

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AUTOMAÇÃO E CONTROLE

Rafael Jorge Menezes Santos

**Controle $\mathcal{H}_\infty$ Baseado na Equação de Riccati Dependente de
Estado para Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Não Lineares**

São Luís

2018

Rafael Jorge Menezes Santos

Controle $\mathcal{H}_\infty$ Baseado na Equação de Riccati Dependente de Estado para Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Não Lineares

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AUTOMAÇÃO E CONTROLE

Orientador: Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza

São Luís

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

SANTOS, RAFAEL JORGE MENEZES.

Controle Hinf Baseado na Equação de Riccati Dependente de Estado para Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Não Lineares / RAFAEL JORGE MENEZES SANTOS. - 2018.
108 f.

Orientador(a): FRANCISCO DAS CHAGAS DE SOUZA.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUÍS, 2018.

1. Equação de Riccati dependente de estado. 2. Sistemas não lineares. 3. Teoria de controle Hinf. I. SOUZA, FRANCISCO DAS CHAGAS DE. II. Título.

Rafael Jorge Menezes Santos

Controle $\mathcal{H}_\infty$ Baseado na Equação de Riccati Dependente de Estado para Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Não Lineares

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado em 05 de fevereiro de 2018:

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza
UFMA (Orientador)

Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra
IFMA (Membro interno)

Profa. Dra. Áurea Celeste da Costa Ribeiro
UEMA (Membro externo)

São Luís
2018

*Este trabalho é dedicado a todos quantos
não desistem de seus objetivos.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, “Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém.”

Ao amigo Eric Antony, pela ajuda em diversos momentos, companheirismo e pelas discussões que contribuíram para o desenvolvimento deste e de outros trabalhos desenvolvidos.

Ao meu orientador, Francisco Souza, sou grato pela prestimosa orientação durante o desenvolvimento da pesquisa.

Ao professor e amigo Eliúde Trovão, pelo apoio, amizade e discussões diversas cujo resultado excede as fronteiras deste trabalho.

A minha noiva, Danielle Santos, por me apoiar e acompanhar com compreensão durante esta jornada.

A minha mãe, Vilani Menezes, pelo apoio e palavras de incentivo.

A Universidade Federal do Maranhão, pela concessão de suas dependências e recursos para a realização desta pesquisa.

A CAPES, pelo fomento que permitiu-me a realização do curso de mestrado.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

RESUMO

Nesta dissertação, o controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado na equação de Riccati dependente de estado (SDRE - *state-dependent Riccati equation*) é apresentado e aplicado em sistemas não lineares. Inicialmente são apresentados os fundamentos da teoria de controle ótimo em seu contexto tradicional, utilizando as soluções baseadas na equação de Riccati. Em seguida, são apresentadas as técnicas de controle subótimo FPRE (*forward-propagating Riccati equation*) e FTRE (*frozen-time Riccati equation*), ambas adequadas para lidar com sistemas lineares e variantes no tempo e não lineares. A técnica FTRE, em particular, é utilizada como base na formulação da técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$. O presente trabalho também propõe a extensão do FTRE para o caso rastreador. Com respeito ao projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$, uma matriz de ponderação sobre a energia da variável de saída a ser controlada é considerada na função custo do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$. Antecedendo o projeto do controlador $\mathcal{H}_\infty$, a modelagem da planta bem como a estrutura com coeficientes dependentes de estado (SDC - *state-dependent coefficients*) são desenvolvidas. Através de resultados de simulação, a eficácia das técnicas apresentadas é avaliada em todo o texto.

Palavras-chave: Teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$. Sistemas não lineares. Coeficientes dependentes de estado. Equação de Riccati Dependente de Estado. Técnicas de controle FPRE e FTRE.

ABSTRACT

In this dissertation, the $\mathcal{H}_\infty$ control based on the state-dependent Riccati equation (SDRE) is presented and applied in nonlinear systems. Initially, the control theory fundamentals are presented in their traditional context, with solutions based on the Riccati equation. Then, FPRE (forward-propagating Riccati equation) and FTRE (frozen-time Riccati equation) techniques are presented as suitable solutions for dealing with linear time varying and nonlinear systems. The FTRE technique, in particular, is used as a basis in the $\mathcal{H}_\infty$ control technique formulation. The present work also proposes an extension of the FTRE for the tracker case. With respect to the $\mathcal{H}_\infty$ control design, a weighting matrix over the energy of the output variable to be controlled is considered in the $\mathcal{H}_\infty$ control cost function. Preceding the $\mathcal{H}_\infty$ controller design, a plant model as well as a structure with state dependent coefficients (SDC) are developed. Through simulation results, an efficacy of the techniques presented and evaluated throughout the text.

Keywords: $\mathcal{H}_\infty$ control theory. Nonlinear systems. State-dependent coefficients. State-dependent Riccati equation. FPRE and FTRE control techniques.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Trajetórias de estado e de controle para o problema do estado final livre considerando diversos valores de r	34
Figura 2.2 – Trajetórias de estado e de controle ótimo para o sistema dado em (2.124). . .	45
Figura 2.3 – Gráfico de custo e pólos de malha fechada.	45
Figura 2.4 – Trajetórias de estado considerando diversos valores de Q para o sistema dado em (2.124).	46
Figura 2.5 – Trajetórias de controle e gráficos do custo ótimo considerando diversos valores de Q para o sistema dado em (2.124).	46
Figura 2.6 – Resposta do estado $\mathbf{x}(t)$ para o sistema dado em (2.274).	67
Figura 3.1 – Trajetórias de estado para o controle BPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$	72
Figura 3.2 – Trajetórias de estado para o controle BPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(T) = \mathbf{I}$	72
Figura 3.3 – Trajetórias de controle para o controle BPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(T) = \mathbf{I}$	73
Figura 3.4 – Trajetórias de estado para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$	73
Figura 3.5 – Trajetórias de estado para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(0) = \mathbf{I}$	74
Figura 3.6 – Trajetórias de controle para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(T) = \mathbf{I}$	74
Figura 3.7 – Trajetórias de estado e de controle do sistema LVT descrito por (3.12) para a condição $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$	75
Figura 3.8 – Trajetórias de estado e de controle do sistema LVT descrito por (3.12) para a condição $\mathbf{S}(0) = 10\mathbf{I}$	75
Figura 3.9 – Trajetórias de estado e de controle do sistema LVT descrito por (3.12) para a condição $\mathbf{S}(0) = 100\mathbf{I}$	76
Figura 3.10–Plano de fase do sistema LVT descrito por (3.12) comparando as condições $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}(0) = 10\mathbf{I}$ e $\mathbf{S}(0) = 100\mathbf{I}$	76
Figura 3.11–Trajetória do estado $x_1(t) = i_a(t)$	86
Figura 3.12–Trajetória do estado $x_2(t) = i_b(t)$	86
Figura 3.13–Trajetória do estado $x_3(t) = \omega(t)$	87
Figura 3.14–Trajetória do estado $x_4(t) = \theta(t)$	87
Figura 3.15–Trajetória do controle $\mathbf{u}(t)$	87
Figura 4.1 – Operação de uma matriz sobre um vetor e seus valores singulares máximo e mínimo.	89

Figura 4.2 – Operação da matriz dada em (4.4) sobre os vetores de raio unitário.	89
Figura 4.3 – Diagrama de Bode do sistema dado em (4.5).	90
Figura 4.4 – Diagrama de Bode do sistema dado em (4.5) destacando a norma $\mathcal{H}_\infty$	91
Figura 4.5 – Diagrama em blocos do sistema dado pelas equações (4.7) e (4.8).	92
Figura 4.6 – Representação do sistema carro-pêndulo invertido.	95
Figura 4.7 – Diagrama de corpo livre do pêndulo invertido. F_V e F_H são as forças de reação vertical e horizontal no pivô, respectivamente.	96
Figura 4.8 – Diagrama de corpo livre do carro. F é a força aplicada ao carro, $B_c\dot{x}_c$ é a força de atrito e F_H é a força de reação horizontal no pivô.	97
Figura 4.9 – Estado $x_1(t)$	99
Figura 4.10–Estado $x_2(t)$	99
Figura 4.11–Estado $x_3(t)$	99
Figura 4.12–Estado $x_4(t)$	100
Figura 4.13–Perturbação $w(t)$	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Controlador Ótimo Não Linear Discreto	29
Tabela 2 – Regulador Linear Quadrático Discreto (estado final livre)	40
Tabela 3 – Controlador Ótimo Não Linear Contínuo com função de estado final fixo . .	52
Tabela 4 – Regulador Linear Quadrático Contínuo (Estado final livre)	64
Tabela 5 – Rastreador Linear Quadrático Contínuo	68
Tabela 6 – Parâmetros do sistema carro-pêndulo invertido para modelo linearizado. . .	71
Tabela 7 – Parâmetros do carro-pêndulo invertido.	98

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Teoria de controle ótimo	16
1.2	As técnicas FPRE e FTRE	17
1.3	Objetivos	18
1.3.1	Objetivo Geral	18
1.3.2	Objetivos Específicos	18
1.4	Trabalho Publicado	19
1.5	Organização da Dissertação	19
2	TEORIA DE CONTROLE ÓTIMO	21
2.1	Modelo Matemático do Processo	22
2.2	Restrições Físicas	23
2.3	Índice de Desempenho	23
2.4	Solução do Problema de Otimização Discreta Geral	24
2.4.1	Solução do Problema	25
2.4.1.1	Multiplicadores de Lagrange	25
2.4.1.2	Aplicação dos Multiplicadores de Lagrange na Solução do Problema de Otimização	26
2.4.1.3	Exemplo 1	28
2.5	Regulador Linear Quadrático no Tempo Discreto	35
2.5.1	Estado Final Fixo e Controle em Malha Aberta	37
2.5.2	Estado Final Livre e Controle em Malha Fechada	38
2.5.2.1	Simulação Computacional	43
2.5.3	Regime Permanente do Controle em Malha Fechada e Realimentação Sub- ótima	47
2.5.3.1	Ganhos de Realimentação Sub-ótimos	48
2.5.3.2	Exemplo 2: controle com realimentação sub-ótimo de um sistema escalar	49
2.6	Solução do Problema de Otimização Contínua Geral	50
2.6.1	Exemplo 3: menor distância entre dois pontos	51
2.6.2	Exemplo 4: controle de temperatura em uma sala	53
2.7	Regulador Linear Quadrático no Tempo Contínuo	56
2.7.1	Exemplo 5	64
2.8	Problema do Rastreador LQ	67
3	CONTROLE SUB-ÓTIMO BASEADO EM FPRE E FTRE	69
3.1	Técnica de Controle FPRE	70
3.1.1	Exemplo 1: Controle FPRE de um Sistema Carro-pêndulo Invertido	70

3.1.2	Exemplo 2: Controle FPRE aplicado à equação de Mathieu	74
3.2	Técnica de Controle FTRE	78
3.2.1	Parametrização por Coeficientes Dependentes de Estado (SDC)	79
3.2.2	Equação de Riccati Dependente de Estado (SDRE)	79
3.3	Controle FTRE baseado em SDRE	79
3.3.1	Proposta do controle FTRE rastreador	80
3.3.2	Exemplo: controle FTRE de um motor síncrono	80
4	CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ BASEADO NA EQUAÇÃO DE RICCATI DEPENDENTE DE ESTADO	88
4.1	Decomposição em Valores Singulares - SVD	88
4.2	Diagrama de valores singulares: gráfico de Bode MIMO	90
4.3	Definição da Norma $\mathcal{H}_\infty$ – Sistemas MIMO	90
4.4	Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$	91
4.4.1	Controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE	94
4.4.2	Exemplo 1	95
4.4.3	Modelagem da Planta	95
4.4.4	Controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE	98
5	CONCLUSÃO	105
	REFERÊNCIAS	106

1 INTRODUÇÃO

O projeto de sistemas de controle é geralmente baseado em um conjunto de equações diferenciais lineares (o modelo nominal), as quais se constituem numa aproximação da dinâmica do sistema real. Este é não linear na maioria das vezes. Vários sistemas reais possuem dinâmicas que são importantes em altas frequências, as quais são por muitas vezes desprezadas no modelo nominal. Assim, essas dinâmicas de alta frequência não modeladas podem desestabilizar um sistema de controle que tem um comportamento satisfatório quando considerado somente o modelo nominal (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012, p. 355). Assim, é importante projetar um controlador capaz de garantir um desempenho satisfatório e manter a estabilidade não obstante os erros de modelagem em virtude das dinâmicas de alta frequência não modeladas e variações paramétricas da planta. Um controlador com tal característica é dito *robusto*. Nesse contexto, Cruz (1996, p. 16) afirma:

A robustez é uma característica desejável por pelo menos duas razões. Em primeiro lugar, deve ser preocupação permanente de todo projetista que os sistemas de controle funcionem satisfatoriamente, ainda que as condições de operação sejam distintas daquelas consideradas no modelo de projeto (nominal). Em segundo lugar, as condições de robustez podem ser utilizadas com o objetivo de se adotar um modelo de projeto intencionalmente simplificado, não só para facilitar a análise, como também por seu impacto no controlador resultante (CRUZ, 1996, p. 16).

A temática do estudo da robustez dos sistemas de controle em malha fechada começou a despertar o interesse da comunidade acadêmica, principalmente a partir da década de 1970. Segundo Safonov (2012), considerações sobre robustez estão implícitas nos métodos clássicos de projeto de controle com realimentação baseados em lugar das raízes e resposta em frequência. Contudo, antes de 1970, a questão da robustez frente a grandes incertezas de modelagem não era geralmente reconhecida pelos matemáticos teóricos de controle e o próprio termo robustez ainda não tinha sido empregado na literatura da área. O início da década de 1970 foi marcado por falhas de projeto de controladores multivariáveis com realimentação para controle de aeronaves e submarinos militares. As técnicas de projeto utilizadas eram principalmente baseadas em otimização matemática. Considerou-se que a falta de atenção para a questão da robustez foi um fator preponderante para essas falhas, e assim, em meio a essa turbulência, nascia o moderno campo da teoria de controle robusto (SAFONOV, 2012). No início da década de 1980, surgiu um interesse no tratamento do problema da incerteza da planta. Quase que simultaneamente surgiram alguns resultados significativos na análise de sistemas multivariáveis no domínio da frequência. Assim, o período do controle robusto moderno (de 1975 até a atualidade) é definido a partir da confluência de interesse na análise de incerteza e análise de sistemas multivariáveis (DORATO, 1987). Dorato (1987) considera ainda que dois artigos publicados na primeira metade dos anos de 1960 foram importantes contribuições para a teoria de controle robusto moderno: o artigo que introduziu o conceito do princípio do “ganho pequeno” (ZAMES, 1963), conceito este que desempenha um papel essencial nos critérios de estabilidade robusta; e o artigo que mostra as

propriedades de robustez (margem de ganho infinita e margem de fase de 60°) apresentada pela lei de controle de realimentação de estado linear quadrático (LQ) ótimo para sistemas SISO (KALMAN, 1964). Posteriormente, os conceitos de margem de ganho e margem de fase foram estendidos para sistemas multivariáveis (SAFONOV; ATHANS, 1977).

A partir dos anos de 1980, uma técnica que se destaca no contexto de projeto de controladores robustos é a otimização $\mathcal{H}_\infty$, a qual consiste de um método para projetar controladores robustos considerando o pior caso da perturbação de entrada, isto é, um procedimento de atenuação dos sinais de perturbação no pior caso formulado como um problema de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012, p. 430), (STORVOGEL, 1990), (TADMOR, 1990). Zames (1981) introduziu o método $\mathcal{H}_\infty$ com a principal motivação de enfatizar a incerteza da planta (DOYLE, 1996). Como afirma Doyle (1996), a norma $\mathcal{H}_\infty$ foi considerada apropriada para especificar tanto o nível de incerteza da planta quanto o ganho da entrada de perturbação para o erro de saída no sistema controlado. Embora a proposta original do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ tenha sido formulada no domínio da frequência, sua abordagem no domínio do tempo ganhou seu espaço principalmente a partir dos artigos de Doyle et al. (1989) e Doyle e Glover (1989). Orlov e Aguilar (2014, p. 1) afirmam que a derivação das soluções em espaço de estados dos problemas de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ apresentada por Doyle et al. (1989), foi verdadeiramente um avanço na teoria de controle linear. Basicamente, a derivação apresentada mostra a solução do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ a partir da solução de duas equações algébricas de Riccati. Gahinet e Apkarian (1994), por sua vez, mostraram a solução do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ pela redução a uma desigualdade matricial linear (LMI). Entre outros avanços de destaque no contexto de soluções do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ estão a sua extensão para sistemas não lineares proposta por Helton e James (1999) e a síntese $\mathcal{H}_\infty$ não suave proposta por Apkarian e Noll (2006).

A importância da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ no cenário atual da teoria de controle robusto é ainda corroborada pelas recentes publicações em periódicos especializados: Xu et al. (2016) apresenta uma síntese de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ para controle de veículos aéreos não tripulados em miniatura para melhoria de sua capacidade de voo na presença de perturbações do vento; Babazadeh e Nobakhti (2015) apresentam o projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ de ordem fixa com realimentação de saída para sistemas lineares e invariantes no tempo; Wang et al. (2016) apresenta uma estratégia de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ com realimentação de estado para rastreamento de trajetória de veículos terrestres autônomos. Resultados de simulação evidenciam a robustez da abordagem apresentada. Várias dessas propostas, entretanto, são aplicadas em sistemas lineares. Entretanto, muitos sistemas físicos do mundo real são, por natureza, não lineares (CHEN, 1999). Apesar disso, tais sistemas são geralmente tratados com o emprego de modelos e estruturas de controle lineares. Isto se deve ao fato da faixa de operação a que o sistema está restrito possuir características lineares. Todavia, se a faixa de operação do sistema for muito larga, as características não lineares tornam-se acentuadas. Nesse caso, o emprego de técnicas de controle puramente lineares poderá levar a um desempenho pobre (SLOTINE; LI, 1991; LEIGH, 1983).

Considerando esse fato, uma alternativa para a extensão do controle $\mathcal{H}_\infty$ ao contexto não linear é proposta por Cloutier, D’Souza e Mracek (1996): a técnica consiste em usar uma parametrização direta para trazer o sistema não linear para uma estrutura pseudo-linear com coeficientes dependentes do estado (SDC - *state-dependent coefficients*). A obtenção de tal modelo permite, por conseguinte, a determinação de uma equação de Riccati dependente do estado (SDRE - *state-dependent Riccati equation*), a qual é resolvida para cada ponto da trajetória de estado. A teoria da equação de Riccati dependente de estado surge no contexto de controle ótimo para lidar com sistema não lineares, como explica Çimen (2008):

O método implica na fatoração (isto é, a parametrização) da dinâmica não linear no vetor de estado e o produto de uma função matricial que depende do próprio estado. Ao fazê-lo, o algoritmo SDRE capta completamente as não linearidades do sistema, trazendo o sistema não linear para uma estrutura linear (não única) com matrizes de coeficiente dependentes do estado (SDC) e minimizando um índice de desempenho não linear com estrutura quadrática. Uma equação algébrica de Riccati (ARE) usando as matrizes SDC é então resolvida online para dar a lei de controle sub-ótimo (ÇIMEN, 2008, p. 3761, tradução nossa).

Assim, a presente dissertação apresenta a derivação e aplicação da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE para sistemas não lineares considerando uma ponderação sobre a energia da variável de saída a ser controlada. Também são apresentadas duas técnicas de controle sub-ótimo aplicadas ao contexto de sistemas lineares e variantes no tempo (LVT) como também não lineares: o FPRE (*forward-propagating Riccati equation*) e o FTRE (*frozen-time Riccati equation*), ambas propostas por Prach, Tekinalp e Bernstein (2014), (PRACH; TEKINALP; BERNSTEIN, 2015). O FTRE, em particular, será utilizado como base para obtenção do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares apresentado. Adicionalmente, o presente trabalho propõe a extensão do FTRE para o caso rastreador. Exemplos com resultados de simulação são empregados para ilustrar a aplicação de cada umas das técnicas estudadas.

A seguir, resultados principais das teorias e técnicas de controle apresentadas neste trabalho são apresentas de forma sucinta.

1.1 Teoria de controle ótimo

A teoria de controle ótimo trata, essencialmente, com métodos de determinação dos sinais de controle que farão com que um processo satisfaça as restrições físicas e ao mesmo tempo minimize (ou maximize) um critério ou índice de desempenho pré-estabelecido. Um índice de desempenho comumente empregado em problemas de controle ótimo é o índice de desempenho quadrático, dado por:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estado e $\mathbf{u}(t)$ é vetor de controle do sistema, respectivamente. As matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes de ponderação sobre a energia associada ao estado e ao controle, respectivamente. Tais matrizes são parâmetros de entrada do projeto para influenciar comportamento do sistema em termos de energia. A dinâmica do sistema a ser controlado, por sua vez, é tratada como uma restrição de igualdade imposta ao problema de otimização. Tal dinâmica é regida pelo modelo em espaço de estados dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.2)$$

O índice dado em (1.1) é empregado no problema do *regulador linear quadrático* (LQR), cuja solução determina o controle ótimo por realimentação de estados da forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (1.3)$$

onde o ganho $\mathbf{K}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t) \quad (1.4)$$

A matriz $\mathbf{S}(t)$ na equação (1.4) deriva diretamente da chamada *equação de Riccati*, dada por

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A} - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t) + \mathbf{Q} \quad t \leq T, \quad \text{dado } \mathbf{S}(T) \quad (1.5)$$

A equação diferencial matricial (1.5) é resolvida por retro-integração (para trás no tempo) a partir da condição final $\mathbf{S}(T)$. O controle $\mathbf{u}(t)$ em (1.3) regula os estados ao mesmo tempo que minimiza o índice de desempenho dado em (1.1), caracterizando o controle ótimo.

A teoria de controle ótimo fundamenta a teoria de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. Na problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ apresentado neste trabalho, será empregada a solução baseada em uma equação de Riccati similar à equação (1.5).

1.2 As técnicas FPRE e FTRE

Essas duas técnicas de controle são técnicas sub-ótimas, de modo que não minimizam estritamente o índice dado em (1.1). A técnica de controle FPRE (*forward-propagating Riccati equation*) é caracterizada pela integração em avanço da equação de Riccati e utilização de condição inicial em vez de condição final. Desse modo, a equação de Riccati para o controle FPRE é da forma:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A} - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}, \quad t \leq T, \quad \text{dado } \mathbf{S}(0) \quad (1.6)$$

A inspiração para a proposta da técnica FPRE por Prach, Tekinalp e Bernstein (2015) deriva do fato de que a teoria de controle ótimo tem como um de seus princípios fundamentais que as leis de controle ótimo se propagam para trás no tempo. Assim, para o controle linear quadrático, a solução da equação de Riccati deve ser obtida por uma retro-integração a partir

de uma condição em um instante final. A propagação para trás no tempo se constitui uma desvantagem principalmente no controle de sistemas lineares e variantes no tempo (LVT), uma vez que implica na necessidade do conhecimento da dinâmica futura da planta. Alternativamente é proposta a lei de controle FPRE, caracterizada pela integração em avanço da equação de Riccati e utilização de condição inicial. Os demais resultados resultados como o ganho de controle em (1.4) permanecem os mesmos para o FPRE.

A técnica de controle FTRE (*frozen-time Riccati equation*), proposta por Prach, Tekinalp e Bernstein (2014), é também adequada para lidar com sistemas LVT e com sistemas não lineares. Essa técnica está essencialmente baseada no emprego da chamada equação de Riccati dependente de estado (SDRE¹). Na SDRE, os parâmetros da planta são dependentes do estado $\mathbf{x}(t)$, isto é, têm-se $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$.

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{S}(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{S}(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))^T\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Eventualmente, as matrizes de ponderação da função de custo quadrática também podem ser dependentes de estado. No FTRE, a equação de Riccati dependente de estado (SDRE) é resolvida para cada instante t_i da trajetória do estado $\mathbf{x}(t_i)$. Assim, o estado é fixado (“congelado”) a cada instante t_i . A solução obtida ao longo da trajetória do estado é então utilizada para determinar a ação de controle por realimentação de estados a cada instante t_i . No contexto da teoria do regulador linear quadrático (LQR), o objetivo é determinar a lei de controle por realimentação de estados na forma $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)$ que minimiza o índice de desempenho quadrático associado. Observe que essa abordagem é bastante adequada para lidar com sistemas não lineares, uma vez que exatamente no instante t_i o sistema é representado por uma estrutura linear.

1.3 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são apresentados a seguir.

1.3.1 Objetivo Geral

Apresentar a técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ aplicada a sistemas dinâmicos multivariáveis não lineares utilizando a equação de Riccati dependente de estado (SDRE).

1.3.2 Objetivos Específicos

- Apresentar a teoria de controle ótimo de sistemas lineares, destacando o controle linear quadrático e utilizando exemplos de simulação computacional;

¹ SDRE deriva do inglês *state-dependent Riccati equation*.

- Apresentar as técnicas de controle sub-ótimo FTRE (*frozen-time Riccati equation*) e FPRE (*forward-propagating Riccati equation*) como ferramentas valiosas para a extensão da teoria de controle ótimo ao contexto de sistemas lineares e variantes no tempo como também de sistemas não lineares;
- Apresentar a técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares e invariantes no tempo e a sua extensão ao contexto de sistemas não lineares.

1.4 Trabalho Publicado

A pesquisa apresentada neste trabalho propiciou a publicação do seguinte artigo científico no Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), realizado em 2017 na cidade de Porto Alegre - RS:

SANTOS, R. J. M.; SOUZA, F. C. Controle $\mathcal{H}_\infty$ Baseado na Equação de Riccati Dependente das Variáveis de Estado Aplicado a um Sistema Carro-Pêndulo Invertido. **Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2017)**. Porto Alegre, RS, Out., 2017.

O artigo propõe a aplicação do controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado na equação de Riccati dependente de estado (SDRE - *state-dependent Riccati equation*) em um sistema não linear carro-pêndulo invertido. Uma matriz de ponderação sobre a energia da variável de saída a ser controlada é considerada na função custo do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$. A modelagem da planta bem como a estrutura com coeficientes dependentes de estado (SDC - *state-dependent coefficients*) são desenvolvidas em detalhes. Através de resultados de simulação, a eficácia da técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseada em SDRE é avaliada (SANTOS; SOUZA, 2017).

1.5 Organização da Dissertação

Este trabalho de dissertação apresenta a seguinte estrutura:

- Capítulo 2: trata dos aspectos fundamentais da teoria de controle ótimo. Os conceitos iniciais são apresentados e por conseguinte é apresentada a solução do problema de otimização. A teoria do regulador linear quadrático tanto para o tempo contínuo quanto para o discreto é tratada no capítulo. A abordagem feita é essencialmente baseada na equação de Riccati. Simulações computacionais do controle de sistemas são utilizadas para exemplificar a teoria apresentada;
- Capítulo 3: apresenta as técnicas de controle sub-ótimo FPRE (*forward-propagating Riccati equation*) e FTRE (*frozen-time Riccati equation*). Tais técnicas são mais adequadas para lidar com sistemas LVT e não lineares, tendo a vantagem de tratar com um horizonte de tempo infinito. Neste capítulo também se propõe a extensão da técnica FTRE para o

caso rastreador, com exemplo de aplicação em um motor síncrono. Também são apresentados resultados de simulação em exemplos que ilustram a aplicação das técnicas;

- Capítulo 4: apresenta a teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseada na equação de Riccati dependente de estado (SDRE) para sistemas não lineares. Inicialmente, são derivados os principais resultados da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares no contexto do domínio do tempo, utilizando a equação de Riccati. Em seguida, a extensão para o contexto não linear é feita com o auxílio da técnica FTRE. Adicionalmente, emprega-se uma matriz de ponderação na função de custo, a qual atua sobre a energia da variável de saída a ser controlada. Exemplos de aplicação em sistemas não lineares são apresentados para ilustrar a eficácia da técnica;
- Capítulo 5: apresenta as conclusões do trabalho.

2 TEORIA DE CONTROLE ÓTIMO

A teoria de controle ótimo possui raízes em diversos campos dentre os quais se destacam: teoria de cálculo de variações, teoria de controle clássico, teoria de processos aleatórios e também programação linear e não linear (BRYSON, 1996). A teoria de controle ótimo é considerada uma das várias aplicações e extensão do cálculo de variações. Este, por sua vez, tem sua origem por volta de 1697 com a publicação da solução do *problema da Braquistócrona* por Johann Bernoulli (SUSSMANN; WILLEMS, 1997). Considera-se que a teoria de controle ótimo tem seu ponto de partida convencionalmente atribuído à proposição do “princípio do máximo de Pontryagin”, pelo matemático russo Lev S. Pontryagin e seu grupo em 1956 (BOLTYANSKII; GAMKRELIDZE; PONTRYAGIN, 1964; SUSSMANN; WILLEMS, 1997).

