

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO

Oscilador de Dirac bidimensional na presença
de potenciais vetorial e escalar no
espaço-tempo da corda cósmica: contexto das
simetrias de spin e pseudospin

Daniel França Lima

ORIENTADOR: EDILBERTO OLIVEIRA SILVA

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2018

Oscilador de Dirac bidimensional na presença de potenciais vetorial e escalar no espaço-tempo da corda cósmica: contexto das simetrias de spin e pseudospin

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do grau de Mestrado em Física.

Orientador: Edilberto Oliveira Silva

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2018

DANIEL FRANÇA LIMA

Oscilador de Dirac bidimensional na presença de potenciais vetorial e escalar no espaço-tempo da corda cósmica: contexto das simetrias de spin e pseudospin

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva (Orientador)

UFMA

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras

UFLA

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes

UFRPE

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

UFMA

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Agradeço aos meus pais, Antonio Maria Lima e Maria de Jesus França Lima e a toda minha família, por todo apoio e auxílio. À minha namorada, Alexia Tomásia Ferreira Cavalcante.

Ao meu orientador, professor Edilberto Oliveira Silva, pela paciência e pelos ensinamentos.

Aos colegas da pós-graduação e grandes amigos Marcelo dos Reis Feitosa, Joel Félix Diniz, João Luis Brandão Andrade, Marcos Vinícius Almeida, Railson Oliveira, Marcos Lima Dias e João Alfíeres.

Aos amigos de tempos de graduação Rayanne França, Joel Anderson Ferreira Pinheiro, Kayman Joseph Carvalho, Joelson Reis Prado e Diego Azevedo.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

A equação de Dirac com acoplamentos escalar e vetorial descrevendo a dinâmica de um oscilador bidimensional de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica é considerada. Derivamos a equação de Pauli-Dirac e a solucionamos no limite das simetrias de spin e pseudo-spin. Consideramos em nossa análise a presença de potenciais cilíndricamente e simétricos que nos permitem fornecer soluções analíticas para a equação de campo resultante. Usando um ansatz apropriado, verificamos que a equação radial é uma equação diferencial do tipo Heun biconfluente. Os autovalores dessa equação são dados em termos de duas expressões, sendo uma delas usada como condição quântica. Tal condição pode ser usada para fixar algum parâmetro físico presente no Hamiltoniano do sistema mas que está ausente na expressão usada para obter o espectro de energia. Expressões para a energia do oscilador são obtidas para alguns valores do número quântico n . Alguns casos particulares que levam a sistemas físicos conhecidos também são investigados.

Palavras chave: Equação de Dirac, Oscilador de Dirac, Defeitos topológicos, Corda cósmica, Simetria de spin, Simetria de pseudospin

Abstract

The Dirac equation with scalar and vector couplings describing the dynamics of a two-dimensional Dirac oscillator in the cosmic string spacetime is considered. We derive the Dirac-Pauli equation and solve it in the limit of spin and pseudo-spin symmetries. We consider in our analysis the presence of cylindrically symmetric scalar potentials which allows us to provide analytical solutions for the resultant field equation. Using an appropriate ansatz, we find that the radial equation is a biconfluent Heun-like differential equation. The eigenvalues of this equation are given in terms of two expressions, one being used as a quantum condition. Such a condition may be used to fix some physical parameter present in the Hamiltonian of the system but that is absent in the expression used to obtain the energy spectrum. Expressions for the energy of the oscillator are obtained for some values of the quantum number n . Some particular cases that lead to known physical systems are also investigated.

Keywords: Dirac equation, Dirac oscillator, Topological defects, Cosmic strings, Spin symmetry, Pseudospin symmetry.

Lista de Figuras

- 1.1 Perfil do espectro de energia de uma partícula nuclear. Observa-se a separação entre os dupletos de spin $(n, l, j = l \pm 1/2)$ que levam aos números mágicos. Podemos notar também que os pares de partículas únicas nos colchetes $(n, l, j = l \pm 1/2)$ e $(n - 1, l + 2, j = l + 3/2)$ são quase-degenerados. eles são definidos como dupletos de pseudospin $(\tilde{n} = n - 1, \tilde{l} = l + 1, j = \tilde{l} + 1/2)$, e a simetria de pseudospin é introduzida para tal quase-degenerescência. 7
- 4.1 Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.96a)) como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ enquanto na Fig. para $s = -1$. Em ambas, assumimos que para $M = 1, \eta_C = 1$ e $\eta_L = 1$ 41
- 4.2 Perfil das energias no limite exato de simetria de pseudo-spin (Eq. (4.96b)) como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ enquanto na Fig. para $s = -1$. Em ambas, assumimos que para $M = 1, \eta_C = 1$ e $\eta_L = 1$ 41
- 4.3 Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.105a)) com $\eta_L = 0$ como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos $M = 1$ e $\eta_C = 1$ 42
- 4.4 Perfil das energias no limite exato de simetria de pseudo-spin (Eq. (4.106b)) como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos que para $M = 1, \eta_C = 1$ e $\eta_L = 1$ 43

4.5	Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.113)) com $\eta_C = 0$ como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos $M = 1$ e $\eta_L = 1$	45
4.6	Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.114)) com $\eta_C = 0$ como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos $M = 1$ e $\eta_L = 1$	45
4.7	Energia versus α para o caso particular quando $\eta_L = \eta_C = 0$ (Eq. (4.121a)) para $s = 1$ (Fig. (a)) e $s = -1$ (Fig. (b)).	47
4.8	Energia versus α para o caso particular quando $\eta_L = \eta_C = 0$ (Eq. (4.121b)) para $s = 1$ (Fig. (a)) e $s = -1$ (Fig. (b)).	47

Lista de Figuras	1
Sumário	3
1 Introdução	5
2 Revisão sobre equações de onda relativísticas	11
2.1 A equação de Klein-Gordon	11
2.2 Equação de Dirac	13
2.3 O oscilador de Dirac	16
2.4 Autofunções e auto-energias do oscilador de Dirac	18
3 A equação de onda em espaços-tempos curvos	21
3.1 Transporte paralelo e conexão afim	21
3.2 Relação entre o tensor métrico e os símbolos de Christoffel	22
3.3 Equação de Klein-Gordon em espaços-tempos curvos	23
3.4 Conexão de spin	24
4 Equação Dirac com simetrias de spin e pseudospin no espaço-tempo da corda cósmica	28
4.1 Soluções particulares e análise de simetrias de spin e pseudo-spin	33

4.1.1	Simetria de spin exata	33
4.1.2	Simetria de pseudo-spin exata	34
4.2	A equação de Pauli-Dirac e a análise da simetria de spin e pseudospin	35
4.2.1	Análise da simetria de spin e pseudospin	36
4.3	Caso $\eta_L = 0$	40
4.4	Caso $\eta_C = 0$	43
4.5	Potencial $\eta_L r = \eta_C / r = 0$	44
5	Conclusões	48
	Referências Bibliográficas	50

CAPÍTULO 1

Introdução

A mecânica quântica desenvolvida nos anos de 1920 forneceu explicações consistentes para muitos dos fenômenos observados na escala atômica e molecular no início do século XX. Porém, rapidamente se percebeu que ela devia ser estendida para incorporar outra teoria bem sucedida, a relatividade restrita, apresentada por Albert Einstein em 1905. Acreditava-se que a mecânica quântica não-relativística estava incompleta por dois motivos: (a) ela não conseguia descrever fenômenos que envolviam partículas que se movem com velocidades relativísticas e (b) não explicava o fenômeno da criação e destruição de partículas [1]. Os esforços para unificar as duas teorias deram origem a mecânica quântica relativística. A primeira tentativa consistia em utilizar o princípio de correspondência na relação de energia momento de Einstein. O resultado desse procedimento foi a equação de Klein-Gordon [2]. A equação de Klein-Gordon foi abandonada pouco tempo depois, pois ela não apresentava uma densidade de probabilidade positivo-definida, as soluções para partícula livre forneciam energias negativas e a previsão dos níveis da estrutura fina do átomo de hidrogênio não estava de acordo com o resultado experimental [3]. Para solucionar estes problemas, Paul Dirac, em 1928, postulou uma equação que deveria ser de primeira ordem na derivadas temporais e espaciais, a equação de Dirac. Além de obter uma densidade de probabilidade positivo-definida, essa equação possibilitou entre outras coisas a previsão de antipartículas, e se tornou a equação que descreve a dinâmica das partículas de spin-1/2.

O estudo da dinâmica destas partículas na presença de interações é feito por meio de acoplamentos introduzidos na equação de Dirac. Os potenciais de natureza vetorial são aqueles implementados na teoria através do chamado acoplamento mínimo, dado através da modificação do quadrimomento como $p_\mu \rightarrow p_\mu - V_\mu$, onde $V_\mu = (V_0, \mathbf{V})$ são componentes temporal e espacial, respectivamente. Como exemplo, temos a interação de uma carga e com um campo eletromagnético mediada por fótons dada por $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$, onde $A_\mu = (V(r), -\mathbf{A})$ (com \mathbf{A} sendo o potencial vetor e $V(r)$ o potencial escalar) representa o potencial quadrivetor do campo electromagnético. Esta transformação preserva a invariância de calibre associadas com as equações de Maxwell. Por outro lado, os potenciais escalares são aqueles introduzidos pela modificação do termo de massa $M \rightarrow M + V_S$. Neste procedimento o potencial V_S é acoplado como um escalar, diferente da prescrição mínima, onde o potencial é acoplado como a componente tipo-tempo de um quadrivetor. Apesar das semelhanças, eles têm diferentes significados físicos. O acoplamento escalar atua igualmente em partículas e antipartículas. Porém, o acoplamento vetorial atua de forma diferente em estados de elétrons e pósitrons. Como resultado, o espectro de energia não é simétrico, de modo que só existem estados ligados para apenas um dos tipos de partículas. Outro exemplo de interação introduzida através de uma modificação no quadrimomento é o acoplamento não-mínimo. Um caso muito importante e amplamente estudado de um acoplamento não-mínimo é o do oscilador de Dirac $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}$, onde ω é a frequência do oscilador, m é a massa da partícula. Esse modelo foi introduzido por Moshinsky e Szczepaniak [4], que buscavam um potencial que proporcionasse um modelo em que o momento e as coordenadas espaciais fossem lineares e que, no limite não-relativístico, reproduzisse o hamiltoniano do oscilador harmônico.

Desde o início do século XX, físicos nucleares observaram que núcleos com número de próton Z e nêutrons N pares são mais estáveis que aqueles com números ímpares de núcleons. Em especial, os números 2, 8, 20, 28, 50 e 82 para prótons e nêutrons e 126 para nêutrons, são extremamente estáveis. Esses números foram chamados de “números mágicos” [5]. Núcleos em que ambos números de prótons e nêutrons são iguais aos números mágicos são chamados de “duplamente mágicos”. A existência desses números mágicos sugerem que os prótons e nêutrons em um núcleo se organizem em camadas, onde esse números mágicos corresponderiam a camadas totalmente ocupadas, como elétrons em um átomo. Outras evidências para esse modelo nuclear de camadas são a elevada abundância dos elementos para os quais Z ou

N são números mágicos; o fato de que todos os elementos que se encontram no final das séries radioativas tem um número mágico de prótons ou nêutrons; a seção de choque de absorção de nêutrons para isotopos que têm N igual a um número mágico é bem menor do que para outros isotopos e a energia de ligação para um nêutron que está em uma camada fechada atinge um máximo e diminui acentuadamente para o próximo nêutron. A partir daí, conjecturou-se que cada núcleon movia-se sob a influência de um potencial de campo médio que representava todas as interações com todos os outros núcleons [6]. Assim, tentou-se resolver a equação de Schrödinger com alguns potenciais simples e com solução analítica, como o poço quadrado e o oscilador harmônico. Porém, estes modelos não conseguiram reproduzir os números mágicos. Em 1949, independentemente, Mayer [7] e Haxel, Jensen e Suess [8] acrescentaram o potencial de spin-órbita que separa amplamente os estados com maior momento angular orbital. Somado aos potenciais de campo médio usuais (oscilador harmônico, poço de potencial finito, etc.) o potencial de spin-órbita reproduz com precisão os números mágicos experimentalmente verificados. Assim, o que ocorre é a quebra da simetria de spin entre os dupletos $(n, l, j = l \pm 1/2)$. Esse se tornou um dos mais importantes conceitos em física nuclear.

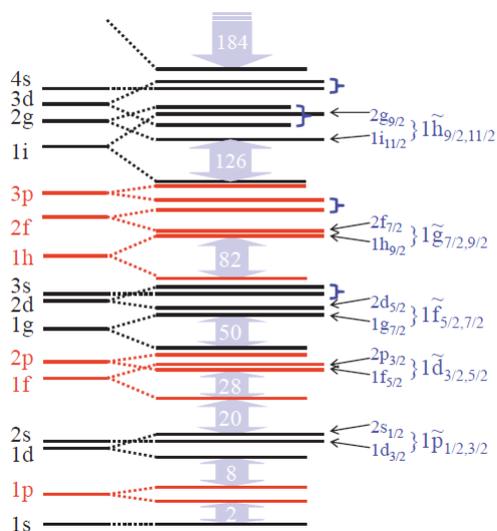


Figura 1.1: Perfil do espectro de energia de uma partícula nuclear. Observa-se a separação entre os dupletos de spin $(n, l, j = l \pm 1/2)$ que levam aos números mágicos. Podemos notar também que os pares de partículas únicas nos colchetes $(n, l, j = l \pm 1/2)$ e $(n - 1, l + 2, j = l + 3/2)$ são quase-degenerados. eles são definidos como dupletos de pseudospin $(\tilde{n} = n - 1, \tilde{l} = l + 1, j = \tilde{l} + 1/2)$, e a simetria de pseudospin é introduzida para tal quase-degenerescência.

Depois desse enorme sucesso, o modelo de camadas com acoplamento spin-órbita atraiu muita atenção, e passou a ser predominantemente estudado em física nuclear. Porém, em 1969, examinando os espectros de núcleos esféricos, Hecht e Adler [9] e Arima, Harvey e Shimizu [10] observaram a quase-degenerescência que existe entre estados de núcleons com números quânticos $(n, l, j = l \pm 1/2)$ e $(n - 1, l + 2, j = l + 3/2)$. De maneira independente, esses autores definiram o conceito de simetria de pseudo-spin expressando esses dois estados em uma estrutura de duplete $(\tilde{n} = n - 1, \tilde{l} = l + 1, j = \tilde{l} \pm 1/2)$, inserindo o “pseudo” momento angular orbital $\tilde{l} = l + 1$ e um “pseudo” spin $\tilde{s} = 1/2$ para os dois estados no duplete. Logo, percebeu-se que esta simetria tinha uma importância maior que renomear tais estados, e foi usada para explicar muitos fenômenos da física nuclear. Porém, apesar do grande sucesso, por muitos anos não houve nenhuma explicação sobre a origem da mesma. Foi somente em 1997 que Ginocchio [11] percebeu que \tilde{l} é apenas o número quântico de momento angular orbital da componente inferior do espinor de Dirac e que a quase-degenerescência dos dupletos poderia ser explicada por uma quebra de simetria de pseudospin, que é uma simetria exata para a hamiltoniana de Dirac com potenciais escalar atrativo V_S e um vetorial repulsivo V_V quando esses potenciais são iguais em magnitude $V_S + V_V = 0$, o que é uma característica de teorias de campo médio relativísticas. A hamiltoniana de Dirac com potenciais escalar e vetorial de igual magnitude é invariante sob o grupo de simetria $SU(2)$ em dois limites. O primeiro limite é $V_S - V_V = C$, onde C é uma constante, dá origem à simetria de spin; e o segundo é $V_S + V_V = C$, que dá origem à simetria de pseudo-spin, como pode ser visto na Ref [12]. A simetria de spin foi observada em espectros de energia de mésons com um quark pesado [13] e de anti-núcleons ligados a um núcleo [14]; enquanto que a simetria de pseudo-spin foi observada em espectros do núcleos [11].

