

Danúbia Soares Pires

Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos de Realização Mínima no Espaço de Estados via Dados Experimentais

São Luís – MA

2018

Danúbia Soares Pires

**Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman
Nebulosos Evolutivos de Realização Mínima no Espaço
de Estados via Dados Experimentais**

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutora em Engenharia Elétrica na Área de Automação e Controle.

Universidade Federal do Maranhão

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Eletricidade

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís – MA

2018

Danúbia Soares Pires

Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos de Realização Mínima no Espaço de Estados via Dados Experimentais/ Danúbia Soares Pires. – São Luís – MA, 2018-

163 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Maranhão

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Eletricidade, 2018.

1. Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo. 2. Modelagem no Espaço de Estados. 3. Realização Mínima. 4. Sistemas Nebulosos. 5. Identificação de Sistemas.

Danúbia Soares Pires

Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos de Realização Mínima no Espaço de Estados via Dados Experimentais

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutora em Engenharia Elétrica na Área de Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís – MA, 30 de novembro de 2018.

**Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira
Serra- UFMA - Orientador**

**Prof. Dr. Ewaldo Eder Carvalho
Santana - UFMA**

**Prof. Dr. Francisco das Chagas de
Souza - UFMA**

**Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do
Valle Mesquita - IMECC/UNICAMP**

**Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão
Fontoura de Oliveira -
FEEC/UNICAMP**

São Luís – MA
2018

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, Maria Brígida e José Raimundo,
por acreditarem em mim primeiro, antes mesmo que eu pudesse sonhar ser capaz.*

Agradecimentos

A Deus, por providenciar tudo a maneira dEle, da melhor forma possível.

Ao Prof. Dr. Ginalber Serra, pela orientação, paciência e aprendizado. Ser orientador é uma tarefa árdua, digna de aplausos e agradecimentos: muito, muito obrigada.

Aos meus pais, Maria Brígida e José Raimundo, e minhas às irmãs, Renata e Bruna, por se revezarem entre a coxia e a plateia: providenciando tudo nos bastidores, mas também aplaudindo quando se fez necessário. A vocês, meus agradecimentos sempre.

Aos meus alunos, em especial, meus orientandos de iniciação científica durante o doutorado: Daiana Gomes, Fabrício Lima, Hadriel Reis, João Pedro, Kayon Vinícius e Lucas Nascimento, por dividirem comigo o amor pela pesquisa e a aflição na busca por resultados.

Aos amigos, Karla Mendes, Joel Mendes, Grazielle Mesquita e Maria José que sempre torceram para a concretização deste trabalho. Ao Prof. Dr. Orlando pelas conversas e vários copos de café.

Aos colegas e amigos do IFMA do Departamento de Eletroeletrônica. Aos companheiros de laboratório Prof. Dr. Washington Silva e Priscila Lima. Ao Prof. Me. Robson Ramalho, Prof. Wagner Vilar e Prof. Braúna Curvina. A Myrtiany Miranda, Taylanne Rocha e Anamariana Feitosa, o apoio de vocês sempre foi essencial.

Ao secretário da Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, Alcides, por todo apoio e atenção durante o doutorado.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

(Arthur Schopenhauer)

“Bem sei eu que tudo podes, e que nenhum dos teus propósitos pode ser impedido.”(Bíblia Sagrada, Jó 42.2)

Resumo

Uma metodologia para identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo é apresentada nesta tese. A formulação matemática adotada contempla os seguintes aspectos: uma versão off-line do algoritmo de agrupamento *Gustafson-Kessel* (GK) é aplicada a um conjunto de dados experimentais de entrada e saída do sistema dinâmico, para estimação inicial dos parâmetros do antecedente das regras. Da mesma forma, este algoritmo é usado para formular uma versão nebulosa off-line do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID) para estimação inicial dos parâmetros do consequente das regras. Uma vez que o modelo do filtro de Kalman nebuloso é obtido de forma off-line, o mesmo servirá como condição inicial para identificação on-line do filtro de Kalman nebuloso evolutivo. A partir de então, a cada nova amostra dos dados experimentais de entrada e saída do sistema dinâmico, o algoritmo de agrupamento evolutivo eTS (*evolving Takagi-Sugeno*) é usado para estimar de forma online os parâmetros do antecedente, no sentido de aumentar, diminuir ou manter o mesmo número de regras do filtro de Kalman nebuloso evolutivo obtido na amostra imediatamente anterior. Ainda, uma versão nebulosa evolutiva do algoritmo OKID, baseada em agrupamento evolutivo eTS, é usada para estimar o consequente do filtro de Kalman nebuloso evolutivo, composto pelas matrizes de estados, de entrada, de saída, de transmissão direta e de ganho de Kalman, adaptando-se ao comportamento do sistema dinâmico representado por cada nova amostra analisada. Os resultados computacionais, que são comparados aos resultados obtidos por outras metodologias relevantes e largamente citadas na literatura, apresentam dois exemplos de aplicação: o rastreamento de saída de um sistema não linear SISO (*Single Input, Single Output*) e a estimação de parâmetros e estados de um sistema com dados censurados. Nos resultados experimentais duas aplicações práticas, a saber: o rastreamento de trajetória de um foguete modelo *Fogtrein-I* ou FTI (Foguete de Treinamento - Intermediário), utilizado em testes, qualificação e treino no Centro de Lançamento de Alcântara - Maranhão (CLA) e Centro de Lançamento da Barreira do Inferno - Rio Grande do Norte (CLBI); e o rastreamento das saídas de um helicóptero com dois graus de liberdade (*2DoF Helicopter - Quanser*).

Palavras-chave: Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo, Modelagem em Espaço de Estados, Realização Mínima, Sistemas Nebulosos, Identificação de Sistemas.

Abstract

This thesis presents a methodology to evolving fuzzy Kalman filter identification. The mathematical formulation adopted contemplates the following aspects: an offline Gustafson-Kessel (GK) clustering algorithm is applied to input and output experimental data set of dynamic system for rules antecedent parameters initial estimation. Similarly, this algorithm is used to formulate an offline fuzzy version of the Observer/Kalman Filter Identification (OKID) algorithm for rules consequent parameters initial estimation. Since the fuzzy Kalman filter model is obtained from offline way, it will serve as the initial condition for evolving fuzzy Kalman filter online identification. Then, each new sample of input-output experimental data of dynamical system, the eTS (evolving Takagi-Sugeno) evolving clustering algorithm is used to estimate the antecedent parameters to increase, decrease or maintain the same number of rules of the evolving fuzzy Kalman filter obtained in the immediately before sample. An evolving fuzzy version of OKID algorithm, based on eTS evolving clustering is used to estimate the consequent of evolving fuzzy Kalman filter, composed by state matrix, input influence matrix, output influence matrix, direct transmission matrix, and Kalman gain matrix, adapting to the dynamic system behavior represented by each new sample analyzed. Computational results, which are compared to results obtained by other relevant methodologies and widely cited in the literature, present two application examples: the tracking of a non-linear SISO (Single Input, Single Output) system output and the estimation of parameters and states of a system with censored data. Experimental results present two practical applications, such as: trajectory tracking of a Fogtrein-I model rocket or FTI (Foguete de Treinamento – Intermediário, in Portuguese), applied in tests, qualification and training at the Alcântara - Maranhão Launch Center (CLA, Centro de Lançamento de Alcântara, in Portuguese) and the Barreira do Inferno - Rio Grande do Norte Launch Center (CLBI); and the tracking of outputs from helicopter with two degrees of freedom (2DoF Helicopter - *Quanser*).

Keywords: Evolving Fuzzy Kalman Filter, State-Space Modeling, Minimum Realization, Fuzzy Systems, System Identification.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Metodologia Proposta.	25
Figura 2 – Mapeamento nebuloso do espaço de entrada no espaço de submodelos locais.	46
Figura 3 – Conjunto de dados artificiais de Eletroencefalograma (EEG).	51
Figura 4 – Dois primeiros centros obtidos de forma off-line para os dados artificiais de EEG.	52
Figura 5 – Três grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva até a amostra 150.	52
Figura 6 – Quatro grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva até a amostra 179.	53
Figura 7 – Cinco grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva até a amostra 209.	53
Figura 8 – Seis grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva. . . .	54
Figura 9 – Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos.	76
Figura 10 – Saída real e saída do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	80
Figura 11 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo. . . .	81
Figura 12 – Elemento a_{11}	81
Figura 13 – Elemento a_{22}	82
Figura 14 – Elemento b_{11}	82
Figura 15 – Elemento c_{11}	83
Figura 16 – Elemento d	83
Figura 17 – Elemento K_{11}	84
Figura 18 – Elemento K_{21}	84
Figura 19 – Saídas real, dos cinco algoritmos TS de identificação e do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	85
Figura 20 – Saída real e saídas estimadas pelos cinco algoritmos TS de identificação, filtro de Kalman nebuloso evolutivo e OKID clássico.	86
Figura 21 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo, considerando α constante.	89
Figura 22 – Elemento a_{11}	90
Figura 23 – Elemento a_{22}	90
Figura 24 – Elemento b_{21}	91
Figura 25 – Elemento c_{21}	91
Figura 26 – Elemento d_{11}	92
Figura 27 – Elemento K_{11}	92
Figura 28 – Elemento K_{22}	93

Figura 29 – Estimação de estados e parâmetros de um sistema oscilador estocástico quando α é constante no tempo. A variância de ruído do sistema é de $\sigma^2 = 0,1$ (variância total de ruído do sistema é de $0,2$). Observações (círculos em preto) da variável x_1 são corrompidas por um ruído com variância de $0,3$ e censuradas para valores abaixo de 0 . O sinal em azul tracejado representa a trajetória real da variável/parâmetro e o sinal em vermelho tracejado o estimado pela metodologia apresentada nesta tese. O sinal em preto representa a região de confiança de 95% do filtro estimado.	94
Figura 30 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo, considerando α variando com o tempo.	96
Figura 31 – Elemento a_{11}	97
Figura 32 – Elemento a_{22}	97
Figura 33 – Elemento b_{21}	98
Figura 34 – Elemento c_{21}	98
Figura 35 – Elemento d_{11}	99
Figura 36 – Elemento K_{11}	99
Figura 37 – Elemento K_{22}	100
Figura 38 – Estimação de estados e parâmetros de um sistema oscilador estocástico quando α varia com o tempo. A variância de ruído do sistema é de $\sigma^2 = 0,1$ (variância total de ruído do sistema é de $0,2$). Observações (círculos em preto) da variável x_1 são corrompidas por um ruído com variância de $0,3$ e censuradas para valores abaixo de 0 . O sinal em azul tracejado indica a trajetória real da variável/parâmetro e o sinal em vermelho tracejado o estimado pela metodologia apresentada nesta tese.	101
Figura 39 – O foguete FTI (COMAER, 2018).	102
Figura 40 – Ângulo de elevação \mathbf{y}_1	106
Figura 41 – Ângulo de azimute \mathbf{y}_2	106
Figura 42 – Distância \mathbf{y}_3	107
Figura 43 – Erro absoluto entre o ângulo de elevação real e ângulo de elevação estimado pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	107
Figura 44 – Erro absoluto entre o ângulo de azimute real e ângulo de azimute estimado pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	108
Figura 45 – Erro absoluto entre a distância real e a distância estimada pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	108
Figura 46 – Número de regras.	109
Figura 47 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo.	109
Figura 48 – Elemento a_{22}	110
Figura 49 – Elemento c_{11}	110

Figura 50 – Elemento d_{11}	111
Figura 51 – Elemento K_{11}	111
Figura 52 – Helicóptero 2DoF (FILHO; SERRA, 2016).	112
Figura 53 – Diagrama do Helicóptero 2DoF (FILHO; SERRA, 2016).	113
Figura 54 – Sinais de entrada \mathbf{u}_{θ_k} e \mathbf{u}_{ϑ_k} aplicada ao rotor principal e rotor de cauda do helicóptero 2DoF, respectivamente.	116
Figura 55 – Sinais de saída \mathbf{y}_{θ_k} e \mathbf{y}_{ϑ_k} do helicóptero 2DoF, respectivamente.	117
Figura 56 – Sinal de saída e a sequência residual do sinal de saída \mathbf{y}_{θ_k} do helicóptero 2DoF.	118
Figura 57 – Sinal de saída e a sequência residual do sinal de saída \mathbf{y}_{ϑ_k} do helicóptero 2DoF.	119
Figura 58 – Estimação recursiva do estado x_1	120
Figura 59 – Estimação recursiva do estado x_2	120
Figura 60 – Comportamento evolutivo das regras no filtro de Kalman nebuloso.	121
Figura 61 – Comportamento instantâneo dos graus de pertinência normalizados do sistema de inferência do filtro de Kalman nebuloso.	121
Figura 62 – O espaço de valores singulares calculados a partir da decomposição das matrizes de Hankel, para todas as regras, na estimação do consequente do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	122
Figura 63 – Autovalores instantâneos da regra 1.	122
Figura 64 – Autovalores instantâneos da regra 2.	123
Figura 65 – Autovalores instantâneos da regra 3.	123
Figura 66 – Elemento a_{11} da matriz A.	124
Figura 67 – Elemento a_{12} da matriz A.	124
Figura 68 – Elemento a_{21} da matriz A.	125
Figura 69 – Elemento a_{22} da matriz A.	125
Figura 70 – Elemento b_{11} da matriz B.	126
Figura 71 – Elemento b_{12} da matriz B.	126
Figura 72 – Elemento b_{21} da matriz B.	127
Figura 73 – Elemento b_{22} da matriz B.	127
Figura 74 – Elemento c_{11} da matriz C.	128
Figura 75 – Elemento c_{12} da matriz C.	128
Figura 76 – Elemento c_{21} da matriz C.	129
Figura 77 – Elemento c_{22} da matriz C.	129
Figura 78 – Elemento d_{11} da matriz D.	130
Figura 79 – Elemento d_{12} da matriz D.	130
Figura 80 – Elemento d_{21} da matriz D.	131
Figura 81 – Elemento d_{22} da matriz D.	131
Figura 82 – Elemento K_{11} da matriz de ganho de Kalman.	132

Figura 83 – Elemento K_{12} da matriz de ganho de Kalman.	132
Figura 84 – Elemento K_{21} da matriz de ganho de Kalman.	133
Figura 85 – Elemento K_{22} da matriz de ganho de Kalman.	133

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line para o exemplo numérico de um sistema não linear.	78
Tabela 2	–	Valores dos parâmetros do algoritmo eTS de agrupamento nebulosos evolutivo para o exemplo numérico de um sistema não linear.	78
Tabela 3	–	Valor RMS do erro para os cinco algoritmos presentes em (VAFA-MAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018) em comparação ao filtro de Kalman nebuloso evolutivo presente nesta tese.	85
Tabela 4	–	Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line para estimação de parâmetros e estados de um sistema com dados censurados.	87
Tabela 5	–	Valores dos parâmetros do algoritmo eTS de agrupamento nebuloso evolutivo para estimação de parâmetros e estados de um sistema com dados censurados.	87
Tabela 6	–	Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line aplicado ao rastreamento de trajetória de um foguete FTI.	103
Tabela 7	–	Valores dos parâmetros do algoritmo eTS de agrupamento nebuloso evolutivo aplicado ao rastreamento de trajetória de um foguete FTI. . .	103
Tabela 8	–	Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line. . . .	113
Tabela 9	–	Valores dos parâmetros do algoritmo de filtro de Kalman nebuloso evolutivo.	113

Sumário

Trabalhos Publicados	16
1 Introdução	18
1.1 Caracterização da Proposta de Tese	22
1.2 Motivação e Relevância	23
1.2.1 Por que filtro de Kalman nebuloso evolutivo?	24
1.2.2 Por que modelagem em espaço de estados via dados experimentais usando o <i>Observer/Kalman Filter Identification</i> (OKID)?	24
1.2.3 Por que realização mínima?	26
1.3 Contribuições	26
1.4 Objetivos	27
1.4.1 Objetivo Geral	27
1.4.2 Objetivos Específicos	27
1.5 Organização da Tese de Doutorado	28
2 Fundamentação Teórica	29
2.1 Teoria da Realização de Sistemas	30
2.1.1 Controlabilidade no Domínio do Tempo Discreto	31
2.1.2 Observabilidade no Domínio do Tempo Discreto	35
2.1.3 Conceitos Básicos de Realização	37
2.2 Sistemas Nebulosos Evolutivos	41
2.2.1 Sistemas Nebulosos	42
2.2.1.1 Sistema de Inferência Nebuloso Mamdani	43
2.2.1.2 Sistema de Inferência Nebuloso Takagi-Sugeno	44
2.2.2 Agrupamento Nebuloso	45
2.2.2.1 Agrupamento Nebuloso Evolutivo	49
2.2.3 Sistemas Nebulosos Evolutivos	54
3 Metodologia Proposta: Identificação de Filtros de Kalman Nebulosos Evo- lutivos	57
3.1 Estimação Paramétrica do Antecedente	57
3.1.1 Estimação Inicial: Off-line	57
3.1.1.1 Passos para Implementação do Algoritmo de Estimação Paramétrica Off-line do Antecedente - Algoritmo Gustafson- Kessel	59
3.1.2 Estimação Evolutiva: On-line	60
3.1.2.1 Passos para Implementação do Algoritmo de Estimação Paramétrica On-line do Antecedente - Algoritmo Evolutivo	61
3.2 Estimação Paramétrica do Consequente	62

3.2.1	Passos para Implementação do Algoritmo de Estimação Paramétrica On-line do Consequente - Algoritmo OKID nebuloso evolutivo	67
3.3	Estrutura do Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo	68
3.4	Análise de Convergência do Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo	69
3.5	Esquema da Metodologia Proposta	75
4	Resultados	77
4.1	Resultados Computacionais	77
4.1.1	Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado a um Exemplo Numérico de um Sistema Não Linear	77
4.1.2	Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado à Estimação de Parâmetros e Estados de um Sistema com Dados Censurados	86
4.2	Resultados Experimentais	102
4.2.1	Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado ao Rastreamento de Trajetória de Foguetes	102
4.2.2	Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado ao Rastreamento de Saídas de um Helicóptero 2DoF	112
5	Conclusões	134
5.1	Propostas Futuras	135
Referências		136
Apêndices		147
APÊNDICE A Filtro de Kalman		148
A.1	Etapa de propagação	149
A.2	Etapa de assimilação	151
A.3	Filtro de Kalman aplicado a Sistemas Não Lineares	154
A.3.1	Filtro de Kalman Estendido	154
A.3.2	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	156
APÊNDICE B Algoritmo OKID		159

Trabalhos Publicados

Os resultados apresentados nesta tese de doutorado são principalmente (com algumas extensões) baseados em artigos publicados/submetidos a capítulos de livro, congressos e periódicos.

Artigo Publicado em Periódico

1. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. An Approach for Fuzzy Kalman Filter Modeling Based on Evolving Clustering of Experimental Data. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, IOS Press. ISSN 1064–1246. DOI:10.3233/JIFS-17087, vol. 35, no. 2, pp. 1819-1834, 2018.

Artigos Aceitos em Processo de Revisão para Publicação em Periódico

2. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Methodology for Evolving Fuzzy Kalman Filter Identification. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, Springer. ISSN 2005–4092.

3. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Methodology for Modeling Fuzzy Kalman Filters of Minimum Realization from Evolving Clustering of Experimental Data. *ISA Transactions*, 2018, Springer. ISSN 0019–0578.

Capítulo de Livro Publicado

4. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Fuzzy Kalman Filter Black Box Modeling Approach for Dynamic System with Partial Knowledge of States. *Lecture Notes in Electrical Engineering*: Springer, 2017, v. 402, p. 215-225. DOI: 10.1007/978-3-319-43671-5-19.

5. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Evolving Fuzzy Kalman Filter: A Black-Box Modeling Approach Applied to Rocket Trajectory Forecasting. *Communications in Computer and Information Science*. 1ed.: Springer International Publishing, 2018, p. 336-347. DOI: 10.1007/978-3-319-95312-0-29.

Artigos Publicados em Congressos, Simpósios e Conferências

6. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Fuzzy Kalman Filter Black Box Modeling Approach for Dynamic System with Partial Knowledge of States. In *12th Portuguese Conference on*

Automatic Control (CONTROLO), 2016, Guimarães, Portugal. DOI:10.1007/978-3-319-43671-5-19.

7. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Nonlinear Dynamic System Identification based on Fuzzy Kalman Filter. In IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2016, pp. 17-23, Vancouver, Canadá. DOI: 10.1109/FUZZ-IEEE.2016.7737662.

8. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Fuzzy Kalman Filter Modeling Approach from Experimental Data. In Proceedings of the 13th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2016, Volume 1, pp. 318-326, Lisboa, Portugal. ISBN: 978-989-758-198-4.

9. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Identificação Online de um Filtro de Kalman Nebuloso Aplicada a Sistemas Dinâmicos Não Lineares Variantes no Tempo. Anais do Congresso Brasileiro de Automática (XXI CBA), 2016, pp. 3488-3493, Espírito Santo, Brasil. ISSN: 2525-8311.

10. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Metodologia para Identificação de Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo com Aplicações em Estimção Paramétrica e de Estados a Sistemas Dinâmicos Não Lineares. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 2017, Rio Grande do Sul, Brasil.

11. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. A New Approach for Evolving Fuzzy Kalman Filter Applied to Nonlinear Dynamic System Identification. 4th IEEE Latin American Conference on Computational Intelligence (IEEE LA - CCI), 2017, Arequipa, Peru.

12. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Evolving Fuzzy Kalman Filter: A Black-Box Modeling Approach Applied to Rocket Trajectory Forecasting. North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference (NAFIPS 2018), 2018, Fortaleza, Brasil.

13. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Fuzzy Kalman Filter Modeling Based on Evolving Clustering of Experimental Data. IEEE World Congress on Computational Intelligence (IEEE WCCI 2018), 2018, Rio de Janeiro, Brasil.

14. Pires, D. S.; Serra, G. L. O. Modelagem de Filtro de Kalman Nebuloso Baseado em Agrupamento Evolutivo de Dados Experimentais. Congresso Brasileiro de Automática (XXII CBA), 2018, João Pessoa, Brasil.

1 Introdução

Modelagem matemática é a área do conhecimento dedicada ao desenvolvimento ou aprimoramento da representação matemática de um sistema, apresentando uma vasta aplicação na ciência, engenharia, economia, medicina, ecologia, biologia, entre outras (FILHO; SERRA, 2018). Em engenharia, quer seja para fins acadêmicos e/ou práticos, muitos estudos têm sido realizados a fim de desenvolver ferramentas analíticas precisas e efetivas, propor metodologias, procedimentos computacionais e implementação de modelos matemáticos (TORRES; SERRA, 2018). Dentre os principais objetivos da modelagem, podem-se destacar (JUANG, 1994; CASSINI, 2005; JÚNIOR; SERRA, 2017; WALTER; PRONZATO, 1997):

- Analisar fenômenos para um entendimento mais abrangente do mesmo (por exemplo, modelos físicos, químicos, entre outros);
- Estimar quantidades a partir de medições indiretas, para as quais não há sensores disponíveis;
- Testar hipóteses;
- Ensino;
- Predição do comportamento de um sistema dinâmico a curto prazo (controle adaptativo de um sistema dinâmico variante no tempo, por exemplo) ou a longo prazo (previsão de demanda econômica, comportamento biológico de recursos ou espécies em um determinado meio, entre outros);
- Controle;
- Processamento de sinais (tratamento de ruídos, compressão de dados, filtragem, interpolação);
- Detecção de falhas.

A partir da observação, experiência e/ou dados disponíveis que descrevam o comportamento do sistema dinâmico em estudo, o modelo matemático pode ser obtido por três abordagens, a saber: *modelagem caixa branca*, *modelagem caixa cinza* e *modelagem caixa preta* (AGUIRRE, 2015). Na *modelagem caixa branca*, o modelo matemático é obtido a partir das leis físicas que regem o comportamento do sistema dinâmico, exigindo além de um conhecimento detalhado, o equacionamento dos fenômenos envolvidos. Isto pode resultar em um tempo maior para aquisição do modelo, de modo que esta técnica torna-se

por vezes impraticável a sistemas dinâmicos reais. Na *modelagem caixa cinza*, o modelo matemático é obtido pelo conhecimento *a priori* aplicado na *modelagem caixa branca*, acrescido de dados experimentais com relação de causa e efeito entre algumas variáveis físicas do sistema dinâmico. Contudo, como os sistemas dinâmicos reais estão cada vez mais complexos, em alguns casos, nos quais o mapeamento das relações entre as variáveis físicas de entrada e saída do sistema dinâmico torna-se viável somente através de dados experimentais, observa-se a aplicação da abordagem conhecida como *modelagem caixa preta* ou *identificação de sistemas* (BRUNOT; JANOT; CARRILLO, 2017; SABATER; RHOADS, 2017; ANDAVAR; ELANGO, 2018; HWANG, 2018; SARIC; TRANSTRUM; STANKOVIĆ, 2018; DZIEDZIECH et al., 2018).

No contexto de identificação de sistemas, a estimação de estados é um problema significativo para área de controle e processamento de sinais (LJUNG, 1999; YOUNG, 2011; DING, 2014; BRUNOT et al., 2016; HAN; HAN, 2016; RANA; XIANG; WANG, 2018). O filtro de Kalman (FK), em particular, apresenta-se como a ferramenta matemática mais conhecida e utilizada para estimação ótima a partir de medições com ruído. Foi proposto por Rudolph E. Kalman, em 1960, em seu artigo intitulado *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* (KALMAN, 1960), onde descreve uma solução recursiva para o problema de filtragem linear no domínio do tempo discreto, tornando-se uma abordagem padrão para estimação ótima. Desde então, diversas pesquisas sobre o filtro de Kalman vem sendo realizadas, com aplicações em diversas áreas: cálculo de órbita, rastreamento de trajetórias, navegação integrada, posicionamento dinâmico, controle, modelagem, processamento digital de imagens, reconhecimento de padrões, segmentação de imagens, entre outras, devido sua otimalidade, adequação a processamento em tempo real, fácil formulação e implementação (MUSOFF; ZARCHAN, 2005; WELCH; BISHOP, 2006; MORENO; PIGAZO, 2009; KIM, 2011; CHUI; CHEN, 2017; SERRA, 2018).

Alguns resultados relevantes do filtro de Kalman apresentados em (KALMAN, 1960), em relação aos métodos de filtragem da época, são: a formulação e os métodos de solução do problema aplicam-se sem que as dinâmicas determinísticas ou os processos aleatórios tenham propriedades estacionárias, haja vista que muitas aplicações importantes apresentam processos estocásticos não estacionários; uma equação à diferença (ou diferencial) não linear é obtida a partir da matriz de covariância de estimação ótima do erro e, a partir desta, os coeficientes da equação à diferença (ou diferencial) do filtro linear ótimo são obtidas sem muitos cálculos; o filtro de Kalman é compatível com a formulação no espaço de estados dos controladores ótimos para sistemas dinâmicos, onde Kalman provou a utilidade das propriedades dual de estimação e controle para sistemas dinâmicos. Um ano depois, Kalman e Bucy apresentam uma solução de filtragem para o problema em tempo contínuo (KALMAN; BUCY, 1961). Posteriormente, Falb apresenta o filtro Kalman-Bucy de tempo contínuo e dimensão infinita (FALB, 1967).

Uma vez que a teoria do filtro de Kalman é aplicável apenas a sistemas lineares e quase todos os sistemas dinâmicos práticos são não lineares, muitos pesquisadores estiveram envolvidos em estender a teoria de filtragem de Kalman para sistemas não lineares. O Filtro de Kalman Estendido (FKE), primeiramente proposto por Stanley F. Schmidt (SMITH; SCHMIDT; MCGEE, 1962; SCHMIDT, 1966; JAZWINSKI, 1970; JULIER; UHLMANN, 1997), aplica o filtro de Kalman a sistemas não lineares através da linearização de modelos. Apesar de ser um algoritmo recursivo eficiente e um método muito utilizado para estimação de sistemas não lineares, o mesmo possui uma série de limitações: a eficiência é garantida somente em sistemas quase lineares na escala de tempo das atualizações; a linearização somente pode ser aplicada se a matriz Jacobiana existir, contudo, a depender da aplicação, o cálculo de matrizes Jacobianas pode ser um processo muito difícil e suscetível a erros. Isto significa que o FKE possui limitações na implementação, sintonia e confiabilidade. Devido a isto, Julier e Uhlmann propuseram o FKU (Filtro de Kalman *Unscented*) (JULIER; UHLMANN; DURRANT-WHYTE, 1995). O FKU é um método de estimação não linear que propaga informações da média e covariância dos parâmetros, recursivamente, através de transformação não linear. Trata-se de uma extensão direta da Transformação *Unscented* (TU) para estimativas recursivas: pontos sigma (vetores de estado) (mais detalhes no Apêndice A) são utilizados para capturar as estatísticas em vez de calcular as matrizes Jacobianas, de modo que o FKU não use a aproximação linear de funções. Por ser um método preciso de estimação não linear, tem sido amplamente utilizado em aplicações de controle de sistemas não lineares. O princípio da TU é descrito a seguir: pontos sigma são escolhidos a partir da média e covariância; a função não linear é aplicada a cada ponto de modo a gerar um conjunto de pontos sigma propagados; a média e a covariância desse novo conjunto de pontos podem ser determinadas de maneira numérica utilizando relações conhecidas para a média e covariância amostrais; os valores, uma vez determinados, são tomados como estimativas da média e da matriz de covariância do vetor de estado propagado (JULIER; UHLMANN, 2004; KORDIK, 2010).

Apesar de ser mais preciso que o FKE, o FKU ainda possui algumas limitações do FK tradicional: em algumas aplicações (TEIXEIRA; AGUIRRE; TÓRRES, 2010) observa-se uma incompatibilidade entre o ruído característico do sistema dinâmico real e do filtro; o FKU pode apresentar uma resposta lenta a uma perturbação repentina, o que diminui o desempenho do filtro. Na tentativa de superar essas limitações, na literatura observam-se muitas técnicas adaptativas da filtragem de Kalman, que garantam a robustez na modelagem de incertezas e perturbações do sistema (ZANNI et al., 2016). Em (GUO; HUANG; WILLIAMS, 2014), é apresentada uma abordagem de FK adaptativo para previsão de fluxo de tráfego em intervalos de 15 minutos. Em (HAJIYEV; SOKEN, 2014), é realizado um estudo de um algoritmo de estimativa de movimento de satélites, com detecção de falhas. Em (SHI; YAN, 2016), propõe-se um FK adaptativo para rastreamento da por-

tadora de sinal do Sistema de Navegação Global por Satélite (GNSS, do inglês, *Global Navigation Satellite System*), considerando as dinâmicas deste sistema. Em (WU; HUNG, 2017), um filtro de Kalman *Uscented* adaptativo é desenvolvido para estimação de estados de um sistema de trator reboque.

Desde 1980, os sistemas nebulosos têm sido aplicados na modelagem e controle de sistemas dinâmicos. Entre os tipos de sistemas nebulosos, existe uma classe muito importante denominada Takagi-Sugeno (TS) (BABUSKA et al., 2010; BENZAOUIA; HAJJAJI, 2014). Recentemente, tornou-se uma poderosa ferramenta aplicada em modelagem e controle (VUKADINOVIC, 2011; SERRA, 2012). Isto deve-se a estrutura baseada em regras para aproximação de funções, bem como, não linearidades e incertezas (ZADEH, 1965; PIRES; SERRA, 2014; KELLER; LIU; FOGEL, 2016). Observa-se na literatura de FK a utilização da lógica nebulosa no projeto de filtros com robustez em relação à modelagem de incertezas e perturbações do sistema dinâmico. Em (TALEL; FAYCAL, 2013), é apresentada uma abordagem para projeto de um observador não linear para estimar os estados de um sistema TS, estocástico, não linear, no domínio do tempo discreto. Em (BARRAGÁN et al., 2014), é apresentada uma metodologia para modelagem nebulosa TS baseada no filtro de Kalman estendido, cujo modelo pode ser obtido de forma recursiva apenas com base nos dados de entrada e saída. Em (ERMAYANTI et al., 2015), é apresentada uma metodologia para um FK nebuloso usado na estimação da posição de um AUV (Veículo Subaquático Autônomo, do inglês, *Autonomous Underwater Vehicle*). Em (KHASHIRUNNISA; CHAND; KUMARI, 2016), é apresentado o projeto de ajuste dos parâmetros ruído de medição e ruído no sistema dinâmico a partir de lógica nebulosa. Em (PAZOS-REVILLA; GUO; MACHIDA, 2016), é apresentado um método para melhorar a estimativa de posição de um objeto em movimento utilizando regras nebulosas, FKE e Indicador de Potência do Sinal Recebido (RSSI, do inglês, *Received Signal Strength Indicator*). Em (KOPRINKOVA-HRISTOVA; ALEXIEV, 2016), é discutida uma abordagem neuro-fuzzy projetada para a sintonia ótima on-line do FK de um giroscópio dentro de um Microsistema Eletromecânico (MEMS, do inglês, *Micro ElectroMechanical System*); Em (CHAND; KHASHIRUNNISA; KUMARI, 2016), é observado o desempenho do FK, com incorporação da lógica nebulosa para redução do erro de estimação no rastreamento de um objeto em movimento. Em (WANG et al., 2017), é proposto um algoritmo adaptativo de filtro de Kalman aplicado a sistemas dinâmicos lineares no tempo discreto, sem conhecimento *a priori* da matriz de covariância do ruído do sistema dinâmico, com aplicação a um sistema de navegação espacial unidimensional.

Em meados de 2002, os sistemas nebulosos evolutivos surgiram como uma versão de sistemas nebulosos com ajuste adaptativo de parâmetros e estrutura (ANGELOV, 2004; ANGELOV; LUGHOFER; ZHOU, 2008; LUGHOFER, 2008b). Desde então, este tipo de sistema nebuloso tem despertado grande interesse por parte da academia e indústria. Em (LUGHOFER, 2013), realizações e questões acerca da interpretabilidade dos sistemas ne-

bulosos evolutivos, são apresentadas. As abordagens para redução de complexidade em aplicações on-line, critérios para a interpretabilidade baseada em conhecimento do especialista e sistemas nebulosos a partir de fluxo dados, são examinados. Finalmente, são discutidas novas maneiras de tornar os sistemas nebulosos evolutivos mais transparentes e interpretáveis, com níveis de importância de regra e interpretação dos consequentes. Um requisito fundamental dessas investigações é a disponibilidade de todos os conceitos para uso on-line, ou seja, eles devem ser incrementais ou pelo menos permitir processamento rápido. Em (ANGELOV; SADEGHI-TEHRAN; RAMEZANI, 2011), é proposto um sistema nebuloso evolutivo eTS (*evolving Takagi-Sugeno*) para o rastreamento de objetos em fluxo de vídeo, baseado em RDE (Estimativa de Densidade Recursiva, do inglês, *Recursive Density Estimation*). A metodologia mostrou ser significativamente (em ordem de magnitude) mais rápida e computacionalmente mais eficiente para aplicações on-line e em tempo real. Em (PRECUP et al., 2014), um modelo nebuloso evolutivo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) dedicado a sistemas de guindastes, é apresentado. O algoritmo de identificação on-line oferece bases de regras e parâmetros que evoluem continuamente, modificando regras e parâmetros existentes, resultando em uma metodologia mais consistente em comparação com outros modelos nebulosos TSK. Em (LUGHOFER et al., 2015), é proposta uma metodologia para aprendizado via sistemas nebulosos evolutivos, a partir de fluxo de dados em termos de regressão/identificação de sistemas on-line. A metodologia apresenta redução de complexidade on-line no nível de regra, integra um conceito de fusão baseado em uma adjacência combinada - relação de homogeneidade entre dois grupos (regras) - fornece comprimentos de regra reduzidos (melhorando a interpretabilidade) e supera o efeito da maldição de dimensionalidade de forma incremental (suave e flexível), melhorando a estabilidade e precisão com menor complexidade da base de regras, bem como menor comprimento de regra. Em (ALIZADEH et al., 2016), é proposto um sistema nebuloso evolutivo denominado *evolving Heterogeneous Fuzzy Inference System* (eHFIS), o qual pode executar simultaneamente seleção local de entrada e identificação de sistema de maneira evolutiva e integrativa.

1.1 Caracterização da Proposta de Tese

O filtro de Kalman, desde que foi proposto, no ano de 1960, tem sido uma ferramenta eficaz na estimação de estados a partir de medições com ruído. A relativa simplicidade nas equações e otimalidade, confere a este filtro aplicação nas ciências e engenharia, onde observam-se problemas de natureza estocástica tais como predição, separação e detecção de sinais na presença de ruído. Ainda, com o advento de técnicas adaptativas para estender a aplicabilidade do filtro de Kalman a sistemas dinâmicos reais, incorporando incertezas, não linearidades e perturbações, tem-se observado, nos últimos anos, algumas abordagens relativas à modelagem de filtros de Kalman nebulosos, descritas a seguir:

- Desenvolvimento de um conjunto de regras nebulosas para caracterizar o comportamento incerto das matrizes de covariância de processo e de medição. Ajustam-se as matrizes a partir da diferença entre as matrizes de covariância teórica e real determinadas através dos passos de medição e correção no FK clássico. A incerteza ou mudança na matriz é ajustada por funções de pertinência. As matrizes são adaptadas a cada amostra (KUANG et al., 2014; LIN et al., 2015; SOLTANI; KORDESTANI; AGHAEI, 2016; WANG et al., 2017).
- Desenvolvimento de uma combinação baseada em regras nebulosas de um conjunto de filtros de Kalman lineares obtidos a partir de modelagem caixa branca através da linearização de um modelo de sistema dinâmico não linear, considerando diferentes pontos de operação. Métodos de linearização podem ser usados (NGATINI; APRI- LIANI; NURHADI, 2016), tais como série de Taylor, uma vez que são conhecidas as equações não lineares do sistema (HO, 2015; ODRY et al., 2018). A saída do filtro de Kalman nebuloso é calculada a partir da média ponderada de todas as regras.
- Uma nova metodologia, apresentada nesta tese, para modelagem de filtros de Kalman nebulosos baseada em agrupamento evolutivo de dados experimentais de sistemas dinâmicos. A cada nova amostra do fluxo de dados, de maneira evolutiva e recursiva, os parâmetros do antecedente e consequente são estimados, respectivamente, compondo o filtro de Kalman nebuloso evolutivo, resultando em um modelo adaptativo que representa a dinâmica do sistema.

1.2 Motivação e Relevância

A modelagem matemática é uma área importante nas ciências e engenharia que objetiva descrever analiticamente um sistema dinâmico real, cobrindo os seguintes aspectos de interesse: análise de fenômenos; estimação de quantidades; testes de hipóteses; ensino; processamento de sinais (filtragem, predição); controle (WALTER; PRONZATO, 1997). Fisicamente falando, os dados experimentais para aplicações de modelagem, apresentam comportamento dinâmico caracterizado por incertezas, não linearidades, variância no tempo e perturbações, os quais têm atraído a atenção de pesquisadores e especialistas práticos na área, bem como, motivado diversas abordagens a fim de lidar com tais complexidades. Apesar do grande número de contribuições, a proposta de novas metodologias que podem ser aplicadas ao processamento de dados experimentais de maneira adaptativa e rápida, para uma melhor representação de um sistema dinâmico real, ainda está em aberto. A metodologia apresentada nesta tese está inserida neste contexto.

1.2.1 Por que filtro de Kalman nebuloso evolutivo?

Os sistemas evolutivos têm crescido nos últimos anos, sendo aplicados a problemas do mundo real envolvendo modelagem, controle, classificação ou previsão (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010). Entre as principais características destes sistemas, pode-se destacar:

- À medida que o sistema evolui a estrutura do modelo se expande ou diminui, ou seja, não possui uma estrutura de modelo fixa e a mesma não é definida *a priori*;
- Os parâmetros são ajustados (adaptados), com a evolução do sistema;
- O aprendizado e, conseqüentemente, o funcionamento dos sistemas evolutivos é realizado de modo on-line, sendo úteis a aplicações em tempo real.

Os sistemas nebulosos com estrutura Takagi-Sugeno expressam modelos lógicos que, a partir de regras ***SE-ENTÃO***, estabelecem relações qualitativas e quantitativas entre as variáveis do sistema. Os conjuntos nebulosos representam uma interface entre as variáveis qualitativas relacionadas às regras e os dados numéricos de entrada e saída do modelo. A base de regras dos modelos nebulosos permite o uso de informações expressas a partir do conhecimento humano, além de permitir estruturas matemáticas flexíveis, as quais podem representar diversas classes de sistemas complexos não lineares com um certo grau de precisão (BABUSKA, 1998; ZADEH, 2015).

O filtro de Kalman constitui-se em um estimador recursivo ótimo, com equações simples, requerendo poucos cálculos e espaço de memória para armazenagem de dados, sendo aplicado a sistemas em tempo real na estimação de estados de um sistema dinâmico, a partir de uma medição incompleta e/ou com presença de ruído.

A metodologia evolutiva apresentada nesta tese permite, a cada nova amostra, estimar adaptativamente os parâmetros e estrutura do FK nebuloso on-line, aplicado a sistemas reais via dados experimentais. Isto possibilita ao modelo assimilar as características dinâmicas do sistema, tornando o processo de identificação mais preciso.

A metodologia proposta nesta tese integra, em uma só estrutura, três abordagens, a saber: Sistemas Evolutivos, Sistemas Nebulosos e Filtro de Kalman, conforme Figura 1.

1.2.2 Por que modelagem em espaço de estados via dados experimentais usando o *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID)?

A representação em espaço de estados, além de modelar a relação dinâmica de causa e efeito entre as entradas e saídas de um sistema, permite relacionar variáveis internas do mesmo. Neste tipo de representação, observa-se a seleção de um número de

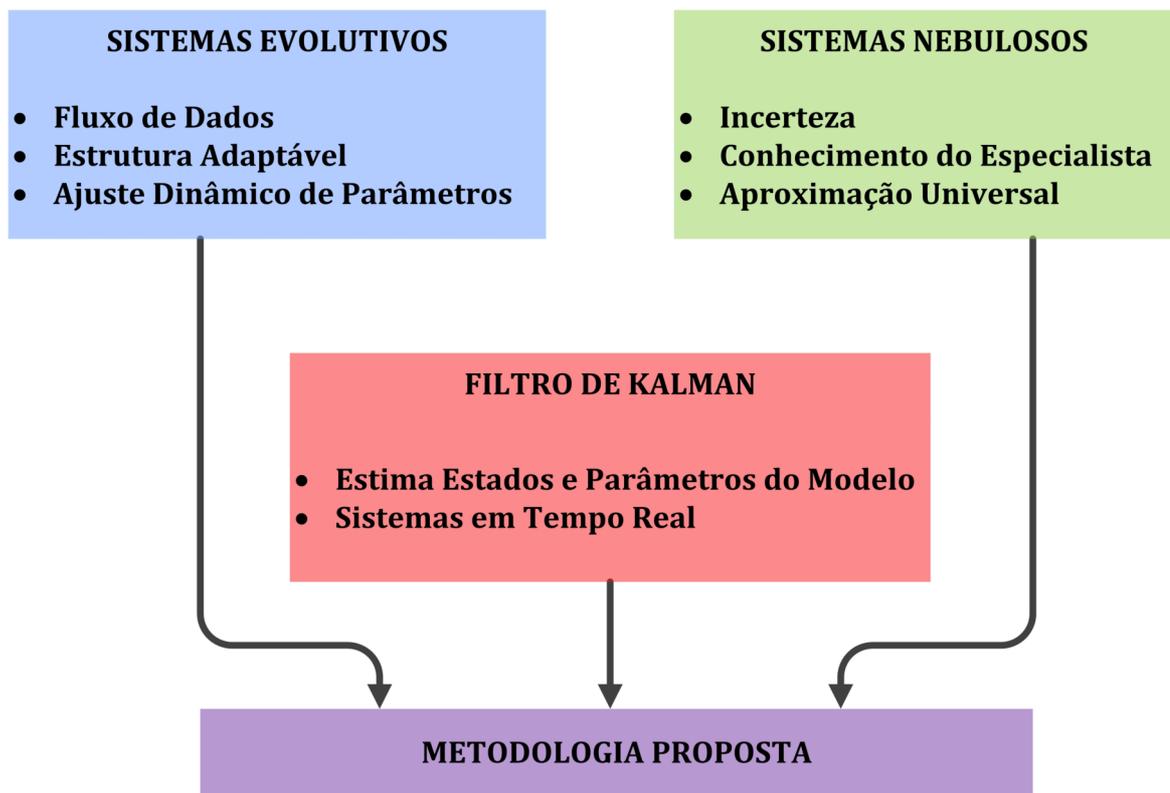


Figura 1 – Metodologia Proposta.

variáveis chave, denominada variáveis de estado (AGUIRRE, 2015). Uma vez que este tipo de representação descreve o sistema no domínio do tempo, cada possível sinal ou variável no sistema em qualquer instante de tempo, pode ser descrita em termos das variáveis de estado e das entradas neste mesmo instante. Conhecendo todas as variáveis de estado em função de um instante de tempo, é possível determinar o sinal ou variável do sistema em qualquer instante. Neste modelo, os parâmetros encontram-se relacionados a partir da seguinte descrição (LATHI, 2007):

1. Um conjunto de equações que relaciona as variáveis de estados com as entradas (equação de estado);
2. Um conjunto de equações que relaciona as saídas com as variáveis de estado e entradas (equação de saída).

A representação em espaço de estados apresenta inúmeras vantagens, entre as quais, podem-se citar:

- Fornecem um modelo matemático de grande generalização, descrevendo sistemas lineares ou não lineares, invariantes no tempo ou com parâmetros variantes no tempo, SISO (*Single Input, Single Output*) ou MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*);

- A notação matricial compacta facilita as manipulações complexas. Além disso, as equações de estado fornecem uma grande quantidade de informações sobre um sistema;
- Equações de estado permitem simulação em computadores digitais de sistemas complexos de ordem superior, lineares ou não e com múltiplas entradas e saídas.

Contudo, apesar de todas as vantagens, identificar um modelo em espaço de estados, de forma eficiente, não se constitui uma tarefa trivial (JUANG, 1994). O método OKID tem sido aplicado com sucesso na identificação de diversos sistemas reais e de forma eficiente identifica modelos em espaço de estados, usando dados de entrada e saída no domínio do tempo, que satisfaçam os critérios de controlabilidade e observabilidade. Nesta tese, é apresentada uma versão evolutiva para estimação do filtro de Kalman nebuloso a cada nova amostra de dados.

1.2.3 Por que realização mínima?

A realização de um sistema dinâmico é o processo de obtenção de um modelo matemático que satisfaça a relação entrada-saída de um sistema. Um sistema dinâmico possui um número infinito de realizações (ALVES, 2005). Na realização mínima é possível obter um modelo de menor dimensão possível dentre todos os realizáveis que tem a mesma relação entrada-saída. O cálculo da realização mínima na modelagem em espaço de estados, permite a estimativa de estados e parâmetros, usando um modelo com a menor dimensão possível no espaço de estados a partir dos dados experimentais (JUANG, 1994). Isto garante diminuição da carga computacional e do tempo de processamento do algoritmo.

1.3 Contribuições

A principal contribuição da metodologia apresentada é a identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo, a partir da combinação inteligente de técnicas previamente existentes na literatura, a saber, agrupamento nebuloso evolutivo, a fim de que o modelo modifique a sua estrutura de maneira on-line, e a estimação paramétrica do modelo a partir do algoritmo OKID (formulado nesta tese em uma versão nebulosa evolutiva), resultando em um modelo de realização mínima em espaço de estados baseado em dados experimentais. A metodologia apresentada é caracterizada pelos seguintes aspectos de interesse:

- **Adaptabilidade do modelo.** A metodologia permite a adaptação da estrutura do modelo e estimação de parâmetros a partir do filtro de Kalman nebuloso identificado de forma evolutiva, sendo baseada em dados experimentais, adequado para

aplicações on-line e em tempo real. Isto é interessante do ponto de vista prático, uma vez que os sistemas dinâmicos reais são não lineares, variantes no tempo ou mesmo estão inseridos em ambientes não estacionários;

- **Otimalidade de custo computacional.** A parametrização do filtro de Kalman nebuloso é baseada na teoria de realização mínima de espaço de estados, isto é, um modelo com as menores dimensões de espaço de estados, entre todos os modelos realizáveis, que possuem as mesmas relações de entrada-saída para o sistema dinâmico real. Consequentemente, resulta na minimização de alocação de memória, demandas computacionais e tempo de execução.
- **Tratabilidade das incertezas nas variáveis inerentes aos dados experimentais.** Um algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) recursivo nebuloso é apresentado para identificar o filtro de Kalman, definindo regiões nebulosas a partir do agrupamento evolutivo de dados experimentais, atenuando as incertezas locais correspondentes devido à presença de ruído e/ou *outliers*¹.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Esta tese apresenta uma metodologia de identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo. Esta metodologia baseia-se em uma combinação de agrupamento nebuloso evolutivo e o método OKID, aqui apresentado em uma versão nebulosa evolutiva, inserido em uma estrutura de regras nebulosas do tipo Takagi–Sugeno, com modelo de realização mínima, em espaço de estados.

1.4.2 Objetivos Específicos

Neste trabalho são apresentados os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver uma metodologia que integra, em uma só estrutura três abordagens, a saber os sistemas evolutivos, sistemas nebulosos e filtro de Kalman;
- Apresentar uma metodologia para modelagem em espaço de estados, considerando o conceito de realização mínima, via dados experimentais;
- Validar a metodologia proposta a partir de resultados computacionais (comparando a técnicas de identificação presentes na literatura que utilizam filtro de Kalman)

¹ Em estatística, um *outlier* é uma observação que é numericamente distante do resto dos dados, desviando-se acentuadamente de outros membros da amostra em que ela ocorre, possivelmente por ter sido gerada por um processo diferente. Os *outliers* podem ocorrer por acaso em qualquer distribuição, como também podem ser indicativos de erros de medição (MEROPI; BIKOS; GEORGE, 2018).

e resultados experimentais para aplicações em potencial tecnológico. Para tanto, apresentam-se dois estudos de caso com aplicações práticas, a saber: o rastreamento de trajetória de um foguete modelo *Fogtrein-I* ou FTI (Foguete de Treinamento - Intermediário), utilizado em testes, qualificação e treino no Centro de Lançamento de Alcântara - Maranhão (CLA) e Centro de Lançamento da Barreira do Inferno - Rio Grande do Norte (CLBI); e o rastreamento de saídas referentes ao ângulo de elevação e ângulo de azimute de um helicóptero com dois graus de liberdade (2DoF *Helicopter - Quanser*) .

1.5 Organização da Tese de Doutorado

Esta tese objetiva apresentar uma Metodologia de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos de Realização Mínima no Espaço de Estados via Dados Experimentais. No capítulo 2 são apresentados conceitos preliminares sobre realização mínima e sistemas nebulosos evolutivos. No capítulo 3 é apresentada a formulação para a estimação do filtro de Kalman nebuloso evolutivo. No capítulo 4, resultados computacionais e experimentais demonstram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta. Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões desta tese, bem como propostas para trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

Ao final de 1950, observou-se que sistemas MIMO, cada vez mais presentes na indústria aeroespacial, controle de processos e aplicações econométricas, não poderiam ser modelados satisfatoriamente usando somente técnicas no domínio da frequência. A partir de então, iniciada pelos trabalhos de Bellman (BELLMAN; KALABA, 1959) e Kalman (KALMAN, 1963), a descrição de sistemas dinâmicos em espaço de estados tem despertado interesse por parte de pesquisadores e práticos, a fim de desenvolver soluções aplicadas a sistemas dinâmicos reais (SCHUTTER, 2000).

Neste contexto, desde 1960, a obtenção de modelos reduzidos de interesse prático tem impulsionado o desenvolvimento de vários algoritmos buscando solucionar o problema de realização mínima em espaço de estado para sistemas lineares invariantes no tempo. Gilbert (GILBERT, 1963) propôs um algoritmo que transformava uma função de transferência em uma descrição em espaço de estados. Kalman (KALMAN, 1963), por sua vez, apresentou uma redução na realização em espaço de estados, baseado na teoria de controlabilidade e observabilidade. Ho e Kalman (HO; KALMAN, 1965) abordaram o problema da realização mínima a partir de um ponto de vista inteiramente novo: a sequência de parâmetros de Markov do sistema. O problema de realização mínima, abrangendo vários tipos de dados de entrada e saída e a geração de uma realização mínima parcial, foi primeiramente estudado por Kalman (KALMAN; DECLARIS, 1971) e Tether (TETHER, 1970) e, posteriormente, por Silverman (SILVERMAN, 1971), Rossen e Lapidus (ROSSEN; LAPIDUS, 1972), os quais também utilizaram parâmetros de Markov. Zieger e McEwen (ZEIGER; MCEWEN, 1974) apresentaram uma combinação do algoritmo Ho-Kalman (HO; KALMAN, 1965) com a técnica de decomposição em valor singular para tratamento de dados com ruído. Kung (KUNG, 1978) apresentou um algoritmo com a técnica de decomposição em valor singular considerando a presença de ruído. Embora diversas técnicas de realização mínima estivessem disponíveis, não existia aplicação direta para a identificação paramétrica modal de estruturas flexíveis até 1985, com o surgimento do ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*) (JUANG; PAPPA, 1985), o qual permite a redução de modelo de sistemas dinâmicos usando dados experimentais. Posteriormente, com uma abordagem similar a este algoritmo, foram desenvolvidas versões do ERA para domínio da frequência e um ERA recursivo (JUANG, 1987), bem como o ERA/DC (*Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlation*) (JUANG; COOPER; WRIGHT, 1988). Logo após, foi proposto o OKID (CHENG et al., 1992) com cálculo dos parâmetros de Markov de um sistema linear, para os quais o modelo em espaço de estados e o observador são determinados simultaneamente. A introdução de um observador nas equações de identificação é o diferencial dessa abordagem em relação às outras até então observadas

na literatura.

