

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Marcos Vinícius Conceição Almeida

*Vórtices BPS*  
*em um modelo  $CP(2)$*   
*na presença do termo de Chern-Simons*

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2018

Marcos Vinícius Conceição Almeida

*Vórtices BPS*  
*em um modelo  $CP(2)$*   
*na presença do termo de Chern-Simons*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Conceição Almeida, Marcos Vinícius.

Vórtices BPS em um modelo CP(2) na presença do termo de Chern-Simons/ Marcos Vinícius Conceição Almeida. - 2018.

66 p.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/CCET, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUÍS, 2018.

1. Equações BPS. 2. Formalismo BPS. 3. Vórtices. I. da Hora Santos, Carlos Eduardo. II. Título.

Marcos Vinícius Conceição Almeida

*Vórtices BPS*

*em um modelo  $CP(2)$*

*na presença do termo de Chern-Simons*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovado em 27 de agosto de 2018.

**Comissão Examinadora**

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos (Orientador) - UFMA

---

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA

---

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas - UFMA-Chapadinha

# Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar.

Aos meus pais, Lígia e Sebastião, pelo amor dedicado, pela educação que reflete o que sou hoje e pelo incentivo aos estudos.

Aos meus irmãos, Márcio e Mariana, e ao meu primo, Guilherme, pela companhia, por me ensinarem a dividir o que tenho e pelo incentivo.

A minha namorada, Bhrenda, pelo carinho, compreensão nos momentos de ausência, pelo incentivo e pela força nos momentos difíceis.

A minha avó, Lúcia. Às minhas avós, Rita e Alzimira, que descansam em paz. Aos meus tios e tias. Aos meus primos e primas. Aos meus padrinhos e madrinhas.

Aos bons "Guias de luz".

Aos meus amigos de Curso: João Luís, Daniel, Marcos Lima, Wellington, Railson, Joelson, Joel Félix, Joel Anderson, Kayman, Arthur, Charles, João Alphieres, entre outros. Companheiros de caminhada. Aos meus outros amigos.

Aos meus professores do curso de Física da UFMA pela contribuição na minha vida acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos pela contribuição e ajuda neste trabalho e, principalmente, pela paciência.

À CAPES pela contribuição financeira.

*“Não existe nada de completamente errado no mundo, mesmo um relógio parado, consegue estar certo duas vezes por dia.”*

(Paulo Coelho)

# Resumo

Este trabalho aborda o estudo de vórtices BPS em um modelo de calibre  $CP(2)$  na presença do termo de Chern-Simons. Neste contexto, desenvolvemos uma estrutura de primeira ordem via o método de Bogomol'nyi, a partir do qual obtemos o limite inferior para a energia total do sistema (limite de Bogomol'nyi) e as equações de primeira ordem para o modelo. Usamos essas expressões para introduzir os cenários BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld) efetivos, nos quais resolvemos as equações de primeira ordem pelo método de linearização destas equações, obtendo assim soluções do tipo vórtice.

**Palavras Chaves:** Vórtices, Formalismo BPS, Equações BPS

# Abstract

This work deals with the study of BPS vortices in a gauged CP (2) model in the presence of the Chern-Simons term. In this context, we developed a first-order structure via the Bogomol'nyi method, from which we obtain the lower limit for the total energy of the system (Bogomol'nyi limit) and the first order equations for the model. We use these expressions to introduce the effective BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld) scenarios, in which we solve the first-order equations by the linearization method of these equations, thus obtaining vortex-like solutions.

**Keywords:** Vortices, BPS formalism, BPS equations.

# Lista de Figuras

2.1	Solução numérica para $g(r)$ obtida a partir de ( 2.36) e (2.37) via (2.29) e (2.30), para $v = e = 1$ . As vorticidades são dadas por: $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 3$ (curva azul tracejada), e $n = 5$ (curva vermelha ponto-tracejada). A solução aproxima-se monotonicamente do contorno. . . . .	21
2.2	Solução numérica para $a(r)$ . Convenções conforme a Figura 2.1. Neste caso vale $a(r \rightarrow 0) \rightarrow n$ . . . . .	21
2.3	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ construída a partir de (2.11). Convenções conforme a Figura 2.1. A configuração final resulta em um <i>lump</i> centrado na origem. . . . .	22
2.4	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ obtida via (2.28). Convenções conforme a Figura 2.1. Para $n = 1$ , a solução é um <i>lump</i> centrado na origem, enquanto que para $n \neq 1$ , as configurações são anéis centrados na origem .	23
3.1	Solução numérica para $g(r)$ obtida a partir de ( 3.21) e (3.22) via (2.29) e (2.30), para $v = e = \kappa = 1$ . As vorticidade são dadas por: $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 3$ (curva azul tracejada), e $n = 5$ (curva vermelha ponto-tracejada). . . . .	30
3.2	Solução numérica para $a(r)$ . Convenções conforme a Figura 3.1. . . . .	31
3.3	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 3.1 . . . . .	32
3.4	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 3.1 . . . . .	32

4.1	Solução numérica para $\alpha(r)$ (curva preta sólida para $m = 1$ e curva vermelha tracejada para $m = 2$ ) e para $A(r)$ (curva azul ponto-tracejada para $m = 1$ e curva laranja longo-tracejada para $m = 2$ ) . . . . .	43
4.2	Solução numérica para o módulo do campo magnético $B(r)$ para $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 3$ (curva azul ponto-tracejada) e $m = 7$ (curva vermelha tracejada). . . . .	43
4.3	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . As convenções sendo as mesmas da Figura 4.1. . . . .	44
5.1	Solução numérica para $\alpha(r)$ obtida a partir de (5.34) e (5.35) via (4.12) e (5.37), para $h = \kappa = 1$ e $g = \sqrt{2}$ . As vorticidade são dadas por: $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), e $m = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada). . . . .	54
5.2	Solução numérica para $A(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1. Os perfis são monotônicos. . . . .	54
5.3	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1. Os perfis são anéis centrados na origem. . . . .	55
5.4	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1, $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 0$ para $m \neq 1$ . . . . .	55
5.5	Solução numérica para o potencial elétrico $A^0(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1. . . . .	56
5.6	Solução numérica para o elétrico campo elétrico $E(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1, $E(r = 0) = 0$ e $E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . . . . .	57

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>3</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2 Vórtices no modelo de Maxwell-Higgs</b>	<b>13</b>
2.1 O modelo de Maxwell-Higgs . . . . .	13
2.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de Maxwell-Higgs . . . . .	15
2.3 Soluções BPS . . . . .	18
<b>3 Vórtices no modelo de Chern-Simons-Higgs</b>	<b>24</b>
3.1 O modelo de Chern-Simons-Higgs . . . . .	24
3.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de Chern-Simons-Higgs . . . . .	26
3.3 Soluções BPS . . . . .	28
<b>4 Vórtices BPS em um modelo <math>\mathbf{CP}(2)</math> na presença do termo de Maxwell</b>	<b>33</b>
4.1 O modelo $\mathbf{CP}(N - 1)$ na presença do termo de Maxwell-Higgs . . . . .	33
4.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo $\mathbf{CP}(2)$ . . . . .	36
4.3 Soluções BPS . . . . .	38
4.3.1 O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_1$ . . . . .	39
4.3.2 O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_2$ . . . . .	40
<b>5 Vórtices BPS em um modelo <math>\mathbf{CP}(2)</math> na presença do termo de Chern-Simons</b>	<b>45</b>
5.1 O modelo $\mathbf{CP}(N - 1)$ na presença do termo de Chern-Simons . . . . .	45
5.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de calibre $\mathbf{CP}(2)$ . . . . .	47
5.3 Soluções BPS . . . . .	50

5.3.1	O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_1$ . . . . .	50
5.3.2	O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_2$ . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>58</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

De maneira bem simples, um *defeito topológico* representa a região de transição entre fases distintas de um sistema, ou melhor, é a região em que o sistema muda suas características e propriedades. Matematicamente, eles surgem como soluções de equações diferenciais não-lineares [1]. Essas soluções são estáveis, classificadas de acordo com a dimensão, e recebem o nome de *sólitons*.

Do ponto de vista físico, sóliton é o nome dado a certos tipos de fenômenos ondulatórios não-lineares e altamente estáveis, também chamados de “ondas solitárias” [2, 3]. No entanto, dentro do domínio das teorias clássicas de campos, eles são descritos como soluções estáticas, e estáveis, das equações de movimento de sistemas não-lineares, sendo possuidores de energia finita, o que significa que a densidade de energia correspondente deve ser localizada, i.e., concentrada em uma região finita do espaço [4]. De um modo geral, eles costumam surgir dentro de teorias em que se ocorre a quebra espontânea de algum tipo de simetria.

Usualmente, os sólitons são obtidos através das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange, porém, em circunstâncias especiais, tais estruturas também podem ser obtidas via um conjunto de equações de primeira ordem, denominadas de *equações BPS (Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfeld)*. Nestas circunstâncias, a configuração resultante possui energia mínima, que é proporcional a sua carga topológica.

A utilização do termo BPS tem origem no fato de que o método empregado na obtenção de soluções estáveis (soluções BPS), possuidoras de energia finita, para determinadas equações de campos não-lineares foi proposto por E. B. Bogomol’nyi em 1976 [5], embora em 1975, M. K.

Prasad e C. M. Sommerfield já tivessem publicado um trabalho sobre o assunto [6].

O método consiste em escrever a densidade de energia estacionária de um determinado modelo como uma soma de quadrados perfeitos e um termo contendo uma derivada total. Da integração dessa densidade de energia sobre todo o espaço, obtém-se a energia total do sistema. Dessa maneira, a minimização dessa energia total impõe que os termos quadráticos se anulem, o que conduz às equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções também satisfazem as equações de Euler-Lagrange, sendo, portanto, soluções genuínas do modelo. A integral que contém o termo restante (com a derivada total) é então resolvida, levando-se em consideração as condições de contorno às quais estão sujeitos os campos do modelo. O resultado desse procedimento é a obtenção do valor mínimo ( $E_{bps}$ ) para a energia, ele representa o limite inferior para a energia total do sistema ( $E \rightarrow E_{bps}$ ), que é conhecido como o *limite de Bogomol'nyi*.

Dentre os exemplos mais conhecidos de sólitons (ou tipos de defeitos topológicos), podemos destacar: o *kink*, o *vórtice* e o *monopólo magnético*. Abordagens interessantes sobre estes exemplos podem ser encontradas em [7–9]. Os kinks são considerados sólitons unidimensionais, são obtidos dentro do contexto de teorias de campos definidas em um espaço-tempo (1+1)-dimensional, contendo um único campo escalar (real e estático); os vórtices, por outro lado, são sólitons bidimensionais (planares), i.e., eles são soluções obtidas no terreno de teorias de gauge *abelianas* definidas em um espaço-tempo (1+2)-dimensional, nas quais há um campo de gauge e um campo escalar complexo; por fim, os monopólos magnéticos são sólitons em três dimensões, portanto, são obtidos através de teorias de gauge *não-abelianas* (1+3)-dimensionais, caracterizadas pela presença de um tripleto de campos de gauge e um tripleto de campos escalares reais.

Em particular, vórtices são soluções radialmente simétricas construídas no âmbito de teorias de gauge abelianas (1+2)-dimensionais, ou seja, são estruturas estáticas que possuem simetria rotacional, oriundas de um cenário planar caracterizado pela presença de um campo de gauge. Portanto, vórtices topológicos (carga topológica não-nula) surgem a partir da quebra espontânea da simetria de gauge local [10, 11].

O conceito de simetria é de extrema importância para as teorias físicas. De forma geral, podemos dizer que um sistema é simétrico se ele não muda as suas propriedades e/ou características frente a alterações dos parâmetros que o descrevem. Outra maneira de se conceber

o conceito de simetria é pensar que um sistema é simétrico se for possível submetê-lo a uma transformação e este conservar a sua forma inicial após essa transformação. Levando em consideração as leis da física, podemos submeter as suas equações a transformações relacionadas a translações e a rotações, contudo, após esse processo, se elas apresentarem a mesma forma inicial, dizemos que elas são simétricas em relação a essas transformações. Como exemplo, temos a mecânica newtoniana que possui a transformação de Galileu como simetria fundamental.

Pode-se dizer que um sistema possui sua simetria quebrada quando as alterações promovidas nele alteram suas propriedades e/ou características. Fenômenos deste tipo aparecem em modelos cosmológicos, onde a quebra de simetria foi a responsável pelo surgimento de defeitos topológicos no universo primordial, que seriam, principalmente, cordas cósmicas e monopolos magnéticos [12].

Em teorias de campos, a quebra de simetria espontânea é definida como aquela em que a densidade de lagrangeana é simétrica sob a ação de um determinado grupo de transformações, mas o estado de menor energia, o vácuo, não é.

Dando continuidade, o conceito de vórtices é encontrado em vários campos da Física. Dentro da mecânica dos fluidos, ele aparece em teorias fluidodinâmicas; nesse contexto, ele surge quando uma determinada região do fluido descreve um movimento circular estacionário, ou aproximadamente estacionário, em torno de um eixo central. Na cosmologia, ele se fez presente na *Teoria Cosmológica de Descartes* [13] do século XVII, um dos primeiros modelos cosmológicos envolvendo vórtices que se tem conhecimento; dentro dessa teoria, Descartes atribuía um movimento em vórtices, em torno do sol, aos planetas e aos outros corpos do sistema solar. No domínio da física de matéria condensada, a investigação de vórtices estáticos ganha relevância com a descoberta dos supercondutores tipo II, em especial, graças ao talento de Abrikosov [14], que no ano de 1957 consegue descrever esses supercondutores; nessa descrição ele obtém soluções não-relativísticas com simetria rotacional.

Em especial, o estudo sobre vórtices emerge nas teorias de campos motivados pela existência dessas estruturas em sistemas eletromagnéticos, nesse sentido, vórtices estáveis foram estudados pela primeira vez no cenário mais simples da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, por Nielsen e Olesen [15]. Posteriormente, utilizando o modelo *Higgs Abelian*, Schaposnik e de Vega [16] também buscaram soluções com esse tipo de configuração.

Vórtices também foram obtidos no cenário da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs. Nesse contexto, levando em conta a quebra espontânea de simetria, Jackiw, Weinberg e Lee [17, 18] obtiveram soluções que satisfaziam um conjunto de equações auto-duais, i.e., as equações BPS.

Recentemente, vórtices BPS também foram investigados em conexão com *nonstandard models* [19–23], com as soluções resultantes sendo usadas como uma tentativa de explicar algumas questões cosmológicas [24–26].

Dando prosseguimento a esses cenários, é interessante considerar a existência de vórtices estáticos bem comportados que surgem dentro do modelo  $CP(N - 1)$  na presença do campo de gauge, principalmente devido à estreita relação fenomenológica entre tal teoria e a teoria 4-dimensional de Yang-Mills-Higgs, i.e., o primeiro mapeia algumas propriedades fenomenológicas do segundo [27–30]. Nessa lógica, em uma investigação recente, soluções radialmente simétricas decorrentes de uma teoria  $CP(2)$  planar, dotada pelo termo de Maxwell, foram encontradas por Loginov [31]. Neste trabalho, no entanto, as configurações de vórtice foram obtidas diretamente da resolução das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange (as soluções resultantes, portanto, não saturando o limite de Bogomol’nyi).

Na sequência, em [32] são introduzidos os vórtices BPS (de primeira ordem) inerentes à supramencionada teoria  $CP(2)$  com o termo de Maxwell. Neste trabalho é definido um limite inferior para a energia, de onde se obtém as correspondentes equações BPS. Os perfis auto-duais são construídos numericamente por meio do processo de linearização das equações de primeira ordem, as estruturas resultantes apresentam a forma topológica típica.