Quebras de simetrias em transições de fase no universo primordial podem ter produzido objetos chamados de defeitos topológicos e que ainda podem estar presentes no universo atualmente. Tais defeitos podem surgir quando simetrias de calibre são quebradas. Isto acontece quando o universo esfria abaixo de uma determinada temperatura crítica T_c e o campo é forçado a escolher um estado de vácuo. Este processo foi sugerido pela primeira vez por Kibble e, por isso, o processo pelos quais são formados os defeitos topológicos é conhecido como mecanismo de Kibble [15].

Dependendo do tipo de simetria quebrada, três tipos básicos de defeitos podem ser formados:

paredes de domínio, cordas e monopolos. Paredes de domínio são defeitos superficiais; são folhas finas de energia concentrada. Monopolos são defeitos pontuais, semelhantes a partículas; são energia concentrada em torno de um único ponto. Cordas cósmicas (parte do objeto de estudo deste trabalho) são objetos em forma fios com energia distribuída ao longo de uma linha localizada [16]. Cordas cósmicas não tem fim, e formam *loops* ou se estendem até o infinito. A espessura de uma corda é microscópica, enquanto que seu tamanho é arbitrariamente grande. Assim, podemos aproximar cordas de linhas finas infinitas. A massa por unidade de comprimento de uma corda, μ , é proporcional ao quadrado da escala de energia, η , das Teorias de Grande Unificação (TUG). Na escala de energia da TUG, teríamos uma densidade de massa da ordem de $\mu \sim 10^{22} g cm^{-1}$ [17].

Esses objetos são particularmente interessantes em relatividade geral, por causa da geometria de sua métrica. Cordas cósmicas são localmente parecidas com o espaço-tempo plano, entretanto, globalmente tem a forma de um cone, onde temos um parâmetro α que está relacionado à densidade linear de massa μ da corda por $\alpha = 1 - 4\mu$ e varia no intervalo $(0, 1]$. O parâmetro α , por sua vez, corresponde a um déficit angular de $\gamma = 2\pi(1 - \alpha)$. Cordas cósmicas ainda não foram diretamente observadas, mas temos evidências indiretas de sua existência, como lentes gravitacionais e a partir da direção de jatos de quasares. O interesse que as cordas despertam reside no fato de que elas podem desempenhar papel de destaque em muitos fenômenos, como a formação de grandes estruturas no Universo e anisotropias na radiação cósmica de fundo [18].

No presente trabalho, analisamos em detalhes as soluções analíticas da equação de Dirac com acoplamentos escalar e vetorial sob as simetrias de spin e pseudo-spin no espaço-tempo da corda cósmica. Para as substituições envolvidas, consideramos potenciais vetoriais e escalares cilíndricamente simétricos e também o potencial do oscilador de Dirac em duas dimensões.

O capítulo 1 é dedicado a uma revisão das principais propriedades das equações de Klein-Gordon e Dirac para um espaço-tempo plano.

No capítulo 2, apresentamos o estudo das equações de onda relativísticas no espaço-tempo curvo. Primeiro, reescrevemos a equação de Klein-Gordon na forma covariante. Em seguida, fazemos uma breve revisão de conceitos básicos como o transporte paralelo e conexão afim para bases coordenadas e para bases locais. O capítulo é finalizado com a apresentação das ferramentas necessárias para deduzir a forma covariante da equação espinorial de

Dirac.

No capítulo 3, fazemos uma revisão sobre o oscilador de Dirac. Destacamos suas principais propriedades e obtemos suas autofunções e auto-energias seguindo a receita das referências [19].

No capítulo 4, apresentamos nossa contribuição ao tema propriamente dito deste trabalho. Investigamos em detalhes as soluções analíticas da equação de Dirac com acoplamentos escalar e vetorial levando em conta os limites exatos das simetria de spin e pseudo-spin no espaço-tempo da corda cósmica. Escolhemos os potenciais como sendo cilíndricamente simétricos e também adicionamos o potencial de um oscilador de Dirac bidimensional. Finalizamos o capítulo apresentando algumas soluções particulares do problema.

No capítulo 5, apresentamos as conclusões do trabalho e as perspectivas futuras.

Revisão sobre equações de onda relativísticas

2.1 A equação de Klein-Gordon

A primeira tentativa de unificação da mecânica quântica com a relatividade restrita foi utilizar dois princípios de cada uma das duas teorias: a energia relativística como função da massa e do momento e o fato de que os observáveis podem ser representadas por operadores. A equação que obtemos com esse procedimento é conhecida como equação de Klein-Gordon. A relação entre energia, momento e massa, derivada por Einstein é

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.1)$$

Para uma partícula livre, a hamiltoniana do sistema corresponde à sua energia, ou seja, $H = E$. Substituindo os operadores da energia,

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

e do momento,

$$\mathbf{p} = -i\hbar \nabla, \quad (2.3)$$

na Eq. (2.1), obtemos a equação de Klein-Gordon livre

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.4)$$

Aplicando o operador (2.4) na função de onda ϕ , obtemos

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \phi. \quad (2.5)$$

Usando unidades em que $\hbar = c = 1$, a equação acima resulta

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \phi \quad (2.6)$$

ou

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (2.7)$$

ou ainda

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \quad (2.8)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o conhecido operador d'Alambertiano no espaço-tempo de Minkowski. Como ϕ e m são grandezas escalares, a equação é manifestamente covariante.

A equação de Klein-Gordon para partícula única apresenta alguns problemas que discutiremos brevemente. O primeiro deles é o aparecimento de soluções de energia negativa. Para entendermos um pouco mais sobre essa questão, vamos considerar uma solução de onda plana para partículas livres da forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Utilizando a notação indicial, escrevemos

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = x^\mu p_\mu = Et - \vec{x} \cdot \vec{p}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), temos

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)). \quad (2.11)$$

Aplicando (2.11) em (2.6), obtemos a energia de uma partícula relativística

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (2.12)$$

A energias negativas apresentavam um grande problema na época. Como o espectro de energia não era mais limitado por baixo pela energia de repouso, mc^2 , seria possível, por meio da emissão arbitrária de radiação obter valores negativos de energia indefinidamente. Outro problema presente no estudo da equação de Klein-Gordon foi interpretação probabilística da mesma como

uma função de onda. Isso pode ser analisado como segue. A partir da equação de Klein-Gordon, podemos obter uma equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{i}{2m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right] = 0. \quad (2.13)$$

Ao contrário da equação de Schrödinger, não podemos dizer que a (2.13) representa a conservação da probabilidade, pois é impossível interpretar a quantidade

$$\frac{i}{2m} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad (2.14)$$

como uma densidade de probabilidade. O problema com tal interpretação está no fato de que em um dado tempo t ambos ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ podem ter valores arbitrários; portanto, a Eq. 2.14 pode ser positiva ou negativa. Deste modo, podemos concluir que ela não é positiva definida e, portanto, não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade. Por último, introduzindo a interação eletromagnética e aplicando ao átomo de hidrogênio, havia uma previsão de separação entre os níveis de estrutura fina muito maior do que o observado experimentalmente. A origem de todos esses problemas está fato de que a dinâmica de elétrons no átomo de hidrogênio serem descritos por outra equação, a saber, a equação de Dirac, que será estudada na próxima seção. Estes problemas fizeram com que a equação de Klein-Gordon fosse abandonada por algum tempo. Porém, os mesmos representam o erro de interpretar a equação de Klein-Gordon como uma equação onda. Posteriormente, ela passou a ser interpretada como a equação de campo que descreve as partículas de spin-0.

A equação de Klein-Gordon pode ser obtida através da densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.15)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange encontraremos novamente a equação (2.8).

2.2 Equação de Dirac

Com o intuito de tentar solucionar as inconsistências trazidas pela interpretação física da equação de Klein-Gordon, em 1928, Paul Adrien Maurice Dirac propôs uma nova versão relativística da equação de Schrödinger, a saber

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (2.16)$$

onde \hat{H} é o operador hamiltoniano. Tal equação deveria ser de primeira ordem tanto em sua derivada temporal quanto na espacial porque a relatividade restrita exige que tratemos igualmente as coordenadas espaciais e temporais. Além disso, Dirac percebeu (observando a equação de Schrödinger) que a equação de Klein-Gordon apresentava densidades de probabilidade negativas por causa da sua derivada de segunda ordem no tempo. Dirac postulou o hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m, \quad (2.17)$$

onde $\hat{p} = i\nabla$ é o operador momento linear. Exigindo que o quadrado desse hamiltoniano satisfaça a relação de energia-momento da relatividade restrita $E^2 = p^2 + m^2$, Dirac encontrou as seguintes relações para α e β :

$$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = 2\delta_{ij} 1, \quad (2.18a)$$

$$\hat{\alpha}_i \beta + \beta \hat{\alpha}_i = 0, \quad (2.18b)$$

$$\beta^2 = \hat{\alpha}_i^2 = 1. \quad (2.18c)$$

Se $\hat{\alpha}_i$ e β fossem números, deveriam obedecer apenas à relações de comutação e não de anti-comutação. Portanto, $\hat{\alpha}_i$ e β devem ser matrizes. As mesmas têm traço nulo, e da equação (2.18c) podemos concluir que seus autovalores (elementos das matrizes diagonalizadas) só podem ser iguais a ± 1 . O traço nulo também implica que essas matrizes devem ter dimensão par. Para o caso de 2 dimensões temos apenas três hermitianas de traço nulo (as matrizes de Pauli, σ_i). Logo, elas terão de ter no mínimo 4 dimensões. Escolhemos a seguinte representação para as matrizes de Dirac:

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

onde $1_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2 e σ^i são as matrizes de Pauli. Neste caso, a função de onda dever ser um vetor coluna (espinor) de quatro componentes.

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \psi_3(\mathbf{x}, t) \\ \psi_4(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Para construir a equação de continuidade, multiplicamos pela esquerda de (2.20) o espinor $\boldsymbol{\psi}^\dagger = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, \psi_3^\dagger, \psi_4^\dagger)$ e, em seguida, multiplicamos pela direita o conjugado do hamiltoniano de

Dirac e multiplicando por ψ e, finalmente, subtraímos os dois resultados. O resultado dessa operação é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.21)$$

onde ρ é a densidade de probabilidade, dada por

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i^\dagger \psi_i \quad (2.22)$$

e \mathbf{j} é a corrente de probabilidade, definida como

$$\mathbf{j} = \psi^\dagger \hat{\alpha} \psi. \quad (2.23)$$

Para escrever a equação de Dirac na forma covariante, faremos uso da notação para as matrizes γ^μ

$$\hat{\alpha} = \gamma^0 \gamma^i, \quad \beta = \gamma^0 \quad (2.24)$$

onde

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Assim, podemos escrever a equação de Dirac na forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.26)$$

Podemos ainda, utilizando a notação de Feynman, $\not{d} = \gamma^\mu a_\mu$, escrever (2.26) como

$$(i\not{d} - m)\psi = 0. \quad (2.27)$$

As matrizes γ^μ obedecem a álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} 1, \quad (2.28)$$

onde 1 a matriz identidade 4×4 . O quadrado das matrizes γ^μ é dado por

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \text{ e } (\gamma^0)^2 = 1. \quad (2.29)$$

A matriz γ^0 é hermitiana enquanto que as outras matrizes, γ^i , são anti-hermitianas

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i. \quad (2.30)$$

Também podemos escrever em notação covariante o quadrvetor densidade de corrente

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.31)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor adjunto, e a equação de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.32)$$

Utilizando novamente o espinor adjunto, podemos construir os seguintes escalares de Lorentz

$$\bar{\psi}\psi \quad (2.33)$$

e

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (2.34)$$

como a massa m também é um escalar, podemos construir a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (2.35)$$

Variando $\bar{\psi}$, encontramos a equação de Dirac (2.26) como a equação de movimento dessa lagrangiana.

A equação de Dirac foi um grande marco para a física de altas energias, pois mostrou-se que ela é a equação de onda relativística que descreve corretamente a dinâmica de partículas de spin-1/2 e, entre outros êxitos, também possibilitou a previsão das antipartículas.

2.3 O oscilador de Dirac

Por ser um modelo que pode ser resolvido analiticamente e ter várias aplicações em diversos contextos físicos, o oscilador harmônico quântico é um tópico de interesse atual. O potencial de um oscilador harmônico dado por

$$\phi = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad (2.36)$$

onde m é a massa e ω é a frequência de oscilação. Tendo em vista um modelo análogo para a mecânica quântica relativística, Moshinsky e Szczepaniak buscaram uma expressão para a equação de Dirac que fosse linear no momento e na posição e que pudesse ser interpretada como a equação do oscilador harmônico para um limite não-relativístico. A hamiltoniana é dada por

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - im\omega\mathbf{r}\beta) + \beta m] \psi, \quad (2.37)$$

que é obtida introduzindo a substituição

$$\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - im\omega\mathbf{r}\beta \quad (2.38)$$

no hamiltoniano de Dirac para partículas livres (2.16). Consideramos soluções da forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt}\psi(\mathbf{r}), \quad (2.39)$$

onde $\psi(\mathbf{r})$ é o quadrispinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

e ϕ e χ são espinores de duas componentes. Substituindo (2.39) em (2.37), temos

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + im\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) \chi = (E - m)\phi, \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - im\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) \phi = (E + m)\chi. \quad (2.42)$$

Resolvendo a equação (2.42) para χ , encontramos a expressão

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - im\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})}{(E + m)} \phi. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.41) e utilizando a propriedade

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

obtemos

$$(E^2 - m^2) \phi = [\hat{p}^2 + m^2\omega^2 r^2 - 3m\omega - 2m\omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}] \phi, \quad (2.44)$$

onde

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}.$$

Para obtermos o limite não-relativístico de (2.44) fazemos $E \approx m + \varepsilon$. Deste modo, notando que $E^2 - m^2 \approx 2\varepsilon m$ para $\varepsilon \ll m$, a expressão resultante fica escrita na forma

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3\omega}{2} - 2\omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right) \phi(\mathbf{r}) = \varepsilon \phi(\mathbf{r}). \quad (2.45)$$

Os dois primeiros termos do hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac na Eq. (2.45) correspondem ao oscilador harmônico não-relativístico, o que explica a denominação de *oscilador de Dirac*; o terceiro termo é uma constante que desloca os níveis de energia; o quarto termo representa o acoplamento spin-órbita.

