

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE - PPGEE

JÉSSICA ALMEIDA DOS SANTOS

**METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA BASEADA EM MODELO DE
HAMMERSTEIN NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES MULTIVARIÁVEIS.**

São Luís - MA

2018

JÉSSICA ALMEIDA DOS SANTOS

**METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA BASEADA EM MODELO DE
HAMMERSTEIN NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES MULTIVARIÁVEIS.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia de eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Almeida dos Santos, Jéssica.

METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA BASEADA EM MODELO DE
HAMMERSTEIN NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES MULTIVARIÁVEIS / Jéssica
Almeida dos Santos. - 2018.

136 f.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do
Maranhão, São Luís, 2018.

1. Modelo de Hammerstein. 2. Realização Mínima. 3.
Sistema de Inferência Nebuloso Takagi-Sugeno. 4. Sistemas
Dinâmicos não Lineares. 5. Sistemas Nebulosos Evolutivos.
I. de Oliveira Serra, Ginalber Luiz. II. Título.

JÉSSICA ALMEIDA DOS SANTOS

**METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA BASEADA EM MODELO DE
HAMMERSTEIN NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES MULTIVARIÁVEIS.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia de eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Trabalho aprovado em São Luís - MA, 20 de Março de 2018.

Prof. Ginalber Luiz de Oliveira Serra, Dr,
IFMA
Orientador

Prof. Patricia Helena Moraes Rêgo, Dr,
UEMA
Membro da Banca Examinadora

Prof. Orlando Donato Rocha Filho, Dr,
IFMA
Membro da Banca Examinadora

Este trabalho é dedicado às Minhas Marias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ter guiado-me por esse caminho de desafios sempre iluminando-se com sua luz divina. Agradeço a Ele também por ter sempre mantido minha força nos momentos de dificuldades, mesmo quando eu mesma não a encontrava.

Agradeço ao professor Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra pela orientação, ensino, confiança, compreensão e todo o suporte na elaboração desta dissertação.

Às minhas mães (mãe e vó - Minhas Marias) e a todos os membros da minha família (Camila, Júnior, Eliene, Elizete, Rosilene, Júlia, Jailton, Marcelo, Sthephanny, Anne, Marcone, José Moreno e também aos não citados) que sempre torceram por mim, ajudaram e demonstraram orgulho dos meus pequenos feitos diariamente.

A Universidade Federal do Maranhão e a CAPES pelo apoio estrutural e financeiro para que essa pesquisa fosse desenvolvida.

Ao Instituto Federal do Maranhão e a todas as pessoas com que convivi ao longo desses 2 anos, sendo que a comunhão com os amigos e o aprendizado em grupo foram experiências enriquecedoras na minha formação. Agradeço aos companheiros de grupo de pesquisa Adriano, Anderson Pablo, Hugo, Selmo, Edson por todo o apoio que me deram.

Agradeço em especial aos meus amigos da graduação e para a vida toda também companheiros de estudo nesses 2 anos Priscila, Luís Miguel e Arnaldo.

Aos meus amigos que, mesmo não listando todos os nomes, sabem o quanto foram importantes nessa trajetória Maycon Noletto, Patrícia Braga, Railson, Luiz Pinheiro, Felipe Gomes, Carol, Samuel, Nelson, Creuma, Francisco.

Agradeço a todos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte da minha formação acadêmica. O meu muito obrigado a vocês.

RESUMO

Nesta dissertação é apresentada uma nova metodologia nebulosa evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados para identificação de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis. Nesta abordagem, o bloco não linear estático é parametrizado através de um sistema nebuloso evolutivo. Este, por sua vez, é composto por um algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo, baseado na similaridade dos dados experimentais disponibilizados pelo sistema dinâmico para estimação do antecedente, e por um algoritmo recursivo nebuloso de realização de auto-sistema (*Recursive Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm* - RF-ERA) para estimação de submodelos lineares no espaço de estados do consequente. O bloco dinâmico linear é parametrizado via algoritmo recursivo de realização de auto-sistema (*Recursive Eigensystem Realization Algorithm* - R-ERA). Os resultados computacionais e experimentais para avaliação da metodologia proposta consistem em: identificação de um processo térmico; identificação de sistemas dinâmicos amplamente usados como *benchmark* na literatura e identificação de um processo evaporador. Os resultados são avaliados tanto do ponto de vista da relação entrada e saída quanto da estimação online da não linearidade estática sistema dinâmico.

Palavras-chaves: Sistemas Nebulosos Evolutivos, Realização Mínima, Modelo de Hammerstein, Sistemas Dinâmicos não Lineares, Sistema de Inferência Nebuloso Takagi-Sugeno.

ABSTRACT

In this paper, a novel evolving fuzzy methodology based on state-space Hammerstein model is presented for identification of multivariable nonlinear dynamic systems. In this approach, the static nonlinear block is parameterized through an evolving fuzzy system. This, in turn, is composed of an evolving fuzzy clustering algorithm based on the similarity of the experimental data provided by the dynamic system for estimation of the antecedent, and by a recursive fuzzy eigensystem realization algorithm (RF-ERA) for estimation of the state space linear submodels of the consequent. The linear dynamic block is parameterized via recursive eigensystem realization algorithm (R-ERA). The computational and experimental results to evaluate the proposed methodology consist of: identification of a thermal process; identification of dynamic systems widely used as benchmark in the literature and identification of an evaporator process. The results are evaluated both from point of view of the input and output relationship and from online estimation of the static nonlinearity of the dynamic system.

Key-words: Evolving Fuzzy System, minimal realization, Hammerstein Model, Nonlinear Dynamic Systems, Takagi-Sugeno Fuzzy Inference System.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Diagrama dos diferentes tipos de modelagem matemática aplicadas a sistemas dinâmicos: caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta.	17
Figura 2	– Ilustração do processo de identificação de um sistema dinâmico.	19
Figura 3	– Modelo de Hammerstein no espaço de estados.	26
Figura 4	– Modelo de Hammerstein no espaço de estados com não linearidades separadas.	26
Figura 5	– Modelo de Hammerstein no espaço de estados com não linearidades combinadas.	27
Figura 6	– Modelos adaptativos <i>versus</i> modelos evolutivos: (a) caso em que apenas a adaptação de parâmetros é suficiente para atualização do modelo com as informações presentes nos novos dados disponibilizados; (b) caso onde a evolução da estrutura do modelo é requerida, pois a adaptação de parâmetros, exemplificada pela linha sólida, não é suficiente para fazer uma boa aproximação do modelo quando novos dados são disponibilizados.	39
Figura 7	– Agrupamento de um conjunto de dados em diferentes números de grupos com diferentes formas, demarcados por cada tipo de linha.	41
Figura 8	– Formato dos grupos criados a partir de um conjunto de dados usando-se diferentes métricas de distância: grupo demarcado pela linha sólida resultante de um agrupamento baseado na norma Euclidiana; grupo demarcado pela linha tracejada resultante de um agrupamento baseado na norma Mahalonobis.	44
Figura 9	– Estrutura da metodologia nebulosa Takagi-Sugeno evolutiva para estimação de modelos de Hammerstein no espaço de estados proposta.	53
Figura 10	– Conjunto de dados usado para identificação: (a) entrada u (b) saída y	76
Figura 11	– Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.	77
Figura 12	– Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa $H_0^{i i=1,\dots,9}$ construída com as 200 amostras de inicialização do algoritmo.	78
Figura 13	– Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i	78
Figura 14	– Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i	79
Figura 15	– Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i	79
Figura 16	– Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i	80
Figura 17	– Sinal intermediário w_k estimado: linha tracejada - sinal esperado calculado pela função estática não linear real; linha sólida - sinal estimado recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	80
Figura 18	– Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear.	81
Figura 19	– Estimação recursiva da matriz de parâmetros A	82
Figura 20	– Estimação recursiva da matriz de parâmetros B	82

Figura 21 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros C	83
Figura 22 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros D	83
Figura 23 – Saída estimada durante treinamento do modelo: linha tracejada - saída real do sistema dinâmico; linha sólida - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	84
Figura 24 – Saída estimada com dados de validação: linha tracejada - saída real do sistema dinâmico; linha sólida - saída do modelo de Hammerstein nebuloso no espaço de estados.	84
Figura 25 – Curva estática: linha tracejada - não linearidade estática real; linha sólida - não linearidade estática estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	85
Figura 26 – Processo Térmico Real.	86
Figura 27 – Conjunto de dados experimentais usado para identificação: (a) entrada u (b) saída y	87
Figura 28 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.	88
Figura 29 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa.	89
Figura 30 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i	90
Figura 31 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i	90
Figura 32 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i	91
Figura 33 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i	91
Figura 34 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear.	92
Figura 35 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz A	92
Figura 36 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz B	93
Figura 37 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz C	93
Figura 38 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz D	94
Figura 39 – Saída estimada durante treinamento do modelo: linha tracejada - saída real do sistema térmico; linha sólida - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	94
Figura 40 – Saída estimada com dados de validação: linha tracejada - saída real do sistema térmico; linha sólida - saída do modelo de Hammerstein nebuloso no espaço de estados.	95
Figura 41 – Curva estática: linha tracejada - não linearidade estática da planta térmica; linha sólida - não linearidade estática estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	95

Figura 42 – Conjunto de dados de entrada usado para identificação: (a) entrada u_1 ; (b) entrada u_2	98
Figura 43 – Conjunto de dados de saída usado para identificação: (a) saída y_1 (b) saída y_2	99
Figura 44 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.	100
Figura 45 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa $H_0^{i i=1,\dots,11}$ construída com as 200 amostras de inicialização do algoritmo.	100
Figura 46 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal (1,1).	101
Figura 47 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal (2,2).	101
Figura 48 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i : elemento da diagonal principal (1,1).	102
Figura 49 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i : elemento da diagonal principal (2,2).	102
Figura 50 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i : elemento da diagonal principal (1,1).	103
Figura 51 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i : elemento da diagonal principal (2,2).	103
Figura 52 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i : elemento da diagonal principal (1,1).	104
Figura 53 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i : elemento da diagonal principal (2,2).	104
Figura 54 – Sinal intermediário w_k estimado: (a) linha tracejada - sinal w_1 esperado calculado pela função estática não linear real e linha sólida - sinal w_1 estimado recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) linha tracejada - sinal w_2 esperado calculado pela função estática não linear real e linha sólida - sinal w_2 estimado recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	105
Figura 55 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear multivariável.	106
Figura 56 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros A	107
Figura 57 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros B	107
Figura 58 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros C	108
Figura 59 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros D	108

Figura 60 – Saída estimada durante treinamento: (a) linha tracejada - saída real y_1 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_1 estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) linha tracejada - saída real y_2 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_2 estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	109
Figura 61 – Saída com dados de validação: (a) linha tracejada - saída real y_1 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_1 do modelo obtido pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) linha tracejada - saída real y_2 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_2 do modelo obtido pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	110
Figura 62 – Curva estática: (a) não linearidade das entradas u_1 e u_2 para a saída w_1 - linha tracejada representa a não linearidade estática real e a linha sólida é a não linearidade estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) não linearidade das entradas u_1 e u_2 para a saída w_2 - linha tracejada representa a não linearidade estática real e a linha sólida é a não linearidade estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	111
Figura 63 – Conjunto de dados usado para identificação: saída y_1	112
Figura 64 – Conjunto de dados usado para identificação: saída y_2	113
Figura 65 – Conjunto de dados usado para identificação: saída y_3	113
Figura 66 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.	115
Figura 67 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa.	115
Figura 68 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(1,1)$	116
Figura 69 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(2,2)$	116
Figura 70 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(3,3)$	117
Figura 71 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(4,4)$	117
Figura 72 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(5,5)$	118
Figura 73 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(6,6)$	118
Figura 74 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(7,7)$	119
Figura 75 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear multivariável.	119

Figura 76 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros A : elementos da diagonal principal da matriz A	120
Figura 77 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros B : elementos $B_{(j,j)}$ da matriz B , com $j = [1, \dots, 3]$	120
Figura 78 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros C : elementos $C_{(j,j)}$ da matriz C , com $j = [1, \dots, 3]$	121
Figura 79 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros D : elementos da diagonal principal da matriz D	121
Figura 80 – Saída y_1 estimada durante treinamento: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida preta - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	122
Figura 81 – Saída y_2 estimada durante treinamento: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida preta - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	123
Figura 82 – Saída y_3 estimada durante treinamento: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida preta - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.	123
Figura 83 – Saída y_1 computada com dados de validação: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida - saída computada pelo modelo nebuloso evolutivo proposto.	124
Figura 84 – Saída y_2 computada com dados de validação: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida - saída computada pelo modelo nebuloso evolutivo proposto.	124
Figura 85 – Saída y_3 computada com dados de validação: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida - saída computada pelo modelo nebuloso evolutivo proposto.	125

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Análise comparativa da metodologia proposta.	85
Tabela 2 – Resultados experimentais da metodologia nebulosa evolutiva proposta obtidos na identificação de um processo térmico.	96
Tabela 3 – Resultados computacionais da metodologia nebulosa evolutiva proposta obtidos na identificação de um sistema não linear multivariável.	106
Tabela 4 – Resultados experimentais, pela metodologia nebulosa evolutiva proposta, obtidos na identificação de um processo de um evaporador.	122

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ARX	<i>AutoRegressive with eXogenous input</i> - Modelo Autoregressivo com Entrada Exógena.
eTS	<i>evolving Takagi-Sugeno</i> - Takagi-Sugeno evolutivo.
FLEXFIS	<i>Flexible Fuzzy Inference Systems</i> - Sistemas de Inferência <i>Fuzzy</i> Flexíveis.
FWLS	<i>Fuzzy Weighted Least Squares</i> - Mínimos Quadrados Ponderados Nebuloso. mínimos quadrados ponderados nebuloso recursivo (<i>Recursive Fuzzily Weighted Least Squares</i> - RFWLS)
RFWLS	<i>Recursive Fuzzily Weighted Least Squares</i> - Mínimos Quadrados Ponderados Nebuloso Recursivo.
MSE	<i>Mean Square Error</i> - Erro Quadrático Médio.
FIT	<i>Best FIT</i>
SAFIS	<i>Sequential Adaptive Fuzzy Inference System</i> - Sistema de Inferência Nebuloso Adaptativo e Sequencial.
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> - Decomposição em Valores Singulares.
xTS	<i>eXtended Takagi-Sugeno</i> - Takagi-Sugeno estendido.
TS	Takagi-Sugeno.
ERA	<i>Eigensystem Realization Algorithm</i> - Algoritmo de Realização de Auto-Sistema.
R-ERA	<i>Recursive Eigensystem Realization Algorithm</i> - Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Recursivo.
RF-ERA	<i>Recursive Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm</i> - Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso Recursivo.
NARMAX	<i>Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous input</i> - Modelo não Linear Autoregressivo de Média Móvel com Entrada Exógena.
RLS	<i>Recursive Least Squares</i> - Mínimos Quadrados Recursivo.
FCM	<i>Fuzzy C-Means</i> .
FMLE	Algoritmo de Estimação da Máxima Verossimilhança Nebulosa.

GK Gustafson-Kessel.

LIT Linear Invariante no Tempo.

SUMÁRIO

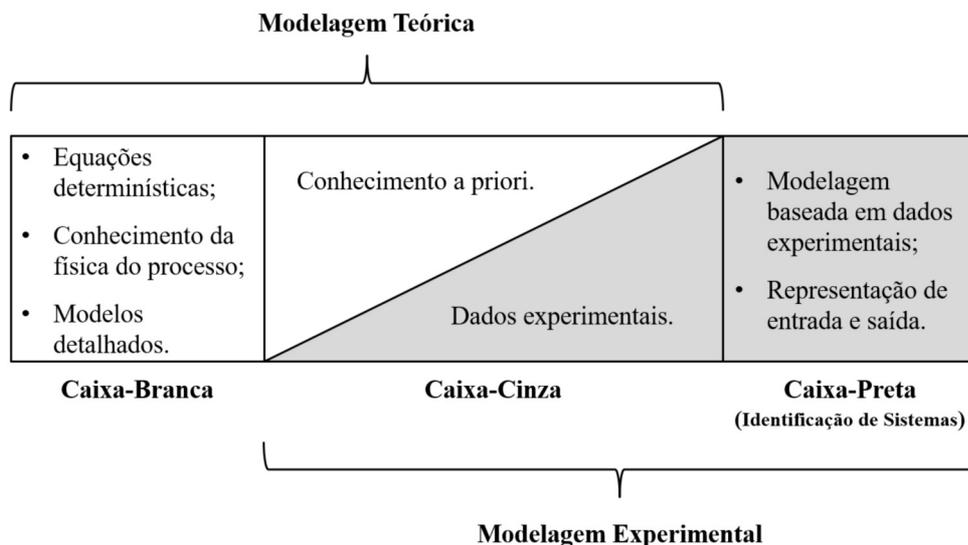
1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos da Pesquisa	20
1.1.1	Objetivo Geral	21
1.1.2	Objetivos Específicos	21
1.2	Motivação e Relevância	21
1.3	Trabalhos Publicados	22
1.4	Organização da Dissertação	22
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
2.1	Modelos de Blocos Interconectados	24
2.1.1	Modelo de Hammerstein no Espaço de Estados	25
2.2	Teoria da Realização de Sistemas	27
2.2.1	Principais Conceitos e Métodos de Estimação dos Parâmetros de Markov	28
2.2.2	Algoritmo de Realização Mínima de Auto-Sistema	32
2.2.3	Realização Mínima de Auto-Sistema Recursiva	35
2.3	Teoria de Sistemas Evolutivos	38
2.3.1	Sistema de Inferência Nebuloso Takagi-Sugeno	39
2.3.2	Principais Conceitos de Agrupamento Nebuloso	40
2.3.2.1	<i>Agrupamento Nebuloso em Batelada</i>	<i>45</i>
2.3.2.2	<i>Agrupamento Nebuloso Evolutivo</i>	<i>48</i>
2.3.3	Estimação dos Parâmetros dos Submodelos	50
3	METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA PARA ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE HAMMERSTEIN NO ESPAÇO DE ESTADOS	53
3.1	Parametrização da Não Linearidade Estática	53
3.1.1	Abordagem Evolutiva para Estimação do Antecedente	54
3.1.2	Abordagem Recursiva para Estimação do Consequente	57
3.2	Parametrização da Dinâmica Linear	66
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS	73
4.1	Experimento 1 - Sistema Dinâmico não Linear Monovariável com não Linearidade Complexa Descontínua	74
4.1.1	Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática	75
4.1.2	Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear	77
4.2	Experimento 2 - Identificação de um Processo Térmico	85
4.2.1	Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática	88

4.2.2	Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear	89
4.3	Experimento 3 - Sistema Multivariável com não Linearidades Combinadas Complexas	96
4.3.1	Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática	97
4.3.2	Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear	97
4.4	Experimento 4 - Identificação do Processo de um Evaporador Multivariável	112
4.4.1	Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática	114
4.4.2	Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear	114
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	126
5.1	Conclusões	126
5.2	Propostas de Trabalhos Futuros	128
	REFERÊNCIAS	129

1 INTRODUÇÃO

O grande esforço feito até hoje para melhorar e desenvolver novas técnicas de modelagem é consequente do fato que, a partir de modelos matemáticos que representem determinado sistema dinâmico, é possível conhecer o comportamento deste sistema ao longo do tempo. Duas abordagens distintas são geralmente adotadas para o desenvolvimento de modelos matemáticos: uma teórica, que é baseada em leis fundamentais da matéria e energia, e outra denominada modelagem experimental, que é baseada na análise de observações de um sistema dinâmico (experimental ou dados de operação) (AGUIRRE, 2015; FILHO et al., 2017; TANGIRALA, 2014; LJUNG, 1998; JUANG, 1994; KEESMAN, 2011; ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011). A última abordagem é uma alternativa amplamente explorada na literatura, uma vez que a maioria dos processos reais é muito complexa para ser entendida em um nível fundamental ou teórico. Além disso, as observações de um sistema dinâmico podem trazer uma riqueza de informações que não são perceptíveis em uma abordagem baseada em leis físicas (TANGIRALA, 2014). Considerado-se as alternativas de modelagem matemática, teórica e experimental, são definidas outras três classificações para modelagem de sistemas dinâmicos reais: modelagem caixa-branca, modelagem caixa-cinza e modelagem caixa-preta. Esta classificação é ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Diagrama dos diferentes tipos de modelagem matemática aplicadas a sistemas dinâmicos: caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta.



Fonte: Autor.

Na modelagem caixa-branca, também classificada como modelagem pela física ou natureza do processo, o especialista precisa conhecer detalhadamente as leis físicas que regem o comportamento do sistema dinâmico. Isto pode ser um fator limitante quando se trata de sistemas dinâmicos reais complexos, que possuem múltiplas entradas e saídas fortemente interconectadas.

Em geral, o baixo entendimento dos fenômenos físicos que regem o comportamento do sistema dinâmico real, a imprecisão nos valores dos parâmetros e a complexidade matemática do modelo resultante, torna essa abordagem difícil, demorada e custosa (AGUIRRE, 2015; SERRA, 2005).

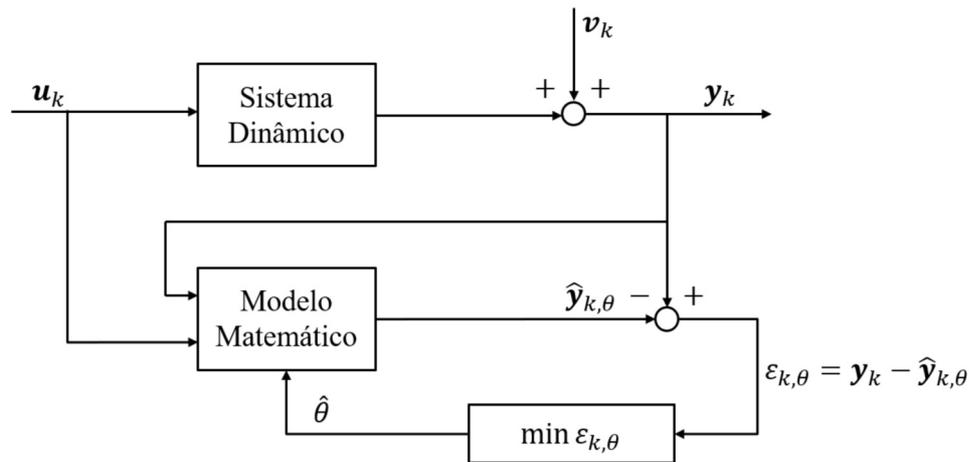
No caso da modelagem caixa-preta, nenhum conhecimento *a priori* do sistema dinâmico é requerido. Esta alternativa de modelagem consiste em construir um modelo matemático, onde o máximo de conhecimento sobre o comportamento do sistema dinâmico seja extraído a partir de dados experimentais. A modelagem caixa-preta é comumente conhecida como identificação de sistemas. Esta abordagem, além de apresentar muitas vantagens, do ponto de vista da modelagem de sistemas dinâmicos reais complexos, tem como limitação o fato que nem a estrutura nem os parâmetros de um modelo matemático, obtidos a partir de dados de entrada e saída, tem sentido físico, ou seja, não estão associados diretamente a grandezas físicas usuais (AGUIRRE, 2015; FILHO et al., 2017).

Quando técnicas de modelagem caixa-branca são associadas às técnicas de modelagem caixa-preta, os modelos resultantes são classificados como caixa-cinza. Neste caso, algum conhecimento *a priori* do sistema dinâmico está disponível, mas os parâmetros do modelo obtido são determinados a partir de dados experimentais de entrada e saída. Esta abordagem engloba a maioria das metodologias de modelagem experimental propostas atualmente e combina as vantagens de ambos os modelos, caixa-branca e caixa-preta (AGUIRRE, 2015; CORRUEA, 2001a).

Um grande número de metodologias para implementação de modelagem experimental tem sido proposto nas últimas décadas, como já mencionado (FILHO et al., 2017; SERRA, 2005; TORRES; SERRA, 2017; SANTOS; SERRA, 2017; COELHO, 2002; PAULA, 2016; JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014). A identificação de sistemas pode ser definida como a área de conhecimento que tem por objetivo modelar matematicamente sistemas dinâmicos a partir de informações contidas em dados experimentais de entrada e saída coletados de tal sistema (FRANCO; MOTA; MENEZES, 2015; AGUIRRE, 2015; TANGIRALA, 2014), como ilustrado na Figura 2. Uma das principais características desse tipo de modelagem é que pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema dinâmico é requerido (AGUIRRE, 2015).

No princípio, os modelos usados para representar sistemas dinâmicos eram, em geral, lineares. A teoria de Controle Clássico (OGATA; SEVERO, 1998), bem como as primeiras técnicas de identificação de sistemas, foram desenvolvidas baseadas em aproximações lineares (LJUNG, 1998). Os modelos lineares são capazes de aproximar os sistemas em determinadas faixas de operação, porém não conseguem reproduzir os comportamentos dinâmicos não lineares, tais como bifurcações, comportamentos quase periódicos e caos (AGUIRRE, 2015). Logo, o desenvolvimento de modelos não lineares se faz necessário, uma vez que tais modelos podem incorporar as não linearidades inerentes aos sistemas dinâmicos. Assim, o interesse pela identificação de modelos não lineares surgiu no início da década de 80. Em grande parte, este interesse foi motivado pelo desenvolvimento de ferramentas matemáticas e computacionais que

Figura 2 – Ilustração do processo de identificação de um sistema dinâmico.



Fonte: Adaptada de (KATAYAMA, 2006).

simplificam a obtenção e manipulação de tais modelos (RODRIGUES, 2007).

Dentre as diversas possibilidades de representações não lineares (FILHO et al., 2017; JIA; LI; CHIU, 2016), destacam-se os modelos de blocos interconectados. Estes modelos representam a dinâmica do sistema através de um modelo dinâmico linear e as não linearidades por meio de uma função estática não linear (COELHO; AGUIRRE; CORREA, 2002; PAULA, 2016; COELHO; AGUIRRE; CORREA, 2002; ZHAO; CHEN, 2006). A forma como os blocos de um modelo baseado em blocos interconectados são dispostos, influencia diretamente no comportamento dinâmico do modelo construído. Nos modelos de Hammerstein, explorados nesta dissertação, os blocos são conectados de tal maneira que a não linearidade estática precede a dinâmica linear (WU, 2010; JIN et al., 2017a; RATTANAWAORAHIRUNKUL; SANPOSH; PANJAPORNPON, 2016; HAMMAR; DJAMAH; BETTAYEB, 2015). As formas que o modelo dinâmico linear de um modelo de Hammerstein pode assumir são muitas (AGUIRRE, 2015). Uma representação linear, usada para modelar tanto as relações de entrada e saída quanto as relações entre as variáveis internas do sistema, é denominada espaço de estados. Este tipo de modelo descreve o sistema dinâmico linear no domínio do tempo e é mais conveniente para representar sistemas multivariáveis (AGUIRRE, 2015, 2015). Uma importante consideração sobre esse tipo de representação é que ela não é única, ou seja, um mesmo sistema dinâmico linear pode ser representado por mais de um modelo no espaço de estados. A obtenção de modelos no espaço de estados é denominada realização (SANTOS; SERRA, 2017; PAULA, 2016). Com o intuito de produzir modelos com a menor complexidade possível, mantendo seu potencial de representatividade, foi introduzido o conceito de realização mínima de sistemas (KATAYAMA, 2006; ALVES et al., 2005).

Os sistemas nebulosos são modelos matemáticos específicos que se baseiam no conceito de lógica nebulosa, introduzida pela primeira vez em 1965 por Lotfi A. Zadeh (ZADEH, 1965). A lógica nebulosa é um tipo de abordagem capaz de representar informações vagas, imprecisas

ou linguísticas. Nesse sentido, os sistemas nebulosos pertencem ao grupo de modelos baseados no conhecimento (LUGHOFER, 2011), que são capazes de expressar vagas experiências e conhecimentos humanos de forma linguística. Portanto, pode-se inferir que esses sistemas imitam a maneira humana de pensar e armazenar o conhecimento melhor do que os modelos convencionais (ESPINOSA J, 2004). Inicialmente, o conhecimento do especialista era o único meio de se obter modelos nebulosos (FILHO et al., 2017). A partir da década de 90, sistemas de inferência nebulosos Takagi-Sugeno (TS), orientados a dados experimentais, foram desenvolvidos (SERRA, 2005; GOMIDE; GUDWIN, 1994; TORRES; LEAL; ALMEIDA, 2014). Em princípio, o conhecimento do especialista, responsável pela definição do antecedente do sistema de inferência nebuloso TS, era usado em conjunto com as informações contidas nos dados experimentais (ABONYI et al., 2000; LOPES; JAFELICE; BARROS, 2005). Com os avanços da modelagem nebulosa e a construção de modelos cada vez mais autônomos, técnicas de particionamento nebuloso do espaço de dados experimentais foram propostas como alternativas ao conhecimento do especialista, na definição do antecedente de sistemas de inferência nebulosa TS. Particionamento de um conjunto de dados consiste na divisão das amostras de dados em grupos (do inglês *clusters*) menores. Estes *clusters* são criados a partir de algoritmos de agrupamento nebulosos (SILVA et al., 2012; COSTA et al., 2016a; SANTOS; SERRA, 2017; SILVA et al., 2003).

Os sistemas evolutivos, introduzidos por (ANGELOV, 2002; KASABOV, 2002; ANGELOV; KASABOV, 2005), do ponto de vista da identificação de sistemas, são abordagens capazes de adaptar a estrutura e/ou os parâmetros de um modelo matemático, à medida que novas amostras, de um fluxo contínuo de dados, são disponibilizadas (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010). A fim de ampliar a aplicabilidade de sistemas nebulosos, as propriedades desses sistemas são combinadas com os conceitos de modelagem evolutiva (FILHO et al., 2017; LEMOS, 2011; ANGELOV; FILEV, 2004). Assim, sistemas nebulosos evolutivos são abordagens, onde o número de *clusters* e os conjuntos nebulosos do antecedente, são extraídos a partir de dados experimentais, através de algoritmos de agrupamento nebuloso evolutivo não supervisionados. Estes agrupamentos, geralmente baseados na organização espacial das variáveis de entrada e saída (dados experimentais) e métricas de distância entre amostras de dados distintas, são responsáveis pela criação de novas regras e/ou adaptação da base de regras já existente. Portanto, nesse contexto, os *clusters* representam uma decomposição evolutiva do espaço de dados, gerando regras nebulosas, que podem ser adicionadas ou excluídas de um modelo com estrutura evolutiva, baseada na variação dinâmica dos dados (LUGHOFER, 2011; ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010).

1.1 Objetivos da Dissertação

Nesta seção, são apresentados os principais objetivos desta dissertação.

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma metodologia nebulosa evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados para identificação de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis.

1.1.2 Objetivo Específicos

Os seguintes objetivos específicos são considerados nesta dissertação:

- Implementar uma metodologia baseada em sistemas de inferência nebulosos Takagi-Sugeno evolutivos para parametrização online da não linearidade estática do modelo de Hammerstein;
- Desenvolver uma metodologia recursiva para realização mínima de sistemas lineares, baseada no algoritmo de realização de auto-sistema, para parametrização do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein;
- Avaliar o desempenho da metodologia desenvolvida nesta dissertação, a partir dos seguintes estudos de casos: um *benchmark* de um sistema dinâmico monovariável com função estática não linear complexa descontínua; uma abordagem experimental de um sistema térmico real; um *benchmark* de um sistema dinâmico não linear multivariável com não linearidades combinadas complexas; e um sistema dinâmico de um evaporador de quatro estágios, modelado como um sistema multivariável de três entradas e três saídas.

1.2 Motivação e Relevância

Nas últimas três décadas consolidaram-se a teoria e a prática no contexto de identificação de sistemas (COELHO; AGUIRRE; CORREA, 2002). Apesar de consolidado, o desafio de desenvolver técnicas de identificação cada vez mais eficientes persiste (VALDMAN, 2014; COELHO; AGUIRRE; CORREA, 2002). Atualmente sistemas de aquisição de dados capazes de monitorar variáveis de sistemas dinâmicos com alta frequência de amostragem, garantindo assim uma boa representação dinâmica do processo, estão disponíveis (AGUIRRE, 2015). Isto permite o desenvolvimento de metodologias de identificação online de alto desempenho.

A modelagem caixa-preta, baseada em sistemas evolutivos, é uma técnica muito explorada e que ganhou grande expressão no meio científico nas últimas duas décadas (FILHO et al., 2017; LEMOS, 2011; SILVA, 2014; KHAN; KADRI, 2012; LIMA et al., 2008). A necessidade de se obter modelos evolutivos cada vez mais interpretáveis fez com que estudos sobre sistemas nebulosos, no contexto evolutivo, ganhassem grande espaço na literatura. Assim, sistemas nebulosos evolutivos consistem na junção dos conceitos de sistemas nebulosos, já bem difundidos como ferramenta de compactação e representação de conhecimento, e métodos recursivos de aprendizagem de máquina (KASABOV; FILEV, 2006). Estes sistemas utilizam informações sobre a organização espacial dos dados experimentais, disponibilizados por um fluxo contínuo

em processo dinâmico qualquer, para definir a estrutura da base de regras do sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno (LEMOS, 2011).

1.3 Trabalhos Publicados

Nesta seção, são enumeradas as publicações produzidas no decorrer desta pesquisa. Na sequência serão apresentados os trabalhos publicados, aceitos para publicação, bem como os submetidos:

Artigos Publicados em Congressos:

- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Metodologia para Identificação Recursiva de Modelos de Hammerstein Fuzzy no Espaço de Estados. In: XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2017. Porto Alegre, RS, Brasil. 2017. (Publicado)
- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Fuzzy Hammerstein Model Based States Space Identification Approach of Nonlinear Dynamics Systems. In: 18th International Conference on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases - AIKED'18. University of Cambridge, Cambridge, UK. (Aceito para Publicação)
- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Online Evolving Fuzzy Identification Approach for Multivariable Nonlinear Dynamic Systems. In: 18th IFAC Symposium on System Identification - SYSID 2018. Stockholm, Sweden. 2018. (Aceito para publicação)
- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Recursive Identification Approach of Multivariable Nonlinear Dynamic Systems based on Evolving Fuzzy Hammerstein Models. In: IEEE World Congress on Computational Intelligence - IEEE WCCI 2018. Rio de Janeiro, Brazil. 2018. (Aceito para publicação)

Capítulo de Livro:

- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Multivariable Fuzzy Hammerstein Model Identification from Evolving Data Clustering. in: Fuzzy Modeling and Control: Methods, Applications e Research of Nova Science Publishers. (Publicado)

1.4 Organização da Dissertação

Esta dissertação de mestrado que tem como objetivo principal o desenvolvimento uma metodologia nebuloso evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados para identificação de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis está organizada como descrito no que segue. O Capítulo 1 apresenta as considerações iniciais, compreendendo uma breve introdução sobre a pesquisa, os objetivos, as motivações e justificativas, além das contribuições por meio dos trabalhos publicados.

O Capítulo 2 traz um levantamento teórico geral sobre os principais assuntos abordados nesta dissertação. São abordados os principais conceitos sobre modelos de blocos interconectados, evidenciando-se o modelo de Hammerstein. A teoria de realização de sistemas é tratada, com foco na realização mínima, baseada no algoritmo de realização de auto-sistema. Por fim, uma seção é dedicada ao estudo da teoria de sistemas evolutivos, envolvendo sistemas nebulosos e conceitos de agrupamento nebuloso evolutivo.

A metodologia nebuloso evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados para identificação de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis é formulada e descrita no Capítulo 3. São apresentadas, em cada seção deste capítulo, os passos para se obter o algoritmo de identificação que implementa a metodologia desenvolvida nesta dissertação. Destacam-se nesse capítulo, a formulação matemática desta metodologia como: estimação do antecedente do sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno, a partir de um algoritmo de agrupamento evolutivo; estimação do consequente, pela computação de submodelos no espaço de estados, realizados via algoritmo de realização de auto-sistema nebuloso; computação do sinal intermediário do modelo de Hammerstein; estimação recursiva do modelo dinâmico linear no espaço de estados via algoritmo de realização de auto-sistema no contexto recursivo.

Os resultados computacionais e experimentais para avaliação da metodologia nebulosa evolutiva, desenvolvida nesta dissertação, são exibidos no Capítulo 4. Foram consideradas quatro aplicações distintas desta metodologia. Os resultados do primeiro experimento são comparados com outras pesquisas publicadas recentemente em periódicos de impacto no meio científico. O segundo experimento, trata da aplicação da metodologia desenvolvida a um sistema térmico real. Nas duas últimas aplicações são considerados sistemas multivariáveis: um *benchmark* largamente explorado na literatura e uma aplicação baseada em dados reais de um evaporador.

Por fim, o Capítulo 5 traz as considerações finais, discussões sobre as principais contribuições e sugestões de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentados os principais conceitos relacionados às teorias básicas requeridas nesta dissertação. Assuntos como modelos de blocos interconectados, mais especificamente, modelo de Hammerstein; realização mínima de sistemas, principalmente, no que diz respeito à implementação do algoritmo de realização de auto-sistema; sistemas de inferência nebulosos Takagi-Sugeno; agrupamento nebuloso evolutivo, entre outros, são explorados.

2.1 Modelos de Blocos Interconectados

Todos os processos reais são de natureza não linear (TANGIRALA, 2014). Os modelos lineares, largamente aplicados na literatura, são limitados e muitas vezes não conseguem capturar adequadamente a dinâmica dos sistemas não lineares (BILLINGS, 2013; AGUIRRE, 2015). Escolher um mapeamento não linear adequado é mais difícil que no caso da identificação linear porque existem vários tipos de não linearidades (CORRUEA, 2001b; BILLINGS, 2013; AGUIRRE, 2015; LJUNG, 1998). Mesmo com todos os desafios, ocorreram grandes avanços na área da identificação não linear nas últimas décadas. Uma forma genérica de representar um sistema não linear é através da seguinte expressão:

$$\mathbf{y}_k = f(\boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}_k \quad (2.1)$$

onde $f(\cdot)$ é uma função não linear qualquer, \mathbf{v}_k é um termo estocástico, $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor de parâmetros e $\boldsymbol{\phi}_k$ é um vetor de regressores geralmente composto por entradas \mathbf{u}_k e saídas \mathbf{y}_k :

$$\boldsymbol{\phi}_k = [\mathbf{y}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{y}_{k-n_y} \ \mathbf{u}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{u}_{k-n_u}]^T \quad (2.2)$$

A escolha da representação não linear, entre outras variáveis, depende da finalidade do modelo, das ferramentas disponíveis para sua estimação e das informações disponíveis sobre o sistema. Dentre as representações não lineares, destacam-se: modelos baseados em redes neurais (WU, 2010; BORDIGNON; GOMIDE, 2014; DRUMMOND,), modelos NARMAX¹ polinomiais (WANG; LIU; DING, 2015; COELHO; AGUIRRE; CORREA, 2002) e modelos baseados em Sistemas de Inferência Nebulosos (DOVŽAN; LOGAR; ŠKRJANC, 2015; GUO et al., 2011). Além das representações não lineares já citadas, os modelos de blocos interconectados vem sendo bem difundidos na literatura. Um submodelo do grupo de blocos interconectados, classicamente aplicado para representar diversos sistemas dinâmicos reais, é o modelo de Hammerstein, estrutura foco desta dissertação (PAULA, 2016; JIA; LI; CHIU, 2016; SANTOS; SERRA, 2017; SALHI; KAMOUN, 2015; JIN et al., 2017b; CHAN; BAO; WHITEN, 2006).

¹ *Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous input*

Os modelos de blocos interconectados representam os sistemas não lineares através da conexão de blocos que modelam as não linearidades por meio de funções estáticas não lineares e blocos que modelam a dinâmica linear por modelos lineares. Estes modelos foram muito utilizados até a década de oitenta (AGUIRRE, 2015; LJUNG, 1998; ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011). Em seguida, outros modelos ganharam espaço (CORRUEA, 2001a; RODRIGUES, 2007; BILLINGS, 2013). Apesar dos avanços constantes e acelerados na teoria de identificação de sistemas, em meados da década de noventa, as pesquisas voltadas para aplicação de blocos interconectados ressurgiram. Os principais fatores que influenciaram o retorno desse tipo de estrutura são menor complexidade para implementação de controle baseado nesse tipo de modelo (KHAN; KADRI, 2012; ABONYI et al., 2000), análise de estabilidade de sistemas não lineares através do bloco dinâmico linear, além da facilidade de incorporar conhecimento prévio do sistema no modelo (CORRÊA; AGUIRRE, 2004).

Como já mencionado, os modelos de blocos interconectados são compostos por dois tipos de blocos. A forma como os blocos são dispostos define comportamentos diferentes para o modelo (PAULA, 2016). A estrutura de Hammerstein-Wiener, composta por três partes: bloco estático não linear, bloco dinâmico linear e bloco estático não linear novamente, conectados nesta sequência, abordada nos trabalhos de (PADUART et al., 2012; HARYANTO; HONG, 2013), é um tipo de modelo de bloco interconectado aplicado na modelagem de sistemas dinâmicos que apresentam não linearidades relacionadas às suas entradas e saídas. Já a estrutura de Wiener, composto por dois blocos: um dinâmico linear e um estático não linear, acoplados nesta ordem, é aplicado a sistemas com não linearidades, relacionadas, principalmente, à sua saída (MARGOTI et al., 2010; BIAGIOLA; FIGUEROA, 2011). Um terceiro tipo de modelo de bloco interconectado, onde a não linearidade estática está relacionada à entrada, denominado modelo de Hammerstein, é apresentado conforme segue.

2.1.1 Modelo de Hammerstein no Espaço de Estados

O modelo de Hammerstein consiste na conexão em cascata de dois blocos: o primeiro descreve a característica estática não linear e o segundo descreve a dinâmica linear, como pode ser visto na Figura 3 (AGUIRRE, 2015).

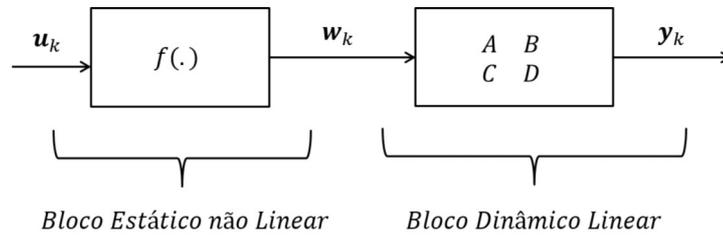
A descrição matemática deste tipo de modelo de bloco interconectado, com bloco linear no espaço de estados, é formulado como segue:

$$\mathbf{w}_k = f(\mathbf{u}_k) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entrada, $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de saída e $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados.

Figura 3 – Modelo de Hammerstein no espaço de estados.

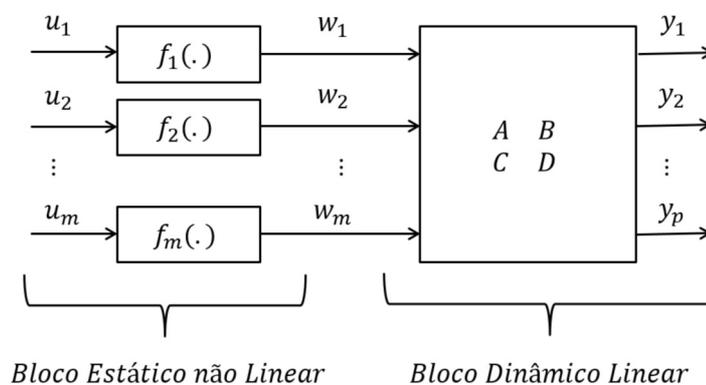


Fonte: Adaptada de (SANTOS; SERRA, 2017).

O vetor $\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^p$ representa a variável intermediária desconhecida e $f(\cdot)$ é a não linearidade estática do modelo de Hammerstein. Os parâmetros do bloco dinâmico linear no espaço de estados são descritos pelas matrizes $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

Os modelos de Hammerstein são aplicados na identificação de diversos sistemas dinâmicos. Por exemplo, em (VEEN; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013), a estrutura de Hammerstein foi aplicado na modelagem de turbinas eólicas. Este tipo de estrutura também já foi aplicado na identificação de um processo multivariável de caldeiras a vapor (ZHAO et al., 2014) e aplicações biomédicas (JALALEDDINI; KEARNEY, 2013). Em geral, os modelos de Hammerstein multivariáveis podem ter seu bloco estático não linear composto por não linearidade separadas ou combinadas, como ilustrado nas Figuras 4 e 5. O caso onde as não linearidades são combinadas é o tipo mais geral de modelagem de não linearidades estáticas, mas pode causar diversos problemas na estimação paramétrica das funções não lineares por apresentar um número muito grande de parâmetros a serem estimados (JIA; LI; CHIU, 2016).

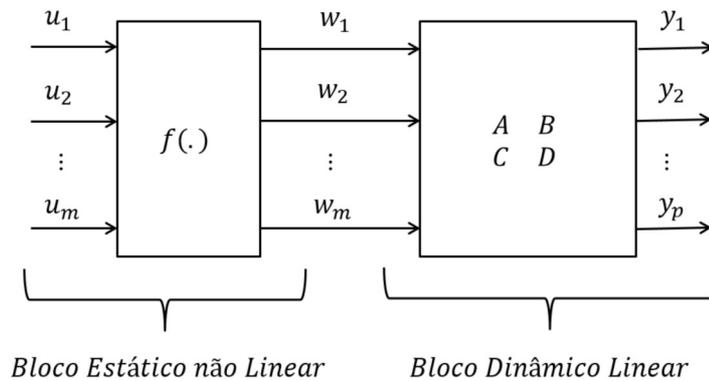
Figura 4 – Modelo de Hammerstein no espaço de estados com não linearidades separadas.



Fonte: Adaptada de (JIA; LI; CHIU, 2016).

Mesmo com o volume de aplicações presentes na literatura (ABONYI et al., 2000; KHAN; KADRI, 2012; SALHI; KAMOUN, 2015; JIN et al., 2017b; VEEN; WINGERDEN;

Figura 5 – Modelo de Hammerstein no espaço de estados com não linearidades combinadas.



Fonte: Adaptada de (JIA; LI; CHIU, 2016).

VERHAEGEN, 2013), tanto em processos monovariáveis quanto multivariáveis, o grande obstáculo dessa representação é que o sinal intermediário aos blocos, \mathbf{w}_k , não está disponível para medição direta, trata-se de um sinal inerente a esta representação, fazendo-se necessário sua estimação, geralmente baseada em informação *a priori* e/ou restrições. Nesta dissertação, a parametrização do modelo de Hammerstein é executada em duas etapas: não linearidade estática através de um sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo e dinâmica linear por um modelo linear no espaço de estados. No capítulo 3, é apresentada a metodologia de implementação online dessas duas etapas.

2.2 Teoria da Realização de Sistemas

Considerando-se o sistema linear e invariante no tempo (LIT), dado na Equação 2.4, descrito por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{w}_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entrada, $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de saída, $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados e $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ são matrizes constantes, e assumindo-se o sistema controlável² e observável³, pode-se dizer que a tríade $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ é uma realização de ordem mínima (KATAYAMA, 2006).

² Diz-se que um sistema LIT é controlável se todos os estados \mathbf{x}_k podem ser atingidos a partir de qualquer estado inicial \mathbf{x}_0 do sistema num intervalo de tempo finito por alguma ação de controle limitada \mathbf{u}_k . Em outros termos, um sistema LIT é controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade é igual à ordem do sistema (KATAYAMA, 2006).

³ Um sistema LIT é observável se o conhecimento da entrada \mathbf{u}_k e da saída \mathbf{y}_k sobre um intervalo de tempo finito determina completamente todos os estados \mathbf{x}_k . Ou ainda, um sistema só é observável se, e somente se, o posto da matriz de observabilidade é igual ao posto do sistema (KATAYAMA, 2006).