Embasada pelas informações apresentadas, esta dissertação tem como objetivo principal a ampliação dos trabalhos citados, ou seja, a busca de soluções BPS planares oriundas de uma teoria  $CP(2)$  na presença do termo de Chern-Simons.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: Nos capítulos 2 e 3, apresentamos revisões sobre a obtenção de vórtices estáticos no âmbito da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [16] e Chern-Simons-Higgs [17, 18], respectivamente. O objetivo dessas revisões é introduzir o formalismo BPS e as teorias eletrodinâmicas que se farão presentes nos capítulos posteriores.

Os vórtices obtidos nesses capítulos são topológicos, ou seja, são caracterizados por uma carga topológica não-nula, eles são obtidos através da resolução numérica das equações diferenciais de primeira ordem, conhecidas como equações BPS. Por outro lado, esses vórtices

estáticos também podem ser obtidos através da resolução das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. Nesse sentido, eles são classificados como não-BPS, sendo as informações sobre suas energias bastante restritas, i.e., pouco se pode concluir sobre elas.

No capítulo quatro, abordamos o modelo  $CP(2)$  na presença do termo de Maxwell-Higgs [32]. Na primeira seção do capítulo, introduzimos o modelo de calibre  $CP(N-1)$ , apresentando algumas definições e convenções básicas. Neste ponto, nós particularizamos nossa investigação focando em campos independentes do tempo que deem origem a configurações radialmente simétricas.

Na segunda seção, procuramos desenvolver uma estrutura consistente de primeira ordem através da aplicação do método BPS, neste sentido, nós manipulamos a relação para a densidade de energia do sistema a fim de estabelecer um limite inferior para a energia total correspondente, levando em consideração a restrição para o potencial que permite a construção de tal estrutura. Verificamos que este limite é atingido (limite de Bogomol'nyi) quando as funções que descrevem os campos satisfazem um conjunto de equações de primeira ordem, que são as equações BPS. Finalizando a seção, nós calculamos o valor geral para o mínimo da energia total, que corresponde à energia das configurações BPS.

Na última seção, investigamos a maneira como as expressões de primeira ordem, definidas anteriormente, geram soluções legítimas. Nesse processo, levamos em consideração dois casos especiais e equivalentes, passíveis da obtenção de soluções do tipo sóliton. Desse modo, determinamos o potencial que define o estado de vácuo do modelo, e resolvemos as equações de primeira ordem, numericamente, via condições de contorno convenientes. Como resultado, obtemos configurações regulares, possuidoras de energia finita.

No capítulo cinco, nós finalmente trabalhamos com o modelo  $CP(2)$  no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons [33]. O desenvolvimento do capítulo segue a mesma sistemática descrita para o capítulo quatro. Também neste caso, nós construímos uma estrutura de primeira ordem através da implementação do método BPS, que nos permite obter os vórtices BPS gerados pela teoria, assim como, suas respectivas energias. Tais configurações apresentam a forma topológica típica.

Ao final, resumimos os resultados contidos neste trabalho e apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

As teorias apresentadas neste trabalho são definidas em um espaço-tempo (1+2)-dimensional. Os índices gregos denotam as coordenadas de espaço-tempo ( $\mu, \nu = 0, 1, 2$ ), enquanto que os índices latinos correspondem apenas a coordenadas espaciais ( $i, j = 1, 2$ ). A métrica utilizada é  $\eta^{\mu\nu} = (+--)$ , o campo de gauge é dado por  $A^\mu = (A^0, A_x, A_y)$ , temos também  $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ . Além disso, utilizamos o sistema de unidades naturais ( $c = \hbar = 1$ ).

# Capítulo 2

## Vórtices no modelo de Maxwell-Higgs

Vórtices são estruturas planares, dotadas de simetria rotacional e energia total finita. Eles podem ser obtidos via as equações de Euler-Lagrange. No entanto, em circunstâncias especiais, tais estruturas também podem ser obtidas via um conjunto de equações de primeira ordem, denominadas de *equações BPS*. Nestas circunstâncias, as soluções resultantes possuem energia mínima. Os vórtices obtidos a partir destas equações de primeira ordem são denominados *vórtices BPS*.

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre a obtenção de vórtices BPS no contexto da eletrodinâmica Maxwell-Higgs. Neste sentido, abordamos o modelo de Maxwell-Higgs Abelian, o qual é dotado de um acoplamento mínimo entre os campos de Higgs e gauge, estando sob a influência de um potencial do tipo  $\lambda|\phi|^4$ .

### 2.1 O modelo de Maxwell-Higgs

A densidade de lagrangeana para o modelo de Maxwell-Higgs Abelian é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{(D_\mu\phi)}(D^\mu\phi) - V(|\phi|), \quad (2.1)$$

na qual  $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi$  é a derivada covariante,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  representa o tensor do campo eletromagnético,  $A^\mu$  e  $\phi$  são, respectivamente, o campo de gauge (vetorial) e o campo de Higgs (escalar). Além disso,  $V(|\phi|)$  é o potencial de auto-interação para o setor escalar, ou seja, ele descreve a interação do campo escalar consigo próprio. No representante caso,  $V(|\phi|)$

vale

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.2)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento e  $v$  representa o valor esperado do campo de Higgs no vácuo.

As equações de movimento obtidas a partir de (2.1) são

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu, \quad (2.3)$$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}} V(|\phi|), \quad (2.4)$$

onde

$$J^\mu = ie \left[ \bar{\phi} (D^\mu \phi) - \phi (\overline{D^\mu \phi}) \right] \quad (2.5)$$

representa o 4-vetor densidade de corrente (conservado, i.e.,  $\partial_\mu J^\mu = 0$ ).

A componente puramente temporal ( $\mu = 0$ ) de (2.3) representa a lei de Gauss do modelo de Maxwell-Higgs (2.1). Para o caso de campos independentes do tempo, esta equação pode ser escrita como:

$$\partial_j \partial^j A^0 = -2e^2 |\phi|^2 A^0, \quad (2.6)$$

na qual  $j = 1, 2$  abrange apenas as coordenadas espaciais. Por outro lado, para  $\mu = i$  ( $i = 1, 2$ ) e, novamente, supondo campos independentes do tempo, (2.3) resulta na lei de Ampère:

$$\epsilon_{ij} \partial_j B = -J_i, \quad (2.7)$$

na qual  $B$  é o campo magnético, e

$$J_i = ie \left[ \bar{\phi} (D_i \phi) - \phi (\overline{D_i \phi}) \right] = ie (\bar{\phi} \partial_i \phi - \phi \partial_i \bar{\phi}) + 2e^2 A^i |\phi|^2 \quad (2.8)$$

representa a componente espacial do 4-vetor densidade de corrente.

A partir de (2.6), verifica-se a possibilidade de fixação do gauge temporal  $A^0 = 0$ , dado que esta escolha satisfaz identicamente a supramencionada lei de Gauss. Neste caso, vale frisar, as configurações resultantes apresentarão carga total nula.

Vórtices são estruturas planares possuidoras de simetria rotacional [4], tais estruturas são descritas pelo seguinte ansatz

$$\phi(r, \theta) = vg(r)e^{in\theta}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}(r, \theta) = -\frac{\hat{\theta}}{er} (a(r) - n), \quad (2.10)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares,  $n$  é a *vorticidade* da configuração ( $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ), e  $a(r)$  e  $g(r)$  são funções escalares regulares. Neste caso, em virtude do ansatz (2.9) e (2.10), o campo magnético pode ser escrito como:

$$B(r) = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr}, \quad (2.11)$$

cujo fluxo é perpendicular ao plano espacial no qual o vórtice está contido.

Em se tratando da vorticidade, é válido mencionar que os valores assumidos por ela derivam do fato de que o campo de Higgs deve ser univocamente determinado, ou seja,

$$\phi(r, \theta = 0) = \phi(r, \theta = 2\pi). \quad (2.12)$$

Portanto, utilizando o ansatz (2.9), a relação acima assume a forma:

$$vg(r) = vg(r)e^{in2\pi}, \quad (2.13)$$

que, simplificada, resulta em

$$1 = \cos(n2\pi). \quad (2.14)$$

Conclui-se então os possíveis valores para a vorticidade,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ , porém, o valor  $n = 0$  pode ser descartado, visto que, como veremos adiante, ele leva a um valor nulo para a energia total do sistema, o que não nos interessa, pois corresponde a uma solução trivial.

## 2.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de Maxwell-Higgs

A implementação do formalismo BPS passa pelo processo minimização da energia total do modelo em análise. O ponto de partida é o tensor de energia-momento, que pode ser expresso como:

$$T_{\lambda\rho} = \frac{2}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta^{\lambda\rho}} (\sqrt{-\eta} \mathcal{L}). \quad (2.15)$$

Assim, para o modelo de Maxwell-Higgs (2.1), o tensor de energia-momento vale:

$$T_{\lambda\rho} = -F_{\mu\lambda}F^\mu{}_\rho + \overline{(D_\lambda\phi)}(D_\rho\phi) + \overline{(D_\rho\phi)}(D_\lambda\phi) - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{L}, \quad (2.16)$$

do qual resulta a densidade de energia do modelo, i.e.,

$$\varepsilon(r) \equiv T_{00} = \frac{1}{2}B^2 + \overline{(D_i\phi)}(D_i\phi) + V(|\phi|). \quad (2.17)$$

A partir da substituição do ansatz (2.9) e (2.10), os termos presentes em (2.17), podem ser escritos como:

$$\overline{(D_i\phi)}(D_i\phi) = v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right], \quad (2.18)$$

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 = \frac{\lambda^2}{2}v^4(g^2 - 1)^2, \quad (2.19)$$

de forma que, a densidade de energia resulta em

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right] + \frac{\lambda^2}{2}v^4(g^2 - 1)^2, \quad (2.20)$$

na qual o campo magnético foi escrito como em (2.11).

A energia total do modelo é, por definição, obtida a partir da integração da densidade de energia sobre todo o espaço (neste caso, o plano bidimensional), i.e.,

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^\infty \varepsilon(r) r dr = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + \lambda^2 v^4 (g^2 - 1)^2 \right] r dr + \\ &+ 2\pi \int_0^\infty v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right] r dr. \end{aligned} \quad (2.21)$$

No intuito de implementarmos o método de Bogomol'nyi [5], utilizaremos as seguintes identidades:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + \lambda^2 v^4 (g^2 - 1)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp \lambda v^2 (g^2 - 1) \right]^2 \pm \lambda v^2 \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) (g^2 - 1), \quad (2.22)$$

$$v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right] = v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm 2v^2 \frac{ag}{r} \frac{dg}{dr}, \quad (2.23)$$

a partir das quais, a expressão para a energia total (2.21) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
E &= 2\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp \lambda v^2 (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} r dr \pm \\
&\quad \pm 2\pi v^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left[ \frac{\lambda}{e} (g^2 - 1) \frac{da}{dr} + a \left( 2g \frac{dg}{dr} \right) \right] r dr.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Em particular, o integrando do último termo assumirá a forma de uma derivada total se e somente se

$$\lambda = e, \tag{2.25}$$

assim, a expressão (2.24) pode ser reescrita na forma:

$$E = 2\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp e v^2 (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} r dr + E_{bps}, \tag{2.26}$$

na qual (2.24) é dado por

$$\begin{aligned}
E_{bps} &= 2\pi \int_0^\infty \varepsilon_{bps}(r) r dr = \pm 2\pi v^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [a(g^2 - 1)] r dr = \\
&= \pm 2\pi v^2 [a(g^2 - 1)]_0^\infty,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e

$$\varepsilon_{bps}(r) = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} [a(g^2 - 1)]. \tag{2.28}$$

A partir deste ponto, faz-se necessário o cálculo do valor definido em (2.27). Para tanto, é preciso especificar as condições de contorno a serem satisfeitas pelas funções escalares  $a(r)$  e  $g(r)$ , tanto na origem quanto no limite assintótico.

Na origem, o campo de Higgs (2.9) e o 3-vetor potencial  $\mathbf{A}$  (2.10) precisam ser, respectivamente, unívocos e regulares. Portanto as funções  $a(r)$  e  $g(r)$  devem satisfazer

$$a(r \rightarrow 0) \rightarrow n \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \tag{2.29}$$

Já no limite assintótico ( $r \rightarrow \infty$ ), a densidade de energia (2.20) deve satisfazer  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , uma vez que esta condição garante a ocorrência de um valor finito para a energia total. Logo, no regime  $r \rightarrow \infty$ ,  $a(r)$  e  $g(r)$  devem verificar

$$a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \tag{2.30}$$

Assim, usando as condições (2.29) e (2.30), a energia em (2.27) pode ser calculada explicitamente como:

$$E_{bps} = \pm 2\pi v^2 n = 2\pi v^2 |n|, \quad (2.31)$$

a partir da qual se pode propor a seguinte relação (vide (2.26)):

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp ev^2 (g^2 - 1) \right]^2 r dr + \\ &+ 2\pi \int_0^\infty v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 r dr + E_{bps} \geq 2\pi v^2 |n|. \end{aligned} \quad (2.32)$$

O resultado em (2.31) representa, desta forma, um limite inferior para o valor da energia total do sistema (limite de Bogomol'nyi). Assim, quando  $a(r)$  e  $g(r)$  satisfazem:

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (2.33)$$

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.34)$$

a energia total das configurações finais assumirá o mínimo valor possível, i.e.,

$$E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|. \quad (2.35)$$

Neste sentido, as equações diferenciais de primeira-ordem (2.33) e (2.34) são chamadas de equações BPS, enquanto (2.28) e (2.35) representam, respectivamente, a densidade de energia e a energia total das soluções BPS.

Vale frisar, que o valor da energia total das configurações BPS resulta quantizado pelos valores inteiros da vorticidade  $n$ .

## 2.3 Soluções BPS

Nesta seção, serão apresentadas as soluções BPS para os campos  $a(r)$  e  $g(r)$ , obtidas a partir das equações (2.33) e (2.34) via as condições de contorno (2.29) e (2.30).

Entretanto, antes desta apresentação, é necessário discutir alguns aspectos inerentes às próprias configurações de primeira-ordem. Esta discussão passa pelo processo de linearização das equações BPS, a partir do qual são obtidas soluções analíticas aproximadas, válidas nos limites  $r \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow \infty$ .

A partir deste ponto, por uma questão de simplicidade, serão consideradas apenas os valores positivos da vorticidade  $n$  (i.e.,  $n = 1, 2, 3, \dots$ )  $n > 0$  ou, de maneira equivalente, apenas os sinais superiores (positivos) das expressões (2.33) e (2.34).

Assim, as equações a serem consideradas são:

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (2.36)$$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}. \quad (2.37)$$

O processo de linearização busca definir a dependência funcional dos campos no entorno das condições de contorno. Para tanto, tendo em mente as condições (2.29), os campos  $a(r)$  e  $g(r)$ , quando próximos da origem, podem ser decompostos via

$$a(r) \approx n - \delta a(r), \quad g(r) \approx 0 + \delta g(r), \quad (2.38)$$

nas quais  $a(r)$  e  $g(r)$  são pequenas variações, submetidas às suas próprias condições de contorno, a saber:

$$\delta a(r \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad \delta g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

Na sequência, substituindo as expressões (2.38) nas equações (2.36) e (2.37), e considerando apenas as contribuições lineares em  $\delta$ , resulta, respectivamente em:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \delta a = e^2 v^2, \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dr} \delta g = \frac{n \delta g}{r}. \quad (2.41)$$

As soluções destas equações são

$$\delta g(r) = G_0 r^n, \quad (2.42)$$

$$\delta a(r) = \frac{e^2 v^2}{2} r^2, \quad (2.43)$$

onde  $G_0$  é uma constante real positiva.

Por conseguinte, os campos em (2.38) resultam em:

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2}{2} r^2, \quad g(r) \approx G_0 r^n, \quad (2.44)$$

soluções estas que são válidas apenas no limite  $r \rightarrow 0$ .