As soluções da equação que governa o movimento de um oscilador não-relativístico em coordenadas esféricas é um problema conhecido na literatura. As autofunções do oscilador satisfazem a equação de autovalores

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \right) \phi(\mathbf{r}) = \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \phi(\mathbf{r}) = \varepsilon \phi(\mathbf{r}), \quad (2.46)$$

onde n é um número inteiro não negativo e l é o autovalor do operador momento angular orbital dado por $\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$. A parte radial das autofunções de (2.46) é dada por

$$R_{nl}(r) = A_{nl} \left(\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} r \right)^l e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} M \left(\frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4}, l + \frac{3}{2}, \frac{m\omega r^2}{\hbar} \right), \quad (2.47)$$

onde $M(a, b, x)$ é uma função hipergeométrica confluyente. A quantização dos níveis de energia é obtida através da condição de contorno que impõe que as autofunções devem ser nulas quando $r \rightarrow \infty$, o que leva a exigência de que a primeira expressão no argumento da função hipergeométrica confluyente seja igual a um inteiro não-negativo ou zero.

Uma observação interessante é que o termo de interação spin-órbita só aparece na equação de Dirac para $l \neq 0$. Quando $l = 0$ os dois resultados são idênticos.

2.4 Autofunções e auto-energias do oscilador de Dirac

A importância do oscilador de Dirac para a mecânica quântica relativística esta no fato que este é um problema exatamente solúvel, o que é raro de se encontrar tanto na mecânica quântica relativística quanto na não-relativística. Demonstraremos isto nesta seção ao determinar as autofunções e auto-energias deste modelo.

Por causa da simetria esférica, o operador momento angular total [20],

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}, \quad (2.48)$$

comuta com o hamiltoniano de Dirac e o momento angular do sistema é conservado. Os autoestados desses operadores podem ser escritos como

$$\Omega_{jlm}(\theta, \phi) = \sum_{m_l, m_s} \left\langle \frac{1}{2}, m_s, l, m_l | j, m \right\rangle Y_{lm_l}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2}m_s}, \quad (2.49)$$

onde

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

$$\hat{K} \Omega_{jlm}(\theta, \phi) = \kappa \Omega_{jlm}(\theta, \phi), \quad (2.51)$$

com os autovalores dados por

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2 \\ l, & j = l - 1/2 \end{cases}. \quad (2.52)$$

Os autovalores j e l são completamente determinados por κ . Assim, podemos usar a notação mais compacta, $\Omega_{\kappa m} = \Omega_{jlm}$. A solução assume a forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig(r)\Omega_{\kappa m}(\theta, \phi) \\ f(r)\Omega_{-\kappa m}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

onde $g(r)$ e $f(r)$ são funções da coordenada radial. Substituindo (2.53) em (2.41) e (2.42), e usando as relações

$$\begin{aligned} -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}}{r}, \\ \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\right) \Omega_{\kappa m} &= -\Omega_{-\kappa m}, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \Omega_{\kappa m} &= -(\kappa + 1)\Omega_{-\kappa m}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

encontramos as equações acopladas

$$\left(-\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} + m\omega r\right) f(r) = (E - m)g(r), \quad (2.55)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} + m\omega r\right) g(r) = (E + m)f(r). \quad (2.56)$$

Para desacoplar as equações, rearranjamos a equação (2.55) para obter uma expressão para $f(r)$ e substituindo na equação (2.56). Temos então uma equação diferencial de segundo grau para $g(r)$

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} - \left[\frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} + m^2 \omega^2 r^2 \right] g(r) - \left[\frac{2(\kappa - 1)m\omega}{\hbar} + m^2 \omega^2 r^2 - (E^2 - m^2) \right] g(r) = 0. \quad (2.57)$$

De forma análoga, partindo da equação (2.56) encontramos uma expressão para $g(r)$ e substituímos na equação (2.55) para encontrar uma equação diferencial de segundo grau para $f(r)$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \left(\frac{\kappa(\kappa - 1)}{r^2} + m^2 \omega^2 r^2 \right) f(r) - \left(\frac{2(\kappa + 1)m\omega}{\hbar} + m^2 \omega^2 r^2 - (E^2 - m^2) \right) f(r) = 0. \quad (2.58)$$

As equações acima podem ser resolvidas se as reorganizarmos como equações hipergeométricas confluentes. O resultado é dado por

$$g(r) = A_{nl} e^{-\frac{1}{2}m\omega r^2} (m\omega r^2)^{\frac{1}{2}(l+1)} M(-n, l + \frac{3}{2}, m\omega r^2), \quad (2.59)$$

$$g(r) = B_{n'l'} e^{-\frac{1}{2}m\omega r^2} (m\omega r^2)^{l'+1} M(-n, l' + \frac{3}{2}, m\omega r^2), \quad (2.60)$$

onde A_{nl} e $B_{n'l'}$ são constantes de normalização.

Podemos obter os valores de A_{nl} e $B_{n'l'}$ substituindo (2.59) e (2.60) em (2.55) e (2.56), respectivamente. Então temos

$$A_{nl} = m\omega\varepsilon^n \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{E} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2^{l-n+2}(2n+2l+1)!!}{\sqrt{\pi}n![(2l+1)!!]^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.61)$$

$$B_{n'l'} = m\omega\varepsilon^{n'} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{E} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2^{l'-n'+2}(2n'+2l'+1)!!}{\sqrt{\pi}n'![(2l'+1)!!]^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.62)$$

onde $\varepsilon = l - l'$ e $n' = n - \frac{1}{2} + \frac{l-l'}{2}$, com $n, n' \geq 0$.

Os autovalores de energia são obtidos impondo que o primeiro parâmetro do argumento da função hipergeométrica deva ser igual a um inteiro negativo, $-n$. Denotando o número quântico principal por $N = 2n + l$, com $N = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$E^2 = \begin{cases} m^2 + (2N - j + 1)\omega m & \text{para } j = l + \frac{1}{2}, \\ m^2 + (2N + j + 3)\omega m & \text{para } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Analisando esses autovalores, podemos observar que para $j = l + 1/2$, todos os estados com $N \pm q, j \pm q$, onde q é um inteiro, são degenerados. Para $j = l - 1/2$, todos os estados com $N \pm q, j \mp q$ são degenerados.

A equação de onda em espaços-tempos curvos

Neste capítulo, estendemos o estudo das equações de onda relativísticas discutidas do capítulo anterior para espaços-tempos curvos. Iniciamos fazendo uma generalização da equação de Klein-Gordon para espaços-tempos, pois esta é uma tarefa relativamente simples. Contudo, fazer o mesmo para a equação de Dirac é bem mais complicado. Primeiro, devemos aprender como tomar a derivada covariante de um espinor. O simples acoplamento de campos espinoriais ao campo gravitacional é impedido por uma dificuldade imediata: o grupo das transformações de coordenadas gerais tem representações vetoriais e tensoriais, mas não tem uma representação espinorial [21]. Porém, pelo fato de que existem representações espinoriais do grupo de Lorentz, $O(1,3)$, e o princípio de equivalência nos permitem contornar esse problema como veremos a seguir. Antes de prosseguir para a generalização das equações de onda em espaços-tempos curvos, precisamos rever alguns conceitos importantes sobre o estudo da curvatura [22].

3.1 Transporte paralelo e conexão afim

Quando estamos lidando com operações envolvendo a derivada de um vetor devemos tomar um certo cuidado. A derivada de um vetor ao longo de uma curva λ , definida por

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{V^\mu(Q) - V^\mu(P)}{\delta\lambda}, \quad (3.1)$$

onde Q e P são pontos do espaço tempo entre λ e $\lambda + \delta\lambda$, respectivamente, exige uma comparação entre diferentes espaços tangentes. Quando estamos em um espaço-tempo plano, essa operação é trivial. Contudo, em espaços-tempos curvos, precisamos introduzir o conceito de transporte paralelo, o que consiste em mover um vetor ou, de forma mais geral, um tensor, ao longo de uma curva mantendo-o constante. O vetor $V^\mu(P)$ pode ser transportado paralelamente até Q por meio da *conexão afim* Γ tal que

$$V^\mu(P \rightarrow Q) = V^\mu(P) - \delta\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(P) V^\nu(P) \frac{dx^\sigma}{d\lambda}. \quad (3.2)$$

A derivada covariante correspondente é escrita como

$$\nabla_\sigma V^\mu = \frac{V^\mu(P) - V^\mu(P \rightarrow Q)}{\delta x^\sigma} = \partial_\sigma V^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\nu, \quad (3.3)$$

da qual definimos a condição de transporte paralelo:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma V^\mu = 0. \quad (3.4)$$

Note que essa é uma generalização da condição no espaço plano $\frac{\partial V^\mu}{dx^\sigma} = 0$. A derivada covariante de uma 1-forma, isto é, um tensor $(0, 1)$ ω_μ é dada por

$$\nabla_\sigma \omega_\mu = \partial_\sigma \omega_\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \omega_\lambda. \quad (3.5)$$

As propriedades de transformação de uma conexão podem ser obtidas exigindo que $\nabla_\sigma V^\mu$ se transforme como um tensor, ou seja,

$$\nabla_{\sigma'} V^{\mu'} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \nabla_\sigma V^\mu. \quad (3.6)$$

Assim, temos

$$\Gamma_{\nu'\sigma'}^{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\sigma'}} \frac{\partial x}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right), \quad (3.7)$$

mostrando que Γ não é um tensor.

3.2 Relação entre o tensor métrico e os símbolos de Christoffel

Podemos definir a conexão afim univocamente em função do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, e de suas derivadas. Primeiro, supomos que a conexão tem torção nula, o que significa que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.

Em seguida, supomos que a métrica obedece a condição de transporte paralelo: $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$. A primeira suposição garante que o produto escalar de dois vetores que foram paralelamente transportados permaneça constante. Ou seja, se

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma U^\mu = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma V^\nu = 0, \quad (3.8)$$

então

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma (g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu) = 0. \quad (3.9)$$

Da segunda condição, temos as três seguintes relações

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0, \quad (3.10)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla_\nu g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0. \quad (3.12)$$

Subtraindo (3.11) e (3.12) de (3.10) e usando a primeira suposição, obtemos

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0. \quad (3.13)$$

A equação (3.13), após algumas manipulações algébricas, resulta

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.14)$$

Os componentes da conexão afim definida em função da métrica são chamados de símbolos de Christoffel.

3.3 Equação de Klein-Gordon em espaços-tempos curvos

Por ser escrita em uma forma tensorial, a generalização da equação de Klein-Gordon para um espaço-tempo arbitrário é quase imediata. Para verificar isso, basta escrevê-la em uma forma covariante, a qual garante que a mesma permaneça verdadeira em espaços-tempos curvos. Assim, a densidade lagrangeana de um campo escalar em espaço-tempo curvo é escrita como

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2 \right) \quad (3.15)$$

e a equação de movimento para partículas de spin-0 é escrita como

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + (m^2 + \xi R) \phi = 0 \quad (3.16)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico e g é seu determinante, R é o escalar de curvatura de Ricci, ξ é uma constante adimensional e ∇_μ é a derivada covariante (lembrando, que apesar de $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$ esta quantidade é um quadrivetor, onde devemos atuar uma derivada covariante) [23].

3.4 Conexão de spin

Anteriormente, mostramos como tomar a derivada covariante de um tensor. Porém, isso não é suficiente para escrever a equação de Dirac em um espaço-tempo curvo. Para isso, usaremos o fato de que é sempre possível, devido ao princípio de equivalência, encontrar um sistema de coordenadas inercial em que a métrica é localmente plana. Para isso, podemos construir coordenadas normais y^a em cada ponto X de coordenadas $x^\mu = X^\mu$. Em termos de y^a , a métrica em X_μ é simplesmente $\eta_{\mu\nu}$, apesar de que, para coordenadas mais gerais, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é mais complicado. As duas métricas estão relacionadas por

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab}, \quad (3.17)$$

onde

$$e_\mu^a(x) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \right)_{x^\mu=X^\mu} \quad (3.18)$$

são objetos chamados de tetradas ou *vierbeins* que tem sua inversa dada por $e_a^\mu(x)$. Os índices das coordenadas locais são identificadas por letras latinas (a, b, c, \dots) e as coordenadas gerais são identificadas por letras gregas (μ, ν, ρ, \dots). que é um tensor misto de ordem 2, Por construção, as tetradas tem as seguintes definições

$$e_\mu^a(x)e_b^\mu(x) = \delta_b^a, \quad e_a^\mu(x)e_\nu^a(x) = \delta_\nu^\mu \quad (3.19)$$

e

$$e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)g_{\mu\nu} = \eta_{ab}. \quad (3.20)$$

O que precisamos saber é a forma da equação de transporte paralelo em um sistema de coordenadas locais. Ou seja,

$$V^a(x + dx) = V^a(x) - \omega_{\mu b}^a(x), \quad (3.21)$$

onde $\omega_{\mu b}^a$ é uma generalização da conexão afim chamada de conexão de spin. Para encontrar a forma explícita para $\omega_{\mu b}^a$ partimos da relação

$$V^\mu(x) = e_a^\mu(x)V^a(x). \quad (3.22)$$

Transportando o vetor do ponto x para o ponto $(x + dx)$ a equação acima assume a forma

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_\mu^a(x + dx)V^a(x \rightarrow x + dx). \quad (3.23)$$

Expandindo $e_\mu^a(x + dx)$ em primeira ordem em dx , temos

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_\mu^a(x)V^a(x \rightarrow x + dx) + \partial_\nu e_\mu^a(x)V^a(x \rightarrow x + dx)dx^\nu. \quad (3.24)$$

Inserindo (3.23) na Eq. (3.24), temos

$$\begin{aligned} V^\mu(x \rightarrow x + dx) &= e_\mu^a(x)V^a(x) - [e_\mu^a(x)\omega_{\lambda b}^a(x) - \partial_\lambda e_\mu^a(x)]V^b(x)dx^\lambda, \\ &= V^\mu(x) - [e_\mu^a(x)\omega_{\lambda b}^a(x) - \partial_\lambda e_\mu^a(x)]e_\sigma^b V^\sigma(x)dx^\lambda. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comparando (3.25) com a equação de transporte paralelo para vetores globais, (3.3), podemos notar que

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\mu = [e_\mu^a(x)\omega_{\lambda b}^a(x) - \partial_\lambda e_\mu^a(x)]e_\sigma^b. \quad (3.26)$$

Isolando a conexão de spin em (3.26), encontramos

$$\omega_{\mu b}^a = e_\nu^a e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + e_\nu^a \partial_\lambda e_b^\nu. \quad (3.27)$$

