

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

GILSON RICARDO DE BRITO CARDOSO

**GENERALIZAÇÕES DE SEQUÊNCIAS MATEMÁTICAS NO ENSINO
MÉDIO: UM ESTUDO TEÓRICO-PRÁTICO DAS RECORRÊNCIAS
LINEARES E DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA**

São Luís - MA
2019

GILSON RICARDO DE BRITO CARDOSO

**GENERALIZAÇÕES DE SEQUÊNCIAS MATEMÁTICAS NO ENSINO
MÉDIO:UM ESTUDO TEÓRICO-PRÁTICO DAS RECORRÊNCIAS
LINEARES E DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao PROFMAT-UFMA,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

Coorientador: Prof. Me. Anselmo Baganha Ra-
poso Júnior

São Luís - MA
2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Cardoso, Gilson Ricardo de Brito.

Generalizações de sequências matemáticas no ensino médio: um estudo teórico-prático das recorrências lineares e do princípio de indução matemática / Gilson Ricardo de Brito Cardoso. - 2019.

65 f.

Coorientador(a): Anselmo Baganha Raposo Júnior.

Orientador(a): Antonio José da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, Universidade Federal do Maranhão, 2019.

1. Álgebra. 2. Indução Matemática. 3. Recorrências.
4. Somas Telescópicas. I. Raposo Júnior, Anselmo Baganha. II. Silva, Antonio José da. III. Título.

GILSON RICARDO DE BRITO CARDOSO

**GENERALIZAÇÕES DE SEQUÊNCIAS MATEMÁTICAS NO ENSINO
MÉDIO: UM ESTUDO TEÓRICO-PRÁTICO DAS RECORRÊNCIAS
LINEARES E DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao PROFMAT-UFMA,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

São Luís, 20 de Fevereiro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior (Coorientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

“A mente que se abre a uma nova
ideia jamais voltará ao seu tama-
nho original.”.

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço infinitamente a Deus, por ser meu guia em todos os momentos da vida e por ter me preparado para a batalha deste mestrado, mesmo sem que eu soubesse. Ele, sem dúvida, foi quem me segurou de pé, quando por diversas vezes pensei que não seria possível concluir.

Às pessoas que sempre acreditaram nos meus sonhos, junto comigo, em especial Christianno Araújo, Jordel Oliveira Silva, Karla Teixeira Silva Cardoso, além é claro, da minha família em nome da minha querida mãe Josina de Brito Cardoso e minha irmã Zilda de Brito Cardoso.

Aos que me apoiaram nessa trajetória de quase quatro anos, sobretudo à minha companheira Àurea Rodrigues Araújo.

Aos colegas e, amigos de turma, que, pela união, e solidariedade, permitiram que toda a dificuldade do percurso fosse minimizada.

Ao PROFMAT-UFMA por promover esse valoroso ambiente de aprendizado, possibilitando-nos a inserção num universo intelectual de extrema significância, tanto para os mestrandos quanto para a Educação Matemática do Ensino Básico, pois além de contribuir imensamente com nossa formação, mostra caminhos para uma melhor conexão entre professor-aluno.

Ao meu orientador Antônio José da Silva, pelos melhores direcionamentos e condução deste trabalho, fundamentais para a efetividade do mesmo.

Ao Professor Anselmo B. Raposo Júnior, minha imensa gratidão, meu respeito, minha admiração, pela sua presteza, e por sempre ter sido um exemplo de profissional, motivando-nos à busca da excelência enquanto professores.

Resumo

Esse trabalho versa a respeito das Recorrências de 1^a ordem, como instrumentos úteis, e viáveis de serem aplicados no Ensino Básico, a partir do 1^o ano do Ensino Médio. A teoria contemplará alguns conceitos algébricos, pois estes tem a capacidade de proporcionar ao aluno a prática e o incremento do seu potencial de generalização e abstração, além de compor um utensílio eficaz na resolução de problemas matemáticos. Essa abordagem se justifica pois a maioria dos alunos, ao iniciar o Ensino Médio, tem um conhecimento muito limitado em relação a álgebra, pois muitos não conseguem entender, de fato, o sentido das variáveis, ou seja, tem grande ojeriza às “fórmulas prontas”, pré-estabelecidas pelos livros didáticos. As definições dos conceitos, e procedimentos, possibilitaria a construção de estratégias, formulação de conjecturas, bem como o desenvolvimento dos conteúdos atitudinais por parte do aluno, permitindo ao mesmo, através, por exemplo, das Somas Telescópicas a construção e apreensão das generalizações, fórmulas fechadas e, através de demonstrações matemáticas, promovidas pelo Princípio de Indução Matemática, obteríamos sua confirmação, ou não. Tal contexto é imprescindível para uma aprendizagem significativa e autônoma, fundamentais para a resolução de situações-problemas diversos, sejam eles elementares ou olímpicos.

Palavras-chave: Recorrências. Álgebra. Somas Telescópicas. Indução Matemática.

Abstract

This work deals with the Recurrences of 1st order, as useful tools, and feasible to be applied in Basic Education, from the 1st year of High School. The theory will contemplate some algebraic concepts, since these have the capacity to provide the student with the practice and the increase of its potential of generalization and abstraction, as well as to compose an effective tool in solving mathematical problems. This approach is justified because most students, when starting high school, have a very limited knowledge regarding algebra, since many can not really understand the meaning of the variables, that is, it has great dislike for "ready-made formulas", pre-established by textbooks. The definitions of concepts and procedures would allow the construction of strategies, formulation of conjectures, as well as the development of attitudinal contents on the part of the student, allowing for the same, through, for example, the Telescopic Sums the construction and apprehension of generalizations, closed formulas and through mathematical demonstrations promoted by the Principle of Mathematical Induction, we would obtain their confirmation or not. Such context is essential for a meaningful and autonomous learning, fundamental for the resolution of diverse situations - problems, be they elementary or Olympic.

Keywords: Recurrent Sequences, Algebra, Telescopic Sums, Induction.

Lista de Figuras

1	Figuras pentagonais	22
2	Triângulos com palitos de fósforo	26
3	Sequência de figuras construídas por Felipe	28
4	Plano α dividido pela reta r_1	29
5	Plano α dividido pelas retas paralelas coincidentes r_1 e r_2	29
6	Plano α dividido pelas retas paralelas distintas r_1 e r_2	29
7	Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 e r_2	30
8	Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 , r_2 e r_3	30
9	Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 , r_2 , r_3 e r_4	31
10	Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 , r_2 , r_3 , r_4 e r_5	31
11	Movimentação dos n discos para outra haste.	33
12	Torre de Hanói com 1 disco.	34
13	Torre de Hanói com 2 discos.	34
14	Torre de Hanói com 3 discos.	34

Sumário

Lista de Figuras	vii
Sumário	viii
1 Introdução	x
2 Investigações Matemáticas	1
2.1 Experimentos	1
2.2 Conjecturas por analogia	2
2.3 Investigações numéricas	2
3 O Princípio de Indução Matemática	5
3.1 Axiomas de Dedekind-Peano	5
3.2 O Teorema da Recursividade	7
3.3 Problemas elementares clássicos	11
3.3.1 Demonstrações de identidades	11
3.3.2 Problemas de divisibilidade	14
3.3.3 Desigualdades	15
4 Recorrências	18
4.1 Recorrências lineares	20
4.2 Problemas olímpicos	26
4.3 Problemas clássicos	28
4.3.1 Pizza Steiner	28
4.3.2 As torres de Hanói	32
5 Somas Telescópicas	35
6 Provando as Generalizações das Sequências	43
6.1 Problemas de demonstração	43
7 Considerações Finais	47

Capítulo 1

Introdução

A Aprendizagem Matemática, no que se refere aos seus blocos de conteúdo Números e Operações; Álgebra e Funções; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação pode proporcionar, efetivamente, uma construção de competências, à medida que estabeleça uma sequência progressiva, introduzindo conceitos a partir de questões, de um caráter elementar, mas que trazem consigo as bases para o aprender a aprender, possibilitando aos indivíduos a prática, assegurando, com isso, a sedimentação de experiências concretas, tornando-os aptos a aprender a fazer e, conseqüentemente, serem capazes de interiorizar os novos conceitos, compreendendo-os. Nessa perspectiva, o aluno passa a aplicar tais conhecimentos e, portanto, desenvolve uma postura positiva diante de problemas, qualificando a sua autonomia, tão necessária à formação do cidadão. De acordo com os PCN's.

O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes. Também apontar em que medida os conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos. PCN's (Brasil, 1998, p. 49).

Percebe-se que as aplicações dos conceitos matemáticos têm se tornado cada vez mais frequentes e diversificadas. Essa incidência e variedade fica ainda mais perceptível com o crescente advento de “competições” como a Olimpíada de Matemática dos Institutos Federais “OMIFs”, em âmbito nacional, e a Olimpíada Piauiense de Matemática “O π M”, numa dinâmica regional. Ambas foram criadas no ano de 2018, sob a mesma perspectiva da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas “OBMEP”, buscando, fundamentalmente, despertar o prazer pela matemática por meio da inserção de situações-problema e desafios matemáticos, estimulando o interesse tanto de alunos quanto de professores. Suas questões não buscam, em geral, um conhecimento prévio apurado, nem tampouco uma complexidade incompatível às faixas etárias dos envolvidos.

O grande propósito dos eventos supracitados tem sido tornar a matemática aces-

sível a todos os cidadãos, desde uma simples participação, até um pleno desenvolvimento da autoestima, à partir das premiações, de toda a comunidade escolar, bem como uma mudança no comportamento de todo um grupo social, corroborando assim com a premissa de que a instigação dos conceitos básicos da matemática como o raciocínio lógico, e a resolução de situações-problemas são indispensáveis para a construção de seres humanos autônomos.

Essa explanação inicial se fez necessária, pois neste trabalho iremos resolver situações-problema propostas em provas olímpicas, assim como lançar mão de recursos didáticos, através de procedimentos lúdicos, no intuito de aproximar os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, pois estas formas de abordagem são, muitas vezes, postas à margem, seja pela escassa quantidade de materiais concretos, indispensáveis aos experimentos, como também porque tais metodologias requerem uma maior dedicação por parte do docente. Essa ludicidade é imprescindível ao desenvolvimento psicomotor do aluno, sobretudo nas séries iniciais, pois dessa forma viabiliza-se o trabalho na Zona de Desenvolvimento Proximal, estimulando os conflitos socio-cognitivos potenciais, promovendo a apreensão de algoritmos matemáticos e, segundo os PCN's,

É especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. PCN's (Brasil, 1998, p. 50,51).

Os primeiros conhecimentos algébricos são oriundos da Mesopotâmia e do Egito, só em seguida é que esses conceitos matemáticos se desenvolveram na Grécia. Uma expressão algébrica é considerada “a representação, por meio de letras e sinais, de um conjunto de operações que devem ser realizadas em certa ordem” (TEMÁTICA BARSA, 2005, p. 86).

A álgebra faz parte de um dos blocos de conteúdos matemáticos que tem a capacidade de proporcionar ao aluno a prática e o incremento do seu potencial de generalização e abstração e compõe, ainda, um instrumento eficaz na resolução de problemas matemáticos.

Algumas abordagens algébricas são estimuladas nos ciclos iniciais da vida escolar do aluno. No entanto, segundo BRASIL (1998), as atividades relacionadas a esse conteúdo têm uma maior efetividade a partir das séries finais do Ensino Fundamental e se tornam mais complexas e formais no Ensino Médio.

E, até o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, quando o professor trabalha em sala de aula com os números:

[...] é indispensável estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra (BRASIL, 1998, p. 68).

É suficiente, nesse período, que o aluno apreenda noções de variáveis e identifique as expressões algébricas como meio de “traduzir a relação entre a variação de duas grandezas” deixando para as séries finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio o aprofundamento dessas operações.

A fim de despertar o interesse dos alunos do Ensino Fundamental para o estudo da álgebra, o professor pode propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades (BRASIL, 1998, p. 117).

No entanto, percebe-se que a maioria dos alunos, ao iniciar o ensino médio, tem um conhecimento muito limitado em relação a álgebra. E o pior, muitos não conseguem entender de fato o sentido das variáveis, ou seja, a aprendizagem não fora efetivamente significativa. Isso mostra que os artifícios metodológicos, aplicados no ensino fundamental do 6º ao 9º ano, não estão sendo eficazes para o desenvolvimento de capacidades relacionadas com a construção de estratégias e procedimentos, aplicáveis a distintas situações.

As sequências numéricas tem sido objeto de muitos estudos, ao longo dos séculos. Como exemplo temos as Progressões Aritméticas (PAs) e Progressões Geométricas (PGs). No entanto, as que tem despertando maiores desafios são as sequências recorrentes. Um clássico exemplo é a sequência conhecida como os coelhos de Fibonacci, na qual inclusive já há uma fórmula fechada, que fora obtida por Recorrências Lineares de 2ª ordem.

As sequências numéricas estudadas no Ensino Médio se resumem, basicamente, às Progressões Aritméticas (PAs) de primeira ordem, e Progressões Geométricas (PGs). Tais sequências são abordadas em termos de suas definições e propriedades, com o intuito de se aplicar à resolução de problemas, que visam, sobretudo, a determinação de termos genéricos: a partir do 1º termo, e da razão da progressão. Assim como, a soma dos termos de uma PA e de uma PG. No entanto as generalizações e fórmulas obtidas são pré-estabelecidas pelos livros didáticos e isso, de certa forma, inviabiliza a construção dos procedimentos e atitudes por parte do aluno, fazendo deste um mero aplicador de “fórmulas prontas”.

