

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

FRANCISCO DEILSON RODRIGUES BARBOSA DE SOUSA

**SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: proposta
metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do
PROFMAT**

**SÃO LUÍS
2018**

FRANCISCO DEILSON RODRIGUES BARBOSA DE SOUSA

SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito necessário à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José da Silva

**SÃO LUÍS
2018**

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Sousa, Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de.

SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA : proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT / Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de Sousa. - 2018.
62 p.

Orientador(a): Antônio José da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em, 2018.

1. Geogebra. 2. Metodologias ativas. 3. Trigonometria. I. Silva, Antônio José da. II. Título.

FRANCISCO DEILSON RODRIGUES BARBOSA DE SOUSA

SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito necessário à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Defesa em 23 de novembro de 2018

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Antônio José da Silva
Orientador
Universidade Federal do Maranhão

Prof^a. Dr^a. Valeska Martins de Souza
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Examinador Externo
Universidade Federal do Maranhão

Dedico à Deus e minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, por sempre estar ao meu lado, por me guiar nessa caminhada para superar todas as dificuldades e por me proteger a cada semana que me deslocava na ida e volta de Buriticupu à São Luís.

Ao meu orientador Prof. Antônio José Silva pelo apoio, paciência e pelas observações importantes para a conclusão do trabalho.

Aos meus pais, Edilson e Marlene, minha fonte de inspiração para superar todas as dificuldades, muito obrigado por todo amor e por minha vida.

Ao meu amor, Bruna Lorena, muito obrigado por ser meu porto seguro, por seu amor e companheirismo, por sempre estar ao meu lado me incentivando a buscar todos os meus sonhos. Esse ano é especial em nossas vidas e exatamente por isso Deus preparou esse momento especial para compartilharmos juntos.

Aos meus irmãos: Carlos, Jairo, Diogo, as minhas cunhadas Patrícia e Juliana e ao meu cunhado Evaldo pelo apoio incondicional e sempre estarem ao meu lado.

Aos meus sogros Evaldo e Amparo, por todo o carinho e orações para minha felicidade e realizações.

Aos Instituto Federal do Maranhão (IFMA) e Instituto Federal do Piauí (IFPI) pelo incentivo e o apoio ampliar meus conhecimentos.

Aos Professores da Universidade Federal do Maranhão (UFMA) pelos importantes momentos de aprendizagem.

Aos todos os meus amigos que direta ou indiretamente contribuíram para alcançar o sonho de concluir meu mestrado, em especial, aos amigos Raimundão e Ronaldo pelo apoio e incentivo.

A Capes pelo auxílio financeiro para ajudar no pagamento dos custos de deslocamento e alimentação.

A todos meu muito obrigado!

RESUMO

Na busca por compreender qual o impacto do uso do *software* Geogebra no ensino da trigonometria como ferramenta para melhorar o aprendizado, esse trabalho propõe realizar uma revisão das literaturas a partir das dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT desenvolvidas nos últimos cinco anos. Para isso, foi proposta uma pesquisa no banco de dados do PROFMAT com o uso das palavras *trigonometria*, *funções trigonométricas*, *função seno e radiano*, resultando em 134 registros, onde foram selecionados 20 trabalhos de acordo com os seguintes critérios de seleção adotados: estudos completos disponíveis, o auxílio do Geogebra, trabalhos direcionados ao Ensino Médio regular e arquivos executáveis. Verificou-se que as dissertações, em sua maioria defendida em 2013 (30,0%), apresentaram objetivos diversificados, como atividades presenciais com professores ou alunos e a proposta de atividades didática sobre o uso do *software*. Detectou-se que a Bahia foi o estado com o maior número de estudos (15,0%), onde o tema mais frequente foi funções trigonométricas, representado por 29,0% dos trabalhos. Em sua maioria, as dissertações apresentaram 45,0% de estudos com base em delineamentos metodológicos. Conclui-se que o Geogebra é uma importante metodologia ativa que auxilia o ensino de trigonometria dos alunos de Ensino Médio regular, reconhecida pelos professores de Matemática, mas ainda considerada por parte de uma parcela desses profissionais, uma barreira na utilização da ferramenta em sala, em virtude das limitações em seu manuseio. É imprescindível refletir sobre a importância das metodologias ativas em sala de aula, em especial o Geogebra, visto que são de grande relevância para a construção do conhecimento matemático, contribuindo para que os alunos desenvolvam um pensamento criativo e potencializando a sua compreensão, minimizando suas dificuldades e, assim, aumentando seu interesse pela Trigonometria.

Palavra-chave: Geogebra. Trigonometria. Metodologias ativas

ABSTRACT

In order to understand the impact of the use of Geogebra software in the teaching of trigonometry as a tool to improve learning, this work proposes to carry out a literature review based on the dissertations of the Professional Master in Mathematics in National Network - PROFMAT developed in the last five years . For this, a research was proposed in the PROFMAT database with the use of the words trigonometry, trigonometric functions, sine and radian function, resulting in 134 registers, where 20 papers were selected according to the following selection criteria: complete studies Geogebra assistance, regular high school assignments, and executable files. It was verified that the dissertations, most of which were defended in 2013 (30.0%), presented diverse objectives, such as face-to-face activities with teachers or students and the proposal of didactic activities on the use of software. It was found that Bahia was the state with the highest number of studies (15.0%), where the most frequent theme was trigonometric functions, represented by 29.0% of the studies. For the most part, the dissertations presented 45.0% of studies based on methodological delineations. It is concluded that Geogebra is an important active methodology that assists the teaching of trigonometry of regular high school students, recognized by mathematics teachers, but still considered by a portion of these professionals, a barrier in the use of the tool in the classroom, due to the limitations in its handling. It is essential to reflect on the importance of active methodologies in the classroom, especially Geogebra, since they are of great relevance for the construction of mathematical knowledge, contributing for students to develop a creative thinking and potentializing their understanding, minimizing their difficulties and thus increasing their interest in Trigonometry.

Keywords: Geogebra. Trigonometry. Active methodologies.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2. ENSINO, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS	13
2.1. O Ensino de Matemática e as tecnologias educativas	13
2.2. Conceitos Fundamentais Da Trigonometria	16
2.2.1. A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	21
2.2.1.1. Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo.....	22
2.2.1.2. Duas importantes relações	23
2.2.1.3. Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos notáveis	24
2.2.1.4. Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Complementares	28
2.2.1.5. A Trigonometria no Círculo unitário	28
2.2.2. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	31
2.3. O Geogebra e a Trigonometria	36
2.3.1. O GEOGEBRA	36
2.3.2. ANALISANDO O COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	37
3. METODOLOGIA	41
4. RESULTADOS	43
5. ANÁLISE E DISCUSSÕES	51
5.1. Avaliação do desempenho de professores do Ensino Médio	51
5.2. Avaliação do desempenho de alunos do Ensino Médio na interpretação de exercícios utilizando o Geogebra e receptividade ao uso do <i>software</i>	52
5.3. Comparação de resultados do ensino com o Geogebra e o ensino tradicional	53
5.4. Produção de material didático-pedagógico	54
5.5. Proposta de uma Metodologia para o Ensino de Trigonometria	55
6. CONCLUSÃO	59
REFERÊNCIAS	61

1. INTRODUÇÃO

No mundo atual, o processo educacional tem um importantíssimo significado para o desenvolvimento do indivíduo. A educação proporciona ao homem trilhar diversos caminhos na busca de um futuro brilhante, com resultados significativos para sua vida pessoal e em sociedade. Segundo Vianna (2006), o conceito de educação é indispensável para se entender qual o caminho queremos seguir e onde pretendemos chegar. Em seu sentido mais amplo, significa tudo que conseguimos fazer para que as pessoas possam se desenvolver. Já em sentido mais restrito, significa estudar e ampliar as competências e habilidades.

O ensino de Matemática é marcado pelas grandes dificuldades dos alunos em compreender muitos conteúdos, conceitos, fórmulas e algoritmos, em especial a Trigonometria, que é uma das áreas da Matemática, por experiência própria, que são percebidas inúmeras dificuldades na compreensão dos conceitos trigonométricos básicos, a dificuldade para conceituar elementos de objetos matemáticos, que necessitam de conceitos abstratos e compreender as características de funções como a função seno e a função cosseno por exemplo. (LIMA, 2017; FREITAS, 2016; MAGALHÃES, 2013; PERSICANO, 2013).

Para superar essas dificuldades, no universo da sala de aula e fora dela, muitos recursos como computadores, livros, revistas, calculadoras, jogos matemáticos, smartphones, dentre outros, são amplamente utilizados tanto por professores para o ensino, quanto por alunos para a aprendizagem, as tecnologias educacionais, em especial as que são amplamente difundidas na área da informática na educação (BORBA; PENTEADO, 2016; MALTEMPI, 2008).

Para alcançar esse desafio de auxiliar o aprendizado dos alunos é imprescindível que os professores estejam dispostos a buscar novas formas de ensinar e aprender, desenvolvendo práticas docentes com o uso das tecnologias, tornando o processo de ensino aprendizagem mais rico e eficiente. O uso das tecnologias educacionais no ensino da Trigonometria é indispensável para desenvolver novos processos e métodos para um efetivo trabalho pedagógico. Dentre as diversas tecnologias, o computador se destaca como uma das mais importantes tecnologias para o estudo dos conhecimentos trigonométricos. (BORBA; PENTEADO, 2016; MALTEMPI, 2008).

Segundo Lopes (2011), a busca por uma boa formação inicial dos professores, verificou-se que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) contribuem para o ensino da Matemática. Diante das várias possibilidades de atividades desenvolvidas a partir do uso das tecnologias educacionais, é importante que o professor tenha em mente os objetivos que deseja

alcançar, para escolher adequadamente *softwares* como recursos tecnológicos para melhorar sua prática docente e proporcionar ao aluno uma melhor compreensão e aprendizagem dos conhecimentos trabalhados (CERQUEIRA; COSTA, 2017; SOUZA, 2015).

Nesse contexto, insere-se o Geogebra, que compreende um *software* livre (de código aberto e gratuito), disponível em todas as plataformas (Windows, Linux e Mac), que teve sua primeira versão desenvolvida por Marcus Hohenwarter, em 2001, na universidade de Salzburg, na Austria. Esse software de geometria dinâmica é utilizado como ferramenta para ensinar e aprender a matemática, disponibilizando recursos para o estudo de vários campos da matemática, como a álgebra, a geometria e o cálculo, permitindo através de suas funcionalidades dinâmicas possibilidades de análise matemática.

Diante das importantes ferramentas computacionais que o software Geogebra disponibiliza aos alunos, destaca-se a simultaneidade de trabalhar com um sistema de álgebra computacional e um sistema geométrico interativo, permitindo ao educando um aprendizado mediante experiências práticas. O uso do *software* é visto como algo positivo, por trata-se de um elemento importante para a realização de pesquisas em casa ou em sala de aula, fortalecendo o ensino da matemática.

Assim, a escolha do software no ensino da Matemática deve levar em consideração itens como quais serão os objetivos almeçados com o uso da tecnologia, as possibilidades de recursos multimídia (vídeo, som, imagens, textos e filmes), os conteúdos previstos, a clareza quanto a instalação, utilização e os custos para sua aquisição. De acordo com esses itens, verifica-se o destaque do software de geometria dinâmica Geogebra, por se tratar de um software inovador que permite estudar a Geometria e Álgebra de maneira concomitante, gratuito e de fácil instalação e manipulação tornando o estudo da Trigonometria mais interessante, contribuindo para o processo de ensino aprendizagem dos nossos alunos.

Pretende-se buscar a resposta para a seguinte questionamento: Como os egressos do Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) relacionam o Geogebra com o ensino de trigonometria em suas produções nos trabalhos de conclusão de curso (TCC) dos últimos cinco anos?

Este trabalho pretende investigar as contribuições produzidas por egressos do Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que relacionam o *software* Geogebra com o ensino de trigonometria. Especificamente, pretende-se caracterizar os estudos quanto ao local de desenvolvimento, objetivo e temática, identificar as temáticas abordadas nas dissertações do PROFMAT com aplicação do Geogebra; descrever o delineamento, recurso, amostra e contexto dos estudos desenvolvidos; classificar os estudos conforme abordagens

desenvolvidas e apresentadas em resultados e conclusão e elaborar um conjunto de aplicações do Geogebra que possa ser utilizado como proposta metodológica para o ensino de trigonometria.

O presente trabalho foi projetado em seis capítulos, onde o primeiro, a que este parágrafo pertence, são abordadas questões iniciais que introduzem ao problema central e objetivos desta pesquisa.

No Capítulo 2, abordaremos o referencial teórico da dissertação com base nos autores que fundamentam este trabalho, artigos de periódicos e dissertações de mestrado do PROFMAT. Foram apresentados fundamentos estruturados em três subseções: (1) O Ensino de Matemática e as tecnologias educativas; (2) Conceitos Fundamentais Da Trigonometria; e (3) O Geogebra e a Trigonometria.

No Capítulo 3, apresentaremos de forma detalhada a metodologia utilizada na pesquisa, relatando os procedimentos para realizar a investigação e explicitando o tipo de pesquisa.

No Capítulo 4, faremos a apreciação dos dados obtidos nas dissertações de mestrado do PROFMAT, a partir da descrição de características dos estudos e análise substancial dos resultados.

No Capítulo 5, discute-se informações das dissertações relevantes para apreciação dos contextos de desenvolvimentos: avaliação do desempenho de alunos do Ensino Médio na interpretação de exercícios utilizando o Geogebra; avaliação do desempenho de professores do Ensino Médio; comparação de resultados do ensino com o Geogebra e o ensino tradicional; e a produção de material didático-pedagógico. Ao final foi proposta uma metodologia de ensino de trigonometria.

Por último, faremos as considerações finais, no Capítulo 6, baseando-se na conclusão obtida a partir das análises.

2. ENSINO, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS

2.1. O Ensino de Matemática e as tecnologias educativas

A construção do conhecimento é algo paulatino que avalia o processo de aprendizagem em detrimento a diferentes capacidades do educando em absorver os conteúdos necessários para o conhecimento matemático. O ensino não se limita em ministrar aulas, mas sim, em transferir os conhecimentos absorvidos, isto é, ele não é o agente que amplia as habilidades que proporcionam o aprendizado. Assim percebe-se que ensino e a aprendizagem permite ao educador e o educando a capacidade de compartilhar aprendizagens, tornando-os agentes do processo de ensinar.

O ato de planejar uma aula faz com que o educador reflita sobre sua prática, pois ensinar faz o uso de um rigor metodológico, na qual o agente do processo se questiona, buscando características que o norteiam na criação de uma proposta educacional que não vê o ensino como mera transmissão de conhecimento, isto é, o professor e o aluno compartilham suas dúvidas e suas compreensões, possibilitando ao educando ferramentas para captar e compreender as situações do mundo e aplicar as suas realidades.

A importância de metodologias ativas, como materiais didáticos e jogos matemáticos, para o ensino da matemática é visto por apresentar-se como recursos de caráter motivador, que auxiliam na construção do conhecimento matemático, proporcionando encontros mais alegres, contribuindo para que os alunos se interessem pela matemática.

O ensino de matemática com utilização das tecnologias educacionais vem sendo a cada dia um grande desafio para muitos professores, pois a tecnologia ainda é uma barreira para muitos desses formadores. Ainda existem aqueles que possuem um discurso sobre o perigo que as tecnologias poderiam trazer para a aprendizagem dos alunos, no nosso caso a aprendizagem matemática. Borba e Penteadó (2016), ressaltam que uma das afirmações desses professores é que os estudantes só iriam se concentrar em apertar teclas e apenas obedecer às ordens das máquinas, contribuindo para que eles sejam apenas repetidores de tarefas. Essa ideia é ainda mais forte para aqueles que entendem que a matemática como o centro do pensamento lógico, nesse caso considerando que o raciocínio lógico passa a ser realizado pela máquina, o aluno não vai mais precisar raciocinar e deixará de desenvolver sua inteligência.

Ainda com Borba e Penteadó (2016), também há o lado dos apoiadores da presença das tecnologias nas salas de aula, muitos pensam o computador como a solução dos problemas, mas no nosso trabalho procuramos uma postura de análise de como podemos utilizar essas

tecnologias para o benefício dos alunos e principalmente na compreensão de conceitos matemáticos.

Nesse sentido, destacamos:

As tecnologias cada vez mais estarão presentes na educação, desempenhando muitas das atividades que os professores sempre desenvolveram. A transmissão de conteúdos dependerá menos dos professores, porque dispomos de um vasto arsenal de materiais digitais sobre qualquer assunto. Caberá ao professor definir quais, quando e onde esses conteúdos serão disponibilizados e o que se espera que os alunos aprendam e as atividades relacionadas a esses conteúdos (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2015, p. 32 e 33).

