas da seguinte forma

$$[Q_{ab}]_{\lambda_3} = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [Q_{ab}]_{\lambda_8} = \frac{\lambda_8}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Para nossa análise, usamos apenas a primeira matriz, uma vez que ambas geram soluções essencialmente equivalentes [19]. Usando-se a parametrização (3.15), (3.16) e a matriz $[Q_{ab}]_{\lambda_3}$ em (3.20) reescrevemos as equações de Euler-Lagrange (3.13) e (3.9), respectivamente. Assim, a lei de Ampère (3.13) é expressa como

$$B' + hg(2m - A) \frac{\sin^2 \alpha}{2r} [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta] = 0, \quad (3.21)$$

e a equação de movimento (3.9) do campo $CP(2)$ produz as seguintes equações para os campos $\alpha(r)$ e $\beta(r)$,

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{(2m - A)^2}{4r^2} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta \right) \sin 2\alpha - \frac{(\beta')^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{1}{2h} \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad (3.22)$$

$$\beta'' + \beta' \left(\frac{1}{r} + 2\alpha' \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) - \frac{(2m - A)^2}{4r^2} \sin^2 \alpha \sin(4\beta) = 0, \quad (3.23)$$

respectivamente.

3.2 Densidade de energia e o formalismo BPS

A densidade de energia estacionária, considerando o calibre $A_0 = 0$, é dada por $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{00}$, com \mathcal{T}_{00} definido em (3.10),

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B^2 + (P_{ab} D_k \phi_b)^* (P_{ac} D_k \phi_c) + V. \quad (3.24)$$

O segundo termo expresso no ansatz é dado por

$$(P_{ab} D_i \phi_b)^* (P_{ac} D_i \phi_c) = h \left((\alpha')^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta] \right). \quad (3.25)$$

Assim, a densidade de energia (3.24) fica expressa como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta] + (\beta')^2 \sin^2 \alpha \right], \quad (3.26)$$

cuja integração provê a energia total do sistema,

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{1}{2} B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta] + (\beta')^2 \sin^2 \alpha \right] \right). \quad (3.27)$$

O passo seguinte é a implementação do método de Bogomol'nyi, assim, escrevemos os termos da energia como uma soma de quadrados,

$$E = E_{bps} + E_1, \quad (3.28)$$

onde o primeiro termo E_{bps} , que proverá a energia BPS, é dado por

$$E_{bps} = \pm 2\pi \int_0^\infty r dr \left[h \frac{(2m - A)}{r} \alpha' [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta]^{1/2} \sin \alpha + \sqrt{2V} B \right]. \quad (3.29)$$

O segundo termo em (3.28) é

$$E_1 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h(\beta')^2 \sin^2 \alpha + h \left(\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta]^{1/2} \right)^2 \right\}, \quad (3.30)$$

A energia mínima do sistema será atingido quando $E_1 = 0$, ou seja, os campos satisfazem as seguintes equações de primeira ordem,

$$B = \pm\sqrt{2V} \ , \quad (3.31)$$

$$\alpha' = \pm(2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta]^{1/2}, \quad (3.32)$$

$$\beta' = 0. \quad (3.33)$$

Da equação (3.33) obtemos,

$$\beta = cte, \quad (3.34)$$

e com ajuda da equação de Euler-Lagrange (3.23), temos que

$$\sin(4\beta) = 0, \quad (3.35)$$

assim, os valores possíveis de β são

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad , \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2}k. \quad (3.36)$$

Estes casos serão desenvolvidos a seguir

3.3 Caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

Nesta seção analisamos o caso $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, com isso,

$$\cos 2\beta = 0. \quad (3.37)$$

Conseqüentemente, as lei de Ampère definida em (3.21) é reescrita como

$$B'(r) + hg(2m - A) \frac{\sin^2 \alpha}{2r} = 0, \quad (3.38)$$

e a equação de movimento (3.22) para o campo $\alpha(r)$ simplifica a

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{(2m - A)^2}{8r^2} \sin 2\alpha = \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right). \quad (3.39)$$

Neste caso, a densidade de energia se expressa como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right]. \quad (3.40)$$

As funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ na origem satisfazem as condições estabelecidas em (3.18), já no infinito, para que a energia seja localizada e finita, as condições de contorno são dadas por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha'(r) = 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 2m. \quad (3.41)$$

A primeira equação indica que no limite $r \rightarrow \infty$ a função $\alpha(r)$ deverá ter um valor constante (o estado de vácuo) que será determinado pela condição (3.19).

A energia total é definida pela integração da densidade de energia (3.40),

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{1}{2} B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right] \right). \quad (3.42)$$

A implementação do formalismo BPS permite, após algumas manipulações, escrevê-la da seguinte maneira

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{2r} \sin \alpha \right]^2 \pm B \sqrt{2V} \pm h \frac{(2m - A)}{r} \alpha' \sin \alpha \right\}. \quad (3.43)$$

O último termo acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$\pm h \frac{(2m - A)}{r} \alpha' \sin \alpha = \mp \frac{h}{r} [(2m - A) (\cos \alpha)]' \mp ghB \cos \alpha. \quad (3.44)$$

Com essa expressão substituída em (3.43), a energia total é expressa como

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{2r} \sin \alpha \right]^2 \pm B \left(\sqrt{2V} - gh \cos \alpha \right) \mp \frac{h}{r} [(2m - A) \cos \alpha]' \right\}. \quad (3.45)$$

O potencial de auto-interação é determinado fazendo nulo o termo que multiplica o campo magnético, ou seja,

$$V(\alpha) = \frac{h^2 g^2}{2} \cos^2 \alpha \quad \text{ou} \quad V(|\phi_3|) = \frac{g^2 h |\phi_3|^2}{2}. \quad (3.46)$$

Assim, a condição (3.19) determina o valor de vácuo do campo $\alpha(r)$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.47)$$

A integração da derivada total em (3.45) usando as condições de contorno definidas em (3.18), (3.41) e (3.47), define a energia mínima do sistema

$$E_{bps} = \mp 2\pi \int_0^\infty r dr \frac{h}{r} [(2m - A) \cos \alpha]' = \pm 4\pi h m = 4\pi h |m|, \quad (3.48)$$

onde o sinal superior (inferior) é usado para $m > 0$ ($m < 0$).

Com essas informações a energia (3.45) é escrita como

$$E = E_{bps} + 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp hg \cos \alpha \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{2r} \sin \alpha \right]^2 \right\}, \quad (3.49)$$

com isso verifica-se que a energia satisfaz a condição,

$$E \geq E_{bps}. \quad (3.50)$$

Tal limite inferior (mínimo de energia) é saturado quando o integrando em (3.49) é nulo, ou seja, as funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais de primeira ordem,

$$B = \frac{A'}{gr} = \pm hg \cos \alpha, \quad (3.51)$$

$$\alpha' = \pm (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r}. \quad (3.52)$$

O fluxo magnético pode ser calculado a partir da expressão (3.17) e as condições de contorno estabelecidas em (3.18) e (3.41),

$$\Phi_B = \int d^2\mathbf{x} B = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{A'}{rg} \right) = \frac{4\pi}{g} m. \quad (3.53)$$

Assim, verifica-se que tanto a energia total como o fluxo magnético são diretamente proporcionais ao número de enrolamento m , ou seja, estão quantizados.

3.3.1 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange

A seguir mostraremos que as equações BPS (3.51) e (3.52) reproduzem as equações de Euler-Lagrange do modelo dadas pela lei de Ampère (3.38) e a equação do campo $\alpha(r)$ (3.39).

Com esse objetivo, primeiro derivamos a BPS (3.51) e obtemos

$$B' = \mp hg \alpha' \sin \alpha, \quad (3.54)$$

imediatamente usamos a BPS (3.52) para substituir α' , assim, chegamos à expressão da lei de Ampère (3.38),

$$B' + hg \frac{(2m - A)}{2r} \sin^2 \alpha = 0. \quad (3.55)$$

A equação para o campo $\alpha(r)$ será obtida a partir da derivada da BPS (3.52), assim,

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r^2} \pm (2m - A) \frac{\cos \alpha}{2r} \alpha' \mp A' \frac{\sin \alpha}{2r} \\ &= -\frac{\alpha'}{r} + (2m - A)^2 \frac{\sin 2\alpha}{8r^2} - \frac{hg^2}{4} \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde, na primeira fila, reescrevemos o primeiro e segundo termos com ajuda da BPS (3.52) e, o terceiro somando é reescrito usando a BPS (3.51). Observa-se que o terceiro termo em (3.56) pode ser expresso como a derivada do potencial (3.46), ou seja,

$$\frac{1}{2h} \left(\frac{dV}{d\alpha} \right) = -\frac{hg^2}{4} \sin 2\alpha. \quad (3.57)$$

Finalmente, a equação (3.56) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - (2m - A)^2 \frac{(\sin 2\alpha)}{8r^2} = \frac{1}{2h} \left(\frac{dV}{d\alpha} \right), \quad (3.58)$$

que representa exatamente a equação de movimento (3.39). Desse modo mostramos a equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange do modelo.

3.3.2 Comportamento dos campos quando $r \rightarrow 0$

Os comportamentos das funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ na origem são estudados solucionando as equações BPS, (3.51) e (3.52), usando a seguinte representação,

$$\alpha(r) = 0 + \delta\alpha(r) \quad , \quad A(r) = 0 + \delta A(r) \quad . \quad (3.59)$$

As funções $\delta\alpha(r)$ e $\delta A(r)$ são infinitesimais, bem comportadas e nulas na origem. Assim, substituindo elas nas equações BPS obtemos as seguintes equações diferenciais,

$$\frac{(\delta A)'}{gr} = \pm hg \quad , \quad (\delta\alpha)' = \pm \frac{m}{r} (\delta\alpha), \quad (3.60)$$

onde consideramos somente as contribuições lineares, cujas soluções são facilmente calculadas,

$$\delta\alpha(r) = C_0 r^{|m|} \quad , \quad \delta A(r) = \pm \frac{hg^2}{2} r^2 \quad . \quad (3.61)$$

Por tanto, os comportamentos na origem da funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ são expressos como

$$\alpha(r) = C_0 r^{|m|} + \dots \quad , \quad (3.62)$$

$$A(r) = \pm \frac{hg^2}{2} r^2 + \dots \quad (3.63)$$

Com isso verificamos que as condições de contorno em $r \rightarrow 0$ produzem soluções bem comportadas das equações BPS (3.51) e (3.52).

3.3.3 Comportamento dos campos quando $r \rightarrow \infty$

Imediatamente, estudamos o comportamento dos campos $A(r)$ e $\alpha(r)$ quando $r \rightarrow \infty$. Com esse intuito consideramos as condições de contorno (3.41) e (3.47) para expressarmos os campos da seguinte maneira

$$\alpha(r) = \frac{\pi}{2} - \delta\alpha(r) \quad , \quad A(r) = 2m - \delta A(r), \quad (3.64)$$

onde $\delta\alpha(r)$ e $\delta A(r)$ são funções infinitesimais, bem comportadas e nulas no infinito. A substituição delas nas equações (3.51) e (3.52), considerando somente os termos à primeira ordem, obtemos

$$\frac{(\delta A)'}{r} = \mp g^2 h (\delta\alpha) \quad , \quad (\delta\alpha)' = \mp \frac{(\delta A)}{2r}. \quad (3.65)$$

Combinando essas equações obtemos as seguintes equações diferenciais de segunda ordem,

$$(\delta\alpha)'' + \frac{(\delta\alpha)'}{r} - \frac{hg^2}{2}(\delta\alpha) = 0, \quad (3.66)$$

$$(\delta A)'' - \frac{(\delta A)'}{r} - \frac{hg^2}{2}(\delta A) = 0, \quad (3.67)$$

cujas soluções para $r \rightarrow \infty$ são:

$$\delta\alpha \simeq \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-Mr}, \quad \delta A \simeq \pm 2MG_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}, \quad (3.68)$$

onde G_∞ é uma constante calculada numericamente. A massa dos campos no limite BPS é dada por M cujo valor é

$$M = g\sqrt{\frac{h}{2}}. \quad (3.69)$$

Da mesma maneira, as soluções aproximadas dos campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ no infinito são

$$\alpha(r) \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-Mr}, \quad (3.70)$$

$$A(r) \simeq 2m \mp 2MG_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}. \quad (3.71)$$

3.4 Caso $\beta = \frac{\pi}{2}k$

Nesta seção analisamos o caso $\beta = \beta_2 = \frac{\pi}{2}k$, com isso,

$$\cos 2\beta = (-1)^k, \quad (3.72)$$

cuja substituição nas equações de Euler-Lagrange, (3.21) e (3.22), permite reescrever a lei de Ampère como

$$B'(r) + hg(2m - A) \frac{\sin^2(2\alpha)}{8r} = 0, \quad (3.73)$$

e a equação do campo $\alpha(r)$ resulta ser

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{(2m - A)^2}{16r^2} \sin(4\alpha) = \frac{1}{2h} \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad (3.74)$$

respectivamente.

Portanto, a densidade de energia pode ser escrita como,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{16r^2} \right], \quad (3.75)$$

e as condições dos campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ de modo que a energia seja finita no infinito são:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha'(r) = 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 2m. \quad (3.76)$$

A primeira equação indica que no limite $r \rightarrow \infty$ a função $\alpha(r)$ deverá ter um valor constante (o estado de vácuo) que será determinado pela condição (3.19).

