

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Marcos Lima Dias

*Monopolos e dyons em teorias de calibre
não abelianas com quebra da simetria de Lorentz:
o caso do grupo $SO(3)$*

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2017

Marcos Lima Dias

*Monopolos e dyons em teorias de calibre
não abelianas com quebra da simetria de Lorentz:
o caso do grupo $SO(3)$*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Lima Dias, Marcos.

Monopolos e dyons em teorias de calibre não abelianas com quebra da simetria de Lorentz: o caso do grupo $SO(3)/$
Marcos Lima Dias. - 2017.

126 f.

Orientador(a): Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2017.

1. Defeitos topológicos. 2. Monopolo . 3. Dyon. 4. Violação da simetria de Lorentz. I. Alván Casana Sifuentes, Rodolfo. II. Título.

Marcos Lima Dias

*Monopolos e dyons em teorias de calibre
não Abelianas com quebra da simetria de Lorentz:
O caso do grupo $SO(3)$*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovado em 13 abril de 2017.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos - UFMA

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos - UFMA

Agradecimentos

A Deus, por ter me ajudado a vencer mais uma batalha importante em minha vida e por estar sempre comigo.

Ao meu pai, Antônio, e à minha mãe, Maria, pelo amor e por cuidarem de mim.

Aos meus irmãos Kenysson, Thamison, Vitor e, em especial, Marcelo pelo apoio.

À minha tia Simone e ao meu tio Adgelson, pelo carinho e consideração que têm por mim e pela hospitalidade durante o curso.

Ao João Alfíeres e a sua mãe, Dona Ana, por terem me dado a honra de se tornarem meus grandes amigos ao longo do curso e pelas ajudas de extrema importância que me deram.

Ao Pe. Marcelo Pépin e à Espírito Santo, por me ampararem, quando precisei, durante a minha graduação.

Ao meu primo Zaqueu Júnior, pela amizade.

Aos demais familiares que torceram por mim.

À Elaine Barbosa e ao Werison Alves, pela amizade.

Aos amigos adquiridos durante o curso: Daniel França, Elivaldo Ribeiro, Jaciara Machado, João Luís, Joel Reis, Kayman Jhosef, Leonilson Ribeiro, Letícia Lisboa, Marcos Vinícius, Ulisses Júnior e a tantos outros, que me perdoarão por eu não ter citado os seus nomes.

Ao Prof. Rodolfo Casana, por ter tido paciência e dedicação em me orientar.

Ao Alexsandro Lucena, por ter verificado um de nossos importantes resultados.

Ao Hordoney Martins e ao Júlio Aldo, pela importância que tiveram em me auxiliar no começo da minha vida acadêmica.

À Universidade Federal do Maranhão, pelo espaço cedido e pela oportunidade oferecida.

Ao povo brasileiro que, por intermédio da FAPEMA, CAPES e CNPQ, financiou a minha formação e a elaboração desta obra.

*“Tudo aquilo que o homem ignora não existe para ele.
Por isso, o universo de cada um se resume ao tamanho
de seu saber.”*

(Albert Einstein)

Resumo

O estudo teórico a respeito da existência do monopolo magnético foi iniciado por P. A. M. Dirac em 1931 e teve como principal consequência a possibilidade de explicar a quantização da carga elétrica.

Em Teorias de Grande Unificação (GUT's), o monopolo magnético pode surgir como um defeito topológico por meio da quebra espontânea de simetria, em um processo conhecido como mecanismo de Higgs. As GUT's preveem também a existência de um sólito topológico que possui tanto carga magnética quanto elétrica: o chamado dyon. Teoricamente, essas partículas se apresentam muito massivas e abundantes no Universo. Há casos particulares do monopolo e do dyon, denominados estados BPS's, que têm os menores valores possíveis de massa, cujas soluções são analíticas.

Neste trabalho, apresentamos algumas ideias básicas acerca de topologia e homotopia; descrevemos os principais pontos que levaram ao desenvolvimento do estudo teórico do monopolo e do dyon como sólitons topológicos; e investigamos finalmente os efeitos dos termos CPT-pares de violação da simetria de Lorentz nos setores de Gauge (em especial, não birrefringente) e de Higgs sobre os estados BPS's do monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov e do dyon de Julia-Zee, ambos dados no modelo $SO(3)$ de Georgi-Glashow.

PALAVRAS-CHAVE: defeitos topológicos; monopolo; dyon; violação da simetria de Lorentz.

Abstract

The theoretical study about the existence of magnetic monopole has begun by P. A. M. Dirac in 1931 and its main consequence has been the possibility of explaining the quantization of the electric charge.

In Grand Unification Theories (GUT's), the magnetic monopole may appear as a topological defect by spontaneous symmetry break, in a process known as Higgs mechanism. The GUT's also predict the existence of a topological soliton which has both magnetic and electric charges: the so-called dyon. Theoretically, these particles are predicted very massive and abundant in the Universe. There are particular cases of monopole and dyon, called BPS's states, which have the smallest possible mass values, besides analytical solutions.

In this work, we present some basic ideas about topology and homotopy; we describe the main points that have led to the development of the theoretical study of monopole and dyon both as topological solitons; and finally we investigate the effects of the Lorentz-violating CPT-even terms in the Gauge (in particular, non birefringent one) and Higgs sectors on the BPS's states of the 't Hooft-Polyakov magnetic monopole and of the Julia-Zee dyon, both given in the Georgi-Glashow $SO(3)$ model.

KEYWORDS: topological defects; monopole; dyon; Lorentz-violation.

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Introdução	12
2 Noções de Topologia e Homotopia	16
2.1 Espaço Topológico	16
2.2 <i>Manifold</i>	18
2.3 Homotopia	18
2.3.1 Homotopia de Caminhos	19
2.3.2 Mapeamento Homotópico	20
2.3.3 Grupo Fundamental e Grupos Superiores	21
3 Monopolo Magnético Abeliano	26
3.1 Eletrodinâmica de Maxwell	26
3.2 Simetria entre Cargas Elétrica e Magnética	27
3.3 Formulação Covariante	28
3.4 Monopolo Magnético de Dirac	30
3.5 Quantização da Carga Elétrica na Teoria de Dirac	33
4 Monopolo Magnético de 't Hooft-Polyakov e Dyon de Julia-Zee	35
4.1 Modelo de Wu-Yang	35
4.2 Modelo de George-Glashow	37
4.3 Considerações Topológicas	40
4.4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo George-Glashow	42

4.4.1	A Carga Magnética como o Fluxo Magnético	46
4.5	Os <i>Ansätze</i> de 't Hooft-Polyakov e Julia-Zee	47
4.5.1	A Carga Elétrica como o Fluxo Elétrico	48
5	Formalismo BPS	49
5.1	Formalismo BPS para o Monopolo	50
5.1.1	Equivalência entre a Equação BPS e as Equações de Euler-Lagrange . . .	50
5.2	Formalismo BPS para o Dyon	52
5.2.1	Equivalência entre as Equação BPS's e as Equações de Euler-Lagrange .	53
6	Aspectos Gerais do MP e do MPE	55
6.1	O Modelo Padrão	55
6.2	O Modelo Padrão Estendido	56
6.2.1	O Setores de Gauge (não birrefringente) e de Higgs CPT-pares	58
7	Monopolo Magnético com Violação da Simetria de Lorentz	60
8	Dyon com Violação da Simetria de Lorentz	68
9	Conclusões e Perspectivas	77
A	Convenções e Unidades	80
B	Modelo de Yang-Mills-Higgs	81
B.1	Equações de movimento do campo de Yang-Mills	83
B.1.1	Lei de Gauss	85
B.1.2	Lei de Ampère	85
B.2	Equação de movimento do campo de Higgs	86
B.2.1	Equação de movimento para o campo de Higgs no regime estacionário e no Gauge temporal	87
B.3	Densidade de Energia	87
B.4	Quebra Espontânea de Simetria e Mecanismo de Higgs	87
B.4.1	Equação de movimento para o campo de Higgs (com quebra)	90