De maneira análoga, tendo em mente as condições (2.30), os campos  $a(r)$  e  $g(r)$ , quando no limite  $r \rightarrow \infty$ , podem ser decompostos como:

$$a(r) \approx 0 + \delta a(r), \quad g(r) \approx 1 - \delta g(r), \quad (2.45)$$

nas quais  $a(r)$  e  $g(r)$  devem satisfazer

$$\delta a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \delta g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (2.46)$$

Novamente, substituindo (2.45) em (2.36) e (2.37), e, considerando apenas as contribuições lineares em  $\delta$ , resulta em um sistema de equações diferenciais acopladas, a saber:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \delta a = -2e^2 v^2 \delta g, \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dr} \delta g = -\frac{\delta a}{r}, \quad (2.48)$$

cujas soluções são:

$$\delta g(r) = G_\infty e^{-m_g r}, \quad (2.49)$$

$$\delta a(r) = \sqrt{2} e v G_\infty r e^{-m_a r}, \quad (2.50)$$

Assim, os campos em (2.45) podem ser reescritos como:

$$a(r) \approx \sqrt{2} e v G_\infty r e^{-m_a r}, \quad g(r) \approx 1 - G_\infty e^{-m_g r}, \quad (2.51)$$

nas quais

$$m_g = m_a = \sqrt{2} e v \quad (2.52)$$

representam as massas associadas aos bósons presentes na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs (2.1). Neste caso, a relação  $m_g/m_a = 1$  define o limite de Bogomol'nyi, i.e., o limite no qual é possível a implementação do formalismo BPS. Além disso, a constante  $G_\infty$  é definida como positiva e real.

Na sequência, são apresentadas as soluções numéricas obtidas das equações de primeira ordem (2.36) e (2.37) via as condições de contorno (2.29) e (2.30), para  $n = 1$ ,  $n = 3$  e  $n = 5$  (i.e., os sinais superiores nas equações de primeira ordem). Para simplificar, adotamos  $e = v = 1$ .

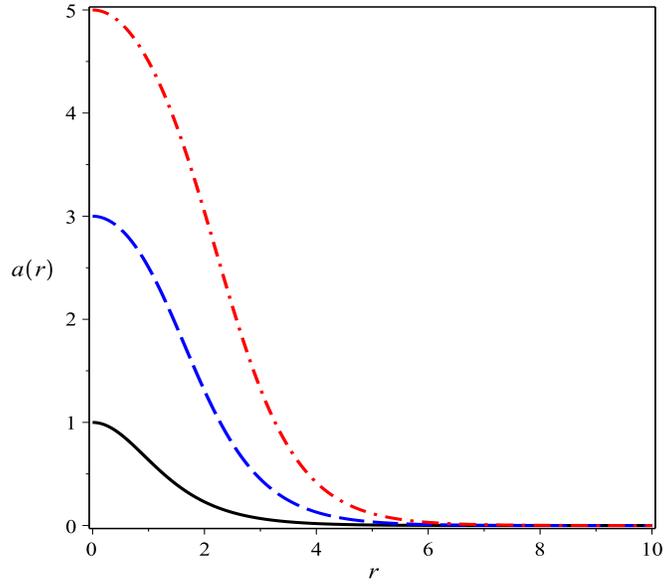


Figura 2.2: Solução numérica para  $a(r)$ . Convenções conforme a Figura 2.1. Neste caso vale  $a(r \rightarrow 0) \rightarrow n$ .

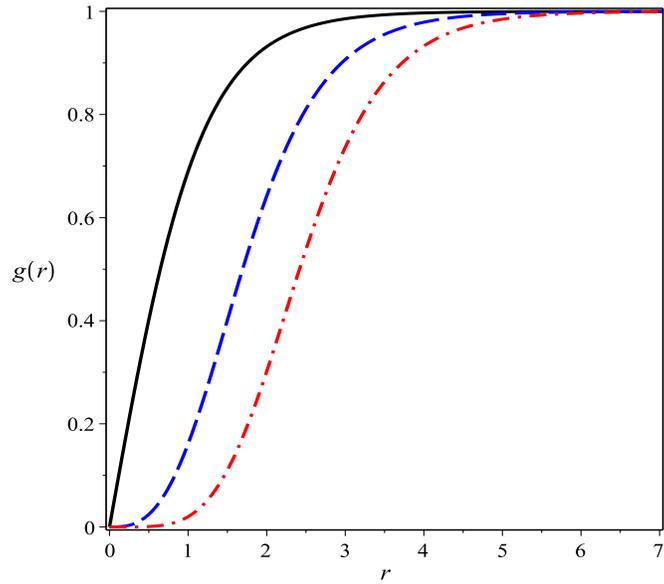


Figura 2.1: Solução numérica para  $g(r)$  obtida a partir de ( 2.36) e (2.37) via (2.29) e (2.30), para  $v = e = 1$ . As vorticidades são dadas por:  $n = 1$  (curva preta sólida),  $n = 3$  (curva azul tracejada), e  $n = 5$  (curva vermelha ponto-tracejada). A solução aproxima-se monotonicamente do contorno.

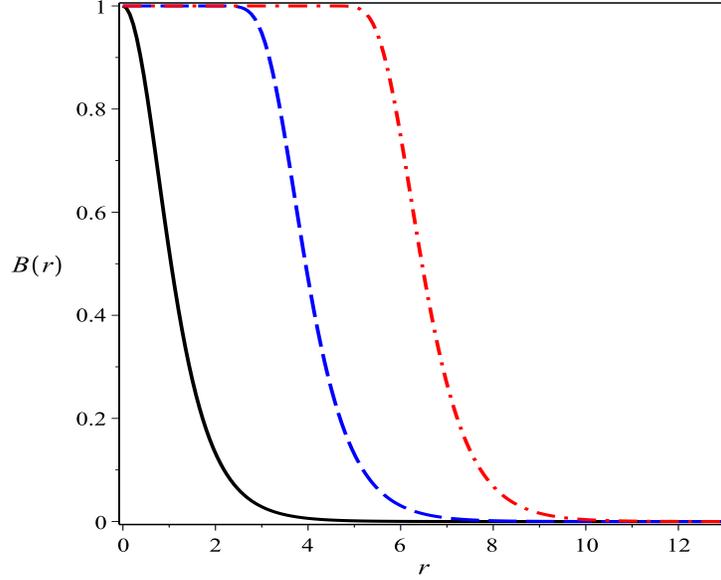


Figura 2.3: Solução numérica para o campo magnético  $B(r)$  construída a partir de (2.11). Convenções conforme a Figura 2.1. A configuração final resulta em um *lump* centrado na origem.

Na Figura 2.1 é representada a solução numérica para a função escalar  $g(r)$ , a partir da qual se verifica a forma monotônica como esta solução obedece às respectivas condições de contorno. De fato, a monotonicidade é uma propriedade esperada das soluções para as funções escalares associadas aos vórtices.

A Figura 2.2 mostra a solução numérica para a função escalar  $a(r)$ . Neste caso, vale  $a(r \rightarrow 0) \rightarrow n$ , com  $n = 1$  (curva preta sólida),  $n = 3$  (curva azul tracejada), e  $n = 5$  (curva vermelha ponto-tracejada), a respectiva solução obedecendo, também monotonicamente, à condição  $a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

A solução numérica para o campo magnético  $B(r)$  é mostrada na Figura 2.3. Construída a partir da equação (2.11), a solução satisfaz  $B(r \rightarrow 0) \rightarrow v^2 e = 1$  (vide a solução aproximada para  $a(r)$  em (2.44)) e  $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , esta última verificando a condição de energia total finita, i.e.,  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

Por fim, a Figura 2.4 mostra a solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  construída a partir da equação (2.28),  $n = 1$  (curva preta sólida),  $n = 3$  (curva azul tracejada), e  $n = 5$  (curva vermelha ponto-tracejada); e  $v = e = 1$ . Para  $n = 1$  a solução é um *lump* centrado

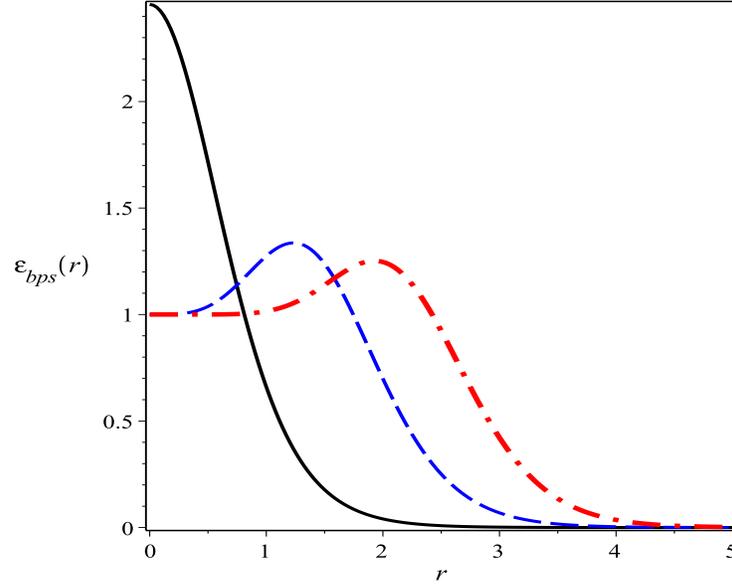


Figura 2.4: Solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  obtida via (2.28). Convenções conforme a Figura 2.1. Para  $n = 1$ , a solução é um *lump* centrado na origem, enquanto que para  $n \neq 1$ , as configurações são anéis centrados na origem .

na origem, enquanto que para  $n \neq 1$ , as configurações finais são anéis centrados na origem, cujos raios e amplitudes, respectivamente, aumentam e diminuem conforme o próprio valor da vorticidade  $n$ . Em particular, a condição  $\varepsilon_{bps}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  é automaticamente satisfeita. Além disso, utilizando (2.44) podemos constatar que nas proximidades da origem a densidade de energia (2.28) assume a forma:  $\varepsilon_{bps}(r) \approx 1 + (3/2)n^2r^{2n-2} - (3/2)r^{2n}$ , na qual adotamos  $G_0 = 3/4$  (conforme a escala utilizada para as soluções). Desta maneira, em  $r = 0$ , os seguintes comportamentos são verificados:  $\varepsilon_{bps}(n = 1, r = 0) = 5\sqrt{2} = 2,5$ , e  $\varepsilon_{bps}(n \neq 1, r = 0) = 1$ .

# Capítulo 3

## Vórtices no modelo de Chern-Simons-Higgs

### 3.1 O modelo de Chern-Simons-Higgs

No capítulo anterior, realizamos um estudo sobre as configurações de vórtices geradas dentro do cenário da eletrodinâmica Maxwell-Higgs, de onde obtivemos, como resultados, apenas configurações apresentando carga elétrica total nula. Entramos agora no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons, que é, por definição, uma teoria planar, da qual temos a possibilidade de encontrar soluções de vórtices apresentando carga total não nula. A densidade de lagrangeana para o modelo de Chern-Simons-Higgs Abeliano é definida por

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho} + \overline{(D_\mu\phi)}(D^\mu\phi) - V(|\phi|), \quad (3.1)$$

na qual  $\kappa$  é o parâmetro de Chern-Simons, uma constante de acoplamento adimensional. Neste caso,  $F_{\mu\rho}$  e  $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi$  são definidos como no capítulo anterior. Além disso, o potencial  $V(|\phi|)$ , que descreve a auto-interação do campo escalar, é dado por

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (3.2)$$

em que  $\lambda$  é uma constante de acoplamento adimensional.

Através de (3.2) é possível verificar a existência de dois estados de vácuos ( $V = 0$ ) distintos: o primeiro, um vácuo simétrico, ocorre para  $|\phi| = 0$  ( $V(|\phi| = 0) = 0$ ); o segundo, um vácuo

assimétrico, ocorre para  $|\phi| = v$  ( $V(|\phi| = v) = 0$ ). Como consequência, o modelo suporta dois tipos de configurações de vórtices: os vórtices *topológicos*, associados ao estado de vácuo assimétrico, e os vórtices *não-topológicos*, associados ao estado de vácuo simétrico.

As equações de Euler-Lagrange são

$$\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} + J^\rho = 0, \quad (3.3)$$

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} V(|\phi|) = 0, \quad (3.4)$$

onde o 4-vetor densidade de corrente  $J^\rho$  é dada por (2.5).

A partir da componente temporal ( $\rho = 0$ ) de (3.3) obtemos a lei de Gauss do modelo. Para o caso de campos independentes do tempo, esta equação é escrita como

$$\kappa B = -e^2 |\phi|^2 A^0, \quad (3.5)$$

da qual podemos observar a impossibilidade da escolha do gauge temporal  $A^0 = 0$ , pelo motivo deste não mais satisfazer a própria lei de Gauss. Portanto, no presente caso, as configurações estáticas resultantes serão possuidoras, não somente, de fluxo magnético não nulo, como também de carga elétrica total não nula, que é proporcional ao fluxo magnético. Esta impossibilidade da escolha do gauge temporal é uma característica geral dos modelos de Chern-Simons.

Por outro lado, para  $\rho = i$  ( $i = 1, 2$ ), também supondo campos independentes do tempo, (3.3) resulta na lei de Ampère:

$$2k \epsilon_{ij} \partial_j A_0 = J_i, \quad (3.6)$$

com  $J_i$  dado pela equação (2.8).

Com o intuito de investigar as configurações de vórtices que o modelo suporta, buscaremos por soluções rotacionalmente simétricas, tais soluções são descritas pelo ansatz (2.9) e (2.10). Em virtude disto, o campo magnético  $B(r)$  continua a ser dado pela equação (2.11).

Levando em consideração (3.5), podemos expressar o potencial elétrico em termos do campo magnético, i.e.,

$$A^0 = -\frac{\kappa B}{e^2 |\phi|^2} \quad (3.7)$$

## 3.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de Chern-Simons-Higgs

De forma análoga ao capítulo anterior, busca-se nesta seção um conjunto de equações acopladas de primeira ordem (equações BPS) para o modelo de Chern-Simons-Higgs. Estas equações são obtidas via o método BPS, que consiste na minimização da energia total do sistema. Neste sentido, consideremos o tensor energia momento referente à densidade de lagrangeana (3.1), obtido via (2.15). Este tensor é dado por

$$T_{\lambda\rho} = \overline{(D_\lambda\phi)}(D_\rho\phi) + \overline{(D_\rho\phi)}(D_\lambda\phi) - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{L}_{ntop}, \quad (3.8)$$

onde

$$\mathcal{L}_{ntop} = \overline{(D_\mu\phi)}(D^\mu\phi) - V(|\phi|) \quad (3.9)$$

é a densidade lagrangeana não-topológica. Dessa forma, a densidade de energia do sistema é escrita como

$$\varepsilon \equiv T_{00} = 2e^2|\phi|^2(A_0)^2 - \mathcal{L}_{ntop} \quad (3.10)$$

Utilizando a lei de Gauss (3.5) e substituindo o ansatz (2.9) e (2.10) em (3.10), obtemos

$$\varepsilon(r) = \frac{\kappa^2}{e^2v^2g^2} \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right] + \frac{\lambda^2v^6}{4}g^2(g^2 - 1)^2, \quad (3.11)$$

na qual o campo magnético foi escrito como em (2.11).

