

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Aldivam do Carmo Albuquerque

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM USANDO
RECORRÊNCIAS LINEARES

São Luís - MA
2019

Aldivam do Carmo Albuquerque

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM USANDO RECORRÊNCIAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Estatística

Coorientador: Anselmo Baganha Raposo Júnior

Mestre em Matemática

São Luís - MA

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Albuquerque, Aldivam do Carmo.

Resolução de Problemas de Contagem Usando Recorrências Lineares / Aldivam do Carmo Albuquerque. - 2019.
70 f.

Coorientador(a): Anselmo Baganha Raposo Júnior.

Orientador(a): Josenildo de Souza Chaves.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis - MA, 2019.

1. Princípio de Indução Finita. 2. Problemas de Contagem. 3. Recorrências Lineares. 4. Sequência Recorrente. I. Baganha Raposo Júnior, Anselmo. II. de Souza Chaves, Josenildo. III. Título.

Aldivam do Carmo Albuquerque

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM USANDO RECORRÊNCIAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29/01/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Estatística

Prof. Anselmo Baganha Raposo Júnior

Mestre em Matemática

Prof. AdeCarlos Costa Carvalho

Doutor em Matemática

Prof^a. Valeska Martins de Souza

Doutora em Matemática

A minha família...

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por dar-me saúde e coragem para continuar nessa jornada.

À minha esposa Odinea, por sempre estar ao meu lado e cuidar de mim.

Aos meus filhos Emanuele e Gabriel, que inspiram-me a cada dia a ser uma pessoa melhor.

Aos meus pais, Maria da Conceição e Moacir por sempre mostra-me o caminho do bem.

In memoriam dos meus avós Mãequinha e Papaiano.

As minhas irmãs, Alceane, Alcineide, Alcilene e Cristiane pelo incentivo que sempre me deram.

Ao meu amigo, tio e compadre Ribamar Loura, por acreditar em meu potencial.

À minha amiga e comadre Arlety Any pelo acolhimento desde que nos conhecemos.

Ao meu primo, Francisco Loura pela confiança que recebo.

Ao meu amigo, Raimundo Velozo, pelas conversas matemáticas.

Aos colegas do PROFMAT, Clenilton, Gabriela, Denison, Anacleto, Alvimar, Lenildo, Laércio e Wallace por estarem comigo nessa jornada.

Aos professores do PROFMAT-UFMA, Valdiane, Valeska, Jairo e Cleber por dedicarem seu tempo a nos passar conhecimento e aprendizado.

Ao meu Orientador professor Josenildo, pelas orientações e pelo apoio intelectual e incondicional para conclusão deste projeto.

Ao meu coorientador professor Anselmo, pela paciência e ensinamentos.

Ao coordenador do PROFMAT, Professor Antonio José, pelo comprometimento que tem pelo curso.

Aos gestores da escola CIDADE OPERÁRIA II, Silvia Solange e Aliandro Borges por serem amigos que acreditam em mim.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

"Se você tem uma maçã e eu tenho outra; e nós trocamos as maçãs, então cada um terá sua maçã. Mas se você tem uma ideia e eu tenho outra, e nós as trocamos; então cada um terá duas ideias."

George Bernard Shaw

RESUMO

Este trabalho apresenta vários métodos de resolução de recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem. A metodologia é explorada em problemas de contagem. Três problemas clássicos de contagem são resolvidos: Os Coelhos de Fibonacci, a Pizza de Steiner e a Torre de Hanoi. Além disso, foram utilizados problemas de contagem de olimpíadas de matemática e de alguns livros didáticos. A variedade de exemplos teóricos e práticos apresentados pode ser explorada para motivar a introdução das recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem na educação básica.

Palavras-chave: Sequência Recorrente, Princípio de Indução Finita, Recorrências Lineares, Problemas de Contagem.

ABSTRACT

This paper presents several methods of solving linear recurrences of 1st and 2nd order. The methodology is explored in counting problems. Three classic counting problems are solved: The Fibonacci Rabbits, Steiner's Pizza and the Tower of Hanoi. In addition, mathematical olympic counting problems and some textbooks were used. The variety of theoretical and practical examples presented can be explored to motivate the introduction of linear recurrences of 1st and 2nd order in basic education.

Keywords: Recurrent Sequence, Principle of Finite Induction, Linear Recurrences, Counting Problems.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	9
1 Introdução	11
2 Recorrências Lineares de 1ª Ordem e 2ª Ordem	13
2.1 Sequência Recorrente	13
2.2 Métodos de Resolução de Recorrências Lineares de 1ª Ordem	18
2.2.1 Método da Multiplicação Membro a Membro	19
2.2.2 Método das Substituições Sucessivas	20
2.2.3 Método da Soma Telescópica	20
2.2.4 Recorrências Lineares Não-Homogêneas da Forma $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$	23
2.3 Recorrências Lineares de 2ª Ordem	26
2.3.1 Recorrências Lineares Homogêneas de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes	27
2.3.2 Equação Característica com Raízes Distintas	28
2.3.3 Equação Características com Raízes Iguais	30
2.3.4 Solução das Equações de Recorrências Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes	31
2.3.5 Recorrências Lineares de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes: o Caso não Homogêneo	32
3 Problemas Clássicos de Recorrências Lineares	36
3.1 O Problema de Fibonacci	36
3.2 Pizza de Steiner	39

3.3	Torre de Hanoi	44
4	Algumas Aplicações de Recorrências Lineares em Contagem	48
4.1	Problemas de Contagem que seguem a Sequência de Fibonacci	48
4.2	Problema da Olimpíada Maranhense de Matemática - OMM	55
4.3	Problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas . .	56
4.4	Problemas de Livros Didáticos	63
5	Considerações Finais	67
	Apêndice	68
	Referências	70

Lista de Figuras

3.1	Os coelhos de Fibonacci	37
3.2	Nenhum corte no plano	40
3.3	1 corte no plano	40
3.4	2 cortes no plano	41
3.5	3 cortes no plano	41
3.6	4 cortes no plano	42
3.7	$n + 1$ cortes no plano	43
3.8	Torre de Hanoi	44
4.1	Modos de cobrir uma caixa até $n=4$	49
4.2	Árvore após cinco semanas do início de seu crescimento	50
4.3	Árvore após seis semanas do início de seu crescimento	51
4.4	Triângulos formados por palitos	56
4.5	Perímetro de triângulos equiláteros adjacentes	58
4.6	Números de Paula	59
4.7	Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_2	60
4.8	Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_3	60
4.9	Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_4	61
4.10	Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_n	61
4.11	Relação entre y_n e y_{n+1}	62
4.12	Um círculo dividindo o plano	63
4.13	Dois círculos dividindo o plano	64
4.14	Três círculos dividindo o plano	64

4.15 Quatro círculos dividindo o plano	64
--	----

1 Introdução

Em geral as recorrências lineares não são abordadas na educação básica, apesar disso, muitos problemas de contagem são resolvidos usando raciocínio recursivo. São observadas em provas dos principais vestibulares do país e Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP questões que fogem do padrão apresentado em sala de aula, o de transmitir problemas e respostas fielmente ao livro didático. Instigar os alunos a pensar recursivamente, pode ajudá-los a resolver problemas de contagem aparentemente difíceis, motivando-os e despertando a genialidade na construção do pensamento matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) preconizam que se faça:

[...] exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1997, p. 39).

Neste sentido, considerando os objetivos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, propõe-se uma abordagem para resolução de problemas de contagem usando recorrências lineares, de modo a desenvolver o raciocínio recursivo dos alunos da educação básica. Esta proposta observa a determinação de padrões numéricos em problemas de contagem e obtenção de soluções em fórmulas fechadas, despertando assim, a criatividade, a intuição e a beleza da modelagem matemática. Especificamente, este trabalho estabelece a relação entre técnicas de contagem e raciocínio recursivo, utilizando métodos de resolução de recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem. Recursivamente são determinadas regras que permitem calcular qualquer termo em função do antecessor ou dos antecessores imediatos.

O Capítulo 2 inicia com as sequências recorrentes e a metodologia de resolução das equações de recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem e vários exemplos são apresentados.

O Capítulo 3 aborda aplicações clássicas que são resolvidas através de recorrências lineares. O Capítulo 4 trata das resoluções de problemas de contagem usando recorrências lineares extraídos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, Olimpíada Maranhense de Matemática - OMM e de alguns livros didáticos do ensino médio. No Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais.

2 Recorrências Lineares de 1ª Ordem e 2ª Ordem

Muitas vezes surge o problema de definir um objeto de modo preciso, porém, defini-lo recursivamente fica mais fácil. A recursividade é usada para definir sequências, funções e conjuntos. Neste capítulo, especificamente, será tratado sobre as recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem e sobre os métodos de resolução.

2.1 Sequência Recorrente

Os Axiomas de Dedekind-Peano surgem na teoria axiomática dos conjuntos como uma lista de leis que regem o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ dos números naturais, sendo responsáveis por sua estruturação algébrica e aritmética, conferindo a seus elementos o caráter ordinal, ou seja, o poder de estabelecer ordenações em determinados conjuntos por meio de funções e o caráter cardinal a que se refere a possibilidade de representarem quantidades.

O Axioma (2.1.1) enuncia o Princípio de Indução Finita, a principal ferramenta para estabelecer as soluções dos problemas clássicos de recorrências lineares do Capítulo 3.

Axioma 2.1.1. (Princípio de Indução Finita) *Seja S um subconjunto não-vazio de números naturais. Se*

$$(i) \quad 1 \in S$$

e

$$(ii) \quad n + 1 \in S \text{ sempre que } n \in S,$$

então $S = \mathbb{N}$.

O Princípio de Indução Finita é mais comumente utilizado sob o seguinte manto: Se P é uma propriedade referente a números naturais tal que

$$(i) \quad P(1) \text{ é verdadeiro}$$

e

(ii) $P(n+1)$ é verdadeiro sempre que $P(n)$ o é,

então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

O uso do Princípio de Indução Finita não se limita apenas a demonstrações de fatos referentes a números naturais. Um de seus usos que mais se destaca é a possibilidade de se definir objetos matemáticos recursivamente em conexão com o teorema da recursividade.

Teorema 2.1.1. (Teorema da Recursividade) *Sejam a um elemento de um conjunto A e f uma função de A em A . Existe exatamente uma aplicação $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que*

$$\varphi(1) = a \quad \text{e} \quad \varphi(s(n)) = f(\varphi(n)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A demonstração deste teorema é dada no Apêndice.

Definição 2.1. Uma **sequência** (x_n) de elementos de um conjunto não-vazio A é qualquer função $x: \mathbb{N} \rightarrow A$. A imagem de x , em geral, denotada por x_n em vez de $x(n)$ é chamada de **termo geral**. Outras alternativas para a notação (x_n) são dadas por

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad (x_1, \dots, x_n, \dots).$$

Dito de outra forma, o Teorema da Recursividade, consequência do Princípio de Indução Finita, garante que se a é um elemento de um conjunto A , dada a função $f: A \rightarrow A$, existe e é única a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_1 = a \quad \text{e} \quad x_{n+1} = f(x_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sequências estabelecidas desta forma são chamadas de **recorrências** ou **recursões de primeira ordem**. De modo geral, se $a_1, \dots, a_k \in A$, dada $f: A^k \rightarrow A$, onde A^k é o produto cartesiano de k fatores iguais a A , existe e é única a sequência (x_n) tal que

$$x_1 = a_1, \dots, x_k = a_k$$

e

$$x_{n+k} = f(x_n, \dots, x_{n+k-1}), \quad (2.1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sequências estabelecidas desta forma são chamadas de **recorrências** ou **recursões de k -ésima ordem** e a igualdade (2.1) é denominada **equação de recorrência**.

Os Exemplos de (2.1) a (2.6) são sequências recorrentes.

Exemplo 2.1. A sequência (x_n) dos números naturais ímpares pode ser definida por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = x_n + 2$, com $n \geq 1$. Logo, a sequência dos números naturais ímpares é uma sequência recorrente de ordem um.

Exemplo 2.2. Uma **progressão geométrica** de primeiro termo a e razão q é uma sequência da forma

$$x_1 = a, x_2 = aq, x_3 = aq^2, \dots, x_{n+1} = aq^n, \dots$$

Observa-se que, de modo geral a sequência (x_n) assim obtida é dada recursivamente por

$$x_1 = a \quad \text{e} \quad x_{n+1} = qx_n, \quad (2.2)$$

com $n \geq 1$. Logo, uma progressão geométrica é uma sequência recorrente de ordem um.