No entanto, quando utilizadas abordagens para modelagem que compreendem apenas sistemas lineares invariantes no tempo - em sistemas práticos sujeitos a não linearidades, incertezas, variações paramétricas, entre outras - o modelo matemático não consegue representar estas características dinâmicas. Dentre as técnicas de *Inteligência Computacional* (IC) utilizadas na modelagem desse tipo de sistema dinâmico, destacam-se os sistemas nebulosos. Uma das razões para isto é a capacidade destes sistemas em integrar informação a partir de diferentes fontes, sejam leis físicas, modelos empíricos, medições e heurísticas (BABUSKA, 1998). Ainda, os sistemas nebulosos evolutivos tem-se mostrado como uma poderosa ferramenta que utiliza modelos nebulosos, com atualização on-line de estrutura e parâmetros, sendo ideal para aplicações em sistemas dinâmicos práticos.

Neste sentido, uma vez que esta tese apresenta uma metodologia para modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos, a partir de uma abordagem de realização mínima em espaço de estados utilizando dados experimentais, faz-se necessária a apresentação de alguns conceitos sobre Teoria de Realização de Sistemas e Sistemas Nebulosos Evolutivos.

2.1 Teoria da Realização de Sistemas

A teoria de realização de sistemas trata do estudo e aplicação de métodos que permitem determinar as características dinâmicas de um sistema, através da identificação de um modelo no espaço de estados. Neste campo de estudo, a realização mínima tem sido um aspecto de interesse, uma vez que consiste na determinação de um modelo com a menor dimensão no espaço de estados entre os sistemas realizáveis, preservando as mesmas relações de entrada-saída. Em geral, os métodos para realização mínima em espaço de estados, podem ser classificados em dois grupos principais, a saber (SCHUTTER, 2000):

- Métodos que começam com uma realização não mínima, mais facilmente obtida, para em seguida reduzi-la, ainda preservando as características de controlabilidade e observabilidade, portanto, também mínima. O método de Rosenbrock (ROSEN-BROCK, 1970) é um exemplo deste grupo;
- Métodos de obtenção da realização mínima a partir dos Parâmetros de Markov, utilizando transformações da matriz de Hankel. O método OKID (CHENG et al., 1992) é um exemplo deste grupo.

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade, os quais foram introduzidos por Kalman (KALMAN, 1963), são essenciais na teoria de realização de sistemas, uma vez que, uma questão fundamental na modelagem é saber qual/quais dos estados é controlável

e/ou observável. A controlabilidade está relacionada à condição de um sistema dinâmico atingir um estado particular pela aplicação de uma entrada, chamada de entrada de controle. Já a observabilidade é uma propriedade relacionada à possibilidade de estados iniciais serem ou não observados a partir da saída. Assim, se um estado não é observável, então o controlador não será capaz de determinar seu comportamento a partir da saída do sistema, portanto, essas duas propriedades são definidas como dual.

Nas subseções seguintes, as teorias de controlabilidade e observabilidade serão apresentadas no domínio do tempo discreto, contudo, esta abordagem é similar ao caso contínuo (MOORE, 1981; SIMON, 2006).

2.1.1 Controlabilidade no Domínio do Tempo Discreto

Um sistema invariante no tempo discreto pode ser representado, como segue (JUNANG, 1994):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (2.2)$$

onde \mathbf{x} , \mathbf{u} e \mathbf{y} são os vetores de estado $\iota \times 1$, de controle ou entrada $r \times 1$ e de saída $q \times 1$, respectivamente. Onde ι , r e q correspondem ao número de estados, número de entradas e número de saídas do sistema dinâmico, respectivamente. As matrizes constantes (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D}) representam a operação interna do sistema linear e são usadas para determinar a resposta do sistema para qualquer entrada.

Na amostra p , a solução para a representação em tempo discreto da Equação (2.1), é dada por:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^p \mathbf{x}_0 + \sum_{s=1}^p \mathbf{A}^{s-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{p-s} \quad (2.3)$$

ou na forma matricial compacta

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{A}^p \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{x}_0 é o estado inicial do sistema dinâmico.

Um estado \mathbf{x}_k de um sistema dinâmico é dito ser controlável ou estado controlável se o mesmo pode ser atingido, por alguma ação de controle, a partir de qualquer estado

inicial do sistema considerado, em um intervalo de tempo finito. Se todos os estados são controláveis, o sistema dinâmico é dito ser completamente controlável ou, simplesmente, controlável.

Para determinar a controlabilidade completa, é necessário e suficiente determinar se o estado zero, em vez de todos os estados iniciais, pode ser transferido para todos os estados finais. Para justificar esta afirmação, reescreve-se a Equação (2.4), como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{A}_p \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

que é o equivalente a iniciar pelo estado \mathbf{x}_0 e chegar ao estado final $\hat{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{A}_p \mathbf{x}_0$. Assim, se o sistema pode ir de um estado inicial até um estado qualquer $\hat{\mathbf{x}}_p$, então também pode partir de qualquer \mathbf{x}_0 para qualquer \mathbf{x}_p . Examinando a Equação (2.5) observa-se que a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$ desempenha um papel importante para determinar a controlabilidade do sistema: na teoria de sistemas de equações lineares, é conhecido que esses vetores $\hat{\mathbf{x}}_p$, os quais estão no espaço \mathcal{S}_c , somente podem ser obtidos se gerados pelas colunas desta matriz. Em outras palavras, sempre existe alguma série de controle $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ para transferir o estado inicial para o estado final $\hat{\mathbf{x}}_p$, o qual está em uma coluna do espaço \mathcal{S}_c .

Teorema 1. O sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com dimensão finita e descrito no domínio do tempo discreto, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$, com ordem ι , é controlável se, e somente se, o bloco $\iota \times pr$ da matriz de controlabilidade \mathbf{Q}_p tem posto ι , onde (JUANG; PAPP, 1985)

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Prova. Para provar este teorema, primeiro calcula-se a decomposição em valores singulares de \mathbf{Q}_p , o que resulta em

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^T \\ \mathbf{S}_0^T \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_\iota$, $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{pr}$ e $\Sigma_k = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k]$ com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_k > 0$, onde $\sigma_{1,2,\dots,k}$ correspondem aos valores singulares de \mathbf{Q}_p . Nota-se também que \mathbf{I}_ι e \mathbf{I}_{pr} são matrizes identidade de ordem ι e pr , respectivamente. As matrizes \mathbf{R}_k e \mathbf{R}_0 , \mathbf{S}_k e \mathbf{S}_0 são submatrizes obtidas com a apropriada partição de \mathbf{R} e \mathbf{S} , respectivamente. Nota-se que, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_\iota$ e $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{pr}$, implica em, $\mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k = \mathbf{I}_k$ e $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k = \mathbf{I}_k$, respectivamente. Nesta decomposição, considera-se que o número k de valores singulares não nulos é menor que ι , a ordem do sistema.

Desde que \mathbf{R} é uma matriz não singular, pode-se multiplicar a Equação (2.5) por \mathbf{R}^T , como segue

$$\mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}_p = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} \sum_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1} \\ \mathbf{u}_{p-2} \\ \mathbf{u}_{p-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Definindo $\mathbf{u}_p^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p-1}^T & \mathbf{u}_{p-2}^T & \mathbf{u}_{p-3}^T & \dots & \mathbf{u}_0^T \end{bmatrix}$, as equações acima tomam a forma de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^T \hat{\mathbf{x}}_p \\ \mathbf{R}_0^T \hat{\mathbf{x}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^T \\ \mathbf{S}_0^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \sum_k \mathbf{S}_k^T \mathbf{u}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A partir da Equação (2.9), observa-se que a parte inferior do vetor do lado esquerdo desta, a componente $\mathbf{R}_0^T \hat{\mathbf{x}}_p$, não pode ser alcançada por qualquer vetor \mathbf{u}_p a partir do estado zero. Isto implica que esses vetores $\hat{\mathbf{x}}_p$, os quais fazem a componente $\mathbf{R}_0^T \hat{\mathbf{x}}_p = 0$, não podem ser alcançados a partir do estado nulo, ou seja, o sistema não é controlável.

Para tornar o sistema controlável, é necessário e suficiente eliminar a parte nula no lado direito da equação acima. O único caminho para isto é aumentar o número de valores singulares não nulos k , até $k = \iota$, onde ι corresponde à ordem do sistema. Se $k = \iota$, a Equação (2.9) é dada como segue:

$$\mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \sum_\iota & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\iota^T \\ \mathbf{S}_0^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \sum_\iota \mathbf{S}_\iota^T \mathbf{u}_p \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Desde que \sum e \mathbf{S}_ι possuam posto ι , o vetor de controle \mathbf{u}_p pode ser solucionado como

$$\mathbf{u}_p = (\mathbf{S}_\iota^T)^\dagger \sum_\iota^{-1} \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}_p + \left[\mathbf{I} - (\mathbf{S}_\iota^T)^\dagger \mathbf{S}_\iota^T \right] \alpha = \mathbf{S}_\iota \sum_\iota^{-1} \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}_p + \left[\mathbf{I} - \mathbf{S}_\iota \mathbf{S}_\iota^T \right] \alpha \quad (2.11)$$

onde \dagger significa a pseudo-inversa e α é um vetor arbitrário $\iota r \times 1$. Observa-se que $(\mathbf{S}_\iota^T)^\dagger = \mathbf{S}^T (\mathbf{S}_\iota^T \mathbf{S}_\iota)^{-1} = \mathbf{S}_\iota$, desde que $\mathbf{S}_\iota^T \mathbf{S}_\iota = \mathbf{I}_\iota$, corresponde ao resultado de $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{pr}$, conforme indicado anteriormente. Esta equação implica que, para qualquer vetor desejado $\hat{\mathbf{x}}_p$ e um vetor α arbitrariamente escolhido, existe um vetor de controle \mathbf{u}_p que transferirá o estado zero ao vetor desejado $\hat{\mathbf{x}}_p$. Uma vez que α é um vetor arbitrário, o vetor de controle não é único. Em outras palavras, existe mais de um vetor de controle que pode transferir o estado zero para o estado final desejado $\hat{\mathbf{x}}_p$. A norma do vetor de controle \mathbf{u}_p torna-se

mínima quando $\alpha = 0$. Logo, conclui-se que *o sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com dimensão finita e descrito no domínio do tempo discreto é controlável, se, e somente se, a sua matriz de controlabilidade tem posto igual a ordem do sistema.*

c.q.d.

A quantidade de graus de liberdade de um sistema dinâmico corresponde à mesma quantidade de suas frequências naturais, sendo que para cada uma delas existe um estado de vibração correspondente conhecido por modo de vibrar. Na dinâmica estrutural, os termos matemáticos relacionados às frequências naturais e aos modos próprios de vibrar da estrutura são os autovalores e os autovetores, respectivamente (ALVES, 2005; JÚNIOR, 2006). Estes termos são determinados a partir de um modelo, com número de equações de movimento igual à quantidade de graus de liberdade, que possui certas propriedades dinâmicas associadas ao sistema dinâmico. Em muitas situações práticas é desejável que todos os modos de vibrar de um determinado sistema dinâmico sejam controláveis, tornando importante e aplicável o teorema enunciado a seguir.

Teorema 2. Considere uma ação de controle escalar \mathbf{u}_k aplicada a um sistema em tempo discreto $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}\mathbf{u}_k$, onde \mathbf{b} é um vetor coluna. Considera-se que a matriz constante \mathbf{A} possui autovalores distintos λ_s . O sistema é controlável se, e somente se, o vetor constante $\mathbf{b}_q = \Psi^{-1}\mathbf{b}$ não tenha elementos nulos, onde Ψ é a matriz modal com os autovetores de \mathbf{A} como coluna (JUANG; PAPPA, 1985).

Prova. Para provar este teorema, primeiro forma-se a seguinte matriz de controlabilidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p &= \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{p-1}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ &= \Psi\Psi^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{p-1}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ &= \Psi \begin{bmatrix} \Psi^{-1}\mathbf{b} & \Psi^{-1}\mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} & \cdots & \Psi^{-1}\mathbf{A}^{p-1}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora, nota-se que

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}\mathbf{b} &= \mathbf{b}_q \\ \Psi^{-1}\mathbf{A}\Psi &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l] = \mathbf{\Lambda} \\ \Psi^{-1}\mathbf{A}^2\Psi &= \begin{bmatrix} \Psi^{-1}\mathbf{A}\Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^{-1}\mathbf{A}\Psi \end{bmatrix} = \text{diag}[\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_l^2] = \mathbf{\Lambda}^2 \\ &\vdots \\ \Psi^{-1}\mathbf{A}^p\Psi &= \begin{bmatrix} \Psi^{-1}\mathbf{A}\Psi \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \Psi^{-1}\mathbf{A}\Psi \end{bmatrix} = \text{diag}[\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_l^p] = \mathbf{\Lambda}^p \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substituindo-se a Equação (2.13) na Equação (2.12), resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p &= \Psi \left[\mathbf{b}_q \quad \Lambda \mathbf{b}_q \quad \cdots \quad \Lambda^{p-1} \mathbf{b}_q \right] \\ &= \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \lambda_1 \mathbf{b}_1 & \cdots & \lambda_1^{p-1} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 & \lambda_2 \mathbf{b}_2 & \cdots & \lambda_2^{p-1} \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_\iota & \lambda_\iota \mathbf{b}_\iota & \cdots & \lambda_\iota^{p-1} \mathbf{b}_\iota \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{b}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_\iota \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Se qualquer elemento \mathbf{b}_s do vetor \mathbf{b}_q for zero, por exemplo, $\mathbf{b}_1 = 0$, então a matriz de controlabilidade é reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{Q}_p = \Psi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{b}_2 & \lambda_2 \mathbf{b}_2 & \cdots & \lambda_2^{p-1} \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_\iota & \lambda_\iota \mathbf{b}_\iota & \cdots & \lambda_\iota^{p-1} \mathbf{b}_\iota \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Esta matriz obviamente tem posto menor que ι , pois a segunda matriz no membro direito tem somente $\iota - 1$ linhas não nulas. Portanto, se o sistema é controlável, então todos os elementos \mathbf{b}_s para $s = 1, 2, \dots, \iota$ devem ser não nulos. Nesta prova, observa-se que a matriz de autovetores Ψ possui posto completo ι , pois um sistema com autovalores distintos possui todos os autovetores independentes.

c.q.d.

2.1.2 Observabilidade no Domínio do Tempo Discreto

Um estado \mathbf{x}_p , na amostra p , de um sistema é observável se o conhecimento da entrada \mathbf{u}_k e da saída \mathbf{y}_k sobre um intervalo finito, $0 < k \leq p$, determina completamente o estado \mathbf{x}_p . Se todos os estados são observáveis, o sistema é denominado observável ou completamente observável.

Para determinar a observabilidade, é necessário e suficiente verificar se o estado inicial \mathbf{x}_0 de um sistema com entrada nula, isto é, $\mathbf{u}_k = 0$, pode ser completamente

determinado a partir da saída $\mathbf{y}_{k|k=0,1,\dots,p-1}$, pois conhecido o estado inicial \mathbf{x}_0 e a entrada $\mathbf{u}_{k|k=0,1,\dots,p-1}$ é possível calcular o estado \mathbf{x}_{p-1} , através da Equação (2.4). Nesta equação, tanto o vetor de medição \mathbf{y} , quanto o vetor de entrada \mathbf{u} devem ser conhecidos até a amostra $p - 1$.

Teorema 3. O sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com dimensão finita e descrito no domínio do tempo discreto, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$, de ordem ι com a equação de medição, $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k$, de ordem q é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade \mathbf{P}_p de dimensão $qp \times \iota$, tem posto ι , onde (JUANG; PAPPA, 1985)

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Prova. Para provar este teorema, é suficiente observar se o estado inicial \mathbf{x}_0 pode ser reconstruído a partir do conhecimento do vetor de medição \mathbf{y}_k , no intervalo de amostras $k = 0, 1, \dots, p - 1$, quando $\mathbf{u}_k = 0$. A partir do modelo em tempo discreto, Equação (2.1) e Equação (2.2), considerando $\mathbf{u}_k = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{p-1} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{p-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

A Equação (2.18) pode ser reescrita como segue

$$\mathbf{Y}_p \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{p-1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_p \mathbf{x}_0 \quad (2.19)$$

onde uma única solução existe se, e somente se, \mathbf{P}_p tem posto ι . A única solução deve ser $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_p^\dagger \mathbf{Y}_p$, onde \dagger significa a pseudo-inversa.

c.q.d

Na observabilidade, deseja-se que todos os modos sejam observáveis, ou seja, que os sensores alocados ao sistema dinâmico sejam capazes de medir as grandezas físicas inerentes ao mesmo. Uma vez que a aplicabilidade deste conceito em muitos sistemas

dinâmicos reais faz-se necessária, o teorema a seguir é enunciado para compreensão do conceito de observabilidade.

Teorema 4. Considere o sistema em tempo discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

e um vetor de medição escalar $\mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots$, a partir da equação de medição $\mathbf{y}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}\mathbf{u}_k$, onde \mathbf{c} e \mathbf{d} são vetores linha constantes, indicando que o sistema tem um único sensor de saída. Considera-se que a matriz constante \mathbf{A} tem autovalores distintos λ_s . O sistema é observável se, e somente se, o vetor constante $\mathbf{c}_q = \mathbf{c}\Psi$ não tem elementos nulos, onde Ψ é a matriz modal com autovetores de \mathbf{A} como seus vetores coluna (JUANG; PAPPA, 1985).

Prova. Este Teorema apresenta a mesma natureza do **Teorema 2**, por isso o mesmo pode ser provado pela mesma abordagem usada no referido teorema.

Fisicamente, o **Teorema 4** implica que se existe um único sensor e este está alocado em um nó de um modo, então o modo torna-se não observável. Esta afirmação pode ser facilmente justificada pela transformação do sistema em tempo discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}\mathbf{u}_k$$

em

$$\mathbf{x}_{q(k+1)} = \Lambda\mathbf{x}_{qk} + \mathbf{B}_q\mathbf{u}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{c}_q\mathbf{x}_k + \mathbf{d}\mathbf{u}_k$$

em coordenadas modais, onde $\mathbf{x} = \Psi\mathbf{x}_q$, $\mathbf{B}_q = \Psi^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{c}_q = \mathbf{c}\Psi$ e $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l]$.

Se qualquer elemento \mathbf{c}_s do vetor \mathbf{c}_q for zero, por exemplo $\mathbf{c}_1 = 0$, então a coordenada correspondente \mathbf{x}_{q1} é não observável no sentido que a medição, \mathbf{y}_k , não contém qualquer contribuição da coordenação modal \mathbf{x}_{q1} , conforme segue:

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{q1} \\ \mathbf{x}_{q2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ql} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

c.q.d

2.1.3 Conceitos Básicos de Realização

Os conceitos básicos de realização apresentados nesta subseção, oferecem o arcabouço matemático necessário à identificação de sistemas, onde as teorias envolvendo os

conceitos de controlabilidade e observabilidade, descritos anteriormente, serão utilizados como ferramenta para obtenção da realização de sistemas.

Esta subseção tem o objetivo de mostrar que, a partir de sinais de excitação \mathbf{u} e de sinais de medição \mathbf{y} , é possível obter a realização de um sistema dinâmico. Para tanto, serão apresentadas terminologias e conceitos inerentes a este tipo de identificação de sistemas.

Seja um sistema dinâmico representado no domínio do tempo discreto, como segue:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (2.22)$$

Tomando $\mathbf{u}_{s_0} = 1$ ($s = 1, 2, \dots, r$) e $\mathbf{u}_{s_k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) sendo substituídos nas Equações (2.21) e (2.22). Quando a substituição é realizada para cada elemento da entrada, os resultados podem ser alocados em uma matriz de resposta ao impulso, \mathbf{Y}_k , com dimensão $q \times r$, como segue:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_0 = \mathbf{D} \end{cases} \\ k = 1 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B} \end{cases} \\ k = 2 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \end{cases} \\ k = 3 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_4 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 + \mathbf{B}\mathbf{u}_3 = \mathbf{A}^3\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{x}_3 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$k = \dots \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} = \mathbf{Y}_k \end{cases}$$

que culmina na seguinte sequência:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}, \quad \dots, \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \quad (2.23)$$

Esta sequência de matrizes constantes é conhecida como parâmetros de Markov. Os parâmetros de Markov são usados aqui como base para identificação do modelo no

domínio do tempo discreto, descrito pelas Equações (2.21) e (2.22), representado por quatro matrizes constantes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} . Desde que $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$, somente as três matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} precisam ser determinadas. A partir de dados experimentais, os parâmetros de Markov são obtidos a partir da matriz, descrita a seguir:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k(1,1)} & \mathbf{y}_{k(1,2)} & \cdots & \mathbf{y}_{k(1,r)} \\ \mathbf{y}_{k(2,1)} & \mathbf{y}_{k(2,2)} & \cdots & \mathbf{y}_{k(2,r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{k(q,1)} & \mathbf{y}_{k(q,2)} & \cdots & \mathbf{y}_{k(q,r)} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde cada coluna representa a resposta do sistema dinâmico à r -ésima entrada e cada linha, à q -ésima saída, com r e q sendo o número de entradas e saídas, respectivamente. Por exemplo, o elemento $\mathbf{y}_{k(2,1)}$ é o vetor de medidas relativo à saída 2 devido à entrada 1. A construção da matriz \mathbf{Y}_k , conforme Equação (2.24), é imprescindível para a implementação computacional de métodos baseados em parâmetros de Markov.

Uma realização é o cálculo do tripé $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$, a partir dos parâmetros de Markov da Equação (2.23), para que o modelo no domínio do tempo discreto, descrito pela Equações (2.21) e (2.22), seja satisfeito. Pela definição em (JUANG; PAPPAS, 1985), realização é o processo de construção da representação de um sistema, em espaço de estados, a partir de dados experimentais. Um sistema dinâmico possui um número finito de realizações, as quais produzirão a mesma resposta do sistema para uma entrada particular qualquer (JUANG, 1994; MOREIRA, 1998). A realização mínima fornece um modelo com a menor dimensão em espaço de estados sobre todos os sistemas realizáveis que possuem a mesma relação entrada-saída. Todas as realizações mínimas têm o mesmo conjunto de autovalores, os quais correspondem aos parâmetros modais do sistema (ALVES, 2005).

Considera-se que a matriz de estados \mathbf{A} de ordem ι possui um conjunto completo de autovetores linearmente independentes $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\iota)$, com os autovalores correspondentes $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\iota)$, os quais não são necessariamente distintos. Define-se $\mathbf{\Lambda}$ como uma matriz diagonal de autovalores e $\mathbf{\Psi}$ como a matriz diagonal de autovetores, isto é

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\iota)$$

e

$$\mathbf{\Psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\iota] \quad (2.25)$$

A realização $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ pode então ser transformada na realização $[\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{\Psi}]$. A matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ contém a informação de taxas de amortecimento modal e frequências naturais amortecidas. A matriz $\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}$ define as amplitudes modais iniciais e a matriz

$C\Psi$, as formas modais nos pontos de sensores. Todos os parâmetros modais do sistema dinâmico podem então ser identificados por $[\Lambda, \Psi^{-1}B, C\Psi]$.

A realização de um sistema inicia-se na montagem da matriz de Hankel generalizada $\alpha q \times \beta r$, composta pelos parâmetros de Markov da Equação (2.23) (HO; KALMAN, 1965; CHEN, 1970; WIBERG, 1971; SEINFELD; LAPIDUS, 1974; KAILATH, 1980; CHEN, 1984), conforme segue

$$\mathbf{H}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^k\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{k+\beta-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^k\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{k+\beta-1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{k+\alpha-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+\alpha-1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{k+\alpha+\beta-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde α e β são parâmetros que compõem o número de linhas e o número de colunas da matriz de Hankel, respectivamente.

Para $k = 1$, tem-se

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{\beta-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\beta\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^\alpha\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\alpha+\beta-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Observa-se que $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$ não está incluído em \mathbf{H}_0 . Se $\alpha \geq \iota$ e $\beta \geq \iota$ (com ι sendo a ordem do sistema), a matriz \mathbf{H}_{k-1} tem posto ι . Para confirmar esta afirmação, substituem-se os parâmetros de Markov da Equação (2.23) na Equação (2.26) e decompõe-se \mathbf{H}_{k-1} em três matrizes, assim

$$\mathbf{H}_{k-1} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \quad (2.28)$$

onde \mathbf{P}_α e \mathbf{Q}_β são

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{P}_α , de ordem $q(\alpha + 1) \times \iota$, é a matriz de observabilidade e a matriz \mathbf{Q}_β , de ordem $q \times r(\beta + 1)$, é a matriz de controlabilidade. Se a ordem do sistema é ι , então a dimensão mínima da matriz de estados é $\iota \times \iota$. Se o sistema é controlável e observável, as matrizes em bloco \mathbf{P}_α e \mathbf{Q}_β possuem posto ι . Portanto, a matriz de Hankel também tem posto ι .

Baseados nas propriedades da matriz de Hankel composta pelos parâmetros de Markov (amostras de resposta ao impulso), vários métodos de identificação paramétrica foram desenvolvidos, dentre os quais tem-se o método OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) que é formulado inteiramente no domínio do tempo. Neste método desenvolve-se o cálculo dos parâmetros de Markov de um sistema linear, em que o modelo em espaço de estados é determinado. O OKID apresenta uma abordagem de ganho direto do filtro de Kalman, sendo basicamente similar a uma abordagem de filtragem adaptativa, a qual não depende de informações estatísticas *a priori* e de correlação entre amostras ou cálculo de covariâncias. Por conseguinte, possui muitas aplicações práticas em sistemas reais, por exemplo, um modelo linear de um manipulador remoto de transporte espacial baseado em um código de simulação não linear (SCOTT; GILBERT; DEMEO, 1991) e o telescópio espacial *Hubble* (JUANG et al., 1992).

2.2 Sistemas Nebulosos Evolutivos

Os sistemas nebulosos têm sido aplicados em atividades nas quais são necessárias capacidade de raciocínio semelhantes a dos seres humanos (SILVA, 2014). A modelagem desses sistemas é realizada com base em informações extraídas de um conjunto de dados e/ou conhecimento do especialista (KASABOV; FILEV, 2006; ANGELOV; ZHOU, 2008; MAMDANI; ASSILAN, 1999). Neste tipo de abordagem o sistema é estático, com adaptação paramétrica apenas durante o treino (TUNG; QUEK; GUAN, 2013).

Atualmente, com o aumento da necessidade de processar uma quantidade maior de informações de forma eficiente para a modelagem de sistemas complexos (MACIEL; GOMIDE; BALLINI, 2012b), onde essas informações, geralmente, são disponibilizadas na forma de fluxo de dados, em grandes quantidades, com características dinâmicas e

não estacionárias, observa-se que uma modelagem que possua uma estrutura fixa, pode não ser adequada, como também o retreinamento de modelos torna-se inviável, uma vez que o fluxo de dados dá-se de forma on-line (BOUCHACHIA; LUGHOFFER; SAYED-MOUCHAWEH, 2014). Para atender estes sistemas complexos, em meados de 2002, pesquisas na área de sistemas nebulosos evolutivos (*Evolving Fuzzy Systems-EFS*) surgiram propondo abordagens para resolução deste problema, usando metodologias que possuem mecanismos para treino e atualização contínua de modelos de forma on-line, incorporando adaptativamente à estrutura do modelo a dinâmica presente no fluxo de dados (SILVA, 2014).

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos sobre Sistemas Nebulosos que apresentam a base para o entendimento acerca de Sistemas Evolutivos, que também serão detalhados posteriormente nesta seção.

2.2.1 Sistemas Nebulosos

Os sistemas podem ser representados por modelos matemáticos de diferentes formas, seja por equações algébricas, diferenciais, espaço de estados, funções de transferência, entre outros. Iniciado por Zadeh (ZADEH, 1965), o conceito de modelagem nebulosa baseia-se em regras $SE < antecedente > ENTÃO < consequente >$, as quais descrevem relações que estabelecem valores qualitativos e quantitativos entre as variáveis do sistema.

A estrutura das regras nebulosas facilita o entendimento e análise do modelo tornando-se próximo ao entendimento humano sobre o mundo real. Neste sentido, a caracterização de valores em termos linguísticos, que ocorre na modelagem nebulosa, pode ser mais precisa que valores numéricos. Somado a isso, as funções de pertinência garantem generalização para situações descritas pelas regras. Em termos matemáticos, o processo de inferência em modelos nebulosos pode ser entendido como uma interpolação entre os resultados das regras individuais.

A modelagem nebulosa possui diversas vantagens em relação a outras técnicas de modelagem inteligente, tais como redes neurais (HAYKIN, 1994), redes de função de base radial (CHEN; COWAN; GRANT, 1991), entre outras. Dentre estas vantagens, podem ser citadas (BABUSKA, 1998):

- Modelos nebulosos integram o processamento lógico de informação com propriedades matemáticas de aproximador universal de funções. O modelo baseado em regras permite formalizar o conhecimento do especialista e ao mesmo tempo garante flexibilidade matemática da estrutura, a qual pode representar mapeamentos não lineares complexos (WANG, 1994). Uma vez que a modelagem nebulosa integra processamento simbólico e numérico dentro de uma única estrutura, não restringe-se a áreas que necessitam de conhecimento do especialista, uma vez que o modelo nebuloso

pode ser obtido a partir de algoritmos de aprendizado de dados, combinados a técnicas de regressão convencional (TAKAGI; SUGENO, 1985; KOSKO, 1994; LIN, 1994).

- A estrutura baseada em regras é útil na análise de modelos nebulosos adquiridos a partir de dados numéricos, desde que as regras obtidas devam revelar uma descrição qualitativa útil do sistema que gerou os dados. Tal descrição pode ser confrontada e possivelmente combinada com o conhecimento do especialista, que auxilia, ao mesmo tempo, no conhecimento e validação do sistema (ZADEH, 2015).
- O uso de termos linguísticos qualitativos nas regras pode ser considerado como um tipo de quantização da informação. Dependendo do número de valores qualitativos considerados, modelos em diferentes níveis de abstração e precisão podem ser desenvolvidos para um dado sistema, cada modelo serve para um propósito distinto, seja predição, análise, projeto de controle, monitoramento, entre outros (WANG, 1994).

Nas relações entre as variáveis em um sistema nebuloso representadas pela estrutura $SE < antecedente > ENTÃO < consequente >$, o antecedente consiste em uma proposição nebulosa do tipo “ \tilde{x} é F ”, onde \tilde{x} é a variável linguística e F é um conjunto nebuloso definido como termo linguístico. Dependendo da forma do consequente, há dois tipos de sistema de inferência nebuloso (SERRA, 2005):

- *Sistema de inferência nebuloso Mamdani*, onde o antecedente e o consequente são formados por proposições nebulosas.
- *Sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno*, onde o antecedente é formado por uma proposição nebulosa e o consequente é uma expressão funcional das variáveis linguísticas definidas no antecedente.

2.2.1.1 Sistema de Inferência Nebuloso Mamdani

O sistema de inferência nebuloso Mamdani, proposto por E. H. Mamdani, como forma de expressar o conhecimento qualitativo de determinada aplicação, apresenta, sem perda de generalidade, uma coleção de regras na forma (SERRA, 2005):

$$R^i : SE \quad \tilde{x}_1 \text{ é } F_{j|\tilde{x}_1}^i \quad E \quad \dots \quad E \quad \tilde{x}_n \text{ é } F_{j|\tilde{x}_n}^i \quad ENTÃO \quad \tilde{y} \text{ é } \mathcal{G}_{j|\tilde{y}}^i$$

Para cada regra $i \in \{1, 2, \dots, c\}$, onde c é o número de regras, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ são as variáveis linguísticas do antecedente (entrada) e \tilde{y} é a variável linguística do consequente (saída) definidas em seus respectivos universos de discurso $\mathcal{U}_{\tilde{x}_1}, \dots, \mathcal{U}_{\tilde{x}_n}$ e \mathcal{Y} . Os conjuntos nebulosos $F_{j|\tilde{x}_1}^i, F_{j|\tilde{x}_2}^i, \dots, F_{j|\tilde{x}_n}^i$ e $F_{j|\tilde{y}}^i$, correspondem aos valores linguísticos utilizados na partição dos universos de discurso das variáveis linguísticas do antecedente e do consequente, ou seja, $F_{j|\tilde{x}_t}^i \in \{F_{1|\tilde{x}_t}^i, F_{2|\tilde{x}_t}^i, \dots, F_{p_{\tilde{x}_t}|\tilde{x}_t}^i\}^{t=1,2,\dots,c}$ e $\mathcal{G}_{j|\tilde{y}}^i \in \{\mathcal{G}_{1|\tilde{y}}^i, \mathcal{G}_{2|\tilde{y}}^i, \dots, \mathcal{G}_{p_{\tilde{y}}|\tilde{y}}^i\}$, onde

$p_{\tilde{x}_t}$ e $p_{\tilde{y}}$ correspondem aos números de partições dos universos de discursos relacionados às variáveis linguísticas \tilde{x}_t e \tilde{y} , respectivamente. A variável \tilde{x}_t pertence ao conjunto nebuloso $F_{j|\tilde{x}_t}^i$ com um valor $\mu_{F_{j|\tilde{x}_t}}^i$ definido através de uma função de pertinência $\mu_{\tilde{x}_t}^i : R \rightarrow [0, 1]$, onde $\mu_{F_{j|\tilde{x}_t}}^i \in \left\{ \mu_{F_{1|\tilde{x}_t}}^i, \mu_{F_{2|\tilde{x}_t}}^i, \dots, \mu_{F_{p_{\tilde{x}_t}|\tilde{x}_t}}^i} \right\}$. A variável \tilde{y} pertence ao conjunto nebuloso $\mathcal{G}_{j|\tilde{y}}^i$ com um valor $\mu_{\mathcal{G}_{j|\tilde{y}}}^i$ definido através de um função de pertinência $\mu_{\tilde{y}}^i : R \rightarrow [0, 1]$ onde $\mu_{\mathcal{G}_{j|\tilde{y}}}^i \in \left\{ \mu_{\mathcal{G}_{1|\tilde{y}}}^i, \mu_{\mathcal{G}_{2|\tilde{y}}}^i, \dots, \mu_{\mathcal{G}_{p_{\tilde{y}}|\tilde{y}}}^i} \right\}$. Cada regra tem a seguinte implicação nebulosa

$$\mathfrak{R}^i : \mu_{F_{j|\tilde{x}_1}}^i \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_2}}^i \otimes \dots \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_n}}^i \rightarrow \mu_{\mathcal{G}_{1|\tilde{y}}}^i \quad (2.29)$$

onde \otimes representa uma norma-t, $\mu_{F_{j|\tilde{x}_1}}^i \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_2}}^i \otimes \dots \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_n}}^i$ corresponde à relação nebulosa das entradas linguísticas entre si, sobre os universos de discurso $\mathcal{U}_{\tilde{x}_1} \times \mathcal{U}_{\tilde{x}_2} \times \dots \times \mathcal{U}_{\tilde{x}_n}$ e $\mu_{\mathcal{G}_{j|\tilde{y}}}^i$ corresponde à saída definida sobre o universo de discurso \mathcal{Y} . O conjunto dessas implicações corresponde a uma única relação nebulosa em $\mathcal{U}_{\tilde{x}_1} \times \mathcal{U}_{\tilde{x}_2} \times \dots \times \mathcal{U}_{\tilde{x}_n} \times \mathcal{Y}$ dada por

$$\mathfrak{R} : \bigvee_{i=1}^c \left[\mu_{F_{j|\tilde{x}_1}}^i \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_2}}^i \otimes \dots \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_n}}^i \otimes \mu_{\mathcal{G}_{1|\tilde{y}}}^i \right] \quad (2.30)$$

onde \bigvee é uma norma-s.

Assim, a saída nebulosa é expressa por:

$$\mathcal{G}_{\tilde{y}} = \mathfrak{R} \circ \left(\mu_{F_{j|\tilde{x}_1}^*}^i \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_2}^*}^i \otimes \dots \otimes \mu_{F_{j|\tilde{x}_n}^*}^i \right) \quad (2.31)$$

onde \circ é um operador de composição baseada em inferência, do tipo max-min ou max-produto; \tilde{x}_t^* é algum ponto em \mathcal{U}_{x_t} .

2.2.1.2 Sistema de Inferência Nebuloso Takagi-Sugeno

O sistema de inferência nebuloso TS apresenta no conseqüente uma expressão funcional das variáveis linguísticas do antecedente. A i^{a} $[i=1, 2, \dots, c]$ -ésima regra TS, onde c corresponde ao número de regras é descrita como segue (SERRA, 2005):

$$R^i : \text{SE } \tilde{x}_1 \text{ é } F_{j|\tilde{x}_1}^i \text{ E } \dots \text{ E } \tilde{x}_n \text{ é } F_{j|\tilde{x}_n}^i \text{ ENTÃO } \tilde{y}_i = f_i(\tilde{x}) \quad (2.32)$$

O vetor $\tilde{x} \in \mathfrak{R}^n$ contém as variáveis linguísticas do antecedente, sendo que cada variável linguística possui seu próprio universo de discurso $\mathcal{U}_{\tilde{x}_1}, \dots, \mathcal{U}_{\tilde{x}_n}$ particionado pelos conjuntos nebulosos representando os termos linguísticos correspondentes. A variável $\tilde{x}_t |^{t=1, 2, \dots, n}$ pertence ao conjunto nebuloso $F_{j|\tilde{x}_t}^i$ com um valor $\mu_{F_{j|\tilde{x}_t}}^i$ definido por uma função de pertinência $\mu_{\tilde{x}_t}^i : R \rightarrow [0, 1]$, com $\mu_{F_{j|\tilde{x}_t}}^i \in \left\{ \mu_{F_{1|\tilde{x}_t}}^i, \mu_{F_{2|\tilde{x}_t}}^i, \dots, \mu_{F_{p_{\tilde{x}_t}|\tilde{x}_t}}^i} \right\}$, onde $p_{\tilde{x}_t}$

corresponde ao número de partições do universo de discurso associado à variável linguística \tilde{x}_t . O grau de ativação, h_i , para cada regra i é descrito como segue:

$$h_i(\tilde{x}) = \mu_{F_j|\tilde{x}_1}^i \otimes \mu_{F_j|\tilde{x}_2}^i \otimes \dots \otimes \mu_{F_j|\tilde{x}_n}^i \quad (2.33)$$

onde \tilde{x}_t^* é algum ponto em $\mathcal{U}_{\tilde{x}_t}$. O grau de ativação normalizado para a regra i é definido como segue:

$$\gamma_i(\tilde{x}) = \frac{h_i(\tilde{x})}{\sum_{r=1}^c h_r(\tilde{x})} \quad (2.34)$$

o que implica em

$$\sum_{i=1}^c \gamma_i(\tilde{x}) = 1 \quad (2.35)$$

A resposta do modelo TS corresponde a uma soma ponderada dos consequentes, ou seja, corresponde à uma combinação convexa das funções locais (modelos), f_i

$$y = \sum_{i=1}^c \gamma_i(\tilde{x}) f_i(\tilde{x}) \quad (2.36)$$

Logo, o modelo TS corresponde a um mapeamento do espaço de entrada (antecedente) à região convexa (politopo) no espaço que compreende os submodelos locais definidos pelos parâmetros do consequente, conforme Figura 2. Observa-se o mapeamento nebuloso do espaço de entrada no espaço de submodelos locais, onde o espaço do antecedente do sistema dinâmico é dividido em regiões nebulosas, nas quais os submodelos com expressões funcionais do consequente são válidos. Esta propriedade auxilia na análise de modelos TS num contexto de sistema linear robusto, seja para identificação, como para projeto de controladores com características de malha-fechada desejadas ou análise de estabilidade (SERRA, 2005).

2.2.2 Agrupamento Nebuloso

O objetivo do agrupamento de um conjunto de dados é a classificação dos componentes deste conjunto de acordo com as similaridades entre si, bem como a organização dos mesmos em grupos. As técnicas de agrupamento são métodos de aprendizado não supervisionados, uma vez que não utilizam identificadores de classe definidos *a priori*. Várias definições de agrupamento podem ser formuladas, dependendo do objetivo do agrupamento. Uma definição muito usada é a de similaridade, a partir da qual um grupo de objetos (dados) possuem características que os aproximam mais em relação a outros dados que pertencem aos demais grupos (BEZDEK, 1981). O termo similaridade deve ser

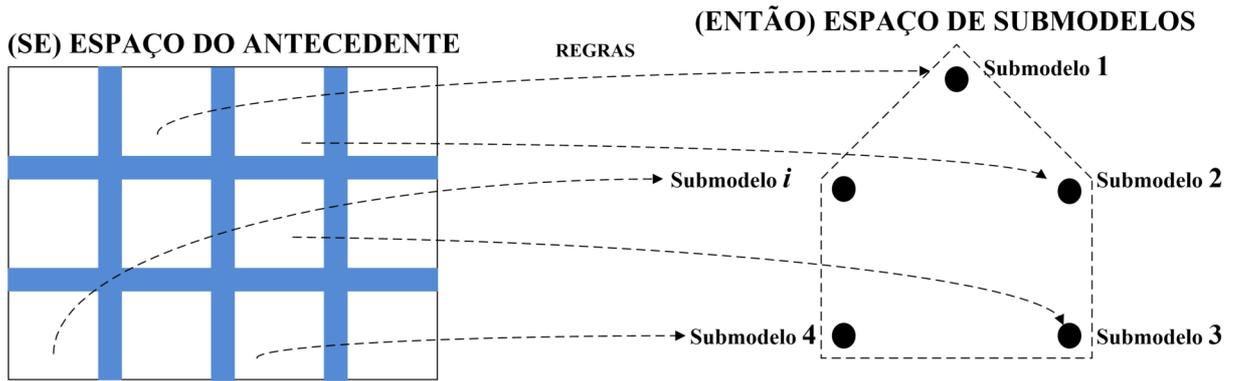


Figura 2 – Mapeamento nebuloso do espaço de entrada no espaço de submodelos locais.

entendido em termos matemáticos e frequentemente é definido pela norma da distância. A distância pode ser mensurada entre os próprios vetores de dados ou em relação ao vetor de dados e algum objeto protótipo (centro) de um grupo. Usualmente, os protótipos não são antecipadamente conhecidos e surgem com os algoritmos de agrupamento de forma simultânea ao particionamento dos dados.

As metodologias de agrupamento podem ser aplicadas para dados quantitativos (numéricos), qualitativos (categóricos) ou a combinação de ambos. No problema de identificação de sistemas dinâmicos, o agrupamento quantitativo de dados é considerado, onde normalmente os dados utilizados são observações das entradas e saídas do sistema dinâmico. Cada observação consiste de n variáveis medidas. Um conjunto de N observações é definido por $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_k | k = 1, 2, \dots, N\}$, onde $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, \dots, z_{nk}]^T$, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^n$. A matriz \mathbf{Z} , de ordem $n \times N$, denominada matriz de dados, representa este conjunto de observações, conforme segue:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nN} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde as colunas e as linhas da matriz correspondem aos objetos e atributos, respectivamente. Em modelagem, os objetos correspondem a amostras de sinais, geralmente, relacionadas às entradas e às saídas dos sistemas dinâmicos, e os atributos são variáveis físicas observadas no sistema (por exemplo, posição, tensão, velocidade, temperatura).

Para análise e entendimento das metodologias de identificação baseadas em agrupamentos nebulosos, o conceito de partição nebulosa torna-se imprescindível. Os particionamentos nebulosos e possibilísticos podem ser vistos como uma generalização do particionamento rígido, o qual é formulado em termos da teoria clássica de conjuntos.

Partição Rígida

O objetivo de um agrupamento é particionar um conjunto de dados \mathbf{Z} em c grupos. Usando a definição clássica de conjuntos, uma partição rígida de \mathbf{Z} pode ser definida como uma família de subconjuntos $\{\mathbf{T}_i | 1 \leq i \leq c\} \subset P(\mathbf{Z})$ com as seguintes propriedades (BABUSKA, 1998; BEZDEK, 1981):

$$\bigcup_{i=1}^c \mathbf{T}_i = \mathbf{Z}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{T}_i \cap \mathbf{T}_j = \emptyset, \quad 1 \leq i \neq j \leq c, \quad (2.39)$$

$$\emptyset \subset \mathbf{T}_i \subset \mathbf{Z}, \quad 1 \leq i \leq c. \quad (2.40)$$

de acordo com a Equação (2.38), os subconjuntos \mathbf{T}_i contêm todos os dados de \mathbf{Z} . Os subconjuntos devem ser disjuntos, conforme Equação (2.39) e nenhum deles é vazio, através da Equação (2.40). Em termos de funções de pertinência, as Equações (2.38), (2.39) e (2.40) podem ser expressas por:

$$\bigvee_{i=1}^c \mu_{\mathbf{T}_i} = 1, \quad (2.41)$$

$$\mu_{\mathbf{T}_i} \wedge \mu_{\mathbf{T}_j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq c, \quad (2.42)$$

$$0 < \mu_{\mathbf{T}_i} < 1, \quad 1 \leq i \leq c. \quad (2.43)$$

onde $\mu_{\mathbf{T}_i}$ é a função de pertinência de \mathbf{T}_i . Para fins de simplificação de notação será usado μ_i em vez de $\mu_{\mathbf{T}_i}$. Além disso, na representação de pertinência $\mu_i(\mathbf{z}_k)$ será usada μ_{ik} . Uma matriz $\mathbf{U} = [\mu_{ik}]$ de ordem $c \times N$, representa uma partição rígida se, e somente se, os elementos dessa matriz satisfaçam as seguintes condições:

$$\mu_{ik} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.44)$$

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.45)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.46)$$

O espaço de partição rígida para \mathbf{Z} pode ser definido pelo seguinte conjunto (BEZ-DEK, 1981), como segue:

$$M_{hc} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{c \times N} \mid \mu_{ik} \in \{0, 1\}, \forall i, k; \sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \forall k; 0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \forall i \right\} \quad (2.47)$$

Partição Nebulosa

Generalizando a partição rígida para o caso nebuloso, μ_{ik} obtém valores em $[0, 1]$. As condições para a matriz de partição nebulosa, análogas às Equações (2.44), (2.45) e (2.46), são descritas como segue:

$$\mu_{ik} \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.49)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.50)$$

O espaço de partição nebulosa para \mathbf{Z} pode ser definido pelo seguinte conjunto (BABUSKA, 1998), como segue:

$$M_{fc} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{c \times N} \mid \mu_{ik} \in [0, 1], \forall i, k; \sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \forall k; 0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \forall i \right\} \quad (2.51)$$

A i -ésima linha da matriz de partição nebulosa \mathbf{U} contém valores da i -ésima função de pertinência do subconjunto nebuloso \mathbf{T}_i de \mathbf{Z} . A Equação (2.49) mostra que a soma total de cada coluna é 1, assim a pertinência total de cada \mathbf{z}_k em \mathbf{Z} é igual a um.

Partição Possibilística

A partição possibilística, a forma mais geral de partição nebulosa, pode ser obtida na mudança da restrição, contida na Equação (2.49). Contudo, esta restrição não pode ser completamente removida, uma vez que garante que a cada ponto pode ser atribuído pelo menos um dos subconjuntos nebulosos com uma função de pertinência maior que zero. As condições para a obtenção da matriz de partição nebulosa possibilística, são as seguintes:

$$\mu_{ik} \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.52)$$

$$\exists i, \mu_{ik} > 0, \quad \forall k, \quad (2.53)$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.54)$$

O espaço de partição possibilística para \mathbf{Z} pode ser definido pelo seguinte conjunto (BABUSKA, 1998), como segue:

$$M_{pc} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{c \times N} \mid \mu_{ik} \in [0, 1], \forall i, k; \forall k, \exists i, \mu_{ik} > 0; 0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \forall i \right\} \quad (2.55)$$

2.2.2.1 Agrupamento Nebuloso Evolutivo

Nos últimos anos, vários algoritmos de agrupamento foram propostos na literatura, sendo que a maioria deles são baseados no conceito de aprendizagem off-line, em batelada, onde todo o conjunto de dados está disponível previamente. Como exemplo destes algoritmos, tem-se o *K-means* e o *Fuzzy C-Means*. Entretanto, em muitas aplicações, os dados são adquiridos em tempo real, exigindo um aprendizado on-line, baseando-se em uma estratégia evolutiva, que permite ao algoritmo atualizar os grupos a cada nova amostra de dados (INÁCIO, 2005), como exemplo deste tipo de abordagem temos o *Evolving Clustering Method* (ECM) (KASABOV; SONG, 2002), o *eClustering* (ANGELOV; FILEV, 2004) e o *Evolving Vector Quantization* (eVQ) (LUGHOFER, 2008b).

O GK (*Gustafson-Kessel*) é um exemplo de algoritmo de agrupamento que pode ser usado em aplicações off-line e on-line, o qual permite a identificação de grupos de diferentes formas e orientações no espaço. O GK emprega uma técnica de adaptação da métrica de distância à forma de cada grupo, através da estimação da matriz de covariância do grupo, a qual será usada para encontrar uma matriz de adaptação da norma. Apresenta também a vantagem de ser relativamente insensível à escala dos dados e à inicialização da matriz de partição. Diversas aplicações para o algoritmo GK têm sido propostas na literatura, tais como previsão de séries temporais, modelagem de sistemas dinâmicos, diagnóstico e prognóstico de falhas (BABUSKA, 1998).

O algoritmo GK utiliza a métrica de *Mahalanobis*, descrita como segue:

$$d_{ik}^2 = (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i)^T \mathbf{O}_i (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i) \quad (2.56)$$

onde d_{ik} representa a distância entre as amostras de dados $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, \dots, z_{nk}]$, com $k = 1, \dots, N$; \mathbf{v}_i corresponde aos centros dos grupos, onde $i = 1, \dots, c$; N é o número de amostras de dados; n corresponde à dimensão dos dados e c corresponde ao número de

grupos. A matriz \mathbf{O}_i , a qual define a forma e orientação de cada grupo no espaço, é calculada por:

$$\mathbf{O}_i = [\rho_i \det(\mathbf{F}_i)]^{1/n} \mathbf{F}_i^{-1} \quad (2.57)$$

onde ρ_i , corresponde ao volume do grupo, com $i = 1, \dots, c$. A matriz \mathbf{F}_i , $i = 1, \dots, c$, é a matriz de covariância do grupo, calculada como segue:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i) (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i)^T}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m} \quad (2.58)$$

onde μ_{ik} é o grau de pertinência da amostra de dados, com $i = 1, \dots, c$ e $k = 1, \dots, N$; m é o coeficiente nebuloso. No algoritmo GK, um processo iterativo é utilizado para determinar os parâmetros dos grupos (o centro do grupo \mathbf{v}_i e a matriz de covariância \mathbf{F}_i), os quais são usados para definir a distância d_{ik} e o grau de pertinência μ_{ik} .

Em algoritmos de agrupamento evolutivos, faz-se necessário que o agrupamento seja recursivo, com estimação do número de grupos e adaptação de parâmetros a cada nova amostra de dados. Nestes algoritmos, o número de grupos não é conhecido *a priori*. Assim, os mesmos são estimados a partir de uma estratégia de avaliação, na qual a cada nova amostra de dados, observa-se se a mesma pertence ou não a um grupo existente: caso pertença a um grupo já definido, então os parâmetros desse grupo (centro e matriz de covariância) são atualizados; caso não pertença a nenhum dos grupos, então ela pode ser usada para definir um novo grupo. A capacidade de uma amostra tornar-se o centro de um grupo é avaliada a partir de seu potencial. Uma das formas de calcular recursivamente o potencial dos dados é através da função de *Cauchy*, dada como segue:

$$D_k(z_k) = \frac{k-1}{(k-1) \left(\sum_{j=1}^{r+q} z_{kj}^2 + 1 \right) + b_k - 2 \sum_{j=1}^{r+q} z_{kj} g_{kj}} \quad (2.59)$$

onde $D_1(z_1) = 1$; $k = 2, 3, \dots$; $b_k = b_{k-1} + \sum_{j=1}^{r+q} z_{(k-1)j}^2$; $b_1 = 0$; $g_{kj} = g_{(k-1)j} + z_{(k-1)j}$; $g_{1j} = 0$; z_k é o fluxo de dados fornecido ao algoritmo; r é a dimensão do vetor de entrada; q é a dimensão do vetor de saída; e k é o número da amostra em que informações sobre \mathbf{z} estão disponíveis.