A energia é então dada como a integral da densidade de energia sobre todo o espaço, i.e.,

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^\infty \left[ \frac{\kappa^2}{e^2v^2g^2} \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{\lambda^2v^6}{4}g^2(g^2 - 1)^2 \right] r dr + \\ &+ 2\pi \int_0^\infty v^2 \left[ \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right] r dr. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Implementamos agora o método de Bogomol'nyi. Neste sentido, escrevemos a energia como uma soma de termos quadráticos, desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{\kappa^2}{e^2v^2g^2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp \frac{e\lambda v^4}{2\kappa} g^2(g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} r dr \pm \\ &\pm 2\pi v^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left[ \frac{\lambda\kappa}{e^2} (g^2 - 1) \frac{da}{dr} + 2ag \frac{dg}{dr} \right] r dr. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Em particular, o integrando do último termo assume a forma de uma derivada total se e somente se

$$\lambda = \frac{e^2}{\kappa}, \quad (3.14)$$

desse modo, a expressão (3.13) pode ser reescrita como

$$E = 2\pi \int_0^\infty \frac{\kappa^2}{e^2 v^2 g^2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp \frac{e^3 v^4}{2\kappa^2} g^2 (g^2 - 1) \right]^2 r dr + \quad (3.15)$$

$$+ 2\pi \int_0^\infty v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 r dr + E_{bps} \quad (3.16)$$

na qual o último termo é expresso por

$$E_{bps} = \pm 2\pi v^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [a(g^2 - 1)] r dr = \pm 2\pi v^2 [a(g^2 - 1)]_0^\infty, \quad (3.17)$$

e

$$\varepsilon_{bps}(r) = \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} [a(g^2 - 1)], \quad (3.18)$$

A resolução de (3.17) requer a especificação das condições de contorno impostas às funções  $a(r)$  e  $g(r)$ , tanto na origem quanto no limite assintótico. Contudo, na origem, estas funções continuam a satisfazer a condição (2.29), pois os campos, escalar e vetorial, descritos em (2.9) e (2.10), precisam ser, respectivamente, unívocos e regulares em  $r = 0$ . Do mesmo modo, levando em consideração a densidade de energia (3.11), para que a condição de energia total finita ( $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ ) seja satisfeita, as funções  $a(r)$  e  $g(r)$  deverão obedecer à condição (2.30). Desta forma, a equação (3.17) resulta em

$$E_{bps} = \pm 2\pi v^2 n = 2\pi v^2 |n|. \quad (3.19)$$

Portanto, podemos reescrever a equação (3.15) da seguinte forma:

$$E = E_{bps} + 2\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{\kappa^2}{e^2 v^2 g^2} \left[ \left( \frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) \mp \frac{e^3 v^4}{2\kappa^2} g^2 (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[ \frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\} r dr \geq 2\pi v^2 |n| \quad (3.20)$$

O resultado em (3.19) representa um limite inferior para o valor da energia total do sistema, i.e., o limite de Bogomol'nyi. Então, quando  $a(r)$  e  $g(r)$  satisfazem

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm \frac{e^3 v^4}{2\kappa^2} g^2 (g^2 - 1), \quad (3.21)$$

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (3.22)$$

a energia total das configurações resultantes assumirá o mínimo valor possível, i.e.,

$$E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|. \quad (3.23)$$

Neste sentido, as equações (3.21) e (3.22) são as equações BPS do modelo, enquanto que (3.18) e (3.23) são, respectivamente, a densidade de energia e a energia total das soluções BPS.

Mais uma vez, podemos perceber que o valor da energia total das configurações BPS resulta quantizado pelos valores inteiros da vorticidade  $n$ .

### 3.3 Soluções BPS

Nesta seção, serão apresentadas as soluções BPS para as funções  $a(r)$  e  $g(r)$ , obtidas através das equações (3.21) e (3.22) via as condições de contorno (2.29) e (2.30). No entanto, antes de apresentarmos estas soluções, recorreremos mais uma vez ao processo de linearização das equações diferenciais em questão para construir soluções analíticas aproximadas para estas funções que sejam válidas nos limites  $r \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow \infty$ .

Para simplificar, levaremos em consideração somente os valores positivos da vorticidade  $n$ , i.e., os sinais superiores (positivos) das equações (3.21) e (3.22).

Então, as equações a serem consideradas são:

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \frac{e^3 v^4}{2\kappa^2} g^2 (g^2 - 1), \quad (3.24)$$

e

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}. \quad (3.25)$$

Em acordo com as condições (2.29), as funções  $a(r)$  e  $g(r)$ , próximas à origem, podem ser decompostos via

$$a(r) \approx n - \delta a(r), \quad g(r) \approx 0 + \delta g(r), \quad (3.26)$$

nas quais as pequenas variações  $\delta a(r)$  e  $\delta g(r)$  obedecem às condições:

$$\delta a(r \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad \delta g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Substituindo as funções (3.26) nas equações BPS (3.24) e (3.25), e considerando apenas as contribuições lineares em  $\delta$ , resulta, respectivamente, em

$$\frac{d}{dr}\delta g = \frac{n\delta g}{r}, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dr}\delta a = \frac{e^4 v^4}{2\kappa^2} (\delta g)^2 r, \quad (3.29)$$

onde o termo não-linear  $(\delta g)^2$  foi levado em consideração em (3.29) pois, para este caso específico, ele representa o menor termo a ter uma contribuição significativa. As soluções de (3.28) e (3.29) são

$$\delta g(r) = G_0 r^n. \quad (3.30)$$

$$\delta a(r) = \left( \frac{e^2 v^2}{2} G_0 \right)^2 \frac{r^{2n+2}}{(n+1)\kappa^2}, \quad (3.31)$$

onde  $G_0$  é definida como uma constante real e positiva.

Em razão disso, as funções em (3.26) resultam em

$$a(r) \approx n - \left( \frac{e^2 v^2}{2} G_0 \right)^2 \frac{r^{2n+2}}{(n+1)\kappa^2}, \quad g(r) \approx G_0 r^n. \quad (3.32)$$

De maneira semelhante, levando em consideração as condições (2.30), as funções  $a(r)$  e  $g(r)$ , no limite  $r \rightarrow \infty$ , podem ser decompostas em

$$a(r) \approx 0 + \delta a(r), \quad g(r) \approx 1 - \delta g(r), \quad (3.33)$$

nas quais, as pequenas variações obedecem a

$$\delta a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \delta g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (3.34)$$

Novamente, substituindo (3.33) em (3.24) e (3.25), e considerando apenas os termos lineares em  $\delta$ , obtemos o sistema de equações acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \delta a &= -\frac{e^4 v^4}{\kappa^2} \delta g, \\ \frac{d}{dr} \delta g &= -\frac{\delta a}{r}, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$\delta g(r) = G_\infty e^{-m_g r}, \quad (3.35)$$

$$\delta a(r) = \frac{e^2 v^2}{\kappa} G_\infty r e^{-m_a r}, \quad (3.36)$$

Assim, as funções em (3.33) resultam em

$$a(r) \approx \frac{e^2 v^2}{\kappa} G_\infty r e^{-m_a r}, \quad g(r) \approx 1 - G_\infty e^{-m_g r}. \quad (3.37)$$

nas quais

$$m_g = m_a = \frac{e^2 v^2}{\kappa} \quad (3.38)$$

são as massas associadas aos bósons presentes na eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs. Neste caso, a relação  $m_g/m_a = 1$  define o limite de Bogomol'nyi. Além disso, a constante  $G_\infty$  é definida como real e positiva.

Na sequência, são apresentadas as soluções numéricas obtidas das equações de (3.21) e (3.22) via as condições de contorno (2.29) e (2.30), para  $n = 1, n = 3$  e  $n = 5$  (i.e. os sinais superiores nas equações de primeira ordem). Para simplificar, adotamos  $\kappa = e = v = 1$ .

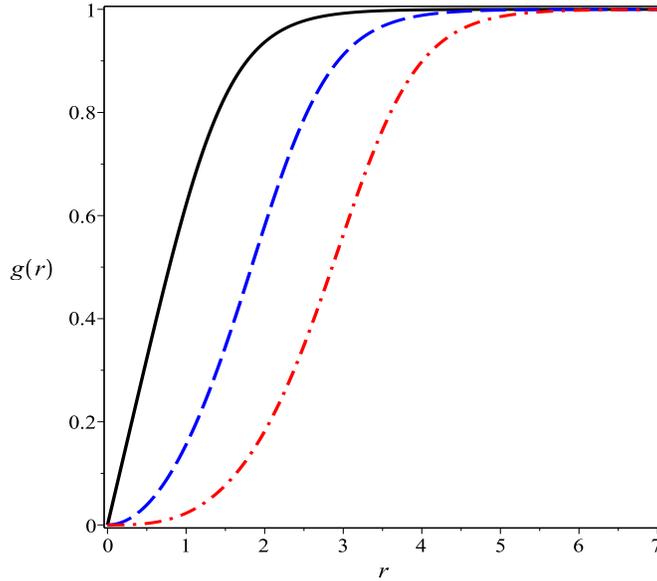


Figura 3.1: Solução numérica para  $g(r)$  obtida a partir de (3.21) e (3.22) via (2.29) e (2.30), para  $v = e = \kappa = 1$ . As vorticidades são dadas por:  $n = 1$  (curva preta sólida),  $n = 3$  (curva azul tracejada), e  $n = 5$  (curva vermelha ponto-tracejada).

A Figura 3.1 mostra a solução numérica para o campo  $g(r)$ . Observa-se que os valores máximo e mínimo atingidos pelos perfis independem da vorticidade  $n$ . Para  $r = 0$ , a função

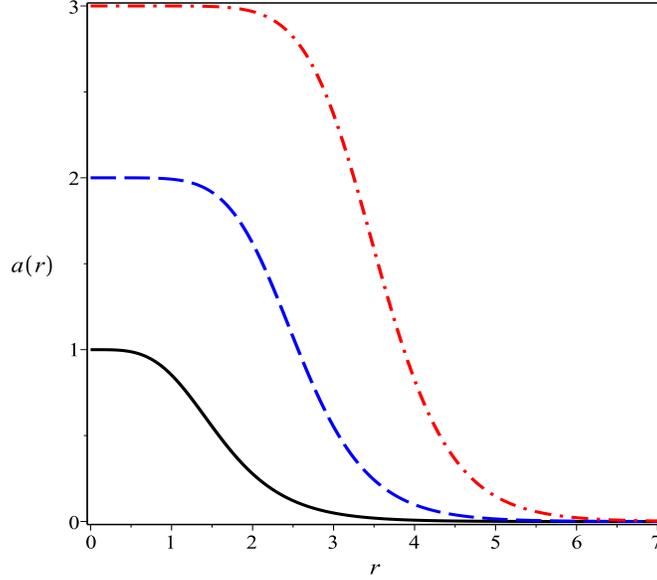


Figura 3.2: Solução numérica para  $a(r)$ . Convenções conforme a Figura 3.1.

atinge o valor nulo. A partir disto, ela cresce monotonicamente até alcançar o seu valor máximo, em  $r \rightarrow \infty$ .

A Figura 3.2 apresenta a solução numérica obtida para  $\alpha(r)$ . Como no capítulo anterior, este campo alcança o seu valor máximo, que é dado pelo valor de  $n$ , em  $r = 0$ , a partir do qual decresce monotonicamente até tornar-se nulo, em  $r \rightarrow \infty$ .

A solução numérica para o campo magnético  $B(r)$  é mostrada na Figura 3.3. As configurações resultantes formam anéis centrados na origem, cujos raios aumentam com a vorticidade. No entanto, os valores máximos não dependem de  $n$ . Para todos os perfis, temos  $B(r = 0) = 0$  e  $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

Finalmente, apresentamos a solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  (obtida via (3.18)) na Figura 3.4. As configurações finais são anéis centrados na origem, cujos raios (amplitudes) aumentam (diminuem) conforme os valores da vorticidade. Nas proximidades da origem a densidade de energia é dada pela seguinte relação:  $\varepsilon_{bps}(r) \approx (21/50)2n^2r^{2n-2} + (21/50)(1/4)r^{2n}$  (vide as soluções (3.32) e a relação (3.18)), na qual utilizamos  $G_0 = \sqrt{21/50}$  (conforme a escala utilizada para as soluções). Desta forma, em  $r = 0$ , os seguintes comportamentos são verificados:  $\varepsilon_{bps}(n = 1, r = 0) = 21/25 = 0,84$ , e  $\varepsilon_{bps}(n \neq 1, r = 0) = 0$ .

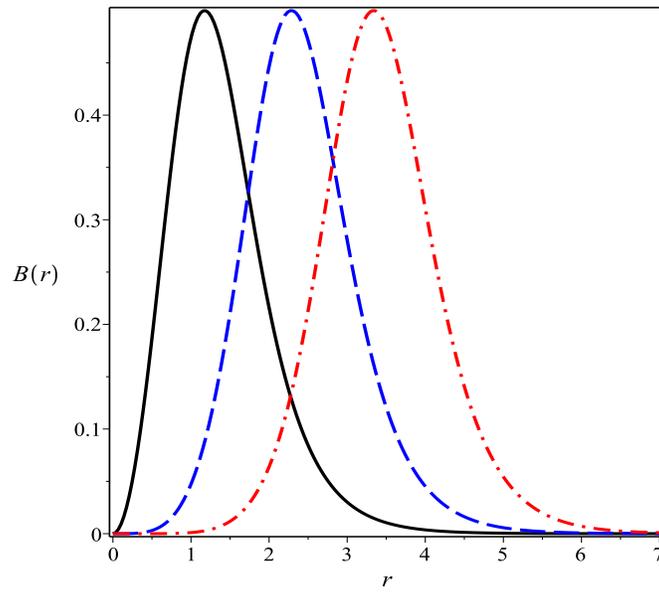


Figura 3.3: Solução numérica para o campo magnético  $B(r)$ . Convenções conforme a Figura 3.1 .

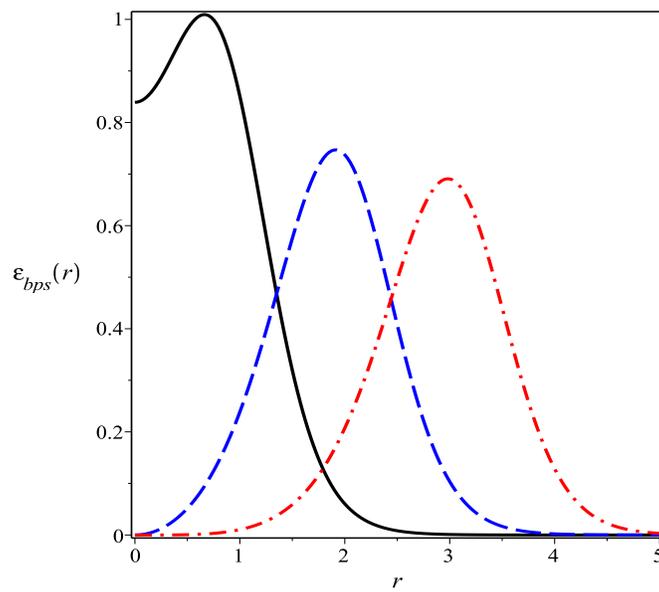


Figura 3.4: Solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . Convenções conforme a Figura 3.1 .

# Capítulo 4

## Vórtices BPS em um modelo $CP(2)$ na presença do termo de Maxwell

O interesse pelo modelo  $CP(N - 1)$  baseia-se principalmente no fato de que o modelo é um instrumento indispensável para o estudo dos efeitos não-perturbativos em modelos de quatro dimensões de Yang-Mills. Os modelos  $CP(N - 1)$  bidimensionais compartilham muitas propriedades com modelos Yang-Mills de quatro dimensões, incluindo liberdade assintótica no regime ultravioleta e acoplamento forte no regime de infravermelho. A menor dimensionalidade dos modelos  $CP(N - 1)$  facilita a análise de efeitos não-perturbativos no acoplamento forte, em comparação com modelos quadridimensionais de Yang-Mills [31].

Neste capítulo, introduzimos o modelo  $CP(2)$ . Este modelo se origina do modelo geral  $CP(N - 1)$ , no qual considera-se  $N = 3$ , onde o valor de  $N$  representa o número de componentes atribuídas ao campo escalar.