A energia total é dada por

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{1}{2} B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{16r^2} \right] \right). \quad (3.77)$$

A implementação do algoritmo BPS permite escrever a energia total como

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{4r} \sin 2\alpha \right]^2 \right. \\ \left. \pm B \left(\sqrt{2V} - \frac{gh}{4} \cos 2\alpha \right) \mp \frac{h}{4r} [(2m - A) \cos 2\alpha]' \right\}. \quad (3.78)$$

Observa-se que se fizermos nulo o termo que multiplica o campo magnético, obtemos o potencial de auto-interação, ou seja,

$$V(\alpha) = \frac{h^2 g^2}{32} \cos^2(2\alpha) \quad \text{ou} \quad V(|\phi|) = \frac{g^2}{32} (2|\phi_3|^2 - h)^2. \quad (3.79)$$

Desse modo, a condição (3.19) determina o valor de vácuo do campo $\alpha(r)$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{4}. \quad (3.80)$$

A derivada total em (3.78) integrada usando as condições de contorno definidas em (3.18), (3.76) e (3.80) proporciona o mínimo da energia,

$$E_{BPS} = \mp 2\pi \int_0^\infty r dr \frac{h}{4r} [(2m - A) \cos 2\alpha]' = \pm \pi h m = \pi h |m|, \quad (3.81)$$

onde o sinal superior (inferior) é usado para $m > 0$ ($m < 0$).

Assim, a energia total (3.78) será escrita como

$$E = E_{BPS} + 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \frac{hg}{4} \cos(2\alpha) \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{4r} \sin 2\alpha \right]^2 \right\}. \quad (3.82)$$

O mínimo da energia será atingido se a contribuição da integral em (3.82) for nulo, ou seja, se as funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ satisfazem as seguintes equações de primeira ordem ou equações BPS

$$B = \frac{1}{gr} A' = \pm \frac{gh}{4} \cos(2\alpha), \quad (3.83)$$

$$\alpha' = \pm (2m - A) \frac{\sin 2\alpha}{4r}. \quad (3.84)$$

O fluxo magnético dado em (3.53) resulta ser

$$\Phi_B = \frac{4\pi}{g} m, \quad (3.85)$$

que, similarmente, à energia BPS é proporcional ao número de enrolamento m .

3.4.1 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange

Primeiro mostraremos que as equações BPS (3.83) e (3.84) reproduzem a lei de Ampère (3.73). Com esse intuito se deriva a equação (3.83),

$$B' = \mp \frac{hg}{2} \sin 2\alpha (\alpha)', \quad (3.86)$$

imediatamente, usamos (3.84) para substituir $\alpha'(r)$. Desse modo, a equação resultante é

$$B' + hg \frac{(2m - A)}{8r} \sin^2 2\alpha = 0, \quad (3.87)$$

exatamente a lei de Ampère (3.73).

Para obter a equação de movimento (3.74) do campo $\alpha(r)$ se deriva a BPS (3.84), assim, temos

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \mp (2m - A) \frac{\sin 2\alpha}{4r^2} \pm (2m - A) \frac{\cos 2\alpha}{2r} \alpha' \mp A' \frac{\sin 2\alpha}{4r} \\ &= -\frac{\alpha'}{r} + (2m - A)^2 \frac{\sin 4\alpha}{16r^2} - \frac{hg^2}{32} \sin 4\alpha, \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde, no lado direito da primeira fila, reescrevemos o primeiro e segundo termos com ajuda da BPS (3.84) e, o terceiro somando é reescrito usando a BPS (3.83). Observa-se que o terceiro termo em (3.88) pode ser expresso como a derivada do potencial (3.79), ou seja,

$$\frac{1}{2h} \left(\frac{dV}{d\alpha} \right) = -\frac{hg^2}{32} \sin 4\alpha. \quad (3.89)$$

Finalmente, a equação (3.88) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - (2m - A)^2 \frac{(\sin 4\alpha)}{16r^2} = \frac{1}{2h} \left(\frac{dV}{d\alpha} \right), \quad (3.90)$$

que representa exatamente à equação de movimento (3.74). Assim, para o caso β_2 a equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange também é verificada.

3.4.2 Comportamento dos campos em $r \rightarrow 0$

Estudamos o comportamento das funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ na origem solucionando as equações BPS (3.83) e (3.84) usando a seguinte representação

$$\alpha(r) = 0 + \delta\alpha(r) \quad , \quad A(r) = 0 + \delta A(r). \quad (3.91)$$

Substituindo essas expressões em (3.83) e (3.84) obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$(\delta A)' = \pm \frac{rg^2h}{4} \quad , \quad (\delta\alpha)' = \pm \frac{m}{r} (\delta\alpha), \quad (3.92)$$

cujas soluções fornecem os comportamentos das funções na origem,

$$\alpha(r) = C_1 r^{|m|} + \dots \quad , \quad (3.93)$$

$$A(r) = \pm \frac{g^2h}{8} r^2 + \dots \quad . \quad (3.94)$$

Desse modo, verifica-se que as equações BPS (3.83) e (3.84) com as condições de contorno em $r \rightarrow 0$ geram soluções bem comportadas.

3.4.3 Comportamento assintótico dos campos em $r \rightarrow \infty$

Neste limite, os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ são expressos da seguinte maneira

$$a(r) = \frac{\pi}{4} - \delta\alpha(r) \quad , \quad A(r) = 2m - \delta A(r) \quad , \quad (3.95)$$

onde as funções infinitesimais, $\delta\alpha(r)$ e $\delta A(r)$ se anulam no infinito. Após a substituição delas nas equações (3.83) e (3.84), e considerando somente os termos lineares, as equações BPS são reduzidas à seguinte forma:

$$\frac{(\delta A)'}{r} = \mp \frac{g^2h}{2} (\delta\alpha) \quad , \quad (\delta\alpha)' = \mp \frac{(\delta A)}{4r}. \quad (3.96)$$

Ambas equações podem ser combinadas para obter o seguinte par de equações diferenciais de segunda ordem,

$$(\delta\alpha)'' + \frac{(\delta\alpha)'}{r} - \frac{hg^2}{8} (\delta\alpha) = 0, \quad (3.97)$$

$$(\delta A)'' - \frac{(\delta A)'}{r} - \frac{hg^2}{8} (\delta A) = 0, \quad (3.98)$$

cujas soluções são

$$\delta\alpha \simeq \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-Mr} \quad , \quad \delta A \simeq \pm 4MG_\infty \sqrt{r} e^{-Mr}, \quad (3.99)$$

respectivamente, onde G_∞ é uma constante calculada numericamente. A massa dos campos no limite BPS é dada por M cujo valor é

$$M = g\sqrt{\frac{h}{8}}. \quad (3.100)$$

As soluções aproximadas para os campos no limite $r \rightarrow \infty$ são:

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} e^{-Mr}, \quad (3.101)$$

$$A(r) \approx 2m \mp 4MG_\infty\sqrt{r} e^{-Mr}. \quad (3.102)$$

3.5 Soluções numéricas

Nesta seção apresentamos as soluções numéricas das equações BPS (3.51) e (3.52) para o caso $\beta = \beta_1$. As respectivas soluções para o caso $\beta = \beta_2$ são similares. Fixamos o valor das constantes $h = g = 1$ e calculamos as soluções para alguns valores do winding number m . Os resultados são apresentados nas figuras 3.1(a) a 3.2(b).

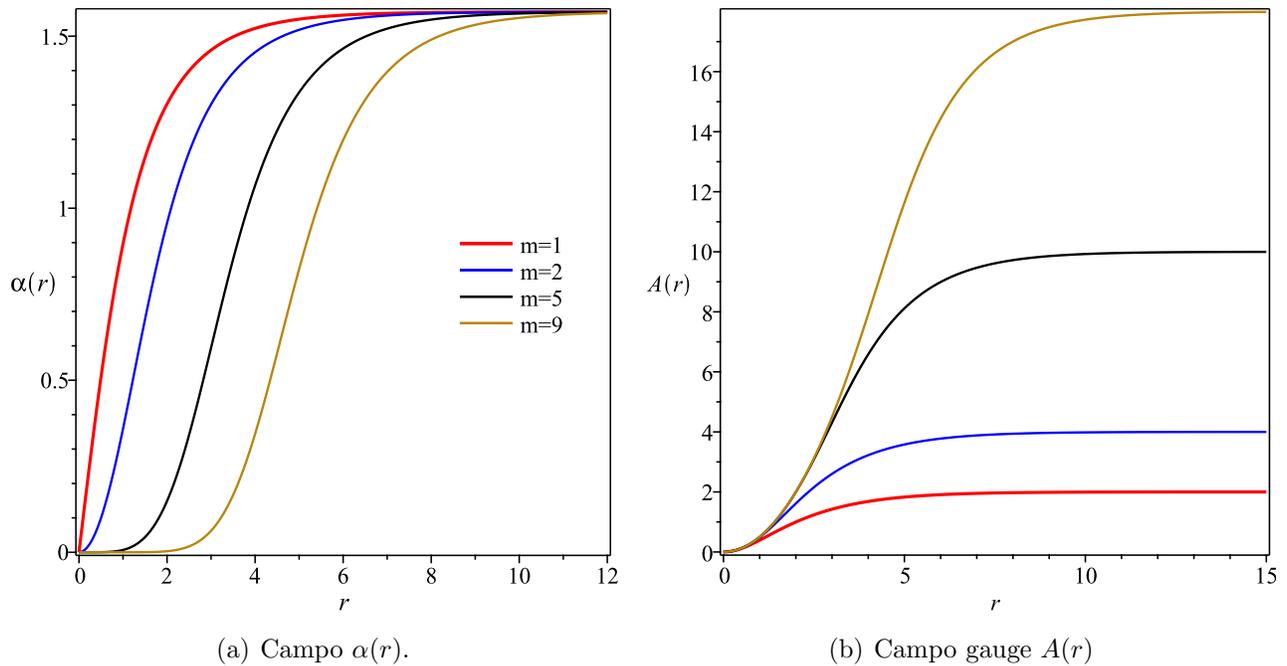


Figura 3.1:

A figura 3.1(a) mostra os perfis da função $\alpha(r)$. Observa-se que quando m aumenta, os perfis ficam mais largos e atingem o valor do vácuo $\pi/2$ mais lentamente.

Os perfis do campo de calibre são apresentados na figura 3.1(b). Os perfis mostram que o campo gauge o valor de vácuo $2m$ é atingido mais rapidamente para valores pequenos de m .

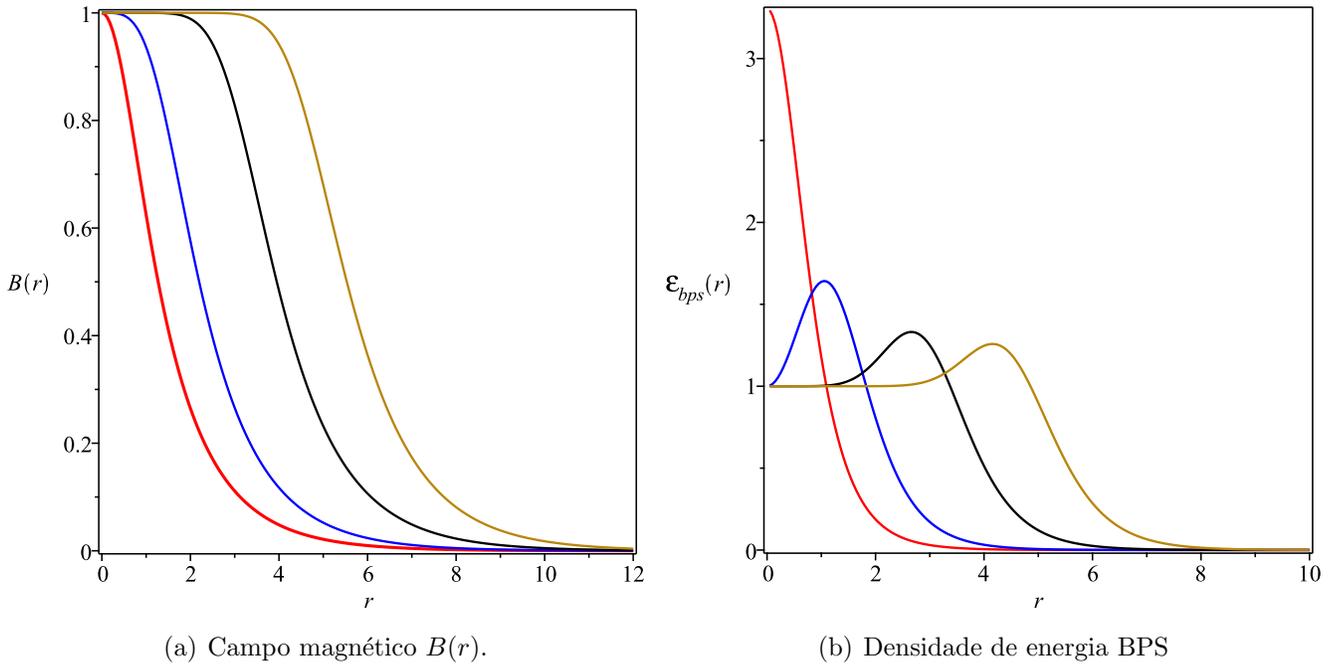


Figura 3.2:

Os perfis do campo magnético são mostrados na figura 3.2(a). Observa-se que para $m = 1$ o perfil possui a forma de um *lump*. Para valores de $m \geq 2$, os perfis começam a formar um platô cada vez mais largo na medida que m cresce.

A densidade de energia BPS é representada na figura 3.2(b). Para o valor $m = 1$, o perfil é um *lump*. Os perfis para soluções com $m \geq 2$ adquirem o formato de anéis com o mesmo valor na origem. A localização do valor máximo do anel se afasta da origem à medida que m aumenta.

