



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DAYLANNE FERREIRA RIBEIRO

SUPERFÍCIES ESTÁVEIS COM CURVATURA MÉDIA  
CONSTANTE E BORDO CIRCULAR

São Luís - MA

2018

DAYLANNE FERREIRA RIBEIRO

SUPERFÍCIES ESTÁVEIS COM CURVATURA MÉDIA  
CONSTANTE E BORDO CIRCULAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Daylanne Ferreira.

Superfícies estáveis com curvatura média constante e  
bordo circular / Daylanne Ferreira Ribeiro. - 2018.  
59 f.

Orientador(a): Ivaldo Paz Nunes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São  
Luís, 2018.

1. Superfícies com bordo circular. 2. Superfícies com  
curvatura média constante. 3. Superfícies estáveis. I.  
Nunes, Ivaldo Paz. II. Título.

DAYLANNE FERREIRA RIBEIRO

SUPERFÍCIES ESTÁVEIS COM CURVATURA MÉDIA  
CONSTANTE E BORDO CIRCULAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática  
da Universidade Federal da Maranhão como  
requisito para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

Aprovado em 14 de dezembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (Orientador)

UFMA

---

Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spíndola

UFMA

---

Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves

UFMA

*A Deus, aos meus pais, ao meu noivo e ao  
meu querido sobrinho João Guilherme.*

---

# AGRADECIMENTOS

A Deus, por seu amor indescritível e sua fidelidade, pelo dom da vida e por sempre estar ao meu lado; ao meu salvador e fiel amigo Jesus, por me fortalecer nos momentos mais difíceis; ao meu consolador Espírito Santo, por me manter firme e pelos ensinamentos.

Aos meus pais, Manoel Ivamar S. Ribeiro e Maria Francisca Ferreira, por acreditarem em mim desde o começo, pelo cuidado e amor. Aos meus irmãos David Matheus F. Ribeiro e Dayse Lanay F. Ribeiro, por serem tão especiais pra mim.

A Helmiton Valdemar, por estar tão perto mesmo estando tão distante, por todo carinho, compreensão, amor e apoio.

Aos meus colegas da Pós-Graduação, em especial, Carla Regina da S. Santos, William Luis L. Pereira, Felipe F. Olivera e Márcio Eduardo G. Silva, por todos os momentos que enfrentamos juntos, momentos de grande aprendizado.

Aos professores que compartilharam seus conhecimentos e foram fundamentais para minha formação e crescimento, entre eles, meus professores do mestrado: Profa. Dra. Vanessa R. Ramos, Prof. Dr. Adecarlos C. Carvalho, Prof. Dr. Marcos Antônio F. de Araújo, Prof. Dr. José Antônio P. F. Marão, Prof. Dr. Maxwell M. de Barros e em particular ao Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes, por ser um exemplo como professor, pela orientação e paciência.

Aos meus amigos da igreja Assembleia de Deus, área 71, pelas orações, conversas, lanches, brincadeiras e principalmente pelo apoio.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo incentivo e apoio financeiro.

*“Instrui ao sábio, e ele se fará mais sábio;  
ensina ao justo, e ele crescerá em enten-  
dimento.”*

*(Provérbios 9:9 - Bíblia Sagrada)*

---

# RESUMO

O modelo matemático de uma bolha de sabão que tem seu bordo em um aro circular é uma superfície cmc com bordo circular. A superfície se forma de maneira a minimizar a área, com volume fixo e bordo fixo. Concentramo-nos no artigo *Stable Constant Mean Curvature Surfaces with Circular Boundary*, por Luis J. Alías, Rafael López e Bennett Palmer [3] e mostramos que, no caso de gênero zero, as únicas superfícies estáveis cmc com bordo circular são as calotas esféricas e os discos planos. Também estendemos este resultado para superfícies em outras formas espaciais, a saber, a esfera  $\mathbb{S}^3$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ .

**Palavras-chave:** Superfícies com curvatura média constante. Superfícies estáveis. Superfícies com bordo circular.

---

# ABSTRACT

The mathematical model of a soap bubble that has its border in a circular hoop is a surface cmc with a circular boundary. The surface is formed in a way to minimize the area, with a fixed volume and fixed boundary. We focus on the article *Stable Constant Mean Curvature Surfaces with Circular Boundary*, by Luis J. Alías, Rafael López and Bennett Palmer [3] and we show that, in the case of genus zero, the only such surfaces are the spherical caps and flat discs. We also extend this result to the case of surfaces in the other space forms, namely the sphere  $S^3$  and the hyperbolic space  $\mathbb{H}^3$ .

**Keywords:** Constant mean curvature surfaces. Stable surfaces. Surfaces with circular boundary.

---

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Noções Básicas . . . . .	13
1.2 Princípio do Argumento . . . . .	19
1.3 Autovalores, Autofunções e Domínios Nodais . . . . .	21
1.4 Princípio do Máximo de Hopf . . . . .	24
<b>2 Superfícies CMC</b>	<b>25</b>
2.1 Fórmulas Variacionais para Superfícies CMC . . . . .	25
2.2 Estabilidade de uma Superfície CMC . . . . .	29
<b>3 Diferencial de Hopf</b>	<b>33</b>
3.1 Parâmetros Isotérmicos . . . . .	34
3.2 Parâmetros Complexos . . . . .	36
<b>4 Superfícies cmc estáveis com bordo circular em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>40</b>
4.1 O Problema para Superfícies Fortemente Estáveis . . . . .	40

4.2	Teorema Principal . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Superfícies cmc estáveis com bordo circular em <math>\mathbb{H}^3</math> e <math>\mathbb{S}^3</math></b>	<b>52</b>
5.1	Teorema Principal no Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$ . . . . .	52
5.2	Teorema Principal no Espaço Esférico $\mathbb{S}^3$ . . . . .	54
	<b>Considerações Finais</b>	<b>56</b>
	<b>Referências</b>	<b>57</b>

---

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Superfície abstrata . . . . .	14
1.2	Aplicação diferenciável $\varphi$ . . . . .	14
1.3	Imersão Isométrica . . . . .	15
1.4	Mapa de Gauss . . . . .	16
1.5	Gênero de uma superfície . . . . .	18
2.1	Superfícies obtidas pela interseção de uma esfera com um plano. . . . .	31
3.1	As métricas coincidem . . . . .	34
4.1	Superfície com bordo circular . . . . .	44
4.2	Curva $C_\varepsilon$ e discos $D_\varepsilon(z_j)$ . . . . .	47
4.3	Curvas $\partial D_\varepsilon(z_j)$ e $C_\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon(z_j)$ . . . . .	48
4.4	Curva $C_\varepsilon \setminus \partial(D_\varepsilon(z_1) \cup D_\varepsilon(z_2))$ . . . . .	49

---

# INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos superfícies cmc imersas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ . O resultado principal devido a Alias-Lopez-Palmer [3], trata do caso em que a superfície é topologicamente um disco. Mostramos que se um disco cmc é estável e possui bordo circular, então o disco é umbílico. Analisamos também as superfícies cmc fortemente estáveis com bordo circular em  $\mathbb{R}^3$ , e mostramos que nesse caso a superfície é um disco plano ou uma pequena calota esférica.

As superfícies cmc têm sido estudadas ao longo dos anos por vários matemáticos. Em especial, as superfícies com curvatura média igual a zero, chamadas de *superfícies mínimas*. As superfícies mínimas foram estudadas por grandes matemáticos como Lagrange, Weierstrass e Riemann. Todavia, as superfícies com curvatura média diferente de zero apresentaram poucos teoremas profundos até meados do século passado.

Em 1951, H. Hopf [19] mostrou que se uma superfície cmc imersa em  $\mathbb{R}^3$  é homeomorfa a esfera  $\mathbb{S}^2$ , então é isométrica a esfera  $\mathbb{S}^2$ . Esse resultado ficou conhecido como *Teorema de Hopf*. Em sua demonstração, Hopf introduziu uma forma quadrática complexa na superfície, que culminou em um grande desenvolvimento da teoria das superfícies com curvatura média diferente de zero. Mais tarde, dois resultados importantes surgiram: entre 1956 [1] e 1962 [2], Alexandrov mostrou que a esfera é a única superfície cmc fechada mergulhada e em 1984, Barbosa - do Carmo [4] mostraram que a esfera é a única superfície cmc estável e fechada.

As superfícies cmc são soluções de problemas variacionais. Por exemplo, uma bolha de sabão que tem seu bordo em um aro redondo é uma superfície cmc com bordo circular. A superfície se forma de maneira a minimizar a área, preservando seu volume fixo e

---

mantendo o bordo fixo. As superfícies que observamos são calotas esféricas, e portanto é natural perguntar se elas são as únicas soluções. A resposta é não, Kapouleas [20] mostrou que existem superfícies cmc (não mergulhadas) com bordo circular de alto gênero.

Podemos então impor alguma restrição, como a de que a superfície está mergulhada ou que seja topologicamente um disco. Nesses casos a resposta é desconhecida, embora o problema tenha sido tratado por diversos autores nos últimos anos (veja [6], [21], [25], [24]).

Neste trabalho mostramos que no caso de gênero zero, uma superfície cmc estável com bordo circular é um disco plano, no caso em que a curvatura média é nula, ou uma calota esférica, no caso em que a curvatura média é diferente de zero.

A dissertação está dividida em cinco capítulos: No primeiro capítulo, revisamos definições básicas e resultados importantes para as principais demonstrações, como o Princípio do Argumento e o Teorema de Courant para Conjuntos Nodais. No segundo capítulo, introduzimos o estudo das superfícies cmc, as fórmulas variacionais da área e do volume de uma superfície cmc e a noção de estabilidade de uma superfície cmc. No terceiro capítulo, estudamos a forma quadrática holomorfa de Hopf, mencionada anteriormente, que é utilizada na demonstração principal. Nos últimos capítulos, mostramos que discos planos e pequenas calotas esféricas são as únicas superfícies cmc fortemente estáveis e em seguida que discos planos e calotas esféricas são os únicos discos estáveis cmc com bordo circular em  $\mathbb{R}^3$  e por fim tratamos do resultado análogo para os espaços  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ .

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

Neste capítulo preliminar, tratamos de assuntos importantes para o entendimento das principais demonstrações. Primeiramente, apresentamos uma breve revisão dos conceitos da geometria diferencial. Nas seções seguintes, focamos nos seguintes teoremas: o Princípio do Argumento, o Teorema de Courant para Domínios Nodais e o Princípio do Máximo de Hopf. Estes teoremas são essenciais para as demonstrações dos resultados que encontram-se nos capítulos 4 e 5. Em cada seção damos as definições necessárias para entendê-los. Algumas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas nas referências de cada seção.

### 1.1 Noções Básicas

Nesta seção, baseada no livro *Differential Geometry of Curves and Surfaces* de Manfredo do Carmo [11], revisamos algumas definições e conceitos da geometria diferencial.

Iniciamos com o conceito de superfície abstrata:

**Definição 1.1.1.** *Uma superfície abstrata ou variedade diferenciável de dimensão 2, é um conjunto  $M$  munido de uma família de aplicações bijetivas  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  de conjuntos abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  em  $M$  tal que*

$$(i) \cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M.$$

(ii) Para cada par  $\alpha, \beta$  com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , temos que  $x_\alpha^{-1}(W)$ ,  $x_\beta^{-1}(W)$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^2$ , e  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ ,  $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$  são aplicações diferenciáveis.

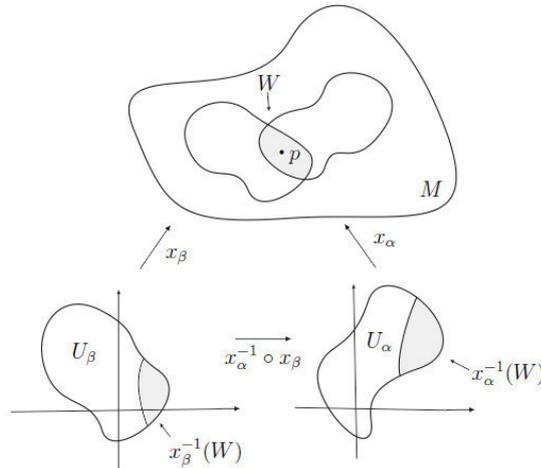


Figura 1.1: Superfície abstrata

O par  $(U_\alpha, x_\alpha)$  com  $p \in x_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma *parametrização* ou *sistema de coordenadas* de  $M$  em torno de  $p$ . Dizemos que  $x_\alpha(U_\alpha)$  é uma *vizinhança coordenada*. Diremos que um subconjunto  $V \subset M$  é aberto em  $M$  se  $x_\alpha^{-1}(V)$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$  para todo  $\alpha$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies abstratas. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é *diferenciável* em  $p \in M_1$  se dada uma parametrização  $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2$  em torno de  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_1$  em torno de  $p$  tal que  $\varphi(x(U)) \subset y(V)$  e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ .  $\varphi$  é *diferenciável* em  $M_1$  se é diferenciável em todo  $p \in M_1$ .

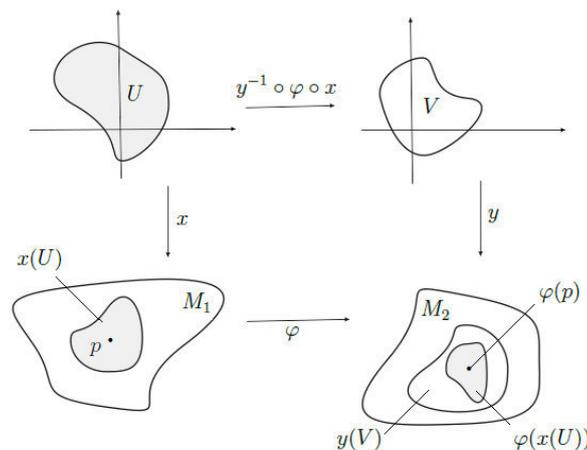


Figura 1.2: Aplicação diferenciável  $\varphi$

Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma *curva* em  $M$ . Suponha que  $\alpha(0) = p$  e seja  $D$  o conjunto de funções em  $M$  que são diferenciáveis em  $p$ . O *vetor tangente* à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D.$$

O conjunto de vetores tangentes em  $p$  é um espaço vetorial bidimensional  $T_pM$  chamado de *espaço tangente* de  $M$  em  $p$ . A escolha de uma parametrização  $x : U \rightarrow M$  em torno de  $p$  determina uma *base associada*  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_q, \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q \right\}$  de  $T_qM$  para todo  $q \in x(U)$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies abstratas e seja  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M_1$  e cada  $w \in T_pM_1$ , considere a curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ , com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Faça  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$  dada por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear bem definida, chamada de *diferencial* de  $\varphi$  em  $p$ .