A função de *Cauchy* é usada pelo algoritmo eTS na definição da densidade da amostra atual em um conjunto de dados obtidos de forma on-line, o que torna possível o monitoramento da formação, manutenção e/ou extinção de grupos, além de proporcionar

mecanismos para tornar o modelo eficiente e com estrutura simplificada. Um procedimento online simplificado do algoritmo eTS é dado como segue (ANGELOV; FILEV, 2004):

Entrada: amostras de dados $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, \dots, z_{nk}]$, com n variáveis medidas e $k = 1, \dots, N$;

Saída: saída do modelo.

1. Inicializar a estrutura da base de regras e parâmetros;
2. Ler um novo dado;
3. Calcular o potencial dos novos dados;
4. Atualizar os potenciais dos centros dos grupos;
5. Modificar e atualizar a estrutura da base de regras;
6. Calcular os parâmetros do consequente das regras;
7. Calcular a saída do modelo eTS.

A fim de exemplificar como funciona a técnica do agrupamento evolutivo, foi utilizado um conjunto de dados artificiais de Eletroencefalograma (EEG), observado na Figura 3, obtidos por *UC Irvine Machine Learning Repository* (REPOSITORY, 2018; ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010).

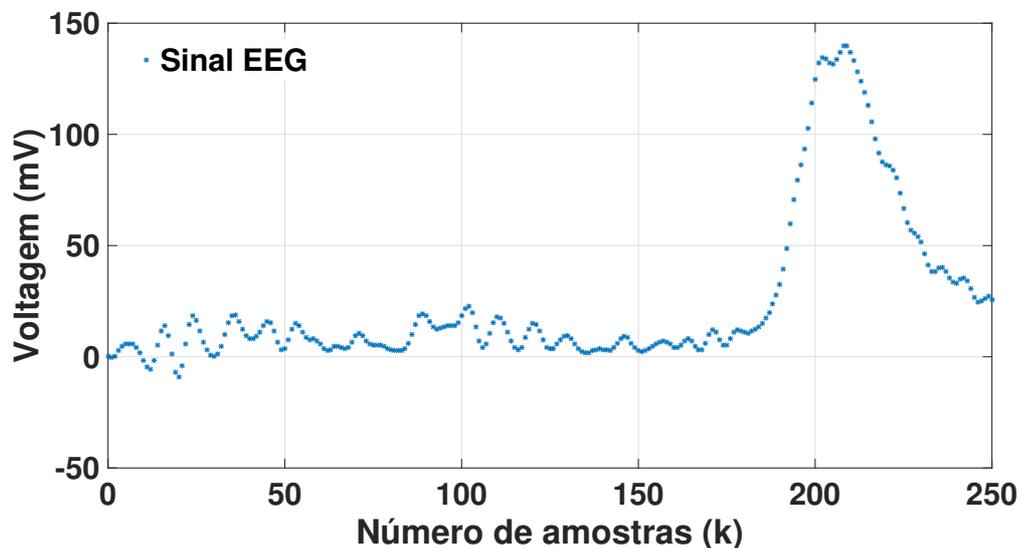


Figura 3 – Conjunto de dados artificiais de Eletroencefalograma (EEG).

Inicialmente, na Figura 4, observam-se os dois primeiros grupos, com seus respectivos centros, obtidos de forma off-line utilizando as 100 primeiras amostras do conjunto de dados do EEG. A partir da amostra 101, o processo de agrupamento evolutivo é iniciado e na amostra 150, tem-se três grupos formados, conforme Figura 5; com a continuidade do processo evolutivo, na amostra 179 observam-se quatro grupos formados (Figura 6);

na amostra 209, observam-se cinco grupos formados (Figura 7); ao final, na Figura 8, seis grupos são formados de forma evolutiva.

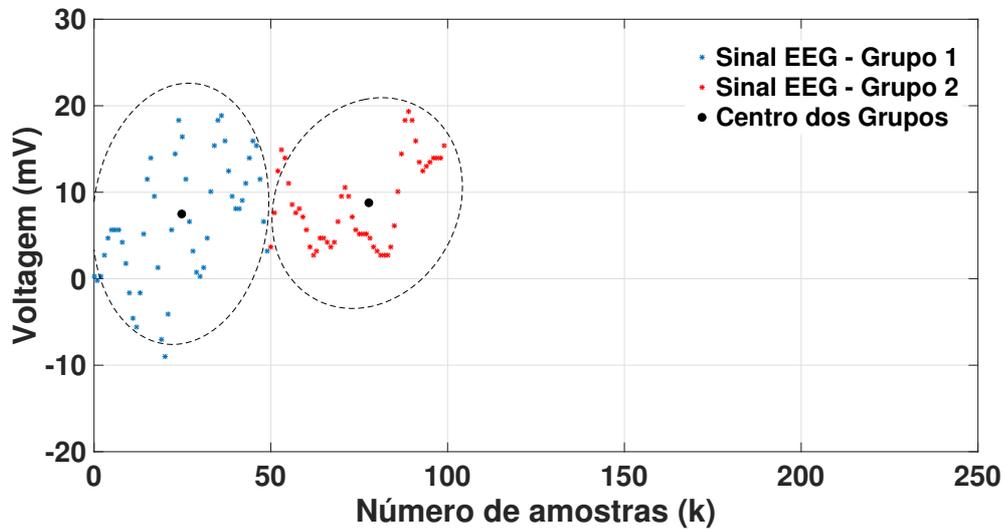


Figura 4 – Dois primeiros centros obtidos de forma off-line para os dados artificiais de EEG.

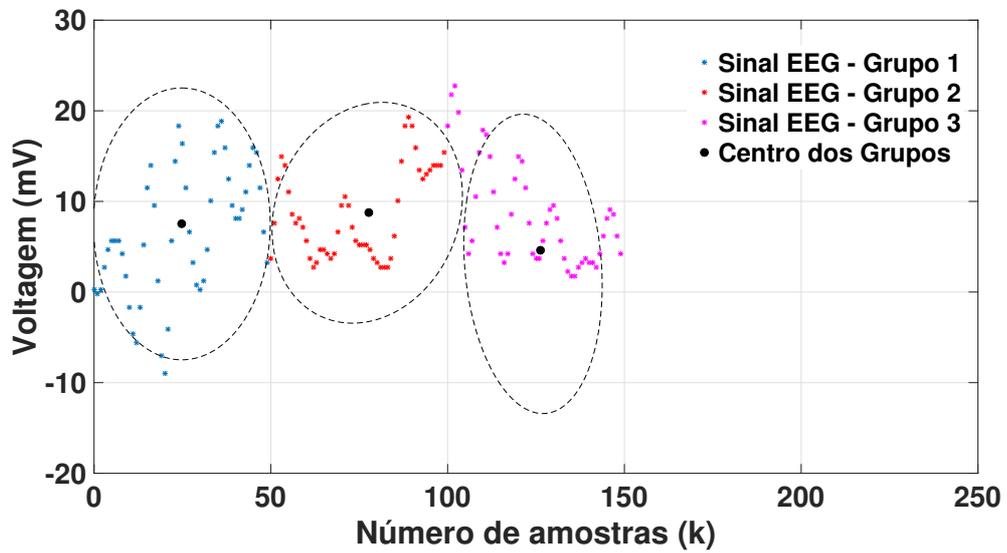


Figura 5 – Três grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva até a amostra 150.

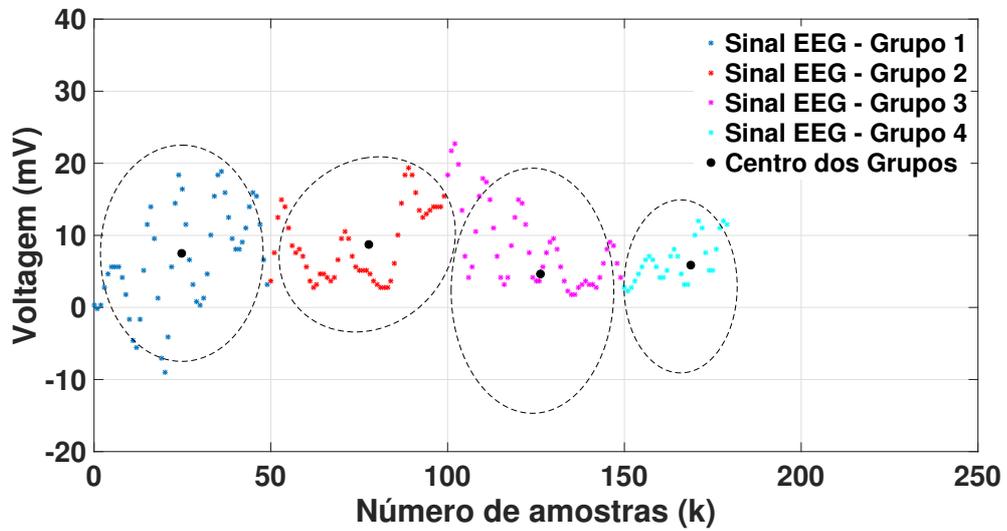


Figura 6 – Quatro grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva até a amostra 179.

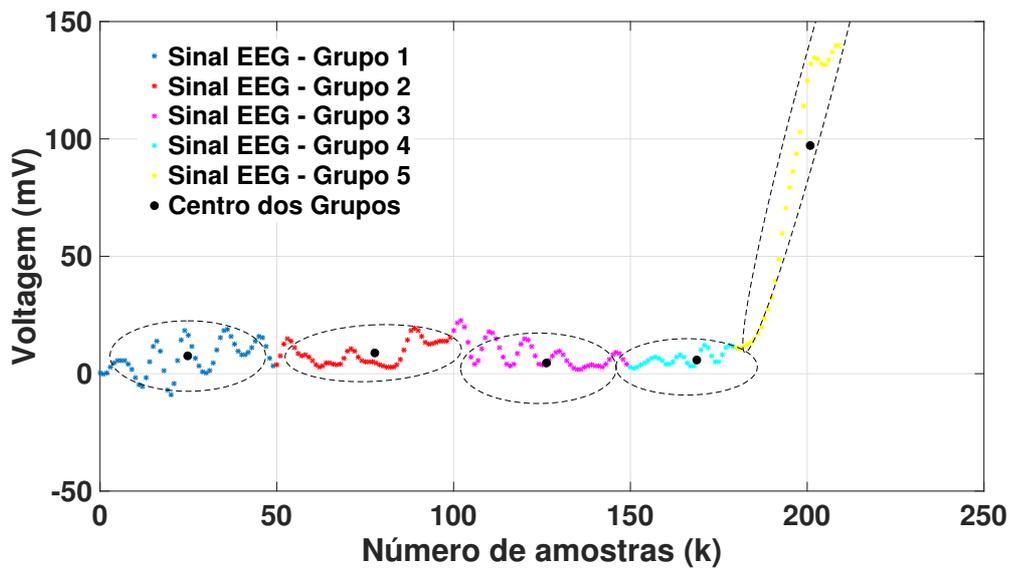


Figura 7 – Cinco grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva até a amostra 209.

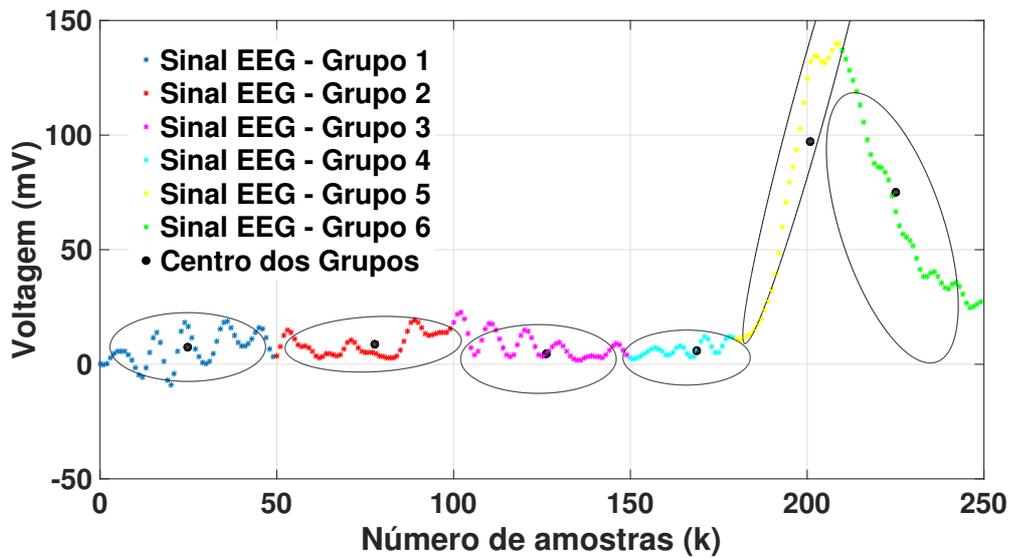


Figura 8 – Seis grupos e seus respectivos centros obtidos de forma evolutiva.

2.2.3 Sistemas Nebulosos Evolutivos

Atualmente, no contexto adaptativo, a modelagem de sistemas complexos (geralmente, não lineares e não estacionários, com múltiplos modos de operação ou com mudanças rápidas de características) não é mais satisfeita com as técnicas adaptativas convencionais, uma vez que as mesmas são adequadas para representar sistemas com parâmetros que apresentam mudanças lentas, haja vista que a atualização dos parâmetros do modelo não é realizada de forma tão rápida (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010).

O conceito de Sistemas Inteligentes Evolutivos (EIS, do inglês *Evolving Intelligent Systems*) constitui-se uma abordagem nova no desenvolvimento da representação de modelos através de aprendizagem autônoma e fluxo de dados gerado pelo próprio sistema. Frequentemente, neste tipo de abordagem, a implementação é realizada a partir de uma base de regras nebulosas, redes neurais ou neuro-*fuzzy*, que constituem-se ferramentas para treinamento (BARUAH; ANGELOV; BARUAH, 2014)(COSTA; ANGELOV; GUEDES, 2015)(LUGHOFER et al., 2015).

O termo evolutivo é utilizado para definir tais sistemas adaptativos, uma vez que estes sistemas são capazes de ajustar seus parâmetros a partir de dados (o que geralmente é atribuído ao termo adaptativo), contudo também adaptam sua estrutura, ou seja, a estrutura do sistema não permanece fixa. Além disso, o termo evolutivo não deve ser confundido com o evolucionário, o último refere-se a algoritmos baseados no processo de evolução que ocorre em populações de indivíduos e utilizam operadores baseados em conceitos de seleção, cruzamento e mutação de cromossomos como mecanismos de adaptação (LEMOS, 2011).

Em sistemas evolutivos, a abordagem adaptativa, faz-se necessária e baseia-se no conceito proposto a partir da evolução (aumento ou diminuição) da estrutura de um modelo, de tal forma que a mesma seja capaz de se adaptar às mudanças do meio externo e interno (alterações do próprio sistema) que não podem ser representadas apenas por meio de sintonia e ajuste de parâmetros (ANGELOV, 2013)(SUN et al., 2014)(LEMO; CAMINHAS; GOMIDE, 2011). Muitos modelos nebulosos evolutivos foram desenvolvidos considerando um conjunto de regras funcionais do tipo TS (TAKAGI; SUGENO, 1985). Estes trabalhos propõem modelos funcionais com estrutura flexível (em número de regras e parâmetros do antecedente), onde as alterações são realizadas a partir dos grupos criados, eliminados ou atualizados por algoritmos de agrupamento recursivo não supervisionado. Os parâmetros do consequente são atualizados utilizando-se mínimos quadrados recursivos ou suas variações.

Em alguns problemas reais, como a análise de desempenho em sistemas dinâmicos e séries temporais, bem como previsão e identificação, os grupos não são esféricos, como resultam no algoritmo de agrupamento FCM (*Fuzzy-C-Means*), mas são caracterizados por formas diferentes e orientação no espaço. Nos sistemas inteligentes evolutivos, com implementação a partir de regras nebulosas, o algoritmo de agrupamento nebuloso *Gustafson-Kessel* (GK) é normalmente utilizado com inúmeras aplicações em várias áreas, incluindo processamento de imagem, classificação e identificação de sistemas. Em relação ao algoritmo FCM, tem como principal característica, a adaptação local da distância métrica ao formato do agrupamento através da estimação da matriz de covariância do agrupamento e da adaptação da matriz de norma induzida. Além disso, o algoritmo GK é relativamente insensível ao escalonamento de dados e inicialização da matriz de partição (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010)(LUGHOFER, 2011).

Desde o surgimento dos algoritmos nebulosos evolutivos, várias abordagens foram propostas, dentre as quais podem-se destacar (SILVA, 2014):

- Em (ANGELOV; FILEV, 2004), a abordagem eTS (*evolving Takagi-Sugeno*) para identificação de modelos on-line baseia-se em um algoritmo incremental de agrupamento subtrativo que atualiza de forma recursiva a estrutura da base de regras do modelo TS e seus parâmetros através de uma combinação de aprendizado supervisionado e não supervisionado. A criação ou modificação de regras é realizada pela avaliação recursiva do potencial das novas amostras.
- Em (ANGELOV; FILEV, 2005), é apresentada uma versão do eTS, o Simpl_eTS, o qual simplifica a base de regras, a partir da representatividade das regras, de forma que, se o número de amostras associadas a uma regra for menor que um determinado percentual dos dados, a regra é ignorada e seu grau de disparo é definido em zero.
- Em (ANGELOV; FILEV, 2006), é apresentada uma versão estendida do eTS, o

xTS (*eXtended Takagi-Sugeno*), onde o raio de influência de cada grupo (zona de influência) é estimado recursivamente. Nesta abordagem, a idade é uma medida utilizada para medir a relevância do agrupamento.

- Em (LUGHOFER, 2008b), é detalhado o FLEXFIS (*Flexible Fuzzy Inference System*), que utiliza um algoritmo de agrupamento recursivo derivado de uma modificação da quantização vetorial (eVQ (LUGHOFER, 2008a)). A estimação paramétrica do consequente é realizada por algoritmo recursivo de mínimos quadrados ponderados.
- Em (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010), foi proposto o eTS+, como uma nova abordagem do eTS, no qual os parâmetros do antecedente e a estrutura da base de regras são atualizados a partir de critérios, tais como, idade, utilidade, densidade local e zona de influência, constituindo-se uma técnica robusta, flexível e autônoma, baseado nesta abordagem em (ANGELOV, 2011), foi proposto o Simpl_eTS+.
- Em (MACIEL; GOMIDE; BALLINI, 2012a), versões do eTS e xTS com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO - *Multiple Input / Multiple Output*) são utilizadas para a previsão em um único modelo de todos os fatores dinâmicos latentes da curva de juros.
- Em (SAYED-MOUCHAWEH; LUGHOFER, 2012), o FLEXFIS++, uma nova versão do FLEXFIS, foi apresentada, na qual observa-se a redução da complexidade pela união e exclusão de regras realizadas por um mecanismo que reduz a dimensionalidade de forma suave e gradual, garantindo maior interpretabilidade.
- Em (BIREK; PETROVIC; BOYLAN, 2014), uma modificação do algoritmo eTS, no Mod_eTS os grupos criados servem como base para regras nebulosas com funções de pertinência Gaussianas, as quais são definidas pelos centros dos grupos e possuem funções lineares no consequente, onde os parâmetros das funções lineares são calculados a partir de um algoritmo recursivo de mínimos quadrados.

Apesar das relevantes abordagens desenvolvidas e dos importantes avanços alcançados no desenvolvimento de sistemas evolutivos nos últimos anos, vários aspectos precisam ser melhor explorados, especialmente em aplicações reais. Hoje existe uma crescente demanda para implementação de sistemas evolutivos, em aplicações que exijam adaptabilidade do modelo, com baixo custo computacional e tratabilidade das incertezas nas variáveis inerentes aos dados experimentais. Outro aspecto importante em aberto na área de sistemas evolutivos são abordagens que incluam modelagem de filtro de Kalman. Esta tese está inserida neste escopo.

3 Metodologia Proposta: Identificação de Fil- tros de Kalman Nebulosos Evolutivos

Neste capítulo, será apresentada a formulação matemática baseada em modelagem nebulosa com estimação paramétrica evolutiva do antecedente e recursiva do consequente. Esta formulação compreende as etapas da metodologia para modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos, considerando o conceito de realização mínima no espaço de estados via dados experimentais, apresentada nesta tese.

3.1 Estimação Paramétrica do Antecedente

A estimação do antecedente através do algoritmo de agrupamento GK evolutivo é apresentada nesta seção. Primeiro, uma abordagem off-line do algoritmo GK é formulada para obtenção inicial dos parâmetros do antecedente. A partir de então, uma abordagem evolutiva usando o algoritmo nebuloso evolutivo eTS (evolving Takagi-Sugeno) é aplicada a fim de que estes parâmetros sejam obtidos de forma on-line, a cada nova amostra do conjunto de dados experimentais.

3.1.1 Estimação Inicial: Off-line

O algoritmo de agrupamento GK off-line tem sido aplicado para identificar um conjunto inicial de grupos sobre os dados experimentais. Este algoritmo é usado em muitas aplicações como uma poderosa técnica de agrupamento em identificação de sistemas. Apresenta como vantagem a detecção de grupos com diferentes formas e orientação em relação ao conjunto de dados. O algoritmo de agrupamento GK offline é descrito, como segue (BABUSKA, 1998):

Seja \mathbf{Z} um conjunto inicial de dados experimentais; c o número de grupos, com $1 < c < N$; N o número de amostras desse conjunto de dados \mathbf{Z} ; $m > 1$ o coeficiente nebuloso; $\epsilon > 0$ a tolerância do erro de convergência da matriz de partição nebulosa; e l o índice de iteração do algoritmo, $l = 1, 2, 3, \dots$

A matriz de partição inicial é escolhida aleatoriamente, de modo que $\mathbf{U}^0 = [\mu_{ik}]$

se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \mu_{ik} &\in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N, \\ \sum_{i=1}^c \mu_{ik} &= 1, \quad 1 \leq k \leq N, \\ 0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} &< N, \quad 1 \leq i \leq c \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $\mathbf{U}^0 \in M_{fc}$; onde M_{fc} é o conjunto que representa o espaço de partição nebulosa para \mathbf{Z} , dado por:

$$M_{fc} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{c \times N} \mid \mu_{ik} \in [0, 1], \forall i, k; \sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \forall k; 0 < \sum_{k=1}^N \mu_{ik} < N, \forall i \right\} \quad (3.2)$$

onde a i -ésima linha da matriz de partição nebulosa \mathbf{U} contém valores da i -ésima função de pertinência do subconjunto nebuloso de \mathbf{Z} .

Os protótipos dos grupos (centros) \mathbf{v}_i , são computados, como segue:

$$\mathbf{v}_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N [(\mu_{ik}^{(l-1)})^m \mathbf{z}_k]}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (3.3)$$

onde \mathbf{z}_k é o dado na amostra k e μ_{ik} é o grau de pertinência no i -ésimo grupo, na amostra k . A Equação (3.3) calcula o valor de $\mathbf{v}_i^{(l)}$ como uma média ponderada dos dados pertencentes ao grupo, onde os pesos representam os graus de pertinência da i -ésima regra na iteração l . As matrizes de covariância dos grupos, \mathbf{F}_i , são calculadas para cada grupo c , como segue:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)}) (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)})^T}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m} \quad (3.4)$$

com $1 \leq i \leq c$. O algoritmo GK emprega uma norma adaptativa da distância a fim de detectar grupos de diferentes formas geométricas a partir do conjunto de dados. Cada grupo tem sua própria matriz de norma induzida \mathbf{O}_i , que produz a seguinte norma de produto interno, calculada por:

$$|\mathbf{O}_i| = \rho_i, \quad \rho_i > 0, \quad \forall i \quad (3.5)$$

pela Equação (3.5) é observada que as formas dos grupos são otimizadas ao mesmo tempo que o volume ρ_i permanece constante. Usando o método de multiplicadores de Lagrange, a seguinte expressão para \mathbf{O}_i é obtida:

$$\mathbf{O}_i = [\rho_i \det(\mathbf{F}_i)]^{1/n} \mathbf{F}_i^{-1} \quad (3.6)$$

onde \mathbf{O}_i é uma matriz definida positiva simétrica $n \times n$, o qual fornece a seguinte norma de produto interno, calculada por:

$$D_{ik\mathbf{O}_i} = \sqrt{(\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)})^T \mathbf{O}_i (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)})} \quad (3.7)$$

com $1 \leq i \leq c$ e $1 \leq k \leq N$. Finalmente, se $D_{ik\mathbf{O}_i} > 0$ para $1 \leq i \leq c$, $1 \leq k \leq N$, a matriz de partição é atualizada, como segue:

$$\mu_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{D_{ik\mathbf{O}_{(i)}}}{D_{jk\mathbf{O}_{(i)}}} \right)^{2/(m-1)}} \quad (3.8)$$

De outra forma, tem-se

$$\mu_{ik}^{(l)} = 0 \text{ if } D_{ik\mathbf{O}_i} > 0 \text{ e } \mu_{ik}^{(l)} \in [0, 1], \text{ com } \sum_{i=1}^c \mu_{ik}^{(l)} = 1, \text{ até que } \|\mathbf{U}^{(l)} - \mathbf{U}^{(l-1)}\| < \epsilon.$$

Na Equação (3.8), quando $D_{sk\mathbf{O}_i} = 0$ para algum \mathbf{z}_k e um ou mais protótipos de grupos \mathbf{v}_s , $s \in S \subset \{1, 2, \dots, c\}$, o grau de pertinência μ_{ik} não pode ser calculado. Quando isto acontece, 0 é atribuído para cada μ_{ik} , $i \in \bar{S}$ e a pertinência é distribuída arbitrariamente em μ_{sj} sujeito à restrição $\sum_{s \in S} \mu_{sj} = 1, \forall k$.

3.1.1.1 Passos para Implementação do Algoritmo de Estimação Paramétrica Off-line do Antecedente - Algoritmo Gustafson-Kessel

O algoritmo para estimação paramétrica inicial do antecedente, de forma off-line é representado pelos passos descritos a seguir, dado o conjunto de dados \mathbf{Z} com N elementos.

-
- 1: Entradas: \mathbf{Z} e N .
 - 2: Definir o parâmetro: valor do coeficiente nebuloso $m > 1$.
 - 3: Definir o parâmetro: tolerância do erro de convergência da matriz de partição nebulosa $\epsilon > 0$.
 - 4: Definir o parâmetro: o número inicial de protótipos $c \geq 2$.
 - 5: Inicializar a matriz de partição nebulosa inicial \mathbf{U}^0 de acordo com as condições em (3.1).
 - 6: $l \leftarrow 0$
 - 7: **repetir**
 - 8: $l \leftarrow l + 1$

- 9: Determinar o vetor de protótipos dos grupos nebulosos através da Equação (3.3).
 - 10: Determinar as matrizes de covariância dos grupos através da Equação (3.4).
 - 11: Determinar as distâncias de \mathbf{z}_k em relação ao vetor de protótipos $\mathbf{v}^{(l)}$ através da Equação (3.7).
 - 12: Atualizar a matriz de partição nebulosa através da Equação (3.8).
 - 13: **até que** $\|\mathbf{U}^{(l)} - \mathbf{U}^{(l-1)}\| < \epsilon$.
 - 14: Parâmetros obtidos: \mathbf{v} , \mathbf{F} e \mathbf{U} .
-

Após a finalização dos passos do algoritmo GK para estimação paramétrica off-line do antecedente, os parâmetros obtidos \mathbf{v} , \mathbf{F} e \mathbf{U} são utilizados para determinar as condições iniciais para estimação paramétrica off-line do conseqüente.

3.1.2 Estimação Evolutiva: On-line

Para o algoritmo de agrupamento evolutivo eTS, a densidade dos dados avaliada recursivamente em torno da última amostra de dados, $D_k(z_k)$, é dada por (ANGELOV; FILEV, 2004):

$$D_k(z_k) = \frac{k-1}{(k-1) \left(\sum_{j=1}^{r+q} z_{kj}^2 + 1 \right) + b_k - 2 \sum_{j=1}^{r+q} z_{kj} g_{kj}} \quad (3.9)$$

onde $D_1(z_1) = 1$; $k = 2, 3, \dots$; $b_k = b_{k-1} + \sum_{j=1}^{r+q} z_{(k-1)j}^2$; $b_1 = 0$; $g_{kj} = g_{(k-1)j} + z_{(k-1)j}$; $g_{1j} = 0$; z_k é o fluxo de dados fornecido ao algoritmo; r é a dimensão do vetor de entrada; q é a dimensão do vetor de saída; e k é o número de amostras em que informações sobre z estão disponíveis.

A densidade dos pontos focais é atualizada recursivamente, como segue:

$$D_k(z^{i*}) = \frac{k-1}{D^*} \quad (3.10)$$

onde i^* corresponde aos pontos focais da i -ésima regra nebulosa. Assim, tem-se:

$$D^* = k-1 + (k-2) \left(\frac{1}{D_{k-1}(z^{i*})} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{r+q} (z_{kj} - z_{(k-1)j}) \quad (3.11)$$

A fim de avaliar a qualidade do particionamento do espaço de dados no projeto de sistemas nebulosos, algumas condições são verificadas na estimação de grupos evolutivos. Primeiro, após a atualização da densidade dos pontos focais da i -ésima regra nebulosa, é verificado se grupos representativos com alta capacidade de generalização são formados.

Condição A: é usada para avaliar se os grupos formados possuem alta capacidade de generalização a partir da análise dos pontos focais que possuem alta densidade. A

Condição A pode ser analisada a partir de **Condição A₁** ou **Condição A₂**, como segue:

Condição A₁:

$$\eta D_k(z_k) > \max_{i=1}^c D_k(z_k^{i*});$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \mu_j^i(x_k) > e^{-2}, \forall i, \forall j \\ \frac{N_k - 3}{\log(k)} & \text{de outra forma} \end{cases}; k = 2, 3, \dots$$

onde N_k é a amostra do conjunto de dados \mathbf{Z} na k -ésima amostra e c é o número de regras.

Condição A₂:

$$D_k(z_k) > \max_{i=1}^c D_k(z_k^{i*}) \text{ OR } D_k(z_k) < \min_{i=1}^c D_k(z_k^{i*}).$$

Se Condição A é satisfeita, forma-se um novo ponto focal ($c \leftarrow c + 1$; $z^{i*} \leftarrow z_k$; $D(z^{i*}) \leftarrow 1$).

Após verificar a condição **Condição A**, a partir de **Condição A₁** ou **Condição A₂**, a fim de evitar a redundância e controlar o nível de sobreposição das regras, a **Condição B** é analisada, como segue:

Condição B: SE ($\exists i, i = [1, c] : \mu_i^j(x_k) > e^{-1}, \forall j, j = [1, n], k = 2, 3, \dots$) ENTÃO ($c \leftarrow c - 1$)

Se a **Condição B** é satisfeita, remove-se a regra que satisfaz esta condição, uma vez que a mesma já descreve um dos pontos focais de grupos anteriormente formados.

3.1.2.1 Passos para Implementação do Algoritmo de Estimção Paramétrica On-line do Antecedente - Algoritmo Evolutivo

O algoritmo para estimção paramétrica online do antecedente é representado pelos passos descritos a seguir.

-
- 1: Entradas: r e q .
 - 2: **repetir**
 - 3: Ler a amostra de dados \mathbf{z}_k .
 - 4: **se** $k = 1$ **então**
 - 5: Inicializar atribuindo valores a $z_1^{i*} \leftarrow \mathbf{v}_i$; $c \leftarrow$ número de grupos estimados pelo GK na etapa off-line; $D_1(z_1) \leftarrow 1$; $b_1 \leftarrow 0$; $g_{1j} \leftarrow 0$.
 - 6: **senão**
 - 7: Calcular a densidade da nova amostra através da Equação (3.9).
 - 8: Atualizar a densidade dos pontos focais através da Equação (3.10).

-
- 9: **se** Condição A (a qual pode ser realizada pela Condição A_1 ou Condição A_2)
 então
 - 10: Forma-se um novo ponto focal ($c \leftarrow c + 1$; $z^{i*} \leftarrow z_k$; $D(z^{i*}) \leftarrow 1$)
 - 11: **fim se**
 - 12: **se** Condição B **então**
 - 13: Remova a regra que satisfaça a Condição B
 - 14: **fim se**
 - 15: Atribuir a amostra de dados atual para o grupo mais próximo.
 - 16: **fim se**
 - 17: **até que** O conjunto de dados esteja terminado ou uma parada no processo seja solicitada.
 - 18: Parâmetros obtidos: c , z^{i*} e \mathbf{U} .
-

Após a finalização dos passos do algoritmo eTS para estimação paramétrica do antecedente de forma evolutiva, tem-se os seguintes parâmetros obtidos: c , z^{i*} e \mathbf{U} , os quais serão utilizados para determinar a estimação paramétrica on-line do conseqüente.

3.2 Estimação Paramétrica do Conseqüente

O método OKID (Identificação com Observador/Filtro de Kalman, do inglês, *Observer/Kalman Filter Identification*) corresponde a uma técnica de identificação com observador de estado, para obtenção direta do ganho do Filtro de Kalman. É similar a um Filtro de Kalman adaptativo, não requer informações estatísticas *a priori*, como também não necessita de cálculos em relação à correlação e covariância das amostras (JUANG; PAPPA, 1985). O OKID é uma metodologia criada, a princípio, para ser utilizada na identificação de estruturas levemente amortecidas (típicas do segmento aeroespacial): uma vez que esta classe de estruturas, quando excitadas, apresentam uma taxa muito pequena no decaimento do sinal de saída, ou, em termos de controle, possui um tempo de acomodação elevado, incorpora um observador de estado, a fim de que seja acrescido um amortecimento virtual no sinal, permitindo uma compressão dos dados e, conseqüentemente, menor esforço computacional. Neste sentido, este amortecimento artificial no sistema antecipa a estabilização do sinal de saída, reduzindo o esforço computacional e aumentando a precisão dos resultados obtidos.

O método OKID tem sido aplicado com sucesso na identificação de diversos sistemas reais e de forma eficiente identifica modelos em espaço de estados usando dados de entrada e saída no domínio do tempo (WU et al., 2015)(OH; LEE, 2015)(PHAN et al., 1995)(JUANG et al., 1993)(CHIEN; CHEN, 2017). O OKID, em sua forma original, foi proposto em (CHENG et al., 1992). Nesta tese é proposta uma versão recursiva nebulosa desse algoritmo.

O algoritmo OKID nebuloso evolutivo, em sua inicialização, necessita dos seguintes parâmetros: ν (comprimento da janela de conjunto de dados experimentais), p (número apropriado de parâmetros do observador de Markov de um dado conjunto de dados de entradas e saídas, onde p é um número inteiro, suficientemente maior que a ordem efetiva do sistema identificado, sendo o mesmo selecionado a partir dos dados experimentais $p \leq \nu$), $\mathbf{u}_{r \times \nu}$ (dados de entrada, r corresponde ao número de entradas) e $\mathbf{y}_{q \times \nu}$ (dados de saída, q corresponde ao número de saídas).

Para o cálculo dos parâmetros de Markov do observador, faz-se necessário a montagem da matriz de regressores, denominada \mathbf{V} , dada por:

$$\mathbf{V}_{[(r+q)p+r] \times \nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_p & \dots & \mathbf{u}_{\nu-1} \\ 0 & \mathbf{Z}_0 & \dots & \mathbf{Z}_{p-1} & \dots & \mathbf{Z}_{\nu-2} \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}_{p-2} & \dots & \mathbf{Z}_{\nu-3} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \mathbf{Z}_0 & \dots & \mathbf{Z}_{\nu-p-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde:

$$\mathbf{Z}_k^{(r+q) \times \nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^{r \times \nu} \\ \mathbf{y}_k^{q \times \nu} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

\mathbf{Z}_k corresponde aos dados de entrada e saída na amostra k .

A partir dos dados experimentais, os parâmetros de Markov do observador, $\tilde{\mathbf{Y}}^i$, baseado em conjuntos nebulosos são obtidos, como segue:

$$\mathbf{y}_{q \times \nu} = \sum_{i=1}^c \tilde{\mathbf{Y}}_{q \times [(r+q)p+r]}^i \mathbf{V}_{[(r+q)p+r] \times \nu} \mathbf{\Gamma}_{\nu \times \nu}^i \quad (3.14)$$

com

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{q \times [(r+q)p+r]}^i = \mathbf{y}_{q \times \nu} \mathbf{\Gamma}_{\nu \times \nu}^i \mathbf{V}_{\nu \times [(r+q)p+r]}^T \left[\mathbf{V}_{[(r+q)p+r] \times \nu} \mathbf{\Gamma}_{\nu \times \nu}^i \mathbf{V}_{\nu \times [(r+q)p+r]}^T \right]^{-1} \quad (3.15)$$

onde:

$$\mathbf{y}^{q \times \nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_p & \dots & \mathbf{y}_{\nu-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

é a matriz de saída $q \times \nu$ do sistema dinâmico,

$$\mathbf{\Gamma}_{\nu \times \nu}^i = \begin{bmatrix} \gamma_0^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{\nu-1}^i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

é a matriz diagonal de ponderação dos valores de pertinência na i -ésima regra, e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_{q \times [(r+q)p+r]}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^i(\gamma^i) & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i)\bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i)\bar{\mathbf{A}}_k^i(\gamma^i)\bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i)\bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i)\bar{\mathbf{A}}_k^i(\gamma^i)\bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) \end{bmatrix} \\ &\dots \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_k^i \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{A}}_k^i \end{bmatrix}^{(p-1)} (\gamma^i) \bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) \end{aligned} \quad (3.18)$$

corresponde aos parâmetros de Markov do observador na i -ésima regra e

$$\bar{\mathbf{A}}_k^i = \mathbf{A}_k^i + \mathbf{M}_k^i \mathbf{C}_k^i \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k^i + \mathbf{M}_k^i \mathbf{D}_k^i & -\mathbf{M}_k^i \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

com uma matriz arbitrária \mathbf{M}_k^i de ordem $\iota \times q$ escolhida para tornar a matriz $\bar{\mathbf{A}}_k^i$ tão estável quanto desejado e ι é a ordem do sistema na i -ésima regra.

Um bloco da matriz de correlação \mathbf{N}_τ^i é construído com os elementos de $\mathbf{G}_{hh_{k+\tau}}^i$, os quais correspondem ao produto entre \mathbf{H}_τ^i e $\mathbf{H}_{k+\tau}^i$, como segue:

$$\mathbf{G}_{hh_{k+\tau}}^i = \mathbf{H}_{k+\tau}^i \mathbf{H}_\tau^{iT} \quad , \text{ com } \tau = 0 \quad (3.21)$$

com

$$\mathbf{H}_{k+\tau}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k+1+\tau}^i & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta+\tau}^i \\ \mathbf{Y}_{k+2+\tau}^i & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta+1+\tau}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha+\tau}^i & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta+1+\tau}^i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde \mathbf{Y}_k^i é a matriz $q \times r$, cujas colunas são os parâmetros de Markov (resposta ao impulso amostrado) que correspondem às q saídas. A dimensão de \mathbf{H}_k^i e \mathbf{H}_0^i é $\alpha q \times \beta r$, uma vez que a dimensão de $\mathbf{G}_{hh_k}^i$ é $\alpha q \times \alpha q$. Assim,

$$\mathbf{N}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{hh_k}^i & \cdots & \mathbf{G}_{hh_{k+\xi\tau}}^i \\ \mathbf{G}_{hh_{k+\tau}}^i & \cdots & \mathbf{G}_{hh_{k+(\xi+1)\tau}}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{hh_{k+\varepsilon\tau}}^i & \cdots & \mathbf{G}_{hh_{k+(\varepsilon+\xi)\tau}}^i \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\alpha^i \\ \mathbf{P}_\alpha^i [\mathbf{A}_k^i]^\tau (\gamma^i) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_\alpha^i [\mathbf{A}_k^i]^{\varepsilon\tau} (\gamma^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_k^i]^k (\gamma^i) [\mathbf{Q}_c^i & [\mathbf{A}_k^i]^\tau (\gamma^i) \mathbf{Q}_c^i & \dots & [\mathbf{A}_k^i]^{\xi\tau} (\gamma^i) \mathbf{Q}_c^i \end{bmatrix} \quad (3.24) \\
 &= \mathbf{P}_\varepsilon^i \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^i \\ \mathbf{I}_{\iota \times \iota} \end{bmatrix}^k (\gamma^i) \mathbf{Q}_\xi^i
 \end{aligned}$$

com

$$\mathbf{Q}_c^i = \begin{matrix} \iota \times \alpha q \\ \mathbf{Q}_\beta^i \\ \iota \times \beta r \end{matrix} = \begin{matrix} \beta r \times \iota \\ \mathbf{Q}_\beta^i \\ \iota \times \alpha q \end{matrix} \mathbf{P}_\alpha^i \quad (3.25)$$

Usando a decomposição em valor singular, decompõe-se \mathbf{N}_0^i , resultando em:

$$\mathbf{N}_0^i = \mathbf{R}^i \mathbf{\Sigma}^i \mathbf{S}^{iT} \quad (3.26)$$

Examinando os valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{N}_0^i , é possível determinar a ordem ι do sistema. Uma realização de ordem mínima $[\mathbf{A}_k^i, \mathbf{Q}_c^i, \mathbf{P}_\alpha^i]$ é construída a partir de um bloco da matriz de Hankel deslocada \mathbf{N}_1^i , conforme Equação (B.8), como segue:

$$\mathbf{G}_{hh_1}^i = \mathbf{H}_1^i \mathbf{H}_0^{iT} = \mathbf{P}_\alpha^i [\mathbf{A}_k^i]^1 (\gamma^i) \mathbf{Q}_c^i \quad (3.27)$$

A matriz de controlabilidade \mathbf{Q}_β^i é calculada e determinam-se a realização de ordem mínima $[\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i]$. Logo,

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{P}_\alpha^i \mathbf{Q}_\beta^i \quad (3.28)$$

onde:

$$\mathbf{P}_\alpha^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i (\gamma^i) \\ \mathbf{C}^i (\gamma^i) \mathbf{A}_k^i (\gamma^i) \\ \mathbf{C}^i (\gamma^i) [\mathbf{A}_k^i]^2 (\gamma^i) \\ \vdots \\ \mathbf{C}^i (\gamma^i) [\mathbf{A}_k^i]^{\alpha-1} (\gamma^i) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{Q}_\beta^i = [\mathbf{B}_k^i(\gamma^i) \quad \mathbf{A}_k^i(\gamma^i)\mathbf{B}_k^i(\gamma^i) \quad \dots \quad [\mathbf{A}_k^i]^{\beta-2}(\gamma^i)\mathbf{B}_k^i(\gamma^i) \quad [\mathbf{A}_k^i]^{\beta-1}(\gamma^i)\mathbf{B}_k^i(\gamma^i)] \quad (3.30)$$

e

$$\mathbf{Q}_\beta^i = \mathbf{P}_\alpha^{i+} \mathbf{H}_0^i \quad (3.31)$$

$$\mathbf{A}_k^i = (\boldsymbol{\Sigma}^i)^{-1/2} \mathbf{R}_l^{iT} \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_l^i (\boldsymbol{\Sigma}^i)^{-1/2} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{D}_k^i = \bar{\mathbf{Y}}_{q \times r}^i ;$$

$$\mathbf{B}_k^i = \text{primeiras } r \text{ colunas de } \mathbf{Q}_\beta^i ; \quad (3.33)$$

$$\mathbf{C}_k^i = \text{primeiras } q \text{ linhas de } \mathbf{P}_\alpha^i$$

Por fim, calcula-se a matriz de ganho de Kalman, como segue:

$$\mathbf{K}_k^i = - \begin{bmatrix} \psi_p^{iT} & \psi_p^i \\ \psi_p^{iT} & \tilde{\mathbf{Y}}_k^{i0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{matrix} \psi_p^{iT} \\ \tilde{\mathbf{Y}}_k^{i0} \end{matrix} \quad (3.34)$$

onde

$$\psi_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) \\ \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) \mathbf{A}_k^i(\gamma^i) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) \mathbf{A}_{k_{p-1}}^i(\gamma^i) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^{i0} = \tilde{\mathbf{Y}}_k^{i(2)} + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{Y}}_{k-i}^{i0} \tilde{\mathbf{Y}}_k^{i(2)}, \quad k = 2, \dots, p \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^{i0} = - \sum_{i=1}^p \tilde{\mathbf{Y}}_{k-i}^{i0} \tilde{\mathbf{Y}}_k^{i(2)}, \quad k = p+1, \dots, \infty \quad (3.37)$$

Os parâmetros de Markov contemplam tanto os parâmetros de Markov do sistema como os ganhos do observador. Os parâmetros de Markov do sistema são utilizados para calcular as matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i e \mathbf{D}_k^i , ao passo que os parâmetros de Markov do ganho do observador são usados para determinar a matriz de ganho de Kalman \mathbf{K}_k^i . A matriz $\tilde{\mathbf{Y}}_k^{i(2)}$ é calculada pela solução dos mínimos quadrados ponderados para os parâmetros do

observador de Markov a partir das colunas ímpares da Equação (B.5) na i -ésima regra do filtro de Kalman nebuloso evolutivo, sendo dada por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^{i(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{—terceira coluna de } \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \\ \text{—quinta coluna de } \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \\ \text{—sétima coluna de } \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.38)$$

Um dos problemas encontrados durante a implementação do algoritmo OKID nebuloso é a dificuldade em determinar os valores dos parâmetros a serem utilizados, tais como, α , β , p , τ , ε , ξ . A escolha destes parâmetros é realizada a partir de conhecimento do especialista e depende dos dados experimentais, tal como ocorre no OKID clássico (CHENG et al., 1992).

3.2.1 Passos para Implementação do Algoritmo de Estimação Paramétrica On-line do Consequente - Algoritmo OKID nebuloso evolutivo

O algoritmo OKID nebuloso evolutivo, apresentado nesta tese, para estimação paramétrica online do consequente é representado pelos passos descritos a seguir.

-
- 1: Inicializar atribuindo valores a ν (número de amostras), p (número apropriado de parâmetros do observador de Markov de um dado conjunto de dados de entradas e saídas, $p \leq \nu$), $\mathbf{u}_{r \times \nu}$ (dados de entrada, r corresponde ao número de entradas) e $\mathbf{y}_{q \times \nu}$ (dados de saída, q corresponde ao número de saídas).
 - 2: **repetir**
 - 3: Ler os parâmetros do antecedente da amostra de dados atual \mathbf{z}_k .
 - 4: Montar a matriz de regressores \mathbf{V} através da Equação (B.1).
 - 5: **repetir**
 - 6: Para cada regra nebulosa i :
 - 7: Obter, os parâmetros de Markov do observador, $\tilde{\mathbf{Y}}$, baseado em conjuntos nebulosos através da Equação (3.15).
 - 8: Construir um bloco da matriz de correlação, \mathbf{N}_k^i , através da Equação (B.10).
 - 9: Decompor \mathbf{N}_0^i usando a decomposição em valor singular, através da Equação (B.13).
 - 10: Determinar a ordem do sistema examinando os valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{N}_0^i .
 - 11: Construir uma realização de ordem mínima $[\mathbf{A}_k^i, \mathbf{Q}_c^i, \mathbf{P}_\alpha^i]$ usando um bloco da matriz de Hankel deslocada \mathbf{N}_1^i , através da Equação (B.14).

- 12: Calcular a matriz de controlabilidade \mathbf{Q}_β^i e determinar a realização de ordem mínima $[\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i]$, através das Equações (B.17), (B.19) e (B.20).
- 13: Calcular a matriz de ganho de Kalman, através da Equação (B.21).
- 14: **até que** Atingir o número de regras estimado para a amostra atual.
- 15: **até que** O conjunto de dados esteja terminado ou uma parada no processo seja solicitada.
- 16: Parâmetros obtidos: $\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{K}_k^i$, a ordem, saídas e estados do modelo nebuloso do sistema dinâmico.

Após a finalização dos passos do algoritmo OKID nebuloso evolutivo para estimação paramétrica do consequente, tem-se os seguintes parâmetros obtidos: $\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i, \mathbf{K}_k^i$, a ordem, saídas e estados do modelo nebuloso do sistema dinâmico.

3.3 Estrutura do Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo

O filtro de Kalman nebuloso evolutivo TS apresenta na $i^{|[i=1,2,\dots,c]}$ -ésima regra, na $j^{|[i=1,2,\dots,p_{\tilde{\mathbf{z}}_k}]}$ -ésima partição, a seguinte estrutura:

$R^{(i)}$: SE $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ É $M_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i$ ENTÃO

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^i &= \mathbf{A}_k^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{K}_k^i \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}_k^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i\end{aligned}\tag{3.39}$$

onde $\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i$ e \mathbf{K}_k^i (matriz de estados, matriz de entrada, matriz de saída, matriz de transmissão direta e matriz de ganho de Kalman, respectivamente) são estimadas pelo algoritmo OKID recursivo baseado em agrupamento nebuloso. A matriz $\tilde{\mathbf{Z}}_k = [\tilde{\mathbf{u}}_k \ \tilde{\mathbf{y}}_k]^T$ pertence ao conjunto nebuloso $M_{j|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i$ com um valor $\mu_{M_{j|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}^i$ definido pela função de pertinência $\mu_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, com $\mu_{M_{j|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}^i \in \mu_{M_{1|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}^i, \mu_{M_{2|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}^i, \mu_{M_{3|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}^i, \dots, \mu_{M_{p_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}|\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i}^i$, onde $j = \{1, 2, 3, \dots, p_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}\}$, e $p_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}$ corresponde ao número de partições nebulosas do universo de discurso relacionado à variável linguística $\tilde{\mathbf{Z}}_k$. Uma sequência de resíduos, $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$, na i -ésima regra, é dada por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i = \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k\tag{3.40}$$

onde $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$, com γ^i correspondendo à ponderação dos graus de pertinência da i -ésima regra; c é o número de regras; \mathbf{y}_k é a saída real na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída do modelo do filtro de Kalman nebuloso na i -ésima regra, na amostra k .

3.4 Análise de Convergência do Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo

Para o cálculo dos ganhos do filtro de Kalman, devem ser conhecidos o modelo do sistema e as covariâncias individuais do ruído no processo e do ruído na medição. Contudo, na prática, estas exigências tornam-se restritas, haja vista que tanto o sistema quanto as características do ruído não podem ser conhecidas exatamente (JUANG et al., 1993).

O modelo matemático do sistema pode ser obtido analiticamente, ou, no caso de aplicações práticas a partir de dados de entrada e saída experimentais. Uma estimativa da covariância do ruído na medição pode ser obtida através das características do sensor. Porém, a covariância do ruído no processo é quase impossível de se obter pela medida direta, sendo necessárias algumas suposições acerca da mesma. Isso dificulta a determinação precisa das características dos ruídos no processo e na medição. O ruído no processo compreende tanto as incertezas no sistema quanto o ruído na entrada propriamente dito (ALVES, 2005).

Considera-se um sistema multivariável linear descrito como segue:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (3.41)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (3.42)$$

Estendendo as Equações (3.41) e (3.42), incluindo o ruído do processo e de medição, resulta em:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (3.43)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.44)$$

onde \mathbf{w}_k é o ruído no processo, o qual é branco, suposto Gaussiano e de média zero, cuja matriz de covariância é \mathbf{Q}_k ; \mathbf{v}_k é o ruído na medição, o qual é branco, suposto Gaussiano e de média zero, cuja matriz de covariância é \mathbf{R}_k . Supõe-se que \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são estatisticamente independentes entre si.

Na identificação de um modelo em espaço de estados, em uma representação conforme descrita pelas Equações (3.41) e (3.42) ou Equações (3.43) e (3.44), apresenta como uma das principais dificuldades o problema da representação da não linearidade. Desde que o modelo é linear, sobre o ponto de vista de identificação de sistemas, ambos estados \mathbf{x} e matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} são desconhecidos (JUANG et al., 1993). Na metodologia para identificação de filtros de Kalman nebulosos evolutivos apresentada nesta tese, o consequente

de cada regra apresenta um modelo linear em espaço de estados, representando as características de cada ponto de operação do sistema dinâmico, garantindo a representação da não linearidade no modelo resultante.