B.4.2	A Escolha do Vácuo	91
B.4.3	A Perturbação dos Campos	91
B.4.4	Densidade Lagrangiana de Perturbação	92
B.4.5	Considerações Finais	94
C	Monopolos Magnéticos e Dyons com Violação da Simetria de Lorentz	96
C.1	Equação de Movimento do Campo de Yang-Mills	97
C.1.1	Lei de Gauss	98
C.1.2	Lei de Ampère	98
C.2	Equação de Movimento do Campo de Higgs	99
C.3	Densidade de Energia	100
C.4	Monopolo BPS Estendido e Condições sobre os Campos de Fundo	102
C.4.1	Comportamento Assintótico dos Campos	105
C.4.2	Equivalência entre as Equações BPS's e as Equações de Euler-Lagrange .	107
C.5	Dyon BPS Estendido e Condições sobre os Campos de Fundo	109
C.5.1	Comportamento Assitóticos dos Campos	115
C.5.2	Equivalência entre as Equações BPS's e as Equações de Euler-Lagrange .	116
	Referências Bibliográficas	120

Lista de Figuras

2.1	Classe de homotopia. Figura extraída da referência [32].	19
2.2	Relação de homotopia entre um cilindro e um disco. Figura adaptada da referência [34].	21
2.3	Operação de caminho.	22
3.1	Sistema de coordenadas cartesianas; os ângulos esféricos foram desenhados porque serão considerados a seguir.	30
3.2	As linhas radiais correspondem ao primeiro termo do campo magnético [equação (3.31)]; ao passo que as linhas de campo na direção negativa do eixo- z referem-se ao termo extra que decorre da singularidade fora da origem. Figura adaptada da referência [48].	32
7.1	Campo de Higgs $\frac{H(r)}{r}$	66
7.2	Campo de Yang-Mills $W(r)$	66
7.3	Densidade de energia BPS $\mathcal{E}(r)$	67
8.1	Campo de Higgs $\frac{H(r)}{r}$	74
8.2	Componente temporal do campo de Yang-Mills $\frac{J(r)}{r}$	75
8.3	Componente espacial do campo de Yang-Mills $W(r)$	75
8.4	Densidade de energia BPS $\mathcal{E}(r)$	76
B.1	Usamos $\lambda = \mu = 1$. A parte simétrica para $ \phi < 0$ é apenas ilustrativa, já que não podemos ter $ \phi < 0$	89

B.2 Adotamos $\lambda = \mu = 1$. O valor mínimo do potencial ocorre para $|\phi| = 1$, compatível com a equação (B.58). A parte espelhada para $|\phi| < 0$ é apenas ilustrativa, haja vista que não podemos ter $|\phi| < 0$ 89

Capítulo 1

Introdução

Uma das propriedades mais fundamentais da natureza é a simetria. A investigação sobre as características simétricas de um sistema físico é um fator essencial para testes de consistência de uma teoria, bem como um dos principais meios pelos quais se pode desenvolver novos modelos teóricos. A exemplo disso, temos a mecânica newtoniana que possui a transformação de Galileu como simetria fundamental. E aliás a observação da não invariância do Eletromagnetismo de Maxwell perante tal transformação culminou no desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita, a qual é covariante com respeito à transformação de Lorentz. Outra interessante simetria bastante especulada por muitos físicos teóricos é a dualidade entre as cargas elétrica e magnética. Embora o monopolo magnético nunca tenha sido detectado experimentalmente, modificar as equações de Maxwell a fim de descrevê-lo exige o mínimo esforço. Um trabalho inédito nessa direção foi apresentado por P. A. M. Dirac em 1931 [1], onde a descrição de um campo magnético tipo-monopolo necessitaria de um potencial vetor singular. Mesmo em frente a esse obstáculo, o modelo de Dirac poderia prever que a existência de uma única carga magnética isolada explicaria *a quantização da carga elétrica*.

A possibilidade de se construir uma teoria para o monopolo sem a presença de um potencial vetor singular foi mostrada somente em 1969 por T. T. Wu e C. N. Yang [2] no cenário do Modelo Padrão (MP) em uma teoria de Yang-Mills (também conhecida como teoria de calibre não abeliana) pura com o grupo de simetria $SU(2)$. Porém, essa tentativa conduziu a dificuldades na definição da carga magnética e da energia finita. Tais problemas só foram resolvidos em 1974 por G. 't Hooft e A. M. Polyakov [3, 4] no modelo $SO(3)$ de H. George e S. L. Glashow [5],

no qual um campo de Yang-Mills é acoplado a um tripleto de campos escalares reais de Higgs que se transforma na representação adjunta. A configuração do *monopolo de 't Hooft-Polyakov* surge como um *sóliton* em um processo de quebra espontânea de simetria $SO(3) \rightarrow SO(2)$ por meio do mecanismo de Higgs e a carga topológica associada corresponde à carga magnética do defeito.

O sóliton aparece como uma solução clássica de equações de movimento que exibem uma certa não linearidade e além de ter a energia concentrada em uma pequena região do espaço, sua estrutura é mantida no transcorrer do tempo. O primeiro estudo teórico dos sólitons foi feito por de D. Korteweg e G. de Vries em 1895 com a proposição da famosa equação KdV [6, 7], a qual leva em conta o balanceamento entre efeitos não lineares e dispersivos para descrever as *ondas solitárias de translação*. Essas soluções tipo-sólitons foram redescobertas a partir de 1970 no contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC), ao se tentar aplicar métodos perturbativos de quantização no domínio da interação forte.

Existe um caso peculiar do monopolo tipo-sóliton de 't Hooft-Polyakov conhecido como *estado BPS*, cuja solução é analítica. Tal estado é encontrado no limite de *Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield* [8], quando o potencial é nulo, e possui o menor valor possível de massa. Como exemplo da aplicação desse tipo de sóliton à TQC, podemos destacar o alto grau de simetria entre os monopolos BPS e os bósons massivos de calibre que levou à conjectura de Montonen e Olive [9], uma espécie de dualidade eletromagnética modificada em que os monopolos magnéticos se comportam como os bósons de calibre de uma teoria dual, enquanto reciprocamente os bósons da teoria original são mapeados em monopolos da teoria dual. Correspondências duais desse tipo em teoria de Yang-Mills mapeiam modelos com acoplamento forte em outros com acoplamento fraco, haja vista que a constante de acoplamento da teoria original é inversamente proporcional àquela da sua teoria dual. Portanto, esse formalismo pode ser usado no estudo das interações fortes.

O estudo do monopolo também é útil para dar uma possível explicação ao problema do confinamento¹ dos quarks na Cromodinâmica Quântica (QCD) através da conjectura de 't Hooft [10] e Mandelstam [11], segunda a qual poderia se obter um tipo de efeito Meissner dual

¹Grosso modo, o confinamento é um mecanismo pelo qual os quarks e os glúons, mantidos dentro dos hádrons, não podem ser detectados como partículas livres.

onde as cargas elétricas seriam confinadas por meio da condensação de monopolos magnéticos.