3.5.1 Representação bidimensional dos sólitons de M-CP(2)

Uma maneira alternativa de visualizar as soluções tipo vórtice é considerar sua representação bidimensional. Desse modo, as figuras (3.3)-(3.6) mostram os plots onde as qualidades deles são mostradas pela intensidade das cores, isto é, a parte colorida representa intensidades maiores e a parte clara menos intensidade.

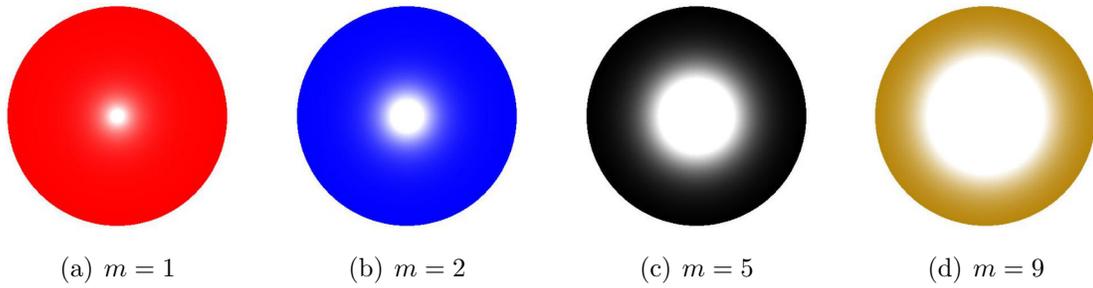


Figura 3.3: Campos de $\alpha(r)$: Para o campo $a(r)$ mostra-se que ela é constante no vácuo, além disso ela alcança o vácuo mais devagar quando m é grande.

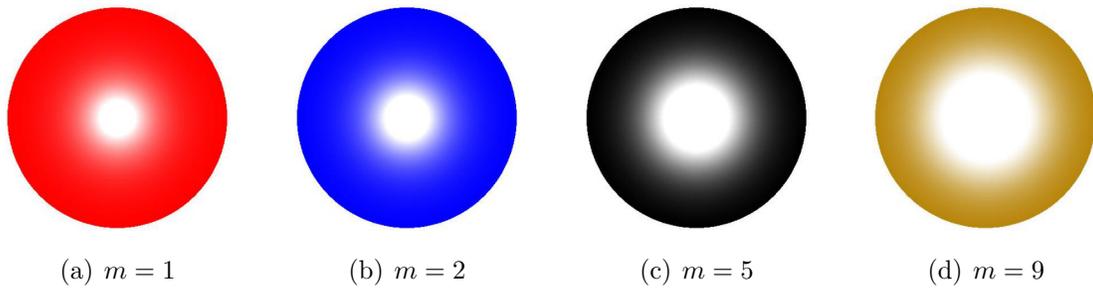


Figura 3.4: Potencial vetorial $A(r)$: Nesta configuração mostra-se que os campos são constantes no vácuo, ou seja, são rapidamente atingido por m pequeno e o vácuo demora mais para chegar se m for grande.

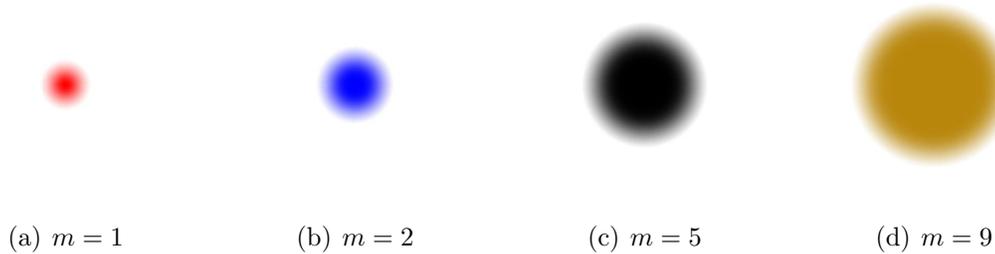


Figura 3.5: Campo magnético $B(r)$: Nesta configuração é perceptível que ela é focalizado no centro e se afasta gradualmente toda vez que m aumenta.

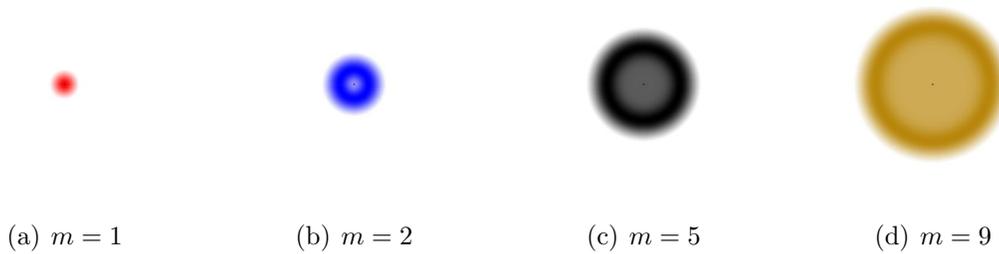


Figura 3.6: Densidade de energia BPS: O perfil mostra uma fenomenologia mais exótica, uma vez que é focalizada para $m = 1$, mas para outros valores de m torna-se em perfis semelhantes aos anéis.

Capítulo 4

Sólitons BPS no modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell-Chern-Simons

Neste capítulo estudamos a existência de sólitons topológicos com simetria radial num modelo planar composto pelo campo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de calibre de Maxwell-Chern-Simons, modelo que chamaremos de Maxwell-Chern-Simons- $CP(2)$ (MCS- $CP(2)$). Essa é a contribuição original de nossa pesquisa. O termo de Chern-Simons é topológico e característico do espaço-tempo $(1+2)$ -dimensional. O termo de Chern-Simons descreve, entre outras propriedades ou aplicações na física planar, o efeito Hall quântico. Outra peculiaridade que ocorre na presença do termo de Chern-Simons é o surgimento de configurações portadoras de carga elétrica não nula e fluxo magnético.

O modelo que descreve o campo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell-Chern-Simons é dado pela seguinte densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\nu}A_\alpha F_{\beta\nu} + (P_{ab}D_\mu\phi_b)^*(P_{ac}D_\mu\phi_c) - V(\phi_3), \quad (4.1)$$

onde κ é a constante de acoplamento do termo Chern-Simons e, $V(\phi_3)$ é o potencial responsável pela quebra de simetria e será determinado posteriormente.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre é obtida a partir da densidade lagrangiana (4.1),

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{1}{2}\kappa\epsilon^{\mu\nu\sigma}F_{\nu\sigma} = J^\mu, \quad (4.2)$$

onde a corrente conservada J^μ já foi definida em (3.7).

A equação de movimento do campo $CP(2)$ foi estabelecido em (3.9) como,

$$P_{bm} \left(2P_{ma}D_\mu(P_{ac}D^\mu\phi_c) - D_\mu(D^\mu\phi_m) + \frac{\partial V(\phi_3)}{\partial\phi_m^*} \right) = 0. \quad (4.3)$$

As soluções requeridas são estacionárias, desse modo, da equação (4.2) obtemos a lei de Gauss,

$$\nabla^2 A_0 + \kappa B = \rho , \quad (4.4)$$

onde a densidade de carga ρ foi definida em (3.12). Como podemos perceber, a lei de Gauss não é mais satisfeita trivialmente pela condição $A_0 = 0$, isso implica que as soluções além de possuir fluxo magnético também carregam carga elétrica não nula. Similarmente, a lei de Ampère é

$$\epsilon_{kj} \partial_j B - \kappa \epsilon_{kj} \partial_j A_0 = J_k, \quad (4.5)$$

a corrente espacial J_k é definida em (3.14).

O modelo MCS- $CP(2)$ apresentado em (4.1) não possui soluções de primeira ordem (BPS) (vide apêndice A). Esse problema é contornado da mesma maneira como realizado no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, ou seja, precisamos introduzir um campo neutro Ψ , que no limite BPS possua a mesma dinâmica do campo $A_0(r)$. O cuidado na introdução do campo Ψ é que as equações de movimento do campo de calibre não sejam modificadas.

4.1 O modelo BPS de Maxwell-Chern-Simons- $CP(2)$

A densidade Lagrangiana para o modelo modificado capaz de gerar configurações de primeira ordem possui a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \kappa \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Psi) (\partial^\mu \Psi) \\ & + (P_{ab} D_\mu \phi_b)^* (P_{ac} D_\mu \phi_c) - g^2 \Psi^2 P_{cb} Q_{cd} Q_{bm} \phi_d^* \phi_m - V(\phi_3, \Psi). \end{aligned} \quad (4.6)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre obtida a partir da densidade lagrangiana (4.6) é

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{1}{2} \kappa \epsilon^{\mu\nu\sigma} F_{\nu\sigma} = J^\mu, \quad (4.7)$$

onde J^μ foi definida em (3.7). Percebe-se que ela não foi modificada em relação à do modelo original (4.1).

A equação de movimento do campo $CP(2)$ será modificada como

$$\begin{aligned} 0 = & P_{bm} \left[2P_{ma} D_\mu (P_{ac} D^\mu \phi_c) - D_\mu (D^\mu \phi_m) + \frac{\partial V(\phi_3, \Psi)}{\partial \phi_m^*} \right] \\ & + g^2 \Psi^2 P_{ba} Q_{mc} [2P_{mc} Q_{ce} \phi_e - Q_{me} \phi_e] = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Enquanto a equação de movimento para o campo neutro Ψ será,

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi + 2g^2 \Psi P_{bc} Q_{cd} Q_{bm} \phi_d^* \phi_m + \frac{\partial V(\phi_3, \Psi)}{\partial \Psi} = 0. \quad (4.9)$$

O tensor energia-momento do modelo BPS de MCS- $CP(2)$ é

$$\mathcal{T}_{\lambda\rho} = -F_{\lambda\mu}F_{\rho}^{\mu} + \partial_{\lambda}\Psi\partial_{\rho}\Psi + (P_{ab}D_{\lambda}\phi_b)^* P_{ac}D_{\rho}\phi_c + (P_{ab}D_{\rho}\phi_b)^* P_{ac}D_{\lambda}\phi_c - \eta_{\lambda\rho}\widehat{\mathcal{L}}, \quad (4.10)$$

where $\widehat{\mathcal{L}}$ corresponde à densidade Lagrangiana (4.6) sem o termo de Chern-Simons.

4.1.1 Sólitos BPS com simetria radial

Com o intuito de encontrar sólitos com simetria radial usaremos os ansatz definido nas equações (3.15) e (3.16) para o campo $CP(2)$ e o potencial vetor A_i , respectivamente. Além disso, o potencial escalar e o campo neutro serão representados como

$$A_0 = A_0(r), \quad \Psi = \psi(r). \quad (4.11)$$

As funções $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $A(r)$, $A_0(r)$ e $\Psi(r)$ são regulares em todo o eixo radial.

Ao longo do capítulo, a matriz de carga Q_{ab} que usaremos será a correspondente à matriz de Gell-Mann λ_3 definida em (3.20).

As leis de Gauss (4.4) e Ampère (4.5) estacionárias são expressas como

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} + \kappa B - \frac{1}{2}hg^2 A_0 [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta] \sin^2 \alpha = 0, \quad (4.12)$$

$$B' + \kappa A_0' + gh \frac{\sin^2 \alpha}{2r} (2m - A) [1 - \sin^2 \alpha \cos^2 (2\beta)] = 0, \quad (4.13)$$

respectivamente.

A equação do campo $CP(2)$ gera as equações de movimento para os campos $\alpha(r)$ e $\beta(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= \alpha'' + \frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{4r^2} (2m - A)^2 \sin(2\alpha) \cos^2(2\beta) \sin^2 \alpha \\ &\quad - \frac{1}{8r^2} (2m - A)^2 \sin(2\alpha) - \frac{1}{2} (\beta')^2 \sin(2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{4} g^2 [(A_0)^2 - \Psi^2] \sin 2\alpha \cos^2 2\beta \sin^2 \alpha + \frac{1}{8} g^2 [(A_0)^2 - \Psi^2] \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \beta'' + \left(\frac{1}{r} + 2\alpha' \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \beta' + \frac{1}{4} g^2 (A_0)^2 \sin^4 \alpha \sin 4\beta \\ &\quad - \frac{1}{4r^2} (2m - A)^2 \sin^2 \alpha \sin(4\beta) - \frac{1}{4} g^2 \Psi^2 \sin^4 \alpha \sin 4\beta, \end{aligned} \quad (4.15)$$

respectivamente. A equação de movimento para o campo neutro é

$$\Psi'' + \frac{\Psi'}{r} - \frac{\partial V}{\partial \Psi} = \frac{1}{2} hg^2 \Psi (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \sin^2 \alpha. \quad (4.16)$$

Como já mostrado no apêndice A, a função β deve ser uma constante cujos valores possíveis são dados na equação (A.26).