Como definido em (JUANG; PAPP, 1985), realização é o processo de construção de um modelo no espaço de estados a partir de dados experimentais. Para (JUANG, 1994; MOREIRA, 1998), um sistema qualquer tem um número infinito de realizações, ou seja, modelos distintos no espaço de estados que descrevem a mesma relação entrada e saída. Realização mínima, conforme conceituado por (HO; KÁLMÁN, 1966), é um modelo no espaço de estados que tem a menor dimensão possível dentre todas as possíveis realizáveis.

Tomando-se a Equação 2.5, a matriz de transferência e as matrizes de resposta ao pulso do sistema são respectivamente dadas por:

$$M_T(z) = D + C(zI - A)^{-1}B \quad (2.6)$$

e

$$\Psi_k = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $\Psi_{k|k=0,1,2,\dots}$ são denominados parâmetros de Markov (JUANG et al., 1993a). A maioria das problemáticas da realização de sistemas consiste exatamente em, a partir do conhecimento dos parâmetros de Markov, se obter a ordem mínima bem como as matrizes de estado, A , B e C , já que a matriz D é extraída diretamente dos parâmetros de Markov, $\psi_0 = D$ (WU et al., 2015), como visto na Equação 2.7. Na seguinte seção serão apresentados os principais conceitos sobre parâmetros de Markov e suas formas clássicas de estimação.

2.2.1 Principais Conceitos e Métodos de Estimação dos Parâmetros de Markov

Os parâmetros de Markov correspondem a uma sequência de respostas de um sistema dinâmico linear quando são aplicados pulsos unitários na sua entrada, ou seja, é a resposta ao pulso do sistema. São muitos os esforços feitos para se obter estes parâmetros a partir de dados de entrada e saída por abordagens no domínio do tempo ou frequência (JUANG; PHAN, 2001). Neste trabalho, os parâmetros de Markov são obtidos a partir dos parâmetros de Markov do observador (WU et al., 2015). Este método consiste em usar um observador de estados dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{w}_k + M\mathbf{y}_k - M\mathbf{y}_k \\ &= (A + MC)\mathbf{x}_k + (B + MD)\mathbf{w}_k - M\mathbf{y}_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ é a matriz de ganho do observador escolhida arbitrariamente que, definindo-se as matrizes $\bar{A} = A + MC$, $\bar{B} = [B + MD, -M]$, $\tau_k = [\mathbf{w}_k^T \ \mathbf{y}_k^T]^T$, faz com que \bar{A} seja estável (KATAYAMA, 2006). Assim, a Equação 2.5 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \bar{A}\mathbf{x}_k + \bar{B}\tau_k \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

Com isso, os parâmetros de Markov da Equação 2.9 passam a ser referidos como parâmetros de Markov do observador e a relação entrada-saída do sistema dinâmico na forma matricial é dada por (WU et al., 2015):

$$\Upsilon = \bar{\Psi}W \quad (2.10)$$

onde

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{y}_q & \dots & \mathbf{y}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{q-1}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{N-2}\bar{B} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_q & \dots & \mathbf{u}_{N-1} \\ & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-1} & \dots & \tau_{N-2} \\ & & \tau_0 & \dots & \tau_{q-2} & \dots & \tau_{N-3} \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \tau_0 & \dots & \tau_{N-q-1} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \tau_0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

com $\bar{\Psi}$ sendo o vetor de parâmetros de Markov do observador, Υ o vetor de saída e W a matriz de regressores. Como a matriz de ganho do observador é escolhida de forma arbitrária, conforme dito antes, pode-se escolher M de forma que $C\bar{A}^j\bar{B} \approx 0$ para $j \geq q$ grande suficiente. Assim, as Equações 2.12-2.13 são reformuladas como:

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{q-1}\bar{B} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_q & \dots & \mathbf{u}_{N-1} \\ & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-1} & \dots & \tau_{N-2} \\ & & \tau_0 & \dots & \tau_{q-2} & \dots & \tau_{N-3} \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \tau_0 & \dots & \tau_{N-q-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

A Equação 2.10 representa a relação entrada-saída para os casos onde as condições iniciais são nulas, ($\mathbf{x}_0 = 0$). Para o caso mais geral, onde \mathbf{x}_0 não é dado dessa forma (JUANG et

al., 1993b), considerando-se dados coletados de um instante inicial maior que q , a Equação 2.10 pode ser reescrita como:

$$\Upsilon = C\bar{A}^q \mathbf{x} + \bar{\Psi}W \quad (2.16)$$

onde Υ agora é denotado por

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{q+1} & \mathbf{y}_{q+2} & \dots & \mathbf{y}_N \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

e W por

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{q+1} & \mathbf{u}_{q+2} & \dots & \mathbf{u}_N \\ \tau_q & \tau_{q+1} & \dots & \tau_{N-1} \\ \tau_{q-1} & \tau_{q-2} & \dots & \tau_{N-2} \\ & & \vdots & \vdots \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{N-q} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

e \mathbf{x} é um vetor contendo todos os estados. Quando $\bar{A}^q \approx 0$, condição provocada pela presença do observador de estados, e todos os estados \mathbf{x} são limitados, o primeiro termo do membro direito da Equação 2.16 pode ser negligenciado (WU et al., 2015), resultando em:

$$\Upsilon = \bar{\Psi}W \quad (2.19)$$

onde Υ é dado na Equação 2.17, $\bar{\Psi}$ na Equação 2.14 e W na Equação 2.18. A solução da Equação 2.19 pode ser obtida aplicando-se o algoritmo dos mínimos quadrados batelada⁴ de forma que o vetor $\hat{\Psi}$ estimado minimize a função custo que é denotada por:

$$J_{MQ} = \sum_{j=1}^N \xi(j)^2 = \xi^T \xi = \|\xi\|^2 \quad (2.20)$$

onde $\xi = \Upsilon - \hat{\Psi}W$. A solução do problema $\hat{\Psi} = \arg_{\bar{\Psi}} \min J_{MQ}$ dado na Equação 2.20 é a seguinte:

$$\hat{\Psi} = \Upsilon W^T [W W^T]^{-1} \quad (2.21)$$

onde $W W^T$ não singular é garantida com o tamanho dos dados experimentais N suficientemente grande, $\hat{\Psi}$ é o vetor de parâmetros de Markov do observador estimado em batelada, que para simplificação de nomenclatura será denotado apenas por $\bar{\Psi}$ daqui em diante. Mínimos quadrados é um algoritmo de otimização clássico e largamente aplicado na literatura, por esta razão, sua dedução foi omitida, podendo ser vista em (AGUIRRE, 2015).

⁴ Resolução do problema numérico de estimar os parâmetros de Markov de uma só vez considerando-se os dados de entrada e saída que compõem as variáveis Υ e W coletados previamente (AGUIRRE, 2015).

Para se recuperar os parâmetros de Markov a partir dos parâmetros de Markov do observador, estimados pela Equação 2.21, deve-se primeiro particionar os parâmetros de Markov do observador como segue:

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{q-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_0 & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 & \dots & \bar{\Psi}_q \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde $\bar{\Psi}_0 = D$ e

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_k &= C\bar{A}^{k-1}\bar{B} \\ &= [C(A+MC)^{k-1}(B+MD), -C(A+MC)^{k-1}M] \\ &= [\bar{\Psi}_k^{(1)}, -\bar{\Psi}_k^{(2)}], \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

O parâmetro de Markov ψ_1 , pela Equação 2.7, é

$$\begin{aligned} \psi_1 &= CB = C(B+MD) - (CM)D \\ &= \bar{\Psi}_1^{(1)} + \bar{\Psi}_1^{(2)}D \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para se obter o parâmetro de Markov $\psi_2 = CAB$, primeiro considera-se

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2^{(1)} &= C(A+MC)(B+MD) \\ &= CAB + CMCB + C(A+MC)MD \end{aligned} \quad (2.25)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi_2 &= CAB \\ &= \bar{\Psi}_2^{(1)} + \bar{\Psi}_1^{(2)}\psi_1 + \bar{\Psi}_2^{(2)}D \end{aligned} \quad (2.26)$$

O parâmetro $\psi_3 = CA^2B$ é obtido similarmente a $\psi_2 = CAB$. Neste caso, considera-se $\bar{\Psi}_3^{(1)}$, dado por:

$$\bar{\Psi}_3^{(1)} = C(A+MC)^2(B+MD) , \quad (2.27)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \psi_3 &= CA^2B \\ &= \bar{\Psi}_3^{(1)} - CMCB - C(A+MC)MCB - C(A+MC)^2MD \quad (2.28) \\ &= \bar{\Psi}_3^{(1)} + \bar{\Psi}_1^{(2)}\psi_2 + \bar{\Psi}_2^{(2)}\psi_1\bar{\Psi}_3^{(2)}D \end{aligned}$$

A partir da operação acima, todos os parâmetros de Markov poderiam ser obtidos. Assim, uma relação geral entre os parâmetros de Markov do observador e os parâmetros de Markov pode ser formulada como (JUANG et al., 1993b):

$$\Psi_k = \bar{\Psi}_k^{(1)} - \sum_{j=1}^k \bar{\Psi}_j^{(2)} \Psi_{k-j}, \text{ para } k = 1, 2, \dots, q, \quad (2.29)$$

e

$$\Psi_k = - \sum_{j=1}^q \bar{\Psi}_j^{(2)} \Psi_{k-j}, \text{ para } k = q + 1, \dots \quad (2.30)$$

O conhecimento dos parâmetros de Markov permite que se obtenha as realizações do sistema dinâmico linear.

2.2.2 Algoritmo de Realização Mínima de Auto-Sistema

Considerando-se uma sequência infinita de parâmetros $\Psi = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3 \ \dots]$ com $\Psi_j |_{j=1,2,\dots} \in \mathfrak{R}^{p \times m}$, a matriz bloco infinita formada por esses parâmetros, dada por:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \dots \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \dots \\ \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

é denominada matriz de Hankel infinita (KATAYAMA, 2006). Se A , B e C satisfazem

$$\Psi_j = CA^{j-1}B, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

então as matrizes A , B e C são ditas como realização de Π (KATAYAMA, 2006). Assim como tomando-se a submatriz da matriz de Hankel infinita, denotada por:

$$\Pi_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \dots & \Psi_\beta \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \dots & \Psi_{\beta+1} \\ \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \dots & \Psi_{\beta+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_\alpha & \Psi_{\alpha+1} & \dots & \dots & \Psi_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

e definindo-se as matrizes de observabilidade O_α e controlabilidade C_β como:

$$O_\alpha = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix}, C_\beta = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\beta-1}B \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

onde A , B e C são as matrizes da realização de $\Pi_{\alpha,\beta}$, então

$$\Pi_{\alpha,\beta} = O_\alpha C_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \quad (2.35)$$

ou seja,

$$\Pi_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{\beta-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^\beta B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-1}B & CA^\alpha B & \dots & CA^{\alpha+\beta-2}B \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Sendo o sistema LIT de ordem n controlável e observável, com base no posto⁵, tem-se

$$\text{posto}(\Pi_{\alpha,\beta}) \leq \max\{\text{posto}(O_\alpha), \text{posto}(C_\beta)\} \leq n. \quad (2.37)$$

Além disso, $(\alpha, \beta) \geq n$ implica $\text{posto}(O_\alpha) = n$ e $\text{posto}(C_\beta) = n$. Assim, $\text{posto}(\Pi_{\alpha,\beta}) \geq n$. Mas pela Equação 2.37, tem-se $\text{posto}(\Pi_{\alpha,\beta}) \leq n$. Assim, se houver uma realização de $\Pi_{\alpha,\beta}$, onde $\Pi_{\alpha,\beta}$ tem posto n , então essa realização será de ordem n mínima. A prova completa para tal afirmação pode ser verificada em (KATAYAMA, 2006).

Dentre as metodologias aplicadas para realização de sistemas, o algoritmo MOESP⁶ é um método de identificação por subespaços básico aplicado a sistemas lineares (PAULA, 2016). Como apresentado em (BORJAS; GARCIA, 2012), outro método também baseado em subespaços é o algoritmo N4SID⁷. A metodologia desenvolvida nesta dissertação tem como base para modelagem no espaço de estados o Algoritmo de Realização de Auto-Sistema com Observador/Filtro de Kalman (*Eigensystem Realization Algorithm with Observer/Kalman Filter Identification* - ERA/OKID), baseado no conceito de realização mínima já abordado (WU et

⁵ Representa o número de colunas ou linhas linearmente independente da matriz Π (KATAYAMA, 2006).

⁶ *Multivariable Output Error State Space* (KATAYAMA, 2006).

⁷ *Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification* (KATAYAMA, 2006).

al., 2015). A implementação do ERA/OKID se inicia com a construção da matriz de Hankel $\Pi_0 \in \mathfrak{R}^{\alpha p \times \beta m}$ composta pelos parâmetros de Markov:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \cdots & \Psi_\beta \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \cdots & \Psi_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_\alpha & \Psi_{\alpha+1} & \cdots & \cdots & \Psi_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

onde $\alpha p \leq \beta m$ (JUANG; PHAN, 2001). Durante a realização de um sistema sua ordem n é desconhecida. Para garantir que a matriz Π_0 tenha pelo menos posto n , faz-se $\alpha m \geq n$, ou seja, α deve ser grande suficiente (JUANG; PHAN, 2001). O próximo passo para realização mínima das matrizes A , B e C é a decomposição em valor singular de Π_0 (*Singular Value Decomposition - SVD*), como segue:

$$\Pi_0 = \Lambda \Delta \Xi^T \quad (2.39)$$

onde Λ e Ξ são matrizes ortogonais e Δ é uma matriz retangular, denotada por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{n^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta_{n^*} = \text{diag}[\zeta_1 \ \zeta_2 \ \cdots \ \zeta_n \ \zeta_{n+1} \ \cdots \ n^*] \quad (2.40)$$

com os valores singulares $\zeta_{j|j=1,2,\dots,n,n+1,\dots,n^*}$ monotonicamente decrescentes, ou seja,

$$\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \cdots \geq \zeta_n \geq \zeta_{n+1} \geq \cdots \geq \zeta_{n^*} > 0 \quad (2.41)$$

Na presença de dados ideais, a Equação 2.40 é dada apenas por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta_n = \text{diag}[\zeta_1 \ \zeta_2 \ \cdots \ \zeta_n] \quad (2.42)$$

onde $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \cdots \geq \zeta_n > 0$, com n igual à ordem mínima real do sistema dinâmico linear. Em seguida, tomando-se as matrizes Λ_n e Ξ_n formadas pelas n primeiras colunas de Λ e Ξ , respectivamente, tem-se a matriz de Hankel Π_0 reformulada como:

$$\Pi_0 = \Lambda_n \Delta_n \Xi_n^T \quad (2.43)$$

onde $\Lambda_n^T \Lambda_n = I_n = \Xi_n^T \Xi_n$. No entanto, ao se usar dados experimentais, devido ao ruído de medição, não linearidades e arredondamentos computacionais, a matriz de Hankel Π_0 geralmente é de posto completo, ou seja, $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \cdots \geq \zeta_n \geq \zeta_{n+1} \geq \zeta_{n+2} \geq \cdots \geq \zeta_{n^*} > 0$. Em geral, n^* não é igual à ordem mínima real do sistema dinâmico linear. Para garantir que o modelo não reproduza

sequências de ruídos e faça uma boa aproximação da dinâmica do sistema, escolhe-se a ordem do sistema igual a n , através da seguinte consideração:

$$\Delta_n = \text{diag}[\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_n] \quad (2.44)$$

onde $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_n \gg \zeta_{n+1} \approx \zeta_{n+2} \approx \dots \approx \zeta_{n^*} \approx 0$. Assim, a matriz de Hankel pode ser reformulada como segue:

$$\Pi_0 \approx \Lambda_n \Delta_n \Xi_n^T \quad (2.45)$$

onde as matrizes Λ_n e Ξ_n são construídas como no caso de dados ideias e Δ_n é dada na Equação 2.44. Por fim, computa-se as matrizes, A , B e C como segue:

$$A = (\Delta_n)^{-1/2} (\Lambda_n)^T (\Pi_1) (\Xi_n) (\Delta_n)^{-1/2} \quad (2.46)$$

$$B = \text{matriz formada pelas } n \text{ primeiras colunas de } (\Delta_n)^{1/2} (\Xi_n)^T \quad (2.47)$$

$$C = \text{matriz formada pelas } n \text{ primeiras linhas de } (\Lambda_n) (\Delta_n)^{1/2} \quad (2.48)$$

Note que a matriz D não faz parte da realização através do ERA/OKID, como mencionado anteriormente. Esta deve ser calculada como:

$$D = \bar{\Psi}_0 = \Psi_0 \quad (2.49)$$

2.2.3 Realização Mínima de Auto-Sistema Recursiva

O modelo no espaço de estados de ordem mínima, obtido como explicado na seção anterior, com base nos parâmetros de Markov do observador, computados pela Equação 2.21, é estimado em batelada. Em diversas situações, há necessidade de aplicação online desses modelos (WU et al., 2015; TORRES; SERRA, 2017). A estimação de $\bar{\Psi}$ através da Equação 2.21 requer a inversão da matriz $[WW^T]$, que possui tamanho elevado, como já discutido. Esta operação pode levar a instabilidade numérica no algoritmo caso a matriz $[WW^T]$ seja singular, além de apresentar elevado custo computacional (AGUIRRE, 2015; YOUNG, 2011; YOUNG, 1984). Para evitar tais problemas, o vetor de parâmetros de Markov do observador é estimado de forma recursiva⁸. Assim, tomando-se a Equação 2.21 e considerando-se que as N amostras de dados, que compõem o vetor de saídas (Equação 2.17) e a matriz de regressores (Equação 2.18), usadas

⁸ Na estimação paramétrica recursiva, os parâmetros mudam com o tempo. À medida que novas medições são disponibilizadas ou consideradas, a estimativa é atualizada (YOUNG, 2011; YOUNG, 1984).

na estimação em batelada são coletadas do instante inicial até o instante k , pode-se reescrever a Equação 2.21 como:

$$\bar{\Psi}_k = \Upsilon_k W_k^T [W_k W_k^T]^{-1} \quad (2.50)$$

Quando novas amostras estão disponíveis no instante $k + 1$, a Equação 2.50 será atualizada para:

$$\bar{\Psi}_{k+1} = \Upsilon_{k+1} W_{k+1}^T [W_{k+1} W_{k+1}^T]^{-1} \quad (2.51)$$

onde $\Upsilon_{k+1} = [\Upsilon_k \ y_{k+1}]$ e $W_{k+1} = [W_{k+1} \ \pi_{k+1}]$, com $\pi_{k+1} = [\mathbf{u}_{k+1}^T \ \tau_k^T \ \dots \ \tau_{k+1-q}^T]^T$. Com intuito de não realizar a operação $[W_{k+1} W_{k+1}^T]^{-1}$ durante a computação de $\bar{\Psi}_{k+1}$, um algoritmo para atualização recursiva de $\bar{\Psi}_k$ é derivado. Inicialmente, define-se uma matriz \tilde{P}_{k+1} , como segue:

$$\tilde{P}_{k+1} = [W_{k+1} W_{k+1}^T]^{-1} \cdot \quad (2.52)$$

Expandindo-se a operação da Equação 2.52 em termos dos elementos da Equação 2.51, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k+1} &= \left[[W_k \ \pi_{k+1}] [W_k^T \ \pi_{k+1}^T]^T \right]^{-1} \\ &= [W_k W_k^T + \pi_{k+1} \pi_{k+1}^T]^{-1} \\ &= [\tilde{P}_{k+1}^{-1} + \pi_{k+1} \pi_{k+1}^T]^{-1} \end{aligned} \quad (2.53)$$

A forma como a matriz \tilde{P}_{k+1} está disposta na Equação 2.53 possibilita a aplicação do Lema da Matriz Inversa para simplificação do processo de inversão matricial (YOUNG, 2011; YOUNG, 1984). Assim, pode-se reformular a Equação 2.53 como:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k+1} &= \tilde{P}_k - \tilde{P}_k \pi_{k+1} [1 + \pi_{k+1}^T \tilde{P}_k \pi_{k+1}]^{-1} \pi_{k+1}^T \tilde{P}_k \\ &= \tilde{P}_k \left[I - \frac{\pi_{k+1} \pi_{k+1}^T \tilde{P}_k}{1 + \pi_{k+1}^T \tilde{P}_k \pi_{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Substituindo-se as Equações 2.52-2.54 na Equação 2.51, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{k+1} &= \Upsilon_{k+1} W_{k+1}^T [W_{k+1} W_{k+1}^T]^{-1} \\
&= [\Upsilon_k \quad \mathbf{y}_{k+1}] [W_k^T \quad \boldsymbol{\pi}_{k+1}^T] \tilde{P}_{k+1} \\
&= [\Upsilon_k W_k^T + \mathbf{y}_{k+1} \boldsymbol{\pi}_{k+1}^T] \tilde{P}_k \left[I - \frac{\boldsymbol{\pi}_{k+1} \boldsymbol{\pi}_{k+1}^T \tilde{P}_k}{1 + \boldsymbol{\pi}_{k+1}^T \tilde{P}_k \boldsymbol{\pi}_{k+1}} \right] \\
&= \bar{\Psi}_k + [\mathbf{y}_{k+1} - \bar{\Psi}_k \boldsymbol{\pi}_{k+1}] \frac{\boldsymbol{\pi}_{k+1}^T \tilde{P}_k}{1 + \boldsymbol{\pi}_{k+1}^T \tilde{P}_k \boldsymbol{\pi}_{k+1}}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde \tilde{P}_k é denominada matriz de covariância. Considerando-se ainda

$$\tilde{Z}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}_{k+1}^T \tilde{P}_k}{\lambda_l + \boldsymbol{\pi}_{k+1}^T \tilde{P}_k \boldsymbol{\pi}_{k+1}}, \tag{2.56}$$

onde \tilde{Z}_{k+1} é um vetor de ganhos e λ_l é um fator de esquecimento⁹ adicionado ao algoritmo, as Equações 2.54-2.55 podem ser reescritas como:

$$\tilde{P}_{k+1} = \lambda_l^{-1} \tilde{P}_k [I - \boldsymbol{\pi}_{k+1} \tilde{Z}_{k+1}] \tag{2.57}$$

e

$$\bar{\Psi}_{k+1} = \bar{\Psi}_k + [\mathbf{y}_k - \bar{\Psi}_k \boldsymbol{\pi}_{k+1}] \tilde{Z}_{k+1} \tag{2.58}$$

Assim, a resolução das Equações 2.56, 2.58 e 2.57, respectivamente, a cada instante, constitui o algoritmo de mínimos quadrados recursivo (*Recursive Least Squares* - RLS) (YOUNG, 2011; YOUNG, 1984), permitindo a computação dos parâmetros de Markov do observador de forma recursiva. Analisando-se a Equação 2.58, fica evidente que a variável $\bar{\Psi}_k$ necessita de uma inicialização. Os valores iniciais dessa variável são obtidos através da aplicação dos mínimos quadrados em batelada, já apresentado na Equação 2.50, onde o índice k apenas indica que são usados N amostras de dados de entrada e saída coletadas de um instante inicial até o instante k .

Uma vez que uma sequência de parâmetros de Markov do observador está disponível a cada instante na etapa recursiva, os parâmetros de Markov também podem ser computados recursivamente pelas Equações 2.29-2.29. Sendo então possível executar a realização do sistema de forma recursiva como descrito na seção 2.2.2 (WU et al., 2015).

⁹ No contexto de estimação recursiva, o fator de esquecimento determina o impacto da estimativa anterior na estimativa atual. Valores típicos de λ_l estão no intervalo: [0,95; 0,99] (AGUIRRE, 2015).

2.3 Teoria de Sistemas Evolutivos

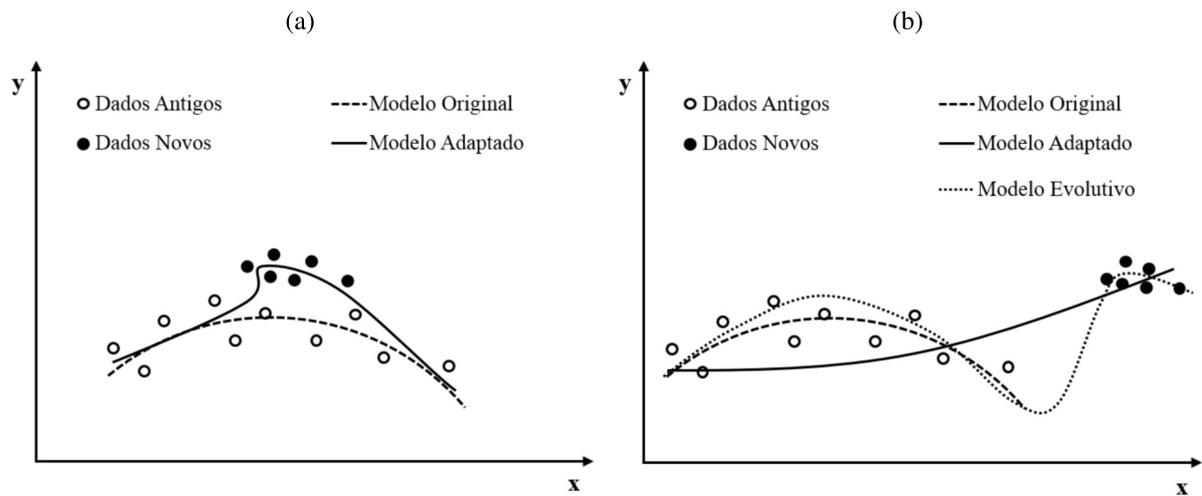
Na década de noventa surgiram os primeiros trabalhos baseados na ideia de sistemas capazes de adaptar sua estrutura automaticamente. Esta abordagem foi inicialmente aplicada a redes neurais. Com o avanço das pesquisas a cerca desse tipo de modelo, cresceu a necessidade de se desenvolver metodologias mais interpretáveis. Com isso, os primeiros sistemas nebulosos evolutivos foram propostos (LEMOS, 2011).

Conforme discutido em (LUGHOFER, 2011), os modelos podem ser divididos em quatro classes: modelos analíticos, modelos baseados em conhecimento, modelos orientados a dados (identificação) e modelos híbridos (são uma combinação dos demais tipos de modelos). Ainda segundo (LUGHOFER, 2011), modelos evolutivos podem ser definidos como modelos orientados a dados, que são automaticamente adaptados, estendidos e evoluídos dinamicamente à medida que novas amostras de dados são incorporadas ao processo de identificação de sistemas. Para (ANGELOV; KASABOV, 2005), precursores da teoria de sistemas evolutivos e suas aplicações, este tipo de abordagem compreende modelos com capacidade de expandir ou simplificar sua estrutura para se adaptar às mudanças do sistema provocadas pelo ambiente ou por alterações internas.

Vale lembrar que sistemas adaptativos, abordagem consagrada e largamente estudada na literatura (COSTA et al., 2016b; MORALES et al., 1997; BARBOZA, 2007), também apresentam certa capacidade de adequação às mudanças as quais sistemas dinâmicos estão sujeitos. No entanto, este tipo de sistema difere significativamente dos sistemas evolutivos, (ANGELOV, 2012). Nos sistemas adaptativos apenas seus parâmetros são atualizados à medida que novas amostras de dados são incorporadas ao processo, mantendo-se fixa sua estrutura (ÄSTRÖM; WITTENMARK, 1989). Já os sistemas evolutivos são capazes de ajustar tanto seus parâmetros quanto sua estrutura a cada instante, dependendo das informações contidas nos dados, como já mencionado. Os sistemas dinâmicos reais podem sofrer com interferências (internas, de operação ou do meio ambiente) constantemente durante seu funcionamento. Estas interferências provocam variações temporais e espaciais nos dados de entrada e saída. Em alguns casos, onde as mudanças não são demasiado acentuadas e as não linearidades não apresentam alta complexidade, a adaptação de parâmetros é suficiente para incorporar novas informações ao modelo gerado. No entanto, há situações em que apenas a adaptação dos parâmetros, com estrutura pré-fixada, não é suficiente para que as características do sistema dinâmico sejam bem representadas naquele momento, havendo assim a necessidade de se expandir a estrutura do modelo. As diferenças e abrangências dessas duas abordagens podem ser melhor esclarecidas, analisando-se a Figura 6. No primeiro caso, na Figura 6a, tem-se um sistema que pode ser aproximado por um modelo puramente adaptativo: o modelo original, denotado pela linha tracejada, representa bem os dados antigos; quando novos dados são incorporados, o modelo adaptativo, linha sólida, é capaz de seguir a tendência dessas novas amostras. Já no caso da Figura 6b, nota-se que os novos dados estão em uma região de operação distinta, onde nem o modelo original representado pela linha

tracejada, nem o modelo adaptativo, dado pela linha sólida, são capazes de aproximar bem as características do sistema dinâmico. Assim, a estrutura do modelo deve ser estendida para representar um sistema com maior não linearidade e garantir melhor precisão, como descreve a linha pontilhada.

Figura 6 – Modelos adaptativos *versus* modelos evolutivos: (a) caso em que apenas a adaptação de parâmetros é suficiente para atualização do modelo com as informações presentes nos novos dados disponibilizados; (b) caso onde a evolução da estrutura do modelo é requerida, pois a adaptação de parâmetros, exemplificada pela linha sólida, não é suficiente para fazer uma boa aproximação do modelo quando novos dados são disponibilizados.



Fonte: Adaptada de (LUGHOFER, 2011).

No contexto de modelagem, sistemas nebulosos evolutivos resultam da união dos principais conceitos de sistemas nebulosos e sistemas evolutivos. Sistemas nebulosos podem ser definidos como modelos matemáticos que se baseiam no conceito de lógica nebulosa, introduzida pela primeira vez por (ZADEH, 1965). Diferente da lógica Booleana, onde só existem duas possibilidades, verdadeiro ou falso, a lógica nebulosa é capaz de representar declarações vagas, incertezas e conhecimento incompleto. Nesse sentido, os sistemas nebulosos são classificados como modelos baseados em regras que expressam o conhecimento humano de forma linguística. A maior parte das metodologias de modelagem nebulosa evolutiva propostas na literatura (FILHO et al., 2017; LUGHOFER et al., 2015; LUGHOFER, 2008; ANGELOV; KASABOV, 2005; LEMOS, 2011; DU; ZHANG, 2008) são baseadas no sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno.

2.3.1 Sistema de Inferência Nebuloso Takagi-Sugeno

Dentre os tipos de sistemas nebulosos¹⁰, os sistemas de inferência nebulosos Takagi-Sugeno são descritos por uma base de regras do tipo **SE antecedente ENTÃO consequente**

¹⁰ Sistemas Nebulosos Tipo 1, podendo ser Mandani ou Takagi-Sugeno, e Sistemas Nebulosos Tipo 2 (SERRA, 2005).

(SERRA, 2005). Sem perda de generalidade, a i -ésima regra de um sistema de inferência nebuloso TS é definida como segue:

$$\text{Regra}^i : \text{SE } \tilde{x}_{k,1} \text{ É } Q_{j|\tilde{x}_{k,1}}^i \text{ E } \dots \text{ E } \tilde{x}_{k,l} \text{ É } Q_{j|\tilde{x}_{k,l}}^i \text{ ENTÃO } \tilde{y}_k^i = f^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (2.59)$$

com $i = [1, L]$, onde L é o número de regras, $\tilde{\mathbf{x}}_k = [\tilde{x}_{k,1} \ \tilde{x}_{k,2} \ \dots \ \tilde{x}_{k,l}] \in \mathfrak{X}^l$ contém as variáveis linguísticas do antecedente. A variável linguística $\tilde{x}_{k,t}$, com $t = [1, l]$, pertence ao conjunto nebuloso $Q_{j|\tilde{x}_{k,t}}^i$ com valor de pertinência $\mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,t}}^i}^i$ definido pela função de pertinência $\mu_{\tilde{x}_{k,t}}^i : R \rightarrow [0, 1]$. O grau de ativação h^i para a regra i é denotado por:

$$h^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,1}}^i}^i \star \mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,2}}^i}^i \star \dots \star \mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,l}}^i}^i \quad (2.60)$$

onde (\star) é o operador usado para representar uma norma- t (LILLY, 2011). O grau de ativação normalizado para a i -ésima regra é dado por:

$$\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{h^i(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\sum_{r=1}^L h^r(\tilde{\mathbf{x}}_k)} \quad (2.61)$$

A normalização mostrada na Equação (2.61) implica em:

$$\sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = 1 \quad (2.62)$$

A resposta do modelo nebuloso TS consiste em uma soma ponderada das funções do consequente, isto é, uma combinação convexa das funções locais f^i , como segue:

$$f(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) f^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (2.63)$$

Os sistemas de inferência nebulosos TS tem como importante aplicação a representação das relações de entrada e saída de sistemas dinâmicos complexos, tendo como principal característica a aproximação de sistemas dinâmicos não lineares através de submodelos locais lineares (FILHO et al., 2017).

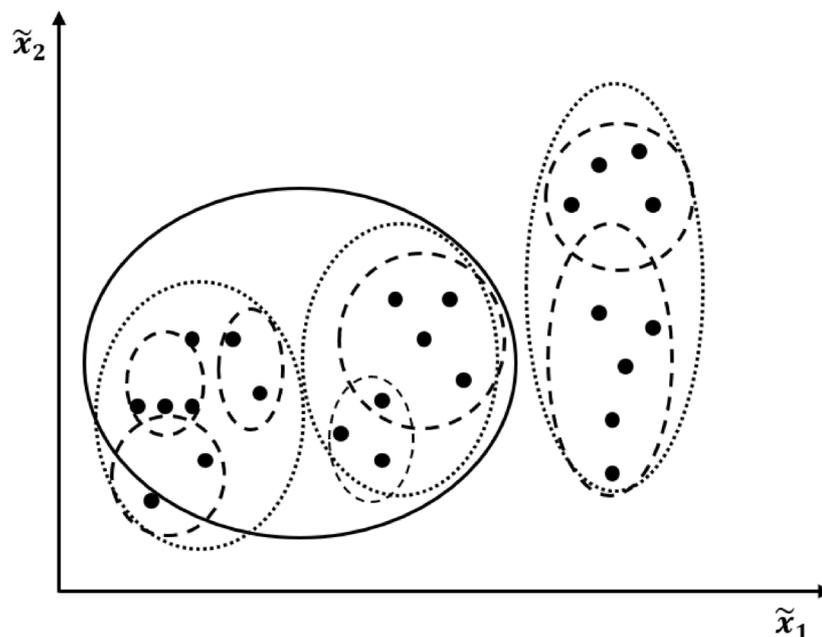
2.3.2 Principais Conceitos de Agrupamento Nebuloso

As metodologias para obtenção de modelos nebulosos, propostas na literatura, geralmente fazem uso de métodos como linearização¹¹ em torno de pontos de operação e agrupamento nebuloso. Agrupamento é uma técnica de aprendizado de máquinas não supervisionado, onde o espaço de dados é particionado com base apenas no padrão dos dados (ANGELOV, 2012).

¹¹ O sistema dinâmico não linear é aproximado por modelos lineares em torno de diferentes pontos de operação. Pode-se realizar esta linearização através de expansões e aproximações (SILVA et al., 2012).

Na aprendizagem não supervisionada os modelos aprendem apenas através dos dados, sem intervenção humana, relações, padrões, regularidades ou categorias nos dados disponibilizados (JÚNIOR; SERRA, 2017). Agrupar dados é encontrar uma distribuição por classes ou grupos de tal forma que os pontos de dados de cada grupo sejam o mais parecido possível e os pontos de dados de grupos distintos sejam tão diferentes quanto possível (ANGELOV, 2012), ou seja, dados do mesmo grupo devem ser homogêneos entre si e heterogêneos aos dados dos demais grupos existentes (FILHO et al., 2017). Assim, fica evidente que, inicialmente, o objetivo do agrupamento é separar dados em grupos da melhor forma possível. No entanto, não existe necessariamente uma única forma de agrupar um determinado conjunto de dados. Por exemplo, observando-se o conjunto de dados ilustrado na Figura 7, pode-se perceber facilmente que diferentes números de grupos com diferentes formas podem ser criados. Portanto, uma questão muito importante no processo de agrupamento, principalmente quando é aplicado na identificação da estrutura de sistemas dinâmicos complexos, é como determinar o número de grupos.

Figura 7 – Agrupamento de um conjunto de dados em diferentes números de grupos com diferentes formas, demarcados por cada tipo de linha.



Fonte: Adaptado de (ANGELOV, 2012).

O processo de agrupamento, quando tratado do ponto de vista da identificação de sistemas por meio de submodelos, está intrinsecamente relacionado à seleção de uma estrutura para modelos de sistemas dinâmicos complexos. Neste caso, cada grupo corresponde a um submodelo local simples e, portanto, todos os pontos de dados pertencentes a um determinado grupo podem ser descritos por tal submodelo local. Na modelagem de sistemas a partir de submodelos, a saída total geralmente é construída com uma soma ponderada das saídas de cada submodelo local. Portanto, neste tipo de abordagem, os grupos, representados por seus respectivos submodelos locais, não são mutuamente exclusivos, como em metodologias cuja

aplicação tem como base o agrupamento tradicional (AGGARWAL; REDDY, 2013), mas sim cooperativos. Assim, o agrupamento do espaço de dados, durante a identificação da estrutura do modelo que melhor se adequa ao sistema dinâmico, tolera certa sobreposição dos grupos, como pode ser visto na Figura 7 (ANGELOV, 2012).

Uma abordagem de agrupamento pode ser considerada adequada no projeto de modelos que representem sistemas dinâmicos complexos quando é capaz de determinar o número mais apropriado de grupos, somente a partir da distribuição dos dados, e use uma quantidade mínima de conhecimento prévio, na forma de limiares e parâmetros para algoritmos (LUGHOFER et al., 2015; MACIEL; GOMIDE; BALLINI, 2012). Além disso, qualquer método de agrupamento deve explicitar duas características importantes dos seus grupos: os pontos focais dos grupos e seus limites no espaço de dados. O ponto focal de um grupo é o centro do grupo. Este ponto pode não ser necessariamente o centro geométrico do grupo, mas pode ser um protótipo escolhido para fazer esse papel. Já os limites dos grupos, denominados raio ou zona de influência, podem tomar diversas formas: hipercúbicos, hiperesféricos, hiperelipsoidais e assim por diante (ANGELOV, 2012; AGGARWAL; REDDY, 2013).

No agrupamento de dados, além de se conhecer os centros e os raios dos grupos, também é necessário selecionar alguma medida de proximidade ou similaridade, para que amostras de dados sejam atribuídas ao grupo mais próximo. Esta similaridade define o grau de homogeneidade das amostras pertencentes a determinado grupo e pode ser mensurada de várias formas. Uma das formas mais utilizadas é a distância entre duas amostras de dados. Dentre as várias métricas de distância exploradas na literatura (Euclidiana, Mahalonobis, cosseno e etc), dois tipos serão explorados nesta dissertação, a distância Euclidiana e a distância Mahalonobis (ANGELOV, 2012; JÚNIOR; SERRA, 2017).

Considerando-se que durante um processo de coleta de dados de um sistema dinâmico o seguinte vetor de dados esteja disponível no instante k :

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k,1} & \tilde{x}_{k,2} & \dots & \tilde{x}_{k,l} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathfrak{X}^l. \quad (2.64)$$

Depois de N observações, a seguinte matriz de dados estará disponível:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} & \tilde{x}_{1,2} & \dots & \tilde{x}_{1,l} \\ \tilde{x}_{2,1} & \tilde{x}_{2,2} & \dots & \tilde{x}_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{j,1} & \tilde{x}_{j,2} & \dots & \tilde{x}_{j,l} \\ \tilde{x}_{j+1,1} & \tilde{x}_{j+1,2} & \dots & \tilde{x}_{j+1,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{N,1} & \tilde{x}_{N,2} & \dots & \tilde{x}_{N,l} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

A distância Euclidiana entre duas amostras de dados, coletadas em diferentes instantes, é definida pela seguinte expressão (DUDA; HART; STORK, 2000):

$$\delta_{j,k}^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_k\|^2 = (\tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_k)(\tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T = \sum_{t=1}^l (\tilde{x}_{j,t} - \tilde{x}_{k,t})^2 \quad (2.66)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_j$ é uma amostra de dados coletada no instante j e $\tilde{\mathbf{x}}_k$ é uma amostra de dados coletada no instante k . Assim, a distância entre uma amostra $\tilde{\mathbf{x}}_k$ e o centro/protótipo de um grupo $\tilde{\mathbf{x}}_k^*$, denominada norma Euclidiana, é denotada por:

$$\delta_k^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^*\|^2 = (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^*)(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^*)^T = \sum_{t=1}^l (\tilde{x}_{k,t} - \tilde{x}_{k,t}^*)^2 \quad (2.67)$$

Diferente da norma Euclidiana, a distância de Mahalonobis leva em consideração uma medida de covariância no seu cálculo. Assim, a distância de Mahalonobis entre uma amostra de dados $\tilde{\mathbf{x}}_j$, coletada no instante j , e a amostra de dados $\tilde{\mathbf{x}}_k$, coletada no instante k , é computada como segue:

$$\delta_{j,k}^2 = (\tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_k)\Sigma^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}_j - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \quad (2.68)$$

onde Σ é a matriz de covariância entre os dados dos vetores considerados. Da mesma forma que definido para a Equação 2.67, a norma Mahalonobis entre uma amostra de dados em um instante k qualquer e o centro/protótipo de um grupo é denotada por:

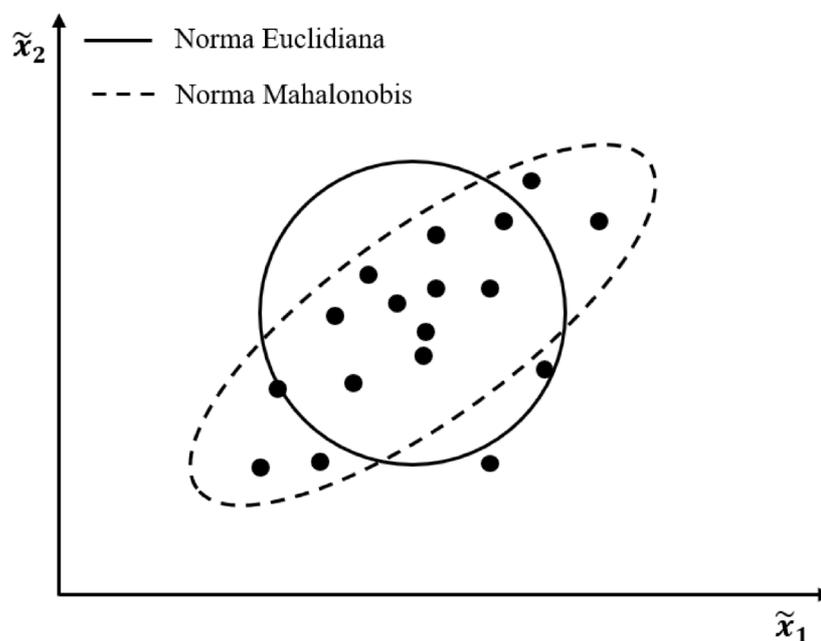
$$\delta_k^2 = (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^*)\Sigma^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^*)^T \quad (2.69)$$

Observando-se as formas de computar as normas Euclidiana e Mahalonobis, dadas nas Equações 2.67 e 2.69, respectivamente, percebe-se que há uma espécie de comparação entre as amostras de dados e os centros dos grupos. A maioria dos problemas reais de engenharia envolve dados com diferentes características, pois os dados que compõem o vetor $\tilde{\mathbf{x}}_k$ podem ser medidas de diferentes grandezas e faixa de valores de amplitude variadas, por exemplo, a combinação de diversas entradas e saídas de um sistema dinâmico. Para que as normas sejam aplicadas e resultem em valores coerentes, todas as características de um sistema dinâmico presentes em um vetor de dados devem ter a mesma influência, ou seja, devem ser normalizadas ou padronizadas (FILHO et al., 2017; JÚNIOR; SERRA, 2017; ANGELOV, 2012). Estas duas técnicas são bem conhecidas na literatura, podendo ser aplicadas nas suas formas clássicas, em batelada, ou de forma recursiva, como é o caso exigido para sistemas evolutivos aplicados em processos online. Um maior entendimento a cerca de normalização e padronização de dados pode ser alcançado através de (ANGELOV, 2012).

Uma importante característica quando se realiza agrupamento é a forma que os grupos tomam no espaço de dados. Mesmo que os dados sejam normalizados ou padronizados, a forma

dos grupos no espaço depende do tipo de métrica de distância empregada. Por exemplo, a norma Euclidiana produz grupos circulares ou hiperesféricos. Por outro lado, devido a ponderação feita pela inversa da matriz de covariância, os grupos resultantes da aplicação da norma Mahalonobis apresentam forma de elipse ou hiperelipsoidal. A comparação entre o agrupamento de um conjunto de dados, aplicando-se a norma Euclidiana e a norma de Mahalonobis, pode ser vista na Figura 8. Ficando evidente que a norma Mahalonobis adequaria melhor o formato do grupo à distribuição das amostras de dados. Assim, em geral, a definição do formato do grupo, vai depender do conhecimento que o especialista tem sobre o sistema bem como do seu propósito (ANGELOV, 2012).

Figura 8 – Formato dos grupos criados a partir de um conjunto de dados usando-se diferentes métricas de distância: grupo demarcado pela linha sólida resultante de um agrupamento baseado na norma Euclidiana; grupo demarcado pela linha tracejada resultante de um agrupamento baseado na norma Mahalonobis.



Fonte: Adaptado de (ANGELOV, 2012).

Além do formato, há que se determinar os limites dos grupos, ou seja, a magnitude da sua zona de influência. O raio de um grupo é um parâmetro importante que afeta diretamente os resultados. Tradicionalmente, trata-se de um valor previamente definido pelo especialista nos agrupamentos em batelada (ANGELOV, 2012). Já nas abordagens baseadas em agrupamento evolutivo, esses valores podem tanto ser previamente definidos quanto podem ser atualizados recursivamente, de acordo com a distribuição dos dados no espaço, sendo a segunda opção a mais adequada. Esta é uma das grandes vantagens dos agrupamentos evolutivos, não há necessidade de se inferir parâmetros específicos para os algoritmos de agrupamento. Diversas formas para atualização recursiva dos raios tem sido propostas na literatura (ANGELOV, 2012; FILHO et al., 2017; JÚNIOR; SERRA, 2017; LUGHOFER; CERNUDA; PRATAMA, 2013; LUGHOFER, 2011).

A aplicação de técnicas de agrupamento na identificação de estruturas para representação de sistemas dinâmicos complexos a partir de submodelos locais parte do princípio que certa sobreposição de grupos é aceitável e, de certa forma, desejável, ou seja, os grupos são cooperativos e não exclusivos, como mencionado antes. O agrupamento nebuloso considera um caso ainda mais realista, quando os pontos de dados podem pertencer a mais de um grupo simultaneamente, com diferentes graus de pertinências. Os agrupamentos nebulosos podem ser realizados em batelada ou de forma evolutiva, como será discutido nas próximas seções. Outra questão que deve ser levada em consideração no momento de se realizar um agrupamento nebuloso, seja batelada ou evolutivo, é quais variáveis vão compor o vetor $\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathfrak{R}^l$. De acordo com (KASABOV, 2007), para que a complexa interação entre as variáveis do sistema dinâmico seja bem representada, todo o espaço de entrada e saída deve ser utilizado no agrupamento. Esta exigência se justifica pelo próprio objetivo do agrupamento nebuloso: mapear as não linearidades entre as variáveis de entrada e saída para construção da estrutura do modelo, que é a base de regras nebulosas.