**Definição 1.1.2.** Uma *superfície geométrica* ou *variedade Riemanniana de dimensão 2* é uma *superfície abstrata*  $M$  munida de uma escolha de um *produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em cada  $T_pM$ ,  $p \in M$ , que *varia diferencialmente* com  $p$  no seguinte sentido. Para alguma (logo, para todas) parametrização  $x : U \rightarrow M$  em torno de  $p$ , as funções  $E(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$ ,  $F(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$ ,  $G(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$  são *funções diferenciáveis* em  $U$ . O *produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é frequentemente chamado uma *métrica Riemanniana* em  $M$ .

**Definição 1.1.3.** Uma *aplicação diferenciável*  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de uma *superfície abstrata*  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma *imersão* se a *diferencial*  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_p\mathbb{R}^3$  é *injetiva*. Dizemos assim que  $M$  está *imersa* em  $\mathbb{R}^3$ . Se  $M$  tiver uma *métrica*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\langle v, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)}$ ,  $v, w \in T_pM$  dizemos que  $\varphi$  é uma *imersão isométrica*.

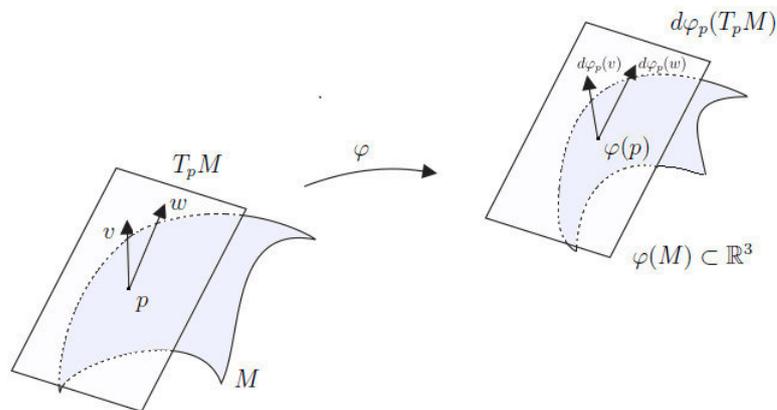


Figura 1.3: Imersão Isométrica

**Definição 1.1.4.** Uma imersão  $\varphi$  é chamada de mergulho se  $\varphi : M \rightarrow \varphi(M)$  é um homeomorfismo e dizemos que a superfície  $M$  está mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma parametrização de uma superfície regular  $M$  em um ponto  $p \in M$ . Podemos escolher para cada  $\varphi(U)$ , um vetor normal unitário pela regra

$$N(q) = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}(q), \quad q \in \varphi(U).$$

Logo,  $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável que associa a cada  $q \in \varphi(U)$  um vetor normal unitário.

De maneira geral, se  $V \subset M$  é um conjunto aberto em  $M$  e  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação que associa a cada  $q \in V$  um vetor normal unitário em  $q$ , dizemos que  $N$  é um campo diferenciável de vetores normais unitários em  $V$ .

Dizemos que uma superfície regular é orientável se admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície. A escolha de tal campo é chamada uma orientação de  $M$ .

Toda a superfície coberta por um único sistema de coordenadas é trivialmente orientável. Assim, toda superfície é localmente orientável, e orientação é uma propriedade global, no sentido de que envolve toda a superfície.

**Definição 1.1.5.** Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , toma seus valores na esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ , assim definida, é chamada aplicação ou mapa de Gauss de  $M$ .

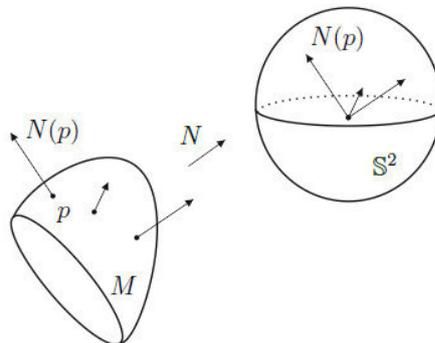


Figura 1.4: Mapa de Gauss

**Definição 1.1.6.** Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície orientável  $M$ . O produto interno natural do  $\mathbb{R}^3$ , que é uma forma bilinear e simétrica, induz em cada plano

tangente  $T_pM$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , a esse produto interno corresponde uma forma quadrática  $I_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle = |v|^2$$

que é chamada de primeira forma fundamental da superfície  $M$ .

Geometricamente, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície sem fazer menção ao espaço ambiente onde está a superfície.

**Definição 1.1.7.** A aplicação  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  é uma aplicação linear auto-adjunta (ver [11]), então podemos associar a  $dN_p$  uma forma quadrática  $\sigma_p$  em  $T_pM$ , dada por

$$\sigma_p(u, v) = -\langle (dN)_p(u), v \rangle, \quad u, v \in T_pM.$$

A forma quadrática  $\sigma_p(u, v)$  é chamada a segunda forma fundamental de  $M$  em  $p$ .

**Observação 1.1.1.** Realizando alguns cálculos, obtemos  $|\sigma|^2 = 4H^2 - 2K$  e  $|\sigma|^2 \geq 2H^2$  em  $M$ . Neste último, a igualdade se verifica em um ponto  $p$  se, e somente se,  $p$  é umbílico.

Usando a notação clássica  $\{E, F, G\}$  e  $\{e, f, g\}$  para os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. Em coordenadas locais  $x = x(u, v)$ , temos

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle \quad e \quad e = \langle N, x_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, x_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, x_{vv} \rangle.$$

Assim, obtemos as seguintes expressões para a primeira e a segunda forma fundamental, respectivamente:

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{1.1}$$

$$\sigma = e du^2 + 2f du dv + g dv^2. \tag{1.2}$$

**Definição 1.1.8.** A curvatura média  $H$  da superfície  $M$  é definida por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad p \in M,$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são as curvaturas principais de  $\varphi$  em  $p$ . Ou seja, os autovalores do endomorfismo, linear e auto-adjunto, de Weingarten  $A_p = -(dN)_p : T_pM \rightarrow T_pM$ . Em particular, o sinal de  $H$  muda invertendo a orientação  $N$ . O produto das duas curvaturas principais é chamado a curvatura Gaussiana de  $M$ , e é denotado por

$$K = k_1 k_2.$$

Dizemos que  $M$  é uma superfície com *curvatura média constante* se a função  $H$  é constante. Abreviamos isto dizendo que  $M$  é uma *superfície cmc*. No caso particular que  $H = 0$  em  $M$ , dizemos que  $M$  é uma *superfície mínima*.

Em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, a curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  são dadas por

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad (1.3)$$

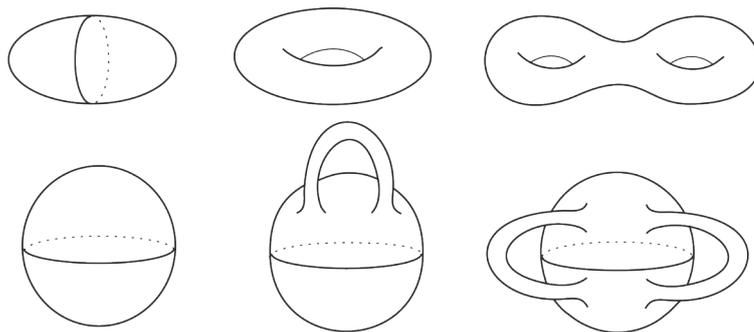
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.4)$$

Um ponto  $p \in M$  é *umbílico* se todas as curvaturas principais de  $M$  são iguais em  $p$ , isto é,  $k_1 = k_2$  em  $p$ . Dizemos que  $M$  é uma superfície umbílica se todos os pontos de  $M$  são umbílicos.

**Lema 1.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície abstrata e  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão conforme totalmente umbílica. Então  $\varphi(M)$  é um pedaço de um plano ou de uma esfera.*

O Teorema de classificação a seguir, se encontra em [19] e nos dá a definição de *gênero* de uma superfície compacta  $M$ .

**Teorema 1.1.1.** *Se  $M$  é uma superfície compacta em  $\mathbb{R}^3$ , então  $M$  é homeomorfa a esfera com  $g$  alças ( $g \geq 0$ ). O número de alças  $g = \frac{2 - \chi(M)}{2}$  é chamado gênero da superfície  $M$ , onde  $\chi$  é a característica de Euler-Poincaré da superfície  $M$ .*



Esfera com zero alças    Esfera com uma alça    Esfera com duas alças

Figura 1.5: Gênero de uma superfície

## 1.2 Princípio do Argumento

Apresentamos agora um teorema da análise complexa conhecido como *Princípio do Argumento*. Esse teorema é uma aplicação da teoria de resíduos para localizar zeros de uma função holomorfa. Antes disso, de maneira sucinta, revisamos as definições de função holomorfa, zeros e singularidades de uma função holomorfa (ver [33], [9], [30]).

**Definição 1.2.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definida em um aberto  $U \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é holomorfa se existe o limite*

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \forall z \in U.$$

A função  $f = u + iv \in C^1$ ,  $u$  e  $v$  funções reais, é holomorfa se satisfaz as *equações de Cauchy*, dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Definição 1.2.2.** *Um número complexo  $z_0$  é um zero de uma função holomorfa  $f$  se  $f(z_0) = 0$ . Uma função  $f$  tem um zero de ordem  $n$  ou um zero de multiplicidade  $n$  se  $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{n-1}(z_0) = 0$ , mas  $f^n(z_0) \neq 0$ .*

**Exemplo 1.** A função  $f(z) = (z - 7)^3$  tem um zero em  $z_0 = 7$  de multiplicidade 3, pois  $f(7) = 0, f'(7) = 0, f''(7) = 0, f'''(7) = 6 \neq 0$ .

Uma função holomorfa  $f$  que tem um zero de multiplicidade  $n$  em  $z_0$  pode ser escrita como  $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ , com  $g(z)$  holomorfa em  $z_0$  e  $g(z_0) \neq 0$ .

**Definição 1.2.3.** *O ponto  $z_0$  é um ponto singular ou uma singularidade de uma função complexa  $f$ , quando  $f$  não é holomorfa nesse ponto. Se o ponto  $z_0$  é uma singularidade de  $f$  e existe alguma vizinhança  $0 < |z - z_0| < r$  de  $z_0$  em que  $f$  é holomorfa, então  $z_0$  é uma singularidade isolada.*

No domínio  $0 < |z - z_0| < r$ , a função  $f$  é representada pela série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k. \quad (1.5)$$

A parte com potências negativas da série de Laurent em (1.5) é chamada de *parte principal* e a parte com potências positivas é chamada de *parte analítica*.

A classificação de um ponto singular  $z_0$  da função complexa  $f$  depende do número de termos na parte principal da expansão de Laurent de  $f$ .

- Se a parte principal for zero, então  $z_0$  é uma *singularidade removível*.
- Se a parte principal contiver um número finito de termos não nulos,  $z_0$  é um *polo*. Seja  $a_{-n}$  o último coeficiente não nulo da parte principal, então  $z_0$  é um *polo de ordem  $n$* . Quando  $n = 1$ , ou seja, a parte principal possui apenas um termo não nulo, então  $z_0$  é chamado de *polo simples*.
- Se a parte principal contiver um número infinito de termos não nulos,  $z_0$  é um *singularidade essencial*.

Uma função holomorfa  $f$  que tem um polo de ordem  $n$  em  $z_0$  pode ser escrita como  $f(z) = (z - z_0)^{-n}g(z)$ , com  $g(z)$  holomorfa em  $z_0$  e  $g(z_0) \neq 0$ .

**Definição 1.2.4.** *O resíduo de  $f$  no ponto singular isolado  $z_0$  é o coeficiente  $a_{-1}$  da expansão de Laurent de  $f$ .*

Agora introduzimos o Princípio do Argumento da seguinte maneira. A função  $\log f(z)$  tem “valor múltiplo”, pois não pode ser definida sem ambiguidade no conjunto onde  $f(z) \neq 0$ . No entanto, pode ser definida como  $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$ , onde  $\log |f(z)|$  é o logaritmo usual do número positivo  $|f(z)|$  (e, portanto, é definido de forma não ambígua), enquanto  $\arg f(z)$  é alguma determinação do argumento. Note que em qualquer caso, a derivada do  $\log f(z)$  é  $f'(z)/f(z)$ , que tem valor único, e a integral

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

pode ser interpretada como a mudança no argumento de  $f(z)$  quando o ponto  $z$  completa uma volta ao longo de  $C$  no sentido positivo. Além disso, assumindo que a curva é fechada, essa mudança de argumento é determinada inteiramente pelos zeros e polos de  $f$  dentro de  $C$ .