A crescente aplicação da teoria de controle ótimo desde seu surgimento foi possível, sobretudo, em virtude do advento do computador digital, que se tornou disponível comercialmente na década de 1950 (BRYSON, 1996, p. 28, 32). Essa dependência de recursos computacionais para a aplicação da teoria de controle ótimo se deve à necessidade de implementação dos algoritmos de solução do problema de controle. Outra explicação para tal dependência é que a teoria de controle ótimo se ocupa da solução de problemas de controle envolvendo sistemas complexos e multivariáveis, buscando a satisfação de algum critério de desempenho. Nesse contexto, Kirk (1998) afirma:

O objetivo da teoria de controle ótimo é *determinar os sinais de controle que farão com que um processo satisfaça as restrições físicas e ao mesmo tempo minimize (ou maximize) algum critério de desempenho* (KIRK, 1998, p. 3, tradução nossa).

Assim, o chamado *problema de controle ótimo* pode ser definido como a formulação, em linguagem matemática, dos objetivos de projeto do sistema de controle ótimo; isto é, minimizar ou maximizar o índice de desempenho predefinido, satisfazendo, simultaneamente, as restrições impostas. Desse modo, a formulação do problema de controle ótimo requer alguns elementos essenciais (KIRK, 1998, p. 4), (ATHANS; FALB, 2007, p. 3):

- Um modelo matemático do processo a ser controlado;
- Uma declaração das restrições físicas;
- A especificação de um índice de desempenho que mensura a eficácia da ação de controle.

A seguir serão apresentados cada um desses elementos.

2.1 Modelo Matemático do Processo

O objetivo desta etapa de modelagem matemática do processo é a obtenção de uma descrição matemática (o modelo) que represente como o sistema responde a uma dada entrada ou conjunto de entradas. Considere, portanto, sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias na forma de *variáveis de estado*. Assim, se $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ são as variáveis de estados (ou estados) do processo no instante t , e $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ são as *entradas de controle* do processo no instante t , então o sistema pode ser descrito por n equações diferenciais de primeira ordem (KIRK, 1998, p. 4):

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (2.2)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (2.3)$$

O *vetor de estado* do sistema, por sua vez, é definido como:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

é o *vetor de controle*. Desse modo, as equações de estado de (2.1) a (2.3) podem ser representadas de forma geral por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.6)$$

Algumas definições úteis dadas por Kirk (1998, p. 6) são:

- **Trajétória de estado:** o histórico dos valores de estado no intervalo $[t_0, t_f]$, denotada por $\mathbf{x}$;
- **Controle ou histórico de controle:** o histórico dos valores das entradas de controle durante o intervalo $[t_0, t_f]$, denotada por $\mathbf{u}$;

2.2 Restrições Físicas

Restrições físicas correspondem às restrições nos valores dos estados e do controle. Considere, por exemplo, o problema de levar um carro de um ponto a outro em um tempo mínimo. Observe que se a aceleração do carro é uma entrada de controle, claramente ela tem um limite superior que depende da capacidade do motor do carro. Trata-se de uma restrição física imposta ao controle. Certamente uma das variáveis de estado será a posição do carro. Para esta também se podem estabelecer limites superior e inferior, os quais estão relacionados aos pontos de partida e chegada do carro.

2.3 Índice de Desempenho

O índice de desempenho é empregado para avaliar quantitativamente o desempenho de um sistema. Por conseguinte, o controle ótimo é definido como aquele que minimiza (ou maximiza) essa medida de desempenho (KIRK, 1998, p. 10). O índice de desempenho a ser utilizado para um dado sistema é uma escolha do especialista e está relacionada ao tipo de problema com o qual se está lidando. Como exemplo, Kirk (1998, p. 10) afirma que a declaração “Transferir um sistema de um ponto A para um ponto B tão rapidamente quanto possível” indica claramente que o tempo decorrido é a medida de desempenho a ser minimizada. Sobre o problema da escolha do índice de desempenho adequado, Athans e Falb (2007, p. 4) comentam:

A escolha de um funcional de desempenho matemático é uma questão altamente subjetiva, uma vez que a escolha de um engenheiro de projeto não precisa ser a escolha de outro. A experiência e a intuição do engenheiro desempenham um importante papel na determinação de um funcional de custo adequado para o problema (ATHANS; FALB, 2007, p. 4, tradução nossa).

A seguir são listados alguns problemas comuns em controle ótimo e possíveis índices de desempenho utilizados.

- **Problemas de tempo mínimo**

Suponha que se deseja encontrar o controle u_k que leva o sistema de um dado estado inicial x_0 até um estado final desejado $x \in \mathbb{R}^n$ em tempo mínimo. Assim, um índice de desempenho adequado a esse problema seria

$$J = N = \sum_{k=0}^{N-1} 1, \quad (2.7)$$

com a condição de contorno $x_N = x$. No domínio do tempo contínuo, o equivalente seria:

$$J = t_f - t_0 \quad (2.8)$$

Em um problema desse tipo não é levado em conta o gasto de controle nem a trajetória a ser seguida.

• Problemas de esforço de controle mínimo

Nesse caso o objetivo é encontrar o controle u_k que leva o sistema do estado x_0 ao estado final desejado x em um tempo fixo N , com esforço de controle mínimo. Assim

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| \quad (2.9)$$

• Problemas de energia mínima

Suponha que se deseja encontrar o controle u_k que minimiza a energia do estado final e de todos os estados intermediários. Um índice adequado a esse objetivo é dado por

$$J = \frac{1}{2} s x_N^T x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (q x_k^T x_k + r u_k^T u_k) \quad (2.10)$$

onde q , r e s são fatores de ponderação. Pela equação, conclui-se que minimizar a energia corresponde a manter o estado e o controle próximos de zero. Se, por exemplo, é mais importante que o estado intermediário x_k seja pequeno, faz-se q grande de modo a ponderá-lo fortemente em J , o qual será minimizado. Se, por outro lado, deseja-se tornar o estado final pequeno, seleciona-se um grande valor para s . De modo equivalente, sendo o interesse em um valor pequeno da energia de controle, faz-se r grande.

De modo geral, um índice de desempenho é uma escolha do especialista para atingir a resposta desejada de um dado sistema, de modo que, para atingir diferentes objetivos de controle, são selecionados índices de desempenho diversos. Assim, o problema de controle ótimo é caracterizado por compromissos e custo-benefício, com diferentes fatores de ponderação no índice J resultando em diferentes compensações entre a conformidade entre os objetivos de desempenho e a magnitude do controle ótimo necessário.

O controle u^* que faz com que um dado sistema $\dot{x}(t) = f(x, u)$ siga por uma trajetória x^* de modo a minimizar um índice de desempenho J é chamado de **controle ótimo**. A trajetória de estado x^* é, por sua vez, a **trajetória ótima**.

A seguir, o problema de controle ótimo será apresentado. A primeira abordagem será no domínio do tempo discreto. Por conseguinte, o desenvolvimento no domínio do tempo contínuo será considerado.

2.4 Solução do Problema de Otimização Discreta Geral

Suponha uma planta descrita por uma equação dinâmica não linear geral, no domínio do tempo discreto, dada por:

$$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k) \quad (2.11)$$

com condição inicial x_0 . O sobrescrito na função $f \in \mathbb{R}^n$ significa que ela pode, em geral, ser variante no tempo. O estado x_k é um vetor de dimensão n e o controle u_k é um vetor de dimensão

m . Uma vez que a equação (2.11) determina o estado no instante $k + 1$ dado o estado e o controle no instante k , ela será considerada a restrição a ser adotada.

O índice de desempenho associado é dado pela forma geral:

$$J_i = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.12)$$

onde $\phi(N, \mathbf{x}_N)$ é uma função do instante final N e do estado no instante final e $L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ é uma função variante no tempo de estado e do controle em cada instante k . O intervalo de interesse para análise é $[i, N]$. Assim, o problema de controle ótimo pode ser anunciado como segue:

Determinar o controle $\mathbf{u}_k^$ no intervalo $[i, N]$ que leva o sistema descrito na equação (2.11) ao longo da trajetória $\mathbf{x}_k^*$ de forma que o índice de desempenho descrito pela equação (2.12) seja minimizado.*

2.4.1 Solução do Problema

Considere a solução do problema de controle ótimo para o sistema não linear geral dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.13)$$

associado ao índice de desempenho

$$J_i = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.14)$$

Para determinar a sequência de controle ótimo $\mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*$ que minimiza J , uma poderosa ferramenta é a abordagem baseada nos multiplicadores de Lagrange, uma vez que existe uma função de restrição $f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ especificada em cada instante k no intervalo de interesse $[i, N]$.

2.4.1.1 Multiplicadores de Lagrange

Quando um problema de otimização possui um conjunto de restrições, este conjunto, em geral, é representado sob a forma de restrições de igualdade e desigualdade. Os *multiplicadores de Lagrange* são variáveis auxiliares que permitem lidar com problemas de otimização com restrições, facilitando a caracterização de soluções ótimas (BERTSEKAS, 1999, p. 282). Nesse sentido, os multiplicadores de Lagrange permitem transformar um problema de otimização com restrição em um problema de otimização irrestrita.

Considere, portanto, problemas de otimização com restrições de igualdade da forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ e $h_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ são funções continuamente diferenciáveis. Considere, por simplificação de notação, o uso da função de restrição $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, com

$$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m) \quad (2.16)$$

Por conseguinte, as restrições podem ser escritas na forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.17)$$

Basicamente, o teorema do multiplicador de Lagrange estabelece que para um dado mínimo local $\mathbf{x}^*$, existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, chamados *multiplicadores de Lagrange*, tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Observe que a quantidade de multiplicadores de Lagrange é igual a quantidade de restrições de igualdade do problema de otimização (2.15). De maneira mais formal, Bertsekas (1999, p. 284) enuncia o teorema do multiplicador de Lagrange como segue:

Seja $\mathbf{x}^*$ um mínimo local de f sujeito a $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, e considere que os gradientes das restrições $\nabla h_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla h_m(\mathbf{x}^*)$ são linearmente independentes. Então existe um único vetor $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, chamado de vetor multiplicador de Lagrange, tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

(BERTSEKAS, 1999, p. 284).

Uma abordagem alternativa consiste de utilizar a *função Lagrangeana* $L_a : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$L_a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}). \quad (2.20)$$

Então, se $\mathbf{x}^*$ é um mínimo local, as condições do teorema do multiplicador de Lagrange podem ser reescritas em termos da função Lagrangeana como:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

$$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

2.4.1.2 Aplicação dos Multiplicadores de Lagrange na Solução do Problema de Otimização

Retomando o custo dado na equação (2.14), o qual se deseja minimizar, tem-se

$$J_i = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.23)$$

Observe, entretanto, que a minimização de J_i está sujeita a própria dinâmica do sistema não linear dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.24)$$

Assim, este problema pode ser formulado como um problema de otimização com restrição da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J_i &= \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \text{sujeito a } h(\mathbf{x}) &= f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Desse modo, utilizando a abordagem da função Lagrangeana definida em (2.20), considere $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$ um vetor multiplicador de Lagrange associado à restrição $h(\mathbf{x})$ dada em (2.25) e o problema de minimizar o índice de desempenho J_i . Portanto, define-se o índice de desempenho aumentado J' como

$$J' = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_{k+1})] \quad (2.26)$$

Por conseguinte define-se a função Hamiltoniana

$$H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.27)$$

Desenvolvendo a equação (2.26):

$$\begin{aligned} J' &= \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \lambda_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1}] \\ &= \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)] - \sum_{k=i}^{N-1} [\lambda_{k+1}^T \mathbf{x}_{k+1}] \\ &= \phi(N, \mathbf{x}_N) + H^i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + \sum_{k=i+1}^{N-1} H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \\ &\quad - (\lambda_{i+1}^T \mathbf{x}_{i+1} + \dots + \lambda_{N-1}^T \mathbf{x}_{N-1}) - \lambda_N^T \mathbf{x}_N \end{aligned} \quad (2.28)$$

Obtêm-se

$$J' = \phi(N, \mathbf{x}_N) - \lambda_N^T \mathbf{x}_N + H^i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + \sum_{k=i+1}^{N-1} [H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \lambda_k^T \mathbf{x}_k] \quad (2.29)$$

O diferencial do índice J' poder ser obtido:

$$\begin{aligned} dJ' &= (\phi_{\mathbf{x}_N} - \lambda_N)^T d\mathbf{x}_N + (H_{\mathbf{x}_i}^i)^T d\mathbf{x}_i + (H_{\mathbf{u}_i}^i)^T d\mathbf{u}_i \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^{N-1} [(H_{\mathbf{x}_k}^k - \lambda_k)^T d\mathbf{x}_k + (H_{\mathbf{u}_k}^k)^T d\mathbf{u}_k] \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^{N-1} [(H_{\lambda_k}^{k-1} - \mathbf{x}_k)^T d\lambda_k] \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde

$$H_{\mathbf{x}_k}^k \triangleq \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (2.31)$$

As condições necessárias para um mínimo com restrição são dadas por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}}, \quad k = i, \dots, N-1 \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad k = i, \dots, N-1 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{u}_k} = 0, \quad k = i, \dots, N-1 \quad (2.34)$$

as quais derivam dos termos dentro dos somatórios e do coeficiente de $d\mathbf{u}_i$, e também

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_N \right)^T d\mathbf{x}_N = 0 \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{\partial H^i}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T d\mathbf{x}_i = 0 \quad (2.36)$$

Nesse contexto, o multiplicador de Lagrange é também chamado de *co-estado* do sistema. A Tabela 1 resume as principais equações do problema de controle ótimo para o sistema não linear geral com base na abordagem dos multiplicadores de Lagrange:

A seguir, considere um exemplo de aplicação da solução geral apresentada na Tabela 1 em um sistema dinâmico escalar, o qual é apresentado por Lewis, Vrabie e Syrmos (2012, p. 25).

2.4.1.3 Exemplo 1

Considere o sistema dinâmico linear escalar dado por

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k \quad (2.37)$$

com condição inicial $\mathbf{x}_0$ e o índice de desempenho associado

$$J_0 = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \quad (2.38)$$

onde r é um fator de ponderação escalar.

Esse problema será tratado a seguir sob duas perspectivas: a primeira considerando o estado final x_N *fixo* e a segunda considerando o estado final *livre*.

- **Estado Final Fixo:**

Considerando que se deseja levar o sistema descrito por (2.37) em um instante $k = N$ para exatamente um estado particular (referência) r_N , pode-se escrever

$$x_N = r_N \quad (2.39)$$

Tabela 1 – Controlador Ótimo Não Linear Discreto

Modelo do sistema:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad k > i$$

Índice de desempenho:

$$J_i = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Hamiltoniano:

$$H^k = L^k + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T f^k$$

Controlador ótimo*Equação de estado:*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Equação de co-estado

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{x}_k} = \left(\frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} + \frac{\partial L^k}{\partial \mathbf{x}_k}$$

Condição de estacionariedade:

$$0 = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \left(\frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} + \frac{\partial L^k}{\partial \mathbf{x}_k}$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L^i}{\partial \mathbf{x}_i} + \left(\frac{\partial f^i}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_{i+1} \right)^T d\mathbf{x}_i &= 0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_N \right)^T d\mathbf{x}_N &= 0 \end{aligned}$$

Para encontrar a sequência de controle ótimo $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*$ que leva o sistema de dado estado x_0 ao estado desejado $x_N = r_N$, minimizando (2.38), será aplicada a Tabela 1.

O Hamiltoniano é dado por

$$H^k = L^k + \lambda_{k+1}^T f^k = \frac{r}{2} u_k^2 + \lambda_{k+1} (ax_k + bu_k) \quad (2.40)$$

e as condições são

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = ax_k + bu_k \quad (2.41)$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = a\lambda_{k+1} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial u_k} = ru_k + b\lambda_{k+1} = 0 \quad (2.43)$$

Resolvendo a condição de estacionariedade (2.43) para u_k em termos do co-estado têm-se

$$u_k = -\frac{b}{r}\lambda_{k+1} \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.41):

$$x_{k+1} = ax_k - \frac{b^2}{r}\lambda_{k+1} = ax_k - \gamma\lambda_{k+1} \quad (2.45)$$

onde

$$\gamma \triangleq \frac{b^2}{r} \quad (2.46)$$

A equação (2.42) é uma equação a diferenças homogênea, cuja solução geral é dada por

$$\lambda_k = a^{N-k}\lambda_N \quad (2.47)$$

Para encontrar λ_N será utilizado o procedimento a seguir. Primeiramente, a partir de (2.45) e (2.47) obtêm-se

$$x_{k+1} = ax_k - \gamma a^{N-k-1}\lambda_N \quad (2.48)$$

Resolvendo a equação (2.48):

$$\begin{aligned} x_k &= a^k x_0 - \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} (\gamma \lambda_N a^{N-i-1}) \\ &= a^k x_0 - \gamma \lambda_N a^{N+k-2} \sum_{i=0}^{k-1} a^{-2i} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Utilizando a fórmula do somatório da série geométrica:

$$\begin{aligned} x_k &= a^k x_0 - \gamma \lambda_N a^{N+k-2} \frac{(1 - a^{-2k})}{(1 - a^{-2})} \\ &= a^k x_0 - \gamma \lambda_N a^{N-k} \frac{(1 - a^{2k})}{(1 - a^2)} \end{aligned} \quad (2.50)$$

O estado final x_N pode então ser obtido a partir da equação (2.50):

$$x_N = a^N x_0 - \frac{\gamma (1 - a^{2N})}{(1 - a^2)} x_N = a^N x_0 - \lambda \lambda_N \quad (2.51)$$

onde

$$\lambda = \frac{\gamma (1 - a^{2N})}{(1 - a^2)} = \frac{b^2 (1 - a^{2N})}{r (1 - a^2)} \quad (2.52)$$

Utilizando as equações (2.39), (2.51) e (2.52), têm-se

$$\lambda_N = -\frac{1}{\lambda} (r_N - a^N x_0) \quad (2.53)$$

Combinado (2.47) e (2.53) determina-se o co-estado

$$\lambda_k = -\frac{1}{\lambda} (r_N - a^N x_0) a^{N-k} \quad (2.54)$$

Por conseguinte determina-se o controle ótimo utilizando (2.44)

$$u_k^* = \frac{b}{r\lambda} (r_N - a^N x_0) a^{N-k-1} \quad (2.55)$$

Esta é a solução procurada, e u_k^* leva o sistema de x_0 até $x_N = r_N$ enquanto minimiza (2.38). O controle u_k^* pode ainda ser reescrito como

$$u_k^* = \frac{(1 - a^2)}{b(1 - a^{2N})} (r_N - a^N x_0) a^{N-k-1} \quad (2.56)$$

Nesse formato, é possível observar que para o caso do estado final fixo, o controle ótimo não depende da ponderação sobre o controle r . Substitui-se (2.56) em (2.37) com o objetivo de determinar a trajetória de estado ótima:

$$x_{k+1}^* = ax_k^* + \frac{(1 - a^2)}{(1 - a^{2N})} (r_N - a^N x_0) a^{N-k-1} \quad (2.57)$$

Resolvendo a equação a diferenças dada em (2.57):

$$x_k^* = ax_0^* + \frac{(1 - a^2)}{(1 - a^{2N})} (r_N - a^N x_0) \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} a^{N-i-1} \quad (2.58)$$

Aplicando a fórmula de convergência da série geométrica:

$$x_k^* = ax_0^* + (r_N - a^N x_0) \frac{(1 - a^{2k})}{(1 - a^{2N})} a^{N-k} \quad (2.59)$$

O índice de desempenho ótimo, por sua vez, é encontrado substituindo (2.56) em (2.38):

$$J_0^* = \frac{r}{2} \frac{(1 - a^{2k})^2}{b^2 (1 - a^{2N})^2} (r_N - a^N x_0)^2 \sum_{k=0}^{N-1} a^{2(N-k-1)} \quad (2.60)$$

Desenvolvendo (2.60) e simplificando:

$$J_0^* = \frac{1}{2\lambda} (r_N - a^N x_0)^2 \quad (2.61)$$

• Estado Final Livre:

Agora, suponha que se deseja levar o sistema descrito por (2.37) a um estado r_N em um tempo N , sem que x_N seja exatamente igual a r_N , mas apenas próximo. Assim, uma abordagem possível é inserir a diferença $x_N - r_N$ no índice de desempenho dado em (2.38):

$$J_0 = \frac{1}{2} (x_N - r_N)^2 + \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \quad (2.62)$$

Nesse caso

$$\phi = \frac{1}{2} (x_N - r_N)^2 \quad (2.63)$$

O Hamiltoniano também é dado por (2.40), e as condições (2.41) a (2.43) são mantidas. O co-estado final deve ser dado por

$$\lambda_N = \frac{\partial \phi}{\partial x_N} = x_N - r_N \quad (2.64)$$

O estado final, por sua vez:

$$x_N = \frac{(\lambda r_N + a^N x_0)}{1 + \lambda} \quad (2.65)$$

Utilizando (2.64) e (2.65):

$$\lambda_N = \frac{-(r_N - a^N x_0)}{1 + \lambda} \quad (2.66)$$

Com auxílio da equação (2.47) obtêm-se o co-estado:

$$\lambda_k = \frac{-(r_N - a^N x_0)}{1 + \lambda} \quad (2.67)$$

O controle ótimo é obtido a partir de (2.44):

$$u_k^* = \frac{b}{r(1 + \lambda)} (r_N - a^N x_0) a^{N-k-1} \quad (2.68)$$

Substituindo (2.68) em (2.37):

$$x_{k+1}^* = a x_k^* + \frac{b^2}{r(1 + \lambda)} (r_N - a^N x_0) a^{N-k-1} \quad (2.69)$$

Resolvendo a equação a diferenças em (2.69), têm-se a trajetória de estado ótima:

$$x_k^* = \frac{\left[\frac{(1-a^2)}{\gamma} + (1 - a^{2(N-k)}) \right] a^k x_0 + (1 - a^{2k}) a^{N-k} r^N}{\frac{(1-a^2)}{\gamma} + (1 - a^{2N})} \quad (2.70)$$

O estado final ótimo é dado por:

$$x_N^* = \frac{\left[\frac{(1-a^2)}{\gamma} \right] a^N x_0 + (1 - a^{2N}) r^N}{\frac{(1-a^2)}{\gamma} + (1 - a^{2N})} \quad (2.71)$$

Utilizando (2.69) e (2.38) obtêm-se o custo ótimo

$$J_0^* = \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)^2} (r_N - a^N x_0)^2 \quad (2.72)$$

Simulação computacional

A seguir é apresentado o código fonte de uma função em MATLAB para determinar o estado e o controle ótimo do sistema dinâmico escalar dado pela equação (2.37) sujeito ao índice de desempenho dado por (2.38), considerando o caso do estado final fixo.

```

1 % Função scoptcon_fixed
2 function [x,u] = scoptcon_fixed(a,b,r,N,x0,rN)
3 % Simulação de controle ótimo com estado final fixo
4 % de sistema escalar
5
6 x(1) = x0; % condição inicial
7 alam = (1-a^(2*N))/(1-a^2); alam = (alam*(b^2))/r;
8 u(1) = (b*(rN-x(1)*a^N)*a^N)/(r*alam);
9 u(1) = u(1)/a;
10
11 % Vetores de estado e de controle
12 for k = 1:N
13     x(k+1) = a*x(k)+b*u(k);
14     u(k+1) = u(k)/a;
15 end

```

Para o caso da simulação de controle ótimo com estado final livre, para o mesmo sistema, considere a função abaixo:

```

1 % Função scoptcon_freeb
2 function [x,u,txtr] = scoptcon_freeb(a,b,r,rN,x0,N)
3 % Simulação de controle ótimo com estado final livre
4 % de sistema escalar
5
6 % O argumento de entrada $r$ pode ser um vetor linha ou coluna
7
8 [nl, nc] = size(r);
9
10 % Legenda automática
11 if nl>nc
12     r = r';
13     txtr = [repmat(['r = '],nl,1) num2str(r(:))];
14 else
15     txtr = [repmat(['r = '],nc,1) num2str(r(:))];
16 end
17
18 X(:,1) = {x0*ones(length(r),1)};
19 alam(:,1) = {(1-a^(2*N))/(1-a^2)};
20 alam(:,1) = {[cell2mat(alam(:,1))*(b^2))./r]'};
21 U(:,1) = {[b*(rN-cell2mat(X(:,1))*a^N)*a^N)./ ...

```

```

22      ((r').*(cell2mat(alam(:,1))+1)))]];
23  U(:,1) = {[cell2mat(U(:,1))/a]};
24
25  % Vetores de estado e de controle
26  for k = 1:N
27      X(:,k+1) = {[a*cell2mat(X(:,k))+b*cell2mat(U(:,k))]};
28      U(:,k+1) = {[cell2mat(U(:,k))/a]};
29  end
30
31  x = cell2mat(X);
32  u = cell2mat(U);

```

Na Figura 2.1 são mostrados alguns resultados de simulação computacional das trajetórias ótimas de estado e controle considerando os seguintes parâmetros: $a = 0.99$, $b = 0.1$, $N = 100$ para diversos valores de r .

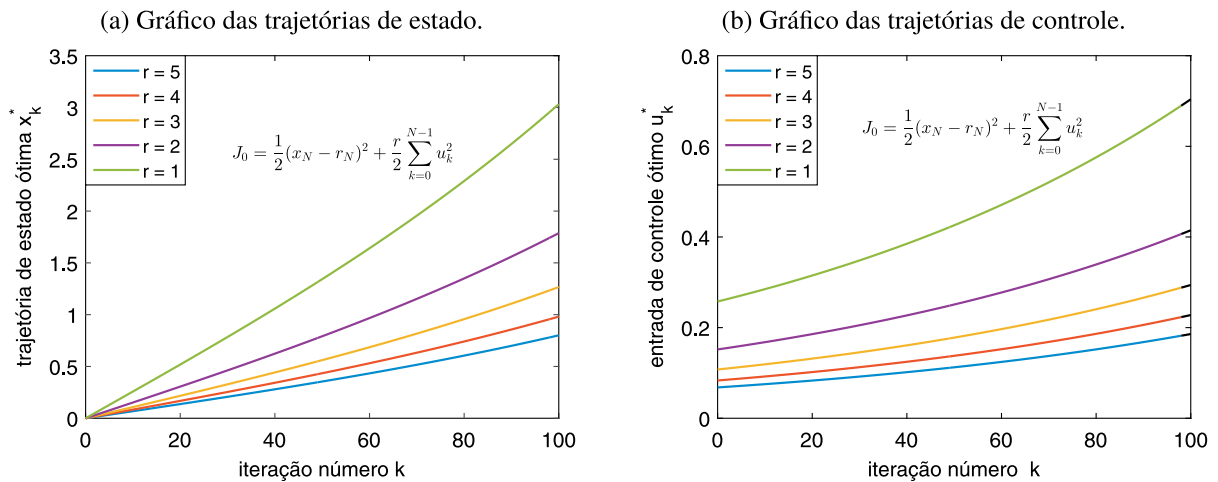


Figura 2.1 – Trajetórias de estado e de controle para o problema do estado final livre considerando diversos valores de r .

Observe, pela Figura 2.1(b) que à medida que a ponderação r aumenta, a energia associada ao controle diminui e vice-versa. O efeito sobre a energia do estado é direto: ela aumenta com o aumento de r .