2.3.2.1 Agrupamento Nebuloso em Batelada

A denominação agrupamento nebuloso é aplicada quando cada amostra $\tilde{\mathbf{x}}_k$ da matriz de dados apresentada na Equação 2.65 pertence a todos os grupos criados com grau de pertinência entre zero e um (FILHO et al., 2017). Com base nas questões apresentadas em seções anteriores, o objetivo de um agrupamento em batelada é particionar um conjunto de dados $\tilde{\mathbf{X}}$ em L grupos, onde L é conhecido *a priori*. Assim, a partição nebulosa de $\tilde{\mathbf{X}}$ pode ser definida como uma família de subconjuntos $\{Q^{i|i=1,\dots,L} \subset P(\tilde{\mathbf{X}})\}$, que apresentam as seguintes propriedades:

$$\bigcup_{i=1}^L Q^i = \tilde{\mathbf{X}} \quad (2.70)$$

$$Q^i \cap Q^j = \emptyset, \quad 1 \leq i \neq j \leq L \quad (2.71)$$

$$0 \subset Q^i \subset \tilde{\mathbf{X}} \quad (2.72)$$

onde a Equação 2.70 significa que todos os subconjuntos $Q^{i|i=1,\dots,L}$ estão contidos em $\tilde{\mathbf{X}}$, a Equação 2.71 garante que todos os subconjuntos são disjuntos e a Equação 2.72 significa que nenhum subconjunto pode ser vazio. Reescrevendo-se as propriedades dadas nas Equações 2.70-2.72 em termos de funções de pertinências nebulosas, μ , obtém-se:

$$\bigvee_{i=1}^L \mu_{Q^i} = 1 \quad (2.73)$$

$$\mu_{Q^i} \wedge \mu_{Q^j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq L \quad (2.74)$$

$$0 \leq \mu_{Q^i} \leq 1, 1 \leq i \leq L \quad (2.75)$$

Portanto, dada uma amostra $\tilde{\mathbf{x}}_k$, sua pertinência é definida por $\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k)$. Assim, uma matriz de partição, com $L \times N$, $\mathbf{U} = [\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k)]$ representa um espaço de particionamento nebuloso se, e somente se, esta satisfaz as seguintes condições:

$$M_{fc} = \{\mathbf{U} \in \mathfrak{R}^{L \times N} \mid \mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) \in [0, 1], \forall i, k; \sum_{i=1}^L \mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = 1, \forall k; 0 < \sum_{i=1}^N \mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) < N, \forall i\} \quad (2.76)$$

A interpretação da Equação 2.76 deve ser que a pertinência $\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k=1, \dots, N})$ tem valor situado entre 0 e 1, a condição de graus de pertinências normalizados é garantida e, por fim, que a soma dos graus de pertinências de todas as observações não pode ser superior ao total de observações. Assim, um algoritmo de agrupamento nebuloso em batelada, que tem como base o conceito de partição nebulosa, consiste em otimizar um conjunto inicial de centróides através da minimização de uma função custo que poder ser formulada como:

$$J(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{X}}^*, \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N (\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k))^{m_f} D_{ikA^i}^2 \quad (2.77)$$

onde $\tilde{\mathbf{X}}$ é um conjunto de dados finito apresentado na Equação 2.65; $\mathbf{U} = [\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k)] \in M_{fc}$ é uma partição nebulosa de $\tilde{\mathbf{X}}$; $\tilde{\mathbf{X}}^* = \{\tilde{\mathbf{x}}^{1*}, \tilde{\mathbf{x}}^{2*}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{L*}\}$, com $\tilde{\mathbf{x}}^{i*} \in \mathfrak{R}^l$, é uma matriz vetor de centros/protótipos dos L grupos; $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^L)$ é uma L -tupla de matrizes de norma induzida; e $D_{ikA^i}^2$ é uma norma de distância quadrada. O termo $m_f \in [1, \infty)$, definido pelo especialista, é o grau de ponderação que determina a fuzzificação dos grupos. Os algoritmos de agrupamento nebulosos baseados em matriz de partição nebulosa diferem apenas na escolha da norma de distância a ser aplicada.

O algoritmo de agrupamento em batelada *Fuzzy C-Means* (FCM) é o método agrupamento nebuloso clássico mais popular na literatura (COSTA et al., 2016b; SILVA et al., 2012). A implementação desse algoritmo necessita que o número de grupos L , o grau de fuzzificação m_f e um critério de parada sejam previamente definidos. O objetivo do FCM é encontrar a matriz de partição nebulosa \mathbf{U} , contendo os valores de pertinência dos subconjuntos nebulosos de $\tilde{\mathbf{X}}$, e a matriz vetor de protótipos dos grupos $\tilde{\mathbf{X}}^*$ que minimizem a função objetivo dada na Equação 2.77. Nota-se que a matriz norma de indução \mathbf{A} não faz parte do processo de otimização. Isso ocorre porque no FCM $\mathbf{A}^i = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é uma matriz identidade, pois o mesmo usa como métrica de distância a norma Euclidiana, definida na Equação 2.66. Maiores detalhes e pseudo-códigos para implementação do algoritmo *Fuzzy C-Means* podem ser encontrado em (SILVA et al., 2012).

Um outro algoritmo também muito utilizado na literatura, considerado uma extensão do FCM, é o algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel (GK) (BABUKA; VEEN; KAYMAK, 2002). Neste algoritmo uma norma de distância adaptativa é empregada, fazendo com que cada

grupo tenha uma forma distinta, a depender da distribuição dos dados no espaço, ou seja, cada grupo tem sua própria matriz de norma induzida \mathbf{A}^i . Isto determina uma norma de produto interno para a distância entre uma dada amostra $\tilde{\mathbf{x}}_k$ e os centros dos grupos existentes $\tilde{\mathbf{x}}_k^{i*}|_{i=1,\dots,L}$, denotada por:

$$D_{ik\mathbf{A}^i}^2 = (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*})\mathbf{A}^i(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*})^T \quad (2.78)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_k$ é uma amostra de dados lida no instante k e $\tilde{\mathbf{x}}_k^{i*}$ é o centro/protótipo do i -ésimo grupo no instante k . Nota-se que as Equações 2.69 e Equações 2.78 são semelhantes. A relação existente entre a matriz norma induzida \mathbf{A}^i e a matriz de covariância Σ , que tem sua inversa apresentada na Equação 2.69, é dada por:

$$\mathbf{A}^i = \left[\rho_f^i \det(\Sigma^i) \right]^{1/l} (\Sigma^i)^{-1} \quad (2.79)$$

onde ρ_f representa o volume do grupo i , geralmente fixado em $\rho_f = 1$ e l é a dimensão dos dados. O termo Σ^i é a matriz de covariância nebulosa do i -ésimo grupo, definida como segue:

$$\Sigma^i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k))^{m_f} (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*})^T (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*})}{\sum_{k=1}^N (\mu^i(\tilde{\mathbf{x}}_k))^{m_f}} \quad (2.80)$$

Como pode ser visto, o agrupamento nebuloso em batelada tem diversas variações. Ainda com base em partição nebulosa, o algoritmo de Estimação da Máxima Verossimilhança Nebulosa (FMLE), que emprega como norma de distância uma métrica baseada em máxima verossimilhança pode ser explorado (FILHO et al., 2017).

Há também as metodologias de agrupamento nebuloso em batelada, onde o número de grupos L não precisa ser previamente definido pelo especialista, são algoritmos em batelada não supervisionados, como é o caso do método de Agrupamento de Montanha e do seu derivado, uma versão mais elaborada, o Agrupamento Subtrativo (CHIU, 1994). Estes métodos, com base no conjunto de dados disponível antes do início do processo de agrupamento, apresentado na Equação 2.65, tem o número de grupos computado em função da medida de potencial/densidade das amostras e da subtração contínua desse potencial até um limiar definido pelo especialista. Além disso, diferente de outras técnicas de agrupamento nebuloso em batelada, onde os centros se baseiam em um valor médio fictício, os pontos focais dos grupos construídos pelo Algoritmo Subtrativo são as próprias amostras de dados (SANTOS; SERRA, 2017). Considerando-se um conjunto de dados denotado pela matriz de dados apresentada na Equação 2.65, onde cada vetor $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k=1,\dots,N}$ é candidato a centro de grupo, calcula-se a densidade da amostra de dados $\tilde{\mathbf{x}}_k$ como

segue:

$$D(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{-\alpha_S \|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_t\|^2} \quad (2.81)$$

onde α_S , com valores típicos $\alpha_S \in [0,3; 0,5]$, é uma constante definida pelo especialista. Trata-se de um algoritmo iterativo, onde, após definidos alguns limiares de projeto, o número de grupos é definido apenas com base na medida de potencial das amostras restantes. Este, por ser um algoritmo não supervisionado, é considerado o algoritmo introdutório dos agrupamentos evolutivos. O detalhamento do Algoritmo Subtrativo e algumas de suas aplicações podem ser encontrados em (CHIU, 1994; SANTOS; SERRA, 2017).

2.3.2.2 Agrupamento Nebuloso Evolutivo

Grande parte das técnicas de modelagem nebulosa evolutiva utiliza a informação da organização espacial das variáveis de entrada e saída na construção dos seus submodelos nebulosos (LEMOs, 2011; SILVA, 2014). Os algoritmos nebulosos evolutivos processam estas variáveis que compõem o espaço de dados, adaptando os grupos existentes e/ou expandindo ou comprimindo o número de grupos, ou seja, evoluindo a base de regras (PEDRYCZ, 2005).

No instante em que um processo de modelagem nebulosa evolutiva é iniciado, não há nenhuma informação sobre a estrutura do modelo, antecedente, nem conhecimento sobre os parâmetros dos submodelos, conseqüente. Com base nisso, foram desenvolvidas formas de se inicializar esse tipo de processo de aprendizagem. Basicamente, os parâmetros iniciais de um agrupamento evolutivo podem ser definidos a partir de uma estimativa em batelada com um conjunto de dados de inicialização (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010; ANGELOV, 2012). Caso um conjunto de dados para inicialização da base de regras não esteja disponível, esta inicialização pode ser realizada a partir do conhecimento do especialista. Há ainda uma terceira opção, onde as condições iniciais são determinadas a partir da primeira amostra de dados disponível em um fluxo de dados contínuos, o que se denomina estimativa inicial online (KASABOV, 2002; KASABOV; FILEV, 2006; KASABOV, 2007; ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010; ANGELOV, 2012).

Os algoritmos de agrupamento evolutivo baseiam-se na forma como os protótipos/centros dos grupos e seus raios ou zona de influência são atualizados a cada nova amostra de dados disponibilizada em um fluxo de dados. A evolução dos parâmetros de um modelo nebuloso evolutivo segue alguns princípios básicos:

- Sempre que uma nova amostra de dados é disponibilizada, o algoritmo de agrupamento nebuloso evolutivo aplicado deve analisar se um novo grupo deve ser criado. Esta avaliação pode ser realizada com base em medidas de potencial de representatividade da amostra atual ou ainda com base em limiares indiretos definidos pelo especialista;

- A posição inicial do centro de um novo grupo é determinada a partir da nova amostra lida;
- O raio inicial do centro de um novo grupo é inicializado com zero, pois o grupo contém apenas uma amostra (o próprio centro do grupo);
- À medida que novas amostras são disponibilizadas e não são criados novos grupos, ou seja, a amostra de dados lida está dentro dos limites de um grupo já existente, os parâmetros dos grupos são apenas atualizados (posição dos centros e raios);
- A atualização da posição dos centros dos grupos e dos raios é feita aplicando-se técnicas específicas propostas nos algoritmos de agrupamento.

Como já citado anteriormente, o Algoritmo Subtrativo foi um o precursor dos algoritmos de agrupamento evolutivo. Desde então, uma grande quantidade de metodologias baseadas em agrupamento nebuloso evolutivo foi proposta. Em (ANGELOV; FILEV, 2004), uma abordagem para identificação de modelos online, baseada em uma versão recursiva do Algoritmo Subtrativo, foi proposta. Neste tipo de agrupamento nebuloso evolutivo, a base de regras evolui continuamente adicionando novas regras com maior poder de sumarização e modificando as regras e parâmetros já existentes. A criação de novas regras ou a modificação das regras existentes é realizada pela avaliação recursiva do potencial das novas amostras de dados. Os parâmetros do consequente das regras são atualizados com o algoritmo recursivo de mínimos quadrados. Esse modelo evolutivo é chamado de Takagi-Sugeno Evolutivo (*Evolving Takagi-Sugeno* - eTS).

Com base na descrição anterior, o algoritmo eTS não permite simplificação da base de regras, ou seja, não permite exclusão de regras. Afim de se reduzir a complexidade dos cálculos de potencial, uma outra versão do eTS, denominada SimpLeTS, foi proposta em (ANGELOV; FILEV, 2005). Nesta metodologia, a medida de potencial baseada na densidade dos dados combinada com o conceito de dispersão, torna o algoritmo computacionalmente mais eficiente. Além disso, esse método permite a simplificação da base de regras através da representatividade das regras. Assim, se o número de amostras associadas a uma regra for menor que um determinado percentual dos dados, tal regra é ignorada e seu grau de ativação é anulado.

Outra versão do eTS, denominada xTS (*eXtended Takagi-Sugeno*), foi introduzida em (ANGELOV; ZHOU, 2006). Esta abordagem difere das anteriormente citadas em aspectos como: estimação recursiva dos raios dos grupos; e medição da relevância dos grupos através das suas idades. Já na pesquisa de (ANGELOV; FILEV; KASABOV, 2010), uma versão robusta, flexível e completamente autônoma do eTS, foi proposta. Neste algoritmo, denominado eTS+, os parâmetros dos grupos são atualizados usando critérios como idade, utilidade, densidade local e os raios são estimados recursivamente.

O algoritmo SAFIS (*Sequential Adaptive Fuzzy Inference System*), proposto por (RONG et al., 2006), emprega um método baseado na rede RBF (*Radial Basis Function*) para construção da base de regras. Esse sistema de inferência nebuloso utiliza um critério baseado na distância

Euclidiana entre as amostras de dados e os centros dos grupos, em conjunto com uma medida de influência para adicionar regras de forma recursiva. Este método também permite a exclusão de regras baseada em um critério de influência.

O sistema de inferência nebuloso flexível (*Flexible Fuzzy Inference System* - FLEXFIS), introduzido por (LUGHOFER, 2008), tem seu método de agrupamento evolutivo derivado de uma modificação da técnica de quantização vetorial, denominada eVQ (*evolving Vector Quantization*). Este método, usa um limiar de distância para criação de novos *clusters*. No entanto, este limiar não é definido de forma arbitrária. Sua determinação é função da dimensão do espaço de dados aplicado no processo de agrupamento. Isto é realizado para se evitar a maldição da dimensionalidade¹². Na prática, caso um limiar seja definido sem levar em consideração a dimensão do espaço de dados, quanto maior for a dimensão, maior a probabilidade de algoritmo de aprendizagem não supervisionada gerar um número excessivo de *clusters*, o que pode aumentar significativamente a complexidade dos modelos, além de poder causar sobreparametrização. Portanto, o algoritmo FLEXFIS adota um limiar de distância definido como:

$$\rho = fac \frac{\sqrt{m+p}}{\sqrt{2}} \quad (2.82)$$

onde m é a dimensão do espaço de entrada e fac é um parâmetro ajustado para cada problema, que apresenta valores típicos de $[0,2; 0,3]$. Em (LUGHOFER, 2011) é sugerido uma faixa de valores de $[0,2 \ 0,3]$. No entanto, esse valor poder ser menor. A característica de variância dos dados influencia diretamente nesta constante, quanto menor a variância, menor será o valor de fac .

2.3.3 Estimação dos Parâmetros dos Submodelos

Nos sistemas de inferência nebulosos TS, a parte referente ao antecedente é completamente linguística, computada nesta dissertação por meio de um agrupamento nebuloso evolutivo, e parte referente ao consequente consiste em uma expressão funcional das variáveis linguísticas definidas no antecedente. Assim, uma vez que os grupos estejam determinados para um instante k qualquer, os parâmetros dos submodelos locais precisam ser estimados, aplicando-se aprendizado supervisionado. Portanto, o processo de aprendizagem de sistemas nebulosos evolutivos, a partir de dados experimentais, é dividido em uma etapa de aprendizagem não supervisionada, durante a identificação da estrutura do antecedente, e uma etapa de aprendizagem supervisionada, durante a estimação dos parâmetros do consequente (LUGHOFER, 2011; ANGELOV, 2012; FILHO et al., 2017). Os submodelos do consequente dos sistemas de inferência nebulosos TS podem ser representados por diversos tipos de funções: polinomiais, ARX¹³, entre outros. Nesta dissertação,

¹² Quando maior a dimensão do espaço de dados, maior a distância entre dois pontos adjacentes (TIBSHIRANI; FRIEDMAN, 2001).

¹³ *AutoRegressive with eXogenous input* (AGUIRRE, 2015).

o conseqüente do sistema de inferência nebuloso é representado por submodelos lineares no espaço de estados.

A estimação dos parâmetros do conseqüente da i -ésima regra nebulosa dada na Equação 2.59 se inicia com a definição de um problema de otimização. A solução desse problema de otimização pode ser realizada aplicando-se uma abordagem de aprendizagem global ou local, em batelada ou recursiva. Na abordagem de aprendizagem global, os parâmetros dos submodelos do conseqüente de todas as regras são otimizados simultaneamente. Portanto, a saída global do sistema nebuloso é baseada na inferência sobre todas as regras nebulosas (LUGHOFER, 2011). Um método convencional de otimização muito empregado em problemas de modelagem é o método dos mínimos quadrados, já apresentado anteriormente. A aplicação desse método, considerando a abordagem global, tem como objetivo minimizar o erro entre os valores medidos de \mathbf{y}_k e os valores estimados pelo sistema de inferência nebuloso $\hat{\mathbf{y}}_k = f(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ (Equação 2.59), onde $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{R}^p$ é a variável de saída de um sistema dinâmico com p saídas, com $k = 1, \dots, N$ (N é o número de amostras de dados disponível).

Diferente do processo de aprendizagem global, na abordagem de aprendizagem local, são realizadas estimativas locais independentes para os parâmetros do conseqüente de cada submodelo linear local. Isso significa que uma otimização independente deve ser realizada para cada região local. A abordagem local proporciona maior flexibilidade ao modelo quando sua estrutura é alterada no processo evolutivo, adição ou exclusão de regras (LUGHOFER, 2011).

Considerando-se o seguinte vetor de parâmetros estimados para cada regra $i | i = 1, \dots, L$, onde L é o número de grupos no instante k :

$$\Theta^i = \begin{bmatrix} \theta_1^i & \theta_2^i & \dots & \theta_c^i \end{bmatrix}^T \quad (2.83)$$

onde c é o número de parâmetros de cada submodelo do conseqüente. A matriz de regressores do i -ésimo submodelo é dada por:

$$\mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \dots & z_{1,c} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & \dots & z_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N,1} & z_{N,2} & \dots & z_{N,c} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

A matriz de regressores $\mathbf{R}^{i=1, \dots, L}$ é idêntica para todos os L submodelos lineares locais. Isso ocorre porque os regressores $z_{k,j}$, com $k = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, c$ dependem apenas dos dados de entrada \mathbf{u}_k e da saída \mathbf{y}_k do sistema dinâmico. Um modelo linear local com vetor de saídas $\tilde{\mathbf{Y}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_1^i & \tilde{\mathbf{y}}_2^i & \dots & \tilde{\mathbf{y}}_N^i \end{bmatrix}^T$, onde:

$$\tilde{\mathbf{Y}}^i = \mathbf{R}^i \Theta^i \quad (2.85)$$

é válido apenas na região em que o grau de ativação $\gamma^i(\cdot)$ é próximo de 1, ou seja, no caso dos problemas lineares, o que ocorrerá para o caso onde a amostra de dados está próxima ao centro. Os dados nessa região são altamente relevantes para a estimação de Θ^i . À medida que o grau de ativação para o i -ésimo centro de grupo diminui, os dados tornam-se menos relevantes para a estimação de Θ^i e mais relevante para a estimação dos parâmetros dos modelos vizinhos. Consequentemente, o que se aplica para estimação dos parâmetros de cada submodelo local é uma otimização de mínimos quadrados ponderados nebuloso (*Fuzzily Weighted Least Squares* - FWLS), onde os fatores de ponderação são denotados pelos valores dos graus de ativação $\gamma^{i=1,\dots,L}(\cdot)$. Portanto, a estimação dos parâmetros do consequente do i -ésimo submodelo local é realizada através do seguinte problema de otimização:

$$J^i = \sum_{k=1}^N \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) (e_k^i)^2 \longrightarrow \min \quad i = 1, \dots, L \quad (2.86)$$

onde $e_k^i = \mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k^i$ representa o erro entre a saída real \mathbf{y}_k e a saída do i -ésimo submodelo local $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$. A computação dos parâmetros do i -ésimo submodelo local pelo algoritmo FWLS é realizada pela seguinte equação:

$$\Theta^i = ((\tilde{\mathbf{R}}^i)^T \tilde{\mathbf{R}}^i)^{-1} (\tilde{\mathbf{R}}^i)^T \tilde{\mathbf{y}} \quad (2.87)$$

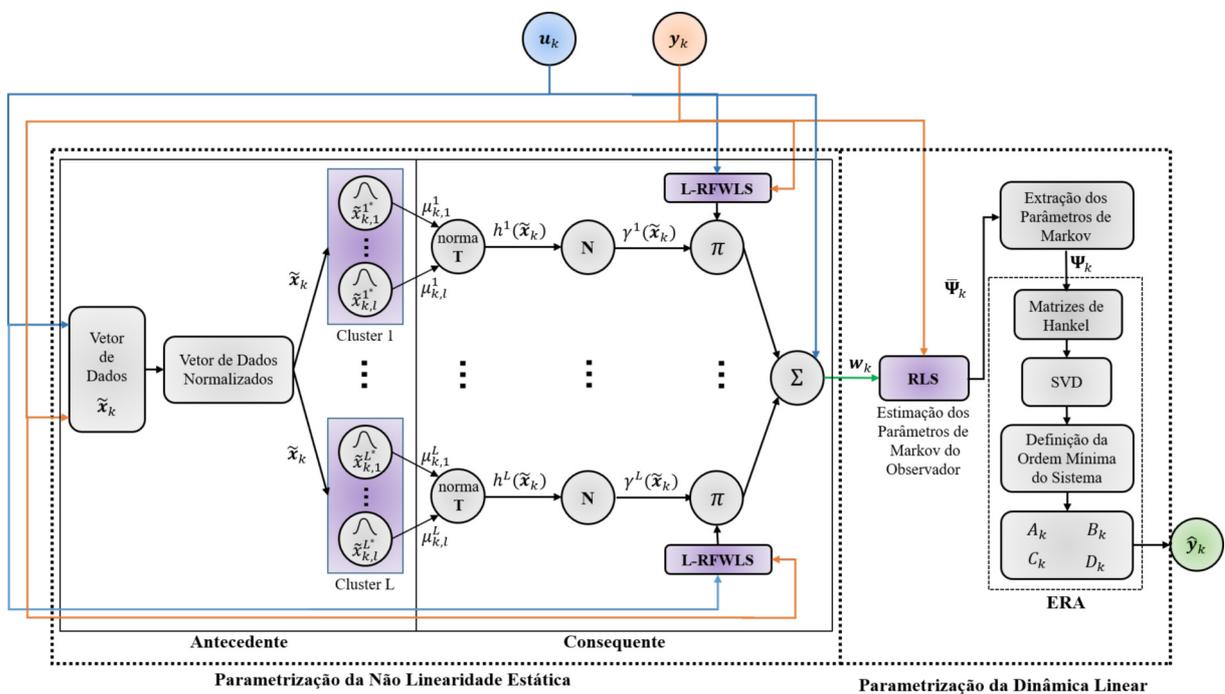
onde $\tilde{\mathbf{R}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_1)} \\ \mathbf{r}_2^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_2)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_N)} \end{bmatrix}$, com $\mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} z_{k,1} & z_{k,2} & \dots & z_{k,c} \end{bmatrix}$ sendo o vetor de regressores, e

$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_1)} & \mathbf{y}_2 \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_2)} & \dots & \mathbf{y}_N \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_N)} \end{bmatrix}^T$. Já a aprendizagem recursiva local dos parâmetros do consequente pode ser realizada através do algoritmo mínimos quadrados ponderados nebuloso recursivo (*Recursive Fuzzily Weighted Least Squares* - RFWLS) (LUGHOFER, 2011).

3 FORMULAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA

Neste capítulo, a metodologia nebulosa evolutiva, baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados, para identificação de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis, proposta nesta dissertação, é apresentada. A arquitetura da metodologia desenvolvida, apresentada na Figura 9, consiste na parametrização da característica estática não linear por um sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo e na parametrização da característica dinâmica linear por um modelo linear no espaço de estados obtido via algoritmo recursivo de realização de auto-sistema baseado nos parâmetros de Markov do sistema dinâmico.

Figura 9 – Estrutura da metodologia nebulosa Takagi-Sugeno evolutiva para estimação de modelos de Hammerstein no espaço de estados proposta.



Fonte: Autor.

3.1 Parametrização da Não Linearidade Estática

A função estática não linear $f(\mathbf{u}_k)$ é aproximada por um sistema de inferência nebuloso TS, caracterizado por um conjunto de regras do tipo **SE-ENTÃO**, cuja estrutura é dada por:

$$\begin{aligned}
 R^i : \text{SE } \tilde{x}_{k,1} \text{ É } Q^i_{j|\tilde{x}_{k,1}} \text{ E } \dots \text{ E } \tilde{x}_{k,l} \text{ É } Q^i_{j|\tilde{x}_{k,l}} \\
 \text{ENTÃO } \tilde{y}_k^i = (E^i(I - G^i)^{-1}H^i + F^i)\mathbf{u}_k
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $i = [1, L]$, onde L é o número de regras, $\tilde{\mathbf{x}}_k = [\tilde{x}_{k,1} \ \tilde{x}_{k,2} \ \dots \ \tilde{x}_{k,l}] \in \mathfrak{R}^l$ é o vetor que contém as variáveis linguísticas do antecedente no instante k . A variável linguística $\tilde{x}_{k,t}$, com $t = [1, l]$,

pertence ao conjunto nebuloso $Q_{j|\tilde{x}_{k,t}}^i$ com valor de pertinência $\mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,t}}^i}^i$ definido pela função de pertinência $\mu_{\tilde{x}_{k,t}}^i : R \rightarrow [0, 1]$. As matrizes $G^i \in \mathfrak{R}^{s \times s}$, $H^i \in \mathfrak{R}^{s \times m}$, $E^i \in \mathfrak{R}^{p \times s}$ e $F^i \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ são os parâmetros do i -ésimo modelo linear local do consequente, $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entrada e $\tilde{\mathbf{y}}_k^i \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de saída do i -ésimo modelo linear local (SERRA, 2005).

O valor de pertinência do ponto $\tilde{x}_{k,j}$ do antecedente para o i -ésimo conjunto nebuloso no j -ésimo universo de discurso pode ser descrito por uma função gaussiana, dada por:

$$\mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,j}}^i}^i(\tilde{x}_{k,j}) = e^{-\frac{(\tilde{x}_{k,j} - \tilde{x}_{k,j}^{i*})^2}{2(\sigma_{k,j}^i)^2}} \quad (3.2)$$

onde $\tilde{x}_{k,j}^{i*}$ é o ponto focal do i -ésimo conjunto nebuloso e $(\sigma_{k,j}^i)^2$ é a variância da gaussiana da j -ésima variável do antecedente da i -ésima regra (SERRA, 2005). O grau de ativação h^i para a regra i é dado por:

$$h^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,1}}^i}^i \star \mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,2}}^i}^i \star \dots \star \mu_{Q_{j|\tilde{x}_{k,l}}^i}^i \quad (3.3)$$

onde (\star) é o operador usado para representar a norma- t produto (SERRA, 2005). O grau de ativação normalizado para a i -ésima regra é denotado por:

$$\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{h^i(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\sum_{r=1}^L h^r(\tilde{\mathbf{x}}_k)} \quad (3.4)$$

A normalização demonstrada na Equação (3.4) implica em

$$\sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = 1 \quad (3.5)$$

A resposta do modelo nebuloso TS consiste em uma soma ponderada das funções do consequente, isto é, uma combinação convexa das funções locais $\tilde{\mathbf{y}}_k^i$

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) \tilde{\mathbf{y}}_k^i \quad (3.6)$$

3.1.1 Abordagem Evolutiva para Estimação do Antecedente

O agrupamento evolutivo aplicado na estimação dos conjuntos nebulosos do antecedente, os *clusters*, é baseado no algoritmo FLEXFIS (LUGHOFER et al., 2015; LUGHOFER, 2008). Dentre as possibilidades de inicialização do algoritmo de agrupamento evolutivo, foi utilizada a inicialização online, onde nenhum *cluster* é definido previamente, ou seja, o número de *cluster*

antes da leitura online das amostras de dados é igual a zero. A atualização recursiva dos centros dos *clusters*, para melhor adaptação das características desses *clusters* aos dados, é definida por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k, novo}^{v*} = \tilde{\mathbf{x}}_{k, anterior}^{v*} + \eta_k^v \left(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_{k, anterior}^{v*} \right) \quad (3.7)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_{k, novo}^{v*}$ é a posição do *cluster* vencedor $\tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}$ (*cluster* com centro mais próximo da amostra $\tilde{\mathbf{x}}_k$, variável linguística do antecedente, no instante k , de acordo com norma Euclidiana) após a atualização e $\tilde{\mathbf{x}}_{k, anterior}^{v*}$ é a posição antes da atualização. O termo η_k^v corresponde a um ganho de aprendizagem do *cluster* vencedor no instante k . O ganho de aprendizagem controla o grau de deslocamento dos centros e é responsável também pela convergência dos parâmetros do consequente dos submodelos do sistema nebuloso TS. O cálculo recursivo de η_k^v é dado por:

$$\eta_k^v = \frac{g_{inicial}}{S_k^v} \quad (3.8)$$

onde S_k^v , denominado suporte, é o número de amostras pertencentes ao *cluster* vencedor $\tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}$ no instante k , e $g_{inicial}$ é um parâmetro constante (proposto inicialmente com valor de 0,5) equivalente a um ganho de aprendizagem inicial que depende da característica dos dados. À medida que o suporte do i -ésimo *cluster* aumenta, η_k^i decresce monotonicamente, garantindo a convergência do centro deste *cluster*, bem como a convergência do seu raio ou zona de influência σ_k^i , que limita o alcance desse *cluster* no espaço (LUGHOFER et al., 2015; LUGHOFER, 2008).

Sempre que uma nova amostra de dados $\tilde{\mathbf{x}}_k$ está disponível, há eleição de um *cluster* vencedor. No entanto, a Equação 3.7 só é atualizada se $\tilde{\mathbf{x}}_k$ é adicionado a um *cluster* já existente. Caso contrário, uma nova regra é criada conforme a seguinte condição:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}\|_A \geq \rho \quad (3.9)$$

onde A indica norma Euclidiana e ρ é um parâmetro de vigilância que gerencia a evolução de novos *clusters*. A criação de novas regras está relacionada com a estabilidade do modelo porque não altera nenhum *cluster* previamente treinado e a atualização está relacionada à plasticidade pois há adaptação a novas informações como demonstrado na Equação 3.7 (LUGHOFER et al., 2015; LUGHOFER, 2008). O parâmetro ρ é calculado por:

$$\rho = fac * \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2}} \quad (3.10)$$

onde fac é uma constante que geralmente assume os valores: $fac \in [0, 1]$, dependendo das características dos dados, e l é a dimensão do vetor $\tilde{\mathbf{x}}_k$. A condição proposta na Equação 3.9 assegura também que os *clusters* sejam movidos em áreas delimitadas por ρ . Portanto, um centro de *cluster* nunca é inicializado muito longe de um grande volume de dados (LUGHOFER, 2008).

O raio do *cluster* vencedor para o instante k na j -ésima dimensão pode ser definido pela medida da variância dos dados pertencentes a este *cluster* na dimensão j neste instante (LUGHOFER, 2008). A atualização recursiva da variância em cada dimensão, de acordo com LUGHOFER, é dada pela seguinte equação:

$$\left(\sigma_{k,j}^{v, novo}\right)^2 = \frac{(S_k^v - 1) \left(\sigma_{k,j}^{v, anterior}\right)^2 + S_k^v \left(\Delta \tilde{x}_{k,j}^{v*}\right)^2 + \left(\tilde{x}_{k,j}^{v*} - \tilde{x}_j\right)^2}{S_k^v} \quad (3.11)$$

onde $j = [1, l]$, sendo l a dimensão do vetor $\tilde{\mathbf{x}}_k$, S_k^v é o suporte do *cluster* vencedor no instante k , $\Delta \tilde{x}_{k,j}^{v*}$ é a distância entre a posição anterior do *cluster* vencedor e a nova posição, na j -ésima dimensão.

O Algoritmo 1, a seguir, exhibe o procedimento de estimação do antecedente de um sistema de inferência nebuloso, onde aplica-se uma abordagem evolutiva baseada no algoritmo de agrupamento evolutivo FLEXFIS.

Algoritmo 1 Estimação Evolutiva do Antecedente

- 1: Definir valores para $g_{inicial}$ e para $fac \in [0, 1]$.
 - 2: Calcular o valor de ρ (Equação 3.10).
 - 3: Inicializar o número de *clusters*: $L = 0$.
 - 4: Definir os intervalos máximos e mínimos das l variáveis do antecedente $\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathcal{N}^l$;
 - 5: Normalizar a próxima amostra de dados recebida $\tilde{\mathbf{x}}_k$ para $[0, 1]$ com base passo 4.
 - 6: **se** $L = 0$ **então**
 - 7: $L = 1$.
 - 8: Inicializar o suporte do primeiro *cluster*: $S_k^1 = 1$.
 - 9: Inicializar o centro do primeiro *cluster* como: $\tilde{\mathbf{x}}_k^{1*} = \tilde{\mathbf{x}}_k$.
 - 10: Inicializar o raio do primeiro *cluster* como: $\sigma_k^1 = 0$.
 - 11: Ir para passo 27.
 - 12: **senão**
 - 13: Calcular a norma Euclidiana entre $\tilde{\mathbf{x}}_k$ e todos os centros de *cluster* $\tilde{\mathbf{x}}_k^{i*} | i=1, \dots, L$.
 - 14: Eleger o *cluster* com centro mais próximo de $\tilde{\mathbf{x}}_k$ como *cluster* vencedor: $\tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}$.
 - 15: **se** $\|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}\|_A \geq \rho$ **então**
 - 16: $L = L + 1$.
 - 17: Inicializar o suporte do L -ésimo *cluster*: $S_k^L = 1$.
 - 18: Inicializar o centro do L -ésimo *cluster* como: $\tilde{\mathbf{x}}_k^{L*} = \tilde{\mathbf{x}}_k$.
 - 19: Inicializar raio do L -ésimo *cluster* como: $\sigma_k^L = 0$.
 - 20: **senão**
 - 21: Atualizar o valor do ganho de aprendizagem do *cluster* vencedor (Equação 3.8).
 - 22: Atualizar a posição do centro do *cluster* vencedor (Equação 3.7).
 - 23: Atualizar o raio do *cluster* vencedor (Equação 3.11).
 - 24: Incrementar o suporte do *cluster* vencedor: $S_k^v = S_k^v + 1$.
 - 25: **fim se**
 - 26: **fim se**
-

-
- 27: **se** novas amostras estão disponíveis para identificação **então**
 28: Ir para o passo 5.
 29: **senão**
 30: Parar o algoritmo.
 31: **fim se**
-

3.1.2 Abordagem Recursiva para Estimação do Consequente

A estimação do antecedente baseada em uma abordagem evolutiva pode causar mudanças contínuas na estrutura do modelo de acordo com a característica dos dados disponibilizados a cada instante. Assim, uma estratégia recursiva de estimação dos parâmetros do consequente, deve ser implementada. Considerando-se o seguinte sistema nebuloso TS no espaço de estados:

$$R^i : \mathbf{SE} \quad \tilde{x}_{k,1} \quad \mathbf{É} \quad Q_{j|\tilde{x}_{k,1}}^i \quad \mathbf{E} \dots \mathbf{E} \quad \tilde{x}_{k,l} \quad \mathbf{É} \quad Q_{j|\tilde{x}_{k,l}}^i \quad (3.12)$$

$$\mathbf{ENTÃO} \quad \tilde{y}_k^i = \begin{cases} \mathbf{z}_{k+1}^i = G^i \mathbf{z}_k^i + H^i \mathbf{u}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i = E^i \mathbf{z}_k^i + F^i \mathbf{u}_k \end{cases}$$

onde as matrizes $G^i \in \mathfrak{R}^{s \times s}$, $H^i \in \mathfrak{R}^{s \times m}$, $E^i \in \mathfrak{R}^{p \times s}$ e $F^i \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ são as matrizes do consequente do sistema nebuloso dado na Equação 3.1 e $\mathbf{z}_k^i \in \mathfrak{R}^s$ é o vetor de estados. A estimação recursiva de G^i , H^i , E^i e F^i é realizada pelo algoritmo ERA no contexto nebuloso, que tem como base os parâmetros de Markov nebulosos (SANTOS; SERRA, 2018).

Os parâmetros de Markov, comumente usados para identificação de sistemas dinâmicos lineares no espaço de estados, correspondem a uma sequência de resposta ao pulso do sistema, como apresentado antes (SANTOS; SERRA, 2018; JUANG et al., 1993b; WU et al., 2015). Tomando-se o submodelo local do consequente da regra i , dada na Equação 3.12, fazendo-se o vetor de entradas \mathbf{u}_k igual ao pulso unitário, os parâmetros de Markov nebulosos estão relacionados às matrizes de estado de cada submodelo por meio da seguinte sequência de operações:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{z}_k^i = 0 & \implies & \tilde{\mathbf{y}}_k^i = F^i & \implies & Y_0^i \\ \mathbf{z}_{k+1}^i = H^i & \implies & \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}^i = E^i H^i & \implies & Y_1^i \\ \mathbf{z}_{k+2}^i = G^i H^i & \implies & \tilde{\mathbf{y}}_{k+2}^i = E^i G^i H^i & \implies & Y_2^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{z}_{k+j-1}^i = (G^i)^{j-2} H^i & \implies & \tilde{\mathbf{y}}_{k+j-1}^i = E^i (G^i)^{j-2} H^i & \implies & Y_{j-1}^i \end{array} \quad (3.13)$$

onde $Y_j^i \in \mathfrak{R}^{p \times m}$, com $j = [1, q_f]$, é o j -ésimo parâmetro de Markov nebuloso da i -ésima regra, sendo q_f o número de parâmetros de Markov estimado para cada submodelo local. Uma das formas de se obter os parâmetros de Markov, baseado em dados de entrada e saída, é por meio dos parâmetros de Markov do observador. Para tanto, insere-se um observador de estados

no submodelo local do consequente da i -ésima regra nebulosa dada na Equação 3.12. Assim, adicionando-se e subtraindo-se o termo $\Omega^i \tilde{\mathbf{y}}_k^i$, onde $\Omega^i \in \mathfrak{R}^{s \times p}$ é a matriz de ganho do observador do i -ésimo submodelo local, no segundo membro da seguinte equação:

$$\mathbf{z}_{k+1}^i = G^i \mathbf{z}_k^i + H^i \mathbf{u}_k \quad (3.14)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1}^i &= G^i \mathbf{z}_k^i + H^i \mathbf{u}_k + \Omega^i \tilde{\mathbf{y}}_k^i - \Omega^i \tilde{\mathbf{y}}_k^i \\ &= (G^i + \Omega^i E^i) \mathbf{z}_k^i + (H^i + \Omega^i F^i) \mathbf{u}_k - \Omega^i \tilde{\mathbf{y}}_k^i \\ &= \bar{G}^i \mathbf{z}_k^i + \bar{H}^i \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$\bar{G}^i = G^i + \Omega^i E^i, \quad (3.16)$$

$$\bar{H}^i = [H^i + \Omega^i F^i, -\Omega^i], \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{v}_k^i = [\mathbf{u}_k^T \quad (\tilde{\mathbf{y}}_k^i)^T]^T, \quad (3.18)$$

resultando em um submodelo local no espaço de estados denotado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1}^i &= \bar{G}^i \mathbf{z}_k^i + \bar{H}^i \mathbf{v}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= E^i \mathbf{z}_k^i + F^i \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3.19)$$

Resolvendo-se a Equação 3.19 em termos das variáveis \bar{G}^i , \bar{H}^i , E^i e F^i e dos vetores \mathbf{u}_k e \mathbf{y}_k , onde k indica que são usadas amostras de dados a partir do instante 0 até o instante k , e $\mathbf{z}_0^i = 0$, obtém-se a seguinte relação:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \sum_{j=1}^k E_k^i (\bar{G}_k^i)^{j-1} \bar{H}_k^i \mathbf{v}_{k-j}^i + F_k^i \mathbf{u}_k \quad (3.20)$$

Considerando-se que a relação entrada-saída pode ser expressa por um número finito de parâmetros q_f , tal que $\bar{G}_k^i{}^{q_f} \approx 0$, onde q_f é um número relacionado à ordem de cada submodelo local e ao número de saídas do sistema dinâmico não linear, a Equação 3.20 pode ser reescrita como (SANTOS; SERRA, 2018; JUANG et al., 1993b; WU et al., 2015):

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \sum_{j=1}^{q_f} \bar{Y}_{k,j}^i \mathbf{v}_{k-j}^i + F_k^i \mathbf{u}_k \quad (3.21)$$

onde $\bar{Y}_{k,j}^i = E_k^i(\bar{G}_k^i)^{j-1}\bar{H}_k^i$ é o j -ésimo parâmetro de Markov nebuloso do observador e $\bar{Y}_{k,0}^i = F_k^i$. Reescrevendo-se a Equação 3.21 como uma operação matricial, obtém-se:

$$\tilde{Y}_k^i = \Theta_k^i \Phi_k^i \quad (3.22)$$

onde $\Theta_k^i = [F_k^i \ \bar{Y}_{k,1}^i \ \dots \ \bar{Y}_{k,q_f}^i]$ é vetor de parâmetros de Markov nebulosos do observador da i -ésima regra. A variável Φ_k^i , denominada matriz de regressores nebulosa, é dada por:

$$\Phi_k^i = \begin{bmatrix} (\phi_{q_f+1}^i)^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+1})} \\ (\phi_{q_f+2}^i)^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+2})} \\ \vdots \\ (\phi_{q_f+N}^i)^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+N})} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

e a variável \tilde{Y}_k^i é o vetor de saídas nebuloso denotado como:

$$\tilde{Y}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_{q_f+1}^i \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+1})} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{q_f+2}^i \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+2})} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}_{q_f+N}^i \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+N})} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde $\phi_k^i = [\mathbf{u}_k^T \ \mathbf{v}_{k-1}^T \ \dots \ \mathbf{v}_{k-q_f}^T]^T$ é vetor de regressores, $\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ é o grau de ativação normalizado da amostra $\tilde{\mathbf{x}}_k$ para a regra i e N é o número de amostras disponibilizadas do instante inicial até o instante k (LUGHOFER, 2011).

A estimação paramétrica do bloco estático não linear consiste na estimação evolutiva do antecedente e estimação recursiva do conseqüente. A parametrização do conseqüente, por sua vez, se divide em duas etapas: uma etapa inicial em batelada, onde são obtidos os parâmetros de Markov nebulosos iniciais e definida a ordem dos submodelos no espaço de estados, que serve para inicialização da abordagem recursiva, e uma segunda etapa recursiva de computação dos parâmetros de Markov nebulosos e realização dos submodelos no espaço de estados. Aplicando-se o algoritmo de estimação paramétrica FWLS, no contexto de aprendizagem local na solução da Equação 3.22, para estimação dos parâmetros de Markov nebulosos do observador iniciais (LUGHOFER, 2011; SANTOS; SERRA, 2018), obtém-se:

$$(\Theta_k^i)^T = (\Phi_k^i (\Phi_k^i)^T)^{-1} (\Phi_k^i) (\tilde{Y}_k^i)^T \quad (3.25)$$

Reorganizando-se o j -ésimo parâmetro de Markov do observador da i -ésima regra no

instante k , com base nas Equações 3.16-3.17, conforme a seguir:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{k,j}^i &= E_k^i(\bar{G}_k^i)^{j-1}\bar{H}_k^i \\ &= [E_k^i(G_k^i + \Omega_k^i E_k^i)^{j-1}(H_k^i + \Omega_k^i F_k^i), -E_k^i(G_k^i + \Omega_k^i E_k^i)^{j-1}\Omega_k^i] \\ &= [\bar{Y}_{k,j}^{(i,1)}, -\bar{Y}_{k,j}^{(i,2)}], j = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (3.26)$$

os parâmetros de Markov nebulosos podem ser estimados por meio da relação geral entre parâmetros de Markov e os parâmetros de Markov do observador, aplicando-se as seguintes equações:

$$Y_{k,0}^i = \bar{Y}_{k,0}^i = F_k^i, \quad (3.27)$$

$$Y_{k,j}^i = \bar{Y}_{k,j}^{(i,1)} - \sum_{r=1}^j \bar{Y}_{j,r}^{(i,2)} Y_{k,j-r}^i, j = [1, q_f], \quad (3.28)$$

$$Y_{k,j}^i = - \sum_{r=1}^{q_f} \bar{Y}_{k,r}^{(i,2)} Y_{k,j-r}^i, j > q_f. \quad (3.29)$$

onde $Y_{k,j}^i \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ é o j -ésimo parâmetro de Markov nebuloso da i -ésima regra no instante k (SANTOS; SERRA, 2018). A ordem mínima dos submodelos locais no espaço de estados é calculada pela análise do número de valores singulares significativos da matriz de Hankel de cada submodelo local $H_{k,0}^i$, construída como a seguir (JUANG; PHAN, 2001):

$$H_{k,0}^i = \begin{bmatrix} Y_{k,1}^i & Y_{k,2}^i & \cdots & Y_{k,\beta_f}^i \\ Y_{k,2}^i & Y_{k,3}^i & \cdots & Y_{k,\beta_f+1}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k,\alpha_f}^i & Y_{k,\alpha_f+1}^i & \cdots & Y_{k,\alpha_f+\beta_f-1}^i \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde $\alpha_f \geq 0$ e $\beta_f \geq 0$ são inteiros arbitrários grandes o suficiente e restritos pelas seguintes condições: $\alpha_f p < \beta_f m$ e $\alpha_f \geq q_f$, m e p é o número de entradas e saídas do sistema dinâmico, respectivamente. Considerando-se que a matriz $H_{k,0}^i$ tem *rank* s , a ordem de cada submodelo linear local no espaço de estados também será s se $\alpha_f p \geq s$. Isto pode ser confirmado substituindo-se os parâmetros de Markov nebulosos dados na Equação 3.13 na Equação 3.30, como segue:

$$H_{k,0}^i = \begin{bmatrix} E_k^i H_k^i & E_k^i G_k^i H_k^i & \cdots & E_k^i (G_k^i)^{\beta_f-1} H_k^i \\ E_k^i G_k^i H_k^i & E_k^i (G_k^i)^2 H_k^i & \cdots & E_k^i (G_k^i)^{\beta_f} H_k^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_k^i (G_k^i)^{\alpha_f-1} H_k^i & E_k^i (G_k^i)^{\alpha_f} H_k^i & \cdots & E_k^i (G_k^i)^{\alpha_f+\beta_f-2} H_k^i \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

A matriz dada na Equação 3.31 pode ser dividida em duas matrizes blocos:

$$H_{k,0}^i = \mathcal{U}_{k,\alpha_f}^i \mathcal{D}_{k,\beta_f}^i \quad (3.32)$$

com $\mathcal{U}_{k,\alpha_f}^i$ e $\mathcal{D}_{k,\beta_f}^i$ iguais a

$$\mathcal{U}_{k,\alpha_f}^i = \begin{bmatrix} E_k^i \\ E_k^i G_k^i \\ E_k^i (G_k^i)^2 \\ \vdots \\ E_k^i (G_k^i)^{\alpha_f-1} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

e

$$\mathcal{D}_{k,\beta_f}^i = \begin{bmatrix} H_k^i & G_k^i H_k^i & (G_k^i)^2 H_k^i & \dots & (G_k^i)^{\beta_f-1} H_k^i \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

onde $\mathcal{U}_{k,\alpha_f}^i$ é a matriz de observabilidade e $\mathcal{D}_{k,\beta_f}^i$ é a matriz de controlabilidade, ambas do i -ésimo submodelo local. Considerando-se que cada submodelo representa um sistema controlável e observável, as matrizes $\mathcal{U}_{k,\alpha_f}^i$ e $\mathcal{D}_{k,\beta_f}^i$ são de *rank* s , igual ao *rank* de H_0^i . Os valores singulares de $H_{k,0}^i$ são obtidos aplicando-se a decomposição em valor singular (*Singular Value Decomposition* - SVD), como demonstrado a seguir:

$$H_{k,0}^i = R_k^i \Sigma_k^i (S_k^i)^T \quad (3.35)$$

onde

$$\Sigma_k^i = \begin{bmatrix} \Sigma_{k,s}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

é uma matriz retangular com

$$\Sigma_{k,s}^i = \text{diag} \left[\delta_{k,1}^i, \delta_{k,2}^i, \dots, \delta_{k,s}^i \right], \delta_{k,1}^i \geq \delta_{k,2}^i \geq \dots \geq \delta_{k,s}^i \quad (3.37)$$

sendo uma matriz diagonal composta pelos s valores singulares mais significativos de $H_{k,0}^i$ e as matrizes R_k^i e S_k^i são matrizes ortogonais (JUANG; PHAN, 2001).