Se  $f$  é holomorfa e tem um zero de ordem  $n$  em  $z_0$ , podemos escrever

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

onde  $g$  é holomorfa e não se anula em nenhuma vizinhança de  $z_0$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n(z - z_0)^{n-1}g(z) + (z - z_0)^n g'(z)}{(z - z_0)^n g(z)} \\ &= \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

A conclusão é que se  $f$  tem um zero de ordem  $n$  em  $z_0$ , então  $f'/f$  tem um polo simples com resíduo  $n$  em  $z_0$ . De maneira semelhante, se  $f$  tem um polo de ordem  $n$  em  $z_0$ , isto é, se  $f(z) = (z - z_0)^{-n}h(z)$ ,  $f'/f$  tem um polo simples com resíduo  $-n$  em  $z_0$ , pois

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{(z - z_0)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Portanto, a função  $f'/f$  terá polos simples nos zeros e polos de  $f$ , e o resíduo é simplesmente a ordem do zero de  $f$  ou o negativo da ordem do polo de  $f$ . Como resultado, uma aplicação da fórmula do resíduo nos dá o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.1** (Princípio do argumento). *Seja  $C$  uma curva simples fechada em um domínio  $D$ . Seja  $f$  uma função holomorfa em  $D$ , exceto em um número finito de polos no interior de  $C$ , e de forma que  $f$  não tenha zeros ou polos em  $C$ . Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_0 - n_p,$$

onde  $n_0$  e  $n_p$  são o número total de zeros e de polos de  $f$  no interior de  $C$ , respectivamente. Zeros e polos contados segundo sua ordem. A curva  $C$  é percorrida no sentido positivo.

### 1.3 Autovalores, Autofunções e Domínios Nodais

O resultado importante desta seção é o Teorema de Courant para Domínios Nodais e os resultados que seguem deste teorema. Para isso, definimos o Laplaciano de uma função, autovalores e autofunções do problema de Dirichlet e domínios nodais de uma autofunção  $f_j$ . Esta seção está baseada nas seguintes referências: Chavel [7], Courant-Hilbert [10], Cheng [8], Biezuner [5] e da Silva [13].

**Definição 1.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana, definimos o Laplaciano de uma função  $f$ , como a função suave  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess } f),$$

onde  $\text{Hess } f_p(u, v) = v(df(u)) - df(\nabla_v u)$ ,  $u, v \in T_p M$ .

Sejam  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves, o Laplaciano possui as seguintes propriedades:

- (i)  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$ ;
- (ii)  $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ .

Enunciamos agora o problema de Dirichlet.

**Problema de Dirichlet 1.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade, compacta e conexa, com bordo não vazio. Encontre todos os números reais  $\lambda$  para os quais existe um solução não trivial  $f \in C^2(M) \cap C^0(M)$ , satisfazendo a equação*

$$\Delta f + \lambda f = 0$$

e a condição de fronteira

$$f = 0 \quad \text{em} \quad \partial M.$$

Os números reais  $\lambda$  no problema acima são conhecidos como *autovalores* de  $\Delta$  e o espaço vetorial das soluções desse problema para um autovalor  $\lambda$  dado é o *autoespaço* associado a  $\lambda$ . Os elementos de cada autoespaço são as chamadas *autofunções*.

Se  $f_1, f_2, \dots$  é uma sequência ortonormal em  $L^2(M)$ ,

$$0 = \int_M f_1 f_2 dx = \dots = \int_M f_{j-1} f_j dx,$$

tais que  $f_j$  é uma autofunção de  $\lambda_j$  para cada  $j = 1, 2, \dots$ , então  $\{f_1, f_2, \dots\}$  é uma base ortonormal de  $L^2(M)$ . Em particular, para  $g \in L^2(M)$ , temos:

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} (g, f_j) f_j$$

em  $L^2(M)$ .

**Teorema 1.3.1** (Desigualdade de Rayleigh). *Considere o problema de Dirichlet e seus autovalores  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , onde cada autovalor é repetido o número de vezes igual a sua multiplicidade. Seja  $\{f_1, f_2, \dots\}$  uma base ortonormal de  $L^2(M)$ , tais que  $f_j$  é uma autofunção de  $\lambda_j$  para cada  $j = 1, 2, \dots$ , e  $f$  é uma função em  $C_0^\infty(M)$ , com  $f \neq 0$ , satisfazendo  $0 = \int_M f f_1 dx = \dots = \int_M f f_{k-1} dx = 0$ . Então temos a desigualdade*

$$\lambda_k \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2 dx}{\int_M f^2 dx}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se,  $f$  é uma autofunção de  $\lambda_k$ .

O quociente acima

$$\frac{\int_M |\nabla f|^2 dx}{\int_M f^2 dx}$$

é chamado de *quociente de Rayleigh*.

**Definição 1.3.2.** Se  $\lambda_j$  é um autovalor do laplaciano em  $M$  e  $f_j$  é uma autofunção associada, definimos o conjunto nodal de  $f_j$  por

$$\Gamma_j = \{x \in M : f_j(x) = 0\}.$$

Assim, o conjunto nodal de  $f_j$  é simplesmente o conjunto dos pontos onde  $f_j$  se anula. Se  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão 2, o conjunto nodal também é chamado de linha nodal. As componentes conexas de  $M \setminus \Gamma_j$  são chamadas os domínios nodais de  $f_j$ .

**Teorema 1.3.2** (Teorema de Courant para Conjuntos Nodais). *Sejam  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$  os autovalores de Dirichlet do laplaciano e  $f_1, f_2, \dots, f_j, \dots$  as respectivas autofunções associadas. Então  $f_j$  possui no máximo  $j$  domínios nodais.*

Temos o seguinte corolário:

**Corolário 1.3.1.** A primeira autofunção  $f_1$  sempre tem sinal constante;  $\lambda_1$  é caracterizado como sendo o único autovalor com autofunção de sinal constante.

Observe que, como  $f_2 \perp f_1$ , a segunda autofunção  $f_2$  muda de sinal. Anunciamos assim a proposição:

**Proposição 1.3.1.** *O número de domínios nodais de  $f_2$  é exatamente 2. Autofunções associadas a outros autovalores  $\lambda_j$ ,  $j \neq 1, 2$  possuem pelo menos dois domínios nodais.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, o número de domínios nodais de  $f_2$  não pode ser maior que 2. Uma autofunção  $f_1$  associada ao primeiro autovalor  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  tem o mesmo sinal em  $M$ , e como  $f_1 \perp f_2$ , então  $f_2$  muda de sinal em  $M$ , e portanto não possui apenas um domínio nodal. Este mesmo argumento de ortogonalidade,  $f_1 \perp f_j$  se  $j \neq 1, 2$ , implica que qualquer autofunção associada a um autovalor diferente de  $\lambda_1$  necessariamente muda de sinal em  $M$ . □

**Teorema 1.3.3** (da Divergência I). *Se  $X$  é uma campo de vetores  $C^1$  em  $M$  com suporte compacto então*

$$\int_M \operatorname{div} X \, dV = 0$$

**Teorema 1.3.4** (da Divergência II). *Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  em  $M$  com suporte compacto. Então:*

$$\int_M \operatorname{div} X \, dV = \int_{\partial M} \langle X, v \rangle \, dA$$

onde  $v$  é vetor unitário normal e exterior a  $\partial M$ .

## 1.4 Princípio do Máximo de Hopf

Finalizamos o capítulo com o princípio do máximo de E. Hopf para superfícies. Dizemos que duas superfícies tocam-se num ponto  $p$ , se elas são tangentes em algum ponto interior comum  $p$ , as orientações em ambas as superfícies coincidem em  $p$  e uma delas está acima da outra em uma vizinhança de  $p$  com respeito ao sistema de coordenadas dado pelo plano tangente em  $p$  e pelo vetor normal unitário em  $p$ . Então, por [26], temos

**Teorema 1.4.1** (Princípio do Máximo de E. Hopf). *Seja  $M_1, M_2$  duas superfícies cmc com a mesma curvatura média  $H$ . Se elas se tocam em um ponto  $p$ , então ambas as superfícies coincidem.*

Em relação ao princípio do máximo, é um fato básico da geometria diferencial que, se duas superfícies  $M_1, M_2$  tocam-se em algum ponto interior  $p$  e  $M_1$  está acima de  $M_2$  em uma vizinhança de  $p$ , ou seja,  $M_1 \geq M_2$  então  $H_1 \geq H_2$  [26]. Chamamos esse fato de *Princípio de Comparação*.

Em nosso contexto de superfícies compactas, temos [17]:

**Teorema 1.4.2.** *Se  $f$  é uma função suave em  $M$ , tal que  $\Delta f \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ), então  $\max_M f = \max_{\partial M} f$  (resp.  $\min_M f = \min_{\partial M} f$ ) e se  $f$  atinge um máximo (resp. um mínimo) em algum ponto interior de  $M$ , então  $f$  é constante.*

O teorema acima nos diz que se  $\Delta f \geq 0$ , então a função  $f$  atinge um máximo no bordo de  $M$ . Esse teorema é importante para a demonstração do resultado principal. Ainda precisamos do seguinte Lema, que finaliza esta seção:

**Lema 1.4.1.** *Seja  $M$  superfície com  $\partial M \neq \emptyset$ , seja  $\Delta$  o operador laplaciano em  $M$ ,  $f \in C^\infty(M)$  e  $\Delta f \geq 0$  (resp.  $\Delta f \leq 0$ ), suponha que existe um  $p_0 \in \partial M$  tal que  $f$  é contínua em  $p_0$  e  $f(p) < f(p_0)$  (resp.  $f(p) > f(p_0)$ ), para todo  $p \in M \setminus \partial M$ . Se existe a derivada normal  $\frac{\partial f}{\partial n}(p_0)$ , então*

$$\frac{\partial f}{\partial n}(p_0) > 0 \quad \left( \text{resp.} \quad \frac{\partial f}{\partial n}(p_0) < 0 \right),$$

onde  $n$  denota o vetor normal unitário em  $\partial M$  aponta para fora.

**Observação 1.4.1.** *Se  $p_0 \in \partial M$  é um ponto de máximo local (resp. mínimo local) e existe  $\frac{\partial f}{\partial n}(p_0)$ , então é sempre verdade que  $\frac{\partial f}{\partial n}(p_0) \geq 0$  (resp.  $\frac{\partial f}{\partial n}(p_0) \leq 0$ ). A informação adicional dada pelo lema é que a desigualdade acima é estrita.*

Para mais detalhes do Lema acima veja Furtado [15] e Lopez [23].

---

---

## CAPÍTULO 2

---

### SUPERFÍCIES CMC

Nosso objeto de estudo são as superfícies com curvatura média constante (cmc). A condição de que uma imersão  $x$  tem curvatura média constante, é conhecida por ser equivalente ao fato de que  $x$  é um ponto crítico de um problema variacional. Mais precisamente, uma imersão  $x$  tem curvatura média constante se, e somente se,  $x$  é um ponto crítico da área  $A(t)$  para todas as variações preservando o volume [4].

Em vista disto, revisamos alguns resultados básicos da teoria das superfícies cmc, como as fórmulas variacionais e damos uma introdução aos principais problemas, definições e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Por fim, veremos que a estabilidade de uma superfície está relacionada com a segunda variação da área. Algumas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas no livro de López [23] ou ainda no artigo de Barbosa-do Carmo [4].

#### 2.1 Fórmulas Variacionais para Superfícies CMC

Nesta seção fixamos a notação para o restante do trabalho. Seja  $M$  uma superfície suave, conexa e orientável com fronteira  $\partial M$  não vazia e  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão da superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.1.1** (Área). *Seja  $M$  com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzida pela imersão  $x$ . Se  $M$  é uma superfície compacta, a área  $A$  de  $M$  é definida por*

$$A = \int_M dM,$$

onde  $dM$  denota o elemento de área de  $M$ .

**Definição 2.1.2** (Volume). *Se  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão de uma superfície compacta  $M$ , o volume de  $x$  em relação à orientação  $N$  é definido por*

$$V = -\frac{1}{3} \int_M \langle N, x \rangle dM$$

onde  $N$  é o vetor normal unitário ao longo de  $x$  e  $dM$  é o elemento de área de  $M$ .

Uma *variação* de uma imersão  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $X : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , os mapas  $x_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  dados por  $x_t(p) = X(p, t)$  são imersões para todo  $t$ , e para  $t = 0$ ,  $x_0 = x$ .

O campo de vetores variacional de  $x_t$  é definido por

$$\xi(p) = \left. \frac{\partial X(p, t)}{\partial t} \right|_{t=0}, \quad p \in M.$$

**Definição 2.1.3.** *Dizemos que a variação  $x_t$  é admissível se fixa o bordo de  $x$ , isto é,  $x_t(p) = x(p)$  para cada  $p \in M$ . Além disso, se a variação é admissível,  $\xi = 0$  em  $\partial M$ .*

Seja  $M$  uma superfície compacta. Considere a área  $A(t)$  e o volume  $V(t)$  de  $M$  induzidos pela imersão  $x_t$ :

$$A(t) = \int_M dM_t \quad \text{e} \quad V(t) = -\frac{1}{3} \int_M \langle N_t, x_t \rangle dM_t$$

onde  $dM_t$  e  $N_t$  representam o elemento de área de  $M$  induzido por  $x_t$  e o campo unitário normal de  $x_t$ , respectivamente. Obtemos a seguir a fórmula da variação para  $A(t)$  e  $V(t)$ , quando  $t = 0$ ,  $A(0)$  e  $V(0)$  são a área e o volume da imersão inicial  $x$ .