### 4.1 O modelo $CP(N - 1)$ na presença do termo de Maxwell-Higgs

Neste capítulo, consideramos o modelo de calibre  $CP(N - 1)$ , em sua versão Abelian, com o termo de Maxwell e um potencial arbitrário, introduzido em [31]. A densidade de lagrangeana

é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{(P_{ab}D_\mu\phi_b)}(P_{ac}D^\mu\phi_c) - V(|\phi|), \quad (4.1)$$

onde  $P_{ab} = \delta_{ab} - h^{-1}\phi_a\overline{\phi_b}$  é um operador de projeção, e  $D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a - igA_\mu Q_{ab}\phi_b$  representa a derivada covariante, na qual aparece

$$Q_{ab} = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (4.2)$$

como uma matriz de carga, diagonal e real. Neste caso, o campo  $\phi_a$  é constituído pelo conjunto de  $N$  campos escalares complexos submetidos à condição:

$$\overline{\phi_a}\phi_a = h. \quad (4.3)$$

Além disso, de forma análoga aos capítulos anteriores,  $V(|\phi|)$  é o potencial de auto-interação para o campo  $\phi_a$ , a ser definido a posteriori.

Cabe destacar que os índices gregos representam uma soma de Einstein sobre as coordenadas de espaço-tempo, enquanto que, para os índices latinos repetidos, essa soma se dá sobre as coordenadas espaciais apenas.

As equações de Euler-Lagrange para os campos de gauge e escalar obtidas a partir do modelo (4.1) são

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu, \quad (4.4)$$

$$P_{ab} \left[ 2P_{bc}D_\mu(P_{cd}D^\mu\phi_d) - D_\mu D^\mu\phi_b + \frac{\partial V}{\partial\phi_b} \right] = 0, \quad (4.5)$$

onde

$$J^\mu = ig[\overline{(P_{ab}D^\mu\phi_b)}(P_{ac}Q_{cd}\phi_d) - (P_{ab}D^\mu\phi_b)\overline{(P_{ac}Q_{cd}\phi_d)}] \quad (4.6)$$

representa o 4-vetor densidade de corrente.

A lei de Gauss do modelo  $CP(N-1)$  (4.1) é obtida como a componente temporal (i.e., para  $\mu = 0$ ) de (4.4). Para configurações independentes do tempo, essa equação pode ser escrita na forma

$$\partial_j\partial^j A_0 = \rho, \quad (4.7)$$

onde

$$\rho = J^0 = -2g^2 A^0 \overline{(P_{ab}Q_{bc}\phi_c)}(P_{ac}Q_{cd}\phi_d) \quad (4.8)$$

representa a densidade de carga elétrica.

Através de (4.7) e (4.8), verifica-se a validade do gauge temporal  $A^0 = 0$ , uma vez que esta escolha satisfaz identicamente a própria lei de Gauss (4.7). A partir disto, é possível concluir que as soluções independentes do tempo representam configurações possuidoras de carga elétrica total nula.

O objetivo deste capítulo é a obtenção de vórtices topológicos de primeira ordem em um cenário  $CP(2)$ , tal como feito em [32]. Portanto, considera-se  $N = 3$  em (4.1). Assim, obtém-se o cenário efetivo, a partir do qual buscaremos por soluções rotacionalmente simétricas, descritas pelo ansatz ( $m_i \in \mathbb{Z}$ )

$$A_i = -A^i = -\frac{1}{gr} \epsilon^{ij} n^j A(r), \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{im_1\theta} \sin(\alpha(r)) \cos(\beta(r)) \\ e^{im_2\theta} \sin(\alpha(r)) \sin(\beta(r)) \\ e^{im_3\theta} \cos(\alpha(r)) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde  $\epsilon^{ij}$  e  $n^j = (\cos \theta, \sin \theta)$  são, respectivamente, as componentes do tensor de Levi-Civita bidimensional ( $\epsilon^{12} = +1$ ) e o versor de posição. Em particular, dado o ansatz (4.9), o campo magnético pode ser escrito como

$$B(r) = -\frac{1}{gr} \frac{dA}{dr}. \quad (4.11)$$

As soluções descritas por (4.9) e (4.10) devem ser regulares em  $r \rightarrow 0$ , portanto, as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  devem satisfazer

$$\alpha(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Agora, considerando-se as possíveis combinações entre as matrizes de carga  $Q_{ab}$  e os valores de  $m_i$  aparecendo em (4.10), existem dois cenários particulares (ambos com  $m_3 = 0$ ): (i)  $Q_{ab} = \lambda_3/2$  e  $m_1 = -m_2 = m$ , e (ii)  $Q_{ab} = \lambda_8/2$  e  $m_1 = m_2 = m$ . Nestes casos,  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$  são as matrizes diagonais de Gell-Man, dadas por

$$\lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0) \quad \text{e} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2). \quad (4.13)$$

Porém, hoje é sabido que estes dois cenários são fenomenologicamente equivalentes [31]. Portanto, neste trabalho, consideraremos apenas o caso (i), ou seja, o caso definido por  $m_1 = -m_2 = m, m_3 = 0$ , e

$$Q_{ab} = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0). \quad (4.14)$$

Tendo em mente as convenções introduzidas acima, pode-se escrever uma equação de Euler-Lagrange para a função  $\beta(r)$ , i.e.,

$$\frac{d^2\beta}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + 2 \cot \alpha \frac{d\alpha}{dr} \right) \frac{d\beta}{dr} - \frac{\sin^2 \alpha \sin(4\beta)}{r^2} \left( m - \frac{A}{2} \right)^2 = 0, \quad (4.15)$$

da qual resultam duas soluções constantes, a saber,

$$\beta_1(r) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad \text{e} \quad \beta_2(r) = \frac{\pi}{2}k, \quad (4.16)$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ . Posteriormente, iremos considerar estas duas soluções separadamente.

## 4.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo CP(2)

A partir de agora, busca-se a obtenção de um conjunto de equações acopladas de primeira ordem (equações BPS) para o modelo efetivo  $CP(2)$ . Estas equações podem ser obtidas via minimização da energia total do sistema (formalismo BPS), adotando-se como ponto de partida o tensor energia-momento. No presente caso, via a relação (2.15), e (4.1), calculamos a expressão

$$T_{\lambda\rho} = -F_{\mu\lambda}F^\mu{}_\rho + \overline{(P_{ab}D_\lambda\phi_b)} (P_{ac}D_\rho\phi_c) + \overline{(P_{ac}D_\rho\phi_c)} (P_{ab}D_\lambda\phi_b) - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{L}, \quad (4.17)$$

da qual resulta a densidade de energia  $\varepsilon \equiv T_{00} = -\mathcal{L}$ :

$$\varepsilon = \frac{B^2}{2} + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha \right] + V, \quad (4.18)$$

onde a função auxiliar  $W$  é definida como

$$W = W(\alpha, \beta) = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta), \quad (4.19)$$

com  $\beta$  sendo dado necessariamente por uma das soluções em (4.16). A integração da densidade de energia sobre todo o espaço resulta na energia total do sistema,

$$E = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} (B^2 + 2V) r dr + 2\pi h \int_0^\infty \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha \right] r dr, \quad (4.20)$$

na qual a integração sobre o ângulo foi feita diretamente.

No o intuito de implementarmos o método de Bogomol'nyi, utilizaremos as seguintes identidades:

$$\frac{1}{2} (B^2 + 2V) = \frac{1}{2} \left( B \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm B\sqrt{2V}, \quad (4.21)$$

$$h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha \right] = h \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha \right]^2 \pm \pm h \frac{\sqrt{W}}{r} (A - 2m) \sin \alpha \left( \frac{d\alpha}{dr} \right), \quad (4.22)$$

a partir das quais reescrevemos a expressão em (4.20) na forma:

$$E = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{gr} \frac{dA}{dr} \right) \mp \sqrt{2V} \right]^2 r dr + 2\pi h \int_0^\infty \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha \right]^2 r dr \mp \mp 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{g} \sqrt{2V} \frac{d}{dr} (A - 2m) + (A - 2m) h \sqrt{W} \frac{d}{dr} (\cos \alpha) \right] r dr, \quad (4.23)$$

na qual utilizamos a relação (4.11) para o campo magnético  $B(r)$ .

Devemos ser capazes de escrever o último termo de (4.23) como derivada total. Contudo, existe a necessidade do seguinte vínculo para o potencial:

$$h\sqrt{W} \frac{d}{dr} (\cos \alpha) = \frac{1}{g} \frac{d}{dr} (\sqrt{2V}), \quad (4.24)$$

a partir do qual a energia total em (4.23) pode ser reescrita como

$$E = E_{bps} + 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{gr} \frac{dA}{dr} \right) \mp \sqrt{2V} \right]^2 r dr + + 2\pi h \int_0^\infty \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha \right]^2 r dr \geq E_{bps}, \quad (4.25)$$

onde

$$E_{bps} = 2\pi \int_0^\infty \varepsilon_{bps} r dr = \mp 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{gr} \frac{d}{dr} \left[ (A - 2m) \sqrt{2V} \right] r dr = \mp \frac{2\pi}{g} \left[ (A - 2m) \sqrt{2V} \right]_0^\infty, \quad (4.26)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{1}{gr} \frac{d}{dr} \left[ (A - 2m) \sqrt{2V} \right]. \quad (4.27)$$

O cálculo explícito de (4.26) depende das condições de contorno a serem impostas sobre o potencial  $V(|\phi|)$  e a função  $A(r)$ , na origem e no infinito. De modo geral, podemos supor as seguintes condições para o potencial:

$$V(r \rightarrow 0) \rightarrow V_0 \quad \text{e} \quad V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (4.28)$$

sendo  $V_0$  um valor finito e positivo. Utilizando estas condições e também aquela para  $A(r)$  expressa em (4.12), o valor de (4.26) pode ser calculado como

$$E_{bps} = \mp \frac{4\pi}{g} m \sqrt{2V_0}, \quad (4.29)$$

na qual supusemos um valor também constante para  $A(r \rightarrow \infty)$ .

Assim, através de (4.25), concluímos que o valor em (4.29) representa um limite inferior para o valor da energia total do sistema. Desta forma, quando  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  satisfizerem

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp g \sqrt{2V}, \quad (4.30)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta)}, \quad (4.31)$$

a energia total das configurações resultantes assumirá o seu valor mínimo, i.e.,

$$E = E_{bps} = \mp \frac{4\pi}{g} m \sqrt{2V_0}. \quad (4.32)$$

Como era de se esperar, este valor de energia mínima resulta quantizado em termo dos valores (inteiros) da vorticidade  $m$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). Vale ressaltar que o valor  $m = 0$  deve ser descartado, pois levaria a um valor nulo para a energia total do sistema.

As equações diferenciais de primeira ordem (4.30) e (4.31) são as equações BPS geradas pelo modelo (4.1). Estas equações, juntamente com o vínculo (4.24), satisfazem as versões rotacionalmente simétricas das equações de equações de Euler-Lagrange (4.4) e (4.5). Neste sentido, conclui-se que as equações BPS (4.30) e (4.31) fornecem soluções genuínas ao modelo (4.1).

### 4.3 Soluções BPS

Tendo desenvolvido a estrutura de primeira ordem para o modelo  $CP(2)$  na seção anterior, investiga-se agora as suas soluções propriamente ditas. Neste sentido, esta seção é dividida em duas partes diferentes, com base nos valores para a função  $\beta(r)$  previstos em (4.16). Para cada caso, são obtidos: o potencial de auto-interação, as equações de primeira ordem e as condições de contorno para os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ . A obtenção dessas informações será de fundamental importância para a caracterização dos vórtices BPS, incluindo o cálculo de suas energias. Ao final da seção, apresentamos as soluções numéricas para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , o campo magnético  $B(r)$  e também a densidade de energia.

### 4.3.1 O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_1$

Iniciamos a construção das soluções BPS via

$$\beta(r) = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k. \quad (4.33)$$

a partir da qual  $\cos^2(2\beta) = 0$ . Neste caso, a relação (4.24) se reduz a

$$\frac{d}{dr}(hg \cos \alpha) = \frac{d}{dr}(\sqrt{2V}), \quad (4.34)$$

cuja solução é

$$V(\alpha) = \frac{g^2 h^2}{2} \cos^2 \alpha \quad (4.35)$$

ou

$$V(|\phi_3|) = \frac{g^2 h^2}{2} |\phi_3|^2, \quad (4.36)$$

na qual a constante de integração foi adotada como  $C = 0$  com a finalidade de que as condições de contorno (4.28) para o potencial sejam satisfeitas.

A expressão em (4.35) define o potencial BPS relacionado ao caso  $\beta(r) = \beta_1$ . Neste cenário, as equações (4.30) e (4.31) podem ser reescritas como

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp g^2 h \cos \alpha, \quad (4.37)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right), \quad (4.38)$$

na quais os sinais superiores (inferiores) correspondem aos valores negativos (positivos) da vorticidade  $m$ .

No intuito de solucionarmos as equações de primeira ordem (4.37) e (4.38), além das condições de contorno em  $r = 0$  (4.12), precisamos também conhecer as condições de contorno no limite  $r \rightarrow \infty$ . Para isso, substituímos a solução (4.33) e o potencial (4.35) na expressão (4.18); assim, a densidade de energia efetiva resulta em

$$\varepsilon = \frac{B^2}{2} + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W_1}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + \frac{g^2 h^2}{2} \cos^2 \alpha, \quad (4.39)$$

onde

$$W_1 = W(\alpha, \beta = \beta_1) = \sin^2 \alpha. \quad (4.40)$$

Neste caso, para que a condição de energia finita  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  seja satisfeita, as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  devem satisfazer

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (4.41)$$

Por conseguinte, tendo em mente as condições de contorno (4.12) e (4.41), e o potencial (4.35), o valor da energia total  $E_{bps}$  (4.32) dos vórtices BPS é então dada por

$$E_{bps} = \mp 4\pi h m. \quad (4.42)$$

A partir deste ponto, é possível calcular soluções aproximadas para os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  via as equações (4.37) e (4.38), com o auxílio das condições de contorno (4.12) e (4.41). Para isso, implementa-se novamente o processo de linearização já detalhado nos capítulos anteriores. Por simplicidade, adotemos apenas os sinais inferiores (i.e., os valores positivos para  $m$ ) nas expressões de primeira ordem.

Assim, próximo da origem, obtemos as soluções aproximadas:

$$\alpha(r) \approx C_1 r^m \quad \text{e} \quad A(r) \approx \lambda r^2 \quad (4.43)$$

onde  $\lambda = g^2 h / 2$ . De maneira análoga, no limite  $r \rightarrow \infty$ , calculamos

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_2 e^{-M_\alpha r} \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - 2C_2 \sqrt{\lambda} r e^{-M_A r}, \quad (4.44)$$

nas quais,

$$M_\alpha = M_A = \sqrt{\lambda} \quad (4.45)$$

representam as massas dos bósons escalar e de gauge. Neste caso, a relação  $M_\alpha/M_A = 1$  define o limite de Bogomol'nyi, i.e., o limite no qual é possível a implementação do formalismo BPS de primeira ordem. Além disso, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são definidas reais e positivas.

### 4.3.2 O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_2$

Agora, passamos à investigação da solução

$$\beta(r) = \beta_2 = \frac{\pi}{2} k, \quad (4.46)$$

via a qual obtemos  $\cos^2(2\beta) = 1$ . Neste contexto, a equação (4.24) se reduz a

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{hg}{2} \cos^2 \alpha \right) = \frac{d}{dr} \left( \sqrt{2V} \right), \quad (4.47)$$

resultando em

$$V(\alpha) = \frac{g^2 h^2}{32} \cos^2(2\alpha) \quad (4.48)$$

ou

$$V(|\phi_3|) = \frac{g^2 h^2}{32} (2|\phi_3|^2 - 1)^2, \quad (4.49)$$

onde a constante de integração foi assumida como  $C = -gh/4$  com o intuito de que as condições de contorno (4.28) para o potencial sejam satisfeitas.

Como antes, a equação (4.48) representa o potencial BPS associado a  $\beta(r) = \beta_2$ . Neste caso, as equações (4.30) e (4.31) resultam em

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp g^2 h \cos(2\alpha), \quad (4.50)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left( \frac{A}{2} - m \right), \quad (4.51)$$

onde, novamente, os sinais superiores (inferiores) correspondem a  $m < 0$  ( $m > 0$ ).