Uma vez que os parâmetros de Markov nebulosos do observador são obtidos no instante k , a etapa de estimação recursiva é implementada para os instantes $k+1$ em diante. Este procedimento, por sua vez, é dividido em uma subrotina de evolução dos parâmetros do antecedente, quando a amostra $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ é disponibilizada, aplicando-se o Algoritmo 1 (a partir do passo 5) e uma subrotina de estimação recursiva do consequente, realizada por meio do algoritmo de estimação

paramétrica RFWLS, já apresentado no Capítulo 2, cujos passos principais consistem na solução, a cada instante, do seguinte conjunto de equações:

$$(\Theta_{k+1}^i)^T = (\Theta_k^i)^T + (\Gamma_{k+1})^T ((\mathbf{y}_{k+1})^T - (\Phi_{k+1}^i) (\Theta_k^i)^T) \quad (3.38)$$

$$(\Gamma_{k+1})^T = \frac{(P_k^i)^T (\Phi_{k+1}^i)^T}{\frac{1}{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1})} + (\Phi_{k+1}^i)^T (P_k^i)^T (\Phi_{k+1}^i)^T} \quad (3.39)$$

$$(P_{k+1}^i)^T = (I - (\Gamma_{k+1})^T (\Phi_{k+1}^i)) (P_k^i)^T \quad (3.40)$$

onde P_k^i é a matriz de covariância e Γ_k é um vetor de ganhos (LUGHOFER, 2011). A partir dos q_f parâmetros obtidos pelas Equações 3.38-3.40, a Equação 3.26 é retomada para o instante $k + 1$. Na sequência, os parâmetros de Markov nebulosos recursivos são computados pelas Equações 3.27-3.29 no instante $k + 1$. A estimação paramétrica recursiva nebulosa, apresentada nas Equações 3.38-3.40 se diferencia da estimação paramétrica recursiva tradicional, dada nas Equações 2.56-2.58, pela presença do termo de ponderação nebulosa, o grau de ativação normalizado $\gamma^i(\cdot)$, e por não considerar o fator de esquecimento.

Calculados os parâmetros de Markov nebulosos recursivamente, pode-se então executar a realização recursiva do sistema. A implementação do algoritmo ERA nebuloso tem como base a matriz de Hankel nebulosa $H_{k,0}^i$, dada na Equação 3.30, e a matriz de Hankel nebulosa $H_{k,1}^i$, apresentada a seguir:

$$H_{k,1}^i = \begin{bmatrix} Y_{k,2}^i & Y_{k,3}^i & \cdots & Y_{k,\beta_f+1}^i \\ Y_{k,3}^i & Y_{k,4}^i & \cdots & Y_{k,\beta_f+2}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k,\alpha_f+1}^i & Y_{k,\alpha_f+2}^i & \cdots & Y_{k,\alpha_f+\beta_f}^i \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

O primeiro passo para implementação do algoritmo ERA nebuloso é a atualização das matrizes $H_{k,0}^i$ e $H_{k,1}^i$ com os parâmetros de Markov nebulosos calculados no instante $k + 1$. Em seguida, aplica-se SVD na matriz $H_{k+1,0}^i$, como segue:

$$H_{k+1,0}^i = R_{k+1}^i \Sigma_{k+1}^i (S_{k+1}^i)^T \quad (3.42)$$

onde

$$\Sigma_{k+1}^i = \begin{bmatrix} \Sigma_{k+1,s}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

é uma matriz retangular com

$$\Sigma_{k+1,s}^i = \text{diag} \left[\delta_{k+1,1}^i, \delta_{k+1,2}^i, \dots, \delta_{k+1,s}^i \right], \delta_{k+1,1}^i \geq \delta_{k+1,2}^i \geq \dots \geq \delta_{k+1,s}^i \quad (3.44)$$

sendo uma matriz diagonal composta pelos s valores singulares mais significativos de $H_{k+1,0}^i$, onde s é definido na etapa de estimação batelada, e as matrizes R_{k+1}^i e S_{k+1}^i são matrizes ortogonais. Reescrevendo-se as matrizes R_{k+1}^i como $R_{k+1,s}^i$ e S_{k+1}^i como $S_{k+1,s}^i$, onde $R_{k+1,s}^i$ e $S_{k+1,s}^i$ são matrizes formadas pelas primeiras s colunas das matrizes R_{k+1}^i e S_{k+1}^i , respectivamente, a Equação 3.42 pode ser reformulada como:

$$H_{k+1,0}^i = R_{k+1,s}^i \Sigma_{k+1,s}^i (S_{k+1,s}^i)^T \quad (3.45)$$

Uma vez que as matrizes de Hankel nebulosas são recursivamente computadas, os parâmetros dos submodelos locais são obtidos como segue (JUANG; PHAN, 2001):

$$G_{k+1}^i = (\Sigma_{k+1,s}^i)^{-1/2} (R_{k+1,s}^i)^T (H_{k+1,1}^i) (S_{k+1,s}^i) (\Sigma_{k+1,s}^i)^{-1/2} \quad (3.46)$$

$$H_{k+1}^i = s \text{ primeiras colunas de } (\Sigma_{k+1,s}^i)^{1/2} (S_{k+1,s}^i)^T \quad (3.47)$$

$$E_{k+1}^i = s \text{ primeiras linhas de } (R_{k+1,s}^i) (\Sigma_{k+1,s}^i)^{1/2} \quad (3.48)$$

$$F_{k+1}^i = Y_{k+1,0}^i \quad (3.49)$$

Finalmente, calculadas as matrizes dos submodelos locais apresentadas no sistema de inferência nebuloso da Equação 3.12 e retomando-se a Equação 3.1, a aproximação da não linearidade estática é dada pelo seguinte modelo nebuloso resultante da aplicação do agrupamento evolutivo e estimação recursiva a partir de dados experimentais.

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) (E_k^i (I - G_k^i) H_k^i + F_k^i) \mathbf{u}_k \quad (3.50)$$

Os algoritmos apresentados na sequência compreendem os procedimentos implementados em cada etapa da estimação do consequente do sistema de inferência nebuloso mostrado na Equação 3.1. No Algoritmo 2, tem-se os passos para obtenção do conjunto de parâmetros de Markov nebulosos de inicialização e para detecção da ordem mínima dos submodelos locais no espaço de estados.

Algoritmo 2 Estimação Batelada para Inicialização do Modelo Nebuloso

- 1: Coletar N , pares de dados de entrada-saída, do instante 0 até o instante k , do sistema dinâmico não linear.
 - 2: Definir valores para q_f, α_f, β_f .
 - 3: Configurar os parâmetros para estimação evolutiva do antecedente: passos 1 a 4 do Algoritmo 1.
 - 4: **para** $k_N \leftarrow 1$ **até** N **faça**
 - 5: Estimar os parâmetros evolutivos do antecedente do modelo inicial: passos 5 a 26 do Algoritmo 1.
 - 6: **fim para**
 - 7: **para** $i \leftarrow 1$ **até** L **faça**
 - 8: **para** $k_N \leftarrow q_f + 1$ **até** N **faça**
 - 9: Calcular a matriz de regressores do i -ésimo submodelo local no instante k (Equação 3.23).
 - 10: Calcular o vetor de saídas do i -ésimo submodelo local no instante k (Equação 3.24).
 - 11: **fim para**
 - 12: Calcular os q_f parâmetros de Markov Nebulosos do observador do i -ésimo submodelo local no instante k (Equação 3.25).
 - 13: Calcular os q_f parâmetros de Markov Nebulosos do i -ésimo submodelo local no instante k (Equação 3.27-3.29).
 - 14: Construir a matriz de Hankel $H_{k,0}^i$ do i -ésimo submodelo local no instante k (Equação 3.30).
 - 15: Aplicar SVD na i -ésima matriz de Hankel $H_{k,0}^i$ (Equação 3.35).
 - 16: Definir a ordem s do i -ésimo submodelo local no espaço de estados (Equação 3.37).
 - 17: **fim para**
-

O Algoritmo 3 apresenta, de forma resumida, os passos para implementação recursiva dos parâmetros de Markov nebulosos do observador e, em seguida, a extração dos parâmetros de Markov nebuloso de cada submodelo local.

Algoritmo 3 Estimação Recursiva dos Parâmetros de Markov Nebulosos

- 1: Estimar o modelo batelada inicial (Algoritmo 2).
 - 2: Inicializar matriz de covariância nebulosa $P_k^{i=1,\dots,L}$.
 - 3: **para** $k_N \leftarrow k + 1$ **até** *Fim Algoritmo* **faça**
 - 4: Estimar os parâmetros evolutivos do antecedente para o instante k_N : passos 5 a 26 do Algoritmo 1.
 - 5: **para** $i \leftarrow 1$ **até** L **faça**
 - 6: Calcular recursivamente os parâmetros de Markov nebulosos do observador da i -ésima regra para o instante k_N (Equações 3.38-3.40).
 - 7: Calcular recursivamente os parâmetros de Markov nebulosos da i -ésima regra para o instante k_N (Equações 3.27-3.29).
 - 8: **fim para**
 - 9: **se** novas amostras estão disponíveis para identificação **então**
 - 10: Ir para passo 3.
 - 11: **senão**
-

```

12:      Fim Algoritmo
13:  fim se
14: fim para

```

Algoritmo 4 apresenta o procedimento para realização mínima do sistema por meio do algoritmo ERA no contexto nebuloso.

Algoritmo 4 Estimação Recursiva do ERA nebuloso

```

1: Estimar o modelo batelada nebuloso inicial (Algoritmo 2).
2: para  $k_N \leftarrow k + 1$  até Fim Algoritmo faça
3:   Estimar os parâmetros evolutivos do antecedente para o instante  $k_N$ : passos 5 a 26 do Algoritmo 1.
4:   para  $i \leftarrow 1$  até  $L$  faça
5:     Calcular recursivamente os parâmetros de Markov nebulosos da  $i$ -ésima regra para o instante  $k_N$ : passos 6 e 7 do Algoritmo 3.
6:     Atualizar as matrizes de Hankel nebulosas da  $i$ -ésima regra para o instante  $k_N$  (Equações 3.30 e 3.41).
7:     Aplicar SVD na matriz de Hankel  $H_{k_N,0}^i$  (Equação 3.42).
8:     Computar matriz de parâmetros do consequente da  $i$ -ésima regra para o instante  $k_N$  (Equação 3.46-3.49).
9:   fim para
10:  se novas amostras estão disponíveis para identificação então
11:    Ir para passo 3.
12:  senão
13:    Fim Algoritmo
14:  fim se
15: fim para

```

O Algoritmo 5 apresenta o procedimento completo de estimação recursiva da não linearidade estática de um sistema dinâmico não linear representado por modelo de Hammerstein e do sinal intermediário desconhecido \mathbf{w}_k .

Algoritmo 5 Estimação Recursiva da Não Linearidade Estática do Modelo de Hammerstein

```

1: Estimar o modelo batelada nebuloso inicial (Algoritmo 2).
2: para  $k_N \leftarrow k + 1$  até Fim Algoritmo faça
3:   Estimar os parâmetros evolutivos do antecedente para o instante  $k_N$ : passos 5 a 26 do Algoritmo 1.
4:   Estimar recursivamente as matrizes de estado dos submodelos nebulosos no espaço de estados no instante  $k_N$ : passos 4 a 9 do Algoritmo 4.
5:   Computar sinal intermediário desconhecido  $\mathbf{w}_k$  do modelo de Hammerstein no instante  $k_N$  (Equação 3.50).
6:   se novas amostras estão disponíveis para identificação então
7:     Ir para passo 3.
8:   senão
9:     Fim Algoritmo

```

10: **fim se**

11: **fim para**

3.2 Parametrização da Dinâmica Linear

Dado que o sinal intermediário \mathbf{w}_k , inicialmente desconhecido por ser imensurável diretamente, é recursivamente estimado, o modelo dinâmico linear no espaço de estados é também recursivamente estimado. O algoritmo de realização mínima ERA, no contexto de sistemas lineares, é aplicado para estimação das matrizes de parâmetros A , B , C e D do bloco dinâmico linear apresentadas na Equação 2.4. Como mencionado anteriormente, uma das formas de se obter um modelo no espaço de estados de um sistema dinâmico linear é através dos parâmetros do Markov, uma sequência de resposta ao pulso do sistema. A relação entre os parâmetros de Markov e as matrizes de estado de um sistema linear modelado no espaço de estados é dada por (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018):

$$\begin{aligned}\psi_0 &= D \\ \psi_1 &= CB \\ \psi_2 &= CAB \\ &\vdots \\ \psi_j &= CA^{j-1}B\end{aligned}\tag{3.51}$$

onde ψ_j é o j -ésimo parâmetro de Markov. Assim, considerando-se o modelo linear no espaço de estados apresentado na Equação 2.4 e inserindo-se um observador de estados na primeira linha desta equação, através da soma e subtração do termo $M\mathbf{y}_k$ no segundo membro da mesma equação, obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \bar{A}\mathbf{x}_k + \bar{B}^i\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{w}_k\end{aligned}\tag{3.52}$$

onde

$$\bar{A} = A + MC ,\tag{3.53}$$

$$\bar{B} = [B + MD, -M] ,\tag{3.54}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k = [\mathbf{w}_k \quad \mathbf{y}_k]^T\tag{3.55}$$

com $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ sendo a matriz de ganho do observador. A solução da Equação 3.52 em termos das matrizes A , B , C e D , e dos vetores \mathbf{w}_k e \mathbf{y}_k , onde k indica que são usadas amostras desde o instante 0 até o instante k , e considerando-se ainda $\mathbf{x}_0 = 0$, resulta em:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^k C_k(\bar{A}_k)^{j-1} \bar{B}_k \tau_{k-j} + D_k \mathbf{w}_k \quad (3.56)$$

A presença do observador de estados permite que a saída do sistema \mathbf{y}_k seja aproximada por um número limitado de termos q_l , pois $\bar{A}_k^{q_l} \approx 0$, onde q_l é um número inteiro relacionado ao número de saídas e à ordem real do sistema dinâmico linear (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018). Assim, a Equação 3.56 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^{q_l} \bar{\Psi}_{k,j} \tau_{k-j} + D_k \mathbf{w}_k \quad (3.57)$$

onde $\bar{\Psi}_{k,j} = C_k(\bar{A}_k)^{j-1} \bar{B}_k$ é o j -ésimo parâmetro de Markov do observador considerando-se amostras até o instante k e $\bar{\Psi}_{k,0} = D_k$ (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015). Reescrevendo-se a operação da Equação 3.57 na forma matricial, obtém-se:

$$\Upsilon_k = \bar{\Psi}_k W_k \quad (3.58)$$

onde $\Upsilon_k = [\mathbf{y}_{q_l+1} \ \mathbf{y}_{q_l+2} \ \dots \ \mathbf{y}_k]$ é o vetor de saídas, $\bar{\Psi}_k = [D_k \ \bar{\Psi}_{k,1} \ \dots \ \bar{\Psi}_{k,q_l}]$ é o vetor de parâmetros de Markov do observador e W_k é a matriz de regressores, denotada por:

$$W_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{q_l+1} & \mathbf{w}_{q_l+2} & \dots & \mathbf{w}_{k-1} \\ \tau_{q_l} & \tau_{q_l+1} & \dots & \tau_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{k-q_l-1} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

A abordagem recursiva para estimação paramétrica do modelo dinâmico linear é inicializada por uma etapa em batelada. O algoritmo de mínimos quadrados batelada é aplicado para estimação dos parâmetros de Markov do observador no instante k , como:

$$\bar{\Psi}_k = \Upsilon_k W_k^T [W_k W_k^T]^{-1} \quad (3.60)$$

Considerando-se as Equações 3.53-3.54, o j -ésimo parâmetro de Markov do observador no instante k pode ser reorganizado como a seguir:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{k,j} &= C_k(\bar{A}_k)^{j-1} \bar{B}_k \\ &= [C_k(A_k + M_k C_k)^{j-1} (B_k + M_k D_k), -C_k(A_k + M_k C_k)^{j-1} M_k] \\ &= [\bar{\Psi}_{k,j}^{(1)}, -\bar{\Psi}_{k,j}^{(2)}], \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.61)$$

A relação geral entre os parâmetros de Markov e os parâmetros de Markov do observador é regida pelo seguinte conjunto de equações:

$$\Psi_{k,0} = \bar{\Psi}_{k,0} \quad (3.62)$$

$$\Psi_{k,j} = \bar{\Psi}_{k,j}^{(1)} - \sum_{r=1}^j \bar{\Psi}_{k,r}^{(2)} \Psi_{k,j-r}, \quad j = [1, q_l] \quad (3.63)$$

$$\Psi_{k,j} = - \sum_{r=1}^{q_l} \bar{\Psi}_{k,r}^{(2)} \Psi_{k,j-r}, \quad r > q_l \quad (3.64)$$

onde $\bar{\Psi}_{k,j} \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ é o j -ésimo parâmetro de Markov computado no instante k . Tomando-se o histórico de parâmetros de Markov estimados com dados até o instante k , o primeiro passo para realização mínima do sistema dinâmico linear, para geração do modelo de inicialização da abordagem recursiva, é a construção das seguintes matrizes de Hankel generalizadas $\Pi_{k,0}$ e $\Pi_{k,1}$ (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015):

$$\Pi_{k,0} = \begin{bmatrix} \Psi_{k,1} & \Psi_{k,2} & \cdots & \Psi_{k,\beta_l} \\ \Psi_{k,2} & \Psi_{k,3} & \cdots & \Psi_{k,\beta_l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{k,\alpha_l} & \Psi_{k,\alpha_l+1} & \cdots & \Psi_{k,\alpha_l+\beta_l-1} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\Pi_{k,1} = \begin{bmatrix} \Psi_{k,2} & \Psi_{k,3} & \cdots & \Psi_{k,\beta_l+1} \\ \Psi_{k,3} & \Psi_{k,4} & \cdots & \Psi_{k,\beta_l+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{k,\alpha_l+1} & \Psi_{k,\alpha_l+2} & \cdots & \Psi_{k,\alpha_l+\beta} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

onde $\alpha_l \geq 0$ e $\beta_l \geq 0$ são constantes inteiras grandes o suficiente e restritas pelas seguintes condições: $\alpha_l p \leq \beta_l m$ e $\alpha_l \geq q_l$, m e p é o número de entradas e saídas do sistema dinâmico, respectivamente (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015). Tomando-se a matriz $\Pi_{k,0}$ dada na Equação 3.65 e conhecendo-se a relação entre os parâmetros de Markov e as matrizes de estado do sistema dinâmico linear, obtém-se:

$$\Pi_{k,0} = \begin{bmatrix} C_k B_k & C_k A_k B_k & \cdots & C_k (A_k)^{\beta_l-1} B_k \\ C_k A_k B_k & C_k (A_k)^2 B_k & \cdots & C_k (A_k)^{\beta_l} B_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k (A_k)^{\alpha_l-1} B_k & C_k (A_k)^{\alpha_l} B_k & \cdots & C_k (A_k)^{\alpha_l+\beta_l-2} B_k \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Dividindo-se a matriz $\Pi_{k,0}$ dada na Equação 3.67 em duas submatrizes, tem-se:

$$\Pi_{k,0} = \nabla_{k,\alpha_l} \top_{k,\beta_l} \quad (3.68)$$

onde ∇_{k,α_l} é conhecida como a matriz de observabilidade e \top_{k,β_l} como a matriz de controlabilidade, denotadas como:

$$\nabla_{k,\alpha_l} = \begin{bmatrix} C_k \\ C_k A_k \\ C_k (A_k)^2 \\ \vdots \\ C_k (A_k)^{\alpha_l-1} \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$\top_{k,\beta_l} = \begin{bmatrix} B_k & A_k B_k & (A_k)^2 B_k & \dots & (A_k)^{\beta_l-1} B_k \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Considerando-se o bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein um sistema controlável e observável, desde que seja mantida a relação $\alpha_l p \geq n$, as matrizes ∇_{k,α_l} e \top_{k,β_l} são de *rank* n . Portanto, a matriz $\Pi_{k,0}$ também é de *rank* n . O *rank* de $\Pi_{k,0}$ define a ordem mínima do modelo linear no espaço de estados e é equivalente ao número de valores singulares significativos de $\Pi_{k,0}$ (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015). Assim, o próximo passo do algoritmo ERA é a obtenção dos valores singulares de $\Pi_{k,0}$. Para tanto, pode-se aplicar a decomposição em valor singular como na seguinte operação matricial:

$$\Pi_{k,0} = \Lambda_k \Delta_k \Xi_k^T \quad (3.71)$$

onde Λ_k e Ξ_k são matrizes ortogonais,

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} \Delta_{k,n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

é uma matriz retangular e

$$\Delta_{k,n} = \text{diag} \left[\zeta_{k,1}, \zeta_{k,2}, \dots, \zeta_{k,n} \right], \quad \zeta_{k,1} \geq \zeta_{k,2} \geq \dots \zeta_{k,n} \quad (3.73)$$

é uma matriz diagonal $\Delta_{k,n} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ composta pelos n valores singulares mais significativos de $\Pi_{k,0}$. Uma vez que n é computado, a matriz Λ_k é reescrita como $\Lambda_{k,n}$ e Ξ_k como $\Xi_{k,n}$, onde $\Lambda_{k,n}$ e $\Xi_{k,n}$ são matrizes construídas pelas n primeiras colunas das matrizes Λ_k e Ξ_k , respectivamente (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015). Com isso, $\Pi_{k,0}$ pode ser reformulado como:

$$\Pi_{k,0} = \Lambda_{k,n} \Delta_n \Xi_{k,n}^T \quad (3.74)$$

Finalizada a etapa inicial de estimação batela, a etapa recursiva é implementada para os instantes $k+1$ em diante. Os parâmetros de Makov do observador recursivos são obtidos

por meio do algoritmo de mínimos quadrados recursivos que consiste na solução do seguinte conjunto de equações:

$$\tilde{Z}_{k+1} = \frac{\pi_{k+1}^T \tilde{P}_k}{\lambda_l + \pi_{k+1}^T \tilde{P}_k \pi_{k+1}} \quad (3.75)$$

$$\tilde{\Psi}_{k+1} = \tilde{\Psi}_k + [\mathbf{y}_{k+1} - \tilde{\Psi}_k \pi_{k+1}] \tilde{Z}_{k+1} \quad (3.76)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \lambda_l^{-1} \tilde{P}_k [I - \pi_{k+1} \tilde{Z}_{k+1}] \quad (3.77)$$

onde \tilde{Z}_k é um vetor de ganhos, \tilde{P}_k é a matriz de covariância e $\pi_k = [\mathbf{w}_k^T \ \tau_{k-1}^T \ \dots \ \tau_{k-q_l}^T]^T$ é o vetor de regressores. Estes parâmetros são então aplicados nas Equações 3.62-3.64 para que os parâmetros de Morkov recursivos do instante $k + 1$ sejam computados (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015).

Tendo-se definido os parâmetros de Markov a cada instante, o algoritmo ERA pode ser executado recursivamente. O primeiro passo para implementação do ERA de forma recursiva é a atualização das matrizes de Hankel das Equações 3.65-3.66 para $\Pi_{k+1,0}$ e $\Pi_{k+1,2}$ com base no histórico de parâmetros de Markov até o instante $k + 1$. Seguido pela aplicação da operação SVD em $\Pi_{k+1,0}$, como a seguir:

$$\Pi_{k+1,0} = \Lambda_{k+1} \Delta_{k+1} \Xi_{k+1}^T \quad (3.78)$$

onde Λ_{k+1} e Ξ_{k+1} são matrizes ortogonais,

$$\Delta_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta_{k+1,n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

é uma matriz retangular e

$$\Delta_{k+1,n} = \text{diag} \left[\zeta_{k+1,1}, \zeta_{k+1,2}, \dots, \zeta_{k+1,n} \right], \zeta_{k+1,1} \geq \zeta_{k+1,2} \geq \dots \zeta_{k+1,n} \quad (3.80)$$

Com n computado na etapa batelada, a matriz Λ_{k+1} atualizada é reescrita como $\Lambda_{k+1,n}$ e Ξ_{k+1} como $\Xi_{k+1,n}$, onde $\Lambda_{k+1,n}$ e $\Xi_{k+1,n}$ são construídas pelas n primeiras colunas das matrizes Λ_{k+1} e Ξ_{k+1} , respectivamente (JUANG; PHAN, 2001; SANTOS; SERRA, 2018; WU et al., 2015).

Finalmente, o último passo do algoritmo ERA recursivo para o instante $k + 1$ consiste em computar as matrizes de estado do modelo dinâmico linear para este instante da seguinte maneira:

$$A_{k+1} = (\Delta_{k+1,n})^{-1/2}(\Lambda_{k+1,n})^T(\Pi_{k+1,1})(\Xi_{k+1,n})(\Delta_{k+1,n})^{-1/2} \quad (3.81)$$

$$B_{k+1} = \text{matriz formada pelas } n \text{ primeiras colunas de } (\Delta_{k+1,n})^{1/2}(\Xi_{k+1,n})^T \quad (3.82)$$

$$C_{k+1} = \text{matriz formada pelas } n \text{ primeiras linhas de } (\Lambda_{k+1,n})(\Delta_{k+1,n})^{1/2} \quad (3.83)$$

$$D_{k+1} = \Psi_{k+1,0} \quad (3.84)$$

Os algoritmos mostrados a seguir trazem os procedimentos aplicados na estimação recursiva do bloco dinâmico linear no espaço de estados do modelo de Hammerstein, introduzido na Equação 2.4. No Algoritmo 6, são apresentados os passos para geração dos parâmetros de Markov de inicialização da abordagem recursiva e para detecção da ordem mínima do modelo linear no no espaço de estados.

Algoritmo 6 Estimação Batelada para Inicialização do Modelo Linear

- 1: Estimar o modelo batelada nebuloso inicial (Algoritmo 2).
 - 2: Coletar as N amostras \mathbf{w}_k , disponibilizadas pelo Algoritmo 2 de inicialização, e \mathbf{y}_k , no instante k .
 - 3: Definir valores para q_l , α_l , β_l , λ_l e \tilde{P}_k do modelo linear.
 - 4: Construir a matriz de regressores W_k (Equação 3.59).
 - 5: Calcular os q_l parâmetros de Markov do observador no instante k (Equação 3.60).
 - 6: Calcular os q_l parâmetros de Markov no instante k (Equação 3.62-3.64).
 - 7: Construir as matrizes de Hankel $\Pi_{k,0}$ e $\Pi_{k,1}$ no instante k (Equações 3.65-3.66).
 - 8: Aplicar SVD em $\Pi_{k,0}$ (Equação 3.71).
 - 9: Definir a ordem n mínima para o modelo no espaço de estados (Equação 3.44).
-

O Algoritmo 7, por sua vez, apresenta o procedimento recursivo para realização mínima do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein no espaço de estados por meio dos parâmetros de Markov recursivos e do algoritmo ERA.

Algoritmo 7 Estimação Recursiva do Modelo Dinâmico Linear no Espaço de Estados

- 1: Estimar o modelo batelada linear inicial (Algoritmo 6).
 - 2: **para** $k_N \leftarrow k + 1$ **até** *Fim Algoritmo* **faça**
 - 3: Estimar os parâmetros evolutivos do antecedente para o instante k_N : passos 5 a 26 do Algoritmo 1.
 - 4: Estimar o sinal intermediário \mathbf{w}_{k_N} : passos 4 e 5 do Algoritmo 5.
-

-
- 5: Calcular recursivamente os parâmetros de Markov do observador para o instante k_N (Equações 3.75-3.77).
 - 6: Calcular recursivamente os parâmetros de Markov para o instante k_N (Equações 3.62-3.64).
 - 7: Atualizar as matrizes de Hankel $\Pi_{k_N,0}$ e $\Pi_{k_N,1}$ (Equações 3.65-3.66).
 - 8: Aplicar SVD em $\Pi_{k_N,0}$.
 - 9: Computar as matrizes de estado do modelo no espaço de estados para o instante k_N (Equações 3.81-3.84).
 - 10: **se** novas amostras estão disponíveis para identificação **então**
 - 11: Ir para passo 3.
 - 12: **senão**
 - 13: *Fim Algoritmo*
 - 14: **fim se**
 - 15: **fim para**
-

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, a metodologia para identificação nebulosa evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados é aplicada na modelagem de quatro sistemas dinâmicos (monovariáveis e multivariáveis) com características distintas. O experimento 1 apresenta uma análise comparativa entre a metodologia proposta e duas outras abordagens exploradas na literatura. Neste caso, um *benchmark* monovariável com função estática não linear complexa descontínua, é identificado. O segundo experimento traz uma abordagem experimental da metodologia proposta aplicada à identificação de um sistema térmico real. Os experimentos 3 e 4 são estudos, onde se avaliam os resultados da metodologia evolutiva proposta implementada em sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis. O experimento 3 corresponde à identificação do *benchmark* de um sistema dinâmico não linear multivariável com não linearidades combinadas complexas. Já o experimento 4, trata da identificação do processo de um evaporador de quatro estágios. Tal processo é modelado como um sistema multivariável de três entradas e três saídas.

O algoritmo de identificação nebulosa evolutiva no espaço de estados tem alguns parâmetros de projeto que devem ser definidos antes da sua execução. São eles:

- N quantidade de pares de dados entrada-saída para inicialização do algoritmo, com N grande o suficiente de forma que a pseudoinversa dada na Equação 2.21 seja não singular;
- fac parâmetro que controla indiretamente o número de *clusters* evoluídos durante o processo de treinamento (Equação 3.10);
- $g_{inicial}$ é um ganho de aprendizagem inicial que orienta o grau de deslocamento dos centros e é responsável pela convergência dos centros dos *clusters* (Equação 3.8);
- q_f é número de parâmetros de Markov dos submodelos nebulosos do consequente no espaço de estados;
- α_f e β_f são parâmetros que compõem o número de linhas e colunas, respectivamente, da matriz de Hankel nebulosa (Equação 3.30);
- λ_l é o fator de esquecimento;
- q_l é o número de parâmetros de Markov do sistema dinâmico linear modelado pelo bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein;
- α_l e β_l são parâmetros que compõem o número de linhas e colunas, respectivamente, da matriz de Hankel do modelo dinâmico linear (Equação 3.65).

Os valores para estes parâmetros foram selecionados para cada sistema identificado por meio de testes. A escolha destes parâmetros de forma autônoma fica como sugestão para trabalhos futuros. Todos os modelos obtidos são avaliados por dois critérios de desempenho largamente usados na literatura em problemas de identificação de sistemas (FILHO et al., 2017; JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014; JIA; LI; CHIU, 2016). Os critérios utilizados são:

- Erro quadrático médio (*Mean Square Error* - MSE):

$$MSE_j = \frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} (y_{k,j} - \hat{y}_{k,j})^2 \quad (4.1)$$

com $j = [1, p]$, onde p é número de saídas, N_T é o número de amostras, $y_{k,j}$ e $\hat{y}_{k,j}$ denotam j -ésima saída real e saída estimada, respectivamente;

- *Best FIT* (FIT):

$$FIT_j = \left(1 - \frac{\|\mathbf{y}_j - \hat{\mathbf{y}}_j\|}{\|\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}_j\|} \right) \times 100\% \quad (4.2)$$

onde \mathbf{y}_j e $\hat{\mathbf{y}}_j$ denotam os vetores contendo os valores da j -ésima saída real e estimada, respectivamente, $\bar{\mathbf{y}}_j$ é o vetor formado pelo valor médio da j -ésima saída real \mathbf{y}_j e $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana.

4.1 Experimento 1 - Sistema Dinâmico não Linear Monovariável com não Linearidade Complexa Descontínua

Nesta seção, os resultados da aplicação da metodologia nebulosa evolutiva, proposta nesta dissertação, na identificação de um sistema monovariável com função estática não linear complexa descontínua, usado como *benchmark* em (JIA; LI; CHIU, 2016), são apresentados. Para demonstrar a eficiência da metodologia evolutiva nebulosa proposta, os resultados são comparados com resultados de outras duas metodologias distintas: a primeira consiste em aproximar o modelo de Hammerstein de forma que a não linearidade estática é modelada por um polinômio e a dinâmica linear por um modelo ARX de primeira ordem; já na segunda abordagem, a não linearidade estática é modelada através de uma rede neuro-*fuzzy*. As duas metodologias usadas para comparação foram proposta em (JIA; LI; CHIU, 2016). O *benchmark* aplicado para comparação é o seguinte:

$$w_k = \begin{cases} 2 \tanh(2u_k) & u_k \leq 1.5 \\ -2 \frac{e^{u_k} - 1}{e^{u_k} + 1} & u_k > 1.5 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$y_k = 0.8y_{k-1} + 0.2w_{k-1} \quad (4.4)$$

onde u_k é a entrada, w_k é o sinal intermediário desconhecido e y_k é a saída.

Os parâmetros de projeto para implementação do algoritmo de identificação evolutiva foram definidos como segue:

- $N = 200$;
- $fac = 0,03$;
- $g_{inicial} = 0,04$;
- $q_f = 1$;
- $\alpha_f = 10$;
- $\beta_f = 25$;
- $\lambda_l = 0,98$
- $q_l = 10$;
- $\alpha_l = 25$;
- $\beta_l = 50$.

Para estimação do modelo de Hammerstein nebuloso um sinal de entrada do tipo multi-degrau aleatório com distribuição uniforme entre $[0, 5]$ foi aplicado. Um conjunto de dados com 1000 amostras, gerado para identificação, é ilustrado na Figura 10. As primeiras 200 amostras dos dados de identificação foram usadas para inicialização do modelo.

4.1.1 Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática

A parametrização da não linearidade estática do sistema dinâmico considerado neste estudo de caso tem sua regra nebulosa generalizada dada por:

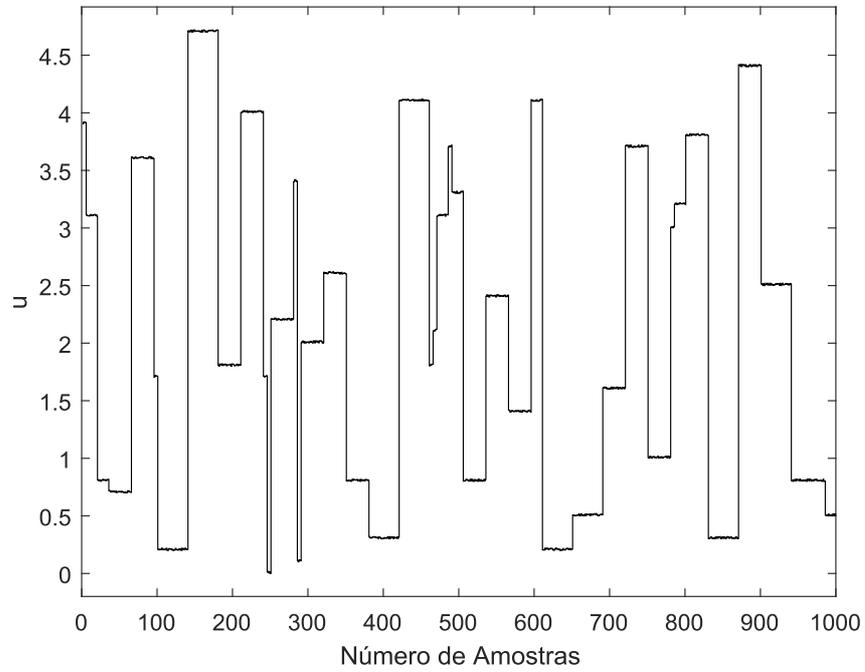
$$\begin{aligned} R^i : \mathbf{SE} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k &= [u_{k-1} \quad y_{k-1}] \quad \mathbf{E} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*} = [u^{i*} \quad y^{i*}] \\ \mathbf{ENTÃO} \quad \tilde{y}_k^i &= (E^i(I - G^i)^{-1}H^i + F^i)u_k \end{aligned} \quad (4.5)$$

A estimação do antecedente do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo é computada conforme formulação da seção 3.1.1. O comportamento evolutivo da base de regras nebulosas, considerando-se o conjunto de dados de treinamento, é apresentado na Figura 11. Pode-se ver que durante a construção do modelo de inicialização, com as 200 primeiras amostras, 9 regras foram criadas. Já o modelo final apresenta 23 regras.

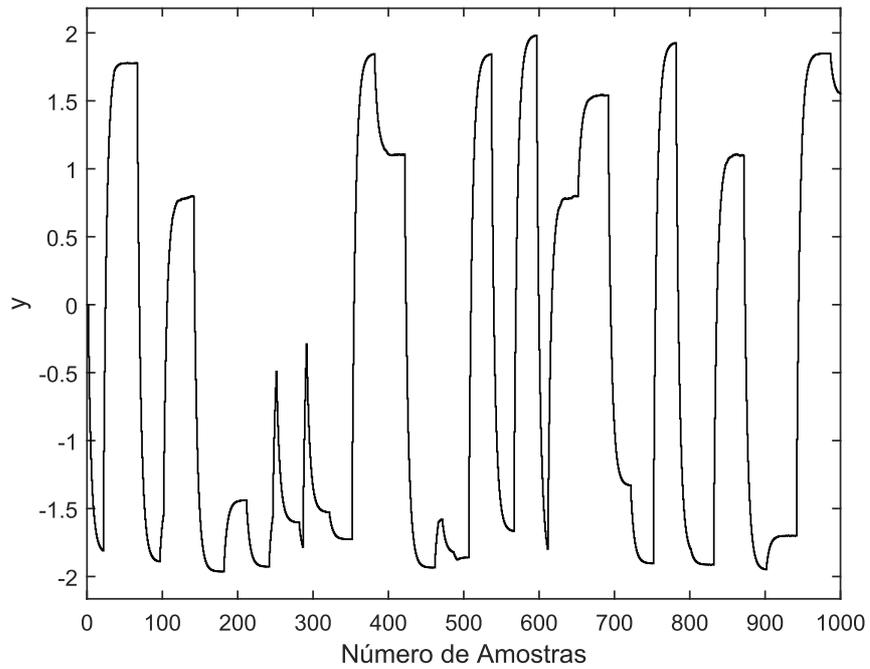
A ordem mínima dos submodelos locais no espaço de estados, apresentados na Equação 3.12, é escolhida pelo número de valores singulares significativos da matriz de Hankel de

Figura 10 – Conjunto de dados usado para identificação: (a) entrada u (b) saída y .

(a) u

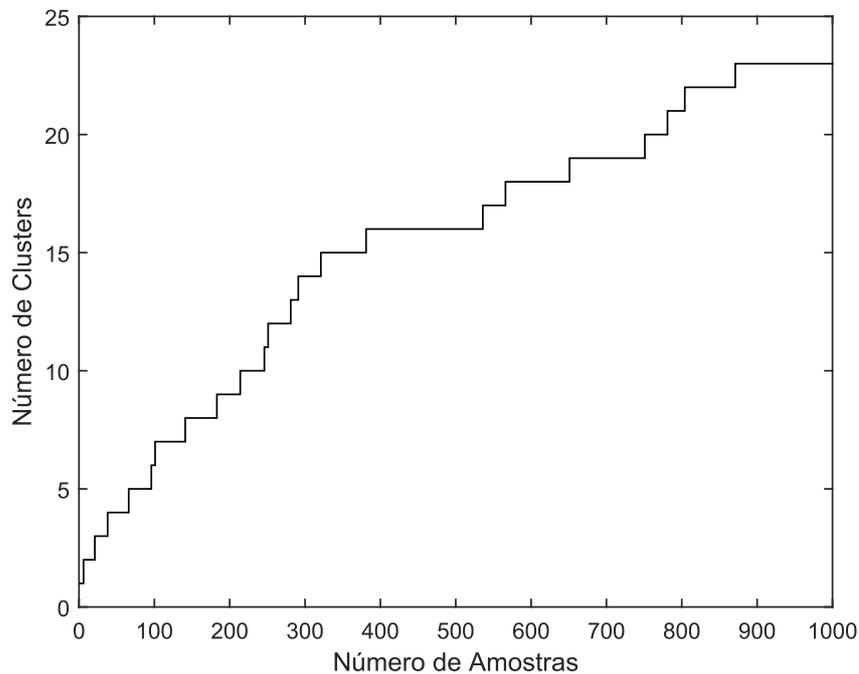


(b) y



Fonte: Autor.

Figura 11 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.



Fonte: Autor.

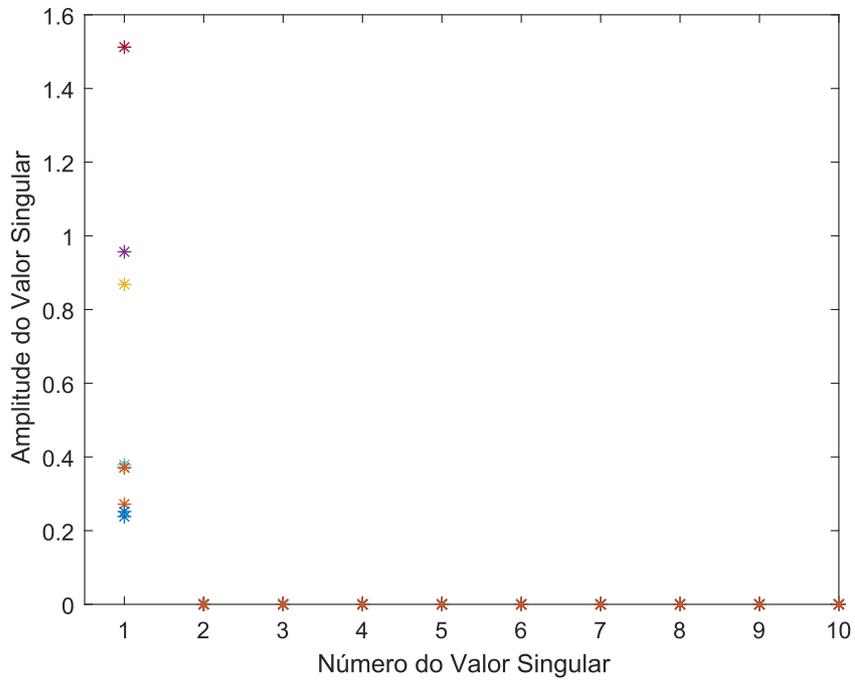
cada submodelo local na etapa de inicialização. Os valores singulares são ilustrados na Figura 12. Analisando-se a Figura 12, infere-se que os submodelos nebulosos Takagi-Sugeno no espaço de estados tem ordem mínima $s = 1$. A estimação recursiva das matrizes de estado G^i , H^i , E^i e F^i , que compõem o consequente do sistema de inferência nebuloso evolutivo apresentado na Equação 3.1, é mostrada nas Figuras 13-16. Pode-se notar que as matrizes de cada submodelo são inicializadas com zeros; depois da amostra 200, quando se inicia a etapa de estimação recursiva, à medida que novos *clusters* são gerados, os parâmetros do consequente desses novos submodelos são estimados simultaneamente.

Uma vez que os parâmetros do consequente do sistema nebuloso são estimados a cada instante, o sinal intermediário desconhecido w_k também é estimado através da Equação 3.50. O sinal intermediário w_k estimado recursivamente, durante a etapa de treinamento, através do modelo nebuloso TS evolutivo é mostrada na Figura 17. Nesta mesma figura também é apresentado o sinal intermediário esperado calculado pela função estática não linear dada na Equação 4.3.

4.1.2 Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear

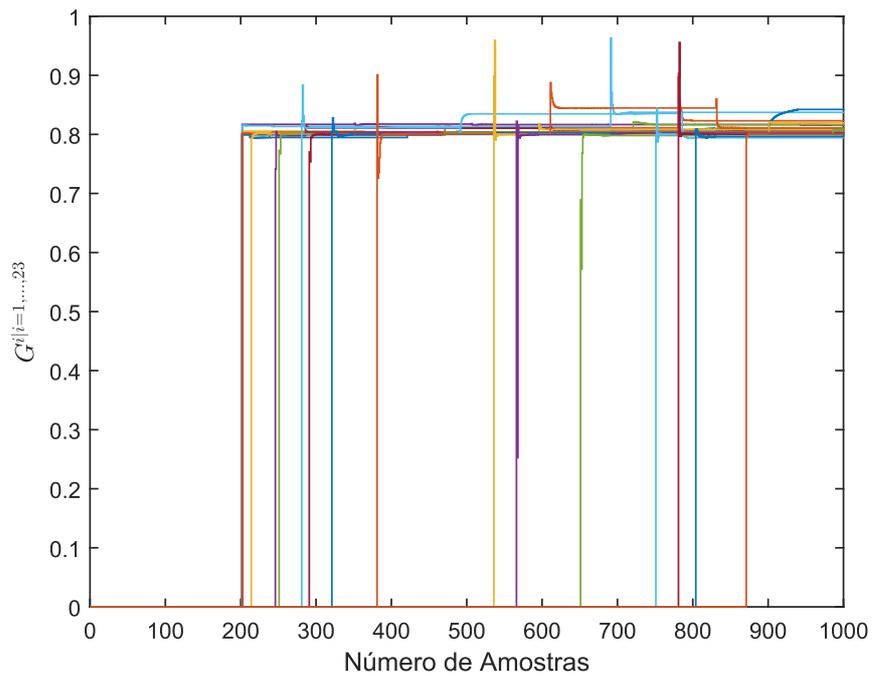
Para parametrização do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein, implementa-se o algoritmo ERA, como descrito na seção 3.2. Os valores singulares da matriz de Hankel Π_0 , estimada com o sinal intermediário w_k e o sinal de saída y_k , são ilustrados na Figura 18.

Figura 12 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa $H_0^{i|i=1,\dots,9}$ construída com as 200 amostras de inicialização do algoritmo.



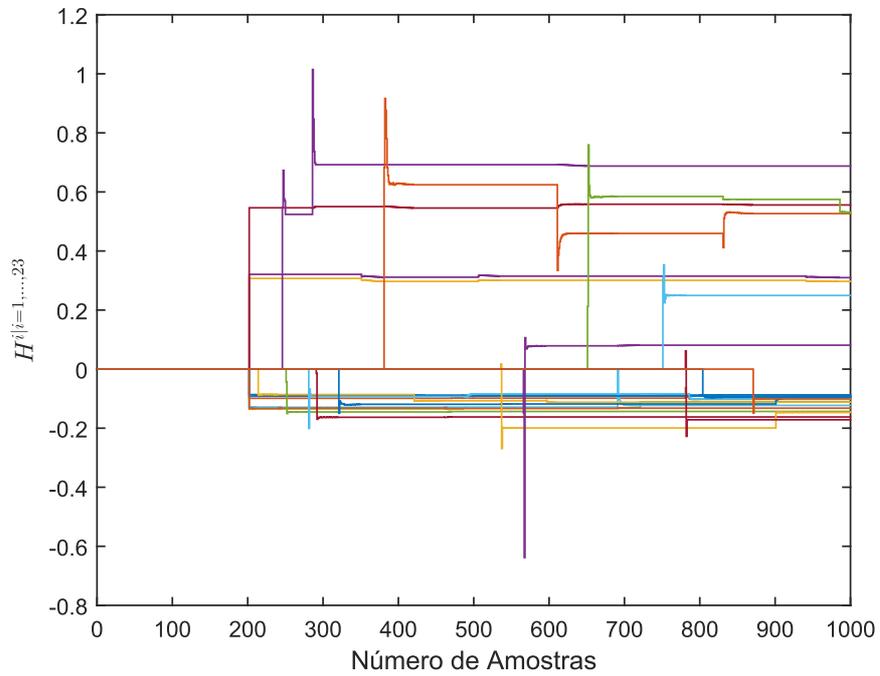
Fonte: Autor.