**Proposição 2.1.1** (Primeira variação para a área). *O funcional área  $A(t)$  é diferenciável em  $t = 0$  e*

$$A'(0) = -2 \int_M H \langle N, \xi \rangle dM - \int_{\partial M} \langle \nu, \xi \rangle ds,$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal de  $M$  ao longo de  $\partial M$  e  $H$  é a curvatura média da imersão. Quando a variação é normal, isto é,  $\xi = fN$ , então

$$A'(0) = -2 \int_M H f dM \tag{2.1}$$

*Demonstração.* Nos restringimos ao caso quando o campo de vetores variacional é perpendicular a superfície. Seja  $x_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma variação de  $x$  dada por  $x_t(p) = x(p) + tf(p)N(p)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  com  $f \in C^\infty(M)$ . O campo de vetores variacional é normal a superfície pois  $\xi = fN$ . Um cálculo de  $(dx_t)_p(v)$  nos mostra que

$$(dx_t)_p(v) = v + tf(p)N_p(v) + tdf_p(v)N(p),$$

para  $v \in T_pM$ . Pela compacidade de  $M$ , podemos escolher  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, em sequência obtemos que  $(dx_t)_p(v) \neq 0$  para todo vetor tangente  $v$  e assim,  $x_t$  é uma imersão. Seja  $e_i$  a direção principal de  $p \in M$ . Então

$$(dx_t)_p(e_i) = (1 - tk_i(p)f(p))e_i + tdf_p(e_i)N(p).$$

O Jacobiano de  $x_t$  é

$$\begin{aligned} Jac(x_t) &= |(dx_t)_p(e_1) \times (dx_t)_p(e_2)| \\ &= |-t(1 - tk_2(p)f(p))df_p(e_1)e_1 - t(1 - tk_1(p)f(p))df_p(e_2)e_2 \\ &\quad \times (1 - 2tH(p)f(p) + t^2K(p)f(p)^2)N(p)|. \end{aligned}$$

Daí resulta que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Jac(x_t)(p) = -2H(p)f(p). \quad (2.2)$$

Finalmente, por (2.2) e a fórmula para mudanças de variáveis, descobrimos que

$$A'(0) = \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Jac(x_t) dM = -2 \int_M Hf dM = -2 \int_M H \langle H, \xi \rangle dM,$$

mostrando o resultado. Observe que a fronteira de  $M$  se anula, pois  $\xi \perp T_pM$ .  $\square$

**Proposição 2.1.2** (Primeira variação para o volume). *O funcional volume  $V(t)$  é diferenciável em  $t = 0$  e*

$$V'(0) = - \int_M \langle N, \xi \rangle dM \quad (2.3)$$

Com as fórmulas para a primeira variação da área e do volume, estamos em condições de caracterizar uma superfície com curvatura média constante. Recordemos a motivação das superfícies cmc pelas bolhas de sabão, dizemos que as perturbações feitas na bolha de sabão mantêm o volume de ar constante fechado, quando a variação *preserva o volume*.

**Definição 2.1.4.** Diz-se que uma variação preserva o volume se o funcional  $V(t)$  é constante. Em particular,  $V'(t) = 0$ .

**Lema 2.1.1.** Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície compacta  $M$  e seja  $f \in C^\infty(M)$  com  $\int_M f dM = 0$ . Então existe uma variação preservando o volume cujo campo vetorial variacional é  $\xi = fN$ . Além disso, se  $f = 0$  em  $\partial M$ , então a variação pode ser assumida como admissível.

**Teorema 2.1.1.** Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície compacta  $M$ . Então  $x$  tem uma curvatura média constante  $H$  se, e somente se,  $A'(0) = 0$  para todas as variações admissíveis que preservam o volume.

O resultado anterior foi estabelecido na introdução desta seção, problemas desse tipo são chamados de problemas isoperimétricos. Um procedimento para encontrar pontos críticos de tal problema é, em analogia com o método dos multiplicadores de Lagrange, procurar os pontos críticos do funcional  $J_\lambda$  definido por

$$J_\lambda(t) = A(t) - 2\lambda V(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (2.4)$$

Logo, por (2.1) e (2.3),

$$\begin{aligned} J'_\lambda(0) &= -2 \int_M H \langle N, \xi \rangle dM - 2\lambda \int_M \langle N, \xi \rangle dM \\ &= -2 \int_M (H - \lambda) \langle N, \xi \rangle dM. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Teorema 2.1.2.** Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície compacta  $M$ . Então  $x$  tem curvatura média constante  $H$  se, e somente se,  $J'_H(0) = 0$  para todas as variações admissíveis.

*Demonstração.* Se  $x$  tem curvatura média constante  $H$ , basta tomar  $\lambda = H$  em (2.5). Para provar o contrário, assumindo que existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $J'_\lambda(0) = 0$  para qualquer variação admissível. Em particular, vale para qualquer variação admissível  $x_t$  que preserva o volume, pois  $V'(t) = 0$ , e como  $\lambda$  é uma constante, temos

$$0 = J'_\lambda(0) = A'(0) - 2\lambda V'(0) = A'(0).$$

Como  $A'(0) = 0$ , pelo Teorema 2.1.1, vale para toda variação admissível preservando o volume, concluindo que  $H$  é constante.  $\square$

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $M$  uma superfície compacta e seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H$ . Se  $x_t$  é uma variação admissível de  $x$  e  $\xi = fN$ , então*

$$J_H''(0) = - \int_M f(\Delta f + |\sigma|^2 f) dM.$$

Aqui  $\Delta f$  é o operador Laplaciano de  $f$ . Aqui a função  $f$  satisfaz  $f = 0$  ao longo de  $\partial M$ .

O termo entre parênteses  $L(f) = \Delta f + |\sigma|^2 f$ , é chamado o *operador de Jacobi* da imersão  $x$ . Chamamos  $L(f) = 0$  a *equação de Jacobi*.

**Proposição 2.1.4** (Segunda variação da área). *Seja  $M$  uma superfície compacta e seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H$ . Se  $x_t$  é uma variação admissível preservando o volume e  $f = \langle N, \xi \rangle$ , então*

$$A''(0) = - \int_M f(\Delta f + |\sigma|^2 f) dM. \quad (2.6)$$

*Demonstração.* Sabemos que  $J_H''(t) = A''(t) + 2HV''(t)$ . Como a variação preserva o volume,  $V'(t) = 0$ , portanto,  $J_H''(0) = A''(0)$ , pela proposição anterior segue o resultado.  $\square$

A definição de operador de Jacobi  $L(f)$  pode ser generalizada para outros espaços da seguinte forma, denotamos por  $\overline{M}^3(c)$  os espaços  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ , se a curvatura seccional  $c = -1, 0$  ou  $1$ , respectivamente.

**Definição 2.1.5.** *O operador de Jacobi ou operador de estabilidade de uma imersão  $x : M \rightarrow \overline{M}^3(c)$  com curvatura média constante é definido por*

$$L(f) := \Delta f + (2c + |\sigma|^2)f.$$

**Definição 2.1.6.** *Seja  $x : M \rightarrow \overline{M}^3(c)$  uma imersão de uma superfície  $M$  em  $\overline{M}^3(c)$  com curvatura média constante. Um campo de Jacobi é um campo normal de vetores  $fN$  de  $M$ , onde  $f$  satisfaz  $f = 0$  em  $\partial M$ ,  $\int_M f dM = 0$  e  $f$  é uma solução da equação de Jacobi  $L(f) = 0$ .*

## 2.2 Estabilidade de uma Superfície CMC

Superfícies obtidas em experimentos com bolhas de sabão são superfícies fisicamente realizáveis. Joseph A. F. Plateau conduziu muitos experimentos com películas e bolhas de

sabão produzindo superfícies cmc para uma variedade de contornos [28]. Essas superfícies são *estáveis* e *minimizadoras*, pelo menos localmente, da área de superfície. É natural estudar a segunda variação da área, pois, como veremos a seguir, para uma superfície de menor área, a segunda derivada  $A''(0)$  é não negativa [4].

Como uma superfície com curvatura média constante é caracterizada em termos variacionais pelos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2, existem duas noções diferentes de estabilidade [23].

**Definição 2.2.1.** *Seja  $M$  uma superfície compacta e seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante  $H$ .*

- (i) *A imersão  $x$  é dita estável se  $A''(0) \geq 0$  para todas as variações admissíveis que preservam o volume.*
- (ii) *A imersão  $x$  é dita fortemente estável se  $J_H''(0) \geq 0$  para todas as variações admissíveis.*

Seja  $f$  uma função suave em  $M$ , com  $f = 0$  em  $\partial M$ . Como  $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + |\nabla f|^2$ , o teorema da divergência muda a expressão de  $A''(0)$  para

$$A''(0) = \int_M (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) dM. \quad (2.7)$$

Isso nos permite estender o lado direito da equação (2.7) como uma forma quadrática  $I$  no espaço de Sobolev  $H_0^{1,2}(M)$ , o completamento de  $C_0^\infty(M)$  em  $L^2(M)$ :

$$I : H_0^{1,2}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \int_M (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) dM,$$

onde  $\nabla f$  denota o gradiente de  $f$ . Portanto, uma superfície  $M$  é:

- (i) estável se  $I(f) \geq 0$  para todas as  $f \in H_0^{1,2}(M)$  tal que  $\int_M f dM = 0$ ;
- (ii) fortemente estável se  $I(f) \geq 0$  para todos  $f \in H_0^{1,2}(M)$ .

Um exemplo de uma superfície estável é a esfera.

**Proposição 2.2.1.** *Uma esfera redonda é estável.*

*Demonstração.* Suponha sem perda de generalidade que a esfera é  $\mathbb{S}^2$ . Considere o espectro do operador Laplaciano  $\Delta$ . O primeiro autovalor é  $\lambda_1 = 0$  e as autofunções são

as funções constantes. O segundo autovalor é  $\lambda_2 = 2$ , ver [10]. Da caracterização de Rayleigh de  $\lambda_2$ ,

$$2 = \lambda_2 = \min \left\{ \frac{\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla f|^2 d\mathbb{S}^2}{\int_{\mathbb{S}^2} f^2 d\mathbb{S}^2} : f \in C^\infty(\mathbb{S}^2), \int_{\mathbb{S}^2} f d\mathbb{S}^2 = 0 \right\}.$$

Como  $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla f|^2 d\mathbb{S}^2 \geq 2 \int_{\mathbb{S}^2} f^2 d\mathbb{S}^2 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{S}^2} (|\nabla f|^2 - 2f^2) d\mathbb{S}^2 \geq 0$  para toda função  $f$  diferenciável com  $\int_M f dM = 0$ . Como  $|\sigma|^2 = 2$  em  $\mathbb{S}^2$ , isto prova a estabilidade de  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

De agora em diante, distingamos as duas calotas esféricas, e chamamos uma *pequena calota esférica* se ela estiver contida em um hemisfério e uma *grande calota esférica* se ela contiver um hemisfério, como mostra a figura 2.1. Quando as duas calotas são iguais, temos dois hemisférios e isso ocorre quando o plano passa pelo centro da esfera.

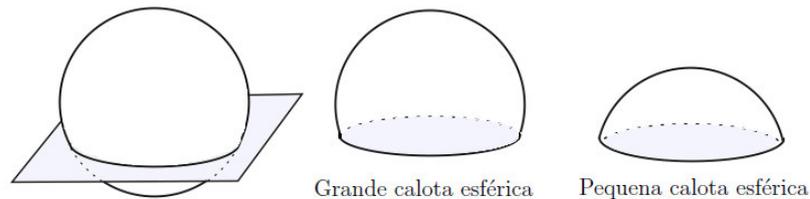


Figura 2.1: Superfícies obtidas pela interseção de uma esfera com um plano.

**Proposição 2.2.2.** *Um disco plano e uma calota esférica são estáveis. Além disso, uma pequena calota esférica e um hemisfério são fortemente estáveis, mas uma grande calota esférica não é fortemente estável.*

*Demonstração.* Se  $M$  é um disco plano então  $|\sigma|^2 = 0$  e  $I(f) = \int_M |\nabla f|^2 dM \geq 0$ , mostrando que  $M$  é fortemente estável. Considere agora uma calota esférica  $M$ . Sem perda de generalidade, suponha que o raio da calota esférica seja 1. Denote by  $S^+$  um hemisfério de  $\mathbb{S}^2$ .

Usamos o espectro do Laplaciano  $\Delta$  com condições de Dirichlet. O primeiro autovalor para o problema de Dirichlet em  $S^+$  é  $\lambda_1(S^+) = 2$ . Pela propriedade de monotonicidade de  $\lambda_1$ , se  $M_1 \subsetneq M_2$ , então  $\lambda_1(M_1) > \lambda_1(M_2)$ , ver [10].

Considere  $f \in C^\infty(M)$  com  $f = 0$  em  $\partial M$  e  $\int_M f dM = 0$ . Estendendo  $f$  para  $\mathbb{S}^2$  por 0, obtemos uma função  $\bar{f} \in H^{1,2}(\mathbb{S}^2)$  com  $\int_{\mathbb{S}^2} \bar{f} d\mathbb{S}^2 = 0$ . Como  $\mathbb{S}^2$  é estável pela proposição anterior,  $I(f) = I(\bar{f}) \geq 0$ .

Seja uma pequena calota esférica  $M$  contida em um hemisfério  $S^+$ ,  $\lambda_1(M) > \lambda_1(S^+) = 2$ . Assim, se  $M$  é uma pequena calota esférica ou um hemisfério, a caracterização variacional de  $\lambda_1(M)$  dá

$$2 \leq \lambda_1(M) \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2 dM}{\int_M f^2 dM}$$

para toda  $f \in C_0^\infty(M)$ . Como  $|\sigma|^2 = 2$  em  $M$ , concluímos que  $I(f) \geq 0$ .

Para uma grande calota esférica  $M$ ,  $\lambda_1(M) < \lambda_1(S^+) = 2$ . Se  $f$  é uma autofunção de  $\lambda_1(M)$ , então

$$\frac{\int_M |\nabla f|^2 dM}{\int_M f^2 dM} = \lambda_1(M) < 2,$$

então  $I(f) < 0$  e  $M$  não é fortemente estável.  $\square$

A forte estabilidade está relacionada ao problema de autovalor associado ao operador de Jacobi  $L = \Delta + |\sigma|^2$ , isto é,

$$\begin{cases} L(f) + \lambda f = 0 & \text{em } M \\ f = 0 & \text{em } \partial M \end{cases} \quad (2.8)$$

O operador  $L$  é elíptico e, portanto, seu espectro tem muitas propriedades. Por exemplo, o primeiro autovalor  $\lambda_1(L)$  é caracterizado por

$$\lambda_1(L) = \min \left\{ \frac{-\int_M f L(f) dM}{\int_M f^2 dM} : f \in C^\infty(M), f = 0 \text{ em } \partial M \right\}$$

Então nós temos imediatamente da equação (2.6):

**Corolário 2.2.1.** *Uma superfície cmc compacta é fortemente estável se, e somente se,  $\lambda_1(L) \geq 0$ .*

---

---

## CAPÍTULO 3

---

### DIFERENCIAL DE HOPF

Introduzimos agora a análise complexa como uma ferramenta básica na teoria das superfícies cmc e damos a definição da diferencial de Hopf. Heinz Hopf, matemático alemão, foi o autor de um importante teorema que motivou o estudo da teoria das superfícies cmc. Ele demonstrou, em 1951, que se  $M$  é uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$ , homeomorfa a esfera  $\mathbb{S}^2$ , com curvatura média  $H$  constante, então  $M$  é isométrica a esfera  $\mathbb{S}^2$ . Esse teorema é conhecido como *Teorema de Hopf*.