Para CARNEIRO; PASSOS (2014), a inserção das tecnologias educativas nas escolas é importante para capacitar os alunos para o mercado de trabalho, fator este de grande relevância social por trata-se de uma ferramenta que tornará os alunos preparados para manusear as tecnologias. Segundo Cannone, Robayana e Medina (2008), um dos desafios dos professores é o emprego das tecnologias, que influenciam no modo de ensinar quanto na escolha dos conteúdos.

Pensando nessa inserção das tecnologias nas salas de aula de hoje, nos vem a questão: E as escolas? Elas estarão preparadas para receber esses equipamentos, fazendo um uso educacional adequado de seu potencial, ou é apenas uma imposição da sociedade e do mercado de trabalho? Segundo Moran (2014, p.44):

O primeiro passo é procurar de todas as formas tornar viável o acesso frequente e personalizado de professores e alunos às novas tecnologias, notadamente à internet. É imprescindível que haja salas de aula conectadas, salas adequadas para a pesquisa, laboratórios bem equipados.

Além disso, para Moran (2014) o computador é uma ferramenta admite pesquisar, experimentar conhecimento específicos, desvendar novos conceitos e ideias. Com isso, verifica-se que cabe ao professor a missão de conduzir o uso dos recursos educacionais, como jogos educativos, na busca de uma educação rica e eficiente, contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Para Maltempi (2008), toda inserção das tecnologias no âmbito de ensino e aprendizagem exige novas formas da prática docente, pois ela não é parada e transforma a relação ensino-aprendizagem pelo seu dinamismo. Isso é da maior importância para que possíveis decepções ou resultados negativos não sejam, de forma simplista, atribuídos à tecnologia. Tendo por exemplo, quando um professor ao inserir calculadoras comuns no ensino fundamental com pouca ou nenhuma alteração da forma como que os conteúdos matemáticos são abordados, além das atividades, exercícios e avaliações, possivelmente trará consequências negativas para a aprendizagem dos estudantes. Para aquele que está começando trabalhar com

as operações aritméticas, ao efetuar uma divisão usando a calculadora, isso não demanda conhecimentos sobre algoritmos e o êxito na obtenção do resultado pode facilmente ser confundido com o aprender, o que é altamente indesejável. Dessa forma, as atividades devem ser pensadas de modo a tirar proveito da calculadora, ela como mediadora, o que não significa que ela precise estar presente em todas essas atividades, sendo todo o processo de acordo com o planejamento do professor. Vale ressaltar com essas práticas é que a tecnologia é uma oportunidade, tudo depende da relação que estabelecemos com ela, do uso que fazemos dela.

É certo que os acontecimentos têm sofrido acelerações gigantescas ao longo dos anos, as inovações tecnológicas vêm se tornando cada vez mais presente na vida do homem, aspecto marcante da sociedade moderna. Em relação aos computadores, eles estão cada vez menores e com um poder maior de processamento de dados e informações, as interfaces estão cada vez mais amigáveis e interativas e a conexão com a internet está muito mais veloz. Diante desse contexto, cabe a problemática, como está a formação dos professores para lidar com essas inovações em sala de aula (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2016).

Uma perspectiva que está subtendida a várias dessas ideias é a de que as tecnologias representam oportunidades para mudanças efetivas na educação, de um modo geral, em especial na prática docente de matemática, daquela disciplina em que o foco era no professor e que com esses avanços passa a centrar nos estudantes, de forma a atender os anseios e demandas de conhecimento deles.

Lidar com as tecnologias é estar em movimento com o mundo,

De fato, um grande mérito das tecnologias é o de colocar diversos pesquisadores e educadores em um movimento de reflexão sobre a educação frente às modificações pelas quais a sociedade passa em decorrência da crescente inserção das tecnologias no dia-a-dia das pessoas (MALTEMPI, 2008, p. 60).

Uma das características do uso das tecnologias fundamenta-se na importância da atividade prática no ato de ensinar inserido em seu contexto mais significativo: a sala de aula. Uma das ações para o desenvolvimento da aprendizagem matemática nos estudantes reside na identificação de conhecimentos que o professor possui com relação à determinados conceitos matemáticos e como ele os utiliza em sala de aula como oportunidades potencializadoras de situações de ensino e aprendizagem. A partir dessas ações, as tecnologias vêm como um mediador para reflexão sobre o ensino e o conhecimento do professor com vista ao desenvolvimento de ambos (ALVES; AGUIAR; RIBEIRO, 2018).

Interações com as tecnologias podem potencializar a construção e efetivação de ações profissionais compromissadas com transformações relevantes no processo ensino e aprendizagem (BAIRRAL, 2002). Tais ações devem fundamentar processos científico-

reflexivos conectados ao processo educativo e que são sempre ativados continuamente, seja no plano de desenvolvimento pessoal ou na socialização e intercâmbios com o coletivo de profissionais preocupados com a educação matemática. Enfim, uma ação profissional deve visar a algum tipo de reconstrução da prática escolar vigente.

2.2. Conceitos Fundamentais da Trigonometria

A Trigonometria é um ramo importante da Geometria que se propõe a estudar os métodos para calcular lados ou ângulos de um triângulo, a partir de algumas informações sobre esses triângulos, sendo um tema importante da Matemática por apresentar diversas aplicações que vão das mais elementares, vistas diariamente em nosso cotidiano, as mais complexas na Ciência e na Tecnologia.

Na busca por um instrumento que contribua para o processo de ensino e aprendizagem dos discentes, viu-se na história da matemática um mecanismo importante que evidencia os obstáculos para a construção do conhecimento matemático, analisando os problemas enfrentados por matemáticos no passado e assim, compreender as dificuldades dos alunos de hoje para melhorar o ensino da Matemática, tornando o conhecimento mais interessante e proporcionando mais clareza as suas aplicações.

Segundo D'Ambrosio (1997), a percepção da história da matemática é de suma importância para qualquer debate sobre a matemática e o seu ensino. Apresentar uma ideia, mesmo que não seja clara, sobre o porquê e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que se tem hoje são elementos fundamentais para a inovação do ensino da matemática, fazendo da história um elemento motivador e de grande importância.

Corroborando com os pensamentos de D'Ambrósio, de acordo com Silva e Maldener (2011), a história da matemática é utilizada com uma metodologia para melhorar o aprendizado dos alunos que possuem afinidade com a área de humanas, tentando modificar o padrão de ensino da Matemática que tem como foco apenas expor o conteúdo a ser estudado por meio de definições, sem levar em consideração o contexto histórico, tornado a matemática uma disciplina abstrata.

Quando se trata de uma receita para o ensino de qualquer disciplina, principalmente da Matemática, verifica-se que é consenso em todas as áreas que não existe uma forma padronizada de ensinar. No entanto é fundamental que o professor conheça diversas modalidades de ensino e assim construir sua prática docente. Os Parâmetros Curriculares

Nacionais também propõem a história da matemática como ferramenta educativa que auxilia no processo de ensino e aprendizagem:

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural (BRASIL, 1998, p. 42).

Antes de iniciar o estudo sobre a origem da trigonometria é interessante compreender seu significado epistemológico e a motivação para sua origem. A trigonometria vem do grego *tri* (três), *gono* (ângulo) e *metria* (medida), que significa *medida de triângulos*. Sua origem é reconhecida em alguns momentos da história, pois se a consideramos como a ciência analítica, teremos sua origem no século XVII, com o aparecimento do simbolismo algébrico. Se consideramos a geometria acoplada a astronomia, temos sua origem no século II a.C. com os trabalhos de Hiparco. Se consideramos realmente como medida de triângulo, sua origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

A matemática tem sido uma ciência muito importante na sociedade ao longo dos anos, sendo presente no cotidiano dos indivíduos, influenciando seus estudos e seu modo de vida. O conhecimento histórico de sua origem é algo desafiador e que representa para um olhar profundo sobre sua importância para a evolução da sociedade, bem como, amplia sua percepção sobre como a matemática proporciona a solução de problemas que impulsionam a humanidade, garantindo a sobrevivência e o bem-estar dos povos. A trigonometria, foco do nosso estudo, desenvolve-se para atender as necessidades de compreender e buscar respostas para alguns eventos ligados a Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Um conjunto de acontecimentos históricos registraram que o aparecimento da trigonometria se deu tanto no Egito quanto na Babilônia, em ocasião do cálculo de razões entre o número e entre lados de triângulos semelhantes.

Segundo Mol (2013), os egípcios eram povos com conhecimentos matemáticos que ajudaram na resolução de problemas de natureza prática, tais habilidades aritméticas influenciaram a criação do calendário egípcio.

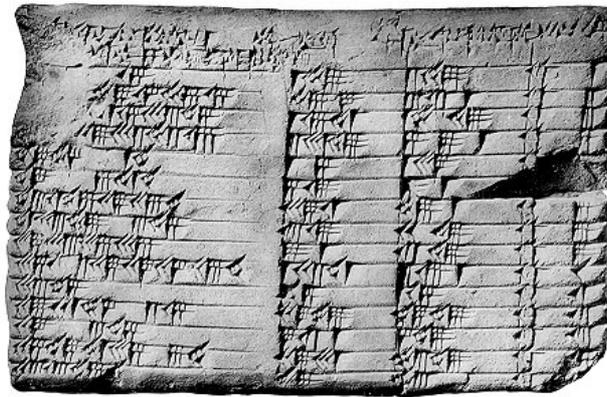
Figura 2.1 - Papiro de *Rhind*

Fonte: Mol, Rogério S. (2013), p.22.

Seus conhecimentos matemáticos foram registrados em papiros, onde um dos mais conhecidos localiza-se no Museo Britânico, o Papiro de *Rhind*, Figura 2.1, que apresenta 84 problemas de geometria (cálculo de áreas e volumes) e aritmética (estudo de frações unitárias, equações lineares, alguns problemas envolvendo o cálculo de cotangentes) com suas soluções. Dentre as diversas habilidades aritméticas dos egípcios verificou-se que por volta de 1500 a. C., eles mediam as horas do dia com o uso das sombras projetadas por uma vara vertical associando-as a uma sequência numérica.

O aparecimento dos primeiros sinais da trigonometria deu-se também na Babilônia. Com o objetivo de entender o mundo, tanto por aspectos religiosos, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas ideais para plantio, os babilônios tinham muito interesse pela Astronomia, o que proporcionou conhecimentos para resolver diversos problemas. Em 28 a. C., eles criaram um calendário astrólogo e em 747 a. C., uma tábua de eclipses lunares, que chegaram aos nossos dias. De acordo com Mol (2013), “os babilônios desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que se aplicava, sobretudo, a problemas de natureza econômica e comercial: câmbio de moedas, troca de mercadorias, taxa de juros simples e composto e problemas de divisão de colheitas”.

Figura 2.2 - Plimpton 322



Fonte: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/32275.jpg>

Acredita-se que os babilônios e os egípcios apresentavam similaridades na forma de realizar os cálculos aritméticos, pois ambos usavam frações com denominador 1. Diversas tábuas matemáticas deixadas pelos babilônios eram tabelas de números, onde a divisão de um número era feita multiplicando-o pelo seu respectivo recíproco, ou seja, $m/n = m \times 1/n$. Um exemplo de tábuas matemáticas foram a *Plimpton 322*, Figura 2.2, que registrava a tábua de secantes e a tábua $\sqrt{2}$, Figura 2.3, usada para calcular o valor da raiz quadrada por um método de aproximações sucessivas.

Figura 2.3 – Tábula $\sqrt{2}$ 

Fonte: Mol, Rogério S. (2013), p.19.

Sendo constituída a partir da contribuição interativa de diferentes povos (babilônios, egípcios, hindus, chineses, gregos) a matemática percorreu um amplo caminho, que perpassou tanto aspectos iminentemente dedutivos quanto no sentido de sua sofisticação que se consagrou na civilização grega quando a matemática passou a ser concebida de forma essencialmente abstrata, com uma certa independência em relação às suas aplicações práticas.

A evolução da matemática sofreu uma mudança de rumo na Grécia Antiga. Ela deixou de ser uma coleção de resultados empíricos e passou a ter o formato de uma ciência organizada, de maneira sistemática e por elementos racionais. A matemática, tanto na Mesopotâmia, quanto no Egito, tinha caráter concreto e prático. Na Grécia, ela passou a ser essencialmente abstrata, com uma certa independência em relação às aplicações práticas. As demonstrações, instrumentos para garantir a validade dos resultados por argumentação puramente racional, foram introduzidas como parte fundamental de sua estrutura. (Mol, 2013, p. 29).

A civilização grega deu continuidade aos conhecimentos dos egípcios, que foram essenciais para o seu desenvolvimento, não demorando muito para ultrapassar seus antecessores e passando a ser referência para todas as outras nações. A Grécia foi impulsionada pela necessidade astronômica de prever efemérides celestes, contribuindo para o estudo da trigonometria como ferramenta para a compreensão de tais fenômenos.

A Grécia foi marcada pela presença de grandes sábios no período helênico, Tales de Mileto (624 – 546 a. C.) e Pitágoras (570 – 495 a. C.), e no período helenista, com Hiparco de Niceia (180 – 125 a. C.) e Cláudio Ptolomeu (90 – 168 d. C.), que foram responsáveis pelo desenvolvimento da trigonometria, visto que ela está intimamente ligada a geometria.

De acordo com Mol (2013), Tales de Mileto, considerado o criador da geometria dedutiva, foi atribuída a ele as primeiras demonstrações matemáticas, sendo admitidos como seus resultados sobre figuras planas: *“Os lados dos triângulos semelhantes são proporcionais”*, *“Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro”*, *“Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais”*, *“O ângulo inscrito em um semicírculo é reto”*, dentre outros. Com isso, verifica-se que a tradição clássica atribui a ele a primeira ação no sentido de organizar a geometria como estudo abstrato e dedutivo.

A Escola Pitagórica, fundada no século V a. C. por Pitágoras, ultrapassou a Escola Ionica, fundada por Tales de Mileto, que uniu o estudo da geometria a astronomia e a teoria dos números. Segundo Bell (1945), atribuímos a Escola Pitagórica a criação da lei de intervalos musicais, que relaciona os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais aos comprimentos de corda. Considera-se essa lei um presságio do aparecimento das funções seno e cosseno para auxiliar o estudo das ondas sonoras.

Uma das grandes contribuições da Escola Pitagórica é o conhecido Teorema de Pitágoras: as medidas a e b dos catetos e a medida c da hipotenusa de um triângulo retângulo satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja, *“em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”*. Sabe-se que desse teorema deriva a Relação Fundamental da Trigonometria que será abordada mais a frente.

Cláudio Ptolomeu (90 – 168 d. C.), astrônomo e matemático que deu a contribuição mais significativa para a trigonometria na Antiguidade com sua obra intitulada por *Síntese Matemática* e composto por 13 livros, que ficou conhecida por *Almagesto*, que em árabe significa *o maior*, pois eles consideravam a maior obra existente na época em Astronomia.

Segundo Mol (2013), a motivação para a criar uma ferramenta para lidar com a geometria do círculo e da esfera foi a esfericidade do céu e a descoberta da forma esférica da Terra. Hiparco de Niceia (180 – 125 a. C.) construiu uma tabela de cordas do círculo de 0° a 180°, onde resolveu associar a cada corda de um arco ao ângulo central correspondente. Esse fato foi um grande avanço para a Astronomia e, por isso, Hiparco recebeu o título de *Pai da Trigonometria*. No século I d. C., Melenau de Alexandria desenvolveu a trigonometria esférica, onde tratou das propriedades de triângulos esféricos.

Ptolomeu deu continuidade aos trabalhos de Hiparco e Melenau, criando um método para calcular as cordas subentendidas por arcos de um círculo. O procedimento do cálculo era baseado no sistema babilônico de frações sexagesimais, onde primeiro Ptolomeu dividiu cada grau em 60 pequenas partes e, cada uma dessas subdivisões foi dividida em 60 pequenas partes, de onde vem os termos minutos e segundos. De acordo com Mol (2013), o cálculo do seno de um ângulo qualquer θ é dado pela razão entre a metade da corda e o raio do círculo. Sendo θ o ângulo central correspondente a corda subentendida, representando por $crd \theta$, temos que:
$$\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{crd \theta / 2}{60} = \frac{crd \theta}{120}.$$

2.2.1 A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A Geometria Plana, também conhecida como Geometria Euclidiana, é a parte da Matemática que estuda as figuras bidimensionais. Para iniciar o estudo da trigonometria no triângulo retângulo faz-se necessário a refletir sobre alguns pontos básicos: a definição de ângulo, sua representação e como medi-lo.