Figura 13 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i .



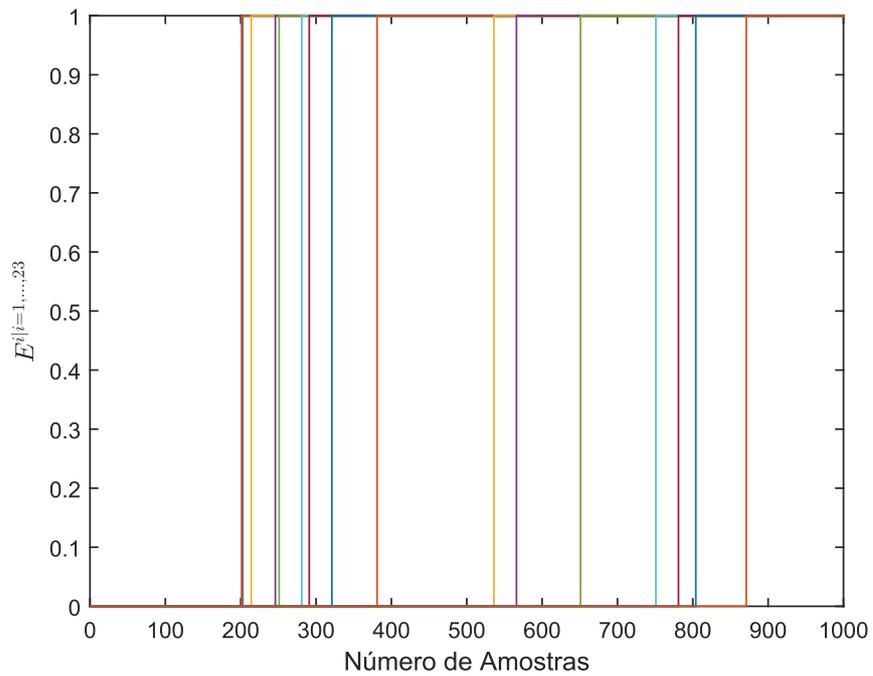
Fonte: Autor.

Figura 14 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i .



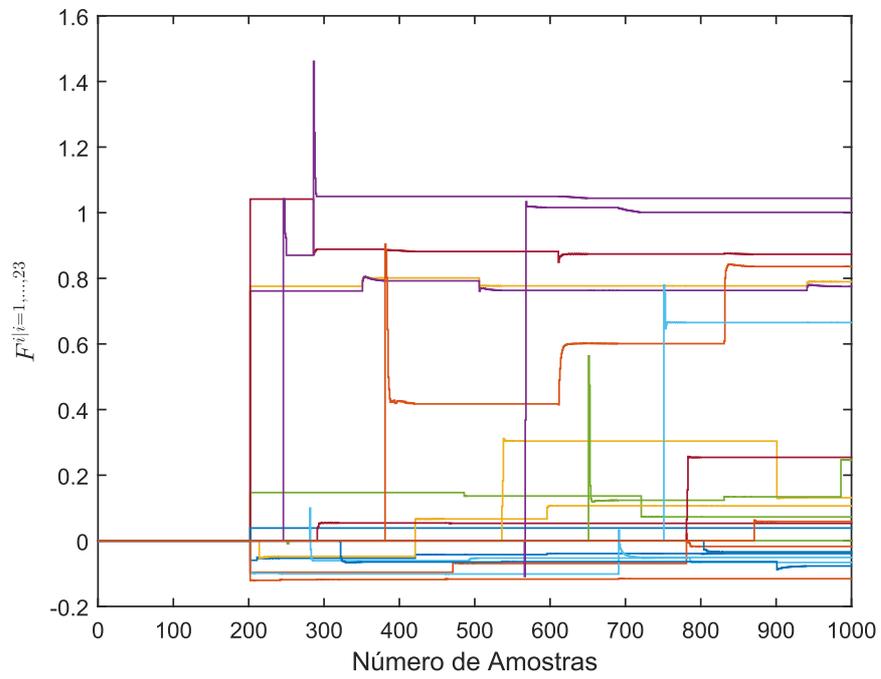
Fonte: Autor.

Figura 15 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i .



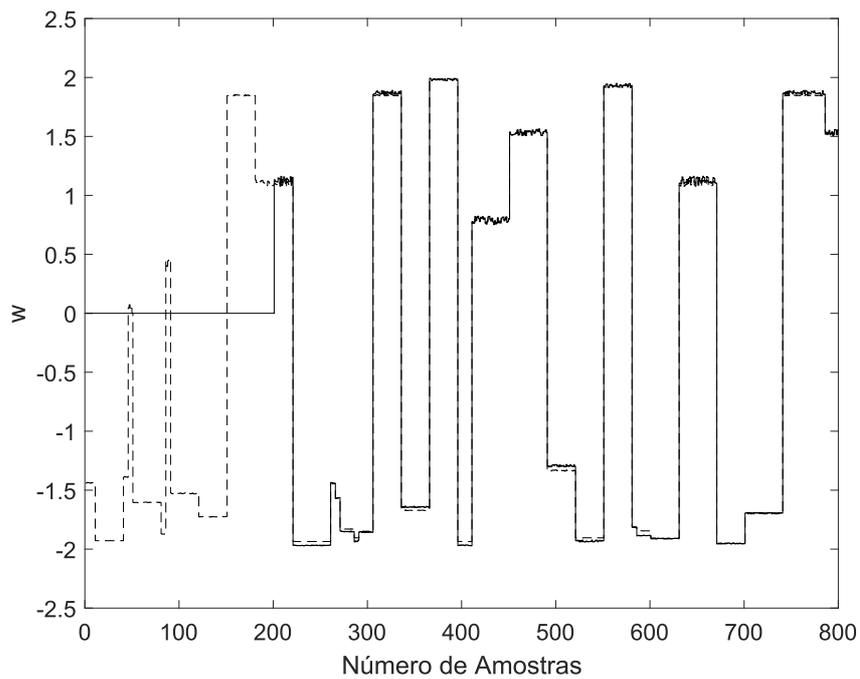
Fonte: Autor.

Figura 16 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i .



Fonte: Autor.

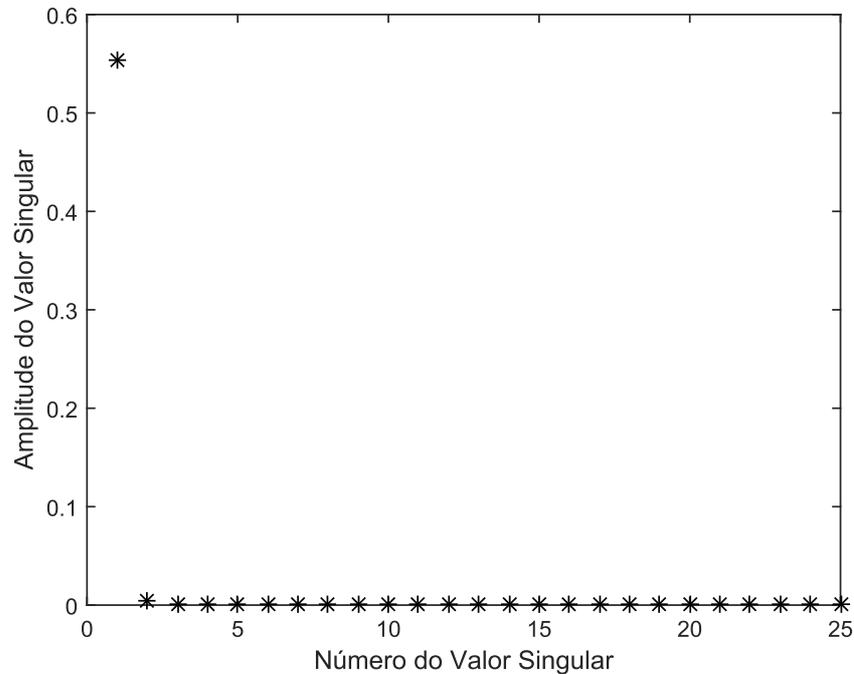
Figura 17 – Sinal intermediário w_k estimado: linha tracejada - sinal esperado calculado pela função estática não linear real; linha sólida - sinal estimado recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



Fonte: Autor.

Considerando-se somente os valores singulares significativos, o modelo dinâmico linear tem ordem $n = 1$. A estimação recursiva das matrizes de parâmetros do modelo dinâmico linear no espaço de estados A , B , C e D é apresentada nas Figuras 19-22.

Figura 18 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear.

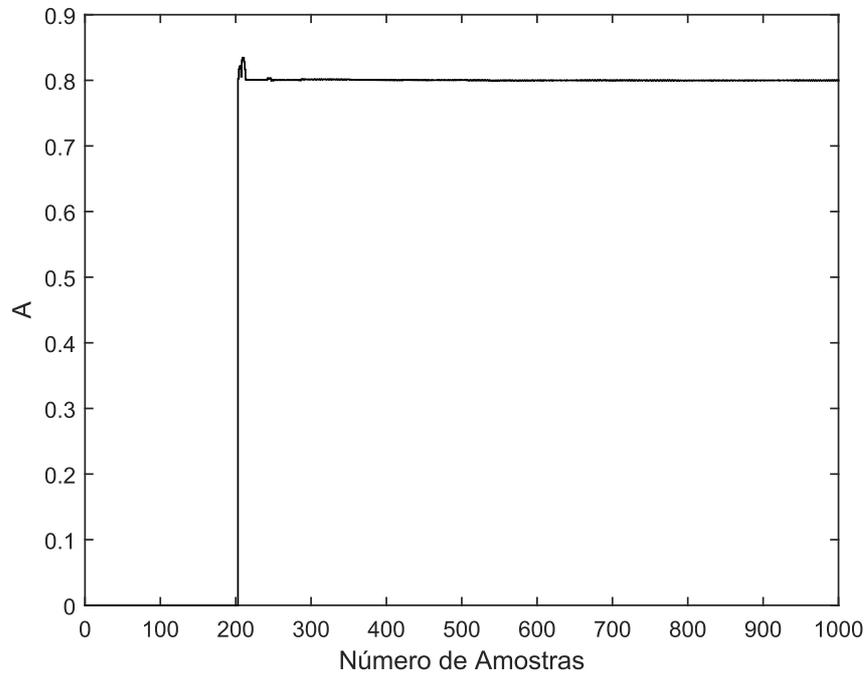


Fonte: Autor.

Os resultados de predição e validação do modelo de Hammerstein nebuloso evolutivo são apresentados nas Figuras 23 e 24, respectivamente. A validação da não linearidade estática é ilustrada na Figura 25.

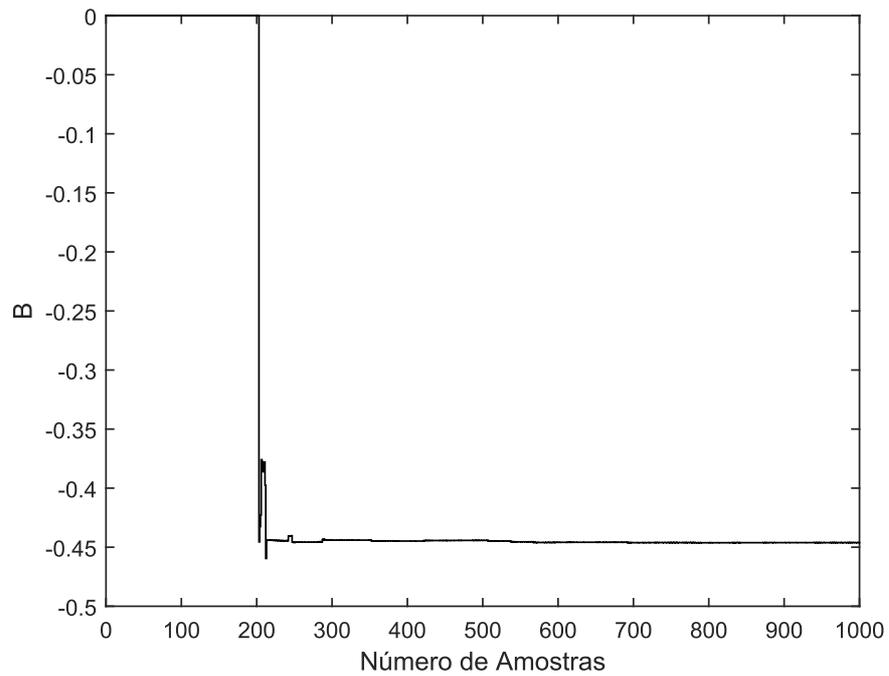
Os resultados comparativos para treinamento e validação entre a metodologia nebulosa evolutiva proposta nesta dissertação e as abordagens apresentadas em (JIA; LI; CHIU, 2016), de acordo com o critério MSE, são exibidos na Tabela 1, onde os melhores resultados estão em negrito. Assim, constata-se que a metodologia proposta apresenta resultados superiores, tanto para treinamento quanto para validação, com relação à abordagem *neuro-fuzzy* e à abordagem polinomial.

Figura 19 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros A .



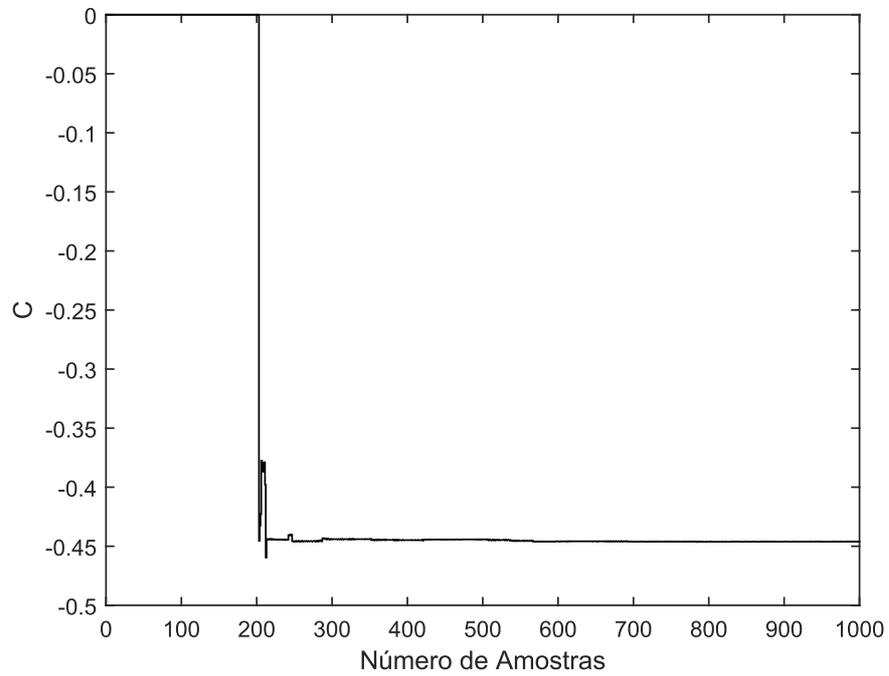
Fonte: Autor.

Figura 20 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros B .



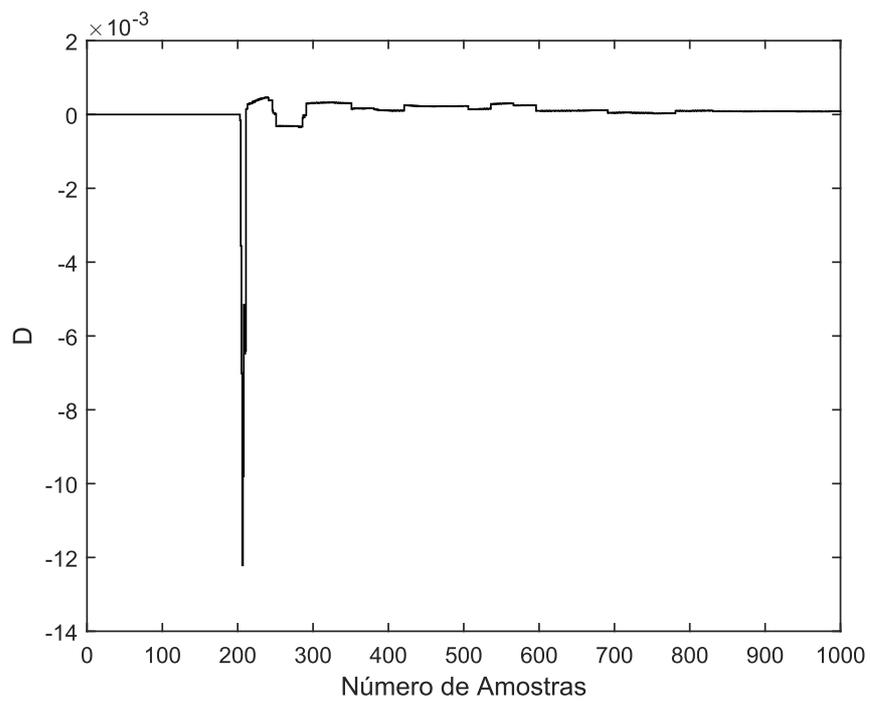
Fonte: Autor.

Figura 21 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros C .



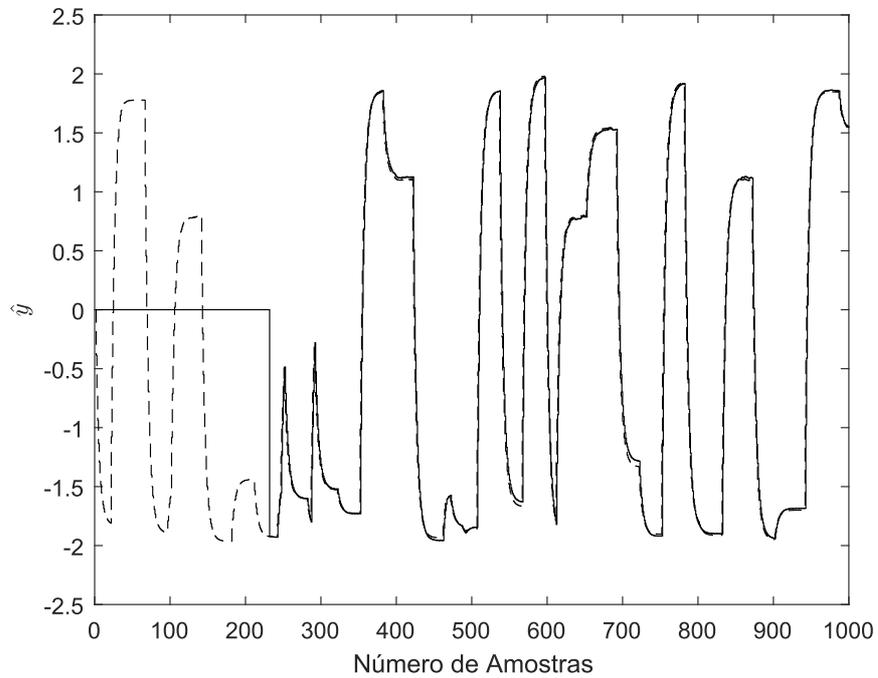
Fonte: Autor.

Figura 22 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros D .



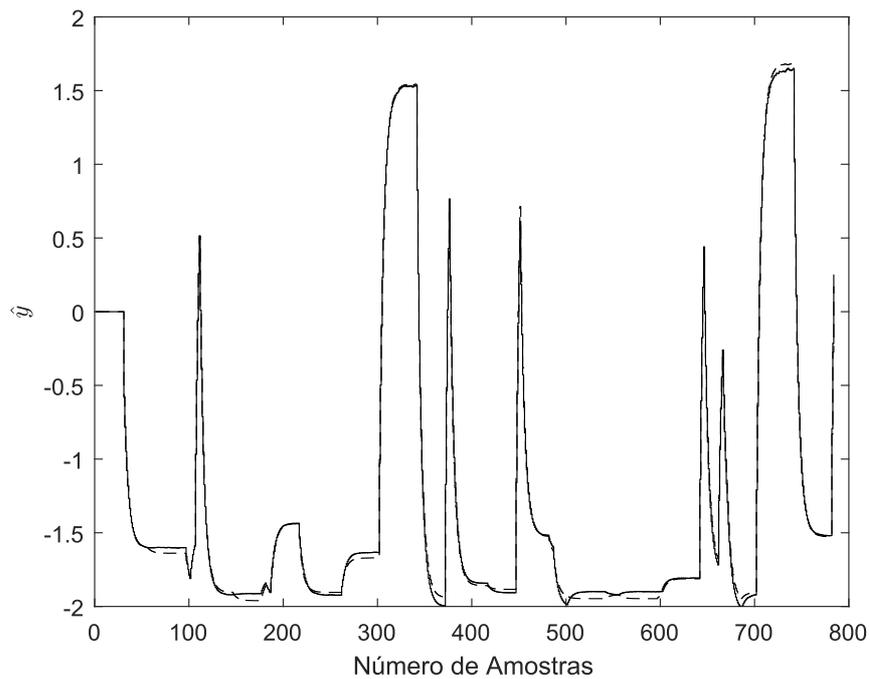
Fonte: Autor.

Figura 23 – Saída estimada durante treinamento do modelo: linha tracejada - saída real do sistema dinâmico; linha sólida - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



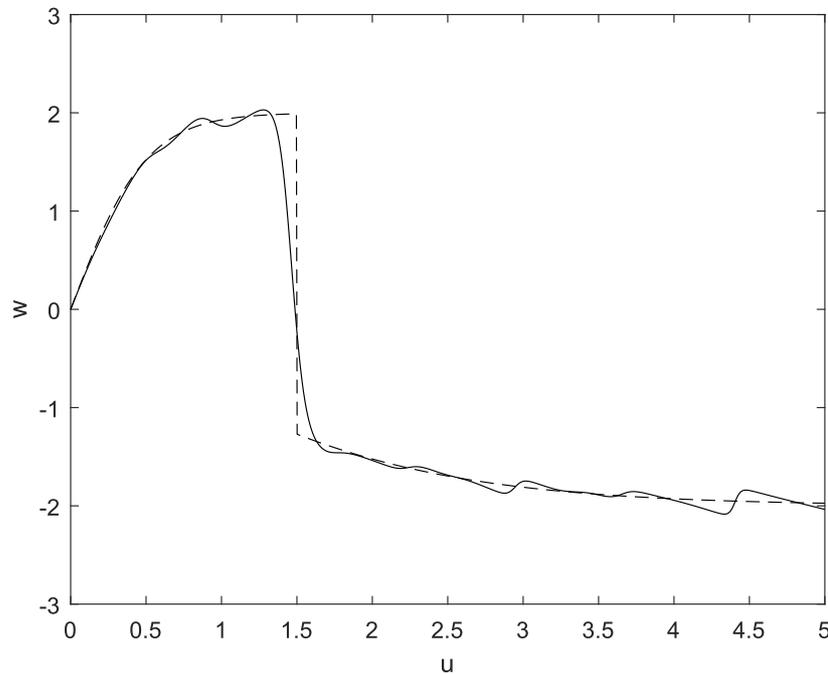
Fonte: Autor.

Figura 24 – Saída estimada com dados de validação: linha tracejada - saída real do sistema dinâmico; linha sólida - saída do modelo de Hammerstein nebuloso no espaço de estados.



Fonte: Autor.

Figura 25 – Curva estática: linha tracejada - não linearidade estática real; linha sólida - não linearidade estática estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



Fonte: Autor.

Tabela 1 – Análise comparativa da metodologia proposta.

Metodologia	Clusters	MSE^*	MSE^+	FIT^*	FIT^+
Proposta	23	2.7088×10^{-4}	9.1415×10^{-4}	98.88%	97.08%
Neuro-fuzzy	32	5.2323×10^{-4}	9.9665×10^{-4}	-	-
Polinomial	12*	4.3000×10^{-3}	7.6000×10^{-3}	-	-

* Treinamento.

+ Validação.

* Ordem do polinômio.

4.2 Experimento 2 - Identificação de um Processo Térmico

Nesta seção, a metodologia nebulosa evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados proposta nesta dissertação é aplicada na identificação de um sistema térmico largamente usado na literatura (FILHO et al., 2017; COSTA et al., 2016b; PIRES; SERRA, 2014), apresentado na Figura 26. Os dados experimentais foram obtidos a partir de uma plataforma de controle em tempo real. Esta plataforma experimental é composta de planta térmica, *software* LabVIEW¹, CompactRIO 9073, módulo de entrada analógica NI 9215, módulo de entrada analógica NI 9219, módulo de saída analógica NI 9263, sensor de temperatura LM-35 e atuador

¹ O LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*) é uma linguagem de programação gráfica, desenvolvida pela *National Instruments Corporation*.

baseado no CI TCA 785. A planta térmica consiste em uma torradeira monofásica AC 220 V, com temperatura funcional de 25 °C a 250 °C. Maiores informações sobre esta plataforma podem ser encontradas em (COSTA et al., 2016b).

Figura 26 – Processo Térmico Real.



Fonte: (FILHO et al., 2017).

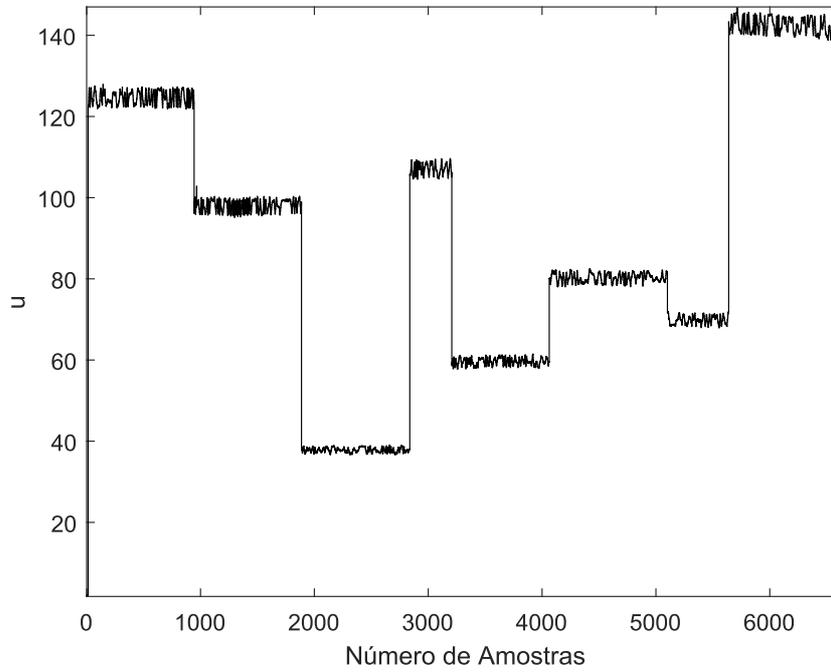
A identificação desse sistema dinâmico é realizada a partir do conjunto de dados de entrada u e saída y , com 6624 amostras, exibido na Figura 27. As primeiras 1000 amostras dos dados de identificação são usadas para inicialização do modelo nebuloso evolutivo.

Para estimação do modelo de Hammerstein nebuloso evolutivo no espaço de estados, os seguintes parâmetros de projeto foram definidos:

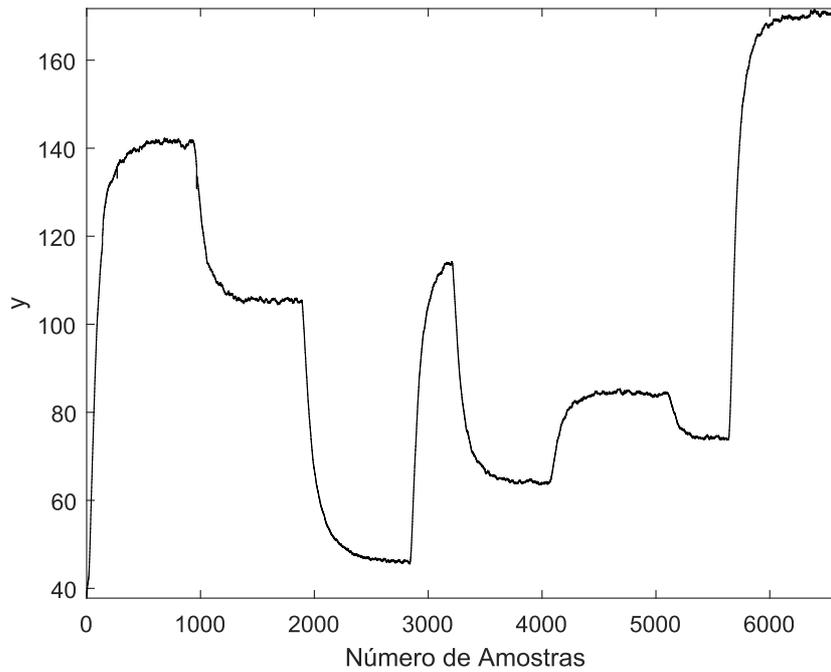
- $N = 1000$;
- $fac = 0,25$;
- $g_{inicial} = 0,1$;
- $q_f = 1$;
- $\alpha_f = 3$;

Figura 27 – Conjunto de dados experimentais usado para identificação: (a) entrada u (b) saída y .

(a) u



(b) y



Fonte: Autor.

- $\beta_f = 7$;
- $\lambda_l = 0,96$
- $q_l = 6$;
- $\alpha_l = 50$;
- $\beta_l = 100$.

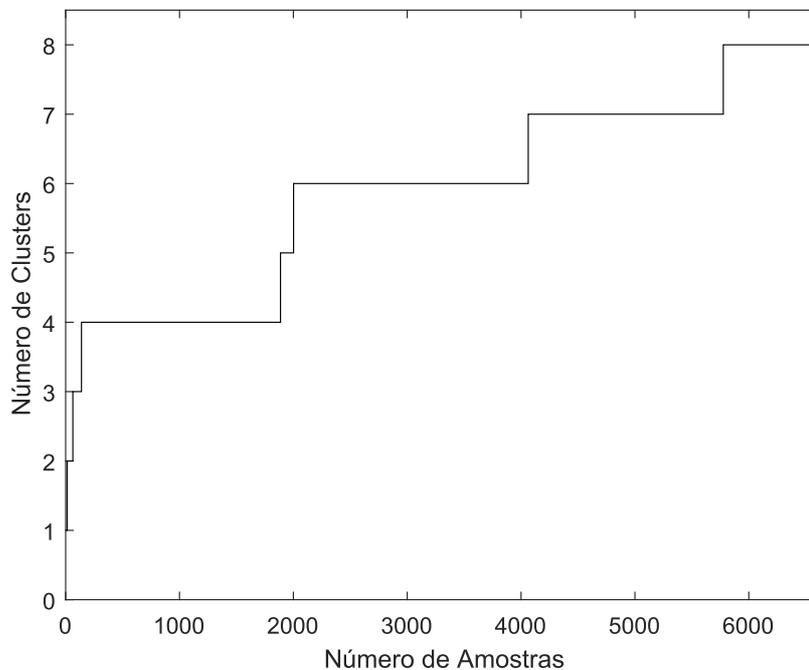
4.2.1 Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática

A parametrização da não linearidade estática do sistema dinâmico considerado neste estudo de caso tem sua regra nebulosa generalizada dada por:

$$\begin{aligned} R^i : \mathbf{SE} \tilde{\mathbf{x}}_k = [u_{k-1} \ y_{k-1}] \quad \mathbf{É} \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*} = [u^{i*} \ y^{i*}] \\ \mathbf{ENTÃO} \tilde{y}_k^i = (E^i(I - G^i)^{-1}H^i + F^i)u_k \end{aligned} \quad (4.6)$$

O comportamento evolutivo da base de regras nebulosas do modelo de Hammerstein nebuloso é apresentado na Figura 28. Pode-se ver que ao final da leitura das N amostras de dados, o modelo apresenta 8 regras.

Figura 28 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.

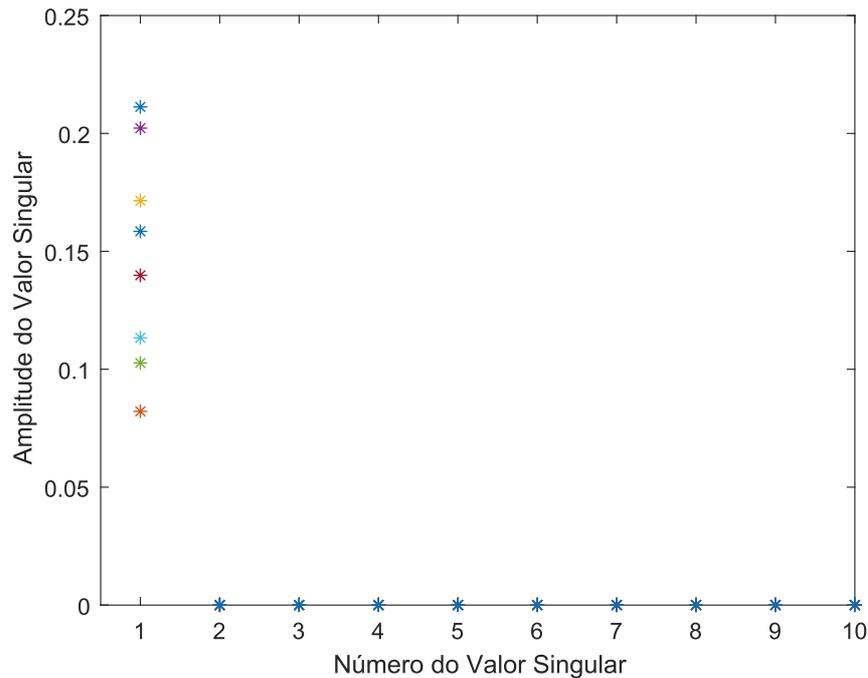


Fonte: Autor.

A ordem mínima dos submodelos locais no espaço de estados é escolhida pelo número de valores singulares significativos da matriz de Hankel de cada submodelo local. Pela análise

dos valores singulares, ilustrados na Figura 29, infere-se que os submodelos nebulosos no espaço de estados tem ordem mínima $s = 1$. A estimação recursiva das matrizes G^i , H^i , E^i e F^i , que compõem o consequente do sistema de inferência nebuloso TS evolutivo, é exibida nas Figuras 30-33, respectivamente.

Figura 29 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa.



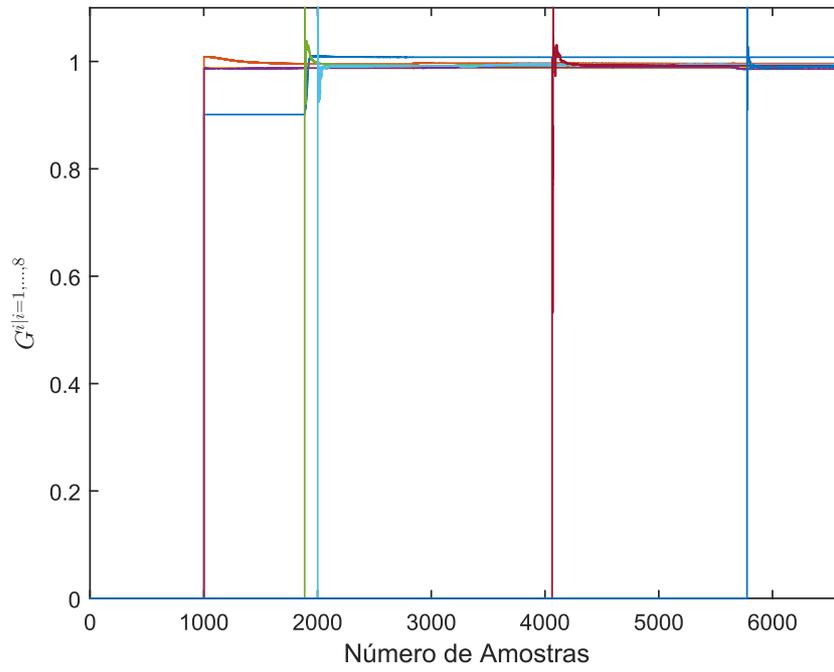
Fonte: Autor.

4.2.2 Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear

A parametrização do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein nebuloso é realizada de forma recursiva, à medida que o sinal intermediário w_k é computado. Os valores singulares da matriz de Hankel Π_0 , estimada com o sinal intermediário w_k e o sinal de saída y_k , são ilustrados na Figura 34. Considerando-se somente os valores singulares significativos, o modelo dinâmico linear no espaço de estados tem ordem mínima $n = 2$. A estimação recursiva das matrizes de parâmetros A , B , C e D é apresentada nas Figuras 35-38, respectivamente.

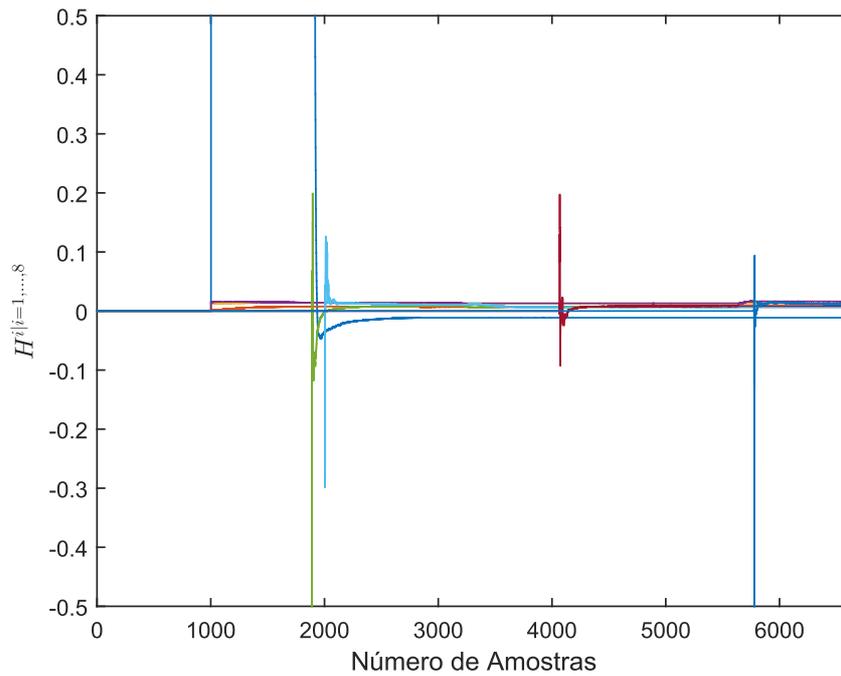
Por fim, os resultados de predição e validação do modelo de Hammerstein nebuloso evolutivo são apresentados nas Figuras 39 e 40, respectivamente. A validação da não linearidade estática é ilustrada na Figura 41. Os resultados de treinamento e validação, obtidos através da metodologia nebulosa evolutiva proposta nesta dissertação, de acordo com os critérios de avaliação de desempenho, MSE e FIT, são exibidos na Tabela 2.

Figura 30 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i .



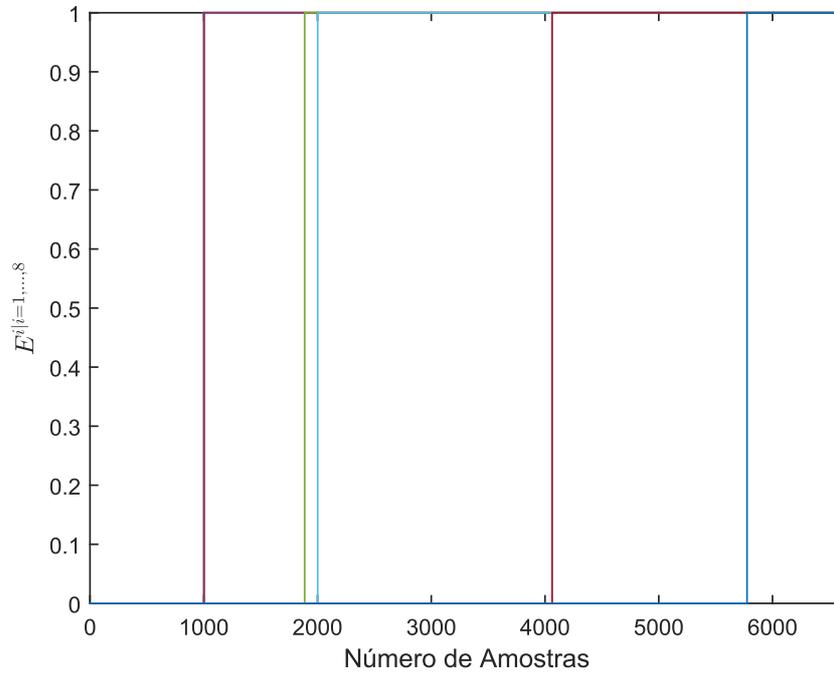
Fonte: Autor.

Figura 31 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i .



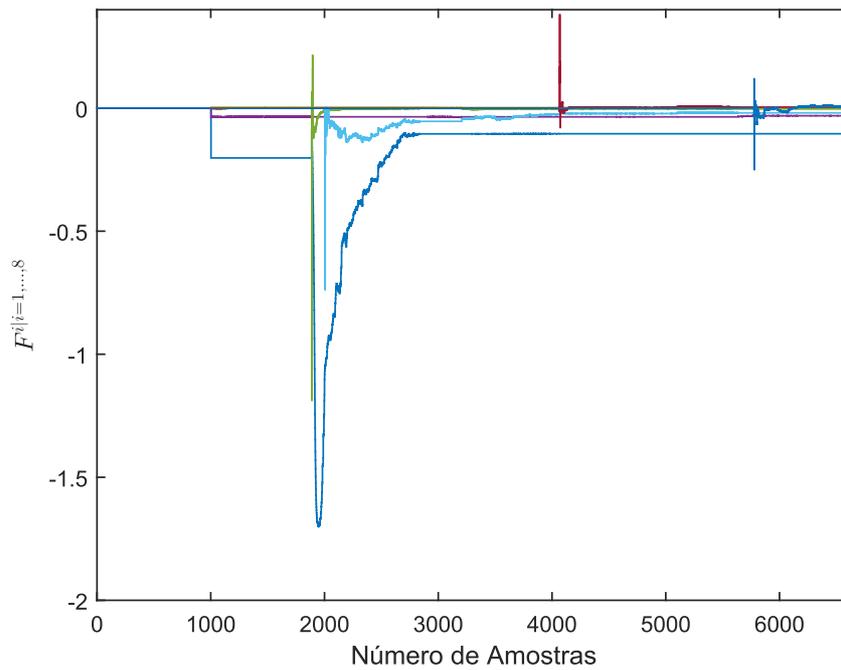
Fonte: Autor.

Figura 32 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i .



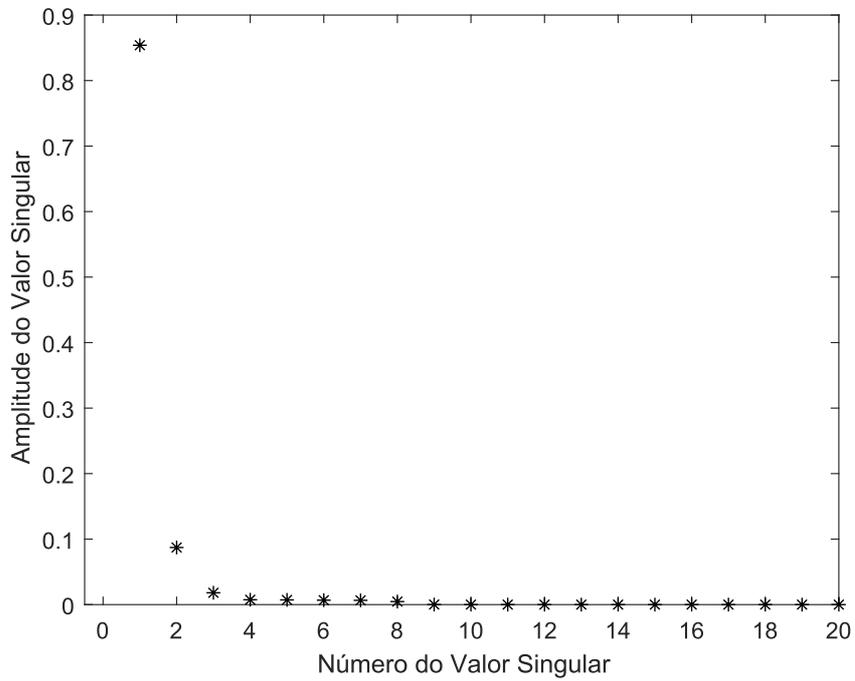
Fonte: Autor.

Figura 33 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i .



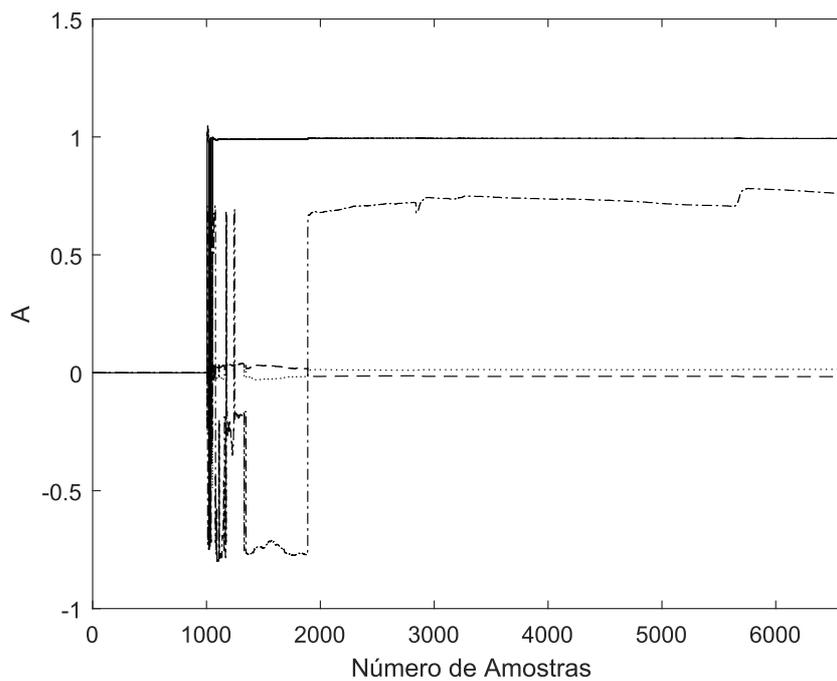
Fonte: Autor.

Figura 34 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear.



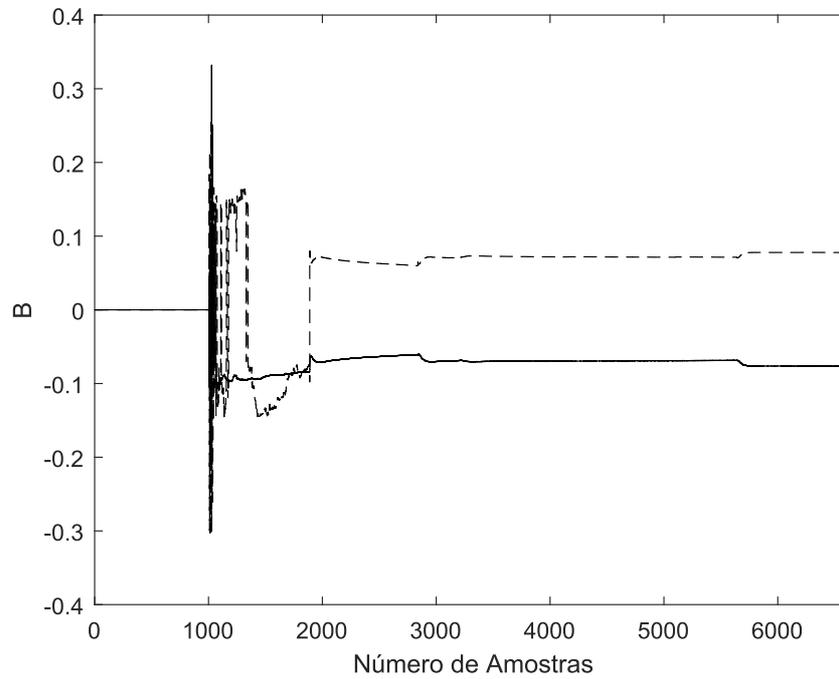
Fonte: Autor.