Para demonstrá-lo, Hopf introduziu na geometria da superfície métodos de variáveis complexas. Esses métodos eram conhecidos na teoria de superfícies mínimas, mas Hopf, considerando a segunda forma fundamental de  $M$  e usando parâmetros isotérmicos, introduziu uma forma quadrática complexa na superfície, provocando um grande desenvolvimento para a teoria de superfícies cmc.

A forma quadrática de Hopf, que denotaremos  $\phi dz^2$ , também chamada de *diferencial de Hopf*, possui propriedades interessantes:

- 1) Os pontos umbílicos da superfície  $M$  são zeros da função  $\phi$ , ou seja, a diferencial de Hopf nos informa sobre a distribuição dos pontos umbílicos na superfície  $M$ ;
- 2)  $\phi dz^2$  é globalmente definida em  $M$ ;
- 3) Se  $H$  é constante então  $\phi dz^2$  é holomorfa.

A seguir definiremos a forma quadrática de Hopf e mostraremos suas principais propriedades, com base no livro *Differential Geometry in the Large* de H. Hopf [19].

### 3.1 Parâmetros Isotérmicos

Um sistema de coordenadas  $(u, v)$  é chamado *isotérmico*, se os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem  $E = G$  e  $F = 0$ . A métrica  $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$  escrita nesses parâmetros coincide com a métrica euclidiana. De fato, seja  $w = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\langle w, w \rangle = a^2 + b^2$  e  $\lambda^2 = E = G > 0$ . Veja a figura abaixo.

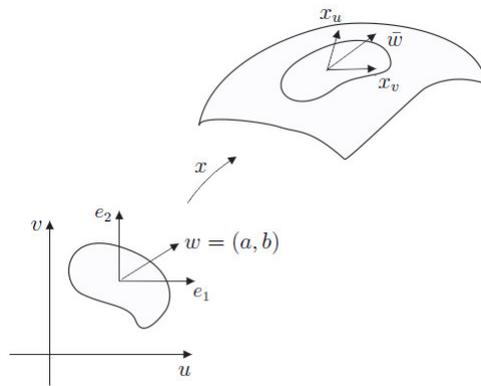


Figura 3.1: As métricas coincidem

Podemos identificar  $w = (a, b) \sim \bar{w} = ax_u + bx_v$ , assim

$$\begin{aligned} ds^2(\bar{w}, \bar{w}) &= a^2E + 2abF + b^2G \\ &= \lambda^2(a^2 + b^2) \\ &= \lambda^2\langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, a métrica  $ds^2$  é, em cada ponto, um múltiplo positivo da métrica do plano. Logo, os parâmetros isotérmicos realizam uma transformação conforme local de  $\mathbb{R}^2$  na superfície  $M$ . Tais parâmetros isotérmicos existem em qualquer superfície [11].

Com isso, para parâmetros isotérmicos, a segunda forma fundamental  $\sigma$  em (1.2) fica

$$\sigma = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

onde,  $e = \langle N, x_{uu} \rangle$ ,  $f = \langle N, x_{uv} \rangle$  e  $g = \langle N, x_{vv} \rangle$ .

A seguir temos, para parâmetros isotérmicos, a curvatura média  $H$  e a curvatura de Gauss, que calculamos em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma funda-

mental (1.3), (1.4),

$$H = \frac{e + g}{2E} \quad (3.1)$$

$$K = \frac{eg - f^2}{E^2} \quad (3.2)$$

As linhas de curvatura, dadas por  $(fE - eF)du^2 + (gE - eG)du dv + (gF - fG)dv^2 = 0$ , em parâmetros isotérmicos se escrevem

$$-fdu^2 + (e - g)du dv + f dv^2 = 0. \quad (3.3)$$

Nos termos dos *símbolos de Christoffel*, tomando  $x = x(u, v)$ , as derivadas de  $x_u$ ,  $x_v$  e  $N$  são:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \left(\frac{E_u}{2E}\right)x_u - \left(\frac{E_v}{2E}\right)x_v + eN \\ x_{uv} &= \left(\frac{E_v}{2E}\right)x_u + \left(\frac{E_u}{2E}\right)x_v + fN \\ x_{vv} &= -\left(\frac{E_u}{2E}\right)x_u + \left(\frac{E_v}{2E}\right)x_v + gN. \\ N_u &= -\frac{e}{E}x_u - \frac{f}{E}x_v \\ N_v &= -\frac{f}{E}x_u - \frac{g}{E}x_v. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando (3.1) e (3.4), obtemos as seguintes equações, chamadas de *equações de Codazzi*

$$e_v - f_u = \langle N_v, x_{uu} \rangle - \langle N_u, x_{uv} \rangle = \frac{E_v}{2E}(e + g) = E_v H,$$

$$f_v - g_u = \langle N_v, x_{uv} \rangle - \langle N_u, x_{vv} \rangle = -\frac{E_u}{2E}(e + g) = -E_u H.$$

Ao diferenciar a curvatura média  $2EH = e + g$  em relação a  $u$  e  $v$ , obtemos:

$$2E_u H + 2EH_u = e_u + g_u$$

$$2E_v H + 2EH_v = e_v + g_v.$$

Com ambas as expressões, as equações de Codazzi agora ficam

$$(e - g)_u + 2f_v = 2EH_u \quad (3.5)$$

$$(e - g)_v - 2f_u = -2EH_v, \quad (3.6)$$

respectivamente.

## 3.2 Parâmetros Complexos

Introduzimos os parâmetros complexos  $z = u + iv$  e  $\bar{z} = u - iv$ , a mudança de tais parâmetros é uma transformação holomorfa local no plano complexo  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  com derivada diferente de zero, portanto  $M$  é localmente uma superfície de Riemann (variedade complexa de dimensão 1) [12].

Sejam os diferenciais lineares

$$\begin{aligned} dz &= du + idv \\ d\bar{z} &= du - idv. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Definimos os operadores diferenciais

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v).$$

Observe que

$$dz(\partial_z) = \frac{1}{2}(du + idv) \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) = 1$$

e analogamente calculamos  $dz(\partial_{\bar{z}}) = 0$ ,  $d\bar{z}(\partial_z) = 0$  e  $d\bar{z}(\partial_{\bar{z}}) = 1$ .

De (3.7) temos

$$\begin{aligned} du &= \left( \frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) \\ dv &= \left( \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tomando a segunda forma fundamental  $\sigma = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$  e reescrevendo-a em parâmetros complexos, de (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \\ &= \frac{e}{4}(dz + d\bar{z})^2 - \frac{1}{2}if(dz + d\bar{z})(dz - d\bar{z}) - \frac{g}{4}(dz - d\bar{z})^2 \\ &= \frac{e}{4}dz^2 + \frac{e}{2}dzd\bar{z} + \frac{e}{4}d\bar{z}^2 - \frac{1}{2}ifdz^2 + \frac{1}{2}ifd\bar{z}^2 - \frac{g}{4}dz^2 + \frac{g}{2}dzd\bar{z} - \frac{g}{4}d\bar{z}^2 \\ &= \left( \frac{e-g}{4} - \frac{1}{2}if \right) dz^2 + \left( \frac{e+g}{2} \right) dzd\bar{z} + \left( \frac{e-g}{4} + \frac{1}{2}if \right) d\bar{z}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e-g}{2} - if \right) dz^2 + (e+g) dzd\bar{z} + \left( \frac{e-g}{2} + if \right) d\bar{z}^2 \right] \end{aligned}$$

Defina  $\phi(z, \bar{z}) = \frac{e-g}{2} - if$  e  $\psi(z, \bar{z}) = e+g$ . Portanto, a segunda forma fundamental pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\phi dz^2 + \psi dzd\bar{z} + \bar{\phi} d\bar{z}^2). \tag{3.9}$$

**Definição 3.2.1.** A componente  $\phi dz^2$  da segunda forma fundamental em parâmetros complexos é chamada forma quadrática de Hopf ou ainda diferencial de Hopf.

Às vezes, quando o parâmetro complexo  $z$  está claramente especificado, nos referimos a função  $\phi$  como a diferencial de Hopf.

Os zeros de  $\phi$  são os pontos umbílicos da imersão. De fato, tomando a função  $\phi$  e calculando  $|\phi|^2$ , obtemos usando (3.1) e (3.2):

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \left(\frac{e-g}{2}\right)^2 + f^2 \\ &= \frac{e^2 - 2eg + g^2 + 4f^2 + 4eg - 4eg}{4} \\ &= \frac{e^2 + 2eg + g^2 - 4(eg - f^2)}{4} \\ &= \left(\frac{e+g}{2}\right)^2 - (eg - f^2) \\ &= E^2(H^2 - K) \end{aligned}$$

Substituindo  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  e  $K = k_1 k_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|\phi|^2}{E^2} &= \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2}{4} - k_1 k_2 \\ &= \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2 - 4k_1 k_2}{4} \\ &= \frac{k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2}{4} \\ &= \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto,

$$\frac{|\phi|}{E} = \frac{|k_1 - k_2|}{2}.$$

Logo, os pontos umbílicos ( $k_1 = k_2$ ) de uma superfície  $M$  são os zeros da função  $\phi$ .

Multiplicando (3.6) por  $i$  e somando com (3.5), as equações de Codazzi são então simplificadas como

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_v\right] + i \left[\left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_u\right] &= E(H_u - iH_v) \\ \phi_{\bar{z}} &= EH_{\bar{z}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, vamos mostrar que a diferencial de Hopf está globalmente definida. Considere as derivadas  $x_z$  e  $N_z$ , onde  $x$  é o vetor posição e  $N$  é o vetor normal à superfície  $M$ .

$$x_z = \frac{1}{2}(x_u - ix_v), \quad N_z = \frac{1}{2}(N_u - iN_v)$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle x_z, N_z \rangle &= \frac{1}{4}(\langle x_u - ix_v, N_u - iN_v \rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle x_u, N_u \rangle - i\langle x_u, N_v \rangle - i\langle x_v, N_u \rangle - \langle x_v, N_v \rangle) \\
&= \frac{1}{4}(-e + if + if + g) \\
&= -\frac{1}{4}(e - g - 2if) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e - g}{2} - if \right) \\
&= -\frac{1}{2} \phi(z, \bar{z}), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

e assim

$$\phi(z, \bar{z}) = -2\langle x_z, N_z \rangle.$$

Estudamos  $\phi$  sob uma mudança de coordenadas conformes  $w = h(z)$ , onde  $h$  é uma função holomorfa. Então  $x_z = h'(z)x_w$ ,  $N_z = h'(z)N_w$  e

$$\phi(z, \bar{z}) = -2\langle x_z, N_z \rangle = -2h'(z)^2\langle x_w, N_w \rangle = h'(z)^2\phi(w, \bar{w}).$$

Consequentemente

$$\phi(w, \bar{w})dw^2 = \phi(w, \bar{w})h'(z)^2dz^2 = \phi(z, \bar{z})dz^2.$$

Essa igualdade significa que  $\phi dz^2$  é uma forma quadrática diferencial definida de maneira global na superfície  $M$ , ou seja,  $\phi dz^2$  não depende da escolha de parâmetros.

**Teorema 3.2.1.** *Uma imersão conforme  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem curvatura média constante,  $H = cte$ , se, e somente se,  $\phi dz^2$  é holomorfa. Nesse caso, ou o conjunto de pontos umbílicos é formado por pontos isolados, ou a imersão é umbílica.*

*Demonstração.* Dada uma parametrização conforme  $x(u, v)$ , se  $H$  é constante, então  $H_u = H_v = 0$  e (3.11) nos dá  $\phi_{\bar{z}} = 0$ , o que equivale a dizer que  $\phi$  é holomorfa em  $M$ . Assim, os pontos umbílicos coincidem com os zeros de uma função holomorfa. Seja  $V$  uma região aberta de  $M$  e  $U$  o conjunto dos pontos umbílicos de  $V$ . Se  $\phi = 0$  em  $V$ , então todos os pontos de  $V$  são pontos umbílicos. Se  $\phi \neq 0$  em  $V$ , então os pontos umbílicos são isolados. De fato se  $p \in U$ ,  $p$  umbílico e zero de  $\phi$ , fosse um ponto de acumulação de  $U$ , então a função  $\phi$  seria zero em uma sequência de pontos de  $U$ , distintos de  $p$  e que converge para  $p$ , mas como  $\phi$  é holomorfa, então  $\phi = 0$  em  $V$ , contradição.  $\square$

O Teorema 3.2.1 também é válido no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  e na esfera  $\mathbb{S}^3$ . Uma consequência direta é o teorema de Hopf [19]:

---

**Teorema 3.2.2** (Hopf). *A única superfície cmc fechada do gênero 0 nos espaços  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$  é a esfera umbílica.*

*Demonstração.* Vide [19].

□

---



---

## CAPÍTULO 4

---

# SUPERFÍCIES CMC ESTÁVEIS COM BORDO CIRCULAR EM $\mathbb{R}^3$

Iniciamos este capítulo provando que as únicas superfícies compactas imersas cmc em  $\mathbb{R}^3$  com bordo circular plano fortemente estáveis são os discos planos e as pequenas calotas esféricas. Sabemos que os discos planos e as calotas esféricas são as únicas superfícies umbílicas compactas com bordo sendo um círculo plano em  $\mathbb{R}^3$  (ver Lema (1.1.1)). Por fim, demonstramos o principal resultado desta dissertação, devido a Alias-Lopez-Palmer [3], o qual afirma que um disco cmc estável cujo bordo é um círculo plano em  $\mathbb{R}^3$  é umbílico. Logo, é um disco plano ou uma calota esférica.