Define-se ângulo como uma figura formada por duas semi-retas de mesma origem. As semi-retas são os lados do ângulo e o vértice é o ponto em comum entre elas, podendo assim, representa-las por \vec{OA} e \vec{OB} . Com isso, concluímos que o ângulo é representado por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$. Sabe-se que a medida dos ângulos é feita em graus (°) ou radiano (π), tema que será abordado no estudo da trigonometria no círculo unitário, por trata-se de um conteúdo

prévio para a trigonometria, mas antes é necessário compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

2.2.1.1. Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo

Um rio separa um topógrafo de um morro. Para medir a altura desse morro, o topógrafo instala um teodolito num ponto e vê o topo do morro sob um ângulo de 33° com o plano horizontal. A seguir, afasta-se 180 metros e vê o topo do morro sob um ângulo de 25° com o plano horizontal. Qual a altura do morro? Para responder a esses questionamentos faz-se necessário compreender o conceito das razões trigonométricas. O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo tratam-se de razões entre as medidas dos catetos (oposto ou adjacente) e da hipotenusa do triângulo. Assim, inicia-se o estudo faz necessário compreender a definição dessas razões trigonométricas.

Dado um ângulo agudo ($0 < \alpha < 90^\circ$) qualquer $B\hat{O}A = \alpha$, considere os triângulos retângulos obtidos a partir de perpendiculares a semi-reta OB traçadas a partir dos pontos A' , A'' , A''' , etc formando os catetos $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, etc semelhantes, pois apresentam o mesmo ângulo α . Conclui-se que:

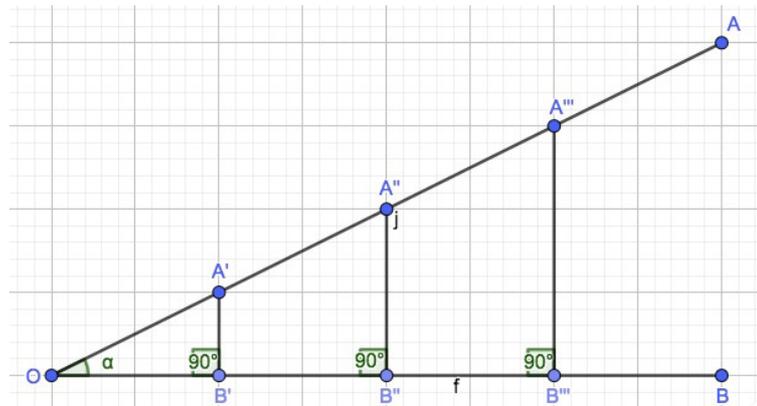
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OA''}} = \frac{\overline{A'''B'''}}{\overline{OA'''}} = \dots$$

Note que essas razões não dependem do “tamanho do triângulo”, eles dependem apenas da medida do ângulo α . Observando a Figura 2.4, verifica-se que se trata da razão entre os catetos opostos ao ângulo α ($\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$, $\overline{A'''B'''}$, ...) e a hipotenusa dos triângulo retângulos ($\overline{OA'}$, $\overline{OA''}$, $\overline{OA'''}$, ...). A essa função denomina-se *seno de α* .

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}$$

De modo análogo, define-se a função cosseno e a função tangente, para isso, analisa-se os triângulos semelhantes da Figura 2.4.

Figura 2.4 – Triângulos Retângulos de mesmo vértice.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Observa-se que a razão entre os catetos adjacentes ao ângulo α ($\overline{OB'}$, $\overline{OB''}$, $\overline{OB'''}$, ...) e a hipotenusa dos triângulo retângulos ($\overline{OA'}$, $\overline{OA''}$, $\overline{OA'''}$, ...); e a razão entre os catetos opostos ao ângulo α ($\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$, $\overline{A'''B'''}$, ...) e catetos adjacentes ao ângulo α são dadas por:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB''}}{\overline{OA''}} = \frac{\overline{OB'''}}{\overline{OA'''}} = \dots$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OB''}} = \frac{\overline{A'''B'''}}{\overline{OB'''}} = \dots$$

também para qualquer ângulo α . Definiremos então as funções, para $0 < \alpha < 90^\circ$,

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$$

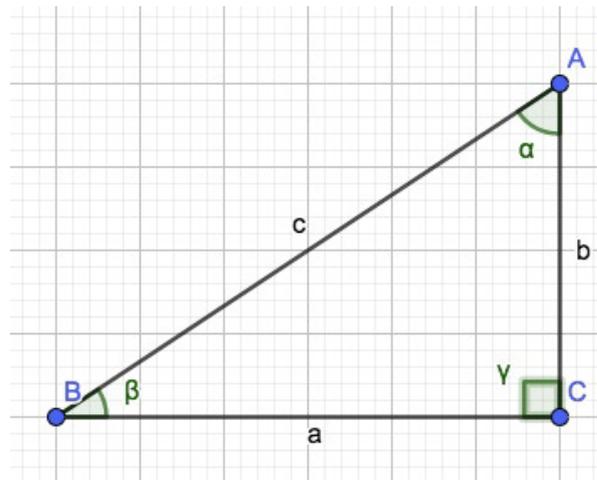
respectivamente, como cosseno de α e tangente de α .

2.2.1.2. Duas importantes relações

Com o estudo das funções trigonométricas seno e cosseno verifica-se duas importantes relações: a Relação Fundamental da Trigonometria e a Relação entre o Seno, Cosseno e a Tangente de um ângulo agudo.

Conforme a Figura 2.5, considera-se um ângulo β e o triângulo ABC retângulo em C. Com o objetivo de facilitar a compreensão, faremos $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$ e lembrando o Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, para demonstrar os seguintes relações matemáticas, tem-se que:

Figura 2.5 – Triângulo Retângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{b^2}{c^2} \quad (I)$$

e

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{a^2}{c^2} \quad (II)$$

Agora, demonstrar-se a Relação Fundamental da Trigonometria e a Relação entre o Seno, o Cosseno e a Tangente, respectivamente. Assim, tem-se que:

i) Somando (I) com (II):

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1$$

(Relação Fundamental da Trigonometria)

ii) Dividindo (I) com (II):

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta}$$

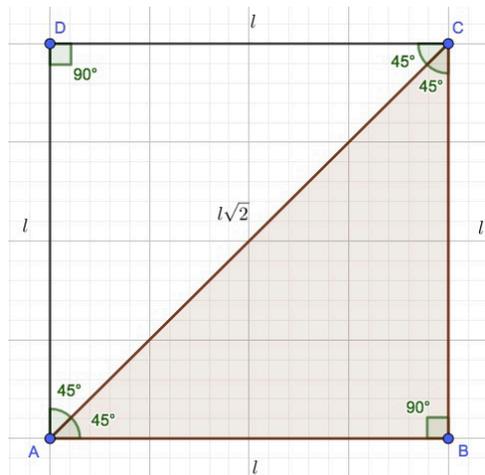
(Relação entre Seno, Cosseno e Tangente)

2.2.1.3. Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos notáveis

Pretende-se calcular o seno, cosseno e a tangente dos ângulos notáveis, ângulos utilizados frequentemente no estudo da trigonometria e seus valores correspondem aos ângulos

de 30° , 45° e 60° . Calcula-se o $\text{sen } 45^\circ$, $\text{cos } 45^\circ$ e $\text{tg } 45^\circ$, para isso, faz-se necessário um triângulo retângulo que apresente um ângulo de 45° , que pode ser obtido traçando a diagonal de um quadrado ABCD (Figura 2.6).

Figura 2.6 – Quadrilátero ABCD.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Se o quadrado ABCD tem lado ℓ ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \ell$), sua diagonal \overline{AC} (onde $\overline{AC} = d$) é obtida através do Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}.$$

Então, conclui-se que:

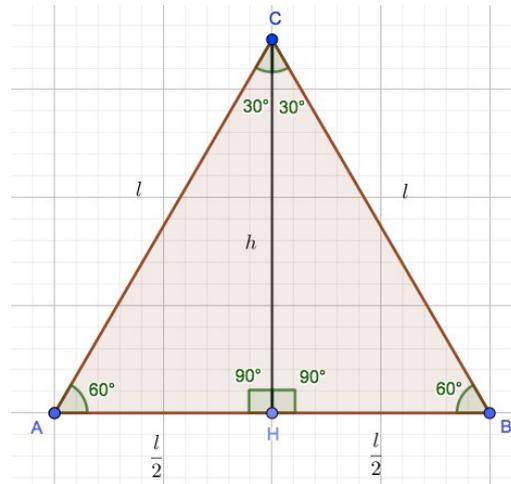
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Deseja-se calcular o seno, cosseno e tangente de 30° e 60° . Diante da Figura 2.7, dado o triângulo equilátero ABC de lado ℓ ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = \ell$), se traçar a altura \overline{CH} (onde $\overline{CH} = h$) do triângulo, obtem-se também a bissetriz do ângulo \hat{C} (divide \hat{C} em duas partes iguais a 30°) e a mediana do lado \overline{AB} (divide o lado \overline{AB} em duas partes iguais).

Figura 2.7 – Triângulo Equilátero ABC.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Escrevendo a altura h , em função do lado ℓ , temos que:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Então conclui-se que:

i) Para o ângulo $H\hat{C}B = 30^\circ$;

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\ell/2}{h} = \frac{\ell/2}{\ell\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ii) Para o ângulo $H\hat{B}C = 60^\circ$;

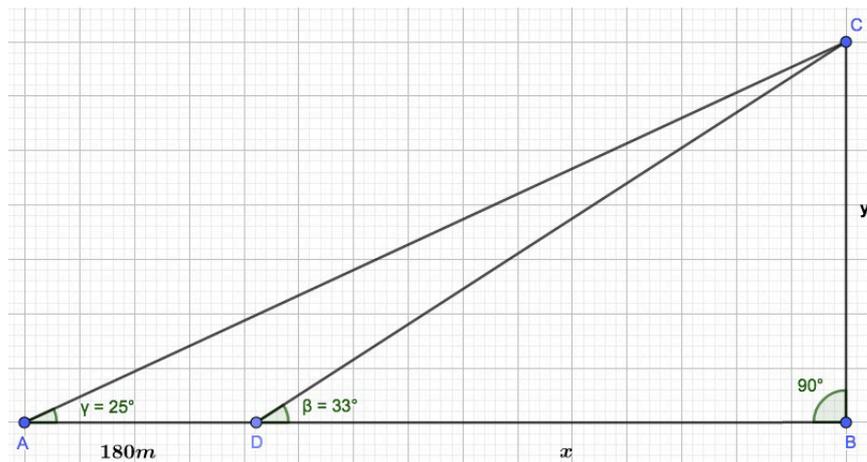
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{\ell/2} = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell/2} = \sqrt{3}$$

Respondendo a questão da subseção 2.2.1.1, verificamos que foi proposto o cálculo da altura de um morro mediante uma inclinação de 33° . Sabendo que após se distanciar 180 metros, o ângulo de inclinação mudou para 25° . Considerando x a distância do teodolito ao morro, y a altura do morro, a $tg 33^\circ = 0,64$ e $tg 25^\circ = 0,46$ tem-se que (Figura 2.8):

Figura 2.8 – Representação geométrica da situação problema.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

$$(I) \operatorname{tg} 33^\circ = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad (II) \operatorname{tg} 25^\circ = \frac{y}{x+180}$$

$$(I)y = x \cdot \operatorname{tg} 33^\circ \quad \text{e} \quad (II) y = (x + 180) \cdot \operatorname{tg} 25^\circ$$

Igualando os itens I e II, conclui-se que:

$$(x + 180) \cdot \operatorname{tg} 25^\circ = x \cdot \operatorname{tg} 33^\circ$$

$$(x + 180) \cdot 0,46 = x \cdot 0,64$$

$$0,46x + 82,8 = 0,64x$$

$$0,64x - 0,46x = 82,8$$

$$0,18x = 82,8$$

$$x = \frac{82,8}{0,18}$$

$$x = 460 \text{ metros}$$

(A distância do teodolito ao morro)

Sabendo que $x = 460 \text{ metros}$, para calcular a altura do morro, tem-se que:

$$y = 460 \cdot 0,64$$

$$y = 294,4 \text{ metros}$$

(A altura do morro)

2.2.1.4. Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Complementares

Se dois ângulos α e β são complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$), então o $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar) e $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta}$. Analisando a Figura 2.5, percebe-se que α e β dois ângulos complementares, então:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \text{cos } \beta$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{c} = \text{cos } \alpha$$

e

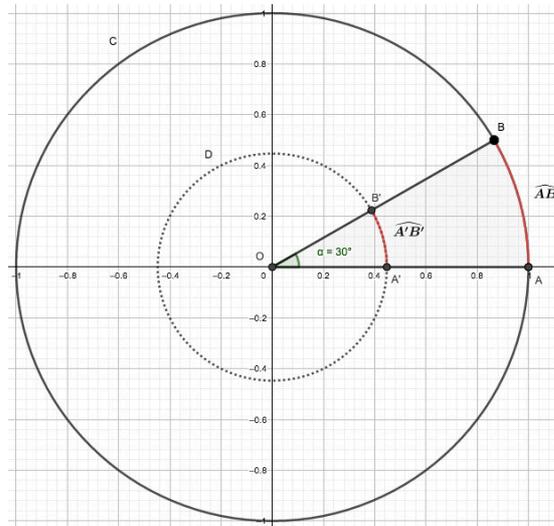
$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{\text{tg } \beta}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{a/b} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

2.2.1.5. A Trigonometria no Círculo unitário

É importante compreender qual o significado matemático para o arco de uma circunferência e o ângulo central da circunferência. Imagina-se uma circunferência de centro O, sobre a qual tomamos dois pontos distintos A e B. Esse comprimento definido pelos pontos A e B é chamado de **arco de circunferência**. Note que em relação ao arco tomado, corresponde a um ângulo $A\hat{O}B$ (α), chamado de **ângulo central**, cuja sua medida é igual a medida do arco da circunferência. Observando a Figura 2.9, percebe-se que de fato o arco subtende a mesma medida do ângulo central de 30° , ou seja, $\widehat{AB} = \widehat{A'B'} = 30^\circ$.

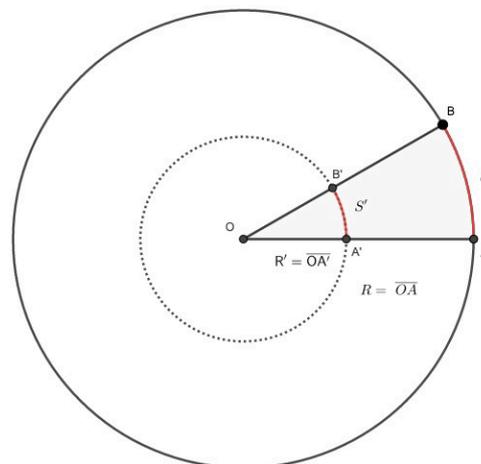
Figura 2.9 – Medida dos arcos \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Um ângulo pode ser medido em graus ou radiano. Qual a definição de grau? Um grau é definido como a medida de um ângulo central submetido a um arco igual a $1/360$ da circunferência que contém o arco.

Figura 2.10 – Relação entre o arco e o raio.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Analisa-se outra medida de ângulos para compreender o significado matemático de radiano? Observando a Figura 2.10, verifica-se que trata de duas circunferências concêntricas de mesmo ângulo central, que a razão de semelhança é a razão entre os raios e que os comprimentos dos arcos \widehat{AB} (igual a S) para $\widehat{A'B'}$ (igual a S') são diretamente proporcionais, para isso, tem-se que:

$$\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'}$$

A medida de um ângulo em radiano é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo. Então:

$$\alpha = \frac{S}{R} \Rightarrow S = \alpha R$$

Agora sabe-se que a definição de grau e radiano, qual a relação entre essas medidas? Para responder essa pergunta, primeiro é importante refletir um pouco sobre o arco de 180° , que se trata de um semicírculo, também conhecido por arco de meia volta, cujo comprimento πR , logo, tem-se que:

$$180^\circ = \frac{\pi R}{R} = \pi \text{ radianos}$$

Então, aplicando uma regra de três simples, conclui-se que:

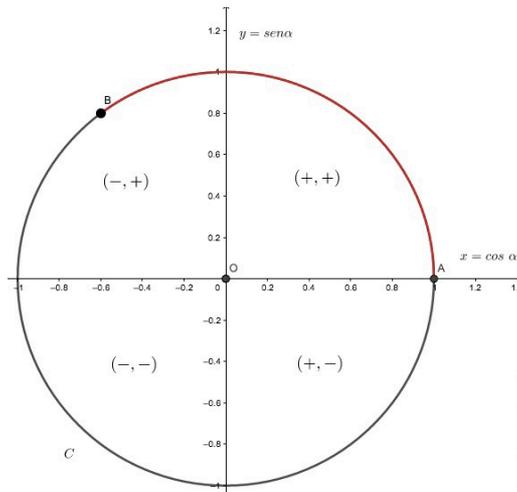
$$\begin{array}{r} \pi \text{ radianos} - 180^\circ \\ 1 \text{ radiano} - x \end{array}$$

$$x = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Considerando que π é a razão entre o comprimento de qualquer círculo e seu diâmetro, cuja medida é igual a 3,14159265, assim entende-se que 1 radiano mede $57,29^\circ$.