Abaixando os índices de $\omega_{\mu b}^a$, obtemos

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + \eta_{ac} e_\nu^c \partial_\lambda e_b^\nu, \quad (3.28)$$

mostrando que é antissimétrico nos índices inferiores, ou seja,

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \quad (3.29)$$

Devemos encontrar uma derivada covariante do campo espinorial que tenha a forma

$$\nabla_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + \Omega_\mu(x)]\psi(x), \quad (3.30)$$

onde $\Omega(x)$ é o coeficiente da conexão para o campo espinorial. Com esta conexão, o espinor deve obedecer a regra para transporte paralelo

$$\psi(x \rightarrow x + dx) = \psi(x) - \Omega(x)\psi(x)dx^\mu. \quad (3.31)$$

Lembrando que $S(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$ é um escalar que permanece invariante sob transporte paralelo, podemos escrever

$$\begin{aligned} S(x \rightarrow x + dx) &= \bar{\psi}(x \rightarrow x + dx)\psi(x \rightarrow x + dx), \\ &= [\psi^\dagger(x)\gamma^0 - \psi^\dagger(x)\Omega_\mu^\dagger(x)\gamma^0 dx^\mu][\psi(x) - \Omega_\mu(x)\psi(x)dx^\mu], \\ &= S(x) - \bar{\psi}(x)[\Omega_\mu(x) + \gamma^0\Omega_\mu^\dagger(x)\gamma^0]\psi(x)dx^\mu, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde foi usada a Eq. (3.31) e as propriedades das matrizes gamma $(\gamma^0)^2 = 1$ e a definição do espinor adjunto de Dirac. O termo proporcional a $dx^\mu dx^\nu$ foi descartado por ser muito pequeno. Para que a equação (3.32) corresponda ao transporte paralelo de um escalar, deduzimos que

$$\gamma^0 \Omega_\mu^\dagger \gamma^0 = -\Omega_\mu. \quad (3.33)$$

Por outro lado, o vetor local $V^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^a \psi(x)$ deve sofrer o transporte paralelo como qualquer outro vetor

$$\begin{aligned} V^a(x \rightarrow x + dx) &= [\psi^\dagger(x) - \psi^\dagger(x) \Omega^\dagger(x) \gamma^0 dx^\mu] \gamma^0 \gamma^a [\psi(x) - \Omega(x) \psi(x) dx^\mu], \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma^a \psi(x) - \psi(x) - \bar{\psi}(x) [\gamma^a \Omega(x) - \Omega(x) \gamma^a] \psi(x) dx^\mu, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde usamos novamente a condição (3.33). Comparando com a Eq.(3.21), deduzimos que para que (3.34) represente o transporte paralelo de um vetor local é necessário que

$$[\gamma^a, \Omega_\mu] = \omega_{\mu b}^a \gamma^b. \quad (3.35)$$

Deste comutador, concluímos que Ω_μ deve ser composto por alguma combinação entre a conexão de spin e um produto das matrizes gama satisfazendo o comutador. Lembrando que $[\gamma^a, \sigma^{bc}] = 2i(\gamma^a \eta^{ba} - \gamma^b \eta^{ca})$, fazemos o seguinte ansatz para Ω_μ :

$$\Omega_\mu = C \omega_{\mu bc} \sigma^{bc}, \quad (3.36)$$

onde C é uma constante complexa. Inserindo (3.36) em (3.35), encontramos

$$[\gamma^a, \Omega_\mu] = 2iC \omega_{\mu bc} (\gamma^a \eta^{ba} - \gamma^b \eta^{ca}) = 4iC \omega_{\mu b}^a \gamma^b. \quad (3.37)$$

Usando a propriedade de antissimetria da conexão de spin na segunda igualdade em (3.37), a constante C é determinada e seu valor é dado por $C = \frac{1}{4i}$. Lembrando que $(\sigma^{bc})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{bc} \gamma^0$, vemos que a conexão de spin também satisfaz à Eq. (3.32). Assim, a conexão de spin é dada por

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4i} \omega_{\mu bc} \sigma^{bc} = \frac{1}{8} \omega_{\mu bc} [\gamma^b, \gamma^c]. \quad (3.38)$$

Para concluir a tarefa de encontrar a forma da equação de Dirac válida em espaços-tempos curvos, devemos voltar nossa atenção para as matrizes de Dirac. Vamos reescrevê-las em coordenadas locais com o auxílio das tetradas inversas

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a. \quad (3.39)$$

Assim, usando as Eqs. (3.39) e (3.31) a equação de Dirac

$$[i\gamma^a \partial_a - m] \psi = 0 \quad (3.40)$$

pode ser generalizada para uma equação de Dirac em espaços-tempos curvos

$$[i\gamma^\mu \nabla_\mu - m] \psi = 0. \quad (3.41)$$

A densidade lagrangiana covariante é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \bar{\psi} [i\gamma^\mu \nabla_\mu - m] \psi = 0. \quad (3.42)$$

Variando $\bar{\psi}$ encontramos novamente a equação (3.41). Não podemos, neste caso, acoplar o termo de curvatura a um coeficiente como no caso escalar. A razão para isto é que agora estamos lidando com uma equação espinorial.

Equação Dirac com simetrias de spin e pseudospin no espaço-tempo da corda cósmica

Defeitos topológicos é um tema de grande importância em áreas como gravitação, cosmologia e em física da matéria condensada. Tais defeitos surgem como quebras espontâneas de simetrias de calibre. Como exemplos, temos monopólos, texturas, paredes de domínio e cordas cósmicas. Voltaremos nossa atenção neste trabalho para as cordas cósmicas. Cordas cósmicas, então, seriam formadas durante as transições de fase do universo do modelo inflacionário pela quebra espontânea da simetria $U(1)$. Caso existam, esses objetos devem ser extremamente finos e densos. O espaço-tempo gerado por uma corda cósmica com um campo magnético interno é descrito pelo elemento de linha em coordenadas cilíndricas (t, r, φ, z) ,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad (4.1)$$

com $-\infty < (t, z) < \infty$, $r \geq 0$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. O parâmetro α que é relaciona à densidade linear de massa μ da corda por $\alpha = 1 - 4\mu$, varia no intervalo $(0, 1]$ e corresponde a um déficit ângulo $\gamma = 2\pi(1 - \alpha)$. Geometricamente, a métrica na Eq. (4.1) corresponde a um espaço-tempo de Minkowski com uma singularidade cônica [24].

Nesse estágio, primeiro vamos considerar a dinâmica na ausência de interações. As interações

serão incluídas posteriormente. A equação relevante é a equação de Dirac livre

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi = 0, \quad (4.2)$$

onde Ψ é a função de onda espinorial. Para o espaço-tempo descrito pela métrica (4.1), precisamos escrever as matrizes γ^μ no espaço-tempo de Minkowski (escritas em termos de coordenadas locais) em termos de coordenadas globais e, subsequentemente, incluir a conexão de spin Ω_μ . Em outras palavras, devemos contrair γ^μ com a tetrada inversa,

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a, \quad (4.3)$$

que satisfazem a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

com $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$ e $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$. As matrizes $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^i)$ na Eq. (4.3) são as matrizes γ^μ na representação de Dirac no espaço-tempo de Minkowski

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

onde σ^i são as conhecidas matrizes de Pauli, e 1 é a matriz identidade 2×2 . A equação de Dirac (4.2) no elemento de linha (4.1) é escrita como

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu) - M]\Psi = 0, \quad (4.6)$$

com Ω_μ sendo a conexão afim espinorial, dada pela relação [25]

$$\Omega_\mu = \frac{1}{8}\omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b], \quad (4.7)$$

onde $\omega_{\mu ab}$ é a conexão de spin, dada por

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - \eta_{ac} e_\nu^c \partial_\mu e_b^\nu, \quad (4.8)$$

$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ são os símbolos de Christoffel e η^{ab} é o tensor métrico no espaço plano. Através da conexão de spin, podemos construir um referencial usando uma base tetrada onde podemos representar os espinores no espaço-tempo curvo. A base tetrada e_a^μ considerada é dada por [26]

$$e_a^\mu(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi / \alpha r & \cos \varphi / \alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

e satisfaz a condição

$$e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Usando (4.9) as matrizes γ^μ na Eq. (4.6), podemos reescrevê-las mais explicitamente como

$$\gamma^0 = e_0^t \gamma^0 \equiv \gamma^t, \quad (4.11)$$

$$\gamma^z = e_0^z \gamma^0 \equiv \gamma^z, \quad (4.12)$$

$$\gamma^1 = e_a^1 \gamma^a \equiv \gamma^r, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \gamma^r &= e_0^r \gamma^0 + e_1^r \gamma^1 + e_2^r \gamma^2, \\ &= \gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\gamma^2 = e_a^2 \gamma^a \equiv \frac{\gamma^\varphi}{\alpha r}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma^\varphi &= e_0^\varphi \gamma^0 + e_1^\varphi \gamma^1 + e_2^\varphi \gamma^2, \\ &= -\gamma^1 \sin \varphi + \gamma^2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.16)$$

O ponto de partida para a derivação da Eq. (4.7) é que as matrizes γ^μ no espaço-tempo curvo são covariantemente constantes, isto é, $\nabla_\mu \gamma^\mu = 0$. Para base tetrada aqui considerada (4.9), a conexão tem a forma

$$\Omega = (0, 0, \Omega_\varphi, 0), \quad (4.17)$$

com o elemento não-nulo dado por

$$\Omega_\varphi = \frac{1}{2} (1 - \alpha) \gamma_1 \gamma_2. \quad (4.18)$$

De acordo com o postulado tetrado [25], as matrizes γ^a podem ser qualquer conjunto de matrizes de Dirac. Assim, temos a liberdade de escolher uma representação para as matrizes γ^a . Então, vamos abandonar a representação padrão de Dirac (4.5) e usar a representação [27, 28, 29]

$$\gamma^0 = \sigma^z, \quad \beta \gamma^1 = \sigma^1, \quad \beta \gamma^2 = s \sigma^2, \quad (4.19)$$

onde o parâmetro s , que é o dobro do valor do spin, pode ser introduzido para caracterizar os dois estados de spin, com $s = +1$ para o estado de spin “up” e $s = -1$ para o estado de spin

“down”. Na representação (4.19), as matrizes (4.11), (4.13) e (4.15) assumem a seguinte forma:

$$\gamma^0 = \beta = \sigma^z, \quad (4.20)$$

$$\alpha^r = \beta\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-is\varphi} \\ e^{is\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\alpha^\varphi = \beta\gamma^\varphi = s\sigma^\varphi = \frac{s}{\alpha r} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-is\varphi} \\ ie^{is\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Na representação (4.19), a Eq. (4.18) é escrita como

$$\Omega_\varphi = \frac{1}{2}(1 - \alpha) i\sigma_2 (-is\sigma_1) = -\frac{1}{2}is(1 - \alpha) \sigma^z. \quad (4.23)$$

A escolha (4.19) permite que a equação de Dirac de quatro componentes (4.6) seja reduzida a uma equação espinorial de duas componente devido a invariância translacional ao longo do eixo z . Assim, podemos fazer $p_z = 0$.

Agora, vamos incluir as interações na equação de Dirac (4.6). Consideremos o potencial efetivo [30, 31]

$$M\omega i\sigma^z (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{r}}) r + \frac{1}{2}(I + \sigma^z) \Sigma(r) + \frac{1}{2}(I - \sigma^z) \Delta(r), \quad (4.24)$$

$$\Sigma(r) = V_V(r) + V_S(r), \quad (4.25)$$

$$\Delta(r) = V_V(r) - V_S(r), \quad (4.26)$$

onde

$$V_V(r) = V_1(r) + V_2(r) = \frac{\eta_{C_1}}{r} + \eta_{L_1} r \quad (4.27)$$

$$V_S(r) = S_1(r) + S_2(r) = \frac{\eta_{C_2}}{r} + \eta_{L_2} r \quad (4.28)$$

são potenciais escalar e vetorial cilindricamente simétricos tipo-Cornell e os η'_{C_s} e η'_{L_s} são constantes. O primeiro termo na Eq. (4.24) representa o oscilador de Dirac. Dessa forma, a equação de Dirac independente do tempo (4.6) com energia E pode ser escrita como

$$H_D \psi = E\psi, \quad (4.29)$$

onde ψ é um espinor de duas componentes,

$$H_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - i\boldsymbol{\Gamma} - iM\omega\sigma^z \mathbf{r}) + \frac{1}{2}(I + \sigma^z) \Sigma(r) + \frac{1}{2}(I - \sigma^z) \Delta(r) + \sigma^z M, \quad (4.30)$$

é o hamiltoniano de Dirac, $\mathbf{p} = -i\nabla$ e $\nabla = (\partial/\partial r\hat{\mathbf{r}} + (1/\alpha r)\partial/\partial\varphi\hat{\boldsymbol{\phi}})$ é o operador gradiente referente a parte espacial planar na métrica (4.1).

A dinâmica da partícula é governada pela Eq. (4.29). Em uma primeira investigação, podemos assumir que a energia da partícula é igual a sua massa de repouso, que pode ser realizada considerando $E = \pm M$. Para isto, primeiramente escrevemos a Eq. (4.29) na forma

$$e^{-is\varphi} \left[-i\frac{\partial}{\partial r} + iM\omega r - is \left(-i\frac{\partial}{\alpha r\partial\varphi} \right) - i\frac{(1-\alpha)}{2\alpha r} \right] \psi_2 = [E - M - \Sigma(r)] \psi_1, \quad (4.31)$$

$$e^{+is\varphi} \left[-i\frac{\partial}{\partial r} - iM\omega r + is \left(-i\frac{\partial}{\alpha r\partial\varphi} \right) - i\frac{(1-\alpha)}{2\alpha r} \right] \psi_1 = [E + M - \Delta(r)] \psi_2, \quad (4.32)$$

e assumimos soluções da forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_m f(r) e^{im\varphi} \\ \sum_m ig(r) e^{i(m+s)\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ é o número quântico de momento angular. A substituição da Eq. (4.33) em (4.31) e (4.32) resulta no seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas:

$$\left(\frac{d}{dr} + s\frac{J_\alpha^-}{r} - M\omega r \right) g_m = [E - M - \Sigma(r)] f_m, \quad (4.34)$$

$$\left(-\frac{d}{dr} + s\frac{J_\alpha^+}{r} - M\omega r \right) f_m = [E + M - \Delta(r)] g_m. \quad (4.35)$$

onde

$$J_\alpha^+ = \frac{1}{\alpha} \left[m - \frac{s}{2}(1-\alpha) \right], \quad (4.36)$$

$$J_\alpha^- = \frac{1}{\alpha} \left[m + s + \frac{s}{2}(1-\alpha) \right]. \quad (4.37)$$

O uso dos superescritos (+, -) nas Eqs. (4.36) e (4.37) ficará mais claro na próxima seção. Observe que se fizermos $\Sigma(r) = 0$ e $E = +M$ ou $\Delta(r) = 0$ e $E = -M$, as soluções das Eqs. (4.34) e (4.35) representam uma solução particular para o problema, as quais são excluídas do problema de Sturm-Liouville. Em outras palavras, tais soluções não fazem parte daquelas encontradas através da solução da equação de segunda ordem obtida da Eq. (4.29). Além disso, essas considerações levam imediatamente ao desacoplamento das equações se assumirmos que não existem interações. Veremos na próxima seção que a impor $\Sigma(r) = 0$ ou $\Delta(r) = 0$ implica no limite de simetrias exatas da Eq. (4.29). Tais simetrias são conhecidas como simetrias de spin e pseudo-spin.

4.1 Soluções particulares e análise de simetrias de spin e pseudo-spin

É conhecido na literatura que o limite exato de simetria de spin ocorre quando $\Delta(r) = V(r) - S(r) = 0$ enquanto que o limite exato da simetria de pseudospin ocorre quando impomos que $\Sigma(r) = V(r) + S(r) = 0$ [12]. Como mencionado acima, o superescrito (+) será usado para referenciar a simetria de spin e o (-) a simetria de pseudo-spin. Esta notação será usado de agora em diante. Nesses limites, as soluções se relacionam as componentes superior e inferior do espinor na Eq. (4.33), respectivamente.