É importante ponderar que tanto as progressões aritméticas de ordem superior, quanto as sequências que não são PA nem PG, como as progressões aritmético-geométricas, trazem uma motivação extra ao observante, pois este se sente tentado a estabelecer o padrão que rege tal sequência.

Dessa forma, o aluno, a princípio, se utiliza do senso comum, em seguida, averigua, se apropriando do raciocínio lógico, perpassando pelas diversas noções sobre números e operações, expressões algébricas e funções, assim como conceitos e propriedades da

geometria, e outros tantos conceitos disponíveis. A finalidade é entender, de fato, o que ocorreria de um momento para outro na sequência, e assim conseguir perceber o que acontece de um termo para o outro.

Esse fato nos impulsionou a pesquisar sobre as sequências recorrentes, pois nos possibilitará ampliar o estudo das progressões. E, através da análise de outras sequências, será possível estender as generalizações, recursivamente.

É importante ressaltar que várias sequências são definidas de forma recursiva, por meio de uma equação, denominada equação de recorrência. No entanto, iremos utilizá-la com um propósito mais amplo, visto que, por meio dela, é viável determinarmos uma fórmula fechada “generalização”, utilizando, por exemplo as somas telescópicas.

Nesse sentido, esse trabalho busca responder ao seguinte questionamento: o estudo de sequências matemáticas no Ensino Médio, a partir da compreensão teórica e prática de Recorrências Lineares pode viabilizar ao aluno a construção de conjecturas, assim como a comprovação das mesmas, por meio do Princípio de Indução Matemática, possibilitando a apreensão de generalizações?

Dessa maneira, nossos esforços se concentrarão em dirimir dúvidas relacionadas às sequências recorrentes, sobretudo no que se refere ao processo recursivo, bem como a abstração e consolidação de conjecturas.

Na perspectiva de alcançar nossos propósitos, foi realizada uma sondagem, através de um questionário. Posteriormente, foi ministrado um minicurso, buscando mostrar aos alunos do Ensino Médio Integrado, as definições de Recorrências Lineares e o processo de recursão. Mas, para garantir que uma generalização foi abstraída coerentemente, nos apropriaremos do Princípio de Indução Matemática e, portanto, o definiremos e utilizaremos a robustez de sua abordagem para a consolidação das conjecturas feitas recursivamente. Por fim, aplicou-se um questionário com algumas atividades semelhantes, e de mesmo nível que o questionário inicial, mas, nesse momento foram acrescentadas as sequências recorrentes.

Para que possamos ter uma sequência didática interessante, facilitando o processo pedagógico, este trabalho, em seu primeiro capítulo, descreve o processo de investigação matemática e a formulação de conjecturas. No segundo capítulo será explicitada a construção dos números naturais (\mathbb{N}), numa abordagem essencialmente axiomática, na qual o axioma do Princípio de Indução Matemática (PIM) é estabelecido, constituindo o elemento principal deste capítulo. No capítulo três são caracterizadas as definições de recorrências lineares e sequências definidas recursivamente, enfatizando as recorrências de primeira e de segunda ordem, mostrando técnicas de resolução e citando exemplos. Buscaremos também, fazer inferências recursivas sobre alguns problemas clássicos de sequências, sobretudo com caráter lúdico, e ainda, teremos uma seleção de problemas de olimpíadas nacionais, em diversos níveis e suas respectivas resoluções. No quarto capítulo, vamos apresentar estratégias de como se obter uma fórmula fechada para as sequências do

capítulo anterior que foram definidas recursivamente. No quinto capítulo, pretende-se mostrar a validade das generalizações, obtidas no capítulo 4, através do Princípio de Indução Matemática. No final dessa dissertação, esperamos ter contribuído para uma aprendizagem significativa de toda a comunidade escolar, servindo como um material de apoio ao docente, viabilizando ao aluno uma maior apreensão de conceitos matemáticos.

Capítulo 2

Investigações Matemáticas

2.1 Experimentos

A experimentação é salutar e necessária à aprendizagem matemática. Dessa forma, é preciso que o docente faça um planejamento que viabilize as investigações matemáticas e faça intervenções, estimulando a criatividade e progressos.

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, etapa em que os alunos relatam aos colegas as conclusões a que chegaram face ao trabalho realizado.

Nessas atividades é de extrema relevância que seja favorecido o desenvolvimento da autonomia do aluno e, portanto, o professor deve ser um mediador no intuito de fazer o aluno compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo. Nessas aulas, o aluno terá uma certa liberdade para desenvolver seus cálculos e, por si só, formular as suas ideias, de acordo com o que lhe é apresentado.

Dessa forma, é imprescindível que o discente possa ponderar questionamentos, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor.

Numa atividade investigativa em Matemática, as hipóteses surgem com a manipulação dos dados e cada conjectura traz consigo a necessidade de se realizar testes com o intuito de validar ou refutar as afirmações feitas.

2.2 Conjecturas por analogia

Quando são propostas atividades em que se faz necessário a busca de regularidades é comum o estabelecimento de conjecturas elementares. Estas são obtidas por observação direta dos dados, por manipulação ou por analogia com outras conjecturas. Geralmente este trabalho indutivo tende a ficar limitado ao pensamento do aluno, não sendo evidenciada uma formulação da conjectura. Nesse instante,

O teste de conjecturas é um aspecto do trabalho investigativo que os alunos, em geral, interiorizam com facilidade e que se funde, por vezes, com o próprio processo indutivo. Isto é, a manipulação dos dados começa a apontar no sentido de uma certa conjectura para logo em seguida esta ser refutada por um caso em que não se verifica. No entanto, existe alguma tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas num número reduzido de casos. Esta forma de encarar o teste de conjecturas pode ser combatida pelo professor, quer no apoio que concede aos grupos, quer na fase de discussão em que os alunos podem ser estimulados a procurar contraexemplos. (PABLO, 2013).

2.3 Investigações numéricas

Nas experiências com números, os alunos tendem a confundir conjecturas com conclusões, ou seja, não justificam ou provam as afirmações que fazem. Dessa forma, é primordial que o professor faça uma mediação capaz de promover a compreensão do caráter temporário das conjecturas. E, apesar de ser importante a insistência na realização de testes de conjecturas, e possa se ter uma “maior credibilidade” à medida que resista a diversos testes, vamos perceber, com exemplos clássicos, que isso por si só não efetiva a conclusão dos resultados. Dessa forma,

A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável, que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas. (PABLO, 2013).

O Processo de conjecturar por analogia, é uma ferramenta muito poderosa, mas muitas vezes perigosa e é tentador imaginar que a regularidade encontrada, numa sequência numérica, por exemplo, corresponde a uma demonstração.

Veja a seguinte situação: É verdade que o número

$$n^2 + n + 41$$

é primo qualquer que seja o número natural $n \geq 1$?

Verificando, por inspeção, temos:

$$n = 1 \Rightarrow 1^2 + 1 + 41 = 1 + 42 = 43 \text{ que é primo;}$$

$$n = 2 \Rightarrow 2^2 + 2 + 41 = 4 + 43 = 47 \text{ que é primo;}$$

$$n = 3 \Rightarrow 3^2 + 3 + 41 = 9 + 44 = 53 \text{ que é primo.}$$

Continuando os cálculos, percebemos que para $n = 4, 5, \dots, 38$ a proposição é verdadeira e ainda:

$$n = 39 \Rightarrow 39^2 + 39 + 41 = 1521 + 80 = 1602 \text{ que é primo.}$$

Dessa forma, poderíamos ser induzidos, erroneamente, por analogia, que essa sentença é verdadeira. Entretanto, como foi dito anteriormente, a analogia não se constitui uma ferramenta confiável. Essa tentativa de demonstração não tem qualquer rigor e, por isso mesmo, não é uma demonstração matemática válida. A prova da sua nulidade coube a Leonard Euler, e se constitui um famoso exemplo de proposição equivocada. Observemos um contraexemplo explicitado por ele:

$$n = 40 \Rightarrow 40^2 + 40 + 41 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2.$$

que não é primo. Logo, a afirmação feita é falsa.

Vejamos um outro caso clássico de conjectura falsa. Em 1640, Fermat escreveu em uma de suas cartas a Mersene que acreditava que os números

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

eram todos primos. Ele observou que os números

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 256 + 1 = 257,$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65536 + 1 = 65537$$

eram todos primos. Essa afirmação, feita por analogia, fora tida como verdade por quase um século. Mas em 1732, Leonard Euler mostrou que, para $n = 5$,

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417,$$

ou seja, F_5 é composto, desmentindo assim a conjectura feita por Fermat.

Caso o leitor se interesse, há em HEFEZ (2014) algumas demonstrações mais re-

buscadas, nos capítulos 9 e 10. Não as faremos aqui, pois o propósito deste material é meramente mostrar, por contraexemplos, conjecturas falsas, feitas mediante analogias.

Nessa perspectiva, é de suma importância que dominemos algumas técnicas de provar generalizações matemáticas: o Princípio da Indução Matemática e as conjecturas obtidas recursivamente consolidadas através de somas telescópicas. Tais demonstrações serão exploradas nos próximos capítulos.

Capítulo 3

O Princípio de Indução Matemática

Na construção do conjunto dos números naturais é possível caracterizar, matematicamente, definições conceituais próprias dele e, principalmente, demonstrar suas propriedades.

A teoria a respeito dos números naturais, se desenvolveu com o método axiomático que, aceitando a validade de alguns fatos, permite, com o uso da lógica, o desenvolvimento sistemático da teoria sem que existam contradições internas. Essa evolução deve-se, inicialmente, à noção intuitiva de número, obtida pelo processo de contagem.

A descrição objetiva e precisa do conjunto \mathbb{N} dos números naturais emerge dos conceitos primitivos de número zero e de sucessor, apropriando-se dos axiomas estabelecidos pelo matemático italiano Giuseppe Peano¹. Tais axiomas foram responsáveis pela estruturação algébrica e aritmética do conjunto dos números naturais.

3.1 Axiomas de Dedekind-Peano

De acordo com HALMOS (1960) o **sucessor** de um conjunto x , denotado por x^+ , é o conjunto obtido pelo acréscimo de x aos elementos de x . Em outras palavras,

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

Fazendo a identificação

$$0 = \emptyset,$$

¹Nasceu no dia 27 de agosto de 1858 em Cuneo, Piemont, Itália, e morreu em 20 de abril de 1932 em Turin, Itália.

e escrevendo-se $1 = 0^+$, $2 = 1^+$, $3 = 2^+$, temos que

$$\begin{aligned} 1 &= 0^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}, \\ 2 &= 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Não há, no entanto, garantias até o presente momento de que a construção de sucessores possa ser levada a frente *ad infinitum* com um mesmo e único conjunto. Existe, assim, em termos de teoria dos conjuntos, a necessidade de um novo princípio.

Axioma 3.1 (Axioma da Infinitude) Existe um conjunto que contém o 0 e o sucessor de cada um de seus elementos.

Definição 3.2 Um conjunto A (cujos elementos são conjuntos) será dito um **conjunto sucessor** se $0 \in A$ e, sempre que $x \in A$, tem-se $x^+ \in A$.

O Axioma de infinitude garante, portanto, que a família dos conjuntos sucessores é não-vazia.

Definição 3.3 Seja \mathcal{C} a família dos conjuntos sucessores. Chamamos de **conjunto dos números naturais** ao conjunto

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A.$$

Um elemento n de \mathbb{N} é dito número natural. Note que

- (i) $\mathbb{N} \neq \emptyset$, pois, como $0 \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$, tem-se $0 \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \mathbb{N}$;
- (ii) Se $n \in \mathbb{N}$, então $n \in A$, para todo $A \in \mathcal{C}$. Como cada A em \mathcal{C} é um conjunto sucessor, tem-se que $n^+ \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$, ou seja, $n^+ \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \mathbb{N}$.

De (i) e (ii) fica estabelecido que \mathbb{N} é, então, o menor conjunto sucessor. Observamos ainda que fica definida a função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que a cada $x \in \mathbb{N}$ faz corresponder o seu sucessor $s(x) = x^+$.

O sistema de axiomas dado a seguir foi, essencialmente, desenvolvido por Richard Dedekind em 1888. Contudo, ele é comumente atribuído ao matemático italiano Giuseppe Peano pela reformulação mais precisa que deu em 1889 do trabalho de Dedekind. Assim, para não cometermos injustiças, denominaremos os axiomas em questão de Axiomas de Dedekind-Peano.

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais, munido da função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que a todo $n \in \mathbb{N}$ faz corresponder seu sucessor $s(n)$, satisfaz os seguintes axiomas:

- N1) A função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetora, isto é, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, tem-se $s(m) \neq s(n)$.

N2) $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{0\}$.

N3) (**Princípio de Indução Finita**) Se X é um subconjunto não-vazio de números naturais tal que $0 \in X$ e, sempre que $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Segue daqui que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é, precisamente, o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

O Axioma N3 é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais. É imperativo perceber que a aplicação desse axioma não se trata de mostrar que determinada sentença aberta é verdadeira para um grande número de casos. Trata-se, na verdade, de provar que ela é verdadeira para todo número natural a partir de um certo natural a .