Em estudos anteriores, define-se seno, cosseno e tangente somente para ângulos agudos, mas agora estende-se esses conceitos para os demais ângulos, fazendo-se necessário a compreensão de um ciclo trigonométrico, circunferência trigonométrica ou círculo unitário. Considera-se um plano onde está fixado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixa-se um círculo unitário C (uma circunferência de raio igual a 1), definida por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, onde para todo $(x, y) \in C$, tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Figura 2.11 – Círculo unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Analisando o círculo unitário verifica-se que pode ser percorrido no sentido anti-horário (sentido positivo) ou no sentido horário (sentido negativo). É interessante salientar que o início do percurso do ciclo inicia-se no ponto A, de acordo com a Figura 2.11, conhecido como origem dos arcos, ou seja, o ciclo trigonométrico segue o sentido positivo, orientado em A. Dado um ponto B no ciclo trigonométrico, define-se a medida algébrica de um arco \widehat{AB} , representado por $m\widehat{AB}$, como o comprimento desse arco associado ao sentido percorrido no ciclo trigonométrico.

2.2.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O círculo unitário ou ciclo trigonométrico é compreendida como um fio inextensível, sobre a circunferência C de modo que o ponto $A \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$. A essa relação $E: \mathbb{R} \rightarrow C$ chama-se de Função de Euler, que garante que a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ do círculo unitário é dado por: (a) $E(0) = (1, 0)$; (b) Se $t > 0$, percorremos o sentido positivo do círculo unitário C (sentido anti-horário), representando por $E(t)$ o caminho final desse percurso por C ; (c) Se $t < 0$, percorremos o sentido negativo do círculo unitário C (sentido horário ou sentido do movimento usual dos ponteiros do relógio). A extremidade final desse percurso $|t|$ é representado por $E(t)$.

Analisando o comportamento do círculo unitário, nota-se que se $t > 0$ e $t > 2\pi$ será necessário dar mais de uma volta em C , no sentido positivo, para atingir $E(t)$. De modo análogo, verifica-se que essa observação vale para o caso de $t < 0$. Assim, como o círculo

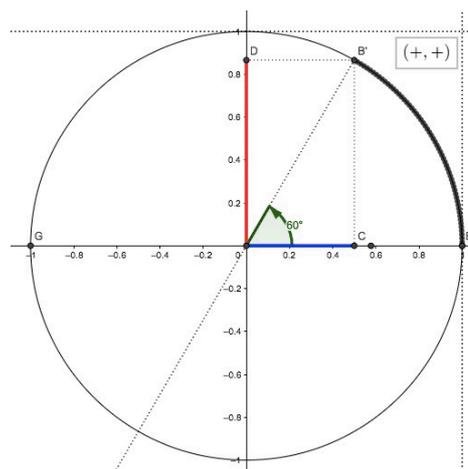
unitário tem comprimento 2π , quando o ponto t descreve um percurso equivalente ao comprimento 2π , sua imagem $E(t)$ deu uma volta completa sobre C , retornando ao ponto de partida, concluindo que para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se $E(t) = E(t + 2\pi)$. Adotando o número de voltas no círculo trigonométrico pelo número real k , temos que $E(t) = E(t + 2k\pi)$, logo afirma-se que t e $t + 2k\pi$ são côngruos.

Obviamente para todo k inteiro e para todo t real, tem-se que $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2k\pi)$ e $\operatorname{cos} t = \operatorname{cos}(t + 2k\pi)$. É importante notar que $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(t + 2k\pi)$ com exceção dos ângulos $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, devido ao fato que $\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t}$ não é definida para os valores $\operatorname{cos} t = 0$. Esse fato garante que as funções seno e cosseno são periódicas no intervalo $[0, 2\pi]$.

As funções cosseno e seno são funções periódicas definidas nos reais para $t \in \mathbb{R}$, onde $E(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$. Assim, naturalmente temos que $x = \operatorname{cos} t$ (a abscissa do círculo unitário) e $y = \operatorname{sen} t$ (a ordenada do círculo unitário) sendo definida pela relação $\operatorname{cos}^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ (relação fundamental da trigonometria) para todo t real.

Examinando as funções cosseno e seno como coordenadas de um ponto da circunferência unitária, tem-se que os sinais dependem do quadrante em que o ângulo se encontra (Figura 2.12). É interessante notar que o valor da função seno (ou cosseno) é determinada a partir dos seus valores no primeiro quadrante.

Figura 2.12 – Representação de um ângulo no primeiro quadrante.

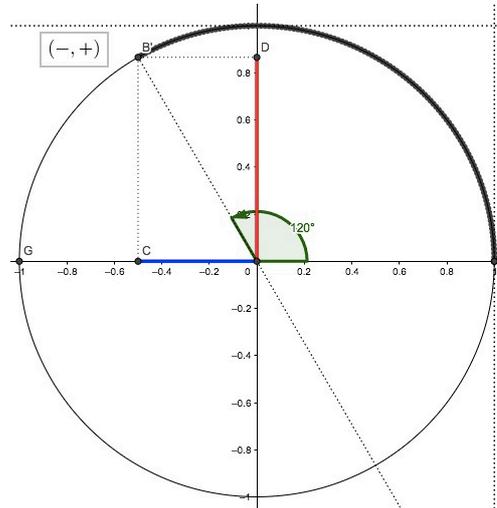


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Dado um arco $\widehat{BB'}$ do primeiro quadrante ($m\widehat{BB'} = x$, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$), afirma-se que o $\operatorname{sen} x > 0$ e $\operatorname{cos} x > 0$. Traçando uma reta r paralela ao eixo das abscissas passando em C pela extremidade B , tem-se que $m\widehat{BB'} = \pi - x$ um ângulo do segundo

quadrante, ou seja, $\frac{\pi}{2} < \pi - x < \pi$. Então conclui-se que: $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x$ e $\text{cos}(\pi - x) = -\text{cos } x$. (Figura 2.13).

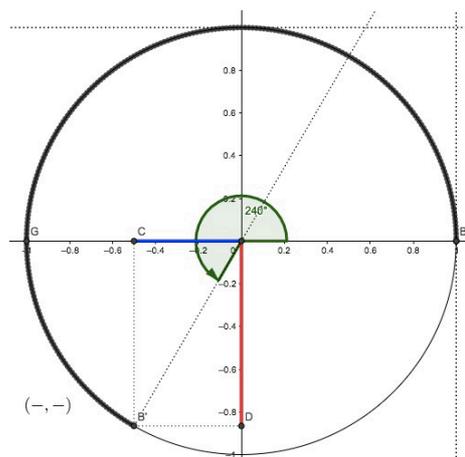
Figura 2.13 – Representação de um ângulo no segundo quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Imagina-se um arco no terceiro quadrante, para isso, traça-se uma reta s passando por O e pela extremidade B , gerando o arco $\widehat{BB'}$ cuja medida é dada por $m\widehat{BB'} = \pi + x$. De acordo com a Figura 2.14, observamos que $\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x$ e $\text{cos}(\pi + x) = -\text{cos } x$.

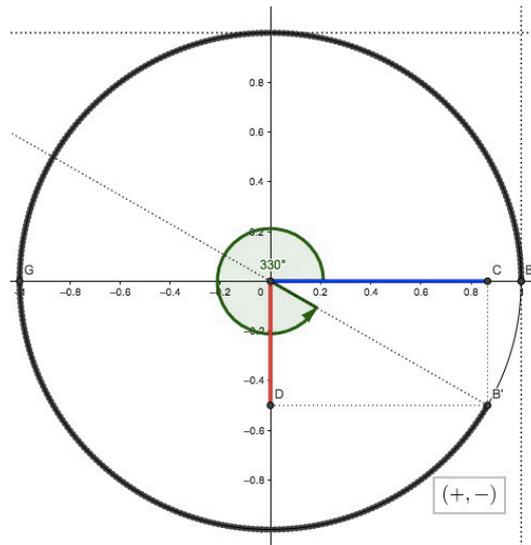
Figura 2.14 – Representação de um ângulo no terceiro quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

E se o arco $\widehat{BB'}$ estiver no quarto quadrante ($\frac{3\pi}{2} < \widehat{BB'} < 2\pi$)? Para isso traçaremos uma reta t passando pela extremidade B , que intercepta o círculo unitário no ponto B' (Figura 2.15). Analisando o arco $\widehat{BB'}$, cuja medida é dada por $m\widehat{BB'} = 2\pi - x$, concluímos que $\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$ e $\text{cos}(2\pi - x) = \text{cos } x$.

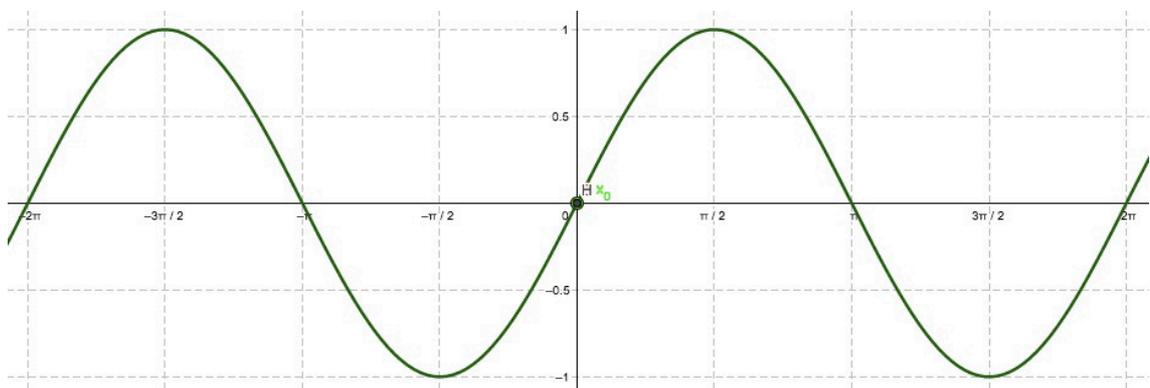
Figura 2.15 – Representação de um ângulo do quarto quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Após analisar passo a passo os valores absolutos da função seno e da função cosseno, constata-se que ambas são determinadas pelos valores destas funções no primeiro quadrante. Para entender o comportamento das funções é suma importância construir os seus respectivos gráficos, importante ferramenta que permite analisar tais funções trigonométricas.

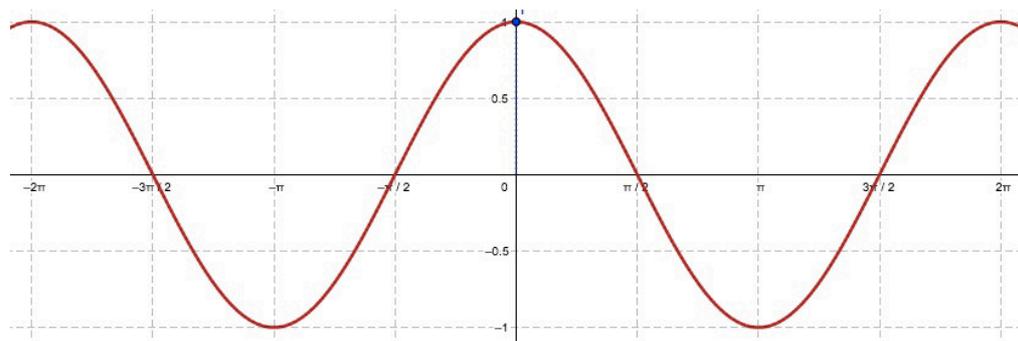
Figura 2.16 – Função seno



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O gráfico da função seno é formado por todos os pontos do plano de coordenadas $(x, \text{sen } x)$, que quando organizados definem a Figura 2.16. Do mesmo modo, a função cosseno é composta por todos os pontos $(x, \text{cos } x)$, que nos permite traçar a Figura 2.17.

Figura 2.17 – Função cosseno

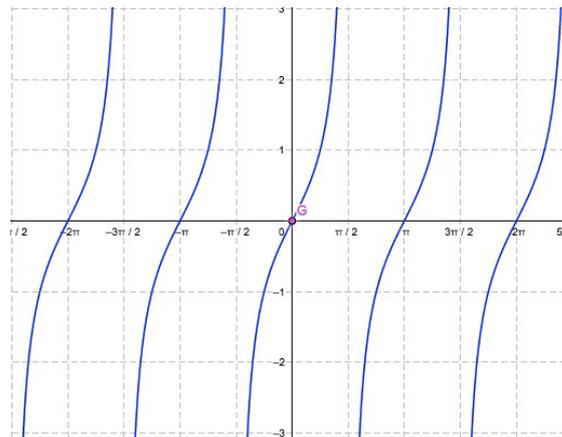


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Examinando os gráficos da função seno e da função cosseno, verifica-se que: (a) ambas são funções periódicas e limitadas entre 1 e -1, isto é, $-1 < \text{sen } x < 1$ e $-1 < \text{cos } x < 1$; (b) o período das funções é igual a 2π , momento em que vê-se repetidas vezes a mesma figura; (c) que as funções são iguais, pois ao realizar uma translação de $\pi/2$ para a esquerda no gráfico da função seno, obtém-se o gráfico da função cosseno.

Em estudos anteriores, constata-se que a função tangente é dada pela expressão $\text{tg } x = \text{sen } x / \text{cos } x$. Como a função é determinada por uma razão, sabe-se que o denominador (a função cosseno) não admite valor nulo, concluindo que o domínio da função $x \mapsto \text{tg } x$ admite todos os valores reais que não são múltiplos ímpares de $\pi/2$, ou seja, $\text{cos } \frac{\pi}{2} = \text{cos } \frac{3\pi}{2} = \text{cos } \frac{5\pi}{2} = \dots = \text{cos}(2k + 1)\frac{\pi}{2} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, logo conclui-se que a função tangente não é definida para esses valores. Com isso, o domínio da função tangente é dada pela união dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde em cada intervalo aberto a função tangente trata-se de uma função crescente em que cada elemento do domínio está associado somente a um único elemento do contradomínio, tratando-se de uma relação biunívoca.

Figura 2.18 – Função tangente



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A função tangente, como a função seno e função cosseno, é uma função periódica, mesmo que não esteja definida para todo número real \mathbb{R} . De acordo com a Figura 2.18, verifica-se que a função tangente apresenta período igual a π , tal que $tg x = tg(x + \pi)$ para todo x no domínio da função.

2.3. O Geogebra e a Trigonometria

2.3.1. O GEOGEBRA

O uso das tecnologias da educação no ensino da Matemática é de grande relevância para efetivamente contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, com o objetivo principal de minimizar as dificuldades oriundas da modalidade de ensino tradicional. Diante de vários softwares utilizados para melhorar o aprendizado dos alunos, destaca-se o Geogebra, como uma ferramenta computacional muito importante e utilizada em várias áreas do conhecimento.

A compreensão de conteúdos de trigonometria é alvo da preocupação dos alunos do ensino médio por trata-se de conteúdos tido como complexos e que apresentam altos índices de dificuldades, como por exemplo, entender o comportamento das funções seno e cosseno ainda é uma grande barreira no processo de ensino dos alunos.

Com o uso do Geogebra pode-se trabalhar com múltiplas construções de objetos matemáticos, como criação de pontos, retas, sólidos geométricos e todas as cônicas, mas também se destaca como uma poderosa ferramenta para o estudo de funções, determinando

suas raízes, pontos de inflexão e seus extremos, bem como, trabalhar com as derivadas e integrais das funções.

A educação sofreu uma revolução com o surgimento do Geogebra na forma de ensinar e trabalhar os conteúdos da Matemática, pois agora os alunos apresentam um recurso que permite a criação de gráficos e cálculos algébricos de maneira dinâmica e interativa, incentivando aos alunos o interesse pela matemática.