Um típico filtro de Kalman, descrito no contexto nebuloso evolutivo, a partir das Equações (3.43) e (3.44), é dado como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{+i} = \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} + \mathbf{K}_k^i [\tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k] \triangleq \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} + \mathbf{K}_k^i \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \quad (3.45)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{-i} = \mathbf{A}_k^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{+i} + \mathbf{B}_k^i \gamma^i \mathbf{u}_{k-1} \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{C}_k^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{-i} + \mathbf{D}_k^i \gamma^i \mathbf{u}_k \quad (3.47)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_k^{+i}$ é o estado estimado na i -ésima regra. No presente trabalho, o sinal “+” indica o valor de determinada variável referente ao instante k , após ter sido incluída a informação em k . Por outro lado, “-” indica o valor de determinada variável referente ao instante k antes de ter sido incluída informação referente ao instante k . O termo $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$ é o resíduo na i -ésima regra, definido como segue:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i = \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k \quad (3.48)$$

onde $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$, com γ^i correspondendo à ponderação dos graus de pertinência da i -ésima regra; c é o número de regras; \mathbf{y}_k é a saída real na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída do modelo do filtro de Kalman nebuloso na i -ésima regra, na amostra k .

Combinando as Equações (3.45) e (3.46) na Equação (3.47), resulta em:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-i} = \mathbf{A}_k^i [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^i \mathbf{C}_k^i] \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} + [\mathbf{B}_k^i - \mathbf{A}_k^i \mathbf{K}_k^i \mathbf{D}_k^i] \gamma^i \mathbf{u}_k + \mathbf{A}_k^i \mathbf{K}_k^i \gamma^i \mathbf{y}_k \quad (3.49)$$

ou

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-i} = \bar{\mathbf{A}}_k^i \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} + \bar{\mathbf{B}}_k^i \tilde{\mathbf{Z}}_k^i$$

$$\mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}_k^i \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} + \mathbf{D}_k^i \gamma^i \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \quad (3.50)$$

onde

$$\bar{\mathbf{A}}_k^i = \mathbf{A}_k^i [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^i \mathbf{C}_k^i]$$

$$\bar{\mathbf{B}}_k^i = [\mathbf{B}_k^i - \mathbf{A}_k^i \mathbf{K}_k^i \mathbf{D}_k^i \quad \mathbf{A}_k^i \mathbf{K}_k^i]$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i \end{bmatrix}$$

Adicionando e subtraindo o termo $\mathbf{M}_k^i \gamma^i \mathbf{y}_k$, no lado direito da Equação (3.41), considerando o contexto nebuloso evolutivo, resulta em:

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k^i + \mathbf{M}_k^i \gamma^i \mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^i \gamma^i \mathbf{y}_k$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = (\mathbf{A}_k^i + \mathbf{M}_k^i \mathbf{C}_k^i) \mathbf{x}_k^i + (\mathbf{B}_k^i + \mathbf{M}_k^i \mathbf{D}_k^i) \gamma^i \mathbf{u}_k - \mathbf{M}_k^i \gamma^i \mathbf{y}_k$$

ou

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \bar{\mathbf{A}}_k^i \mathbf{x}_k^i + \bar{\mathbf{B}}_k^i \tilde{\mathbf{Z}}_k^i$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \bar{\mathbf{C}}_k^i \mathbf{x}_k^i + \bar{\mathbf{D}}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i \quad (3.51)$$

onde

$$\bar{\mathbf{A}}_k^i = \mathbf{A}_k^i + \mathbf{M}_k^i \mathbf{C}_k^i$$

$$\bar{\mathbf{B}}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k^i + \mathbf{M}_k^i \mathbf{D}_k^i & -\mathbf{M}_k^i \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{M}_k^i é uma matriz arbitrária, de ordem $r \times q$, escolhida para tornar a matriz $\bar{\mathbf{A}}_k^i$ estável, na i -ésima regra.

Comparando as Equações (3.50) e (3.51), observa-se que são idênticas se $\mathbf{M}_k^i = -\mathbf{A}_k^i \mathbf{K}_k^i$ e $\epsilon_{r_k}^i = 0$. Uma questão que se observa é quando $\mathbf{K}_k^i = -\mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{M}_k^i$ se \mathbf{M}_k^i é calculado somente usando um procedimento computacional, haja vista que é conhecido que o ganho do filtro de Kalman depende das covariâncias do processo e de medição. Algumas condições devem existir tal que a equação $\mathbf{M}_k^i = -\mathbf{A}_k^i \mathbf{K}_k^i$ é válida, uma vez que as mesmas equações são usadas para resolver o ganho do filtro de Kalman e o ganho do observador, respectivamente, \mathbf{K}_k^i e \mathbf{M}_k^i , na i -ésima regra do modelo nebuloso evolutivo, apresentado nesta tese.

A Equação (3.50) pode ser escrita matricialmente, como segue:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \bar{\mathbf{V}}_k^i + \epsilon_{r_k}^i + \mathbf{C}_k^i \bar{\mathbf{A}}_k^i \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-i} \quad (3.52)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Y}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^i(\gamma^i) & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) \bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) \bar{\mathbf{A}}_k^i(\gamma^i) \bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) \\ \dots & \mathbf{C}_k^i(\gamma^i) [\bar{\mathbf{A}}_k^i]^{(p-1)}(\gamma^i) \bar{\mathbf{B}}_k^i(\gamma^i) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_p^i & \tilde{\mathbf{u}}_{p+1}^i & \dots & \tilde{\mathbf{u}}_{N-1}^i \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i & \tilde{\mathbf{Z}}_p^i & \dots & \tilde{\mathbf{Z}}_{N-2}^i \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{p-2}^i & \tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i & \dots & \tilde{\mathbf{Z}}_{N-3}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \tilde{\mathbf{Z}}_0^i & \tilde{\mathbf{Z}}_1^i & \dots & \tilde{\mathbf{Z}}_{N-p-1}^i \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{-i} = [\hat{\mathbf{x}}_0^{-i} \quad \hat{\mathbf{x}}_1^{-i} \quad \hat{\mathbf{x}}_2^{-i} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_{N-p-2}^{-i}] \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^i = [\boldsymbol{\epsilon}_{r_p}^i \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_{p+1}}^i \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_{p+2}}^i \quad \dots \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_{N-1}}^i] \quad (3.56)$$

sendo $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$ o erro residual da i -ésima regra, como definido na Equação (3.48) e N é o comprimento do vetor de dados. A Equação (3.52) aplica-se a qualquer equação com a mesma estrutura do observador, conforme Equação (3.47). Caso o observador seja o FK, então o resíduo é branco, tem média nula e é Gaussiano. Multiplicando os termos da Equação (3.52) por $(\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T$, na i -ésima regra, obtém-se:

$$\bar{\mathbf{y}}_k^i (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T = \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \bar{\mathbf{V}}_k^i (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T + \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T + \mathbf{C}_k^i (\bar{\mathbf{A}}_k^i)^i \hat{\mathbf{x}}^{-i} (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T \quad (3.57)$$

Particionando $(\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T$ em linhas, tem-se:

$$(\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T = [(\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T \quad (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T \quad (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-2}^i)^T \quad \dots \quad (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T] \quad (3.58)$$

com

$$\tilde{\mathbf{Z}}_a^i = [\tilde{\mathbf{Z}}_a^i \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{a+1}^i \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{N-p-1+a}^i], \quad a = 0, 1, 2, \dots, p, \quad (3.59)$$

a Equação (3.57) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\left[\bar{\mathbf{y}}_k^i (\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T \quad \bar{\mathbf{y}}_k^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T \quad \dots \quad \bar{\mathbf{y}}_k^i (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_p^i (\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T & \tilde{\mathbf{Z}}_p^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T & \cdots & \tilde{\mathbf{Z}}_p^i (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T & \tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T & \cdots & \tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{Z}}_0^i (\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T & \tilde{\mathbf{Z}}_0^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T & \cdots & \tilde{\mathbf{Z}}_0^i (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T & \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T & \cdots & \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T \end{bmatrix} + \\
 & + \mathbf{C}_k^i (\tilde{\mathbf{A}}_k^p)^i \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} (\tilde{\mathbf{Z}}_p^i)^T & \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} (\tilde{\mathbf{Z}}_{p-1}^i)^T & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} (\tilde{\mathbf{Z}}_0^i)^T \end{bmatrix} \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

A partir da análise do termo $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\bar{\mathbf{V}}^i)^T$, tem-se:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_a^i)^T = \sum_{d=0}^{N-p-a} \boldsymbol{\epsilon}_{r_{p+d}}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{a+d}^i)^T = \sum_{k=p}^{N-1} \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{k-p+a}^i)^T, \quad a = 0, 1, 2, \dots, p \quad (3.61)$$

Considerando-se um processo ergódico, o valor esperado de $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{k-p+a}^i)^T$ pode ser obtido como segue (JUANG, 1994):

$$E \left[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{k-p+a}^i)^T \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-p} \sum_{k=p}^{N-1} \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{k-p+a}^i)^T, \quad k > p \quad (3.62)$$

Na Equação (3.52), o p deve ser suficientemente grande a fim de que os efeitos dos transientes do FK sejam desprezíveis, de forma que $\mathbf{C}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \mathbf{x}_k^i \approx 0$. Assim, reescreve-se a Equação (3.57) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-p} \left[\bar{\mathbf{y}}_k^i (\mathbf{V}_k^i) - \tilde{\mathbf{Y}}_k^i \bar{\mathbf{V}}_k^i (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T \right] & = E \left[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_k^i)^T \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{k-1}^i)^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{Z}}_{k-p}^i)^T \right] + \\
 & + \mathbf{C}_k^i (\tilde{\mathbf{A}}_k^p)^i E \left[\hat{\mathbf{x}}_k^{-i} (\tilde{\mathbf{Z}}_{k+p}^i)^T \quad \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} (\tilde{\mathbf{Z}}_{k+p-1}^i)^T \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} (\tilde{\mathbf{Z}}_k^i)^T \right] \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

para todo $k > p$.

Escolhe-se um observador tal que:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^i = \bar{\mathbf{y}}_k^i (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T \left[\bar{\mathbf{V}}_k^i (\bar{\mathbf{V}}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.64)$$

no limite $N \rightarrow \infty$ a Equação (3.61), resulta:

$$E \left[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \left(\tilde{\mathbf{Z}}_k^i \right)^T \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{k-1}^i \right)^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{k-p}^i \right)^T \right] = \quad (3.65)$$

$$= -\mathbf{C}_k^i \left(\tilde{\mathbf{A}}_k^p \right)^i E \left[\hat{\mathbf{x}}_k^{-i} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{k+p}^i \right)^T \quad \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{k+p-1}^i \right)^T \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_k^{-i} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_k^i \right)^T \right] \quad (3.66)$$

Considerando-se que $\tilde{\mathbf{A}}_k^i$ está na forma de um observador, assintoticamente estável, e o p escolhido é suficientemente grande, a Equação (3.66), resulta:

$$E \left[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{k-a}^i \right)^T \right] = 0 \quad (3.67)$$

para $a = 0, \dots, p$ e $k > p$.

Substituindo-se a definição de $\tilde{\mathbf{Z}}_{k-a}^i$ que consta na Equação (3.50) na Equação (3.67) resulta em

$$E \left[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \left(\tilde{\mathbf{u}}_{k-a}^i \right)^T \right] = 0, \quad a = 0, \dots, p$$

$$E \left[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \left(\tilde{\mathbf{y}}_{k-d}^i \right)^T \right] = 0, \quad d = 1, \dots, p \quad (3.68)$$

para $k > p$, o que implica que o resíduo $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$, na i -ésima regra, em qualquer instante de tempo k é ortogonal à função de entrada $\tilde{\mathbf{u}}_{k-a}^i$ com o atraso $0 \leq a \leq p$ e à função de saída $\tilde{\mathbf{y}}_{k-d}^i$ com o atraso $1 \leq d \leq p$. De outra forma, caso escolha-se o observador com os parâmetros do observador de Markov que satisfazem a equação de mínimos quadrados (Equação (3.64)) o resíduo, o qual descreve a diferença entre a medição de saída estimada e a real, é ortogonal para uma dada entrada e a saída medida com o atraso de tempo.

Seja um conjunto de dados de um sistema, com dimensão finita, conforme descrito pelas Equações (3.43) e (3.44). Reescrevendo-se na i -ésima regra do modelo nebuloso evolutivo, tem-se que:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{w}_k^i \quad (3.69)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{v}_k^i \quad (3.70)$$

Dado um conjunto de dados de um sistema dimensionalmente finito descrito pelas Equações (3.43) (3.44), então existe um filtro de Kalman com a propriedade que o resíduo

é branco, possui média zero e é Gaussiano (ALVES, 2005), assim na i -ésima regra, tem-se que:

$$E[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i] = 0; \quad E[\boldsymbol{\epsilon}_{r_d}^i (\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i)^T] = 0; \quad j \neq p \quad (3.71)$$

e satisfaz o princípio da ortogonalidade, na i -ésima regra, do modelo nebuloso evolutivo, como segue:

$$E[\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i (\tilde{\mathbf{y}}_{k-a}^i)^T] = 0; \quad a = 1, \dots, k \quad (3.72)$$

O ganho do filtro de Kalman é uma constante que recupera os parâmetros de Markov do filtro de Kalman no limite quando $N \rightarrow \infty$, satisfazendo a solução por mínimos quadrados se somente se, $[\bar{\mathbf{V}}^i (\bar{\mathbf{V}}^i)^T]^{-1}$, existir.

Em (JUANG, 1994) conclui-se que, qualquer observador que satisfaça a Equação (3.64) reproduz o mesmo mapeamento entrada-saída como faz um filtro de Kalman se o comprimento do vetor de dados e a ordem do observador são suficientemente grandes tal que o erro de truncamento na Equação (3.63) seja desprezível. Assim, quando se reduz a ordem do sistema, o observador identificado tende a ser um filtro de Kalman e, por conseguinte, o ganho \mathbf{M}_k^i calculado a partir dos parâmetros de Markov do ganho do observador fornece o ganho do filtro de Kalman \mathbf{K}_k^i , sendo necessário para isto, fazer a seguinte consideração:

$$\mathbf{K}_k^i = -(\mathbf{A}_k^i)^{-1} \mathbf{M}_k^i \quad (3.73)$$

3.5 Esquema da Metodologia Proposta

A partir da Figura 9, observa-se a metodologia para modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos proposta nesta tese. A cada nova amostra, os dados são coletados e inseridos no algoritmo de agrupamento evolutivo, onde os critérios acerca da preservação ou criação de agrupamentos são avaliados. Com a avaliação da estrutura para estes novos dados, atualizam-se os parâmetros do agrupamento (número de centros, pontos focais e matriz de partição). A partir destes parâmetros, o OKID baseado em agrupamento nebuloso estima o consequente da base de regras do filtro de Kalman nebuloso evolutivo. E, finalmente, o filtro de Kalman nebuloso atualiza as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} e a matriz de ganho de Kalman, para compor a i -ésima regra do filtro de Kalman nebuloso evolutivo TS e estimar parâmetros (estados e saídas) do sistema dinâmico via dados experimentais.

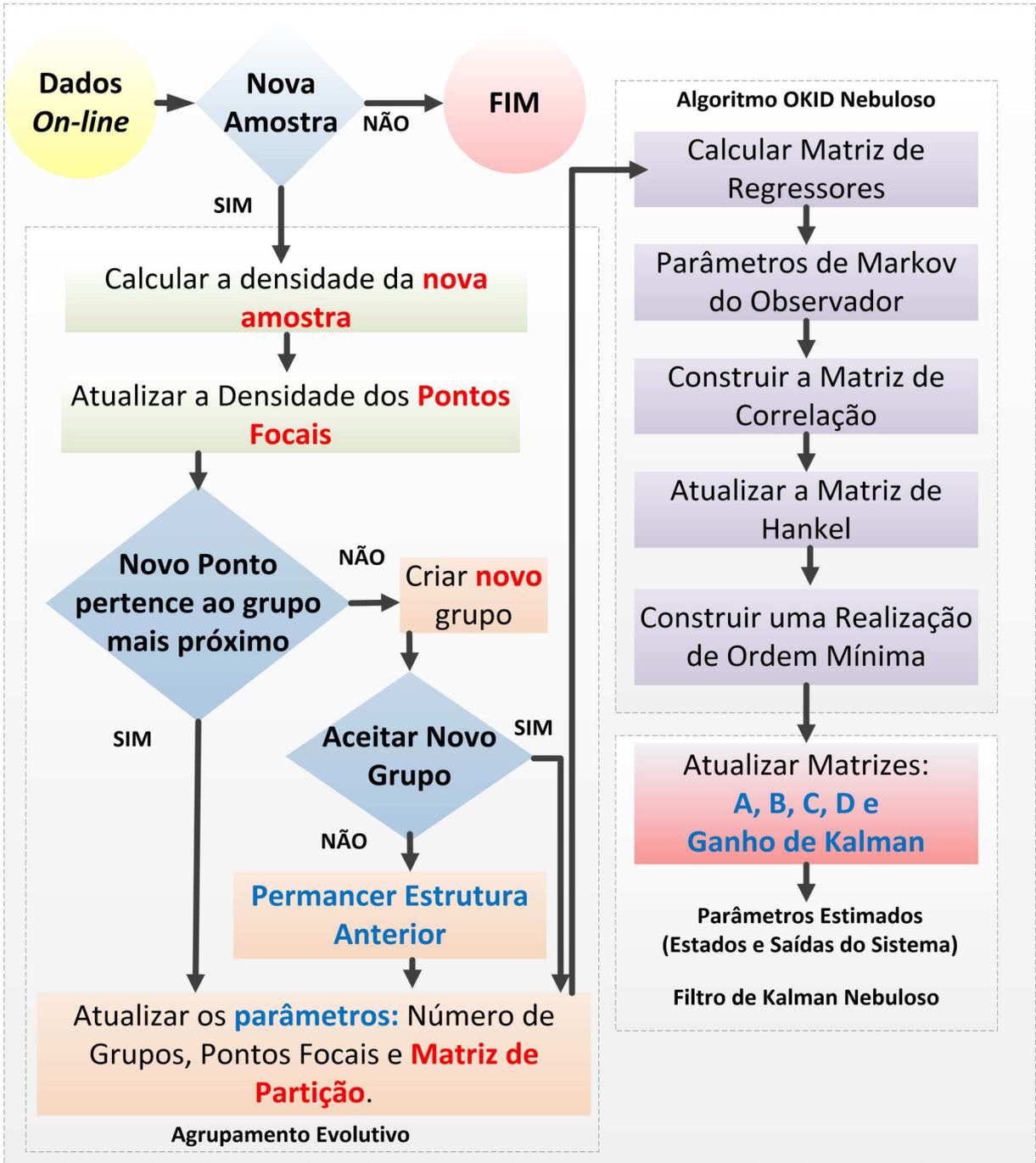


Figura 9 – Metodologia para Modelagem de Filtros de Kalman Nebulosos Evolutivos.

4 Resultados

Neste capítulo serão apresentados resultados computacionais e experimentais no sentido de ilustrar a eficiência e aplicabilidade da metodologia apresentada nesta tese, aplicada à modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos de realização mínima no espaço de estados a partir de dados experimentais.

Na primeira seção deste capítulo, Seção 4.1, o desempenho desta metodologia é validada a partir de resultados computacionais, comparando a técnicas de identificação presentes na literatura que utilizam filtro de Kalman. Para tanto, são utilizados dois exemplos numéricos, a saber: um sistema não linear (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018) e um sistema com dados censurados (ARTHUR et al., 2018).

Logo após, na Seção 4.2, o desempenho desta metodologia é validada a partir de resultados experimentais, onde são apresentados dois estudos de caso com aplicações práticas, a saber: o rastreamento de trajetória de um foguete modelo *Fogtrein-I* ou FTI (Foguete de Treinamento - Intermediário), utilizado em testes, qualificação e treino no Centro de Lançamento de Alcântara - Maranhão (CLA) e Centro de Lançamento da Barreira do Inferno - Rio Grande do Norte (CLBI); e o rastreamento de saídas referentes ao ângulo de elevação e ângulo de azimute de um helicóptero com dois graus de liberdade (2DoF *Helicopter - Quanser*).

4.1 Resultados Computacionais

4.1.1 Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado a um Exemplo Numérico de um Sistema Não Linear

Considere o seguinte sistema não linear (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018):

$$\mathbf{y} = e^{-0,03\mathbf{u}} \text{sen}(0,1\mathbf{u}) \quad (4.1)$$

com $\mathbf{u} \in [-150, 150]$. A saída do sistema \mathbf{y} é corrompida pela existência de um ruído branco de média zero com variância $\sigma_e^2 = 0,5$. Para obter os pares entrada-saída, a sequência do sinal de entrada foi obtida com tamanho de passo 0,04, no intervalo $[-150, 150]$.

O filtro de Kalman nebuloso evolutivo foi aplicado na identificação do sistema considerado. Inicialmente, o algoritmo de agrupamento GK offline foi utilizado a fim de fornecer os parâmetros iniciais para o algoritmo de agrupamento evolutivo. Os parâmetros usados nestes algoritmos estão descritos nas Tabelas 1 e 2, respectivamente.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line para o exemplo numérico de um sistema não linear.

Parâmetro	Descrição	Valor
c	número de grupos	2
ϵ_o	tolerância de terminação	10^{-6}
m	expoente de fuzzificação	2
N	número de amostras do conjunto de dados \mathbf{Z}	51
l	índice de iteração do algoritmo	7000

Tabela 2 – Valores dos parâmetros do algoritmo eTS de agrupamento nebulosos evolutivo para o exemplo numérico de um sistema não linear.

Parâmetro	Descrição	Valor
p	número apropriado de parâmetros do observador de Markov	5
α	Parâmetro que compõe o número de linhas da matriz de Hankel	16
β	Parâmetro que compõe o número de colunas da matriz de Hankel	16

Foram utilizadas 51 amostras na etapa do algoritmo GK off-line, com sinal de entrada obtido com tamanho de passo 0,04, no intervalo $[-152, -150]$, aplicada à Equação (4.1).

O filtro de Kalman nebuloso evolutivo apresenta a $i^{\text{[}i=1,2,\dots,c\text{]}}$ -ésima regra, dada por:

$R^{(i)}$: SE $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ É $M_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i$ ENTÃO

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^i &= \mathbf{A}_k^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{K}_k^i \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}_k^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i\end{aligned}\quad (4.2)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix}\quad (4.3)$$

Uma sequência de resíduos, $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$, na i -ésima regra, é dada por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i = \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k\quad (4.4)$$

onde $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$, com γ^i correspondendo à ponderação dos graus de pertinência da i -ésima regra; \mathbf{y}_k é a saída real na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída do modelo do filtro de Kalman nebuloso na i -ésima regra, na amostra k .

Os resultados dos parâmetros para o modelo nebuloso obtidos pelo algoritmo GK off-line, considerando $c = 2$, para inicialização do algoritmo nebuloso evolutivo eTS, são dados como segue:

Regra 1

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,7948278 \\ -0,0007718 & 0,000700 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,001 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{C}^1 = [-1,765605 \quad 0] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{D}^1 = [0,617114] \quad (4.8)$$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 0,452216 \\ -0,199112 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Regra 2

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,703990644 \\ -0,000769 & 0,000744 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,001 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{C}^2 = [-1,872973 \quad 0] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{D}^2 = [0,676118] \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0,463170 \\ -0,199121 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Na Figura 10, observa-se o rastreamento da saída do modelo nebuloso evolutivo em comparação à saída real do sistema. Durante a evolução do modelo, o número de grupos permaneceu o mesmo $c = 2$. Os graus de pertinência instantâneos, obtidos na etapa nebulosa evolutiva da metodologia apresentada, são mostrados na Figura 11. A estimação recursiva das matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i , \mathbf{D}_k^i e \mathbf{K}_k^i , de acordo com a evolução das

regras do filtro de Kalman nebuloso, pode ser observada a partir do comportamento dos elementos a_{11} , a_{22} , b_{11} , c_{11} , d , K_{11} e K_{21} , nas Figuras 12-18, respectivamente.

Cinco algoritmos de identificação online são considerados em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018), a saber: EKF(c), UKF(c), EKF(pc), UKF(pc) e RLS. No EKF(c) e no UKF(c), as funções de pertinência são fixas e somente os parâmetros do consequente são atualizados. Nestes algoritmos, a notação (c) indica a estimação da parte do consequente. Em EKF(pc) e UKF(pc), tanto a premissa quanto os parâmetros do consequente são atualizados baseado em um conceito dual de FK. Por conseguinte, nestas abordagens, a notação (pc) indica estimação das partes premissa e consequente (BARRAGÁN et al., 2014). No RLS (RASTEGAR; ARAÚJO; MENDES, 2016), os parâmetros do consequente são estimados. Na Figura 19, observam-se as saídas identificadas a partir dos cinco algoritmos considerados em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018) e a saída da metodologia de identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo, apresentada nesta tese.

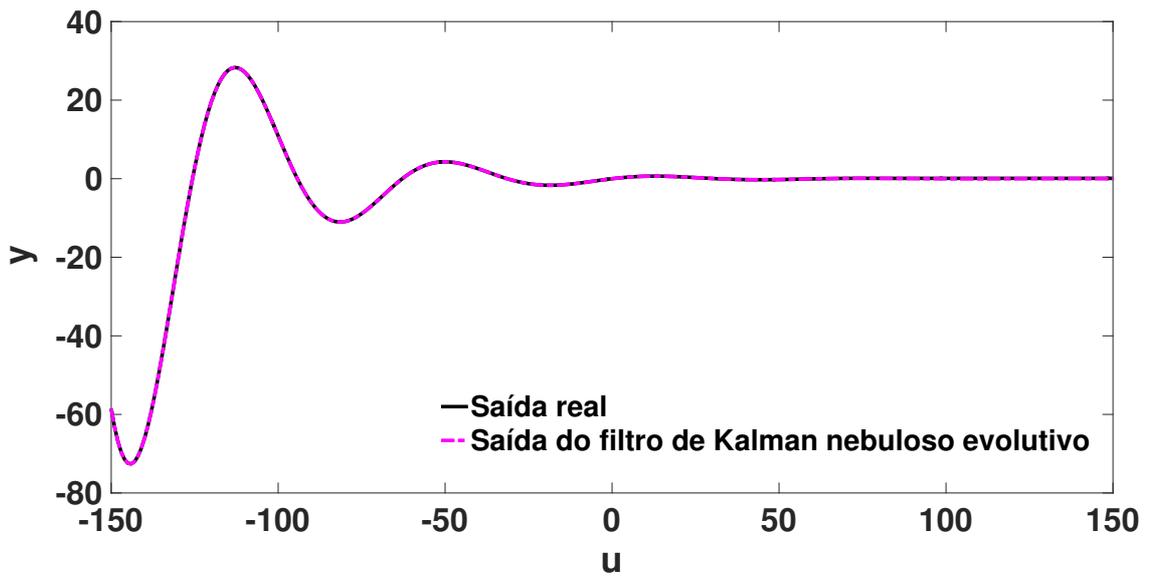


Figura 10 – Saída real e saída do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

A fim de quantificar o desempenho dos algoritmos, a métrica RMS (do inglês, *Root Mean Square*) foi aplicada, a qual é descrita, como segue:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (\mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k)^2}{N}} \quad (4.15)$$

onde N é o número de amostras analisadas pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo; \mathbf{y}_k é a saída do processo na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k$ é a saída do filtro de Kalman nebuloso evolutivo na amostra k .

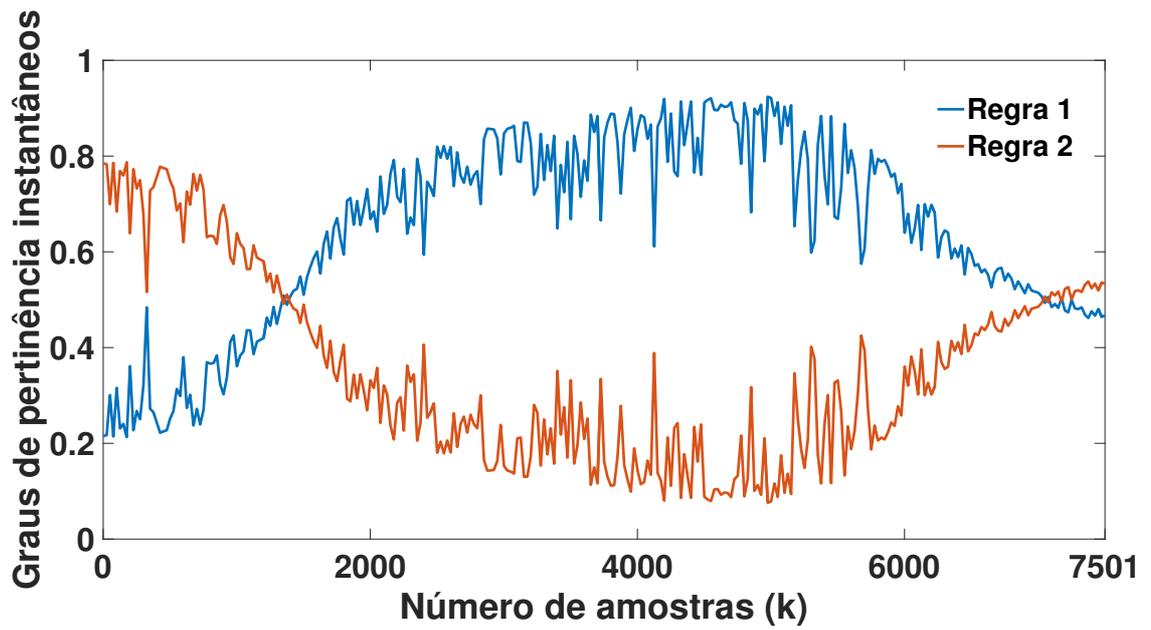
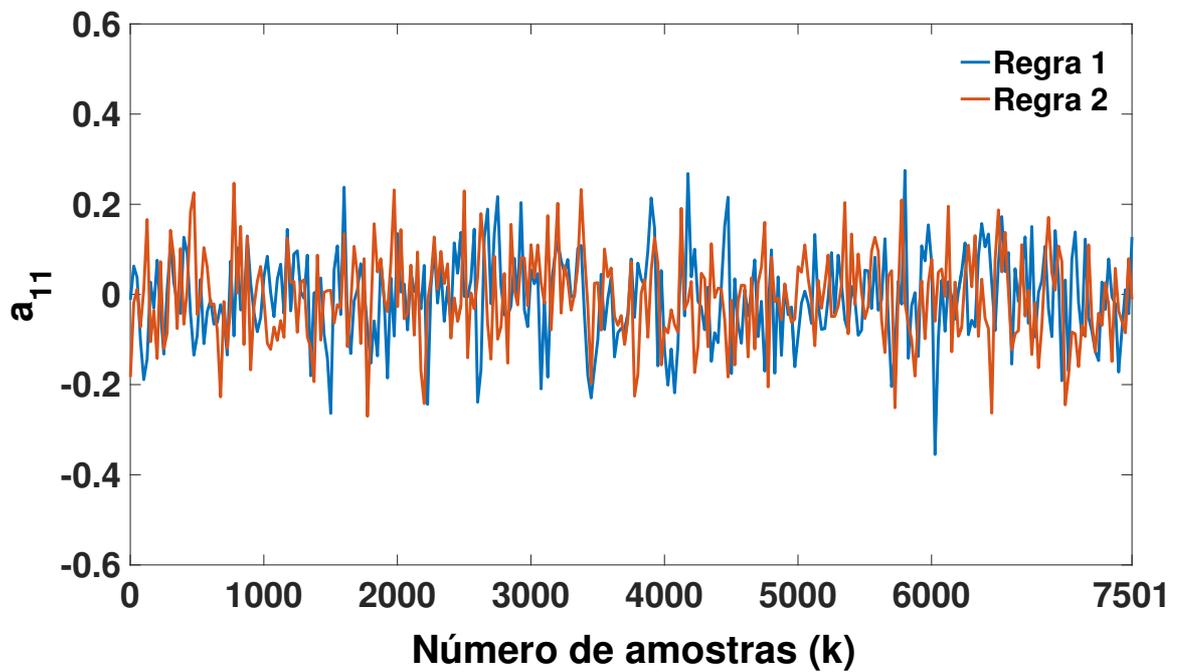


Figura 11 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo.

Figura 12 – Elemento a_{11} .

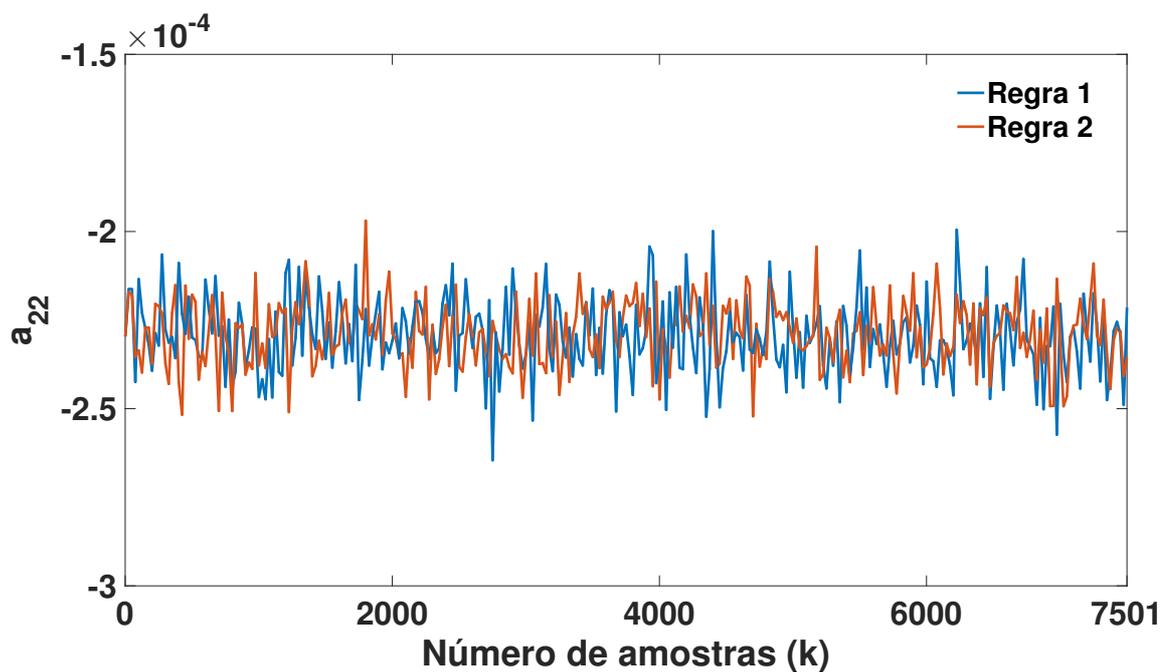


Figura 13 – Elemento a_{22} .

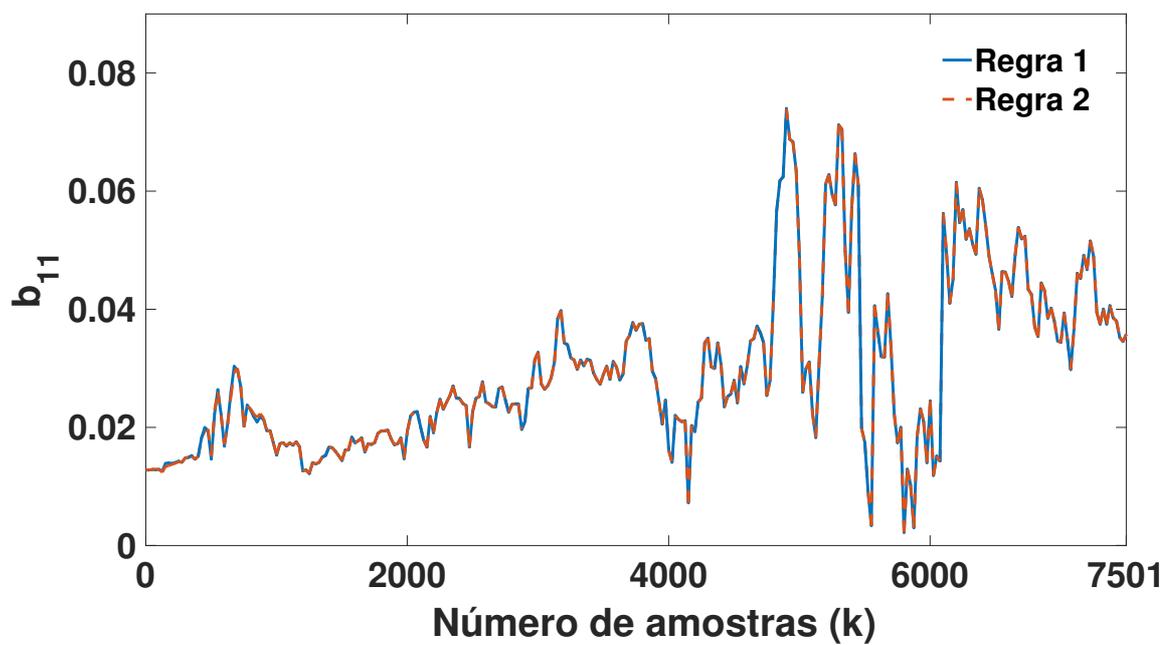


Figura 14 – Elemento b_{11} .

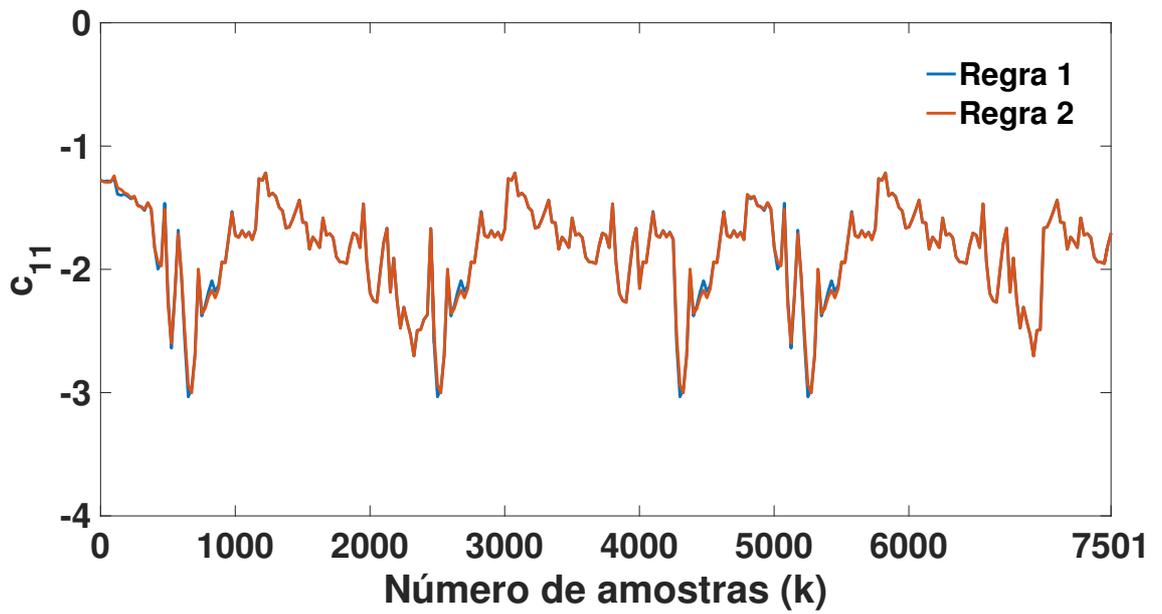


Figura 15 – Elemento c_{11} .

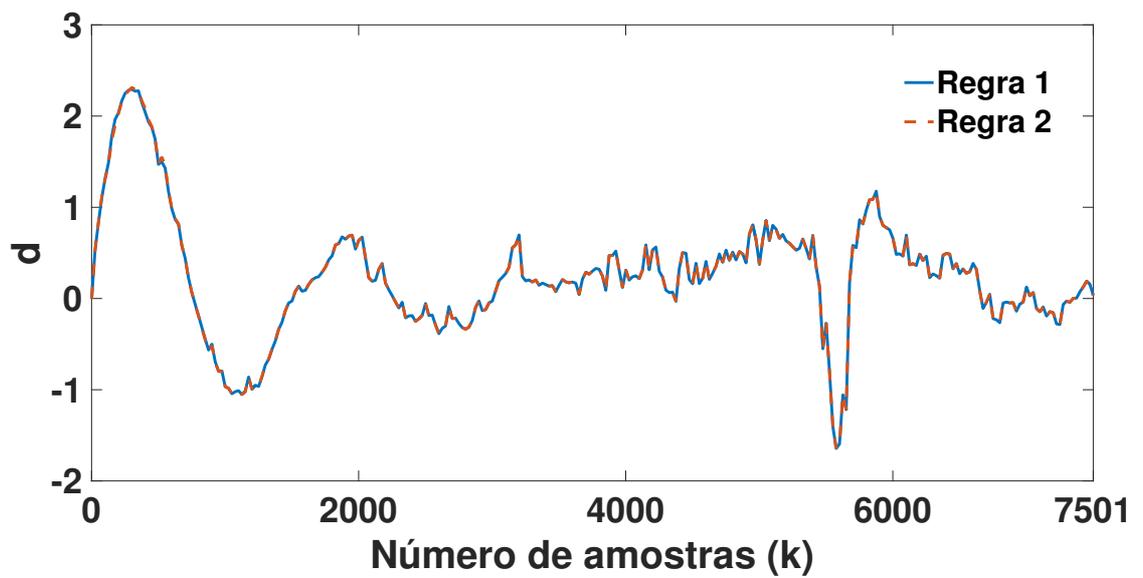


Figura 16 – Elemento d .

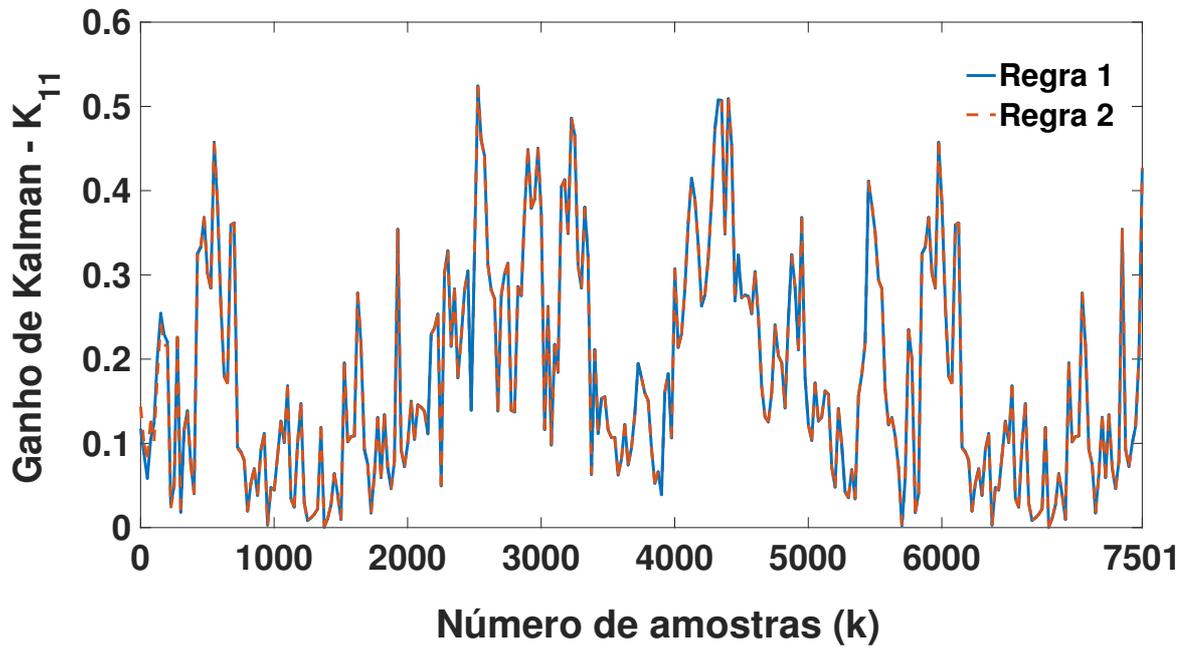


Figura 17 – Elemento K_{11} .

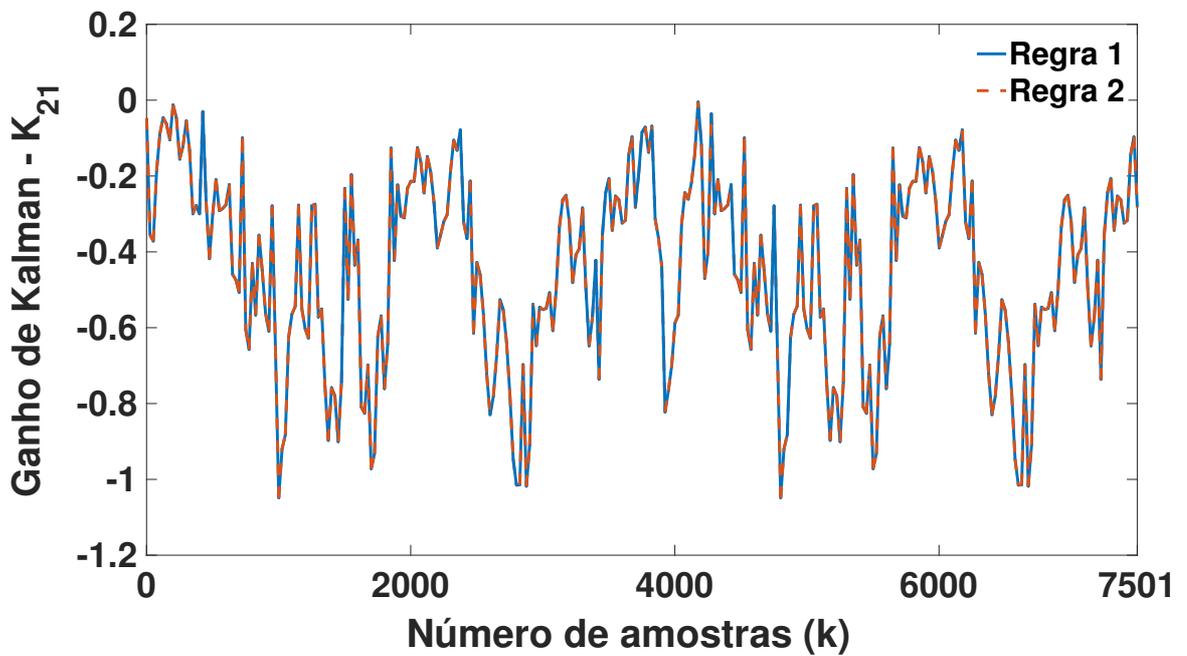


Figura 18 – Elemento K_{21} .

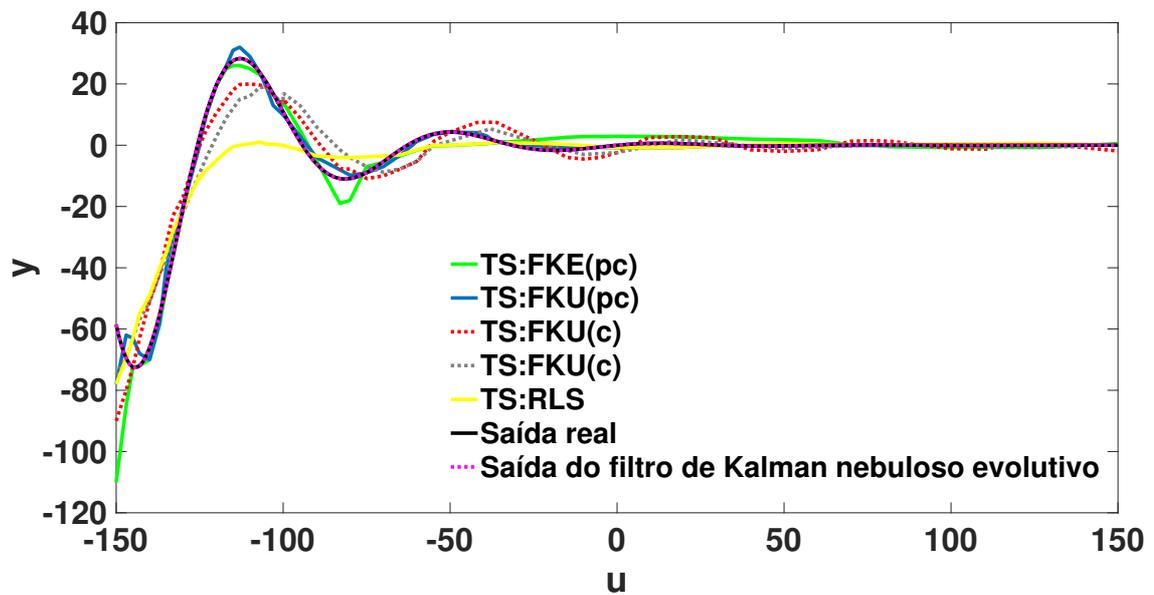


Figura 19 – Saídas real, dos cinco algoritmos TS de identificação e do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

Na Tabela 3 são apresentados os valores RMS de erro para os cinco algoritmos presentes em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018) em comparação ao filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

Tabela 3 – Valor RMS do erro para os cinco algoritmos presentes em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018) em comparação ao filtro de Kalman nebuloso evolutivo presente nesta tese.

Algoritmo	Valor RMS do erro (%)
FKU(pc)	2,18
FKE(pc)	45,60
FKU(c)	5,20
FKE(c)	64,40
RLS	38,00
Filtro de Kalman nebuloso evolutivo	0,99

Observa-se que o filtro de Kalman nebuloso evolutivo apresentou um valor RMS de erro menor em comparação aos cinco algoritmos apresentados em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018). Isto demonstra a eficácia da metodologia apresentada em obter um modelo nebuloso evolutivo, com minimização de erro, na estimação de parâmetros do sistema. Além disso, o tempo de processamento por iteração observado no algoritmo para filtro de Kalman nebuloso evolutivo foi de 1,558975 ms, utilizando um computador com processador *Intel(R) Xeon(R)*, com 4 núcleos. Em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018), foi utilizado um processador com 5 núcleos, onde observou-se, nesta configuração

que o tempo de processamento por iteração foi de 0,0289 *ms* para o RLS e o tempo de processamento por iteração foi de 1,4525 *ms* para o FKU(pc).

Ainda neste exemplo, observa-se na Figura 20, a saída real e as saídas estimadas pelos cinco algoritmos TS de identificação citados em (VAFAMAND; AREFI; KHAYATIAN, 2018), filtro de Kalman nebuloso evolutivo e OKID clássico. Uma vez que o OKID clássico apresenta uma abordagem aplicada a sistemas lineares, o desempenho deste algoritmo demonstrou ser inferior quando comparado aos demais métodos analisados nesta aplicação.

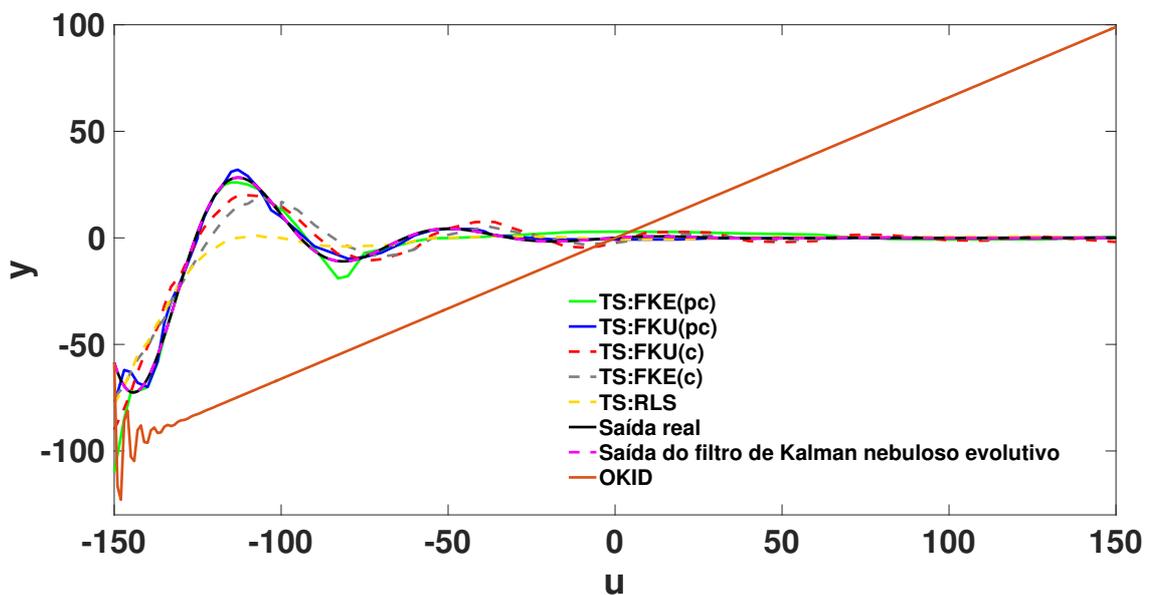


Figura 20 – Saída real e saídas estimadas pelos cinco algoritmos TS de identificação, filtro de Kalman nebuloso evolutivo e OKID clássico.