Esse Princípio é amplamente utilizado nos mais diversos campos conceituais da matemática, pois além de enorme utilidade, possibilita a construção de proposições mais robustas. Ele, inclusive, é estudado nas disciplinas de Números e Funções, Matemática Discreta e Aritmética, além de ter importantes aplicações em Geometria, sendo que as quatro disciplinas são obrigatórias no PROFMAT. A relevância do PIM tem se mostrado também devido sua alta incidência nas provas do ENQ.

3.2 O Teorema da Recursividade

O Princípio de Indução Finita é uma ferramenta cuja utilidade não se restringe a demonstrações de fatos matemáticos. O próximo resultado nos servirá no sentido de apresentar como o Axioma de Indução pode ser utilizado para se definir objetos matemáticos.

Teorema 3.4 (Teorema da Recursividade) Sejam a um elemento de um conjunto A e f uma função de A em A . Existe exatamente uma aplicação $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que

$$\varphi(0) = a \quad \text{e} \quad \varphi(s(n)) = f(\varphi(n)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja \mathcal{C} a coleção de todos os subconjuntos C de $\mathbb{N} \times A$ tais que $(0, a) \in C$ e tais que se $(n, x) \in C$, então $(s(n), f(x)) \in C$. A coleção \mathcal{C} é não vazia uma vez que ela contém $\mathbb{N} \times A$. Além disso, como todo $C \in \mathcal{C}$ contém o par $(0, a)$, tem-se que

$$D = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

É fácil ver que, na verdade, $D \in \mathcal{C}$. Contudo, segue da definição de D que nenhuma parte própria sua pode pertencer a \mathcal{C} . Sejam S o conjunto de todos os números naturais

\mathbf{n} para os quais existe um único $x \in A$ tal que $(\mathbf{n}, x) \in D$ e $\varphi: S \rightarrow A$ a aplicação definida por $\varphi(\mathbf{n}) = x$. Temos que $(0, \mathbf{a}) \in D$. Suponha, por absurdo, que exista $\mathbf{a}' \in A$, $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$, tal que $(0, \mathbf{a}') \in D$ e seja $D' = D - \{(0, \mathbf{a}')\}$. Então $(0, \mathbf{a}) \in D'$ e, além disso, se $(\mathbf{n}, x) \in D'$, $(s(\mathbf{n}), f(x)) \in D'$ uma vez que $(s(\mathbf{n}), f(x)) \in D$ e $(s(\mathbf{n}), f(x)) \neq (0, \mathbf{a}')$. Logo, $D' \in \mathcal{C}$, o que é um absurdo já que D' é um subconjunto próprio de D . Concluimos, portanto, que $0 \in S$. Seja $\mathbf{n} \in S$ e seja x o único elemento de A tal que $(\mathbf{n}, x) \in D$. Então $(s(\mathbf{n}), f(x)) \in D$ pelo fato de D pertencer a \mathcal{C} . Suponha mais uma vez por absurdo que exista $y \in A$, $y \neq f(x)$, tal que $(s(\mathbf{n}), y) \in D$ e faça $D'' = D - \{(s(\mathbf{n}), y)\}$. Então

$$(s(\mathbf{n}), f(x)), (1, \mathbf{a}) \in D''.$$

Para qualquer $(\mathbf{m}, \mathbf{b}) \in D''$, temos que $(s(\mathbf{m}), f(\mathbf{b})) \in D$. Se $(s(\mathbf{m}), f(\mathbf{b})) = (s(\mathbf{n}), y)$, então $s(\mathbf{m}) = s(\mathbf{n})$ e $f(\mathbf{b}) = y \neq f(x)$, o que nos fornece $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ e $\mathbf{b} \neq x$. Daí, (\mathbf{n}, \mathbf{b}) e (\mathbf{n}, x) são elementos distintos de D , contrariando o fato de $\mathbf{n} \in S$. Portanto, $(s(\mathbf{m}), f(\mathbf{b})) \neq (s(\mathbf{n}), y)$ e, conseqüentemente, $(s(\mathbf{m}), f(\mathbf{b})) \in D''$. Isso significa, então, que $D'' \in \mathcal{C}$, o que é um absurdo dado que D'' é um subconjunto próprio de D . Assim, $s(\mathbf{n}) \in S$ e, de N3, $S = \mathbb{N}$ e a existência de uma função satisfazendo as condições estabelecidas é comprovada. Sejam, agora, φ e ψ duas funções atendendo os requisitos exigidos e seja M o conjunto de todos os números naturais \mathbf{n} tais que

$$\varphi(\mathbf{n}) = \psi(\mathbf{n})$$

Evidentemente, $0 \in M$. Se $\mathbf{n} \in M$, então

$$\varphi(s(\mathbf{n})) = f(\varphi(\mathbf{n})) = f(\psi(\mathbf{n})) = \psi(s(\mathbf{n}))$$

e, portanto, $s(\mathbf{n}) \in M$ e, de N3, $M = \mathbb{N}$. Logo, $\varphi = \psi$. ■

Corolário 3.5 Se os axiomas N1-N3 são também satisfeitos por um conjunto \mathbb{N}' , que possui um elemento $0'$, e uma aplicação $s': \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{N}'$, então existe uma bijeção $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$ tal que

$$\varphi(0) = 0' \quad \text{e} \quad \varphi(s(\mathbf{n})) = s'(\varphi(\mathbf{n})),$$

para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Fazendo $A = \mathbb{N}'$, $\mathbf{a} = 0'$ e $f = s'$ no Teorema 3.4, vemos que existe uma única aplicação $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$ tal que

$$\varphi(0) = 0' \quad \text{e} \quad \varphi(s(\mathbf{n})) = s'(\varphi(\mathbf{n})),$$

para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Permutando-se \mathbb{N} e \mathbb{N}' , observamos que existe uma única aplicação

$\psi: \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\psi(0') = 0 \quad \text{e} \quad \psi(s'(n)) = s(\psi(n)),$$

para todo $n' \in \mathbb{N}'$. A composta $\chi = \psi \circ \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ possui as propriedades:

(i) $\chi(0) = 0$;

(ii) $\chi(s(n)) = \psi(\varphi(s(n))) = \psi(s'(\varphi(n))) = s(\psi(\varphi(n))) = s(\chi(n))$.

Utilizando-se mais uma vez o Teorema da Recursividade, temos que χ é a única função com essas propriedades. Assim, $\psi \circ \varphi$ é a identidade de \mathbb{N} e, de modo análogo, verifica-se que $\varphi \circ \psi$ é a identidade de \mathbb{N}' . Consequentemente, φ é uma bijeção. ■

Fazemos, agora, o uso do Teorema da Recursividade para definir sobre o conjunto \mathbb{N} dos números naturais as operações de adição e multiplicação, na intenção de evidenciar a importância e o alcance deste resultado.

O Teorema da Recursividade garante que, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma única aplicação $s_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$s_m(0) = m \quad \text{e} \quad s_m(s(n)) = s(s_m(n)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

OBSERVAÇÃO 3.6 Note que, em particular, $s_1 = s$. Com efeito, seja

$$X = \{n \in \mathbb{N}; s_1(n) = s(n)\}.$$

Temos, por definição, que

$$s_1(0) = 1 = s(0),$$

ou seja, $0 \in X$. Se n é um elemento arbitrário de X , então $s_1(n) = s(n)$ e, consequentemente,

$$s_1(s(n)) = s(s_1(n)) = s(s(n)),$$

isto é, $s(n) \in X$. O Axioma N3 garante a validade da afirmação feita.

Utilizaremos a notação $m + n$ para representar a imagem do número natural n pela função s_m . Assim,

$$s_m(n) = m + n.$$

OBSERVAÇÃO 3.7 Se $n \in \mathbb{N}$ temos, da definição de s_n e da observação anterior que

$$n + 1 = s_n(1) = s(n) = s_1(n) = 1 + n,$$

ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n + 1 = 1 + n.$$

Assim, dados $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (m + n) + 1 &= 1 + (m + n) \\ &= s(m + n) \\ &= s(s_m(n)) \\ &= s_m(s(n)) \\ &= m + s(n) = m + (n + 1) \end{aligned}$$

Definição 3.8 Chamaremos de **adição** sobre \mathbb{N} a aplicação $S: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que faz corresponder ao par (m, n) o número natural $m + n$.

Utilizando-se mais uma vez o Teorema da Recursividade temos que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma única aplicação $p_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$p_m(0) = 0 \quad \text{e} \quad p_m(n + 1) = p_m(n) + m.$$

Utilizamos a notação

$$p_m(n) = m \cdot n$$

para representar a imagem de um número natural n pela aplicação p_m . Sempre que não houver perigo de confusão, poderemos omitir o ponto e escrever mn em vez de $m \cdot n$. No entanto isso será feito apenas a partir dos exercícios deste capítulo.

Definição 3.9 Chamaremos de **multiplicação** sobre \mathbb{N} a aplicação $P: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que faz corresponder ao par (m, n) o número natural $m \cdot n$.

OBSERVAÇÃO 3.10 *Trazendo a notação estabelecida acima para a definição da aplicação p_m , temos que*

$$m \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \quad m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

Não temos a intenção, neste trabalho, de pormenorizar a estruturação algébrica e aritmética de \mathbb{N} . Nos apropriaremos dessa rica estrutura bem como da noção natural de ordem e do Princípio da Boa Ordenação e suas consequências fazendo ainda, quando necessário, o uso do caráter cardinal dos números naturais, ou seja, estes serão também utilizados para representar quantidades.

Exemplo 3.11 Sejam a, r números reais. A progressão aritmética de primeira ordem ou, simplesmente, progressão aritmética (PA) de primeiro termo a e razão r é a sequência definida recursivamente por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_{n+1} = a_n + r.$$

Tendo sido definidas as PA's de primeira ordem, utilizando o Teorema da Recursividade, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma PA de $(n+1)$ -ésima ordem se a sequência $(x_{n+1} - x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma PA de n -ésima ordem.

Exemplo 3.12 Sejam a e q números reais. A progressão geométrica (PG) de primeiro termo a e razão q é a sequência definida por

$$a_1 = a \quad e \quad a_{n+1} = qa_n.$$

3.3 Problemas elementares clássicos

Entre os problemas clássicos de PIM na matemática elementar, podemos distinguir três grandes grupos: demonstrações de identidades, demonstrações de problemas de divisibilidade e demonstrações de desigualdades. Apesar das soluções pelo PIM parecer bem simples, muitos alunos encontram, em geral, algumas dificuldades de natureza tanto psicológica quanto metodológica. Vamos fazer algumas demonstrações dos grupos supracitados, discutindo algumas dificuldades, com a intenção de retificar práticas docentes inadequadas.

3.3.1 Demonstrações de identidades

De acordo com HEFEZ (2014), o primeiro registro da utilização do Princípio de Indução Matemática, feito por Francesco Maurolycus em 1575. Trata-se da determinação de uma fórmula exata em função de $n \geq 1$, para a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Ou seja, busca-se uma fórmula para

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1), \quad (3.1)$$

tal que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

É primordial perceber, nesse momento, que para o estudante do Ensino Fundamental Maior, do 6º ao 9º ano, esse “ n ” é só uma letra, uma variável. Cabe, portanto, a nós professores, explicitar que uma variável é algo bastante comum, e uma ferramenta muito poderosa, pois ela nos permite sintetizar uma cadeia infinita em uma sentença curta.

Dessa maneira, a “letra” denota qualquer espaço vazio, ou seja, um lugar onde você pode colocar diversos números ou objetos. Tais números são seus valores possíveis. No caso de (3.1), n assume todos os valores inteiros positivos. Por isso, a sentença (3.1) substitui a cadeia infinita de proposições, nesse exemplo, os números ímpares.

Buscaremos uma fórmula para (3.1). Observe que

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, \\ S_2 &= 4, \\ S_3 &= 9, \\ S_4 &= 16, \\ S_5 &= 25. \end{aligned}$$

Os casos particulares nos conduzem a inferir que, de modo geral, $S_n = n^2$. Surge então um questionamento: como provar que essa sentença é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$?