O script utilizado para gerar os gráficos da Figuras 2.1 é mostrado abaixo:

```

1 % Script compsimu.m
2 clear all
3 close all
4 clc

```

```

5
6 % Sintaxe
7 % [x,u,txtr] = sptcon_freeb(a,b,r,rN,x0,N)
8 [x,u,txtr] = sptcon_freeb(.99,.1,[5 4 3 2 1],10,0,100);
9
10 % Vetor de tempo
11 k = 0:1:(length(x)-1);
12
13 % Gráficos
14 figure(1)
15 plot(k,x,'LineWidth',1.5)
16 xlabel('iteração número k','FontSize',12)
17 ylabel('trajetória de estado ótima x_k^*','FontSize',12)
18 legend(txtr)
19 posfig1 = get(gcf,'Position');
20 gtext(['$$J_0=\frac{1}{2}(x_N-r_N)^2+\dots',...
21       '\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-1}u_k^2$$'],...
22       'Interpreter','latex','FontSize',12)
23
24 figure(2)
25 set(gcf,'Position',[(posfig1(1)+posfig1(3)) ...
26   posfig1(2) posfig1(3) posfig1(4)]);
27 plot(k,u,'LineWidth',1.5)
28 xlabel('iteração número k','FontSize',12)
29 ylabel('entrada de controle ótimo u_k^*','FontSize',12)
30 legend(txtr)
31 gtext(['$$J_0=\frac{1}{2}(x_N-r_N)^2+\dots',...
32       '\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-1}u_k^2$$'],...
33       'Interpreter','latex','FontSize',12)

```

2.5 Regulador Linear Quadrático no Tempo Discreto

A solução apresentada na seção 2.4 e resumida na Tabela 1 lida com índices muito gerais. É bastante difícil, entretanto, a dedução de expressões explícitas de controle ótimo. Um caso especial e bastante importante é o que trata com sistemas lineares com índices de desempenho quadrático. Tais índices podem ser considerados como superfícies quadráticas $(n+m)$ -dimensionais, onde n e m são as dimensões do vetor de estado e do vetor de controle, respectivamente (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012, p. 32).

Assim, considere a planta a ser controlada descrita pela equação linear

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.73)$$

com $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$. O índice de desempenho associado é a função quadrática dada por

$$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=i}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k) \quad (2.74)$$

definida no intervalo de interesse $[i, N]$, onde $\mathbf{S}_N \geq 0$, $\mathbf{Q}_k \geq 0$ e $\mathbf{R}_k > 0$ são matrizes simétricas. Para resolver este *problema do regulador linear quadrático* (LQ), primeiramente se determina a função Hamiltoniana

$$H^k = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k) \quad (2.75)$$

A Tabela 1 fornece as equações de estado e co-estado:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.76)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.77)$$

e a condição de estacionariedade

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} = 0 \quad (2.78)$$

Da equação (2.78) têm-se

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.79)$$

Mas a sequência de controle ótimo só é determinada se antes for determinada a sequência do co-estado. Substituindo a equação (2.79) na equação (2.76)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.80)$$

As equações de estado e co-estado podem ser escritas na forma de um único sistema como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Se a matriz $\mathbf{A}$ possuir inversa, então a equação (2.80) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.82)$$

Utilizando as equações (2.77), (2.81) e (2.82) pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

A seguir, o problema do regulador linear quadrático será apresentado sob as perspectivas de estado final fixo e estado final livre.

2.5.1 Estado Final Fixo e Controle em Malha Aberta

Considerando novamente o problema de estado final fixo, faz-se $\mathbf{x}_N = \mathbf{r}_N$. Considere ainda o índice de desempenho dado por:

$$J_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (2.84)$$

As equações de estado e co-estado são

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.85)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.86)$$

Resolvendo a equação (2.86) obtêm-se

$$\boldsymbol{\lambda}_k = (\mathbf{A}^T)^{N-k} \boldsymbol{\lambda}_N \quad (2.87)$$

Combinando (2.85) e (2.87):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-k-1} \boldsymbol{\lambda}_N \quad (2.88)$$

Resolvendo a equação a diferenças (2.88):

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-i-1} \boldsymbol{\lambda}_N \quad (2.89)$$

Fazendo $k = N$ na equação (2.89):

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-i-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-i-1} \boldsymbol{\lambda}_N \quad (2.90)$$

Desta última equação pode ser obtido o co-estado final:

$$\boldsymbol{\lambda}_N = -\mathbf{G}_{0,N}^{-1} (\mathbf{r}_N - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \quad (2.91)$$

onde

$$\mathbf{G}_{0,N} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-i-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-i-1} \quad (2.92)$$

Utilizando (2.87), o co-estado é

$$\boldsymbol{\lambda}_k = -(\mathbf{A}^T)^{N-k} \mathbf{G}_{0,N}^{-1} (\mathbf{r}_N - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \quad (2.93)$$

A partir de (2.79) determina-se a sequência de controle ótimo

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-k-1} \mathbf{G}_{0,N}^{-1} (\mathbf{r}_N - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \quad (2.94)$$

Esta é a solução da energia de controle mínima para o problemas do regulador LQ de estado final fixo. Portanto, está obtida a solução do problema. Pode-se demonstrar que o controle obtido em (2.94) realmente leva o estado de $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_N = \mathbf{r}_N$. Da solução de (2.73) determina-se o estado:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_i \quad (2.95)$$

Fazendo $k = N$ e utilizando o controle ótimo $\mathbf{u}_i^*$ obtido, têm-se

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-i-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{N-i-1} \mathbf{G}_{0,N}^{-1} (\mathbf{r}_N - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \quad (2.96)$$

Desenvolvendo:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + \mathbf{G}_{0,N} \mathbf{G}_{0,N}^{-1} (\mathbf{r}_N - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) = \mathbf{r}_N \quad (2.97)$$

Ora, $\mathbf{x}_N = \mathbf{r}_N$ era de fato desejado.

A matriz $\mathbf{G}_{0,N}$ recebe o nome de matriz de controlabilidade de Gram. Ela pode ser escrita como

$$\mathbf{G}_{0,N} = \mathbf{U}_N \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{U}_N^T \quad (2.98)$$

onde $\mathbf{U}_k = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$.

2.5.2 Estado Final Livre e Controle em Malha Fechada

Retomando as equações de estado e co-estado, tem-se:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.99)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.100)$$

O controle é dado por

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (2.101)$$

A condição inicial é dada como $\mathbf{x}_i$ e o estado final $\mathbf{x}_N$ é livre. Logo, $\mathbf{x}_N$ pode ser variado na determinação do mínimo restrito. Consequentemente, $d\mathbf{x}_N \neq 0$. Daí, analisando a condição dada na equação (2.35), tem-se:

$$\boldsymbol{\lambda}_N = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} \quad (2.102)$$

A função de ponderação do estado final é $\phi = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N$. Assim, de (2.102):

$$\boldsymbol{\lambda}_N = \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N \quad (2.103)$$

A relação dada na equação (2.103) entre o co-estado final e o estado final é a nova condição final para o problema de estado final livre. Considerando que essa relação se mantém para todos os instantes $k \leq N$, escreve-se:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k \quad (2.104)$$

Substituindo λ_k de (2.104) (com o acréscimo do índice) na equação de estado (2.99)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.105)$$

Resolvendo (2.105) para $\mathbf{x}_{k+1}$, tem-se

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \quad (2.106)$$

Agora, substituindo λ_k de (2.104) na equação de co-estado (2.100):

$$\mathbf{S}_k \mathbf{x}_k = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \quad (2.107)$$

Por conseguinte, substituindo $\mathbf{x}_{k+1}$ da equação (2.106) na equação (2.107), resulta:

$$\mathbf{S}_k \mathbf{x}_k = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \quad (2.108)$$

De (2.108):

$$\mathbf{S}_k = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \mathbf{Q}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_k \quad (2.109)$$

Aplicando o lema da matriz inversa, obtém-se:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k^T \left[\mathbf{S}_{k+1} - \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \right] \mathbf{A}_k + \mathbf{Q}_k \quad (2.110)$$

A equação quadrática matricial (2.110) é a chamada *equação de Riccati*, a qual se desenvolve para trás no tempo. Sua solução de forma iterativa permite a determinação da matriz de ganho de realimentação de estado a cada iteração:

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}_k \quad (2.111)$$

Por conseguinte, obtém-se o controle ótimo:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k \quad (2.112)$$

A Tabela 2 reúne as etapas do projeto do Regulador Linear Quadrático Discreto para o caso do estado final livre:

A equação (2.110) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \left[\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}_k \right] + \mathbf{Q}_k \quad (2.113)$$

Combinando as equações (2.111) e (2.113) é possível reescrever $\mathbf{S}_k$ como:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) + \mathbf{Q}_k \quad (2.114)$$

Considere agora algumas operações na equação (2.111). Pré-multiplicando ambos os membros por $(\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)$, têm-se:

$$(\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k = \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}_k \quad (2.115)$$

Tabela 2 – Regulador Linear Quadrático Discreto (estado final livre)

Modelo do sistema:	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad k > i$
Índice de desempenho:	$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=i}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k)$
Requisitos:	$\mathbf{S}_N \geq 0, \quad \mathbf{Q}_k \geq 0, \quad \mathbf{R}_k > 0, \quad \text{e todas três são simétricas}$
Controle com realimentação ótimo:	$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k^T \left[\mathbf{S}_{k+1} - \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \right] \mathbf{A}_k + \mathbf{Q}_k, \quad k < N, \quad \mathbf{S}_N \text{ dado}$ $\mathbf{K}_k = (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}_k, \quad k < N$ $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k$ $J_i^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i$

Daí:

$$\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{B}_k \mathbf{K}_k - \mathbf{A}_k) + \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k = 0 \quad (2.116)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação (2.116) por $\mathbf{K}_k^T$:

$$-\mathbf{K}_k^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k = 0 \quad (2.117)$$

Adicionando o primeiro membro da equação (2.117) ao segundo membro da equação (2.114):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) - \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k + \mathbf{Q}_k \\ &= (\mathbf{A}_k^T \mathbf{S}_{k+1} - \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1}) (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k + \mathbf{Q}_k \\ &= (\mathbf{A}_k^T - \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}_k^T) \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (2.118)$$

A partir de (2.118) se obtêm a chamada *versão estabilizada de Joseph* da equação de Riccati:

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k)^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k + \mathbf{Q}_k \quad (2.119)$$

Em termos de implementação computacional, a equação (2.119) tem melhores propriedades numéricas. Observe ainda a seguinte relação:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k) - \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.120)$$

Considere a equação que define o custo:

$$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=i}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k) \quad (2.121)$$

Adicionando o primeiro membro da equação (2.120) ao segundo membro da equação (2.121):

$$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i + \sum_{k=i}^{N-1} (\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q}_k - \mathbf{S}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k) \quad (2.122)$$

A seguir o código fonte de uma função em MATLAB para implementar o algoritmo da Tabela 2:

```

1 % Algoritmo do Regulador Linear Quadrático
2 function [x,u,K,S,k,p] = scaoptmdemo(A,B,Q,R,Sf,xo,N,tip)
3 % A: matriz de estado
4 % B: matriz de entrada
5 % Q, R: matrizes de ponderação
6 % S: solução da equação de Riccati
7 % xo: estado inicial
8 % N: instante final
9 % tipo: 's' para controle subótimo
10
11
12 % valida o número de argumentos de entrada (no mínimo 5 e no máximo 7):
13 error(nargchk(5, 8, nargin,'struct'))
14
15 [n,m]=size(A);
16
17 if (n~=m)
18     error('A matriz de estados deve ser quadrada.')
19 end
20
21 if (nargin==7 || nargin==8)
22     [nlxo,ncxo] = size(xo);
23 elseif (nargin==6)
24     [nlxo,ncxo] = size(xo);
25     N = 100;
26 else
27     xo = zeros(m,1);
28     [nlxo,ncxo] = size(xo);
29     N = 100;
30 end
31 Sk(:,:,N+1) = Sf;
32 Kk(:,:,N) = zeros(1,m);
33

```

```

34 % Solução da equação de Riccati e cálculos dos ganhos Kk
35 for cont = N:-1:1
36     Kk(:,:,cont) = (((B')*(Sk(:,:,cont+1))*(B)+R))\...
37         ((B')*(Sk(:,:,cont+1))*(A));
38     Sk(:,:,cont) = (A')*(Sk(:,:,cont+1)-(Sk(:,:,cont+1))*...
39 (B)*(inv((B')*(Sk(:,:,cont+1))*(B)+R))*(B')*(Sk(:,:,cont+1)))*(A)+Q;
40 end
41 clear cont
42
43
44 if (nlxo~=m)
45     X(:,:,1) = [xo;zeros(m-nlxo,1)];
46 else
47     X(:,:,1) = [xo];
48 end
49
50 U(:,:,N) = 0;
51 X(:,:,N) = zeros(m,1);
52
53
54 % Simulação do sistema
55 if (nargin==8)
56     if (tipo=='s')
57         for cont=1:(N)
58             U(:,:,cont)=(-Kk(:,:,1))*(X(:,:,cont));
59             if (cont < N+1)
60                 X(:,:,cont+1) = (A)*(X(:,:,cont))+(B)*(U(:,:,cont));
61             end
62             p(:,:,cont) = eig(A-B*Kk(:,:,1));
63         end
64         x = X;
65         u = U;
66         K = (Kk(:,:,1))*ones(size(Kk));
67         S = Sk;
68         k = 0:(size(x,3)-1);
69     else
70         error('Caracter inválido! Digite s para controle subótimo.')
71     end
72 elseif (nargin<8)
73     for cont=1:(N)
74         U(:,:,cont)=(-Kk(:,:,cont))*(X(:,:,cont));
75         if (cont < N+1)

```

```

76         X(:,:,cont+1) = (A)*(X(:,:,cont))+(B)*(U(:,:,cont));
77     end
78         p(:,:,cont) = eig(A-B*Kk(:,:,cont));
79     end
80     x = X;
81     u = U;
82     K = Kk;
83     S = Sk;
84     k = 0:(size(x,3)-1);
85 end

```

2.5.2.1 Simulação Computacional

Considere a planta dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (2.123)$$

onde $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} d_k & v_k \end{bmatrix}^T$, com d_k e v_k sendo as k -ésimas amostras de posição e velocidade. O período de amostragem é $T = 0.5$ segundos. Assim

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (2.124)$$

Para simulação foi utilizado uma ponderação sobre o estado final de $\mathbf{S}_N = 0.1\mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. A ponderação sobre o controle foi $\mathbf{R} = 1$ e a ponderação sobre o estado intermediário $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. As condições iniciais do sistema são $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 & 10 \end{bmatrix}^T$. O *script* a seguir foi utilizado para obtenção das curvas de resposta para os dados em questão:

```

1 % Script compsimu2.m
2 clear all
3 close all
4 clc
5
6 % Simulação de sistema de segunda ordem
7 % [x,u,K,S,k,p] = scaoptmdemo(A,B,Q,R,Sf,xo,N);
8 A = [1.0 0.5; 0 1.0]; B = [0.125;0.5];
9 Sf = [.1 0;0 .1]; N = 50; xo = [10;10];
10 R = 1.0;
11 C = diag([1.0 0]);
12 D = [0;0];

```

```

13 Q = diag([1.0 1.0]);
14
15 [x,u,K,S,k,p] = scaoptmdemo(A,B,Q,R,Sf,xo,N);
16
17 % Gráficos
18 figure(1)
19 subplot(2,1,1)
20 plot(k,x(1,:),'-k','LineWidth',2.0)
21 set(gca,'FontSize',14)
22 hold on
23 plot(k,x(2,:),'-b','LineWidth',2.0)
24 xlabel('iteração número k','FontSize',14)
25 ylabel('estado x(k)','FontSize',14)
26 set(gca,'FontSize',14)
27 legend('x_1(k)', 'x_2(k)')
28 grid
29 subplot(2,1,2)
30 plot(k(1:end-1),u(:,:),'-k','LineWidth',2.0)
31 set(gca,'FontSize',14)
32 xlabel('iteração número k','FontSize',14)
33 ylabel('controle u(k)','FontSize',14)
34 grid
35
36 figure(2)
37 plot(p(:,:),'xk','LineWidth',2.0)
38 set(gca,'FontSize',14)
39 xlabel('Eixo real','FontSize',14)
40 ylabel('Eixo imaginário','FontSize',14)
41 zgrid

```

A Figura 2.2 mostra as trajetórias de estado e de controle para os valores de ponderação das matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ dados no enunciado.

Como o a matriz de ganho de realimentação de estado $\mathbf{K}_k$ muda a cada iteração, os pólos de malha fechada também o fazem, como se pode observar na Figura 2.2b. O gráfico do custo ótimo é mostrado na Figura 2.2a.

Para os dados utilizados, o valor de regime da solução da equação de Riccati foi igual a

$$\mathbf{S}_\infty = \begin{bmatrix} 4.0350 & 2.0616 \\ 2.0616 & 4.1438 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

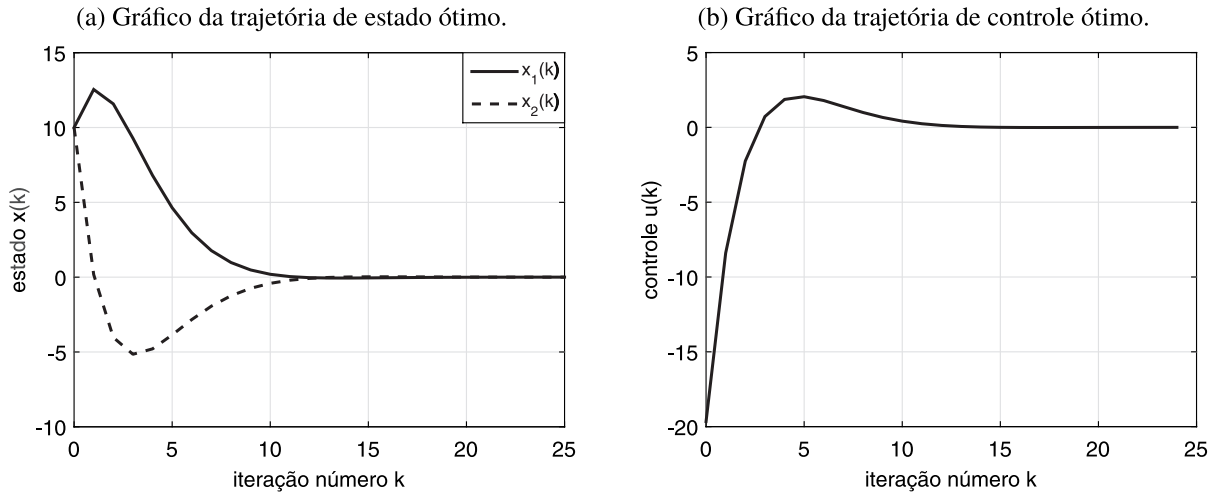


Figura 2.2 – Trajetórias de estado e de controle ótimo para o sistema dado em (2.124).

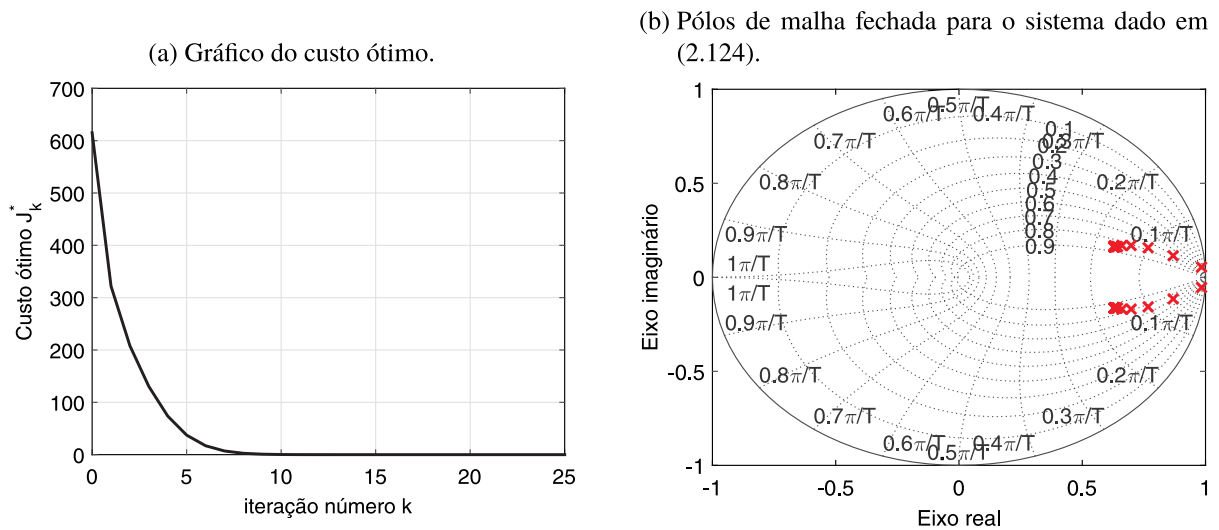


Figura 2.3 – Gráfico de custo e pólos de malha fechada.

O correspondente ganho de regime permanente foi

$$\mathbf{K}_\infty = \begin{bmatrix} 0.6514 & 1.3142 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

Claramente, se o interesse é diminuir a energia associada ao estado intermediário, faz-se a matriz de ponderação $\mathbf{Q}$ grande. As Figuras a seguir mostram o efeito a simulação para os seguintes valores de $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q}_1 = 0.5\mathbf{I}$, $\mathbf{Q}_2 = 1.0\mathbf{I}$, $\mathbf{Q}_3 = 10.0\mathbf{I}$ e $\mathbf{Q}_4 = 30.0\mathbf{I}$. $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}_N$ foram mantidos fixos.

Na Figura 2.4, observa-se que o aumento da ponderação $\mathbf{Q}$ tem um efeito de diminuição da energia associada ao estado intermediário $\mathbf{x}(k)$:

Observa-se na Figura 2.4a que o aumento da matriz de ponderação $\mathbf{Q}$ provoca também o aumento da energia associada ao controle intermediário $\mathbf{u}(k)$. A Figura 2.4b ilustra o efeito da matriz $\mathbf{Q}$ sobre o custo ótimo.

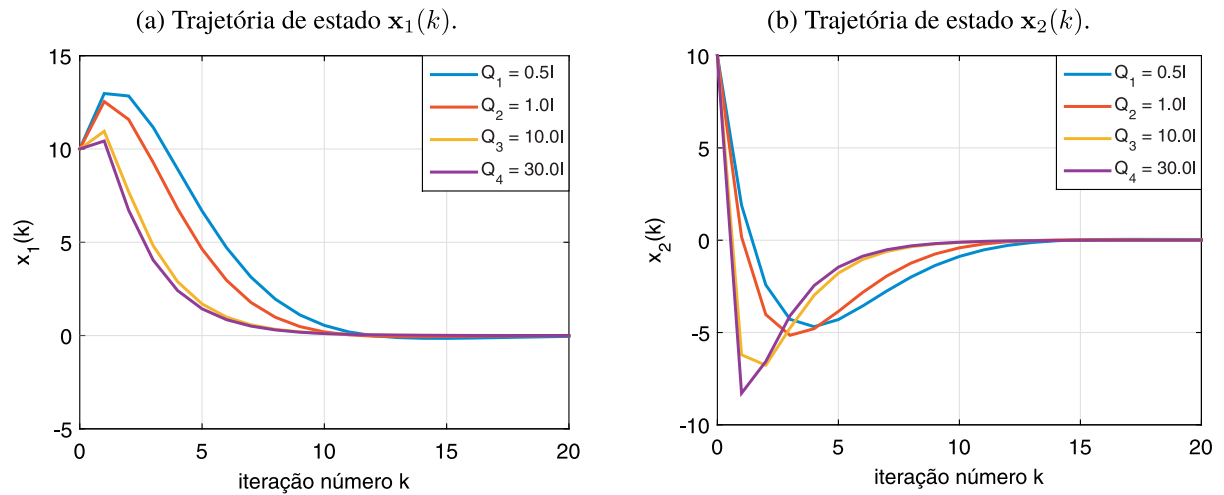


Figura 2.4 – Trajetórias de estado considerando diversos valores de Q para o sistema dado em (2.124).

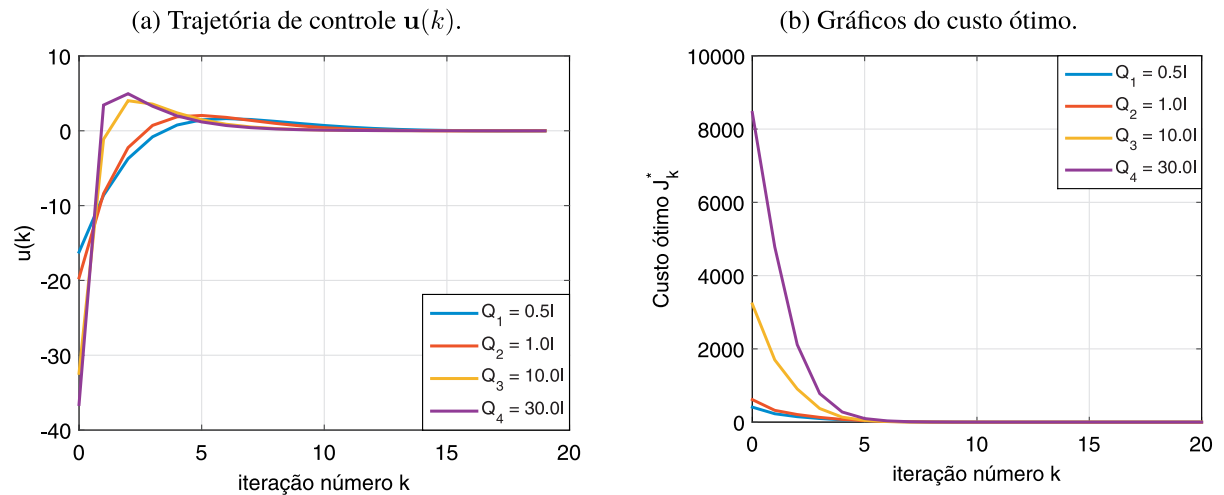


Figura 2.5 – Trajetórias de controle e gráficos do custo ótimo considerando diversos valores de Q para o sistema dado em (2.124).