4.1.2 Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado à Estimação de Parâmetros e Estados de um Sistema com Dados Censurados

A identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo foi aplicada para a estimação de parâmetros e estados de um sistema oscilador estocástico, dado por (ARTHUR et al., 2018):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_2 + \sigma \dot{W}_{x_1} \\ \dot{x}_2 &= 4 - 4x_1 + \sigma \dot{W}_{x_2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $\alpha = 1$ é um parâmetro arbitrário, \dot{W} corresponde a um ruído branco com variância unitária e σ é o nível de ruído do sistema. Além disso, somente as observações de x_1 , amostradas a um taxa de 0,2, corrompido por um ruído Gaussiano, estão disponíveis.

Essas observações são restritas, pois qualquer medida abaixo do valor 0 é censurada, implicando em um intervalo censurado de $(-\infty, 0]$.

Para este sistema oscilador estocástico, conforme Equação (4.16), foram considerados dois casos: no primeiro, o parâmetro α é considerado constante, no segundo, o parâmetro α varia com o tempo. A metodologia para identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo foi aplicada para estimação dos estados x_1 e x_2 e o parâmetro α . Nas Tabelas 4 e 5, observam-se os valores dos parâmetros utilizados no algoritmo de agrupamento GK off-line e no algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo eTS, respectivamente.

Tabela 4 – Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line para estimação de parâmetros e estados de um sistema com dados censurados.

Parâmetro	Descrição	Valor
c	número de grupos	2
ϵ_o	tolerância de terminação	10^{-6}
m	expoente de fuzzificação	2
N	número de amostras do conjunto de dados \mathbf{Z}	40
l	índice de iteração do algoritmo	7000

Tabela 5 – Valores dos parâmetros do algoritmo eTS de agrupamento nebuloso evolutivo para estimação de parâmetros e estados de um sistema com dados censurados.

Parâmetro	Descrição	Valor
p	número apropriado de parâmetros do observador de Markov	5
α	Parâmetro que compõe o número de linhas da matriz de Hankel	16
β	Parâmetro que compõe o número de colunas da matriz de Hankel	16

O filtro de Kalman nebuloso evolutivo apresenta a $i^{\text{[}i=1,2,\dots,c\text{]}}$ -ésima regra, dada por:

$R^{(i)}$: SE $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ É $M_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i$ ENTÃO

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^i &= \mathbf{A}_k^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \mathbf{B}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{K}_k^i \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}_k^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}_k^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i\end{aligned}\quad (4.17)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{2k-1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{1k} \\ \tilde{\alpha}_k \\ \tilde{\mathbf{x}}_{2k} \end{bmatrix}\quad (4.18)$$

Uma sequência de resíduos, $\epsilon_{r_k}^i$, na i -ésima regra, é dada por:

$$\epsilon_{r_k}^i = \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k \quad (4.19)$$

onde $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$, com γ^i correspondendo à ponderação dos graus de pertinência da i -ésima regra; \mathbf{y}_k é a saída real na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída do modelo do filtro de Kalman nebuloso na i -ésima regra, na amostra k . A variável $\tilde{\mathbf{x}}_{2_{k-1}}$ foi usada como entrada e as variáveis $\tilde{\mathbf{x}}_{1_k}$, $\tilde{\alpha}_k$ e $\tilde{\mathbf{x}}_{2_k}$ representam as saídas para identificação do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

Os resultados dos parâmetros para o modelo nebuloso obtido pelo algoritmo GK off-line, considerando $c = 2$, para inicialização do algoritmo nebuloso evolutivo eTS, para o caso em que α é constante, são dados como segue:

Regra 1

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0,262981 & -0,001005 \\ 9,174345 & -0,741707 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} -0,003666 \\ -0,085425 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} -11,387846 & 1,125226 \\ -2,222450 & -0,774870 \\ -1,583204 & 0,086965 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} -0,013355344934098 \\ -0,354815 \\ 0,986524 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 0,2367 & 0,2931 & 0,7254 \\ 0,7253 & 0,9139 & 0,9140 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Regra 2

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0,140580 & -0,003611 \\ 3,846899 & -0,699058 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0,000470 \\ -0,028186 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} -10,178152 & 1,399713 \\ -1,238598 & -0,887991 \\ -1,030706 & 0,010519 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} -0,024307 \\ -0,356841 \\ 0,986000 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0,3367 & 0,3310 & 0,7364 \\ 0,7253 & 0,9139 & 0,9200 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Durante a evolução do modelo, o número de grupos permaneceu o mesmo $c = 2$. Na Figura 21, tem-se os graus de pertinência instantâneos obtidos, na etapa nebulosa evolutiva, aplicando a metodologia para identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo, considerando que os valores de α variam com o tempo. A estimação recursiva das matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i , \mathbf{D}_k^i e \mathbf{K}_k^i , de acordo com a evolução das regras do filtro de Kalman nebuloso, pode ser observada a partir do comportamento dos elementos a_{11} , a_{22} , b_{21} , c_{21} , d_{11} , K_{11} e K_{22} , nas Figuras 22-28, respectivamente.

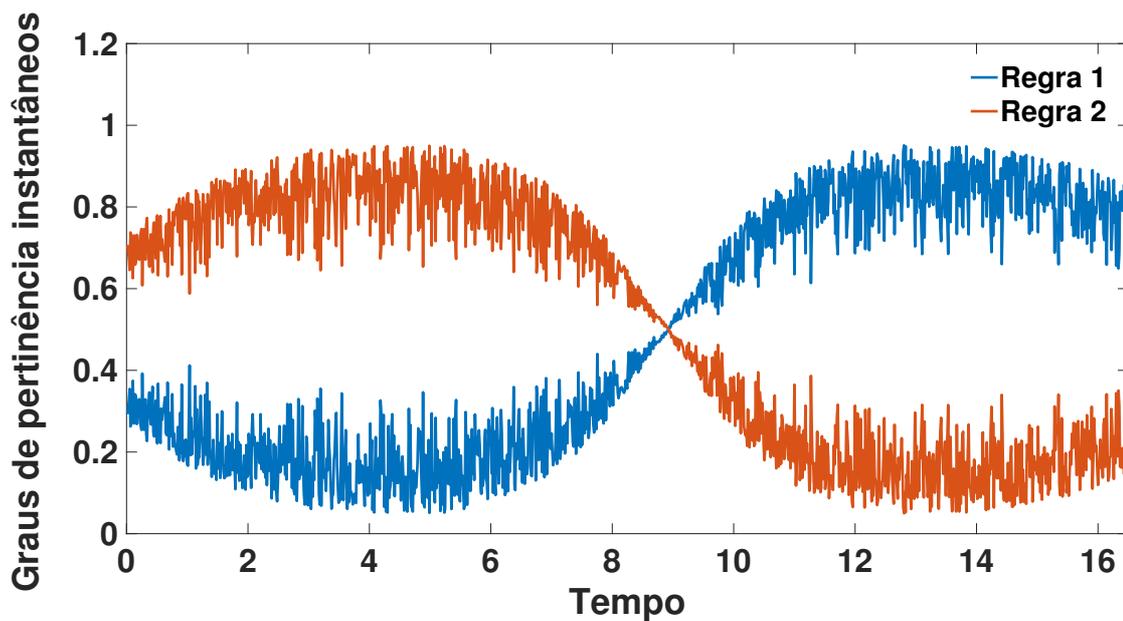


Figura 21 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo, considerando α constante.

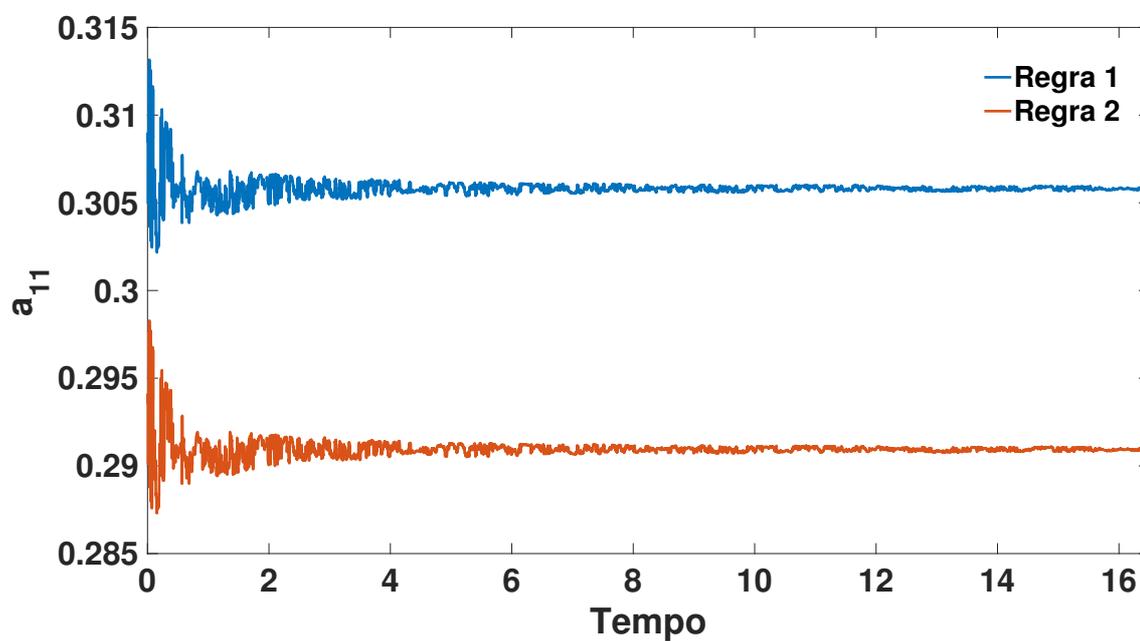


Figura 22 – Elemento a_{11} .

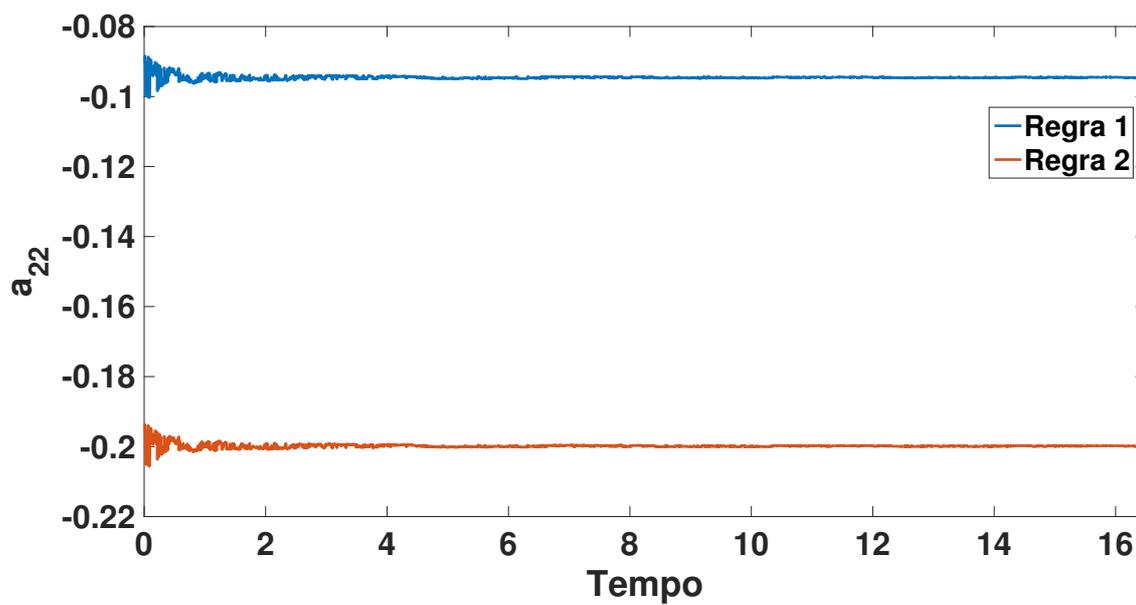


Figura 23 – Elemento a_{22} .

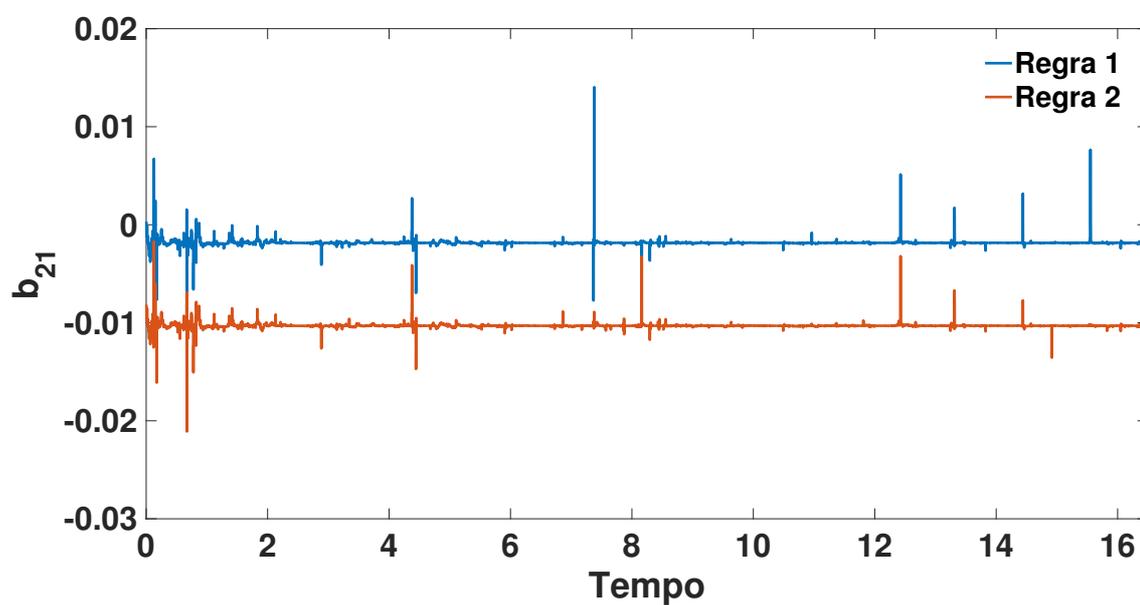


Figura 24 – Elemento b_{21} .

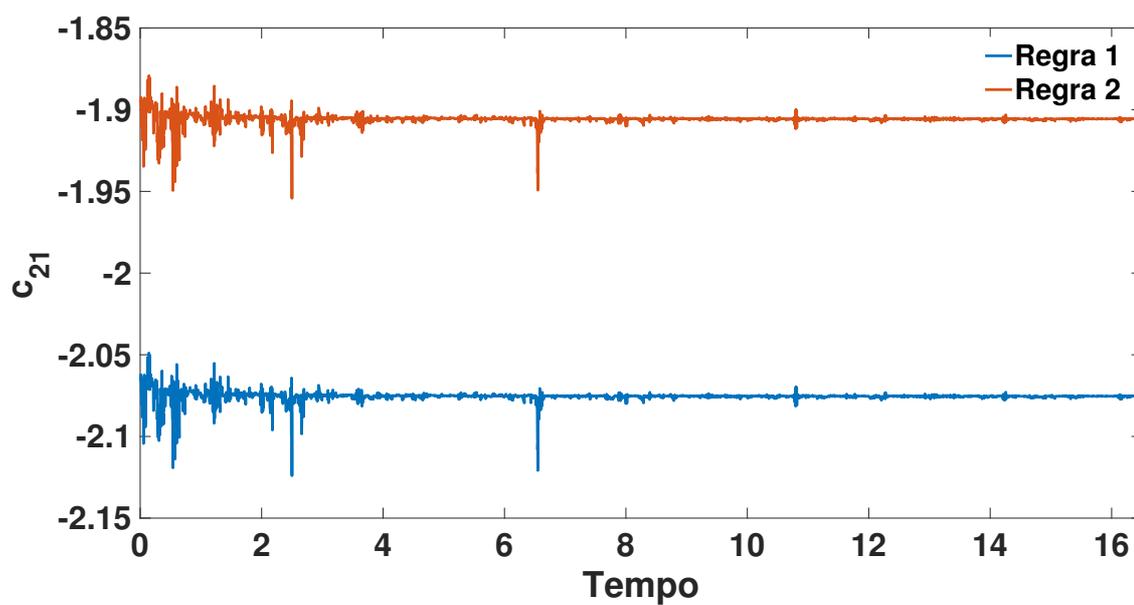


Figura 25 – Elemento c_{21} .

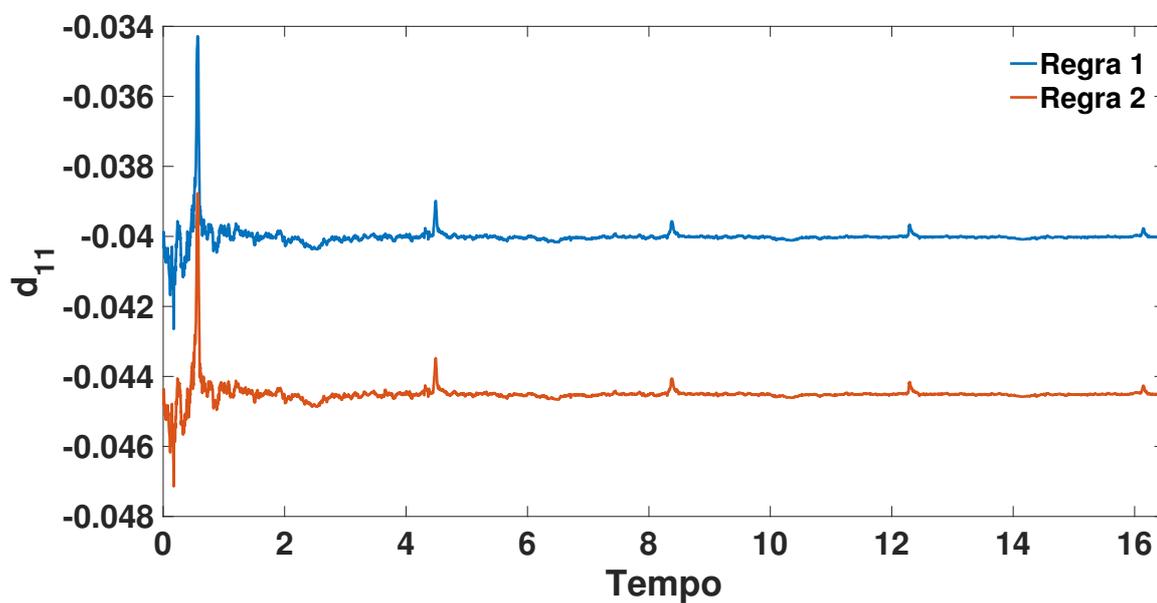


Figura 26 – Elemento d_{11} .

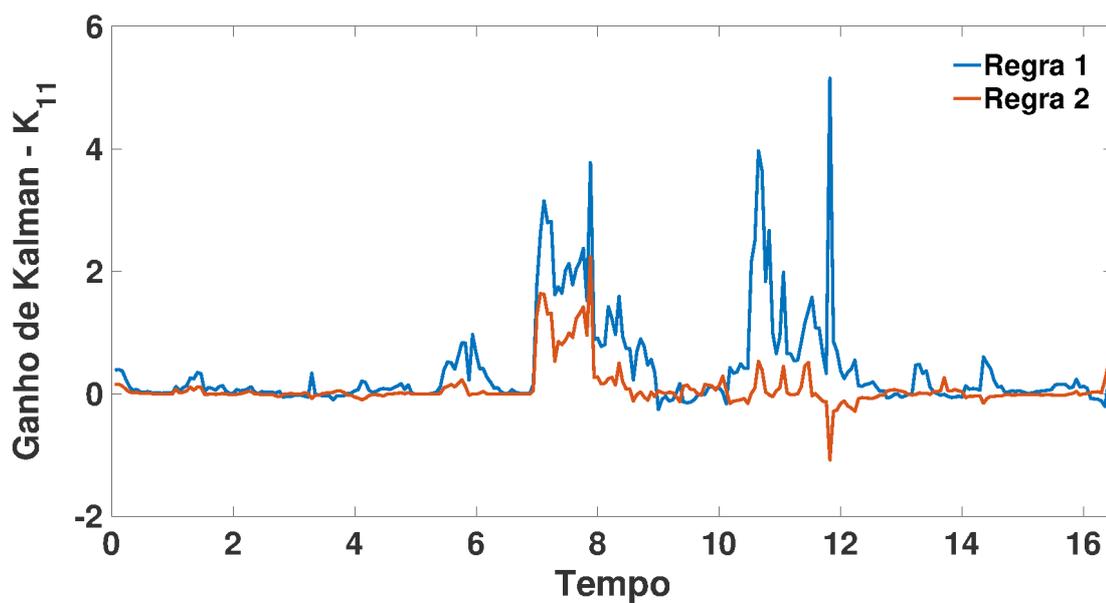
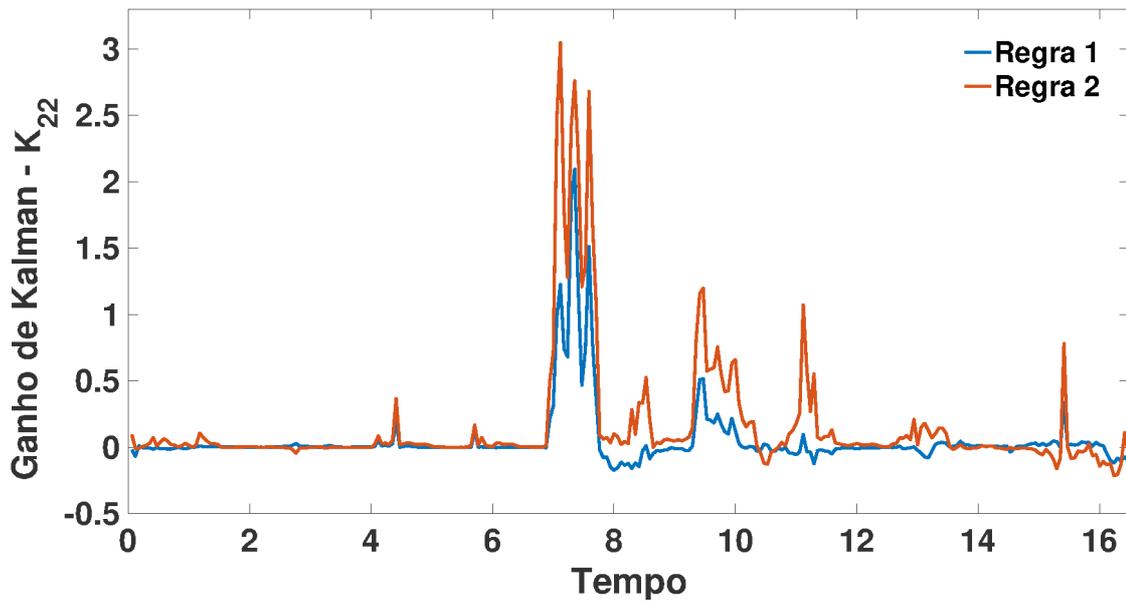


Figura 27 – Elemento K_{11} .

Figura 28 – Elemento K_{22} .

Na Figura 29, observam-se os resultados obtidos usando a metodologia apresentada nesta tese. Em (ARTHUR et al., 2018), a metodologia para filtragem de Kalman não linear apresenta uma região de confiança de 95% do filtro estimado com uma faixa de valores entre -2 e 2 . A metodologia apresentada nesta tese, resulta em uma região de confiança de 95% do filtro estimado com uma faixa de valores entre $0,9$ e $1,1$. A partir deste resultado, observa-se um bom desempenho do filtro de Kalman nebuloso evolutivo em relação à metodologia apresentada em (ARTHUR et al., 2018) para esta aplicação.

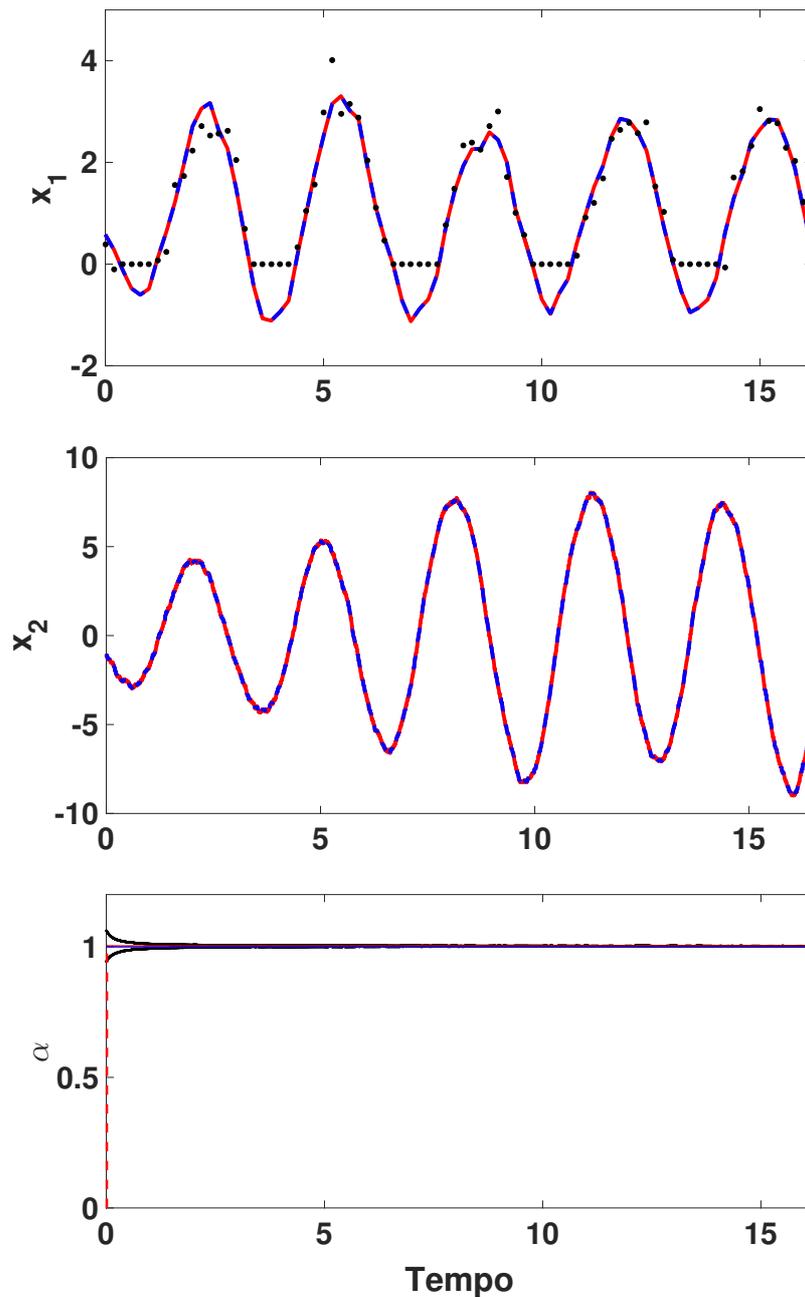


Figura 29 – Estimação de estados e parâmetros de um sistema oscilador estocástico quando α é constante no tempo. A variância de ruído do sistema é de $\sigma^2 = 0,1$ (variância total de ruído do sistema é de $0,2$). Observações (círculos em preto) da variável x_1 são corrompidas por um ruído com variância de $0,3$ e censuradas para valores abaixo de 0 . O sinal em azul tracejado representa a trajetória real da variável/parâmetro e o sinal em vermelho tracejado o estimado pela metodologia apresentada nesta tese. O sinal em preto representa a região de confiança de 95% do filtro estimado.

A metodologia para identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo foi aplicada ainda para estimação dos estados, x_1 e x_2 , e o parâmetro α , considerando que os

valores de α variam com o tempo. Os valores dos parâmetros utilizados no algoritmo de agrupamento GK off-line e no algoritmo de agrupamento nebulosos evolutivo eTS, para este caso, foram os mesmos observados nas tabelas 4 e 5, respectivamente. O filtro de Kalman nebuloso evolutivo utilizado também apresenta, para este caso (α variando com o tempo), a $i^{\text{ésima}}$ regra, dada pelas Equações (4.17) e (4.18).

Os resultados dos parâmetros para o modelo nebuloso obtido pelo algoritmo GK off-line, considerando $c = 2$, para inicialização do algoritmo nebuloso evolutivo eTS, para o caso em que os valores de α variam com o tempo, são dados como segue:

Regra 1

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0,0909 & 0,0005 \\ 13,92564 & -0,2957 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} -0,0008 \\ -0,0311 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} -19,0435 & 0,9408 \\ -2,7123 & -0,6197 \\ -1,6950 & 0,1641 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} -0,0105 \\ -0,0493 \\ 0,4902 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 0,2367 & 0,2931 & 0,7254 \\ 0,7253 & 0,9139 & 0,9140 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Regra 2

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0,3848 & 0,0001 \\ -38,48737 & -0,4193 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -0,0011 \\ -0,1347 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} -5,6585 & 0,4094 \\ -2,3887 & -0,1435 \\ -0,1369 & -0,1992 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} -0,0143 \\ -0,0549 \\ 0,9886 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0,3367 & 0,3310 & 0,7364 \\ 0,7253 & 0,9139 & 0,9200 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Durante a evolução do modelo, o número de grupos permaneceu o mesmo $c = 2$. Na Figura 30, tem-se os graus de pertinência instantâneos obtidos, na etapa nebulosa evolutiva, aplicando a metodologia para identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo, considerando que os valores de α variam com o tempo. A estimação recursiva das matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i , \mathbf{D}_k^i e \mathbf{K}_k^i , de acordo com a evolução das regras do filtro de Kalman nebuloso, pode ser observada a partir do comportamento dos elementos a_{11} , a_{22} , b_{21} , c_{21} , d_{11} , K_{11} e K_{22} , nas Figuras 31-37, respectivamente.

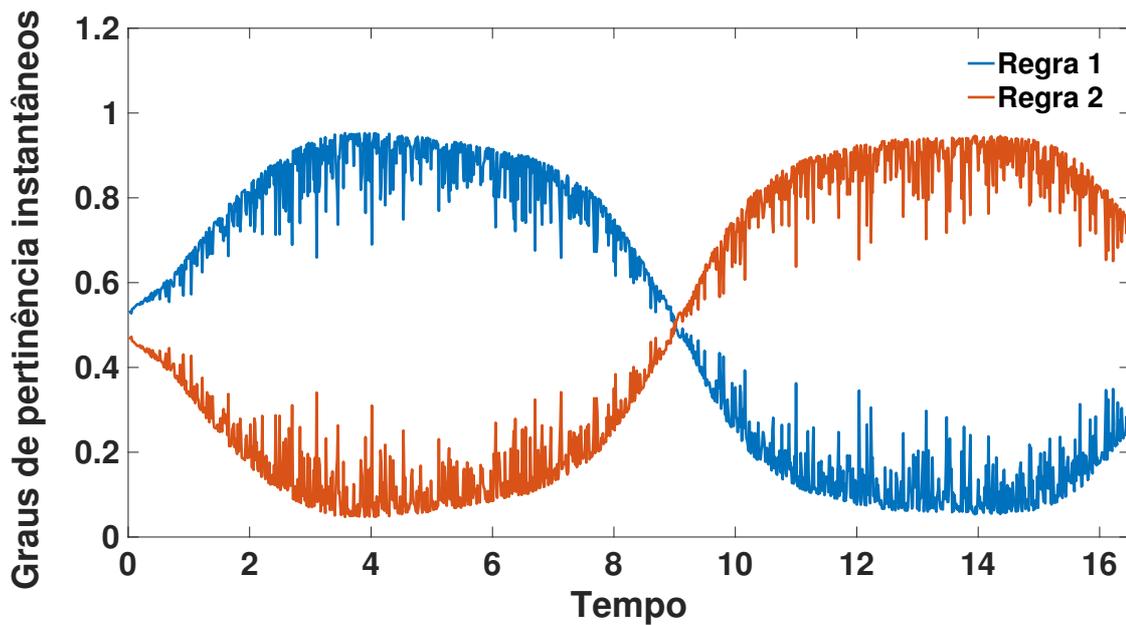
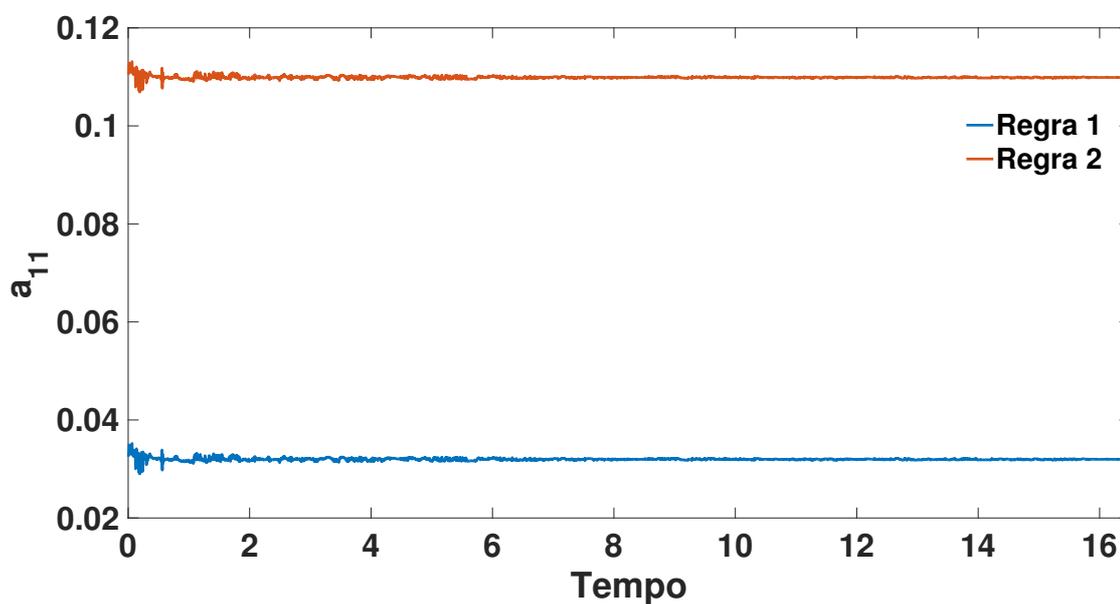
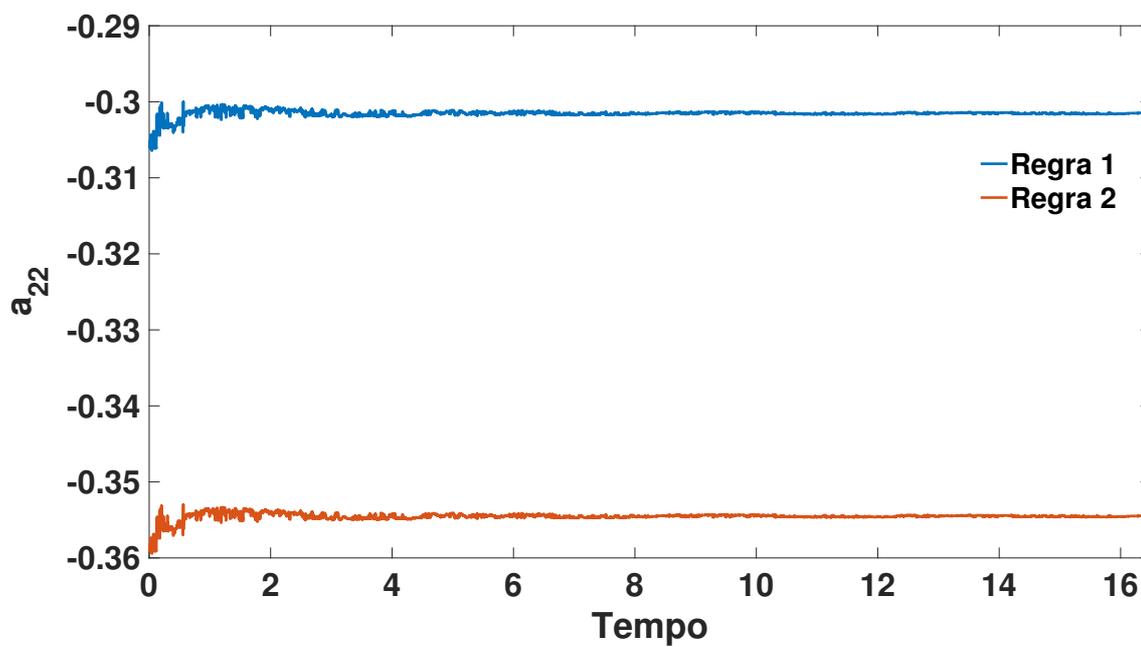


Figura 30 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo, considerando α variando com o tempo.

Figura 31 – Elemento a_{11} .Figura 32 – Elemento a_{22} .

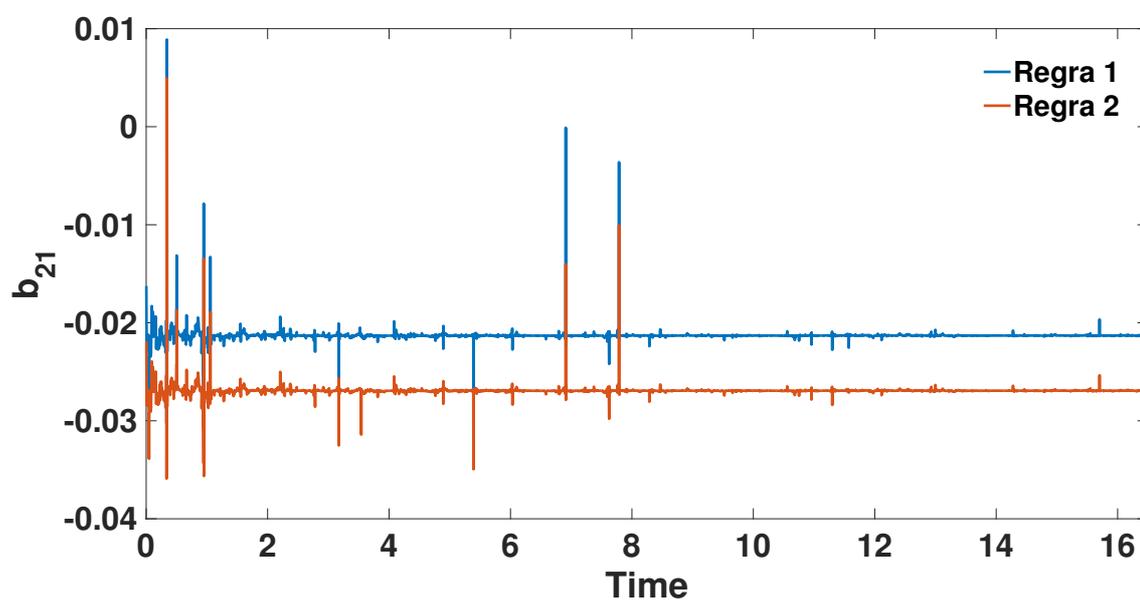


Figura 33 – Elemento b_{21} .

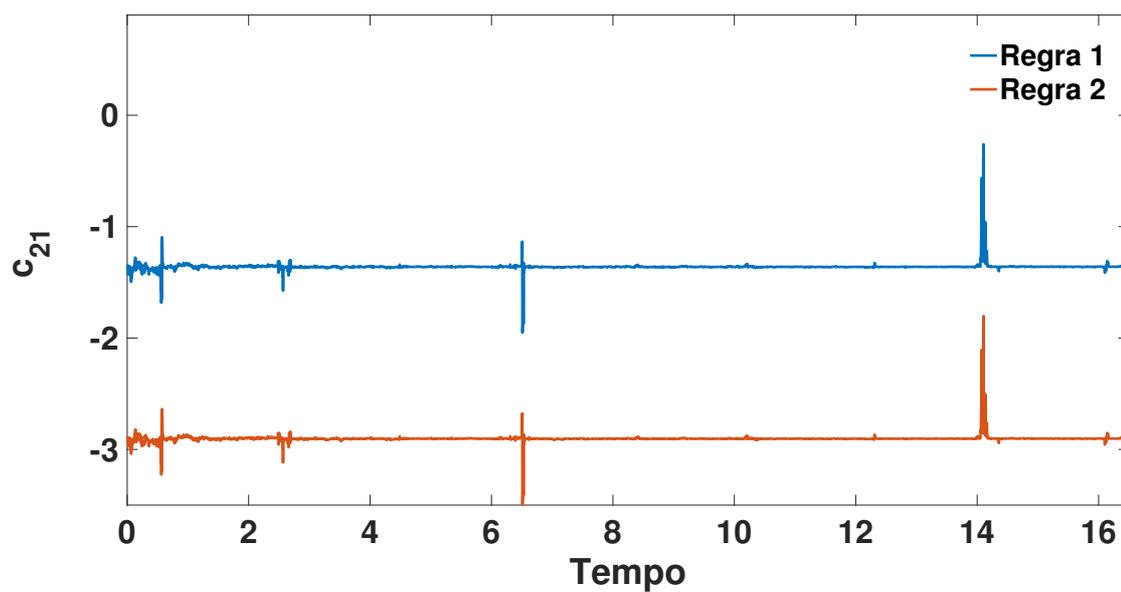


Figura 34 – Elemento c_{21} .

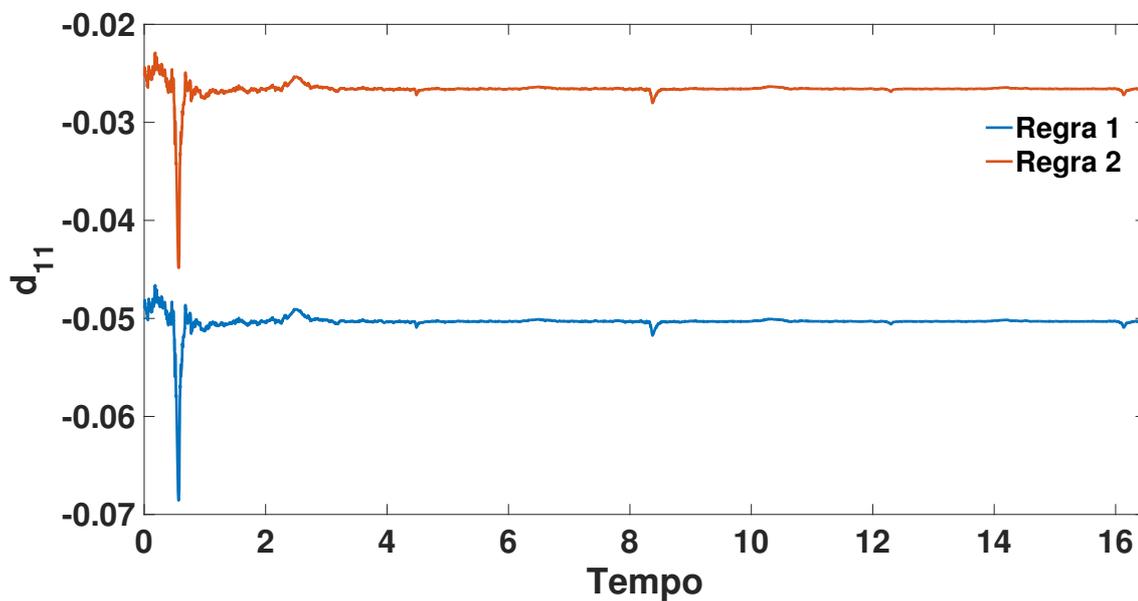


Figura 35 – Elemento d_{11} .

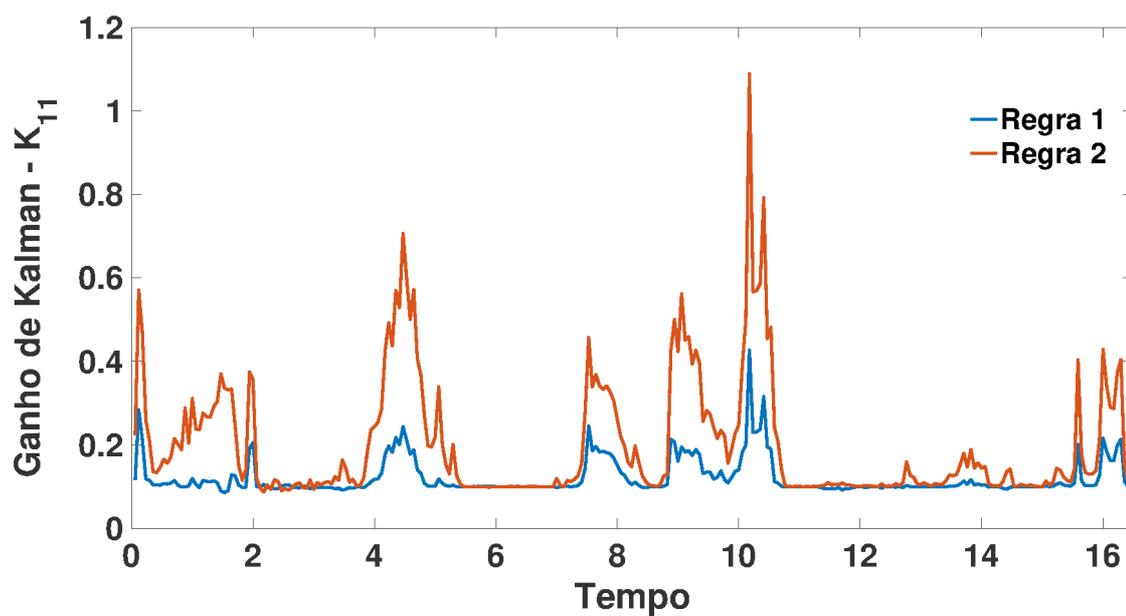
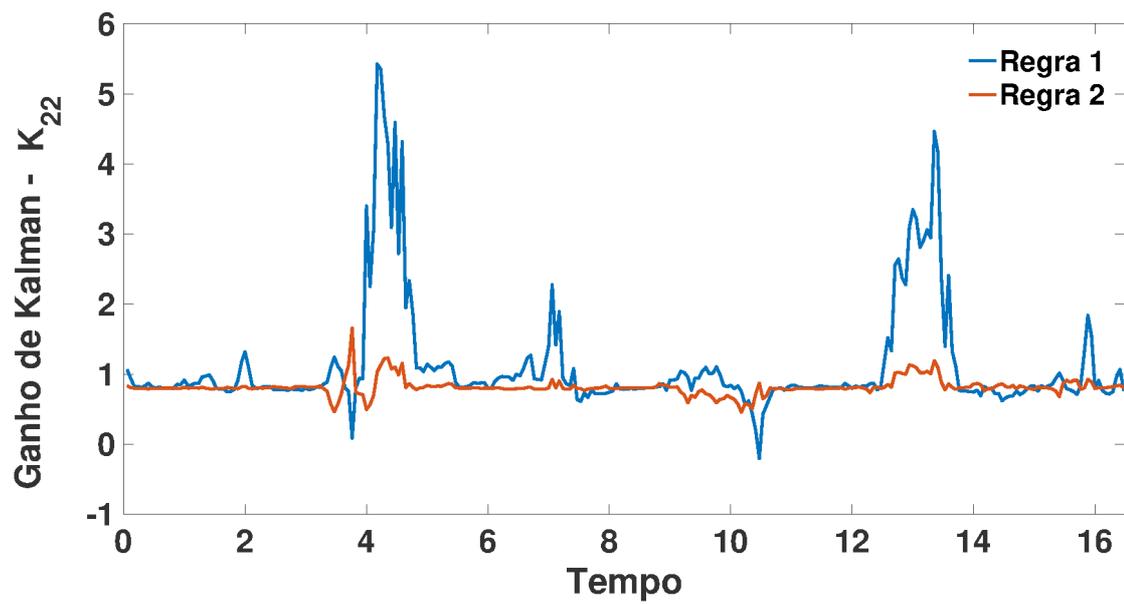


Figura 36 – Elemento K_{11} .

Figura 37 – Elemento K_{22} .

Na Figura 38, observa-se a estimação para o caso em que α varia com o tempo. Ainda assim, o filtro de Kalman nebuloso evolutivo apresentou um rastreamento preciso de α , x_1 e x_2 .

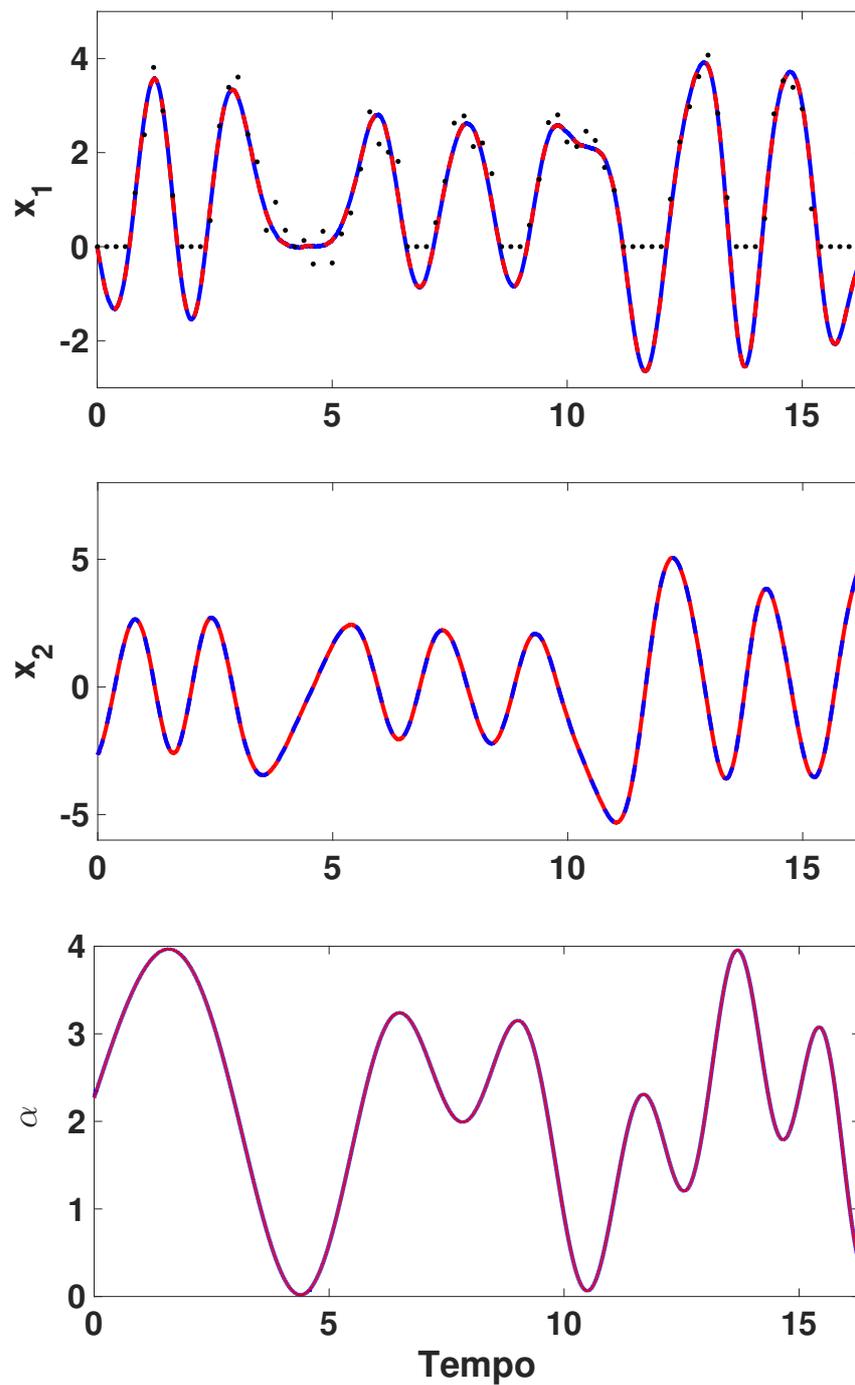


Figura 38 – Estimação de estados e parâmetros de um sistema oscilador estocástico quando α varia com o tempo. A variância de ruído do sistema é de $\sigma^2 = 0,1$ (variância total de ruído do sistema é de $0,2$). Observações (círculos em preto) da variável x_1 são corrompidas por um ruído com variância de $0,3$ e censuradas para valores abaixo de 0 . O sinal em azul tracejado indica a trajetória real da variável/parâmetro e o sinal em vermelho tracejado o estimado pela metodologia apresentada nesta tese.

4.2 Resultados Experimentais

4.2.1 Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado ao Rastreamento de Trajetória de Foguetes

Uma modelagem caixa preta aplicada ao rastreamento de trajetória de foguetes foi considerada a fim de ilustrar a aplicabilidade da metodologia apresentada. Os dados experimentais reais foram obtidos a partir de um foguete *Fogtrein-I* ou FTI (Foguetes de Treinamento - Intermediário), observado na Figura 39.



Figura 39 – O foguete FTI (COMAER, 2018).