Configurações de monopolo também surgem em Teorias de Grande Unificação (GUT's) em processos de transição de fase, quando um grupo de gauge é quebrado em subgrupos [12]. Estima-se que esses sólitons sejam altamente pesados, com massas da ordem de 10^{16} GeV, tornando as suas detecções difíceis em aceleradores de partículas, como o LHC cuja ordem de energia atingida é de 10^4 GeV. As GUT's preveem ainda que os monopolos sejam extremamente abundantes no Universo – com densidade estimada em 10^{-29} g/cm³ –, pois apresentam uma densidade em torno de 10^{-18} g/cm³. Dentro do modelo cosmológico padrão, isso ficou conhecido como *o problema dos monopolos* e uma possível explicação foi dada pelo modelo de Universo inflacionário, proposto inicialmente por Alan H. Guth [13]. Teoricamente, admite-se ainda a possível existência de monopolos possuindo tanto carga magnética, quanto elétrica. São os chamados *dyons*, primeiramente estudados por Julian Schwinger [14].

No âmbito da TQC, a tentativa de unificar a força gravitacional às outras forças fundamentais: fraca, forte e eletromagnética, conduziu ao desenvolvimento de novas teorias além do MP, tais como a Gravidade Quântica em Loop e a Teoria de Cordas. Dentre outros problemas apresentados pelo MP, para que os efeitos quânticos da gravidade comecem a se manifestar, é preciso considerar uma faixa de energia da ordem de 10^{19} GeV, conhecida como *escala de Planck*. No início dos anos 90, S. Samuel e A. Kosteletsky, propuseram um modelo considerando que a simetria de Lorentz ativa possa ser quebrada espontaneamente nessa escala de energia [15–20]. O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria que descreve a física após tal quebra e incorpora termos de violação da simetria de Lorentz (VL) em todos os setores de interação do MP [21–23].

O nosso trabalho consiste em investigar uma extensão dos estados BPS do monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov e do dyon de Julia-Zee [24], considerando os termos da VL nos setores de Gauge – não birrefringente – e de Higgs, os quais preservam simultaneamente as simetrias de conjugação de carga (C), de reversão temporal (T) e de paridade (P).

Esta dissertação está dividida na seguinte forma: no segundo capítulo, discutimos os principais conceitos sobre Topologia, necessários para o entendimento da formação do monopolo tipo-sóliton; no terceiro capítulo, fazemos uma apresentação a respeito do pioneiro trabalho de Dirac, que trata da existência do monopolo magnético e de suas implicações na quantização da

carga elétrica e na dualidade eletromagnética; mostramos no capítulo quatro o modelo unificado de Wu-Yang, onde o potencial de Dirac, correspondente ao grupo de simetria $U(1)$, é imerso em um grupo maior $SU(2)$; ainda no mesmo capítulo, descrevemos também o modelo $SO(3)$ de George-Glashow; no capítulo cinco, aprenderemos o formalismo BPS tanto para o dyon, como para o monopolo; apresentamos no capítulo seis o cenário do MP e alguns de seus problemas que levaram ao desenvolvimento do MPE; os resultados de nossa pesquisa são discutidos no capítulo sete e no capítulo oito expomos as nossas conclusões e perspectivas; no final, há o apêndice A com as convenções e unidades, o apêndice B, que mostra o processo de quebra espontânea de simetria, e o apêndice C, no qual os nossos resultados são esclarecidos.

Capítulo 2

Noções de Topologia e Homotopia

O estudo da Topologia se divide em quatro áreas: a *Topologia Geral* [25, 26], cujo interesse é estudar as propriedades dos espaços topológicos, utilizando como ferramenta a Teoria dos Conjuntos; a *Topologia Combinatória* [27], na qual se investiga tipos especiais de espaços topológicos conhecidos como poliedros ou simplexes; a *Topologia Algébrica* [28–30], que relaciona as características dos espaços topológicos com propriedades de grupos – tal como grupos de *homotopia* e *homologia* –; e, por fim, a *Topologia Diferencial* [31], onde se estuda as variedades diferenciáveis, com o uso de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e da Topologia Algébrica.

Este capítulo é reservado para apresentar algumas ideias básicas e heurísticas sobre *Topologia* e *Homotopia* que contribuirão para o melhor entendimento deste trabalho.

2.1 Espaço Topológico

Primeiramente, vamos introduzir o conceito de espaço topológico [28, 32, 34, 35]. Seja X um conjunto qualquer com uma coleção T de subconjuntos, os quais denominamos conjuntos abertos, tal que T contém:

1. O conjunto X e o conjunto vazio \emptyset ;
2. A união de quaisquer subconjuntos – finitos ou infinitos – abertos de T ;
3. A intersecção de qualquer número finito de subconjuntos abertos de T .

Ao par (T, X) , denominamos *espaço topológico* e diz-se que T é uma topologia em X . Alguns textos chamam (T, X) simplesmente de X . Adotaremos essa convenção por simplicidade.

Considere, por exemplo, um conjunto discreto $T = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X = \{1, 2, 3\}\}$. Ele é um espaço topológico descrito por finitos subconjuntos. Um contra-exemplo imediato que segue é o conjunto $T = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, X = \{1, 2, 3\}\}$ que não forma um espaço topológico, pois $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \notin T$, não satisfazendo, assim, a definição 2. Outro exemplo que podemos destacar é o espaço \mathbb{R}^n – o qual seria o conjunto X – com a topologia T dada como discos abertos, onde cada j -ésimo disco está centrado em um j -ésimo ponto $P_j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n) \in \mathbb{R}^n$. Matematicamente, esses discos podem ser representados por um conjunto de pontos $Q_j = (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $|P_j - Q_j| < r_j$, sendo r_j o raio. Vamos chamar de D_{r_j} o disco de raio r_j . Note que a condição 1 é trivialmente satisfeita para $r_j = 0$ – o que equivaleria a um disco de raio nulo D_0 , ou simplesmente nenhum disco. As definições 2 e 3 são verificadas, pois $D_{r_i} \cup D_{r_j}$ e $D_{r_i} \cap D_{r_j} \in T$ para quaisquer i e j . Nesse caso, o conjunto \mathbb{R}^n tem uma topologia T descrita por infinitos subconjuntos: os discos D_{r_j} .

Define-se vizinhança aberta – fechada – de um ponto x pertencente a um espaço topológico X qualquer conjunto aberto – fechado – A contido em X que contém x . Ou seja, se $X \supset A$ e $x \in A$, então A é vizinhança aberta – fechada – de x .

Sejam dois espaços topológicos X e Y . Se tivermos uma transformação F bijetiva que conecta cada ponto x pertencente a um conjunto de X a um, e somente um, ponto y pertencente a um conjunto de Y ($F : P_1 \rightarrow P_2$) e, ademais, se a transformação e, logicamente, sua inversa ($F^{-1} : P_2 \rightarrow P_1$) forem contínuas¹, então F é chamada de *homeomorfismo* e os dois espaços são ditos *topologicamente equivalentes*. Quando dois pontos arbitrários de um mesmo espaço topológico têm a intersecção de suas vizinhanças vazia, chamamos esse espaço de *Hausdorff*. Diferentemente dos espaços métricos, onde a noção de distância entre dois pontos é definida, a topologia geral vai além disso e o conceito de vizinhança é introduzido sem fazer referência a um número real, como é o caso do disco aberto D_{r_j} em que os pontos Q_j formam a vizinhança de um dado ponto P_j . Portanto, podemos entender a topologia como a descrição de propriedades que permanecem invariantes perante homeomorfismos e sem lidar com propriedades métricas

¹O nome contínuas se refere ao fato de que pontos vizinhos de P_1 são levados a pontos vizinhos de P_2 em uma correspondência de um para um.

ou numéricas. Com base nisso, dizemos, por exemplo, que um círculo é equivalente a uma elipse – no sentido topológico.