O *script* utilizado para gerar os gráficos das Figuras 2.4 e 2.4a é dado a seguir:

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 A = [1.0 0.5; 0 1.0]; B = [0.125;0.5];
6 Sf = [.1 0;0 .1]; N = 20; xo = [10;10];
7 R = 1.0;
8 C = diag([1.0 0]);
9 D = [0;0];
10

```

```

11 Q(:, :, 1) = .5*diag([1.0 1.0]);
12 Q(:, :, 2) = 1.0*diag([1.0 1.0]);
13 Q(:, :, 3) = 10.0*diag([1.0 1.0]);
14 Q(:, :, 4) = 30.0*diag([1.0 1.0]);
15
16
17 [xQ1,uQ1,KQ1,SQ1,k,pQ1] = scaoptmdemo(A,B,Q(:, :, 1),R,Sf,xo,N);
18 [xQ2,uQ2,KQ2,SQ2,k,pQ2] = scaoptmdemo(A,B,Q(:, :, 2),R,Sf,xo,N);
19 [xQ3,uQ3,KQ3,SQ3,k,pQ3] = scaoptmdemo(A,B,Q(:, :, 3),R,Sf,xo,N);
20 [xQ4,uQ4,KQ4,SQ4,k,pQ4] = scaoptmdemo(A,B,Q(:, :, 4),R,Sf,xo,N);
21
22 figure(1)
23 plot(k,xQ1(1,:),k,xQ2(1,:),k,xQ3(1,:),k,xQ4(1,:), 'LineWidth',2.0)
24 xlabel('iteração número k','FontSize',14)
25 ylabel('x_1(k)','FontSize',14)
26 set(gca,'FontSize',14)
27 grid
28 legend('Q_1 = 0.5I','Q_2 = 1.0I','Q_3 = 10.0I','Q_4 = 30.0I')
29
30 figure(2)
31 plot(k,xQ1(2,:),k,xQ2(2,:),k,xQ3(2,:),k,xQ4(2,:), 'LineWidth',2.0)
32 xlabel('iteração número k','FontSize',14)
33 ylabel('x_2(k)','FontSize',14)
34 set(gca,'FontSize',14)
35 grid
36 legend('Q_1 = 0.5I','Q_2 = 1.0I','Q_3 = 10.0I','Q_4 = 30.0I')
37
38 figure(3)
39 plot(k(1:end-1),uQ1(:, :),k(1:end-1),uQ2(:, :),k(1:end-1),uQ3(:, :),...
40      k(1:end-1),uQ4(:, :), 'LineWidth',2.0)
41 xlabel('iteração número k','FontSize',14)
42 ylabel('u(k)','FontSize',14)
43 set(gca,'FontSize',14)
44 grid
45 legend('Q_1 = 0.5I','Q_2 = 1.0I','Q_3 = 10.0I','Q_4 = 30.0I')

```

2.5.3 Regime Permanente do Controle em Malha Fechada e Realimentação Sub-ótima

Considere que a solução para o problema de controle ótimo LQ é a realimentação de estado da forma

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k \quad (2.127)$$

onde a sequência de ganho $\mathbf{K}_k$ é dada em função da sequência de solução $\mathbf{S}_k$ da equação de Riccati como

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k^T \left[\mathbf{S}_{k+1} - \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \right] \mathbf{A}_k + \mathbf{Q}_k \quad (2.128)$$

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{B}_k^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}_k \quad (2.129)$$

Para o caso invariante no tempo (com respeito à planta), o sistema em malha fechada é dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_k) \mathbf{x}_k \quad (2.130)$$

A equação (2.130) é variante no tempo, uma vez que $\mathbf{K}_k$ também é variante no tempo. Em geral, esta realimentação variante no tempo não é conveniente para ser implementada; ela requer o armazenamento de uma sequência completa de matrizes $m \times n$. Em face disto, surge o interesse em utilizar um ganho de realimentação de estado sub-ótimo que não minimiza exatamente o índice de desempenho, mas é um ganho constante tal que

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k \quad (2.131)$$

A realimentação mostrada na equação (2.131) é de fácil implementação. Um candidato a ganho de realimentação constante que pode ser considerado é o limite do ganho $\mathbf{K}_k$ quando o tempo final N tende a infinito (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012, p. 65).

2.5.3.1 Ganhos de Realimentação Sub-ótimos

Considere a planta invariante no tempo cuja representação em espaço de estados é dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.132)$$

Com o índice de desempenho associado

$$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \quad (2.133)$$

Tal índice pode ser reescrito como

$$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} [\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} - \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{R} \mathbf{K}_k) \mathbf{x}_k] \quad (2.134)$$

Levando em conta as equações que definem o espaço de estado do sistema (2.132) e o controle (2.131), têm-se

$$J_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} \mathbf{x}_k^T \left[(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_k)^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_k) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R} \mathbf{K}_k - \mathbf{S}_k \right] \mathbf{x}_k \quad (2.135)$$

E o custo resultante em $[k, N]$ é dado por

$$J_k = \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k \quad (2.136)$$

onde o núcleo é a solução de

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_k)^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R} \mathbf{K}_k + \mathbf{Q} \quad (2.137)$$

com condição de contorno $\mathbf{S}_N$. Uma escolha particular de $\mathbf{K}_k$ pode ser uma matriz de ganho de realimentação constante. Se $\mathbf{K}_k$ não é o ganho ótimo, então J_k em (2.136) é, em geral, maior que o custo ótimo J_k^* .

2.5.3.2 Exemplo 2: controle com realimentação sub-ótimo de um sistema escalar

Considere a planta dada por

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k \quad (2.138)$$

com índice de desempenho

$$J_0 = \frac{1}{2} s_N x_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (qx_k^2 + ru_k) \quad (2.139)$$

O controle ótimo é a realimentação de estado variante no tempo dada por

$$u_k = -K_k x_k \quad (2.140)$$

Com ganho determinado pela equação de Riccati como

$$s_k = \frac{a^2 r s_{k+1}}{b^2 s_{k+1} + r} + q \quad (2.141)$$

$$K_k = \frac{ab s_{k+1}}{b^2 s_{k+1} + r} \quad (2.142)$$

Para os parâmetros $a = 1.05$, $b = 0.01$, $q = r = s_N = 5$, com tempo final $N = 100$. O valor de regime do ganho de Kalman é $K_\infty = 9.808$. O custo ótimo é

$$J_k^* = \frac{1}{2} s_k^* x_k^* \quad (2.143)$$

Para uma realimentação de estado constante (sub-ótima), têm-se

$$u_k = -K_\infty x_k = -9.808 x_k \quad (2.144)$$

com custo

$$J_k = \frac{1}{2} s_k x_k^2 \quad (2.145)$$

onde s_k é a solução para a equação de Lyapunov (2.137), resultando em:

$$s_k = s_{k+1}(a - bK_\infty)^2 + rK_\infty^2 + q \quad (2.146)$$

com condição de contorno s_N .

Comparando os custos, tem-se:

$$J_k^* = \frac{1}{2}s_k^*x_k^* \leq \frac{1}{2}s_kx_k^2 = J_k \quad (2.147)$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$x_{k+1} = (a - bK_\infty)x_k = 0.952x_k \quad (2.148)$$

E a trajetória sub-ótima, por sua vez, é dada por

$$x_k = (0.952)^k x_0 = 10(0.952)^k \quad (2.149)$$

2.6 Solução do Problema de Otimização Contínua Geral

Suponha uma planta descrita por uma equação dinâmica no tempo contínuo não-linear geral dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.150)$$

com estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ e a entrada de controle $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$. Considere que este sistema está associado ao índice de desempenho:

$$J(t_0) = \phi(\mathbf{x}(T), T) + \int_{t_0}^T L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.151)$$

onde $[t_0, T]$ é o intervalo de tempo de interesse. A função de ponderação final $\phi(\mathbf{x}(T), T)$ depende do estado final e do tempo final, e a função de ponderação $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ depende do estado e da entrada em instantes intermediários em $[t_0, T]$. O índice de desempenho é selecionado de maneira que a planta apresente o desempenho desejado.

O problema de controle ótimo consiste em determinar o controle $\mathbf{u}^*(t)$ no intervalo $[t_0, T]$ que leva a planta (2.150) ao longo da trajetória $\mathbf{x}^*(t)$ tal que a função de custo (2.151) é minimizada, e tal que a função

$$\psi(\mathbf{x}(T), T) = 0 \quad (2.152)$$

para uma dada função $\psi \in \mathbb{R}^p$. Esta função é chamada de função de estado final fixo. A equação (2.152) juntamente com a equação (2.150) são restrições adjuntas ao índice de desempenho dado em (2.151). Este problema de controle ótimo pode ser resolvido com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Uma vez que (2.150) se mantém em cada instante $t \in [t_0, T]$, é necessário um multiplicador associado $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$, que é uma função do tempo. Como a equação (2.152) se

mantém somente em um instante, é necessário somente um multiplicador constante associado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$. O índice de desempenho aumentado é, portanto,

$$J' = \phi(\mathbf{x}(T), T) + \mathbf{v}^T \psi(\mathbf{x}(T), T) + \int_{t_0}^T [L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}})] dt \quad (2.153)$$

Definindo a função Hamiltoniana como

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.154)$$

então (2.153) pode ser reescrita como

$$J' = \phi(\mathbf{x}(T), T) + \mathbf{v}^T \psi(\mathbf{x}(T), T) + \int_{t_0}^T [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}] dt \quad (2.155)$$

Utilizando a regra de Leibniz, pode-se escrever o incremento em J' como uma função do incremento em $\mathbf{x}$, λ , u e t :

$$\begin{aligned} dJ' = & (\phi_x + \psi_x^T \mathbf{v})^T dx|_T + (\phi_t + \psi_t^T \mathbf{v})^T dt|_T + \psi^T|_T dv + (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt|_T + \\ & - (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt|_{t_0} + \int_{t_0}^T [H_x^T \delta x + H_u^T \delta u - \boldsymbol{\lambda}^T \delta \dot{\mathbf{x}} + (H_\lambda - \dot{\mathbf{x}})^T \delta \lambda] dt \end{aligned} \quad (2.156)$$

Para eliminar a variação em $\dot{\mathbf{x}}$, integra-se por partes para ver que

$$- \int_{t_0}^T \boldsymbol{\lambda}^T \delta \dot{\mathbf{x}} dt = -\boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x}|_T + \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x}|_{t_0} + \int_{t_0}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \delta \mathbf{x} dt \quad (2.157)$$

A substituição de (2.26) em (2.14) resulta em termos em $t = T$ dependentes tanto em $dx(t)$ quanto em $\delta x(T)$. Pode-se expressar $\delta x(T)$ em termos de $dx(t)$ e dT utilizando uma medida variacional. Após essas substituições, têm-se

$$\begin{aligned} dJ' = & (\phi_x + \psi_x^T \mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda})^T dx|_T + (\phi_t + \psi_t^T \mathbf{v} + H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt|_T + \psi^T|_T dv + \\ & + (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt|_T - (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt|_{t_0} + \boldsymbol{\lambda}^T dx|_{t_0} + \\ & + \int_{t_0}^T \left[(H_x + \dot{\boldsymbol{\lambda}})^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{\mathbf{x}})^T \delta \lambda \right] dt \end{aligned} \quad (2.158)$$

Conforme a teoria Lagrangeana, o mínimo com restrição de J é alcançado em um mínimo sem restrição de J' . Este é alcançado quando $dJ' = 0$ para todos os incrementos independentes em seus argumentos. A Tabela 3 condensa as principais etapas do problema de controle ótimo contínuo.

Para ilustrar o carácter genérico da Tabela 3, o exemplo a seguir apresenta a solução do problema de otimização para um caso em que o sistema não é um sistema dinâmico.

2.6.1 Exemplo 3: menor distância entre dois pontos

O comprimento de uma curva $x(t)$ dependente de um parâmetro t entre $t = a$ e $t = b$ é dada por

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \quad (2.159)$$

Tabela 3 – Controlador Ótimo Não Linear Contínuo com função de estado final fixo

Modelo do sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \text{ fixo}$$

Índice de desempenho:

$$J(t_0) = \phi(\mathbf{x}(T), T) + \int_{t_0}^T L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

Restrição de estado final

$$\psi(\mathbf{x}(T), T) = 0$$

Hamiltoniano:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Controlador ótimo*Equação de estado:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = f, \quad t \geq t_0$$

Equação de co-estado

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}, \quad t \leq T$$

Condição de estacionariedade:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\lambda}$$

Condições de contorno:

$$\mathbf{x}(t_0) \text{ dado}$$

$$(\phi_x + \psi_x^T \mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda})^T|_T dx(T) + (\phi_t + \psi_t^T \mathbf{v} + H)|_T dT = 0$$

De modo a especificar que a curva une dois pontos (a, A) e (b, B) no plano, é necessário impor duas condições de contorno:

$$x(a) = A \quad (2.160)$$

$$x(b) = B \quad (2.161)$$

Deseja-se encontrar a curva $x(t)$ que une (a, A) e (b, B) e minimiza (2.159). Reescrevendo isso na forma de um problema de controle ótimo, define-se a entrada como

$$\dot{x} = u \quad (2.162)$$

A equação (2.162) designa a “planta”. Assim, a equação (2.159) se torna

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + u^2} dt \quad (2.163)$$

O Hamiltoniano é

$$H = \sqrt{1 + u^2} + \lambda u \quad (2.164)$$

Da Tabela 3 são obtidas as seguintes condições

$$\dot{x} = H_\lambda = u \quad (2.165)$$

$$-\dot{\lambda} = H_x = 0 \quad (2.166)$$

$$0 = H_u = \lambda + \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \quad (2.167)$$

Para resolver estas condições para a curva ótima u , observa-se que por (2.167)

$$u = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad (2.168)$$

mas de acordo com (2.166), λ é constante. Assim

$$u = \text{const} \quad (2.169)$$

é o “controle” ótimo. Agora, utiliza-se (2.165) para obter

$$x(t) = c_1 t + c_2 \quad (2.170)$$

Para determinar os valores de c_1 e c_2 são utilizadas as condições de contorno (2.160) e (2.161). Assim

$$x(t) = \frac{(A - B)t + (aB - bA)}{a - b} \quad (2.171)$$

A trajetória ótima (2.171) entre dois pontos é, portanto, uma linha reta.

O exemplo a seguir trata da aplicação da Tabela 3 para o caso de otimização envolvendo um sistema dinâmico.

2.6.2 Exemplo 4: controle de temperatura em uma sala

Considere que deseja-se aquecer uma sala usando o mínimo possível de energia. Seja $\theta(t)$ a temperatura na sala, θ_a a temperatura ambiente do ar do lado de fora (uma constante) e $u(t)$ a taxa de calor fornecida à sala. Então, as dinâmicas são dadas por

$$\dot{\theta} = -a(\theta - \theta_a) + bu \quad (2.172)$$

para as constantes a e b , que dependem do isolamento da sala. Definindo o estado como

$$x(t) \triangleq \theta(t) - \theta_a \quad (2.173)$$

pode-se escrever a equação de estado como

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (2.174)$$

De modo a controlar a temperatura em um intervalo de tempo fixo $[0, T]$ com o mínimo de energia possível, define-se o seguinte índice de desempenho

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt \quad (2.175)$$

O Hamiltoniano é

$$H = \frac{u^2}{2} + \lambda(-ax + bu) \quad (2.176)$$

Da Tabela 3, o controle ótimo $u(t)$ é determinado pela solução de

$$\dot{x} = H_\lambda = -ax + bu \quad (2.177)$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = a\lambda \quad (2.178)$$

$$0 = H_u = u + b\lambda \quad (2.179)$$

A condição de estacionariedade (2.179) fornece que o controle ótimo é dado por

$$u(t) = -b\lambda(t) \quad (2.180)$$

Assim, para determinar $u^*(t)$ é necessário somente determinar o co-estado ótimo $\lambda^*(t)$. Substituindo (2.180) em (2.177) obtêm-se as equações de estado e co-estado

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - b^2\lambda(t) \quad (2.181)$$

$$\dot{\lambda}(t) = a\lambda(t) \quad (2.182)$$

Ainda não se conhece o valor do co-estado final $\lambda(T)$, mas considere a solução de (2.181) e (2.182) como se ele fosse conhecido. As solução de (2.182) fornece

$$\lambda(t) = e^{-a(T-t)}\lambda(T) \quad (2.183)$$

Usando (2.183) em (2.181):

$$\dot{x}(t) = ax(t) - b^2\lambda(T) e^{-a(T-t)} \quad (2.184)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (2.184), têm-se

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2\lambda(T)e^{-aT}}{(s+a)(s-a)} \\ &= \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2}{a}\lambda(T)e^{-aT} \left(\frac{-1/2}{s+a} + \frac{1/2}{s-a} \right) \end{aligned} \quad (2.185)$$

de modo que

$$x(t) = x(0)e^{-at} - \frac{b^2}{a}\lambda(T)e^{-aT}\sinh at \quad (2.186)$$

As equações (2.183) e (2.186) fornecem o co-estado ótimo $\lambda^*(t)$ e o estado $x^*(t)$ em termos do ainda desconhecido co-estado final $\lambda(T)$. O estado inicial $x(0)$ é dado.

Neste ponto considere dois possíveis objetivos de controle: o caso com estado final fixo e o caso com estado final livre. Estes estabelecem duas formas de encontrar $\lambda(T)$, como será visto a seguir.

• Estado final fixo

Suponha que a temperatura inicial da sala é igual a $\theta_a = 60^\circ$. Então

$$x(0) = 0^\circ \quad (2.187)$$

Considere que o objetivo de controle seja levar a temperatura final $\theta(T)$ exatamente a 70° em um instante final de T segundos. Assim, o estado final deve ser tomado como um valor fixo de

$$x(T) = 10^\circ \quad (2.188)$$

Se o instante final e o estado final são ambos fixos, então dT e $dx(T)$ são ambos nulos, satisfazendo a última equação da Tabela 3.

Usando as equações (2.187) e (2.188), deve-se determinar $\lambda(T)$; daí pode-se determinar $\lambda(t)$ utilizando (2.183) e o controle ótimo utilizando (2.180). Para encontrar $\lambda(T)$, utiliza-se (2.186) para escrever

$$x(T) = x(0)e^{-aT} - \frac{b^2}{2a}\lambda(T)(1 - e^{-aT}) \quad (2.189)$$

Levando em conta (2.187) e (2.188), obtêm-se o co-estado final

$$\lambda(T) = \frac{20a}{b^2(1 - e^{-2aT})} \quad (2.190)$$

e a trajetória de co-estado ótima é

$$\lambda^*(t) = -\frac{10ae^{at}}{b^2\sinh(aT)} \quad (2.191)$$

E a taxa de calor ótima fornecida à sala é dada por (2.180)

$$u^*(t) = \frac{10ae^{at}}{b\sinh(aT)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.192)$$

De modo a verificar a resposta obtida, pode-se aplicar $u^*(t)$ ao sistema (2.174). Resolvendo para a trajetória de estado, têm-se

$$x^*(t) = 10 \frac{\sinh(at)}{\sinh(aT)} \quad (2.193)$$

Assim, $x^*(T) = 10^\circ$ como desejado.

• Estado final livre

Considere agora que o objetivo de controle não seja que o estado final $x(T)$ seja exatamente 10° , mas apenas próximos. Assim, um possível índice de desempenho a ser minimizado é dado por

$$J(0) = \frac{1}{2}s(x(T) - 10)^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)dt \quad (2.194)$$

onde a variável s (real) pondera a diferença entre o estado final e 10° . Se s é grande, então a solução ótima terá $x(T)$ próximo de 10° . Para esta nova análise são válidas ainda as equações de estado (2.181) e co-estado (2.182), a de controle ótimo (2.180), bem como (2.183) e (2.186). A condição inicial (2.187) é também válida, mas a condição final deve ser determinada a partir da última equação da Tabela 3. Daí

$$\lambda(T) = \left. \frac{\delta \phi}{\delta x} \right|_T = s(x(T) - 10) \quad (2.195)$$

Note que

$$x(T) = \frac{\lambda(T)}{s} + 10 \quad (2.196)$$

Utilizando (2.196), (2.187) e (2.189), resolvendo para o co-estado final, têm-se

$$\lambda(T) = -\frac{20as}{2a + b^2s(1 - e^{-2aT})} \quad (2.197)$$

A equação (2.183) fornece a trajetória de co-estado ótima

$$\lambda^*(t) = -\frac{10ase^{at}}{ae^{aT} + sb^2 \sinh(aT)} \quad (2.198)$$

A equação (2.180) fornece o controle ótimo

$$u^*(t) = \frac{10abse^{at}}{ae^{aT} + sb^2 \sinh(aT)} \quad (2.199)$$

Aplicando $u^*(t)$ ao sistema e resolvendo para a trajetória de estado ótima, têm-se

$$x^*(t) = \frac{10sb^2 \sinh(at)}{ae^{aT} + sb^2 \sinh(aT)} \quad (2.200)$$

No instante final

$$x^*(T) = \frac{10sb^2 \sinh(aT)}{ae^{aT} + sb^2 \sinh(aT)} \quad (2.201)$$

2.7 Regulador Linear Quadrático no Tempo Contínuo

A Tabela 3 fornece o controlador ótimo para sistemas não lineares gerais, mas expressões explícitas da lei de controle são difíceis de calcular. Nesta seção, considere planta linear e variante no tempo dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.202)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ com o índice de desempenho quadrático associado

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt \quad (2.203)$$

com intervalo de interesse $[t_0, T]$.

Neste problema deseja-se determinar o controle ótimo $\mathbf{u}^*(t)$ em $[t_0, T]$ que minimiza J para dois casos a serem considerados: estado final fixo e estado final livre. No primeiro caso, o controle será em malha aberta; no segundo caso, o controle será em malha fechada. Como premissa nesta seção, o instante final T é fixo e conhecido e que nenhuma função de estado final ψ é especificada. O estado inicial da planta $\mathbf{x}(t_0)$ é dado. As matrizes de ponderação $\mathbf{S}(T)$ e $\mathbf{Q}(T)$ são simétricas e semi-definidas positivas, e $\mathbf{R}(t)$ é simétrica e definida positiva, para todo $t \in [t_0, T]$.

Com o auxílio da Tabela 3 será estabelecida a solução do problema do regulador linear quadrático.

As equações de estado e de co-estado

A função Hamiltoniana é dada por

$$H(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)) \quad (2.204)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$ é um multiplicador a ser determinado. As equações de estado e co-estado são

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (2.205)$$

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.206)$$

e a condição de estacionariedade é

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.207)$$

Resolvendo (2.207), obtêm-se o controle ótimo em termos do co-estado

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.208)$$

Utilizando (2.208) nas equações de estado e co-estado, obtêm-se o sistema Hamiltoniano homogêneo

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

Custo para entrada nula e equação de Lyapunov

Uma análise interessante consiste em determinar o valor do índice de desempenho J quando a entrada de controle da planta é zero. Suponha a matriz $\mathbf{S}(t)$ é definida como solução da equação diferencial de Lyapunov contínua

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad t \leq T \quad (2.210)$$

com condição final $\mathbf{S}(T)$ como dada em (2.203). Esta equação é integrada no tempo pra trás a partir de $t = T$. Daí, o custo em um determinado intervalo $[t, T]$ é dado por

$$J(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t) \quad (2.211)$$

Note que

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t)) dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}(T) \mathbf{x}(T) - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{S}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (2.212)$$

Utilizando a expressão (2.212), o custo (2.203) pode ser modificado para

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{S}(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left\{ \left(\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{S}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{S}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) \right) \right\} dt \quad (2.213)$$

Levando em conta a equação de estado (2.202), têm-se

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{S}(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left\{ \mathbf{x}^T(t) \left(\mathbf{A}^T(t) \mathbf{S}(t) + \dot{\mathbf{S}}(t) + \mathbf{S}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) \right) \mathbf{x}(t) \right\} dt \quad (2.214)$$

A solução de (2.210) é dada por

$$\mathbf{S}(t) = e^{\mathbf{A}^T(T-t)} \mathbf{S}(T) e^{\mathbf{A}(T-t)} + \int_t^T e^{\mathbf{A}^T(T-\tau)} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}(T-\tau)} d\tau \quad (2.215)$$

Segundo a teoria de estabilidade de Lyapunov, $\mathbf{S}(t)$ converge para o valor de regime permanente com $(T-t) \rightarrow \infty$ de

$$\mathbf{S}_\infty = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \quad (2.216)$$

se a planta é assintoticamente estável. No caso do regime permanente, $\dot{\mathbf{S}} = 0$, de modo que (2.210) se torna na equação de Lyapunov algébrica

$$0 = \mathbf{A}^T(t) \mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) \quad (2.217)$$

Exemplo: propagação do custo de um sistema escalar não controlado

Seja o sistema escalar dado por

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (2.218)$$

com o custo em $[t, T]$ definido por

$$J(t) = \frac{1}{2} s(t) x^2(t) + \frac{1}{2} \int_t^T q x^2(\tau) d\tau \quad (2.219)$$

A equação diferencial de Lyapunov é

$$-\dot{s}(t) = 2as(t) + q \quad (2.220)$$

cujas solução é dada por

$$s(t) = e^{2a(T-t)} s(T) + \int_t^T e^{2a(T-\tau)} q d\tau \quad (2.221)$$

ou

$$s(t) = \left(s(T) + \frac{q}{2a} \right) e^{2a(T-t)} - \frac{q}{2a} \quad (2.222)$$

Se $a < 0$, então quando $(T - t) \rightarrow \infty$, $s(t)$ converge para o valor de regime permanente de

$$s_\infty = -\frac{q}{2a} > 0 \quad (2.223)$$

Este valor é a mesma solução da equação e Lyapunov algébrica dada por

$$0 = as + q \quad (2.224)$$

O custo de regime permanente em $[0, \infty]$ sem a aplicação da entrada de controle à planta (2.218) é

$$J_\infty = \frac{1}{2} s_\infty x^2(0) = -\frac{q}{2a} x^2(0) \quad (2.225)$$

quando $a < 0$. Do contrário, o custo tende ao infinito.

Estado final fixo e controle em malha aberta

Considere novamente o problema de determinar o controle necessário em (2.202) para minimizar o custo em (2.203). As equações de estado e co-estado são dadas em (2.205) e (2.206). Supondo o estado inicial conhecido, $\mathbf{x}(t_0)$ e que o objetivo de controle é levar o estado exatamente a um valor de referência fixado de $\mathbf{r}(T)$ em um tempo final, então a condição final é

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{r}(T) \quad (2.226)$$

Uma vez que $dx(T) = 0$ e $dT = 0$, a última equação da Tabela 3 é automaticamente satisfeita. Uma vez que $\mathbf{x}(T)$ é fixada em $\mathbf{r}(T)$, é redundante incluir uma ponderação de estado final no índice de desempenho, então $\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$. Para permitir uma solução analítica, se tomará $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ também. Assim a função de custo é

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \mathbf{u}^T \mathbf{r} \mathbf{u} dt \quad (2.227)$$

Assim, o interesse é encontrar um controle que leva o estado $\mathbf{x}(t_0)$ para $\mathbf{x}(T) = \mathbf{r}(T)$ usando a mínima energia de controle.

As equações de estado e co-estado são

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.228)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.229)$$

A solução da equação de co-estado é dada por

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = e^{\mathbf{A}^T(T-t)}\boldsymbol{\lambda}(T) \quad (2.230)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}(T)$ é ainda desconhecido. Utilizando esta expressão na equação de estado têm-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(T-t)}\boldsymbol{\lambda}(T) \quad (2.231)$$

cuja solução é

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(T-\tau)}\boldsymbol{\lambda}(T)d\tau \quad (2.232)$$

Para encontrar $\boldsymbol{\lambda}(T)$, avalia-se a equação (2.232) em $t = T$ para obter

$$\mathbf{x}(T) = e^{\mathbf{A}(T-t_0)}\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{G}(t_0, T)\boldsymbol{\lambda}(T) \quad (2.233)$$

onde o gramiano de controlabilidade contínuo ponderado é dado por

$$\mathbf{G}(t_0, T) = \int_{t_0}^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(T-\tau)}d\tau \quad (2.234)$$

Conforme a condição final (2.226) então

$$\boldsymbol{\lambda}(T) = -\mathbf{G}^{-1}(t_0, T) [\mathbf{r}(T) - e^{\mathbf{A}(T-t_0)}\mathbf{x}(t_0)] \quad (2.235)$$

Por fim, o controle ótimo pode ser escrito usando (2.208), (2.230) e (2.235) como

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(T-t)}\mathbf{G}^{-1}(t_0, T) [\mathbf{r}(T) - e^{\mathbf{A}(T-t_0)}\mathbf{x}(t_0)] \quad (2.236)$$

Esta é a energia mínima que leva o estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para o valor de referência final desejado de $\mathbf{x}(T) = \mathbf{r}(T)$.

Note que

$$\mathbf{x}(T) = e^{\mathbf{A}(T-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \quad (2.237)$$

é o estado final na ausência de uma entrada e o controle ótimo é proporcional à diferença entre esta solução homogênea e o estado final desejado.

Exemplo: controle em malha aberta de um sistema escalar

Seja a planta escalar dada por

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad t \geq 0 \quad (2.238)$$

com custo

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^T r u^2(t) dt \quad (2.239)$$

A equação de Lyapunov é

$$\dot{p}(t) = 2ap(t) + \frac{b^2}{r(t)}, \quad p(0) = 0 \quad (2.240)$$

O gramiano de controlabilidade no intervalo $[0, t]$ é

$$G(0, t) = p(t) = \frac{b^2}{r} \int_0^t e^{2a(t-\tau)} d\tau \quad (2.241)$$

ou

$$G(0, t) = \frac{b^2}{2ar} (e^{2at} - 1) \quad (2.242)$$

Conforme a equação (2.236), o controle ótimo que leva $x(0)$ para $x(T) = r(T)$ é

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b}{r} e^{a(T-t)} \frac{2ar}{b^2 (e^{2aT} - 1)} (r(T) - e^{aT} x(0)) \\ &= \frac{a}{b \sinh(aT)} (r(T) - e^{aT} x(0)) \end{aligned} \quad (2.243)$$

Exemplo: Controle em malha aberta de movimento obedecendo às leis de Newton

Uma partícula obedecendo às leis de Newton satisfaz à seguinte equação em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.244)$$

onde $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} d(t) & v(t) \end{bmatrix}^T$ com $d(t)$ a posição, $v(t)$ a velocidade, e $u(t)$ uma aceleração de entrada. O custo a ser minimizado é dado por

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^T r u^2(t) dt \quad (2.245)$$

Para encontrar o gramiano de controlabilidade, resolve-se a equação de Lyapunov. Seja

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & p_3(t) \\ p_2(t) & p_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

Então a equação de Lyapunov será

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \quad (2.247)$$

A qual fornece as equações escalares

$$\dot{p}_1(t) = 2p_2(t) \quad (2.248)$$

$$\dot{p}_2(t) = p_3(t) \quad (2.249)$$

$$\dot{p}_3(t) = 1/r \quad (2.250)$$

Integrando as equações (2.248) a (2.250) com $P(0) = 0$, têm-se

$$p_3(t) = \frac{t}{r} \quad (2.251)$$

$$p_2(t) = \frac{t^2}{2r} \quad (2.252)$$

$$p_1(t) = \frac{t^3}{3r} \quad (2.253)$$

$$\mathbf{G}(0, t) = \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3r} & \frac{t^2}{2r} \\ \frac{t^2}{2r} & \frac{t}{r} \end{bmatrix} \quad (2.254)$$

A matriz de transição de estado é

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.255)$$

Para determinar o controle ótimo, utiliza-se a equação (2.236), que fornece

$$u(t) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} T-t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12r}{T^3} & -\frac{6r}{T^2} \\ -\frac{6r}{T^2} & \frac{4r}{T} \end{bmatrix} \left(\mathbf{x}(T) - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \right) \quad (2.256)$$

ou

$$u(t) = \begin{bmatrix} \frac{6T-12t}{T^3} & -\frac{2T6t}{T^2} \end{bmatrix} \left(\mathbf{x}(T) - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \right) \quad (2.257)$$

Estado final livre e controle em malha fechada

É possível determinar uma lei de controle ótimo na forma de realimentação de estado pela mudança dos objetivos de controle para a planta (2.202). As equações de estado e de co-estado são dadas

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} \quad (2.258)$$

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.259)$$

A entrada de controle é

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (2.260)$$

Um dado estado inicial é $\mathbf{x}(t_0)$, e o estado final $\mathbf{x}(T)$ é livre. Portanto $d\mathbf{x}(T) \neq 0$ e $dT = 0$. O coeficiente de $d\mathbf{x}(T)$ dever ser zero:

$$\boldsymbol{\lambda}(T) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_T = \mathbf{S}(T)\mathbf{x}(T) \quad (2.261)$$

Portanto, supondo que $\mathbf{x}(t)$ e $\boldsymbol{\lambda}(t)$ satisfazem a relação linear (2.261) para todo $t \in [t_0, T]$ para alguma ainda desconhecida função $\mathbf{S}(t)$:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.262)$$

Para determinar a função $\mathbf{S}(t)$, diferencia-se o co-estado para obter

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)) \quad (2.263)$$

Considerando a equação de co-estado, deve-se ter

$$-\dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A} - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{Q})\mathbf{x}(t) \quad (2.264)$$

para todo t . Uma vez que isto fixa para todas as trajetórias de estado dado um $\mathbf{x}(t_0)$, é necessário que

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A} - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}, \quad t \leq T \quad (2.265)$$

Esta é a equação de Riccati. Sua solução e as equações (2.260) e (2.262) permitem obter o controle ótimo como

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.266)$$

Definindo o ganho de Kalman como

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t) \quad (2.267)$$

têm-se

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.268)$$

Em termos do ganho de Kalman, a equação de Riccati pode ser reescrita como

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A} - \mathbf{K}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K} + \mathbf{Q} \quad (2.269)$$

O controle em (2.268) é uma realimentação de estado variante no tempo. Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são variantes no tempo, então $\mathbf{K}$ também o é. A planta em malha fechada é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) \quad (2.270)$$

A Tabela 4 apresenta sumariamente o regulador linear quadrático (LQ) ótimo contínuo.

Implementação em Software do Regulador LQ

No caso discreto, a equação de Riccati é facilmente programada como uma recursão no tempo para trás. No caso contínuo, contudo, a equação deve ser uma integração no tempo para trás. Os

Tabela 4 – Regulador Linear Quadrático Contínuo (Estado final livre)

Modelo do sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad t \geq t_0$$

Índice de desempenho:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt$$

Premissas

$$\mathbf{S}(T) \geq 0, \quad \mathbf{Q} \geq 0, \quad \mathbf{R} > 0, \quad \text{com todas as três simétricas}$$

Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Controle com realimentação ótimo:

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{S}}(t) &= \mathbf{A}^T \mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t) \mathbf{A} - \mathbf{S}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}, \quad t \leq T, \quad \text{dado } \mathbf{S}(T) \\ \mathbf{K}(t) &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \\ J^*(t_0) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{S}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \end{aligned}$$

métodos de integração, como o de Runge-Kutta são executados em avanço no tempo. Assim, é interessante converter a equação de Riccati em uma equação que é integrada em avanço no tempo. Trocando variáveis por

$$\tau = T - t \quad (2.271)$$

obtem-se que $d\tau = -dt$ e a equação de Riccati (para o caso invariante no tempo) se torna

$$\dot{\mathbf{S}}_b(\tau) = \mathbf{A}^T \mathbf{S}_b(\tau) + \mathbf{S}_b(\tau) \mathbf{A} - \mathbf{S}_b(\tau) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_b(\tau) + \mathbf{Q} \quad (2.272)$$

onde

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_b(\tau) = \mathbf{S}_b(T - t) \quad (2.273)$$

Assim, o esquema na Tabela 4 ocorre em duas partes. A primeira contempla a integração da equação da equação de Riccati para obter $\mathbf{S}(t)$ e consequentemente $\mathbf{K}(t)$. A segunda parte consiste da simulação da lei de controle ótimo aplicando $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$ à planta. Isto é acompanhado da integração em avanço da equação de estado $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$.

2.7.1 Exemplo 5

Os códigos a seguir, escritos no software Matlab, correspondem a implementação da equação de Riccati na forma (2.272):