Para obter as soluções particulares, vamos procurar por soluções de estado ligado sujeitas á condição de normalização

$$\int_0^\infty (|f_m(r)|^2 + |g_m(r)|^2) r dr = 1, \quad (4.38)$$

e considerar as condições $E = \pm M$ anunciadas antes.

4.1.1 Simetria de spin exata

Neste caso fazemos $\Delta(r) = 0$ ¹ e também assumindo que $E = -M$ nas Eqs. (4.34) e (4.35). Como resultado, temos

$$\left(\frac{d}{dr} + s \frac{J_\alpha^-}{r} - M\omega r \right) g_m(r) = -2 [M + V_S(r)] f_m(r), \quad (4.39)$$

$$\left(-\frac{d}{dr} + s \frac{J_\alpha^+}{r} - M\omega r \right) f_m(r) = 0. \quad (4.40)$$

As soluções dessa equação são escritas como

$$f_m(r) = a_1 r^{sJ_\alpha^+} e^{-\frac{1}{2}M\omega r^2}, \quad (4.41)$$

$$g_m(r) = r^{-sJ_\alpha^-} e^{\frac{1}{2}M\omega r^2} \left[a_1 (M\omega)^{-\frac{1}{2}s(J_\alpha^+ + J_\alpha^-) - \frac{3}{2}} \Gamma_{(a,b,c)} + a_2 \right], \quad (4.42)$$

com

$$\Gamma_{(a,b,c)} = \eta_C (M\omega)^{\frac{3}{2}} \Gamma_{(a)} + \eta_L (M\omega)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{(b)} + M^2 \omega \Gamma_{(c)}, \quad (4.43)$$

¹ Depois de impormos os limites da simetria, por simplicidade, utilizaremos $\eta_{C_1} = \eta_{C_2} = \eta_C$ e $\eta_{L_1} = \eta_{L_2} = \eta_L$.

onde

$$\Gamma_{(a)} = \Gamma \left[\frac{1}{2}s (J_\alpha^+ + J_\alpha^-), M\omega r^2 \right], \quad (4.44)$$

$$\Gamma_{(b)} = \Gamma \left[\frac{1}{2}s (J_\alpha^+ + J_\alpha^-) + 1, M\omega r^2 \right], \quad (4.45)$$

$$\Gamma_{(c)} = \Gamma \left[\frac{1}{2}s (J_\alpha^+ + J_\alpha^-) + \frac{1}{2}, M\omega r^2 \right], \quad (4.46)$$

são as funções Gamma incompletas superiores [32], e a_1, a_2 são constantes. Vamos discutir as soluções (4.41) e (4.42). Já que $e^{-\frac{1}{2}M\omega r^2}$ predomina sobre $r^{sJ_\alpha^+}$ para qualquer valor de sJ_α^+ , a solução $f_m(r)$ dada pela equação Eq. (4.41) converge para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Por outro lado, como as funções Gamma incompletas $\Gamma_{(a,b,c)}$ na Eq. (4.43) sempre divergem, então $g_m(r)$ na (4.42) só irá convergir quando $r \rightarrow 0$ se $a_1 = 0$. Mas, se $a_1 = 0$, a função $f_m(r) = 0$. Logo, a solução é escrita como

$$\begin{bmatrix} f_m(r) \\ g_m(r) \end{bmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r^{-sJ_\alpha^-} e^{\frac{1}{2}M\omega r^2}, \quad \begin{cases} s = \pm 1, \\ a_1 = 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Como $M\omega > 0$ em (4.47), não há valores de sJ_α^- para os quais as funções tenham quadrado integrável. Nesse caso, podemos concluir imediatamente que para a condição $E = -M$ e para a simetria de spin exata, não temos soluções de estados ligados.

4.1.2 Simetria de pseudo-spin exata

Neste caso, fazemos $\Sigma(r) = 0$ e $E = M$ nas Eqs. (4.34) e (4.35). Obtemos

$$\left(\frac{d}{dr} + s \frac{J_\alpha^-}{r} - M\omega r \right) g_m(r) = 0, \quad (4.48)$$

$$\left(-\frac{d}{dr} + s \frac{J_\alpha^+}{r} - M\omega r \right) f_m(r) = 2[M + V_S(r)] g_m(r). \quad (4.49)$$

As soluções para $g_m(r)$ e $f_m(r)$ são dadas por

$$f_m(r) = b_1 r^{sJ_\alpha^+} e^{-\frac{1}{2}M\omega r^2} \left[b_1 - b_2 (-M\omega)^{\frac{1}{2}s(J_\alpha^- + J_\alpha^+) - \frac{3}{2}} \Gamma(d, e, f) \right], \quad (4.50)$$

$$g_m(r) = b_2 r^{-sJ_\alpha^-} e^{\frac{1}{2}M\omega r^2}, \quad (4.51)$$

onde b_1 e b_2 são constantes, e

$$\Gamma_{(d,e,f)} = M^2 \omega \Gamma_{(d)} - \eta_C (-M\omega)^{\frac{3}{2}} \Gamma_{(e)} - \eta_L (-M\omega)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{(f)}, \quad (4.52)$$

$$\Gamma_{(d)} = \Gamma \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s (J_\alpha^- + J_\alpha^+), -M\omega r^2 \right], \quad (4.53)$$

$$\Gamma_{(e)} = \Gamma \left[-\frac{1}{2}s (J_\alpha^- + J_\alpha^+), -M\omega r^2 \right], \quad (4.54)$$

$$\Gamma_{(f)} = \Gamma \left[1 - \frac{1}{2}s (J_\alpha^- + J_\alpha^+), -M\omega r^2 \right]. \quad (4.55)$$

Assim como para o caso da simetria de spin exata, as funções Gamma incompletas $\Gamma_{(d,e,f)}$ na Eq. (4.50) sempre divergem, de modo que uma solução normalizável requer que $b_2 = 0$. Nesse caso, a função $f_m(r)$ tem quadrado integrável apenas para $sJ_\alpha^+ \geq 0$. A solução é escrita como

$$\begin{bmatrix} f_m(r) \\ g_m(r) \end{bmatrix} = b_1 r^{sJ_\alpha^+} e^{-\frac{1}{2}M\omega r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} sJ_\alpha^+ \geq 0, \\ b_2 = 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

Portanto, podemos dizer que para $E = M$ e limite exato de simetria de pseudospin, o sistema admite soluções particulares de estado ligado.

4.2 A equação de Pauli-Dirac e a análise da simetria de spin e pseudospin

Afim de investigar a dinâmica para $E \neq \pm M$, escolhemos trabalhar com a Eq. (4.29) em sua forma quadrática. Atuando o operador

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p}_\beta - i\boldsymbol{\Gamma} - iM\omega\beta\mathbf{r}) + \beta [M + V_S(r)] + [E - V_V(r)] \quad (4.57)$$

no hamiltoniano da Eq. 4, obtemos

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p}_\beta - i\boldsymbol{\Gamma} - iM\omega\beta\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p}_\beta - i\boldsymbol{\Gamma} - iM\omega\beta\mathbf{r}) \psi + [M + V_S(r)]^2 \psi - [E - V_V(r)]^2 \psi \\ & - \left[\sigma^2 \frac{dV_S(r)}{dr} + i\sigma^1 \frac{dV_V(r)}{dr} \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Essa equação pode ser escrita de forma mais explícita como

$$\begin{aligned} & -\nabla_\beta^2 \psi - \frac{(1-\alpha)s\sigma^z}{i\alpha^2 r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha^2 r^2} + M^2 \omega^2 r^2 \psi - 2M\omega \left\{ \sigma^z + \frac{s}{\alpha} \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{s}{2} (1-\alpha) \sigma^z \right] \right\} \psi \\ & + [M + V_S(r)]^2 \psi - [E - V_V(r)]^2 \psi - \left[\sigma^2 \frac{dV_S(r)}{dr} + i\sigma^1 \frac{dV_V(r)}{dr} \right] \psi = 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde $\nabla_\beta^2 = \partial_r^2 + (1/r)\partial_r + (1/\alpha^2 r^2)\partial_\varphi^2$ é o operador de Laplace-Beltrami da parte espacial da métrica (4.1). Depois de usarmos a solução (4.33) em Eq. (4.59), obtemos um sistema de

equações diferenciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left[m - \frac{s}{2}(1-\alpha) \right]^2 f(r) + M^2 \omega^2 r^2 f(r) \\
& - 2M\omega \left\{ \frac{s}{\alpha} \left[m - \frac{s}{2}(1-\alpha) \right] + 1 \right\} f(r) + [M + V_S(r)]^2 f(r) \\
& - [E - V_V(r)]^2 f(r) + \frac{d}{dr} [V_S(r) - V_V(r)] g(r) = 0,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 g(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dg(r)}{dr} + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left[m + s + \frac{s}{2}(1-\alpha) \right]^2 g(r) + M^2 \omega^2 r^2 g(r) \\
& - 2M\omega \left\{ \frac{s}{\alpha} \left[m + s + \frac{s}{2}(1-\alpha) \right] - 1 \right\} g(r) + [M + V_S(r)]^2 g(r) \\
& - [E - V_V(r)]^2 g(r) + \frac{d}{dr} [V_S(r) + V_V(r)] f(r) = 0.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Note que essas duas equações são acopladas pelo último termo em cada uma delas. Veremos a seguir que essas equações podem ser facilmente desacopladas quando impomos as simetrias de spin e pseudospin [12].

4.2.1 Análise da simetria de spin e pseudospin

Quando consideramos os limites exatos das simetrias de spin ($\Delta(r) = 0$) e pseudospin ($\Sigma(r) = 0$) nas Eqs. (4.60)-(4.61), cada componente do espinor satisfaz

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 f^+(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df^+(r)}{dr} + \frac{(J_\alpha^+)^2}{r^2} f^+(r) + \varpi^2 r^2 f^+(r) \\
& + \frac{a^+}{r} f^+(r) + b^+ r f^+(r) - (k^+)^2 f^+(r) = 0,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 g^-(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dg^-(r)}{dr} + \frac{(J_\alpha^-)^2}{r^2} g^-(r) + \varpi^2 r^2 g^-(r) \\
& + \frac{a^-}{r} g^-(r) + b^- r g^-(r) - (k^-)^2 g^-(r) = 0,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

com

$$(k^+)^2 = E^2 - M^2 + 2M\omega (sJ_\alpha^+ + 1), \tag{4.64}$$

$$(k^-)^2 = E^2 - M^2 + 2M\omega (sJ_\alpha^- - 1), \tag{4.65}$$

$$J_\alpha^+ = \frac{1}{\alpha} \left[m - \frac{s}{2}(1-\alpha) \right], \tag{4.66}$$

$$J_\alpha^- = \frac{1}{\alpha} \left[m + s + \frac{s}{2}(1-\alpha) \right], \tag{4.67}$$

onde $\varpi = M\omega$, $a^+ = 2(M + E)\eta_C$, $a^- = 2\eta_C(E - M)$, $b^+ = 2(M + E)\eta_L$ e $b^- = 2\eta_L(E - M)$. As equações diferenciais (4.62) e (4.63) podem ser escritas de modo conveniente usando, respectivamente, as seguintes soluções:

$$f^+(x) = x^{|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha_L^+}{2}x} y^+(x), \quad x = \sqrt{\varpi}r, \quad (4.68)$$

$$g^-(x) = x^{|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha_L^-}{2}x} y^-(x), \quad x = \sqrt{\varpi}r, \quad (4.69)$$

onde $y^+(x)$ e $y^-(x)$ satisfazem

$$[y^+(x)]'' + \left[\frac{\mathbb{J}^+}{x} - 2x - \alpha_L^+ \right] [y^+(x)]' + \left[-\frac{\mathbb{J}^+ \alpha_L^+ + 2\alpha_C^+}{2x} + \Delta^+ - (\mathbb{J}^+ + 1) \right] y^+(x) = 0, \quad (4.70)$$

$$[y^-(x)]'' + \left[\frac{\mathbb{J}^-}{x} - 2x - \alpha_L^- \right] [y^-(x)]' + \left[-\frac{\mathbb{J}^- \alpha_L^- + 2\alpha_C^-}{2x} + \Delta^- - (\mathbb{J}^- + 1) \right] y^-(x) = 0, \quad (4.71)$$

com

$$\Delta^+ = \frac{(\alpha_L^+)^2}{4} + \frac{(k^+)^2}{\varpi}, \quad \Delta^- = \frac{(\alpha_L^-)^2}{4} + \frac{(k^-)^2}{\varpi}, \quad (4.72)$$

$$\mathbb{J}^+ = 2|J_\alpha^+| + 1, \quad \mathbb{J}^- = 2|J_\alpha^-| + 1, \quad (4.73)$$

onde $\alpha_C^+ = a^+/\sqrt{\varpi}$, $\alpha_C^- = a^-/\sqrt{\varpi}$ e $\alpha_L^+ = b^+/\sqrt{\varpi^3}$, $\alpha_L^- = b^-/\sqrt{\varpi^3}$. As equações (4.70) e (4.71) são do tipo Heun biconfluente [33, 34]

$$xy'' + (1 + \bar{\alpha} - \bar{\beta}x - 2x^2)y' + \left\{ (\bar{\gamma} - \bar{\alpha} - 2)x - \frac{1}{2}[\bar{\delta} + (1 + \bar{\alpha})\bar{\beta}] \right\} y = 0, \quad (4.74)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem linear e homogênea, definida no plano complexo. A solução dessa equação é dada por

$$N(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}; x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_q(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta})}{(1 + \bar{\alpha})_q} \frac{x^q}{q!}. \quad (4.75)$$

As soluções gerais das Eqs. (4.62) e (4.63) são dadas por

$$\begin{aligned} f^+(x) &= c_1 x^{|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha_L^+}{2}x} N^+(2|J_\alpha^+|, \alpha_L^+, \Delta^+, 2\alpha_C^+, x) \\ &+ c_2 x^{-|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha_L^+}{2}x} N^+(-2|J_\alpha^+|, \alpha_L^+, \Delta^+, 2\alpha_C^+, x), \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} g^-(x) &= c_1 x^{|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha_L^-}{2}x} N^-(2|J_\alpha^-|, \alpha_L^-, \Delta^-, 2\alpha_C^-, x) \\ &+ c_2 x^{-|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha_L^-}{2}x} N^-(-2|J_\alpha^-|, \alpha_L^-, \Delta^-, 2\alpha_C^-, x). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Depois de inserirmos essa solução na Eq. (4.74), encontramos ($q \geq 0$)

$$\mathcal{A}_0 = 1, \quad (4.78)$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} [\bar{\delta} + \bar{\beta} (1 + \bar{\alpha})], \quad (4.79)$$

$$\mathcal{A}_{q+2} = \left\{ (q+1) \bar{\beta} + \frac{1}{2} [\bar{\delta} + \bar{\beta} (1 + \bar{\alpha})] \right\} \mathcal{A}_{q+1} - (q+1) (q+1 + \bar{\alpha}) [\bar{\gamma} - 2 - \bar{\alpha} - 2q] \mathcal{A}_q, \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} (1 + \bar{\alpha})_q &= \frac{\Gamma(q + \bar{\alpha} + 1)}{\Gamma(\bar{\alpha} + 1)}, \\ &= \begin{cases} (\bar{\alpha} + 1) (\bar{\alpha} + 2) \dots (\bar{\alpha} + q), & q = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & q = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.81)$$