Exemplo 2.3. Uma **progressão aritmética** de primeiro termo a e razão r é uma sequência da forma

$$x_1 = a, x_2 = a + r, x_3 = a + 2r, \dots, x_{n+1} = a + nr, \dots$$

Observa-se que, de modo geral, a sequência (x_n) é dada recursivamente por

$$x_1 = a \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n + r, \quad (2.3)$$

com $n \geq 1$. Dados os números naturais sucessivos $n + 1$ e $n + 2$, tem-se que

$$x_{n+2} = x_{n+1} + r \quad (2.4)$$

e

$$x_{n+1} = x_n + r. \quad (2.5)$$

Subtraindo as igualdades (2.4) e (2.5) membro a membro, obtém-se

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n,$$

ou seja,

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n. \quad (2.6)$$

Portanto, uma progressão aritmética é uma sequência recorrente de ordem um, quando definida por (2.3), e é de ordem dois quando definida por (2.6).

Exemplo 2.4. *Seja*

$$x_1 = 1^2, x_2 = 2^2, x_3 = 3^2, \dots, x_n = n^2, \dots$$

a sequência dos quadrados dos números naturais. Segue que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= x_n + 2n + 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

e que

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= (n+2)^2 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= x_n + 4n + 4. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Subtraindo (2.8) de (2.7), obtém-se

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2n + 3. \tag{2.9}$$

Além disso, a subtração de (2.9) por (2.7), resulta

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n + 2,$$

ou seja,

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2 \tag{2.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue de (2.10) que

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2 \tag{2.11}$$

e a subtração de (2.11) por (2.10) tem-se

$$x_{n+3} - x_{n+2} = 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n,$$

isto é,

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n.$$

sendo esta última igualdade uma equação de recorrência de terceira ordem.

Exemplo 2.5. *Seja*

$$x_1 = 1^3, x_2 = 2^3, x_3 = 3^3, \dots, x_n = n^3, \dots$$

a sequência dos cubos dos números naturais. Será mostrado que esta é uma sequência recorrente de ordem quatro. Tem-se que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= x_n + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

e que

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= (n+2)^3 \\ &= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n^3 + 6(n+1) \\ &= 2x_{n+1} - x_n + 6(n+1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Desta última igualdade extrai-se que

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 6(n+2) \tag{2.14}$$

e, subtraindo-se (2.13) de (2.14), obtém-se

$$x_{n+3} - x_{n+2} = 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n + 6,$$

isto é,

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n + 6. \tag{2.15}$$

Como a igualdade (2.15) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$x_{n+4} = 3x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} + 6 \tag{2.16}$$

e, da subtração de (2.16) por (2.15), tem-se

$$x_{n+4} - x_{n+3} = 3x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n,$$

ou seja,

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n \tag{2.17}$$

e esta é uma equação de recorrência de ordem quatro.

Definição 2.2. *Seja A um conjunto não-vazio no qual as leis aritméticas usuais são válidas. Uma recorrência de ordem k em A é dita **linear** se existem funções*

$$f, g_1, \dots, g_k: \mathbb{N} \rightarrow A$$

tais que

$$x_{n+k} = g_1(n) x_{n+k-1} + \dots + g_k(n) x_n + f(n).$$

Quando $f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ diz-se que a recorrência é linear **homogênea**, caso contrário, diz-se que é linear **não-homogênea**. A função f é denominada **termo independente**.

Exemplo 2.6. A recursão de primeira ordem que define a progressão aritmética de razão $r \neq 0$, $x_{n+1} = x_n + r$, é linear não homogênea ao passo que a recorrência de segunda ordem $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ que define a sequência de Fibonacci ¹ é linear homogênea.

2.2 Métodos de Resolução de Recorrências Lineares de 1ª Ordem

Foi mostrado na seção anterior a ideia de sequência definida recursivamente, bem como alguns exemplos de recorrências com suas respectivas ordens, atentando ao fato de que uma mesma sequência pode ser obtida recursivamente por meio de recorrências de ordens distintas. Mostra-se nesta seção e na próxima como determinar em alguns casos específicos uma fórmula fechada para uma sequência recorrente, ou seja, uma fórmula que permita calcular x_n em função de n e não dos termos que o antecedem. A vantagem de se fazer isto é que, na fórmula de recorrência, para calcular um elemento x_n qualquer, deve-se ter conhecimento dos elementos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$, em que k é a ordem da recorrência. Deste modo, com a fórmula fechada pode-se determinar qualquer termo da sucessão, bastando para isso substituir o valor desejado no lugar de n .

Uma recorrência de primeira ordem expressa o termo x_{n+1} de uma sucessão em função de x_n , ou seja, cada termo da sequência depende exclusivamente do termo imediatamente anterior. São abordados nesta seção três métodos de resolução de recorrências

¹Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) foi um matemático italiano, que nasceu em Pisa, de grande influência na idade média. Introduziu os algarismos arábicos na Europa e descobriu a sequência de Fibonacci.

lineares de 1ª ordem, que são o método da multiplicação membro a membro, o método das substituições sucessivas, e o método da soma telescópica.

2.2.1 Método da Multiplicação Membro a Membro

Este método consiste em multiplicar membro a membro os termos de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem com o objetivo de eliminar termos iguais do primeiro e segundo membro, de forma que x_n fique em função de n . Considerando a recorrência linear de primeira ordem $x_{n+1} = g(n)x_n$, tem-se

$$\begin{aligned}x_2 &= g(1)x_1 \\x_3 &= g(2)x_2 \\&\vdots \\x_n &= g(n-1)x_{n-1}.\end{aligned}$$

Multiplicando-se estas igualdades membro a membro, obtém-se

$$x_2 \cdots x_{n-1}x_n = g(1) \cdots g(n-1)x_1x_2 \cdots x_{n-1},$$

resultando

$$x_n = g(1) \cdots g(n-1)x_1.$$

Exemplo 2.7. Considere a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$.

Tem-se

$$\begin{aligned}x_2 &= 1 \cdot x_1 \\x_3 &= 2 \cdot x_2 \\&\vdots \\x_n &= (n-1) \cdot x_{n-1}.\end{aligned}$$

Multiplicando-se estas igualdades membro a membro, obtém-se

$$x_2 \cdots x_{n-1}x_n = (n-1)!x_1x_2 \cdots x_{n-1},$$

e, consequentemente

$$x_n = (n-1)!x_1.$$

sendo $x_1 = 1$,

$$x_n = (n-1)!.$$

2.2.2 Método das Substituições Sucessivas

Este método consiste em fazer usos sucessivos da equação de recorrência para resolver recorrências lineares homogêneas de primeira ordem. Considerando a recorrência linear de primeira ordem $x_{n+1} = g(n) x_n$, tem-se

$$\begin{aligned}x_2 &= g(1) x_1 \\x_3 &= g(2) x_2 = g(2) g(1) x_1 \\x_4 &= g(3) x_3 = g(3) g(2) g(1) x_1 \\&\vdots\end{aligned}$$

e, fazendo-se essas substituições reiteradamente, obtém-se, mais geralmente,

$$x_n = g(n-1) x_{n-1} = g(1) g(2) g(3) \cdots g(n-1) x_1,$$

em que o produto $g(1) g(2) g(3) \cdots g(n-1)$ fornece uma fórmula fechada em função de n .

Exemplo 2.8. *Considere a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 2$.*

Aplicando o método das substituições sucessivas, tem-se que

$$\begin{aligned}x_2 &= 2x_1 \\x_3 &= 2x_2 = 2(2x_1) = 2^2 x_1 \\x_4 &= 2x_3 = 2(2^2 x_1) = 2^3 x_1 \\&\vdots \\x_n &= 2x_{n-1} = 2(2^{n-2} x_1) = 2^{n-1} x_1\end{aligned}$$

e, como $x_1 = 2$,

$$x_n = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

2.2.3 Método da Soma Telescópica

Uma soma da forma

$$\sum_{j=1}^n (x_{j+1} - x_j)$$

é dita telescópica, pelo fato da soma ser igual à diferença entre os termos extremos, ou seja,

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - x_1.$$

Conforme (CAMINHA,2011), “A idéia por trás do nome é a seguinte: assim como olhando num telescópio encurtamos a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a propriedade telescópica encurta o caminho entre a soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma.”

Para resolver uma equação de recorrência aplicando este método, soma-se diferenças de maneira adequada. Aplica-se, as somas telescópicas para resolver as recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$ ou, equivalentemente, da forma $x_{n+1} - x_n = f(n)$. Tem-se

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= f(1) \\x_3 - x_2 &= f(2) \\&\vdots \\x_n - x_{n-1} &= f(n-1).\end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

resultando

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

ou seja,

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Na determinação da solução de uma equação de recorrência via soma telescópica é comum o surgimento de somatórios do tipo

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

que representam a soma finita dos termos de uma progressão geométrica. Tem-se,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

É igualmente comum aparecer a soma finita dos termos $a_1, a_2, \dots, a_n$ de uma progressão aritmética e, neste caso,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exemplo 2.9. Considere a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$.

Tem-se

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= +2 \\x_3 - x_2 &= 2^2 \\&\vdots \\x_n - x_{n-1} &= 2^{n-1}.\end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtém-se

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k.$$

Daqui e da fórmula da soma finita dos termos de uma progressão geométrica,

$$x_n = x_1 + 2^n - 2.$$

Como $x_1 = 1$,

$$x_n = 2^n - 1.$$

Exemplo 2.10. Considere a recorrência $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

Tem-se

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= 1 \\x_3 - x_2 &= 2 \\&\vdots \\x_n - x_{n-1} &= n - 1.\end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtém-se

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k,$$

Pela soma dos n termos de uma progressão aritmética, segue que

$$x_n = x_1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Como $x_1 = 0$,

$$x_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2.2.4 Recorrências Lineares Não-Homogêneas da Forma $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$.

Nesta seção é mostrado que qualquer recorrência da forma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n).$$

pode ser convertida numa recorrência do tipo

$$x_{n+1} = x_n + f(n)$$

Teorema 2.2.1. *Se (a_n) é uma solução não-nula da recorrência linear homogênea*

$$x_{n+1} = g(n)x_n,$$

então a substituição

$$x_n = a_n y_n$$

transforma a recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

em

$$y_{n+1} = y_n + f(n),$$

$$\text{sendo } f(n) = \frac{h(n)}{g(n)a_n}.$$

Demonstração. Fazendo-se $x_n = a_n y_n$, a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ fica convertida em

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Como a_n é solução de $x_n = g(n)x_n$, tem-se que $a_{n+1} = g(n)a_n$ e, conseqüentemente,

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

o que fornece

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n},$$

□

De modo geral, pode-se adotar a seguinte postura diante da recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n): \quad (2.18)$$

- (i) Encontrar uma solução particular (a_n) da recorrência linear homogênea de primeira ordem

$$x_{n+1} = g(n)x_n. \quad (2.19)$$

- (ii) Fazer em (2.18) a mudança de variáveis $x_n = a_n y_n$ afim de se obter

$$a_{n+1}y_{n+1} = [g(n)a_n]y_n + h(n).$$

- (iii) Atentando para o fato de que $a_{n+1} = g(n)a_n$, obter

$$a_{n+1}y_{n+1} = a_{n+1}y_n + h(n)$$

ou, equivalentemente,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{a_{n+1}}.$$

- (iv) Determinar uma fórmula fechada para y_n .

- (v) Substituir y_n em $x_n = a_n y_n$.