```
1 % Function mRiccati.m
2 % A equação diferencial matricial de Riccati:
```

```

3 %
4 % dX/dt = A'X + XA - XBR^{-1}B'X + Q
5 % pode ser solucionada por meio das funções da 'ODE suite'.%
6 % "X": matriz "n"-por-"n".
7 % "A", "B", e "Q": matrizes "n"-por-"n".
8 % O seguinte código é utilizada na resolução da ED de Riccati
9
10 function dXdt = mRiccati(t, X, A, B, Q, R)
11 X = reshape(X, size(A)); % Converte de "n^2"-por-1 para "n"-por-"n"
12 dXdt = A'*X + X*A - X*B*inv(R)*B'*X + Q; % EDO
13 dXdt = dXdt(:);          % Converte de "n"-por-"n" para "n^2"-por-1

```

Como exemplo, considere a simulação do sistema dado pela seguinte representação em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -0.6400 & -0.1600 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.274)$$

O *script* a seguir foi utilizado para a simulação do sistema (2.274):

```

1 % Script testmyRiccati.m
2 clear
3 close all
4 clc
5 % Sistema:
6 del = 0.1; om = 0.8; b = 1.0;
7 A = [0 1.0; -om^2 -2*del*om];
8 B = [0;b];
9 % Matrizes de Ponderação:
10 Q = 1.0*eye(length(A));
11 R = 1.0;
12
13 % Condição Inicial:
14 X0 = 0*ones(4,1);
15 % -----
16 % You can use the following command to solve the system
17 % of differential equations:
18 options = odeset('RelTol',1e-2,'AbsTol',1e-1,'MaxStep',1);
19 [T X] = ode45(@(t,X)mRiccati(t, X, A, B, Q, R), [0 10], X0,options)
20 % ODE45 returns "X" as a vector at each time step. You may use the
21 % following code to reshape each row of "X" to get the matrix and
22 % store it in a cell array:

```

```

23 %%
24 [m n] = size(X);
25 XX = mat2cell(X, ones(m,1), n);
26 fh_reshape = @(w)reshape(w,size(A));
27 XX = cellfun(fh_reshape,XX,'UniformOutput',false);
28
29 for cont=1:1:length(XX)
30     Kt(:,:,cont) = -(inv(R))*(B')*(cell2mat(XX(length(XX)-cont+1)));
31 end
32
33 x(:,:,1) = [10.0;10.0]
34 u(1) = Kt(:,:,1)*x(:,:,1);
35
36 for cont1=1:length(Kt)-1
37     x(:,:,cont1+1) = expm((A+B*Kt(:,:,cont1))*(T(cont1+1)-T(cont1)))*...
38         x(:,:,cont1);
39     u(cont1+1) = Kt(:,:,cont1+1)*x(:,:,cont1+1);
40 end
41
42 % squeeze
43 % The results of this can be verified by the LQR function:
44 [K,S,E] = lqr(A, B, Q, R);
45
46 figure(1)
47 set(gcf,'PaperPositionMode','auto');
48 plot(T,flipud(X),'LineWidth',1.5)
49 grid
50 set(gca,'FontSize',12)
51 xlabel('Tempo (segundos)','FontSize',12)
52 ylabel('Soluções da EDR - S(t)','FontSize',12)
53 % print(ffigure(1),'-depsc','-r300','soluSt.eps')
54
55 figure(2)
56 plot(T,squeeze(x),'LineWidth',1.5)
57 grid
58 set(gca,'FontSize',12)
59 xlabel('Tempo (segundos)','FontSize',12)
60 ylabel('Estado x(t)','FontSize',12)
61 % print(ffigure(2),'-depsc','-r300','soluxt.eps')
62

```

Observe que a equação diferencial de Riccati é solucionada a partir da rotina `ode45` do Matlab (linha 19 do *script*).

As curvas do estado $\mathbf{x}(t)$ são apresentadas na Figura 2.6

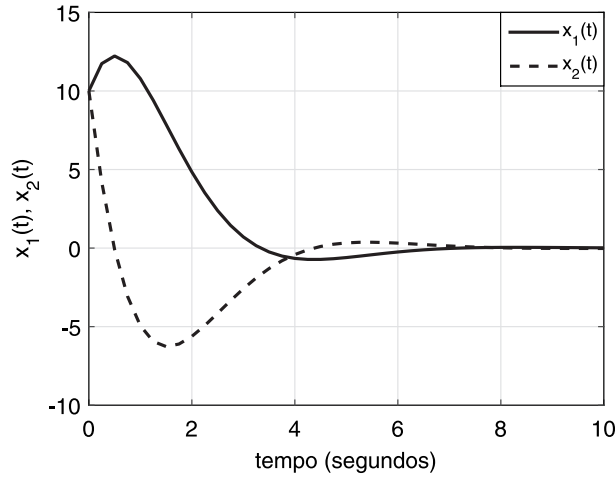


Figura 2.6 – Resposta do estado $\mathbf{x}(t)$ para o sistema dado em (2.274).

2.8 Problema do Rastreador LQ

Neste problema, deseja-se determinar uma lei de controle ótimo que faz com que a planta rastreie uma trajetória de referência desejada $\mathbf{r}(t)$ em um horizonte de tempo especificado $[t_0, T]$. Assim, busca-se manter próxima da referência $\mathbf{r}(t)$ uma combinação linear dos estados dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.275)$$

Um possível índice de desempenho quadrático a ser definido para o problema é

$$\begin{aligned} J(t_0) = & \frac{1}{2} (\mathbf{C}\mathbf{x}(T) - \mathbf{r}(T))^T \mathbf{P} (\mathbf{C}\mathbf{x}(T) - \mathbf{r}(T)) \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (2.276)$$

onde $\mathbf{P} \geq 0$, $\mathbf{Q} \geq 0$ e $\mathbf{R} > 0$ são matrizes simétricas. Observe que a matriz $\mathbf{Q}$ pondera a energia do erro de rastreamento.

A Tabela 5 traz da solução do problema do rastreador linear quadrático. Observe que o controle agora é uma realimentação de estado afim.

Uma observação adicional é que as duas equações diferenciais mostradas na Tabela são resolvidas por retro-integração a partir de uma condição final dada.

Tabela 5 – Rastreador Linear Quadrático Contínuo

Modelo do sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad t \geq t_0$$

Índice de desempenho:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}\mathbf{x}(T) - \mathbf{r}(T))^T \mathbf{P} (\mathbf{C}\mathbf{x}(T) - \mathbf{r}(T)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt$$

Considerações:

$$\mathbf{P} \geq 0, \quad \mathbf{Q} \geq 0, \quad \mathbf{R} > 0, \quad \text{com todas as três simétricas}$$

Controle ótimo afim:

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{S}}(t) &= \mathbf{A}^T \mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t) \mathbf{A} - \mathbf{S}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{S}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}, \quad \mathbf{S}(T) = \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{C} \\ \mathbf{K}(t) &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{S}(t) \\ -\dot{\mathbf{v}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{v} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{v}(T) = \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{r}(T) \\ \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

3 CONTROLE SUB-ÓTIMO BASEADO EM FPRE E FTRE

Como afirmam Prach, Tekinalp e Bernstein (2015, p. 78), a teoria de controle ótimo tem como um de seus princípios fundamentais que as leis de controle ótimo se propagam para trás no tempo. Para o controle linear quadrático, por exemplo, a solução da equação de Riccati deve ser obtida por uma retro-integração a partir de uma condição em um instante final. A propagação para trás no tempo se constitui uma desvantagem principalmente no controle de sistemas lineares e variantes no tempo (LVT), uma vez que implica na necessidade do conhecimento da dinâmica futura da planta. Assim, Prach, Tekinalp e Bernstein (2015, p. 78) denominam a abordagem feita no capítulo 2 de BPRE (*backward-propagating Riccati equation*), caracterizada pela retro-integração da equação diferencial de Riccati, no caso contínuo, a qual se desenvolve num horizonte de tempo finito. Como alternativa, eles propõem a lei de controle FPRE (*forward-propagating Riccati equation*), caracterizada pela integração em avanço da equação de Riccati e utilização de condição inicial em vez de condição final. Observe que se trata de uma abordagem essencialmente no domínio do tempo contínuo.

No contexto de aplicações de controle ótimo baseado na solução da equação de Riccati ao controle de sistemas LVT e também de sistemas não lineares, Prach, Tekinalp e Bernstein (2014) propõem a técnica FTRE (*frozen-time Riccati equation*), a qual está essencialmente baseada no emprego da chamada equação de Riccati dependente de estado (SDRE¹). Na SDRE, os parâmetros da planta são dependentes do estado $\mathbf{x}(t)$, isto é, têm-se $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$. Eventualmente, as matrizes de ponderação da função de custo quadrática também podem ser dependentes de estado. As matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$ são obtidas através da fatoração de um sistema não linear na forma de coeficientes dependentes de estado (SDC²). Uma vez obtido o modelo SDC, a técnica FTRE estabelece a fixação ou “congelamento” das matrizes de estado e entrada a cada instante de tempo de modo a tratá-las como matrizes com entradas constantes. Por conseguinte, a matriz de Riccati algébrica dependente de estado com instante de tempo fixo é obtida e solucionada. Tal solução permite a determinação do ganho do controlador para aquele instante fixado (PRACH; TEKINALP; BERNSTEIN, 2014).

A seguir, será apresentada a formulação de cada uma dessas técnicas, bem como exemplos de aplicação em sistemas variantes no tempo e não lineares. A técnica FTRE, em particular, será empregada na formulação da proposta de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares apresentada no capítulo 4.

¹ SDRE deriva do inglês *state-dependent Riccati equation*.

² SDC deriva do inglês *state-dependent coefficient*.

3.1 Técnica de Controle FPRE

Conforme apresentado no capítulo 2, o controle ótimo de sistemas em tempo contínuo, em sua abordagem tradicional, está baseado na retro-integração da equação diferencial de Riccati. Assim, considere a planta linear e invariante no tempo dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e o intervalo de interesse é $[t_0, T]$. O custo quadrático associado é dado por

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.2)$$

com $\mathbf{S}(T)$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ambas semi-definida positiva e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definida positiva. O controle por realimentação de estado que minimiza o índice J definido em (3.2) é obtido como

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t) \quad (3.4)$$

A matriz $\mathbf{S}(t)$ é obtida pela solução da equação diferencial de Riccati dada por

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t) \mathbf{A} - \mathbf{S}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}, \quad t \leq T, \text{ dado } \mathbf{S}(T) \quad (3.5)$$

A técnica de controle FPRE, por sua vez, é similar a técnica BPRE exceto pela equação de Riccati, a qual é dada por

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t) \mathbf{A} - \mathbf{S}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}, \quad \text{dado } \mathbf{S}(0) \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{S}(0) \geq 0$. Observe que a equação (3.6) se distingue da equação (3.5) por um sinal de menos e pelo fato de ser dada a condição inicial de $\mathbf{S}(t)$ em vez da condição final. Adicionalmente, o BPRE trata com um horizonte de tempo finito, enquanto que o FPRE pode ser estendido até o infinito. E embora as equações (3.3) e (3.4) se mantenham as mesmas, a lei de controle FPRE não garante minimizar o índice dado em (3.2), conferindo o caráter sub-ótimo dessa técnica com relação ao BPRE.

3.1.1 Exemplo 1: Controle FPRE de um Sistema Carro-pêndulo Invertido

Considere o exemplo de aplicação da técnica FPRE apresentado por Prach, Tekinalp e Bernstein (2015), o qual considera o modelo linearizado de um sistema carro-pêndulo invertido. O controle é desempenhado pela aplicação de uma força no carro. O vetor de estado é definido como $\mathbf{x}(t) = [x_c(t) \ \dot{x}_c(t) \ \theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$, onde as variáveis designam posição do carro, velocidade

do carro, posição angular do pêndulo e velocidade angular do pêndulo, respectivamente. Assim, o modelo linearizado em espaço de estados que descreve a dinâmica do sistema é dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (3.7)$$

onde as matrizes de estado e controle são dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + m_p l^2)b}{I(m_c + m_p) + m_c m_p l^2} & \frac{m_p^2 g l^2}{I(m_c + m_p) + m_c m_p l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m_p l b}{I(m_c + m_p) + m_c m_p l^2} & \frac{m_p g l}{I(m_c + m_p) + m_c m_p l^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + m_p l^2}{I(m_c + m_p) + m_c m_p l^2} \\ 0 \\ \frac{m_p l}{I(m_c + m_p) + m_c m_p l^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Os parâmetros do modelo são com seus respectivos valores são dados na Tabela 6 (PRACH; TEKINALP; BERNSTEIN, 2015, p. 88):

Tabela 6 – Parâmetros do sistema carro-pêndulo invertido para modelo linearizado.

Parâmetro	Grandeza	Valor	Unidade
m_c	massa do carro	0,5	kg
m_p	massa do pêndulo	0,2	kg
l	distância do centro de massa ao pivô	0,3	m
B_c	coeficiente de atrito do carro	0,1	Nms/rad
I	momento de inércia do pêndulo	0,006	kg-m ²
g	aceleração da gravidade	9,8	m/s ²

As condições iniciais para o vetor de estado são $x(0) = 0.1$ m, $\dot{x}(0) = 0$ m/s, $\theta(0) = 0.2618$ rad e $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s. A solução $\mathbf{S}$ da equação algébrica de Riccati (ARE) é

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.8348 & 1.1782 & -4.3601 & -0.6913 \\ 1.1782 & 1.8091 & -7.3085 & -1.1493 \\ -4.3601 & -7.3085 & 60.3960 & 9.0051 \\ -0.6913 & -1.1493 & 9.0051 & 1.4189 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

considerando as matrizes de ponderação $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{R} = 1$.

As Figuras 3.1 e 3.2 mostram as trajetórias de estado do sistema carro-pêndulo invertido descrito por (3.7) para duas condições finais distintas ($\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(T) = \mathbf{I}$) utilizando a lei de

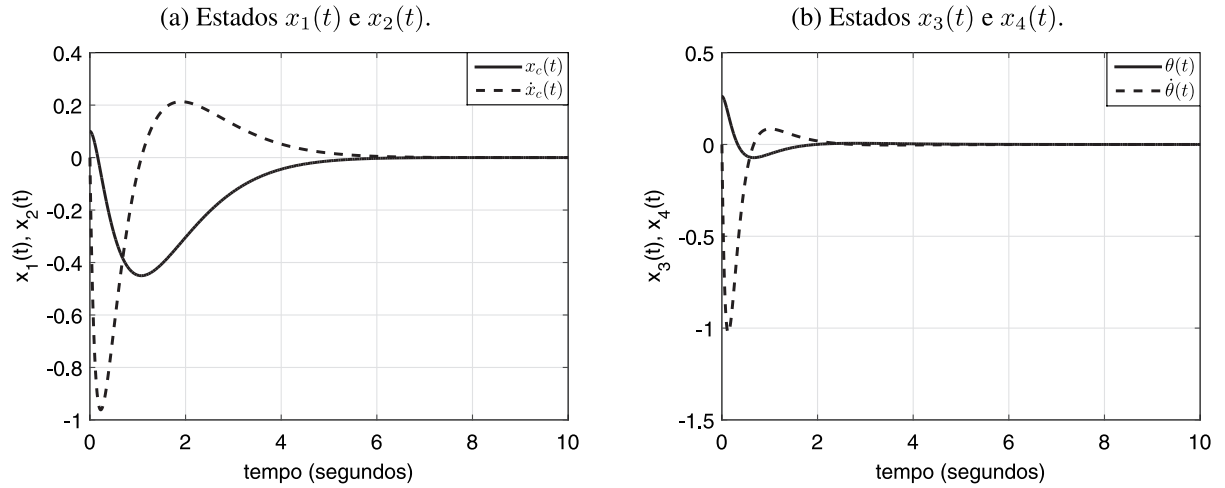


Figura 3.1 – Trajetórias de estado para o controle BPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $S(T) = \mathbf{0}$.

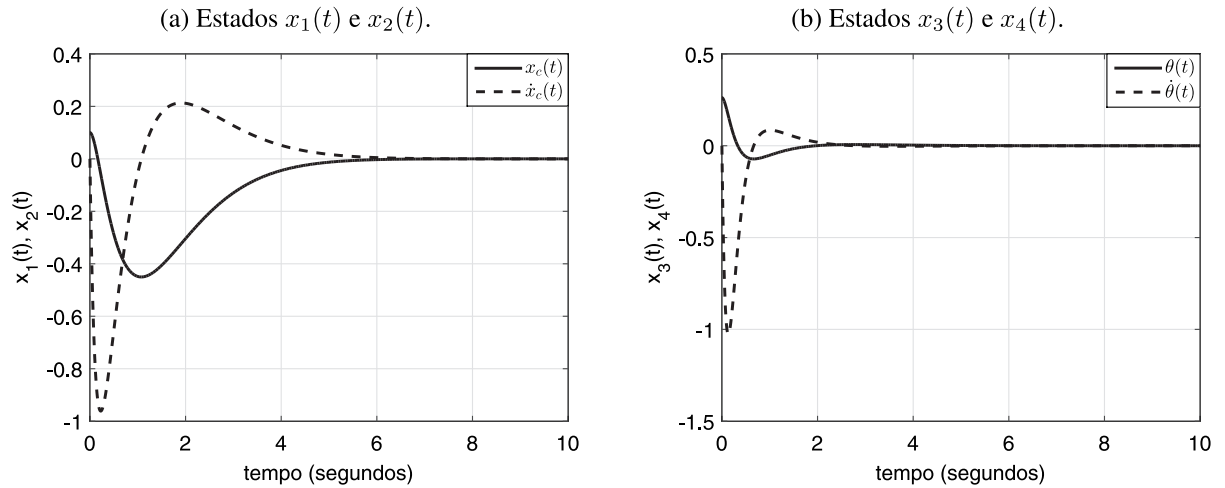


Figura 3.2 – Trajetórias de estado para o controle BPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $S(T) = \mathbf{I}$.

controle BPRE para o intervalo de tempo $[0 \ 10]$. A Figura 3.3 mostra as trajetórias de controle $u(t)$ para os casos em que $S(0) = \mathbf{0}$ e $S(0) = \mathbf{I}$.

Analisando as curvas de resposta nas Figuras 3.1 e 3.2, observa-se que a mudança na condição inicial de $S(T) = \mathbf{0}$ para $S(T) = \mathbf{I}$ praticamente não influencia o comportamento dinâmico dos estados. O mesmo procedimento de simulação foi realizado para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido.

A Figura 3.4 mostra as curvas das trajetórias de estado considerando a condição *inicial* $S(0) = \mathbf{0}$, e a Figura 3.5 corresponde à condição inicial $S(0) = \mathbf{I}$. Nesse caso, o horizonte de tempo é infinito ($[0 \ \infty]$). Observa-se, ao analisar as curvas, a forte influência que mudança da condição inicial causou sobre a dinâmica dos estados. Como se pode observar na Figura 3.5, a condição inicial $S(0) = \mathbf{I}$ permitiu uma resposta mais satisfatória com respeito à amplitude

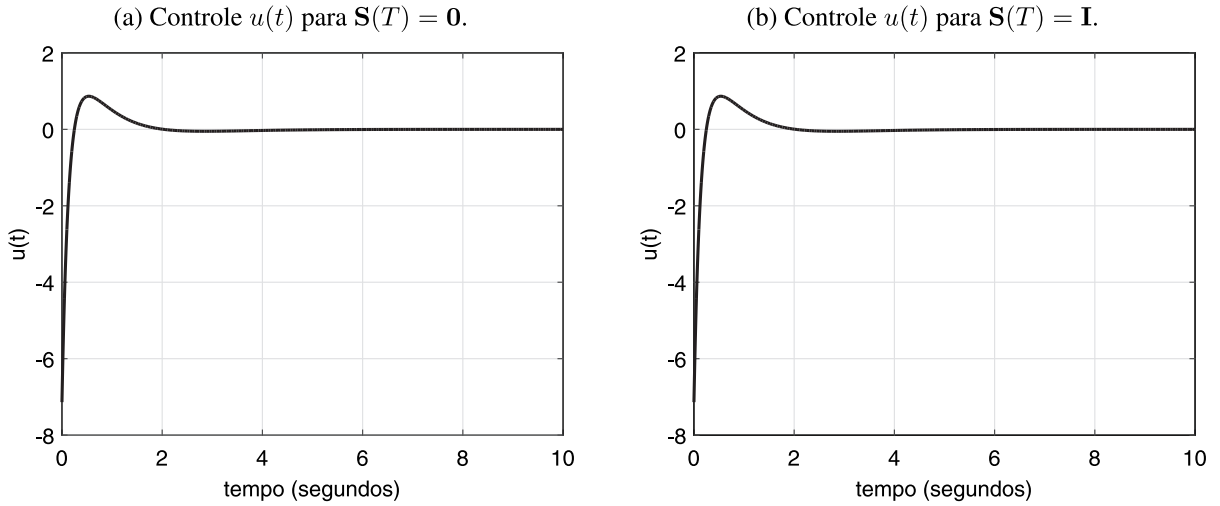


Figura 3.3 – Trajetórias de controle para o controle BPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(T) = \mathbf{I}$.

das oscilações dos estados durante o transitório. Com relação à energia associada aos estados, observa-se também a sub-otimalidade do FPRE em relação ao BPRE. A Figura 3.6 mostra as trajetórias de controle $u(t)$ para os casos em que $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(0) = \mathbf{I}$.

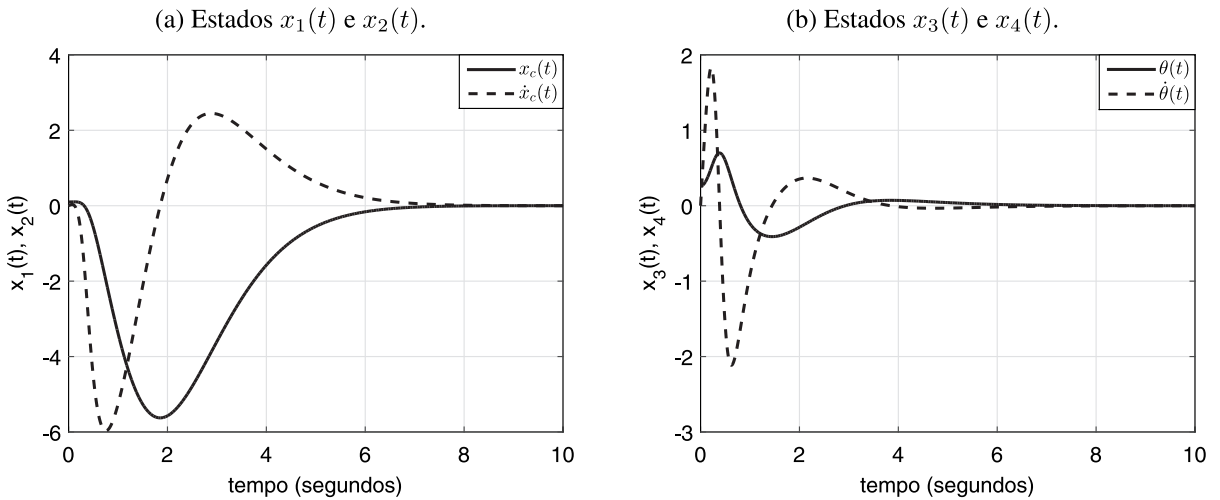


Figura 3.4 – Trajetórias de estado para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$.

A partir das curvas de controle mostradas nas Figuras 3.3 e 3.6 é possível observar que o controle FPRE é mais sensível à inicialização da matriz $\mathbf{S}(t)$.

Na seção a seguir será apresentado um exemplo de aplicação da técnica de controle FPRE a um sistema linear e variante no tempo. Este exemplo também é proposto por Prach, Tekinalp e Bernstein (2015).

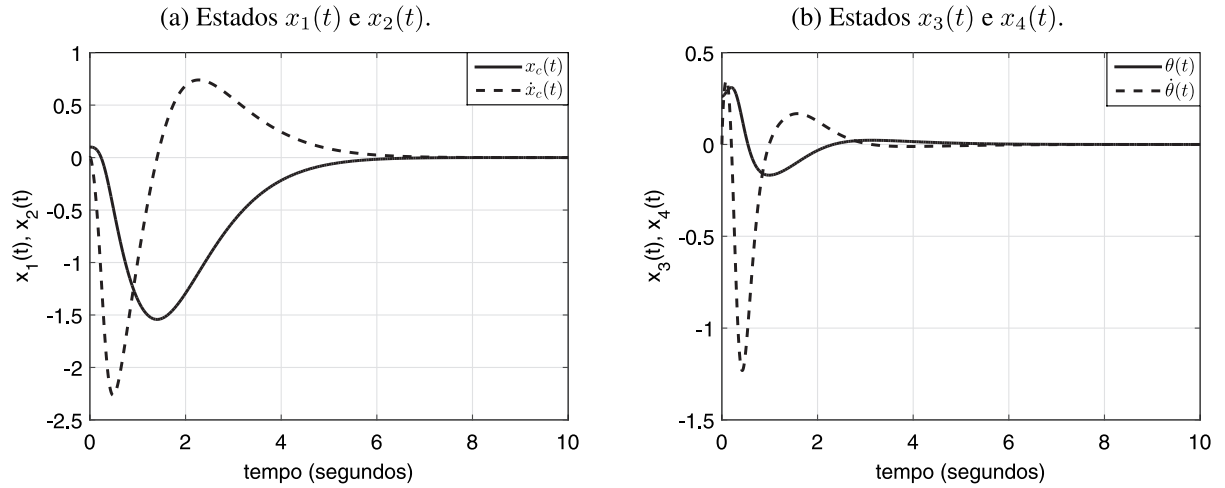


Figura 3.5 – Trajetórias de estado para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(0) = \mathbf{I}$.

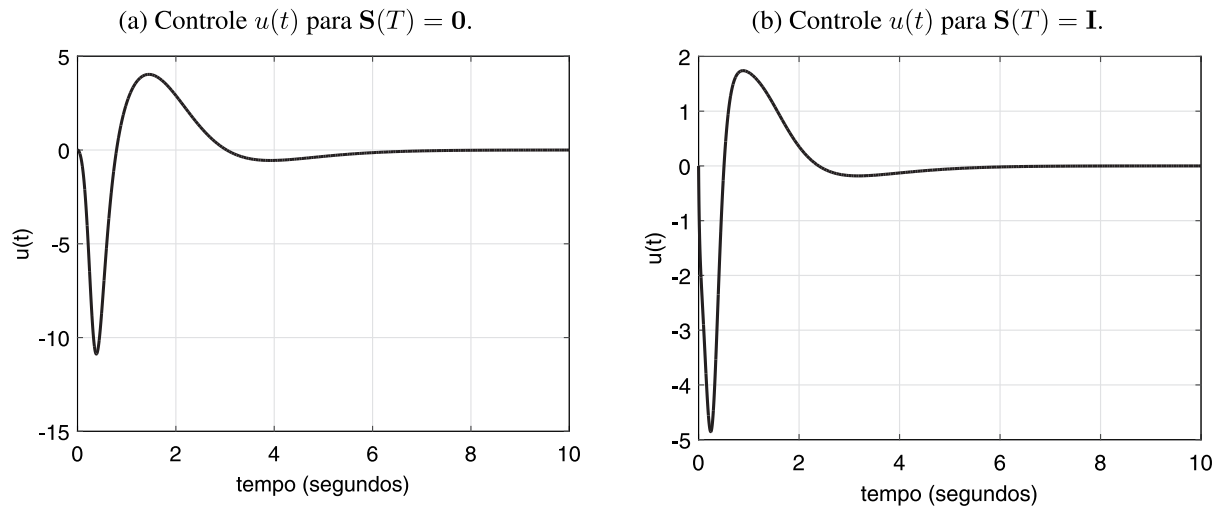


Figura 3.6 – Trajetórias de controle para o controle FPRE do sistema carro-pêndulo invertido para $\mathbf{S}(T) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(T) = \mathbf{I}$.

3.1.2 Exemplo 2: Controle FPRE aplicado à equação de Mathieu

A equação de Mathieu descreve uma dinâmica LVT periódica, sendo definida pela seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem (PRACH; TEKINALP; BERNSTEIN, 2015):

$$\ddot{q}(t) + (\alpha + \beta \cos(\omega t)) q(t) = bu(t) \quad (3.11)$$

onde $\alpha, \beta, \omega, b \in \mathbb{R}$. Considere o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ definido por $\mathbf{x}(t) = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$. Assim, a equação (3.11) pode ser descrita sob a forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (3.12)$$

onde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \cos(\omega t)) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para a simulação, serão considerados os valores para os parâmetros: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $b = 1$ e $\omega = 2$. A condição inicial é $\mathbf{x}(0) = [3 \ 2]^T$. Considere ainda as matrizes de ponderação $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{R} = 1$. As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 mostram os gráficos das trajetórias de estado e de controle para as condições iniciais $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}(0) = 10\mathbf{I}$ e $\mathbf{S}(0) = 100\mathbf{I}$, respectivamente.

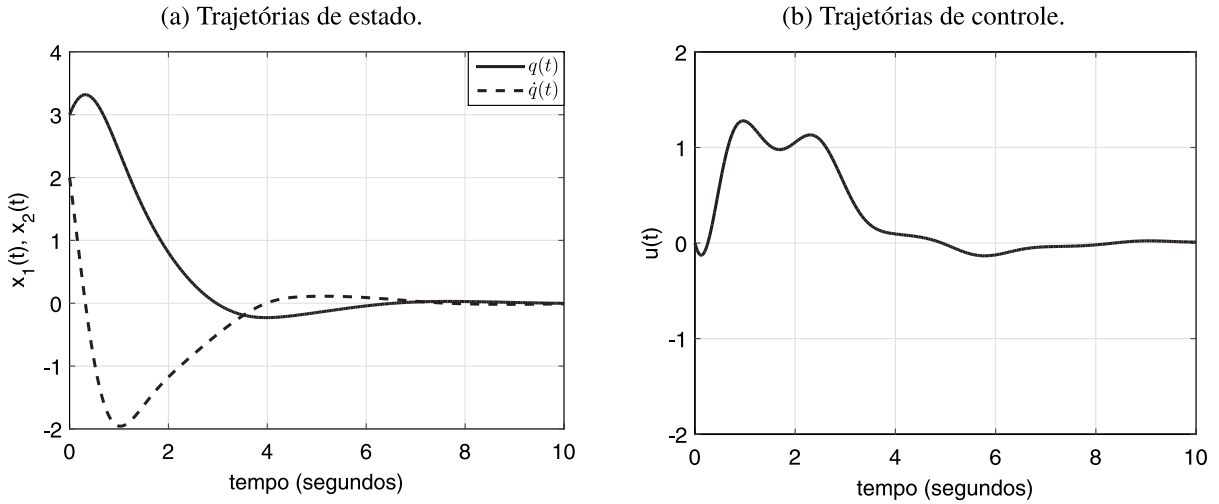


Figura 3.7 – Trajetórias de estado e de controle do sistema LVT descrito por (3.12) para a condição $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$.

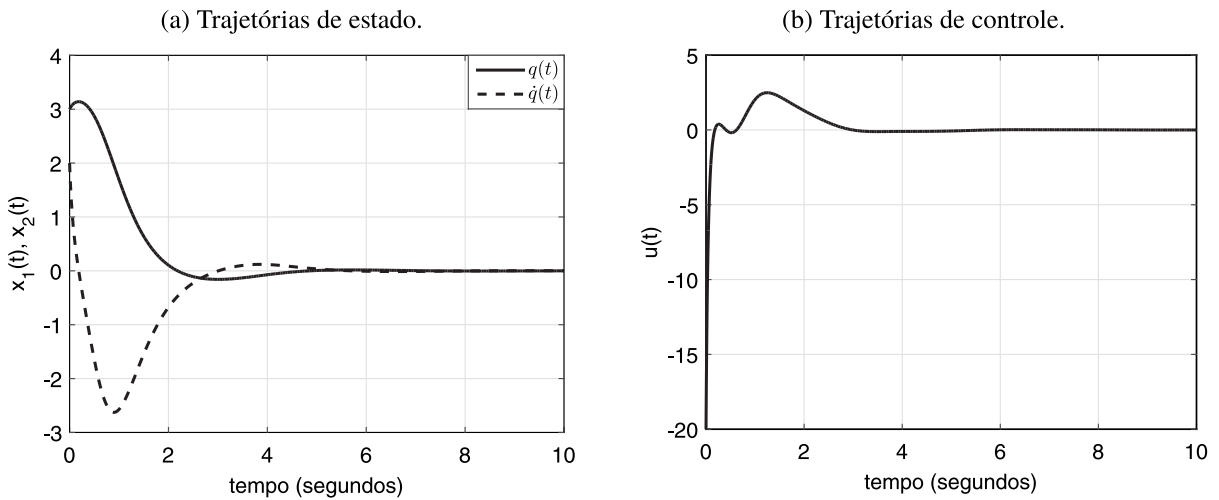


Figura 3.8 – Trajetórias de estado e de controle do sistema LVT descrito por (3.12) para a condição $\mathbf{S}(0) = 10\mathbf{I}$.

Fazendo um comparativo entre as curvas de resposta, observa-se que a mudança na condição inicial influenciou diretamente o tempo de regulação dos estados, cuja diminuição implicou no aumento da amplitude de oscilação de $\dot{q}(t)$ durante o transitório. A Figura 3.10 apresenta o

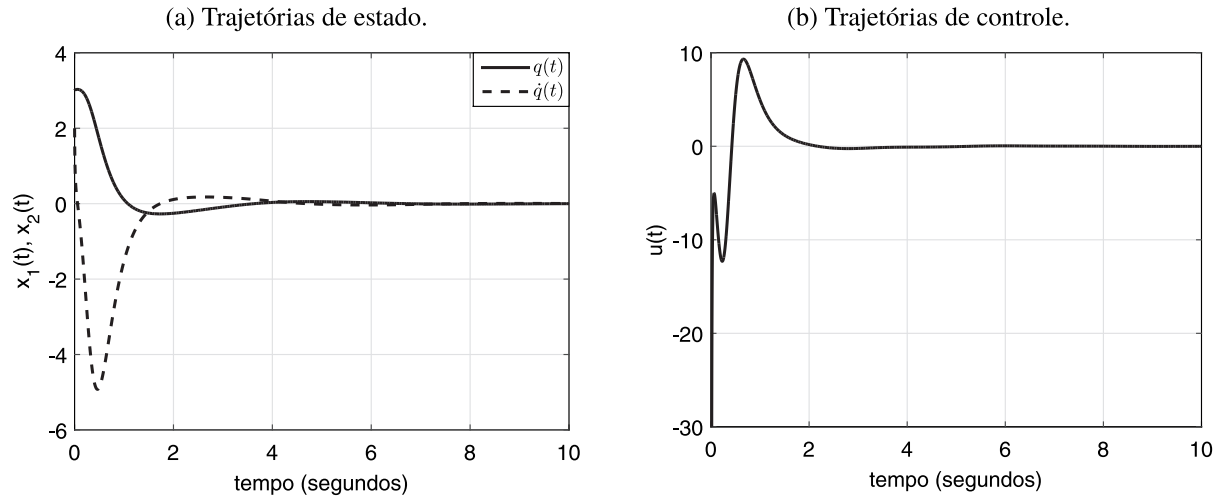


Figura 3.9 – Trajetórias de estado e de controle do sistema LVT descrito por (3.12) para a condição $S(0) = 100I$.

plano de fase do sistema para o controle FPRE considerando as três condições iniciais mencionadas para a equação de Riccati. Veja que nos três casos os estados partem da condição inicial $x(0) = [3 \ 2]^T$ e convergem para $x(\infty) = [0 \ 0]$ (são regulados). Note, pelo plano de fase, que a menor amplitude alcançada pelos estados ocorre para $S(0) = 0$ e a maior amplitude de oscilação ocorre para $S(0) = 100I$.

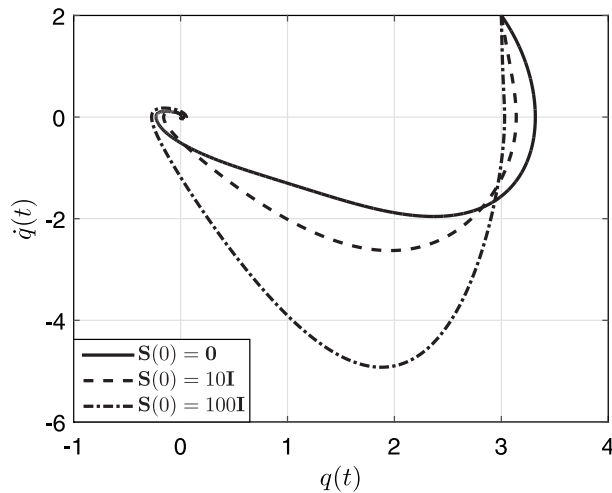


Figura 3.10 – Plano de fase do sistema LVT descrito por (3.12) comparando as condições $S(0) = 0$, $S(0) = 10I$ e $S(0) = 100I$.

O *script* utilizado para a obtenção dos resultados de simulação acima é mostrado a seguir:

```
1 clear
2 close all
3 clc
```

```

4
5 h = 0.001; % step size
6
7 alpha = 1.0;
8 beta = 1.0;
9 b = 1.0;
10 omega = 2.0;
11 x0 = [3 2]';
12 B = [0;b];
13
14 Q = eye(2,2);
15 R = 1.0;
16 %%
17 S0 = [0 0 0 0];
18 % S0 = [10 0 0 10];
19 % S0 = [100 0 0 100];
20
21
22 [T S] = rk4sys(@(t,S)edriccati(t, S, [0 1;-(alpha+beta*cos(omega*t)) 0],...
23                               B, Q, R),[0 10], S0, h);
24 % ODE45 returns "X" as a vector at each time step. You may use the
25 % following code to reshape each row of "X" to get the matrix and
26 % store it in a cell array:
27
28 A = [0 1;-(alpha+beta*cos(omega*1)) 0];
29
30 [m n] = size(S);
31 SS = mat2cell(S, ones(m,1), n);
32 fh_reshape = @(w)reshape(w,size(A));
33 SS = cellfun(fh_reshape,SS,'UniformOutput',false);
34
35 for cont=1:1:length(SS)
36 %   Kt(:, :, cont) = -(inv(R))*(B')*(cell2mat(SS(length(SS)-cont+1)));%bpre
37   Kt(:, :, cont) = -(inv(R))*(B')*(cell2mat(SS(cont)));%fpre
38 end
39
40 x(:, :, 1) = x0;
41 u(1) = Kt(:, :, 1)*x(:, :, 1);
42
43 for cont1=1:length(Kt)-1
44   x(:, :, cont1+1) = expm(([0 1;-(alpha+beta*cos(omega*T(cont1))) 0]+...
45                           B*Kt(:, :, cont1))*(T(cont1+1)-T(cont1)))*x(:, :, cont1);

```

```

46     u(cont1+1) = Kt(:,:,cont1+1)*x(:,:,cont1+1);
47 end
48
49 figure(1)
50 xt = squeeze(x);
51 plot(T,xt(1,:),'-k','LineWidth',2.0)
52 set(gca,'FontSize',14)
53 hold on
54 plot(T,xt(2,:),'--k','LineWidth',2.0)
55 hold off
56 xlabel('tempo (segundos)','FontSize',14)
57 ylabel('x_1(t), x_2(t)','FontSize',14)
58 grid
59 hLeg = legend('$$q(t)$$','$$\dot{q}(t)$$');
60 set(hLeg,'Interpreter','latex');
61
62 figure(2)
63 plot(T,u,'-k','LineWidth',2.0)
64 axis([0 10 -20 5])
65 xlabel('tempo (segundos)','FontSize',14), ylabel('u(t)','FontSize',14)
66 set(gca,'FontSize',14)
67 grid
68
69 figure(3)
70 plot(xt(1,:)',xt(2,:)', '-.k', 'LineWidth', 2.0)
71 hLeg0=xlabel('$$q(t)$$','FontSize',16);
72 hLeg=ylabel('$$\dot{q}(t)$$','FontSize',16);
73 set(hLeg,'Interpreter','latex')
74 set(hLeg0,'Interpreter','latex')
75 set(gca,'FontSize',14)
76 %hold on
77 %hLeg1 = legend('$$\mathbf{S}(0)=\mathbf{0}$$','$$\mathbf{S}(0)=10\mathbf{I}$$',...
78 %              '$$\mathbf{S}(0)=100\mathbf{I}$$');
79 %set(hLeg1,'Interpreter','latex');

```

3.2 Técnica de Controle FTRE

A técnica de controle FTRE proposta por Prach, Tekinalp e Bernstein (2014), como já foi mencionado, está essencialmente baseada na equação de Riccati dependente de estado (SDRE), a qual, por sua vez, tem por base a parametrização do sistema na forma de coeficientes

dependentes de estado (SDC). A seguir serão apresentados cada um desses itens.

3.2.1 Parametrização por Coeficientes Dependentes de Estado (SDC)

Considere o sistema dinâmico não linear dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.14)$$

A função $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ representa genericamente um conjunto de equações diferenciais não lineares. Agora, fazendo a fatoração do sistema (3.14) na forma SDC (*State-Dependent Coefficients*) resulta em

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{u}(t). \quad (3.15)$$

Observe que para um determinado instante de tempo t_i , as matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ tornam-se constantes. Desse modo, para o instante t_i , a equação (3.15) representa um modelo linear e invariante no tempo.

3.2.2 Equação de Riccati Dependente de Estado (SDRE)

Uma vez feita a parametrização do sistema na forma SDC e a consequente obtenção das matrizes de estado e entrada em função do estado $\mathbf{x}(t)$, a equação algébrica de Riccati dependente de estado é estabelecida como

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{S}(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{S}(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))^T\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

A seguir será abordada a forma como a técnica de controle FTRE se utiliza da equação de Riccati dependente de estado.

3.3 Controle FTRE baseado em SDRE

A técnica de controle FTRE baseado SDRE consiste em primeiramente fazer uma parametrização direta das equações não lineares de um sistema dinâmico para representá-lo por uma estrutura pseudo-linear com coeficientes dependentes de estado, isto é, um modelo SDC. Como consequência, a equação de Riccati resultante da solução do problema de controle ótimo é parametricamente dependente das variáveis de estado. Em seguida, a equação de Riccati dependente de estado (SDRE) é resolvida para cada instante t_i da trajetória do estado $\mathbf{x}(t_i)$. Assim, o estado é fixado (“congelado”) a cada instante t_i . A solução obtida ao longo da trajetória do estado é então utilizada para determinar a ação de controle por realimentação de estados a cada instante t_i . No contexto da teoria do regulador linear quadrático (LQR), o objetivo é determinar a lei de controle por realimentação de estados na forma $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)$ que minimiza o índice de desempenho dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (3.17)$$

onde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semidefinida positiva e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é definida positiva. A matriz de ganho de controle $\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))$ para o LQR sub-ótimo (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012) é obtida através da expressão

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))^T \mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{S}(\mathbf{x}(t))$ é a solução da equação algébrica de Riccati dependente de estado. Desse modo, uma vez fixado o instante de tempo t_i , as matrizes do modelo SDC tornam-se constantes para tal instante. Em seguida soluciona-se a equação algébrica de Riccati dependente de estado para t_i fixado, a qual é dada por:

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}(t_i))\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_i)) + \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_i))\mathbf{A}(\mathbf{x}(t_i)) - \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_i))\mathbf{B}(\mathbf{x}(t_i))\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}(t_i))^T \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_i)) + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

A solução obtida permite determinar o ganho de controle a partir da equação (3.18).

3.3.1 Proposta do controle FTRE rastreador

O controle FTRE para o caso em que há uma trajetória de referência $\mathbf{r}(t)$ a ser seguida pela saída do sistema não linear utiliza diretamente os resultados da Tabela 5. Assim, primeiramente procede-se com a determinação do modelo SDC do sistema não linear para obtenção das matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$. Em seguida, determina-se SDRE para o caso rastreador, dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{A}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{S}(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{S}(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) \\ &\quad + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathbf{C} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Observe alguns aspectos como a ausência do sinal negativo e o fato da solução partir de uma condição inicial. Obtida a solução $\mathbf{S}(\mathbf{x}(t))$, determina-se o ganho de controle:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.21)$$

Por conseguinte, soluciona-se a equação diferencial auxiliar dada por

$$-\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{K}(\mathbf{x}(t)))^T \mathbf{v} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}(T)) = \mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathbf{r}(T) \quad (3.22)$$

Por fim, determina-se o controle

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.23)$$

A seguir, é apresentado um exemplo de aplicação em um motor síncrono.

3.3.2 Exemplo: controle FTRE de um motor síncrono

O conjunto de equações diferenciais não lineares a seguir representa a dinâmica de um motor síncrono bifásico a imã permanente (SIMON, 2006, p. 25), (AHMED; MOINUDDIN;

AL-SAGGAF, 2014):

$$\dot{i}_a(t) = -\frac{R}{L}i_a(t) + \frac{\omega(t)\lambda}{L} \sin \theta(t) + \frac{u_a(t)}{L} \quad (3.24)$$

$$\dot{i}_b(t) = -\frac{R}{L}i_b(t) + \frac{\omega(t)\lambda}{L} \cos \theta(t) + \frac{u_b(t)}{L} \quad (3.25)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{3\lambda}{2J}i_a(t) \sin \theta(t) + \frac{3\lambda}{2J}i_b(t) \cos \theta(t) + \frac{u_a(t)}{L} - \frac{F}{J}\omega(t) - \frac{T_L(t)}{J} \quad (3.26)$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \quad (3.27)$$

onde $i_a(t)$ e $i_b(t)$ são as correntes através dos enrolamentos do motor, R é a resistência dos enrolamentos, L designa a indutância dos enrolamentos, J é o momento de inércia do eixo do rotor e F é o atrito viscoso do rotor. A variável $\theta(t)$ representa a posição angular do rotor e $\omega(t)$ é a velocidade angular; $u_a(t)$ e $u_b(t)$ são as tensões aplicadas nos dois enrolamentos. O modelo também considera um torque de carga sobre o eixo do rotor designado por $T_L(t)$.

Considere o vetor de estados definido por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) & i_b(t) & \omega(t) & \theta(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

Desse modo, a representação do sistema na forma de variáveis de estado se torna:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) + \frac{x_3(t)\lambda}{L} \sin x_4(t) + \frac{u_a(t)}{L} \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R}{L}x_2(t) + \frac{x_3(t)\lambda}{L} \cos x_4(t) + \frac{u_b(t)}{L} \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{3\lambda}{2J}x_1(t) \sin x_4(t) + \frac{3\lambda}{2J}x_2(t) \cos x_4(t) + \frac{u_a(t)}{L} - \frac{F}{J}x_3(t) - \frac{T_L(t)}{J} \quad (3.31)$$

$$\dot{x}_4(t) = \omega(t) \quad (3.32)$$

O primeiro passo consiste em determinar o modelo SDC a partir das equações diferenciais não lineares, na forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde uma possível escolha para a matriz de estado dependente de estado é dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & \frac{\lambda}{L} \sin x_4(t) & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & -\frac{\lambda}{L} \cos x_4(t) & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda}{2J} \cos x_4(t) & -\frac{F}{J} & -\frac{3\lambda}{2Jx_4(t)} x_1(t) \sin x_4(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Consequentemente a matriz de entrada é

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Observe que o torque de carga $T_L(t)$ está sendo desconsiderado neste exemplo.

O resultado das operações matriciais na equação (3.33) resulta nas equações diferenciais não lineares que representam a dinâmica do motor síncrono. Fixando o instante t_i , a estrutura em (3.33) torna-se linear para aquele instante, possibilitando a aplicação da metodologia. Os dados de simulação utilizados podem ser encontrados em Dhaouadi, Mohan e Norum (1991), os quais são: $R = 0.7 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $\lambda = 0.193 \text{ Vs/rad}$, $J = 9 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ e $F = 0.001$. A condição inicial considerada é $\mathbf{x}(0) = [1 \ 3 \ 0.5 \ 0.1]^T$. As matrizes de entrada do projeto são dadas a seguir:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 130.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130.0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

O seguinte *script* foi utilizado para a realização da simulação:

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 h = 0.0001; % passo de tempo para integração
6 f = 1.0;
7
8 R = 0.7; % resistencia dos enrolamentos (Ohm)
9 L = 0.005; % indutancia dos enrolamentos (Henry)
10 lambda = 0.193; % constante do motor (Vs/rad)
11 J = 9e-5; % Momento of inercia (kg/m2)
12 F = 0.001; % coeficiente de atrito viscoso
13
14 x(:,1) = [1 3 0.5 0.1]'; %condição inicial
15
16 C = eye(4,4);
17
```

```

18 Q = [150    0    0    0;
19       0   180    0    0;
20       0    0  130.0    0;
21       0    0    0  130.0];
22 Rp = [0.1 0;0 0.5];
23 P = [0.001    0    0    0;
24       0   0.001    0    0;
25       0    0   0.01    0;
26       0    0    0   0.01];
27
28 Akm = [-R/L    0    (lambda*sin(x(4,1)))/L    0;...
29 0  -R/L -(lambda*cos(x(4,1)))/L    0;...
30 0  (3*lambda*cos(x(4,1)))/(2*J) -F/J -(3*lambda*x(1,1)*sin(x(4,1)))/(2*J*x(4,1));...
31 0    0    1  0];
32 Bkm = [1/L 0;
33        0  1/L;
34        0   0;
35        0   0];
36 Bk = Bkm;
37
38
39
40 S(:, :, 1) = (C')*P*C;
41
42 Skm = S(:, :, 1);
43
44
45 t = 0:h:10.0;
46 % r = 1.0*ones(4,length(t));
47 refw = -10.0;
48 r = [refw*(2*F/(-3*lambda))*sin(refw*(t));
49      refw*(2*F/(3*lambda))*cos(refw*(t));
50      refw*ones(1,length(t));
51      refw*(t)];
52
53 V(:, :, 1) = (C')*P*r(:, 1);
54 Vkm = V(:, :, 1);
55
56 K(:, :, 1) = inv(Rp)*(Bkm')*S(:, :, 1);
57 % x(:, 1) = [1 3 0.5 2]';
58 u(:, :, 1) = -K(:, :, 1)*x(:, 1)+inv(Rp)*(Bkm')*V(:, :, 1);
59

```

```

60 for k = 2:length(t)
61     Akm = [-R/L    0    (lambda*sin(x(4,k-1)))/L    0;...
62           0    -R/L -(lambda*cos(x(4,k-1)))/L    0;...
63           0    (3*lambda*cos(x(4,k-1)))/(2*J) -F/J ...
64 -(3*lambda*x(1,k-1)*sin(x(4,k-1)))/(2*J*x(4,k-1));...
65           0    0    1    0];
66     Sdot = (Akm')*Skm+Skm*Akm-Skm*Bkm*inv(Rp)*(Bkm')*Skm+(C')*Q*(C);
67     S(:, :, k) = S(:, :, k-1)+Sdot*h;
68     Sk = S(:, :, k);
69     xdota = Akm*x(:, k-1)+Bkm*u(:, :, k-1);
70     x(:, k) = x(:, k-1)+xdota*h;
71     Ak = [-R/L    0    (lambda*sin(x(4,k)))/L    0;...
72           0    -R/L -(lambda*cos(x(4,k)))/L    0;...
73           0    (3*lambda*cos(x(4,k)))/(2*J) -F/J ...
74 -(3*lambda*x(1,k)*sin(x(4,k)))/(2*J*x(4,k));...
75           0    0    1    0];
76     Sdot_trap = (Ak')*Sk+Sk*Ak-Sk*Bk*inv(Rp)*(Bk')*Sk+(C')*Q*(C);
77     S(:, :, k) = S(:, :, k-1)+(Sdot+Sdot_trap)*h*0.5;
78     Skm = S(:, :, k);
79     K(:, :, k) = inv(Rp)*(Bk')*S(:, :, k);
80     %=====
81     Vdot = ((Akm-Bkm*K(:, :, k-1))')*Vkm+(C')*Q*r(:, k-1);
82     V(:, :, k) = V(:, :, k-1)+Vdot*h;
83     Vk = V(:, :, k);
84     Vdot_trap = ((Ak-Bk*K(:, :, k))')*Vk+(C')*Q*r(:, k);
85     V(:, :, k) = V(:, :, k-1)+(Vdot+Vdot_trap)*h*0.5;
86     Vkm = V(:, :, k);
87     u(:, :, k) = -K(:, :, k)*x(:, k)+inv(Rp)*(Bk')*V(:, :, k);
88     xdotatrap = Ak*x(:, k)+Bk*u(:, :, k);
89     x(:, k) = x(:, k-1)+(xdota+xdotatrap)*h*0.5;
90 end
91
92
93 figure
94 plot(t, x(1, :), '-k', 'LineWidth', 2.0)
95 xlabel('tempo (segundos)', 'FontSize', 14)
96 ylabel('i_a(t)', 'FontSize', 14)
97 set(gca, 'FontSize', 14)
98 hold on
99 plot(t, r(1, :), '--r', 'LineWidth', 2.0)
100 legend('i_a(t)', 'r(t)')
101 hold off

```

```
102 grid
103
104 figure
105 plot(t,x(2,:),'-k','LineWidth',2.0)
106 xlabel('tempo (segundos)','FontSize',14)
107 ylabel('i_b(t)','FontSize',14)
108 set(gca,'FontSize',14)
109 hold on
110 plot(t,r(2,:), '--r','LineWidth',2.0)
111 legend('i_b(t)','r(t)')
112 grid
113
114 figure
115 plot(t,x(3,:),'-k','LineWidth',2.0)
116 xlabel('tempo (segundos)','FontSize',14)
117 ylabel('\omega(t)','FontSize',14)
118 set(gca,'FontSize',14)
119 hold on
120 plot(t,r(3,:), '--r','LineWidth',2.0)
121 legend('\omega(t)','r(t)')
122 grid
123
124 figure
125 plot(t,x(4,:),'-k','LineWidth',2.0)
126 xlabel('tempo (segundos)','FontSize',14)
127 ylabel('\theta(t)','FontSize',14)
128 set(gca,'FontSize',14)
129 hold on
130 plot(t,r(4,:), '--r','LineWidth',2.0)
131 legend('\theta(t)','r(t)')
132 grid
133
134 figure
135 plot(t,squeeze(u),'LineWidth',2.0)
136 xlabel('tempo (segundos)','FontSize',14)
137 ylabel('u(t)','FontSize',14)
138 set(gca,'FontSize',14)
139 grid
140 legend('u_1(t)','u_2(t)')
```

Os gráficos com as curvas de resposta para cada um dos estados são dados nas Figuras

de 3.11 a 3.14. O gráfico do sinal de controle é mostrado na Figura 3.15. Observe que para as correntes $i_a(t)$ e $i_b(t)$ foram designadas trajetórias de referência senoidais, enquanto que para a velocidade $\omega(t)$ foi atribuída uma referência fixa em -10 rad/s. Tais escolhas estão baseadas na dinâmica do motor síncrono.