2.2 *Manifold*

Todos nós temos a sensação de que a Terra é plana, muito embora sabemos que ela tem uma forma quase esférica. Essa sensação acontece porque vemos os pontos da superfície terrestre localmente e em pequena escala – se comparada ao globo –. O *manifold*, também conhecido como *variedade*, é uma generalização da ideia de superfície que localmente poder ser considerada plana. Assim podemos dizer que vivemos em um “*manifold terrestre*”.

Quando queremos localizar um ponto em uma superfície esférica – imagine a Terra, por exemplo –, podemos considerar essa superfície imersa – “dentro” – do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 e utilizar os dois ângulos usuais (θ, ϕ) [32]. Contudo, nem sempre é interessante fazer isso. No caso da Terra, os pontos geográficos, projetados em uma superfície plana, podem ser localizados pelas suas longitudes e latitudes, conforme o mapa-múndi. A ideia fundamental do conceito de *manifold*, entretanto, é generalizar a representação de uma superfície sem fazer a imersão em outro espaço [35]. É útil, portanto, introduzir o conceito formal de *manifold*:

- *Manifold*² é um espaço topológico de Hausdorff em que cada ponto e sua vizinhança são homeomórficos a \mathbb{R}^n .

2.3 Homotopia

Antes de apresentar o conceito de homotopia, primeiramente vamos considerar um exemplo ilustrativo [32]. Sejam dois espaços topológicos X e Y , segundo mostra a figura 2.1. Em (a), podemos deformar o caminho fechado β continuamente até reduzi-lo em um ponto. O mesmo não podemos fazer com o caminho α , uma vez que existe um buraco no seu interior. Por outro lado, qualquer percurso fechado α , β ou γ na figura (b) pode ser encolhido de forma contínua

²Estamos apenas dando uma definição genérica, mas existem características peculiares dos manifolds, tais como diferenciabilidade e manifolds complexos que não entramos em detalhes aqui. O leitor interessado pode consultar as referências.

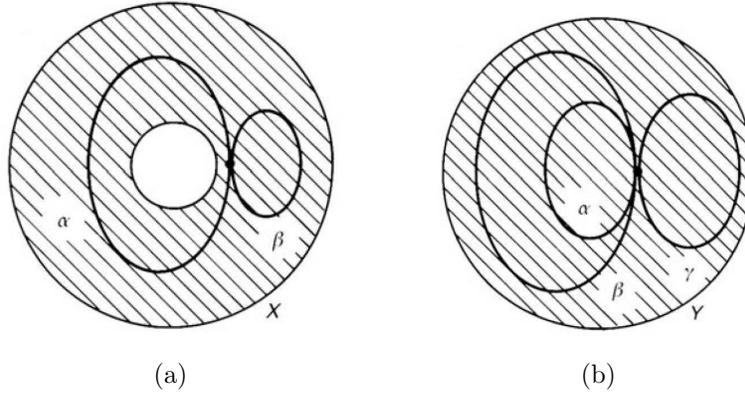


Figura 2.1: Classe de homotopia. Figura extraída da referência [32].

a um ponto. Então dizemos que os circuitos em Y são homotópicos a um ponto, estabelecendo entre si uma classe de equivalência denominada *classe de homotopia*. Em particular em (b), o circuito β pode sofrer uma deformação contínua, tornando-se α . Nessas condições, também dizemos que α e β são homotópicos ou que estabelecem uma relação de *homotopia* entre si.

Pode-se imaginar então que esse mecanismo de deformação é regulado por um conjunto de funções $f(t)$, em que t é um parâmetro contínuo, digamos $t \in \tau = [0, 1]$. As funções $f(t)$ poderiam, por exemplo, representar um ponto $y \in Y$ – veja a figura 2.1 (a) –, tal que em um tempo $t = 0$, $f(0) = y_0$ pertence ao circuito β e em um tempo $f(1) = y_1$ pertence ao percurso fechado α .

2.3.1 Homotopia de Caminhos

Consideremos agora um espaço topológico X e um parâmetro t pertencente ao intervalo fechado $\tau = [0, 1]$. Um mapeamento contínuo $f(t) : \tau \rightarrow X$ é chamado de *caminho em X* ou *homotopia de caminho*, cujo ponto inicial é x_0 e ponto final é x_1 , se $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Dizemos que X é *conexo por caminhos*. Caso tenhamos um circuito – fechado –, ou seja, $f(0) = f(1) = x_0$, então ele é denominado *loop*, sendo x_0 conhecido como *ponto base*. Especialmente, se $x \in X$ e I for a identidade, então definimos o caminho constante por $I : \tau \rightarrow X$, tal que $I(t) = x$ para todo $t \in \tau = [0, 1]$. Daí decorre imediatamente que I forma trivialmente um loop com ponto base x , a saber: $I(0) = I(1) = x$. Além disso, se dadas duas curvas quaisquer $g(t), h(t) : \tau \rightarrow X$ em X , ambas com os mesmos pontos inicial e final – $g(0) = h(0) = x_0$ e

$g(1) = h(1) = x_1$ – e se $g(t)$ for deformada continuamente em $h(t)$ – ou vice-versa –, então X é chamado de *simplesmente conexo* [28, 29, 35].

Em outras palavras, se existe uma função contínua $F(s, t) : \tau \times \tau \rightarrow X$, de tal forma que para cada s e um intervalo, pomos $s \in [0, 1]$, $F(s, t)$ deve satisfazer:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0, t) = g(t), \\ F(1, t) = h(t) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(s, 0) = g(0) = h(0) = x_0, \\ F(s, 1) = g(1) = h(1) = x_1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Note que s é o parâmetro de deformação contínua de $g(t) \rightarrow h(t)$. Nas mesmas circunstâncias descritas acima, mas com $x_1 = x_0$, os caminhos $g(t)$ e $h(t)$ tornam-se loops com ponto base x_0 e as condições (2.1) passam a ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0, t) = g(t), \\ F(1, t) = h(t) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(s, 0) = g(0) = h(0) = x_0, \\ F(s, 1) = g(1) = h(1) = x_0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Veja na figura 2.1 (b) que se considerarmos $g(t)$ e $h(t)$ como sendo β e α , respectivamente, $F(s, t)$ representa a deformação contínua de $g(t)$ sobre $h(t)$. Nesse caso, $g(t)$ e $h(t)$ são chamadas de *homotópicas*. De forma geral, a classe de todos os segmentos conectando x_0 a x_1 – x_1 pode ser o próprio x_0 no caso do loop – é homotópica a um dado caminho que liga os pontos x_0 a x_1 , se esses segmentos podem ser deformado um no outro, formando assim uma *classe de homotopia*. Em particular, a classe de homotopia dos loops apresentam uma estrutura de grupo que será discutida na seção 2.3.3.