Exemplo 2.11. *Considere a recorrência*

$$x_{n+1} = 5x_n + 3, \quad (2.20)$$

com $x_1 = 1$. Encontra-se uma solução particular (a_n) da recorrência homogênea $x_{n+1} = 5x_n$ pelo método das multiplicações sucessivas:

$$a_2 = 5a_1$$

$$a_3 = 5a_2$$

$$a_4 = 5a_3$$

$$\vdots$$

$$a_n = 5a_{n-1}$$

multiplicando-se estas igualdades membro a membro, segue que

$$a_2 a_3 a_4 \cdots a_n = 5^{n-1} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1},$$

isto é,

$$x_n = 5^{n-1} x_1.$$

Fazendo $a_1 = 1$, obtém-se $a_n = 5^{n-1}$ e esta é uma solução particular da recorrência homogênea. Assim,

$$x_n = a_n y_n = 5^{n-1} y_n$$

tem-se, em particular, que

$$y_1 = \frac{x_1}{a_1} = 1$$

e que $x_{n+1} = 5^n y_{n+1}$. Daqui, e de (2.20),

$$\begin{aligned} 5^n y_{n+1} &= 5(5^{n-1} y_n) + 3 \\ &= 5^n y_n + 3 \end{aligned}$$

e, dividindo ambos os membros desta última igualdade por 5^n , obtém-se

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{5^n}. \quad (2.21)$$

Aplicando o método da soma telescópica em (2.21), tem-se

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{3}{5} \\ y_3 - y_2 &= \frac{3}{5^2} \\ y_4 - y_3 &= \frac{3}{5^3} \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= \frac{3}{5^{n-1}} \end{aligned}$$

e, somando estas igualdades membro a membro,

$$\begin{aligned} y_n - y_1 &= \frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \cdots + \frac{3}{5^{n-1}} \\ &= \frac{3}{5} \left(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^{n-2}} \right). \end{aligned}$$

Da fórmula da soma finita dos termos da progressão geométrica segue que

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \frac{3}{4} (1 - 5^{-n+1}) \\ &= 1 + \frac{3}{4} (1 - 5^{-n+1}) \\ &= \frac{7 - 3 \cdot 5^{-n+1}}{4} \end{aligned}$$

Como $x_n = 5^{n-1} y_n$ e $y_n = \frac{7 - 3 \cdot 5^{-n+1}}{4}$,

$$\begin{aligned} x_n &= 5^{n-1} \frac{7 - 3 \cdot 5^{-n+1}}{4} \\ &= \frac{7 \cdot 5^{n-1} - 3 \cdot 5^{n-1} \cdot 5^{-n+1}}{4} \\ &= \frac{7 \cdot 5^{n-1} - 3}{4}. \end{aligned}$$

2.3 Recorrências Lineares de 2ª Ordem

Uma relação de recorrência linear é dita de segunda ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir dos dois termos imediatamente anteriores a ele, ou seja, quando x_{n+2} está em função linear de x_{n+1} e x_n .

Teorema 2.3.1. (MARKUCHEVITCH, 1985). *Qualquer sequência recorrente de ordem k ,*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \quad (2.22)$$

satisfazendo a equação de recorrência

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n, \quad n \geq m \geq 1 \quad (2.23)$$

coincide com a sequência dos coeficientes do resultado da divisão de um certo polinômio $P(x)$ por

$$Q(x) = 1 - a_1 x - \dots - a_k x^k. \quad (2.24)$$

Demonstração. Se, qualquer que seja o número natural n sujeito à condição $n > k + m - 2$, multiplicar $Q(x)$ por $x_1 + x_2 x + x_2 x^2 + \dots + x_{n+1} x^n$, obtém-se

$$\begin{aligned} & (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k) (x_1 + x_2 x + \dots + x_{k+m-1} x^{k+m-2} + \dots + x_{n+1} x^n) = \\ & = [x_1 + (x_2 - a_1 x_1) x + \dots + (x_{k+m-1} - a_1 x_{k+m-2} - \dots - a_k x_{m-1}) x^{k+m-2}] \\ & + [(x_{k+m} - a_1 x_{k+m-1} - \dots - a_k x_m) x^{k+m-1} + \dots + (x_{n+1} - a_1 x_n - \dots - a_k x_{n-k+1}) x^n] \\ & - [(a_1 x_{n+1} + \dots + a_k x_{n-k+2}) x^{n+1} + \dots + a_k x_{n+1} x^{n+1}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

O grau do polinômio da primeira expressão em colchetes não excede $l = k + m - 2$ e os seus coeficientes não dependem de n . Fazendo

$$P(x) = x_1 + (x_2 - a_1 x_1) x + \dots + (x_{k+m-1} - a_1 x_{k+m-2} - \dots - a_k x_{m-1}) x^{k+m-2} \quad (2.26)$$

A segunda das expressões entre colchetes é, por consequência de (2.23), um polinômio com coeficientes nulos, já que não depende de n , enquanto que a terceira expressão entre colchetes é constituída de termos dependendo de n e de grau superior a $n + 1$. Denotando-a por $R_n(x)$, pode-se reescrever (2.25) na forma

$$P(x) = (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k) \cdot (x_1 + x_2 x + \dots + x_{n+1} x^n) + R_n(x)$$

e daqui, $x_1 + x_2x + \cdots x_{n+1}x^n$ é o quociente e $R_n(x)$, o resto da divisão de $P(x)$ por

$$Q(x) = 1 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_kx^k$$

portanto,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$$

são coeficientes da série que provém da divisão do polinômio (2.26) pelo polinômio (2.24).

□

Tomando $Q(x) = 1 - a_1u - \dots - a_ku^k = 0$, diz-se que esta é a **equação característica** da recorrência (2.23).

Exemplo 2.12. Da sequência de Fibonacci, tem-se

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 5, \dots$$

sujeitos a equação

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geq 1 \quad (2.27)$$

tendo $m = 1, k = 2, a_1 = a_2 = 1$. Logo,

$$Q(x) = 1 - x - x^2$$

e o grau do polinômio $P(x)$ não deve exceder $k + m - 2 = 1$. De (2.26) obtém-se

$$P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1)x = 1.$$

Portanto, os números de Fibonacci são os coeficientes da série resultante da divisão de 1 por $1 - x - x^2$ e $1 - u - u^2 = 0$ é a equação característica de (2.27).

2.3.1 Recorrências Lineares Homogêneas de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes

Esta seção trata das recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, isto é, com recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0. \quad (2.28)$$

em que se supõe $q \neq 0$ pois, caso contrário, a recorrência seria de primeira ordem. A cada recorrência da forma (2.28) é associada uma equação do segundo grau

$$r^2 + pr + q = 0$$

que é a equação característica da recorrência, conforme visto na seção anterior. Observa-se que a suposição preliminar de que $q \neq 0$ acarreta no fato de que 0 não é raiz desta equação.

Exemplo 2.13. *A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por*

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

e, sendo assim, tem equação característica

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

As raízes desta equação são

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Exemplo 2.14. Determine condições para que uma progressão geométrica $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de termo geral

$$b_n = b_1 r^{n-1}, \tag{2.29}$$

em que r é a razão da progressão geométrica, seja solução da recorrência (2.28).

Segue de (2.29) que $b_{n+1} = b_1 r^n$ e $b_{n+2} = b_1 r^{n+1}$. Se a sequência $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz a relação de recorrência (2.28) então:

$$\begin{aligned} b_{n+2} + p b_{n+1} + q b_n = 0 &\Rightarrow b_1 r^{n+1} + p b_1 r^n + q b_1 r^{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow b_1 r^{n-1} (r^2 + p r + q) = 0 \end{aligned}$$

e daqui, $b_1 r^{n-1} \neq 0$. Logo, deve-se ter $r^2 + p r + q = 0$, que é a equação característica de (2.28).

2.3.2 Equação Característica com Raízes Distintas

O teorema a seguir mostra que se r_1 e r_2 são raízes distintas da equação característica, então qualquer sequência da forma $a_n = A r_1^n + B r_2^n$ é solução da recorrência para quaisquer que sejam os valores das constantes A e B .

Teorema 2.3.2. *Se r_1 e r_2 são as raízes distintas de $r^2 + p r + q = 0$, então $a_n = A r_1^n + B r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ quaisquer que sejam as constantes A e B .*

Demonstração. Tem-se que,

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2} + p(Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}) + q(Ar_1^n + Br_2^n) \\ &= Ar_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + Br_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

O próximo teorema mostra que se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência são como no Teorema (2.3.2).

Teorema 2.3.3. *Se a equação característica $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes distintas r_1 e r_2 , então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$, com A e B constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução da recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Determina-se constantes A e B de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenha-se

$$y_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Para que isso seja verdade, é preciso ter, em particular,

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = y_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Como $r_1 \neq r_2$, este sistema possui uma única solução que é dada por

$$A = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad B = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

A sequência $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ é sabidamente solução da recorrência dada e, como

$$a_1 = Ar_1 + Br_2 = y_1 \quad \text{e} \quad a_2 = Ar_1^2 + Br_2^2 = y_2,$$

o Teorema da Recursividade assegura que

$$a_n = y_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

2.3.3 Equação Características com Raízes Iguais

Nesta seção será demonstrado dois teoremas que auxilia no tratamento das recorrências lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes cuja equação característica possua raízes iguais.

Teorema 2.3.4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = Ar^n + Bnr^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ quaisquer que sejam os valores das constantes A e B .*

Demonstração. Se as raízes da equação característica são iguais, deve-se ter, então, $r = -\frac{p}{2}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= Ar^{n+2} + B(n+2)r^{n+2} + p[Ar^{n+1} + B(n+1)r^n] \\ &\quad + q(Ar^n + Bnr^n) \\ &= (A + nB)r^n(r^2 + pr + q) + Br^n(2r^2 + pr) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Teorema 2.3.5. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = Ar^n + Bnr^n$, com A e B constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução da recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

É preciso determinar constantes A e B de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = Ar^n + Bnr^n.$$

Para que isso seja verdade, em particular, para $n = 1$ e $n = 2$, tem-se

$$\begin{cases} Ar + Br = y_1 \\ Ar^2 + 2Br^2 = y_2 \end{cases}.$$

Como

$$\det \begin{pmatrix} r & r \\ r^2 & 2r^2 \end{pmatrix} = r^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = r^3 \neq 0$$

este sistema possui uma única solução que é dada por

$$B = \frac{2ry_1 - y_2}{r^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

A sequência $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ é sabidamente solução da recorrência dada e, como

$$a_1 = Ar + Br = y_1 \quad \text{e} \quad a_2 = Ar^2 + 2Br^2 = y_2,$$

o Teorema da Recursividade assegura que

$$a_n = y_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.15. *A recorrência*

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$$

tem equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

que possui $r = 2$ como raiz dupla. Assim, a solução da recorrência é da forma

$$x_n = A2^n + Bn2^n. \tag{2.30}$$

Segue o caso particular em que $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Como todas as soluções da recorrência são da forma (2.30), obtém-se o sistema

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \\ A \cdot 2 + B \cdot 1 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = 0$. Substituindo os valores das constantes A e B em (2.30), obtém-se $x_n = 2^n$. Descrevendo os primeiros termos dessa recorrência, tem-se $(x_n) = (1, 2, 4, 8, \dots)$.

2.3.4 Solução das Equações de Recorrências Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

A metodologia apresentada nesta seção foi desenvolvida baseada nos teoremas (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) e (2.3.5) podendo ser utilizada para determinar a solução das

equações de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes, quando sua equação característica possui raízes reais distintas ou iguais, conforme segue:

1º passo - Escrever a equação característica de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ sob a forma $r^2 + pr + q = 0$.

2º passo - Determinar as raízes r_1 e r_2 da equação característica.

3º passo - Determinar constantes A e B tais que

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = x_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = x_2 \end{cases}$$

se $r_1 \neq r_2$ ou tais que

$$\begin{cases} Ar + Br = x_1 \\ Ar^2 + 2Br^2 = x_2 \end{cases}$$

se $r_1 = r_2 = r$.

4º passo: Escrever a solução $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ quando $r_1 \neq r_2$ e escrever a solução $x_n = Ar^n + Bnr^n$ quando $r_1 = r_2 = r$.

Exemplo 2.16. (*Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT - 2018.2*) Considere a recorrência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ e para $n > 0$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ determine o termo geral da recorrência.

Solução: Fazendo uso da metodologia explicitada acima, segue:

1º passo - Tem-se que $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$. Sua equação característica é $r^2 - 5r + 6 = 0$.

2º passo - As raízes da equação característica são $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$.

3º passo - Determinando as constantes A e B : Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 5$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = 1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = 5 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = -1$.

4º passo - Tem-se, portanto, que o termo geral da recorrência é $a_n = 3^n - 2^n$.

2.3.5 Recorrências Lineares de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes: o Caso não Homogêneo

Nesta seção é sistematizado as soluções das recorrências lineares de 2ª ordem não homogêneas, em que os coeficientes da parte homogênea são constantes. A seguir é

enunciado um teorema que mostra um processo para resolver tais recorrências.

Teorema 2.3.6. *Se a_n é uma solução particular da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma esta recorrência em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$*

Demonstração. Fazendo-se $x_n = a_n + y_n$ na recorrência dada obtém-se

$$\begin{aligned} f(n) &= a_{n+2} + y_{n+2} + p(a_{n+1} + y_{n+1}) + q(a_n + y_n) \\ &= (a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) \\ &= f(n) + y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

□

Tem-se, portanto, que a solução de uma recorrência não-homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução da homogênea associada. A solução da homogênea, usa-se as metodologias abordadas e a solução da não-homogênea, é possível encontrar por tentativas.