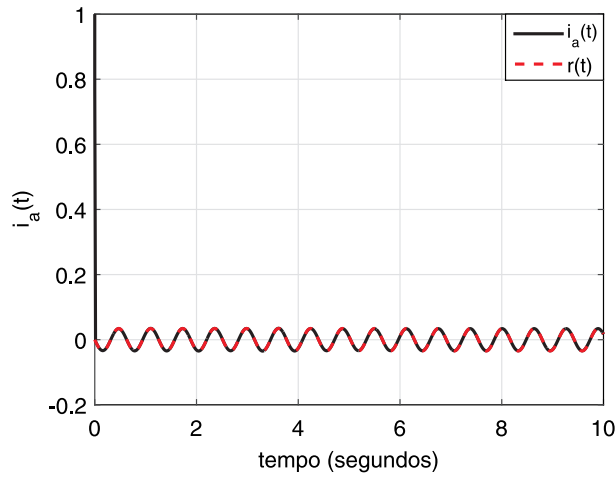


Figura 3.11 – Trajetória do estado $x_1(t) = i_a(t)$.

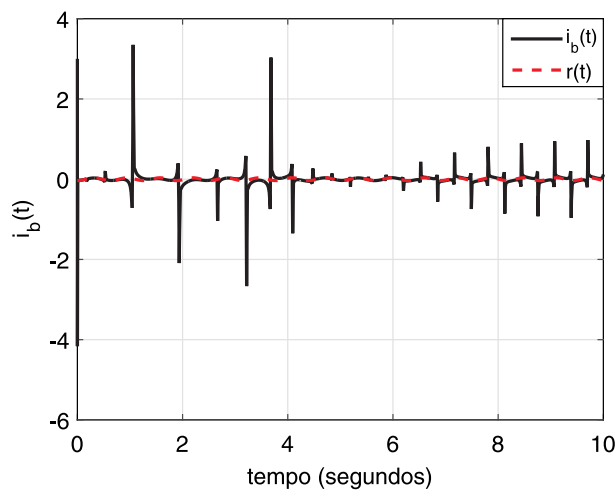


Figura 3.12 – Trajetória do estado $x_2(t) = i_b(t)$.

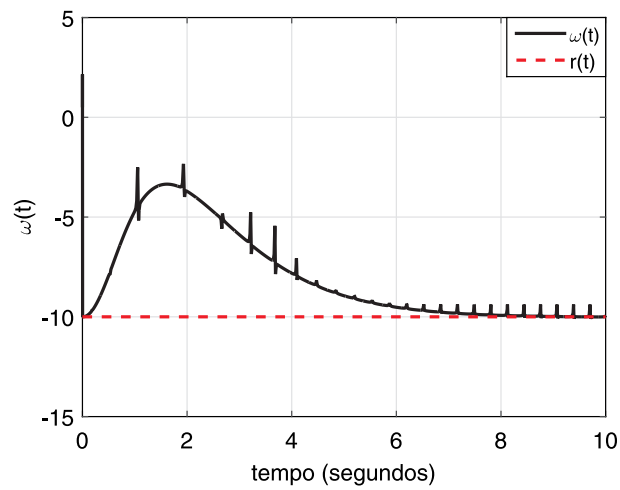


Figura 3.13 – Trajetória do estado $x_3(t) = \omega(t)$.

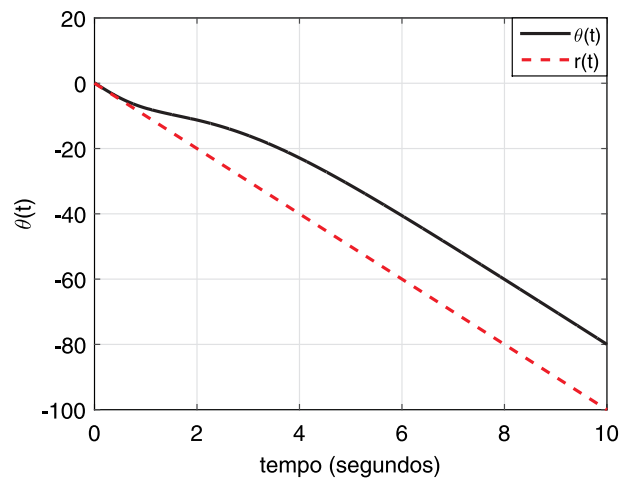


Figura 3.14 – Trajetória do estado $x_4(t) = \theta(t)$.

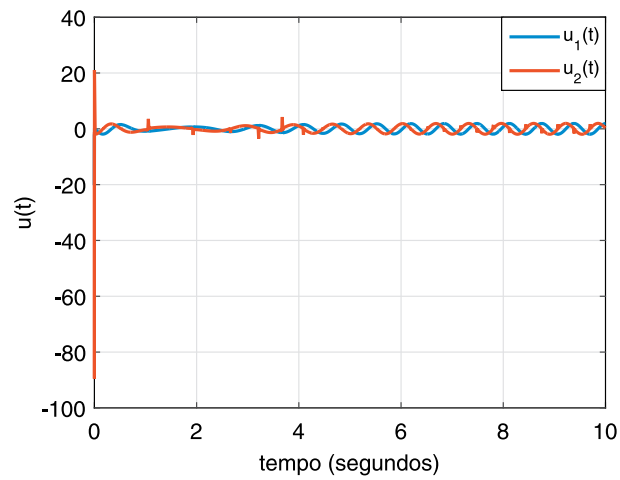


Figura 3.15 – Trajetória do controle $u(t)$.

4 CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ BASEADO NA EQUAÇÃO DE RICCATI DEPENDENTE DE ESTADO

A teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ é um campo que emergiu dentro da teoria de controle robusto principalmente a partir dos anos de 1980. No contexto de controle robusto, a otimização $\mathcal{H}_\infty$ é uma maneira de projetar controladores robustos considerando o pior caso da perturbação de entrada (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012, p. 430). Como já mencionado, a formulação original do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ foi elaborada no domínio da frequência por Zames (1981), mas a abordagem no domínio do tempo logrou grande êxito principalmente a partir dos artigos de Doyle et al. (1989) e Doyle e Glover (1989).

Várias das propostas de controle $\mathcal{H}_\infty$ feitas na literatura são direcionadas para aplicações em sistemas lineares. Uma alternativa para a extensão do controle $\mathcal{H}_\infty$ ao contexto não linear é proposta por Cloutier, D'Souza e Mracek (1996), a qual utiliza uma parametrização direta para trazer o sistema não linear para uma estrutura pseudo-linear com coeficientes dependentes do estado (SDC - *state-dependent coefficients*); em seguida, a equação de Riccati, cujos parâmetros dependem das variáveis de estado, é resolvida para cada ponto da trajetória dessas variáveis. Tal equação é denominada equação de Riccati dependente do estado (SDRE - *state-dependent Riccati equation*).

Alguns conceitos são fundamentais antes da proposição do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$, os quais são apresentados a seguir.

4.1 Decomposição em Valores Singulares - SVD

Dada uma matriz $\mathbf{G}$, a sua decomposição em valores singulares (SVD) pode ser escrita como

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ortogonais e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

com r igual ao posto da matriz $\mathbf{G}$. Os valores singulares de $\mathbf{G}$ são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$, isto é:

$$\sigma_i(\mathbf{G}) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}^T\mathbf{G})} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.3)$$

onde $\lambda_i(\cdot)$ denota o i -ésimo autovalor de $(\cdot)$.

Considere que o maior dentre todos os valores singulares de $\mathbf{G}$ será denotado por $\sigma_M(\mathbf{G})$ e o menor deles será denotado por $\sigma_m(\mathbf{G})$. Assim, a Figura 4.1 ilustra o produto de uma matriz por um vetor e a relação com os valores singulares:

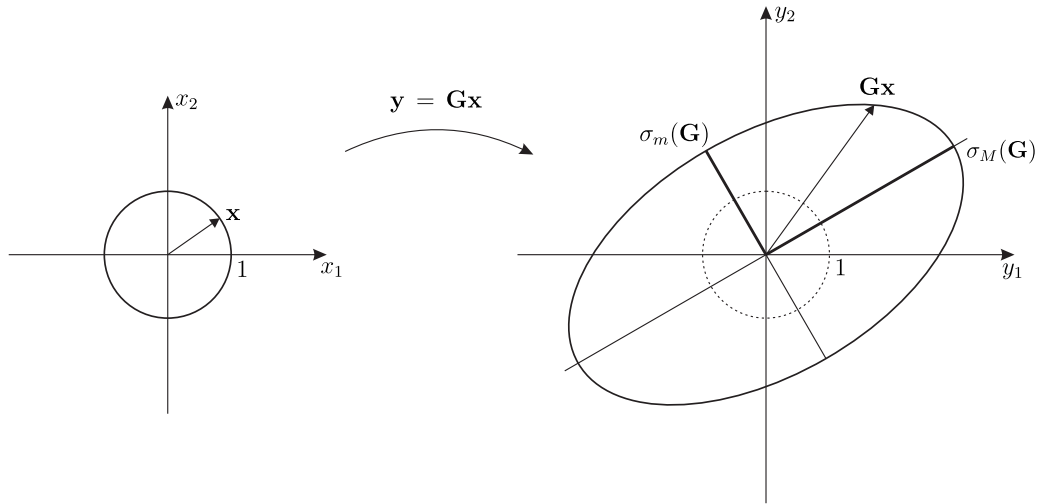


Figura 4.1 – Operação de uma matriz sobre um vetor e seus valores singulares máximo e mínimo.

Como exemplo numérico, considere a matriz $\mathbf{G}$ dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 \\ 1.2500 & 0.6250 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -0.6250$ e $\lambda_2 = 1.5625$. Assim:

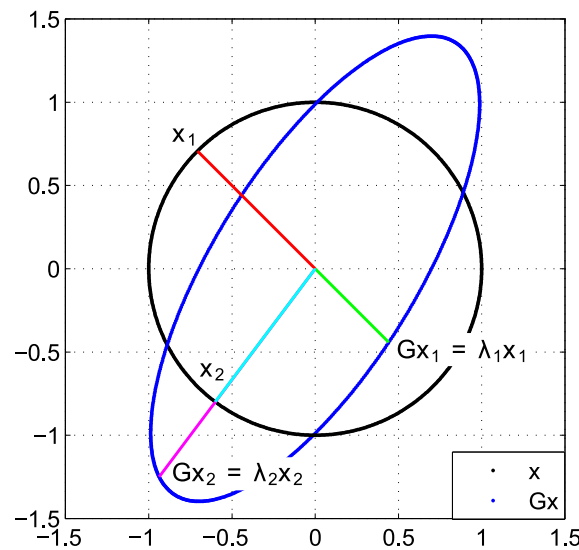


Figura 4.2 – Operação da matriz dada em (4.4) sobre os vetores de raio unitário.

4.2 Diagrama de valores singulares: gráfico de Bode MIMO

O conceito de valores singulares é aplicável às matrizes de transferência de sistemas multivariáveis (MIMO). Os *diagramas de Bode para sistemas multivariáveis* consistem nos gráficos de $\sigma_M(\mathbf{G}(j\omega))$ e $\sigma_m(\mathbf{G}(j\omega))$ em função da frequência angular ω .

Como exemplo, considere a matriz de transferência dada por

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3s}{s^2 + s + 10} \\ \frac{s+1}{s+5} & \frac{2}{s+6} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

O gráfico dos valores singulares para este sistema é mostrado na Figura 4.3.

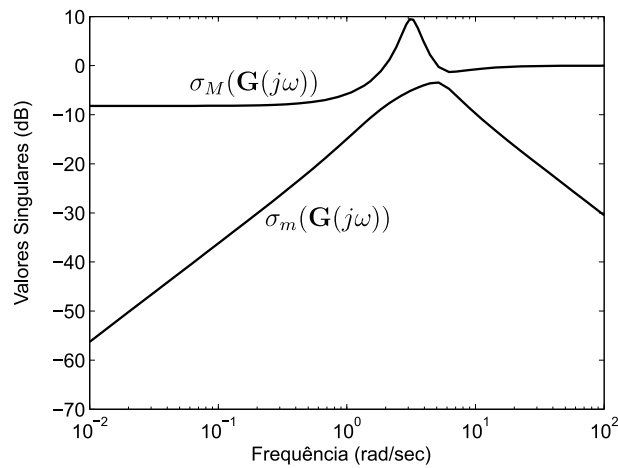


Figura 4.3 – Diagrama de Bode do sistema dado em (4.5).

4.3 Definição da Norma $\mathcal{H}_\infty$ – Sistemas MIMO

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ é definida como:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_M(\mathbf{G}(j\omega)) \quad (4.6)$$

Assim, para o sistema dado em (4.5), o diagrama de valores singulares permite determinar a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema, como ilustra a Figura 4.4:

Assim, considerando que a norma $\mathcal{H}_\infty$ é o valor de pico (pior caso) na resposta em frequência no diagrama de valores singulares de função de transferência, pode-se concluir que a sua minimização implica em atenuar a relação entrada-saída, isto é, o efeito da entrada de perturbação na saída controlada. Assim, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ pode ser interpretado como consistindo de determinar o controlador que minimiza a relação de pior caso entrada-saída (perturbação-saída controlada).

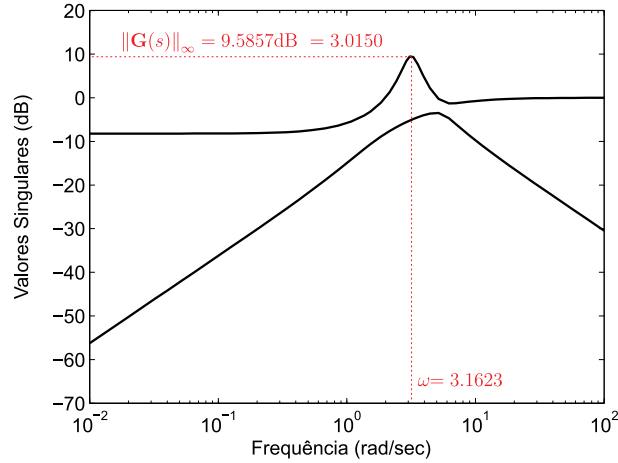


Figura 4.4 – Diagrama de Bode do sistema dado em (4.5) destacando a norma $\mathcal{H}_\infty$.

4.4 Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema linear ilustrado na Figura 4.5, cuja representação em espaço de estados é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^r$ é a perturbação (desconhecida) e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ é a saída a ser controlada. As matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{D}_{12}$ possuem dimensões apropriadas.

O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ é classificado em dois tipos (ZHOU; DOYLE, 1999, p. 269):

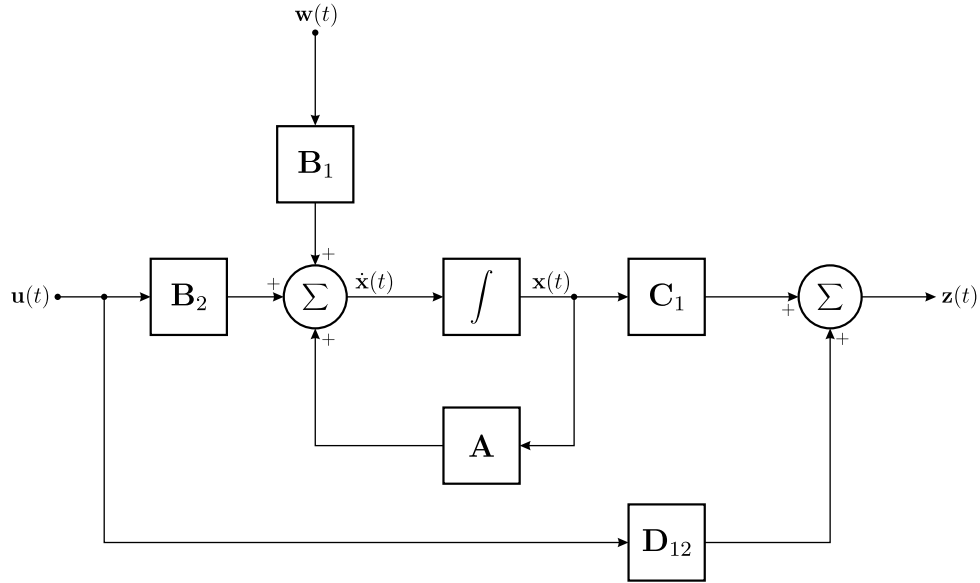
- **Problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ ótimo:** encontrar todos os controladores admissíveis K tais que $\mathbf{T}_{zw}$ é minimizada, onde $\mathbf{T}_{zw}$ é a matriz de transferência em malha fechada da perturbação para a saída a ser controlada;
- **Problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo:** Dado $\gamma > 0$, encontrar todos os controladores admissíveis tais que

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma, \quad \gamma > 0 \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{T}_{zw}$ é a matriz de transferência em malha fechada da perturbação para a saída a ser controlada e γ é um limitante superior da norma $\mathcal{H}_\infty$, a qual é definida por $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty = \max_{\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathcal{L}_2} (\|\mathbf{z}\|_2 / \|\mathbf{w}\|_2)$, sendo $\|\cdot\|_2$ a norma $\mathcal{L}_2$ no espaço de Hilbert das funções quadraticamente integráveis no intervalo $(-\infty, \infty)$.

A abordagem apresentada neste trabalho corresponde ao problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo, no qual não pretende minimizar efetivamente a norma $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$, mas apenas restringi-la por um limitante superior γ . Considerando isto, o critério dado na equação (4.9) pode ser

Figura 4.5 – Diagrama em blocos do sistema dado pelas equações (4.7) e (4.8).



Fonte: o autor

especificado no domínio do tempo como (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012, p. 433)

$$\max_{\substack{\mathbf{z}(t) \in \mathcal{L}_2 \\ \mathbf{w}(t) \in \mathcal{L}_2}} \frac{\|\mathbf{z}(t)\|_2^2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2^2} < \gamma^2 \Leftrightarrow \|\mathbf{z}(t)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 < 0. \quad (4.10)$$

Assim, minimizando o termo $\|\mathbf{z}(t)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(t)\|_2^2$, determina-se o controle $\mathbf{u}(t)$ que atende ao critério $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$ para a perturbação de pior caso. Dessa forma, considerando a equação (4.10), tem-se a seguinte função custo a ser minimizada:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t)] dt \quad (4.11)$$

onde uma matriz simétrica $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ é aqui empregada para ponderar a energia da variável de saída a ser controlada. Agora, define-se

$$L = \frac{1}{2} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t)]. \quad (4.12)$$

Por conseguinte, a função hamiltoniana para o problema de minimizar (4.11) sujeito a (4.7) e (4.8) é dada como

$$\eta = L + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t)] \quad (4.13)$$

onde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ denota o multiplicador de Lagrange associado ao problema de otimização.

Agora, aplicando as condições de otimalidade, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}(t)} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (4.14)$$

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}(t)} = \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (4.15)$$

$$0 = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_2^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (4.16)$$

$$0 = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{w}(t)} = \mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\lambda}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}(t). \quad (4.17)$$

Da equação (4.16), tem-se

$$\mathbf{u}(t) = -\bar{\mathbf{D}}_{12} [\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2^T \boldsymbol{\lambda}(t)] \quad (4.18)$$

onde $\bar{\mathbf{D}}_{12} = (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12})^{-1}$. E da equação (4.17)

$$\mathbf{w}(t) = \gamma^{-2} \mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (4.19)$$

Note que substituindo as equações (4.18) e (4.19) na equação (4.14), tem-se a equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1] \mathbf{x}(t) + [\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{B}_2^T] \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (4.20)$$

Por conseguinte, substituindo a equação (4.18) na equação (4.15), resulta a equação de co-estado

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [-\mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12} \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1] \mathbf{x}(t) + [-\mathbf{A}^T + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12} \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{B}_2^T] \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (4.21)$$

As equações (4.20) e (4.21) podem ser escritas na forma matricial [veja equação (4.22)], onde $\mathbf{H}$ denota a matriz hamiltoniana.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 & \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12} \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^T + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{D}_{12} \bar{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

A condição $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$ ocorre se e somente se a matriz $\mathbf{H}$ não possui autovalores no eixo imaginário (DOYLE et al., 1989). Dessa forma, o valor de γ é determinado como segue:

(P1) Escolher um valor positivo para γ .

(P2) Calcular os autovalores de $\mathbf{H}$ e verificar se os mesmos estão sobre o eixo imaginário.

(P3) Caso $\mathbf{H}$ não tenha autovalores sobre o eixo imaginário, diminuir γ e voltar para o passo (P2); caso contrário, aumentar γ e voltar para (P2). O processo deve continuar até ser obtido o menor valor de γ para o qual $\mathbf{H}$ não tenha autovalores sobre o eixo imaginário.

Para solucionar completamente o problema de minimização da função custo estabelecida em (4.13) é ainda necessária a condição final

$$\lambda(T) = S(T)x(T) \quad (4.23)$$

onde a matriz $S(T)$ é simétrica e semidefinida positiva. Considerando que $x(t)$ e $\lambda(t)$ satisfazem a relação linear dada em (4.23) para todo $t \in [t_0, T]$, então

$$\lambda(t) = S(t)x(t). \quad (4.24)$$

Diferenciando (4.24) com relação a t , tem-se

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{S}(t)x(t) + S(t)\dot{x}(t). \quad (4.25)$$

Agora, substituindo em (4.25) o valor de $\dot{x}(t)$ obtido em (4.20) e o valor de $\dot{\lambda}(t)$ obtido em (4.21), resulta

$$\begin{aligned} & [-C_1^T Q C_1 + C_1^T D_{12} \bar{D}_{12} D_{12}^T Q C_1] x(t) + [-A^T + C_1^T Q D_{12} \bar{D}_{12} B_2^T] \lambda(t) = \\ & \dot{S}(t)x(t) + S(t) \{ [A - B_2 \bar{D}_{12} D_{12}^T Q C_1] x(t) + [\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 \bar{D}_{12} B_2^T] \lambda(t) \}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Substituindo (4.24) em (4.26), tem-se a seguinte equação diferencial de Riccati:

$$\begin{aligned} -\dot{S}(t) = & [A - B_2 \bar{D}_{12} D_{12}^T Q C_1]^T S(t) + S(t) [A - B_2 \bar{D}_{12} D_{12}^T Q C_1] \\ & + S(t) [\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 \bar{D}_{12} B_2^T] S(t) + [C_1^T Q C_1 - C_1^T Q D_{12} \bar{D}_{12} D_{12}^T Q C_1] \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $S(t)$ é a solução desta equação com condição final $S(T)$. Se $S(t)$ converge, então $\dot{S}(t) = 0$ e $S(t) = S$. Assim, (4.27) resulta na equação algébrica de Riccati para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$. Dessa forma, usando a solução S e substituindo (4.24) em (4.18), pode-se obter $u(t)$ para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$:

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (4.28)$$

onde K_c é o ganho do controlador dado por

$$K_c = (D_{12}^T Q D_{12})^{-1} [D_{12}^T Q C_1 + B_2^T S]. \quad (4.29)$$

4.4.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE

O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE é caracterizado como segue: inicialmente, emprega-se um modelo SDC com a mesma estrutura dada nas equações (4.7) e (4.8), isto é, fazendo $A = A(x(t))$, $B_1 = B_1(x(t))$ e $B_2 = B_2(x(t))$. Assim, a matriz Hamiltoniana dada na equação (4.22), bem como a equação de Riccati para o controle $\mathcal{H}_\infty$ tornam-se dependentes do estado. Em seguida, determina-se a solução da SDRE $S(x(t_i))$ para cada instante t_i , conforme a técnica FTRE, que resulta no seguinte ganho para o controlador:

$$K_c(x(t_i)) = \bar{D}_{12} [D_{12}^T Q C_1 + B_2^T(x(t_i)) S(x(t_i))]. \quad (4.30)$$

4.4.2 Exemplo 1

4.4.3 Modelagem da Planta

Considere o sistema carro-pêndulo invertido representado na Figura 4.6, onde

θ	posição angular do pêndulo
x_c	posição linear do carro
m_c	massa do carro
m_p	massa do pêndulo
l	distância do centro de massa ao pivô
g	aceleração da gravidade
I	momento de inércia do pêndulo
F_w	força de perturbação
F	força aplicada ao carro
B_c	coeficiente de atrito do carro
B_p	coeficiente de atrito do pêndulo

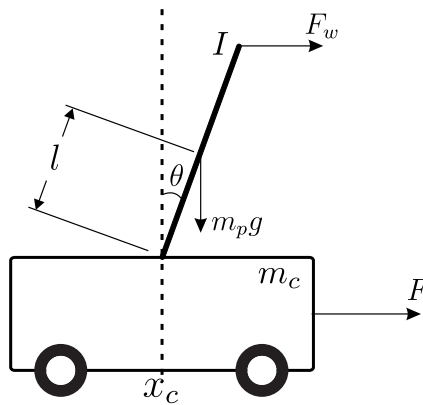


Figura 4.6 – Representação do sistema carro-pêndulo invertido.

Do diagrama de corpo livre do pêndulo, mostrado na Figura 4.7, são obtidas as equações da lei de Newton aplicada à horizontal e à vertical, respectivamente:

$$m_p \frac{d^2}{dt^2} [x_c(t) + l \sin \theta(t)] = F_H \quad (4.31)$$

e

$$m_p \frac{d^2}{dt^2} [l \cos \theta(t)] = F_V - m_p g. \quad (4.32)$$

Têm-se que

$$\frac{d^2}{dt^2} [\sin \theta(t)] = -\dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) + \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) \quad (4.33)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} [\cos \theta(t)] = -\dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t) - \ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) \quad (4.34)$$

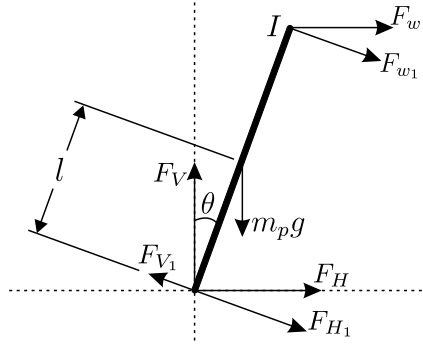


Figura 4.7 – Diagrama de corpo livre do pêndulo invertido. F_V e F_H são as forças de reação vertical e horizontal no pivô, respectivamente.