Para nosso propósito analisaremos somente o valor de $\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$, que é uma solução da equação (4.15) e corresponde a uma condição necessária para minimizar a energia. Com essa consideração, no regime estacionário, as equações de movimento dos campos remanescentes são expressos da seguinte maneira: As leis de Gauss e de Ampère são dadas por

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} + \kappa B - \frac{1}{2}hg^2 A_0 \sin^2 \alpha = 0, \quad (4.17)$$

$$B' + \kappa A_0' + gh \frac{\sin^2 \alpha}{2r} (2m - A) = 0, \quad (4.18)$$

respectivamente. Da mesma forma as equações de $\alpha(r)$ e $\Psi(r)$ serão reescritas como segue

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{8r^2} (2m - A)^2 \sin(2\alpha) = \frac{1}{2h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{1}{8}g^2 [(A_0)^2 - \Psi^2] \sin 2\alpha, \quad (4.19)$$

$$\Psi'' + \frac{\Psi'}{r} - \frac{\partial V}{\partial \Psi} = \frac{1}{2}hg^2 \Psi \sin^2 \alpha. \quad (4.20)$$

4.2 O caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$: Formalismo BPS

Para este caso, a densidade de energia estacionária produzida pelo modelo (4.6) é dada pela equação (A.51)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right] \\ &+ \frac{1}{2}(A_0')^2 + \frac{1}{2}(\Psi')^2 + \frac{hg^2}{4}(A_0)^2 \sin^2 \alpha + \frac{g^2 h}{4}\Psi^2 \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observa-se que para ter uma densidade nula no limite $r \rightarrow \infty$, os campos $\alpha(r)$, $A(r)$, $A_0(r)$ e $\Psi(r)$ satisfazem as seguintes condições de contorno,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 2m, \quad (4.22)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A_0'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi'(r) = 0. \quad (4.23)$$

Em (4.22), a primeira equação indica que no limite $r \rightarrow \infty$ a função $\alpha(r)$ deverá ter um valor constante (o estado de vácuo) que será determinado pela condição,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\alpha, \Psi) = 0. \quad (4.24)$$

A energia total será dada pela integral da densidade de energia (4.21)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = 2\pi \int r dr \left\{ \frac{1}{2} B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{1}{2} (\Psi')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha + \frac{g^2 h}{4} \Psi^2 \sin^2 \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Neste ponto, começamos a implementação do algoritmo BPS, desse modo a energia total se expressa como,

$$\begin{aligned} E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (A_0' \pm \Psi')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0 \pm \Psi)^2 \sin^2 \alpha \right. \\ \left. \pm B \sqrt{2V} \pm h (2m - A) \frac{\alpha' \sin \alpha}{r} \mp A_0' \Psi' \mp \frac{hg^2}{2} \Psi A_0 \sin^2 \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

O segundo termo da terceira fila da equação acima pode ser reescrito como

$$\pm h (2m - A) \frac{\alpha' \sin \alpha}{r} = \mp \frac{h}{r} [(2m - A) (\cos \alpha)]' \mp ghB \cos \alpha, \quad (4.27)$$

e a lei de Gauss (4.17) multiplicada por Ψ permite obter a relação

$$A_0' \Psi' + \frac{hg^2}{2} A_0 \Psi \sin^2 \alpha = \kappa B \Psi + \frac{1}{r} (r A_0' \Psi)'. \quad (4.28)$$

As duas últimas equações substituídas em (4.26) permitem obtermos

$$\begin{aligned} E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (A_0' \pm \Psi')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0 \pm \Psi)^2 \sin^2 \alpha \right. \\ \left. \pm B \left(\sqrt{2V} - gh \cos \alpha - \kappa \Psi \right) \mp \frac{h}{r} [(2m - A) (\cos \alpha)]' \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde eliminamos o termo $\mp \frac{1}{r} (r A_0' \Psi)'$ pois a contribuição a energia total é nula dadas as condições de contorno (4.23).

O potencial de auto-interação é determinado fazendo nulo o fator que multiplica ao campo magnético, assim, obtemos

$$V(\alpha, \Psi) = \frac{1}{2} (gh \cos \alpha + \kappa \Psi)^2 \quad \text{ou} \quad V(|\phi_3|, \Psi) = \frac{1}{2} \left(g\sqrt{h} |\phi_3| + \kappa \Psi \right)^2. \quad (4.30)$$

Posto que $\Psi(\infty) = 0$, a condição (4.24) estabelece que o valor de vácuo do campo $\alpha(r)$ é

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.31)$$

A energia total (4.29), agora, pode ser escrita da seguinte maneira

$$E = E_{BPS} + 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left[B \mp (gh \cos \alpha + \kappa \Psi) \right]^2 + h \left[\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} \right]^2 + \frac{1}{2} (A'_0 \pm \Psi')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0 \pm \Psi)^2 \sin^2 \alpha \right\}, \quad (4.32)$$

o termo E_{BPS} , que representa a integral da derivada total em (4.29), é a energia mínima do sistema

$$E_{BPS} = \mp 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{h}{r} [(2m - A) \cos \alpha]' \right) = \pm 4\pi h m = 4\pi h |m|, \quad (4.33)$$

onde usamos as condições de contorno definidas (3.18), (4.22) e (4.31) para as funções $\alpha(r)$ e $A(r)$. O sinal superior (inferior) será usado para $m > 0$ ($m < 0$).

Assim, a energia total do sistema satisfaz a seguinte desigualdade,

$$E \geq E_{BPS}. \quad (4.34)$$

O limite inferior é satisfeito quando cada um dos integrandos em (4.32) forem nulos simultaneamente. As equações resultantes são as chamadas equações BPS do sistema, a seguir

$$\alpha' = \pm (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r}, \quad (4.35)$$

$$B = \frac{A'}{rg} = \pm gh \cos \alpha \pm \kappa \Psi, \quad (4.36)$$

$$A'_0 = \mp \Psi', \quad (4.37)$$

$$A_0 = \mp \Psi. \quad (4.38)$$

No entanto, as duas últimas equações são satisfeitas se $A_0 = \mp \Psi$. Assim, as configurações que minimizam a energia para este modelo são descritas pelas duas equações BPS remanescentes,

$$\alpha' = \pm (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r}, \quad (4.39)$$

$$\frac{A'}{rg} = \pm gh \cos \alpha - \kappa A_0, \quad (4.40)$$

e a lei de Gauss

$$A''_0 + \frac{A'_0}{r} + \kappa B = \frac{1}{2} hg^2 A_0 \sin^2 \alpha. \quad (4.41)$$

Note-se que se fizermos $\kappa \rightarrow -\kappa$ as soluções mudam da seguinte maneira: $m \rightarrow m$, $\alpha \rightarrow \alpha$, $A \rightarrow A$ e $A_0 \rightarrow -A_0$. As soluções para $m < 0$ são obtidas fazendo $\alpha \rightarrow \alpha$, $A \rightarrow -A$ e $A_0 \rightarrow -A_0$

O fluxo magnético é dado por

$$\Phi_B = 2\pi \int_0^\infty r B dr = \frac{4\pi}{g} m, \quad (4.42)$$

e integrando a lei de Gauss obtemos a carga elétrica total sendo proporcional ao fluxo magnético,

$$Q = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} h g^2 A_0 \sin^2 \alpha \right) r dr = \kappa \Phi_B. \quad (4.43)$$

4.2.1 Equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange

A equivalência entre as equações BPS, (4.39) e (4.40), e as de Euler-Lagrange, (4.18), (4.19) e (4.20), deve ser estabelecida no limite BPS, ou seja, as últimas devem ser reescritas usando a condição $\Psi = \mp A_0$. Desse modo, as leis de Gauss (4.17) e Ampère (4.18) permanecem as mesmas,

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} + \kappa B - \frac{1}{2} h g^2 A_0 \sin^2 \alpha = 0, \quad (4.44)$$

$$B' + \kappa A_0' + g h \frac{\sin^2 \alpha}{2r} (2m - A) = 0, \quad (4.45)$$

respectivamente. Por outro lado, a equação (4.19) do campo $\alpha(r)$ resulta

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{8r^2} (2m - A)^2 \sin(2\alpha) = \frac{1}{2h} \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad (4.46)$$

e a equação (4.20) do campo neutro é reescrita como

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - \frac{\partial V}{\partial A_0} = \frac{1}{2} h g^2 A_0 \sin^2 \alpha. \quad (4.47)$$

Para estabelecer a equivalência entre a equação (4.47) e a lei de Gauss (4.44) se precisa do potencial (4.30) reescrito no limite BPS, assim, temos

$$V(\alpha, A_0) = \frac{1}{2} (g h \cos \alpha \mp \kappa A_0)^2. \quad (4.48)$$

Logo, comparando as equações (4.47) e (4.44), obtemos

$$\kappa B = -\frac{\partial V}{\partial A_0} = \pm \kappa (g h \cos \alpha \mp \kappa A_0), \quad (4.49)$$

que simplesmente resulta ser a equação BPS (4.40).

Com o intuito de verificar a equivalência entre as equações BPS e a lei de Ampère (4.45) derivamos a BPS (4.40), assim, obtemos,

$$B' = \mp h g \alpha' \sin \alpha - \kappa A_0'. \quad (4.50)$$

Agora, usamos a BPS (4.39) para substituir $\alpha'(r)$, desse modo, a equação anterior se torna,

$$B' + \kappa A_0' + gh \frac{\sin^2 \alpha}{2r} (2m - A) = 0, \quad (4.51)$$

que é exatamente a lei de Ampère (4.45).

A equação (4.46) do campo $\alpha(r)$ será obtida derivando a BPS (4.39), assim,

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r^2} \pm (2m - A) \frac{\cos \alpha}{2r} \alpha' \mp A' \frac{\sin \alpha}{2r} \\ &= -\frac{\alpha'}{r} + (2m - A)^2 \frac{\sin 2\alpha}{8r^2} - \frac{hg^2}{4} \sin 2\alpha \pm \frac{1}{2} g\kappa A_0 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde, no lado direito da primeira fila, reescrevemos o primeiro e segundo termos com ajuda da BPS (4.39) e, o terceiro somando é reescrito usando a BPS (4.40). Observa-se que, no lado direito da segunda fila, o terceiro e quarto termos em (4.52) podem ser expressos como a derivada do potencial (4.48), ou seja,

$$\frac{1}{2h} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) = -\frac{hg^2}{4} \sin 2\alpha \pm \frac{1}{2} g\kappa A_0 \sin \alpha. \quad (4.53)$$

Finalmente, a equação (4.52) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - (2m - A)^2 \frac{(\sin 2\alpha)}{8r^2} = \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right), \quad (4.54)$$

que representa exatamente a equação de movimento (4.46). Desse modo mostramos a equivalência entre as equações BPS e as de Euler-Lagrange do modelo.

4.2.2 Comportamento dos campos para $r \rightarrow 0$

As condições de contorno na origem (3.18) permitem expressar os campos $\alpha(r)$, $A(r)$ e $A_0(r)$ como

$$\alpha(r) = 0 + \delta\alpha(r), \quad A(r) = 0 + \delta A(r), \quad A_0(r) = A_0(0) + \delta A_0(r), \quad (4.55)$$

onde as funções $\delta\alpha(r)$, $\delta A(r)$ e $\delta A_0(r)$ são infinitesimais, bem comportadas, nulas na origem e satisfazem as seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$(\delta\alpha)' = \pm \frac{m}{r} (\delta\alpha), \quad (4.56)$$

$$\frac{(\delta A)'}{rg} = \pm gh - \kappa A_0(0) - \kappa \delta A_0, \quad (4.57)$$

$$(\delta A_0)'' + \frac{(\delta A_0)'}{r} + \kappa \frac{(\delta A)'}{gr} = 0. \quad (4.58)$$

Cujas soluções são facilmente obtidas,

$$\alpha(r) = \delta\alpha(r) \approx C_0 r^{|m|}, \quad (4.59)$$

$$A(r) = \delta A(r) \approx \frac{g}{2} [\pm hg - \kappa A_0(0)] r^2, \quad (4.60)$$

$$A_0(r) = A_0(0) + \delta A_0(r) \approx A_0(0) - \frac{\kappa}{4} [\pm hg - \kappa A_0(0)] r^2. \quad (4.61)$$

Com isso verificamos que as condições de contorno em $r = 0$ são compatíveis com as equações BPS do modelo. Além disso, as equações BPS e a lei de Gauss devem ser solucionadas considerando a seguinte condição de contorno para $A_0(r)$ na origem,

$$A'_0(0) = 0. \quad (4.62)$$

4.2.3 Comportamento dos campos para $r \rightarrow \infty$

A continuação estudamos o comportamento de $\alpha(r)$, $A(r)$ e $A_0(r)$ quando $r \rightarrow \infty$. Considera-se as condições de contorno (4.31), (4.22) e (4.23) para expressarmos os campos da seguinte maneira,

$$\alpha(r) = \frac{\pi}{2} - \delta\alpha(r) \quad , \quad A(r) = 2m - \delta A(r) \quad , \quad A_0(r) = \delta A_0(r), \quad (4.63)$$

onde $\delta\alpha(r)$, $\delta A(r)$ e $\delta A_0(r)$ são infinitesimais e se anulam no limite $r \rightarrow \infty$. A substituição nas equações BPS (4.39), (4.40) e na lei de Gauss (4.41) proporciona o seguinte conjunto de equações diferenciais,

$$(\delta\alpha)' = \mp \frac{1}{2r} (\delta A), \quad (4.64)$$

$$\frac{(\delta A)'}{gr} = \mp gh(\delta\alpha) + \kappa(\delta A_0), \quad (4.65)$$

$$(\delta A_0)'' + \frac{(\delta A_0)'}{r} - \kappa \frac{(\delta A)'}{gr} = \frac{1}{2} hg^2 (\delta A_0). \quad (4.66)$$