Exemplo 2.17. *Resolver a equação de recorrência: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$.*

Solução: A equação de recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$$

tem equação característica

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

que possui $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$ como raízes. Assim, a solução da recorrência homogênea associada é da forma

$$y_n = c_1 2^n + c_2 4^n.$$

Tenta-se descobrir uma solução particular a_n da recorrência dada. Uma vez que

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = n + 3^n,$$

é razoável imaginar que a_n seja a soma de um polinômio de grau 1 em n com uma exponencial de base 3. Assim,

$$a_n = An + B + C3^n.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} n + 3^n &= A(n + 2) + B + C3^{n+2} - 6[A(n + 1) + B + C3^{n+1}] \\ &+ 8(An + B + C3^n) \\ &= 3An + (3B - 4A) - C3^n. \end{aligned}$$

Obtém-se, portanto, o sistema

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3B - 4A = 0 \\ -C = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{9}$ e $C = -1$. Logo, a solução particular desejada é

$$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n,$$

assim, a solução geral é escrita como segue

$$x_n = a_n + y_n = \frac{n}{3} + \frac{4}{9} - 3^n + c_1 2^n + c_2 4^n,$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Determinados dois termos da sequência, como por exemplo x_0 e x_1 que iniciam a sequência, calcula-se as constantes c_1 e c_2 e, depois disso, descreve-se todos os termos da recorrência com a solução encontrada. Por exemplo, na recorrência

$$x_n = \frac{n}{3} + \frac{4}{9} - 3^n + c_1 2^n + c_2 4^n,$$

quando $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$ escreve-se o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{0}{3} + \frac{4}{9} - 3^0 + c_1 2^0 + c_2 4^0 = 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{9} - 3^1 + c_1 2^1 + c_2 4^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{14}{9} \\ 2c_1 + 4c_2 = \frac{29}{9} \end{cases}$$

em que obtém-se $c_1 = \frac{3}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{18}$. Portanto, a solução da recorrência é

$$x_n = \frac{n}{3} + \frac{4}{9} - 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{18} \cdot 4^n$$

Exemplo 2.18. Resolva a equação de recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 6 - 8n$.

Solução: A recorrência

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 6 - 8n$$

tem equação característica

$$r^2 + r - 6 = 0$$

que possui $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$ como raízes. Assim, a solução da recorrência homogênea associada é

$$y_n = c_1 2^n + c_2 (-3)^n.$$

Uma vez que deve-se ter

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 6 - 8n,$$

é razoável imaginar que a_n seja um polinômio de grau 1 em n . Assim,

$$a_n = An + B.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} 6 - 8n &= A(n+2) + B + A(n+1) + B - 6An - 6B \\ &= -4An - (3A + 4B). \end{aligned}$$

Obtém-se, portanto, o sistema

$$\begin{cases} 4A = 8 \\ 3A + 4B = -6 \end{cases}$$

cujas soluções são $A = 2$ e $B = 0$. Logo, a solução particular desejada é

$$a_n = 2n,$$

assim, a solução geral é escrita como segue

$$x_n = a_n + y_n = 2n + c_1 2^n + c_2 (-3)^n,$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

3 Problemas Clássicos de Recorrências Lineares

Apresenta-se neste capítulo três problemas clássicos de contagem que são resolvidos usando recorrências lineares, os quais são: os coelhos de Fibonacci, Pizza de Steiner e a Torre de Hanoi, bem como é usado o princípio de indução matemática para demonstrar a validação das soluções encontradas.

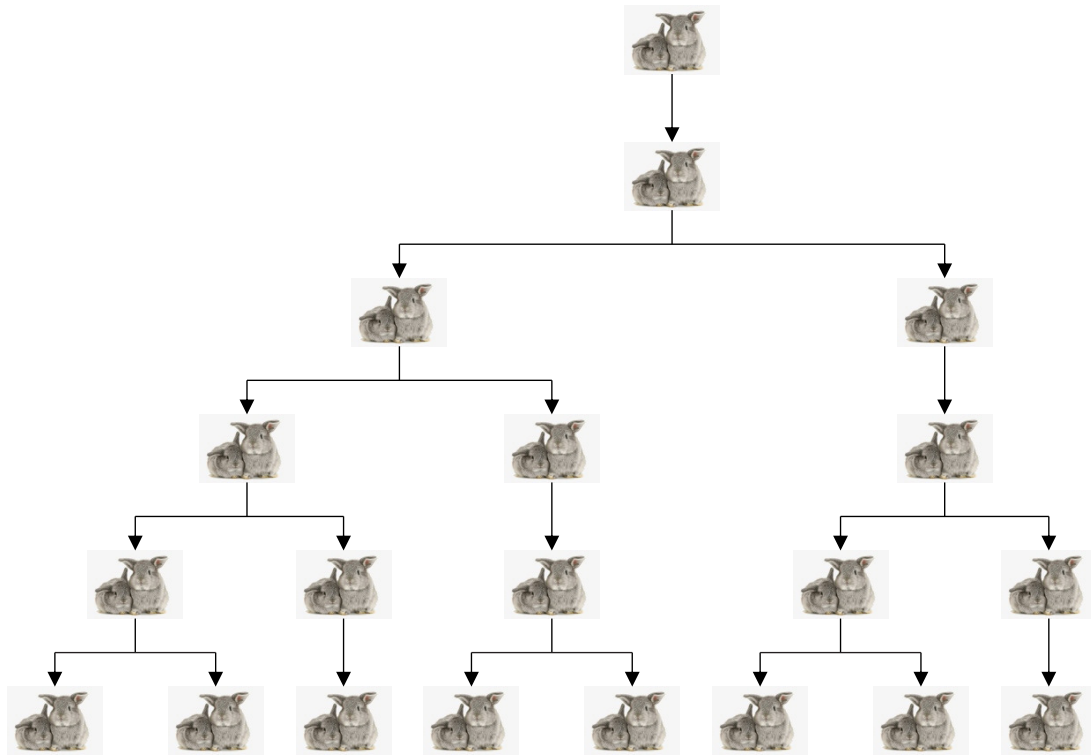
3.1 O Problema de Fibonacci

Exemplo 3.1. (O Problema de Fibonacci) *Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Deseja-se saber quantos pares de coelhos ter-se-á no mês n considerando-se as restrições:*

- *No primeiro mês nasce apenas um casal;*
- *Casais amadurecem e reproduzem-se apenas após o segundo mês de vida;*
- *Não há problemas genéticos no cruzamento cosanguíneo;*
- *Todos os meses, cada casal fértil dá a luz a um novo casal;*
- *Os coelhos nunca morrem.*

O número de pares de coelhos no momento inicial é x_1 , no fim do primeiro mês é x_2 , no fim do segundo mês é x_3 e, de um modo geral, no fim do n -ésimo mês, x_{n+1} . A Figura (3.1) mostra o número de pares de coelhos até $x_6 = 8$.

Figura 3.1: Os coelhos de Fibonacci



Fonte: Elaborada pelo Autor

Tem-se, então, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $\dots$. No fim do $(n + 1)$ -ésimo mês, o número de casais de coelhos é dado pela quantidade de casais adultos no fim do n -ésimo mês acrescida do número de casais nascidos no fim deste mesmo mês. O número destes últimos sendo igual ao número de casais já adultos no $(n - 1)$ -ésimo mês, permite inferir que

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (3.1)$$

e, daqui,

$$x_4 = x_3 + x_2 = 3, x_5 = x_4 + x_3 = 5, x_6 = x_5 + x_4 = 8, \dots$$

A sequência (x_n) assim definida é denominada **sequência de Fibonacci**, que é uma sequência recorrente de ordem dois.

Agora, faz-se a determinação de uma fórmula fechada para a sequência de Fibonacci, da qual foi extraído que o número de pares de coelhos adultos no mês $n + 2$ é $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, sendo conveniente, no que segue, considerar $F_0 = 0$.

Fazendo uso da metodologia para determinar a solução das equações de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes, segue:

1º passo - Tem-se que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Cujas equações características são $r^2 - r - 1 = 0$.

2º passo - As raízes da equação característica são $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

3º passo - Determinando as constantes A e B , tal que

$$F_n = A.r_1^n + B.r_2^n \quad (3.2)$$

Como $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} Ar_1^0 + Br_2^0 = 0 \\ Ar_1 + Br_2 = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

4º passo - Tem-se, portanto, que o termo geral da recorrência é

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

É demonstrada a validade da fórmula que determina F_n através do Princípio de Indução Matemática como segue:

para $n = 1$,

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

e, portanto, a igualdade que define F_n é válida para $n = 1$ e $n = 2$. Seja $n \geq 1$ um número natural para o qual tem-se

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k,$$

para todo $k \in \{1, \dots, n+1\}$. Então,

$$\begin{aligned}
 F_n + F_{n+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

observa-se que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \tag{3.4}$$

e que

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.3), obtém-se

$$\begin{aligned}
 F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}
 \end{aligned}$$

mostrando que a expressão de F_k também é válida para $k = n+2$. Logo, do Princípio de Indução Finita,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para todo n natural.

3.2 Pizza de Steiner

Jacob Steiner (1796-1863) geômetra alemão, propôs e resolveu, em 1826, o seguinte problema: Qual é o maior número de regiões em que se pode dividir o plano com n cortes retos? Supõe-se válidas as seguintes hipóteses:

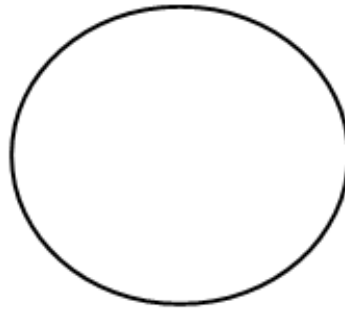
- (i) Existe um ponto de interseção entre cada par de retas;

(ii) Um ponto qualquer do plano é comum, no máximo, a duas retas.

Olhando para o plano como se fosse uma grande pizza, o nome do problema fica explicado. Considerando x_n o número de regiões obtidas quando o plano é submetido a n cortes, e fazendo as seguintes iterações:

para $n = 0$, $x_0 = 1$ (nenhum corte no plano).

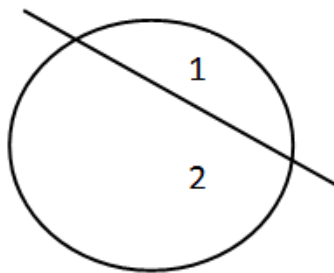
Figura 3.2: Nenhum corte no plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para $n = 1$, $x_1 = 2$ (um corte dividindo o plano em duas regiões).

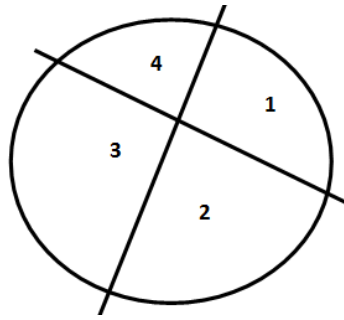
Figura 3.3: 1 corte no plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para $n = 2$, $x_2 = 4$ (dois cortes dividindo o plano, haverá 4 regiões, as duas regiões que já havia antes foram divididas em duas novas regiões cada uma, criadas pelo outro corte, num total de $x_2 = x_1 + 2 = 2 + 2 = 4$).

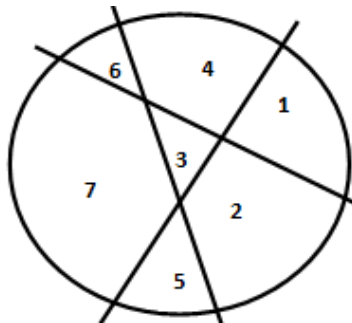
Figura 3.4: 2 cortes no plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para $n = 3$, $x_3 = 7$ (três cortes dividindo o plano, haverá as 4 regiões que já havia antes e mais três criadas pelo outro corte, pois ele intercepta os dois cortes que já existiam antes em um ponto cada um, pontos estes distintos, logo passará através de três regiões. Assim, haverá $x_3 = x_2 + 3 = 7$).