2.3.2 Mapeamento Homotópico

Na seção anterior, vimos a descrição de propriedades homotópicas considerando mapeamentos em um único espaço topológico X . No entanto, essas ideias podem ser estendidas para mapeamentos entre dois espaços topológicos X e Y de maneira análoga. Sejam $g(t), h(t) : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas de X em Y . Se houver uma função contínua $F(s, t) : X \times \varsigma \rightarrow Y$, com $t \in \tau = [0, 1]$ e $s \in \varsigma = [0, 1]$, tal que $F(0, t) = g(t)$ e $F(1, t) = h(t)$, $g(t)$ é dita *homotópica* a $h(t)$ e representamos por $g(t) \sim h(t)$. O mapa $F(s, t)$ é denominado *homotopia* entre $g(t)$ e $h(t)$. Dizemos que os espaços X e Y têm o mesmo *tipo de homotopia* e denotamos por $X \simeq Y$, se existirem aplicações contínuas $g(t) : X \rightarrow Y$ e $h(t) : X \rightarrow Y$ tal que a $g(t) \circ f(t) \sim I$

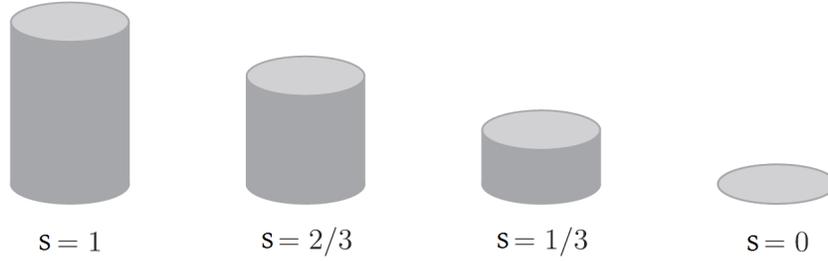


Figura 2.2: Relação de homotopia entre um cilindro e um disco. Figura adaptada da referência [34].

e $f(t) \circ g(t) \sim I$, em que I é o mapa identidade. O mapa $g(t)$ é chamado de *homotopia equivalente* e $h(t)$, de *homotopia inversa*.

Como exemplo [34], seja um disco D em \mathbb{R}^2 – veja a figura 2.2 –. Um cilindro $\zeta \times D$ é homotópico a D , quando consideramos $g(t) : \zeta \times D \rightarrow D$, com $(t, y) \rightarrow y$, e $h(t) : D \rightarrow \zeta \times D$, com $y \rightarrow (0, y)$ [conforme a seção anterior, s é o parâmetro de deformação contínua de $g(t) \rightarrow h(t)$ e neste exemplo ele está associado a altura do cilindro; o espaço topológico X (especificamente a variedade desse espaço) é representado pelo próprio cilindro, quando o espaço Y , pelo disco D ; a variável y representa um ponto no espaço topológico Y , ou no disco]. A homotopia F entre $g(t)$ e $h(t)$ pode ser dada como $F(s, (t, y)) = (st, y)$. É fácil notar que $g(t) \circ f(t) \sim I$ e $f(t) \circ g(t) \sim I$ e também:

$$\begin{cases} F(0, (t, y)) = (0, y) = g(t), \\ F(1, (t, y)) = (t, y) = h(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

conforme as premissas estabelecidas.

Notamos assim que homotopia pode ser entendida como uma relação de equivalência entre um conjunto de funções contínuas – caminhos – ou entre dois espaços topológicos, com um mapeamento contínuo regulado por um parâmetro.

2.3.3 Grupo Fundamental e Grupos Superiores

Vimos nas seções 2.3.1 e 2.3.2 as relações fundamentais de equivalência entre caminhos e espaços topológicos. Em especial, a classe de loops forma um grupo. Um grupo é um conjunto G no qual dada uma operação de multiplicação, as seguintes propriedades são satisfeitas [33]:

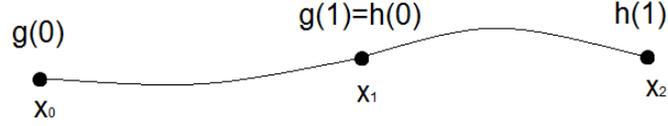


Figura 2.3: Operação de caminho.

1. **Associativa.** Para todos os elementos g_1, g_2 e $g_3 \in G$, temos: $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
2. **Elemento identidade.** Deve haver um elemento $I \in G$, tal que para todo $g \in G$, $gI = Ig = g$
3. **Elemento inverso.** Existe um elemento inverso $g^{-1} \in G$, de forma que $gg^{-1} = g^{-1}g = I$ para todo $g \in G$.

Para entender a característica de grupo dos loops, vamos introduzir a operação de caminhos [28–32, 34]. Seja o espaço X e os mapas $g(t), h(t) : \tau \rightarrow X$, com $t \in \tau = [0, 1]$, sendo um caminho tal que $g(1) = h(0)$. Definimos o produto de $g(t)$ e $h(t)$, denotado por $(g * h)(t)$, como:

$$p(t) \equiv (g * h)(t) = \begin{cases} g(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Veja na figura 2.3 que o produto $(g * h)(t)$ representa a primeira metade do caminho dada por $g(t)$ (de x_0 a x_1) e a segunda metade, por $h(t)$ (de x_1 a x_2). O elemento inverso de $g(t)$ é definido como $g^{-1}(t) = g(1 - t)$, correspondendo a um percurso inverso de $g(t)$, ou seja, saindo de x_1 para x_0 .

Perceba que a propriedade (1) é satisfeita, pois uma vez que $p(t), g(t)$ e $h(t) \in G$, temos:

$$[p(t) g(t)] h(t) = p(t) [g(t) h(t)]. \quad (2.5)$$

Como vimos, a identidade é determinada pelo mapa $I : \tau \rightarrow X$, tal que $I(t) = x$ para todo $t \in \tau = [0, 1]$ e para algum $x \in X$. Ela representa um caminho constante. Entretanto, no exemplo dado acima, a identidade não é constante, pois:

$$\begin{cases} g^{-1}(t) = g(1) \equiv [g^{-1}(t)]|_0, & \text{em } t = 0 \text{ (ou } x = x_0) \text{ e} \\ g^{-1}(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) \equiv [g^{-1}(t)]|_1, & \text{em } t = \frac{1}{2} \text{ (ou } x = x_1). \end{cases} \quad (2.6)$$

Dessa forma, temos as condições para os elementos inverso e identidade:

$$\begin{cases} g(t) [g^{-1}(t)]|_0 \equiv I_0, \text{ em } t = 0 \text{ (ou } x = x_0) \text{ e} \\ g(t) [g^{-1}(t)]|_1 \equiv I_1, \text{ em } t = \frac{1}{2} \text{ (ou } x = x_1). \end{cases} \quad (2.7)$$

Note que em (2.7) a identidade possui um valor diferente em cada extremidade do intervalo $[t_0, t_1]$. Em vista disso, as propriedades (2) e (3) não são obedecidas, ou seja, classes de caminhos abertos não formam uma estrutura de grupo. Todavia, se o caminho – figura 2.3 – for fechado, isto é, for um loop com ponto base x_0 , então teremos uma classe de homotopia de loops formando um grupo, pois a identidade será única. A classe de loops que podem ser mapeadas continuamente a um ponto por uma deformação contínua é denominada *grupo fundamental* do espaço topológico X com ponto base x_0 , *primeiro grupo de homotopia* ou ainda *grupo de Poincaré* – por ter sido o primeiro a estudá-lo –. Esse grupo é representado por $\pi_1(X, x_0)$. Os loops são homotópicos a um círculo³ S^1 . Loops que possuem um buraco no seu interior – veja a figura 2.1(a) – não podem ser encolhidos a um ponto e portanto não são homotópicos a ele. Por exemplo, o mapeamento $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ – um círculo a \mathbb{R}^2 excluindo a origem –. Classificamos os grupos de loops que circundam a origem, segundo um número inteiro \mathbb{Z} conhecido como “*winding number*”, o qual determina o número de vezes que a origem é englobada. Se o sinal for positivo (negativo), o loop rodeia a origem no sentido horário (anti-horário), dependendo da convenção adotada.