O FTI é um veículo de porte médio da família de foguetes brasileiros para treinamento criado pelo Comando da Força Aérea (COMAER) e Avibrá, com um diâmetro de 0,3 m e um comprimento de 5,4 m (o foguete de 490 kg pode atingir um apogeu de 60 km). Estes veículos são usados para teste, qualificação, treinamento e para projetos de lançamento em condições adversas, tais como, alta salinidade, ventos de até 10 m/s e chuvas de até 10 mm/h. Todos os modelos admitem cargas (de 5 kg até 30 kg), com redes elétricas e equipamentos de telemetria, ao longo de experimentos de interesse na comunidade

acadêmica e científica. Este foguete serve como um modelo para treinamento operacional de um centro de lançamento, isoladamente, sem a participação de estação remota para veículo de monitoramento redundante, com telemetria em banda S, *transponders* de banda C, terminação de vôo e altura acima de 60 km (COMAER, 2018).

As saídas do FTI são o ângulo de elevação \mathbf{y}_1 , o ângulo de azimute \mathbf{y}_2 e a distância \mathbf{y}_3 . Foi aplicada a identificação do filtro de Kalman nebuloso evolutivo para rastreamento destas saídas. Nas Tabelas 6 e 7, observam-se os valores dos parâmetros utilizados no algoritmo de agrupamento GK off-line e no algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo eTS, respectivamente.

Tabela 6 – Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line aplicado ao rastreamento de trajetória de um foguete FTI.

Parâmetro	Descrição	Valor
c	número de grupos	2
ϵ_o	tolerância de terminação	10^{-6}
m	expoente de fuzzificação	2
N	número de amostras do conjunto de dados \mathbf{Z}	82
l	índice de iteração do algoritmo	7000

Tabela 7 – Valores dos parâmetros do algoritmo eTS de agrupamento nebuloso evolutivo aplicado ao rastreamento de trajetória de um foguete FTI.

Parâmetro	Descrição	Valor
p	número apropriado de parâmetros do observador de Markov	5
α	Parâmetro que compõe o número de linhas da matriz de Hankel	16
β	Parâmetro que compõe o número de colunas da matriz de Hankel	16

Utilizando os dados de saída obtidos do FTI, a partir da amostra 83 até a amostra 3500, o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo eTS foi aplicado para identificar o filtro de Kalman nebuloso evolutivo, a cada nova amostra de dados experimentais, levando em consideração a ponderação dos conjuntos nebulosos. O filtro de Kalman nebuloso evolutivo apresenta a $i^{\text{ésima}}$ regra, dada por:

$R^{(i)}$: SE $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ É $M_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i$ ENTÃO

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^i &= \mathbf{A}^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \mathbf{B}^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{K}^i \epsilon_{r_k} \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \epsilon_{r_k}\end{aligned}\tag{4.40}$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_{1_{k-1}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{2_{k-1}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{3_{k-1}} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{1_k} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{2_k} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{3_k} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Uma sequência de resíduos, $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$, na i -ésima regra, é dada por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i = \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k \quad (4.42)$$

onde $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$, com γ^i correspondendo à ponderação dos graus de pertinência da i -ésima regra; \mathbf{y}_k é a saída real na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída do modelo do filtro de Kalman nebuloso na i -ésima regra, na amostra k .

Neste exemplo, as variáveis utilizadas como entrada para o algoritmo de filtro de Kalman nebuloso evolutivo foram $\tilde{\mathbf{y}}_{1_{k-1}}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{2_{k-1}}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{3_{k-1}}$ e as saídas consideradas foram $\tilde{\mathbf{y}}_{1_k}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{2_k}$, $\tilde{\mathbf{y}}_{3_k}$. Os resultados dos parâmetros para o modelo nebuloso obtido pelo algoritmo GK off-line, considerando $c = 2$, para inicialização do algoritmo nebuloso evolutivo eTS, são dados como segue:

Regra 1

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,397811 & -0,000678 \\ -0,000386 & 0,000350 & -0,820281 \\ 0,903920 & 0 & -0,000700 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,004 & 0,003 \\ 0,005 & 0,003 & 0,001 \\ 0,001 & 0,006 & 0,002 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} -0,883685 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000627 & -1,469344 \\ 0 & 1,469344 & 0,001254 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} 0,7754349 & -0,028734 & 0,291836 \\ 0,961758 & 0,978389 & 0,190933 \\ -3,076314 & -0,325297 & 4,303900 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} -0,002166 & 0,031382 & 0,101203 \\ -0,017253 & -0,124752 & 0,030015 \\ 0,108879 & 0,032902 & 0,045923 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Regra 2

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,794827 & -0,000678 \\ -0,000771 & 0,000700 & -0,820281 \\ 0,903920 & 0 & -0,000700 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,004 & 0,001 \\ 0,005 & 0,001 & 0,001 \\ 0,001 & 0,006 & 0,002 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} -1,765605 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001254 & -1,469344 \\ 0 & 1,469344 & 0,001254 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

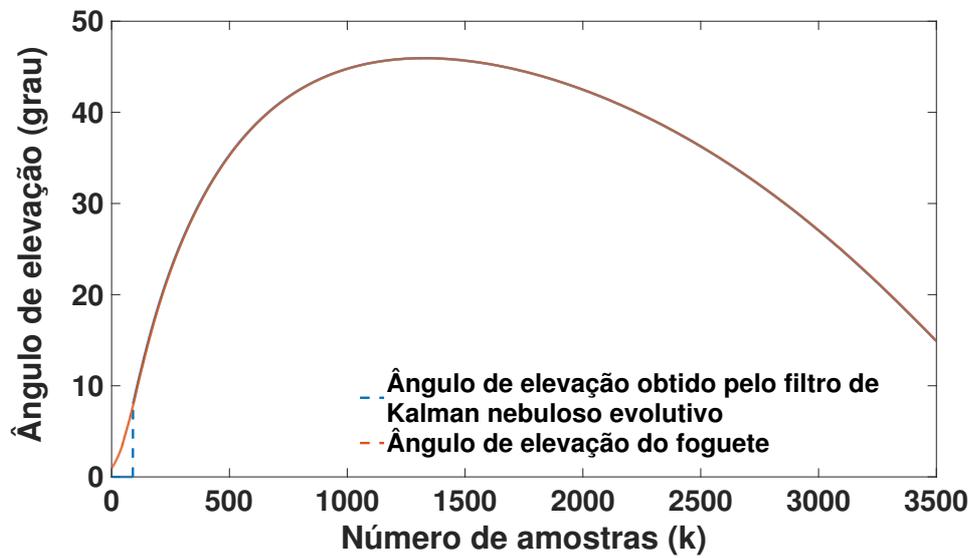
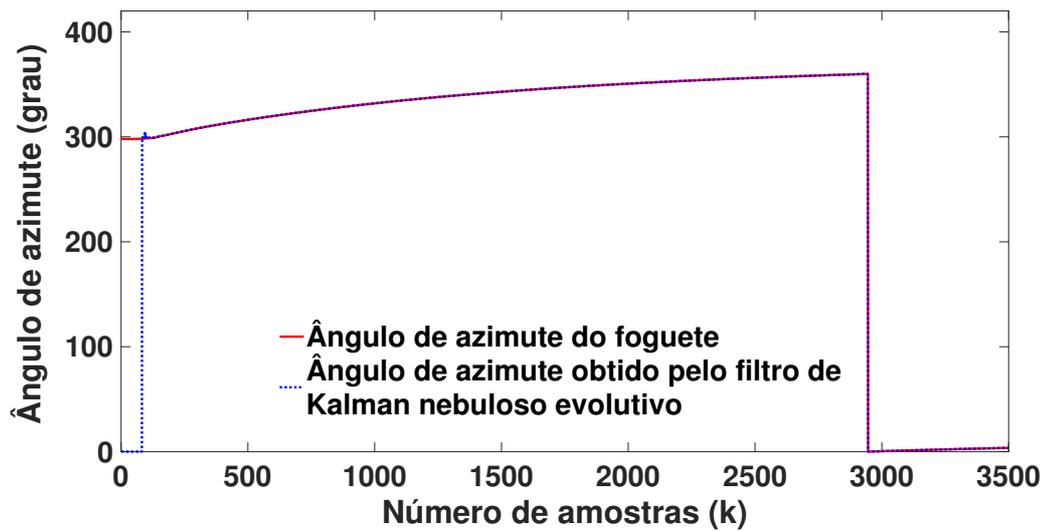
$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 0,627850 & -0,033453 & 0,342320 \\ 0,902454 & 0,982306 & 0,153514 \\ -2,748699 & -0,045516 & 1,519999 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} -0,004600 & 0,022515 & 0,126400 \\ -0,019299 & -0,102888 & 0,020466 \\ 0,144231 & 0,043064 & 0,517991 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

As saídas obtidas pelo FTI, que são o ângulo de elevação \mathbf{y}_1 , o ângulo azimute \mathbf{y}_2 e a distância \mathbf{y}_3 , são observadas nas Figuras 40-42, respectivamente. É observada que a metodologia apresentada rastreia as saídas do sistema. O erro absoluto instantâneo entre a ângulo de elevação, ângulo de azimute e distância apresentados pelo foguete e estimados pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo são mostrados nas Figuras 43-45, respectivamente, demonstrando um bom desempenho do filtro de Kalman nebuloso evolutivo para aplicação em rastreamento de trajetória de foguetes.

Nas Figuras 46-47, observa-se o número de regras e os graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo, respectivamente, demonstrando a característica nebulosa evolutiva da metodologia apresentada, uma vez que há mudança de estrutura do modelo de acordo com a dinâmica dos dados. De acordo com os dados experimentais, nas primeiras 82 amostras o número de grupos é de 2, o qual foi estimado a partir do algoritmo de agrupamento GK off-line como condição inicial conforme a metodologia apresentada. A partir da amostra 83 até 1603 o número de grupos permanece 2; da amostra 1604 até 2108 o número de grupos é de 3; e a partir da amostra 2109 o número de grupos permanece em 2.

A estimação recursiva das matrizes \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i , \mathbf{C}_k^i , \mathbf{D}_k^i e \mathbf{K}_k^i , de acordo com a evolução das regras do filtro de Kalman nebuloso, pode ser observada a partir do comportamento dos elementos a_{22} , c_{11} , d_{11} e K_{11} , nas Figuras 48-51, respectivamente.

Figura 40 – Ângulo de elevação y_1 .Figura 41 – Ângulo de azimute y_2 .

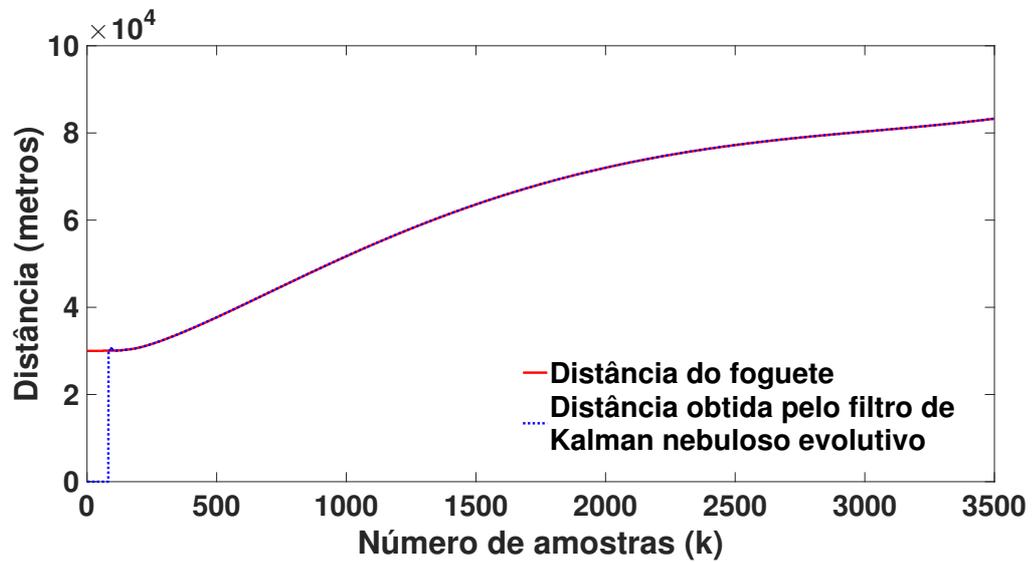
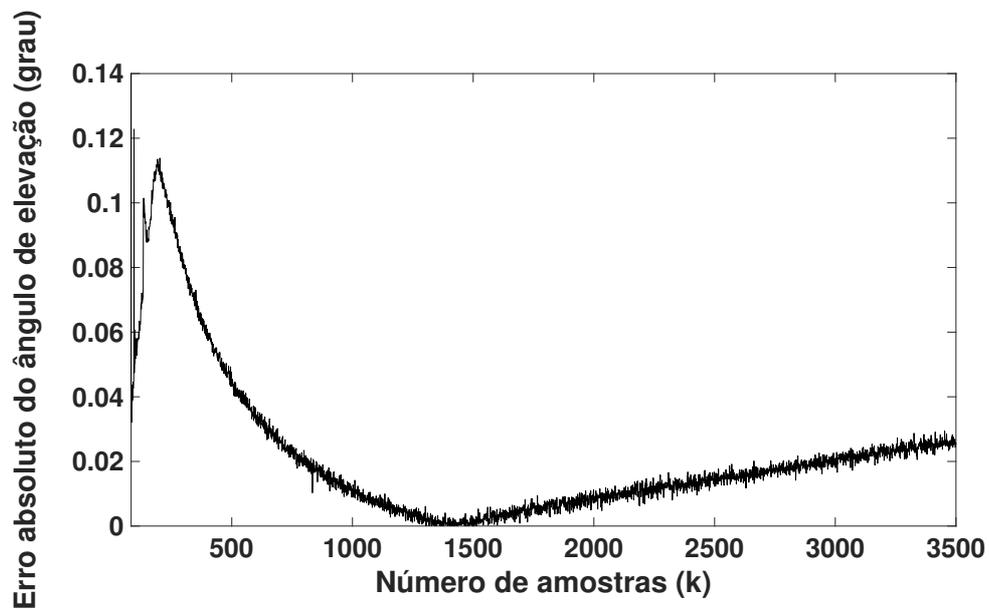
Figura 42 – Distância y_3 .

Figura 43 – Erro absoluto entre o ângulo de elevação real e ângulo de elevação estimado pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

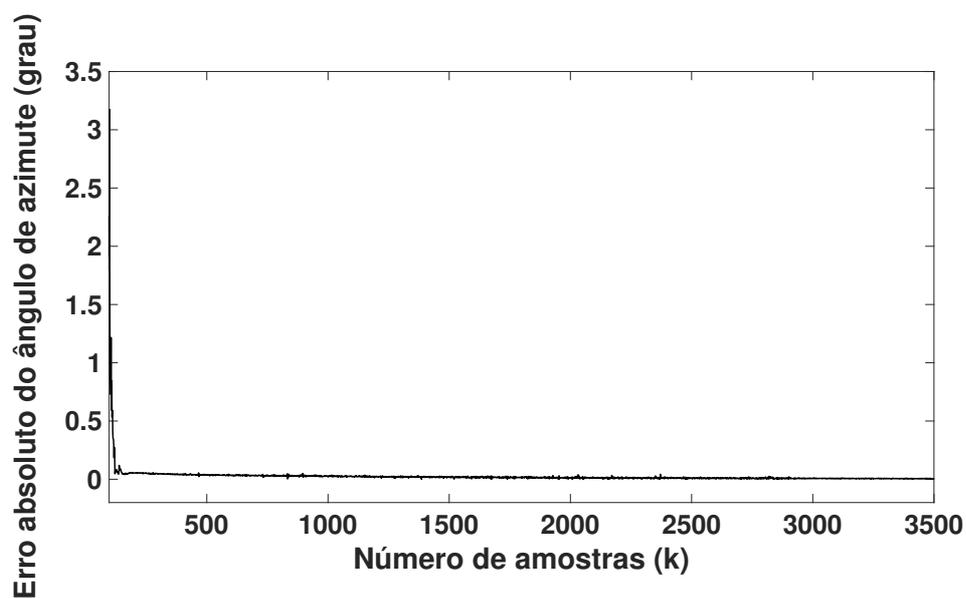


Figura 44 – Erro absoluto entre o ângulo de azimute real e ângulo de azimute estimado pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

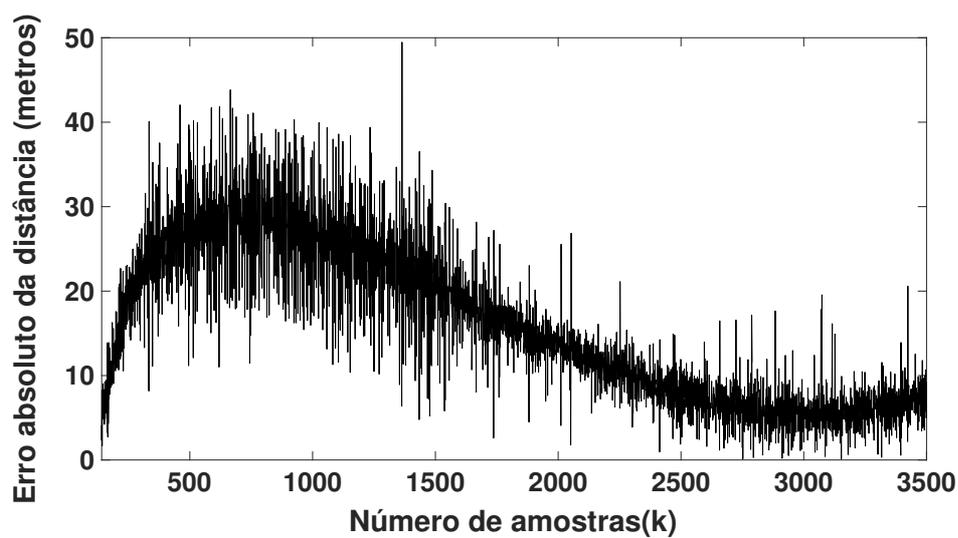


Figura 45 – Erro absoluto entre a distância real e a distância estimada pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

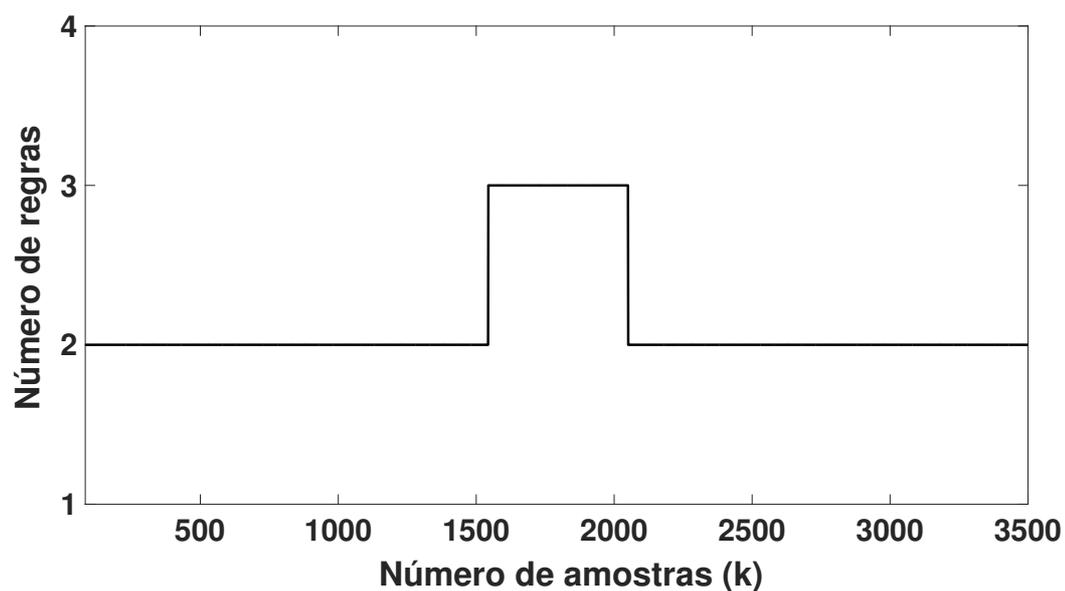


Figura 46 – Número de regras.

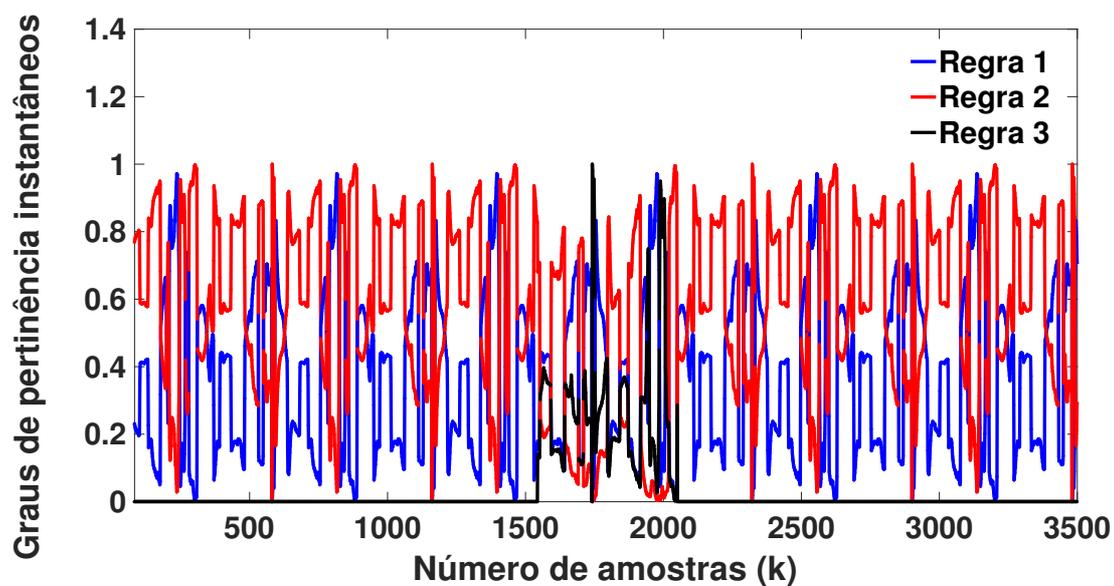


Figura 47 – Graus de pertinência instantâneos durante a evolução do modelo.

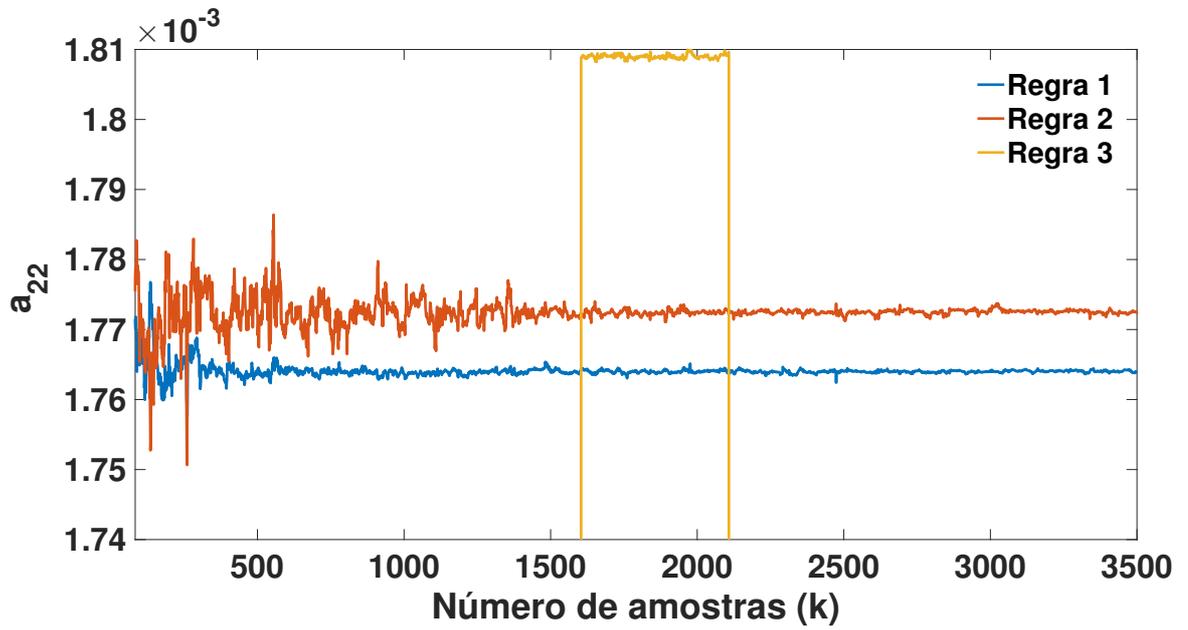


Figura 48 – Elemento a_{22} .

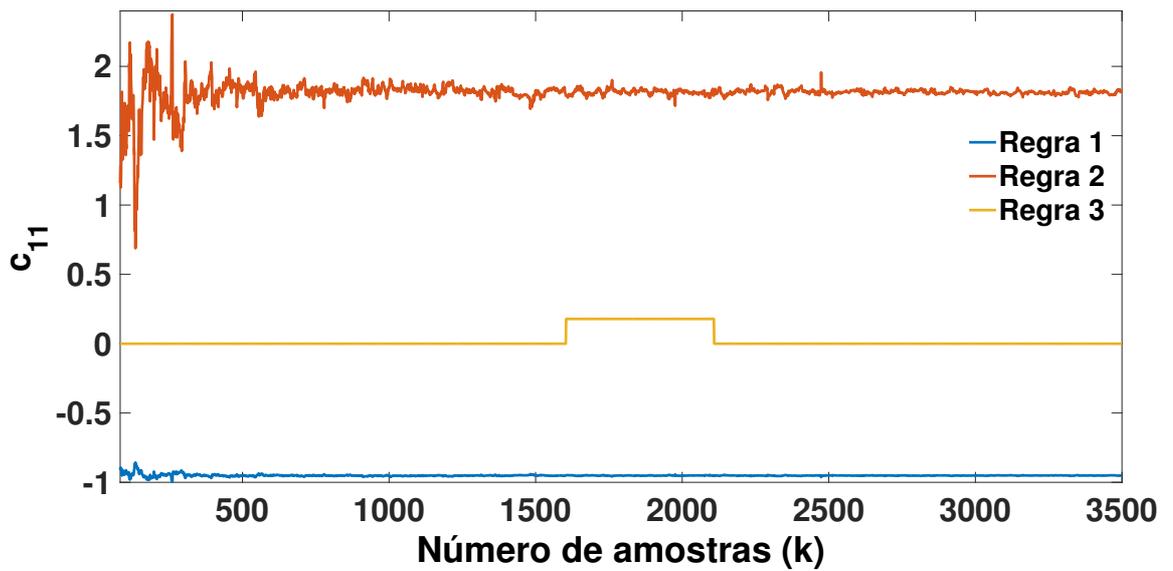


Figura 49 – Elemento c_{11} .

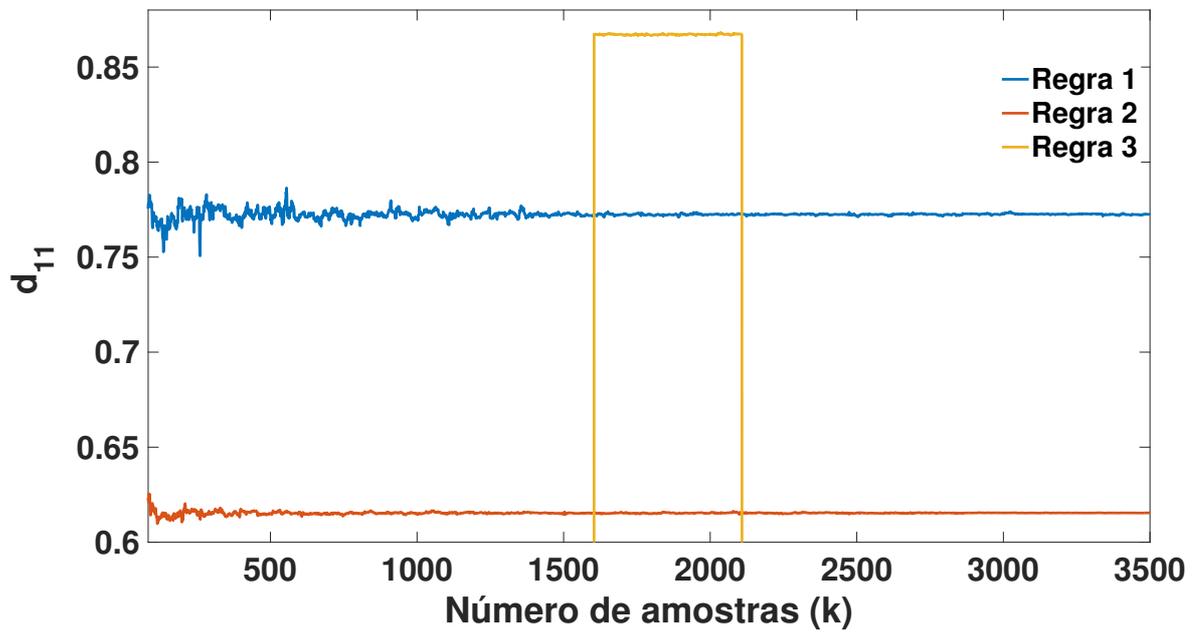


Figura 50 – Elemento d_{11} .

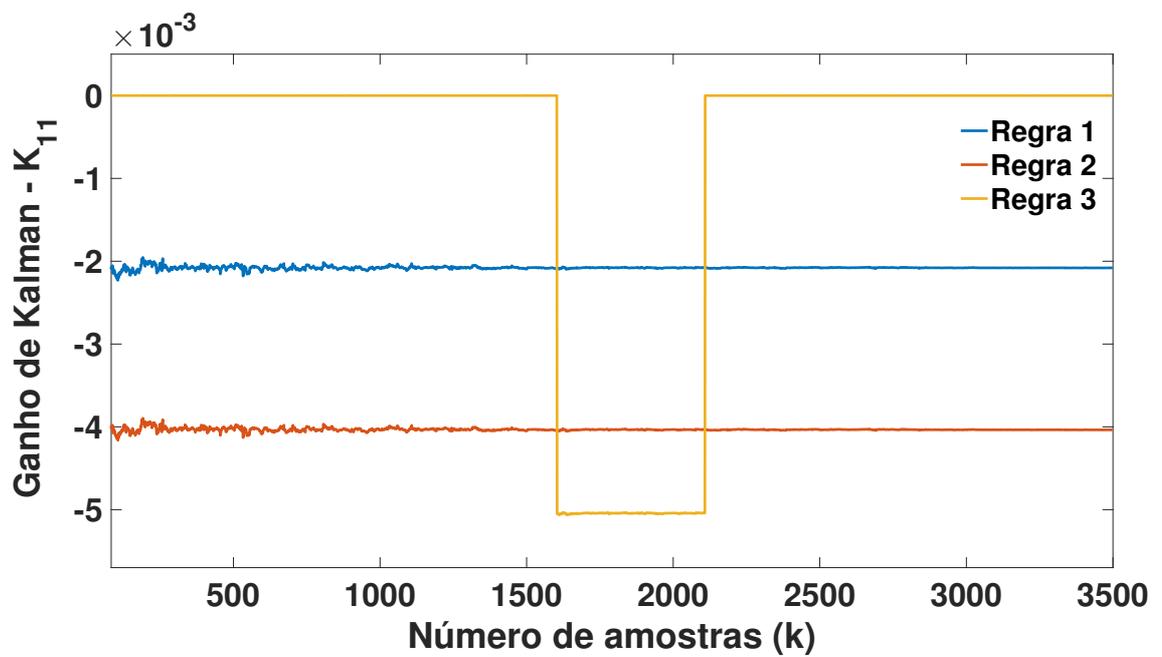


Figura 51 – Elemento K_{11} .

4.2.2 Filtro de Kalman Nebuloso Evolutivo Aplicado ao Rastreamento de Saídas de um Helicóptero 2DoF

Uma modelagem caixa preta foi considerada a fim de ilustrar a aplicabilidade da metodologia apresentada, utilizando um helicóptero 2DoF, conforme Figura 52 (FILHO; SERRA, 2016). O helicóptero possui como graus de liberdade o movimento azimute e o movimento de elevação, com as seguintes características: intervalo da tensão de controle do ângulo azimute, $\mathbf{u}_\theta \in [-24V, +24V]$; intervalo da tensão de controle do ângulo de elevação, $\mathbf{u}_\vartheta \in [-15V, +15V]$; intervalo do ângulo azimute, $\theta \in [-40^\circ, +40^\circ]$; intervalo do ângulo de elevação, $\vartheta \in [-360^\circ, +360^\circ]$, conforme diagrama do helicóptero descrito na Figura 53.

O helicóptero possui duas variáveis de entrada, a saber, tensão do ângulo de elevação \mathbf{u}_ϑ e tensão do ângulo azimute \mathbf{u}_θ ; e duas variáveis de saída, a saber, o ângulo azimute \mathbf{y}_ϑ e o ângulo de elevação \mathbf{y}_θ .



Figura 52 – Helicóptero 2DoF (FILHO; SERRA, 2016).

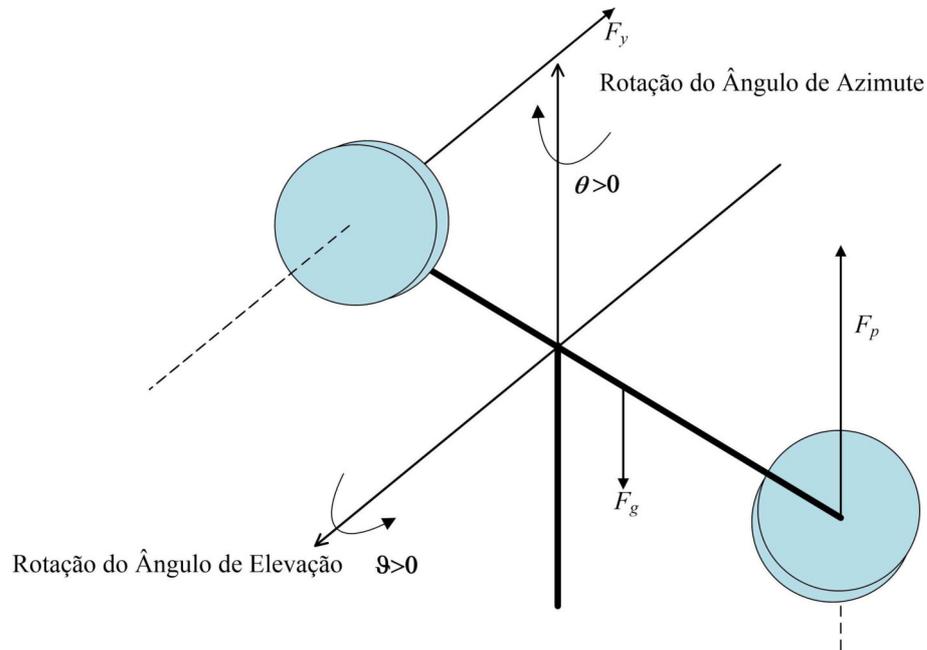


Figura 53 – Diagrama do Helicóptero 2DoF (FILHO; SERRA, 2016).

Os sinais de entrada aplicados ao rotor principal e ao rotor de cauda do helicóptero 2DoF, são observados na Figura 54. Os sinais de saída \mathbf{y}_{θ_k} e \mathbf{y}_{φ_k} obtidos a partir do helicóptero 2DoF, são observados na Figura 55. O filtro de Kalman nebuloso foi treinado usando as 87 primeiras amostras a partir do algoritmo de agrupamento GK off-line com os valores de parâmetros, conforme Tabela 8. Na Tabela 9, observam-se os valores utilizados no algoritmo eTS para o agrupamento nebuloso evolutivo dos dados.

Tabela 8 – Valores dos parâmetros do algoritmo de agrupamento GK off-line.

Parâmetro	Descrição	Valor
c	número de grupos	2
ϵ_o	tolerância de terminação	10^{-6}
m	expoente de fuzzificação	2
N	número de amostras do conjunto de dados \mathbf{Z}	87
l	índice de iteração do algoritmo	7000

Tabela 9 – Valores dos parâmetros do algoritmo de filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

Parâmetro	Descrição	Valor
p	número apropriado de parâmetros do observador de Markov	5
α	Parâmetro que compõe o número de linhas da matriz de Hankel	16
β	Parâmetro que compõe o número de colunas da matriz de Hankel	16

A partir da amostra 88 até a amostra 700, o algoritmo de agrupamento eTS e o

algoritmo OKID nebuloso recursivo foram usados na parametrização do filtro de Kalman nebuloso, o qual é aplicado para estimar as saídas e estados do helicóptero 2DoF. O filtro de Kalman nebuloso evolutivo TS apresenta a $i^{\text{[}i=1,2,\dots,c\text{]}}$ -ésima regra, dada por:

$R^{(i)}$: SE $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ É $M_{\tilde{\mathbf{Z}}_k}^i$ ENTÃO

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^i &= \mathbf{A}^i \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \mathbf{B}^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \mathbf{K}^i \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}^i \tilde{\mathbf{u}}_k^i + \boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i\end{aligned}\quad (4.53)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\theta_k} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\vartheta_k} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{\theta_k} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{\vartheta_k} \end{bmatrix}\quad (4.54)$$

e $\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i$ é uma sequência residual, na i -ésima regra, dada por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{r_k}^i = \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \gamma^i \mathbf{y}_k\quad (4.55)$$

onde $\sum_{i=1}^c \gamma^i = 1$, com γ^i correspondendo à ponderação dos graus de pertinência da i -ésima regra; \mathbf{y}_k é a saída real na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída do modelo do filtro de Kalman nebuloso na i -ésima regra, na amostra k .

Os resultados dos parâmetros para o modelo nebuloso obtido pelo algoritmo GK off-line, considerando $c = 2$, para inicialização do algoritmo nebuloso evolutivo eTS, são dados como segue:

Regra 1

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0,548910 & 0,264795 \\ 0,372606 & -0,553366 \end{bmatrix}\quad (4.56)$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 0,001571 & -0,111575 \\ -0,019473 & -0,341262 \end{bmatrix}\quad (4.57)$$

$$\mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} -0,0008879836 & 0,10934148 \\ -0,455858 & -0,4506976 \end{bmatrix}\quad (4.58)$$

$$\mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} -0,011234 & 0,051577 \\ 0,049191 & -2,702483 \end{bmatrix}\quad (4.59)$$

$$\mathbf{K}^1 = 10^8 \begin{bmatrix} -0.220604 & -0.060695 \\ -1.390748 & 0.204011 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Regra 2

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -0.423572 & 0.321001 \\ 0.621025 & 0.428450 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.011655 & -0.609382 \\ 0.291707 & 0.116274 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} -0.000786 & -0.268304 \\ 1.360430 & -0.000413 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} -0.014256 & 0.027421 \\ 0.024812 & -3.085765 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{K}^2 = 10^7 \begin{bmatrix} -4.651469 & -0.704063 \\ -3.298983 & 1.336955 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

As Equações (4.53)-(4.55) representam o filtro de Kalman nebuloso evolutivo TS na i -ésima regra aplicado na identificação dos parâmetros do helicóptero 2DoF. O rastreamento das saídas, ângulo de azimute \mathbf{y}_{θ_k} e ângulo de elevação \mathbf{y}_{ϑ_k} , e o erro absoluto entre as saídas do filtro de Kalman nebuloso evolutivo e do helicóptero 2DoF, são observados nas Figuras 56-57, respectivamente. A estimação dos estados do helicóptero 2DoF, baseada na metodologia apresentada pode ser observada nas Figuras 58-59. O comportamento evolutivo dos grupos e graus de pertinência instantâneos do filtro de Kalman nebuloso evolutivo, são mostrados na Figuras 60-61, respectivamente. De acordo com os dados experimentais, nas primeiras 87 amostras o número de grupos é de 2, o qual foi estimado a partir do algoritmo de agrupamento GK off-line como condição inicial, conforme a metodologia apresentada. A partir da amostra 88 até 323 o número de grupos é de 3; da amostra 324 até 348 o número de grupos é de 2; da amostra 348 até 353 o número de grupos é de 3; da amostra 354 até 400 o número de grupos é de 2; e a partir da amostra 401 o número de grupos permanece em 3. Pode-se observar que o número de regras do modelo nebuloso é modificado de acordo com o comportamento dinâmico do helicóptero 2DoF, ou seja, a metodologia apresentada é eficiente em relação à modelagem nebulosa evolutiva para o rastreamento das incertezas inerentes aos dados experimentais, adaptativamente.

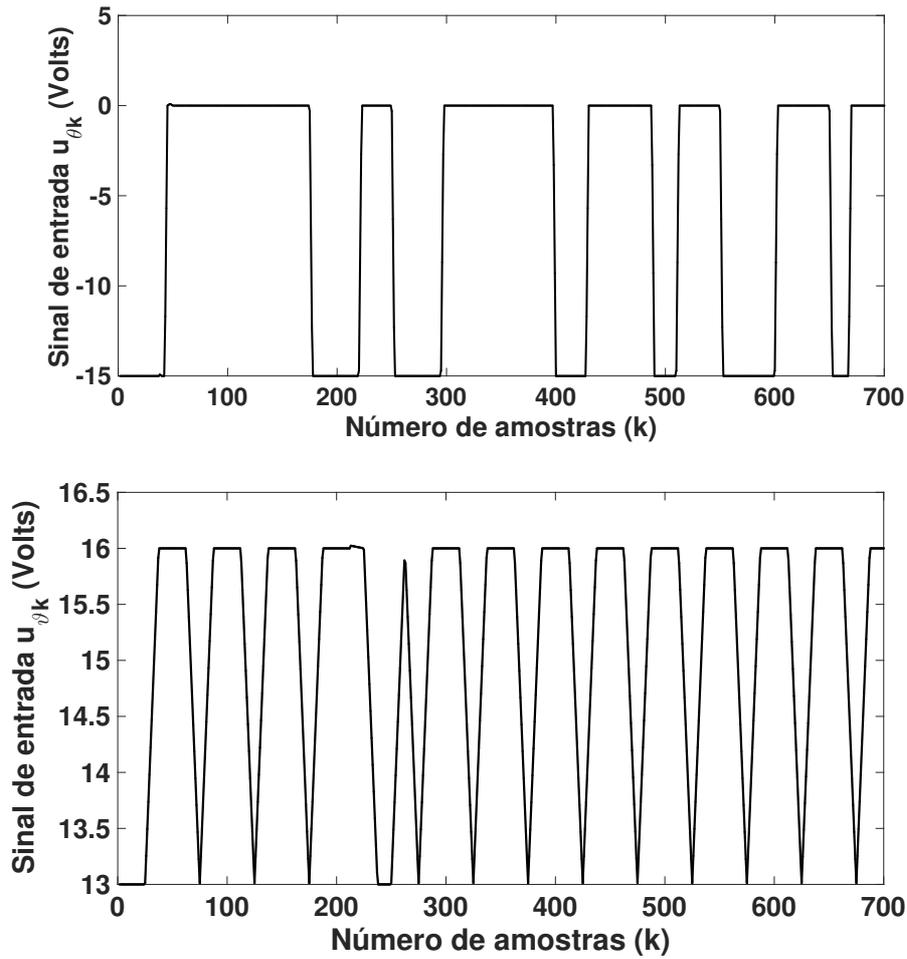


Figura 54 – Sinais de entrada $\mathbf{u}_{\theta k}$ e $\mathbf{u}_{\phi k}$ aplicada ao rotor principal e rotor de cauda do helicóptero 2DoF, respectivamente.

Para avaliar o desempenho da estimação dos parâmetros do helicóptero 2DoF a partir da metodologia apresentada, foi utilizado o Erro Quadrático Médio (MSE, do inglês, *Mean Square Error*). A métrica MSE é descrita, como segue:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k)^2 \quad (4.66)$$

onde N é o número de amostras analisadas pelo filtro de Kalman nebuloso evolutivo; \mathbf{y}_k é a saída do processo na amostra k ; e $\tilde{\mathbf{y}}_k$ é a saída do filtro de Kalman nebuloso evolutivo na amostra k . A metodologia apresentada resultou em valores MSE de 0,0812543 e 0,0094414, para as saídas $\mathbf{y}_{\theta k}$ e $\mathbf{y}_{\phi k}$, respectivamente.

O espaço de valores singulares, baseado nas matrizes de Hankel, para estimação do consequente do filtro de Kalman nebuloso evolutivo, a partir de todas as regras do sistema de inferência, é observado na Figura 62. Os dois valores singulares significativos durante a estimação paramétrica evolutiva do filtro de Kalman nebuloso, implicam na

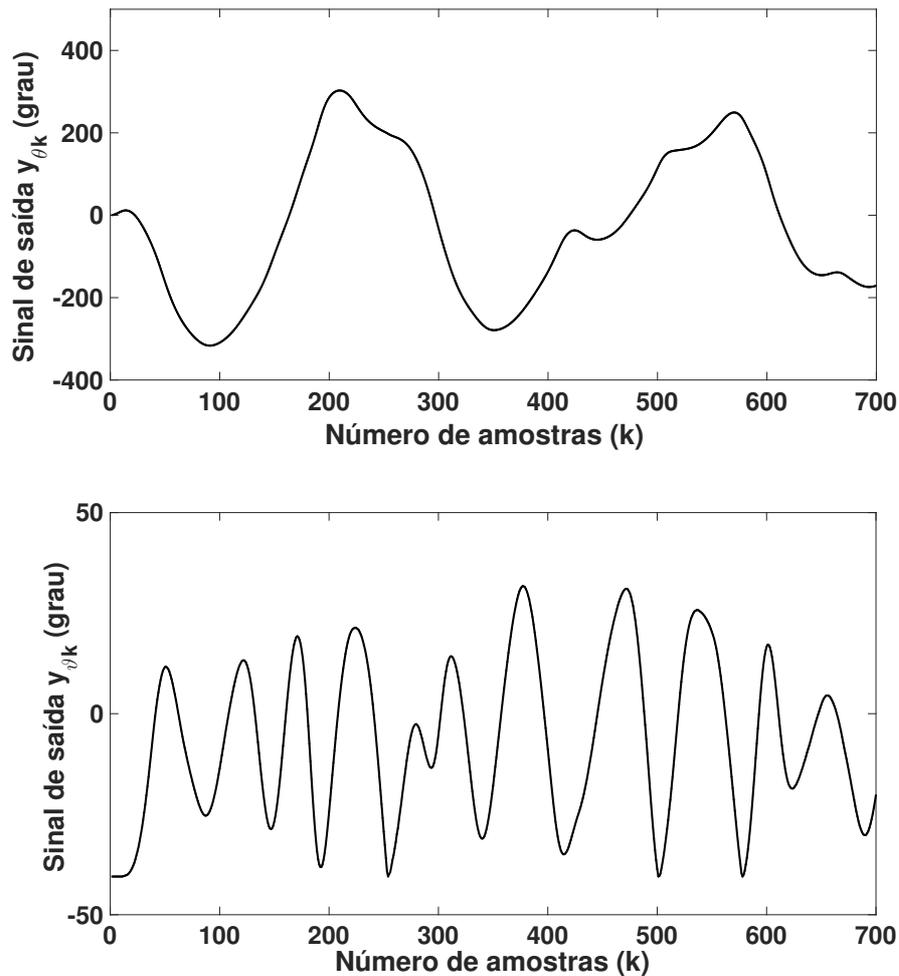


Figura 55 – Sinais de saída y_{θ_k} e $y_{\dot{\theta}_k}$ do helicóptero 2DoF, respectivamente.

ordem mínima de $\iota = 2$ para os modelos em espaço de estados de acordo com a Equação (4.53), isto é, o filtro de Kalman nebuloso obtido tem a menor dimensão em espaço de estados entre todos aqueles com a mesma realização do helicóptero 2DoF.

Os autovalores instantâneos da estimação recursiva da matriz \mathbf{A}^i , considerando o desempenho em relação à realização mínima da metodologia apresentada, de acordo com o comportamento evolutivo das regras do filtro de Kalman nebuloso são mostrados nas Figura 63-65, respectivamente. Isto significa que o modelo nebuloso obtido em espaço de estados possui a menor dimensão entre todos os modelos nebulosos realizáveis com a mesma realização entrada-saída do helicóptero 2DoF.

A estimação recursiva das matrizes \mathbf{A}^i , \mathbf{B}^i , \mathbf{C}^i , \mathbf{D}^i e \mathbf{K}^i , de acordo com o comportamento evolutivo das regras do filtro de Kalman nebuloso, são observados nas Figuras 66-85, respectivamente. Uma vez que, o i -ésimo modelo linear em espaço de estados, representa o comportamento dinâmico linear do helicóptero 2DoF no ponto de operação definido por cada nova amostra, respectivamente, pode-se inferir, a partir da metodologia apresentada, a eficiência do modelo nebuloso evolutivo obtido, através da combinação li-

near evolutiva de modelos de espaço de estados no consequente, no rastreamento da não linearidade inerente ao conjunto de dados experimentais, recursivamente.

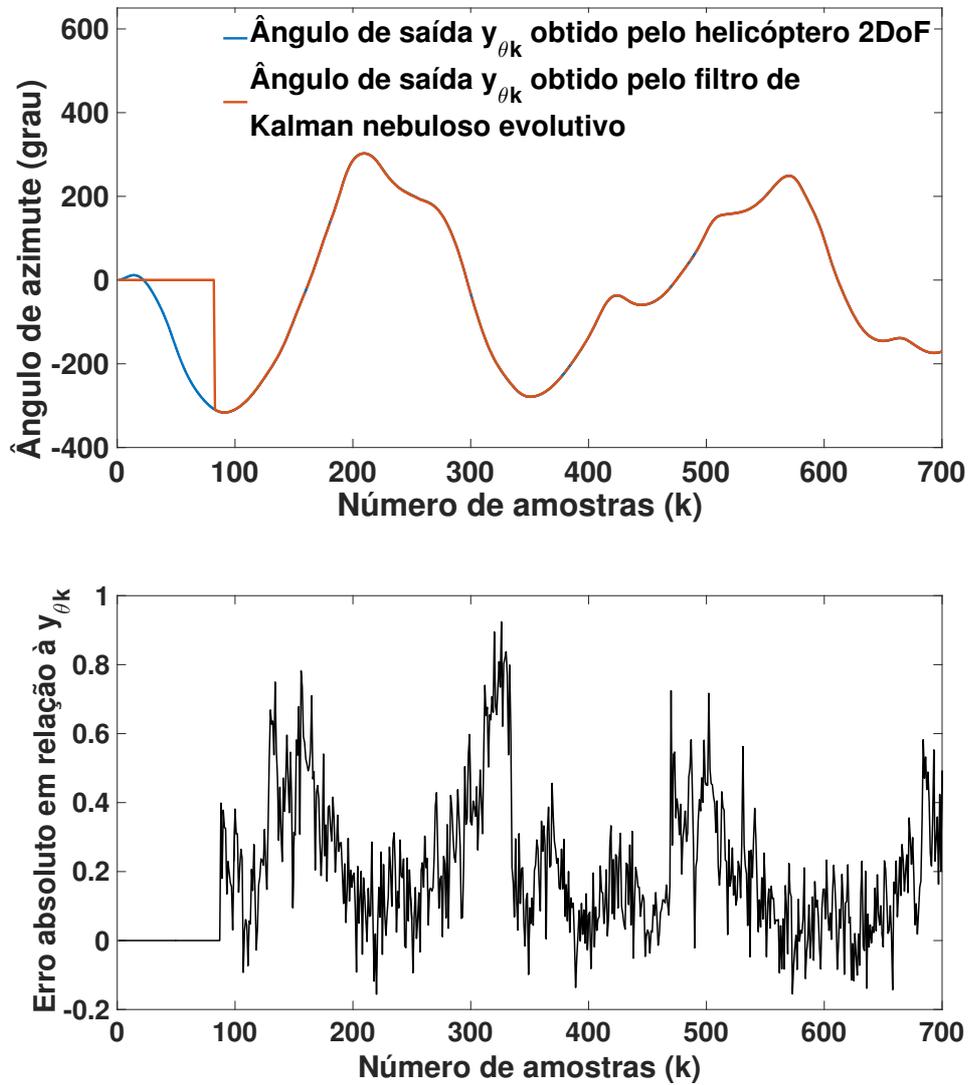


Figura 56 – Sinal de saída e a sequência residual do sinal de saída y_{θ_k} do helicóptero 2DoF.