Após, algumas manipulações algébricas, o sistema pode ser expresso da seguinte maneira,

$$(\delta\alpha)'' + \frac{(\delta\alpha)'}{r} - \frac{1}{2} hg^2 (\delta\alpha) = \mp \frac{1}{2} g\kappa (\delta A_0) \quad (4.67)$$

$$(\delta A_0)'' + \frac{(\delta A_0)'}{r} - \left(\kappa^2 + \frac{1}{2} hg^2 \right) (\delta A_0) = \mp \kappa gh (\delta\alpha) \quad (4.68)$$

$$(\delta A)'' - \frac{(\delta A)'}{r} - \frac{hg^2}{2} (\delta A) = g\kappa r (\delta A_0)' \quad (4.69)$$

cujas soluções são

$$\delta\alpha(r) = C_{(\alpha)}K_0(Mr) \approx C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}, \quad (4.70)$$

$$\delta A(r) = \pm 2MC_{(\alpha)}rK_1(Mr) \approx \pm 2MC_\infty\sqrt{r}e^{-Mr} \quad (4.71)$$

$$\delta A_0(r) = \pm \frac{2M}{g} \frac{\kappa}{|\kappa|} C_{(\alpha)}K_0(Mr) \approx \pm \frac{2M}{g} \frac{\kappa}{|\kappa|} C_\infty \frac{e^{-Mr}}{\sqrt{r}}. \quad (4.72)$$

As constantes reais $C_{(\alpha)}$ ou C_∞ são calculadas numericamente, e o parâmetro M representa a massa dos bósons do modelo MCS- $CP(2)$ no limite de Bogomol'nyi,

$$M = \frac{\sqrt{2g^2h + \kappa^2} - |\kappa|}{2}. \quad (4.73)$$

No limite quando $\kappa \gg g$, se comporta como

$$M_{\text{CS-}CP(2)} \simeq \frac{hg^2}{2\kappa}, \quad (4.74)$$

que é a massa das soluções BPS do modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de calibre de Chern-Simons. Por outro lado, quando $\kappa \ll g$, obtemos

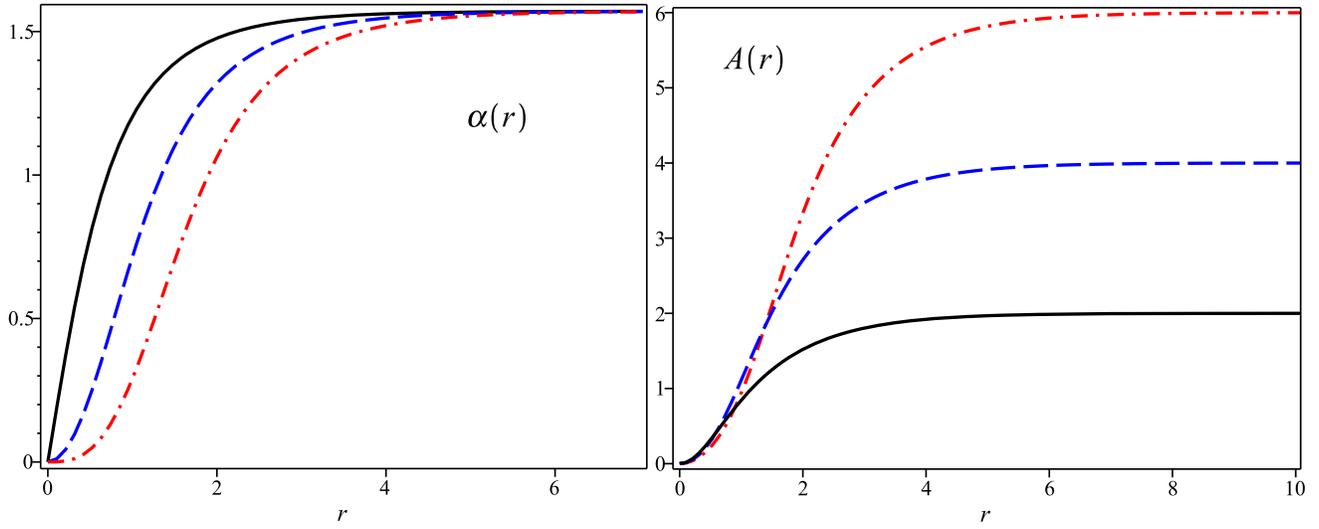
$$M_{\text{M-}CP(2)} \simeq g\sqrt{\frac{h}{2}}, \quad (4.75)$$

a massa dos bósons (no limite BPS) do modelo de Maxwell- $CP(2)$ estudado no capítulo 3.

4.3 Soluções numéricas

Para obter as soluções numéricas do sistema de equações composto pelas BPS (4.39) e (4.40) e a lei Gauss (4.41) fixamos as constantes do modelo: $h = 1$, $g = 2$ e $\kappa = 1$. Os perfis das soluções estão representados nas figuras 4.1(a) a 4.5(b) para diferentes valores de m .

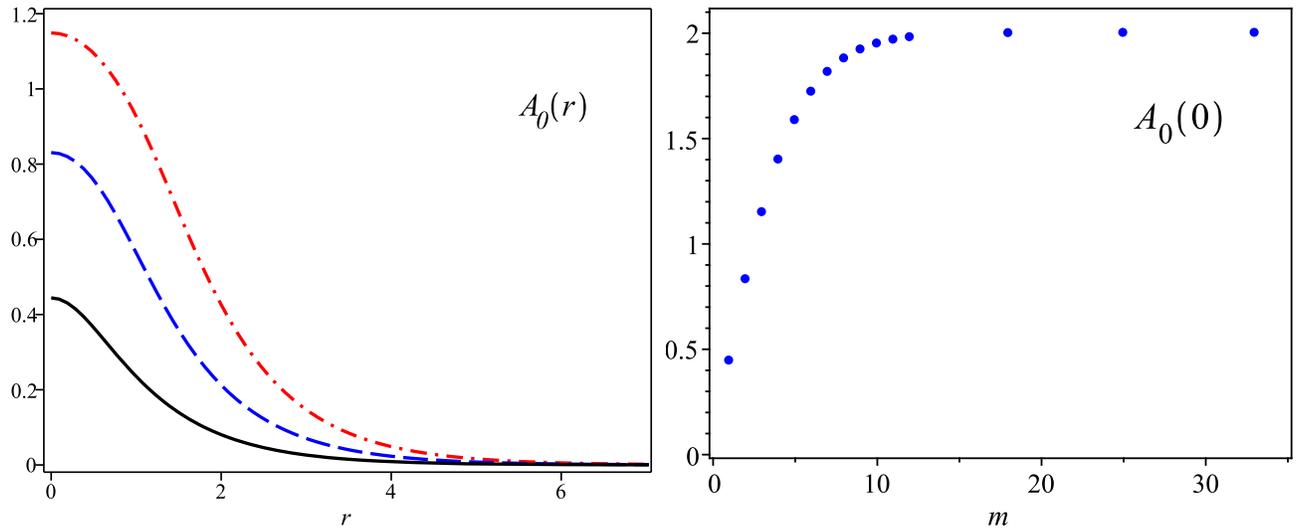
Os perfis da função $\alpha(r)$ são apresentados na figura 4.1(a): Observa-se na medida que m aumenta o perfil fica mais largo e atinge mais lentamente o valor de vácuo $\pi/2$. A figura 4.1(b) fornece os perfis da função $A(r)$, a componente vetorial do campo de calibre. Os perfis são cada vez mais largos com o incremento de m e atingem o valor de vácuo $2m$, como esperado.



(a) Campo $\alpha(r)$.

(b) Potencial vetorial $A(r)$

Figura 4.1: As cores indicam os seguintes valores do número de enrolamento: $m = 1$ linha preta sólida, $m = 2$ linha tracejada azul e $m = 3$ linha tracejada-pontilhada vermelha.



(a) Potencial escalar $A_0(r)$.

(b) Valores do potencial escalar na origem: $A_0(0)$.

Figura 4.2:

Os perfis para o potencial escalar $A_0(r)$ são mostrados na figura 4.2(a). Verifica-se que com o incremento dos valores de m , o valor na origem $A_0(0)$ aumenta gradualmente e para valores suficientemente grandes m possui um limite superior, que na nossa análise resulta ser 2 (vide 4.2(b)).

O campo elétrico $E(r)$ é representado na figura 4.3. Para todos os valores de m , os perfis são anéis cujo máximo aumenta e se afasta da origem na medida que m aumenta.

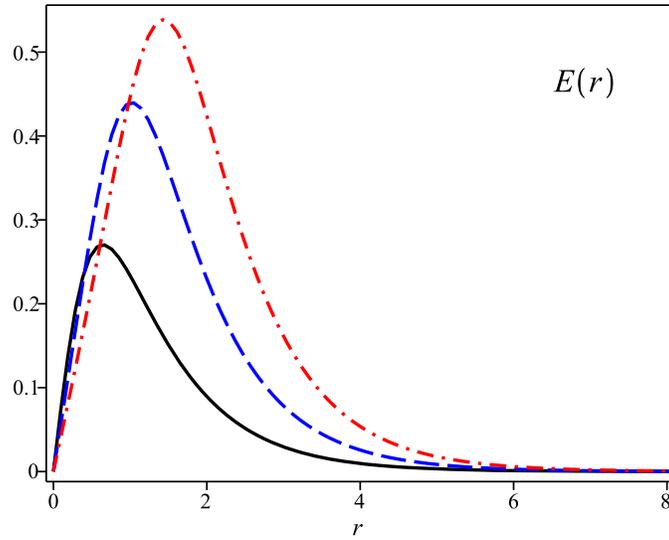
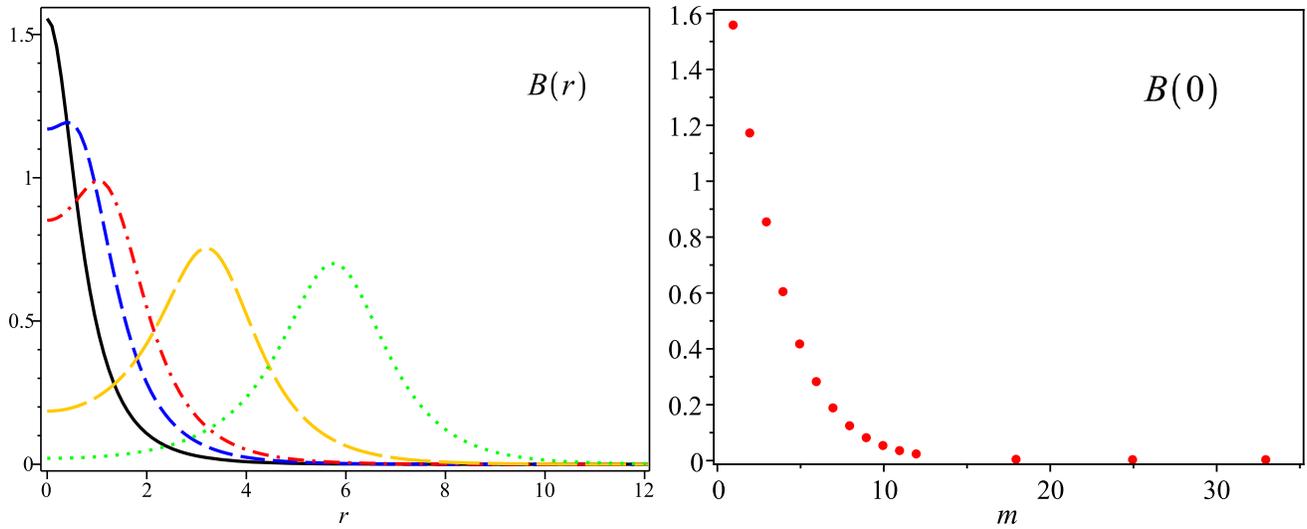


Figura 4.3: Campo elétrico $E(r)$.



(a) Campo magnético $B(r)$

(b) Valores do campo magnético na origem: $B(0)$.

Figura 4.4: As cores indicam os seguintes valores do número de enrolamento: $m = 1$ linha preta sólida, $m = 2$ linha tracejada azul, $m = 3$ linha tracejada-pontilhada vermelha, $m = 7$ linha tracejada-longa laranja e $m = 12$ linha pontilhada verde.

Na figura 4.4(a) mostra os perfis do campo magnético. Para $m = 1$, o perfil é um *lump*, e com o incremento dos valores de m , os perfis adquirem o formato de um anel que se torna evidente para valores suficientemente grande de m . Na figura 4.4(b) são mostrados os valores do campo magnético na origem que atinge o valor máximo quando $m = 1$ e diminui com o incremento dos valores de m . O perfil do campo magnético abarca uma região maior com o incremento de m .

aumentando, assim, o fluxo magnético.