### 4.1 O Problema para Superfícies Fortemente Estáveis

Nesta seção queremos mostrar que as únicas superfícies cmc com bordo circular fortemente estáveis em  $\mathbb{R}^3$  são os discos planos e as pequenas calotas esféricas. Dos resultados da seção (2.4) observamos que a forte estabilidade está relacionada ao problema de autovalor associado ao operador de Jacobi  $L = \Delta + |\sigma|^2$ , isto é,  $L(\psi) + \lambda\psi = 0$  em  $M$  e  $\psi = 0$  em  $\partial M$ .

Sabendo disso, considere  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície compacta  $M$ , com  $\partial M \neq \emptyset$ . Seja  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  a aplicação normal de Gauss. Dado um vetor  $a \in \mathbb{R}^3$ , tal

que  $|a| = 1$ , defina a função  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  pondo

$$\psi(p) = \langle p \times N(p), a \rangle,$$

que representa a componente normal do campo de Killing  $V(p) = p \times a$ , correspondente às rotações ao redor do vetor  $a$ .

Nosso objetivo abaixo é calcular a Hessiana de  $\psi$ . Denote por  $\nabla_0$  e  $\nabla$  as derivadas covariantes de  $M$  e  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Sejam  $u, v \in T_p M$ . Temos

$$\begin{aligned} d\psi_p(u) &= \langle u \times N(p), a \rangle + \langle p \times dN_p(u), a \rangle \\ &= \langle u \times N(p), a \rangle - \langle p \times A_p(u), a \rangle, \end{aligned}$$

onde  $A$  é aplicação de Weingarten da imersão  $x$ .

**Definição 4.1.1.** *A derivada covariante do operador de Weingarten  $A : TM \rightarrow TM$  é definida por*

$$(\nabla A)(u, v) = \nabla_v(A(u)) - A(\nabla_v u). \quad (4.1)$$

Calculando a Hessiana da função  $\psi$ ,  $\text{Hess } \psi_p(u, v)$ , com  $u, v \in T_p M$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Hess } \psi_p(u, v) &= v(d\psi(u)) - d\psi(\nabla_v u) \\ &= v(\langle u \times N(p), a \rangle - \langle p \times A_p(u), a \rangle) - \langle \nabla_v u \times N(p), a \rangle \\ &\quad + \langle p \times A_p(\nabla_v u), a \rangle \\ &= \langle \nabla_v^0 u \times N(p), a \rangle + \langle u \times dN_p(v), a \rangle - \langle v \times A_p(u), a \rangle \\ &\quad - \langle p \times \nabla_v^0(A(u)), a \rangle - \langle \nabla_v u \times N(p), a \rangle + \langle p \times A_p(\nabla_v u), a \rangle \\ &= (\langle \nabla_v u + (\nabla_v^0 u)^N \times N(p), a \rangle + \langle u \times dN_p(v), a \rangle - \langle v \times A_p(u), a \rangle \\ &\quad - \langle p \times \nabla_v(A(u)), a \rangle - \langle \nabla_v^0(A(u)), N \rangle \psi(p) - \langle \nabla_v u \times N(p), a \rangle \\ &\quad + \langle p \times A_p(\nabla_v(u)), a \rangle \\ &= -\langle u \times A_p(v), a \rangle - \langle v \times A_p(u), a \rangle - \langle p \times (\nabla A)(u, v), a \rangle \\ &\quad - \langle A_p(u), A_p(v) \rangle \psi(p). \end{aligned}$$

onde  $\nabla A$  é a derivada covariante de  $A$ .

Por fim, podemos calcular o Laplaciano  $\Delta\psi(p)$ . Sabemos por definição que  $\Delta\psi(p) = \sum_{i=1}^2 \text{Hess } \psi_p(e_i, e_i)$ , para qualquer base ortonormal  $\{e_1, e_2\} \subset T_p M$ . Sabemos que existe

um referencial ortonormal local  $e_1, e_2$  em  $p$  tal que  $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$  (ver pág. 27, livro do Lopez [23]).

Logo, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla A)_p(e_i, e_i) &= \nabla_{e_i}(A(e_i)) \\
&= \nabla_{e_i}(\langle A(e_i), e_j \rangle e_j) \\
&= \nabla_{e_i}(\langle A(e_j), e_i \rangle e_j) \\
&= e_i(\langle A(e_j), e_i \rangle e_j) \\
&= -e_i(\langle \nabla_{e_j}^0 N, e_i \rangle e_j) \\
&= -\langle \nabla_{e_i}^0 \nabla_{e_j}^0 N, e_i \rangle e_j = -\langle \nabla_{e_j}^0 \nabla_{e_i}^0 N, e_i \rangle e_j \\
&= e_j(\langle A(e_i), e_i \rangle e_j) \\
&= 2\nabla H,
\end{aligned}$$

onde acima estamos usando a notação de Einstein: índices repetidos estão sendo somados de 1 a 2, ou seja, estamos omitindo os símbolos  $\sum_{i=1}^2$  e  $\sum_{j=1}^2$ .

Portanto, temos que

$$\Delta\psi(p) = -2\langle p \times \nabla H, a \rangle - |\sigma|^2\psi(p).$$

Como a equação de Jacobi é  $L[\psi] = \Delta\psi + |\sigma|^2\psi = 0$ , então a função  $\psi$  satisfaz a equação de Jacobi se a curvatura média  $H$  é constante, pois nesse caso  $\nabla H = 0$ .

Estamos prontos para declarar o seguinte Lema, cuja primeira parte da prova foi previamente calculada.

**Lema 4.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície compacta. Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de curvatura média constante e seja  $N$  o mapa de Gauss. Se  $a \in \mathbb{R}^3$ , a função  $\psi = \langle x \times N, a \rangle$  satisfaz*

$$L(\psi) = 0.$$

*Se  $x(\partial M)$  é um círculo em um plano  $P$  e  $a$  é um vetor ortogonal a  $P$ , então*

$$\int_M \psi \, dM = 0, \quad \psi = 0 \text{ em } \partial M.$$

*Se  $\psi = 0$ , a superfície é rotacionalmente simétrica em relação ao eixo  $a$ .*

*Demonstração.* Já constatamos o primeiro resultado do Lema, queremos agora mostrar que  $\int_M \psi \, dM = \int_M \langle p \times N, a \rangle \, dM = 0$ .

Seja  $\Omega \subset P$  um disco limitado pelo círculo. Como a divergência do campo de vetores  $V(p) = p \times a$  é zero e o vetor normal para  $\Omega$  é  $N_\Omega = \pm \frac{a}{|a|}$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle p \times a, N \rangle dM + \int_\Omega \langle p \times a, N_\Omega \rangle dM \\ &= \int_M \langle p \times a, N \rangle dM + \int_\Omega \left\langle p \times a, \pm \frac{a}{|a|} \right\rangle dM \\ &= \int_M \langle p \times a, N \rangle dM = \int_M \psi dM. \end{aligned}$$

Observe que, pelo Lema 2.1.1,  $\int_M \psi dM = 0$  é a condição para uma variação  $x_t$  de  $x$  preservar o volume orientado fechado.

É fácil ver que se  $\psi = 0$ , então  $M$  é rotacionalmente simétrica em relação ao eixo  $a$ . De fato,

$$\psi(p) = \langle p \times N(p), a \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall p \in M, (p \times N) \perp a.$$

Logo, a superfície é rotacionalmente simétrica com relação ao vetor  $a$ .  $\square$

A função  $\psi$  nos permite provar:

**Teorema 4.1.1.** *Discos planos e pequenas calotas esféricas são as únicas superfícies cmc fortemente estáveis com bordo circular.*

*Demonstração.* Considere a função  $\psi$  definida anteriormente, onde  $a$  é um vetor unitário ortogonal ao plano que contém o círculo. Se  $\psi = 0$  em  $M$ , então  $M$  é umbílica. Suponhamos que  $\psi$  não seja constantemente zero em  $M$ , isto é,  $\psi \neq 0$ . O Lema 4.1.1 afirma que  $\psi$  é uma autofunção de  $L$ , com autovalor  $\lambda = 0$  e  $\int_M \psi dM = 0$ .

Se  $M$  é fortemente estável, pelo Corolário 2.2.1 o primeiro autovalor de  $L$  é não negativo, ou seja,  $\lambda_1(L) \geq 0$ . Mas  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $L$ , como consequência,  $\lambda_1(L) = 0$ , e como  $\psi \neq 0$  então  $\psi > 0$ . Pelo teorema de Courant [10],  $\psi$  não muda sinal, uma contradição pois  $\int_M \psi dM = 0$ .

Logo  $\psi \equiv 0$  e  $M$  é umbílica, portanto é um disco plano ou uma calota esférica. Pela Proposição 2.2.2, sabemos que apenas os discos planos e as pequenas calotas esféricas são fortemente estáveis.

Portanto, a superfície  $M$  é um disco plano ou uma pequena calota esférica.  $\square$

## 4.2 Teorema Principal

Agora, anunciamos e provamos que:

**Teorema 4.2.1.** *Discos planos e calotas esféricas são os únicos discos cmc estáveis com bordo circular em  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demonstração.* Queremos provar que se  $M$  é topologicamente um disco cmc estável com bordo circular então  $M$  é umbílico, e portanto é um disco plano (caso  $H = 0$ ) ou uma calota esférica (caso  $H \neq 0$ ).

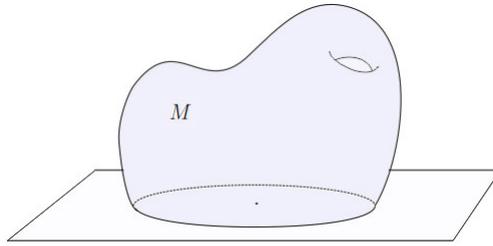


Figura 4.1: Superfície com bordo circular

Vamos considerar coordenadas conformes na superfície. Seja  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  o disco unitário fechado no plano complexo  $\mathbb{C}$  e  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão estável com curvatura média constante  $H$  com  $x(\partial D) = S^1$ , onde

$$S^1 = \{(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 = 1\},$$

seja  $ds^2 = E(du^2 + dv^2) = E|dz|^2$  a métrica induzida em  $D$ . Além disso, introduzimos as coordenadas polares  $r, \theta$ , com  $z = re^{i\theta}$ .

O vetor unitário tangente  $t = \partial_\theta / |\partial_\theta|$  em  $\partial D$  com relação a métrica  $ds^2$  é

$$t = \frac{1}{\sqrt{E}} \partial_\theta,$$

onde  $\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = E$ . De maneira análoga o vetor unitário normal  $n = \partial_r / |\partial_r|$  na métrica  $ds^2$  é

$$n = \frac{1}{\sqrt{E}} \partial_r$$

Escolha  $N$  de modo que ao longo da fronteira  $N = t \times n$ . Denote por  $a$  vetor unitário ortogonal ao plano de fronteira tal que  $a = p \times t$  ao longo de  $\partial D$ . Tome  $\psi = \langle p \times N, a \rangle$ . A derivada normal de  $\psi$  no bordo é

$$\partial_n \psi = \langle \nabla \psi, n \rangle = \langle n \times N, a \rangle + \langle p \times dN(n), a \rangle.$$

Como  $n \times N = t$ , então  $\langle n \times N, a \rangle = \langle t, a \rangle = 0$ . Observe também que

$$\begin{aligned} dN(n) &= \langle dN(t), n \rangle t + \langle dN(n), n \rangle n \\ &= -\sigma(t, n)t - \sigma(n, n)n. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \partial_n \psi &= \langle n \times N, a \rangle + \langle p \times dN(n), a \rangle \\ &= \langle p \times a, dN(n) \rangle \\ &= \langle t, \langle dN(t), n \rangle t + \langle dN(n), n \rangle n \rangle \\ &= \langle t, \langle dN(t), n \rangle t \rangle + \langle t, \langle dN(n), n \rangle n \rangle \\ &= -\sigma(t, n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $\sigma$  é a segunda forma fundamental da imersão.

*Afirmção 4.2.1.*

$$E \partial_n \psi = \text{Im}(z^2 \phi) \quad \text{em} \quad \partial D.$$

*Demonstração.* Em  $\partial D$ , temos  $r = |z| = \sqrt{u^2 + v^2} = 1$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_u &= \frac{\partial r}{\partial u} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial u} \partial_\theta \\ \partial_v &= \frac{\partial r}{\partial v} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial v} \partial_\theta \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{v}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{-v}{r^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{u}{r^2} \end{aligned}$$

como  $r = 1$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \partial_u &= u \partial_r - v \partial_\theta \\ \partial_v &= v \partial_r + u \partial_\theta \end{aligned}$$

sabendo que  $\bar{z} = u - iv$  e  $-i\bar{z} = -v - iu$ , então

$$\begin{aligned}
\partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v) \\
&= \frac{1}{2}(u\partial_r - v\partial_\theta - iv\partial_r - iu\partial_\theta) \\
&= \frac{1}{2}[(u - iv)\partial_r - (-v - iu)\partial_\theta] \\
&= \frac{1}{2}(\bar{z}\partial_r - i\bar{z}\partial_\theta).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Considere a diferencial de Hopf  $\phi dz^2$  em  $M$ . Calculando  $\sigma(\partial_z, \partial_z)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma(\partial_z, \partial_z) &= \frac{1}{4}\sigma(\partial_u - i\partial_v, \partial_u - i\partial_v) \\
&= \frac{1}{4}[\sigma(\partial_u, \partial_u) - \sigma(\partial_u, \partial_v) - 2i\sigma(\partial_u, \partial_v)] \\
&= \frac{1}{4}[e - g - 2if] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e - g}{2} - if\right) \\
&= \frac{\phi}{2},
\end{aligned}$$

logo,  $\phi = 2\sigma(\partial_z, \partial_z)$ . Da igualdade em (4.3), temos

$$\begin{aligned}
\phi = 2\sigma(\partial_z, \partial_z) &= 2\frac{1}{4}\sigma(\bar{z}\partial_r - i\bar{z}\partial_\theta, \bar{z}\partial_r - i\bar{z}\partial_\theta) \\
&= \frac{1}{2}[\sigma(\bar{z}\partial_r, \bar{z}\partial_r) - \sigma(\bar{z}\partial_\theta, \bar{z}\partial_\theta) - 2i\sigma(\bar{z}\partial_r, \bar{z}\partial_\theta)] \\
&= \frac{1}{2}[\bar{z}^2\sigma(\partial_r, \partial_r) - \bar{z}^2\sigma(\partial_\theta, \partial_\theta) - 2i\bar{z}^2\sigma(\partial_r, \partial_\theta)]
\end{aligned}$$

Sendo  $|z| = 1$ , segue que  $z^2\bar{z}^2 = |z|^4 = 1$ , e portanto

$$\begin{aligned}
z^2\phi &= z^2 2\sigma(\partial_z, \partial_z) \\
&= \frac{1}{2}[z^2\bar{z}^2\sigma(\partial_r, \partial_r) - z^2\bar{z}^2\sigma(\partial_\theta, \partial_\theta) - 2iz^2\bar{z}^2\sigma(\partial_r, \partial_\theta)] \\
&= \frac{1}{2}[\sigma(\partial_r, \partial_r) - \sigma(\partial_\theta, \partial_\theta) - 2i\sigma(\partial_r, \partial_\theta)] \\
&= \frac{\sigma(\partial_r, \partial_r)}{2} - \frac{\sigma(\partial_\theta, \partial_\theta)}{2} - i\sigma(\partial_r, \partial_\theta)
\end{aligned}$$

Obtemos assim, ao longo de  $|z| = 1$ ,  $\text{Im}(z^2\phi) = -\sigma(\partial_r, \partial_\theta)$ .