Ao observar o software na prática é possível detectar as suas principais utilidades para o ensino da matemática: (a) o Geogebra é um software multilíngues, gratuito e de fácil acesso, que apresenta uma interface fácil em detrimento de outras tecnologias educacionais como, por exemplo, a calculadora gráfica; (b) é um software que permite aos alunos desenvolver experiências práticas para trabalhar os conteúdos matemáticos; (c) esse programa proporciona aos educandos um forma de manipular variáveis através dos objetos e das ferramentas de controle deslizantes, permitindo uma forma de resolver problemas e assim melhorar o entendimento da matemática.

O objetivo principal do software é oferecer uma possibilidade para os professores utilizarem a ferramenta como um recurso para melhorar sua prática de ensino, desenvolvendo aulas mais interativas, para proporcionar os alunos momentos de criação de mecanismos mentais que permitam a compreensão matemática, saindo da modalidade de ensino tradicional e ampliando a capacidade de tratar a matemática com uma nova perspectiva de aprendizagem.

2.3.2 ANALISANDO O COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

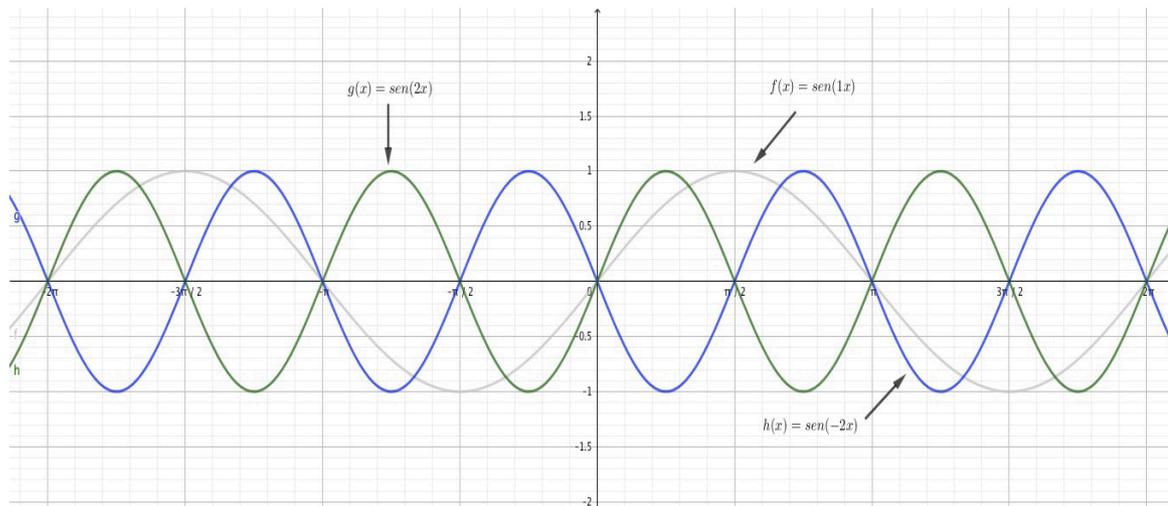
As funções trigonométricas são conteúdos de Trigonometria onde os alunos de Matemática do Ensino Médio mais apresentam dificuldades para compreender como construir tais funções e entender o seu comportamento ao longo do ciclo trigonométrico. Segundo Dantas (2015), o uso do Geogebra no ensino de Matemática possibilitou melhor o desempenho dos alunos, tornando as aulas mais dinâmicas e possibilitando um maior envolvimento dos discentes, contribuindo para minimizar suas dificuldades e aumentar o interesse em aprender Matemática. Assim analisaremos graficamente a estrutura algébrica das funções: $f(x) = \text{sen } x$ (função seno) e $g(x) = \text{cos } x$ (função cosseno) com o uso do Geogebra constatando quais condutas as funções assumem para um dado evento.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, onde para todo x real existe uma imagem y real, $-1 \leq y \leq 1$, isto é, associa-se cada número real x ao $\text{sen } x$, formando-se um

gráfico com infinitos pontos $(x, \text{sen } x)$ que definem o gráfico da figura 16. Para analisar o comportamento da função seno, faz necessário tomar a função como $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$, onde os coeficientes a , b , c e d admitem distintos valores, na qual investiga-se o procedimento tomado pelo gráfico com a variação desses coeficientes.

Tomando a função $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$, tem-se que $a = c = 1$ e $b = d = 0$. Se $a > 0$ tem-se que haverá uma diminuição no período (distância entre dois pontos máximos ou dois pontos mínimos consecutivos) da função; para $a = 0$ trata-se da função constante $f(x) = 0$, que corresponde ao eixo; para valores negativos de a , a função seno sofrerá uma reflexão em relação ao eixo. (Figura 2.19).

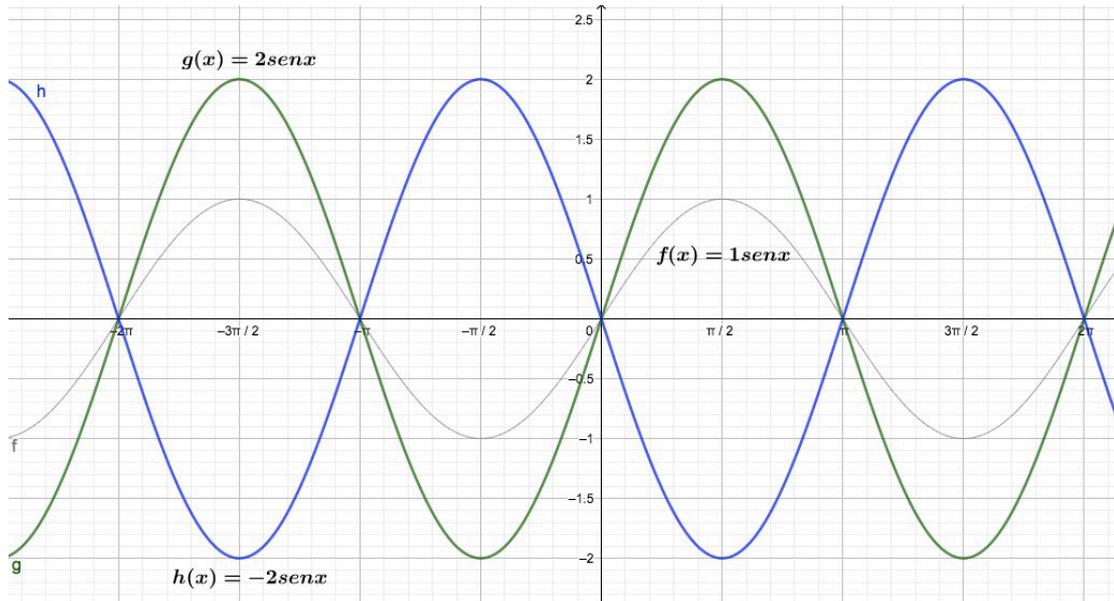
Figura 2.19 – Comportamento da função seno em relação ao coeficiente a .



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Considerando a função $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$, onde $a = c = 1$ e $b = d = 0$, tem-se que se $c > 0$ haverá um aumento na amplitude (distância entre o ponto máximo ou ponto mínimo até ao eixo) da função. Do mesmo modo que o caso anterior, se $c = 0$, a função $f(x) = 0$ é constante e trata-se do eixo; e se $c < 0$, a função seno sofrerá uma reflexão em relação ao eixo (Figura 2.20).

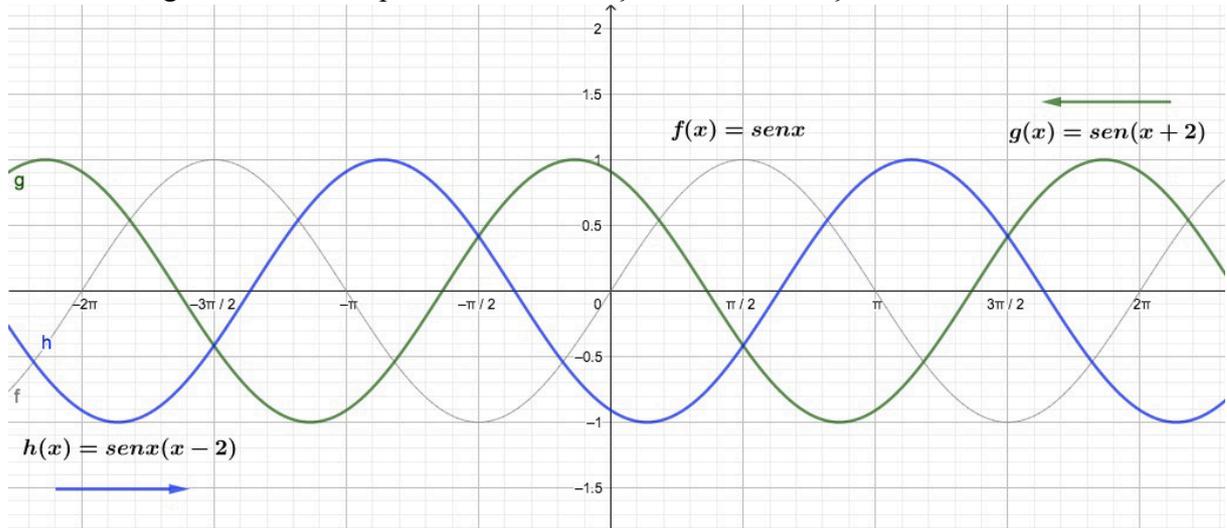
Figura 2.20 – Comportamento da função seno em relação ao coeficiente c .



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

De acordo com a Figura 2.21, a função $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$ com coeficientes $a = c = 1$ e $b = d = 0$, tem-se que se $b > 0$ o gráfico da função sofrerá uma translação a esquerda e se $b < 0$ sofrerá uma translação a direita.

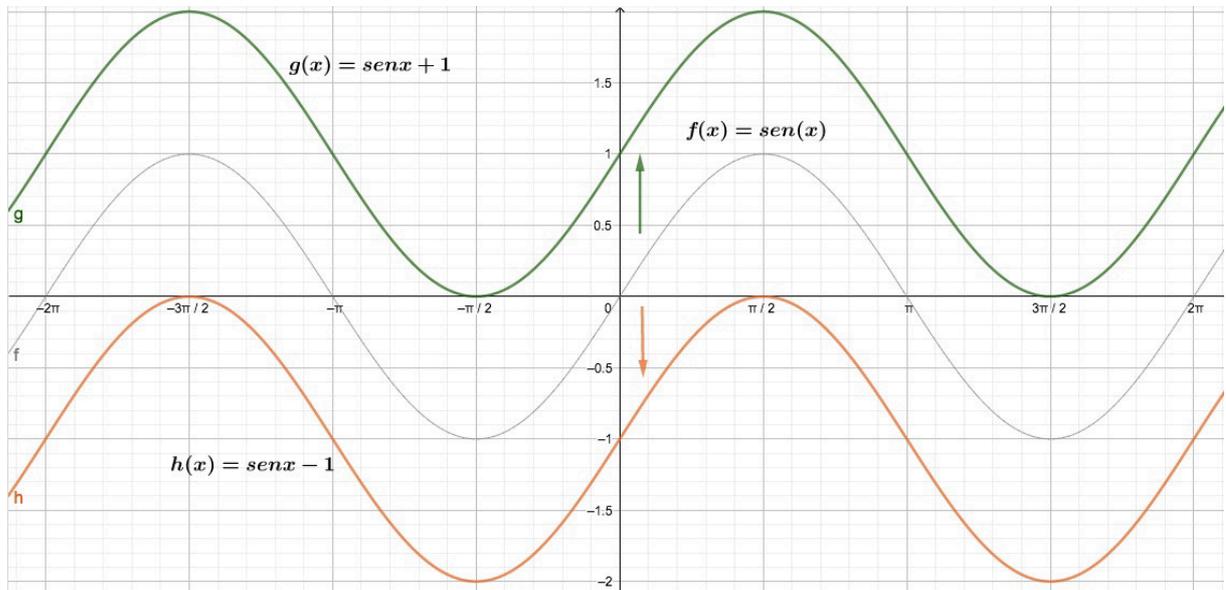
Figura 2.21 – Comportamento da função seno em relação ao coeficiente b .



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Agora pretende-se analisar o coeficiente d da função $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$, onde $a = c = 1$ e $b = d = 0$. Se $d > 0$, a função $f(x)$ sofrerá uma translação vertical para cima e se $d < 0$, sofrerá uma translação vertical para baixo (Figura 2.22).

Figura 2.22 – Comportamento da função seno em relação ao coeficiente d.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A função cosseno $g(x) = \cos x$ é uma função trigonométrica que apresenta as mesmas características da função seno $f(x) = \text{sen } x$, por ambas serem limitadas entre os valores absolutos 1 e -1 , por seu período é igual a 2π e por ela ser o resultado de uma translação de $\pi/2$ a esquerda, ou seja, $\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Logo, conclui-se que a função apresenta o mesmo comportamento de acordo com os coeficientes a , b , c e d .

3. METODOLOGIA

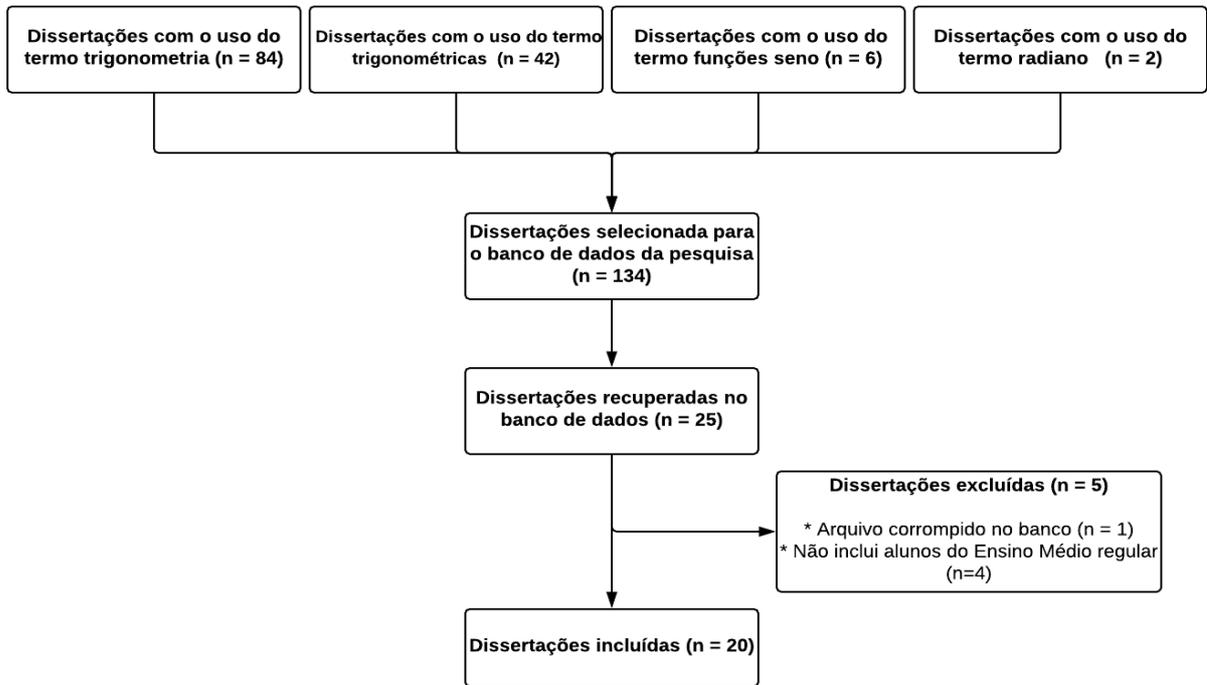
Esta pesquisa tem como ponto central da metodologia, uma revisão integrativa da literatura, que buscou analisar os relatórios de dissertação de mestrado desenvolvidos pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT com aplicação de recursos do *software* Geogebra. O método de revisão integrativa objetiva apresentar dados de estudos experimentais e não experimentais para uma compreensão completa do objeto de investigação. Por meio deste desenho, é possível construir um panorama consistente e compreensível de conceitos, teorias ou problemas (SOUZA; SILVA; CARVALHO, 2010).

O período de acesso ao banco de dados do PROFMAT foi de agosto a setembro de 2018. Definiu-se como restrição o período temporal de realização dos estudos alvo da revisão: últimos 5 (cinco) anos, objetivando verificar as abordagens mais recentes com esta ferramenta. Para a busca das dissertações na plataforma (<http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes>), foram utilizados os termos: “trigonometria”, com a ocorrência de 84 registros; “funções trigonométricas”, com a ocorrência de 42 registros; “função seno”, com ocorrência de 6 registros e “radiano”, com a ocorrência de 2 registros, totalizando 134 registros.