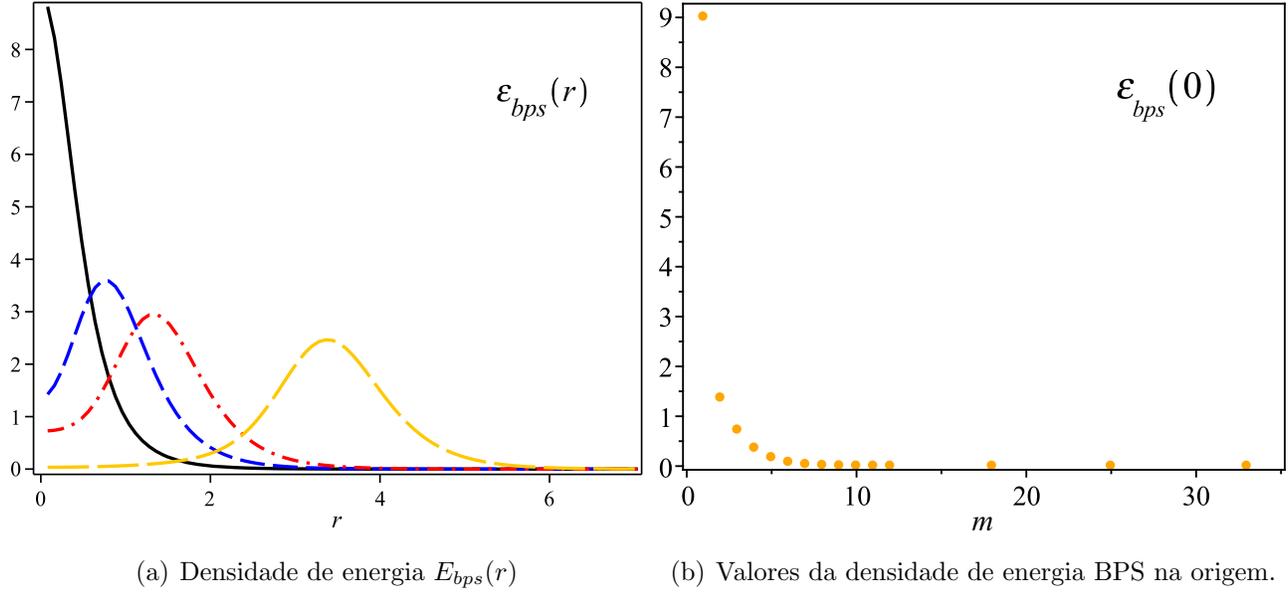


Figura 4.5: As cores indicam os seguintes valores do número de enrolamento: $m = 1$ linha preta sólida, $m = 2$ linha tracejada azul, $m = 3$ linha tracejada-pontilhada vermelha e $m = 7$ linha tracejada-longa laranja.

Os perfis da densidade de energia BPS são mostrados na figura 4.5(a). O perfil para $m = 1$ é um *lump*. Para valores de $m \geq 2$, os perfis adquirem o formato de um anel que se torna evidente para valores suficientemente grande de m . Na figura 4.5(b) são mostrados os valores da densidade de energia BPS cujo valor máximo acontece para $m = 1$ e diminui rapidamente com o incremento dos valores de m .

4.3.1 Comportamento dos valores na origem vs. κ do potencial escalar, campo magnético e densidade de energia BPS

O comportamento do valor na origem do potencial escalar, campo magnético e densidade de energia BPS, como função do acoplamento κ fornece informação de como os perfis do adquirem o formato tipo anel. Esses comportamentos são mostrados nas figuras 4.6, 4.7(a) e 4.7(b), respectivamente.

Observa-se que para valores muito pequenos de κ os valores na origem são compatíveis com o comportamento das soluções de Maxwell- $CP(2)$ para qualquer valor de m . Por outro lado, para um m fixo e κ suficiente grande, os valores na origem diminuem rapidamente a zero caracterizando o comportamento tipo-anel das soluções típicas de Chern-Simons- $CP(2)$.

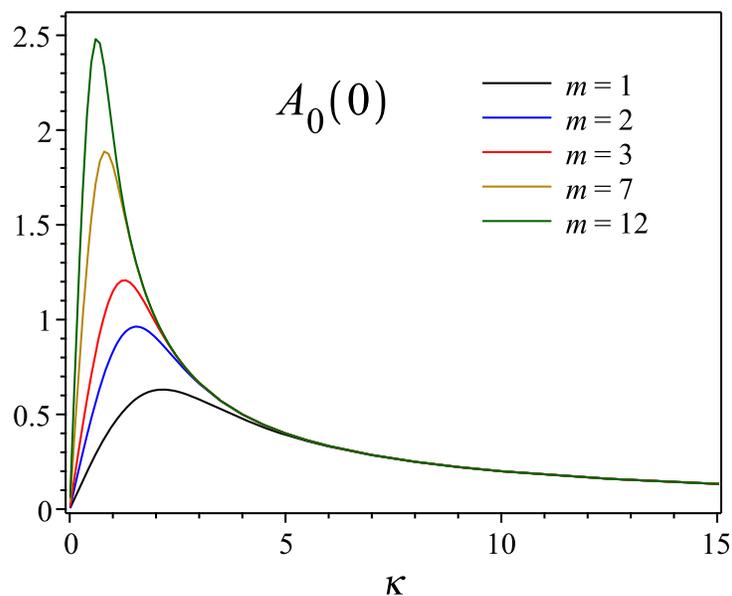
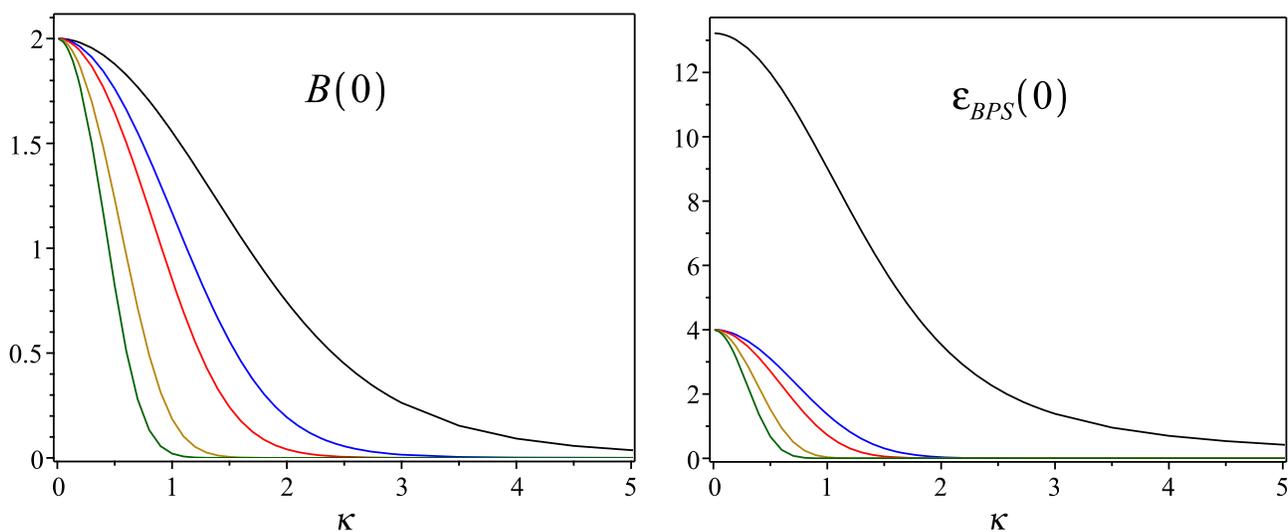


Figura 4.6: Potencial escalar: $A_0(0)$ vs. κ



(a) Campo magnético: $B(0)$ vs. κ

(b) Densidade de energia BPS: $\epsilon_{BPS}(0)$ vs. κ

Figura 4.7:

4.3.2 Representação bidimensional dos sólitons de MCS-CP(2)

A representação bidimensional é apresentada para fins de compreensão qualitativa. É importante observar que a intensidade das cores está relacionada à intensidade dos campos da mesma maneira que nos capítulos anteriores, ou seja, quanto maior a intensidade da cor maior a intensidade do campo. Desse modo, as figuras em duas dimensões são representados como segue.

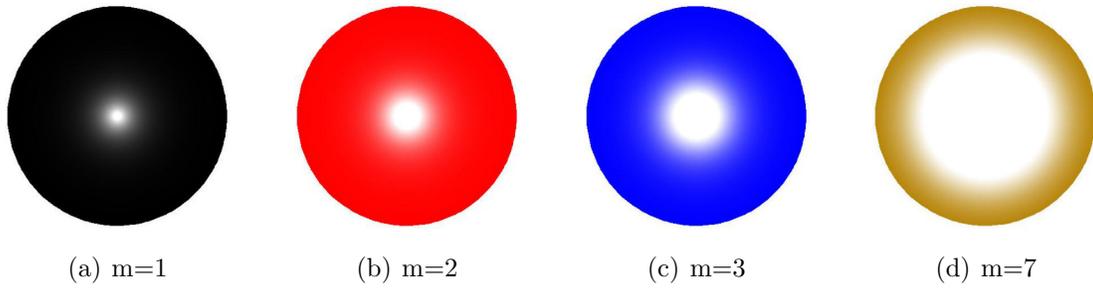


Figura 4.8: Campos de $\alpha(r)$: Os perfis mostram que o campo $\alpha(r)$ converge para o vácuo cada vez mais lentamente quando m aumenta, muito parecido com o modelo MHCS.

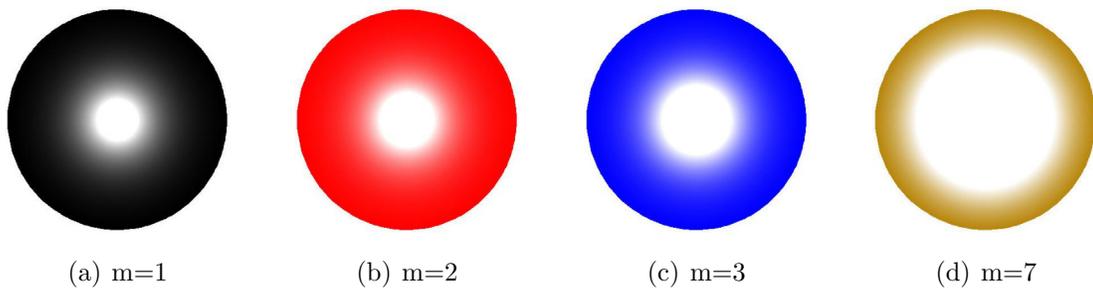


Figura 4.9: Potencial vetorial $A(r)$: Para m pequeno, os perfis atingem o vácuo mais rapidamente que para m grande.

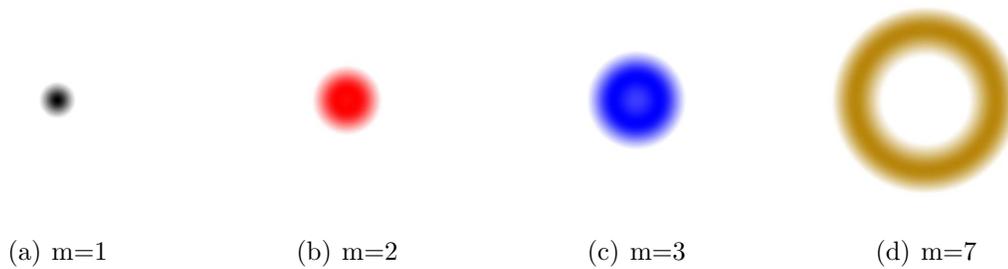


Figura 4.10: Campo magnético $B(r)$: Observa-se que a partir de um valor suficientemente grande de m os perfis adquirem o formato de um anel.

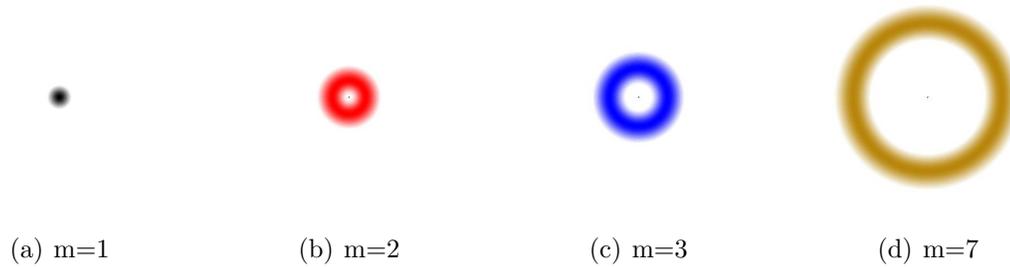


Figura 4.11: Densidade de energia BPS: Para $m = 1$, o perfil está centrado na origem, mas para $m \geq 2$ os perfis adquirem o formato tipo anel, semelhante ao campo magnético, no entanto, esse comportamento em termos de m é alcançado mais rapidamente.

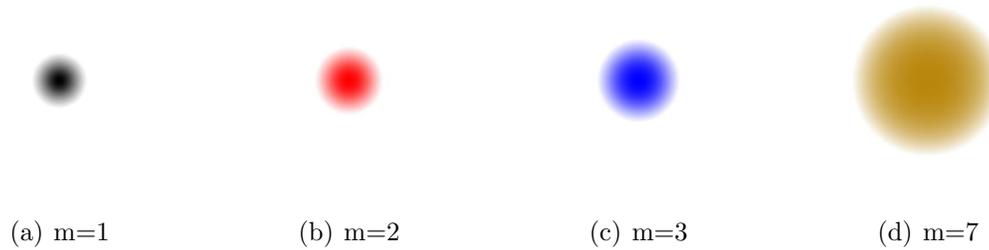


Figura 4.12: Potencial escalar $A_0(r)$: Os perfis são sempre centralizados na origem e o raio aumenta com o incremento de m .

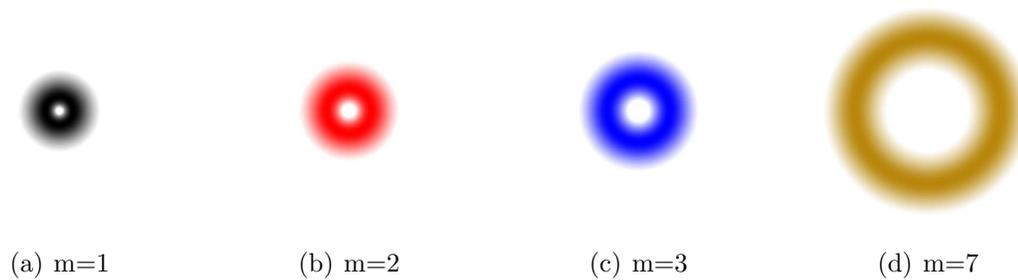


Figura 4.13: Campo elétrico $E(r)$: Os perfis são anéis para qualquer valor de m . O raio dos anéis cresce na medida de m aumenta.