Como exemplo, no caso do defeito topológico tipo-vórtice [36–38], o qual surge em um processo de quebra espontânea de simetria $U(1)$ na teoria de Maxwell-Higgs em (2+1)-dimensões, para configurações estáveis de energia, um *manifold* M (dado por um círculo cujo raio tende ao infinito) pertencente a um espaço topológico X (o próprio espaço físico bidimensional) é mapeado homotopicamente a um outro *manifold* N (um círculo de raio finito formando o vácuo⁴) de um espaço topológico Y , que é o próprio espaço interno dos campos escalares. Em outras palavras, dado um campo escalar complexo $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ no espaço interno e dado o vetor posição $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ no espaço físico, os vórtices surgem quando:

$$\begin{cases} (a) \quad |\varphi|^2 \rightarrow 0, \text{ se } |\vec{r}|^2 \rightarrow 0, \\ (b) \quad |\varphi|^2 \rightarrow \varphi_0^2 = \text{constante}, \text{ se } |\vec{r}|^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

³A notação S^1 significa um círculo em \mathbb{R}^2 , S^2 representa uma esfera em \mathbb{R}^3 e assim por diante.

⁴O vácuo é o nome dado às configurações dos campos no infinito que estabelecem a energia finita e mínima.

A condição (a) implica que, na origem do espaço interno, o círculo formado por $|\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \varphi_0^2$ tem um buraco. Dessa forma, a condição (b) mostra que um círculo no espaço físico $|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 = r^2|_{r \rightarrow \infty}$ de raio infinito é mapeado naquele do espaço interno. O campo φ formando o círculo de vácuo pode ser dado como:

$$\varphi = e^{in\theta} \varphi_0. \quad (2.9)$$

O ângulo θ é o polar usual e o *winding number* dado por $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ caracteriza o número de vezes que o círculo do espaço físico envolve o do espaço interno, ou também podemos interpretá-lo como o número voltas que o campo φ dá em torno do círculo de vácuo, quando o vetor \vec{r} rodeia o círculo do espaço físico. O *winding number* pode ainda ser expresso como uma integral de movimento [38]:

$$n = \frac{1}{2\pi i \varphi_0^2} \oint \varphi^* \partial_i \varphi. \quad (2.10)$$

Analogamente ao grupo fundamental, existem outras classes de grupos que, ao invés de envolver o mapeamento homotópico entre círculos, caminhos fechados e pontos, estão relacionadas ao mapeamento entre esferas – ou hiperesferas –, superfícies – ou hipersuperfícies – fechadas e pontos. Representamos esses grupos por $\pi_m(X, x_0)$. Existem teoremas [28, 29, 32] garantindo que os grupos com $m > 1$, são abelianos e, portanto, independem da escolha do ponto base x_0 – por isso, tais grupos são simplesmente denotados por $\pi_m(X)$ –. Além disso, garantem que os grupos fundamentais ($m = 1$) são não abelianos, exceto quando são grupos fundamentais de Lie [33].

É importante ressaltar que o mapa $f : S^m \rightarrow S^m$ entre duas hiperesferas corresponde ao grupo de homotopia representado por $\pi_m(S^m)$, o qual é isomorfo⁵ [33] ao conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} [28–30, 32, 34, 38],

$$\pi_m(S^m) \cong \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

De forma similar à discussão anterior, \mathbb{Z} é caracterizado pelo *winding number* – também conhecido como *Brower degree* [41] neste contexto – $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, que agora está associado ao número de vezes que uma hiperesfera envolve a outra. Na descrição de monopolos e dyons

⁵O isomorfismo entre dois grupos ocorre quando cada elemento de um grupo é correspondido a um e somente um elemento do outro, mantendo a mesma tabela de multiplicação. No caso dos números inteiros, a operação de multiplicação do grupo é a soma.

na teoria de Yang-Mills-Higgs [24, 42] por exemplo, configurações estáveis de energia surgem em um mapeamento do tipo $f : S^2 \rightarrow S^2$, onde um *manifold* dado por uma esfera cujo raio tende ao infinito – dada por $|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2|_{r \rightarrow \infty}$, com $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ – no espaço físico é mapeada homotopicamente a outro *manifold* representado por uma esfera de raio finito $|\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \varphi_0^2$ no espaço interno; o campo φ agora é um triplo de campos escalares reais $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Veremos que o *winding number* associado ao isomorfismo $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ determinará a relação de quantização entre as cargas elétrica e magnética.

Em geral, existem grupos de homotopia do tipo $\pi_m(S^n)$ que estão associados à formação de diferentes defeitos topológicos [43] e ao mapeamento entre hipersferas $f : S^m \rightarrow S^n$. Quando $n > m$, o grupo de homotopia é denominado *trivial*, pois $\pi_m(S^n) \cong 0$, indicando que existe ao menos um ponto em S^m que não é mapeado em nenhum ponto de S^n .

O *winding number* não muda perante pequenas deformações nos campos em configurações para as quais a energia é finita. Para tais deformações, o mapeamento $f : S_{r \rightarrow \infty}^m \rightarrow S_{v\u00e1cuo}^m$ permanece na mesma classe de homotopia. Assim, o *winding number* é um número topológico que caracteriza diferentes configurações de campo com mesmo valor de energia finita. Dizemos que a cada valor desse número está associado um setor topológico diferente. Os sólitons topológicos com energia mínima são dados no setor $n = 1$ [38, 40].

Capítulo 3

Monopolo Magnético Abeliano

3.1 Eletrodinâmica de Maxwell

O físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) é conhecido, dentre outras contribuições, por ter dado uma descrição completa do Eletromagnetismo Clássico. J. C. Maxwell reuniu, conforme a seguir, todas as equações que envolvem o divergente e o rotacional dos campos elétrico e magnético, caracterizando inteiramente esses campos vetoriais de acordo com teorema de Helmholtz [45, 46]. Essas equações são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \quad (3.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (3.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e. \quad (3.1d)$$

A expressão (3.1a) é a lei de Gauss; a (3.1b) não tem um nome específico e implica na inexistência de monopolos magnéticos; a equação (3.1c) é a lei de indução de Faraday e a (3.1d) é a lei de Ampère com a correção Maxwell. Essas equações¹, juntamente com condições de contorno adequadas e com a lei de força de Lorentz,

$$\vec{F} = q_e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (3.2)$$

¹Como é usual, \vec{E} , \vec{B} , ρ_e e \vec{J}_e representam os campos elétrico e magnético e as densidades elétricas de carga e corrente, respectivamente. \vec{F} indica força e \vec{v} é a velocidade da carga q_e .

constituem a base da Eletrodinâmica Clássica.

3.2 Simetria entre Cargas Elétrica e Magnética

As equações de Maxwell apresentadas na seção anterior exibem uma interessante simetria entre as cargas elétrica e magnética. Em particular, se as considerarmos no vácuo, onde as densidades ρ_e e \vec{J}_e se anulam, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.3a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.3b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (3.3c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (3.3d)$$

Note que se fizermos a transformação de dualidade $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$ e $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$, as equações acima permanecem invariantes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.4a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.4b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (3.4c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (3.4d)$$

No entanto, tal simetria é perdida quando consideramos as fontes ρ_e e \vec{J}_e não nulas, em virtude das leis de Gauss e de Ampère. Assim, parece que alguma quantidade está “faltando”. Não é difícil perceber que podemos recuperar essa simetria se introduzirmos as densidades de carga e de corrente magnéticas nas equações de Maxwell, como segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \quad (3.5a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m, \quad (3.5b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{J}_m, \quad (3.5c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e. \quad (3.5d)$$

Agora, fazendo $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$ (equivalente a $\rho_e \rightarrow -\rho_m$ e $\vec{J}_e \rightarrow -\vec{J}_m$) e $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ (que corresponde a $\rho_m \rightarrow \rho_e$ e $\vec{J}_m \rightarrow \vec{J}_e$), encontramos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m, \quad (3.6a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \quad (3.6b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e, \quad (3.6c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{J}_m. \quad (3.6d)$$

Ou seja, tal como acontece na ausência de fontes – espaço livre –, a simetria é mantida.