Demonstração: Seja

$$P(n) : S_n = n^2$$

a propriedade cuja validade queremos averiguar. Para $n = 1$ tem-se que

$$S_1 = 1 = 1^2$$

e, portanto, $P(1)$ é verdadeiro. Supondo, agora, a validade de $P(n)$ para algum $n \geq 1$, devemos concluir que $P(n+1)$ também se verifica. Tem-se que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 3 + \dots + 2n - 1 + 2n + 1 \\ &= S_n + 2n + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

e, do PIM, a propriedade se verifica para todo $n \geq 1$. ■

Segundo SILVA (2018), aprendemos no Ensino Médio o que teria sido o procedimento de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) para calcular a soma dos 100 primeiros inteiros positivos, o que serviria, em seguida, para mostrar que a soma dos n primeiros inteiros positivos é dada por

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.2)$$

Suponhamos, por exemplo, que a fórmula para cálculo da soma S_n dos n primeiros números naturais seja falsa. Do Princípio da Boa Ordenação segue que deve haver então um menor número natural n_0 para o qual a identidade (3.2) não se verifica. Assim, para qualquer número natural k menor do que n_0 , temos que

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Para $k = 1$, temos

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

o que torna verdadeira a identidade que define a soma dos n primeiros inteiros positivos quando $k = 1$ e, portanto, o menor contraexemplo não é $k = 1$. Neste caso $n_0 - 1$ é um inteiro positivo e, da minimalidade de n , segue que

$$S_{n_0-1} = 1 + 2 + \dots + (n_0 - 1) = \frac{(n_0 - 1) [(n_0 - 1) + 1]}{2} = \frac{(n_0 - 1) n_0}{2}.$$

Para determinar S_{n_0} , basta adicionarmos n_0 a ambos os membros da igualdade acima, obtendo

$$\begin{aligned} S_{n_0} &= S_{n_0-1} + n_0 = \frac{(n_0 - 1) n_0}{2} + n_0 \\ &= \frac{(n_0 - 1) n_0 + 2n_0}{2} = \frac{n_0 (n_0 - 1 + 2)}{2} \\ &= \frac{n_0 (n_0 + 1)}{2}, \end{aligned}$$

contrariando o fato de que a identidade $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ não se verifica para $n = n_0$. Logo, não existem inteiros positivos para os quais a identidade em questão não se verifique.

Utilizando uma extensão do raciocínio de Gauss, podemos afirmar que a soma S_n dos n primeiros números naturais que formam uma Progressão Aritmética com primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $r = 3$ é

$$S_n = 2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}, \quad (3.3)$$

para todo natural $n \geq 1$. No entanto, alguns questionamentos podem surgir:

- (i) Qual técnica comprova a veracidade dessa fórmula?
- (ii) Há um contraexemplo que desabilite esta fórmula?

Suponhamos, por exemplo, que a fórmula para cálculo da soma S_n dos n primeiros números da PA seja falsa. Deve haver então, segundo o Princípio da Boa Ordenação, um menor número natural n_0 para o qual a igualdade em questão não vale. Deste modo, para qualquer número natural k menor do que n_0 , temos que:

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}$$

Para $n = 1$, temos

$$S_1 = 2 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2},$$

e, portanto, o menor contraexemplo não é $k = 1$. Assim, $n_0 - 1$ deve ser um inteiro positivo e, da minimalidade de n_0

$$\begin{aligned}
 S_{n_0-1} &= 2 + 5 + 8 + \cdots + [3(n_0 - 1) - 1] \\
 &= 2 + 5 + 8 + \cdots + [3n_0 - 4] \\
 &= \frac{(n_0 - 1)[3(n_0 - 1) + 1]}{2} \\
 &= \frac{(n_0 - 1)(3n_0 - 2)}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para determinarmos S_{n_0} , basta adicionarmos $(3n_0 - 1)$ a ambos os membros de (3.4), o que nos dá

$$\begin{aligned}
 S_{n_0} &= S_{n_0-1} + (3n_0 - 1) \\
 &= \frac{(n_0 - 1)(3n_0 - 2)}{2} + 3n_0 - 1 \\
 &= \frac{(n_0 - 1)(3n_0 - 2) + 6n_0 - 2}{2} \\
 &= \frac{3n_0^2 - 5n_0 + 2 + 6n_0 - 2}{2} \\
 &= \frac{n_0(3n_0 + 1)}{2},
 \end{aligned}$$

contrariando o fato da não validade desta igualdade para n_0 . Logo, não existem inteiros positivos para os quais a identidade (3.3) não se verifique.

3.3.2 Problemas de divisibilidade

Questões de divisibilidade constituem o próximo passo natural em nosso estudo. As técnicas para formar enunciados e passos indutivos são semelhantes àquelas usadas para as identidades: em geral, encontramos o incremento na expressão que está sendo considerada e provamos que é divisível por um número dado. Vejamos alguns problemas que tem soluções alternativas simples (usando aritmética modular).

Exemplo 3.13 Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro positivo n .

Solução: Para $n = 1$ temos que

$$1^3 - 1 = 0$$

que é divisível por 3. Logo, o fato em questão é verdadeiro para $n = 0$. Suponhamos a validade da relação para $n = k$ e verifiquemos sua validade para $n = k + 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
 (k + 1)^3 - (k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\
 &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).
 \end{aligned}$$

Veja que o primeiro termo do último membro da igualdade acima é divisível por 3 (devido a hipótese indutiva) e o segundo também. Como a soma de dois números divisíveis por 3 é um número divisível por 3, então a relação é verdadeira para $n = k + 1$. Logo, $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro positivo n . \square

Exemplo 3.14 Mostre, por indução matemática, que $6|7^n - 1$ para todo inteiro positivo n .

Solução: Para $n = 1$ temos que

$$7^n - 1 = 7 - 1 = 6$$

que é divisível por 6. Logo, a relação é válida para $n = 1$. Supondo, agora, que seja válida para $n = k$, mostremos que é válida para $n = k + 1$. Temos que

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7 \cdot 7^k - 1 \\ &= 7(7^k - 1) + 6 \end{aligned}$$

e, como, por hipótese, $6|7^k - 1$, ambas as parcelas do último membro da igualdade acima são divisíveis por 6 e, conseqüentemente, $7^{k+1} - 1$ também o é. Logo, $6|7^n - 1$ para todo inteiro positivo n . \square

3.3.3 Desigualdades

As demonstrações desigualdades são, em geral, muito eficazes, por isso mesmo é uma parte da algebra que sempre foi cobrada com regularidade nas competições de olímpicas de matemática. Atualmente elas são abordadas, inclusive nas olimpíadas internacionais, até em nível de Ensino Fundamental.

As questões de desigualdade seguem um certo padrão, onde deve-se comparar uma expressão algébrica com outra ou com um número. Porém, deve-se ter muita atenção nas substituições, pois os valores que são substituídos para a demonstração final não são exatamente iguais, como fazemos nas demonstrações das igualdades.

Referindo-nos agora à proposição

$$P(n) : 2^{n+1} \geq n^2 + 2,$$

observamos sua validade para pequenos valores de n , o que nos leva a acreditar que seja verdadeira para todo n . Quando uma afirmação do tipo “para todo n ” é falsa, deve haver pelo menos um natural n (um contraexemplo) que a contraria.

Supondo que a proposição seja falsa, seja k o menor número natural tal que

$$2^{k+1} < k^2 + 2.$$

Observamos, claramente, que $k > 1$. Temos, portanto, que

$$2^k = 2^{(k-1)+1} \geq (k-1)^2 + 2 = k^2 - 2k + 3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &\geq 2(k^2 - 2k + 3) \\ &= 2k^2 - 2k + 6 \\ &= k^2 + k(k-2) + 6 \\ &> k^2 + 2, \end{aligned}$$

contradizendo o fato de que a proposição não se verifica para k . Logo, $2^{n+1} \geq n^2 + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considerando a proposição

$$P(n) : 2^{n+1} \geq n^2 + 2,$$

provamos que $P(k-1) \Rightarrow P(k)$, quando $k \geq 1$. Observamos que, em um ponto de nossa prova, já tínhamos considerado a validade da desigualdade para $n = 0$ e $n = 1$. Embora tenhamos dado uma prova por contradição, é natural nos perguntarmos se seria mais sensato tentar provar a declaração diretamente.

Como já temos que $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ então a demonstração por contradição pode ser desnecessária, basta observarmos que a partir de $n = 0$ teremos que $P(0) \Rightarrow P(1)$, $P(1) \Rightarrow P(2)$, $P(2) \Rightarrow P(3)$ e assim sucessivamente.

Continuando a pensar de maneira análoga à situação anterior, verifiquemos se

$$P(n) : n^2 \geq 2^n$$

para todo natural $n \geq 5$. Observamos, no entanto, que

$$5^2 = 25 \leq 32 = 2^5$$

e, portanto, $P(5)$ não se verifica, ou seja, a afirmação é falsa. Podemos pensar então que $n^2 < 2^n$, para todo natural $n \geq 5$. Provemos este fato por indução matemática. Já sabemos que a desigualdade é válida para $n = 5$. Assumindo sua validade para $n = k \geq 5$

provemos sua validade para $n = k + 1$. Temos que

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

uma vez que $k \geq 5$ implica em $k^2 \geq 5k$ e $5k = 2k + 3k > 2k + 1$. Assim, pelo Princípio de Indução Matemática, $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.

Observe que poderíamos ter substituído a proposição acima por

$$P(n) : (n + 5)^2 < 2^{n+5}$$

e iniciar o procedimento de indução para $n = 0$. Assim, de modo geral, se queremos verificar se uma propriedade referente a números naturais é verdadeira à partir de um certo a , verificamos sua validade para este a e, em seguida, supondo sua validade para um certo $n \geq a$, verificamos se ainda é válida para $n + 1$.

A Desigualdade de Bernoulli, alvo do nosso próximo exemplo, merece um destaque, pois a mesma trás consigo a característica de trabalhar na perspectiva binomial e, portanto, possibilita uma infinidade de construções aritméticas, sendo primordial no estudo do Binômio de Newton, possibilitando desenvolvimento de resultados da Análise Combinatória, favorecendo também o estudo de Matemática Discreta. As consequências dessa desigualdade geram questões em todos os níveis de Ensino.

Exemplo 3.15 (Desigualdade de Bernoulli) Prove que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo inteiro positivo n , sempre que $x \geq -1$.

Solução: Para $n = 1$ verifica-se que

$$(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x,$$

ou seja, o resultado é verdadeiro. Então está provada a base de indução. Suponha, que para $n = k$ tenhamos $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, Assim,

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k \\ &\geq (1 + x)(1 + kx) \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x \end{aligned}$$

Tem-se, portanto, que o resultado é verdadeiro para todo $n \geq 1$. □

Capítulo 4

Recorrências

Nesse capítulo, iremos definir as recorrências lineares, ou sequências definidas recursivamente, evidenciando as recorrências de primeira ordem, utilizando exemplos que estimulem a percepção dos procedimentos operatórios que são necessários para a construção de uma sequência.

Buscaremos também, chegar a conclusões por meio da recursão na abordagem de alguns problemas clássicos de sequências, sobretudo com caráter lúdico. Apresentamos ainda uma seleção de problemas variados, incluindo questões de olimpíadas nacionais, em diversos níveis e suas respectivas resoluções.

Convém destacar que, nesse momento, técnicas para obtenções de formulas fechadas não serão exploradas intencionalmente. Tais conduções serão realizadas no Capítulo 4, para facilitar o processo didático-pedagógico, pois acreditamos que os alunos (do 1º ano do Ensino Médio) poderiam, aqui, cometer erros procedimentais, devido ao acúmulo de informações, bem como a pouca prática, minimizando assim a consolidação do conhecimento.

Para evitar problemas de notação vamos caracterizar as diferenças entre sequência e conjunto. Vejamos: um conjunto é representado, geralmente, por uma letra maiúscula e seus elementos estão entre chaves de modos que elementos repetidos podem ser desconsiderados assim como a disposição de seus elementos em sua representação. Por exemplo, sendo $A = \{1, 2, 3\}$, temos que $A = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\} = \{3, 2, 1\}$. Uma sequência, no entanto, é identificada como sendo uma função f cujo domínio é o conjunto \mathbb{N} dos naturais (caso seja infinita) ou um subconjunto da forma $\{1, 2, \dots, n\}$ (caso seja finita com n termos). Uma sequência é geralmente representada por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de modo que x_n é a imagem de n pela função f . Neste contexto as sequências $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 1, 3)$ e $(3, 2, 1)$ são, então, diferentes, pois na primeira o primeiro elemento é já que ou não possuem a mesma quantidade de termos ou não possuem termos correspondentes iguais. Assim, a ordem dos termos em uma sequência é relevante.

Na nossa pesquisa, vamos nos direcionar às sequências numéricas. Elas são constituídas por valores numéricos previamente estabelecidos, e ordenados, embora eles podem

não ter uma regra ou uma fórmula, como a sequência $\left(\frac{1}{4}, -9, \frac{5}{9}, -\sqrt{13}, \dots\right)$, enquanto outras dispõem de uma lei de formação a exemplo da sequência dos múltiplos positivos de 3 dada por $(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots)$, que é uma sequência infinita de termo geral $x_n = 3n$.

Num primeiro momento, vamos nos debruçar sobre as sequências numéricas infinitas que dispõem, de uma lei de formação. Devemos ter um cuidado especial com este tipo de sequência, pois, muitas vezes, a lei de formação de uma sequência é bem difícil de se enxergar. Vejamos: qual o próximo número da sequência

$$(5, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, \dots) ?$$

Percebe-se que a tarefa não é fácil, principalmente por não ser possível fazer conjecturas a respeito de algumas operações básicas. No entanto existe uma lei “sequência dos números naturais crescentes cuja denominação do valor numérico começa com a letra C”. Logo, o próximo elemento será o 100 “cem”.