Das equações (4.31) e (4.32), obtêm-se as forças de reação vertical (F_V) e horizontal (F_H):

$$F_V = m_p l \left[-\dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t) - \ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) \right] + m_p g \quad (4.35)$$

$$F_H = m_p l \left[-\dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) + \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) \right] + m_p \ddot{x}_c(t). \quad (4.36)$$

Agora, aplicando a equação de torque ao centro de gravidade do pêndulo, tem-se

$$\begin{aligned} \tau &= I \ddot{\theta}(t) \\ &= [F_{V_1} - F_{H_1} + F_{w_1}] l - B_p \dot{\theta}(t) \\ &= [F_V \sin \theta(t) + (F_w(t) - F_H) \cos \theta(t)] l - B_p \dot{\theta}(t). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo F_V e F_H das equações (4.35) e (4.36) na equação (4.37), obtém-se

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta}(t) &= m_p l^2 \left[-\dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) - \ddot{\theta}(t) \sin^2 \theta(t) \right] + m_p g l \sin \theta(t) + F_w(t) \cos \theta(t) l \\ &\quad - m_p l^2 \left[-\dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) + \ddot{\theta}(t) \cos^2 \theta(t) \right] - m_p l \ddot{x}_c(t) \cos \theta(t) - B_p \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Daí

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta}(t) &= -m_p l^2 \ddot{\theta}(t) [\sin^2 \theta(t) + \cos^2 \theta(t)] + m_p g l \sin \theta(t) - m_p l \ddot{x}_c(t) \cos \theta(t) \\ &\quad + F_w(t) \cos \theta(t) l - B_p \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Rearranjando os termos:

$$(I + m_p l^2) \ddot{\theta}(t) + B_p \dot{\theta}(t) + m_p l \ddot{x}_c(t) \cos \theta(t) - m_p l g \sin \theta(t) - F_w(t) l \cos \theta(t) = 0. \quad (4.40)$$

Considerando o diagrama de corpo livre do carro mostrado na Figura 4.8, obtém-se a partir das leis de Newton, a seguinte relação:

$$m_c \ddot{x}_c = F(t) - F_H - B_c \dot{x}_c. \quad (4.41)$$

Então, substituindo F_H da equação (4.36) em (4.41), tem-se

$$(m_c + m_p) \ddot{x}_c(t) + B_c \dot{x}_c(t) + m_p l \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - m_p l \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) = F(t). \quad (4.42)$$

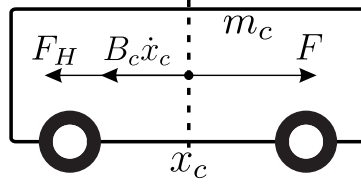


Figura 4.8 – Diagrama de corpo livre do carro. F é a força aplicada ao carro, $B_c \dot{x}_c$ é a força de atrito e F_H é a força de reação horizontal no pivô.

Assim, as equações (4.40) e (4.42) descrevem a dinâmica não linear do sistema carro-pêndulo invertido. Agora, considere o vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ definido por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Daí,

$$(m_c + m_p) \dot{x}_2(t) + B_c x_2(t) + m_p l \dot{x}_4(t) \cos x_3(t) - m_p l x_4^2(t) \sin x_3(t) = F(t) \quad (4.44)$$

e

$$(I + m_p l^2) \dot{x}_4(t) + B_p x_4(t) + m_p l \dot{x}_2(t) \cos x_3(t) - m_p l g \sin x_3(t) - F_w(t) l \cos x_3(t) = 0 \quad (4.45)$$

Fazendo $m_1 = m_c + m_p$, $m_2 = I + m_p l^2$, substituindo as variáveis de estado definidas em (4.43) e combinando as equações (4.40) e (4.42), resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & -\frac{B_c m_2}{m_3} x_2(t) + \frac{m_p l B_p}{m_3} x_4(t) \cos x_3(t) - \frac{m_p^2 l^2 g}{m_3} \sin x_3(t) \cos x_3(t) \\ & + \frac{m_p l m_2}{m_3} x_4^2(t) - \frac{m_p l^2}{m_3} \cos^2 x_3(t) F_w(t) + \frac{m_2}{m_3} F(t) \sin x_3(t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) = & -\frac{B_p m_1}{M_3} x_4(t) + \frac{m_p l B_c}{m_3} x_2(t) \cos x_3(t) - \frac{m_p^2 l^2}{m_3} x_4^2(t) \sin x_3(t) \cos x_3(t) \\ & + \frac{m_p l g m_1}{m_3} \sin x_3(t) + \frac{l m_1}{m_3} \cos x_3(t) F_w(t) - \frac{m_p l}{m_3} \cos x_3(t) F(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde $m_3 = m_1 m_2 - m_p^2 l^2 \cos^2 x_3(t)$.

Assim, sendo $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_3(t) = x_4(t)$, a perturbação $w(t) = F_w(t)$ e o controle $u(t) = F(t)$, obteve-se a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$, dada na equação (4.48), para a estrutura SDC.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_c m_2}{m_3} & -\frac{m_p^2 l^2 g}{2m_3 x_3(t)} \sin 2x_3(t) & \frac{m_p l B_p}{m_3} \cos x_3(t) + \frac{m_p l m_2}{m_3} x_4(t) \sin x_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p l B_c}{m_3} \cos x_3(t) & \frac{m_p l g m_1}{m_3 x_3(t)} \sin x_3(t) & -\frac{B_p m_1}{m_3} - \frac{m_p^2 l^2}{2m_3} x_4(t) \sin 2x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Consequentemente, as matrizes $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{B}_2(\mathbf{x}(t))$ são dadas por

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_p l^2}{m_3} \cos^2 x_3(t) \\ 0 \\ \frac{l m_1}{m_3} \cos x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

e

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_2}{m_3} \\ 0 \\ -\frac{m_p l}{m_3} \cos x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

As simulações de controle do sistema carro-pêndulo invertido foram realizadas utilizando os parâmetros dados na Tabela 7, os quais se baseiam em Kumar e Jerome (2013); para B_c e B_p , utilizou-se valores típicos da literatura.

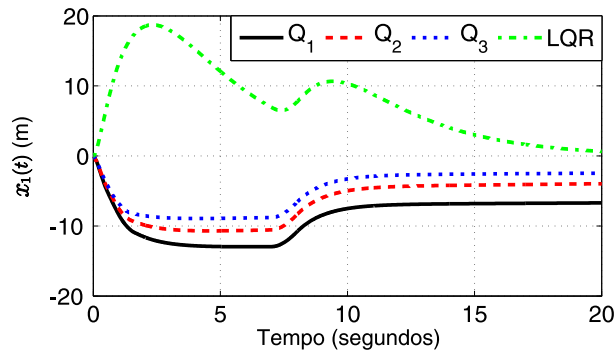
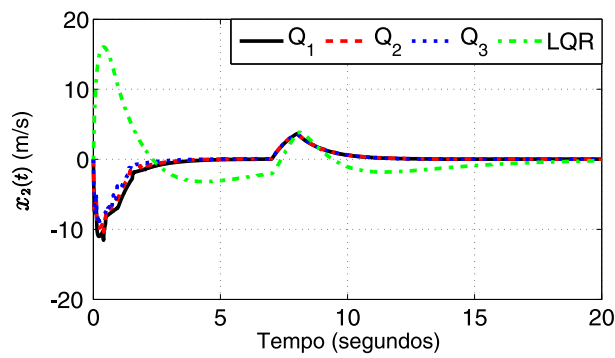
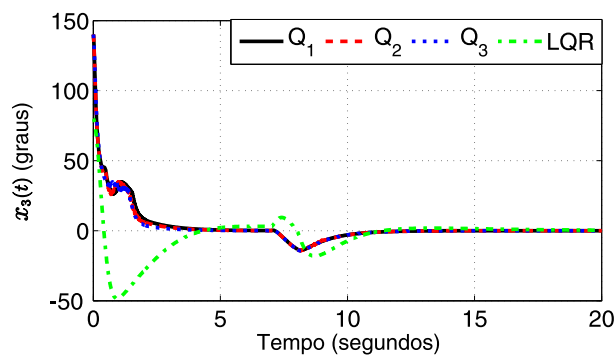
Tabela 7 – Parâmetros do carro-pêndulo invertido.

Parâmetro	Valor	Unidade
m_c	0,94	kg
m_p	0,23	kg
l	0,33	m
B_c	0,44	Nms/rad
B_p	0,05	Nms/rad
I	0,0083	kg-m ²
g	9,81	m/s ²

4.4.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE

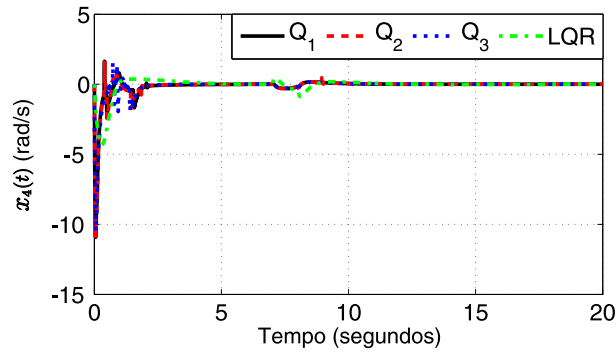
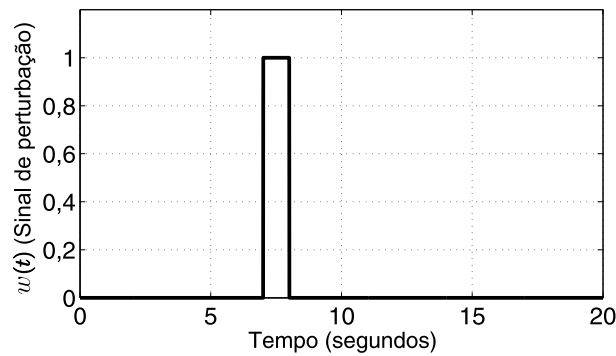
As Figuras 4.9 a 4.12 mostram as curvas de resposta do estado $\mathbf{x}(t)$ para o controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE, com estado inicial $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 140^\circ \ 0]^\top$. A perturbação aplicada ao sistema

é mostrada na Figura 4.13. Visando manipular a energia associada aos estados, considerou-se três distintos cenários para a matriz Q . Note que, em comparativo com o LQR, o controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado em SDRE apresenta um desempenho superior com respeito a energia associada aos estados.

Figura 4.9 – Estado $x_1(t)$.Figura 4.10 – Estado $x_2(t)$.Figura 4.11 – Estado $x_3(t)$.

O código fonte do *script* utilizado na simulação é mostrado a seguir:

```
1 clear
```

Figura 4.12 – Estado $x_4(t)$.Figura 4.13 – Perturbação $w(t)$.

```

2 close all
3 clc
4
5 gamma0 = 100.0;
6 gammaN = 0.10;
7
8 mc = 0.94; % kg
9 mp = 0.23; % kg
10 l = 0.33; % m
11 I = (1/3)*mp*l^2; % kg-m2
12 Bc = 0.44; % Nms/rad
13 Bp = 0.05; % Nms/rad
14 g = 9.81; % m/s2
15 M1 = mc+mp;
16 M2 = I+mp*l^2;
17
18 Tf = 20; % final time
19 h = 0.01; % step size
20 t = 0:h:Tf; % time vector
21

```

```

22 steppoint = 0.3;
23 steppointw1 = 7.0;
24 steppointw2 = 8.0;
25
26 % F = 1.0*[ones(1,length(0:h:steppoint)) zeros(1,length(steppoint+h:h:Tf))]; % input (N)
27 Fw = 1.0*[zeros(1,length(0:h:steppointw1)) ones(1,length(steppointw1+h:h:steppointw2)) zeros(1,length(steppointw2+h:h:Tf))];
28 w = Fw;
29
30
31 x(:,1) = [0;0;140*(pi/180);0]; % initial condition
32
33 M3km = M1*M2-(mp^2)*(l^2)*cos(x(3,1))^2;
34 Akm = [0 1 0 0;
35         0 -Bc*M2/M3km -(g*(mp^2)*(l^2)*0.5*sin(2*x(3,1)))/(x(3,1)*M3km) ...
36         (mp*l*Bp*cos(x(3,1)))/M3km+(M2*mp*l*(x(4,1))*sin(x(3,1)))/M3km;
37         0 0 0 1;
38         0 mp*l*Bc*cos(x(3,1))/M3km M1*mp*g*l*sin(x(3,1))/(x(3,1)*M3km) ...
39         -M1*Bp/M3km-(mp^2)*(l^2)*0.5*sin(2*x(3,1))*x(4,1)/M3km];
40 B1km = [0;-mp*(l^2)*(cos(x(3,1))^2)/M3km;0;M1*l*cos(x(3,1))/M3km];
41 B2km = [0;M2/M3km;0;-mp*l*cos(x(3,1))/M3km];
42 Bkm = [B1km,B2km];
43 % C1 = [1 0 0 0;0 0 1 0];
44 % C1 = [0.00001 1 1 0];
45 % C1 = [0.00001 0 0 0];
46 %      0      0 1 0];
47 % C1 = [0.00001 0 0 0];
48 %      0      0 1 0];
49 C1 = eye(4,4);
50 Q = diag([0.00001 1 1 1]);
51 % C1 = [0.0001 0 15 0];
52 % C1 = diag([0.0001 0 1.0 0]);
53 C2 = eye(4,4);
54 C = [C1;C2];
55 % D12 = [1 0]';
56 % D12 = [1 0]';
57 % D21 = [1 0 0 0]';
58 % D = [zeros(4,1),D12;D21,zeros(4,1)];
59 % D12t = inv(D12'*D12);
60 % Abar = Akm-0*B2km*D12t*D12'*C1;
61 m1x = size(B1km,2);
62 m2x = size(B2km,2);
63 % m3x = size(D12t,2);

```

```

64 Qbar = C1'*Q*C1;
65
66 % Qbar = C1'*C1-0*C1'*D12*D12t*D12'*C1;
67 % Gsysa = [Akm,Bkm;C,D];
68 % Gsys = pck(Akm,Bkm,C,D);
69 % [gopt,Kcen,x1,x2,y1,y2,Preg] = hinfric(Gsys,[4 1],gammaN,gamma0)
70 % [Kmat, Tzw, gamasub,AX,AY] = hinfsyn(Gsys,1,1,0,10,1e-4,1,1e-10,1e-6,1);
71 % M = [Akm,B1km;C2,D21];
72
73
74 for gamma=gamma0:-0.1:gammaN % laço para diminuição progressiva de gama
75     Rbar = [-(gamma^2)*eye(m1x) zeros(m1x,m2x); zeros(m2x,m1x) eye(m2x)];
76 %     Ham = [Abar,(gamma^(-2))*B1km*B1km'-B2km*D12t*B2km';
77 %           -Qbar,-Abar'];
78     [S,aux1,aux2,report] = care(Akm,Bkm,Qbar,Rbar);
79 %     disp('oi'),
80 %     pause
81     if report== -1 || report== -2;
82         while (report== -1 || report== -2 || sum(real(eig(S))<0)>0)
83             gamma = gamma+0.1;
84             Rbar = [-(gamma^2)*eye(m1x) zeros(m1x,m2x); zeros(m2x,m1x) eye(m2x)];
85             [S,aux1,aux2,report] = care(Akm,Bkm,Qbar,Rbar);
86
87         end
88         break;
89     end
90 end
91
92 disp('oi')
93 pause(1)
94
95 % K(:, :, 1) = D12t*(D12'*C1+B2km'*S);
96 K(:, :, 1) = B2km'*S;
97
98 u(1,1) = -K(:, :, 1)*x(:, 1);
99 if u(1,1)>200
100     u(1,1) = 200.0;
101 elseif u(1,1)<-200
102     u(1,1) = -200.0;
103 end
104
105 for k = 2:length(t)% trapezoidal method to solve ode's

```

```

106 %      k
107 %      pause
108      M3km = M1*M2-(mp^2)*(l^2)*cos(x(3,k-1))^2;
109      Akm = [0 1 0 0;
110             0 -Bc*M2/M3km -(g*(mp^2)*(l^2)*0.5*sin(2*x(3,k-1)))/(x(3,k-1)*M3km) ...
111             (mp*l*Bp*cos(x(3,k-1)))/M3km+(M2*mp*l*(x(4,k-1))*sin(x(3,k-1)))/M3km;
112             0 0 0 1;
113             0 mp*l*Bc*cos(x(3,k-1))/M3km M1*mp*g*l*sin(x(3,k-1))/(x(3,k-1)*M3km) ...
114             -M1*Bp/M3km-(mp^2)*(l^2)*0.5*sin(2*x(3,k-1))*x(4,k-1)/M3km];
115      B1km = [0;-mp*(l^2)*(cos(x(3,k-1))^2)/M3km;0;M1*l*cos(x(3,k-1))/M3km];
116      B2km = [0;M2/M3km;0;-mp*l*cos(x(3,k-1))/M3km];
117
118      postokm(k) = rank(ctrb(Akm,[B1km,B2km]));
119      xdota = Akm*x(:,k-1)+B1km*w(1,k-1)+B2km*u(1,k-1);
120      x(:,k) = x(:,k-1)+xdota*h;
121      M3k = M1*M2-(mp^2)*(l^2)*cos(x(3,k))^2;
122      Ak = [0 1 0 0;
123            0 -Bc*M2/M3k -(g*(mp^2)*(l^2)*0.5*sin(2*x(3,k)))/(x(3,k)*M3k) ...
124            (mp*l*Bp*cos(x(3,k)))/M3k+(M2*mp*l*(x(4,k))*sin(x(3,k)))/M3k;
125            0 0 0 1;
126            0 mp*l*Bc*cos(x(3,k))/M3k M1*mp*g*l*sin(x(3,k))/(x(3,k)*M3k) ...
127            -M1*Bp/M3k-(mp^2)*(l^2)*0.5*sin(2*x(3,k))*x(4,k)/M3k];
128      B1k = [0;-mp*(l^2)*(cos(x(3,k))^2)/M3k;0;M1*l*cos(x(3,k))/M3k];
129      B2k = [0;M2/M3k;0;-mp*l*cos(x(3,k))/M3k];
130 % -----
131 % postok(k) = rank(ctrb(Ak,[B1k,B2k]));
132
133      Bk = [B1k,B2k];
134      postok(k) = rank([Bk Ak*Bk Ak^2*Bk]);
135      postokB(k) = rank(Bk);
136      % Abar = Ak-B2k*D12t*D12'*C1;
137 %
138
139      for gamma=gamma0:-0.1:gammaN % laço para diminuição progressiva de gama
140          Rbar = [-(gamma^2)*eye(m1x) zeros(m1x,m2x); zeros(m2x,m1x) eye(m2x)];
141          %      Ham = [Abar,(gamma^(-2))*B1km*B1km'-B2km*D12t*B2km';
142          %              -Qbar,-Abar];
143          [S,aux1,aux2,report] = care(Ak,Bk,Qbar,Rbar);
144          if report==-1 || report==-2;
145              while (report==-1 || report==-2 || sum(real(eig(S))<0)>0)
146                  gamma = gamma+1.1;
147                  Rbar = [-(gamma^2)*eye(m1x) zeros(m1x,m2x); zeros(m2x,m1x) eye(m2x)];

```

```
148         [S,aux1,aux2,report] = care(Ak,Bk,Qbar,Rbar);
149     end
150     break;
151 end
152 end
153
154 % K(:, :, k) = D12t*(D12'*C1+B2k'*S);
155 K(:, :, k) = B2k'*S;
156 u(1,k) = -K(:, :, k)*x(:, k);
157
158 if u(1,k)>200
159     u(1,k) = 200.0;
160 elseif u(1,k)<-200
161     u(1,k) = -200.0;
162 end
163
164 % -----
165 xdotatrap = Ak*x(:, k)+B1k*w(1,k)+B2k*u(1,k);
166 x(:, k) = x(:, k-1)+(xdota+xdotatrap)*h*0.5;
167
168 end
169
```

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou a técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado na equação de Riccati dependente de estado (SDRE), a qual é tem como principal característica a extensão do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para o contexto não linear. Inicialmente, os fundamentos da teoria de controle ótimo para sistemas lineares são apresentados considerando a abordagem tanto em tempo discreto quanto em tempo contínuo. A solução apresentada para problema de controle ótimo é essencialmente baseada na equação de Riccati. Esta abordagem inicial fundamenta a estrutura das técnicas de controle sub-ótimo apresentadas na sequência: a técnica FTRE (*frozen-time Riccati equation*), a qual está essencialmente baseada no emprego da chamada equação de Riccati dependente de estado (SDRE) e a técnica FPRE (*forward-propagating Riccati equation*), caracterizada pela integração em avanço da equação de Riccati e utilização de condição inicial em vez de condição final. Ambas essas técnicas se apresentam como uma extensão para a aplicação da teoria de controle ótimo no contexto de sistemas lineares e variantes no tempo e sistemas não lineares. Nesse aspecto, uma contribuição do presente trabalho é a proposta do controle FTRE rastreador, no qual se estabelece uma referência para a saída do sistema não linear.

Na parte final do trabalho é apresentado o controle $\mathcal{H}_\infty$ baseado na equação de Riccati dependente de estado para sistemas não lineares. A abordagem feita se baseia essencialmente nas estruturas das técnicas FPRE e FTRE apresentadas. Resultados de simulação foram apresentados em cada uma das técnicas apresentadas para avaliação da aplicação e eficácia das mesmas.

REFERÊNCIAS

- AHMED, A.; MOINUDDIN, M.; AL-SAGGAF, U. M. State space least mean square for state estimation of synchronous motor. In: **8th International Conference on Electrical and Computer Engineering**. Dhaka: [s.n.], 2014. p. 461–464. doi:10.1109/ICECE.2014.7026885.
- APKARIAN, P.; NOLL, D. Nonsmooth H_∞ synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 51, n. 1, p. 71–86, jan. 2006. doi:10.1109/TAC.2005.860290.
- ATHANS, M.; FALB, P. L. **Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications**. New York: Dover Publications, 2007.
- BABAZADEH, M.; NOBAKHTI, A. Direct synthesis of fixed-order H_∞ controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 60, n. 10, p. 2704–2709, Oct 2015. ISSN 0018-9286. doi:10.1109/TAC.2015.2461832.
- BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear Programming**. 2nd. ed. [S.l.]: Athena Scientific, 1999.
- BOLTYANSKII, V.; GAMKRELIDZE, R.; PONTRYAGIN, L. S. On the theory of optimal processes. In: BELLMAN, R.; KALABA, K. (Ed.). **Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory**. New York: Dover, 1964. v. 110, n. 1, p. 7–10.
- BRYSON, A. E. Optimal control-1950 to 1985. **IEEE Control Systems**. v. 16, n. 3, p. 26–33, Jun 1996.
- CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. 3. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1999.
- ÇIMEN, T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey. **IFAC Proceedings Volumes**. v. 41, n. 2, p. 3761–3775, jul. 2008. ISSN 1474-6670. doi:10.3182/20080706-5-KR-1001.00635.
- CLOUTIER, J. R.; D’SOUZA, C. N.; MRACEK, C. P. Nonlinear regulation and nonlinear H_∞ control via the State-Dependent Riccati Equation technique: Part1, theory; part2, examples. In: **International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace**. Daytona Beach: [s.n.], 1996.
- CRUZ, J. J. **Controle Robusto Multivariável: O Método LGQ/LTR**. [S.l.]: Edusp, 1996.
- DHAOUADI, R.; MOHAN, N.; NORUM, L. Design and implementation of an extended kalman filter for the state estimation of a permanent magnet synchronous motor. **IEEE Transactions on Power Electronics**. v. 6, n. 3, p. 491–497, jul. 1991. doi:10.1109/63.85891.
- DORATO, P. A historical review of robust control. **IEEE Control Systems Magazine**. v. 7, n. 2, p. 44–47, abr. 1987.
- DOYLE, J. Robust and optimal control. In: **Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.: s.n.], 1996. v. 2, p. 1595–1598. ISSN 0191-2216.
- DOYLE, J.; GLOVER, K. A state space approach to H_∞ optimal control. In: NIJMEIJER, H.; SCHUMACHER, J. M. (Ed.). **Three Decades of Mathematical Systems Theory: A Colletion of Surveys at the Occasion of the 50th Birthday of Jan C. Willens**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 135). p. 179–218.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 34, n. 8, p. 831–847, Aug 1989. ISSN 0018-9286.

GAHINET, P.; APAKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. **International Journal of Robust Nonlinear Control**. v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994. doi:10.1002/rnc.4590040403.

HELTON, J. W.; JAMES, M. R. **Extending H_∞ Control to Nonlinear Systems: Control of Nonlinear Systems to Achieve Performance Objectives**. [S.l.]: SIAM, 1999. doi:10.1137/1.9780898719840.

KALMAN, R. E. When is a linear control system optimal? **Transactions ASME, Journal of Basic Engineering**. v. 86, n. 1, p. 51–60, mar. 1964. doi:10.1115/1.3653115.

KIRK, D. E. **Optimal Control Theory: An Introduction**. New York: Dover Publications, 1998.

KUMAR, E. V.; JEROME, J. Robust LQR controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. **Procedia Engineering**. v. 64, p. 169–178, 2013. ISSN 1877-7058. International Conference on Design and Manufacturing (IConDM2013).

LEIGH, J. R. **Essentials of Nonlinear Control Theory**. [S.l.]: Peter Peregrinus, 1983. (IEE TOPICS IN CONTROL, v. 2).

LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. **Optimal Control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.

ORLOV, Y. V.; AGUILAR, L. T. **Advanced H_∞ Control: Towards Nonsmooth Theory and Applications**. [S.l.]: Birkhäuser, 2014.

PRACH, A.; TEKINALP, O.; BERNSTEIN, D. S. A numerical comparison of frozen-time and forward-propagating riccati equations for stabilization of periodically time-varying systems. In: **2014 American Control Conference**, [S.l.: s.n.], 2014. p. 5633–5638. ISSN 0743-1619.

PRACH, A.; TEKINALP, O.; BERNSTEIN, D. S. Infinite-horizon linear-quadratic control by forward propagation of the differential riccati equation. **IEEE Control Systems Magazine**. abr. 2015.

SAFONOV, M.; ATHANS, M. Gain e margin for multiloop LQG regulators. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 22, n. 2, p. 173–179, abr. 1977. doi:10.1109/TAC.1977.1101470.

SAFONOV, M. G. Origins of robust control: Early history and future speculations. **Annual Reviews in Control**. v. 36, n. 2, p. 173–181, 2012. doi:10.1016/j.arcontrol.2012.09.001.

SANTOS, R. J. M.; SOUZA, F. C. Controle H_∞ baseado na equação de riccati dependente das variáveis de estado aplicado a um sistema carro-pêndulo invertido. In: **Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2017)**. Porto Alegre, RS: [s.n.], 2017. p. 650–655. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/sbai17/papers/paper_200.pdf>.

SIMON, D. **Optimal state estimation: Kalman, H_∞ , and nonlinear approaches**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. [S.l.]: Prentice Hall, 1991.

- STOORVOGEL, A. A. **The H_∞ control problem: A state space approach**. Tese (Doutorado) — University of Eindhoven, Netherlands, out. 1990.
- SUSSMANN, H. J.; WILLEMS, J. C. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. **IEEE Control Systems**. v. 17, n. 3, p. 32–44, Jun 1997. doi:10.1109/37.588098.
- TADMOR, G. Worst-case design in the time domain: The maximum principle and the standard H_∞ problem. **Mathematics of Control, Signals and Systems**. v. 3, n. 4, p. 301–324, dez. 1990. doi:10.1007/BF02551373.
- WANG, R.; JING, H.; HU, C.; YAN, F.; CHEN, N. Robust H_∞ path following control for autonomous ground vehicles with delay and data dropout. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**. v. 17, n. 7, p. 2042–2050, July 2016.
- XU, J.; CAI, C.; CAI, G.; ZOU, Y. Robust H_∞ control for miniature unmanned aerial vehicles at hover by the finite frequency strategy. **IET Control Theory Applications**. v. 10, n. 2, p. 190–200, 2016. ISSN 1751-8644. doi:10.1049/iet-cta.2015.0641.
- ZAMES, G. Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. **IEEE Transactions on Circuit Theory**. v. 10, n. 3, p. 392–404, set. 1963. doi:10.1109/TCT.1963.1082162.
- ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 26, n. 2, p. 301–320, Apr 1981. ISSN 0018-9286.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of Robust Control**. New Jersey: Prentice Hall, 1999.