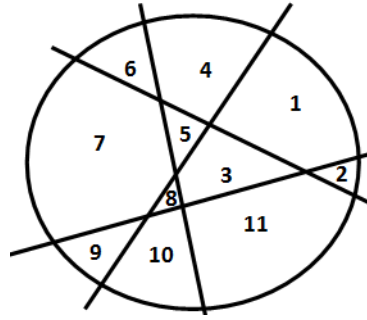
Figura 3.5: 3 cortes no plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para $n = 4$, $x_4 = 11$ (quatro cortes dividindo o plano, haverá as regiões anteriores (7) e o novo corte terá que interceptar os três cortes que já estão sobre o plano em pontos distintos, atravessando quatro regiões. Logo, haverá mais quatro regiões, totalizando $x_4 = x_3 + 4 = 7 + 4 = 11$).

Figura 3.6: 4 cortes no plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Continuando estas iterações tem-se, de modo geral, $x_n = x_{n-1} + n$, com $x_0 = 1$, e esta é uma equação de recorrência linear de 1ª ordem, a qual resolve-se usando o método da soma telescópica.

Tem-se que

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_0 &= 1 \\
 x_2 - x_1 &= 2 \\
 x_3 - x_2 &= 3 \\
 &\vdots \\
 x_n - x_{n-1} &= n
 \end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtém-se

$$x_n - x_0 = \sum_{k=1}^n k$$

pela soma dos n termos de uma progressão aritmética, segue que

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^n k = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$$

Esta solução é validada usando o princípio de indução finita, pois, foi concluído por mera observação do padrão apresentado que n regiões são acrescentadas no n -ésimo passo para alguns valores de n .

Do passo base de indução para $n = 1$, ou seja, com apenas um corte, é obtido duas regiões. Portanto, a fórmula está correta, pois $1 + \frac{(1+1)1}{2} = 2 = x_1$.

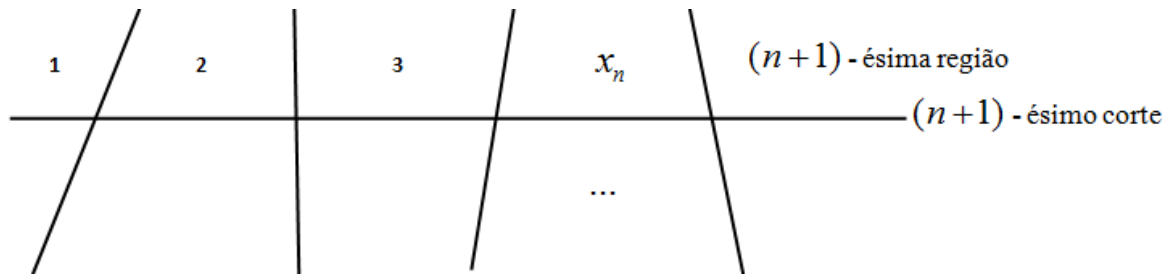
Do passo indutivo, admite-se que, para algum valor de n , a fórmula de x_n esteja correta. Mostra-se que a fórmula para x_{n+1} também está correta.

Supõe-se que, com n cortes, foi obtido o número máximo $1 + \frac{(1+n)n}{2}$ de regiões e pretende-se fazer mais um corte, de modo a obter o maior número possível de regiões.

É possível conseguir isso, se o $(n+1)$ -ésimo corte encontrar cada um dos n cortes anteriores em pontos que não são de interseção de dois cortes. Por outro lado, se o $(n+1)$ -ésimo corte encontra todos os n cortes anteriores, ele produz $n+1$ novas regiões: a região que começa em um determinado corte e, ao encontrar o primeiro corte, ele separa em duas regiões em que está, entrando em outra região. Ao encontrar o segundo corte, ele separa em duas a região em que está, entrando em outra região, e assim sucessivamente, até encontrar o $(n+1)$ -ésimo corte separando a última região em que entrar em duas, as x_n regiões que já existiam e a região $n+1$.

Assim, são obtidas $n+1$ regiões além das que já existiam, conforme figura abaixo:

Figura 3.7: $n+1$ cortes no plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Logo,

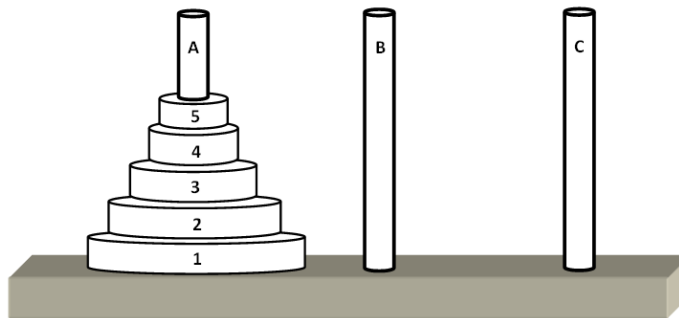
$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + n + 1 \\
 &= 1 + \frac{(1+n)n}{2} + n + 1 \\
 &= \frac{(1+n)(2+n)}{2} + 1
 \end{aligned}$$

Mostrando que a fórmula de x_n está correta para $n+1$ cortes e o resultado segue então do Princípio de Indução Matemática.

3.3 Torre de Hanoi

A Torre de Hanoi é um jogo que consiste de uma tábua onde estão fixados três hastes, batizadas de A , B e C . Em uma das hastes, por exemplo a A , estão enfiados n discos furados no centro, de modo que o disco de maior diâmetro é o que está mais em baixo na pilha, e os demais vão se empilhando em ordem decrescente de diâmetro, ou seja, se o disco D_1 for o mais baixo na pilha, e a altura dos discos cresce com o valor de n , o diâmetro decresce ($D_1 > D_2 > D_3 > \dots > D_n$). As regras do jogo só permitem que, em cada movimento do jogo se pode mover somente um disco, o que estiver no topo da pilha, além disso não é permitido colocar um disco de diâmetro maior em cima de um outro com diâmetro menor. Qual é o número mínimo de movimentos para mover todos os discos da haste A para a haste C ?.

Figura 3.8: Torre de Hanoi



Fonte: Elaborada pelo Autor

Seja x_n o número de movimentos necessários para mover n discos $D_1, D_2, \dots, D_n$ da haste A para a haste C . Supondo-se que existe somente 1 disco, D_1 . Então, basta 1 movimento para trocá-lo para C , assim $x_1 = 1$. Supondo-se que se tenha dois discos, D_1 e D_2 , com $D_1 > D_2$, sendo D_1 colocado em baixo da pilha, e D_2 colocado acima dele. Nesse caso, no 1º movimento move-se D_2 para a haste B , no 2º movimento, D_1 para a haste C , e no 3º movimento, move-se o disco D_2 para a haste C , para ficar acima do disco D_1 que já está lá, ficando completa a mudança. Então, $x_2 = 3 = x_1 + 2$. Ora, para 3 discos, D_1, D_2, D_3 . Move-se o disco menor D_3 para a haste C , em seguida D_2 para B traz-se D_3 para B , depois D_1 para C e D_3 para A , D_2 para C e finalmente D_3 para C , totalizando 7 movimentos, ou seja, $x_3 = 7 = x_2 + 4$.

A idéia fundamental é de que, tem-se que mover $(n - 1)$ discos de A para

B , em x_{n-1} movimentos, depois mover o último disco (o maior), de A para C , em 1 movimento, voltando os $(n-1)$ discos de B para C , em x_{n-1} movimentos, totalizando $x_n = 2x_{n-1} + 1$ movimentos. Para resolver esta relação de recorrência, basta aplicar a metodologia desenvolvida na Seção (2.2.4), e é claro que para $n+1$,

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 \quad (3.6)$$

com $x_1 = 1$. Encontra-se uma solução particular (a_n) da recorrência homogênea $x_{n+1} = 2x_n$ pelo método das substituições sucessivas:

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = 2a_2$$

$$a_4 = 2a_3$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2a_{n-1}$$

multiplicando estas igualdades membro a membro, tem-se

$$a_2 a_3 a_4 \cdots a_n = 2^{n-1} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$$

isto é,

$$a_n = 2^{n-1} a_1.$$

Fazendo $a_1 = 1$, obtém-se $a_n = 2^{n-1}$ e esta é uma solução particular da recorrência homogênea. Escreve-se

$$x_n = a_n y_n = 2^{n-1} y_n \quad (3.7)$$

tem-se, em particular que

$$y_1 = \frac{x_1}{a_1} = 1$$

assim, $x_{n+1} = 2^n y_{n+1}$. Daqui e de (3.6),

$$\begin{aligned} 2^n y_{n+1} &= 2(2^{n-1} y_n) + 1 \\ &= 2^n y_n + 1 \end{aligned}$$

e, dividindo-se ambos os membros desta última igualdade por 2^n , obtém-se

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2^n} \quad (3.8)$$

aplicando o método da soma telescópica em (3.8), segue que

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{1}{2} \\ y_3 - y_2 &= \frac{1}{2^2} \\ y_4 - y_3 &= \frac{1}{2^3} \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

somando-se estas igualdades membro a membro,

$$\begin{aligned} y_n - y_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) \end{aligned}$$

aplicando a fórmula da soma dos termos da progressão geométrica no segundo membro da igualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2^{-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2^{-n+1}) 2 \\ &= 1 - 2^{-n+1} \end{aligned}$$

resultando,

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 1 - 2^{-n+1} \\ &= 1 + 1 - 2^{-n+1} \\ &= 2 - 2^{-n+1} \end{aligned}$$

como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $y_n = 2 - 2^{-n+1}$,

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1}(2 - 2^{-n+1}) \\ &= 2^n - 2^0 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Usando indução para demonstrar a validade da igualdade acima, segue que de fato, para $n = 1$ tem-se $2^1 - 1 = 1 = x_1$. Supondo que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^n - 1$.

Então,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 2x_n + 1 \\&= 2(2^n - 1) + 1 \\&= 2^{n+1} - 2 + 1 \\&= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Desta forma, a igualdade também é válida para $n + 1$. Logo, pelo princípio de indução finita, $x_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4 Algumas Aplicações de Recorrências Lineares em Contagem

Neste capítulo são feitas algumas aplicações de recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem. São explorados problemas de contagem que seguem a famosa sequência de Fibonacci que foi estudada no capítulo anterior, bem como são abordados alguns problemas de livros didáticos, questões dos bancos de questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e da OMM (Olimpíada Maranhense de Matemática).

Considera-se que tais aplicações foram selecionadas de modo a melhorar aspectos cognitivos dos alunos, pois instiga o pensamento no sentido de buscar generalizações de padrões na forma de contar, aplicando os métodos para resolver essas recorrências que foram estudados no Capítulo 2.

4.1 Problemas de Contagem que seguem a Sequência de Fibonacci

Exemplo 4.1. (FRANCO, Tertuliano, pág.99). *De quantas maneiras podemos cobrir uma caixa $2 \times n$ com retângulos 2×1 ?*

Solução: Colocando os retângulos sobre a caixa, verifica-se que:

para $n = 1$ tem-se uma caixa 2×1 , que pode ser coberta somente de uma maneira, com o retângulo em pé.

Para $n = 2$ tem-se uma caixa 2×2 , que pode ser coberta, com dois retângulos deitados (1 maneira) ou dois retângulos em pé (1 maneira), assim tem-se dois modos de cobrir a caixa.

Para $n = 3$ tem-se uma caixa 2×3 , que pode ser coberta com três retângulos em pé (1 maneira), dois retângulos deitados à direita e um em pé à esquerda (1 maneira) e dois deitados à esquerda e um em pé à direita (1 maneira), totalizando 3 modos de cobrir a caixa.

Para $n = 4$ tem-se uma caixa 2×4 , que pode ser coberta com quatro retângulos

em pé (1 maneira), os quatro deitados dois a dois (1 maneira), dois em pé á esquerda e dois deitados á direita (1 maneira), dois deitados á esquerda e dois em pé á direita (1 maneira) e, para finalizar, um em pé á direita e um em pé á esquerda e dois deitados no meio (1 maneira), totalizando 5 maneiras. Observa-se que para $n = 4$, apenas é replicado os modos de cobrir a caixa para $n = 3$ juntamente com os modos de cobrir a caixa para $n = 2$, conforme iniciado seu preenchimento com um retângulo em pé ou dois retângulos deitados. A figura abaixo mostra os modos de cobrir a caixa até $n = 4$ citados acima.