Uma situação bastante intrigante seria estabelecer qual o próximo elemento da sequência $(1, 3, 5, \dots)$. Apesar de ficarmos inclinados a pensar no número 7 é importante saber que sequências distintas podem coincidir para alguns valores (inclusive uma infinidade deles). Nesse caso, o idealizador da sequência definiu a lei de formação como sendo:

$$x_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}. \quad (4.1)$$

Para a atividade não ficar muito cansativa, vamos verificar apenas os quatro primeiros termos. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1^3}{6} + 1^2 + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{6} = 1 \\ x_2 &= -\frac{2^3}{6} + 2^2 + \frac{2}{6} = -\frac{8}{6} + 4 + \frac{2}{6} = 3 \\ x_3 &= -\frac{3^3}{6} + 3^2 + \frac{3}{6} = -\frac{27}{6} + 9 + \frac{3}{6} = 5 \\ x_4 &= -\frac{4^3}{6} + 4^2 + \frac{4}{6} = -\frac{64}{6} + 16 + \frac{4}{6} = 6 \end{aligned}$$

O exemplo acima foi retirado de uma aula do Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP do professor Fabio Henrique Teixeira de Souza ocorrida em 13/10/2018. Tal situação serviu para nos mostrar que não devemos presumir o próximo termo de uma sequência numérica se não soubermos exatamente qual é a lei de formação da mesma.

É interessante perceber, em (4.1), que se tivermos a lei de formação, ou seja, uma fórmula fechada, será possível determinar qualquer termo, sem precisar calcular os termos que o antecedem. Este será um dos nossos objetivos do presente trabalho. No entanto, para alcançá-lo, faz-se necessário o entendimento das Recorrências Lineares.

4.1 Recorrências lineares

Vimos no Teorema da Recursividade que uma sequência está bem definida e univocamente determinada se temos o conhecimento do termo x_1 e sabemos como, a partir de x_n , determinar x_{n+1} . A dependência de x_{n+1} do valor de x_n é denotada por

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

e a igualdade acima é então denominada equação de recorrência de primeira ordem.

Definição 4.1 Uma **recorrência linear de primeira ordem** é uma recorrência do tipo

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n).$$

Quando $g(n) = 0$ para todo n , a recorrência linear é dita **homogênea**.

Exemplo 4.2 Considere a sequência $(2, 5, 8, 11, \dots, a_n, \dots)$. Conjecture uma fórmula por recorrência para o n -ésimo termo dessa sequência.

Solução: Como sabemos, as formulas por recorrência precisam se referenciar no termo anterior, assim no 1º termo, então seja:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5 = 2 + 3 = a_1 + 3$$

$$a_3 = 8 = 5 + 3 = a_2 + 3.$$

Nesse caso, é fácil ver que

$$a_{n+1} = a_n + 3.$$

□

Apesar da fórmula acima não nos dizer algo relevante, a sua sutileza será percebida quando resolvermos a recorrência e determinarmos a sua generalização “fórmula fechada”, objeto de estudo do Capítulo 4.

Exemplo 4.3 Observe a sequência que tem a lei de formação $a_{n+1} = 2a_n - 1$, com $a_1 = 4$. Determine:

- a) Os cinco primeiros termos da sequência.

Solução: Temos que

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 13 - 1 = 25$$

$$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot 25 - 1 = 49$$

□

Perceba que essa lei de formação está na sua forma recursiva, e que, portanto, com ela será possível determinar os próximos elementos, sempre recorrendo ao anterior e ao 1º termo. Verifique ainda, que a lei nos permite multiplicar por 2 o termo anterior e deste resultado subtrair uma unidade. É fundamental que enfatizemos a realização dessas operações para uma melhor percepção pelo o aluno do caráter aritmético que há numa fórmula, aparentemente exclusivamente algébrica pois, dessa maneira, o mesmo pode vir a ter uma diversidade maior de possibilidades de resoluções de situações semelhantes.

- b) Uma nova fórmula de recorrência de 1ª ordem, utilizando os termos da sequência do item (a), mas recorrendo ao termo anterior.

Solução: Veja que

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 7 = 4 + 3 = a_1 + 3 \cdot 1$$

$$a_3 = 13 = 7 + 6 = a_2 + 3 \cdot 2$$

$$a_4 = 25 = 13 + 12 = a_3 + 3 \cdot 4$$

$$a_5 = 49 = 25 + 24 = a_4 + 2 \cdot 8$$

e, verificando as características dos termos, podemos inferir que

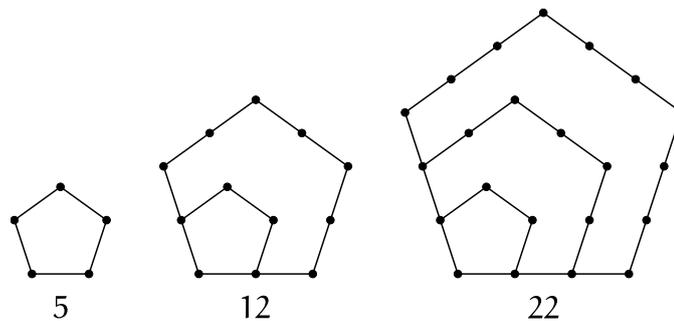
$$a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^n.$$

Apesar de, aparentemente não fazer sentido a conjectura de uma nova fórmula por recorrência, através desta será possível, adiante, encontrar uma fórmula fechada para o n -ésimo termo da sequência, sem necessitar de uma teoria mais avançada. □

Observe que nesse tipo de fórmula há uma certa desvantagem em se calcular o 100º termo, por exemplo, pois a fórmula sempre recorre ao anterior, e, portanto seria muito trabalhoso. No entanto, as fórmulas obtidas podem ser úteis, pois existem problemas, sobretudo olímpicos, que exploram exatamente essa capacidade, veja:

Exemplo 4.4 (OBMEP 2015, 1ª Fase - Nível 3) Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

Figura 1: Figuras pentagonais



Fonte: OBMEP 2015

- (A) 656 (B) 695 (C) 715 (D) 756 (E) 769

Antes de resolver o referido problema, cabe enfatizar o seu caráter lúdico, bem como caracterizar a contextualização com a geometria, pois tal situação explora as características de um pentágono regular.

Solução: Observe que os números pentagonais, quando os dispomos em sequência resultam em $(5, 12, 22, \dots)$. Nesse instante, é muito proveitoso que instiguemos os nossos alunos a investigar o que está ocorrendo, de maneira prática, com uma figura em relação à anterior, no que se refere às quantidades de pontos em cada lado do polígono. A partir daí, eles se empenham na busca por perceber alguma “regra” e, dessa forma, tendem a desenvolver a sua autonomia. Quando o grupo de alunos estiver experimentado algumas possibilidades, vamos reforçar que:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 12 = 5 + 7 = a_1 + 6 + 1 = a_1 + 2 \cdot 3 + 1$$

- Explicando a obtenção de a_2 : No segundo pentágono, em relação ao primeiro, houve um aumento de 3 pontos em dois lados do pentágono e 1 ponto em outro.

Temos agora que

$$a_3 = 22 = 12 + 10 = a_2 + 8 + 2 = a_2 + 2 \cdot 4 + 2$$

- Explicando a obtenção de a_3 : No terceiro pentágono, em relação ao segundo, houve um aumento de 4 pontos em dois lados do pentágono e 2 pontos em outro lado.

A partir desse raciocínio, podemos realizar outras inspeções, e por hipótese, teríamos que, no quarto pentágono, em relação ao terceiro, deverá haver um aumento de 5 pontos em dois lados do pentágono e 3 pontos em outro lado, resultando em

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 5 + 3 = 22 + 13 = 35.$$

Continuando com este procedimento, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n+1) + n - 1 \\ &= a_{n-1} + 3n + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_{20} + 3 \cdot 21 + 1 \\ &= 651 + 64 \\ &= 715, \end{aligned}$$

o que nos fornece (C) como resposta correta. \square

Exemplo 4.5 Observe a disposição, abaixo, da sequência dos números naturais ímpares:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 3 & 5 & & & & & \\ 7 & 9 & 11 & & & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Determine:

- O primeiro termo da décima linha.
- A fórmula de recorrência para o primeiro termo da linha que está na posição $n + 1$.

Solução: Para simplificar a nossa resolução, representaremos por $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o primeiro termo das linhas $1, 2, 3, \dots, n$, respectivamente. Dessa forma, os cinco termos iniciais da sequência em questão será

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 3, \\ a_3 &= 7, \\ a_4 &= 13, \\ a_5 &= 21. \end{aligned}$$

Cabe agora refletir sobre alguma possibilidade de generalização, pois demandaria muito esforço fazer todos os termos de cada linha. Desse modo, vamos reescrever os primeiros termos de cada linha, nos reportando ao anterior, verificando se há uma regularidade, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}a_2 &= 3 = 1 + 2 = a_1 + 2 \cdot 1, \\a_3 &= 7 = 3 + 4 = a_2 + 2 \cdot 2, \\a_4 &= 13 = 7 + 6 = a_3 + 2 \cdot 3, \\a_5 &= 21 = 13 + 8 = a_4 + 2 \cdot 4.\end{aligned}$$

Essa análise nos faz crer que

$$\begin{aligned}a_6 &= a_5 + 2 \cdot 5 = 21 + 10 = 31, \\a_7 &= a_6 + 2 \cdot 6 = 31 + 12 = 43, \\a_8 &= a_7 + 2 \cdot 7 = 43 + 14 = 57 \\a_9 &= a_8 + 2 \cdot 8 = 57 + 16 = 73 \\a_{10} &= a_9 + 2 \cdot 9 = 73 + 18 = 91.\end{aligned}$$

Logo, o primeiro termo da décima linha será $a_{10} = 91$.

Percebe-se que foi aplicada uma boa dinâmica para a resolução do item (a), porém se fizemos isso com os primeiros termos, linha a linha, ainda seria um pouco trabalhoso. Então é pertinente, nesse momento, pensarmos numa fórmula de recorrência para determinação do primeiro termo da linha que está na posição $n + 1$, isto é, para determinação de a_{n+1} e, portanto, resolveríamos inicialmente o item (b). Veja que, por meio da inspeção feita, é possível conjecturar que

$$a_{n+1} = a_n + 2n, \quad \text{com } a_1 = 1.$$

□

Apesar de ser possível enfatizar outros questionamentos nesse problema, como a soma dos termos numa determinada linha, assim como determinar o 2º termo; 3º termo, n -ésimo termo de uma certa linha. Não os fizemos, para que os nossos alunos não perdessem o foco, que de fato é a busca pela generalização, na qual será feita por etapas, como fora mencionado no início deste capítulo. Com isso, será possível calcular o primeiro termo de qualquer linha, bastando para isso saber o número da linha, pois a fórmula só dependerá de n .

Esse tipo de problema serve como base para fazer a introdução, mesmo que discreta, do Triângulo Aritmético, que é um conceito bastante relevante na Análise Combinatória

(conteúdo que será objeto de estudo no 2º ano do Ensino Médio), e possibilita uma série de aplicações úteis para o desenvolvimento das recorrências, bem como a resolução das mesmas.

Exemplo 4.6 Considerando a sequência $(6, 2, 0, 0, 2, 6, \dots)$, observamos que ela é uma PA de segunda ordem, pois é uma sequência na qual as diferenças entre termos consecutivos constituem uma PA de primeira ordem, a saber, $(-4, -2, 0, 2, 4, \dots)$. Determine:

- O n -ésimo termo da PA de primeira ordem, por recorrência.
- O n -ésimo termo da PA. de segunda ordem, por recorrência.

Solução: Na sequência $(-4, -2, 0, 2, 4, \dots)$, que é uma PA de primeira ordem, temos

$$a_1 = -4, a_2 = -2, a_3 = 0, a_4 = 2, a_5 = 4, \dots$$

e, procedendo da mesma maneira que na questão anterior, temos que

$$a_2 = -4 + 2 = a_1 + 2,$$

$$a_3 = -2 + 2 = a_2 + 2,$$

$$a_4 = 0 + 2 = a_3 + 2,$$

$$a_5 = 2 + 2 = a_4 + 2.$$

Logo,

$$a_n = a_{n-1} + 2, \quad \text{com } a_1 = -4.$$

Apesar de os alunos conhecerem a fórmula do termo geral de uma PA de primeira ordem, observemos no item a que precisamos determinar o n -ésimo termo por recorrência, para favorecer as descobertas de regularidades e estimular a formulação de hipóteses, que serão confirmadas, ou não, nos próximos capítulos.