Figura 35 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz A .



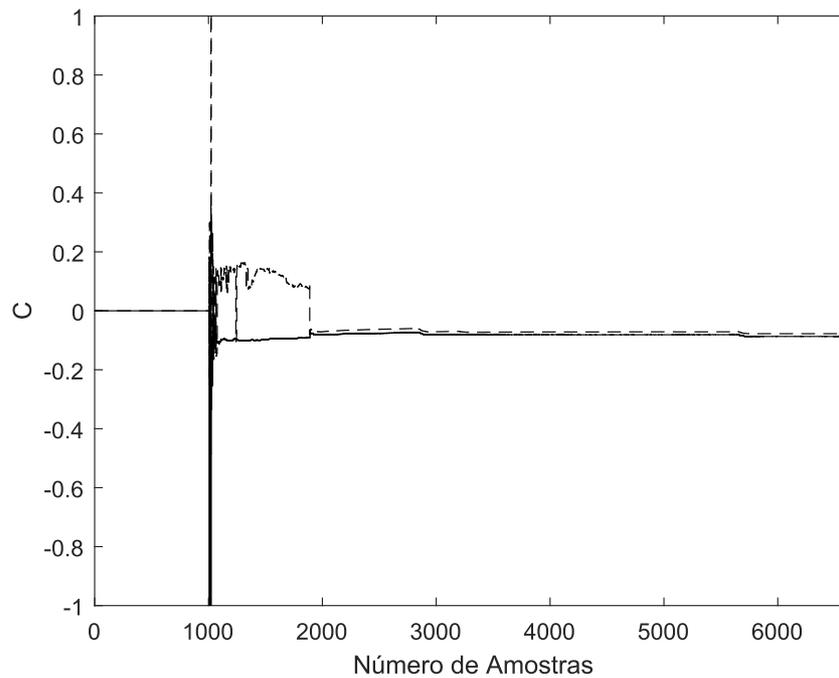
Fonte: Autor.

Figura 36 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz B .



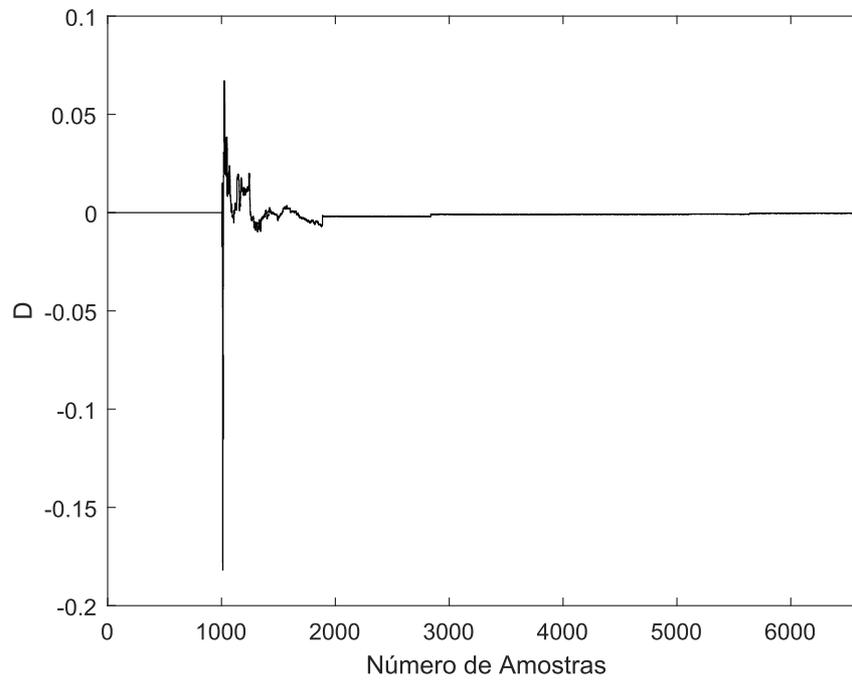
Fonte: Autor.

Figura 37 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz C .



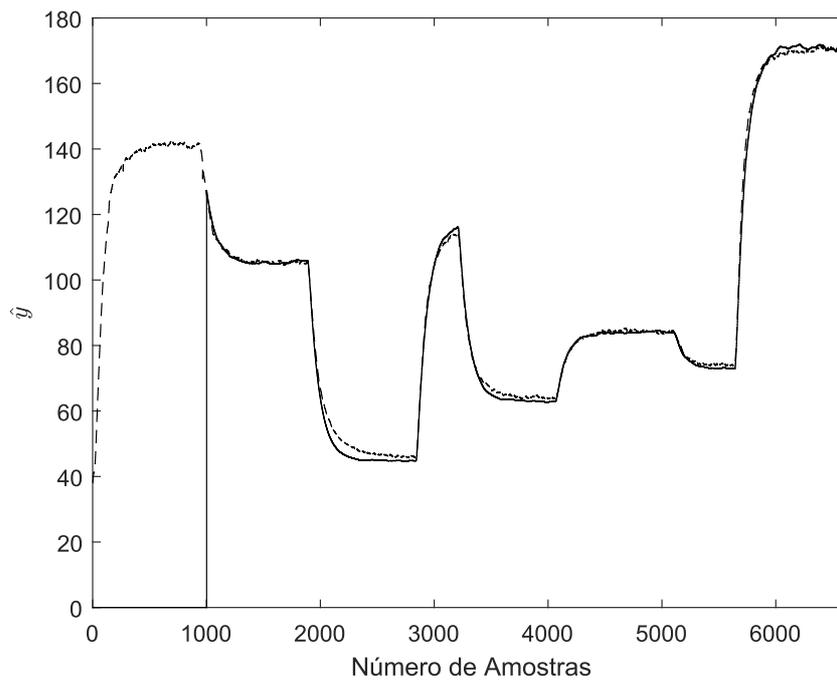
Fonte: Autor.

Figura 38 – Estimação recursiva das matrizes de parâmetros no espaço de estados: elementos da matriz D .



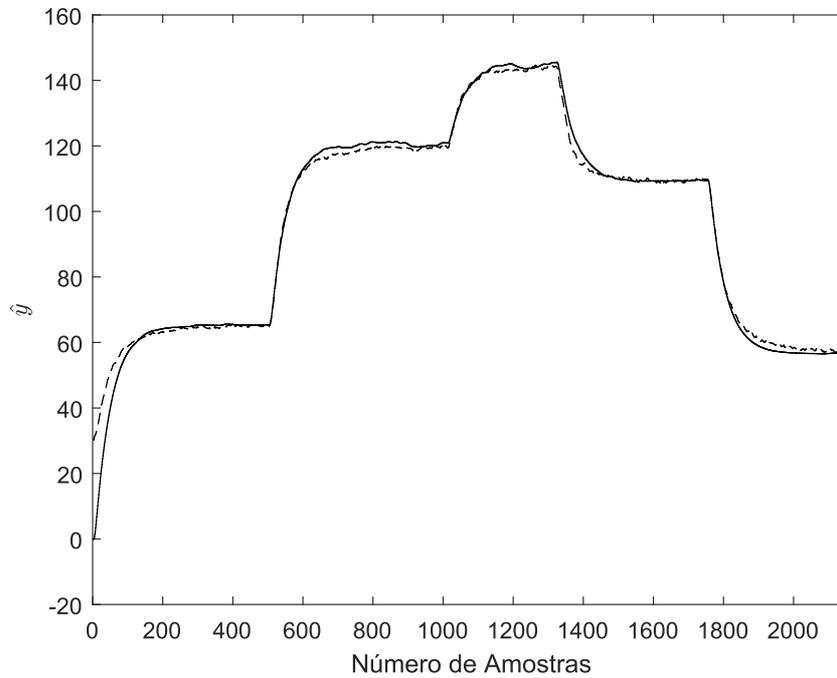
Fonte: Autor.

Figura 39 – Saída estimada durante treinamento do modelo: linha tracejada - saída real do sistema térmico; linha sólida - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



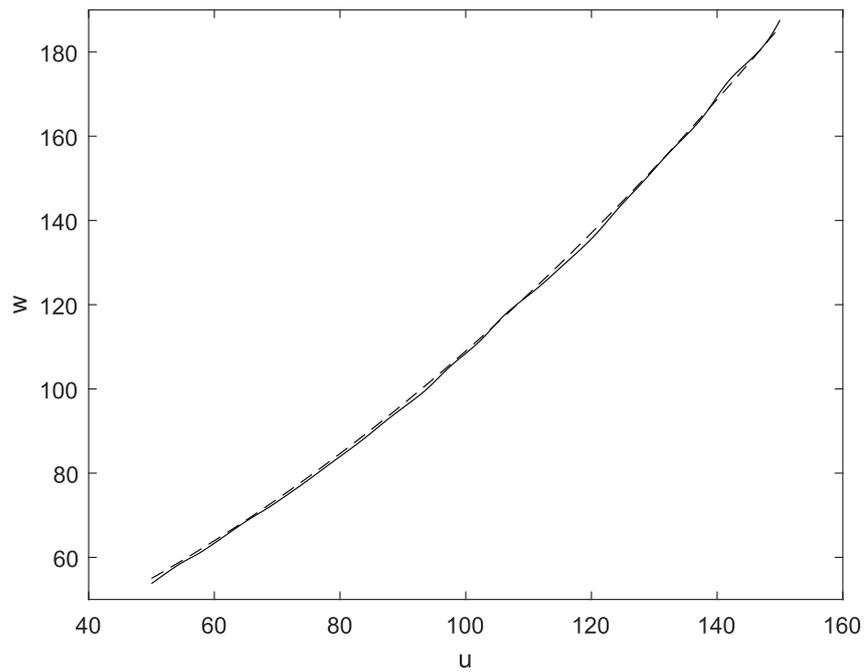
Fonte: Autor.

Figura 40 – Saída estimada com dados de validação: linha tracejada - saída real do sistema térmico; linha sólida - saída do modelo de Hammerstein nebuloso no espaço de estados.



Fonte: Autor.

Figura 41 – Curva estática: linha tracejada - não linearidade estática da planta térmica; linha sólida - não linearidade estática estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



Fonte: Autor.

Tabela 2 – Resultados experimentais da metodologia nebulosa evolutiva proposta obtidos na identificação de um processo térmico.

Metodologia	Clusters	MSE*	MSE ⁺	FIT*	FIT ⁺
Proposta	8	1.94	2.41	95.35%	93.33%

* Treinamento.

+ Validação.

4.3 Experimento 3 - Sistema Multivariável com não Linearidades Combinadas Complexas

Nesta seção, a identificado um sistema dinâmico não linear multivariável com duas entradas e duas saídas, aplicando-se a metodologia nebulosa evolutiva proposta nesta dissertação, é implementada. A identificação deste sistema dinâmico, baseado em modelos de Hammerstein, é realizada através da parametrização da não linearidade estática, por meio de um sistema de inferência nebuloso TS evolutivo, bem como da parametrização da dinâmica linear, por de um modelo linear no espaço de estados. O sistema dinâmico explorado nesta seção é o *benchmark* aplicado em (JIA; LI; CHIU, 2016), que possui não linearidades complexas combinadas, denotado por:

$$\begin{cases} w_{k,1} = 1.6740u_{k,1} + 0.8370u_{k,1}^2 - 0.5816u_{k,2} - 0.2908u_{k,2}^2 \\ w_{k,2} = -0.1410u_{k,1} + 0.0705u_{k,1}^2 - 0.1614u_{k,2} + 0.0807u_{k,2}^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} y_{k,1} \\ y_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.025 & -0.100 \\ 0.190 & -0.050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1,1} \\ y_{k-1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.025 & 0.100 \\ -0.190 & 1.050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k-1,1} \\ w_{k-1,2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{u}_k = [u_{k,1} \ u_{k,2}]^T$ é o vetor de entradas, $\mathbf{w}_k = [w_{k,1} \ w_{k,2}]^T$ é o vetor contendo o sinal intermediário desconhecido e $\mathbf{y}_k = [y_{k,1} \ y_{k,2}]^T$ é o vetor de saídas.

Para execução do algoritmo de identificação evolutiva, os seguintes parâmetros de projeto foram definidos:

- $N = 200$;
- $fac = 0,15$;
- $g_{inicial} = 0,5$;
- $q_f = 1$;
- $\alpha_f = 3$;
- $\beta_f = 7$;

- $\lambda_l = 0,98$
- $q_l = 3$;
- $\alpha_l = 50$;
- $\beta_l = 100$.

Um conjunto de dados do tipo multi-degrau aleatório com distribuição uniforme entre $[-2, 2]$ com 1000 amostras é usado como entrada para estimação do modelo de Hammerstein nebuloso evolutivo multivariável. Estes dados são exibidos nas Figuras 42 e 43, onde as primeiras 200 amostras são consideradas para inicialização da metodologia evolutiva proposta.

4.3.1 Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática

A parametrização da não linearidade estática do sistema dinâmico considerado neste estudo de caso tem sua regra nebulosa generalizada dada por:

$$\begin{aligned} R^i : \mathbf{SE} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k &= [u_{k-1,1} \quad u_{k-1,2} \quad y_{k-1,1} \quad y_{k-1,2}] \quad \mathbf{E} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*} = [u_1^{i*} \quad u_2^{i*} \quad y_1^{i*} \quad y_2^{i*}] \\ \mathbf{ENTÃO} \quad \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= (E^i(I - G^i)^{-1}H^i + F^i)\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (4.9)$$

O antecedente do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo é estimado como proposto na seção 3.1.1. A evolução do número de regras durante o treinamento é ilustrada na Figura 44, onde pode-se ver que durante inicialização do algoritmo, com as 200 primeiras amostras, foram criadas 11 regras e o modelo final apresenta 18 regras.

A ordem mínima dos submodelos locais no espaço de estados, dados na Equação 3.12, é definida analisando-se o número de valores singulares significativos da Figura 45. Assim, os submodelos nebulosos Takagi-Sugeno no espaço de estados apresentam ordem mínima $s = 2$.

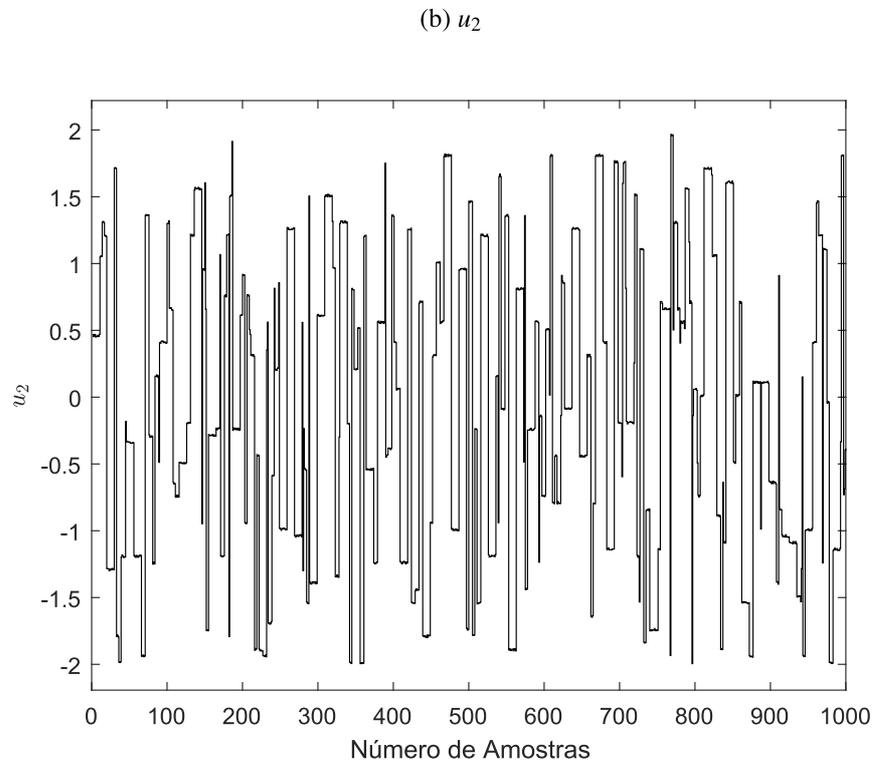
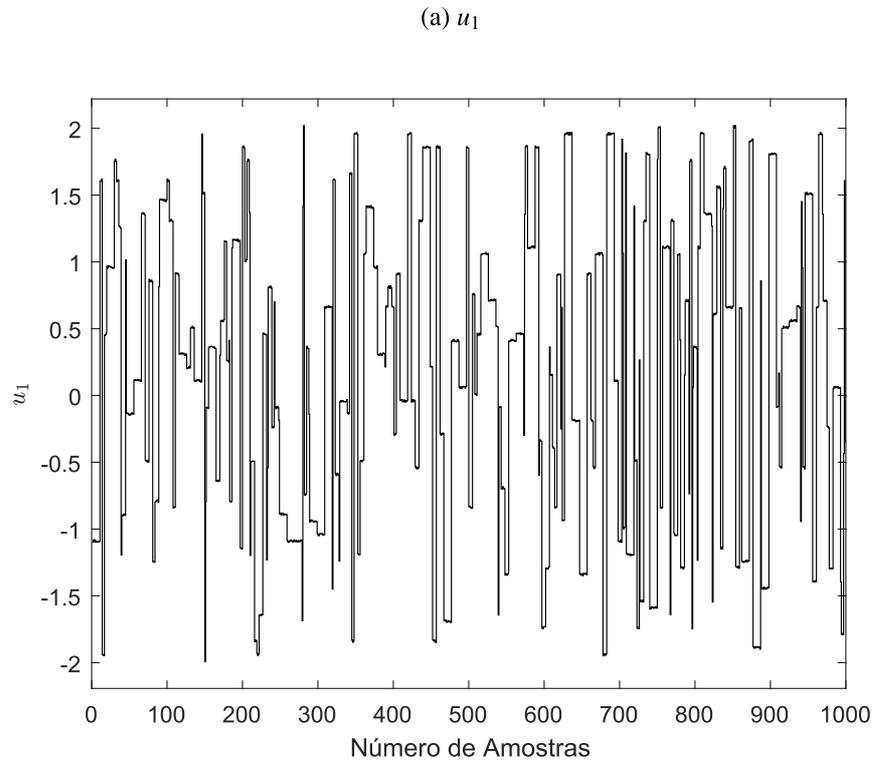
A estimação recursiva das matrizes de estado G^i , H^i , E^i e F^i , parâmetros do consequente do sistema nebuloso da Equação 3.1, é exibida nas Figuras 46-53. Os parâmetros são inicializados com zero, a partir da amostra 200, são recursivamente estimados à medida que novas regras são geradas.

O sinal intermediário desconhecido \mathbf{w}_k , estimado recursivamente através da Equação 3.50, durante a etapa de treinamento, é exibido na Figura 54 juntamente com o sinal intermediário esperado calculado pela função estática não linear dada na Equação 4.7.

4.3.2 Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear

A parametrização do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein multivariável é feita através do algoritmo ERA, como proposto na seção 3.2. Considerando-se somente os valores singulares significativos da matriz de Hankel Π_0 estimada com o sinal intermediário \mathbf{w}_k

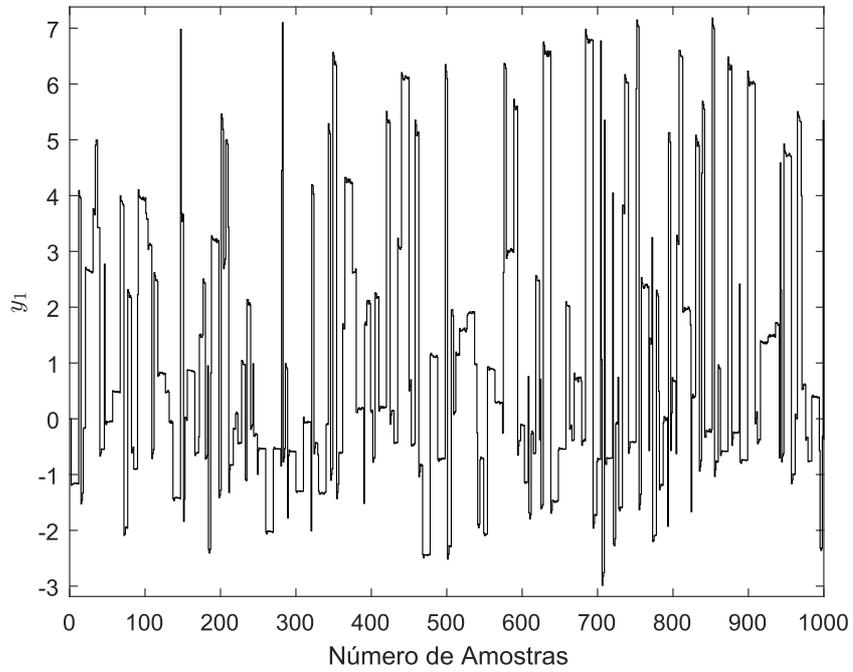
Figura 42 – Conjunto de dados de entrada usado para identificação: (a) entrada u_1 ; (b) entrada u_2 .



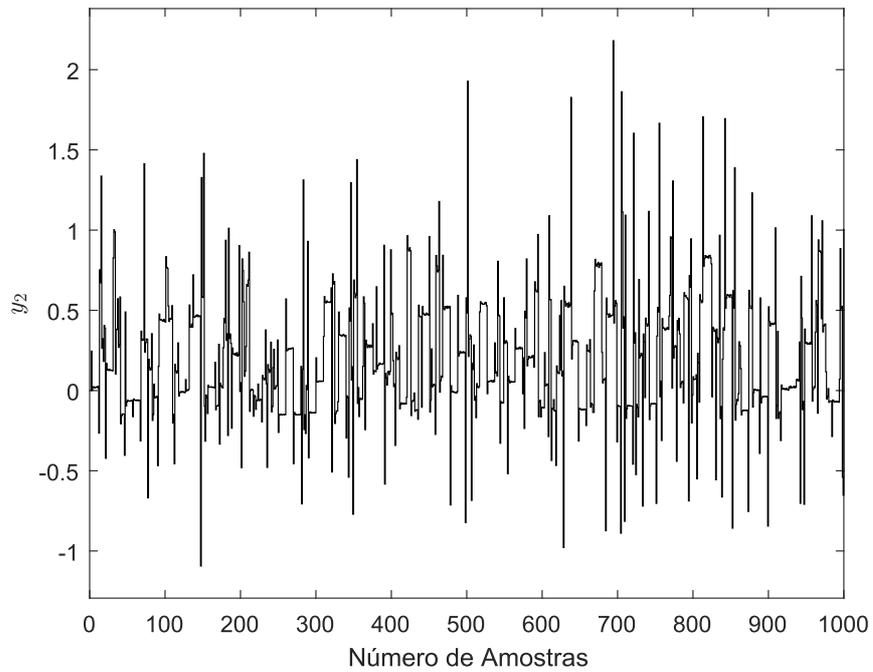
Fonte: Autor.

Figura 43 – Conjunto de dados de saída usado para identificação: (a) saída y_1 (b) saída y_2 .

(a) y_1

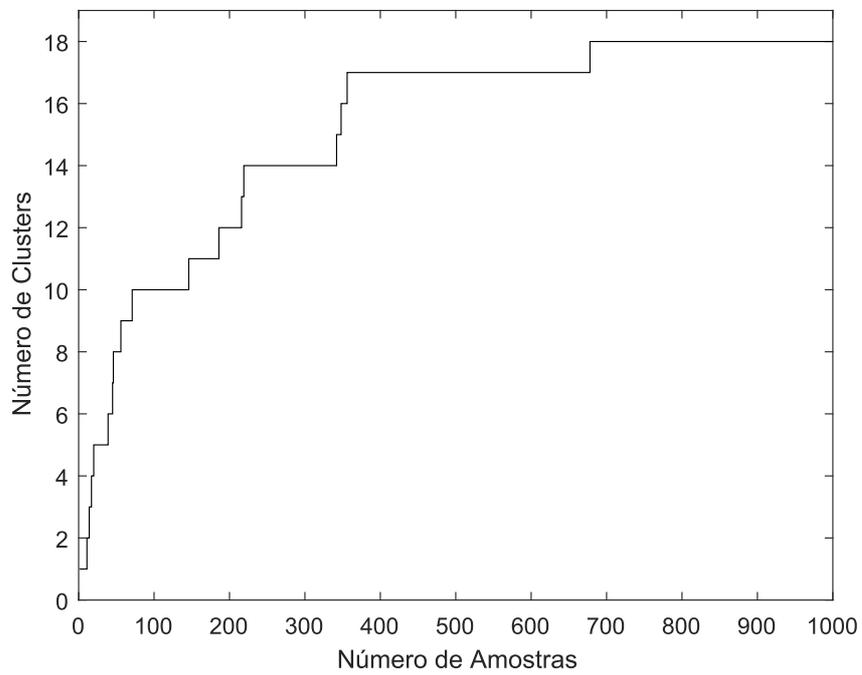


(b) y_2



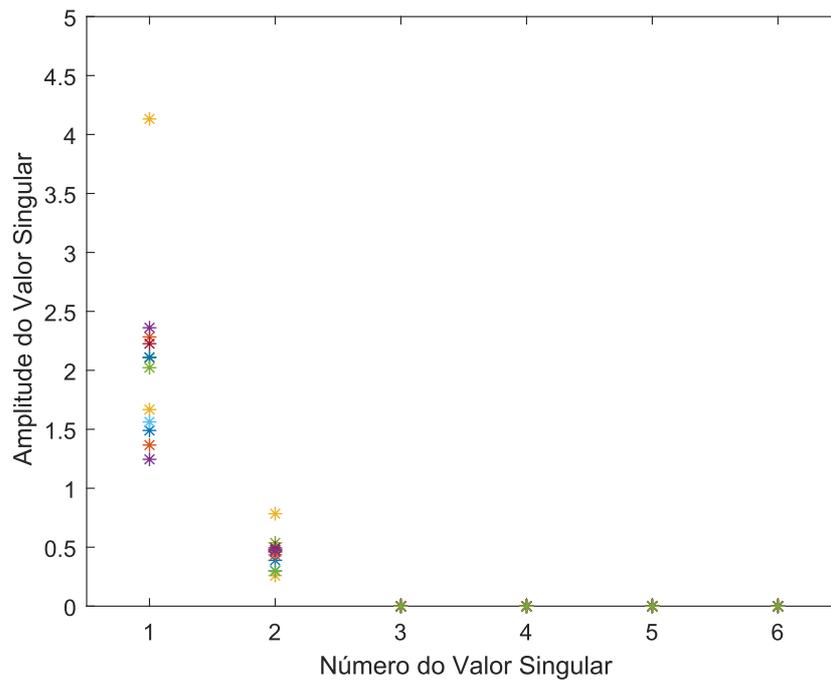
Fonte: Autor.

Figura 44 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.



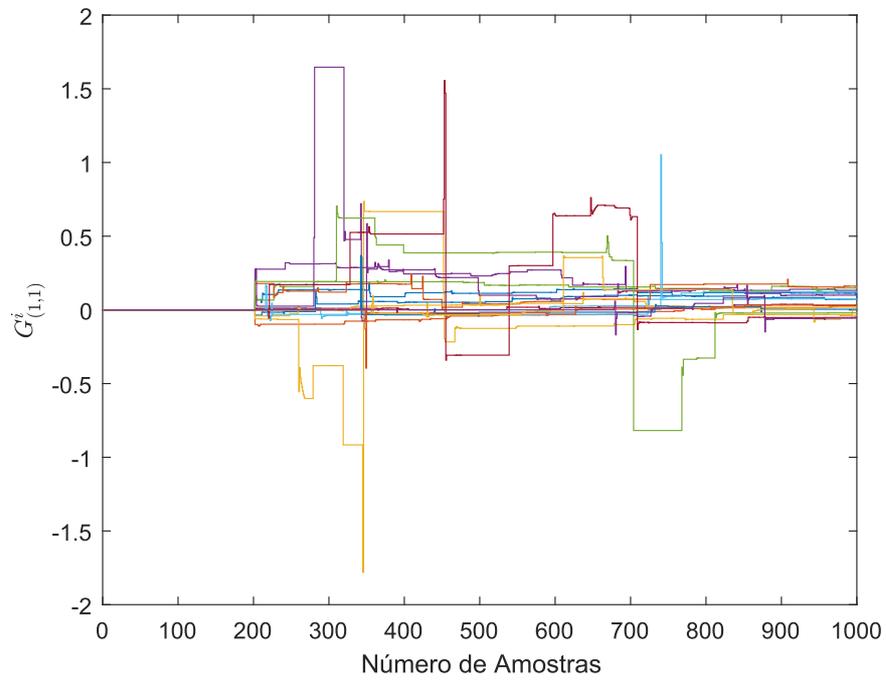
Fonte: Autor.

Figura 45 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa $H_0^{i|i=1,\dots,11}$ construída com as 200 amostras de inicialização do algoritmo.



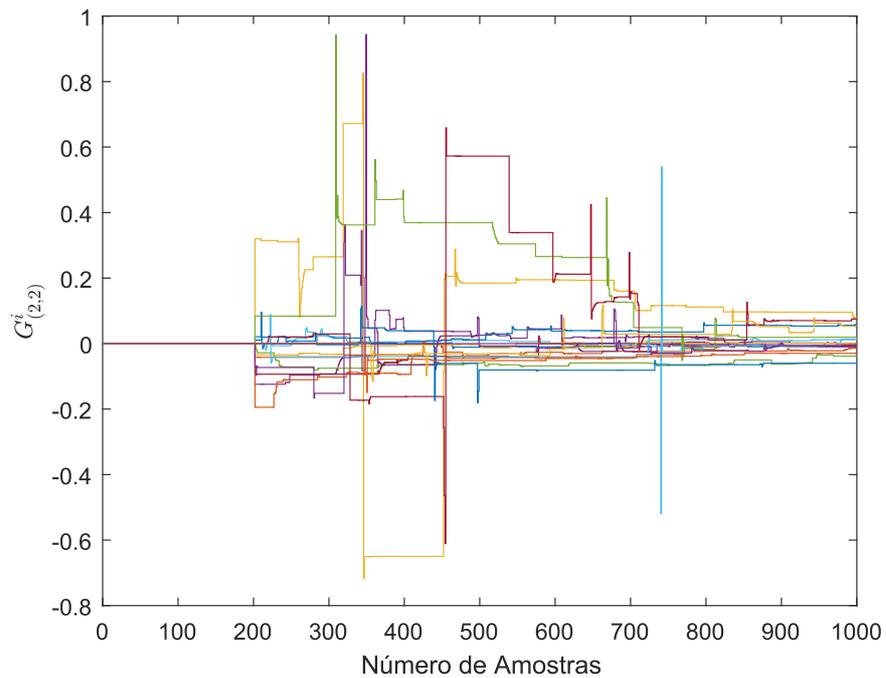
Fonte: Autor.

Figura 46 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal (1, 1).



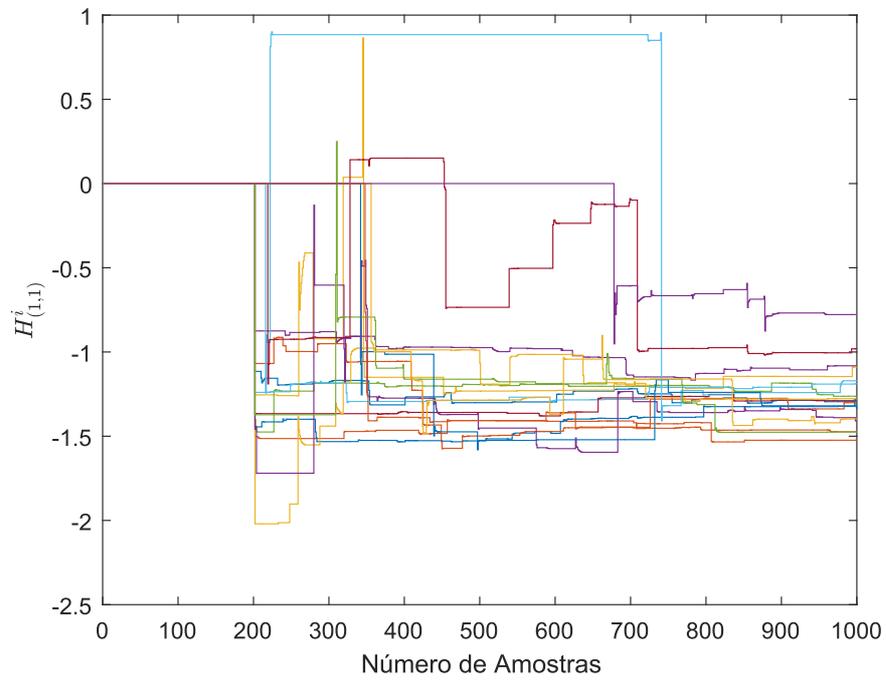
Fonte: Autor.

Figura 47 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal (2, 2).



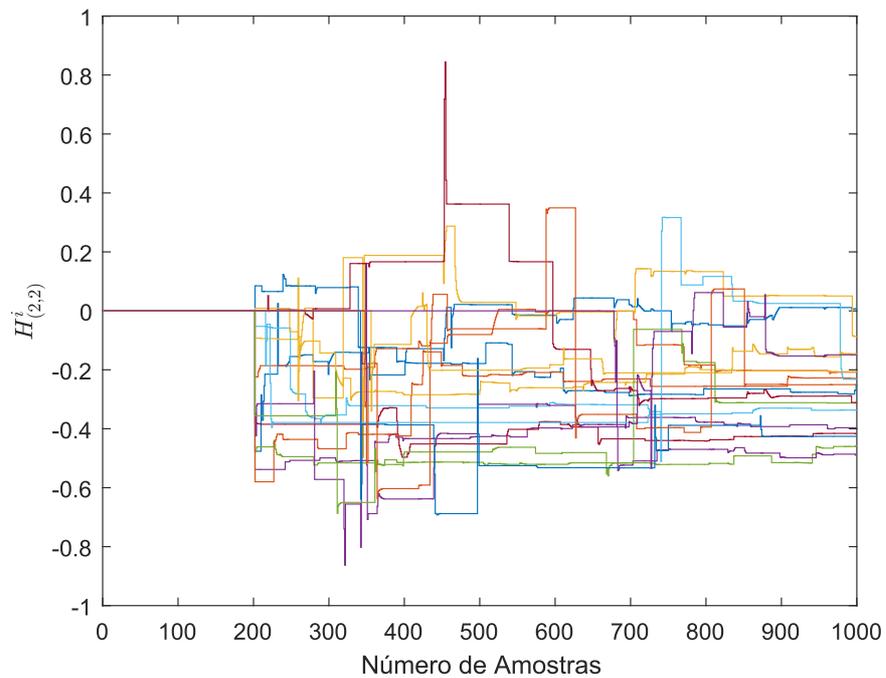
Fonte: Autor.

Figura 48 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i : elemento da diagonal principal (1, 1).



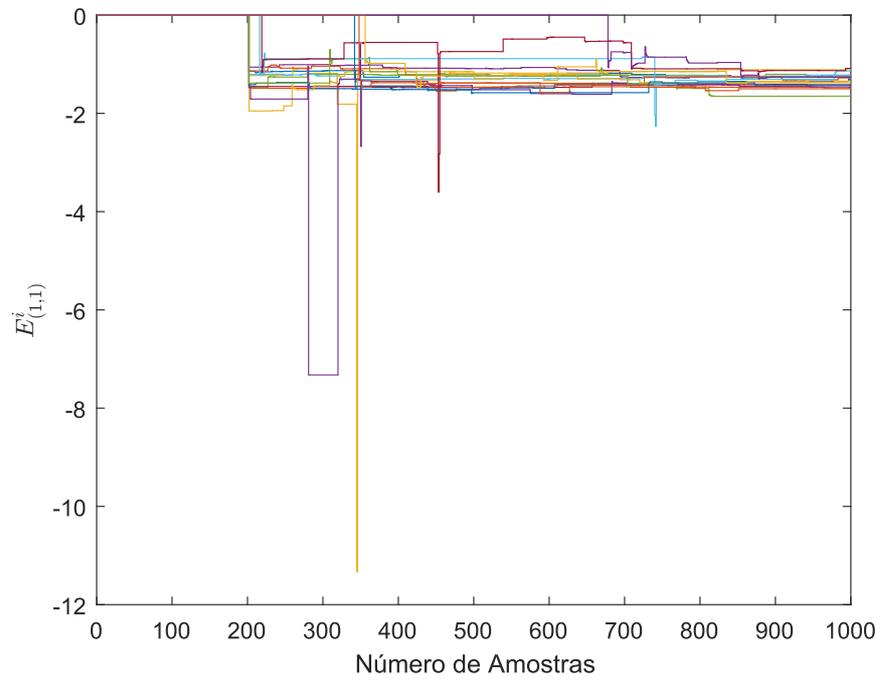
Fonte: Autor.

Figura 49 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros H^i : elemento da diagonal principal (2, 2).



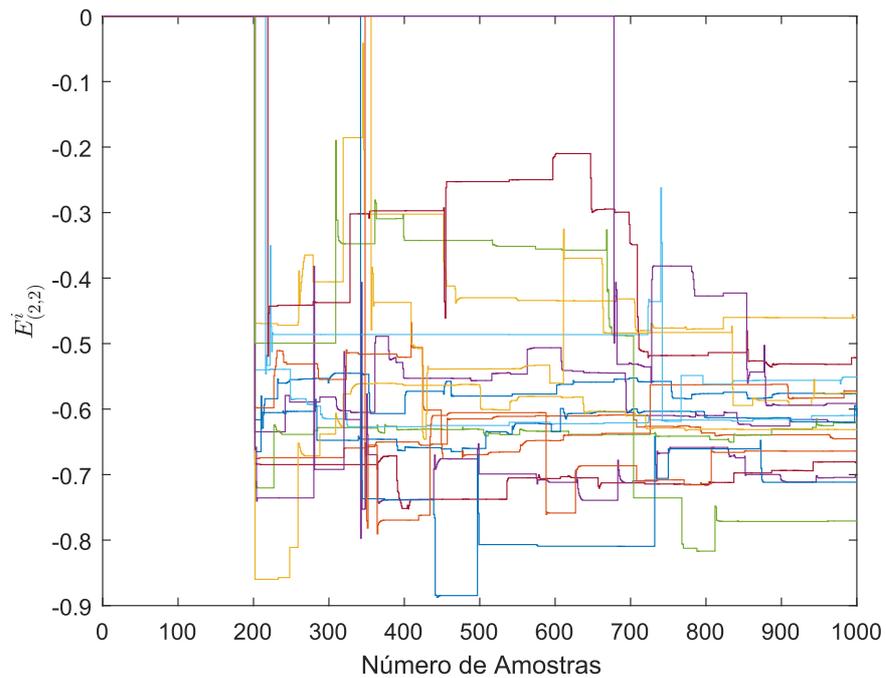
Fonte: Autor.

Figura 50 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i : elemento da diagonal principal (1, 1).



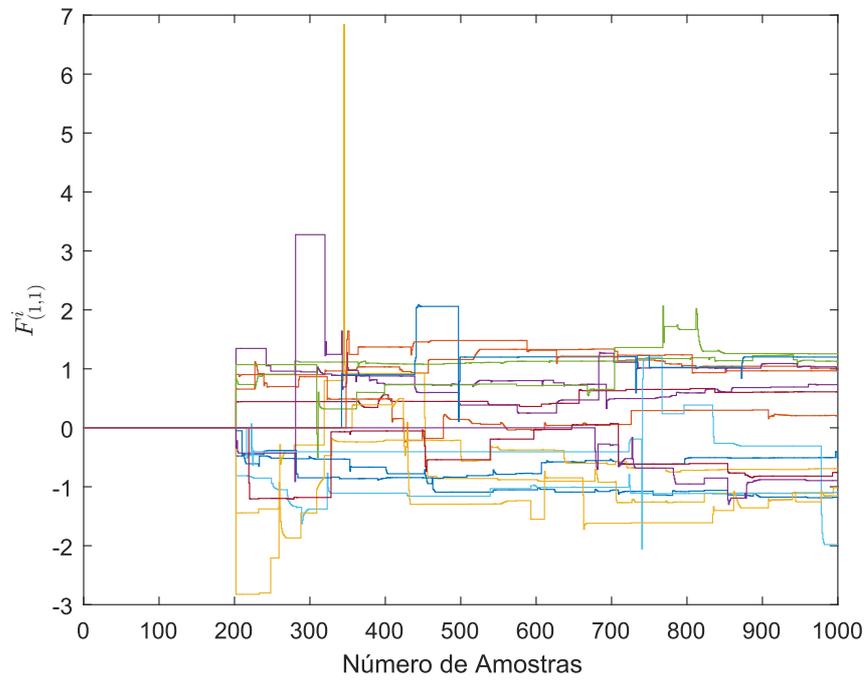
Fonte: Autor.

Figura 51 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros E^i : elemento da diagonal principal (2, 2).



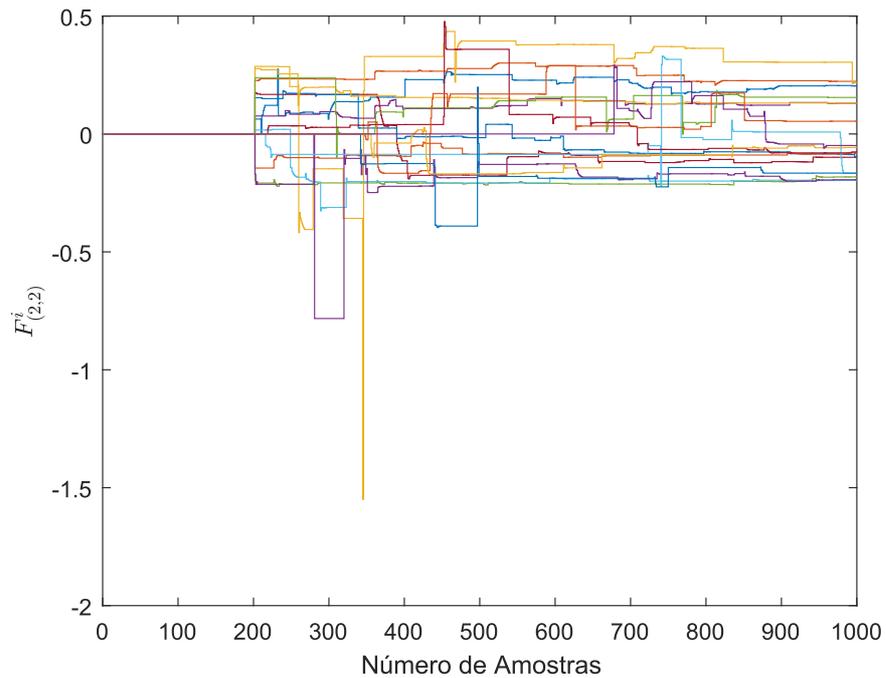
Fonte: Autor.

Figura 52 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i : elemento da diagonal principal (1, 1).



Fonte: Autor.

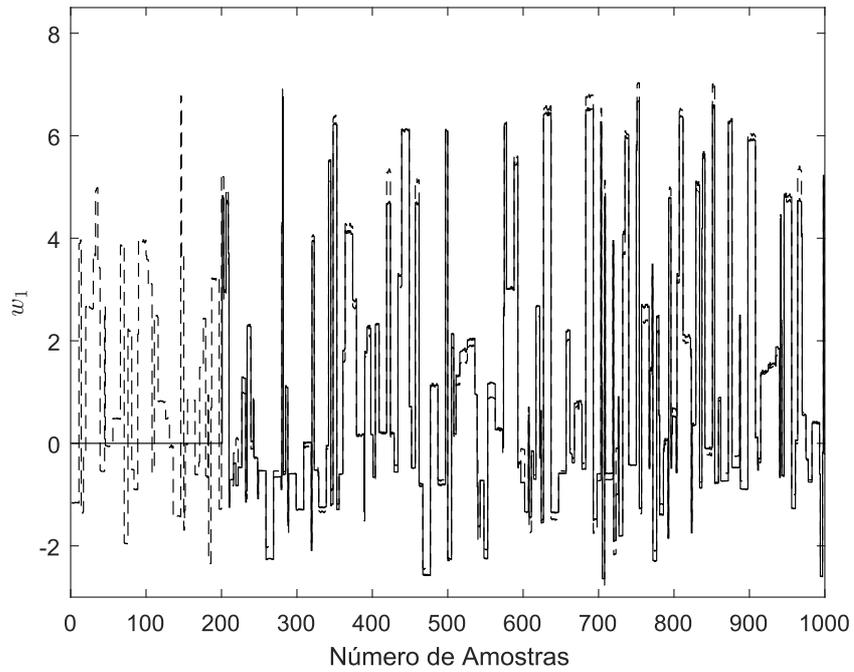
Figura 53 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros F^i : elemento da diagonal principal (2, 2).



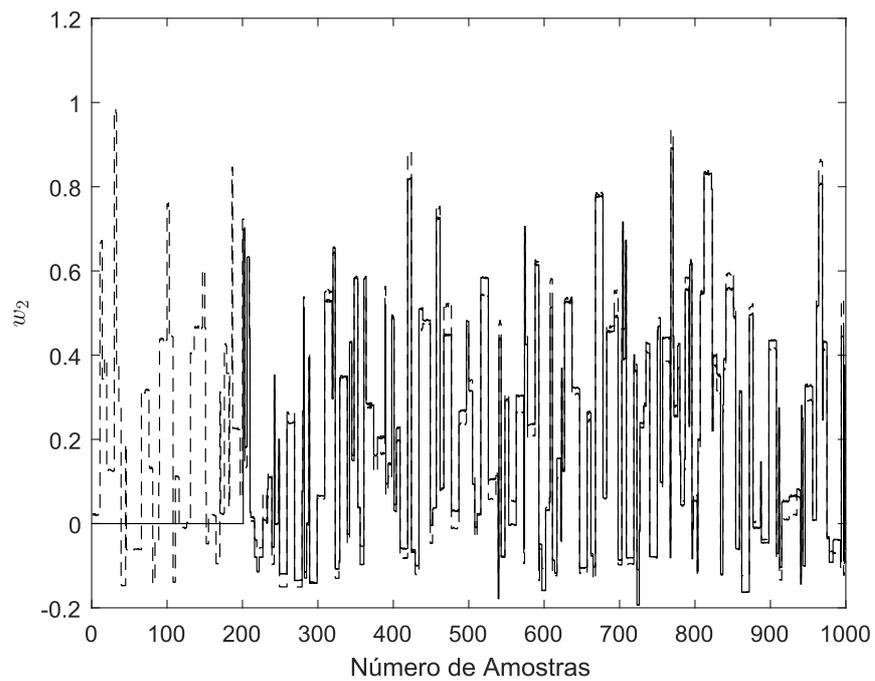
Fonte: Autor.

Figura 54 – Sinal intermediário w_k estimado: (a) linha tracejada - sinal w_1 esperado calculado pela função estática não linear real e linha sólida - sinal w_1 estimado recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) linha tracejada - sinal w_2 esperado calculado pela função estática não linear real e linha sólida - sinal w_2 estimado recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.