A partir da relação de recorrência (4.80), a função $N(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}; x)$ se torna um polinômio de grau n se, e somente se, as duas seguintes soluções forem impostas

$$\bar{\gamma} - 2 - \bar{\alpha} = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.82)$$

$$\mathcal{A}_{n+1} = 0, \quad (4.83)$$

onde n é um inteiro positivo. Neste caso, o $(n+1)$ -ésimo coeficiente na expansão da série é um polinômio de grau n em $\bar{\delta}$. Quando $\bar{\delta}$ é uma raiz desse polinômio, o $(n+1)$ -ésimo coeficiente e coeficientes subsequentes são cancelados e a série é truncada, resultando em um polinômio de grau n para $N(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}; x)$. A condição (4.82) pode ser escrita como

$$\Delta^\pm - 2(1 + |J_\alpha^\pm|) = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.84)$$

da qual podemos extrair a seguinte expressão para as energias:

$$\begin{aligned} (E_{nm}^+)^2 - M^2 &= 2M\omega \left[n + \frac{1}{\alpha} \left| m - \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right| + 1 \right] \\ &\quad - 2M\omega \left\{ \frac{s}{\alpha} \left[m - \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right] + 1 \right\} \\ &\quad - \frac{\eta_L^2}{M^2\omega^2} (E_{nm}^+ + M)^2, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} (E_{nm}^-)^2 - M^2 &= 2M\omega \left[n + \frac{1}{\alpha} \left| m + s + \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right| + 1 \right] \\ &\quad - 2M\omega \left\{ \frac{s}{\alpha} \left[m + s + \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right] - 1 \right\} \\ &\quad - \frac{\eta_L^2}{M^2\omega^2} (E_{nm}^- - M)^2. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Nas energias (4.85) (4.86), podemos notar a ausência do parâmetro η_C . Como mencionado acima, esse parâmetro pode ser restaurado usando a condição (4.83). Assim, as energias serão expressas em termos de todos os parâmetros físicos envolvidos no problema, a saber, a constante de acoplamento η_C do potencial $1/r$, a constante de acoplamento do potencial linear η_L , a massa da partícula M e a frequência ω . Um fato que deve ficar claro nesta abordagem é que, *a priori*, estamos livres para escolher qualquer outro parâmetro para ser fixado. Aqui, fixamos o parâmetro η_C através da frequência angular ω . Deste modo, vamos passar a identificá-la como ω_{nm} . Antes usar a condição (4.83) para fixar o parâmetro η_C , vamos considerar a solução (4.75) até a segunda ordem em x da expansão, isto é,

$$N\left(\bar{\alpha}^\pm, \bar{\beta}^\pm, \bar{\gamma}^\pm, \bar{\delta}^\pm; x\right) = \frac{\mathcal{A}_0}{(1 + \bar{\alpha}^\pm)_0} + \frac{\mathcal{A}_1^\pm}{(1 + \bar{\alpha}^\pm)_1} x + \frac{\mathcal{A}_2^\pm}{(1 + \bar{\alpha}^\pm)_2} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (4.87)$$

com

$$\mathcal{A}_0 = 1, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{A}_1^\pm = \frac{1}{2} [2\alpha_C^\pm + \alpha_L^\pm \mathbb{J}^\pm], \quad (4.89)$$

$$\mathcal{A}_2^\pm = \alpha_L^\pm \left[\alpha_C^\pm + \frac{\alpha_L^\pm}{2} \mathbb{J}^\pm \right] + \left[\alpha_C^\pm + \frac{\alpha_L^\pm}{2} \mathbb{J}^\pm \right]^2, \quad (4.90)$$

\vdots

e

$$(1 + \bar{\alpha}^\pm)_0 = 1, \quad (4.91)$$

$$(1 + \bar{\alpha}^\pm)_1 = (2|J_\alpha^\pm| + 1), \quad (4.92)$$

$$(1 + \bar{\alpha}^\pm)_2 = (2|J_\alpha^\pm| + 1)(2|J_\alpha^\pm| + 2). \quad (4.93)$$

\vdots

A equação (4.87) pode ser escrita como

$$N\left(\bar{\alpha}^\pm, \bar{\beta}^\pm, \bar{\gamma}^\pm, \bar{\delta}^\pm; x\right) = 1 + \left[\frac{\alpha_L^\pm \mathbb{J}^\pm + 2\alpha_C^\pm}{2(2|J_\alpha^\pm| + 1)} \right] x + \left[\frac{\alpha_L^\pm \left(\alpha_C^\pm + \frac{\alpha_L^\pm}{2} \mathbb{J}^\pm \right) + \left(\alpha_C^\pm + \frac{\alpha_L^\pm}{2} \mathbb{J}^\pm \right)^2 - 2n\mathbb{J}_\pm}{(2|J_\alpha^\pm| + 1)(2|J_\alpha^\pm| + 2)} \right] x^2 + \dots \quad (4.94)$$

Começando pelo estado $n = 0$, temos que $\mathcal{A}_1^\pm = 0$ na Eq. (4.89). Esta condição fornece as seguintes frequências relacionadas ao estado fundamental do oscilador de Dirac:

$$\omega_{0m}^+ = -\frac{1}{2M} \frac{\eta_L}{\eta_C} \mathbb{J}^+, \quad (4.95a)$$

$$\omega_{0m}^- = -\frac{1}{2M} \frac{\eta_L}{\eta_C} \mathbb{J}^-, \quad (4.95b)$$

com a exigência de que $\eta_L/\eta_C < 0$. As respectivas energias destes estados são

$$E_{0m}^+ = \frac{4M \eta_C^2}{1 + (\mathbb{J}^+)^2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\mathbb{J}^+)^2}{4M^2 \eta_C^2} \check{C}_{0m}^+} \right], \quad (4.96a)$$

$$E_{0m}^- = \frac{4M \eta_C^2}{1 + (\mathbb{J}^-)^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\mathbb{J}^-)^2}{4M^2 \eta_C^2} \check{C}_{0m}^-} \right], \quad (4.96b)$$

onde

$$\check{C}_{0m}^+ = \left[\frac{\eta_L}{\eta_C} (sJ_\alpha^+ - |J_\alpha^+|) \mathbb{J}^+ - \frac{4M^2 \eta_C^2}{(\mathbb{J}^+)^2} + M^2 \right] \left[1 + \frac{(\mathbb{J}^+)^2}{4\eta_C^2} \right], \quad (4.97)$$

$$\check{C}_{0m}^- = \left[\frac{\eta_L}{\eta_C} (sJ_\alpha^- - |J_\alpha^-| - 2) \mathbb{J}^- - \frac{4M^2 \eta_C^2}{(\mathbb{J}^-)^2} + M^2 \right] \left[1 + \frac{(\mathbb{J}^-)^2}{4\eta_C^2} \right], \quad (4.98)$$

As energias (4.96) agora dependem de todos os parâmetros físicos envolvidos no problema. Nas figuras (4.1) e (4.2) plotamos o perfil das energias (4.96a) e (4.96b) como função do parâmetro α . Em ambos os plotes vemos claramente que os níveis de energia da partícula e anti-partícula pertencem ao mesmo espectro e, além disso, não existe nenhum canal que permite a criação espontânea de partícula e anti-partícula, pois nenhuma das linhas do espectro se cruzam.

4.3 Caso $\eta_L = 0$

Voltemos agora para as Eqs. (4.70) and (4.71). Quando assumimos $\eta_L = 0$, a dinâmica resultante é a de um oscilador de Dirac em duas dimensões interagindo com um potencial η_C/r . Nesse caso, as soluções ainda são dadas em termos das funções de Heun,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^+(x) &= \tilde{c}_1 x^{|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tilde{N}^+(2|J_\alpha^+|, 0, \Delta^+, 2\alpha_C^+, x) \\ &+ \tilde{c}_2 x^{-|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tilde{N}^+(-2|J_\alpha^+|, 0, \Delta^+, 2\alpha_C^+, x), \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}^-(x) &= \tilde{c}_1 x^{|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tilde{N}^-(2|J_\alpha^-|, 0, \Delta^-, 2\alpha_C^-, x) \\ &+ \tilde{c}_2 x^{-|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tilde{N}^-(-2|J_\alpha^-|, 0, \Delta^-, 2\alpha_C^-, x). \end{aligned} \quad (4.100)$$

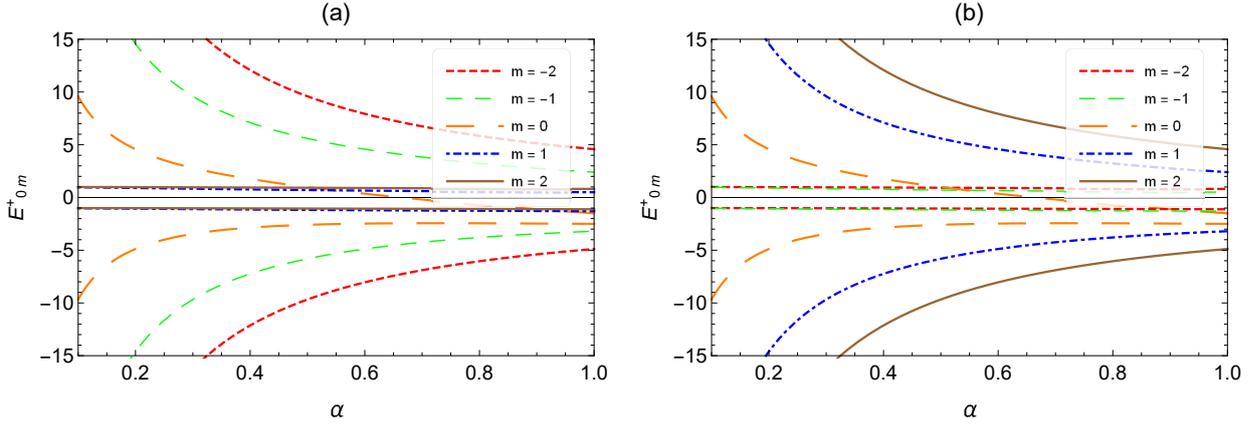


Figura 4.1: Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.96a)) como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ enquanto na Fig. para $s = -1$. Em ambas, assumimos que para $M = 1$, $\eta_C = 1$ e $\eta_L = 1$.

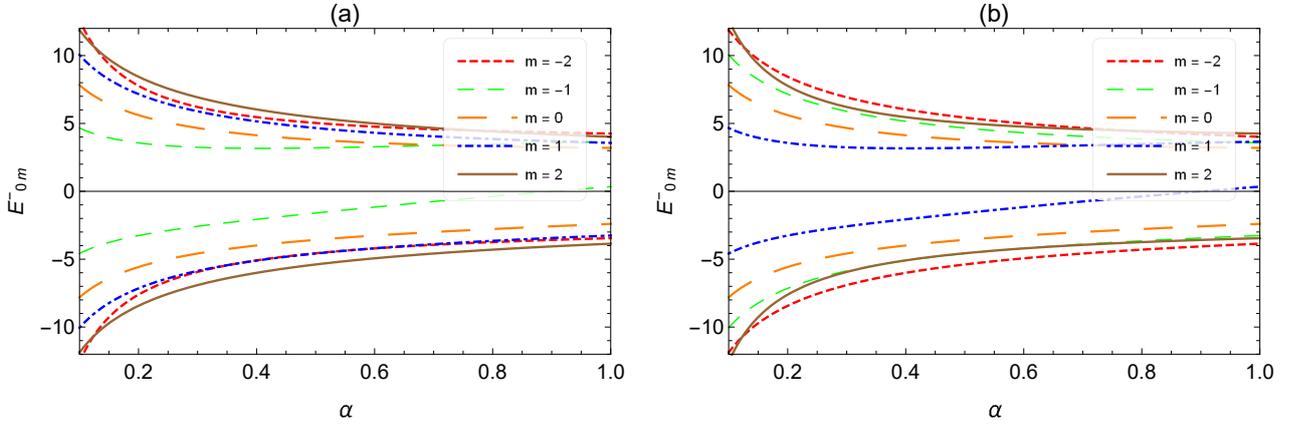


Figura 4.2: Perfil das energias no limite exato de simetria de pseudo-spin (Eq. (4.96b)) como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ enquanto na Fig. para $s = -1$. Em ambas, assumimos que para $M = 1$, $\eta_C = 1$ e $\eta_L = 1$.

Para este caso particular, usando a condição (4.82), encontramos as energias

$$(\mathcal{E}_{nm}^+)^2 - M^2 = 2M(n + |J_\alpha^+|) \tilde{\omega}_{nm}^+ - 2MsJ_\alpha^+ \tilde{\omega}_{nm}^+, \quad (4.101)$$

$$(\mathcal{E}_{nm}^-)^2 - M^2 = 2M(n + |J_\alpha^-| + 2) \tilde{\omega}_{nm}^- - 2MsJ_\alpha^- \tilde{\omega}_{nm}^-. \quad (4.102)$$

Para a condição (4.83), consideramos novamente $\mathcal{A}_{n+1}^\pm = 0$ para $n = 0$, e resolvemos para $\tilde{\omega}_{0m}^\pm$. Com muito menos esforço, podemos verificar diretamente nas Eqs. (4.95a) e (4.95b) que fazendo $\eta_L = 0$, obtemos, respectivamente, $\tilde{\omega}_{0m}^+ = \tilde{\omega}_{0m}^- = 0$ e, neste caso, as energias (4.101) e (4.102) resultam em $\mathcal{E}_{0m}^\pm = \pm M$. Porém, como mencionado acima, estamos estudamos a dinâmica para partículas com $\mathcal{E}_{0m}^\pm \neq \pm M$, e portanto, descartamos tais resultados. Por esse

motivo, precisamos resolver $\mathcal{A}_{n+1}^\pm = 0$ para $n = 1$ (o primeiro estado excitado da partícula) e então encontramos $\tilde{\omega}_{1m}^\pm$. Temos

$$\tilde{\omega}_{1m}^+ = \frac{2\eta_C^2 (\mathcal{E}_{1m}^+ + M)^2}{M \mathbb{J}^+}, \quad (4.103)$$

$$\tilde{\omega}_{1m}^- = \frac{2\eta_C^2 (\mathcal{E}_{1m}^- - M)^2}{M \mathbb{J}^-}. \quad (4.104)$$