Figura 4.1: Modos de cobrir uma caixa até $n=4$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Considerando, de modo geral, uma caixa de tamanho $2 \times (n + 2)$. Seguindo o padrão descrito acima, para preencher o canto esquerdo da caixa, há duas maneiras: colocar um retângulo em pé, restando um preenchimento de tamanho $2 \times (n + 1)$ ou colocar dois retângulos deitados, restando um preenchimento de tamanho $2 \times n$. Seja x_n o número de maneiras de preencher a caixa $2 \times n$ com os retângulos 2×1 , tem-se

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = 5$$

$$\vdots$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Esta é exatamente a sequência de Fibonacci estudada no capítulo anterior. Portanto,

$$x_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

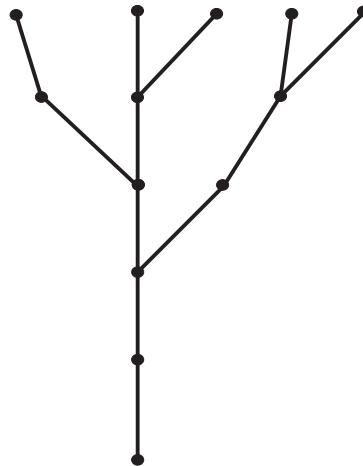
Exemplo 4.2. (Questão 14 - Banco de questões OBMEP, 2013 - Nível 1 - Vai dar galho).

A árvore do professor Fernando cresce de acordo com a seguinte regra:

- (i) na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho;
- (ii) após crescer por duas semanas, esse galho dá origem a um novo galho por semana;
- (iii) cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

A figura abaixo ilustra a árvore do professor Fernando após cinco semanas passadas do início de seu crescimento

Figura 4.2: Árvore após cinco semanas do início de seu crescimento



Fonte: Questão 14 - Banco de questões OBMEP, 2013 - Nível 1 - Vai dar galho

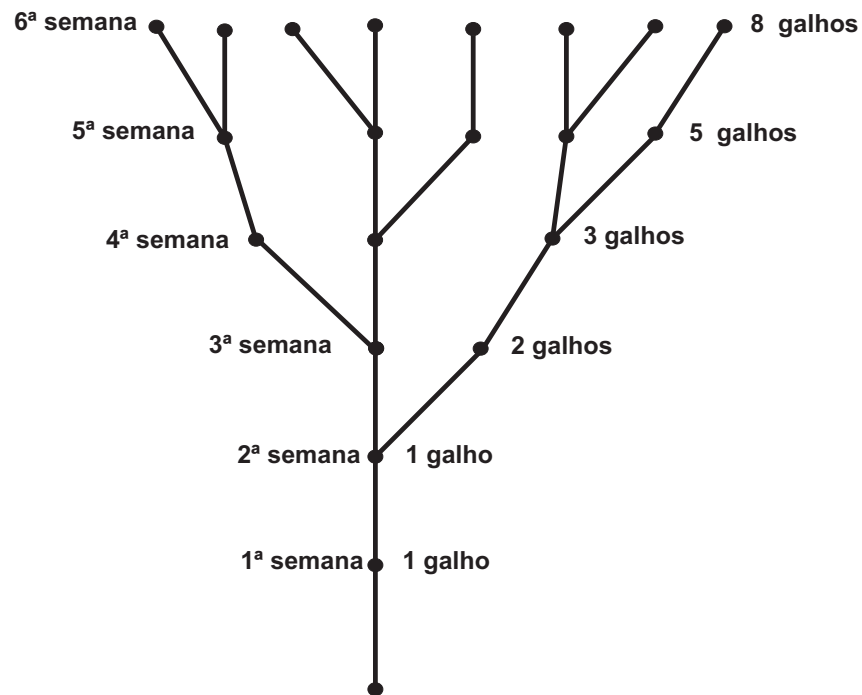
Note que após três semanas havia dois galhos; após quatro semanas havia três galhos e após cinco semanas havia cinco galhos.

- a) Quantos galhos haverá após seis semanas?
- b) Quantos galhos haverá após sete semanas?
- c) Quantos galhos haverá após treze semanas?

Solução:

a) Continuando as ramificações de crescimento da árvore do professor Fernando conforme as regras estabelecidas, obtém-se a seguinte situação:

Figura 4.3: Árvore após seis semanas do início de seu crescimento



Fonte: Questão 14 - Banco de questões OBMEP, 2013 - Nível 1 - Vai dar galho

O que mostra que após a sexta semana de crescimento tem-se um total de 8 galhos.

b) Percebe-se que a sequência que determina o número de galhos por semana de crescimento é fundamentalmente o problema dos coelhos de Fibonacci, sendo que aqui os coelhos foram substituídos por galhos e os meses substituídos por semanas. De modo geral, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ para $n \geq 1$. Daqui,

$$\begin{aligned}
 x_7 &= x_6 + x_5 \\
 &= 8 + 5 \\
 &= 13.
 \end{aligned}$$

c) Seguindo o padrão da sequência de Fibonacci, a quantidade de galhos após

a 13ª semana será dada pela soma do 12º termo com o 11º termo. Assim, tem-se:

$$6^\circ \text{ termo} = 8.$$

$$7^\circ \text{ termo} = 13.$$

$$8^\circ \text{ termo} = 8 + 13 = 21.$$

$$9^\circ \text{ termo} = 13 + 21 = 34.$$

$$10^\circ \text{ termo} = 21 + 34 = 55.$$

$$11^\circ \text{ termo} = 34 + 55 = 89.$$

$$12^\circ \text{ termo} = 55 + 89 = 144.$$

$$13^\circ \text{ termo} = 89 + 144 = 233.$$

Portanto, a quantidade de galhos após a 13ª semana é 233. Da fórmula fechada da sequência de Fibonacci,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (4.1)$$

o seu 13º termo pode ser determinado por F_{13} , e, portanto,

$$F_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{13} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{13} = 233.$$

Este cálculo não é simples de se fazer. Portanto, para uma quantidade pequena de termos, usa-se o raciocínio recursivo, ou seja, fazendo os cálculos termo a termo.

Exemplo 4.3. (Oliveira, M. Mendes - problema 07). *Quantos subconjuntos de $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ há sem números consecutivos?*

Solução: Das seguintes iterações:

para $X_1 = \{1\}$, tem-se $x_1 = 2$; pois os subconjuntos de X_1 são apenas $\emptyset$ e $\{1\}$.

Para $X_2 = \{1, 2\}$, tem-se $x_2 = 3$; pois os únicos subconjuntos de X_2 que atendem a restrição estabelecida acima são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$.

Para $X_3 = \{1, 2, 3\}$, tem-se $x_3 = 5$; pois os únicos subconjuntos de X_3 que satisfazem a condição estabelecida são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$ o que observa-se ser $x_3 = x_2 + x_1$.

Para $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, tem-se $x_4 = 8$; pois os únicos subconjuntos de X_4 que satisfaz a condição estabelecida são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ o que observa-se ser $x_4 = x_2 + x_3$.

De modo geral, os valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ são $2, 3, 5, 8, \dots$ respectivamente. Estes valores sugerem ser os termos da sequência de Fibonacci e, de fato, são. Sejam os conjuntos

$$X_{n-1} = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

$$X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$X_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$$

Considerando x_{n-1}, x_n, x_{n+1} a quantidade de subconjuntos de X_{n-1}, X_n, X_{n+1} que satisfazem a restrição de não haver números consecutivos entre seus elementos, respectivamente. Os subconjuntos de X_{n+1} sem números consecutivos, podem ser contados como segue:

- (i) Se um subconjunto destes não contém o elemento $n+1$, então é também um subconjunto de X_n sem números consecutivos. Nesse caso, a quantidade de tais subconjuntos é x_n .
- (ii) Se um subconjunto destes contém o elemento $n+1$, a retirada deste termo fornece um subconjunto de X_{n-1} . Neste caso, a quantidade destes subconjuntos é x_{n-1} .

De (i) e (ii), tem-se

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, n \geq 2 \quad (4.2)$$

Fazendo $n = k+1$, tem-se, de (4.2), que $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$, com $k \geq 1$, e esta é a equação de recorrência da sequência de Fibonacci,

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

Porém, tem-se a restrição $k \geq 1$.

Ora, sua equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$ que tem raízes: $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Determina-se constantes A e B tais que,

$$F_k = Ar_1^k + Br_2^k$$

como $F_1 = 2$ e $F_2 = 3$, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} F_1 = Ar_1^1 + Br_2^1 = 2 \\ F_2 = Ar_1^2 + Br_2^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 2 \\ A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ e $B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$. Tem-se, portanto, que o termo geral da recorrência é

$$F_k = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k, \text{ com } k \geq 1.$$

Exemplo 4.4. (LIMA, E. L., et al - Página 73 - Jogo do Olavo). *Em um jogo, em cada etapa Olavo pode fazer 1 ou 2 pontos. De quantos modos ele pode totalizar n pontos?*

Solução: Sejam as seguintes iterações:

- (i) para Olavo totalizar 1 ponto, só pode ser feito de um único modo.
- (ii) Para Olavo totalizar 2 pontos, ele pode ter feito 1 ponto na primeira etapa e 1 ponto na segunda etapa (1 modo) ou 2 pontos em etapa única (1 modo), portanto, totaliza dois modos de somar 2 pontos.
- (iii) Para Olavo totalizar 3 pontos, ele fez 1 ponto em cada etapa de três etapas (1 modo) ou 1 ponto na primeira etapa e 2 pontos na segunda etapa (1 modo) ou 2 pontos na primeira etapa e 1 ponto na segunda etapa (1 modo), totalizando três modos.
- (iv) Para Olavo totalizar 4 pontos, ele fez 1 ponto em cada etapa de quatro etapas (1 modo) 1 ponto na primeira etapa, 1 ponto na segunda etapa e 2 pontos na terceira (1 modo) ou 2 pontos na primeira etapa, 1 ponto na segunda etapa e 1 ponto na terceira etapa (1 modo) ou 1 ponto na primeira etapa, 2 pontos na segunda etapa e 1 ponto na terceira etapa (1 modo) ou 2 pontos na primeira etapa e 2 pontos na segunda etapa (1 modo), totalizando 5 modos.

Seja x_n o número de modos de obter n pontos. Para obter $n+2$ pontos, Olavo em sua primeira jogada ou faz 1 ponto ou 2 pontos. No primeiro caso, ele tem que obter $n+1$ pontos nos jogos seguintes. No segundo caso, ele tem que obter n pontos nos próximos jogos. Logo, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Esta recorrência

produz, então, uma sequência cujo termo x_n coincide com o termo F_{n+1} da sequência de Fibonacci. Assim,

$$x_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

4.2 Problema da Olimpíada Maranhense de Matemática - OMM

Exemplo 4.5. (Questão 3 - Nível 2 - Olimpíada Maranhense de Matemática 2018). *Os números naturais de 1 a 100 são escritos em um quadro. Joana apaga 2 desses números, digamos a e b e acrescenta ao quadro o número $a + b + 1$. Esse procedimento é repetido até que só reste um número no quadro. Que número é esse?*

Solução: Se $x_1, \dots, x_m$ são os números no quadro numa dada etapa, que não seja a última, escolhendo-se arbitrariamente $1 \leq n_1 < n_2 \leq m$, apagando-se os termos x_{n_1} e x_{n_2} para no lugar deles escrever $x_{n_1} + x_{n_2} + 1$, tem-se que a soma dos números então presentes no quadro é

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq n_1, n_2} x_n + (x_{n_1} + x_{n_2} + 1) &= \left(\sum_{n \neq n_1, n_2} x_n + x_{n_1} + x_{n_2} \right) + 1 \\ &= \sum_{n=1}^m x_n + 1, \end{aligned}$$

ou seja, a cada etapa a quantidade de números no quadro diminui em uma unidade e sua soma aumenta uma unidade. Deste modo, denotando por y_0 a soma dos números no quadro no instante inicial e, de modo geral, por y_k a soma dos elementos no quadro na k -ésima etapa, tem-se

$$y_{k+1} = y_k + 1$$

e esta uma recorrência linear de 1^a ordem. Sendo o último número a ser escrito no quadro o y_{99} . Tem-se

$$y_1 = y_0 + 1$$

$$y_2 = y_1 + 1$$

$$\vdots$$

$$y_{99} = y_{98} + 1$$

somando-se estas igualdades membro a membro,

$$(y_1 + \cdots + y_{98}) + y_{99} = y_0 + (y_1 + \cdots + y_{98}) + 99$$

o que, após os cancelamentos, nos fornece

$$y_{99} = y_0 + 99$$

e, como

$$y_0 = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 = 5050,$$

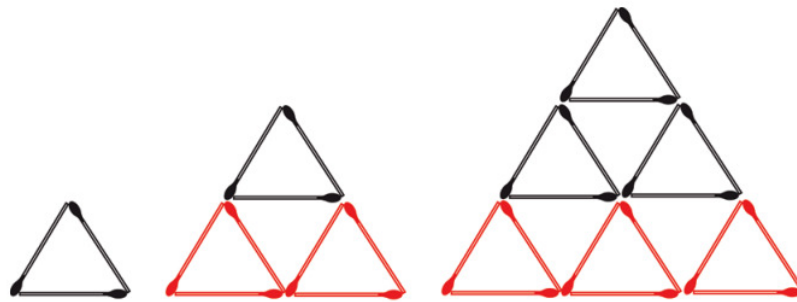
tem-se que o valor desejado é

$$y_{99} = 5050 + 99 = 5149.$$

4.3 Problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Exemplo 4.6. (Questão 09 - OBMEP 2012, nível 2 - 1ª Fase). *Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?*