No intuito de determinar as condições de contorno assintóticas sobre as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , substituímos (4.46) e (4.48) em (4.18). Deste modo, obtemos

$$\varepsilon = \frac{B^2}{2} + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W_2}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + \frac{g^2 h^2}{32} \cos^2(2\alpha), \quad (4.52)$$

com

$$W_2 = W(\alpha, \beta = \beta_2) = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \quad (4.53)$$

Para que ocorra uma energia total finita,  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  devem satisfazer

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m, \quad (4.54)$$

a partir das quais podemos ainda calcular o valor da energia  $E_{bps}$  em (4.32) para os vórtices BPS correspondentes, i.e.,

$$E_{bps} = \mp \pi h m. \quad (4.55)$$

Em virtude destes resultados é possível obter os perfis aproximados para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  a partir de (4.50) e (4.51), via (4.12) e (4.54). Novamente, utilizaremos  $m > 0$  (i.e., os sinais inferiores nas equações BPS).

No presente caso, via o processo de linearização, obtemos, no entorno de  $r = 0$ , as soluções aproximadas

$$\alpha(r) \approx C_1 r^m \quad \text{e} \quad A(r) \approx \frac{\lambda}{4} r^2, \quad (4.56)$$

com  $\lambda = g^2 h/2$ . Por outro lado, para  $r \rightarrow \infty$ , o processo de linearização fornece

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{4} - C_2 e^{-M_\alpha r} \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - 2C_2 \sqrt{\lambda} r e^{-M_A r}, \quad (4.57)$$

nas quais,

$$M_\alpha = M_A = \sqrt{\lambda}/2 \quad (4.58)$$

são as massas dos bósons, escalar e real, respectivamente. Como antes,  $M_\alpha/M_A = 1$  verifica o limite de Bogomol'nyi, e as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são reais e positivas.

A partir da comparação direta entre os resultados obtidos para os casos  $\beta(r) = \beta_1$  e  $\beta(r) = \beta_2$ , é possível concluir que estes dois cenários são equivalentes, ou seja, o potencial (4.48) e as equações (4.50) e (4.51), construídas via  $\beta(r) = \beta_2$ , podem ser obtidas diretamente do potencial (4.35) e das equações (4.37) e (4.38), obtidas a partir de  $\beta(r) = \beta_1$ , via implementação das redefinições :  $\alpha \rightarrow 2\alpha$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda/4$  e  $h \rightarrow h/4$ . De maneira análoga, também a energia (4.55) podem ser obtida através de (4.42). Por conseguinte, estando os dois relacionados por uma simples redefinição de parâmetros, pode-se argumentar, pela ocorrência de uma equivalência entre eles, que há, portanto, apenas um cenário efetivo [32].

Na sequência, apresentamos as soluções numéricas para as funções  $\alpha(r)$ ,  $A(r)$ , o campo magnético  $B(r)$  e a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ , obtidas através das equações de primeira ordem (4.37) e (4.38) via as condições de contorno (4.12) e (4.41). Por conveniência, utilizamos  $g = h = 1$ .

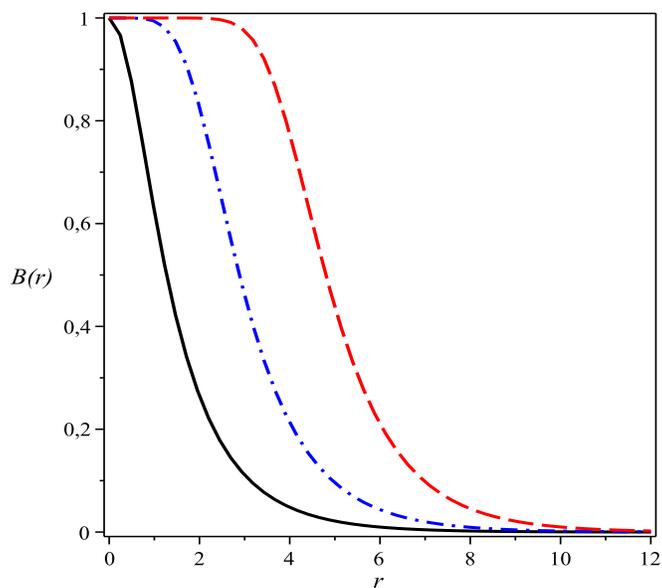


Figura 4.2: Solução numérica para o módulo do campo magnético  $B(r)$  para  $m = 1$  (curva preta sólida),  $m = 3$  (curva azul ponto-tracejada) e  $m = 7$  (curva vermelha tracejada).

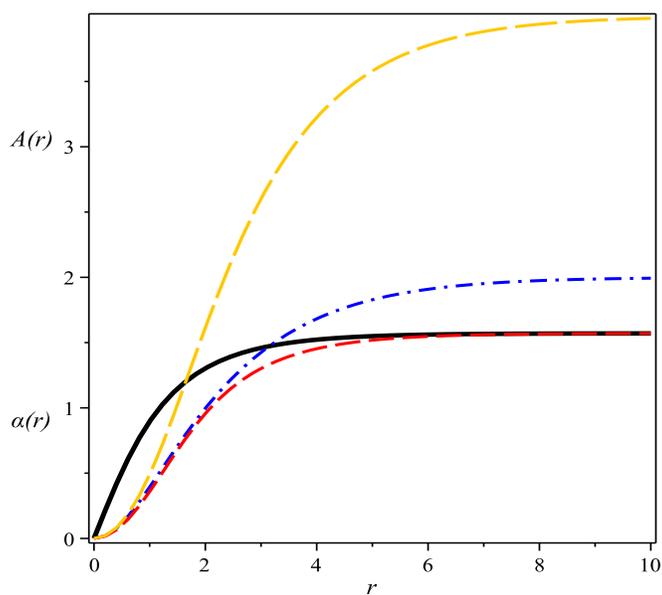


Figura 4.1: Solução numérica para  $\alpha(r)$  (curva preta sólida para  $m = 1$  e curva vermelha tracejada para  $m = 2$ ) e para  $A(r)$  (curva azul ponto-tracejada para  $m = 1$  e curva laranja longo-tracejada para  $m = 2$ )

A Figura 4.1 apresenta a solução numérica para as funções  $\alpha(r)$  (curva preta sólida para  $m =$

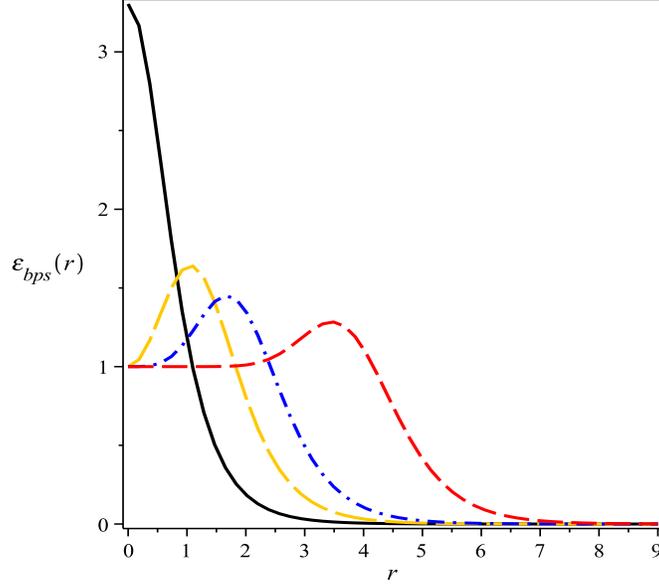


Figura 4.3: Solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . As convenções sendo as mesmas da Figura 4.1.

1 e curva vermelha tracejada para  $m = 2$ ) e para  $A(r)$  (curva azul ponto-tracejada para  $m = 1$  e curva laranja longo-tracejada para  $m = 2$ ). De modo geral, é possível verificar a maneira monotônica como estas soluções atingem as condições de contorno, em conformidade com as soluções aproximadas, calculadas anteriormente via o processo de linearização das equações de primeira ordem. Verifica-se também a validade da condição  $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m$ .

Mostramos a solução numérica para o campo magnético  $B(r)$  na Figura 4.2, construída a partir da equação (4.11), para  $m = 1$  (curva preta sólida),  $m = 3$  (curva azul ponto-tracejada) e  $m = 7$  (curva vermelha tracejada). A solução satisfaz  $B(r \rightarrow 0) \rightarrow gh = 1$  (vide a solução aproximada  $A(r)$  em (4.43)). Como se pode perceber, este limite independe do valor da vorticidade  $m$ . Portanto, todos os perfis mostrados na figura atingem o mesmo valor máximo em  $r = 0$ . Por outro lado, à medida que os valores de  $m$  aumentam, as soluções se espalham por maiores distâncias (este comportamento está relacionado à mediação de interações de longo alcance pelos bósons do modelo). A solução também satisfaz  $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , verificando a condição  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  (energia total finita).

Para finalizar, a Figura 4.3 mostra a solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ , com as mesmas convenções visualizadas na Figura 4.1. Para  $m = 1$ , a solução atinge o seu

valor máximo em  $r \rightarrow 0$ , decrescendo monotonicamente, até tornar-se nula em  $r \rightarrow \infty$ . Para  $m \neq 1$ , as soluções formam anéis centrados na origem, cujos raios (valor de  $r$  para o qual a solução atinge seu valor máximo) e amplitudes (valor máximo da solução), respectivamente, aumentam e diminuem com a vorticidade  $m$ .

# Capítulo 5

## Vórtices BPS em um modelo CP(2) na presença do termo de Chern-Simons

### 5.1 O modelo CP(N – 1) na presença do termo de Chern-Simons

Iniciamos nossa investigação apresentando a densidade de lagrangeana que define o modelo de calibre  $CP(N - 1)$ , em sua versão Abelian, na presença do termo de Chern-Simons e de um potencial arbitrário, i.e.,

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu} A_\alpha F_{\mu\nu} + \overline{(P_{ab}D_\mu\phi_b)} (P_{ac}D^\mu\phi_c) - V|\phi|, \quad (5.1)$$

onde  $\kappa$  é o *parâmetro de Chern-Simons* (com  $\epsilon^{012} = +1$ ), e  $V|\phi|$  é o potencial de auto-interação para o campo  $\phi_a$ , a ser definido.

Além disso, assim como no capítulo anterior,  $P_{ab} = \delta_{ab} - h^{-1}\phi_a\overline{\phi_b}$  é um operador de projeção, e  $D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a - igA_\mu Q_{ab}\phi_b$  representa a derivada covariante, na qual se faz presente a matriz de carga  $Q_{ab}$ , diagonal e real, expressa em (4.2). Do mesmo modo, o campo  $\phi_a$  é constituído pelo conjunto de  $N$  campos escalares complexos sujeitos à condição (4.3).

Cabe ressaltar que os índices gregos representam uma soma de Einstein sobre as coordenadas de espaço-tempo, enquanto que, para os índices latinos repetidos, essa soma se dá sobre as coordenadas espaciais apenas.

As equações de Euler-Lagrange para os campos de gauge e escalar obtidas a partir do modelo (5.1) são

$$\frac{k}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\lambda = 0, \quad (5.2)$$

$$P_{ab} \left[ 2P_{bc}D_\mu(P_{cd}D^\mu\phi_d) - D_\mu D^\mu\phi_b + \frac{\partial V}{\partial\phi_b} \right] = 0, \quad (5.3)$$

onde  $J^\lambda$  representa o 4-vetor densidade de corrente definido em (4.6).

A componente temporal de (5.2) fornece a lei de Gauss do modelo  $CP(N-1)$  (5.1). Para configurações independentes do tempo essa equação é escrita em termos do campo magnético na forma

$$\kappa B = \rho \quad (5.4)$$

na qual  $\rho$  é a densidade de carga elétrica dada por (4.8).

Através de (5.4) e (4.8), notamos não ser mais válido o gauge temporal  $A^0 = 0$ , uma vez que este não mais satisfaz a própria lei de Gauss. Portanto, é possível concluir que as configurações estáticas resultantes exibirão não somente o fluxo magnético não nulo, como também carga elétrica total não nula.

Assim como o anterior, o objetivo deste capítulo é a obtenção de vórtices de primeira ordem em um cenário  $CP(2)$ . Logo, considera-se  $N = 3$  em (5.1). Desta maneira, obtém-se o cenário efetivo, a partir do qual também buscaremos por soluções rotacionalmente simétricas, representadas pelo ansatz (4.9) e (4.10). Neste sentido, dado o ansatz (4.9), o campo magnético para este caso também é escrito como em (4.11).

Do mesmo modo, as soluções descritas por (4.9) e (4.10) também devem apresentar regularidade em  $r \rightarrow 0$ , sendo assim, as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  também satisfazem (4.12).

Como afirmamos no capítulo 4, dentre as possíveis combinações entre as matrizes de carga  $Q_{ab}$  e os valores de  $m_i$  que aparecem em (4.10) existem dois cenários particulares (ambos com  $m_3 = 0$ ): (i)  $Q_{ab} = \lambda_3/2$  e  $m_1 = -m_2 = m$ , e (ii)  $Q_{ab} = \lambda_8/2$  e  $m_1 = m_2 = m$ ; com  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$  sendo as matrizes diagonais de Gell-Man, dadas por (4.13). Porém, estes dois casos são fenomenologicamente equivalentes, dessa maneira, continuamos a considerar o caso (i), i.e., o caso definido por  $m_1 = -m_2 = m, m_3 = 0$ , e (4.14).

Levando em consideração as convenções introduzidas acima, podemos escrever uma equação

de Euler-Lagrange para a função  $\beta(r)$ , dada por

$$\frac{d^2\beta}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + 2 \cot \alpha \frac{d\alpha}{dr} \right) \frac{d\beta}{dr} - H(r) \sin^2 \alpha \sin(4\beta) = 0, \quad (5.5)$$

onde a função  $H(r)$  é definida como

$$H(r) = \frac{1}{r^2} \left( m - \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{g^2(A_0)^2}{4} \sin^2 \alpha. \quad (5.6)$$

As soluções para (5.5) são

$$\beta_1(r) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad \text{e} \quad \beta_2(r) = \frac{\pi}{2}k, \quad (5.7)$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ . Estas soluções são as mesmas apresentadas em (4.33), obtidas para a equação (4.15). Posteriormente, iremos considerá-las separadamente.

Além disso, substituindo o ansatz (4.10) na lei de Gauss (5.4), obtemos a relação para  $A^0$ , i.e.,

$$A^0 = -\frac{2\kappa B}{g^2 h W}, \quad (5.8)$$

onde a função auxiliar  $W$  é definida como

$$W = W(\alpha, \beta) = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2(2\beta)), \quad (5.9)$$

com  $\beta$  sendo dado por uma das soluções em (5.7).