Já a sequência $(6, 2, 0, 0, 2, 6, \dots)$ é uma PA de segunda ordem. Veja que $a_1 = 6$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 2$, \dots e, procedendo com a mesma cautela dos problemas anteriores, segue que

$$a_2 = 6 - 4 = a_1 - 4 = a_1 - 2 \cdot 2,$$

$$a_3 = 2 - 2 = a_2 - 2 = a_2 - 2 \cdot 1,$$

$$a_4 = 0 + 0 = a_3 + 0 = a_3 - 2 \cdot 0,$$

$$a_5 = 0 + 2 = a_4 + 2 = a_4 - 2 \cdot (-1).$$

Esse problema merece um cuidado especial, pois o fator multiplicador de -2 , não está em função de n , nem tampouco de -2 . Dessa forma, vamos construir uma sequência apenas

com os fatores multiplicadores: $(2, 1, 0, -1, -2, \dots)$. Aqui nos apropriaremos da fórmula do termo geral, apenas para que minimizemos os trabalhos e seja possível encontrar a recorrência sem muitos obstáculos. Então, teremos,

$$b_1 = 2 \quad \text{e} \quad b_n = b_1 + (n - 1) r,$$

o que nos dá, para $r = -1$, que $b_n = 3 - n$. Logo, o n -ésimo fator multiplicador de -2 é $b_n = 3 - n$. Esse fato nos faz concluir a recorrência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - 2b_{n-1} \\ &= a_{n-1} - 2[3 - (n - 1)] \\ &= a_{n-1} + 2n - 8. \end{aligned}$$

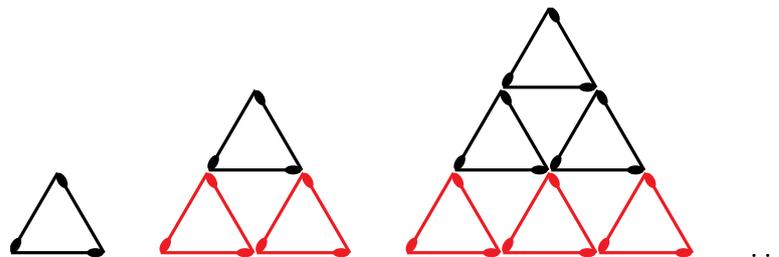
□

Caso o leitor esteja ponderando a respeito dos cálculos por acreditar que estão sendo um pouco excessivos, vale enfatizar a utilidade dos mesmos para estimular o cálculo mental das operações básicas, bem como a sedimentação das operações com monômios, pois à medida que reduzem as formulas por recorrência, os alunos reforçam a prática das simplificações dos termos semelhantes. Um esclarecimento oportuno também se, para algum questionamento em termos de qual a utilidade de encontrar as fórmulas por recorrência e, nesse caso, veremos que a mesmas serão de grande valia para a verificação da validade das generalizações que será feita no Capítulo 5.

4.2 Problemas olímpicos

Problema 4.7 (OBMEP 2012, 1ª Fase - Nível 3 - adaptada) Renata montou uma sequência de triângulos, com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura.

Figura 2: Triângulos com palitos de fósforo



Fonte: OBMEP 2012

Determine:

- a) Quantos palitos ela vai usar para construir o quarto triângulo da sequência?

- b) Os seis primeiros termos da sequência.
- c) A fórmula obtida por recorrência.

Assim como no exemplo dos pentágonos, a ludicidade é imprescindível na resolução deste problema, pois favorece o raciocínio do aluno, além de trazer uma ressignificação para o processo de educação matemática. Nessa perspectiva, estaremos propondo atividades que estão repletas de intensões didático-pedagógicas, no intuito de alcançar os resultados esperados.

Solução: O início da resolução se dá na observação de quantos triângulos aumentaram do 1º estágio para o 2º, verificando através da superposição de a_1 em a_2 e assim por diante. Feito isso, é esperado que os alunos consigam determinar a quantidade de palitos que Renata vai usar para construir o quarto triângulo da sequência, pois

$$\begin{aligned}a_1 &= 3 \\a_2 &= 3 + 6 = a_1 + 2 \cdot 3 \\a_3 &= 9 + 9 = a_2 + 3 \cdot 3 \\a_4 &= 18 + 12 = a_3 + 4 \cdot 3,\end{aligned}$$

ou seja, $a_4 = 30$. Portanto ela vai usar 30 palitos para construir o quarto triângulo.

Continuando a construir a sequência, de maneira análoga, segue que

$$\begin{aligned}a_5 &= a_4 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45, \\a_6 &= a_5 + 6 \cdot 3 = 45 + 18 = 63\end{aligned}$$

e, conseqüentemente, os seis termos da sequência são 3, 9, 18, 30, 45 e 63.

É primordial que o início da resolução seja bem conduzindo, ou seja, é imperativo que as orientações passadas pelo professor busquem não somente a determinação dos termos da sequência, mas fazer com que seja possível perceber regularidades, sobretudo em seqüências que sejam dotadas de imagens, pois estas favorecem a promoção de conjecturas.

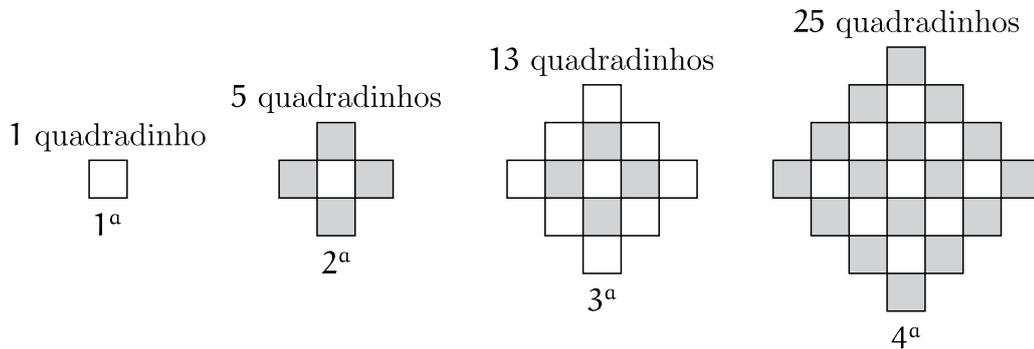
Seguindo o padrão mostrado até então, iremos obter

$$a_n = a_{n-1} + 3n.$$

□

Problema 4.8 (OBMEP 2009, 1ª Fase - Nível 3) Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu.

Figura 3: Sequência de figuras construídas por Felipe



Fonte: OBMEP 2012

Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?

- (A) A 30ª (B) A 31ª (C) A 32ª (D) A 33ª (E) A 34ª

Solução: Para encontrar um padrão recursivo, vamos separar as quantidades de quadradinhos brancos e escuros:

Figura	Branco	Escuro	Total
1ª	$1 = 1^2$	$0 = 0^2$	$1^2 + 0^2$
2ª	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$2^2 + 1^2$
3ª	$9 = 3^2$	$4 = 2^2$	$3^2 + 2^2$
4ª	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$4^2 + 3^2$

Podemos perceber que há uma recorrência, pois conjecturamos que a figura de n lados terá $n^2 + (n - 1)^2$ quadradinhos. Para solucionar o nosso problema basta achar o menor valor de n tal que $n^2 + (n - 1)^2 \geq 2009$. Como $n^2 > (n - 1)^2$, para $n \geq 1$, teremos que $2n^2 > 2009$, ou seja, $n^2 \geq 1005$, daí temos que $n \geq 32$. Agora vamos verificar cada caso.

- Para $n = 32$: $32^2 + 31^2 = 1985$, (não serve).
- Para $n = 33$: $33^2 + 32^2 = 2113$ (serve).

Como a função polinomial $p(n) = n^2 + (n - 1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$ é crescente, $n = 33$ é o menor valor e, portanto, a alternativa correta é a (D). \square

4.3 Problemas clássicos

4.3.1 Pizza Steiner

O matemático Jakob Steiner¹, segundo DÖRRIE (1965) propôs e resolveu, em 1826, a seguinte situação problema: Qual é o maior número de partes em que se pode

¹Jakob Steiner (1796 - 1863) foi um matemático suíço que trabalhou principalmente na área de geometria.

dividir um plano com n cortes de retas? Este problema de Recorrência é conhecido como a pizza de Steiner.

Iremos solucioná-lo tentando encontrar algum padrão matemático pela construção que nos dê condições de fazê-lo.

Seja α o plano a ser dividido:

1. Com a primeira reta dividimos o plano α em duas partes, como ilustra a Figura 4.

Figura 4: Plano α dividido pela reta r_1

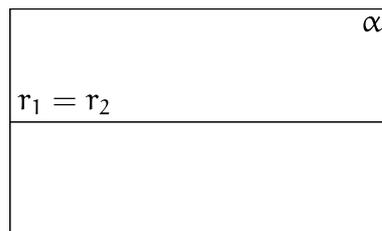


Fonte: Da autoria

2. Para o segundo corte, ou seja, segunda reta, temos que levar em consideração a disposição suas disposições no plano α , elas podem ser, paralelas coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes.

Quando as retas r_1 e r_2 são paralelas coincidentes, isto é, quando $r_1 = r_2$, teremos o mesmo número de regiões.

Figura 5: Plano α dividido pelas retas paralelas coincidentes r_1 e r_2



Fonte: Da autoria

Quando as retas r_1 e r_2 são paralelas distintas teremos três regiões no nosso plano.

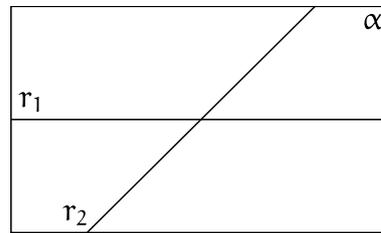
Figura 6: Plano α dividido pelas retas paralelas distintas r_1 e r_2



Fonte: Da autoria

Quando as retas r_1 e r_2 são concorrentes, teremos quatro regiões no nosso plano.

Figura 7: Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 e r_2



Fonte: Da autoria

Então, para satisfazer às condições exigidas usaremos o 3º caso, que ocorre quando r_1 e r_2 são concorrentes, pois percebemos que das três possibilidades é a que fornece o maior número de regiões. Logo, para que a quantidade de regiões aumente com o acréscimo de novas retas estas devem ser concorrentes relativamente às retas já existentes no plano. Essa será a nossa primeira regra para construção da nossa recorrência.

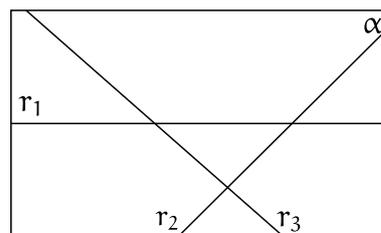
Outra regra muito importante para que nosso objetivo seja atingido é que as novas retas não podem passar por pontos de interseção já existente, pois se o fizer não teremos o número máximo de regiões.

Essa questão, no máximo, é devido escolhermos retas que estejam em posição geral, ou seja, cada reta não passará por nenhum ponto de intersecção já existente.

Agora, que já sabemos as duas regras para essa proposição, então iremos definir a recorrência. Para isso começaremos pelo trabalho exploratório, isto é, verificar caso a caso. faremos ainda o uso de uma tabela e chamaremos de n o número de retas e de R_n o número máximo de regiões definidas por n retas.

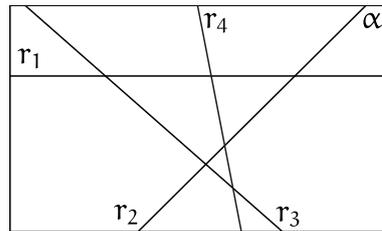
Para uma reta percebemos que há 2 regiões como ilustra a Figura 4. Agora, vamos construir as regiões a partir de duas retas concorrentes. Quando existem duas retas, temos um total de quatro regiões como mostra a Figura 7, agora adicionando mais uma reta teremos um total de 7 regiões como indica a Figura 8.

Figura 8: Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 , r_2 e r_3 .



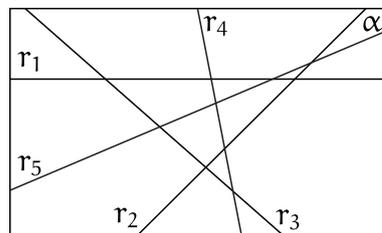
Fonte: Da autoria

Adicionando mais uma reta teremos um total de 11 regiões como ilustra a figura 9.

Figura 9: Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 , r_2 , r_3 e r_4 .

Fonte: Da autoria

Para 5 retas teremos um total de 16 regiões como mostra a Figura 10.

Figura 10: Plano α dividido pelas retas concorrentes r_1 , r_2 , r_3 , r_4 e r_5 .

Fonte: Da autoria

A nossa tabela irá nos auxiliar na organização dos dados e também para percebermos se existe um padrão matemático:

n	R_n
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
\vdots	\vdots
n	?

Notemos que a nossa sequência mostra certa regularidade. Percebemos que, a partir da primeira reta, quando adicionamos a segunda reta temos duas novas regiões, quando colocamos a terceira reta são acrescentadas mais três regiões, na quarta reta serão adicionadas mais quatro, já na quinta reta teremos mais cinco regiões, então podemos supor que com o acréscimo da n -ésima reta teremos o número de regiões já existentes mais n novas regiões. Logo, podemos conjecturar que

$$R_n = R_{n-1} + n, \quad \text{com } R_1 = 2.$$

4.3.2 As torres de Hanói

Trata-se de um quebra-cabeça que foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas². Segundo DÖRRIE (1965). Ele teve inspiração em uma lenda para construir o jogo das torres de Hanói em 1883, cujo nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

Há várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida fala de um templo Hindu, situado no centro do universo. Diz-se que Brama (que é o primeiro deus da Trimúrti) supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brama ordenara-lhes que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo iria desmoronar e o mundo desapareceria. Não se sabe, é claro, se Édouard Lucas inventou essa lenda ou foi inspirado por ela.

Para exemplificar a lenda, considerando o problema das torres de Hanói com 64 discos, seguindo as regras do jogo, o número de movimentos seria de $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$, o que daria mais do que 5 bilhões de séculos se cada movimento fosse feito em 1 segundo.

Nos dias de hoje, no problema das torres de Hanói, temos uma base que possui três hastes, e uma pilha de n discos em com diâmetros diferentes em uma delas. Deve-se, então, passar a pilha de discos de uma haste para outra com o menor número de movimentos possível de modo que duas regras sejam obedecidas:

- (i) Só é permitido passar um disco por vez;
- (ii) Em nenhum momento pode haver um disco maior sobre um disco menor.