Capítulo 5

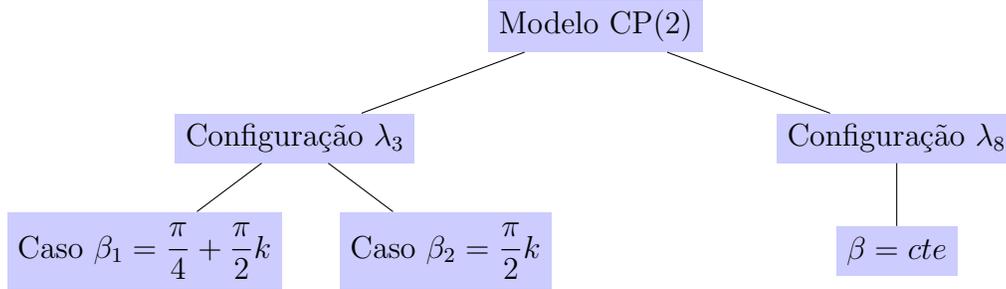
Conclusões e perspectivas

A dissertação compreende a construção de configurações topológicas que surgem, em $(1+2)$ -dimensões, como efeito das interações dos campos da eletrodinâmica de Maxwell e de Maxwell-Chern-Simons quando acoplados minimamente a campos escalares complexos, no caso, o campo de Higgs e o campo $CP(2)$.

Os capítulos primeiro e segundo são dedicados ao estudo de configurações topológicas auto-duais tanto na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs como na de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. As soluções do modelo de MH são puramente magnéticas enquanto as do modelo MCSH, além de carregar fluxo magnético, são portadoras de carga elétrica total não nula. A implementação do algoritmo BPS no modelo de MH difere do modelo de MCSH, neste último, é necessária a inclusão de um campo escalar neutro Ψ para a implementação ser bem sucedida. A condição sobre o campo neutro é que no limite BPS possua a mesma dinâmica que o potencial escalar A_0 . Em ambos os casos, o potencial de interação capaz de gerar os estados BPS surge impondo a necessidade de ter uma energia total mínima (limite BPS) proporcional ao fluxo magnético. Tal limite é atingido pelas configurações que são soluções simultâneas das equações auto-duais e das equações de Euler-Lagrange. Em particular são analisadas as soluções tipo vórtice com simetria radial usando um *Ansatz* específico em coordenadas polares. O caráter topológico é caracterizado por um número inteiro $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$, chamado de número de enrolamento (do inglês *winding number*). Verifica-se que tanto a energia BPS como o fluxo magnético são proporcionais a m e são ditos quantizados no sentido topológico. Os vórtices se comportam como aqueles encontrados por Abrikosov no estudo da supercondutividade.

O terceiro capítulo apresenta o modelo constituído pelo campo escalar complexo de caráter vetorial, chamado de $CP(2)$, acoplado minimamente com o campo de Maxwell. A lei de Gauss do modelo indica que as configurações carregam fluxo magnético mas não possuem carga elétrica. O foco é o estudo de configurações com simetria radial que surgem como soluções de equações diferenciais de primeira ordem (ou auto-duais). O caráter topológico (o *winding number* m)

é introduzido via um *Ansatz*, em coordenadas polares, que caracteriza o campo $CP(2)$ via as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$, e o campo de calibre com a função $A(r)$. Para representar a matriz de carga há duas possibilidades: λ_3 e λ_8 , ambas matrizes de Gell-Mann. Em ambos os casos, a implementação do formalismo BPS impõe que a função β seja uma constante e as configurações possíveis são mostradas na figura a seguir:



A implementação completa do formalismo BPS foi realizada para os casos β_1 e β_2 por separado, e se verifica que as soluções para ambos valores de β estão relacionadas via uma redefinição dos campos e das constantes de acoplamento do modelo. A determinação do potencial BPS é condicionado ao fato que, agora, a energia BPS não seja mais proporcional ao fluxo magnético e sim dependa somente das condições de contorno da função $\alpha(r)$, ou seja, da topologia do campo $CP(2)$. Com isso, são encontradas as equações auto-duais e a energia BPS, que resulta diretamente proporcional ao *winding number* m , fato compartilhado pelo fluxo magnético. A análise do comportamento dos sólitons para $r \rightarrow \infty$ mostra que se comportam exatamente como os vórtices de Abrikosov. As soluções numéricas das equações BPS são apresentadas e discutidas suas principais características. Vale ressaltar que elas apresentam similaridade com as da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs.

O capítulo 4 é a contribuição do manuscrito e apresenta o modelo constituído pelo campo $CP(2)$ acoplado minimamente com o campo de Maxwell-Chern-Simons. A lei de Gauss do modelo indica que as configurações são portadoras de fluxo magnético e, também, possuem carga elétrica total não nula. O foco é o estudo da existência de configurações com simetria radial que surgem como soluções de equações diferenciais de primeira ordem (ou auto-duais). O *Ansatz* usado para esta descrição é o mesmo apresentado no capítulo 3, estudamos as soluções para a matriz de carga definida pela matriz de Gell-Mann λ_3 focando, especificamente, no valor de $\beta = \beta_1$. Tal como acontece no modelo de MCSH a implementação do formalismo BPS requer a inclusão de um campo escalar neutro Ψ , ou seja, o modelo precisa ser modificado. Os detalhes do porque o modelo original não comporta configurações BPS e como deve ser modificada são apresentados no apêndice A. A determinação do potencial de interação capaz de gerar os estados BPS segue a regra estabelecida no modelo Maxwell- $CP(2)$, desse modo, a energia total mínima dependa somente da topologia do campo $CP(2)$. As configurações BPS são, dessa vez, soluções

das respectivas equações auto-duais e da lei de Gauss. Verifica-se que a energia BPS e o fluxo magnético são proporcionais a m , conseqüentemente, a carga elétrica total é quantizada pois é proporcional ao fluxo magnético. Os sólitons resultantes se comportam como aqueles encontrados por Abrikosov no estudo da supercondutividade e apresentam comportamento similar aos vórtices da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

Entre as perspectiva de estudos futuros podemos mencionar o estudo da existência de sólitons topológicos com estrutura interna e não-topológicos nos modelo de Chern-Simons- $CP(2)$ e Maxwell-Chern-Simons- $CP(2)$. Uma segunda possibilidade é o estudo da existência de sólitons topológicos nos modelos $CP(N > 2)$ acoplados minimamente com os campos de Maxwell, Chern-Simons e Maxwell-Chern-Simons, respectivamente. Outra linha de pesquisa interessante é a busca por soluções não topológicas tipo Q -balls e Q -shells nos modelos $CP(N - 1)$ acoplados minimamente as eletrodinâmicas de Maxwell e Chern-Simons.

Apêndice A

O modelo $CP(2)$ acoplado minimamente ao campo de Maxwell-Chern-Simons

No apêndice mostraremos que o modelo original (4.1) não gera configurações de primeira ordem, ou seja, não permite uma implementação bem sucedida do formalismo BPS. Dizemos não bem sucedida, pois, mesmo que, seja possível encontrar um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, estas não reproduzem as equações de Euler-Lagrange.

Com o propósito de atingir nosso objetivo, apresentamos o modelo (4.1) novamente

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{CS} + (P_{ab}D_\mu\phi_b)^* (P_{ac}D_\mu\phi_c) - V(|\phi_3|), \quad (\text{A.1})$$

onde os termos de Maxwell e Chern-Simons respectivamente são

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma}, \quad (\text{A.2})$$

na qual κ é a constante de acoplamento do termo Chern-Simons. O potencial definido pela função $V(|\phi_3|)$ é responsável pela quebra espontânea de simetria, e será determinado posteriormente.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre é obtida a partir de (A.1),

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{1}{2}\kappa\epsilon^{\mu\nu\sigma}F_{\nu\sigma} = J^\mu, \quad (\text{A.3})$$

onde a corrente conservada J^μ já foi denotada em (3.7).

A equação de movimento do campo $CP(2)$ foi estabelecido em (3.9) como,

$$P_{bm} \left(2P_{ma}D_\mu(P_{ac}D^\mu\phi_c) - D_\mu(D^\mu\phi_m) + \frac{\partial V(|\phi_3|)}{\partial\phi_m^*} \right) = 0. \quad (\text{A.4})$$

A.1 Configurações com simetria radial

As configurações com simetria radial são obtidas usando os Ansatz definidos em (3.15) e (3.16) para o campo $CP(2)$ e a parte vetorial do campo de calibre. Além disso, o potencial escalar será parametrizado da seguinte maneira

$$A_0 = A_0(r). \quad (\text{A.5})$$

Como já mencionado anteriormente, a matriz de carga será representada pela matriz de Gell-Mann λ_3 . Assim, reescrevemos as leis de Gauss (4.4) e Ampère (4.5) como,

$$\frac{1}{r} (rA_0')' + \kappa B - \frac{hg^2}{2} A_0 \sin^2(\alpha) (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$B' + \kappa A_0' + (2m - A) \frac{hg}{2r} \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) = 0, \quad (\text{A.7})$$

respectivamente. A equação (4.3) do campo $CP(2)$ gera as seguintes equações para os campos $\alpha(r)$ e $\beta(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{2h\partial\alpha} = & \alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{(2m - A)^2}{4r^2} \sin(2\alpha) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta \right) \\ & - \frac{(\beta')^2 \sin(2\alpha)}{2} + \frac{g^2}{4} (A_0)^2 \sin(2\alpha) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta \right), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e

$$\beta'' + \left(\frac{1}{r} + 2\alpha' \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \beta' - \frac{(2m - A)^2}{4r^2} \sin^2 \alpha \sin(4\beta) + \frac{g^2}{4} (A_0)^2 \sin^4 \alpha \sin 4\beta = 0, \quad (\text{A.9})$$

respectivamente.

A.1.1 Formalismo BPS frustrado

No caso estacionário, a densidade de energia é $\mathcal{E} = -\mathcal{L}$,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2} B^2 + \kappa A_0 B - (P_{ab} D_\mu \phi_b)^* (P_{ac} D^\mu \phi_c) + V(|\phi_3|). \quad (\text{A.10})$$

Através do uso dos ansatz, reescrevemos os termos da densidade de energia, assim, obtemos

$$(P_{ab} D_0 \phi_b)^* (P_{ac} D_0 \phi_{ac}) = \frac{hg}{4} [(A_0)^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta)] \quad (\text{A.11})$$

$$(P_{ab} D_i \phi_b)^* (P_{ac} D_i \phi_c) = h \left[(\alpha')^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Com isso, a densidade de energia (A.10) é expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & -\frac{1}{2}(A_0')^2 + \frac{1}{2}B^2 + \kappa A_0 B - \frac{h}{4} [g(A_0)^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta)] \\ & + h \left[(\alpha')^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \right] + V(\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Da lei de Gauss (A.6) multiplicada pelo campo $A_0(r)$ reescrevemos o termo $\kappa A_0 B$ da seguinte maneira,

$$\kappa A_0 B = -\frac{1}{r} (A_0 r A_0')' + (A_0')^2 + \frac{g^2 h}{2} A_0^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta), \quad (\text{A.14})$$

e substituído na densidade energia (A.13), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2}(A_0')^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \\ & + h \left[(\alpha')^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \right] + V(\alpha), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde eliminamos a derivada total. A densidade de energia será nula quando $r \rightarrow \infty$ se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A_0'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \beta'(r) = 0 \quad (\text{A.16})$$

enquanto as funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ satisfazem as condições de contorno definidas em (3.41) ou (3.76), respectivamente.

A energia total será dada pela integral da densidade energia (A.15),

$$\begin{aligned} E = & 2\pi \int r dr \left\{ \frac{1}{2} B^2 + V + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \right] \right. \\ & \left. + (\beta')^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Aplicando o método de Bogomol'nyi escrevemos a energia como uma soma de quadrados obtendo a seguinte expressão

$$\begin{aligned} E = & 2\pi \int r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} W \right]^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha \right. \\ & \left. \pm B \sqrt{2V} \pm h (2m - A) \frac{\alpha' \sin \alpha}{r} W + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 W^2 \sin^2 \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde

$$W(\alpha, \beta) = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta)}.$$

Usando a expressão (A.14) reescrevemos os dois últimos termos da terceira fila em (A.18) como

$$\frac{1}{2} (A'_0)^2 + \frac{g^2 h}{4} (A_0)^2 W^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \kappa A_0 B + \frac{1}{2r} (A_0 r A'_0)', \quad (\text{A.19})$$

que substituído em (A.18) proporciona a expressão

$$E = 2\pi \int r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} W \right]^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha \right. \\ \left. \pm B \sqrt{2V} + \frac{1}{2} \kappa A_0 B \mp h (2m - A) \frac{(\cos \alpha)'}{r} W + \frac{1}{2r} (A_0 r A'_0)' \right\}. \quad (\text{A.20})$$

O termo de derivada total será nulo devido as condições de contorno dadas em (A.16).