Substituindo (4.103)-(4.104) em (4.101)-(4.102) e resolvendo estas equações para \mathcal{E}_{1m}^\pm , encontramos

$$[\mathcal{E}_{1m}^+]_{(1)} = \left(\frac{1 + \frac{2\eta_C^2}{\mathbb{J}^+} (1 + \mathbb{J}^+ - 2sJ_\alpha^+)}{1 - \frac{2\eta_C^2}{\mathbb{J}^+} (1 + \mathbb{J}^+ - 2sJ_\alpha^+)} \right) M \text{ (partícula)}, \quad (4.105a)$$

$$[\mathcal{E}_{1m}^+]_{(2)} = -M \text{ (antipartícula)}. \quad (4.105b)$$

$$[\mathcal{E}_{1m}^-]_{(1)} = M \text{ (partícula)}, \quad (4.106a)$$

$$[\mathcal{E}_{1m}^-]_{(2)} = - \left(\frac{1 + \frac{2\eta_C^2}{\mathbb{J}^-} (\mathbb{J}^- - 2sJ_\alpha^- + 5)}{1 - \frac{2\eta_C^2}{\mathbb{J}^-} (\mathbb{J}^- - 2sJ_\alpha^- + 5)} \right) M \text{ (antipartícula)}, \quad (4.106b)$$

onde os índices (1) e (2) referem-se às energias da partícula e antipartícula, respectivamente. Assim como para \mathcal{E}_{0m}^\pm , as energias $[\mathcal{E}_{1m}^+]_{(2)}$ e $[\mathcal{E}_{1m}^-]_{(1)}$ não são soluções aceitáveis. As energias

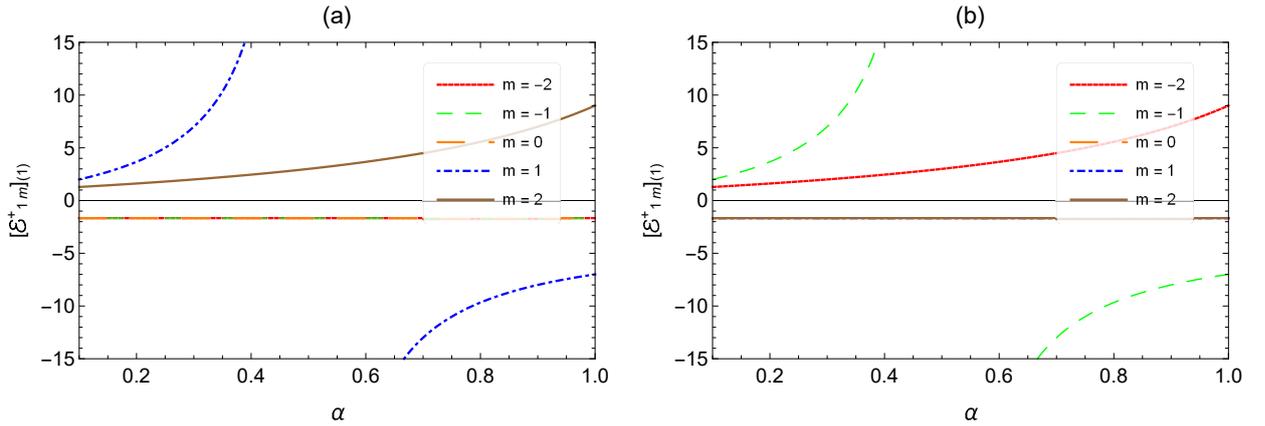


Figura 4.3: Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.105a)) com $\eta_L = 0$ como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos $M = 1$ e $\eta_C = 1$.

(4.105a) e (4.106b) estão esquematizadas nas Figs. 4.3 e 4.4, respectivamente. Além das

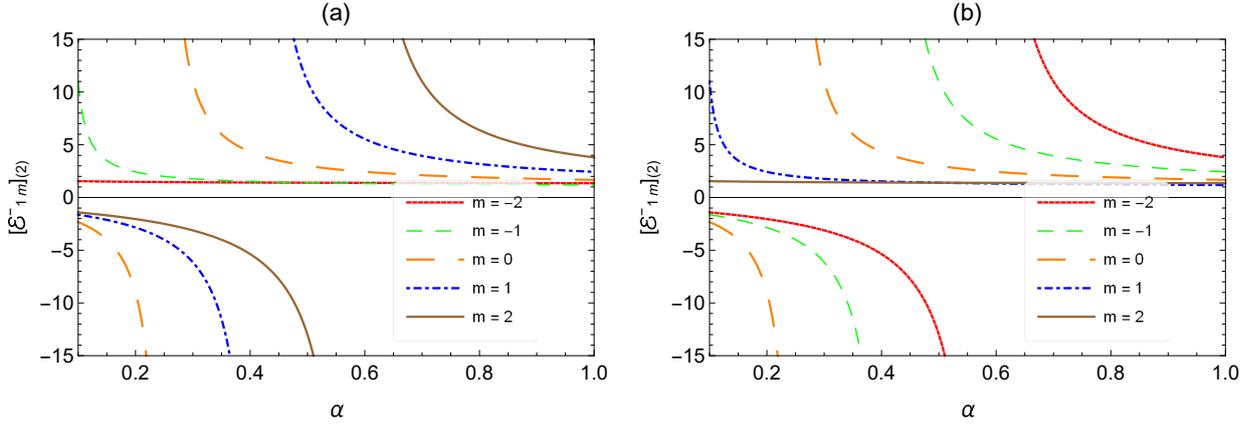


Figura 4.4: Perfil das energias no limite exato de simetria de pseudo-spin (Eq. (4.106b)) como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos que para $M = 1$, $\eta_C = 1$ e $\eta_L = 1$.

características presentes nas Figs. (4.1) e (4.2), podemos observar nas Figs. 4.3(a) (quando o elemento de spin é igual a 1) a presença de degenerescência correspondente aos valores de $m = -2, -1, 0, 2$ e, na Fig. 4.3(b) (quando o elemento de spin é igual a -1), a degenerescência ocorre para $m = -2, 0, 1, 2$.

4.4 Caso $\eta_C = 0$

Para o caso $\eta_C = 0$, o sistema agora consiste de um oscilador de Dirac interagindo com um potencial linear, $\eta_L r$. Neste caso, as soluções ainda são dados em termos da função Heun,

$$\begin{aligned} \bar{f}^+(x) &= \bar{c}_1 x^{|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha^+}{2}x} \bar{N}^+ (2|J_\alpha^+|, \alpha_L^+, \Delta^+, 0, x) \\ &+ \bar{c}_2 x^{-|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha^+}{2}x} \bar{N}^+ (-2|J_\alpha^+|, \alpha_L^+, \Delta^+, 0, x), \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}^-(x) &= \bar{c}_1 x^{|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha^-}{2}x} \bar{N}^- (2|J_\alpha^-|, \alpha_L^-, \Delta^-, 0, x) \\ &+ \bar{c}_2 x^{-|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{\alpha^-}{2}x} \bar{N}^- (-2|J_\alpha^-|, \alpha_L^-, \Delta^-, 0, x), \end{aligned} \quad (4.108)$$

e as energias são dadas por

$$(\bar{E}_{nm}^+)^2 - M^2 = 2M\bar{\omega} (n + |J_\alpha^+| - sJ_\alpha^+ + 1) - \frac{\eta_L^2}{M^2\bar{\omega}^2} (\bar{E}_{nm}^+ + M)^2, \quad (4.109)$$

$$(\bar{E}_{nm}^-)^2 - M^2 = 2M\bar{\omega} (n + |J_\alpha^-| - sJ_\alpha^- + 2) - \frac{\eta_L^2}{M^2\bar{\omega}^2} (\bar{E}_{nm}^- - M)^2. \quad (4.110)$$

Note que as energias (4.109)-(4.110) são idênticas às dadas em Eqs. (4.85) and (4.86). Contudo, a frequência $\bar{\omega}$ não é a mesma. Da condição (4.83), consideramos novamente $\mathcal{A}_{n+1}^{\pm} = 0$ para $n = 0$, e resolvemos para $\bar{\omega}_{0m}^{\pm}$. Para este estado em particular, verificamos que não é possível extrair uma solução fisicamente aceitável para $\bar{\omega}_{0m}^{\pm}$. Conseqüentemente este não é um estado acessível para a partícula. Por causa disso, precisamos analisar $\mathcal{A}_{n+1}^{\pm} = 0$ para $n = 1$. Obtemos as frequências

$$\bar{\omega}_{1m}^+ = \frac{1}{M} \left[\eta_L^2 \left(1 + \frac{1}{2} \mathbb{J}^+ \right) (\bar{E}_{1m}^+ + M)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.111)$$

$$\bar{\omega}_{1m}^- = \frac{1}{M} \left[\eta_L^2 \left(1 + \frac{1}{2} \mathbb{J}^- \right) (\bar{E}_{1m}^- - M)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.112)$$

e as correspondentes energias são dadas por

$$\begin{aligned} (\bar{E}_{1m}^+)^2 - M^2 &= 2M\bar{\omega}_{1m}^+ \left[n + \frac{1}{\alpha} \left| m - \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right| + 1 \right] \\ &\quad - 2M\bar{\omega}_{1m}^+ \left\{ \frac{s}{\alpha} \left[m - \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right] + 1 \right\} - \frac{\eta_L^2}{M^2 (\bar{\omega}_{1m}^+)^2} (\bar{E}_{1m}^+ + M)^2, \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} (\bar{E}_{1m}^-)^2 - M^2 &= 2M\bar{\omega}_{1m}^+ \left[n + \frac{1}{\alpha} \left| m + s + \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right| + 1 \right] \\ &\quad - 2M\bar{\omega}_{1m}^+ \left\{ \frac{s}{\alpha} \left[m + s + \frac{s}{2}(1 - \alpha) \right] - 1 \right\} - \frac{\eta_L^2}{M^2 (\bar{\omega}_{1m}^+)^2} (\bar{E}_{1m}^- - M)^2, \end{aligned} \quad (4.114)$$

com $\bar{\omega}_{1m}^{\pm}$ dadas nas Eqs. (4.111) e (4.112). Para este caso particular, tanto a Eq. (4.113) quanto a Eq. (4.114) apresentam quatro autovalores de energia. Contudo, apenas dois deles são fisicamente aceitáveis. Os perfis dessas duas energias são ilustrados (numericamente) nas Figs. 4.5 e 4.6, respectivamente. Assim como no caso geral (Figs. (4.1) e (4.2)) podemos ver nas Figs. 4.5 e 4.6 que os níveis de energia da partícula e anti-partícula pertencem ao mesmo espectro e não existe mecanismo de criação espontânea dessas partículas.

4.5 Potencial $\eta_L r = \eta_C / r = 0$

Nesta seção, discutimos o caso em que $a_{\pm} = b_{\pm} = 0$ (ou equivalentemente $\alpha_C^{\pm} = \alpha_L^{\pm} = 0$) nas Eqs. (4.70) e (4.71). Nesse caso, não teremos no hamiltoniano de Dirac o termo de Zeeman, que nos daria a contribuição de δ para a função. Então, com a ausência da função δ , é sabido que apenas as soluções regulares contribuem para as funções de onda de estado ligado. A imposições

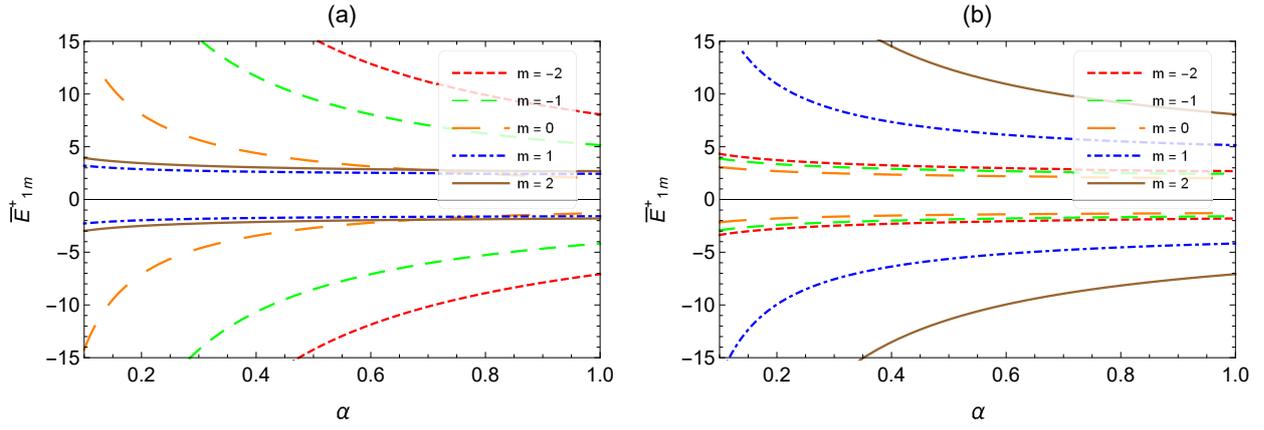


Figura 4.5: Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.113)) com $\eta_C = 0$ como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos $M = 1$ e $\eta_L = 1$.

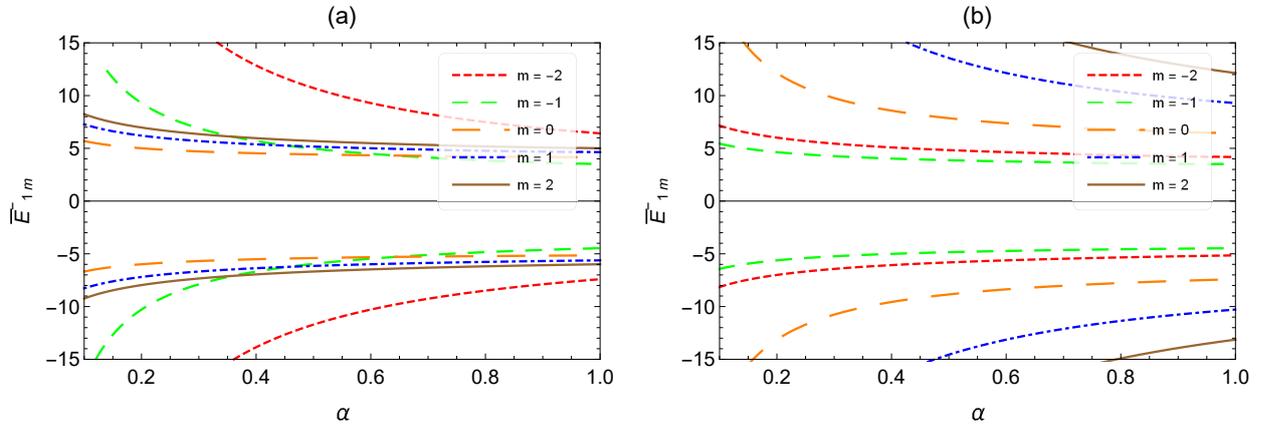


Figura 4.6: Perfil das energias no limite exato de simetria de spin (Eq. (4.114)) com $\eta_C = 0$ como função do parâmetro α . Na Fig. (a) plotamos para $s = 1$ e na Fig. (b), $s = -1$. Em ambas, assumimos $M = 1$ e $\eta_L = 1$.