Ainda como critério de seleção das dissertações utilizou-se: (a) estudo com texto completo disponível; (b) apresentação de recursos com auxílio do Geogebra; e (c) desenvolvimento direcionado ou que incluísse alunos do Ensino Médio regular. Vale ressaltar que foram excluídos estudos corrompidos no sistema.

Das 134 dissertações encontradas a partir da pesquisa no banco de dados e, após a aplicação dos critérios de análise, foram selecionadas 20 dissertações para a presente revisão integrativa. O processo de seleção dos materiais está descrito na Figura 3.1.

Figura 3.1 - Fluxo de seleção dos estudos da revisão integrativa.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Foi realizada a análise substancial das dissertações selecionados para caracterização e extração das informações abordadas em cada artigo, sintetizando os resultados em gráficos e tabelas.

4. RESULTADOS

Os dados das 20 dissertações de mestrado foram organizados conforme as seguintes características: autor, ano, local de desenvolvimento do estudo, objetivo (Quadro 4.1), temática de Trigonometria abordada (Figura 4.1), delineamento, recursos, amostra, contexto (Quadro 4.2), resultados e conclusão (Quadro 4.3).

Quadro 4.1 – Caracterização dos estudos quanto ao local de desenvolvimento, objetivos e temáticas

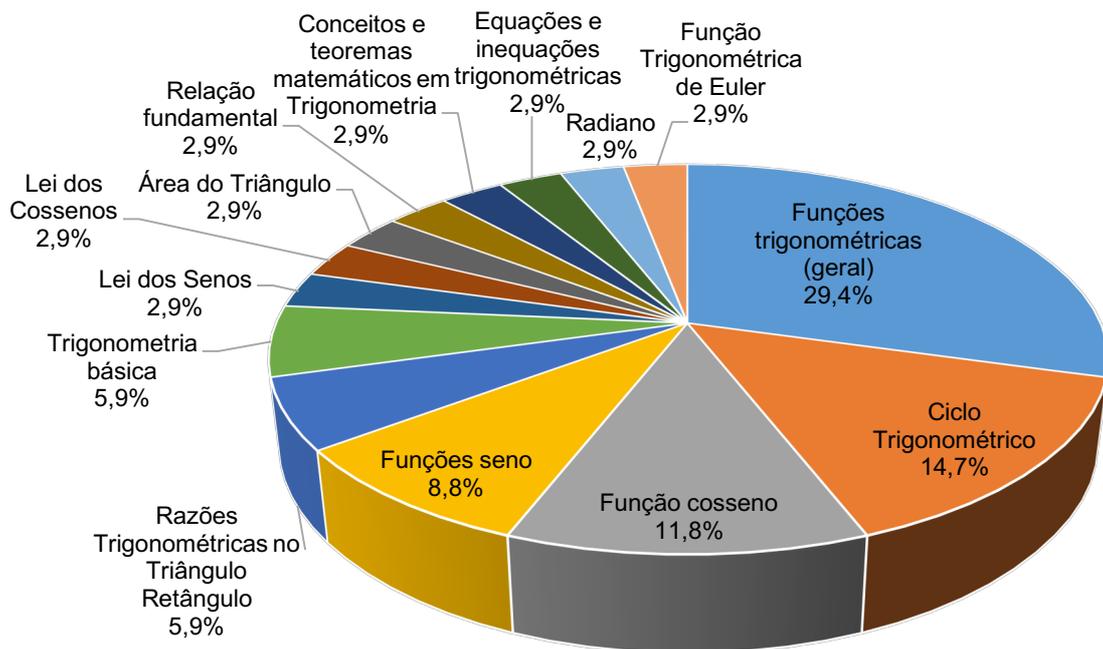
Autor	Ano	Local	Estado	Objetivos	Temáticas
Persicano	2013	Goiânia	GO	Melhorar o ensino da matemática e física com o uso de novas tecnologias	Funções trigonométricas
Silva, S.	2013	Rio Branco	AC	Desenvolver um material didático teórico e prático de apoio ao ensino de Matemática, delimitado às funções trigonométricas, através da inserção do Geogebra	Funções trigonométricas
Silva, E.	2013	Juazeiro	BA	Verificar a influência do uso do software GeoGebra como recurso didático nas aulas da função cosseno	Função cosseno
Dantas	2013	Mossoró	RN	Analisar se o trabalho com o GeoGebra facilita a aprendizagem de conceitos da trigonometria e conhecer quais as percepções dos alunos acerca do uso do GeoGebra no ensino de trigonometria	Funções seno e cosseno
Bacelar	2013	Fortaleza	CE	Produzir material didático para facilitar a aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática.	Ciclo Trigonométrico, Funções Trigonométricas e das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Lei dos Senos, Lei dos Cossenos, Área do Triângulo e Relação Fundamental
Magalhães	2013	Juiz de Fora	MG	Apresentar como as transformações de reflexão, translação e dilatação (compressão) afetam os gráficos das funções de uma maneira geral, até chegar ao estudo das funções trigonométricas.	Funções trigonométricas
Colares	2014	Belém	PA	Produzir e distribuir para professores e alunos um material de apoio que facilite o ensino-aprendizagem de trigonometria com o Geogebra	Conceitos e teoremas matemáticos em Trigonometria
Bruginski	2014	Curitiba	PR	Criar uma ferramenta para auxiliar no ensino da trigonometria.	Ciclo trigonométrico e funções trigonométricas

Saldan	2014	Maringá	PR	Apresentar uma alternativa ao estudo da trigonometria para o ensino médio, usando como instrumento adicional para aprendizagem o software GeoGebra.	Equações e inequações trigonométricas
Medeiros	2014	Campina Grande	PB	Apresentar indicações de fundamentos e de procedimentos da prática pedagógica em Trigonometria	Funções trigonométricas e trigonometria no triângulo retângulo
Souza, J.	2014	Fortaleza	CE	Analisar as potencialidades e limitações do software GeoGebra no estudo das funções trigonométricas no círculo trigonométrico e suas representações gráficas	Ciclo trigonométrico e funções trigonométricas
Silva, J.	2015	São Carlos	SP	Nortear professores da educação básica na preparação de aulas usando o GeoGebra, visando ao enriquecimento do tema trigonometria em sala de aula.	Trigonometria básica, funções trigonométricas e equações trigonométricas
Santiago	2015	Montes Claros	MG	Analisar as contribuições do Geogebra para o ensino das funções trigonométricas, explorando suas variações diante dos recursos que o software dispõe.	Funções seno e cosseno
Delfino	2015	Campo Grande	MS	Apresentar aplicações trigonométricas com o uso do Geogebra	Trigonometria básica, funções trigonométricas e equações trigonométricas
Souza, L.	2015	Cachoeira	BA	Apresentar uma proposta de estudo das funções trigonométricas e suas inversas com o uso de construções dinâmicas.	Funções trigonométricas e suas inversas
Freitas	2016	Três Lagoas	MS	Investigar e desenvolver atividades com as funções trigonométricas no Software Geogebra	Funções trigonométricas
Lima	2017	Santa Maria	RS	Identificar as concepções dos alunos sobre o tópico radiano e propor uma sequência de atividades com o uso do Geogebra	Radiano
Costa	2017	Vitória	ES	Verificar se a utilização do software GeoGebra como ferramenta para o ensino de trigonometria auxiliou no processo de ensino/aprendizagem de tal conteúdo.	Trigonometria no triângulo retângulo, na circunferência e funções trigonométricas
Cerqueira	2017	Cruz das Almas	BA	Apresentar uma proposta de ensino que possibilite uma melhor abordagem para análise gráfica do comportamento dos elementos das Funções seno e cosseno usando o software GeoGebra	Funções seno e cosseno
Câmara	2018	Mossoró	RN	Apresentar uma proposta alternativa de estudo para a trigonometria utilizando o Geogebra	Função Trigonométrica de Euler

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A maior número dos estudos foi defendida em 2013 (30,0% - 6 estudos), seguido de 2014 (25,0% - 5 estudos) e 2015 (20,0% - 4 estudos). O estado com maior número de produções foi o da Bahia (15,0% - 3 estudos). Os objetivos das dissertações foram diversificados, englobando atividades presenciais com professores e/ou alunos ou apenas a apresentação didática de determinados recursos, a partir do uso do Geogebra (Quadro 4.1).

Figura 4.1 – Temáticas abordadas nas dissertações para aplicação com Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

De maneira geral, a temática mais frequente nas dissertações, no contexto da Trigonometria, foi funções trigonométricas (29,0%), seguido de ciclo trigonométrico (14,0%). Os assuntos mais diferenciados foram: radiano (3,0%) e Função Trigonométrica de Euler (3,0%) (Figura 4.1).

Quadro 4.2 – Caracterização dos estudos quanto ao delineamento, recursos, amostra e contexto

Autor	Delineamento	Recursos	Amostra	Contexto
Persicano	Estudo de caso	Resolução de questões de matemática do dia a dia e questões de física (movimento harmônico simples)	Não informada	Interdisciplinar

Silva, S.	Desenho metodológico, em três etapas: exploratória, aula teórica e apresentação do Geogebra	Material didático teórico e prático de apoio	65 professores do ensino médio da rede estadual urbana	Matemática
Silva, E.	Comparativo-descriptivo	Para o grupo de interesse: aula com Geogebra sobre a função cosseno e resolução de duas questões; para o grupo de comparação: aula tradicional sobre a função seno e resolução de duas questões com graus de dificuldade semelhantes	30 alunos do ensino médio (15 por grupo)	Matemática
Dantas	Comparativo-descriptivo	Atividade avaliativa composta por 17 itens	110 alunos do ensino médio de um instituto federal de educação (37 de eletrotécnica, 39 de informática e 34 de mecânica)	Interdisciplinar
Bacelar	Desenho metodológico	Material didático teórico e prático de apoio	-	Matemática
Magalhães	Estudo observacional	Atividade avaliativa com uso do Geogebra	Quantidade não informada; alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola pública estadual	Matemática
Colares	Desenho metodológico	Material didático teórico e prático de apoio	100 professores do ensino médio para avaliação inicial; 5 professores para apreciação do material didático	Matemática
Bruginski	Desenho metodológico	Planilhas dinâmicas	-	Matemática
Saldan	Desenho metodológico	Material didático teórico e prático de apoio	-	Interdisciplinar
Medeiros	Estudo observacional	Material didático teórico e prático de apoio	69 alunos de uma escola pública estadual	Matemática
Souza, J.	Quase experimental do tipo pré e pós-teste	Para o grupo de interesse: atividades didáticas com o Geogebra; para o grupo de comparação: aula tradicional	40 alunos de uma escola privada (20 por grupo)	Matemática
Silva, J.	Desenho metodológico	Material didático teórico e prático de apoio	-	Matemática
Santiago	Pesquisa-ação	Para o grupo de interesse: atividades didáticas com o Geogebra; para o grupo de comparação: aula tradicional	61 alunos (Geogebra: 26; tradicional: 35)	Matemática
Delfino	Desenho metodológico	Material didático teórico de apoio	-	Interdisciplinar

Souza, L.	Relato de experiência	Experimento A Roda-Gigante	24 alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola pública estadual	Matemática
Freitas	Pesquisa-ação	Estudo dirigido em sala de aula	20 alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola pública estadual	Matemática
Lima	Quase experimental do tipo pré e pós-teste	Atividades com o Geogebra	8 alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola pública federal	Matemática
Costa	Pesquisa-ação	Material didático teórico e prático de apoio	30 alunos do ensino médio de um instituto federal	Matemática
Cerqueira	Desenho metodológico	Material didático teórico e prático de apoio	-	Matemática
Câmara	Desenho metodológico	Material didático teórico e prático de apoio	-	Matemática

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

O maior número dos estudos teve um delineamento metodológico (45,0% - 9 estudos), a partir do desenvolvimento de materiais didáticos para auxílio teórico e/ou prático no ensino do conteúdo abordado com o uso do Geogebra. Dentre as dissertações com objetivo exploratório, destacaram-se: pesquisa-ação (15,0% - 3 estudos), estudo comparativo-descritivo (10,0% - 2 estudos), estudo observacional (10,0% - 2 estudos) e quase experimental do tipo pré e pós-teste (10,0% - 2 estudos). Destacou-se também um estudo de caso (5,0% - 1 estudo) e um relato de experiência (5,0% - 1 estudo). (Quadro 4.2).

Quadro 4.3 – Caracterização dos estudos quanto aos resultados e conclusão

Autor	Resultados	Conclusão
Persicano	O software Geogebra auxiliou na interpretação de 6 (seis) exercícios, distribuídos igualmente em matemática e física	Importância do uso das novas tecnologias e da interdisciplinaridade em sala de aula para melhoria da didática do professor e para um ensino-aprendizagem mais eficiente.
Silva, S.	Todas as escolas possuíam laboratório de informática, 72% dos professores conheciam o Geogebra, apenas 37% conheciam sua aplicação em sala de aula, porém, nenhum utilizou o recurso. Quanto à formação, 80% eram graduados em Matemática e 20% em outras áreas, como engenharias ou licenciatura em Física; e 50% possuem pós-	O percentual de acertos dos itens envolvendo Funções Trigonométricas foi muito baixo, 92% dos professores obtiveram aproveitamento menor ou igual a 50% e apenas um professor obteve 100% de aproveitamento. É importante realizar uma correlação entre a teoria e a prática, usando os conceitos matemáticos (definições, conceitos e exercícios) mostrando como ferramentas

	<p>graduação ou outro curso superior. Dentre as dificuldades em Trigonometria, 60% alegaram terem visto o conteúdo somente na graduação. Foram 90% os professores que informaram preferirem manter o ensino tradicional; apenas 8% se consideraram com conhecimento avançado em mídias digitais.</p> <p>Na análise de questionário com itens envolvendo funções trigonométricas, 8 (oito) professores tiveram nenhum acerto e apenas 1 (um) acertou a totalidade de questões.</p>	<p>computacionais como o Geogebra podem tornar as aulas mais dinâmicas.</p>
Silva, E.	<p>Os estudantes que assistiram às aulas com o auxílio do software GeoGebra apresentaram melhores resultados, superando em 33% e 39% o percentual de acertos nas questões. No grupo com aula tradicional, 33% não souberam responder ambas as questões; enquanto no grupo do Geogebra esse percentual foi de 7%.</p>	<p>Destaca-se a vantagem do uso deste software na representação variada e precisa dos gráficos das funções trigonométricas, agregando conhecimentos matemáticos e influenciando o modo como os alunos constroem os conceitos sobre esse conteúdo.</p>
Dantas	<p>Os alunos apresentaram uma aprendizagem mais significativa de diversos aspectos do comportamento das funções seno e cosseno, quando comparado com o ensino através de aulas expositivas com o uso de recursos didáticos mais comuns, como o livro e o quadro branco. Foram 50 os alunos (45,4%) que obtiveram um rendimento abaixo da nota de corte; destes, 41 (82,0%) melhoraram suas notas após estudo com o Geogebra.</p>	<p>O uso desse software é capaz de ajudar a compreender melhor os aspectos inerentes ao comportamento dessas funções, ressaltando a facilidade na utilização do GeoGebra, as vantagens da interatividade direta com esse software e a importância da sua utilização no ensino de Matemática. É fundamental que os cursos de formação de professores desenvolvam estratégias que garantam, efetivamente, a capacidade de utilização dessas ferramentas, de forma crítica e criativa.</p>
Bacelar	<p>Foram produzidos materiais explicativos e propostas de atividades para ensino de conteúdos em trigonometria.</p>	<p>A utilização do software Geogebra torna-se uma ferramenta de caráter criativo e construtivo permitindo ao aluno ampliar seus conhecimentos por múltiplas metodologias.</p>
Magalhães	<p>100% dos alunos acharam melhor desenvolver este tipo de atividade usando o computador do que em sala de aula.</p>	<p>O ensino de conteúdos matemáticos utilizando recursos computacionais proporciona resultados satisfatórios, obtenção rápida de resultados, melhoria da aprendizagem e aumento do interesse e motivação dos alunos, pois nitidamente o computador apresenta resultados que de outra maneira iriam demandar muito tempo.</p>
Colares	<p>91% dos professores conheciam o software, porém, apenas 52% utilizaram em sala de aula. Houve maior participação dos alunos nas atividades desenvolvidas pelos professores com o Geogebra; estes, por sua vez, relataram insegurança inicial, mas com um bom desenvolvimento.</p>	<p>É possível obter melhores resultados com o Geogebra a partir de treinamento inicial com os professores.</p>
Bruginski	<p>Foram produzidas 33 planilhas dinâmicas.</p>	<p>As planilhas dinâmicas se apresentaram como uma boa opção para dinamizar o desenvolvimento do ciclo trigonométrico e relacioná-lo com o gráfico das funções trigonométricas.</p>
Saldan	<p>Foram produzidos dois planos de aula relativos à construção do ciclo trigonométrico e resolução de inequações.</p>	<p>A forma sistemática de apresentação do conteúdo da trigonometria, fugindo do modelo padrão de giz e quadro, pode trazer benefícios duradouros quanto à</p>