Logo, a energia total pode ser escrita como

$$E = E_{bps} + 2\pi \int r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} W \right]^2 + (\beta')^2 \sin^2 \alpha \right\}, \quad (\text{A.21})$$

onde E_{bps} é definida por

$$E_{bps} = \pm 2\pi \int r dr \left(B \sqrt{2V} \pm \frac{1}{2} \kappa A_0 B - h (2m - A) \frac{(\cos \alpha)'}{r} W \right). \quad (\text{A.22})$$

Nossa hipótese é que se E_{bps} representa o valor mínimo da energia do sistema, ela será atingida se os termos quadráticos na integral da equação (A.21) forem nulos, ou seja, os campos deverão satisfazer as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$B = \pm \sqrt{2V}, \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha' = \pm (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r} W, \quad (\text{A.24})$$

$$\beta' = 0. \quad (\text{A.25})$$

Da equação (A.25), obtemos $\beta = cte$. Os valores de β são obtidos a partir da equação de Euler-Lagrange (A.9):

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} k. \quad (\text{A.26})$$

Como já observado no capítulo 3, o caso β_2 é similar ao caso β_1 via uma redefinição dos parâmetros do modelo. Consequentemente, a continuação estudaremos somente o caso β_1 .

A.1.1.1 O caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$

Nesta seção analisamos o caso $\beta = \beta_1 = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \right)$, com isso, temos que

$$\cos 2\beta = 0, \quad W = 1.$$

As leis de Gauss e Ampère definidas em (A.6) e (A.7) são reescritas como

$$\frac{1}{r} (rA_0)' + \kappa B - \frac{g^2 \hbar}{2} A_0 \sin^2 \alpha = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$B' + \kappa A_0' + hg(2m - A) \frac{\sin^2 \alpha}{2r} = 0. \quad (\text{A.28})$$

A equação de movimento (A.8) para o campo $\alpha(r)$ é

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} + \frac{g^2}{8} (A_0)^2 \sin(2\alpha) - \frac{(2m - A)^2}{8r^2} \sin 2\alpha = \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right). \quad (\text{A.29})$$

Dessa forma a densidade de energia (A.15) se expressa como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right] + V(\alpha), \quad (\text{A.30})$$

e a energia total

$$E = 2\pi \int r dr \left\{ \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right] + V \right\}. \quad (\text{A.31})$$

A implementação do formalismo BPS permite, após algumas manipulações, escrevê-la da seguinte maneira

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{2r} \sin \alpha \right]^2 \right. \\ \left. \pm B \sqrt{2V} \pm h \frac{(2m - A)}{r} \alpha' \sin \alpha + \frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{hg^2}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha \right\}. \quad (\text{A.32})$$

A lei de Gauss (A.27) é usada para reescrever os dois últimos termos da segunda fila da equação acima,

$$\frac{1}{2} (A_0')^2 + \frac{g^2 \hbar}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \kappa A_0 B + \frac{1}{2r} (A_0 r A_0')'. \quad (\text{A.33})$$

Além disso, o segundo termo, também, da segunda file acima pode ser expresso como

$$\pm h \frac{(2m - A)}{r} \alpha' \sin \alpha = \mp \frac{\hbar}{r} [(2m - A) (\cos \alpha)]' \mp ghB \cos \alpha. \quad (\text{A.34})$$

Com isso a energia (A.32) ganha a seguinte forma

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2V} \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{2r} \sin \alpha \right]^2 \right. \\ \left. \pm B \left(\sqrt{2V} - gh \cos \alpha \pm \frac{\kappa A_0}{2} \right) \mp \frac{\hbar}{r} [(2m - A) \cos \alpha]' \right\}. \quad (\text{A.35})$$

O potencial de auto-interação é determinado fazendo nulo o termo que multiplica o campo magnético, ou seja,

$$V(\alpha, A_0) = \frac{1}{2} \left(hg \cos \alpha \mp \frac{\kappa A_0}{2} \right)^2, \quad (\text{A.36})$$

e a derivada total em (A.35) define a energia mínima do sistema, E_{bps} , como

$$E_{BPS} = \mp 2\pi \int_0^\infty r dr \frac{h}{r} [(2m - A) \cos \alpha]' = \pm 4\pi h m, \quad (\text{A.37})$$

onde usamos as condições de contorno definidas em (3.18) e (3.41). Com essas informações a energia (A.35) é escrita como

$$E = E_{BPS} + 2\pi \int_0^\infty r dr \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \left(hg \cos \alpha \mp \frac{\kappa A_0}{2} \right) \right)^2 + h \left[\alpha' \mp \frac{(2m - A)}{2r} \sin \alpha \right]^2 \right\}, \quad (\text{A.38})$$

assim, verifica-se que a energia satisfaz a condição,

$$E \geq E_{BPS}. \quad (\text{A.39})$$

O limite inferior é saturado quando o integrando em (A.38) é nulo, ou seja, as funções $\alpha(r)$ e $A(r)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais de primeira ordem,

$$B = \frac{A'}{gr} = \pm hg \cos \alpha - \frac{\kappa A_0}{2}, \quad (\text{A.40})$$

$$\alpha' = \pm (2m - A) \frac{\sin \alpha}{2r}. \quad (\text{A.41})$$

O fluxo magnético pode ser calculado a partir da expressão (3.17) e as condições de contorno estabelecidas em (3.18) e (3.41),

$$\Phi_B = \int d^2\mathbf{x} B = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{A'}{rg} \right) = \frac{4\pi}{g} m. \quad (\text{A.42})$$

Assim, verifica-se que tanto a energia total como o fluxo magnético são diretamente proporcionais ao número de enrolamento m , ou seja, estão quantizados.

O seguinte passo é verificar se as equações BPS (A.40) e (A.41) reproduzem as equações de Euler-Lagrange do sistema expressas pelas equações (A.27), (A.28) e (A.29). A primeira equação a ser verificada será a lei de Ampère. Com esse intuito, derivamos a primeira BPS (A.40)

$$B' = \mp (hg \sin \alpha) \alpha' - \frac{\kappa A'_0}{2}, \quad (\text{A.43})$$

logo, substituímos α' usando a segunda BPS (A.41), obtendo-se a seguinte expressão

$$B' + \frac{\kappa A'_0}{2} + \frac{(2m - A)}{2r} hg \sin^2 \alpha = 0, \quad (\text{A.44})$$

a qual difere da lei de Ampère (A.28) pela falta de um termo $\frac{\kappa A'_0}{2}$.

Neste ponto é necessário enfatizar que a pesar de existir estados BPS que minimizam a energia, esses estados não são soluções das equações de Euler-Lagrange expressas pelas equações (A.27), (A.28) e (A.29).

A.1.2 Construindo o modelo BPS para o caso $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

A análise anterior mostra algumas peculiaridades que podemos usar para construir um modelo capaz de engendrar configurações BPS:

- A primeira dica é apresentada pela expressão do potencial (A.36), cuja dependência explícita no campo A_0 mudaria a forma da lei de Gauss (A.27) e, o que é muito pior, quebraria a invariância de calibre do modelo.
- A segunda informação provem da lei de Ampère “incompleta” (A.44).

Para preservar a lei de Gauss, o potencial V em (A.36) não deve depender do campo A_0 . Isso é resolvido mediante a introdução de um novo campo, um campo escalar neutro, que chamaremos de Ψ , que no limite BPS satisfaça a condição $\Psi = \mp A_0$. O campo Ψ deve ter uma dinâmica que no limite BPS não mude a BPS (A.41), porém, seja capaz de fornecer um termo adicional $-\frac{\kappa A_0}{2}$ na BPS (A.40) para ela ser escrita como

$$B = \frac{A'}{gr} = \pm hg \cos \alpha - \kappa A_0. \quad (\text{A.45})$$

Com esta BPS e a (A.41) é possível reproduzir a lei de Ampère (A.28).

A equação (A.35) fornece o modo de introduzir o termo adicional $\pm \frac{\kappa A_0 B}{2}$ na densidade de energia, e mudando A_0 por $\mp \Psi$, descobrimos que o termo $\mp \kappa \Psi B$ deve ser gerado de alguma maneira. Com essa finalidade, definimos a seguinte expressão

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} (A'_0)^2 + \frac{g^2 h}{4} (A_0)^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\Psi')^2 + \frac{g^2 h}{4} \Psi^2 \sin^2 \alpha, \quad (\text{A.46})$$

que após algumas manipulações pode ser reescrito como

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} (A'_0 \pm \Psi')^2 \mp A'_0 \Psi' + \frac{g^2 h}{4} (A_0 \pm \Psi)^2 \sin^2 \alpha \mp \frac{g^2 h}{2} A_0 \Psi \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.47})$$

A lei Gauss (A.27) permite escrever o último termo como sendo

$$\mp \frac{g^2 h}{2} A_0 \Psi \sin^2 \alpha = \mp \frac{1}{r} (r A'_0)' \Psi \mp \kappa \Psi B. \quad (\text{A.48})$$

Desse modo chegamos à seguinte expressão

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} (A'_0 \pm \Psi')^2 + \frac{g^2 h}{4} (A_0 \pm \Psi)^2 \sin^2 \alpha \mp \kappa \Psi B \mp \frac{1}{r} (r A'_0 \Psi)'. \quad (\text{A.49})$$

Observamos que a expressão definida em (A.46) gera o termo desejado, $\mp \kappa \Psi B$. Além disso, no limite BPS, a condição $\Psi = \mp A_0$ é satisfeita. Também, a integração da derivada total em (A.49) é nula se consideramos as condições de contorno para $A_0(r)$ e $A'_0(r)$ expressas em (A.16).

Neste ponto, fica claro, que a densidade de energia (A.30) precisa ser modificado pela adiç3o da express3o

$$\frac{1}{2}(\Psi')^2 + \frac{g^2 h}{4}\Psi^2 \sin^2 \alpha, \quad (\text{A.50})$$

ou seja, no regime estacion3rio, a densidade de energia do novo modelo deve ter a seguinte express3o

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}(A'_0)^2 + \frac{hg^2}{4}(A_0)^2 \sin^2 \alpha + h \left[(\alpha')^2 + (2m - A)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4r^2} \right] \\ & + \frac{1}{2}(\Psi')^2 + \frac{g^2 h}{4}\Psi^2 \sin^2 \alpha + V(\alpha, \Psi), \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

A express3o definida em (A.50) pode ser obtida a partir da densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}_\Psi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu \Psi) - g^2 \Psi^2 P_{cb} Q_{cd} Q_{bm} \phi_d^* \phi_m. \quad (\text{A.52})$$

Finalmente, a novo modelo capaz de engendrar configuraç3es BPS 3 descrito pela seguinte densidade Lagrangeana,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu \Psi) \\ & + (P_{ab}D_\mu \phi_b)^*(P_{ac}D_\mu \phi_c) - g^2 \Psi^2 P_{cb} Q_{cd} Q_{bm} \phi_d^* \phi_m - V(|\phi_3|, \Psi). \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Referências Bibliográficas

- [1] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons* (Cam-bridge University Press, Cambridge, 2004).
- [2] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976)[Yad. Fiz. 24, 861 (1976)]. M. Prasad and C. Sommer-field, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975).
- [3] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B 61, 45 (1973).
- [4] R. Jackiw and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 64, 2234 (1990). R. Jackiw, K. Lee and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D 42, 3488 (1990); J. Hong, Y. Kim, and P. Y. Pac, Phys. Rev. Lett. 64, 2230 (1990); G. V. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories* (Springer, Heidelberg, 1995).
- [5] C. Lee, K. Lee and H. Min, Phys. Lett. B 252, 79 (1990).
- [6] A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. 22, 245 (1975).
- [7] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982); W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models* (Hilger, Bristol, 1989).
- [8] B. J. Schroers, Phys. Lett. B 356, 291 (1995).
- [9] P. Mukherjee, Phys. Rev. D 58, 105025 (1998).
- [10] P. K. Ghosh and S. K. Ghosh, Phys. Lett. B 366, 199 (1996).
- [11] P. Mukherjee, Phys. Lett. B 403, 70 (1997).
- [12] K. Kimm, K. Lee and T. Lee, Phys. Rev. D 53, 4436 (1996).
- [13] J. Han, H.-S. Nam, Lett. Math. Phys. 73, 17 (2005).
- [14] A. D'Adda, M. Luscher and P. D. Vecchia, Nucl. Phys. B 146, 63 (1978).
- [15] E. Witten, Nucl. Phys. B 149, 285 (1979).

- [16] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 59, 79 (1975).
- [17] M. Shifman and A. Yung, Rev. Mod. Phys. 79, 1139 (2007).
- [18] Jose M. Queiruga. J. Phys. A52 055202 (2018).
- [19] A. Yu. Loginov, Phys. Rev. D 93, 065009 (2016).
- [20] R. Casana, M. L. Dias and E. da Hora, Phys. Lett. B 768, 254 (2017).
- [21] R. Casana, M. L. Dias and E. da Hora, Phys. Rev. D 96, 076013 (2017).
- [22] V. Almeida, R. Casana and E. da Hora, Phys. Rev. D 97, 016013 (2018).
- [23] Rodolfo Casana, N. H. Gonzalez-Gutierrez, E. da Hora, *Topological first-order solitons in a gauged CP(2) model with the Maxwell-Chern-Simons action*, arXiv:1802.10128 [hep-th].
- [24] A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP 5, 1174 (1957).
- [25] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) 140, 372 (1982); G. V. Dunne, Aspects of Chern-Simons theory, arXiv:hep-th/9902115.
- [26] S. Bolognesi and S. B. Gudnason, Nucl. Phys. B 805,104 (2008).
- [27] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., E. da Hora and C. Miller, Phys. Lett. B 718, 620 (2012).
- [28] R. Casana and G. Lazar, Phys. Rev. D 90, 065007 (2014).
- [29] R. Casana, C. F. Farias and M. M. Ferreira Jr., Phys.Rev. D 92, 125024 (2015).
- [30] R. Casana, C. F. Farias, M. M. Ferreira Jr. and G. Lazar, Phys. Rev. D 94, 065036 (2016).
- [31] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064 (1950).
- [32] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).