Figura 4.4: Triângulos formados por palitos



Fonte: Questão 09 - OBMEP 2012, nível 2 - 1ª Fase

Solução: Seja x_n o número de palitos utilizados para construir o triângulo, fazendo as seguintes iterações:

- (i) $x_1 = 3$ (o número de palitos utilizados para construir o primeiro triângulo);

(ii) $x_2 = 9$ (o número de palitos utilizados para construir o segundo triângulo, sendo $x_2 = x_1 + 6$);

(iii) $x_3 = 18$ (o número de palitos para construir o terceiro triângulo, sendo $x_3 = x_2 + 9$);

(iv) $x_4 = 30$ (o número de palitos para construir o quarto triângulo, sendo $x_4 = x_3 + 12$);

Continuando estas iterações tem-se que o triângulo que ocupa a n -ésima posição na sequência é formado acrescentando n triângulos iguais ao primeiro ao triângulo posterior. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \cdot 3 \\ x_2 - x_1 &= 2 \cdot 3 \\ x_3 - x_2 &= 3 \cdot 3 \\ x_4 - x_3 &= 4 \cdot 3 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= n \cdot 3 \end{aligned}$$

aplicando o método da soma telescópica, segue

$$x_n = 3 + 3(2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$

pela soma dos n termos de uma progressão aritmética aplicado na soma entre parênteses, segue que

$$\begin{aligned} x_n &= 3(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{3n + 3n^2}{2}. \end{aligned}$$

Como $x_n = 135$, tem-se

$$\frac{3n^2 + 3n}{2} = 135$$

ou, equivalentemente,

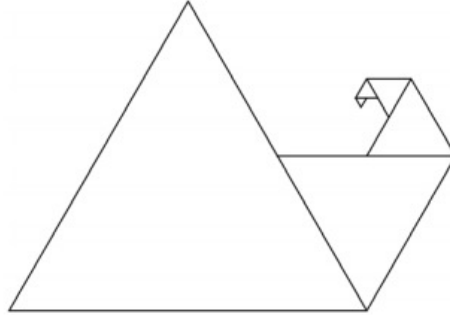
$$n^2 + n - 90 = 0.$$

Esta equação tem raiz positiva $n = 9$ e, por conseguinte, o triângulo procurado é o nono triângulo da sequência, cujo lado é composto por 9 palitos.

Exemplo 4.7. (Questão 219 - Banco de Questões OBMEP - 2010 - Nível 1 - Colando seis triângulos). *Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro*

com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura dada. Qual é o perímetro dessa figura?

Figura 4.5: Perímetro de triângulos equiláteros adjacentes



Fonte: Questão 219 - Banco de Questões OBMEP - 2010 - Nível 1 - Colando seis triângulos

Solução: Seja x_n o perímetro da figura formada por n triângulos. Observa-se que:

- (i) $x_1 = 3$ cm (o perímetro da figura que possui apenas um triângulo);
- (ii) $x_2 = x_1 + \frac{1}{2}$ cm (o perímetro da figura aumenta em $\frac{1}{2}$ cm após incluir o segundo triângulo);
- (iii) $x_3 = x_2 + \frac{1}{4}$ cm (o perímetro da figura aumenta em $\frac{1}{4}$ cm após incluir o terceiro triângulo, ou seja, $x_3 = x_2 + \frac{1}{2^2}$);
- (iv) $x_4 = x_3 + \frac{1}{8}$ cm (o perímetro da figura aumenta em $\frac{1}{8}$ cm após incluir o quarto triângulo, assim, $x_4 = x_3 + \frac{1}{2^3}$).

Continuando estas iterações, segue que

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_3 - x_2 &= \frac{1}{2^2} \\ x_4 - x_3 &= \frac{1}{2^3} \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Aplicando o método da soma telescópica, obtém-se

$$x_n - x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

resultando em

$$x_n = 3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Da fórmula da soma dos n termos de uma progressão geométrica, segue que

$$\begin{aligned} x_n &= 3 + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{\frac{1}{2}} \\ &= 3 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 4 - \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Daqui, para calcular o perímetro de uma figura formada por seis triângulos, basta fazer a substituição para $n = 6$, assim

$$\begin{aligned} x_6 &= 4 - \frac{1}{2^{6-1}} \\ &= \frac{127}{32} \text{ cm} \end{aligned}$$

Exemplo 4.8. (Questão 13 - Banco de Questões - OBMEP, 2012 - Nível 3). *Paula escreveu os números $1, 2, 3, \dots$ em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado na figura abaixo. Considerando a sequência $1, 3, 13, 31, \dots$; qual é o 30º termo dessa sequência?*

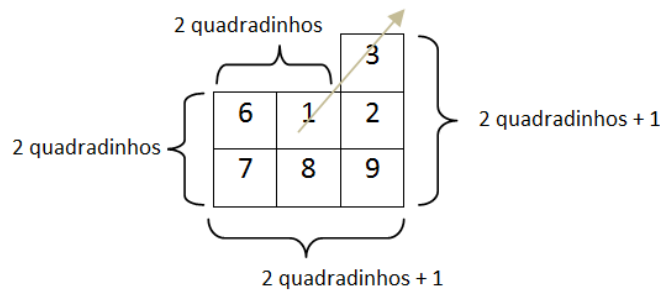
Figura 4.6: Números de Paula

	37	36	35	34	33	32	31		
	38	17	16	15	14	13	30		
	39	18	5	4	3	12	29		
	40	19	6	1	2	11	28	...	
	41	20	7	8	9	10	27	...	
	42	21	22	23	24	25	26	51	
	43	44	45	46	47	48	49	50	

Solução: Seja x_n o número que está na diagonal escrito por Paula

- (i) $x_1 = 1$ (primeiro número escrito por Paula);
- (ii) $x_2 = 3$ (Conforme a figura abaixo, confere-se dois quadradinhos a esquerda e a baixo do quadradinho que contém o número 1, incluindo o quadradinho que contém o número 1, três quadradinhos a direita e três quadradinhos subindo, escrevendo assim, o número 3);

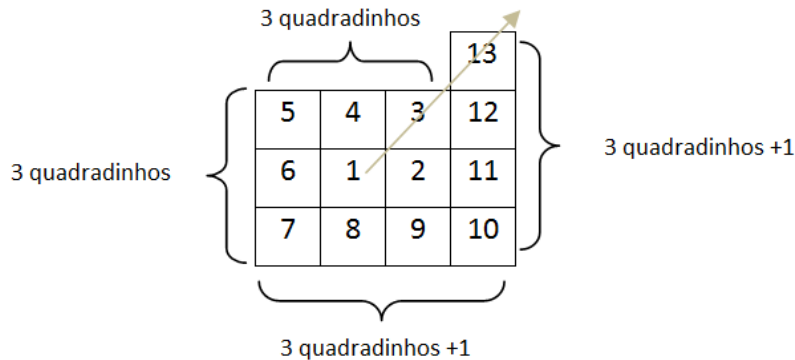
Figura 4.7: Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_2



Fonte: Elaborada pelo Autor

- (iii) $x_3 = 13$ (Confere-se três quadradinhos a esquerda e a baixo do quadradinho que contém o número 3, incluindo o quadradinho que contém o número 3, quatro quadradinhos a direita e quatro quadradinhos subindo, escrevendo assim, o número 13);

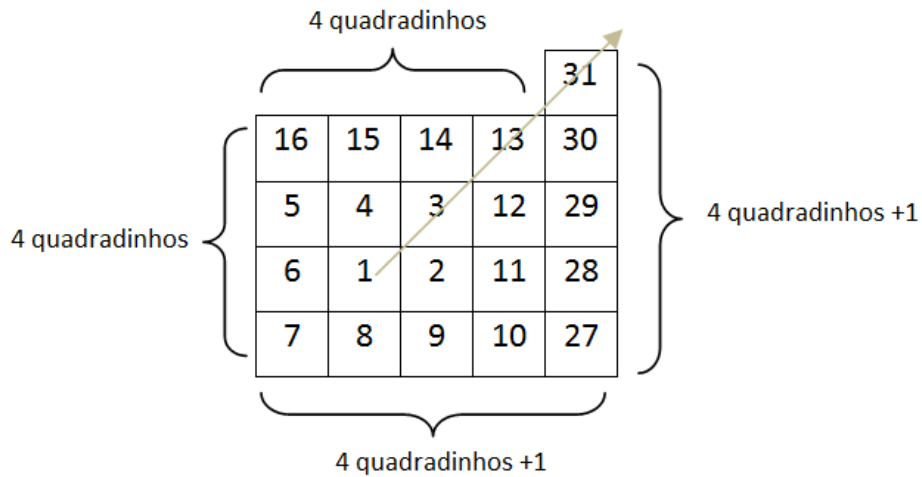
Figura 4.8: Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_3



Fonte: Elaborada pelo Autor

- (iv) $x_4 = 31$ (Confere-se quatro quadradinhos a esquerda e a baixo do quadradinho que contém o número 13, incluindo o quadradinho que contém o número 13, cinco quadradinhos a direita e cinco quadradinhos subindo, escrevendo assim, o número 31);

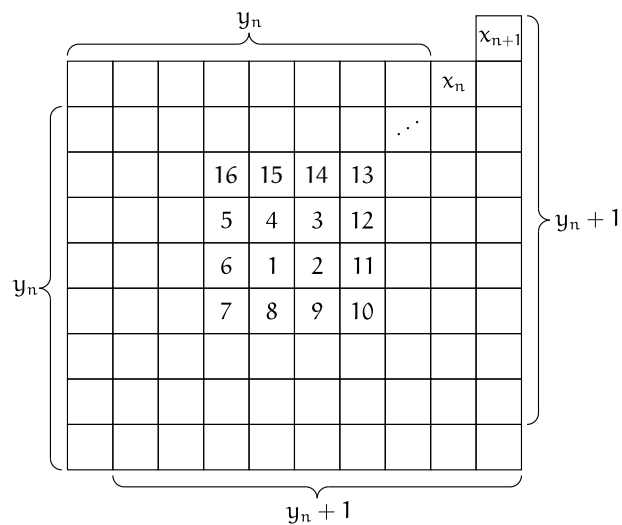
Figura 4.9: Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_4



Fonte: Elaborada pelo Autor

Seja $y_n + 1$ a quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_n como mostra a figura.

Figura 4.10: Quantidade de quadradinhos que formam o lado do quadrado que contém x_n

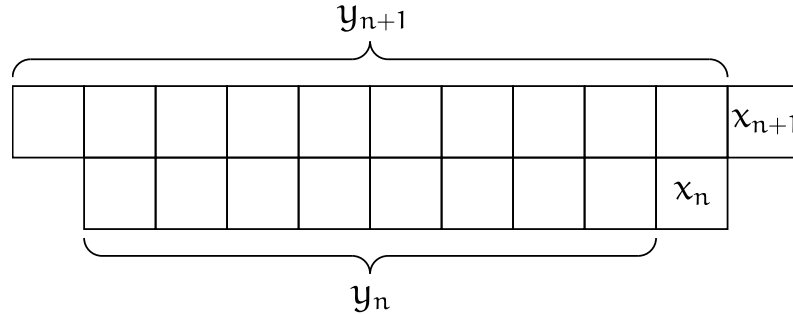


Fonte: Elaborada pelo Autor

Observa-se, que de modo geral, para escrever o número x_{n+1} adiciona-se a x_n o dobro de quadradinhos y_n e o dobro de quadradinhos $y_n + 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n + 2(y_n + 1) \\ &= x_n + 4y_n + 2. \end{aligned}$$

Figura 4.11: Relação entre y_n e y_{n+1} .