		compreensão do tema, além de estimular professores e estudantes a procurar novos meios para a aprendizagem.
Medeiros	Nenhum aluno respondeu corretamente todo o questionário inicial aplicado, contendo três questões envolvendo o triângulo retângulo, e 10 alunos deixaram o questionário totalmente em branco. Foram produzidas 20 atividades avaliativas, de dificuldade progressiva, a serem desenvolvidas no Geogebra para melhoria do aprendizado dos alunos.	Existem grandes problemas no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria. A proposta de ensino com Geogebra pode contribuir para a melhoria desse processo.
Souza, J.	No pré-teste, o grupo experimental apresentou um percentual de acertos inferior ao grupo de comparação (37% vs. 38%). No pós-teste, o maior aumento de acertos foi obtido pelo grupo do Geogebra (79%) em relação aos que receberam aula tradicional (54%)	O uso da simulação computacional pode ser um meio eficiente de promover o aprendizado de forma significativa.
Silva, J.	Foram elaboradas três atividades para cada temática: trigonometria básica, funções trigonométricas e equações trigonométricas	As atividades fomentam alunos e professores para uma compreensão mais profunda das próprias atividades, bem como na criação de outras.
Santiago	Os resultados das atividades revelaram que o Geogebra se apresenta como importante ferramenta educacional na visualização, no entendimento dos elementos, nos conceitos e suas variações.	Foram explorados conceitos matemáticos, diminuindo o tempo de desenvolvimento das atividades e obteve-se maior precisão na construção dos gráficos, melhorando sua visualização e compreensão, sem perder os valores do aprendizado.
Delfino	Foram apresentados quatro exemplos de contextualização da trigonometria	Foi possível apresentar a fundamentação teórica da trigonometria, expondo as definições, principais teoremas e propriedades.
Souza, L.	De maneira contextualizada e interdisciplinar, os alunos foram levados à definição das funções seno, cosseno, arco cosseno e arco-seno com a construção dinâmica dos seus gráficos e algumas propriedades.	O Geogebra possibilitou explorar a modelagem de fenômenos oscilatórios que são descritos por funções trigonométricas devido ao seu caráter periódico, além de relacionar com outras áreas do conhecimento.
Freitas	Os alunos participantes da experiência obtiveram um melhor desempenho do que as outras turmas, em que o conteúdo foi trabalhado de forma tradicional (lousa/caderno).	O GeoGebra desperta o interesse e motiva os alunos a realizarem e explorarem atividades, aumentando a visualização e a argumentação por meio do processo de construir, arrastar as figuras na tela do computador, fazendo inúmeros e sucessivos testes.
Lima	Os alunos não reconhecem o conceito de ângulo e possuem dificuldade em reconhecer triângulos semelhantes, bases para o entendimento das razões trigonométricas fundamentais, com consequente baixo nível de compreensão do radiano.	Ocorreu significativa melhora do conhecimento em relação ao conceito de ângulo, semelhança de triângulos, origem e uso do número π e da unidade radiano.
Costa	Foram produzidas 11 aulas com uso do Geogebra, com propostas de atividades; 93,3% dos alunos consideram que a utilização de recursos tecnológicos nas aulas de matemática torna o aprendizado da disciplina mais significativo e 100%	A utilização do GeoGebra como ferramenta de ensino de Trigonometria pode contribuir para o processo de ensino/aprendizagem de tal conteúdo tanto pelo fato de tornar as aulas mais dinâmicas, interessantes e participativas quanto pelo fato de torná-las mais produtivas, por permitir uma construção precisa e

	consideraram o Geogebra eficaz nesse processo.	dinâmica de figuras planas (triângulos e circunferências) onde podem ser realizadas um grande número de experiências em curto espaço de tempo.
Cerqueira	A sequência didática seguiu um passo a passo, distribuída em duas fases: a primeira, com duração de 03 aulas, foi iniciada com a apresentação de um problema norteador; na segunda fase, com duração de 02 aulas, o aluno construiu, com uso da ferramenta controle deslizante, os gráficos da função	O Geogebra permite a visualização dinâmica dos gráficos dessas funções mediante a manipulação do chamado controle deslizante para variar os parâmetros que modificam o domínio, conjunto imagem, período e amplitude das funções seno e cosseno.
Câmara	A apresentação da Função Trigonométrica de Euler conforme proposta nesse trabalho permite que o aluno entenda as funções trigonométricas como um todo, assimilando a relação entre elas.	Esse trabalho serve de base para que o docente e discente explore o amplo conteúdo da trigonometria, se aprofundando nas ramificações da ciência que não foram abordadas nesse trabalho

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Os resultados dos estudos envolveram: avaliação do desempenho de alunos do Ensino Médio na interpretação de exercícios utilizando o Geogebra (7 estudos), sendo que três investigaram, também, a receptividade ao uso do *software*; avaliação do desempenho de professores do Ensino Médio (2 estudos); comparação de resultados do ensino com o Geogebra e o ensino tradicional (4 estudos); e a produção de material didático-pedagógico (7 estudos) (Quadro 4.3).

5. ANÁLISE E DISCUSSÕES

5.1. Avaliação do desempenho de professores do Ensino Médio

Diante das dificuldades de assimilação reconhecidamente apontadas por alunos para aprendizagem de conteúdos de matemática, cabe ao professor a decisão quanto ao processo de ensino que será aplicado e quais metodologias educacionais serão utilizadas. Os procedimentos adotados podem evidenciar a habilidade didática do professor, o domínio de tecnologias e as possibilidades de aprendizado de seus alunos.

O estudo de Silva, S. (2013) revelou que 72% dos professores consultados conhecem *software* GeoGebra e todos conhecem algum outro programa que pode ser utilizado em sala de aula ou no laboratório de informática, contudo, não utilizaram de forma efetiva ferramentas computacionais durante o ano letivo de 2012. Foi realizada uma avaliação individual com os professores que compuseram a amostra com questões envolvendo Funções Trigonométricas no nível de aplicação a alunos do Ensino Médio. O percentual de acertos foi muito baixo, 92% dos professores obtiveram aproveitamento menor ou igual a 50% e apenas um professor obteve 100% de aproveitamento.

Diante desses resultados, o autor apontou a necessidade de implantação de políticas públicas para capacitação de professores com um foco duplo: (1) abordagem matemática de conteúdos de maior dificuldade para os professores em seu ofício em sala de aula; e (2) abordagem quanto à aplicação de tais conteúdos usando as tecnologias de informação e comunicação. É importante realizar uma correlação entre a teoria e a prática, usando os conceitos matemáticos (definições, conceitos e exercícios) mostrando como ferramentas computacionais como o Geogebra podem tornar as aulas mais dinâmicas. Outra proposta do autor foi a construção de repositórios de objetos de aprendizagem nas escolas, utilizando a infraestrutura tecnológica pré-instalada, de modo que esses repositórios escolares serviriam também de suporte a bancos de questões pedagógicas, ampliando e aproximando o professor das necessidades apresentadas pelos alunos durante as aulas de Matemática e também sendo utilizado por outras disciplinas (SILVA, S. 2013).

Colares (2014) reforçou a importância de realizar a capacitação de professores para utilização de tecnologias, como o Geogebra, no ensino da matemática, tendo em vista que o despertar do interesse dos alunos entra, muitas vezes, em conflito com as limitações dos professores em aplicar ferramentas de informática na sala de aula.

5.2. Avaliação do desempenho de alunos do Ensino Médio na interpretação de exercícios utilizando o Geogebra e receptividade ao uso do *software*

Por outro lado, a avaliação do desempenho de alunos no desenvolvimento direto de atividades a partir da compreensão do conteúdo com o suporte do Geogebra, é pertinente e requer de cada vez mais incentivo às evidências. Fatores como as dificuldades individuais com conteúdos de trigonometria e limitações advindas das próprias habilidades no desenvolvimento de exercícios de matemática devem ser enfrentados.

No estudo desenvolvido por Medeiros (2014), nenhum aluno respondeu corretamente todo o questionário inicial aplicado, contendo três questões envolvendo o triângulo retângulo, e 10 alunos deixaram o questionário totalmente em branco. Foram produzidas 20 atividades avaliativas, de dificuldade progressiva, a serem desenvolvidas no Geogebra para melhoria do aprendizado dos alunos.

Entretanto, outro estudo revelou que com o uso dos recursos computacionais os alunos consideraram mais fácil reconhecer as transformações. À medida que os alunos interagem com o computador, viam imediatamente o que estava acontecendo. Concluiu-se que atividades desse tipo em sala de aula são muito enriquecedoras e podem ser estendidas às outras áreas da Matemática como o estudo das matrizes, determinantes, geometria, funções polinomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, entre outros assuntos (MAGALHÃES, 2013).

5.3. Comparação de resultados do ensino com o Geogebra e o ensino tradicional

Quanto às pesquisas comparativas, o estudo de Silva, E. (2013) foi desenvolvido com o objetivo de verificar a influência do uso do software Geogebra como recurso didático nas aulas da função cosseno e concluiu que os alunos submetidos às aulas com o auxílio desse *software* apresentaram resultados de aprendizagem melhores. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, o ensino da trigonometria está associado a uma série de cálculos algébricos exaustivos, que servem para destacar propriedades das funções trigonométricas e para realizar análises dos seus respectivos gráficos. As funções seno (para o grupo do ensino tradicional) e cosseno (para o grupo do Geogebra) foram escolhidas porque, tecnicamente, os gráficos dessas funções têm o mesmo comportamento e diferem um do outro

por uma diferença de fase. Esta diferença é de $\frac{\pi}{2}$. Ou seja, de forma sucinta, essas funções possuem o mesmo grau de dificuldade de ensino-aprendizagem.

Embora a aplicação de funções diferentes entre os grupos (seno no tradicional e cosseno no com tecnologia) pareça um viés de avaliação, evitou que os resultados fossem atribuídos ao viés da informação, tendo em vista que as primeiras atividades foram realizadas com o grupo que recebeu a aula teórica tradicional e, portanto, poderia compartilhar dados sobre as questões com o grupo que participou da aula com o Geogebra.

Dantas (2013) desenvolveu técnica de ensino-aprendizagem com o Geogebra com alunos que obtiveram baixo desempenho em avaliação previamente realizada sobre funções seno e cosseno. Nessa avaliação, procurou-se analisar os níveis de compreensão de alguns conceitos explorados no ensino das funções seno e cosseno, tais como: o crescimento e decréscimo dessas funções; o comportamento dos seus gráficos; os quadrantes onde os valores da imagem dessas funções são positivos ou negativos; a determinação do período e da imagem dessas funções e a influência dos parâmetros a , b e c no comportamento do gráfico, da imagem e do período das funções.

Foi estabelecido o limite de 12 acertos (aproximadamente 70%) como sendo o mínimo necessário para que o aluno não precisasse fazer uma nova avaliação, de modo que todos os alunos que obtiveram menos de 12 acertos foram convidados a participar da segunda etapa da atividade, no laboratório de informática, com o uso do Geogebra. Os alunos, em sua maioria, melhoraram significativamente o seu desempenho, mostrando que o trabalho com o Geogebra pode contribuir para a elevação dos níveis de aprendizagem daqueles alunos que apresentam maiores dificuldades no aprendizado da trigonometria. O autor ressaltou a surpresa dos alunos diante da possibilidade de visualizar todos os objetos que compõem a apresentação em movimento, bem como a possibilidade de ocultar partes da apresentação, dando maior ênfase ao comportamento de outros objetos (DANTAS, 2013).

Contrapondo os resultados positivos para alunos no aprendizado de trigonometria por meio do Geogebra com a relutância e dificuldade apresentadas pelos professores, Souza, J. (2014) discutiu que essa resistência advém da falta de intimidade de muitos profissionais da educação com a informática. Aqueles que ainda não dominam o computador e resistem a ele levantam várias questões, na verdade pseudoproblemas, na tentativa de impedir que as novas tecnologias entrem na escola. Isso não significa que não se deve questionar o uso do computador, pelo contrário, ele deve ser constantemente avaliado como todos os outros recursos didáticos utilizados.

Os resultados da pesquisa revelaram resultados satisfatórios para o grupo de alunos que resolveram exercícios após aprendizado com o Geogebra, apontando-se, ainda, crescimento significativo na formação de conceitos do grupo experimental em relação ao crescimento do grupo de referência, que passou pelo ensino tradicional. O aprendizado no contexto computacional é uma ferramenta viável para o professor na busca de ambientes didáticos que facilitem o entendimento e o processo de construção do conhecimento (SOUZA, J., 2014).

5.4. Produção de material didático-pedagógico

O grande número de pesquisas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional que visaram desenvolver materiais de apoio didático-pedagógico para que professores possam utilizar como base para introduzir o Geogebra no ensino de trigonometria em sala de aula para alunos do Ensino Médio pode estar relacionado à visualização por parte dos autores dessas limitações de professores responsáveis pelo ensino da matemática nas escolas.

Diante disso, Bacelar (2013) salientou que professores e alunos têm oportunidade de ampliar conhecimento e amadurecer seus pensamentos a partir da utilização do Geogebra. Para isso, é necessário perceber que o computador desenvolve um papel de facilitador representando um avanço no ensino de matemática. Por outro lado, a utilização das tendências atuais em Educação Matemática, principalmente na questão tecnológica, se intensifica na busca de mudanças no ensino por questões inovadoras, o que entra em contraposição ao mecanicismo tradicional ainda dominante nas salas de aula.

Bruginski (2014) ressalta que a adoção de metodologias ativas, principalmente as que envolvem recursos tecnológicos, tornaram-se essenciais para a educação, diante da revolução tecnológica que vem ocorrendo nas últimas décadas, em que informações podem ser obtidas a uma velocidade muito grande. Essa mudança socioculturais coloca para a escola a necessidade de acompanhar as mudanças, com adoção de recursos atuais para auxiliar no ensino, para conseguir manter os alunos interessados na aprendizagem. Reforça, ainda, que considerando que na atualidade a tecnologia esta institucionalizada em tudo ao nosso redor, aproveitar estes recursos e melhorar a maneira tradicional de ensinar é quase um dever dos professores.

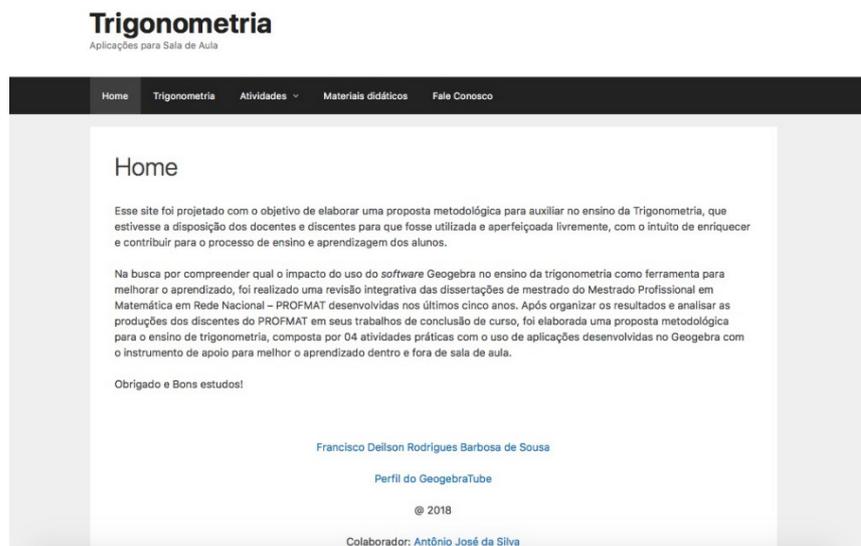
Outro ponto importante é o detalhamento das atividades como um dos aspectos fundamentais nos materiais de apoio didático-pedagógico para os professores, de modo que tanto estes quanto seus alunos utilizem o Geogebra de maneira eficiente, gerando imagens

dinâmicas, enriquecendo o processo de ensino em sala de aula, e auxiliando na compreensão visual de comportamentos gráficos de funções e equações trigonométricas, entre tantos outros assuntos de Matemática (SILVA, 2015).