Com o auxílio de (5.8), obtém-se a relação para o campo elétrico, dada por

$$E(r) = -\frac{dA^0}{dr} = \frac{2\kappa}{g^2 h} \frac{d}{dr} \left( \frac{B}{W} \right) \quad (5.10)$$

## 5.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de calibre CP(2)

Busca-se agora a obtenção do conjunto de equações acopladas de primeira ordem (equações BPS) para o modelo efetivo  $CP(2)$  na presença do termo de Chern-Simons. Obteremos estas equações através do processo de minimização da energia total do sistema (formalismo BPS), adotando mais uma vez como ponto de partida o tensor energia-momento. Para este caso, via as relações (2.15) e (5.1) calculamos a expressão

$$T_{\lambda\rho} = (\overline{P_{ab}D_\lambda\phi_b}) (P_{ac}D_\rho\phi_c) + (\overline{P_{ac}D_\rho\phi_c}) (P_{ab}D_\lambda\phi_b) - \eta_{\lambda\rho} \mathcal{L}_{ntop}, \quad (5.11)$$

onde

$$\mathcal{L}_{ntop} = (\overline{P_{ab}D_\mu\phi_b}) (P_{ac}D^\mu\phi_c) - V(|\phi|) \quad (5.12)$$

representa a densidade de lagrangeana não-topológica. Desta forma, a densidade de energia ( $\varepsilon \equiv T_{00}$ ) é então dada por

$$\varepsilon = (\overline{P_{ab}D_0\phi_b}) (P_{ac}D_0\phi_c) + (\overline{P_{ab}D_j\phi_b}) (P_{ac}D_j\phi_c) + V(|\phi|). \quad (5.13)$$

Utilizado o ansatz (4.9) e (4.10) podemos calcular os termos de (5.13), i.e.,

$$(\overline{P_{ab}D_0\phi_b}) (P_{ac}D_0\phi_c) = \frac{hg^2}{4} (A^0)^2 W, \quad (5.14)$$

$$(\overline{P_{ab}D_j\phi_b}) (P_{ac}D_j\phi_c) = h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \right], \quad (5.15)$$

através dos quais reescrevemos (5.13) como

$$\varepsilon = \frac{hg^2}{4} (A^0)^2 W + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + V. \quad (5.16)$$

Agora, com o auxílio de (5.8), podemos escrever (5.16) em termos do campo magnético  $B(r)$ . Neste sentido, a densidade de energia (5.16) se reduz a

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2 B^2}{hg^2 W} + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + V, \quad (5.17)$$

onde a função  $W$  é dada por (5.9)

No intuito de implementarmos o método de Bogmol'nyi, utilizaremos as seguintes identidades:

$$\frac{\kappa^2 B^2}{hg^2 W} + V = \left( \frac{\kappa B}{g\sqrt{hW}} \mp \sqrt{V} \right)^2 \pm 2 \frac{\kappa B}{g} \sqrt{\frac{V}{hW}}, \quad (5.18)$$

$$\left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 = \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \right]^2 \pm \frac{2\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \frac{d\alpha}{dr}, \quad (5.19)$$

a partir das quais reescrevemos a expressão em (5.17) na forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[ -\frac{\kappa}{g^2\sqrt{hW}r} \frac{dA}{dr} \mp \sqrt{V} \right]^2 + h \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \right]^2 \mp \\ &\mp \left[ 2 \frac{\kappa}{g^2 r} \sqrt{\frac{V}{hW}} \frac{dA}{dr} - \frac{h\sqrt{W}}{r} (A - 2m) \frac{d\alpha}{dr} \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

na qual utilizamos a relação a relação (4.11) para o campo magnético  $B(r)$ .

O último termo de (5.20) pode ser escrito como uma derivada total, desde que consideremos a necessidade do seguinte vínculo para o potencial:

$$\frac{2\kappa}{g^2\sqrt{h}} \frac{d}{dr} \sqrt{\frac{V}{W}} = -h\sqrt{W} \frac{d\alpha}{dr}. \quad (5.21)$$

Portanto, a densidade de energia (5.20) pode ser reescrita como

$$\varepsilon = \varepsilon_{bps} + \left[ -\frac{\kappa}{g^2\sqrt{hWr}} \frac{dA}{dr} \mp \sqrt{V} \right]^2 + h \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \right]^2, \quad (5.22)$$

onde

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{2\kappa}{\sqrt{h}g^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ (A - 2m) \sqrt{\frac{V}{W}} \right]. \quad (5.23)$$

A integração da densidade de energia sobre todo o espaço resulta na energia total do sistema,

$$E = E_{bps} + 2\pi \int_0^\infty \left[ -\frac{\kappa}{g^2\sqrt{hWr}} \frac{dA}{dr} \mp \sqrt{V} \right]^2 r dr + 2\pi h \int_0^\infty \left[ \frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right) \right]^2 r dr \geq E_{bps}, \quad (5.24)$$

na qual

$$E_{bps} = 2\pi \int_0^\infty \varepsilon_{bps} r dr = \mp \frac{4\pi\kappa}{\sqrt{h}g^2} \left[ (A - 2m) \sqrt{\frac{V}{W}} \right]_0^\infty. \quad (5.25)$$

O cálculo explícito de (5.25) depende das condições de contorno a serem impostas sobre o potencial  $V|\phi$  e sobre as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , na origem e no infinito, já que a função  $W$ , expressa em (5.9), possui dependência com essas funções. De modo geral, podemos mais uma vez utilizar as condições (4.28) para o potencial e (4.12) para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  na origem, desse modo, obtemos

$$E_{bps} = \mp \frac{8\pi m\kappa}{\sqrt{h}g^2} \sqrt{\frac{V_0}{W_0}}, \quad (5.26)$$

na qual supomos valores também constantes para  $\alpha(r \rightarrow \infty)$  e  $A(\rightarrow \infty)$ .

Assim, através de (5.24), podemos concluir que o valor em (5.26) representa um limite inferior para o valor da energia total do sistema. Desta forma, quando  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  satisfazem

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^2}{\kappa} \sqrt{hVW}, \quad (5.27)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sqrt{W}}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right), \quad (5.28)$$

a energia total das configurações assumirá o seu valor mínimo, i.e.,

$$E = E_{bps} = \mp \frac{8\pi m\kappa}{\sqrt{h}g^2} \sqrt{\frac{V_0}{W_0}}. \quad (5.29)$$

O valor desta energia mínima resulta quantizado em termos dos valores inteiros da vorticidade  $m$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). Além disso, as equações de primeira ordem (5.27) e (5.28) são as equações BPS geradas pelo modelo (5.1). Estas equações, juntamente com o vínculo para o potencial (5.21), satisfazem as versões rotacionalmente simétricas das equações de Euler-Lagrange (5.2) e (5.3). Neste sentido, as soluções obtidas via (5.27) e (5.28), denominadas estados BPS, são soluções genuínas do modelo (5.1).

## 5.3 Soluções BPS

Após o desenvolvimento da estrutura de primeira ordem para o modelo  $CP(2)$  na seção anterior, investigaremos agora as soluções propriamente ditas. Com esse intuito, dividimos esta seção em duas subseções diferentes, com base nos dois valores para a função  $\beta(r)$  apresentados em (5.7). Para cada caso, obtemos: o potencial de auto-interação, as equações de primeira ordem e as condições de contorno para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ . Com essas informações poderemos caracterizar os vórtices BPS gerados pelo modelo, assim como calcular as suas energias. Ao final da seção, apresentamos as soluções numéricas para  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , o campo magnético  $B(r)$ , a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}$ , para o potencial elétrico  $A^0(r)$  e campo elétrico  $E(r)$ .

### 5.3.1 O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_1$

Iniciamos a construção das soluções BPS via

$$\beta(r) = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad (5.30)$$

a partir da qual  $\cos^2(2\beta_1) = 0$ . Diante disso, a relação (5.21) se reduz a

$$\frac{2\kappa}{g^2\sqrt{h}} \frac{d}{dr} \left( \frac{\sqrt{V}}{\sin \alpha} \right) = h \frac{d}{dr} \cos \alpha, \quad (5.31)$$

cujas solução é

$$V(\alpha) = \frac{g^4}{16\kappa^2} h^3 \sin^2(2\alpha) \quad (5.32)$$

ou

$$V(|\phi_3|) = \frac{g^4}{4\kappa^2} |\phi_3|^2 (h - |\phi_3|^2), \quad (5.33)$$

na qual a constante de integração foi adotada com  $C = 0$  a fim de que as condições de contorno para o potencial, dadas por (4.28), sejam satisfeitas.

As expressão em (5.32), ou (5.33), define o potencial BPS relacionado ao caso  $\beta(r) = \beta_1$ . Neste contexto, as equações (5.27) e (5.28) podem ser reescritas como

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4 h^2}{4\kappa} \sin(2\alpha) \sin \alpha, \quad (5.34)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin \alpha}{r} \left( \frac{A}{2} - m \right), \quad (5.35)$$

nas quais os sinais superiores (inferiores) correspondem aos valores negativos (positivos) da vorticidade  $m$ .

Com a intenção de solucionarmos as equações de primeira ordem (5.34) e (5.35), além das condições de contorno em  $r = 0$  (4.12), precisamos também conhecer as condições de contorno no limite  $r \rightarrow \infty$ . Para isto, substituimos a solução (5.30) e o potencial (5.32) na expressão (5.17). Assim, a densidade de energia efetiva resulta em

$$\varepsilon(r) = \frac{\kappa^2 B^2}{hg^2 \sin^2 \alpha} + \frac{g^4 h^3}{16\kappa^2} \sin^2(2\alpha) + h \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \left( \frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + V, \quad (5.36)$$

da qual nós alcançamos  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  impondo

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (5.37)$$

Em vista das condições (4.12) e (5.37), e do potencial (5.32), o valor da energia total  $E_{bps}$  (5.29) dos vórtices é então dada por

$$E_{bps} = \mp 4\pi h m. \quad (5.38)$$

A partir de agora, é possível calcular soluções aproximadas para os campos  $\alpha(r)$  e  $A(r)$  via as equações (5.34) e (5.35), com auxílio das condições de contorno (4.12) e (5.37). Para isso, recorreremos mais uma vez à implementação do processo de linearização. Para simplificar, adotemos apenas os sinais inferiores ( $m > 0$ ) nas equações BPS.

Então, próximo da origem, obtemos as soluções aproximadas:

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m \quad \text{e} \quad A(r) \approx \frac{g^4 h^2 C_0^2}{4\kappa^2 (m+1)} r^{2(m+1)}. \quad (5.39)$$

Em contrapartida, para  $r \rightarrow \infty$ , calculamos

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty e^{-M_\alpha r} \quad \text{e} \quad A(r) \approx 2m - \frac{g^2 h C_\infty}{\kappa} r e^{-M_A r}, \quad (5.40)$$

nas quais

$$M_\alpha = M_A = \frac{g^2 h}{2\kappa} \quad (5.41)$$

correspondem às massas dos bósons escalar e de gauge. A relação  $M_\alpha/M_A = 1$  define o limite de Bogomol'nyi. Além disso, as constantes  $C_0$  e  $C_\infty$  são definidas reais e positivas.

### 5.3.2 O caso $\beta(\mathbf{r}) = \beta_2$

Passamos agora à investigação da solução

$$\beta(r) = \beta_2 = \frac{\pi}{2} k, \quad (5.42)$$

através a qual obtemos  $\cos^2(2\beta_2) = 1$ . Neste caso, a relação (5.21) se reduz a

$$\frac{4\kappa}{g^2 \sqrt{h}} \frac{d}{dr} \left( \frac{\sqrt{V}}{\sin(2\alpha)} \right) = \frac{h}{4} \frac{d}{dr} \cos(2\alpha), \quad (5.43)$$

da qual obtemos a solução

$$V(\alpha) = \frac{g^4}{16\kappa^2} \left( \frac{h}{4} \right)^3 \sin^2(4\alpha) \quad (5.44)$$

ou

$$V(|\phi_3|) = \frac{g^4}{64\kappa^2 h} |\phi_3|^2 (h - |\phi_3|^2)(h - 2|\phi_3|^2)^2, \quad (5.45)$$

onde a constante de integração foi tomada como  $C = 0$  para que as condições de contorno para o potencial, dadas por (4.28), sejam satisfeitas.

A equação (5.44), ou (5.45), representa o potencial BPS associado ao caso  $\beta(r) = \beta_2$ , para o qual as equações (5.27) e (5.28) resultam em

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g^4}{4\kappa^2} \left( \frac{h}{4} \right)^2 \sin(4\alpha) \sin(2\alpha), \quad (5.46)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left( \frac{A}{2} - m \right), \quad (5.47)$$

onde, novamente, os sinais superiores (inferiores) correspondem a  $m < 0$  ( $m > 0$ ).

Agora, procedendo do mesmo modo como no caso anterior, i.e., substituindo (5.42) e (5.44) em (5.17) obtemos a expressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = & \frac{4\kappa^2 B^2}{hg^2 \sin^2(2\alpha)} + \frac{g^4}{16\kappa^2} \left(\frac{h}{4}\right)^3 \sin^2(4\alpha) + \\ & + h \left[ \left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 + \frac{\sin^2(2\alpha)}{4r^2} \left(\frac{A}{2} - m\right)^2 \right] + V, \end{aligned} \quad (5.48)$$

que atende à exigência da energia finita  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  desde que tenhamos

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (5.49)$$

Em consequência das condições (4.12) e (5.49), e do potencial (5.44), o limite inferior da energia total  $E_{bps}$  (5.29) se reduz a

$$E_{bps} = \mp \pi h m. \quad (5.50)$$

Vale a pena ressaltar que as equações (5.46) e (5.47) podem ser obtidas diretamente daquelas em (5.34) e (5.35) via as redefinições  $\alpha \rightarrow 2\alpha$  e  $h \rightarrow h/4$ . A energia total  $E_{bps}$  e o potencial BPS comportam-se de maneira similar. Portanto, podemos inferir que os dois cenários apresentados acima são equivalentes. Deste modo, conclui-se que há apenas um cenário efetivo. Neste sentido, iremos nos focar apenas nas soluções oriundas do cenário  $\beta(r) = \beta_1$ .

A seguir, apresentamos os resultados que obtivemos através da resolução das equações BPS (5.34) e (5.35), por meio do processo de linearização destas equações, e de acordo com as condições (4.12) e (5.37). Por questão de simplicidade, utilizamos  $h = \kappa = 1$  e  $g = \sqrt{2}$ .

Na Figuras 5.1 e 5.2 mostramos a solução numérica para as funções  $\alpha(r)$  e  $A(r)$ , respectivamente; para  $m = 1$  (curva preta sólida),  $m = 2$  (curva azul tracejada), e  $m = 3$  (curva vermelha ponto-tracejada). De maneira geral, podemos observar a maneira monotônica como estes campos atingem as condições de contorno (4.12) e (5.37). Em particular, verifica-se a validade da condição  $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m$ .

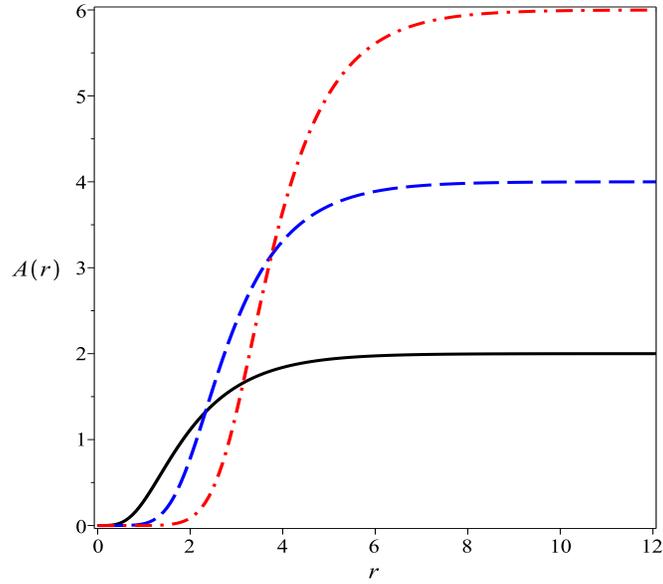


Figura 5.2: Solução numérica para  $A(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1. Os perfis são monotônicos.

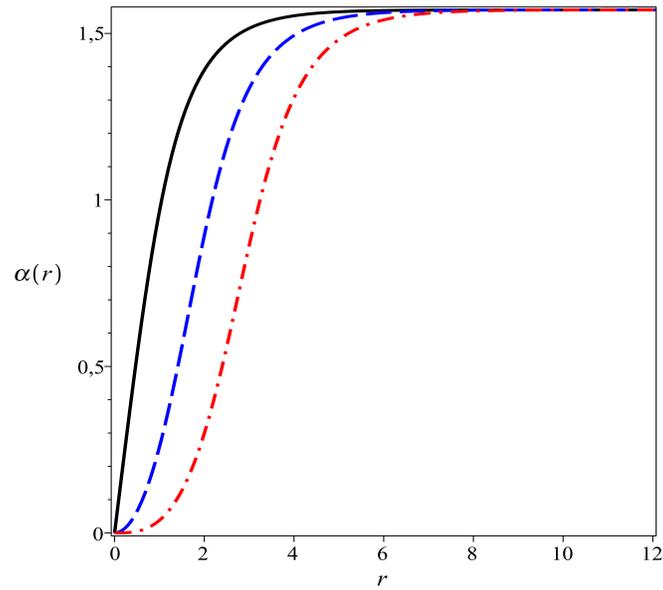


Figura 5.1: Solução numérica para  $\alpha(r)$  obtida a partir de (5.34) e (5.35) via (4.12) e (5.37), para  $h = \kappa = 1$  e  $g = \sqrt{2}$ . As vorticidade são dadas por:  $m = 1$  (curva preta sólida),  $m = 2$  (curva azul tracejada), e  $m = 3$  (curva vermelha ponto-tracejada).