Fonte: Elaborada pelo Autor

Nota-se ainda que $y_{n+1} = y_n + 2$ e que $y_1 = 0$, ou seja, $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ é uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 0 e razão 2. Deste modo,

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2(n - 1) \\ &= 2(n - 1) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x_{n+1} - x_n = 4y_n = 8(n - 1) + 2.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= 8(n - 2) + 2 \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= 8(n - 3) + 2 \\ &\vdots \\ x_3 - x_2 &= 8 \cdot 1 + 2 \\ x_2 - x_1 &= 8 \cdot 0 + 2 \end{aligned}$$

e, somando-se estas igualdades membro a membro, segue que

$$\begin{aligned}
 x_n - x_1 &= 8[1 + 2 + \cdots + (n-2)] + 2(n-1) \\
 &= 4(n-2)(n-1) + 2(n-1) \\
 &= 2(n-1)[2(n-2) + 1] \\
 &= 2(n-1)(2n-3).
 \end{aligned}$$

Daqui,

$$\begin{aligned}
 x_n &= 2(n-1)(2n-3) + x_1 \\
 &= 4n^2 - 10n + 7
 \end{aligned}$$

Logo, o 30º termo da sequência é dado por

$$\begin{aligned}
 x_{30} &= 4 \cdot 30^2 - 10 \cdot 30 + 7 \\
 &= 3307.
 \end{aligned}$$

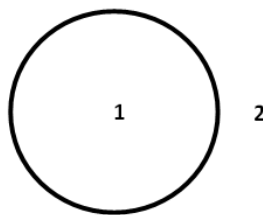
4.4 Problemas de Livros Didáticos

Exemplo 4.9. (LIMA, E. L., et al - Página 73). *Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano.*

Solução: Seja x_n o número máximo de regiões determinadas no plano por n círculos. Fazendo as seguintes iterações:

- (i) para $n = 1$, $x_1 = 2$ (um círculo dividindo o plano, tem-se duas regiões, a interna ao círculo e a externa a ele).

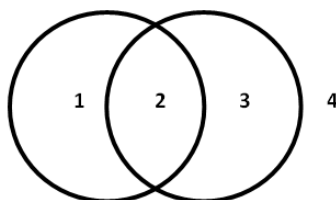
Figura 4.12: Um círculo dividindo o plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

- (ii) Para $n = 2$, $x_2 = 4$ (dois círculos dividindo o plano, tem-se 4 regiões, as duas regiões em que os dois círculos não se intersecciona, a região de interseção dos dois círculos e a região externa aos círculos).

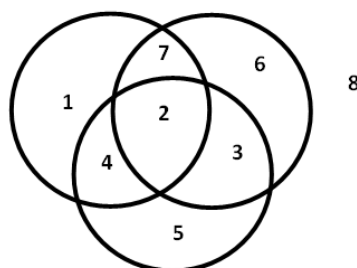
Figura 4.13: Dois círculos dividindo o plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

- (iii) Para $n = 3$, $x_3 = 8$ (três círculos dividindo o plano, tem-se 8 regiões, conforme figura abaixo).

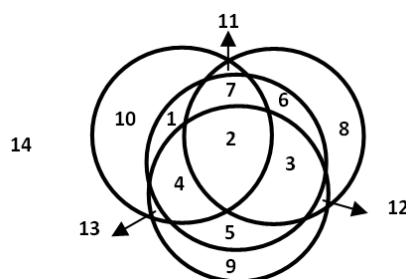
Figura 4.14: Três círculos dividindo o plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

- (iv) Para $n = 4$, $x_4 = 14$ (quatro círculos dividindo o plano, tem-se 14 regiões, conforme configuração geométrica abaixo).

Figura 4.15: Quatro círculos dividindo o plano



Fonte: Elaborada pelo Autor

Continuando estas iterações tem-se, de modo geral, que o círculo $n + 1$ é subdividido em no máximo $2n$ arcos pelos n já existentes. Cada um destes arcos subdivide uma região existente, determinando assim, $2n$ novas regiões. Logo, o número máximo x_n de regiões determinada por n círculos satisfaz a recursão $x_{n+1} = x_n + 2n$, com $x_1 = 1$ e esta é uma equação de recorrência linear de 1ª ordem, a qual resolve-se pelo método da soma telescópica. Segue que

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= 2 \\x_3 - x_2 &= 4 = 2 \cdot 2 \\x_4 - x_3 &= 6 = 2 \cdot 3 \\&\vdots \\x_n - x_{n-1} &= 2(n-1)\end{aligned}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, segue que

$$x_n - x_1 = 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$

pela soma dos n termos de uma progressão aritmética, tem-se,

$$\begin{aligned}x_n &= x_1 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] \\&= 2 + 2 \frac{(n-1)n}{2} \\&= n^2 - n + 2.\end{aligned}$$

Portanto, $x_n = n^2 - n + 2$ é o número máximo de regiões determinadas no plano por n círculos.

Exemplo 4.10. (IEZZI et al. 2010, página 149 - adaptado - Grupo Whatsapp). *No dia 1º de janeiro de 2018, dois amigos criaram um grupo no Whatsapp cada um com perfil de administrador. No dia seguinte cada um dos administradores convidou 3 novos participantes para integrarem o grupo. No dia 3 de janeiro, cada novo participante também virou administrador do grupo e convidou três novos amigos para se juntarem ao grupo e assim por diante, até o final do mês. Admita que todos os participantes aceitem o convite de fazer parte do grupo e que ninguém receba o convite de mais de uma pessoa. Estabeleça a relação de recorrência que relaciona o número de membros x que ingressarão na comunidade por dia n e quantos participantes o grupo terá no dia 31 de janeiro.*

Solução: Seja x_n o número de membros que fazem parte do grupo, pode-se observar que:

- (i) $x_1 = 2$ (o número de membros no dia 1º de janeiro);
- (ii) $x_2 = 6$ (o número de membros no dia 2 de janeiro);
- (iii) $x_3 = 18$ (o número de membros no dia 3 de janeiro);
- (iv) $x_4 = 54$ (o número de membros no dia 4 de janeiro);

Continuando estas iterações, tem-se

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cdot 3 \\x_3 &= x_2 \cdot 3 \\x_4 &= x_3 \cdot 3 \\&\vdots \\x_n &= x_{n-1} \cdot 3.\end{aligned}$$

Aplicando o método da multiplicação membro a membro,

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot 3^{n-1}$$

e, daqui,

$$x_n = x_1 \cdot 3^{n-1}.$$

Como $x_1 = 2$,

$$x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Logo, após n dias, o número de participantes que compõem o grupo é determinado pela relação de recorrência

$$x_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para determinar o número de participantes no dia 31 basta fazer $n = 31$ na relação de recorrência encontrada, o que nos dá

$$x_{31} = 2 \cdot 3^{31-1} = 2 \cdot 3^{30} \text{ participantes no grupo.}$$

5 Considerações Finais

Uma das motivações que levou a realização deste trabalho foi a desmotivação dos alunos para estudar matemática em sala de aula. Observa-se que as recorrências lineares podem ser associadas às ferramentas de resolução de exercícios usados na educação básica. Isso irá instigar o raciocínio do aluno a partir das construções do pensar recursivo, pois iniciando o processo, o mesmo poderá visualizar padrões numéricos em muitos problemas de contagem além daqueles que envolvem indução finita.

Acredita-se que a variedade de exemplos teóricos e práticos apresentados nos Capítulos 2, 3 e 4 pode ser explorada para motivar a introdução das recorrências lineares na educação básica.

Um dos desafios a serem enfrentados é o de encorajar os professores de matemática a estimular o uso de problemas recursivos em sala de aula, não necessariamente de contagem, que possam aguçar o pensamento recursivo.

Apêndice

Teorema 2.1.1 - Página 14. (Teorema da Recursividade)

Sejam a um elemento de um conjunto A e f uma função de A em A . Existe exatamente uma aplicação $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que

$$\varphi(1) = a \quad \text{e} \quad \varphi(s(n)) = f(\varphi(n)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos os subconjuntos C de $\mathbb{N} \times A$ tais que $(1, a) \in C$ e tais que se $(n, x) \in C$, então $(s(n), f(x)) \in C$. A coleção $\mathcal{C}$ é não vazia uma vez que ela contém $\mathbb{N} \times A$. Além disso, como todo $C \in \mathcal{C}$ contém o par $(1, a)$, tem-se que

$$D = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

É fácil ver que, na verdade, $D \in \mathcal{C}$. Contudo, segue da definição de D que nenhuma parte própria sua pode pertencer a $\mathcal{C}$. Sejam S o conjunto de todos os números naturais n para os quais existe um único $x \in A$ tal que $(n, x) \in D$ e $\varphi: S \rightarrow A$ a aplicação definida por $\varphi(n) = x$. Temos que $(1, a) \in D$. Suponha, por absurdo, que exista $a' \in A$, $a' \neq a$, tal que $(1, a') \in D$ e seja $D' = D - \{(1, a')\}$. Então $(1, a) \in D'$ e, além disso, se $(n, x) \in D'$, $(s(n), f(x)) \in D'$ uma vez que $(s(n), f(x)) \in D$ e $(s(n), f(x)) \neq (1, a')$. Logo, $D' \in \mathcal{C}$, o que é um absurdo já que D' é um subconjunto próprio de D . Concluimos, portanto, que $1 \in S$. Seja $n \in S$ e seja x o único elemento de A tal que $(n, x) \in D$. Então $(s(n), f(x)) \in D$ pelo fato de D pertencer a $\mathcal{C}$. Suponha mais uma vez por absurdo que exista $y \in A$, $y \neq f(x)$, tal que $(s(n), y) \in D$ e faça $D'' = D - \{(s(n), y)\}$. Então

$$(s(n), f(x)), (1, a) \in D''.$$

Para qualquer $(m, b) \in D''$, temos que $(s(m), f(b)) \in D$. Se $(s(m), f(b)) = (s(n), y)$, então $s(m) = s(n)$ e $f(b) = y \neq f(x)$, o que nos fornece $m = n$ e $b \neq x$. Daí, (n, b) e (n, x) são elementos distintos de D , contrariando o fato de $n \in S$. Portanto, $(s(m), f(b)) \neq (s(n), y)$ e, conseqüentemente, $(s(m), f(b)) \in D''$. Isso significa, então, que $D'' \in \mathcal{C}$, o

que é um absurdo dado que D'' é um subconjunto próprio de D . Assim, $s(n) \in S$ e, do Princípio de Indução Finita, $S = \mathbb{N}$ e a existência de uma função satisfazendo as condições estabelecidas é comprovada. Sejam, agora, φ_1 e φ_2 duas funções atendendo os requisitos exigidos e seja M o conjunto de todos os números naturais n tais que

$$\varphi_1(n) = \varphi_2(n)$$

Evidentemente, $1 \in M$. Se $n \in M$, então

$$\varphi_1(s(n)) = f(\varphi_1(n)) = f(\varphi_2(n)) = \varphi_2(s(n))$$

e, portanto, $s(n) \in M$ e, do Princípio de Indução Finita, $M = \mathbb{N}$. Logo, $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

Referências

- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática*: Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- CAMINHA, ANTÔNIO. *Tópicos de Matemática Elementar - Vol.1*. Números Reais, SBM, 2011.
- FRANCO, Tertuliano. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. Bahia: UFBA, 2018.
- HUNGERFORD, Thomas W.; *Algebra*. Nova Iorque: Springer, 1974.
- IEZZI, GELSON, et al. *Matemática Ciências e Aplicações - Vol. 1*. 6ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.
- LIMA, E. L., et al. *A Matemática do Ensino Médio - Vol. 2*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção do Professor de Matemática.)
- MARKUCHEVITCH, A. *Sequências Recorrentes*. Moscou: MIR, 1985.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- OBMEP. *Banco de questões 2010*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- OBMEP. *Banco de questões 2012*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- OBMEP. *Prova da 1ª fase: Nível 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- OLIVEIRA, M. Mendes. *Combinatória-Recorrência Nível III*. Salvador: Semana Olímpica, 2001.
- OMM. *Prova fase única*. São Luis: UFMA, 2018.
- PROFMAT. *Exame Nacional de Qualificação 2018.2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- SOUZA, H. Equações de Recorrência. *Revista Eureka!*, Rio de Janeiro, v.9, p.33-40, 2000.
- VILENKIN, N. *Combinatorial Mathematics For Recreations*. Moscou: MIR, 1972.