Usando os valores de  $\partial_r = n\sqrt{E}$ ,  $\partial_\theta = t\sqrt{E}$  e o resultado (4.2) encontramos

$$\begin{aligned}
-\sigma(\partial_r, \partial_\theta) &= -\sigma(n\sqrt{E}, t\sqrt{E}) \\
&= -E\sigma(n, t) = E\partial_n\psi
\end{aligned}$$

E por isso, podemos afirmar que

$$\text{Im}(z^2\phi) = -\sigma(\partial_r, \partial_\theta) = E\partial_n\psi \quad \text{em } \partial D. \tag{4.4}$$

*Afirmção 4.2.2.* A derivada normal  $\partial_n \psi$  se anula pelo menos três vezes em  $\partial D$ .

*Prova da afirmação.* Queremos mostrar que a derivada normal se anula em pelo menos três pontos da  $\partial D$ , por (4.4)  $\text{Im}(z^2 \phi) = E \partial_n \psi$  em  $\partial D$ , então a  $\text{Im}(z^2 \phi)$  também deve se anular pelo menos três vezes em  $\partial D$ . A partir de agora argumentamos por contradição. Suponhamos que  $\text{Im}(z^2 \phi)$  se anula no máximo em dois pontos na fronteira. Sem perda de generalidade, vamos assumir que existem exatamente dois pontos distintos  $z_1, z_2 \in \partial D$ , tais que  $\text{Im}(z^2 \phi)$  se anula em  $z_1$  e  $z_2$ .

Sabemos, do capítulo anterior, que  $\phi$  está globalmente definida em  $D$ , isto quer dizer que  $\phi$  não tem singularidades em  $D$ , em particular,  $\phi$  não tem singularidades em  $\partial D$ . Assim, podemos estender  $\phi$  analiticamente para um disco relativamente maior que  $D$ , de raio  $R > 1$ .

Como os zeros de  $\phi$  são pontos isolados, então podemos tomar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de forma que  $\phi^{-1}(0) \cap \overline{D_\varepsilon}(z_j) = z_j$ , onde  $D_\varepsilon(z_j) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| < \varepsilon\}$ . Seja  $D_\varepsilon^* = D \setminus (D_\varepsilon(z_1) \cup D_\varepsilon(z_2))$  e seja a curva  $C_\varepsilon = \partial D_\varepsilon^*$  orientada positivamente. Veja a figura (4.2).

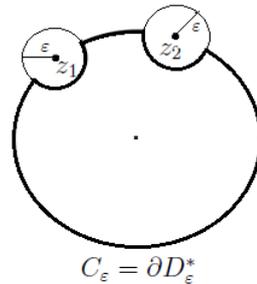


Figura 4.2: Curva  $C_\varepsilon$  e discos  $D_\varepsilon(z_j)$

Calculando os zeros da função  $f(z) = z^2 \phi$ , temos que  $z^2 \phi = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0$  ou  $\phi = 0$ , logo 0 é um zero de  $z^2 \phi$  com multiplicidade 2, e indicamos por  $m$  o número de zeros com multiplicidade em  $\phi$ .

Como não há zeros de  $z^2 \phi$  em  $C_\varepsilon$ , podemos aplicar o teorema do princípio do argumento

(1.2.1) para a função  $z^2\phi$ , sabendo que

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{(z^2\phi)'}{z^2\phi} \\ &= \left(\frac{2z\phi + z^2\phi'}{z^2\phi}\right) \\ &= \left(\frac{2}{z} + \frac{\phi'}{\phi}\right),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \left(\frac{2}{z} + \frac{\phi'}{\phi}\right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{C_\varepsilon} \frac{2}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi'}{\phi} dz \right] \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi'}{\phi} dz \\ &= \frac{1}{\pi i} 2\pi i + m(\varepsilon) \\ &= 2 + m(\varepsilon).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{i} \int_{C_\varepsilon} \left(\frac{2}{z} + \frac{\phi'}{\phi}\right) dz = 4\pi + 2\pi m(\varepsilon),$$

onde  $m(\varepsilon)$  é o número de zeros dentro de  $C_\varepsilon$  com multiplicidade. Pelo princípio do argumento, o lado esquerdo da última igualdade é a variação total do  $\arg z^2\phi$ .

Aplicando o princípio do argumento para a função  $\phi$  ao longo da fronteira do disco  $D_\varepsilon(z_j)$ , como a curva é dada no sentido horário, temos

$$\frac{1}{i} \int_{-\partial D_\varepsilon(z_j)} \frac{\phi'}{\phi} dz = 2\pi n_j \Leftrightarrow \frac{1}{i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_j)} \frac{\phi'}{\phi} dz = -2\pi n_j$$

onde  $n_j$  é a ordem dos zeros de  $\phi$  no interior de  $D_\varepsilon(z_j)$ .

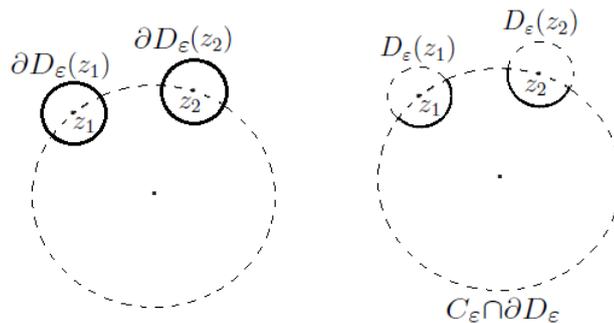


Figura 4.3: Curvas  $\partial D_\varepsilon(z_j)$  e  $C_\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon(z_j)$

Assim, aplicando novamente o princípio do argumento, agora para a função  $\phi$  sobre as curvas  $C_\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon(z_1)$  e  $C_\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon(z_2)$ , quando  $\varepsilon \downarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{i} \int_{C_\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon(z_j)} \frac{\phi'}{\phi} dz &= -\frac{2\pi n_j}{2} \\ &= -n_j \pi, \end{aligned}$$

onde  $n_j$  é a ordem do zero de  $\phi$  em  $z_j$ .

Tomando agora os dois arcos determinados pelos discos  $D_\varepsilon(z_1)$  e  $D_\varepsilon(z_2)$ , que denotaremos por  $\gamma_1^\varepsilon$  e  $\gamma_2^\varepsilon$ , segue que

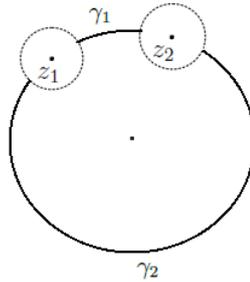


Figura 4.4: Curva  $C_\varepsilon \setminus \partial(D_\varepsilon(z_1) \cup D_\varepsilon(z_2))$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon} \left( \frac{2}{z} + \frac{\phi'}{\phi} \right) dz \\ &= 4\pi + 2\pi m - (-\pi n_1 - \pi n_2) \\ &= 4\pi + 2\pi m + \pi(n_1 + n_2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde  $m$  denota o número de pontos umbílicos (os zeros de  $\phi$ ), com multiplicidades no interior de  $D$ .

Se  $n_1 = n_2 = 0 \Rightarrow I = 4\pi + 2\pi m \geq 4\pi$ , assim a imagem de  $\partial D$  sob o mapa  $z^2\phi$  tem número de voltas pelo menos 2 em relação à origem e se anula pelo menos em quatro pontos distintos na  $\partial D$ .

Se  $n_1 + n_2 > 0$ , a variação total do  $\arg(z^2\phi)$  sobre os dois arcos ( $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ) determinados por  $z_1$  e  $z_2$  é pelo menos  $5\pi$ , de fato, se  $n_1 + n_2 > 0 \Rightarrow I = 4\pi + 2\pi m + \pi(n_1 + n_2) \geq 5\pi$ .

Então, existe  $\varepsilon \downarrow 0$  tal que

$$\frac{1}{i} \int_{\gamma_1^\varepsilon} \left( \frac{2}{z} + \frac{\phi'}{\phi} \right) dz + \frac{1}{i} \int_{\gamma_2^\varepsilon} \left( \frac{2}{z} + \frac{\phi'}{\phi} \right) dz > 4\pi$$

Portanto, deve existir pelo menos três pontos na  $\partial D$  onde  $\text{Im}(z^2\phi)$  se anula. Isso termina a prova da afirmação. □

Agora provamos o teorema. O objetivo é mostrar que  $\psi$  se anula identicamente em  $D$ , pois se  $\psi \equiv 0$  em  $D$  então  $D$  é uma superfície rotacional, e portanto é um disco plano ou uma calota esférica.

Sendo  $\psi = \langle p \times N, a \rangle$ , supomos que  $\psi \neq 0$ , então pelo Lema 4.1.1 temos  $\int_M \psi dM = 0$ . Logo a função  $\psi$  muda de sinal. Seja  $\{\lambda_j\}_{j=1,2,3,\dots}$  os autovalores de Dirichlet para o operador de Jacobi  $L$  em  $D$  listados em ordem crescente. A função  $\psi$  não corresponde a  $\lambda_1$  uma vez que uma autofunção para  $\lambda_1$  não pode mudar de sinal. Segue que o primeiro autovalor de  $L$  é negativo,  $\lambda_1 < 0$ , uma vez que  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $L$ , e os autovalores estão em ordem crescente.

Por outro lado  $\psi$  não pode corresponder a  $\lambda_2$ . Para ver isso, usamos o Teorema de Courant (1.3.2): uma autofunção  $f_k$  de  $L$  correspondendo a  $\lambda_k$  divide  $D$  no máximo em  $k$  domínios nodais. Suponha que a derivada normal de  $f_2$ ,  $\partial_n f_2 = \langle \nabla f_2, n \rangle$ , se anula em um ponto  $p \in \partial D$ . Como  $f_2 = 0$  ao longo de  $\partial D$ , temos  $\nabla f_2(p) = 0$ . Vamos mostrar que existe uma linha nodal  $\zeta$  distinta da  $\partial D$  terminando em  $p$ . Assumindo o contrário, existe um domínio aberto  $U$  em torno de  $p$  tal que  $f_2$  tem sinal, exceto em  $U \cap \partial D$ . Suponha, por exemplo, que  $f_2 > 0$  em  $U$ . Então em  $U$ , temos

$$\Delta f_2 = -|\sigma|^2 f_2 \leq 0$$

e o princípio máximo implica que  $f_2$  assume seu mínimo no bordo. Assim, a derivada normal de  $f_2$ ,  $\partial_n f_2 < 0$ . Contradição pois supomos que  $\partial_n f_2$  se anula em  $p$ . Essa contradição comprova a existência de  $\zeta$ .

Como  $f_2$  tem no máximo duas linhas nodais e  $D$  é um disco, a derivada  $\partial_n f_2$  se anula no máximo duas vezes em  $\partial D$ , mas pela afirmação (4.2.2), a derivada normal de  $\psi$  se anula pelo menos três vezes em  $\partial D$ , portanto  $\psi = f_n$  para algum  $n \geq 3$ . Assim,  $\lambda_j < 0$ ,  $j = 1, 2$ .

É possível então definir uma função  $f$  como combinação linear das duas primeiras autofunções,  $f = f_2 + c f_1 \in H_0^{1,2}(M)$ , onde

$$c = -\frac{\int_D f_2 dD}{\int_D f_1 dD}.$$

Então  $f = 0$  ao longo da  $\partial D$  e  $\int_D f dD = 0$ . No entanto, usando que  $L(f_i) + \lambda_i f_i = 0$

e  $\int_D f_i f_j dD = 0$ , encontramos

$$\begin{aligned}
 I(f) &= - \int_D f L(f) dD \\
 &= - \int_D (f_2 + c f_1)(-\lambda_2 f_2 - c \lambda_1 f_1) dD \\
 &= \int_D \lambda_2 f_2^2 + c \lambda_1 f_1 f_2 + c \lambda_2 f_1 f_2 + c^2 \lambda_1 f_1 dD \\
 &= \lambda_2 \int_D f_2^2 + c \lambda_1 \int_D f_1 f_2 dD + c \lambda_2 \int_D f_1 f_2 dD + c^2 \lambda_1 \int_D f_1 dD \\
 &= \lambda_2 \int_D f_2^2 dD + c^2 \lambda_1 \int_D f_1^2 dD < 0
 \end{aligned}$$

o que não é possível pela estabilidade da superfície.