(a) w_1



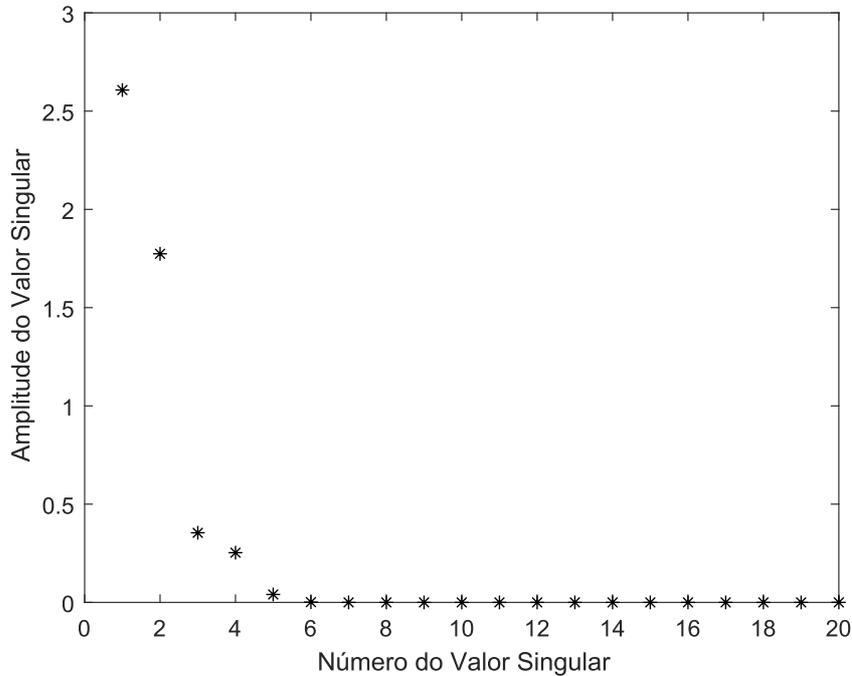
(b) w_2



Fonte: Autor.

e o sinal de saída y_k , apresentados na Figura 55, a ordem mínima do modelo dinâmico linear é definida como $n = 4$. A estimação recursiva das matrizes de parâmetros A , B , C e D é apresentada nas Figuras 56-59.

Figura 55 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear multivariável.



Fonte: Autor.

Os resultados de predição e validação do modelo de Hammerstein multivariável nebuloso evolutivo e seus respectivos erros são exibidos nas Figuras 60 e 61, respectivamente. A validação da não linearidade estática é ilustrada na Figura 62.

Os valores de MSE e FIT para treinamento e validação obtidos pela metodologia proposta nesta dissertação são apresentados Tabela 3.

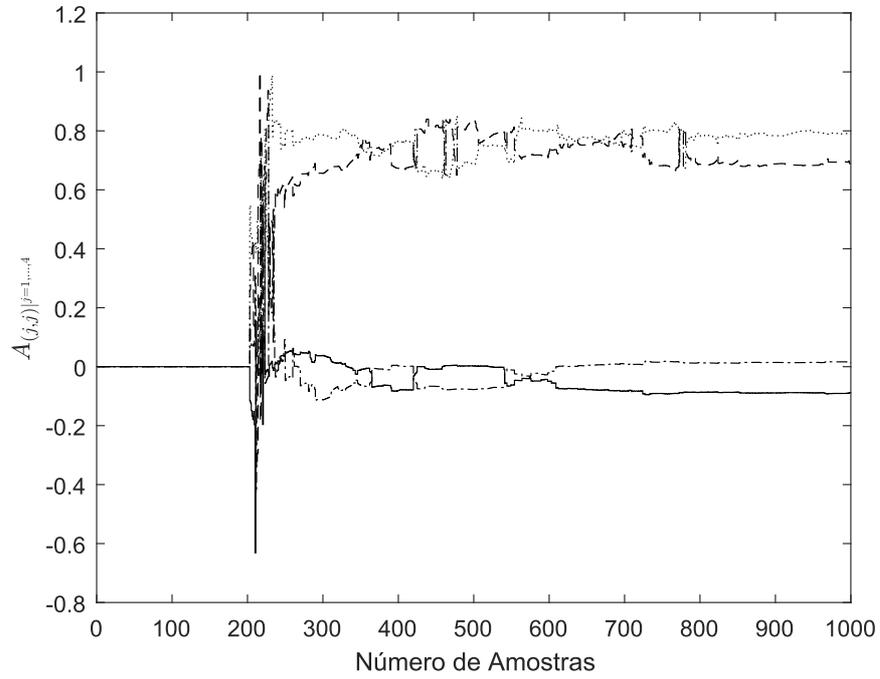
Tabela 3 – Resultados computacionais da metodologia nebulosa evolutiva proposta obtidos na identificação de um sistema não linear multivariável.

Saída	MSE^*	MSE^+	FIT^*	FIT^+
y_1	0,0377	0,0602	92,34%	89,75%
y_2	0,0015	0,0021	90,18%	87,48%

* Treinamento.

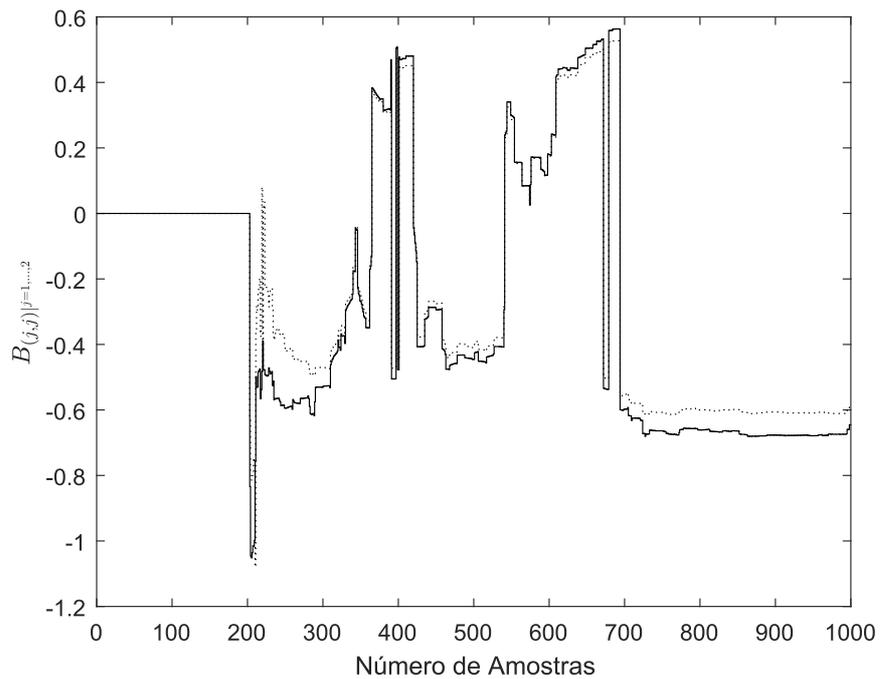
+ Validação.

Figura 56 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros A



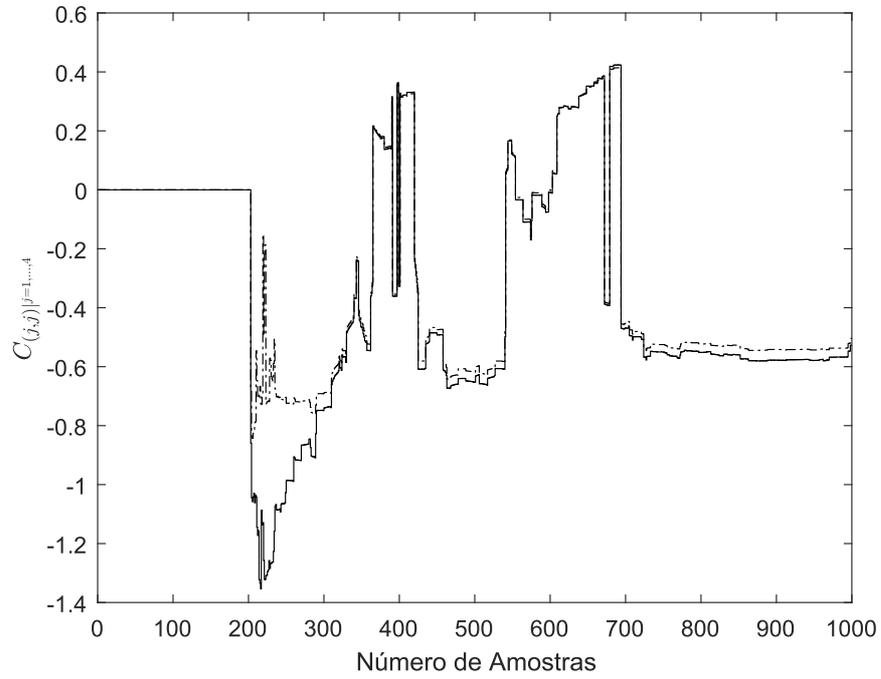
Fonte: Autor.

Figura 57 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros B



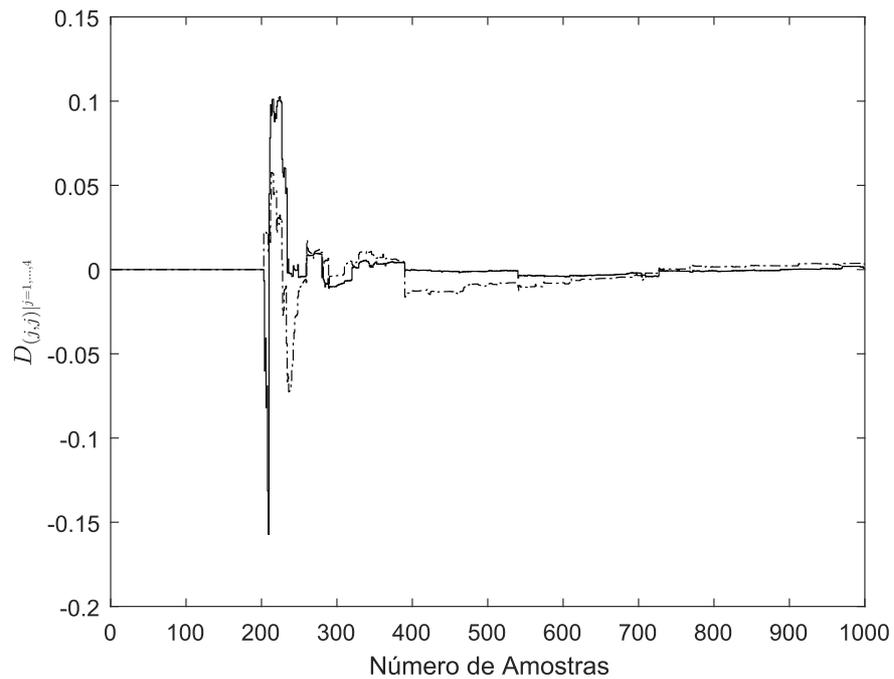
Fonte: Autor.

Figura 58 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros C



Fonte: Autor.

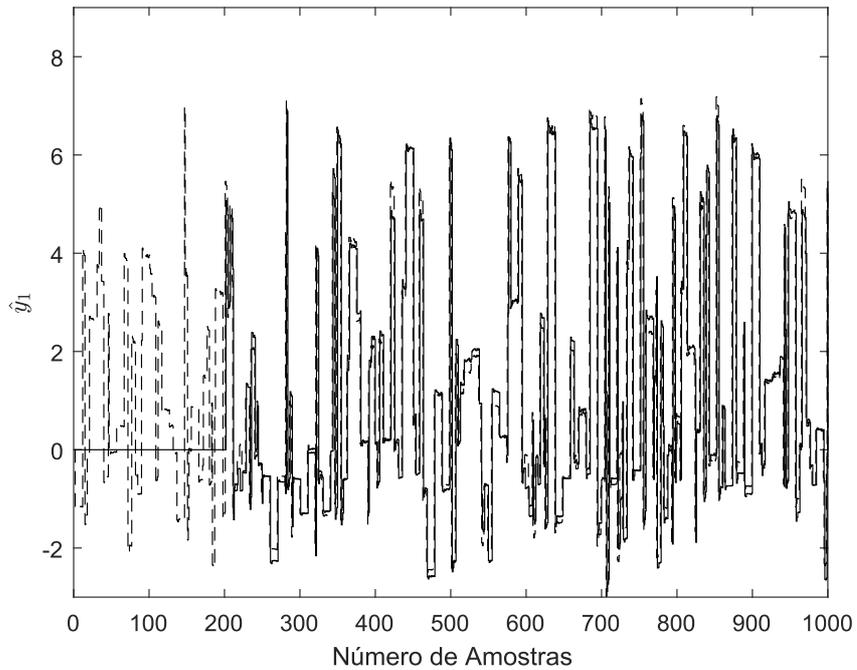
Figura 59 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros do modelo dinâmico linear multivariável no espaço de estados: matriz de parâmetros D



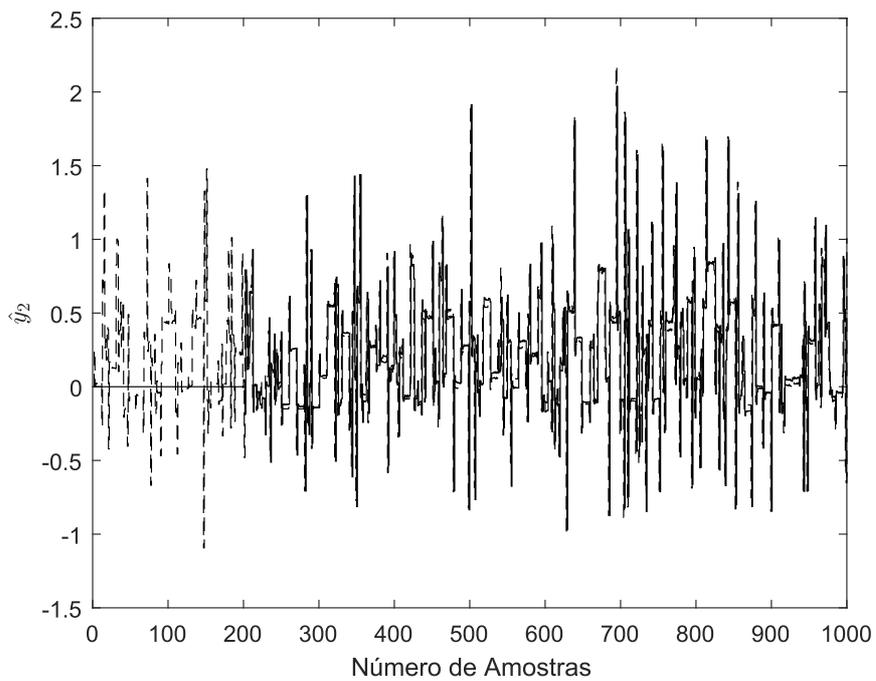
Fonte: Autor.

Figura 60 – Saída estimada durante treinamento: (a) linha tracejada - saída real y_1 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_1 estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) linha tracejada - saída real y_2 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_2 estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.

(a) y_1 treinamento



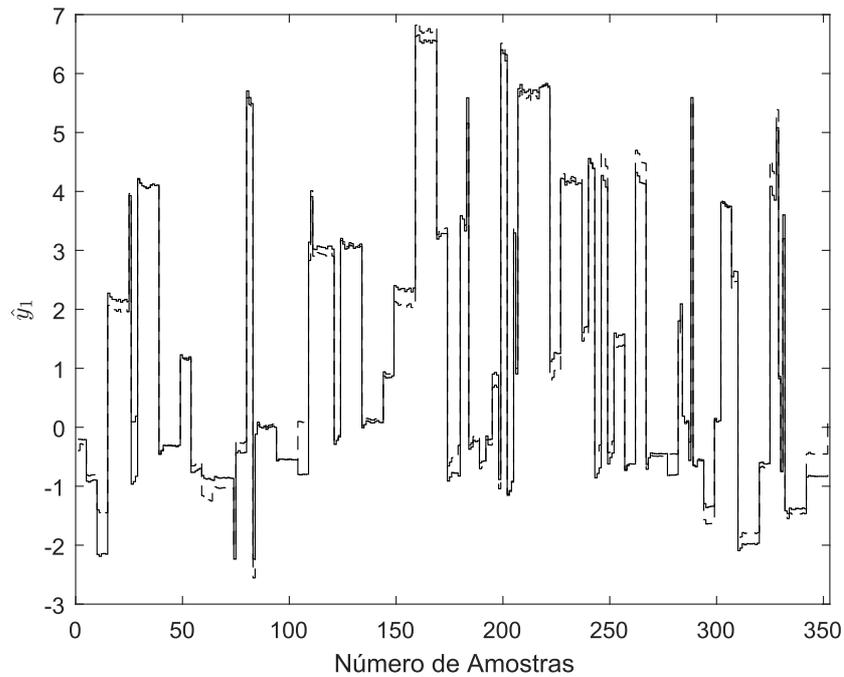
(b) y_2 treinamento



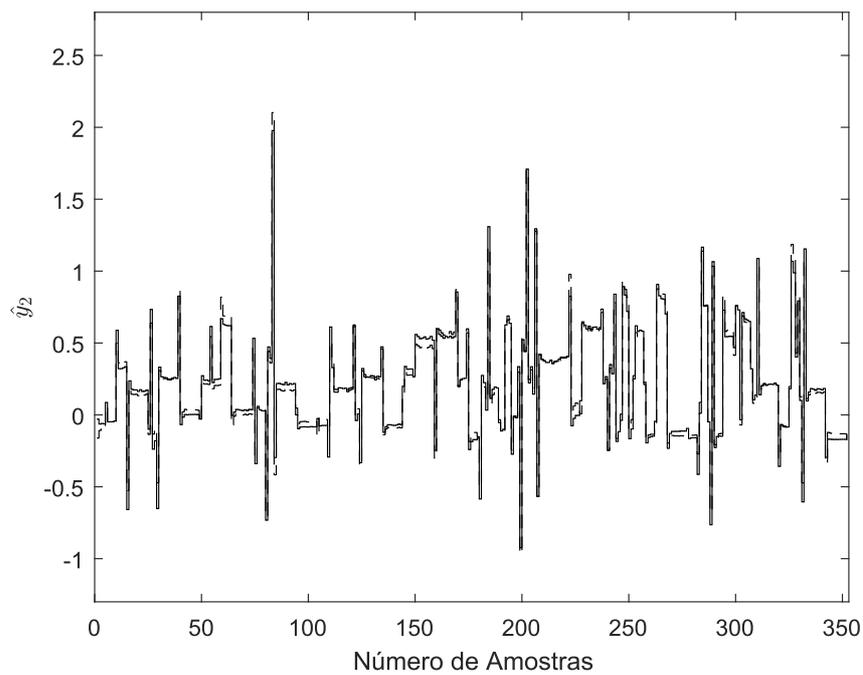
Fonte: Autor.

Figura 61 – Saída com dados de validação: (a) linha tracejada - saída real y_1 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_1 do modelo obtido pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) linha tracejada - saída real y_2 do sistema dinâmico e linha sólida - saída \hat{y}_2 do modelo obtido pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.

(a) y_1 validação



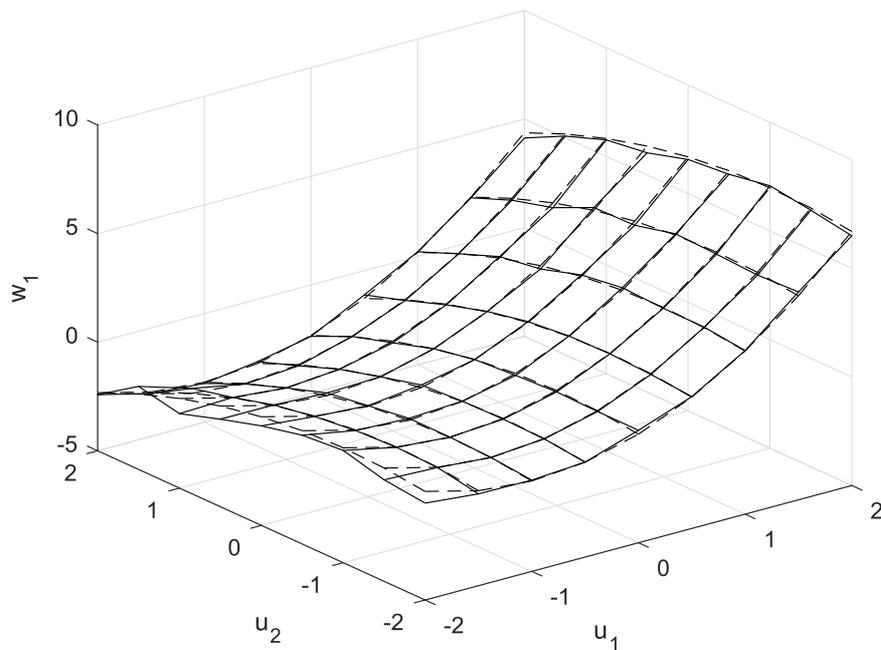
(b) y_2 validação



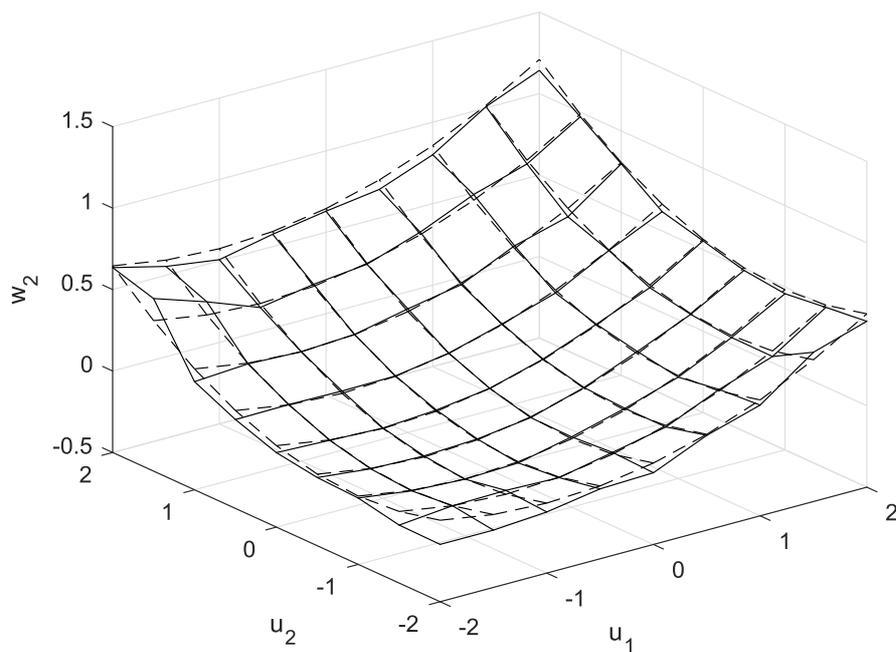
Fonte: Autor.

Figura 62 – Curva estática: (a) não linearidade das entradas u_1 e u_2 para a saída w_1 - linha tracejada representa a não linearidade estática real e a linha sólida é a não linearidade estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta; (b) não linearidade das entradas u_1 e u_2 para a saída w_2 - linha tracejada representa a não linearidade estática real e a linha sólida é a não linearidade estimada pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.

(a) Curva estática w_1



(b) Curva estática w_2

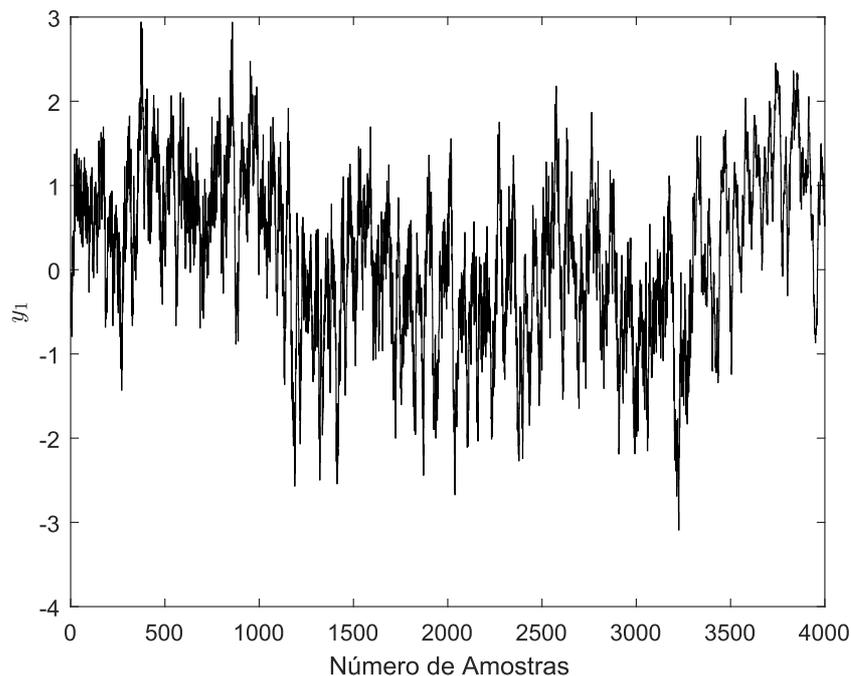


Fonte: Autor.

4.4 Experimento 4 - Identificação do Processo de um Evaporador Multivariável

Nesta seção, a identificação de um sistema dinâmico não linear experimental baseada na metodologia nebulosa evolutiva proposta é apresentada. O sistema dinâmico considerado neste caso é um processo evaporador de quatro estágios aplicado na redução do teor de água de um produto. Este sistema dinâmico industrial é modelado com três entradas e três saídas e foi aplicado como *benchmark* em (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014). As três entradas são fluxo de alimentação u_1 , fluxo de vapor para o primeiro estágio de vaporização u_2 e fluxo de água de resfriamento u_3 . As três saídas são o conteúdo de matéria seca y_1 , o fluxo y_2 e a temperatura y_3 do produto emergente. Mais informações sobre o sistema dinâmico e os distúrbios que influenciam suas saídas podem ser encontrados em (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014). Os dados de entrada e saída foram coletados aplicando-se sequências de entradas binárias pseudo-aleatórias (PRBS) ao sistema dinâmico. Um conjunto de dados com 6000 amostras foi coletado. Uma parte desses dados com 4000 amostras, ilustradas nas Figuras 63-65, é utilizada para o treinamento do modelo de Hammerstein nebuloso multivariável.

Figura 63 – Conjunto de dados usado para identificação: saída y_1 .

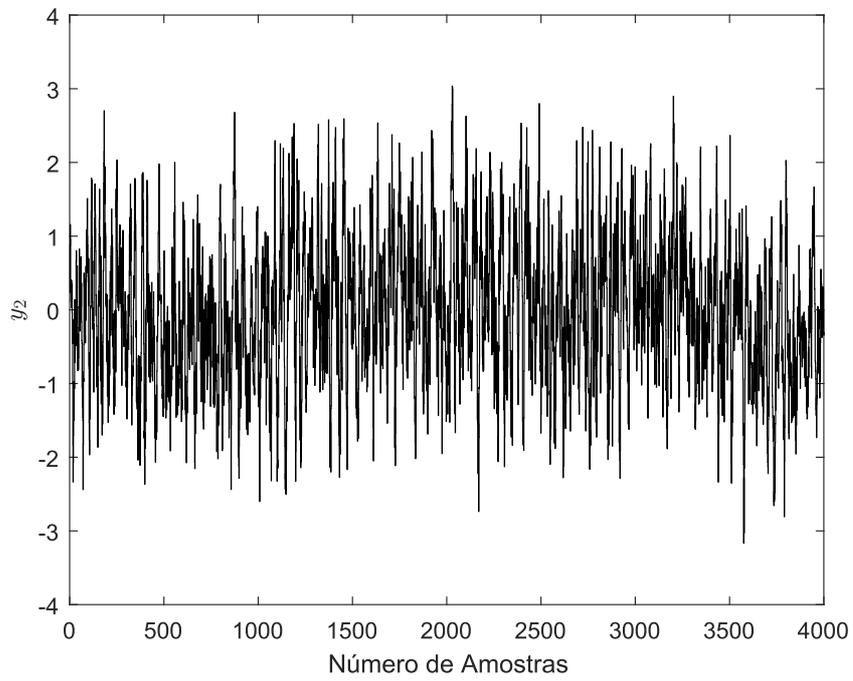


Fonte: Autor.

O algoritmo de identificação nebulosa evolutiva foi implementado considerando-se os seguintes parâmetros de projeto:

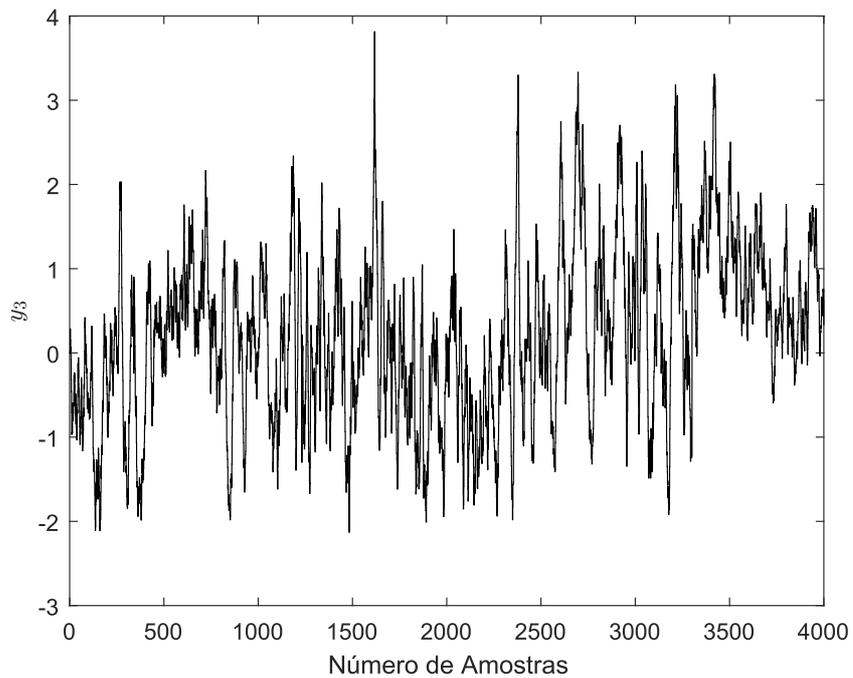
- $N = 1000$;
- $f_{ac} = 0,35$;

Figura 64 – Conjunto de dados usado para identificação: saída y_2 .



Fonte: Autor.

Figura 65 – Conjunto de dados usado para identificação: saída y_3



Fonte: Autor.

- $g_{inicial} = 0,02$;
- $q_f = 5$;
- $\alpha_f = 15$;
- $\beta_f = 30$;
- $\lambda_l = 0,98$
- $q_l = 6$;
- $\alpha_l = 30$;
- $\beta_l = 60$.

4.4.1 Estimação Paramétrica Evolutiva da Não Linearidade Estática

A parametrização da não linearidade estática do sistema dinâmico considerado neste estudo de caso tem sua regra nebulosa generalizada dada por:

$$\begin{aligned}
 R^i : \mathbf{SE} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k &= [u_{k-1,1} \quad u_{k-1,2} \quad u_{k-1,3} \quad y_{k-1,1} \quad y_{k-1,2} \quad y_{k-1,3}] \quad \mathbf{E} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k^{i*} = [u_1^{i*} \quad u_2^{i*} \quad u_3^{i*} \quad y_1^{i*} \quad y_2^{i*} \quad y_3^{i*}] \\
 \text{ENTÃO} \quad \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= (E^i(I - G^i)^{-1}H^i + F^i)\mathbf{u}_k
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

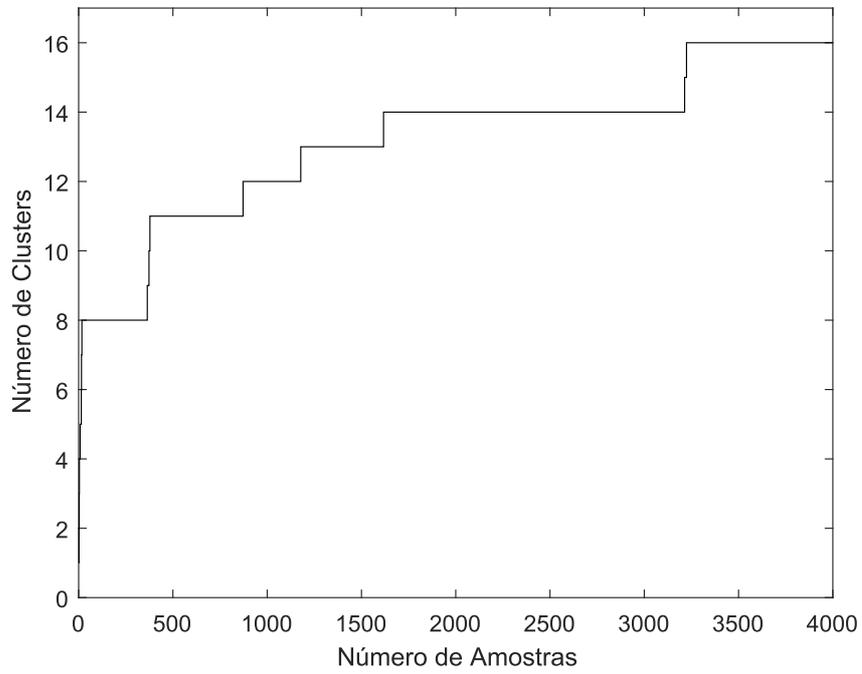
Na identificação do processo do evaporador, baseado no modelo de Hammerstein, uma etapa é referente à parametrização da não linearidade estática e uma segunda etapa é referente à estimação do modelo linear no espaço de estados. A evolução do número de regras, durante o treinamento do sistema de inferência nebuloso TS evolutivo, é ilustrada na Figura 66, onde pode-se ver que durante inicialização do algoritmo, com as 1000 primeiras amostras, foram criadas 11 regras e o modelo final apresenta 16 regras.

A ordem mínima dos submodelos locais no espaço de estados é definida analisando-se o número de valores singulares significativos da Figura 67. Conseqüentemente, os submodelos no espaço de estados apresentam ordem mínima $s = 7$. A estimação recursiva das matrizes de estado G^i , H^i , E^i e F^i , representada pelos elementos da diagonal principal da matriz $G^{i|i=1,\dots,16}$, é exibida nas Figuras 68-74.

4.4.2 Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear

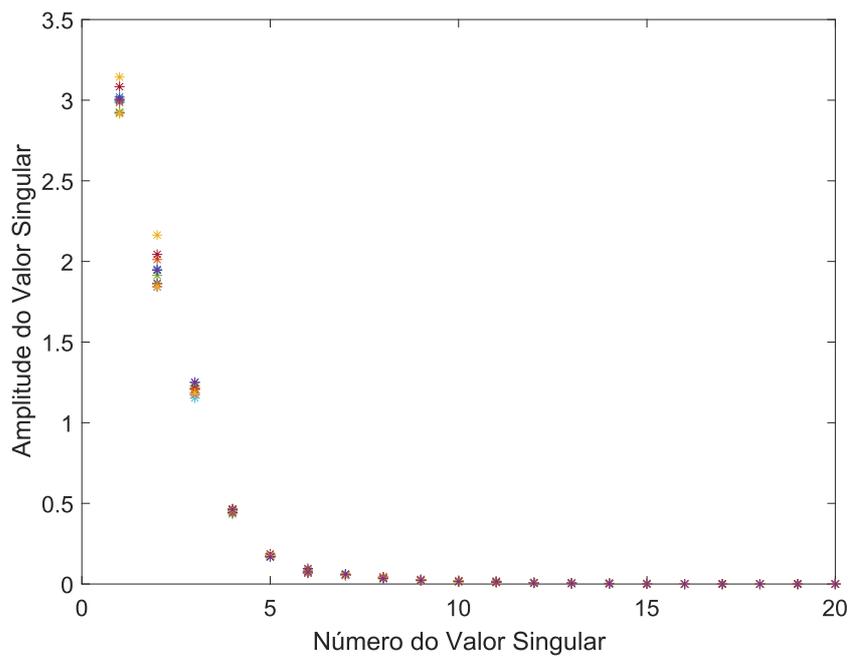
Considerando-se a etapa de parametrização do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein nebuloso no espaço de estados, os valores singulares mais significativos da matriz de Hankel Π_0 são apresentados na Figura 75. Com base no que já foi dito, a ordem mínima do modelo dinâmico linear é definida como $n = 8$. A variação paramétrica das matrizes de estados A , B , C e D é ilustrada nas Figuras 76-79.

Figura 66 – Evolução do número de regras durante treinamento do modelo nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo.



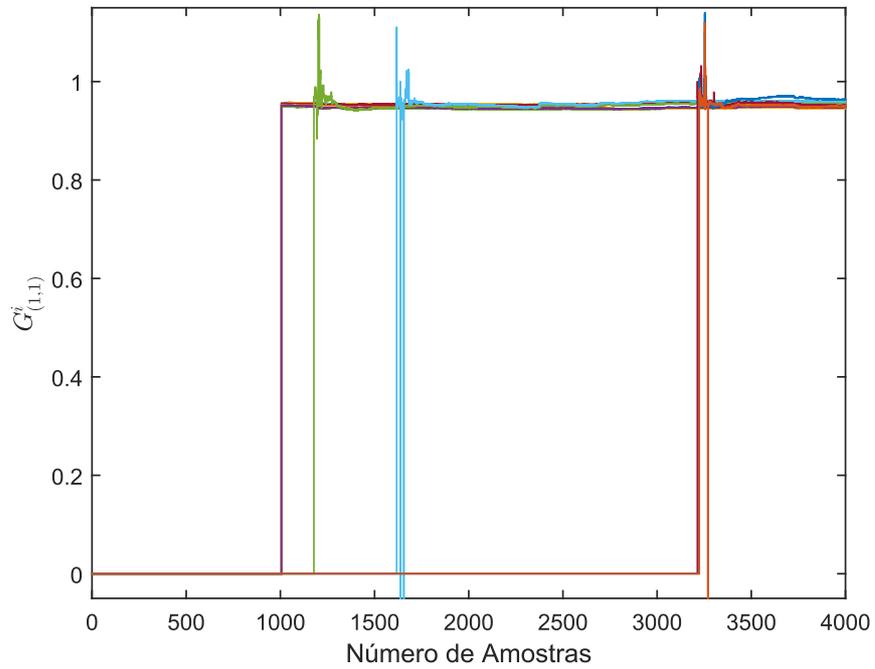
Fonte: Autor.

Figura 67 – Valores singulares da matriz de Hankel nebulosa.



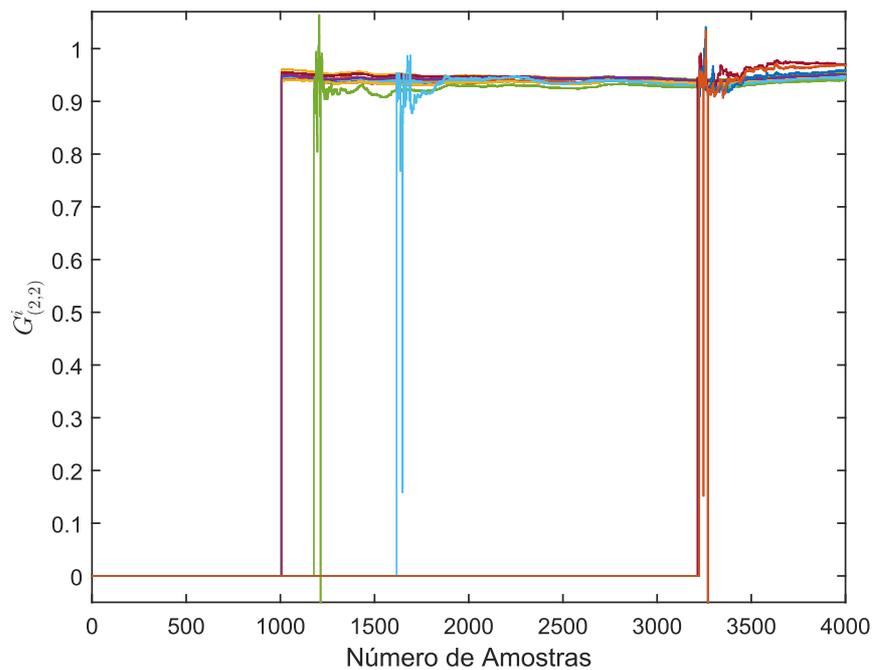
Fonte: Autor.

Figura 68 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(1, 1)$.



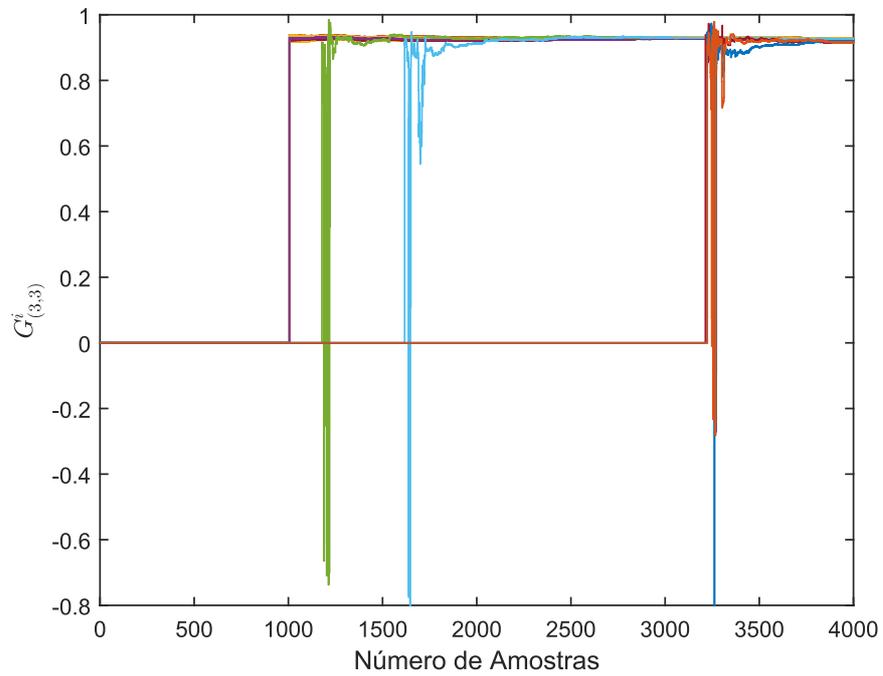
Fonte: Autor.

Figura 69 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(2, 2)$.



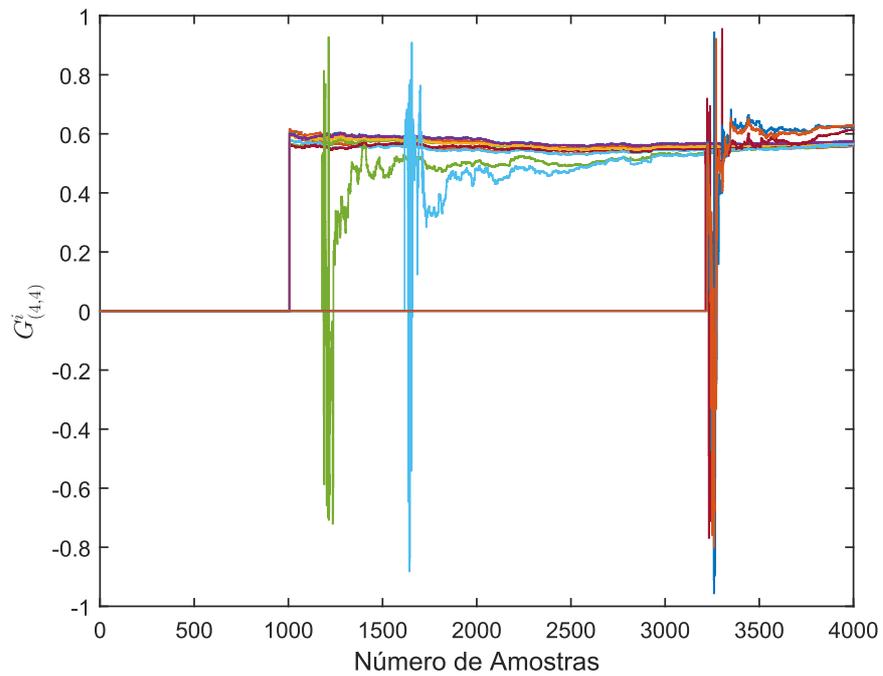
Fonte: Autor.

Figura 70 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(3,3)$.



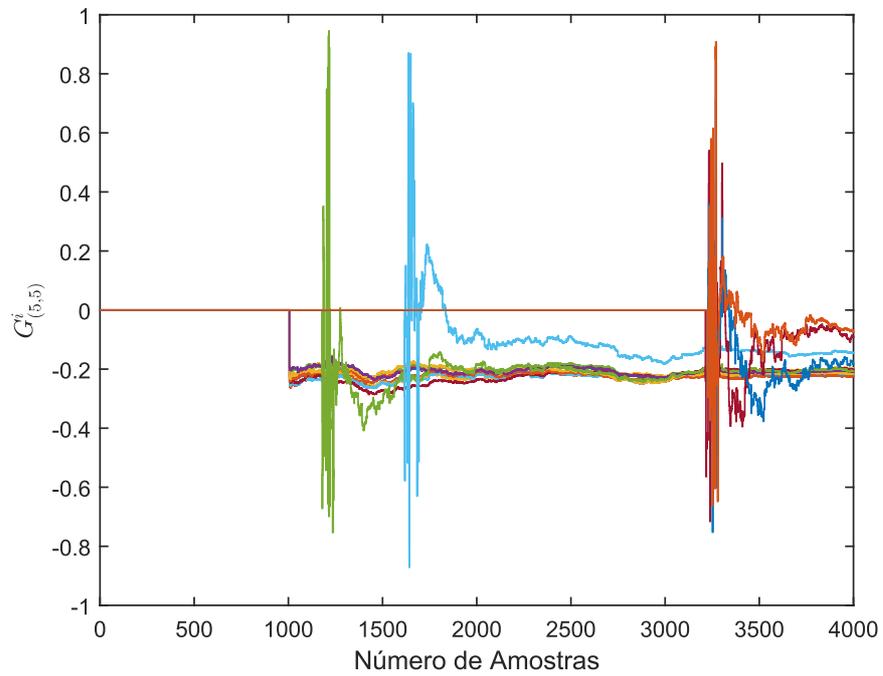
Fonte: Autor.

Figura 71 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(4,4)$.



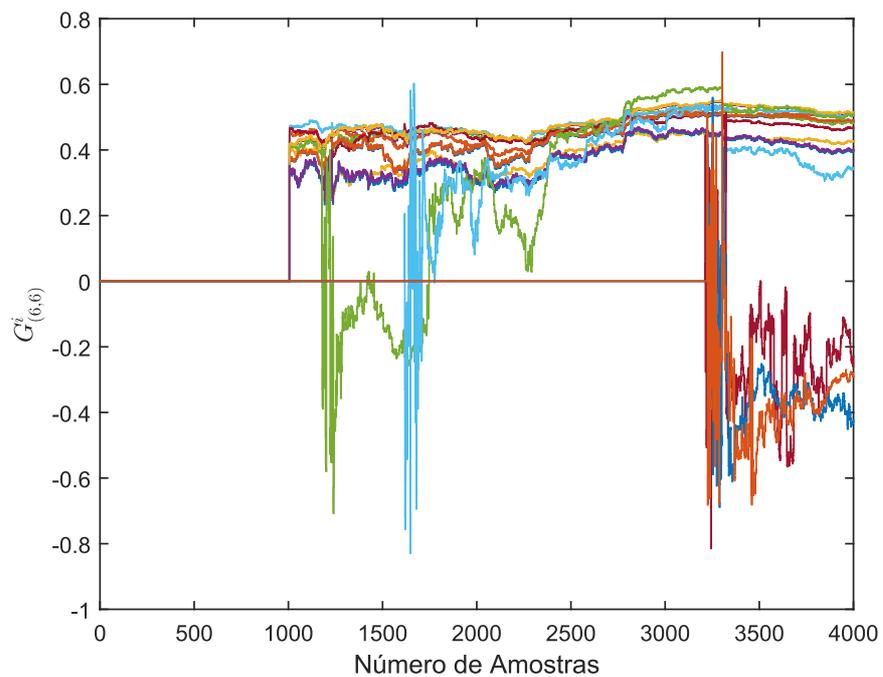
Fonte: Autor.