Outro ponto importante a notar é que a introdução da carga magnética na teoria continua satisfazendo equações de continuidade. Para ver isso, basta aplicar o divergente nas expressões (3.5c) e (3.5d) para obter, respectivamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}, \quad (3.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}. \quad (3.8)$$

3.3 Formulação Covariante

A formulação covariante é dada pela definição do *field strength*, $W_{\mu\nu}$, em termos do 4-potencial eletromagnético A_μ [38, 39]:

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.9)$$

com os campos elétricos e magnéticos expressos por:

$$E_i = W_{i0}, \quad (3.10)$$

$$B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{jk}, \quad (3.11)$$

respectivamente.

A ação que descreve o campo eletromagnético é

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + A_\mu J_e^\mu), \quad (3.12)$$

da qual obtemos as equações de movimento com fontes, (3.1a) e (3.1d), na forma covariante:

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = J_e^\nu, \quad (3.13)$$

sendo $J^\mu = (-\rho_e, \vec{J}_e)$ a 4-corrente elétrica.

Segue imediatamente que a equação de continuidade (3.7) é satisfeita:

$$\partial_\mu J_e^\mu = 0. \quad (3.14)$$

Além disso, as equações no espaço livre (3.3a) e (3.3d) são obtidas fazendo $J^\nu = 0$ em (3.13),

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = 0. \quad (3.15)$$

As equações homogêneas (3.1b) e (3.1c) são determinadas a partir da identidade de Bianchi:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu W_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.16)$$

A transformação de dualidade poder ser dada se definirmos o *field strength* dual [39]:

$${}^*W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W^{\alpha\beta}, \quad (3.17)$$

que é equivalente a:

$$W^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dualidade}} {}^*W_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

De (3.16) e (3.17), podemos prontamente encontrar a identidade de Bianchi para o *field strength* dual:

$$\partial_\mu ({}^*W^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.19)$$

Dirac, no seu trabalho seminal [1], descreve a quantização da carga elétrica introduzindo a conceito de monopolo magnético e estendendo essa ideia para o contexto quântico. Assim, as equações de campo (3.13) e (3.19), invariantes perante a transformação de dualidade (3.17), seriam escritas como:

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = J_e^\nu, \quad (3.20)$$

$$\partial_\mu ({}^*W^{\mu\nu}) = J_m^\nu, \quad (3.21)$$

se $J_e^\nu \rightarrow J_m^\nu$ e $J_m^\nu \rightarrow -J_e^\nu$. Há também uma equação de continuidade para 4-corrente magnética $J_m^\nu = (\rho_m, -\vec{J}_m)$ aplique a 4-divergência em (3.21):

$$\partial_\mu J_m^\mu = 0, \quad (3.22)$$

que reproduz uma condição semelhante à (3.14).

Desse forma, as equações de Maxwell permitiriam perfeitamente a existência do monopolo magnético, se exibissem explicitamente a invariância perante a transformação de dualidade. Infelizmente até hoje ele nunca foi encontrado.

3.4 Monopolo Magnético de Dirac

Motivado pela hipotética da simetria existente entre as cargas elétrica e magnética apresentada pelas equações de Maxwell, o primeiro pesquisador a propor uma ousada descrição dos monopolos magnéticos foi P. A. M. Dirac em 1931 [1]. Para entender melhor esse assunto, considere uma carga elétrica q_e na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Seja \vec{r} um vetor que vai da carga a um ponto P de observação qualquer – veja a figura 3.1.

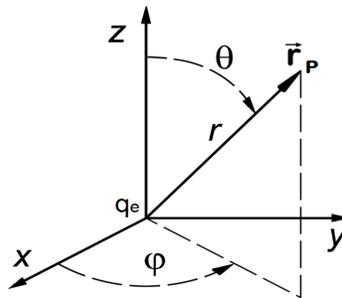


Figura 3.1: Sistema de coordenadas cartesianas; os ângulos esféricos foram desenhados porque serão considerados a seguir.

Sabemos que o campo elétrico gerado pela carga q_e no ponto de observação será dado por:

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (3.23)$$

em que temos adotado a constante eletrostática igual a unidade, por simplicidade e $r = |\vec{r}|$.

Analogamente, considerando uma carga magnética q_m , esperaríamos por simetria que o campo magnético fosse escrito como:

$$\vec{B} = \frac{q_m}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} . \quad (3.24)$$

E exigimos ainda que \vec{B} seja dado em termos do potencial vetor \vec{A} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} . \quad (3.25)$$

Se aplicarmos a divergência às expressões (3.24) e (3.25), obtemos respectivamente:

$$\nabla \cdot \vec{B} = q_m \delta(\vec{r}) , \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 . \quad (3.27)$$

A equação (3.27) é uma das Leis de Maxwell, enquanto a (3.26) gera uma contradição. Contudo, devido a simetria esférica do campo magnético, é possível introduzir um potencial vetor escrito da seguinte forma:

$$\vec{A} = f(\theta) (\nabla \phi) . \quad (3.28)$$

Ao fazer a escolha $f(\theta) = -\frac{q_m}{4\pi}(1 + \cos \theta)$, obtemos o potencial vetor de Dirac [1],

$$\vec{A} = \frac{q_m}{4\pi} \frac{\hat{r} \times \hat{z}}{r - (\vec{r} \cdot \hat{z})} = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\hat{r} \times \hat{z}}{(1 - \cos \theta)} = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \hat{\phi} , \quad (3.29)$$

assumindo $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ e \hat{z} um vetor normal apontando na direção positiva do eixo- z .

Note que a partir do potencial de Dirac (3.29), podemos encontrar \vec{B} expresso em (3.24) por meio da equação (3.25), como segue :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{q_m}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} . \quad (3.30)$$

Todavia, para o cálculo da expressão (3.30), devemos ter cuidado, uma vez que o potencial vetor (3.29) é singular em $\theta = 0$, embora seja regular em $\theta = \pi$. Assim, em virtude da singularidade de \vec{A} ao longo do semieixo- z positivo, não é possível computar o campo magnético correto nessa região. Mas, se usarmos um processo de regularização [47, 48], conseguimos obter \vec{B} da seguinte maneira:

$$\vec{B} = \frac{q_m}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} - q_m f(z) \delta(x) \delta(y) \hat{z} , \quad (3.31)$$

com $f(z) = 0$ se $z < 0$ e $f(z) = 1$ se $z \geq 0$. Dessa forma, o campo magnético de Dirac pode ser interpretado como aquele gerado por uma carga magnética mais uma contribuição singular ao longo do semieixo- z positivo, segundo mostra a figura abaixo:

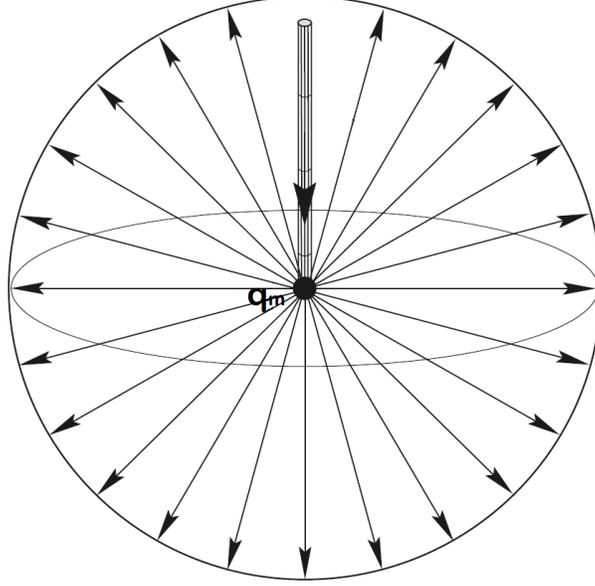


Figura 3.2: As linhas radiais correspondem ao primeiro termo do campo magnético [equação (3.31)]; ao passo que as linhas de campo na direção negativa do eixo- z referem-se ao termo extra que decorre da singularidade fora da origem. Figura adaptada da referência [48].