Apresentamos a solução numérica para o campo magnético  $B(r)$  na Figura 5.3. As confi-

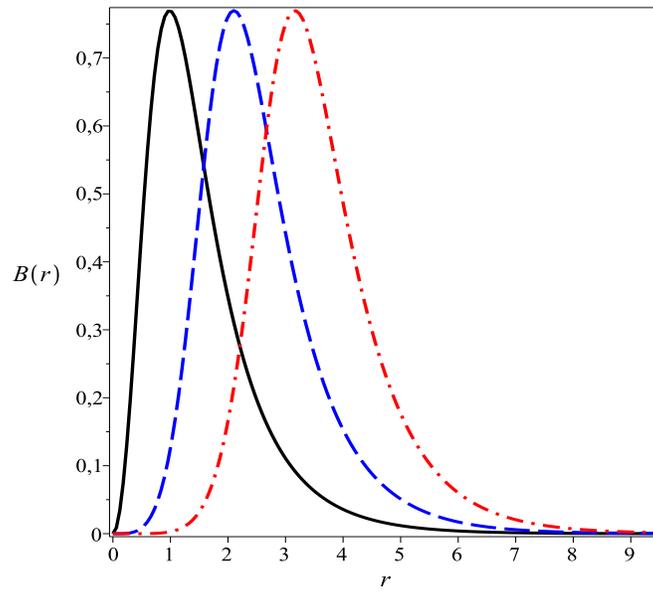


Figura 5.3: Solução numérica para o campo magnético  $B(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1. Os perfis são anéis centrados na origem.

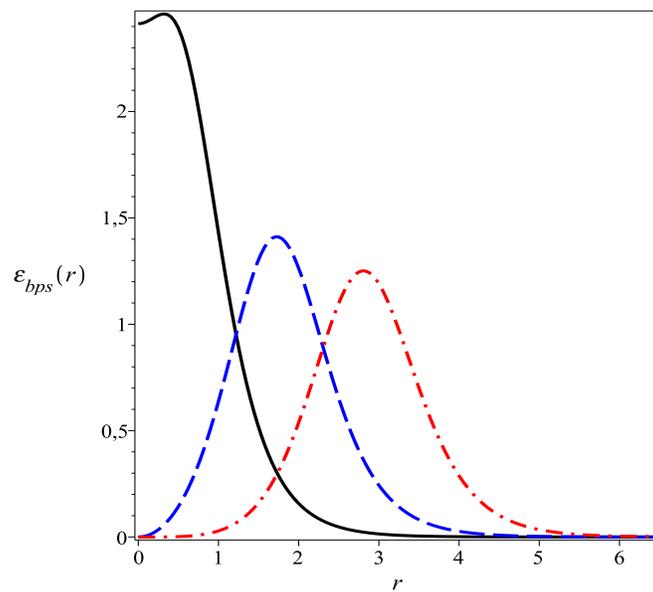


Figura 5.4: Solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1,  $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 0$  para  $m \neq 1$ .

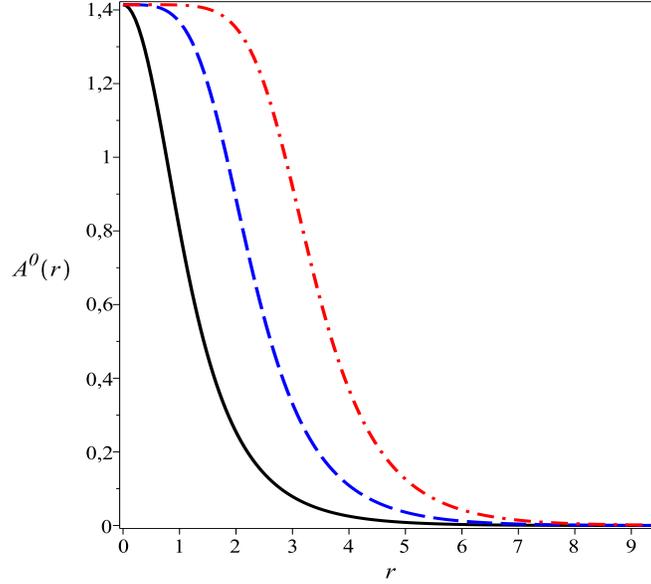


Figura 5.5: Solução numérica para o potencial elétrico  $A^0(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1.

gurações resultantes formam anéis centrados na origem, cujos raios aumentam à medida que vorticidade também aumenta. É interessante notar que o campo magnético desaparece no limite  $r \rightarrow \infty$ , o que verifica a condição  $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  para a energia total finita.

Na Figura 5.4 mostramos a solução numérica para a densidade de energia  $\varepsilon_{bps}(r)$  inerente às configurações de primeira ordem; estas soluções também engendram anéis centrados na origem, cujos raios (amplitudes) crescem (decrecem) com o aumento da vorticidade  $m$ . Um ponto relevante é que  $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 0$  para  $m \neq 1$ .

Nas Figuras 5.5 e 5.6 apresentamos as soluções numéricas para o potencial elétrico  $A^0(r)$  e para o campo elétrico  $E(r)$ , respectivamente. Este último comportando-se da mesma maneira que o campo magnético (i.e., produzindo anéis bem definidos). Em particular, temos  $E(r = 0) = 0$  e  $E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

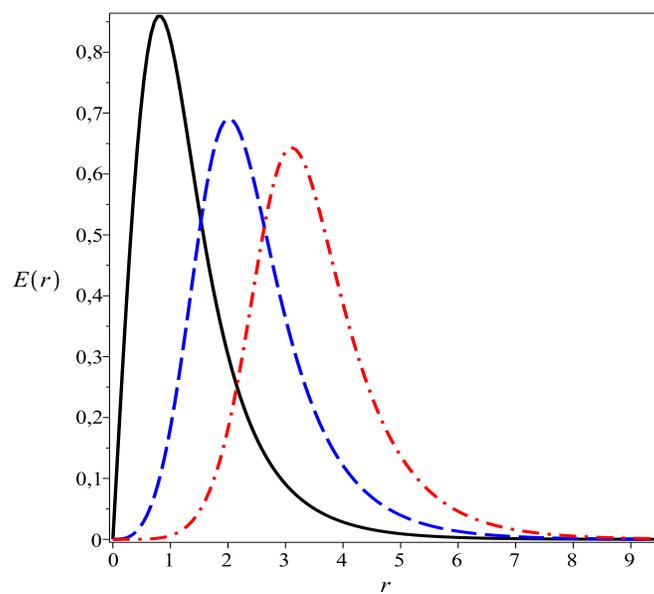


Figura 5.6: Solução numérica para o elétrico campo elétrico  $E(r)$ . As convenções são as mesmas da Figura 5.1,  $E(r = 0) = 0$  e  $E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos as soluções de vórtices BPS (Bogomol’nyi, Prasad e Somerfeld) inerentes ao modelo  $CP(2)$  na presença do termo de Chern-Simons. Este cenário efetivo origina-se do modelo geral  $CP(N-1)$ . O interesse pela investigação deste modelo se dá, principalmente, devido à estreita relação fenomenológica entre tal teoria e a teoria quadridimensional de Yang-Mills-Higgs, i.e., o primeiro mapeia algumas propriedades fenomenológicas do segundo [27–30].

No segundo capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre a obtenção de vórtices BPS a partir da eletrodinâmica Maxwell-Higgs. Neste sentido, abordamos o modelo de Maxwell-Higgs Abelian, o qual é dotado de um acoplamento mínimo entre os os campos de Higgs e gauge, e sob a influência de um potencial do tipo  $\lambda|\phi|^4$ . A simplicidade desta teoria nos permitiu introduzir alguns conceitos básicos, incluindo o método BPS, um formalismo que consiste no processo de minimização da energia total do sistema, através do qual podemos obter equações de primeira ordem (equações BPS), cujas soluções satisfazem as equações de Euler-Lagrange, sendo, portanto, soluções genuínas do modelo. Em particular, as soluções de vórtices obtidas a partir desta teoria representavam configurações estáticas com carga elétrica total nula. Além disso, a energia total destes vórtices resultou quantizada conforme a vorticidade  $n$ .

Continuamos nossa revisão no terceiro capítulo, onde introduzimos o estudo sobre soluções de vórtice BPS no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons. Neste intuito, abordamos o modelo de Chern-Simons-Higgs Abelian, o qual também é dotado de um acoplamento mínimo entres os campo de Higgs e gauge, porém, sob a influência de um potencial do tipo  $\lambda|\phi|^6$ . As soluções estáticas obtidas a partir da implementação do método BPS a este modelo representa-

vam configurações possuidoras de carga elétrica total nula, as energias correspondentes a essas soluções também resultou quantizada pela vorticidade  $n$ .

Seguindo a lógica estabelecida, o capítulo quatro introduziu o modelo  $CP(2)$ , incluindo o termo de Maxwell-Higgs, proposto em [31]. De início, detalhamos a densidade de Lagrangeana do modelo geral  $CP(N - 1)$ , a partir da qual verificamos que o modelo também suportava soluções estáticas representando configurações com carga elétrica total nula (possibilidade de fixação do gauge temporal  $A^0 = 0$ ). Em seguida, buscamos por configurações radialmente simétricas, com esse intuito, resumimos nosso cenário efetivo para o modelo  $CP(2)$  (consideramos  $N = 3$ ), e utilizamos o ansatz (4.9) e (4.10), juntamente com escolhas convenientes envolvendo a matriz de carga  $Q_{ab}$  e os valores de  $m_i$  que aparecem no ansatz (4.10). Através disso, obtemos duas possíveis soluções constantes para  $\beta(r)$ .

Ainda no capítulo quatro, desenvolvemos uma estrutura de primeira ordem via implementação do método BPS (levando em consideração o vínculo para o potencial que permite essa implementação), da qual obtemos as equações BPS e o valor geral para o limite inferior da energia total do sistema (limite de Bogomol'nyi), que corresponde à energia das possíveis soluções de vórtices. Por conseguinte, desenvolvemos as soluções para esta estrutura de primeira ordem, levando em consideração os dois valores constantes de  $\beta(r)$ . Neste sentido, são desenvolvidos dois cenários diferentes, porém, equivalentes. Ao final, obtém-se o potencial de auto-interação do modelo (definidor dos estados de vácuo), as soluções BPS, assim como as suas energias BPS, que resultam quantizadas pela vorticidade  $m$ . As soluções numéricas obtidas são apresentadas ao final do capítulo.

Enfim, no capítulo cinco, investigamos as soluções de vórtices BPS geradas pelo modelo  $CP(2)$  na presença do termo de Chern-Simons. Para este caso, utilizamos a mesma sistemática descrita no capítulo quatro. Desta forma, iniciamos com a verificação de soluções estáticas, porém, representando configurações possuidoras de fluxo magnético e carga elétrica total não nulos (não há possibilidade de fixação do gauge temporal  $A^0 = 0$ , esta trivialidade não satisfaz a lei de Gauss correspondente). Em seguida, buscamos por soluções radialmente simétricas dentro do cenário do modelo  $CP(2)$ , desse modo, utilizamos mais uma vez o ansatz (4.9) e (4.10), partir do qual também obtivemos duas possíveis soluções constantes para  $\beta(r)$ .

Continuando no capítulo cinco, construímos, via implementação do formalismo BPS, uma

estrutura de primeira ordem, da qual resultaram as equações BPS e o valor geral para a energia que define o limite de Bogomol'nyi (energia total referente às soluções BPS). Desenvolvemos então as soluções propriamente ditas do modelo  $CP(2)$  oriundas da estrutura de primeira ordem, levando-se consideração os diferentes valores de  $\beta(r)$ . Neste sentido, abordamos dois casos diferentes, porém, equivalentes. Em vista disso, concluímos pela existência de apenas um cenário efetivo. Ao final, obtém-se o potencial de autointeração do modelo (através da restrição imposta durante a implementação do formalismo BPS), as soluções de vórtices do tipo BPS, e as energias dessas configurações, que resulta quantizada em termos da vorticidade  $m$ . As soluções numéricas obtidas para modelo são apresentadas ao final do capítulo.

Dentre as perspectivas futuras podemos citar o estudo sobre vórtices de primeira ordem no modelo  $CP(2)$  incluindo os termos de Maxwell e de Chern-Simons simultaneamente.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [2] J. E. Allen, *The early history of solitons (solitary waves)*, Phys. Scripta 57, (1998).
- [3] J. L. Cardoso Jr., *Soliton*, Revista Brasileira de Física, Campinas, SP, v. 10, n. 3, p.695-716, 09 abr. 1980. Disponível em: <<http://sbfisica.org.br/bjp/download/v10/v10a44.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2018.
- [4] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [5] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solution*, Sov. J. Nucl. Phys. 24,449 (1976).
- [6] M. K. Prasad and C.M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975).
- [7] D. Finkelstein, J. Math. Phys. 7, 1218 (1966).
- [8] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 79, 276 (1974).
- [9] A. M. Polyakov, JETP Lett. 20, 194(1974).
- [10] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. 4, 380 (1960).
- [11] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 127, 925 (1962).
- [12] M.A.M. Souza, D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes, *Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos*, Lat. Am. J. of Phys. Educ., vol. 6, n. 1, 2012.

- [13] C. R. Tossato, P. T. da Silva, *A teoria da matéria e as hipóteses cosmológicas de Descartes*, Revista Ideação, v.1, n. 29 (2014). Disponível em: <<http://periodicos.uefs.br/index.php/revistaideacao/article/view/1343/2814>>. Acesso em: 22 jul. 2018.
- [14] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP 5, 1174 (1957).
- [15] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B 61, 45 (1973).
- [16] H. J. Vega, F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. 56, 2564 (1986).
- [17] R Jackiw and . E.J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 64, 2234 (1990).
- [18] R Jackiw, K. Lee and E.J. Weinberg, Phys. Rev. D 42, 3488 (1990).
- [19] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos and R. Menezes, Phys. Rev. D 81, 125014 (2010).
- [20] D. Bazeia, R. Casana, M.M. Ferreira Jr. and E. da Hora, Europhys. Lett. 109, 21001 (2015).
- [21] R. Casana, E. da Hora, D. Rubiera-Garcia and C. dos Santos, Eur. Phys. J. C 75, 380 (2015).
- [22] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., E. da Hora and C. Miller, Phys. Lett. B 718, 620 (2012).
- [23] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, E. da Hora and A. B. F. Neves, Eur. Phys. Rev. J. C 74, 3064 (2014).
- [24] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. Mukhanov, Phys. Lett. B 458, 209 (1999).
- [25] V. Mukhanov and A Vikman, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2005) 004.
- [26] C. Armendariz-Picon and E. A. Lim, J. Cosmol. Astropart. Phys. 08 (2005) 007.
- [27] A. D’Adda, M. Luscher and P. D. Vecchia, Nucl. Phys. B146, 63 (1978).
- [28] E. Witten, Nucl. Phys. B149, 285 (1979).
- [29] A. M. Polyakov, Phys. Lett. 59B, 79 (1975).

- [30] M. Shifman and A. Yung, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 1139 (2007).
- [31] A. Yu. Loginov, *Phys. Rev. D* **93**, 065009 (2016).
- [32] R. Casana, M. L. Dias. E. da Hora, *Phys. Lett. B* **768**, 254 (2017).
- [33] V. Almeida, R. Casana, E. da Hora, *Phys. Rev. D* **97**, 016013 (2018).