Figura 72 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(5,5)$.



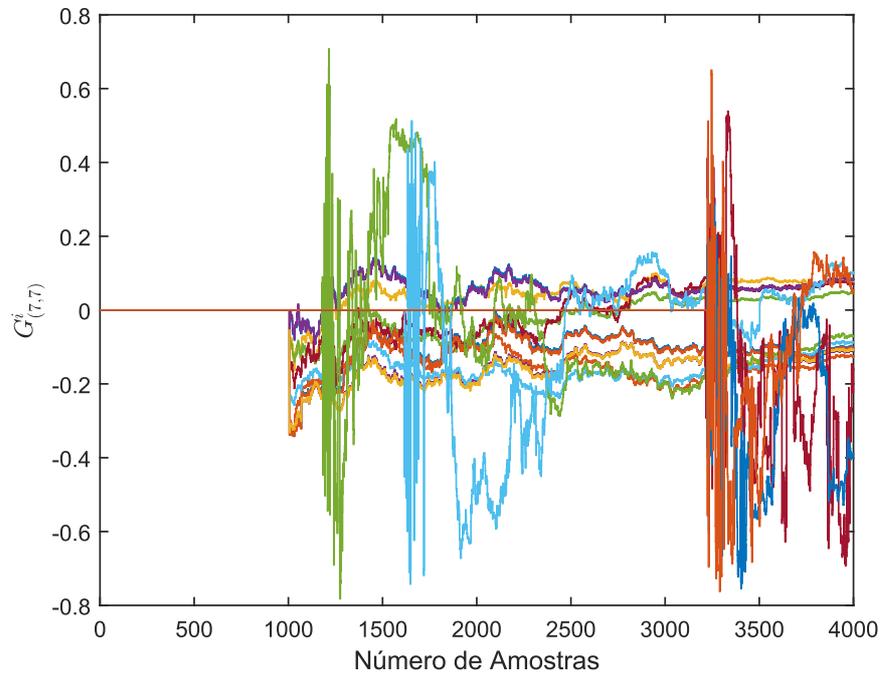
Fonte: Autor.

Figura 73 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(6,6)$.



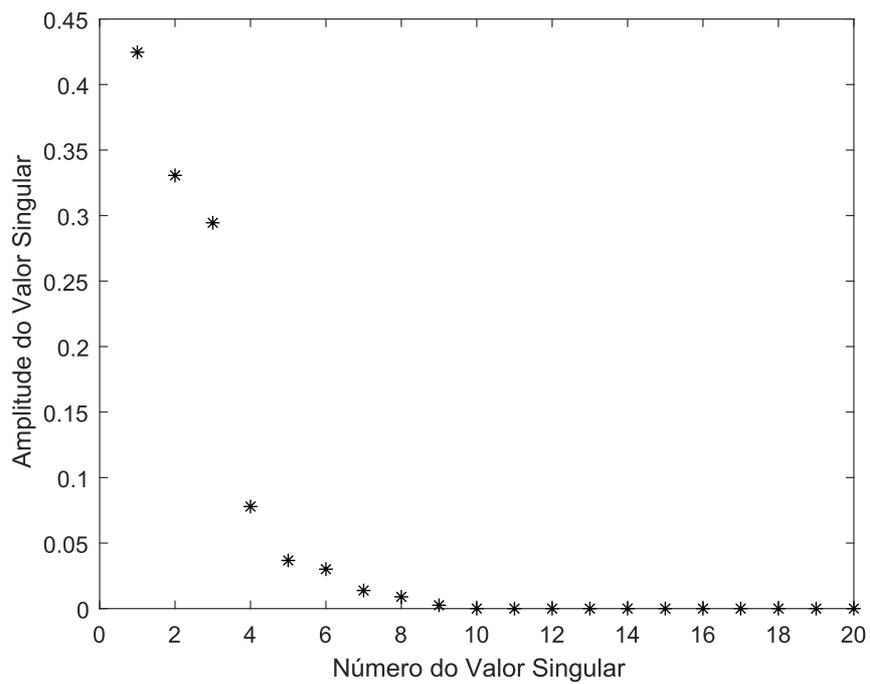
Fonte: Autor.

Figura 74 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros G^i : elemento da diagonal principal $G^i(7,7)$.



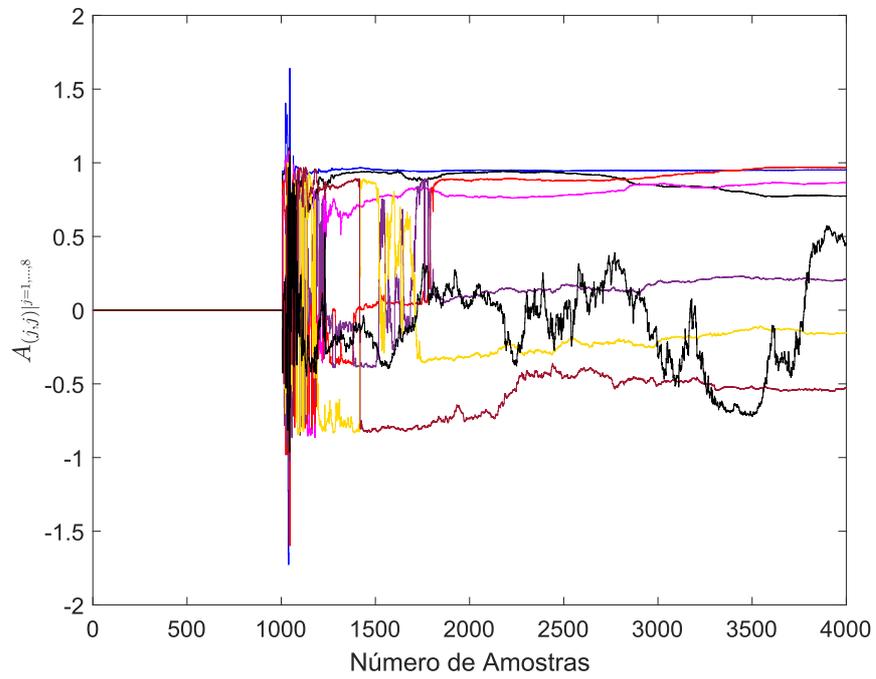
Fonte: Autor.

Figura 75 – Valores singulares da matriz de Hankel Π_0 do modelo dinâmico linear multivariável.



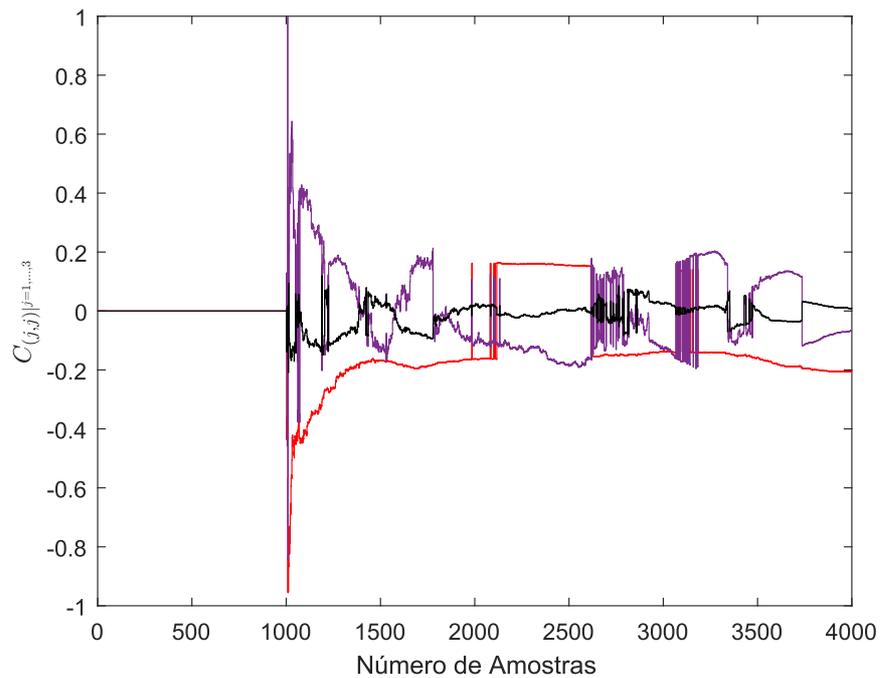
Fonte: Autor.

Figura 76 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros A : elementos da diagonal principal da matriz A .



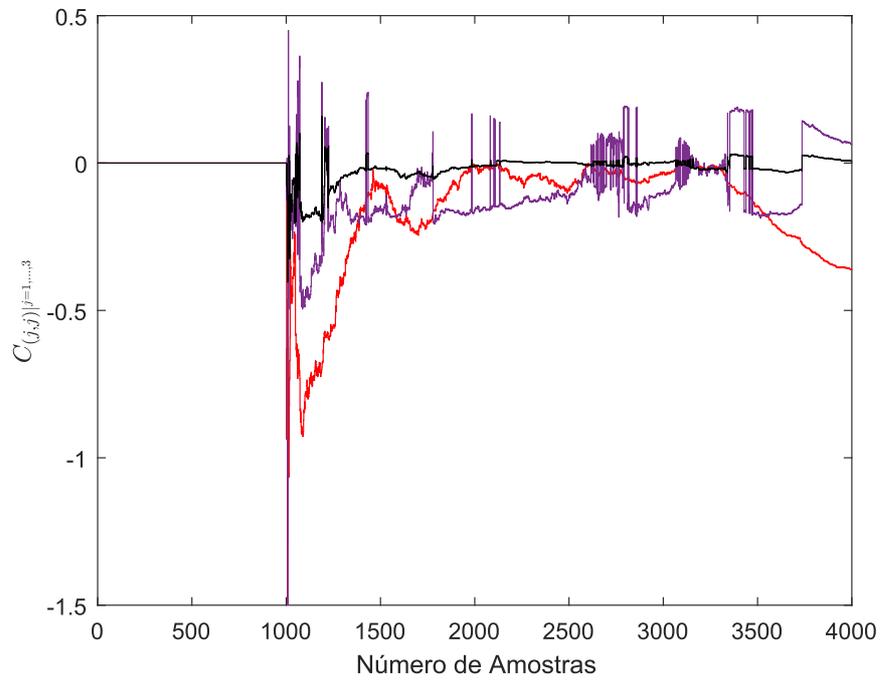
Fonte: Autor.

Figura 77 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros B : elementos $B_{(j,j)}$ da matriz B , com $j = [1, \dots, 3]$.



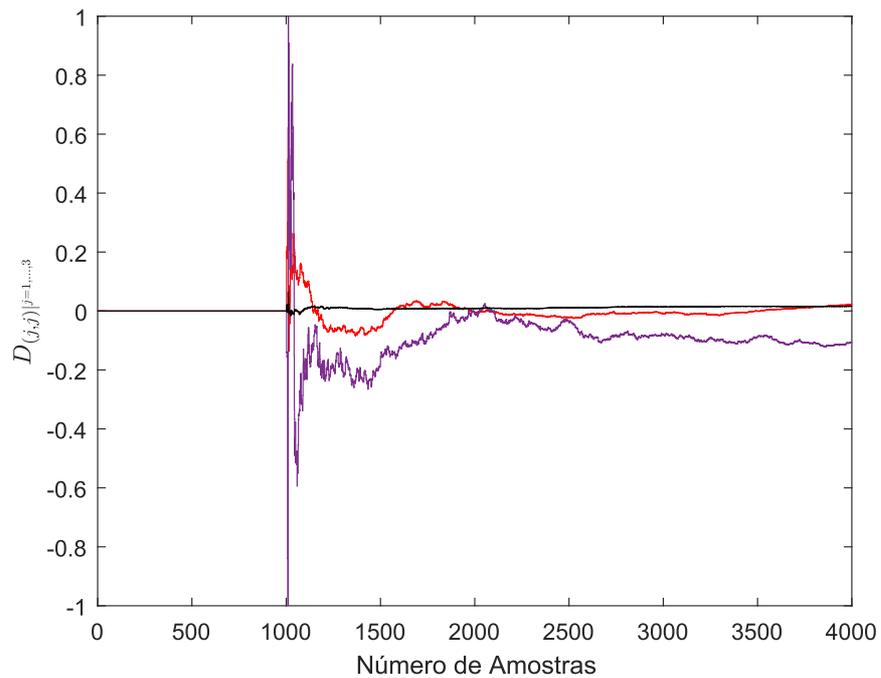
Fonte: Autor.

Figura 78 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros C : elementos $C_{(j,j)}$ da matriz C , com $j = [1, \dots, 3]$.



Fonte: Autor.

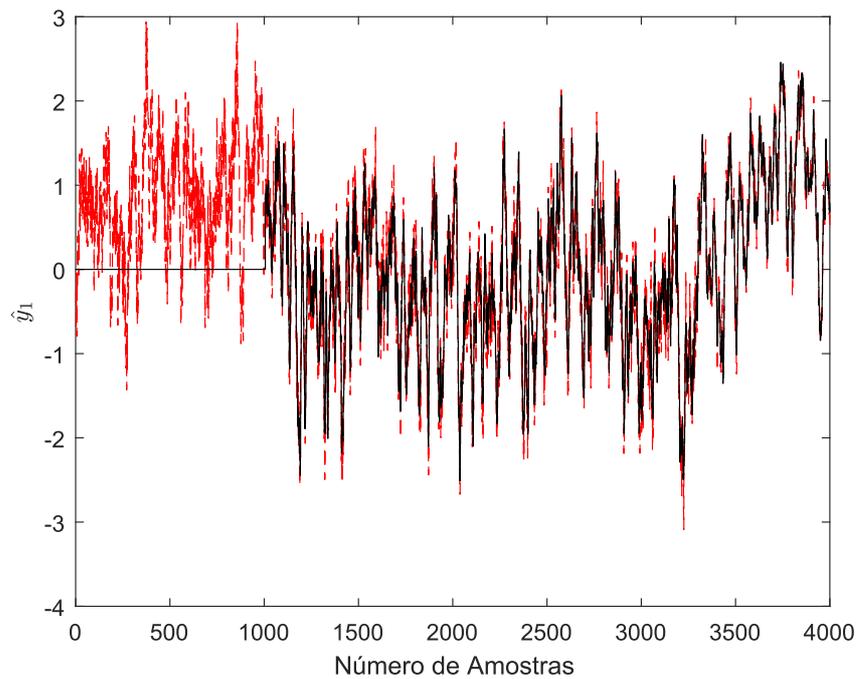
Figura 79 – Estimação recursiva da matriz de parâmetros D : elementos da diagonal principal da matriz D .



Fonte: Autor.

Os resultados de treinamento e validação do modelo de Hammerstein nebuloso evolutivo multivariável são exibidos nas Figuras 80-85. Os valores de MSE e FIT, para treinamento e validação, obtidos pela metodologia nebulosa evolutiva proposta nesta dissertação, são apresentados Tabela 4.

Figura 80 – Saída y_1 estimada durante treinamento: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida preta - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



Fonte: Autor.

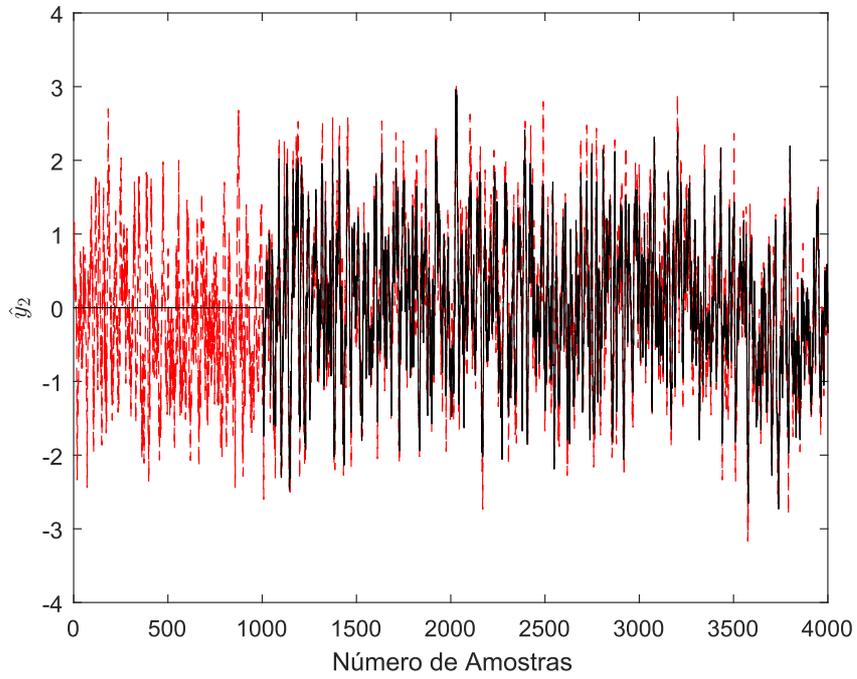
Tabela 4 – Resultados experimentais, pela metodologia nebulosa evolutiva proposta, obtidos na identificação de um processo de um evaporador.

Saída	MSE^*	MSE^+	FIT^*	FIT^+
y_1	0,0267	0,0696	72,51%	83,36%
y_2	0,1695	0,1445	61,79%	58,64%
y_3	0,0063	0,0086	91,05%	91,19%

* Treinamento.

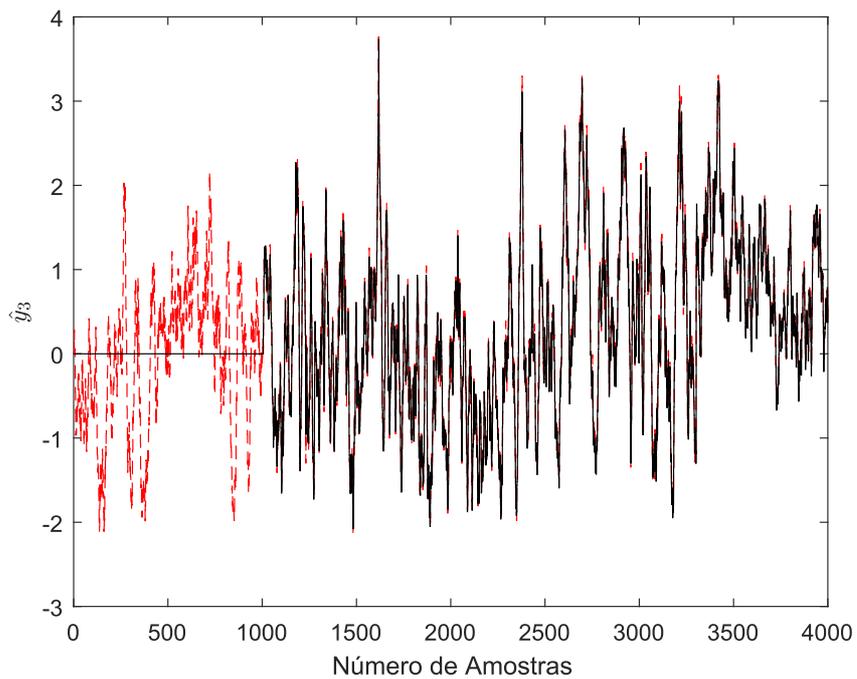
+ Validação.

Figura 81 – Saída y_2 estimada durante treinamento: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida preta - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



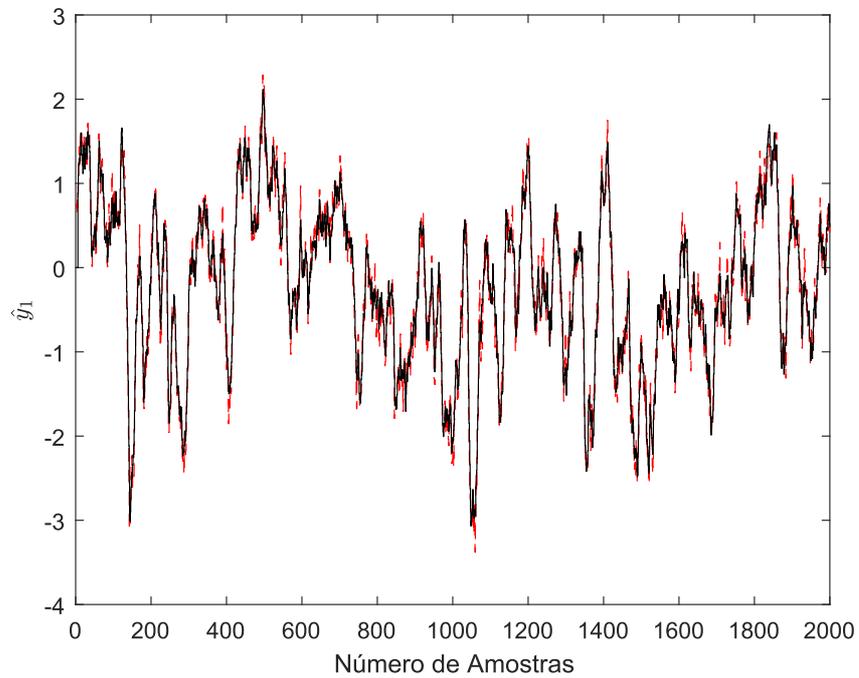
Fonte: Autor.

Figura 82 – Saída y_3 estimada durante treinamento: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida preta - saída estimada recursivamente pela metodologia nebulosa evolutiva proposta.



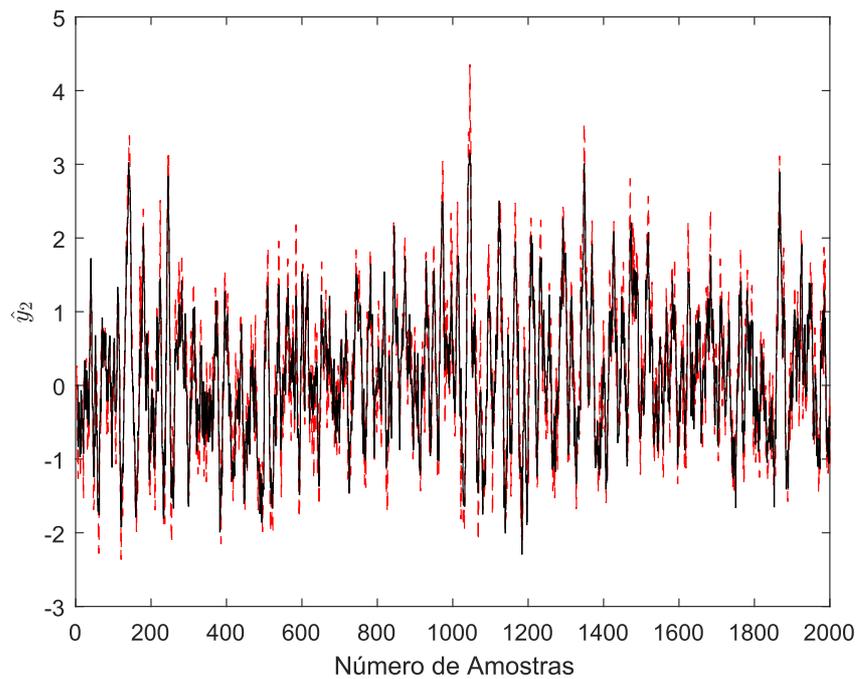
Fonte: Autor.

Figura 83 – Saída y_1 computada com dados de validação: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida - saída computada pelo modelo nebuloso evolutivo proposto.



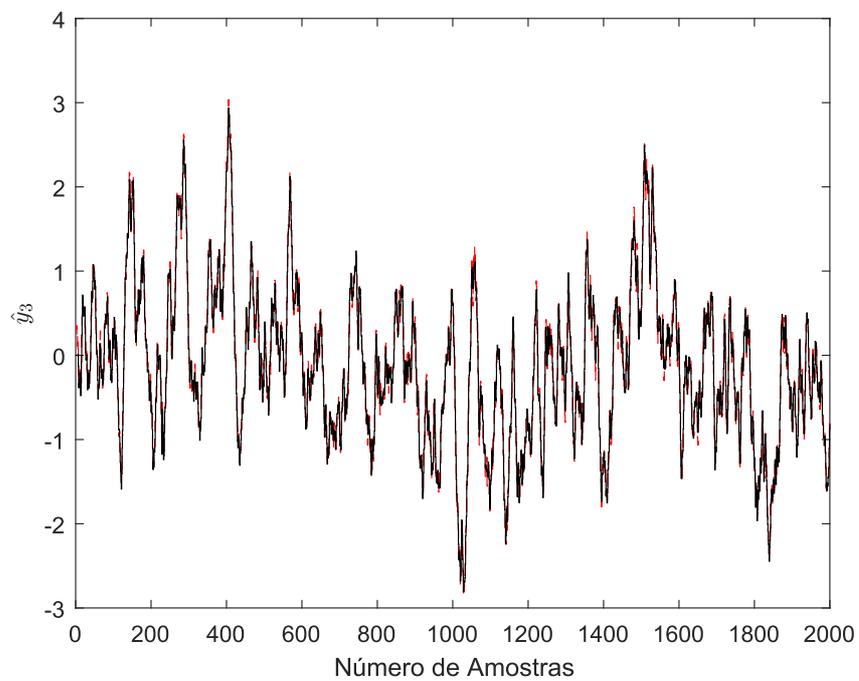
Fonte: Autor.

Figura 84 – Saída y_2 computada com dados de validação: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida - saída computada pelo modelo nebuloso evolutivo proposto.



Fonte: Autor.

Figura 85 – Saída y_3 computada com dados de validação: linha tracejada vermelha - saída real do processo do evaporador; linha sólida - saída computada pelo modelo nebuloso evolutivo proposto.



Fonte: Autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Capítulo, as principais conclusões, obtidas com base no levantamento teórico realizado, nas formulações matemáticas desenvolvidas nesta dissertação e na discussão dos resultados computacionais e experimentais, são apresentadas. Além disso, propostas de trabalhos futuras são sugeridas.

5.1 Conclusões

Nesta dissertação, uma nova metodologia nebulosa Takagi-Sugeno evolutiva baseada em modelo de Hammerstein no espaço de estados é desenvolvida para identificação de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis. A parametrização do bloco não linear estático é realizada através de um sistema nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo. Esta parametrização é realizada aplicando-se um algoritmo de agrupamento evolutivo inspirado no algoritmo FLEXFIS para estimação do antecedente e um algoritmo recursivo de realização mínima de auto-sistema nebuloso para estimação do consequente baseado em submodelos nebulosos no espaço de estados. A parametrização do bloco dinâmico linear é realizada pelo algoritmo de realização de auto-sistema recursivo. A realização da dinâmica linear consiste em se obter um modelo no espaço de estado de ordem mínima.

A estimação recursiva do sinal intermediário através do sistema nebuloso evolutivo permite que este modelo seja empregado em aplicações online, pois os dados que são disponibilizados pelo sistema dinâmico são processados a cada instante. Sendo esta uma característica bem relevante desta pesquisa. Desta forma, as não linearidades são aprendidas de forma incremental e não supervisionada pelo sistema nebuloso através do agrupamento evolutivo nebuloso de dados empregado na construção do antecedente. O consequente do sistema nebuloso baseado nas matrizes de estado dos submodelos nebulosos no espaço de estado é uma contribuição inovadora desta pesquisa. Esta abordagem facilita a modelagem de não linearidades multivariáveis complexas com grau de acoplamento desconhecido.

Uma vez que o sinal intermediário está disponível a cada instante, a parametrização recursiva da dinâmica linear é implementada. Nesta dissertação, a modelagem do bloco dinâmico linear é no espaço de estados. Este tipo de representação ganha cada vez mais espaço por ser no domínio do tempo, por apresentar a relação de entrada e saída de sistemas dinâmicos e as relações entre a entrada e os estados e dos estados para a saída. Além disso, é considerada muito eficiente em aplicações de controle. O número de realizações que um mesmo sistema dinâmico pode ser descrito é infinito. No entanto, a metodologia desenvolvida nesta dissertação resulta em modelos dinâmicos lineares de ordem mínima, onde a ordem é definida de forma autônoma, através da análise dos valores singulares da matriz de Hankel do sistema sistema dinâmico. A matriz de

Hankel por sua vez é atualizada recursivamente pelos parâmetros de Markov obtidos também recursivamente com base em dados de entrada e saída do sistema dinâmico disponibilizados a cada instante em um processo online.

A metodologia desenvolvida nesta dissertação apresenta resultados satisfatórios e competitivos em relação a outras propostas da literatura, de acordo com os critérios de avaliação aplicados. O desempenho final da modelagem de sistemas dinâmicos não lineares monovariáveis e multivariáveis amplamente utilizados na literatura permitiu avaliar os índices de desempenho bem como comparar com outras metodologias. Na identificação do *benchmark* monovariável apresentado no caso 1, avalia-se a eficiência da metodologia desenvolvida nesta dissertação diante de um problema, onde a não linearidade apresenta descontinuidade. Os resultados obtidos foram superiores à metodologia usada para comparação mesmo com uma estrutura menos complexa, ou seja, com um menor número de regras. Fica evidente também a alta capacidade do metodologia em mapear as não linearidades.

No estudo de caso apresentado no experimento 2, um sistema térmico é identificado. Os resultados obtidos na identificação e validação, além do mapeamento das não linearidades estáticas, através da estimação online da curva estática, são competitivos quando comparados a outras metodologias aplicadas ao mesmo processo. Os resultados obtidos pela metodologia desenvolvida nesta dissertação na identificação do sistema *benchmark* multivariável apresentado no experimento 3 são aceitáveis do ponto de vista dos índices de desempenho aplicados. Além disso, a metodologia apresenta alta eficiência no mapeamento online da não linearidade estática multivariável combinada. Um conjunto de dados reais de um processo evaporador com três entradas e três saídas é aplicado no experimento 4. Os resultados deste experimento também são competitivos para os dois índices de desempenho aplicados nesta dissertação.

A partir das simulações computacionais, percebe-se que a metodologia nebulosa evolutiva desenvolvida nesta dissertação apresenta alta eficiência na identificação online da não linearidade estática de sistemas monovariáveis e multivariáveis. Além disso, a resposta do modelo de Hammerstein nebuloso no espaço de estados aproximou bem todos os sistemas dinâmicos não lineares estudados.

A eficiência dos resultados vem acompanhada da baixa complexidade dos modelos obtidos, tanto do modelo não linear estático quanto do modelo dinâmico linear. Um problema característico de sistemas nebulosos evolutivos é o crescimento exponencial do número de regras nebulosas em função do aumento da dimensão do espaço de entrada, problema denominado maldição da dimensionalidade. No entanto, esta questão é contornada nesta dissertação pela aplicação de um algoritmo de agrupamento evolutivo que adota um limiar para criação de *clusters* que é função do espaço de entrada. Conseqüentemente, o aumento da dimensão do espaço de entrada não acarreta aumento desnecessário do número de regras do sistema nebuloso evolutivo. O modelo dinâmico linear no espaço de estados também é um modelo de ordem mínima, garantindo assim menor complexidade ao modelo de Hammerstein.

Em resumo, pode-se enfatizar uma série de vantagens da metodologia desenvolvida nesta dissertação, obtidas através dos resultados experimentais:

- Aplicação da metodologia nebulosa evolutiva na identificação de sistemas dinâmicos multivariáveis variantes no tempo;
- Rastreamento online da característica estática não linear de sistemas dinâmicos multivariáveis com não linearidades combinadas a partir de um sistema de inferência nebuloso Takagi-Sugeno evolutivo;
- Algoritmo baseado na teoria de realização mínima, onde os modelos no espaço de estados estimados tem ordem mínima entre todas as ordens possíveis, garantindo assim menor complexidade ao modelo;
- Aplicação da metodologia desenvolvida no rastreamento de incertezas, baseado na capacidade de evolução e adaptação da estrutura do modelo estimado.

5.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Como propostas de continuidade para esta pesquisa, são apresentadas as sugestões que seguem:

- Desenvolver a metodologia proposta no contexto estocástico, ou seja, quando o sistema dinâmico a ser identificado está operando em ambiente ruidoso;
- Aplicar a metodologia proposta para projeto de controle adaptativo baseado em modelo.

REFERÊNCIAS

- ABONYI, J. et al. Identification and control of nonlinear systems using fuzzy hammerstein models. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 39, n. 11, p. 4302–4314, 2000.
- AGGARWAL, C. C.; REDDY, C. K. *Data clustering: algorithms and applications*. [S.l.]: CRC press, 2013.
- AGUIRRE, L. Introdução à identificação de sistemas: Técnicas lineares e não lineares: Teoria e aplicação. *Editora UFMG*, 2015.
- ALVES, M. T. S. et al. Avaliação numérica e experimental dos métodos era e era/okid para a identificação de sistemas mecânicos. Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- ANGELOV, P. Evolving rule-based models: A tool for design of flexible adaptive systems, ser. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Berlin, Germany: Physica-Verlag, v. 92, 2002.
- ANGELOV, P. *Autonomous learning systems: from data streams to knowledge in real-time*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- ANGELOV, P.; FILEV, D. Simpl_ets: A simplified method for learning evolving takagi-sugeno fuzzy models. In: IEEE. *Fuzzy Systems, 2005. FUZZ'05. The 14th IEEE International Conference on*. [S.l.], 2005. p. 1068–1073.
- ANGELOV, P.; FILEV, D. P.; KASABOV, N. *Evolving intelligent systems: methodology and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. v. 12.
- ANGELOV, P.; KASABOV, N. Evolving computational intelligence systems. In: *Proceedings of the 1st international workshop on genetic fuzzy systems*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 76–82.
- ANGELOV, P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy systems from data streams in real-time. In: IEEE. *Evolving Fuzzy Systems, 2006 International Symposium on*. [S.l.], 2006. p. 29–35.
- ANGELOV, P. P.; FILEV, D. P. An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 34, n. 1, p. 484–498, 2004.
- ÄSTRÖM, K.; WITTENMARK, B. *Adaptive control*. NY: Addison-Wesley, 1989.
- BABUKA, R.; VEEN, P. Van der; KAYMAK, U. Improved covariance estimation for gustafson-kessel clustering. In: IEEE. *Fuzzy Systems, 2002. FUZZ-IEEE'02. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2002. v. 2, p. 1081–1085.
- BARBOZA, G. *NOVOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM RESPOSTAS IMPULSIVAS ESPARSAS USANDO A TRANSFORMADA WAVELET*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2007.
- BIAGIOLA, S. I.; FIGUEROA, J. L. Identification of uncertain mimo wiener and hammerstein models. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 35, n. 12, p. 2867–2875, 2011.

- BILLINGS, S. A. *Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- BORDIGNON, F.; GOMIDE, F. Uninorm based evolving neural networks and approximation capabilities. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 127, p. 13–20, 2014.
- BORJAS, S. D. M.; GARCIA, C. Identificação determinística por subespaços. *TEMA (São Carlos)*, SciELO Brasil, v. 13, n. 3, p. 207–218, 2012.
- CHAN, K. H.; BAO, J.; WHITEN, W. J. Identification of mimo hammerstein systems using cardinal spline functions. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 16, n. 7, p. 659–670, 2006.
- CHIU, S. L. Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of Intelligent & fuzzy systems*, IOS Press, v. 2, n. 3, p. 267–278, 1994.
- COELHO, M.; AGUIRRE, L.; CORREA, M. Metodologia para representação de modelos narx polinomiais na forma de hammerstein e wiener. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 3, n. 1, p. 71–80, 2002.
- COELHO, M. d. S. *Modelos de Hammerstein e de Wiener: conexões com modelos narx e sua aplicação em identificação de sistemas não-lineares*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2002.
- CORRÊA, M. V.; AGUIRRE, L. A. Identificação não-linear caixa-cinza: uma revisão e novos resultados. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 15, n. 2, p. 109–126, 2004.
- CORRUEA, M. V. *IDENTIFICAC AO CAIXA-CINZA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES UTILIZANDO REPRESENTAC OES NARMAX RACIONAIS E POLINOMIAIS*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2001.
- CORRUEA, M. V. *IDENTIFICAC AO CAIXA-CINZA DE SISTEMAS N AO-LINEARES UTILIZANDO REPRESENTAC OES NARMAX RACIONAIS E POLINOMIAIS*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2001.
- COSTA, E. B. M. et al. Controle pid fuzzy adaptativo com estabilidade robusta por enxame de partículas multiobjetivo. Universidade Federal do Maranhão, 2016.
- COSTA, E. B. M. et al. Controle pid fuzzy adaptativo com estabilidade robusta por enxame de partículas multiobjetivo. Universidade Federal do Maranhão, 2016.
- DOVŽAN, D.; LOGAR, V.; ŠKRJANC, I. Implementation of an evolving fuzzy model (efumo) in a monitoring system for a waste-water treatment process. *IEEE transactions on fuzzy systems*, IEEE, v. 23, n. 5, p. 1761–1776, 2015.
- DRUMMOND, A. D. C. Identificação e controle de sistema pendular inverso sobre carro utilizando redes neurais artificiais.
- DU, H.; ZHANG, N. Application of evolving takagi–sugeno fuzzy model to nonlinear system identification. *Applied soft computing*, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 676–686, 2008.
- DUDA, R.; HART, P.; STORK, D. Pattern classification, chapter 3.8. 2. *J. Wiley & Sons Inc, 2nd revised edition edition*, p. 117–124, 2000.

- ESPINOSA J, W. V. V. J. *Fuzzy Logic, Identification and Predictive Control (Advances in Industrial Control)*. [S.l.]: Springer, 2004.
- FILHO, O. D. R. et al. Modelagem baseada em agrupamento nebuloso evolutivo de máxima verossimilhança aplicada a sistemas dinâmicos operando em ambiente não-estacionário. Universidade Federal do Maranhão, 2017.
- FRANCO, I.; MOTA, A.; MENEZES, M. Identificação de sistemas não-lineares dinâmicos utilizando modelos autoregressivos aplicado em um processo de neutralização de pH. *Blucher Chemical Engineering Proceedings*, v. 1, n. 2, p. 11638–11645, 2015.
- GOMIDE, F. A. C.; GUDWIN, R. R. Modelagem, controle, sistemas e lógica fuzzy. *SBA controle & Automação*, v. 4, n. 3, p. 97–115, 1994.
- GUO, F. et al. Ts fuzzy model identification of mimo nonlinear systems based on data-driven. In: IEEE. *Electronics, Communications and Control (ICECC), 2011 International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 1186–1189.
- HAMMAR, K.; DJAMAH, T.; BETTAYEB, M. Fractional hammerstein system identification using polynomial non-linear state space model. In: IEEE. *Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on*. [S.l.], 2015. p. 1–6.
- HARYANTO, A.; HONG, K.-S. Maximum likelihood identification of wiener–hammerstein models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 41, n. 1-2, p. 54–70, 2013.
- HO, B.; KÁLMÁN, R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *at-Automatisierungstechnik*, OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG, v. 14, n. 1-12, p. 545–548, 1966.
- ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M. Identification of dynamic systems. In: *Identification of Dynamic Systems*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 353–366.
- JAFARI, M.; SALIMIFARD, M.; DEGHANI, M. Identification of multivariable nonlinear systems in the presence of colored noises using iterative hierarchical least squares algorithm. *ISA transactions*, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 1243–1252, 2014.
- JALALEDDINI, K.; KEARNEY, R. E. Subspace identification of siso hammerstein systems: application to stretch reflex identification. *IEEE transactions on biomedical engineering*, IEEE, v. 60, n. 10, p. 2725–2734, 2013.
- JIA, L.; LI, X.; CHIU, M.-S. The identification of neuro-fuzzy based mimo hammerstein model with separable input signals. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 174, p. 530–541, 2016.
- JIN, Q. et al. A novel optimization algorithm for mimo hammerstein model identification under heavy-tailed noise. *ISA transactions*, Elsevier, 2017.
- JIN, Q. et al. A novel optimization algorithm for mimo hammerstein model identification under heavy-tailed noise. *ISA transactions*, Elsevier, 2017.
- JUANG, J. Applied system identification prentice hall. *Englewood Cliffs, NJ*, 1994.
- JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985.

- JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters: theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Citeseer, v. 16, n. 2, p. 320–329, 1993.
- JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters-theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 16, n. 2, p. 320–329, 1993.
- JUANG, J.-N.; PHAN, M. Q. *Identification and control of mechanical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- JÚNIOR, S. E. R.; SERRA, G. L. de O. A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 64, p. 272–285, 2017.
- KASABOV, N. Evolving connectionist systems for adaptive learning and knowledge discovery: methods, tools, applications. In: IEEE. *Intelligent Systems, 2002. Proceedings. 2002 First International IEEE Symposium*. [S.l.], 2002. v. 1, p. 24–28.
- KASABOV, N.; FILEV, D. Evolving intelligent systems: methods, learning, & applications. In: IEEE. *Evolving Fuzzy Systems, 2006 International Symposium on*. [S.l.], 2006. p. 8–18.
- KASABOV, N. K. *Evolving connectionist systems: the knowledge engineering approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- KATAYAMA, T. *Subspace methods for system identification*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- KEESMAN, K. J. *System identification: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- KHAN, A. U.; KADRI, M. B. Mpc of hammerstein model with evolving fuzzy. In: IEEE. *Emerging Technologies (ICET), 2012 International Conference on*. [S.l.], 2012. p. 1–6.
- LEMOS, A. P. Modelagem nebulosa evolutiva: novas topologias e algoritmos de aprendizagem. UFMG, 2011.
- LILLY, J. H. *Fuzzy control and identification*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- LIMA, E. M. d. et al. Modelagem fuzzy funcional evolutiva participativa. [sn], 2008.
- LJUNG, L. System identification. In: *Signal analysis and prediction*. [S.l.]: Springer, 1998. p. 163–173.
- LOPES, W. A.; JAFELICE, R. S. d. M.; BARROS, L. C. d. Modelagem fuzzy de diagnóstico médico e monitoramento do tratamento da pneumonia. *Revista Biomatemática*, v. 15, p. 77–96, 2005.
- LUGHOFER, E. *Evolving fuzzy systems-methodologies, advanced concepts and applications*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 53.
- LUGHOFER, E. et al. Generalized smart evolving fuzzy systems. *Evolving Systems*, Springer, v. 6, n. 4, p. 269–292, 2015.

- LUGHOFER, E.; CERNUDA, C.; PRATAMA, M. Generalized flexible fuzzy inference systems. In: IEEE. *Machine Learning and Applications (ICMLA), 2013 12th International Conference on*. [S.l.], 2013. v. 2, p. 1–7.
- LUGHOFER, E. D. Flexfis: A robust incremental learning approach for evolving takagi–sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 1393–1410, 2008.
- MACIEL, L.; GOMIDE, F.; BALLINI, R. MIMO evolving participatory learning fuzzy modeling. In: IEEE. *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2012 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2012. p. 1–8.
- MARGOTI, L. et al. Identificação de uma planta de neutralização de pH utilizando a representação de Wiener. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 2039–2046.
- MORALES, A. B. T. et al. Identificação difusa de sistemas: proposta de um modelo adaptativo. 1997.
- MOREIRA, F. J. d. O. *Um controlador H de banda limitada para controle ativo de vibração estrutural*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 199p, 1998.
- OGATA, K.; SEVERO, B. *Engenharia de controle moderno*. [S.l.]: Prentice Hall do Brasil, 1998.
- PADUART, J. et al. Identification of a Wiener–Hammerstein system using the polynomial nonlinear state space approach. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 20, n. 11, p. 1133–1139, 2012.
- PAULA, M. V. de. *Identificação de Modelos de Hammerstein e Wiener para Sistemas Não Lineares Multivariáveis Utilizando Métodos de Subespaços*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- PEDRYCZ, W. *Knowledge-based clustering: from data to information granules*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. de O. Fuzzy digital PID controller design based on robust stability criteria. In: IEEE. *Industrial Informatics (INDIN), 2014 12th IEEE International Conference on*. [S.l.], 2014. p. 654–659.
- RATTANAWAORAHIRUNKUL, R.; SANPOSH, P.; PANJAPORNPON, C. Nonlinear system identification of pH process using Hammerstein–Wiener model. In: IEEE. *Electronics, Information, and Communications (ICEIC), 2016 International Conference on*. [S.l.], 2016. p. 1–4.
- RODRIGUES, G. G. *IDENTIFICACAO DE SISTEMAS DINAMICOS NAO LINEARES UTILIZANDO MODELOS NARMAX POLINOMIAIS - APLICACOES A SISTEMAS REAIS*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2007.
- RONG, H.-J. et al. Sequential adaptive fuzzy inference system (SAFIS) for nonlinear system identification and prediction. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 157, n. 9, p. 1260–1275, 2006.
- SALHI, H.; KAMOUN, S. A recursive parametric estimation algorithm of multivariable nonlinear systems described by Hammerstein mathematical models. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 39, n. 16, p. 4951–4962, 2015.

- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. d. O. Metodologia para identificação recursiva de modelos de hammerstein fuzzy no espaço de estados. 2017.
- SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Multivariable fuzzy hammerstein model identification from evolving data clustering. In: NOVA SCIENCE PUBLISHERS. *Fuzzy Modeling and Control: Methods, Applications and Research*. [S.l.], 2018.
- SERRA, G. *Propostas de Metodologias para Identificação e Controle Inteligentes*. 127 p. Tese (Doutorado) — Tese (Tese de Doutorado)—Unicamp/FEEC/DMSCI, Campinas, SP, 2005.
- SILVA, A. M. Sistemas neuro-fuzzy evolutivos: Novos algoritmos de aprendizado e aplicação. UFMG, 2014.
- SILVA, J. A. d. et al. Proposta de controle baseado em critério de estabilidade robusta: Uma abordagem em termos de função de transferência aplicada a sistemas dinâmicos no tempo contínuo com atraso. Universidade Federal do Maranhão, 2012.
- SILVA, L. R. S. d. et al. Aprendizagem participativa em agrupamento nebuloso de dados. [sn], 2003.
- TANGIRALA, A. K. *Principles of system identification: Theory and practice*. [S.l.]: Crc Press, 2014.
- TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. [S.l.]: Springer, 2001.
- TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. d. O. Metodologia baseada em realização de auto-sistema para identificação fuzzy evolutiva de sistemas dinâmicos multivariáveis não-lineares. 2017.
- TORRES, V. H. X.; LEAL, S. S.; ALMEIDA, P. E. M. de. Modelagem fuzzy para o problema de temporização semafórica em interseções de quatro tempos. *Abakós*, v. 3, n. 1, p. 59–74, 2014.
- VALDMAN, C. V. *Identificação de sistemas não-lineares baseada no algoritmo LAR: proposta de um critério de parada geométrico e sua aplicação para a consciência situacional*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2014.
- VEEN, G. van der; WINGERDEN, J.-W. van; VERHAEGEN, M. Global identification of wind turbines using a hammerstein identification method. *IEEE transactions on control systems technology*, IEEE, v. 21, n. 4, p. 1471–1478, 2013.
- WANG, D.-Q.; LIU, H.-B.; DING, F. Highly efficient identification methods for dual-rate hammerstein systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 23, n. 5, p. 1952–1960, 2015.
- WU, C.-Y. et al. A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 352, n. 3, p. 1119–1151, 2015.
- WU, D. Identification of hammerstein nonlinear dynamic systems using neural network. In: IEEE. *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese*. [S.l.], 2010. p. 1242–1246.
- YOUNG, P. C. *Recursive estimation and time-series analysis: An introduction*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1984.

YOUNG, P. C. *Recursive estimation and time-series analysis: An introduction for the student and practitioner*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

ZADEH, L. A. Information and control. *Fuzzy sets*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

ZHAO, J. et al. Hammerstein identification of supercharged boiler superheated steam pressure using laguerre-fuzzy model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 70, p. 33–39, 2014.

ZHAO, W.-X.; CHEN, H.-F. Recursive identification for hammerstein system with arx subsystem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 51, n. 12, p. 1966–1974, 2006.