Portanto,  $\psi \equiv 0$  em  $D$ , que significa que o campo de vetores  $V$  é tangente à superfície em todos os pontos. Segue-se que a superfície é rotacional. Como a superfície é topologicamente um disco, então é um disco plano ou uma calota esférica. Isto conclui a prova do teorema.  $\square$

---



---

## CAPÍTULO 5

---

# SUPERFÍCIES CMC ESTÁVEIS COM BORDO CIRCULAR EM $\mathbb{H}^3$ E $\mathbb{S}^3$

Neste capítulo consideramos o mesmo problema para superfícies que são topologicamente discos no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  e na esfera  $\mathbb{S}^3$ . Nosso objetivo é provar que se  $D$  é um disco unitário no plano complexo e  $x$  é uma imersão conforme de  $D$  em  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , estável e com curvatura média constante, tal que  $x(\partial D) \subset \mathbb{S}^1(r)$ , então  $x(D)$  é uma superfície totalmente umbílica.

A principais ideias da prova para o espaço euclidiano também funcionam para o caso hiperbólico e esférico, por isso esboçamos brevemente a prova. Iniciamos o capítulo mostrando o problema em  $\mathbb{H}^3$  e em seguida indicamos as modificações necessárias para  $\mathbb{S}^3$ .

### 5.1 Teorema Principal no Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$

O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  é a única variedade Riemanniana tridimensional, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante igual a  $-1$ . No entanto, esse espaço pode ser descrito por uma variedade de modelos. Além disso, o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  possui uma variedade de superfícies umbílicas: os planos totalmente geodésicos, as superfícies equidistantes, as horoesferas e as esferas geodésicas [14].

Nesta seção utilizamos o modelo de Minkowski para  $\mathbb{H}^3$  dado por

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x \rangle = -1, x_4 > 0\} \subset \mathbb{L}^4,$$

com a métrica induzida de  $\mathbb{L}^4$ , sendo  $\mathbb{L}^4$  o espaço de Lorentz-Minkowski, isto é, o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido com a métrica de Lorentz:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - (dx_4)^2,$$

onde  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  são as coordenadas usuais de  $\mathbb{R}^4$ . Neste modelo, as superfícies umbílicas de  $\mathbb{H}^3$  são a interseção das superfícies umbílicas de  $\mathbb{L}^4$  com  $\mathbb{H}^3$ .

Nesse caso, por um movimento rígido de  $\mathbb{H}^3$  em  $\mathbb{L}^4$  podemos supor que o bordo circular  $\mathbb{S}^1(r)$  é

$$\mathbb{S}^1(r) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{H}^3 : x_1^2 + x_2^2 = r^2, x_3 = 0, x_4^2 = 1 + r^2\}, r > 0.$$

Queremos provar o seguinte teorema:

**Teorema 5.1.1.** *Os únicos discos cmc estáveis no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  com bordo circular são superfícies umbílicas.*

*Demonstração.* Consideremos uma imersão conforme  $x : D \rightarrow \mathbb{H}^3$  estável com curvatura média constante, onde  $D$  é o disco unitário de  $\mathbb{R}^2$  com  $x(\partial D) \subset \mathbb{S}^1(r)$ .

Seja  $V$  o campo vetorial Killing em  $\mathbb{H}^3$  definido por  $V(p) = e_3 \times e_4 \times p$ , com  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$  e  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ , vetores unitários de  $\mathbb{H}^3$ . O campo vetorial  $V$  corresponde ao subgrupo de rotações de um parâmetro de  $\mathbb{R}^4$  em torno do plano que passa pela origem e é gerado por  $e_3$  e  $e_4$ .

Definimos a função  $\psi$  como

$$\psi = \langle e_3 \times e_4 \times p, N \rangle.$$

que define um campo de Jacobi para a imersão  $x$ . Isto é,  $\psi$  resolve a equação de Jacobi  $L[\psi] = (\Delta + |\sigma|^2 - 2)\psi = 0$  com  $\psi \equiv 0$  em  $\partial D$ , e ainda satisfaz

$$\int_D \psi dD = 0.$$

Com a mesma notação do Teorema (4.2.1), o cálculo da derivada normal de  $\psi$  ao longo de  $\partial D$  é

$$\partial_n \psi = \langle \nabla \psi, n \rangle = \langle e_3 \times e_4 \times n, N \rangle + \langle e_3 \times e_4 \times p, dN(n) \rangle,$$

temos que  $N \times n \times p = t$  em  $\partial D$ , então  $e_3 \times e_4 \times n$  é colinear com  $t$  e portanto  $\langle e_3 \times e_4 \times n, N \rangle = 0$ . Também temos que  $e_3 \times e_4 \times p = \pm rt$ , logo

$$\begin{aligned} \partial_n \psi &= \langle \pm rt, \langle dN(t), n \rangle t + \langle dN(n), n \rangle n \rangle \\ &= \pm r \sigma(t, n) \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $\sigma$  é a segunda forma fundamental da imersão.

E de maneira análoga ao caso euclidiano concluímos que

$$\begin{aligned} E \partial_n \psi &= \pm r E \sigma(t, n) \\ &= \pm r \sigma(\partial_r, \partial_\theta) \\ &= \mp r \operatorname{Im}(z^2 \phi). \end{aligned}$$

Afirmamos que a derivada normal de  $\psi$  se anula pelo menos três vezes no bordo de  $D$  (a demonstração desse fato é a mesma do caso euclidiano, quando mostramos que  $\operatorname{Im}(z^2 \phi)$  se anula em pelo menos três pontos).

Em seguida, precisamos mostrar que  $\psi$  se anula identicamente em  $D$ , pois se  $\psi \equiv 0$  em  $D$  então  $D$  é umbílica.

Sendo  $\psi = \langle e_3 \times e_4 \times p, N \rangle$ , então a  $\int_M \psi dM = 0$ , supondo  $\psi \neq 0$ , então a função  $\psi$  muda de sinal. Seja  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  os autovalores de Dirichlet para o operador de Jacobi  $L = (\Delta + |\sigma|^2 - 2)$  em  $D$  listados em ordem crescente. A função  $\psi$  não corresponde a  $\lambda_1$  uma vez que uma autofunção para  $\lambda_1$  não pode mudar de sinal.

Por outro lado  $\psi$  não pode corresponder a  $\lambda_2$ . Isto segue pelo Teorema de Courant, pois  $f_2$  tem no máximo duas linhas nodais e a derivada  $\partial_n f_2$  se anula no máximo duas vezes em  $\partial D$ , como a derivada normal de  $\psi$  deve se anular pelo menos três vezes em  $\partial D$ , então  $\psi = f_n$  para algum  $n \geq 3$ . Assim,  $\lambda_j < 0, j = 1, 2$ .

É possível então definir uma função  $f$  como combinação linear das duas primeiras autofunções,  $f = f_2 + c f_1 \in H_0^{1,2}(M)$ , tal que  $f = 0$  ao longo da  $\partial D$  e  $\int_D f dD = 0$ . Mas  $I(f) < 0$ , mostrando que a imersão nesse caso não é estável, contradição. Logo,  $\psi \equiv 0$  em  $D$  e portanto  $D$  é umbílico.  $\square$

## 5.2 Teorema Principal no Espaço Esférico $\mathbb{S}^3$

A esfera  $\mathbb{S}^3$  é a única variedade Riemanniana tridimensional, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante igual a  $+1$ .

Seja  $\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$  a esfera unitária tridimensional e seja  $x : D \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  uma imersão conforme com curvatura média constante  $H$  e bordo circular. Isso significa que  $x(\partial D) \subset \mathbb{S}^1(r)$ , onde podemos supor, girando  $\mathbb{S}^3$  em  $\mathbb{R}^4$  se necessário, que o bordo é

$$\mathbb{S}^1(r) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3 : x_3 = 0, x_2^4 = 1 - r^2, x_2^1 + x_2^2 = r^2\}, 0 < r \leq 1.$$

Neste caso,  $V$  é o campo de vetores em  $\mathbb{S}^3$  dado por  $V(p) = e_3 \times e_4 \times p$ , onde  $\times$  é o produto vetorial em  $\mathbb{R}^4$  determinado por  $\langle v_1 \times v_2 \times v_3, v \rangle = \det(v_1, v_2, v_3, v)$ ,  $\det$  é o determinante na base canônica.

O campo  $V$  corresponde ao subgrupo de rotações de um parâmetro de  $\mathbb{R}^4$  em torno do plano passando pela origem e gerado por  $e_3$  e  $e_4$ . Portanto, a função

$$\psi = \langle e_3 \times e_4 \times p, N \rangle,$$

onde  $N$  é um vetor unitário normal a  $x$  em  $\mathbb{S}^3$ , define um Campo de Jacobi ao longo de  $x$ . Isto é,  $\psi$  resolve a equação

$$L[\psi] := (\Delta + |\sigma|^2 + 2)\psi = 0$$

e  $\psi \equiv 0$  em  $\partial D$ .

Aplicando o teorema da divergência ao campo de Killing  $V$  temos

$$\int_D \psi dD = 0$$

Como no caso do espaço euclidiano e hiperbólico, a prova segue mostrando que a derivada normal de  $\psi$ ,  $E\partial_n\psi = \text{Im}(z^2\phi)$  no bordo de  $D$ , se anula pelo menos três vezes, e de maneira análoga aos outros espaços,  $\psi$  se anula identicamente em  $D$ .

---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudamos neste trabalho as superfícies cmc, que são superfícies importantes em ambientes onde a energia é proporcional à área da superfície. Como por exemplo, nos problemas de capilaridade, nos quais essas superfícies são modelos da ascensão de um líquido em um tubo fino, introduzido em um recipiente com líquido, que sobe ou desce pela ação capilar; ou ainda, nos problemas das chamadas interfaces, que são as regiões onde duas diferentes fases homogêneas se encontram, como dois líquidos imiscíveis ou entre um líquido e o ar.

Estudamos especificamente superfícies cmc que são topologicamente discos, provamos que se o disco cmc é estável e possui bordo circular, então o disco é totalmente umbílico nos espaços  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ . No caso do  $\mathbb{R}^3$  esses discos são necessariamente um disco plano ou uma calota esférica.

---

## REFERÊNCIAS

- [1] ALEXANDROV, A.D.: *Uniqueness theorems for surfaces in the large I–V*. Vestn. Leningr. Univ., 1956.
- [2] ALEXANDROV, A.D.: *A characteristic property of spheres*. Ann. Mat. Pura Appl., 1962.
- [3] ALÍAS, L.J.; LÓPEZ, R.; PALMER, B.: *Stable constant mean curvature surfaces with circular boundary*. Proc. Am. Math. Soc. 127, 1999.
- [4] BARBOSA, J.L.; DO CARMO, M.: *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. Math. Z., 1984.
- [5] BIEZUNER, R. J.: *Autovalores do Laplaciano*. Notas de aula do curso Tópicos em Análise: Autovalores do Laplaciano, UFMG, 2006.
- [6] BRITO, F.; SA EARP, R.; MEEKS III, W.H.; ROSENBERG H.: *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve*. Indiana Univ. Math. J., 1991.
- [7] CHAVEL, I.: *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, INC. London LTD., 1984.
- [8] CHENG, S.Y.: *Eigenfunctions and nodal sets*. Comment. Math. Helv. 51, 43–55, 1976.
- [9] BROWN, J.W.; CHURCHILL, R. V.: *Complex Variables and Applications*. McGraw Hill Education. 7 ed.

- 
- [10] COURANT, R.; HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics*. Wiley, New York, 1989.
- [11] DO CARMO, M.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Saddle River, 1976.
- [12] DA SILVA, M. C.: *Superfícies de Weingarten e o Teorema de Hopf*. Dissertação de Mestrado, IMPA. 2005
- [13] DA SILVA, N. P.: *Sobre os primeiros autovalores do operador Laplaciano em domínios limitados de  $\mathbb{R}^n$  e em variedades Riemannianas compactas*. Dissertação de Mestrado, UnB. 2005
- [14] FUJIMORI, S.; S. ROSMANN, W: *Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces*. <http://arxiv.org/abs/math/0602570v2>., 2009.
- [15] FURTADO, M.: *Notas de EDP 2 (versão 1.2)*. UnB. <http://www.mat.unb.br/furtado/homepage/notas-edp2.pdf>, 2012.
- [16] GERMAIN, S.: *Mémoire sur la courbure des surfaces*. J. Reine Angew. Math., 1831.
- [17] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 2001.
- [18] HEINZ, E.: *On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary*. Arch. Ration. Mech. Anal., 1969.
- [19] HOPF, H.: *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000. Springer, Berlin 1983.
- [20] KAPOULEAS, N.: *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*. J. Di. Geom., 1991.
- [21] KOISO, M.: *Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary*. Math. Z., 1986.
- [22] LIEBMANN, H.: *Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung*. Math. Ann., 1900.
- [23] LOPEZ, R.: *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*. Springer Monographs in Mathematics. 2013.

- 
- [24] LOPEZ, R.; MONTIEL, S.: *Constant mean curvature discs with bounded area*. Proc. Amer. Math. Soc., 1995.
- [25] LOPEZ, R.; MONTIEL, S.: *Constant mean curvature surfaces with planar boundary*. Duke Math. J., 1996.
- [26] LOPEZ, R.: *Surfaces of Constant mean curvature with boundary in a sphere*. Osaka J. Math., 1996.
- [27] MEUSNIER, M.: *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mémoires de Mathématique et de Physique (de savans étrangers) de l'Académie X, 1785.
- [28] PLATEAU, J.A.F.: *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vols. I, II. Gautier-Villars, Paris, 1873.
- [29] STEINER, J.: *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général*. J. Reine Angew. Math., 1842.
- [30] STEIN, E. M.; SHAKARCHI R.: *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [31] SCHWARZ, H.A.: *Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens*. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft für Wissenschaften Göttingen, 1884.
- [32] WENTE, H.C.: *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*. Pac. J. Math., 1986.
- [33] ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D.: *Curso introdutório à Análise Complexa com Aplicações*. 2<sup>a</sup>ed, LTC, 2011.