Vamos solucionar o problema usando recorrência, num primeiro momento, e, posteriormente, por meio de sua resolução, iremos encontrar a generalização, através das somas telescópicas, e por fim prová-la por Indução Matemática.

O disco com menor diâmetro será denominado de disco 1; o de segundo menor de diâmetro de disco 2 e assim sucessivamente em ordem crescente, dos diâmetros até chegar no último disco, o qual chamaremos de disco n .

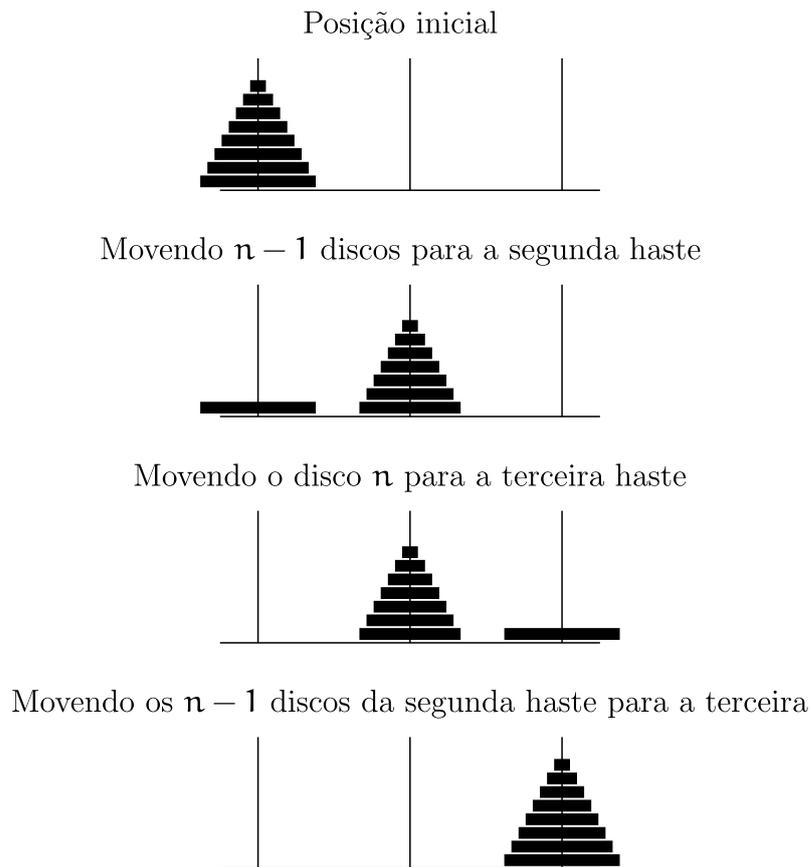
Para solucionarmos o problema de mover de modo geral, apresentaremos a Figura 11, na qual teremos que mover todos os discos da primeira haste para a terceira, seguimos os seguintes passos:

1. Movemos os primeiros $n - 1$ discos para a segunda haste;

²4 de Abril de 1842 a 3 de Outubro de 1891. Foi um matemático francês e o criador do jogo matemático torre de Hanói. A sequência de Lucas e os números de Lucas são denominados em sua memória. É também o autor do Teorema de Lucas que aborda números binomiais e congruência modular.

2. Movemos o maior disco para a terceira haste;
3. Concluimos o quebra-cabeça movendo os $n - 1$ discos da segunda haste para a terceira.

Figura 11: Movimentação dos n discos para outra haste.



Fonte: Da autoria

Assim, se M_n é o número mínimo de movimentos utilizados para mover n discos de uma haste para haste outra, temos que

$$M_n = 2M_{n-1} + 1.$$

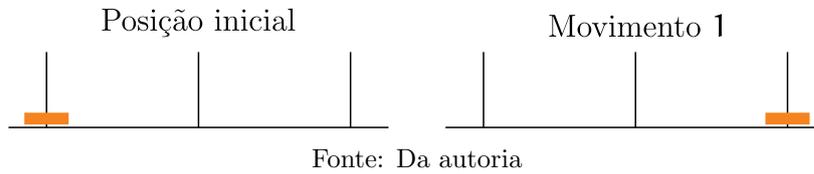
Este é um exemplo de uma equação de recorrência para uma função definida no conjunto de números naturais maiores ou iguais a algum número do caso base, pois a partir desse caso é que entendemos como calcularmos o n -ésimo termo da sequência a partir do termo imediatamente anterior ou de alguns termos anteriores.

Olhando para o Teorema da Recursividade, para se especificar completamente uma sequência com base em uma recorrência, devemos dar informações suficientes sobre a sequência. Esta informação é chamada de condição inicial, ou condições iniciais, que também chamaremos de caso base para a Recorrência.

Neste caso, temos $M_0 = 0$. Usando isso, obtemos da recorrência que, para $n = 1$, $M_1 = 1$, pois

$$M_1 = 2M_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

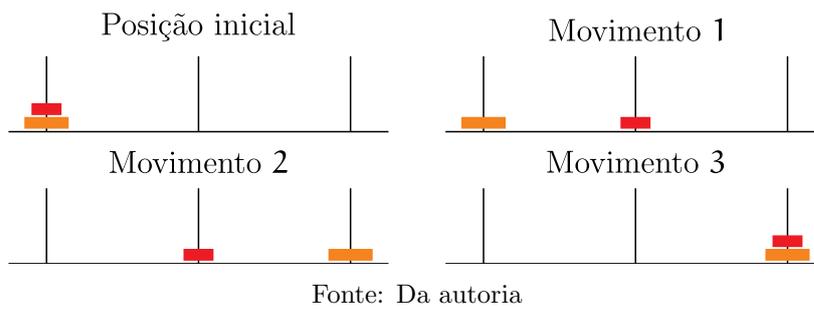
Figura 12: Torre de Hanói com 1 disco.



Para $n = 2$, temos $M_2 = 3$, pois

$$M_2 = 2 \cdot M_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

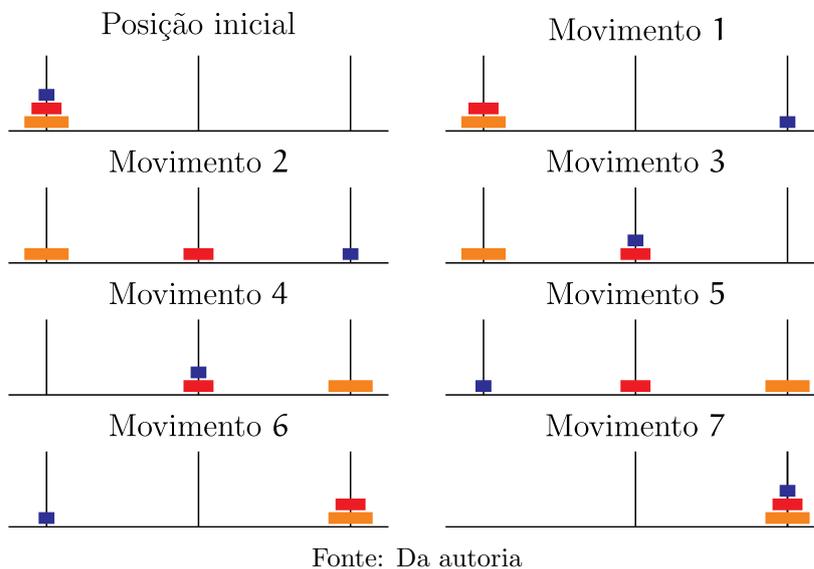
Figura 13: Torre de Hanói com 2 discos.



Para $n = 3$, temos $M_3 = 7$, pois

$$M_3 = 2 \cdot M_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Figura 14: Torre de Hanói com 3 discos.



Capítulo 5

Somas Telescópicas

Nesse capítulo iremos lançar mão de uma técnica, um tanto quanto simples, de resolução de recorrências lineares de primeira ordem que é bastante útil para desenvolver problemas de diversas aplicações e níveis de dificuldade. Uma evidência da sua relevância e eficácia reside no fato de programas de treinamento olímpicos, como o POTI, se apropriarem desse recurso para resolver de forma prazerosa, e elegante, problemas de olimpíadas nacionais e internacionais, como veremos adiante, nesse capítulo.

Vamos entender o que é uma soma telescópica através do nosso primeiro exemplo.

Problema 5.1 (EUA) Se $F(n+1) = \frac{2F(n)+1}{2}$ para $n = 1, 2, \dots$ e $F(1) = 2$, então determine o valor de $F(101)$.

Solução: Podemos reescrever a equação que define os termos dessa sequência recursivamente (isto é, em função de termos anteriores) da seguinte forma:

$$F(n+1) - F(n) = \frac{1}{2}.$$

Assim, variando n de 100 a 1 na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} F(101) - F(100) &= \frac{1}{2} \\ F(100) - F(99) &= \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ F(3) - F(2) &= \frac{1}{2} \\ F(2) - F(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Somando estas igualdades membro a membro, obtemos que $F(101) - F(1) = 50$, ou seja,

$$F(101) = 50 + F(1) = 50 + 2 = 52.$$

□

Fica assim entendido que somas telescópicas são somas em que os termos intermediários são cancelados e, no final, restam apenas o primeiro e o último.

Problema 5.2 Encontre o valor da soma

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{999 \times 1000}.$$

Solução: Observe que os denominadores são produtos de números consecutivos e que, de modo geral,

$$\frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{1000} \\ &= \frac{999}{1000}. \end{aligned}$$

□

Problema 5.3 O pagamento de um certo pintor aumenta de acordo com o dias em que ele trabalha. No primeiro dia ele recebeu 1 real. no segundo dia ele recebeu o que tinha ganho no primeiro dia mais 2 reais. No terceiro dia ele recebeu o que tinha recebido no segundo dia mais 3 reais. Desse modo, quanto o pintor irá receber no centésimo dia?

Solução: Seja L_n o valor pago no n -ésimo dia. O problema no diz que

$$L_{n+1} = L_n + (n + 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_n &= n + 1 \\ L_n - L_{n-1} &= n \\ &\vdots \\ L_3 - L_2 &= 3 \\ L_2 - L_1 &= 2 \end{aligned}$$

Somando as igualdades membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_1 &= L_{n+1} - 1 \\ &= (n+1) + n + \cdots + 3 + 2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$L_{n+1} = (n+1) + n + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Problema 5.4 Prove que

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

é um número inteiro.

Solução: Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1 - k} \\ &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}. \end{aligned}$$

□

Assim,

$$\begin{aligned} S &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - \sqrt{1} \\ &= 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

Problema 5.5 (EUA) Considere uma sequência u_n definida por $u_1 = 5$ e a relação

$$u_{n+1} - u_n = 3 + 4(n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se u_n é expresso como um polinômio em n , determine a soma algébrica de seus coeficientes.

Solução: Podemos escrever

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= 3 + 4(n-2) \\ u_{n-1} - u_{n-2} &= 3 + 4(n-3) \\ &\vdots \\ u_3 - u_2 &= 3 + 4 \cdot 1 \\ u_2 - u_1 &= 3 + 4 \cdot 0 \end{aligned}$$

e, somando-se estas igualdades membro a membro, obtemos

$$u_n - u_1 = 3(n-1) + 4[1 + 2 + \dots + (n-3) + (n-2)]$$

de onde se extrai

$$u_n - 5 = 3(n-1) + 2(n-2)(n-1),$$

o que nos dá

$$u_n = 2n^2 - 3n + 6$$

cuja soma dos coeficientes é 5. □

Vamos agora resolver algumas recorrências lineares, obtidas no capítulo anterior.

Problema 5.6 Considere a sequência $(2, 5, 8, 11, \dots, a_n, \dots)$. Conjecture uma fórmula por recorrência para o n -ésimo termo dessa sequência.

Solução: Quando a esta sequência foi tratada no Exemplo 4.2, chegamos a conclusão que, de modo geral,

$$a_{n+1} - a_n = 3$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 3 \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 3 \\ &\vdots \\ a_3 - a_2 &= 3 \\ a_2 - a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, temos

$$a_n - a_1 = a_n - 2 = 3(n-1)$$

e, conseqüentemente,

$$a_n = 2 + 3(n - 1).$$

□

Exemplo 5.7 Observe a disposição, abaixo, da seqüência dos números naturais ímpares:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 3 & 5 & & & & & \\ 7 & 9 & 11 & & & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Determine uma fórmula fechada para o termo geral da seqüência formada pelo primeiro elemento de cada linha.

Solução: Vimos no Exemplo 4.5 que a seqüência em questão é dada recursivamente por

$$a_{n+1} = a_n + 2n, \quad \text{com } a_1 = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 2(n - 1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(n - 2) \\ &\vdots \\ a_3 - a_2 &= 2 \cdot 2 \\ a_2 - a_1 &= 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, temos que

$$a_n - a_1 = a_n - 1 = 2[1 + 2 + \cdots + (n - 2) + (n - 1)],$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n(n - 1) \\ &= n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

□

Com a fórmula fechada acima é possível encontrarmos o primeiro termo de qualquer linha do arranjo triangular considerado. Contudo, para termos plena certeza dessa generalização, vamos buscar validá-la no Capítulo 5, por meio da Indução Matemática.

Problema 5.8 Considerando a sequência $(6, 2, 0, 0, 2, 6, \dots)$, observamos que ela é uma PA de segunda ordem, pois é uma sequência na qual as diferenças entre termos consecutivos constituem uma PA de primeira ordem, a saber, $(-4, -2, 0, 2, 4, \dots)$. Determine uma fórmula para o termo geral desta sequência.