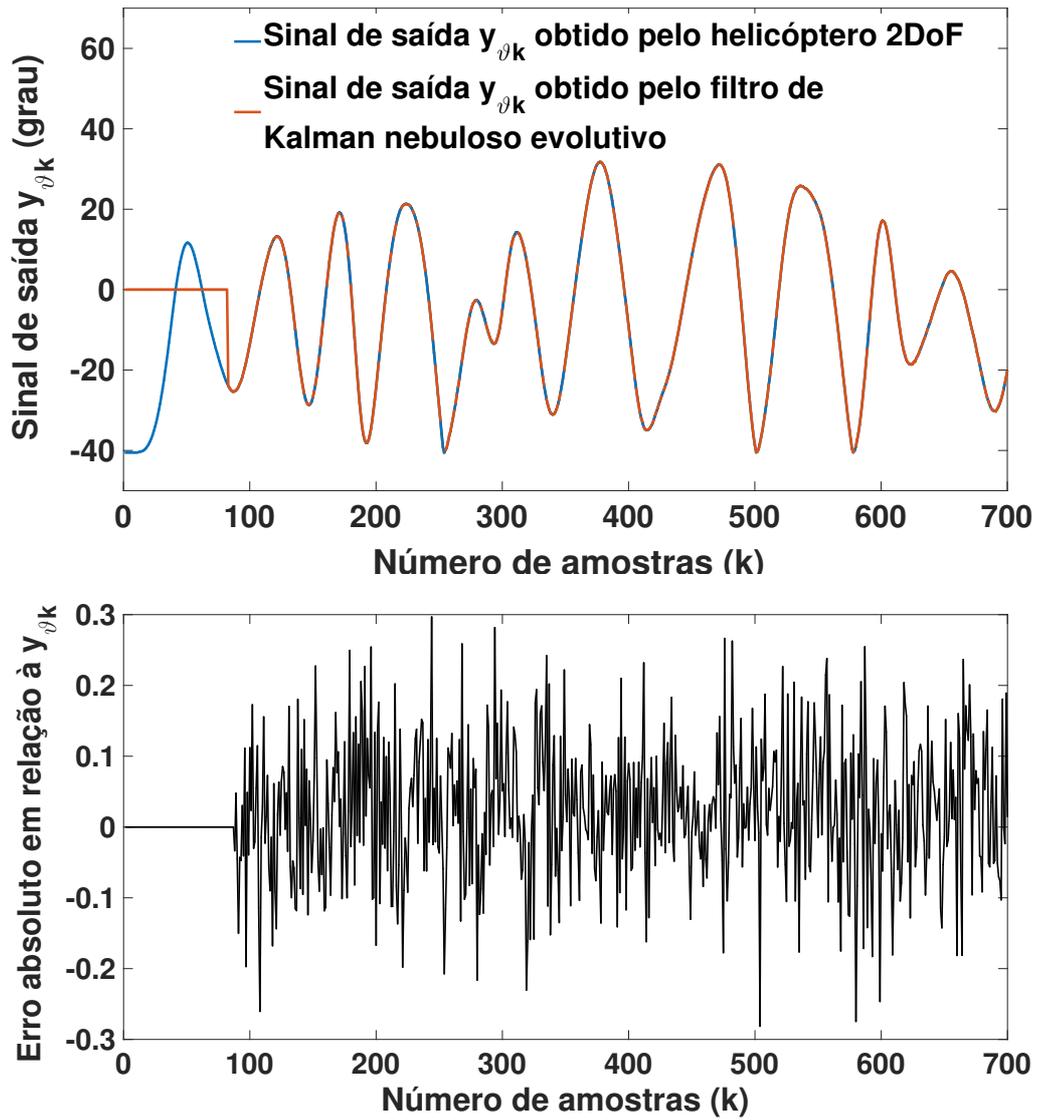
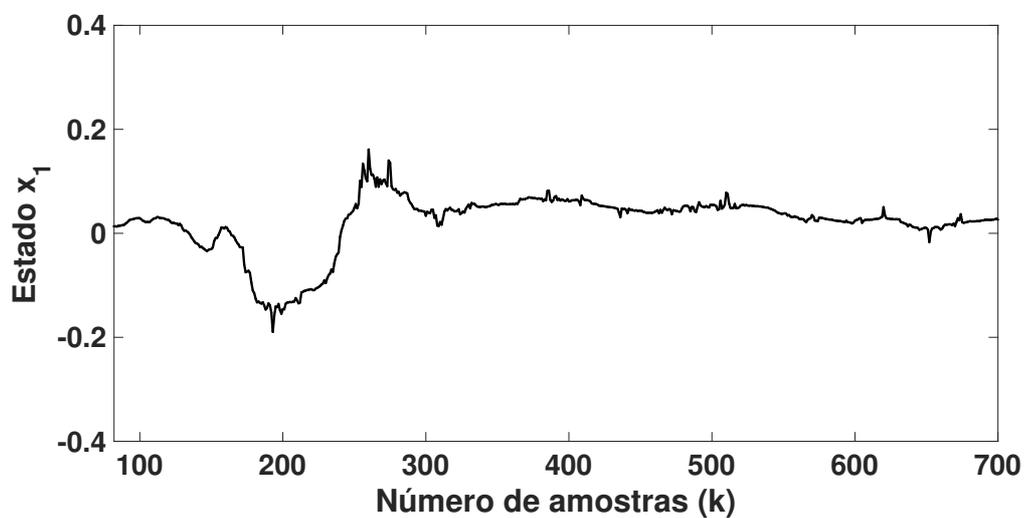
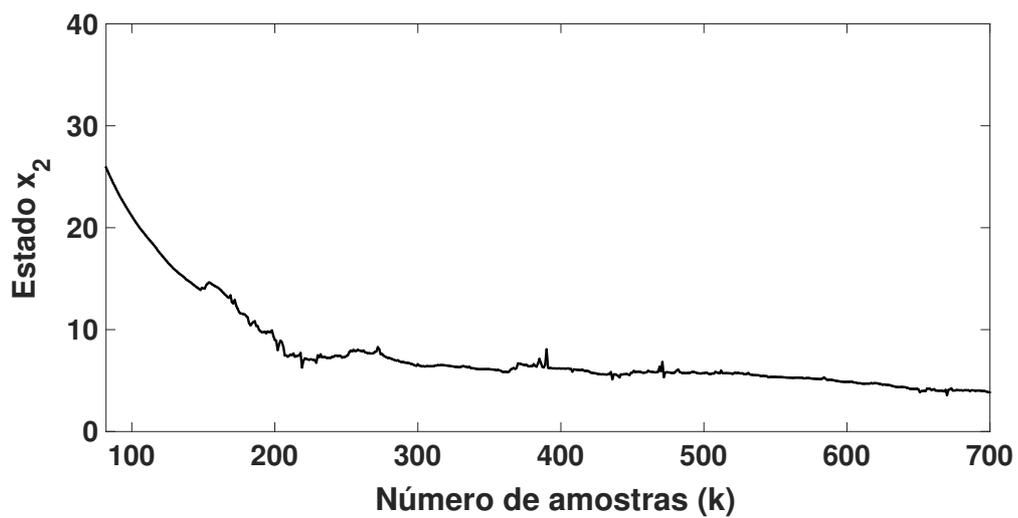


Figura 57 – Sinal de saída e a sequência residual do sinal de saída $y_{\vartheta k}$ do helicóptero 2DoF.

Figura 58 – Estimação recursiva do estado x_1 .Figura 59 – Estimação recursiva do estado x_2 .

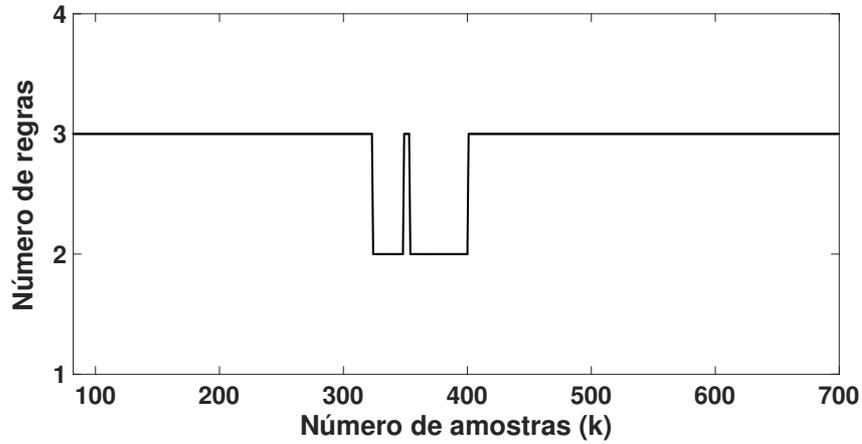


Figura 60 – Comportamento evolutivo das regras no filtro de Kalman nebuloso.

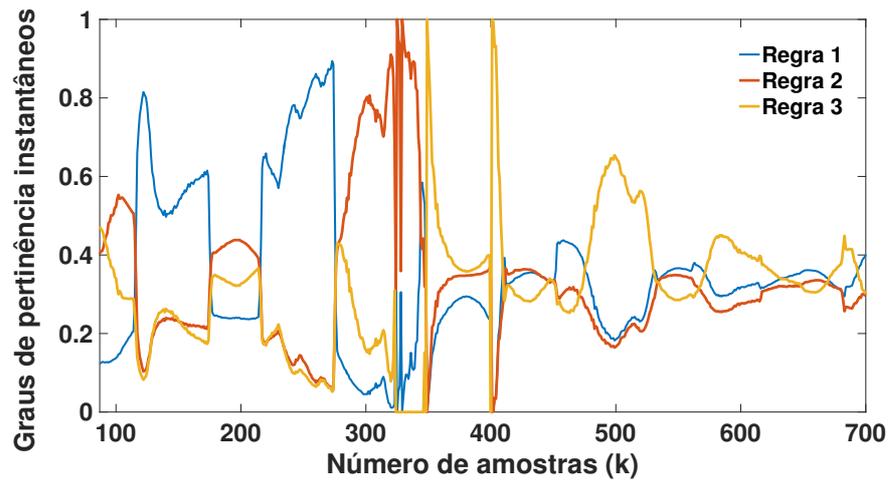


Figura 61 – Comportamento instantâneo dos graus de pertinência normalizados do sistema de inferência do filtro de Kalman nebuloso.

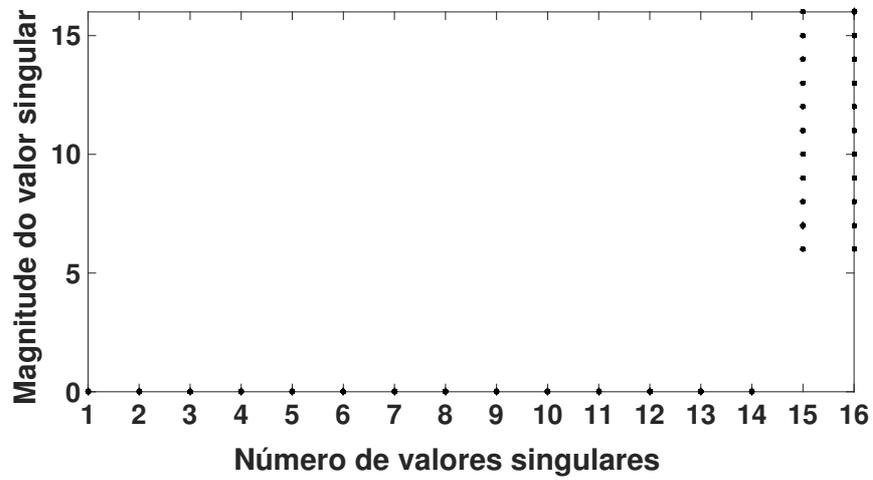


Figura 62 – O espaço de valores singulares calculados a partir da decomposição das matrizes de Hankel, para todas as regras, na estimação do consequente do filtro de Kalman nebuloso evolutivo.

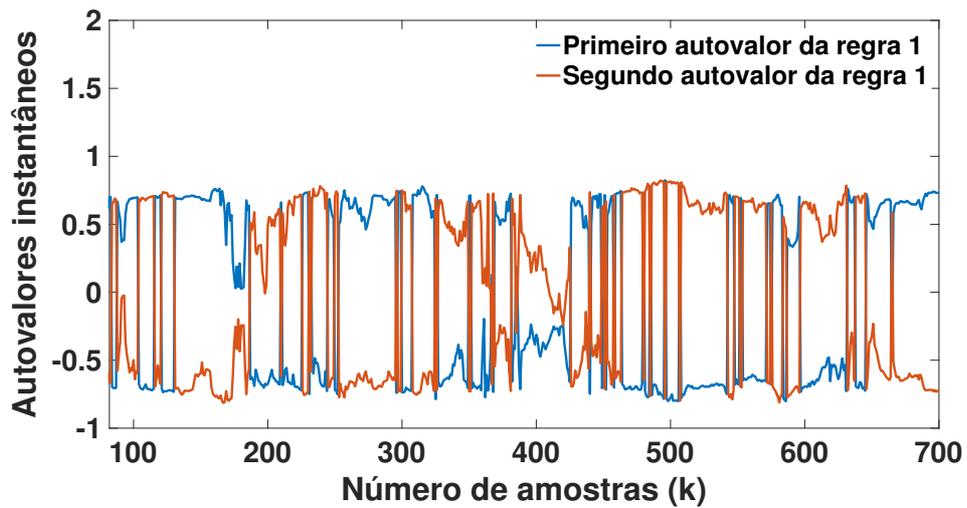


Figura 63 – Autovalores instantâneos da regra 1.

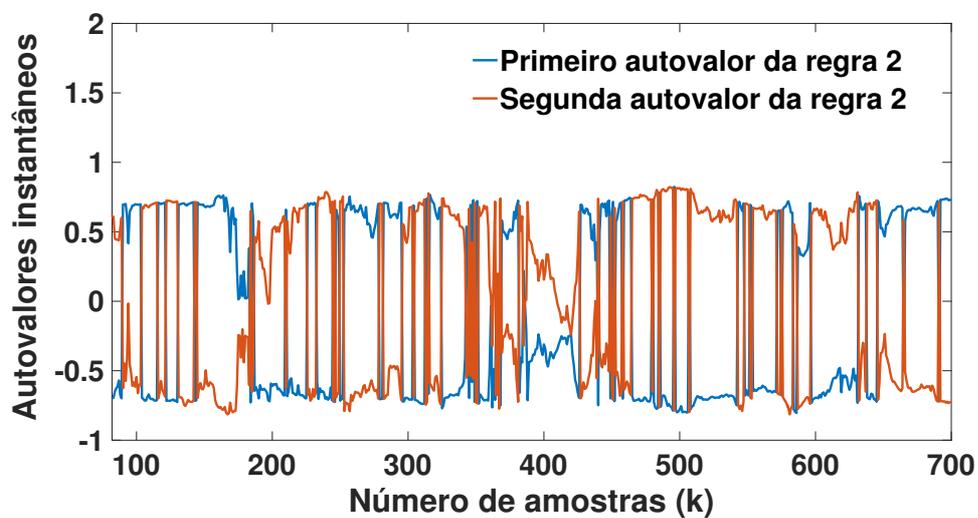


Figura 64 – Autovalores instantâneos da regra 2.

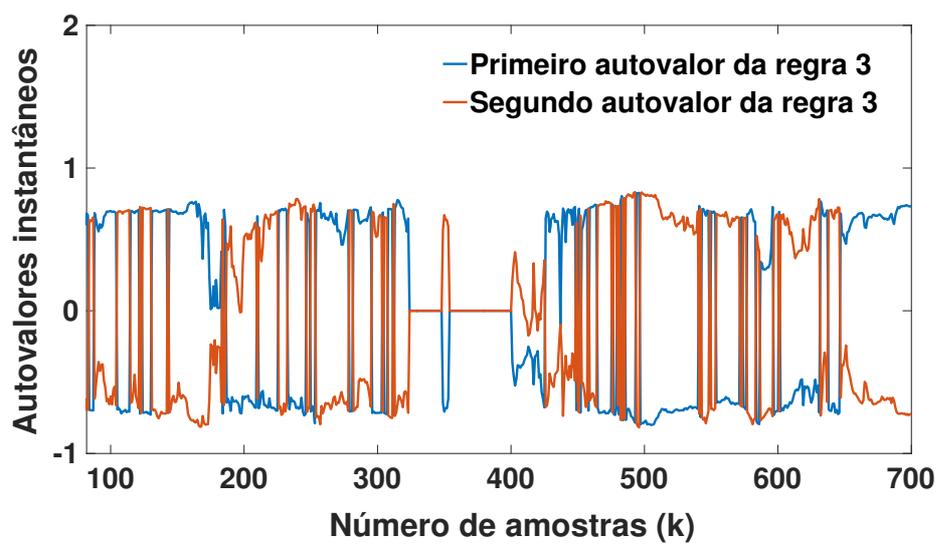
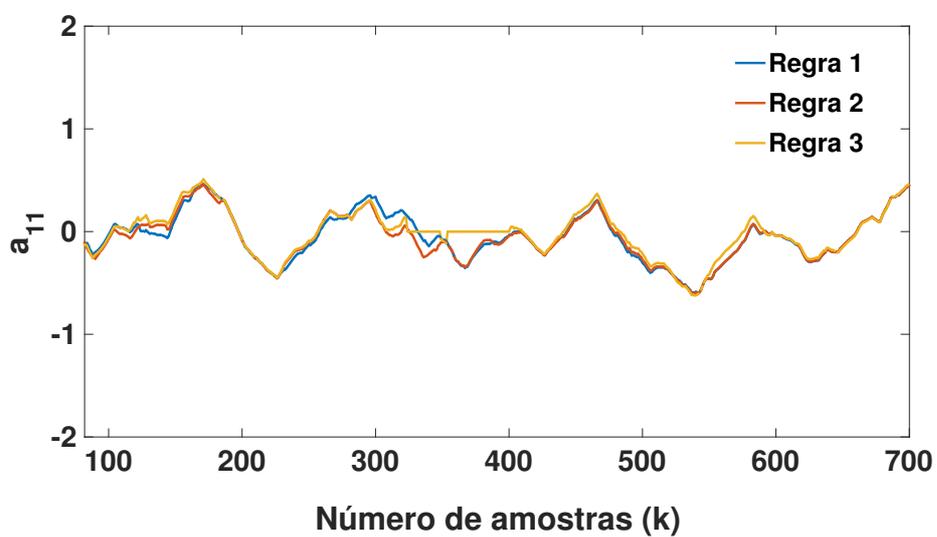
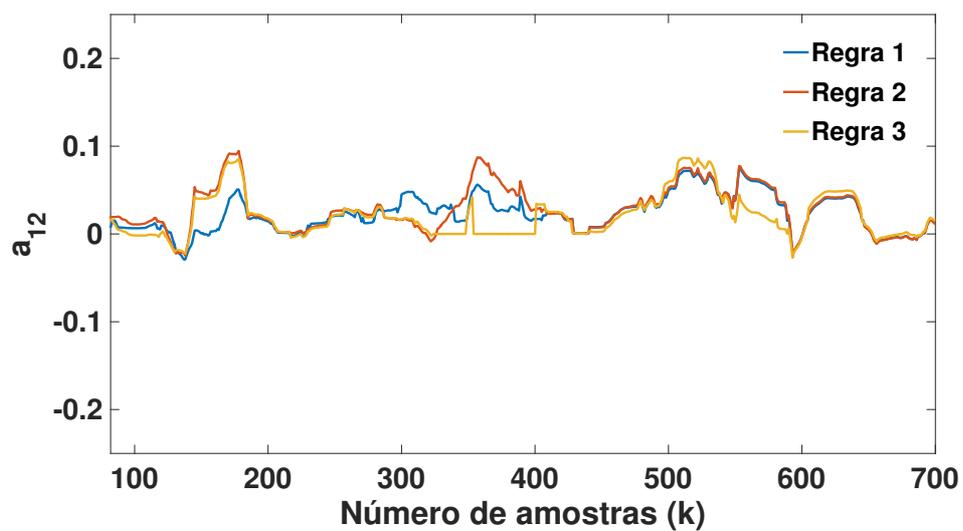


Figura 65 – Autovalores instantâneos da regra 3.

Figura 66 – Elemento a_{11} da matriz A .Figura 67 – Elemento a_{12} da matriz A .

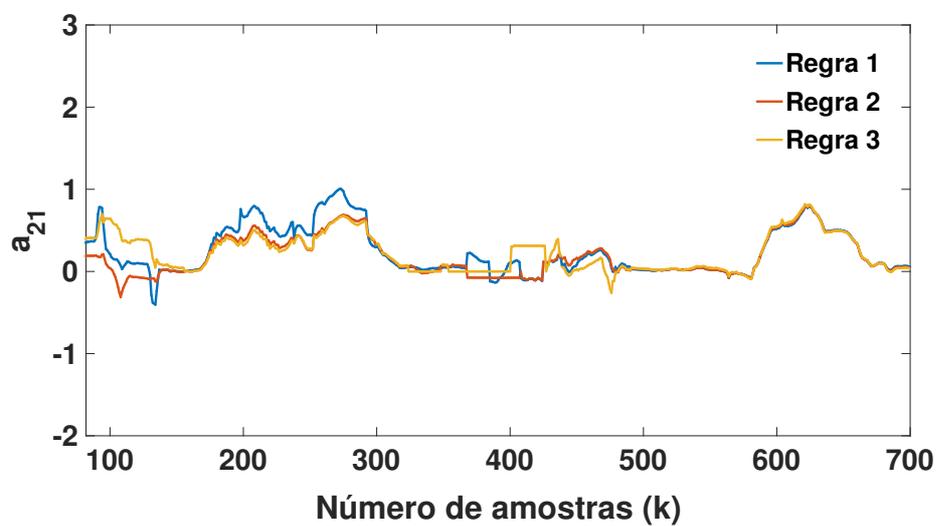


Figura 68 – Elemento a_{21} da matriz A.

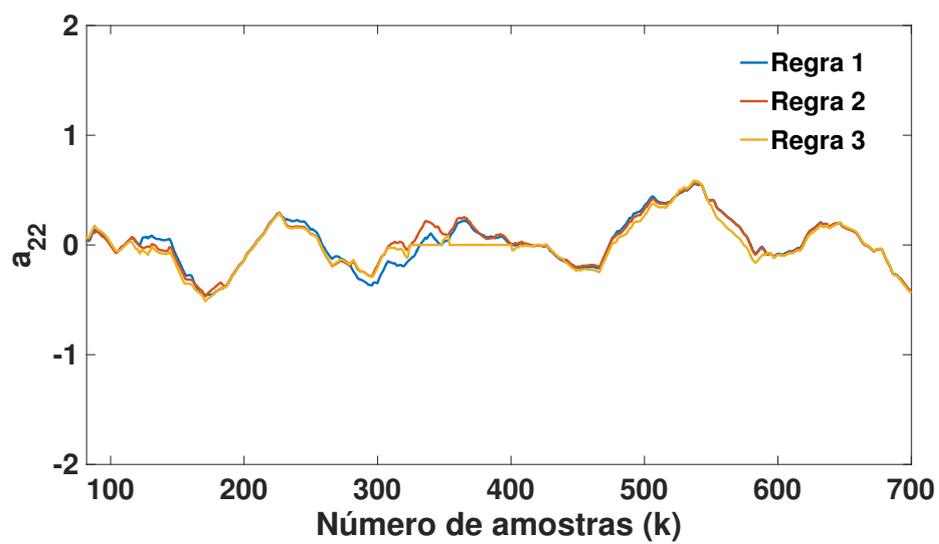


Figura 69 – Elemento a_{22} da matriz A.

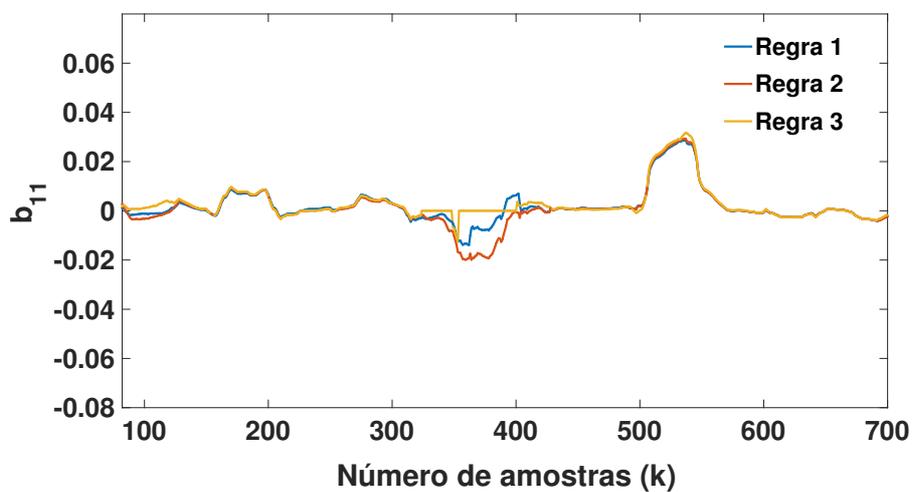


Figura 70 – Elemento b_{11} da matriz B.

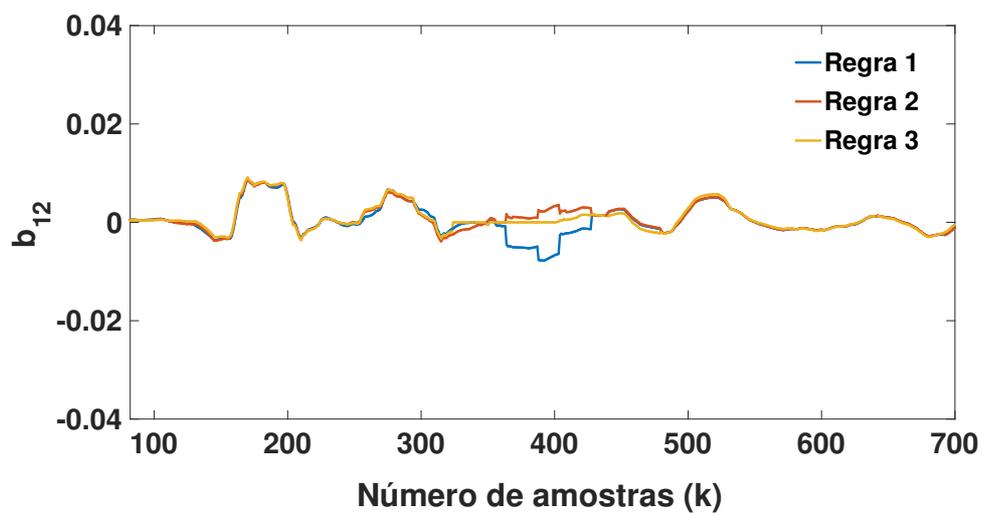


Figura 71 – Elemento b_{12} da matriz B.

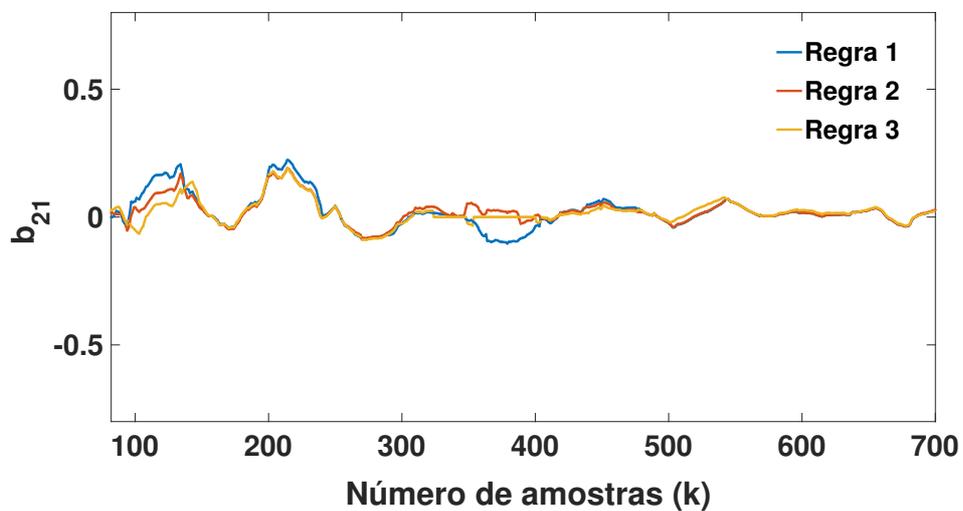


Figura 72 – Elemento b_{21} da matriz B.

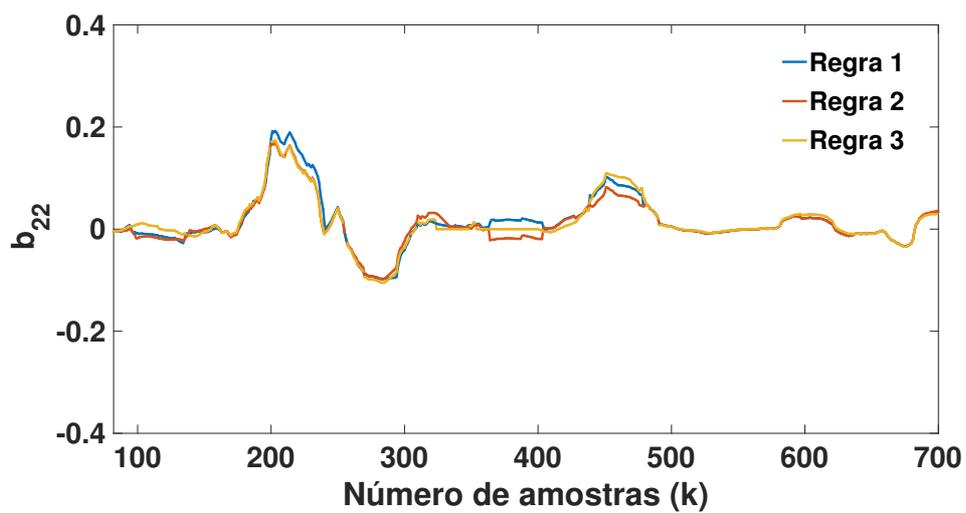


Figura 73 – Elemento b_{22} da matriz B.

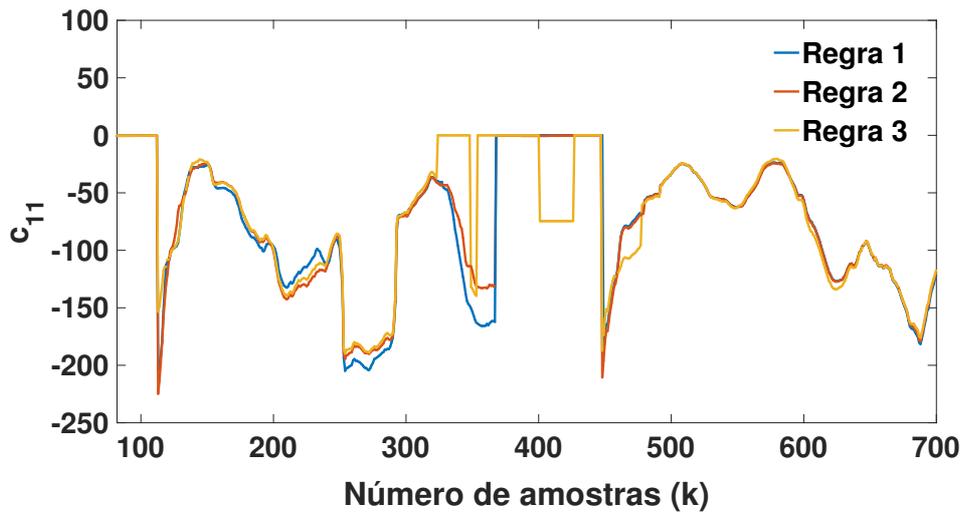


Figura 74 – Elemento c_{11} da matriz C .

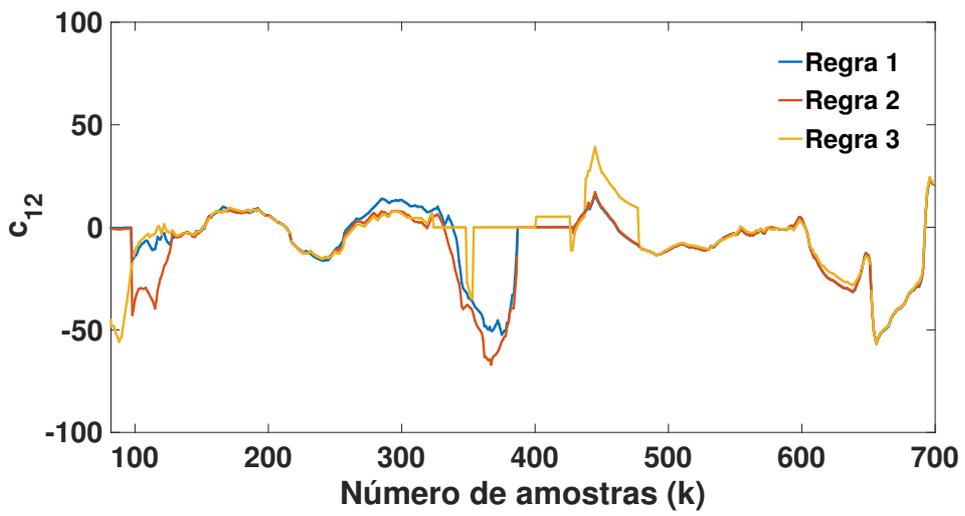


Figura 75 – Elemento c_{12} da matriz C .

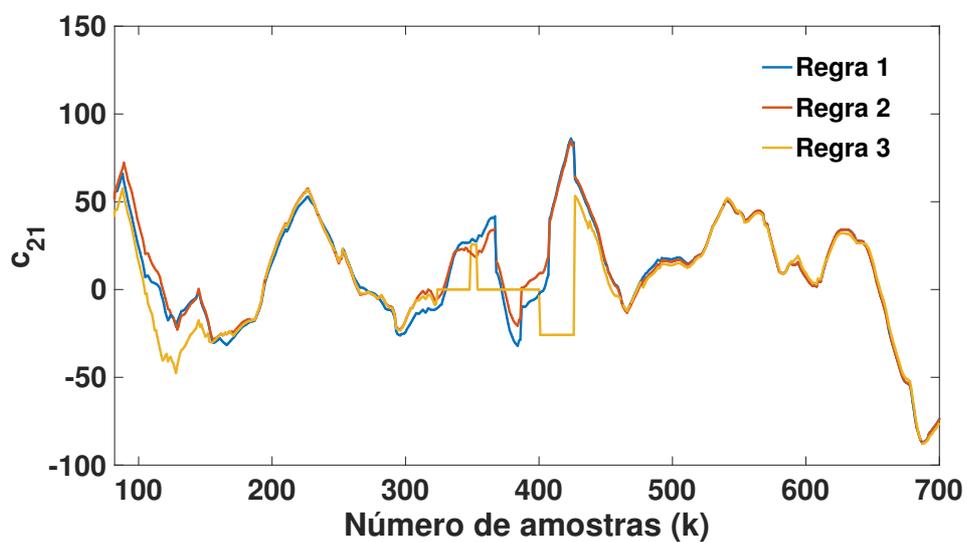


Figura 76 – Elemento c_{21} da matriz C .

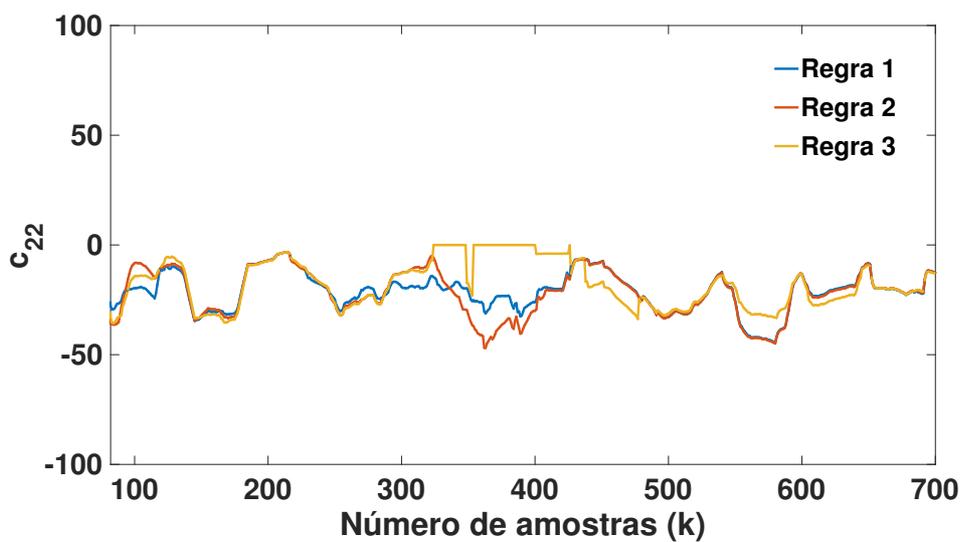


Figura 77 – Elemento c_{22} da matriz C .

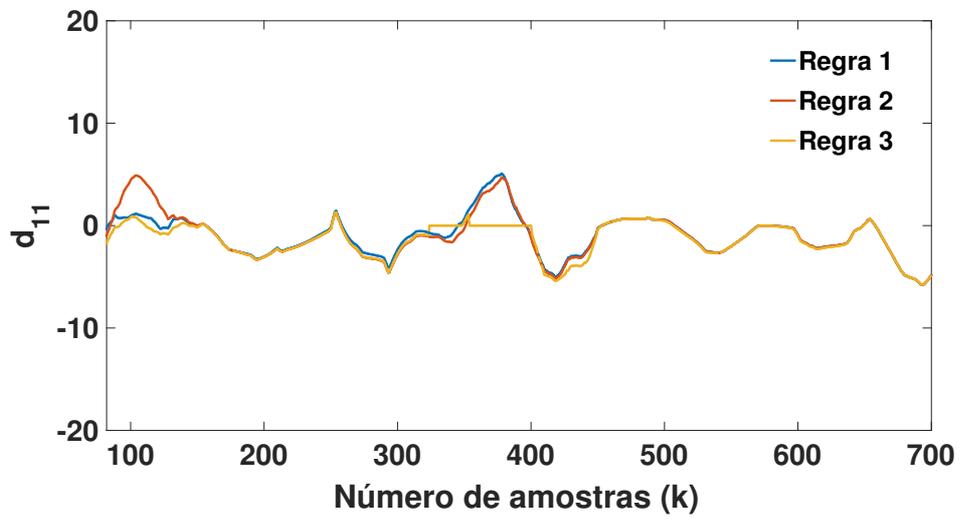


Figura 78 – Elemento d_{11} da matriz D .

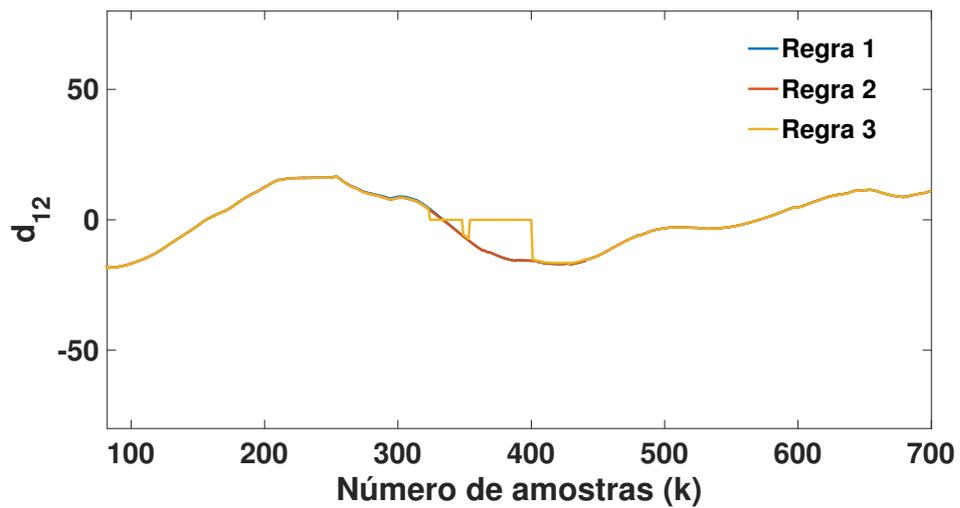


Figura 79 – Elemento d_{12} da matriz D .

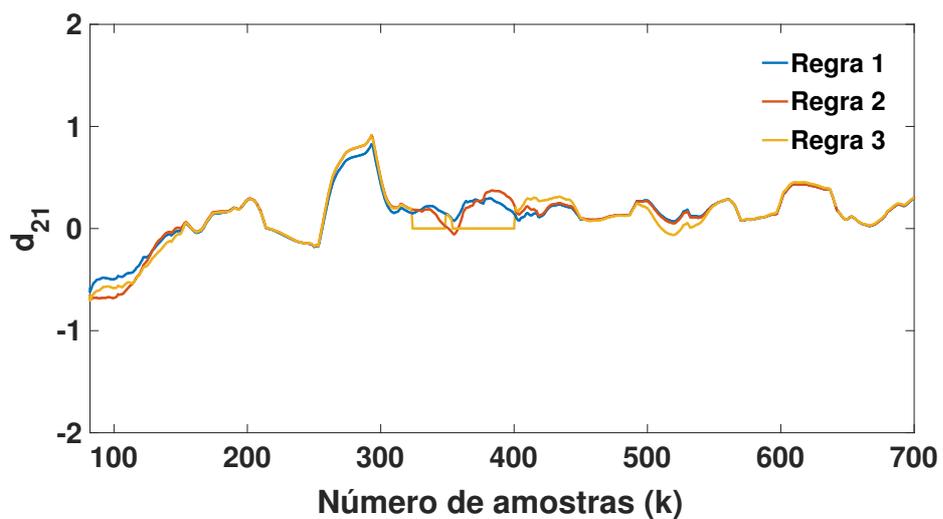


Figura 80 – Elemento d_{21} da matriz D.

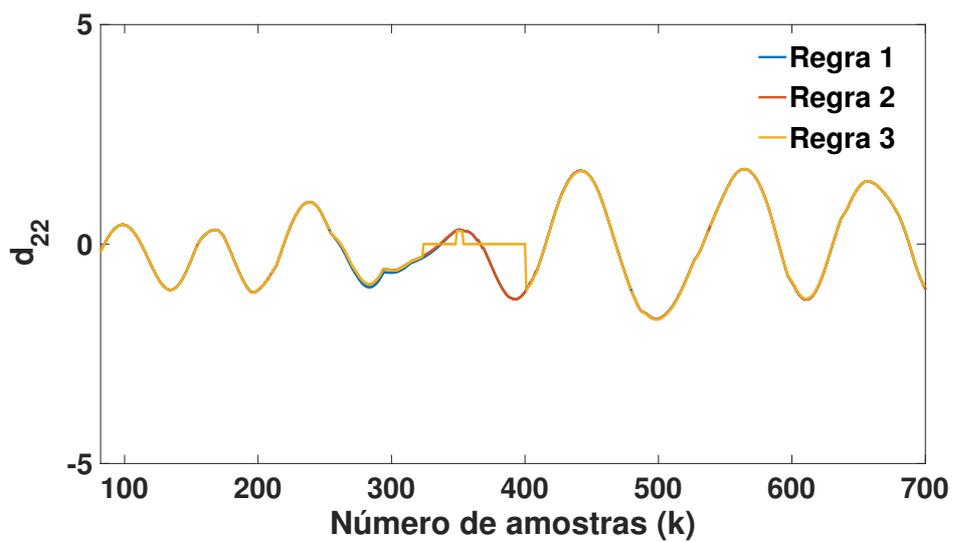
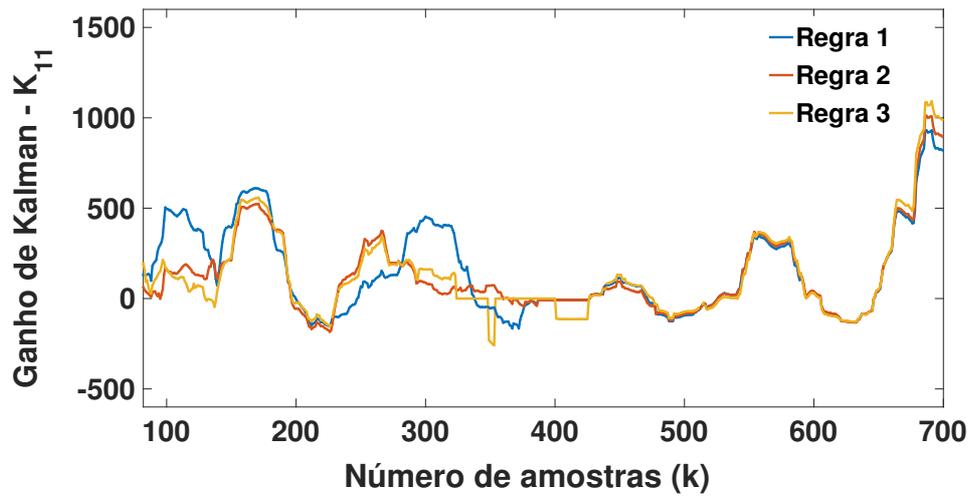
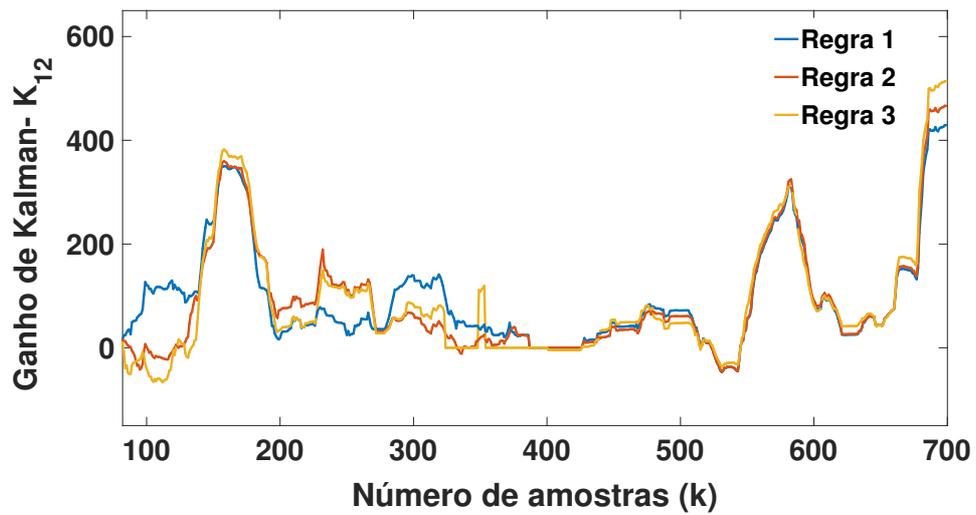


Figura 81 – Elemento d_{22} da matriz D.

Figura 82 – Elemento K_{11} da matriz de ganho de Kalman.Figura 83 – Elemento K_{12} da matriz de ganho de Kalman.

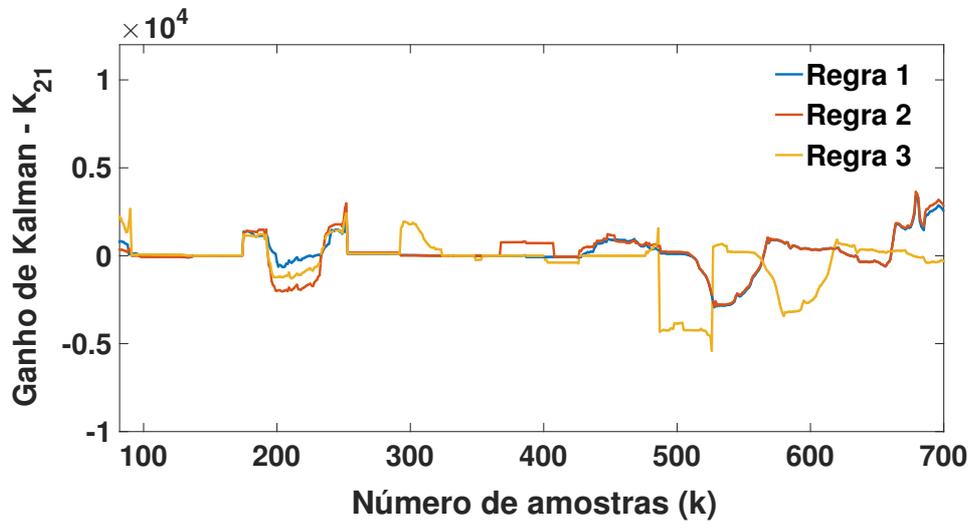


Figura 84 – Elemento K_{21} da matriz de ganho de Kalman.

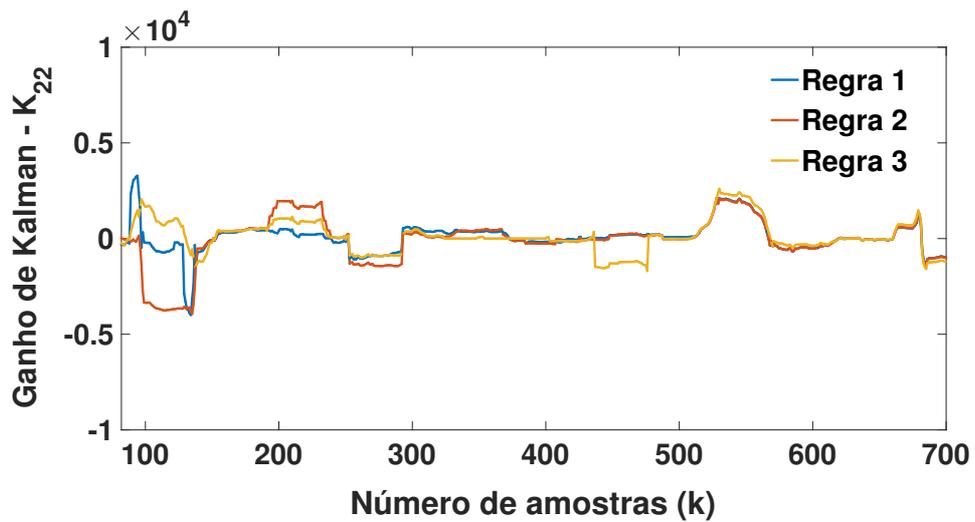


Figura 85 – Elemento K_{22} da matriz de ganho de Kalman.

5 Conclusões

A metodologia adotada para modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos de realização mínima no espaço de estados via dados experimentais possibilita adaptar o modelo e a estrutura do filtro de Kalman em tempo real. Ela permite obter a realização mínima em espaço de estados, isto é, a menor dimensão possível do modelo a partir dos dados experimentais, onde parâmetros e estados do sistema dinâmico são estimados.

Nesta metodologia a estrutura do modelo é modificada de forma on-line, possibilitando adaptar a estrutura do modelo e do filtro de Kalman em tempo real. Aplicando a teoria sobre sistemas nebulosos, esta estrutura baseada em regras permite a aproximação de funções, não linearidades e incertezas.

Uma formulação matemática para identificação de FK nebuloso evolutivo, com estrutura nebulosa TS a fim de estimar os parâmetros do antecedente, foi apresentada. Os parâmetros do consequente do modelo em espaço de estados foram estimados, através do algoritmo OKID (Observer/Kalman filter identification), que nesta tese foi apresentado no contexto nebuloso evolutivo.

A validação da metodologia proposta a partir da modelagem caixa preta fornece uma contribuição na literatura de identificação de sistemas, uma vez que apresenta uma formulação matemática aplicada à identificação de filtro de Kalman nebuloso evolutivo via dados experimentais que estima estados e saídas de forma on-line. Os resultados computacionais (comparados a técnicas de identificação presentes na literatura que utilizam filtro de Kalman) e resultados experimentais, aplicados ao rastreamento de trajetória de foguetes e a um helicóptero com dois graus de liberdade mostraram a eficiência e aplicabilidade da metodologia apresentada.

Diante da metodologia apresentada nesta tese, a partir dos resultados computacionais e experimentais obtidos, as seguintes contribuições são consideradas:

- Uma abordagem integrando sistemas evolutivos, sistemas nebulosos e filtro de Kalman, fundamentada na estrutura nebulosa de Takagi-Sugeno, onde os parâmetros do filtro de Kalman nebuloso são atualizados recursivamente a partir do algoritmo OKID, nesta tese apresentado no contexto de agrupamento nebuloso evolutivo;
- Aplicação do conceito de realização mínima nos modelos nebulosos em espaço de estados, permitindo a estimação de estados e parâmetros do sistema a partir de dados experimentais com a menor dimensão possível, o que permite a implementação on-line da metodologia proposta.