acima nos levam diretamente à equação de Kummer

$$(F^\pm)''(x) + \left(\frac{2|J_\alpha^\pm| + 1}{x} - 2x \right) (F^\pm)'(x) + [\Delta^\pm - (2|J_\alpha^\pm| + 2)] (F^\pm)(x) = 0, \quad (4.115)$$

cujas as soluções são

$$f^+(x) = x^{|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} F^+(x), \quad x = \sqrt{\omega}r, \quad (4.116)$$

$$g^-(x) = x^{|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} F^-(x), \quad x = \sqrt{\omega}r, \quad (4.117)$$

onde

$$\begin{aligned}
F^+(x) &= a_n M \left(\frac{1}{2} + \frac{|J_\alpha^+|}{2} - \frac{\Delta^+}{4}, 1 + |J_\alpha^+|, x^2 \right) \\
&\quad + b_n x^{-2|J_\alpha^+|} M \left(\frac{1}{2} - \frac{|J_\alpha^+|}{2} - \frac{\Delta^+}{4}, 1 - |J_\alpha^+|, x^2 \right), \tag{4.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^-(x) &= a_n M \left(\frac{1}{2} + \frac{|J_\alpha^-|}{2} - \frac{\Delta^-}{4}, 1 + |J_\alpha^-|, x^2 \right) \\
&\quad + b_n x^{-2|J_\alpha^-|} M \left(\frac{1}{2} - \frac{|J_\alpha^-|}{2} - \frac{\Delta^-}{4}, 1 - |J_\alpha^-|, x^2 \right). \tag{4.119}
\end{aligned}$$

Já que $V(r) = S(r) = 0$, as simetrias de spin e pseudospin não estão mais presentes, e os símbolos (\pm) representam apenas as funções $f^+(x)$, $g^-(x)$ (componentes de ψ com energias positivas e negativas, respectivamente) da partícula. Uma condição necessária para que $F_\pm(x)$ seja de quadrado integrável é que no $\lim_{x \rightarrow \infty} F^\pm(x) = 0$, o que é satisfeito para

$$\frac{1}{2} + \frac{|J_\alpha^\pm|}{2} - \frac{\check{\Delta}^\pm}{4} = -n, \tag{4.120}$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, onde $\check{\Delta}^\pm = \left(\check{k}^\pm\right)^2 / M\omega$ e $\left(\check{k}^\pm\right)^2 = (\epsilon_{nm}^\pm)^2 - M^2 + 2M\omega (sJ_\alpha^\pm \pm 1)$. Dessa maneira, os autovalores da Eq. (4.115) são dados por

$$(\epsilon_{nm}^+)^2 - M^2 = M\omega [2n + \mathbb{J}_+ + 1] - 2M\omega (sJ_\alpha^+ + 1), \tag{4.121a}$$

$$(\epsilon_{nm}^-)^2 - M^2 = M\omega [2n + \mathbb{J}_- + 1] - 2M\omega (sJ_\alpha^- - 1), \tag{4.121b}$$

e as funções de onda de estado ligado não-normalizáveis são

$$f^+(x) = x^{|J_\alpha^+|} e^{-\frac{1}{2}x^2} M(-n, 1 + |J_\alpha^+|, x^2), \tag{4.122}$$

$$g^-(x) = x^{|J_\alpha^-|} e^{-\frac{1}{2}x^2} M(-n, 1 + |J_\alpha^-|, x^2). \tag{4.123}$$

O perfil das energias (4.121a) e (4.121b) são plotados nas Figs. 4.7 e 4.8, respectivamente. Na Fig. 4.7(a), temos uma degenerescência correspondente a $m = 1$ e $m = 2$ para $s = 1$ e na Fig. 4.7(b) temos degenerescência para $m = -2$ e $m = -1$ quando $s = -1$. Por outro lado, na Fig. 4.8(a), apenas $m = -2$ é não-degenerado e na Fig. 4.8(b), apenas $m = 2$.

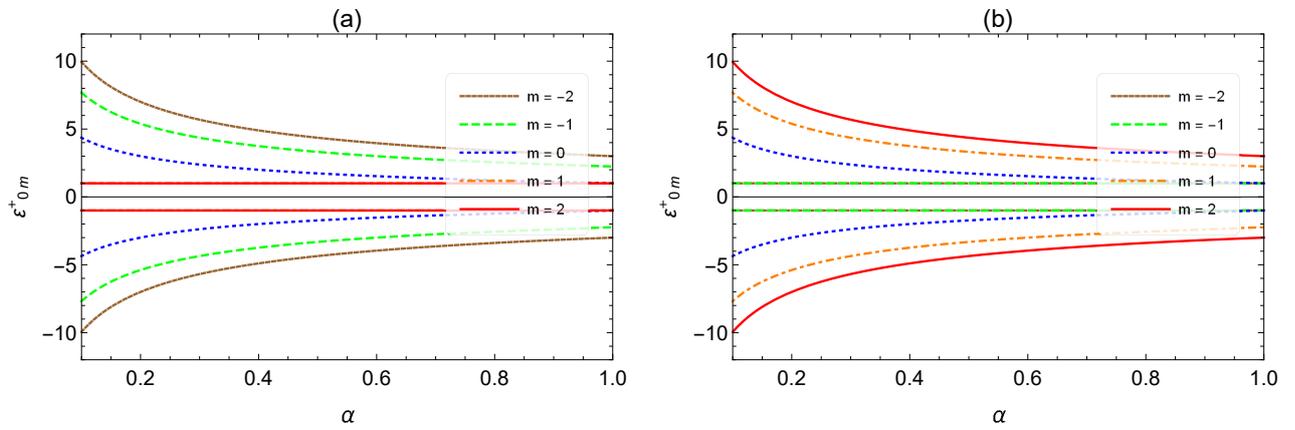


Figura 4.7: Energia versus α para o caso particular quando $\eta_L = \eta_C = 0$ (Eq. (4.121a)) para $s = 1$ (Fig. (a)) e $s = -1$ (Fig. (b)).

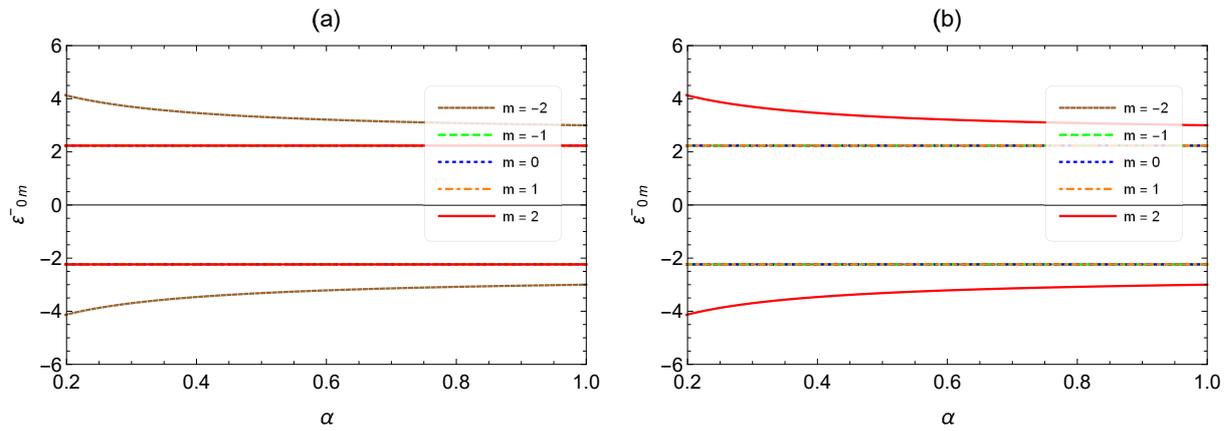


Figura 4.8: Energia versus α para o caso particular quando $\eta_L = \eta_C = 0$ (Eq. (4.121b)) para $s = 1$ (Fig. (a)) e $s = -1$ (Fig. (b)).

Neste trabalho analisamos a equação de Dirac com acoplamentos escalar e vetorial descrevendo a dinâmica quântica de um oscilador bidimensional de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica. Consideramos potenciais escalar e vetorial cilíndricamente simétricos do tipo Cornell. Utilizamos um ansatz apropriado e obtivemos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Investigamos esse sistema e verificamos que ele admite soluções particulares fisicamente aceitáveis, isto, soluções de estados ligados, apenas no limite exato de simetria de pseudospin, $\Sigma = 0$ e $E = M$. Também estudamos a equação de Dirac na sua forma quadrática, a qual descarta da sua solução o modo zero. A equação de segunda ordem resultante foi também resolvida levando em conta os limites exatos de simetria de spin e pseudo spin. Usando o mesmo ansatz da caso anterior, verificamos que a equação radial é do tipo Heun biconfluente. Estudamos a solução em série dessa equação bem como seu comportamento assintótico no infinito e na origem e verificamos que foram necessárias duas condições para que tal série se tornasse um polinômio. Dessas condições, foi possível extrair a expressão para os autovalores de energia do sistema nos limites exatos das simetrias de spin e pseudo-spin. Por causa das complicações apresentadas na tentativa de obter uma expressão que caracterizasse o espectro de energia do sistema a partir das condições que levaram ao truncamento da série de Heun, analisamos apenas o estado fundamental, $n = 0$. Plotamos os gráficos da energia em função do parâmetro α para $s = 1$ e $s = -1$, e constatamos que partícula e anti-partícula pertencem ao mesmo espectro

e, além disso, não existe nenhum canal que permite a criação dessas partículas. Também foram analisados alguns casos especiais para este sistema. Primeiro foi analisado o caso em que em que o potencial linear é nulo, $\eta_L = 0$., obtivemos o espectro e plotamos como função do parâmetro α para $s = 1$ e $s = -1$. Para esse caso, observamos alguns valores de energia são degenerados e também verificamos que não existe nenhum mecanismo de criação de partículas e anti-partículas. No segundo caso especial investigado consideramos $\eta_C = 0$. Para este caso, o espectro de energia encontrado foi semelhante ao caso geral, não apresentou degenerescências e nenhum mecanismo de criação de partículas e anti-partículas. No último caso especial estudado consideramos $\eta_L = \eta_C = 0$. Para essa situação, os parâmetros que levavam à equação de Heun são perdidos e a equação radial resultante foi uma equação diferencial do tipo Kummer, cuja solução foi expressa em termos da função hipergeométrica confluyente. Obtivemos as soluções dessa equação bem como o espectro de energia. Para este caso, observamos no plote das energias em função do parâmetro α a presença de degenerescências e também não foi verificado nenhum mecanismo de criação de partículas. Como perspectivas futuras, pretendemos estudar a partir das energias obtidas neste trabalho o efeito Hall quântico inteiro e também incluir o termo de Pauli na equação de Dirac para estudar as possíveis implicações físicas de um campo elétrico variável e o momento magnético anômalo no oscilador de Dirac.

Referências Bibliográficas

- [1] J. J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics* (Addison Wesley, 1967).
- [2] C. Itzykson e J. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Books on Physics (Dover Publications, 2012).
- [3] J. Neto. *Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinores*. Matemática para físicos com aplicações (Livraria da Física, 2010).
- [4] M. Moshinsky e A. Szczepaniak. The Dirac oscillator. *J. Phys. A* **22**, 17, L817– (1989). doi:10.1088/0305-4470/22/17/002.
- [5] J. Rohlf. *Modern Physics from alpha to Z0* (Wiley, 1994).
- [6] B. Cohen. *Concepts of Nuclear Physics*. McGraw Hill series in fundamentals of physics (McGraw-Hill Book Company, 1974).
- [7] M. G. Mayer. On Closed Shells in Nuclei. *Phys. Rev.* **74**, 235–239 (1948). doi:10.1103/PhysRev.74.235.
- [8] O. Haxel, J. H. D. Jensen e H. E. Suess. On the "Magic Numbers" in Nuclear Structure. *Phys. Rev.* **75**, 1766–1766 (1949). doi:10.1103/PhysRev.75.1766.2.
- [9] K. Hecht e A. Adler. Generalized seniority for favored $J \neq 0$ pairs in mixed configurations. *Nucl. Phys. A* **137**, 129 (1969). doi:http://dx.doi.org/10.1016/0375-9474(69)90077-3.

- [10] A. Arima, M. Harvey e K. Shimizu. Pseudo $\{LS\}$ coupling and pseudo $\{SU3\}$ coupling schemes. *Phys. Lett. B* **30**, 517 (1969). doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(69\)90443-2](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(69)90443-2).
- [11] J. N. Ginocchio. Pseudospin as a Relativistic Symmetry. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 436 (1997). doi:[10.1103/PhysRevLett.78.436](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.436).
- [12] J. N. Ginocchio. Relativistic symmetries in nuclei and hadrons. *Phys. Rep.* **414**, 165 (2005). doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2005.04.003>.
- [13] P. R. Page, T. Goldman e J. N. Ginocchio. Relativistic Symmetry Suppresses Quark Spin-Orbit Splitting. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2, 204 (2001). doi:[10.1103/PhysRevLett.86.204](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.204).
- [14] J. N. Ginocchio. A relativistic symmetry in nuclei. *Phys. Rep.* **315**, 1-3, 231 (1999). doi:[10.1016/S0370-1573\(99\)00021-6](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00021-6).
- [15] T. W. B. Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **9**, 8, 1387 (1976).
- [16] D. Perlov e A. Vilenkin. *Cosmology for the Curious*. Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer International Publishing, 2017).
- [17] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [18] M. B. Hindmarsh e T. W. B. Kibble. Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics* **58**, 5, 477 (1995).
- [19] P. Strange. *Relativistic Quantum Mechanics: With Applications in Condensed Matter and Atomic Physics* (Cambridge University Press, 1998).
- [20] F. Gross. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Wiley Science Series (Wiley, 2008).
- [21] L. Ryder. *Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).
- [22] C. Koke, C. Noh e D. G. Angelakis. Dirac equation in 2-dimensional curved spacetime, particle creation, and coupled waveguide arrays. *Annals of Physics* **374**, 162 – 178 (2016). doi:<https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.08.013>.

- [23] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley, United States, 2003). [arXiv:gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019).
- [24] D. D. Sokolov e A. A. Starobinski. The structure of the curvature tensor at conical singularities. *Sov. Phys. Dokl.* **22**, 312 (1977).
- [25] M. Pollock. On the Dirac equation in curved space-time. *Acta. Phys. Pol. B* **41**, 8, 1827 (2010).
- [26] K. Bakke, L. R. Ribeiro, C. Furtado e J. R. Nascimento. Landau quantization for a neutral particle in the presence of topological defects. *Phys. Rev. D* **79**, 2, 024008– (2009). doi:10.1103/PhysRevD.79.024008.
- [27] H. J. de Vega. Fermions and vortex solutions in Abelian and non-Abelian gauge theories. *Phys. Rev. D* **18**, 8, 2932–2944 (1978). doi:10.1103/PhysRevD.18.2932.
- [28] R. H. Brandenberger, A.-C. Davis e A. M. Matheson. Callan-Rubakov effect for strings. *Nucl. Phys. B* **307**, 4, 909–923 (1988). doi:10.1016/0550-3213(88)90112-5.
- [29] M. G. Alford e F. Wilczek. Aharonov-Bohm interaction of cosmic strings with matter. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 10, 1071–1074 (1989). doi:10.1103/PhysRevLett.62.1071.
- [30] H. Akcay. The Dirac oscillator with a Coulomb-like tensor potential. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 24, 6427 (2007).
- [31] L. B. Castro. Relating pseudospin and spin symmetries through chiral transformation with tensor interaction. *Phys. Rev. C* **86**, 5, 052201 (2012). doi:10.1103/PhysRevC.86.052201.
- [32] M. Abramowitz e I. A. Stegun, editores. *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover Publications, 1972).
- [33] A. Ronveaux e F. Arscott. *Heun's Differential Equations*. Oxford science publications (Oxford University Press, 1995).
- [34] G. K. (auth.). *Second order differential equations: Special functions and their classification* (Springer-Verlag New York, 2010), 1 edition.