Vimos, mais geralmente, que a sequência em questão é definida recursivamente por

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 8, \quad \text{com } a_1 = 6$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 2n - 8 \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(n-1) - 8 \\ &\vdots \\ a_3 - a_2 &= 2 \cdot 3 - 8 \\ a_2 - a_1 &= 2 \cdot 2 - 8. \end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtemos

$$a_n - a_1 = a_n - 6 = 2[n + (n-1) + \dots + 3 + 2] - 8(n-1),$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} a_n &= 6 + (n-1)(n+2) - 8(n-1) \\ &= n^2 - 7n + 12. \end{aligned}$$

Problema 5.9 Considere a sequência de triângulos, com palitos de fósforo, exibida no Problema 4.7. Determine uma fórmula fechada para o n -ésimo termo da sequência com base na recorrência estabelecida no capítulo anterior.

Solução: A recorrência obtida na seção precedente foi

$$a_n = a_{n-1} + 3n, \quad \text{com } a_1 = 3$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 3n \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 3(n-1) \\ &\vdots \\ a_3 - a_2 &= 3 \cdot 3 \\ a_2 - a_1 &= 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

e, somando-se estas igualdades membro a membro,

$$a_n - a_1 = a_n - 3 = 3[n + (n-1) + \cdots + 3 + 2],$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} a_n &= 3[n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1] \\ &= \frac{3n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

□

Estabeleça uma fórmula fechada para a Pizza de Steiner, cuja a fórmula por recorrência é

$$R_n = R_{n-1} + n, \quad \text{com } R_1 = 2.$$

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} R_n - R_{n-1} &= n \\ R_{n-1} - R_{n-2} &= n-1 \\ &\vdots \\ R_3 - R_2 &= 3 \\ R_2 - R_1 &= 2 \end{aligned}$$

Somando as igualdades membro a membro, temos que

$$R_n - R_1 = R_n - 2 = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} R_n &= [n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1] + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

□

Problema 5.10 Conjecturar, no problema da Torre de Hanói, uma fórmula fechada para a sequência do número de mínimo de movimentos de acordo com o número de discos.

Solução: Note que

$$\begin{aligned}M_1 &= 1 \\M_2 &= 3 = M_1 + 2 = M_1 + 2^1 \\M_3 &= 7 = M_2 + 4 = M_2 + 2^2 \\M_4 &= 15 = M_3 + 8 = M_3 + 2^3 \\M_5 &= 31 = M_4 + 16 = M_4 + 2^4.\end{aligned}$$

Olhando o padrão estabelecido até aqui, podemos conjecturar que

$$M_n = M_{n-1} + 2^{n-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}M_n - M_{n-1} &= 2^{n-1} \\M_{n-1} - M_{n-2} &= 2^{n-2} \\&\vdots \\M_3 - M_2 &= 2^2 \\M_2 - M_1 &= 2\end{aligned}$$

e, somando-se estas igualdades membro a membro,

$$M_n - M_1 = M_n - 1 = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n,$$

ou seja,

$$M_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n.$$

Perceba que $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

Neste caso,

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1$$

e, conseqüentemente,

$$M_n = 2^n - 1.$$

□

Capítulo 6

Provando as Generalizações das Sequências

Pretendemos aqui verificar a validade de algumas das generalizações feitas ao longo do texto, tanto aquelas obtidas no Capítulo 4, quanto outras inferidas por analogia. Para isso, faremos uso do Princípio de Indução Matemática, por se caracterizar como uma ferramenta de enorme potencial em termos de Demonstrações Matemáticas, e por contribuir significativamente com todos os blocos de conteúdos, em especial a Aritmética e a Álgebra.

6.1 Problemas de demonstração

Problema 6.1 Considere a sequência $(2, 5, 8, 11, \dots, a_n, \dots)$. Prove por indução matemática que

$$a_n = 3n - 1,$$

para todo $n \geq 1$.

Solução: • Passo base: para $n = 1$, temos que

$$3 \cdot 1 - 1 = 2$$

e o passo base é verdadeiro.

• Passo indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ deve-se mostrar que é verdadeira para $n = k + 1$.

• Hipótese de indução: $a_k = 3k - 1$, $k \geq 1$.

• Deve-se mostrar que: $a_{k+1} = 3(k + 1) - 1 = 3k + 2$.

Por inspeção percebeu-se que a fórmula de recorrência gera: $a_{k+1} = a_k + 3$ e, como

por hipótese $a_k = 3k - 1$, temos que

$$a_{k+1} = (3k - 1) + 3 = 3k + 2.$$

Logo, o n -ésimo termo da sequência $(2, 5, 8, 11, \dots, a_n, \dots)$ é $a_n = 3n - 1$, para todo $n \geq 1$. \square

Problema 6.2 Observe a sequência $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots)$. Temos que

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4,$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9,$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

\vdots

Podemos, assim, conjecturar que, de modo geral

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Verifique a validade desta conjectura utilizando Indução Matemática.

Solução: • Passo base: para $n = 1$, temos que

$$S_1 = 1 = 1^2$$

e o passo base é verdadeiro.

• Passo indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ deve-se mostrar que é verdadeira para $n = k + 1$.

• Hipótese de indução: $S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$

• Deve-se mostrar que: $S_{k+1} = (k + 1)^2$.

Temos que

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 2(k + 1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Logo, $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geq 1$. \square

Problema 6.3 Seja $(3, 9, 18, \dots, a_n, \dots)$ a sequência dos números de palitos de fósforo do Problema 4.7. Prove que

$$a_n = \frac{3n^2 + 3n}{2},$$

para todo $n \geq 1$.

Solução: • Passo base: para $n = 1$, temos que

$$\frac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1}{2} = 3 = a_1$$

e o passo base é verdadeiro.

• Passo indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ deve-se mostrar que é verdadeira para $n = k + 1$.

• Hipótese de indução: $a_k = \frac{3k^2 + 3k}{2}$

• Deve-se mostrar que: $a_{k+1} = \frac{3(k+1)^2 + 3(k+1)}{2} = \frac{3k^2 + 9k + 6}{2}$.

No Capítulo 3 vimos que $a_{k+1} = a_k + 3(k+1)$. Assim,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{3k^2 + 3k}{2} + 3(k+1) \\ &= \frac{3k^2 + 3k + 6k + 6}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 9k + 6}{2} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{3n^2 + 3n}{2},$$

para todo $n \geq 1$. □

Problema 6.4 Prove, por Indução Matemática, que número M_n de movimentos realizados, na Torre de Hanói, de acordo com o número n de discos é dado por

$$M_n = 2^n - 1,$$

para todo $n \geq 1$.

Solução: • Passo base: para $n = 1$, temos que

$$2^1 - 1 = 1 = M_1$$

e o passo base é verdadeiro.

• Passo indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ deve-se mostrar que é verdadeira para $n = k + 1$.

• Hipótese de indução: $M_k = 2^k - 1$

• Deve-se mostrar que: $M_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Uma vez que $M_{k+1} = 2M_k + 1$, temos que

$$\begin{aligned}M_{k+1} &= 2(2^k - 1) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1\end{aligned}$$

e, portanto,

$$M_n = 2^n - 1$$

para todo $n \geq 1$. □

Problema 6.5 Verifique se $n^2 \geq 2n + 1$ para todo natural $n \geq 3$.

Solução: • Passo base: para $n = 3$, temos que

$$9 = 3^2 \geq 7 = 2 \cdot 3 + 1$$

e o passo base é verdadeiro.

• Passo indutivo: Se a desigualdade é verdadeira para $n = k$, $k \geq 3$ deve-se mostrar que é verdadeira para $n = k + 1$.

• Hipótese de indução: $k^2 \geq 2k + 1$

• Deve-se mostrar que: $(k + 1)^2 = 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$.

Temos, para $k \geq 3$, que

$$\begin{aligned}(k + 1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ &> k^2 + 2 \\ &> (2k + 1) + 2 \\ &= 2k + 3\end{aligned}$$

e, portanto,

$$n^2 \geq 2n + 1$$

para todo $n \geq 3$. □

Capítulo 7

Considerações Finais

Este trabalho aborda técnicas de resolução de problemas. O foco principal foram as sequências recorrentes, com o intuito de ampliar o estudo das progressões, e, através da análise de outras sequências, estender as generalizações, a princípio por recursão e, por fim, atingindo as fórmulas fechadas, que serão validadas por Indução Matemática.

É imperioso enfatizar que ao caracterizar as Recorrências lineares de 1ª ordem, foi relevante alguns ajustes, sobretudo com o propósito de minimizar a utilização das “fórmulas prontas” tão ojerizadas pelos alunos. Entretanto, cabe aqui ressaltar que isso não depreciou a aprendizagem, pelo contrário, os alunos demonstram dispreendimento na obtenção de uma modelagem matemática.

Outro aspecto que vale ressaltar, foi a contribuição que as fórmulas obtidas por Recorrência trouxe para a construção das generalizações, bem como o protagonismo ao prová-las pelo princípio de Indução Matemática, uma vez que para provar $P(k+1)$, sempre se “recorria” ao termo anterior, e viabilizava substancialmente a demonstração.

Essas temáticas são encontradas com mais frequência em exames de massa como, olimpíadas matemáticas, provas militares, os próprios exames do PROFMAT. No presente trabalho damos ênfase em questões elementares, nos problemas clássicos, e nos itens das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas (OBEMP). Em anexo, encontram-se mais itens propostos nas provas da OBMEP, PROFMAT e outras questões clássicas de princípio de Indução Matemática retiradas de livros das referências.

Ao resolvermos problemas que se encontram em livros didáticos e em olimpíadas de matemática, foi possível evidenciar que os padrões matemáticos, sobretudo das sequências, já estão inseridos nos itens, bastando apenas que o professor tenha as devidas cautelas em adaptá-las ao nível dos seus alunos, para favorecer o conhecimento recursivo na modelagem da resolução.

É impreterível salientar a importância de se iniciar o estudo das sequências, logo no Ensino Fundamental, promovendo experimentações que sejam tanto intrigantes, quanto próximas da realidade do aluno, para que tais ações propicie conjecturas, sejam elas através de construções por recorrência, fórmula fechada ou até mesmo por analogias, pois

as inferências feitas poderão ser comprovadas ou refutadas por Indução Matemática. O que importa de fato é a abstração dos conceitos e a efetivação da aprendizagem, principalmente quando promovemos a autonomia do nosso aprendiz.

Esperamos que este trabalho venha contribuir com a prática docente de sala de aula e que, a partir dele, se viabilize aos alunos a oportunidade de descobrirem padrões, modelando-os na utilização de técnicas indutivas e recursivas.

Numa ação futura, pensamos em direcionar esse instrumento matemático para a verificação de como se dá essa construção de conjecturas e provas no contexto da educação inclusiva dos surdos. Haja vista que seria valorosa uma linguagem adaptada a eles, com o propósito de facilitar o processo de Ensino-aprendizagem em sala de aula, minimizando assim os entraves, entre o professor, o interprete e o aluno.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

DANTAS, S. Torre de Hanói. ND. Disponível em http://jogadamaais.blogspot.com/2013/11/torre-de-hanoi_19.html. Acesso em 15/11/2018.

DÖRRIE, H. Cem Grandes Problemas da Matemática Elementar, Sua História e Solução. Dover, 1965.

FORMIN, D. Círculos Matemáticos / Dmitri Formin, Sergey Genkin....[et al.]; Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

HALMOS, Paul Richard, Naive Set Teory. Editora Van Nostrand, Nova Iorque, 1960.

HEFEZ, A. Aritmética/ Abramo Hefez. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

INDUCTION, RECURSION, AND RECURRENCES. Autoria e ano de publicação desconhecidos. Disponível em https://math.dartmouth.edu/archive/m19f03/public_html/Chapters4-6.pdf. Acesso em 10/11/2018.

MENDES, Marcelo. Polos olímpicos de treinamento – POTI. 2013. <https://www.passeidireto.com/arquivo/49954494/curso-de-matematica-olimpica-potipdf/44>. Curso de algebra – nível 2

NOBRE , José Filho Ferreira. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: Abordando as ordens superiores, https://sca.profnat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160080351. Acesso em 28/11/2018.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino. Técnicas em olimpíadas de matemática/ Marcelo Rufino Oliveira 1ª edição. Vestseller, 2014; v1. Algebra.

PONTE, João Pedro da; BROCARDIO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas na sala de aula. 3ª edição. Lisboa: Autêntica, 2013.

Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Portal
<http://www.obmep.org.br/pic.htm> e <https://www.youtube.com/user/PICOBMEP>
Acesso em 13/10/2018.

RAPOSO JÚNIOR, Anselmo B., Introdução à Análise Real: Notas de Aula. São Luís, 2018.

RUSSELL, B. Introdução à filosofia da matemática. 10ª impressão. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1963

SILVA, Ricardo Augusto Oliveira. Uso do princípio de indução matemática e fórmulas de recorrência no ensino básico, https://sca.proformat-sbm.org.br/sca.v2/get_tcc3.php?id=150260878. Acesso em 14/10/2018.

TEMÁTICA BARSA. Expressões algébricas. 9 v. Rio de Janeiro: Barsa Planeta, 2005b. p. 86-96.