5.1 Propostas Futuras

A proposta de uma metodologia para modelagem de filtros de Kalman nebulosos evolutivos de realização mínima no espaço de estados via dados experimentais, apresentada nesta tese, tendo em vista os resultados apresentados, abre espaço para a realização de trabalhos futuros, conforme segue:

- Adequação da metodologia apresentada para aplicação em estratégias de controle no contexto nebuloso evolutivo;
- Implementação da metodologia proposta de forma embarcada utilizando tecnologias tais como DSP (*Digital Signal Processor*) e *Raspberry*;
- Contextualizar e analisar a metodologia usando sistemas nebulosos tipo-2.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: UFMG, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 18, 25 e 149.
- ALIZADEH, S. et al. Online local input selection through evolving heterogeneous fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 24, p. 1364–1377, December 2016. Citado na página 22.
- ALVES, M. T. S. *Avaliação numérica e experimental dos métodos ERA e ERA/OKID para a identificação de sistemas mecânicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 26, 34, 39, 69 e 75.
- ANDAVAR, S.; ELANGO, P. Person re-identification based on pose angle estimation and multi-feature extraction. *IET Biometrics*, v. 7, p. 365–370, June 2018. Citado na página 19.
- ANGELOV, P. An approach for fuzzy rule-base adaptation using on-line clustering. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 35, p. 275–289, March 2004. Citado na página 21.
- ANGELOV, P. Fuzzily connected multimodel systems evolving autonomously from data streams. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, v. 41, p. 898–910, 2011. Citado na página 56.
- ANGELOV, P. *Autonomous Learning Systems: From Data Streams to Knowledge in Real-time*. [S.l.]: IEEE Press Series on Computational Intelligence, Willey, 2013. ISBN 9781119951520. Citado na página 55.
- ANGELOV, P.; FILEV, D. In: *Simpl_eTS: A simplified method for learning evolving Takagi–Sugeno fuzzy models*. [S.l.]: Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE'05, 2005. p. 1068–1073. Citado na página 55.
- ANGELOV, P.; FILEV, D. In: *Evolving fuzzy systems from data streams in real-time*. [S.l.]: Proceedings of the International Symposium on Evolving Fuzzy Systems, 2006. p. 29–35. Citado na página 55.
- ANGELOV, P.; FILEV, D.; KASABOV, N. *Evolving Intelligent Systems: methodology and applications*. [S.l.]: IEEE Press Series on Computational Intelligence, Willey–Blackwell, 2010. ISBN 9780470287194. Citado 5 vezes nas páginas 24, 51, 54, 55 e 56.
- ANGELOV, P.; LUGHOFER, E.; ZHOU, X. Evolving fuzzy classifiers using different model architectures. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 159, p. 3160–3182, July 2008. Citado na página 21.
- ANGELOV, P.; SADEGHI-TEHRAN, P.; RAMEZANI, R. An approach to automatic real-time novelty detection, object identification, and tracking in video streams based on recursive density estimation and evolving Takagi–Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 26, n. 3, p. 189–205, March 2011. Citado na página 22.

- ANGELOV, P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy-rule-based classifiers from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 16, p. 1462–1475, 2008. Citado na página 41.
- ANGELOV, P. P.; FILEV, D. P. An approach to online identification of Takagi–Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B–Cybernetics*, v. 34, p. 484–498, February 2004. Citado 4 vezes nas páginas 49, 51, 55 e 60.
- ARTHUR, J. et al. Nonlinear Kalman filtering for censored observations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 316, p. 155–166, January 2018. Citado 3 vezes nas páginas 77, 86 e 93.
- BABUSKA, R. et al. *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2010. v. 262. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 262). Citado na página 21.
- BABUSKA, R. *Fuzzy Modeling Control*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1998. Citado 7 vezes nas páginas 24, 30, 42, 47, 48, 49 e 57.
- BARRAGÁN, A. J. et al. A general methodology for online TS fuzzy modeling by the extended Kalman filter. *Applied Soft Computing*, p. 277–289, May 2014. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 80.
- BARUAH, R. D.; ANGELOV, P.; BARUAH, D. Dynamically evolving clustering for data streams. In: *Evolving and Adaptive Intelligent Systems (EAIS), 2014 IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1–6. Citado na página 54.
- BELLMAN, R. E.; KALABA, R. E. Dynamic programming and feedback control. *RAND Corporation*, p. 1778, August 1959. Citado na página 29.
- BENZAOUIA, A.; HAJJAJI, A. *Advanced Takagi–Sugeno Fuzzy Systems: Delay and Saturation*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 21.
- BEZDEK, J. *Objective function clustering*. In: *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. [S.l.]: Springer, 1981. Citado 3 vezes nas páginas 45, 47 e 48.
- BIREK, L.; PETROVIC, D.; BOYLAN, L. Water leakage forecasting: the application of a modified fuzzy evolving algorithm. *Applied Soft Computing*, v. 14, p. 305–315, 2014. Citado na página 56.
- BOUCHACHIA, A.; LUGHOFER, E.; SAYED-MOUCHAWEH, M. Evolving soft computing techniques and applications. *Applied Soft Computing*, p. 141–143, 2014. Citado na página 42.
- BRUNOT, M.; JANOT, A.; CARRILLO, F. State space estimation method for the identification of an industrial robot arm. v. 50, p. 9815–9820, July 2017. Citado na página 19.
- BRUNOT, M. et al. State space estimation method for robot identification. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, p. 228–233, November 2016. Citado na página 19.
- CASSINI, C. C. S. *Estimação recursiva de características estáticas não lineares utilizando modelos polinomiais NARMAX*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005. Citado na página 18.

- CHAND, B. K.; KHASHIRUNNISA, S.; KUMARI, B. L. Performance analysis of Kalman filter with particle swarm optimization and fuzzy logic. In: . [S.l.]: IEEE International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT), 2016. p. 3204–3208. Citado na página 21.
- CHEN, C. T. *Introduction to Linear System Theory*. [S.l.]: Holt, Rienhart, and Winston, Inc., 1970. Citado na página 40.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Holt, Rienhart, and Winston, Inc., 1984. Citado na página 40.
- CHEN, S.; COWAN, C.; GRANT, P. Orthogonal least square learning algorithm for radial basis function networks. *IEEE Transactions Neural Networks*, v. 2, p. 302–309, 1991. Citado na página 42.
- CHENG, C. W. et al. Integrated system identification and modal state estimation for control of large flexible space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 15, n. 1, p. 88–95, January-February 1992. Citado 5 vezes nas páginas 29, 30, 62, 67 e 163.
- CHIEN, T.; CHEN, Y. An on-line tracker for a stochastic chaotic system using observer/Kalman filter identification combined with digital redesign method. *Algorithms*, v. 10, p. 25, February 2017. Citado na página 62.
- CHUI, C. K.; CHEN, G. *Kalman Filtering: with real-time Applications*. [S.l.]: Springer, 2017. Citado na página 19.
- COMAER. Gunter's space page: FTI. In: . [S.l.]: http://space.skyrocket.de/doc_lau/fti.htm, acessado em 21-03-2018, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 10, 102 e 103.
- COSTA, B.; ANGELOV, P.; GUEDES, L. Fully unsupervised fault detection and identification based on recursive density estimation and self-evolving cloud-based classifier. *Neurocomputing*, v. 150, Part A, p. 289 – 303, 2015. Citado na página 54.
- DING, F. State filtering and parameter estimation for state space systems with scarce measurements. v. 104, p. 369–380, November 2014. Citado na página 19.
- DZIEDZIECH, K. et al. Combined non-parametric and parametric approach for identification of time-variant systems. v. 103, p. 295–311, March 2018. Citado na página 19.
- ERMAYANTI, Z. et al. Estimate and control position autonomous underwater vehicle based on determined trajectory using fuzzy Kalman filter method. In: . [S.l.]: IEEE International Conference on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA), 2015. p. 156–161. Citado na página 21.
- FALB, P. L. Infinite-dimensional filtering: The Kalman-Bucy filter in Hilbert space. *Information and Control*, v. 11, n. 1/2, July-August 1967. Citado na página 19.
- FILHO, O. D. R.; SERRA, G. L. O. Adaptive neuro-fuzzy black-box modeling based on instrumental variable evolving algorithm. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, p. 1–18, 2016. ISSN 2195-3899. Citado 3 vezes nas páginas 11, 112 e 113.

- FILHO, O. D. R.; SERRA, G. L. O. Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 338, p. 50–89, March 2018. Citado na página 18.
- GILBERT, E. G. Controllability and observability in multi-variable control systems. *SIAM Journal on Control*, v. 1, n. 2, p. 128–151, 1963. Citado na página 29.
- GUO, J.; HUANG, W.; WILLIAMS, B. M. Adaptive Kalman filter approach for stochastic short-term traffic flow rate prediction and uncertainty quantification. *Transportation Research*, p. 50–64, 2014. Citado na página 20.
- HAJIYEV, C.; SOKEN, H. E. Robust adaptive unscented Kalman filter for attitude estimation of pico satellites. *International Journal of Adaptive and Signal Processing*, p. 107–120, 2014. Citado na página 20.
- HAN, S.; HAN, S. Resolver angle estimation using parameter and state estimation. v. 93, p. 460–464, November 2016. Citado na página 19.
- HAYKIN, S. *Neural Networks*. [S.l.]: New York: Macmillan Maxwell International, 1994. Citado na página 42.
- HO, B. L.; KALMAN, R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output data. In: *Proceedings of the 3rd Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*. [S.l.: s.n.], 1965. p. 449–459. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 40.
- HO, T. Robust urban wireless localization: synergy between data fusion, modeling and intelligent estimation. v. 14, p. 685–697, February 2015. Citado na página 23.
- HWANG, J. K. Least error squared phasor estimation with identification of a decaying DC component. *IET Generation, Transmission and Distribution*, v. 12, p. 1486–1492, March 2018. Citado na página 19.
- INÁCIO, M. J. *Diagnóstico de Falhas Baseado em Sistema Inteligente Evolutivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2005. Citado na página 49.
- JAZWINSKI, A. H. *Stochastic Processes and Filtering*. New York: Academic Press: Mathematics in Science and Engineering, 1970. ISBN 0-12-381550-9. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 154.
- JUANG, J. N. Mathematical correlation of modal parameter identification methods via system realization theory. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 2, n. 1, p. 1–18, January 1987. Citado na página 29.
- JUANG, J. N. *Applied System Identification*. United States: Prentice Hall, 1994. Citado 7 vezes nas páginas 18, 26, 31, 39, 73, 75 e 160.
- JUANG, J. N.; COOPER, J. E.; WRIGHT, J. R. An eigensystem realization algorithm using data correlations (ERA/DC) for modal parameter identification. *Control–Theory and Advanced Technology*, v. 4, n. 1, p. 5–14, 1988. Citado na página 29.
- JUANG, J. N. et al. An application of the observer/kalman filter identification (OKID) technique to Hubble flight data. In: *NASA/DoD Controls-Structures Interaction (CSI) Technology Conference*. [S.l.: s.n.], 1992. Citado na página 41.

- JUANG, J. N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985. Citado 7 vezes nas páginas 29, 32, 34, 36, 37, 39 e 62.
- JUANG, J. N. et al. Identification of Observer/Kalman Filter Markov parameters: Theory and experiments. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 16, n. 2, p. 320–329, May 1993. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 69.
- JULIER, S.; UHLMANN, J. Unscented filtering and nonlinear estimation. In: . [S.l.]: Proceedings of the IEEE, 2004. v. 92, n. 3, p. 401–422. Citado na página 20.
- JULIER, S.; UHLMANN, J.; DURRANT-WHYTE, H. F. A new approach for filtering nonlinear systems. In: . [S.l.]: IEEE American Control Conference, 1995. p. 1628—1632. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 156.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. In: *A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems*. [S.l.]: Proc. of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Control, 1997. Citado na página 20.
- JÚNIOR, O. A. N. *Identificação dos Parâmetros Modais Utilizando Apenas as Respostas da Estrutura - Identificação no Domínio do Tempo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2006. Citado na página 34.
- JÚNIOR, S. E. R.; SERRA, G. L. O. A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 64, p. 272–285, September 2017. Citado na página 18.
- KAILATH, T. *Linear Systems*. [S.l.]: Prentice Hall inc., 1980. Citado na página 40.
- KALMAN, R.; DECLARIS, N. *Aspects of Network and System Theory*. [S.l.]: Holt Rinehart and Winston, 1971. Citado na página 29.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. v. 82, p. 35–45, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 149.
- KALMAN, R. E. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM Journal on Control*, v. 1, n. 2, p. 152–192, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME J. Basic Eng.*, v. 83, n. 1, March 1961. Citado na página 19.
- KASABOV, N.; FILEV, D. Evolving intelligent systems: Methods, learning and applications. In: *Proceedings of the International Symposium on Evolving Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 8–18. Citado na página 41.
- KASABOV, N.; SONG, Q. DENFIS: Dynamic evolving neural-fuzzy inference system and its application for time series prediction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 10, n. 2, p. 144–154, 2002. Citado na página 49.
- KELLER, J. M.; LIU, D.; FOGEL, D. B. *Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation*. [S.l.]: ISBN: 978-1-119-21434-2, Wiley-IEEE Press, 2016. Citado na página 21.

- KHASHIRUNNISA, S.; CHAND, B. K.; KUMARI, B. L. Performance analysis of Kalman filter, fuzzy Kalman filter and wind driven optimized Kalman filter for tracking applications. In: . [S.l.]: IEEE 2nd International Conference on Communication Control and Intelligent Systems (CCIS), 2016. p. 170–174. Citado na página 21.
- KIM, P. *Kalman Filter for Beginners: With MATLAB Examples*. [S.l.]: ISBN: 978-1-46364-835-0, Createspace Independent Pub, 2011. Citado na página 19.
- KOPRINKOVA-HRISTOVA, P.; ALEXIEV, K. Neuro-fuzzy tuning of Kalman filter. In: . [S.l.]: IEEE 8th International Conference on Intelligent Systems (IS), 2016. p. 651–657. Citado na página 21.
- KORDIK, V. *Kalman Filter*. [S.l.]: InTech, 2010. Citado na página 20.
- KOSKO, B. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions Computers*, v. 43, p. 1329–1333, 1994. Citado na página 43.
- KUANG, S. et al. Efficient architecture and hardware implementation of hybrid fuzzy-Kalman filter for workload prediction. v. 47, p. 408–416, September 2014. Citado na página 23.
- KUNG, S. A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. In: . [S.l.]: 12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, 1978. p. 705–714. Citado na página 29.
- LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. [S.l.]: Bookman, 2007. Citado na página 25.
- LEMOS, A.; CAMINHAS, W.; GOMIDE, F. Multivariable gaussian evolving fuzzy modeling system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 19, n. 1, p. 91–104, 2011. Citado na página 55.
- LEMOS, A. P. *Modelagem nebulosa evolutiva: Novas topologias e algoritmos de aprendizagem*. [S.l.]: Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2011. Citado na página 54.
- LIN, C. *Neural Fuzzy Control Systems with Structure and Parameter Learning*. [S.l.]: Singapore: world Scientific, 1994. Citado na página 43.
- LIN, C. et al. Position estimation and smooth tracking with a fuzzy-logic-based adaptive strong tracking Kalman filter for capacitive touch panels. v. 62, p. 5097–5108, August 2015. Citado na página 23.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. [S.l.]: Prentice Hall, 1999. ISBN 0136566952. Citado na página 19.
- LUGHOFER, E. Extensions of vector quantization for incremental clustering. *Pattern Recognition*, v. 41, p. 995–1011, 2008. Citado na página 56.
- LUGHOFER, E. FLEXFIS: A robust incremental learning approach for evolving Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 16, n. 6, p. 1393–1410, May 2008. Citado 3 vezes nas páginas 21, 49 e 56.
- LUGHOFER, E. *Evolving Fuzzy Systems: Methodologies, Advanced Concepts and Applications*. [S.l.]: Springer, 2011. ISBN 9783642180866. Citado na página 55.

- LUGHOFER, E. On-line assurance of interpretability criteria in evolving fuzzy systems - achievements, new concepts and open issues. *Information Sciences*, v. 251, p. 22–46, July 2013. Citado na página 21.
- LUGHOFER, E. et al. Generalized smart evolving fuzzy systems. *Evolving Systems*, v. 6, n. 4, p. 269–292, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 54.
- MACIEL, L.; GOMIDE, F.; BALLINI, R. MIMO evolving functional fuzzy models for interest rate forecasting. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering Economics*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–8. Citado na página 56.
- MACIEL, L.; GOMIDE, F.; BALLINI, R. MIMO evolving participatory learning fuzzy modeling. In: *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2012 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–8. Citado na página 41.
- MAMDANI, E.; ASSILAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Human-Computer Studies*, v. 51, p. 135–147, 1999. Citado na página 41.
- MEROPI, P.; BIKOS, C.; GEORGE, Z. Outlier detection in skewed data. v. 87, p. 191–209, September 2018. Citado na página 27.
- MOORE, B. C. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, n. 1, p. 17–32, 1981. Citado na página 31.
- MOREIRA, F. J. O. *Um Controlador H_∞ de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibrações Estruturais*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1998. Citado na página 39.
- MORENO, V. M.; PIGAZO, A. *Kalman Filter Recent Advances and Applications*. [S.l.]: InTech, 2009. Citado na página 19.
- MUSOFF, H.; ZARCHAN, P. *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*. [S.l.]: Second Edition, ISBN: 978-1-56347-694-5, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005. Citado na página 19.
- NGATINI; APRILIANI, E.; NURHADI, H. Ensemble and fuzzy kalman filter for position estimation of an autonomous underwater vehicle based on dynamical system of AUV motion. v. 68, p. 29–35, October 2016. Citado na página 23.
- ODRY, A. et al. Kalman filter for mobile-robot attitude estimation: Novel optimized and adaptive solutions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 110, p. 569–589, September 2018. Citado na página 23.
- OH, S. K.; LEE, J. M. Stochastic iterative learning control for discrete linear time-invariant system with batch-varying reference trajectories. *Journal of Process Control*, v. 36, p. 64–78, December 2015. Citado na página 62.
- PAZOS-REVILLA, M.; GUO, T.; MACHIDA, M. Extended Kalman filter combined with fuzzy rules for localization using wireless transceivers. In: . [S.l.]: IEEE Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS), 2016. p. 1–6. Citado na página 21.

- PHAN, M. et al. Improvement of Observer/Kalman Filter Identification (OKID) by residual whitening. *Journal of Vibrations and Acoustics*, v. 117, n. 2, p. 232–239, April 1995. Citado na página 62.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. O. Robust fuzzy digital PID controller design based on gain and phase margins specifications. In: *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 739–745. Citado na página 21.
- PRECUP, R. et al. Online identification of evolving Takagi–Sugeno–Kang fuzzy models for crane systems. *Applied Soft Computing*, v. 24, p. 1155–1163, January 2014. Citado na página 22.
- RANA, M. M.; XIANG, W.; WANG, E. Smart grid state estimation and stabilisation. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 102, p. 152–159, November 2018. Citado na página 19.
- RASTEGAR, S.; ARAÚJO, R.; MENDES, J. A new approach for online T-S fuzzy identification and model predictive control of nonlinear systems. *Journal of Vibration and Control*, v. 7, p. 1820—1837, August 2016. Citado na página 80.
- REPOSITORY. EEG Database. In: . [S.l.]: [http : //archive.ics.uci.edu/ml/databases/eeg/eeg.data.html](http://archive.ics.uci.edu/ml/databases/eeg/eeg.data.html), acessado em 21-03-2018, 2018. Citado na página 51.
- ROSENBROCK, H. H. *State-Space and Multivariable Theory*. [S.l.]: London: Thomas Nelson and Sons, 1970. Citado na página 30.
- ROSSEN, R. H.; LAPIDUS, L. Minimum realization and system modeling:i. fundamental theory and algorithm. *AIChE Journal*, v. 18, n. 4, p. 673–684, July 1972. Citado na página 29.
- SABATER, A. B.; RHOADS, J. F. Parametric system identification of resonant micro/nanosystems operating in a nonlinear responde regime. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 84, p. 241–264, February 2017. Citado na página 19.
- SARIĆ, A. T.; TRANSTRUM, M. K.; STANKOVIĆ, A. M. Information geometry for model identification and parameter estimation in renewable energy – DFIG plant case. *IET Generation, Transmission and Distribution*, v. 12, p. 1294–1302, March 2018. Citado na página 19.
- SAYED-MOUCHAWEH, M.; LUGHOFER, E. *Learning in non-stationary environments: Methods and Applications*. [S.l.]: Springer, 2012. ISBN 9781441980199. Citado na página 56.
- SCHMIDT, S. Application of state-space methods to navigation problems. *Advances in Control Systems*, p. 293–340, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 154.
- SCHUTTER, B. Minimal state-space realization in linear system theory: An overview. *Control Systems Engineering. Special Issue on Numerical Analysis in the 20th Century: Approximation Theory*, v. 121, n. 1-2, p. 331–354, September 2000. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- SCOTT, M.; GILBERT, M.; DEMEO, M. An application of the observer/kalman filter identification (OKID) technique to Hubble flight data. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1991. Citado na página 41.

- SEINFELD, J. H.; LAPIDUS, L. *Mathematical Methods in Chemical Engineering*. [S.l.]: Prentice Hall inc., 1974. Citado na página 40.
- SERRA, G. L. O. *Propostas de Metodologias para Identificação e Controle Inteligentes*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- SERRA, G. L. O. *Frontiers in Advanced Control Systems*. Croatia: InTech, 2012. Citado na página 21.
- SERRA, G. L. O. *Kalman Filters*. [S.l.]: InTech, 2018. ISBN 978-953-51-3828-0. Citado na página 19.
- SHI, Y.; YAN, D. Application of adaptive Kalman filter in high dynamic GNSS signal carrier tracking. In: . [S.l.]: IEEE International Conference on Internet of Things (iThings) and IEEE Green Computing and Communications (GreenCom) and IEEE Cyber, Physical and Social Computing (CPSCom) and IEEE Smart Data (SmartData), 2016. p. 646–651. Citado na página 20.
- SILVA, A. M. *Sistemas neuro-Fuzzy Evolutivos: Novos Algoritmos de Aprendizado e Aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 55.
- SILVERMAN, L. M. Realization of linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16, n. 6, p. 554–567, 1971. Citado na página 29.
- SIMON, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2006. Citado na página 31.
- SMITH, G. L.; SCHMIDT, S. F.; MCGEE, L. A. Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumlunar vehicle. NASA, Tech. Rep. TR R-135, 1962. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 154.
- SOLTANI, S.; KORDESTANI, M.; AGHAEI, P. K. New estimation methodologies for well logging problems via a combination of fuzzy Kalman filter and different smoothers. v. 145, p. 704–710, June 2016. Citado na página 23.
- SUN, Z. et al. Knowledge-based evolving clustering algorithm for data stream. In: *Service Systems and Service Management (ICSSSM), 2014 11th International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1–6. Citado na página 55.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics*, v. 15, p. 116–132, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 55.
- TALEL, B.; FAYCAL, B. H. Fuzzy Kalman filter for non linear stochastic systems. In: . [S.l.]: IEEE 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD), 2013. p. 1–7. Citado na página 21.
- TEIXEIRA, B. O. S.; AGUIRRE, L. A.; TÔRRES, L. A. B. Filtragem de Kalman com restrições para sistemas não-lineares: revisão e novos resultados. *Revista Controle e Automação*, v. 21, n. 2, p. 127–146, March/April 2010. Citado na página 20.

- TETHER, A. Construction of minimal linear state-variable models from finite input-output data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 4, p. 427–436, August 1970. Citado na página 29.
- TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. O. State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, automation and Electrical Systems*, v. 29, p. 426–440, June 2018. Citado na página 18.
- TUNG, S.; QUEK, C.; GUAN, C. eT2FIS: An evolving type-2 neural fuzzy inference system. *Information Sciences*, v. 220, p. 124–148, 2013. Citado na página 41.
- VAFAMAND, N.; AREFI, M. M.; KHAYATIAN, A. Nonlinear system identification based on Takagi–Sugeno fuzzy modeling and unscented Kalman filter. *ISA Transactions*, v. 74, p. 134–143, February 2018. Citado 5 vezes nas páginas 13, 77, 80, 85 e 86.
- VUKADINOVIC, D. *Fuzzy Control Systems*. [S.l.]: Nova Science Publishers, 2011. Citado na página 21.
- WALTER, E.; PRONZATO, L. *Identification of parametric models from experimental data*. [S.l.]: Springer, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.
- WANG, H. et al. An adaptive Kalman filter estimating process noise covariance. *Neurocomputing*, v. 223, p. 12–17, February 2017. Citado na página 21.
- WANG, L.-X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control, Design and Stability Analysis*. [S.l.]: New Jersey: Prentice Hall, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- WANG, X. et al. Realtime temperature field reconstruction of boiler drum based on fuzzy adaptive Kalman filter and order reduction. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 113, p. 145–153, March 2017. Citado na página 23.
- WELCH, G.; BISHOP, G. In: *An Introduction to the Kalman Filter*. [S.l.]: UNCC Chapel Hill, TR95-041, 2006. Citado na página 19.
- WIBERG, D. M. *State Space and Linear Systems*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co., 1971. Citado na página 40.
- WU, C. Y. et al. A novel on-line Observer/Kalman Filter Identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, v. 352, p. 1119–1151, March 2015. Citado na página 62.
- WU, T.; HUNG, J. Y. State estimation for a tractor-trailer system using adaptive unscented Kalman filter. In: . [S.l.]: IEEE SoutheastCon, 2017. Citado na página 21.
- YOUNG, P. In: *Recursive Estimation and Time-Series Analysis: An Introduction for the student and Practitioner*. [S.l.]: Springer, 2011. Citado na página 19.
- ZADEH, L. A. Information and control. v. 8, p. 338–353, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 42.
- ZADEH, L. A. Fuzzy logic - a personal perspective. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 281, p. 4–20, December 2015. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 43.

ZANNI, L. et al. A prediction-error covariance estimator for adaptive Kalman filtering in step-varying processes: Application to power-system state estimation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 25, p. 1683–1697, December 2016. Citado na página 20.

ZEIGER, H. P.; MCEWEN, A. J. Approximate linear realization of given dimension via Ho's algorithm. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-19, n. 2, p. 153, 1974. Citado na página 29.

Apêndices

APÊNDICE A – Filtro de Kalman

Considera-se o sistema dinâmico modelado em espaço de estados, descrito pelo modelo não linear, estocástico e discreto, como segue (KALMAN, 1960; AGUIRRE, 2015):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, k), \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_{k+1}, k+1) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ correspondem aos modelos de processo e de observação, respectivamente. Considera-se que para todo $k \geq 1$, as medições $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$, as entradas $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ e as funções de densidade de probabilidade $\rho_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$, $\rho_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{w}_k)$ e $\rho_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{v}_k)$ são conhecidas, onde $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao vetor de estados inicial, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^q$ é o ruído do processo (relacionado a perturbações desconhecidas no processo) e $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^r$ é o ruído de medição (relacionado a incertezas nas observações). Para o problema de estimação de estados, a estimativa de estados ótima é definida como segue:

$$J(\mathbf{x}_k) \triangleq \rho(\mathbf{x}_k | (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k))\tag{A.2}$$

onde $\rho(\mathbf{x}_k | (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k))$ é a Função de Densidade de Probabilidade (FDP) condicional *a posteriori* do vetor de estados $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ condicionada às mesmas medições passadas e presente de \mathbf{y} , ou seja, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_k$.

O Filtro de Kalman (FK) constitui-se em um conjunto de equações recursivas que são utilizadas para estimar parâmetros de um sistema dinâmico representado por um modelo linear no espaço de estados, o qual pode ser obtido a partir da Equação (A.1), quando f e h são ditas funções lineares, sendo reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \Upsilon_k \mathbf{w}_k\tag{A.3}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_k\tag{A.4}$$

sendo \mathbf{w} e \mathbf{v} variáveis aleatórias independentes, de média nula, que satisfazem $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_k$, $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k$, $E[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T] = 0$, $\forall i, j$ e Υ_k a matriz que modela o ruído de processo. No FK convencional temos duas etapas distintas, a etapa de propagação e a etapa de assimilação, as quais serão descritas a seguir.

A.1 Etapa de propagação

Seja a função de densidade de probabilidade de \mathbf{x}_k^+ descrita por $\rho_k \sim N(\bar{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{P}_k^+)$, deve-se encontrar a função de densidade de probabilidade de \mathbf{x}_{k+1}^- . Em processos estocásticos, uma FDP gaussiana permanece gaussiana ao ser propagada por um sistema linear invariante no tempo. No presente trabalho, o sinal “+” indica o valor de determinada variável referente ao instante k , após ter sido incluída a informação em k , por outro lado, “-”

indica o valor de determinada variável referente ao instante k antes de ter sido incluída informação referente ao instante k ; “ $-$ ” sobre determinada variável significa o valor da média dessa variável.

Sendo assim, considerando que ρ^k é gaussiana, então ρ^- também será gaussiana, ou seja, $\rho^- \sim N(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-)$, assim, para caracterizar ρ^- completamente, necessita-se conhecer $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ e \mathbf{P}_{k+1}^- .

Substituindo o estado \mathbf{x}_k^+ , na Equação (A.3), tem-se:

$$\mathbf{x}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \quad (\text{A.5})$$

Usando a propriedade da ergodicidade (o que permite substituir o valor esperado pela média temporal) e considerando que \mathbf{u}_k é um sinal exógeno conhecido, logo, é determinístico, e supondo que a média do ruído dinâmico é nula, a esperança matemática de \mathbf{x}_{k+1}^- é dada como segue:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (\text{A.6})$$

O erro de estimação do estado na etapa de propagação, $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^-$, é dado como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \quad (\text{A.7})$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ indica o valor estimado e \mathbf{x}_{k+1} é o valor verdadeiro do vetor de estados. Por se tratar de distribuições gaussianas, a estimação do vetor \mathbf{x} será equivalente ao seu valor médio. Logo a Equação (A.6), pode ser reescrita como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (\text{A.8})$$

Sendo assim, substituindo as Equações (A.8) e (A.3), na Equação (A.7), tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= [\mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k] - [\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k] \\ &= \mathbf{A}_k (\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k) - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \\ &= \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{\Upsilon}_k \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A matriz de covariância de $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ por definição, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= E \left[\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - E \left[\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - E \left[\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \right)^T \right] \\ &= E \left[\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \right)^T \right] \\ &= E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde supõe-se que a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ não é polarizada. Para este caso, observa-se na Equação (A.10) que a matriz de covariância do vetor de estado estimado é igual à matriz de covariância do erro de estimação. Substituindo a Equação (A.9) na Equação (A.10), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k+1}^- &= E \left[\left(\mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \Upsilon_k \mathbf{w}_k \right) \left(\mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ - \Upsilon_k \mathbf{w}_k \right)^T \right] \\
 &= E \left[\mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \left(\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \mathbf{A}_k^T \right] - E \left[\mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \Upsilon_k^T \right] - E \left[\Upsilon_k \mathbf{w}_k \left(\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \mathbf{A}_k^T \right] + E \left[\Upsilon_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \Upsilon_k^T \right] \\
 &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k E \left[\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \right] \Upsilon_k^T - \Upsilon_k E \left[\mathbf{w}_k \left(\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \right] \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T \\
 &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

onde $E \left[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \right] = \mathbf{Q}_k$; $E \left[\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{w}_k^T \right] = E \left[\mathbf{w}_k \left(\tilde{\mathbf{x}}_k^+ \right)^T \right] = 0$, pois o vetor de erro na iteração k não possui correlação com o erro de estimação, considerando a mesma estimação.

Logo, a partir das Equações (A.6) e (A.11), consegue-se caracterizar $\rho^- \sim N(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-)$ completamente, a partir de $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ e \mathbf{P}_{k+1}^- na etapa de propagação.

A.2 Etapa de assimilação

Na etapa anterior, a propagação é realizada a partir do modelo dinâmico descrevendo como o vetor de estado muda de uma iteração para a próxima iteração. Na etapa de assimilação (também chamada de etapa de correção), com a chegada de nova informação (medição) na iteração $k+1$ corrige-se o vetor de estados, outrora obtido, antes da chegada desta nova medição, \mathbf{x}_{k+1}^- , a fim de obter o estado corrigido, \mathbf{x}_{k+1}^+ .

Nesta etapa, deseja-se observar o comportamento de ρ^- ao ser realizada a etapa de assimilação, ou seja, nesta etapa deve-se caracterizar a distribuição de \mathbf{x}_{k+1}^+ , indicada por $\rho^+ \sim N(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+)$, a partir da distribuição *a priori*, $\rho^- \sim N(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-)$ e da medição que chega na iteração atual \mathbf{y}_k . É possível relacionar as médias de ρ^+ e de ρ^- , como segue:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left[\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right] \tag{A.12}$$

onde

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \left[\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right]^{-1} \tag{A.13}$$

com $\mathbf{R}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$.

Conforme citado anteriormente, por se tratar de distribuições gaussianas, a estimação do vetor \mathbf{x} será equivalente ao seu valor médio, assim:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \quad (\text{A.14})$$

A partir da Equação (A.12) foi obtido o valor de $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+$, restando apenas definir \mathbf{P}_{k+1}^+ para descrever $\rho^+ \sim N(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+)$. A matriz de covariância desejada é dada por:

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = E [\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ (\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+)^T] \quad (\text{A.15})$$

onde o erro de estimação após a assimilação é descrito a partir da seguinte expressão:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ - \mathbf{x}_{k+1} \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a Equação (A.12) no lado direito da Equação (A.16), obtem-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] - \mathbf{x}_{k+1} \quad (\text{A.17})$$

mas, a partir da Equação (A.4), substituindo o valor de \mathbf{y}_k na Equação (A.17), tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] - \mathbf{x}_{k+1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a Equação (A.18) em (A.15), resulta em:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k+1}^+ &= E \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T \right] + \\
 &\quad + E \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T \right] + \\
 &\quad + E \left[\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T \right] + E \left[\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T \right] \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k+1}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \\
 &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \right] \mathbf{K}_{k+1}^T + \\
 &\quad + \mathbf{K}_{k+1} E \left[\mathbf{v}_k \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k+1}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
 &= \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_{k+1}^T - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- + \\
 &\quad + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1} \right) \mathbf{K}_{k+1}^T
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

onde $E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \mathbf{v}_k^T \right] = 0$ e $E \left[\mathbf{v}_k \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- \right)^T \right] = 0$, uma vez que o ruído de medição em uma iteração não tem correlação com o erro da estimação corrigida nesta mesma iteração.

Substituindo o valor de \mathbf{K}_{k+1} , descrito na Equação (A.13), no primeiro elemento \mathbf{K}_{k+1} da última parcela (quarta parcela) da Equação (A.19), resulta em:

$$\mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \tag{A.20}$$

Logo, na etapa de assimilação, a distribuição $\rho^+ \sim N(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^+, \mathbf{P}_{k+1}^+)$ foi caracterizada a partir das Equações (A.12) e (A.20).

O FK discreto é formado a partir da junção das etapas de propagação e de assimilação, conferindo a este filtro uma estrutura preditora-corretora. As equações, anteriormente descritas (Equações (A.8), (A.11), (A.13), (A.14) e (A.20)), utilizadas no cálculo do FK

discreto são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \Upsilon_k \mathbf{Q}_k \Upsilon_k^T \\ \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-] \\ \mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

onde as condições iniciais $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ e \mathbf{P}_0 são conhecidas.

A.3 Filtro de Kalman aplicado a Sistemas Não Lineares

Para sistemas não lineares, o FK, descrito na seção anterior, não satisfaz para estimar estados, uma vez que as distribuições *a priori* e *a posteriori* não são completamente caracterizadas por sua média e covariância. Uma vez que a teoria do FK é aplicável apenas para sistemas lineares e quase todos os sistemas dinâmicos práticos são não lineares, muitos pesquisadores estiveram envolvidos em estender a teoria de filtragem de Kalman nos anos seguintes. Nesta seção, serão observadas algumas extensões (as mais conhecidas) do FK, aplicadas a sistemas não lineares.

A.3.1 Filtro de Kalman Estendido

O algoritmo de filtragem não linear mais famoso e amplamente utilizado é o Filtro de Kalman Estendido (FKE). A ideia principal do FKE é usar o modelo dinâmico linearizado para calcular as matrizes de covariância e ganho do filtro. O Filtro de Kalman Estendido (FKE) foi proposto por Stanley F. Schmidt (SMITH; SCHMIDT; MCGEE, 1962)(SCHMIDT, 1966): o FKE consiste em linearizar analiticamente o sistema em torno do estado atual e aplicar as equações do FK (JAZWINSKI, 1970).

Considere o sistema não linear descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, k), \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_{k+1}, k+1) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

em que f e h são funções não lineares do processo e de observação, respectivamente.

O FKE utiliza o FK com as matrizes jacobianas das funções f e h , a partir das linearizações (primeiros termos na expansão da série de Taylor) dessas funções em torno

do estado atual. As funções f e h podem ser vetoriais, considerando essas funções vetoriais e f_i sendo a i -ésima componente de f . A matriz jacobiana de f é definida por:

$$Df(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

A matriz análoga ao vetor de ruído de processo, \mathbf{w} , é definida como segue:

$$Df(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial w_1} & \frac{\partial f_n}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial w_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Em sistemas não lineares a matriz jacobiana $Df(\mathbf{x})$ não é constante, contudo ao avaliar $Df(\mathbf{x})$ com valores específicos do vetor de estados $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, a matriz jacobiana passa a ser constante, ou seja, corresponde à linearização de f em torno de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

As equações do FKE no tempo discreto, são descritas a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = f(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{P}_{k+1}^- = Df(\mathbf{x}_k) \mathbf{P}_k^+ Df(\hat{\mathbf{x}}_k^+) + Df(\mathbf{w}_k) \mathbf{Q}_k Df(\mathbf{w}_k)^T \\ \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- Dh(\mathbf{x}_{k+1})^T \left[Dh(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^- Dh(\mathbf{x}_{k+1})^T + Dh(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{R}_{k+1} Dh(\mathbf{x}_{k+1})^T \right]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-)] \\ \mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} Dh(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^- \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

onde:

$$Df(\mathbf{x}_k) = Df(\mathbf{x}_k)|_{\mathbf{x}_k=(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, 0)} \quad (\text{A.26})$$

$$Df(\mathbf{w}_k) = Df(\mathbf{w}_k)|_{\mathbf{x}_k=(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, 0)} \quad (\text{A.27})$$

$$Df(\mathbf{x}_{k+1}) = Df(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-} \quad (\text{A.28})$$

A.3.2 Filtro de Kalman *Unscented*

Apesar de ser um algoritmo recursivo eficiente e um método muito utilizado para estimação de sistemas não lineares, o FKE possui uma série de limitações: a eficiência é garantida somente em sistemas quase lineares na escala de tempo das atualizações; a linearização somente pode ser aplicada se a matriz Jacobiana existir; a depender da aplicação, o cálculo de matrizes Jacobianas pode ser um processo muito difícil e suscetível a erros. Isto significa que o FKE possui limitações na implementação, sintonia e confiabilidade, devido a isto, Julier e Uhlmann propuseram o FKU (Filtro de Kalman *Unscented*) (JULIER; UHLMANN; DURRANT-WHYTE, 1995): a partir de poucas realizações de \mathbf{x} e \mathbf{y} , contudo, representativas - no sentido de ser observado um erro mínimo entre as matrizes de covariância amostral calculadas a partir dessas realizações, em relação às matrizes de covariância amostral calculadas com um grande número de realizações - a escolha destas realizações representativas é realizada a partir da Transformação *Unscented* (TU), a qual caracteriza uma função de densidade de probabilidade não gaussiana por meio de média e variância.

A partir da TU os vetores de estado (realizações de \mathbf{x}) são reduzidos a um pequeno número de vetores (pontos sigma). Um conjunto de pontos sigma $\chi_i, i = 1, \dots, 2n_a$, em que n_a é a dimensão do vetor de estado aumentado; χ_i deve ser escolhido de tal forma que a média e a covariância desses pontos e do vetor de estados aumentado sejam iguais, ou:

$$\sum_{i=1}^{2n_a} w_i^{(m)} \chi_i = \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{A.29})$$

$$\text{cov} \{ \chi_i \} = P = \sum_{i=1}^{2n_a} w_i^{(c)} [\chi_i - \bar{\mathbf{x}}] [\chi_i - \bar{\mathbf{x}}]^T \quad (\text{A.30})$$

onde P e $\bar{\mathbf{x}}$ é a matriz de covariância e a média de \mathbf{x} , respectivamente; $w_i^{(m)}$ e $w_i^{(c)}$ são pesos que podem assumir valores $w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2n_a}$.

Os pontos sigma, que satisfazem as Equações (A.29) e (A.30), podem ser propagados pelo modelo não linear (f, h) (descrito pela Equação (A.22)), a fim de gerar um conjunto de pontos sigma propagados \wp_i . A média e a covariância desse conjunto de pontos \wp_i , por sua vez, são determinados e tomados como aproximações da média e da matriz

de covariância do vetor de estado propagado \mathbf{y} , ou:

$$\frac{1}{2n_a} \sum_{i=1}^{2n_a} \wp_i \approx \bar{\mathbf{y}} \quad (\text{A.31})$$

$$\text{cov} \{ \wp_i \} \approx \mathbf{P}_{yy} \quad (\text{A.32})$$

com os pesos considerados iguais. O vetor de estados aumentado é dado por:

$$\mathbf{x}_k^a = \left[\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{w}_k^T \quad \mathbf{v}_k^T \right]^T \quad (\text{A.33})$$

com dimensão $n_a = 2n + m$, $\mathbf{x}_k^a \in \mathbb{R}^{2n+m}$, sendo n a dimensão do espaço de estado original e m o número de saídas. A matriz de covariância de erros de estimação é aumentada, pois refere-se ao vetor aumentado, descrita como segue:

$$\mathbf{P}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

onde $\mathbf{P}^a \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (2n+m)}$. Os pontos sigma são calculados como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\chi}_{0_k}^{a+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{a+} \\ \boldsymbol{\chi}_{i_k}^{a+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{a+} + \left[\sqrt{(n_a + \lambda) \mathbf{P}_k^{a+}} \right]_i, i = 1, \dots, +n_a \\ \boldsymbol{\chi}_{i_k}^{a+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{a+} + \left[\sqrt{(n_a + \lambda) \mathbf{P}_k^{a+}} \right]_i, i = n_a + 1, \dots, +2n_a \end{array} \right. \quad (\text{A.35})$$

onde $\left[\sqrt{(\cdot)} \right]_i$ corresponde a i -ésima linha ou coluna da raiz quadrada da matriz (se a decomposição for do tipo $X = A^T A$, as linhas de A devem ser usadas, no entanto, se for do tipo $X = A A^T$, então as colunas de A devem ser usadas). Os pesos observados nas Equações (A.29) e (A.30), relativas aos cálculos da média e covariância, respectivamente, podem ser determinados como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_a + \lambda} \\ w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_a + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \\ w_j^{(m)} = w_j^{(c)} = w_{j+n_a}^{(m)} = w_{j+n_a}^{(c)} = \frac{1}{2(n_a + \lambda)} \end{array} \right. \quad (\text{A.36})$$

com $j = 1, \dots, n_a$ que corresponde a i -ésima linha ou coluna da raiz quadrada da matriz (se a decomposição for do tipo $X = A^T A$, as linhas de A devem ser usadas, no entanto, se for do tipo $X = A A^T$, então as colunas de A devem ser usadas). Geralmente, é escolhido o parâmetro $\lambda = \alpha^2(\kappa + n_a) - n_a = 0$ ou considerando $\alpha = 1$, $\kappa = 0$ e $\beta = 2$.

A escolha dos pontos sigma conforme descrito na Equação (A.35) garante que a média e covariância sejam exatamente ajustadas. Sendo assim o FKU, pode ser escrito, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\chi}_{i_{k+1}}^{x-} = f \left[\boldsymbol{\chi}_{i_k}^{x+}, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\chi}_{i_k}^{w+} \right], \\ \boldsymbol{\wp}_{i_{k+1}}^- = f \left[\boldsymbol{\chi}_{i_k}^{x-}, \boldsymbol{\chi}_{i_k}^{r+} \right], \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{i_{k+1}}^{x-}, \\ \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \boldsymbol{\wp}_{i_{k+1}}^-, \\ \mathbf{P}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} \left[\boldsymbol{\chi}_{i_{k+1}}^{x-} - \hat{\boldsymbol{x}}_{i_{k+1}}^- \right] \left[\boldsymbol{\chi}_{i_{k+1}}^{x-} - \hat{\boldsymbol{x}}_{i_{k+1}}^- \right]^T \\ \mathbf{P}_{yy,k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} \left[\boldsymbol{\wp}_{i_{k+1}}^- - \hat{\boldsymbol{y}}_{i_{k+1}}^- \right] \left[\boldsymbol{\wp}_{i_{k+1}}^- - \hat{\boldsymbol{y}}_{i_{k+1}}^- \right]^T \\ \mathbf{P}_{xy,k+1}^- = \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} \left[\boldsymbol{\chi}_{i_{k+1}}^{x-} - \hat{\boldsymbol{x}}_{i_{k+1}}^- \right] \left[\boldsymbol{\wp}_{i_{k+1}}^- - \hat{\boldsymbol{y}}_{i_{k+1}}^- \right]^T \\ \mathbf{K} = \mathbf{P}_{xy,k+1}^- \left(\mathbf{P}_{yy,k+1}^- \right)^{-1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1}^+ = \boldsymbol{x}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left[\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1}^- \right] \\ \mathbf{P}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{yy,k+1}^- \mathbf{K}_{k+1}^T \end{array} \right. \quad (\text{A.37})$$

onde $i = 0, \dots, 2n_a$ e $\boldsymbol{\chi}_i^a$ são dados pela Equação (A.34) e $\boldsymbol{\chi}^a$, dado como segue:

$$\boldsymbol{\chi}^a = \left[(\boldsymbol{\chi}^x)^T \quad (\boldsymbol{\chi}^w)^T \quad (\boldsymbol{\chi}^T)^T \right]^T \quad (\text{A.38})$$

APÊNDICE B – Algoritmo OKID

O algoritmo OKID clássico, em sua inicialização, necessita dos seguintes parâmetros: ν (comprimento do conjunto de dados experimentais), p (número apropriado de parâmetros do observador de Markov de um dado conjunto de dados de entradas e saídas, onde p é um número inteiro, suficientemente maior que a ordem efetiva do sistema identificado, sendo o mesmo selecionado a partir dos dados experimentais $p \leq \nu$), $\mathbf{u}_{r \times \nu}$ (dados de entrada, r corresponde ao número de entradas) e $\mathbf{y}_{q \times \nu}$ (dados de saída, q corresponde ao número de saídas) (JUANG, 1994).

Para o cálculo dos parâmetros de Markov do observador, faz-se necessário a montagem da matriz de regressores, denominada \mathbf{V} , dada por:

$$\mathbf{V}_{[(r+q)p+r] \times \nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_p & \dots & \mathbf{u}_{\nu-1} \\ 0 & \mathbf{Z}_0 & \dots & \mathbf{Z}_{p-1} & \dots & \mathbf{Z}_{\nu-2} \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}_{p-2} & \dots & \mathbf{Z}_{\nu-3} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \mathbf{Z}_0 & \dots & \mathbf{Z}_{\nu-p-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde:

$$\mathbf{Z}_k^{(r+q) \times \nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^{r \times \nu} \\ \mathbf{y}_k^{q \times \nu} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

\mathbf{Z}_k corresponde aos dados de entrada e saída na amostra k .

A partir dos dados experimentais, os parâmetros de Markov do observador, $\bar{\mathbf{Y}}$, baseado em conjuntos nebulosos são obtidos, como segue:

$$\mathbf{y}_{q \times \nu} = \bar{\mathbf{Y}}_{q \times [(r+q)p+r]} \mathbf{V}_{[(r+q)p+r] \times \nu} \quad (\text{B.3})$$

onde:

$$\mathbf{y}^{q \times \nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_p & \dots & \mathbf{y}_{\nu-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{q \times [(r+q)p+r]} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{q \times r} & \mathbf{C}_{q \times \ell} \bar{\mathbf{B}}_{\ell \times r} & \mathbf{C}_{q \times \ell} \bar{\mathbf{A}}_{\ell \times \ell} \bar{\mathbf{B}}_{\ell \times r} & \dots & \mathbf{C}_{q \times \ell} \left[\bar{\mathbf{A}}_{\ell \times \ell} \right]^{(p-1)} \bar{\mathbf{B}}_{\ell \times r} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

e

$$\bar{\mathbf{A}}_{\ell \times \ell} = \mathbf{A}_{\ell \times \ell} + \bar{\mathbf{M}}_{q \times \ell} \mathbf{C}_{\ell \times q} \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\ell \times (r+q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\ell \times r} + \bar{\mathbf{M}}_{q \times \ell} \mathbf{D}_{\ell \times q} & -\bar{\mathbf{M}}_{\ell \times q} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

com uma matriz arbitrária \mathbf{M} escolhida para tornar a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ tão estável quanto desejado e ι é a ordem do sistema.

Um bloco da matriz de correlação \mathfrak{N}_τ é construído com os elementos de $\mathbf{G}_{hh_{k+\tau}}$, os quais correspondem ao produto entre \mathbf{H}_τ e $\mathbf{H}_{k+\tau}$, como segue:

$$\mathbf{G}_{hh_{k+\tau}}^{\alpha q \times \alpha q} = \mathbf{H}_{k+\tau}^{\alpha q \times \beta r} \mathbf{H}_\tau^T, \text{ com } \tau = 0 \quad (\text{B.8})$$

com

$$\mathbf{H}_{k+\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k+1+\tau} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta+\tau} \\ \mathbf{Y}_{k+2+\tau} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta+1+\tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha+\tau} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta+1+\tau} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

onde \mathbf{Y}_k é a matriz $q \times r$, cujas colunas são os parâmetros de Markov (resposta ao impulso amostrado) que correspondem às q saídas. A dimensão de \mathbf{H}_k e \mathbf{H}_0 é $\alpha q \times \beta r$, uma vez que a dimensão de \mathbf{G}_{hh_k} é $\alpha q \times \alpha q$. Assim,

$$\mathfrak{N}_k^{[q\alpha(\varepsilon+1)] \times [q\alpha(\varepsilon+1)]} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{hh_k} & \cdots & \mathbf{G}_{hh_{k+\xi\tau}} \\ \mathbf{G}_{hh_{k+\tau}} & \cdots & \mathbf{G}_{hh_{k+(\xi+1)\tau}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{hh_{k+\varepsilon\tau}} & \cdots & \mathbf{G}_{hh_{k+(\varepsilon+\xi)\tau}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\alpha \\ \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^\tau \\ \vdots \\ \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{\varepsilon\tau} \end{bmatrix} \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c & \mathbf{A}^\tau \mathbf{Q}_c & \cdots & \mathbf{A}^{\xi\tau} \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_\varepsilon^{q\alpha(\varepsilon+1) \times \iota} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^k \\ \iota \times \iota \end{bmatrix} \mathbf{Q}_\xi^{\iota \times q\alpha(\xi+1)} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

com

$$\mathbf{Q}_c^{\iota \times \alpha q} = \mathbf{Q}_\beta^{\beta r \times \iota} \mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{P}_\alpha^T \quad (\text{B.12})$$

Usando a decomposição em valor singular, decompõe-se \mathfrak{N}_0 , resultando em:

$$\mathfrak{N}_0 = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (\text{B.13})$$

Examinando os valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{N}_0 , é possível determinar a ordem ι do sistema. Uma realização de ordem mínima $[\mathbf{A}, \mathbf{Q}_c, \mathbf{P}_\alpha]$ é construída a partir de um bloco da matriz de Hankel deslocada \mathbf{N}_1 , conforme Equação (B.8), como segue:

$$\mathbf{G}_{hh_1} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_0^T = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^1 \mathbf{Q}_c \quad (\text{B.14})$$

A matriz de controlabilidade \mathbf{Q}_β é calculada e determina-se a realização de ordem mínima $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$. Logo,

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \quad (\text{B.15})$$

onde:

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\beta-2} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{\beta-1} \mathbf{B}] \quad (\text{B.17})$$

e

$$\mathbf{Q}_\beta = \mathbf{P}_\alpha^+ \mathbf{H}_0 \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \mathbf{R}_\iota^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_\iota (\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{Y}}_{q \times r} ;$$

$$\mathbf{B} = \text{primeiras } r \text{ colunas de } \mathbf{Q}_\beta ; \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{C} = \text{primeiras } q \text{ linhas de } \mathbf{P}_\alpha$$

Por fim, calcula-se a matriz de ganho de Kalman, como segue:

$$\mathbf{K}^{\iota \times q} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_p^T & \boldsymbol{\psi}_p \\ q \times \iota & \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{\psi}_p^T \mathbf{Y}_k^0 \quad (\text{B.21})$$

onde

$$\psi_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}_{p-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^0 = \tilde{\mathbf{Y}}_k^{(2)} + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{Y}}_{k-i}^0 \bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}, \quad k = 2, \dots, p \quad (\text{B.23})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^0 = - \sum_{i=1}^p \mathbf{Y}_{k-i}^0 \bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}, \quad k = p+1, \dots, \infty \quad (\text{B.24})$$

Os parâmetros de Markov contemplam tanto os parâmetros de Markov do sistema como os ganhos do observador. Os parâmetros de Markov do sistema são utilizados para calcular as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , ao passo que os parâmetros de Markov do ganho do observador são usados para determinar a matriz de ganho de Kalman \mathbf{K} . A matriz $\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$ é calculada pela solução dos mínimos quadrados ponderados para os parâmetros do observador de Markov a partir das colunas ímpares da Equação (B.5), sendo dada por:

$$\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{-terceira coluna de } \bar{\mathbf{Y}}_k \\ \text{-quinta coluna de } \bar{\mathbf{Y}}_k \\ \text{-sétima coluna de } \bar{\mathbf{Y}}_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.25})$$

Um dos problemas encontrados durante a implementação do algoritmo OKID clássico é a dificuldade em determinar os valores dos parâmetros a serem utilizados, tais como, α , β , p , τ , ε , ξ . A escolha destes parâmetros é realizada a partir de conhecimento do especialista e depende dos dados experimentais (CHENG et al., 1992).