5.5. Proposta de uma Metodologia para o Ensino de Trigonometria

Após organizar os resultados e analisar as produções dos discentes do PROFMAT em seus trabalhos de conclusão de curso, foi elaborada uma proposta de metodologia para o ensino de trigonometria. Pensou-se em proposta metodológica que pudesse ser utilizada livremente. Um site com aplicações do Geogebra foi elaborado e hospedado no seguinte domínio: <http://trigonometria.nasnuvens.net.br>.

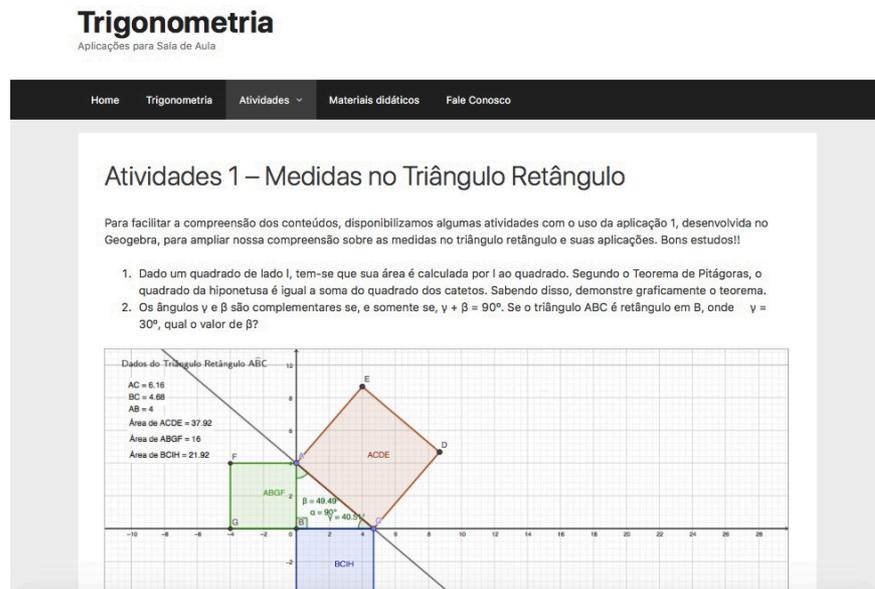
Figura 5.1 - Página Inicial do site



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 5.1 apresenta a página inicial do site com as aplicações do Geogebra. No site é possível encontrar um material de apoio sobre a Trigonometria; um conjunto de 04 atividades com o uso de 6 aplicações do Geogebra, disponibilizadas em 4 páginas para buscar o aprendizado de forma dinâmica dos conhecimentos adquiridos a Trigonometria; um conjunto de 20 dissertação dos egressos do PROFMAT que fazem o uso do Geogebra no ensino da Trigonometria (amostra da nossa pesquisa); e um ambiente de contato visando melhorar a sugestão de metodologia que adotamos para trabalhar de maneira didática a Trigonometria.

Figura 5.2 – Medidas no Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 5.2 está a primeira aplicação (App1), nela é possível encontrar a relação que se estabelece entre os quadrados cujos lados formam um triângulo retângulo. É possível explorar, além das áreas, os comprimentos dos lados. Uma alternativa metodológica é determinar o lado do quadrado maior com comprimento unitário, e assim reconhecer os valores do seno, cosseno e da tangente de um ângulo interno ao triângulo quando analisado num sistema cartesiano devidamente centrado. Essa proposta permite que os alunos reconheçam as medidas de seno e cosseno nos eixos Ox e Oy .

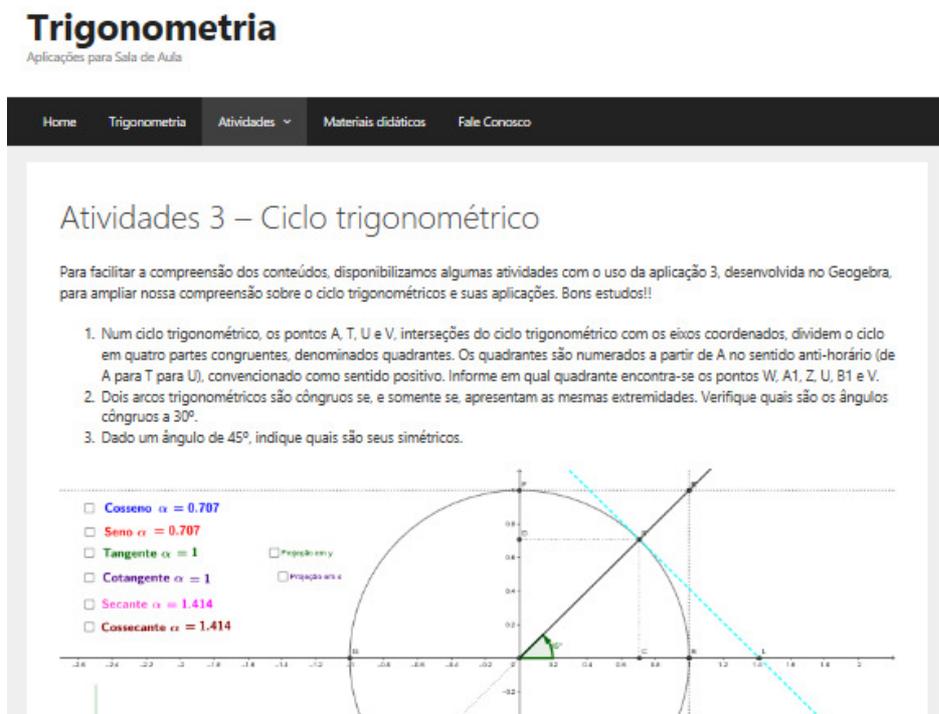
Figura 5.3 - Medidas na Circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 5.3 é possível conhecer o App 2, nessa aplicação são conhecidas as medidas na circunferência, que está centrada com origem em um sistema cartesiano, como o raio, o diâmetro, o ângulo central, o comprimento do arco e a área do setor circular. Esses valores são obtidos mediante o deslocamento de um ponto da circunferência de raio r .

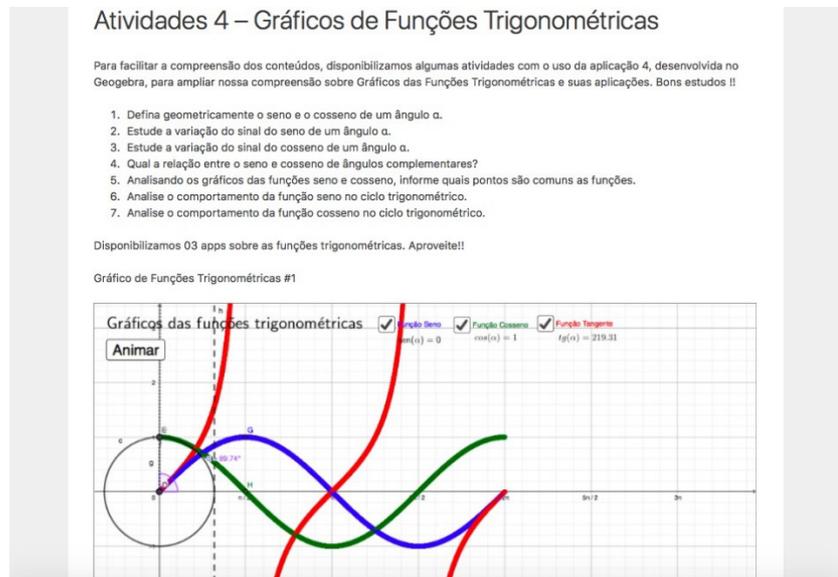
Figura 5.4 - Círculo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 5.4 apresenta o círculo trigonométrico e nele é possível observar e alterar os ângulos e suas medidas de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Pense que utilizar ângulos e conhecer as medidas das relações seja uma possibilidade de ação didática que objetive a aprendizagem.

Figura 5.5 - Gráfico de Funções Trigonômétricas



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 5.5 é apresentada a quarta atividade. Nessa página há três aplicações para estudar e apresentar conceitos e parâmetros das funções trigonométricas.

Entende-se que o uso dessas aplicações tanto por professores quanto alunos, dentro e fora do ambiente da sala de aula, constituem uma grande oportunidade para a construção de novos conhecimentos, sempre com a certeza que pela ação consciente dos atores da sala de aula, e fora dela, que o desenvolvimento e a aprendizagem ocorrerão. O tempo de aprendizagem dar-se-á conforme estruturas cognitivas previamente construídas e estabilizadas em cada indivíduo. Entende-se também que a possibilidade de atividade de ensino aqui proposta não configura uma ação assertiva para o aprender, contudo, a ação controlada e consciente, própria da ação docente, é um fato que acrescenta ao processo de aprendizagem.

6. CONCLUSÃO

Os estudos apresentaram diferentes metodologias de desenvolvimento e os resultados apresentados foram variados. O Geogebra, de forma geral, mostrou-se importante ferramenta para auxílio à interpretação de exercícios de trigonometria por alunos do Ensino Médio, com desempenhos satisfatórios em atividades e avaliação positiva por parte dos alunos e professores.

As pesquisas apontaram, ainda, um problema referente ao domínio e disposição dos professores do Ensino Médio para a utilização de tecnologias educacionais, especialmente com foco no Geogebra. Os professores, em sua totalidade, reconhecem a importância da implementação de metodologias ativas no ensino. A maioria conhece tecnologias educacionais para o ensino da matemática, com foco na trigonometria, incluindo o Geogebra.

Entretanto, apenas uma pequena parcela utilizou ou relatou pretender aplicar em sala de aula. Dentre os que utilizaram, foram apontadas dificuldades pessoais no manuseio do software, conforme nível de domínio em informática, e relutância em novas administrações no ensino de trigonometria no Ensino Médio.

Essas limitações se contrapõem aos resultados positivos apontados para o Geogebra a partir da comparação entre grupos de alunos que desenvolveram exercícios com auxílio da ferramenta ou por meio do ensino tradicional. Os trabalhos de intervenção mostraram que o software estimula o interesse dos alunos, favorece o aprendizado de forma interativa e visual, além de também contribuir para a melhoria da compreensão de alunos que apresentam dificuldades prévias quanto a conteúdos de trigonometria, em especial, no estudo das funções trigonométricas.

Os materiais didático-pedagógicos de apoio teórico e/ou prático produzidos foram apresentados como facilitadores do ensino em sala de aula para professores com menor domínio do Geogebra ou tecnológico, de forma geral. Esses materiais incluíram: aulas (passo a passo), atividades práticas com detalhamento dos comandos no Geogebra e interpretação de exercícios e planilhas dinâmicas para desenvolvimento do ciclo trigonométrico e relacioná-lo com o gráfico das funções trigonométricas.

É necessário refletir sobre a importância das metodologias ativas para o efetivo aprendizado da matemática, contribuindo de maneira significativa para a compreensão dos conteúdos, analisando as deficiências das técnicas de ensino tradicional e, assim, propondo novas metodologias de ensino-aprendizagem. Esses recursos apresentam diferentes modelos e

estratégias, para enfrentar os desafios com a missão de constituir um processo de ensino-aprendizagem pautado em oferecer ao aluno uma boa educação em diferentes níveis educacionais.

A pesquisa foi evidenciada por vários fatores que mostraram a eficiência da inserção do Geogebra na formação dos conceitos de Trigonometria, por isso é necessário repensar a educação na forma de propor os currículos escolares, reconhecendo as potencialidades do uso das tecnologias educacionais no ensino da matemática, pois o uso dessas metodologias ativas nos ambientes escolares permitem aos alunos realizar grandes descobertas que impulsionam a busca pelo conhecimento matemático de maneira significativa.

Ao final das análises foi elaborada uma proposta metodológica para o ensino da Trigonometria buscando fazer o uso das potencialidades do software em apresentar recursos dinâmicos e, assim, introduzir os conceitos de trigonometria através das aplicações associadas a um conjunto de atividades, permitindo um aprendizado significativo, associando a teoria aos domínios sobre os procedimentos de construção geométrica, possibilitando uma forma de edificar o conhecimento matemático, contribuindo para minimizar as dificuldades no ensino da trigonometria.

Conclui-se que o Geogebra é uma ferramenta educacional que possibilita o aprendizado dos alunos, por mecanismos de caráter criativo e construtivo, minimizando suas dificuldades, aumentando o interesse e a motivação dos mesmos, ampliando suas possibilidades de compreensão dos conceitos inerentes a trigonometria.

REFERÊNCIAS

- ALVES, K. A.; AGUIAR, M.; RIBEIRO, A. J. **As Dimensões do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: O Knowledge Quartet como Ferramenta de Análise da Prática Docente**. *Acta Scientiae*, v. 20, n. 2, mar./abr. 2018.
- BACELAR, J. **Uso do Geogebra no ensino da trigonometria**, 2013, 112 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- BAIRRAL, M. A.; DA SILVA, M. A. **Instrumentação para o ensino de geometria**. Rio de Janeiro: CEDERJ, 2005.
- BELL, E.T. *The Development of Mathematics*, 2TM edition. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, U.S.A., 1945.
- BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1998.
- BRUGINSKI, W. **Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software Geogebra para o estudo de funções trigonométricas**, 2014, 56 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2014.
- BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.
- BORBA, M.C.; SILVA, R. S. R. ; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.
- CÂMARA, M. **Uma proposta de abordagem da trigonometria apresentando a função de euler no espaço com o software Geogebra**, 2018, 54 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2018.
- CANNONE, Giacomo; ROBAYNA, Martín S.; MEDINA, Maria M. P. **O ensino da matemática e as novas Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC): estudo de caso de um grupo professores de ensino fundamental, Ciclo I, em Tenerife – Espanha**. *Zetetiké*, v. 16, n.30, p.107-138, 2008. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2517>.
- CARNEIRO, Reginaldo F.; PASSOS, Cármen L. B. **A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades**. *Revista Eletrônica de Educação*, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br>.
- CERQUEIRA, P. **O uso do software Geogebra para visualizar o comportamento do gráfico de funções seno e cosseno quanto aos movimentos de translação, reflexão e deformação**, 2017, 75 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, 2017.

COLARES, F. **Aprendendo trigonometria com o Geogebra**, 2014, 76 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Belém, 2014.

COSTA, A. **A utilização do Geogebra como ferramenta para o ensino de trigonometria**, 2017, 121 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

DANTAS, A. **O uso do geogebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do ensino médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte**, 2013, 76 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2013.

DELFINO, M. **O ensino da trigonometria via Geogebra e aplicações**, 2015, 78 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

FREITAS, G. **Trigonometria: um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do software Geogebra**, 2016, 102 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2016.

LIMA, M. R. **(Re)descobrimo a unidade radiano por meio do Geogebra**, 2017, 130 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

MAGALHÃES, A. **Utilizando Geogebra em Sala de Aula no Estudo de Transformações Aplicadas às Funções Trigonométricas**, 2013, 55 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

MALTEMPI, M. V. **Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente**. Acta Scientiae, Canoas, v. 10, n.1, p. 59-67, jan./jun. 2008.

MEDEIROS, W. **Uma proposta para o ensino de trigonometria utilizando o software Geogebra**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2014.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORAN, J. M. **Ensino e aprendizagem inovadora com tecnologias audiovisuais e telemáticas**. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 8. ed. Campinas: Papirus, 2004.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e medição pedagógica** [livro eletrônico]. Campinas, SP: Papirus, 2015.

PERSICANO, H. **A importância do uso das novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem: aplicação do software Geogebra no estudo das funções trigonométricas**, 2013, 68 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2013.

SALDAN, C. **Equações e inequações trigonométricas: uma abordagem com o aplicativo de matemática dinâmica GeoGebra**, 2014, 49 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

SANTIAGO, E. **O ensino da trigonometria usando o software Geogebra como ferramenta de ensino-aprendizagem**, 2015, 95 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015.

SILVA, E. **O ensino de funções trigonométricas com o auxílio do Geogebra**, 2013, 75 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Juazeiro, 2013.

SILVA, J. **As novas tecnologias no contexto escolar: uma abordagem sobre aplicações do Geogebra em trigonometria**, 2015, 83 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

SILVA, S. **Desenvolvimento de material didático teórico e prático de apoio ao ensino de funções trigonométricas utilizando o software Geogebra**, 2013, 84 f. Dissertação (mestrado) – Fundação Universidade Federal De Rondônia, Porto Velho, 2013.

SOUZA, J. **Utilização do software Geogebra no ensino das funções trigonométricas**, 2014, 93 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

SOUZA, L. **Uma proposta de estudo de funções trigonométricas e suas inversas através do Geogebra**, 2015, 72 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, 2015.

VIANNA, C. E. S. **Evolução histórica do conceito de educação e os objetivos constitucionais da educação brasileira**. Janus, v. 3, n. 4, p.128-38, 2006.