Podemos calcular o fluxo magnético total Φ através da superfície fechada acima e obter:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{q_m}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} - q_m \int_S f(z) \delta(x) \delta(y) (\hat{z} \cdot d\vec{S}) \\
 &= q_m - q_m \\
 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

A introdução da contribuição da linha de singularidade para o campo magnético corrige o paradoxo existente entre as expressões (3.26) e (3.27).

Outro ponto interessante a ser destacado é que a equação (3.29) para o potencial vetor pode ser dada como uma transformação de calibre, com o operador da transformação definido por

$U_1 = \exp(-iq_e q_m \phi)$. Veja a seguir:

$$\vec{A} = f(\theta) (\nabla \phi) = -\frac{q_m}{4\pi} (1 + \cos \theta) (\nabla \phi) = -\frac{(1 + \cos \theta)}{4\pi} \frac{i}{q_e} U_1^{-1} \nabla U_1 . \quad (3.33)$$

Essa representação é um gauge singular puro, a menos de um fator angular multiplicativo.

Considere agora uma transformação de calibre com $U_2 = \exp(-\frac{i}{2\pi} q_e q_m)$:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda = \vec{A} + \frac{i}{q_e} U_2^{-1} \nabla U_2 , \quad (3.34)$$

em que foi considerado $\lambda = \frac{1}{2\pi} q_m \phi$. Escrevendo \vec{A} de acordo com (3.29), essa transformação é equivalente a:

$$\vec{A} = \frac{q_m}{4\pi r} \frac{\hat{r} \times \hat{z}}{(1 - \cos \theta)} \rightarrow \vec{A}' = \frac{q_m}{4\pi r} \frac{\hat{r} \times \hat{z}}{(1 + \cos \theta)} . \quad (3.35)$$

Portanto, a transformação de gauge é interpretada como uma mudança na direção da linha de singularidade. No caso da transformação U_2 , a linha singular foi mudada de $\theta = 0$ para $\theta = \pi$ – ou equivalentemente $\hat{z} \rightarrow -\hat{z}$.

3.5 Quantização da Carga Elétrica na Teoria de Dirac

Mesmo com o problema da singularidade apresentada pelo potencial vetor, uma consequência que surge da existência do monopolo de Dirac é a quantização da carga elétrica. Para verificar isso, vamos considerar a função de onda de uma partícula livre com carga elétrica q_e :

$$\psi = \psi(\vec{r}, t). \quad (3.36)$$

Sabemos da Mecânica Quântica [49] que a interação entre tal partícula e um campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ é descrita pelo acoplamento mínimo:

$$D\psi = \left(\nabla - iq_e \vec{A} \right) \psi. \quad (3.37)$$

Assumimos a transformação de calibre mostrada em (3.35) que conecta \vec{A}' e \vec{A} como:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda, \quad (3.38)$$

em que a função escalar da transformação é $\lambda = \frac{1}{2\pi} q_m \phi$. Isso corresponde à introdução de uma fase na função de onda (3.35), como segue:

$$\psi' = \exp(-iq_e \lambda) \psi = \exp\left(-iq_e q_m \frac{\phi}{2\pi}\right) \psi. \quad (3.39)$$

Consideramos agora que o ângulo azimutal ϕ varie de $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$. Assim, função de onda ψ' resultará em:

$$\begin{aligned}\psi' &= \exp \left[-iq_e q_m \frac{1}{2\pi} (\phi + 2\pi) \right] \psi \\ &= \exp \left(-iq_e q_m \frac{\phi}{2\pi} \right) \exp(-iq_e q_m) \psi.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Para que ψ' seja definida univocamente, devemos exigir que:

$$\exp(-iq_e q_m) = 1,$$

de onde somos conduzidos à condição de quantização de Dirac [1] para a carga elétrica.

$$q_e q_m = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.\tag{3.41}$$

A especulação mais interessante dessa teoria é o fato de que a existência de qualquer carga magnética isolada q_m seria o suficiente para explicar a quantização da carga elétrica.

Capítulo 4

Monopolo Magnético de 't Hooft-Polyakov e Dyon de Julia-Zee

4.1 Modelo de Wu-Yang

Como vimos na seção 3.4, o potencial vetor proposto por Dirac apresenta um problema de irregularidade. Porém, isso poder ser resolvido com o modelo de Wu-Yang [2], no qual se considera a eletrodinâmica abeliana como parte de uma teoria unificada onde o grupo abeliano $U(1)$ é inserido em um grupo não abeliano $SU(2)$. Essa inserção poder ser vista da seguinte forma: uma vez que na teoria não abeliana o campo de Yang-Mills¹ A_i se transforma como [38] (veja também o apêndice B):

$$A'_i = \omega A_i \omega^{-1} + \frac{i}{e} \omega \partial_i \omega^{-1}, \quad (4.1)$$

sendo $\omega \in SU(2)$ e “ e ”, a constante de acoplamento do campo de Yang-Mills com o campo de Higgs, A_i pertence a álgebra do grupo $SU(2)$. Assim, podemos escrever A_i na base dos geradores de $SU(2)$, os quais são as matrizes de Pauli²:

$$A_i = A_i^a \sigma^a, \text{ sendo } a, i = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

¹Na literatura, é preferível chamar A_μ de campo de Yang-Mills em vez de campo de gauge, quando tratamos do grupo de simetria de calibre $SU(2)$ ou $SO(3)$.

²O índice “ i ” é referente às componetes espaciais – do espaço-tempo –, enquanto o “ a ”, ao espaço interno dos campos.

Com isso, propõe-se então que o potencial vetor abeliano de Dirac $-(A_i)_{Dirac}$ – esteja associado ao subgrupo de Cartan de $SU(2)$ por meio da relação:

$$A_i = (A_i)_{Dirac} \sigma_3, \quad (4.3)$$

em que $(A_i)_{Dirac} = -\frac{q_m}{4\pi r} \frac{\sin \theta}{(1-\cos \theta)} \delta_{i3}$.

Comparando (4.2) com (4.3), as componentes A_i^a do potencial vetor não abeliano A_i podem, portanto, ser identificadas como:

$$A_i^1 = A_i^2 = 0, \quad (4.4)$$

$$A_1^3 = (A_1)_{Dirac} = 0, \quad (4.5)$$

$$A_2^3 = (A_2)_{Dirac} = 0 \text{ e} \quad (4.6)$$

$$A_3^3 = (A_3)_{Dirac} = -\frac{q_m}{4\pi r} \frac{\sin \theta}{(1-\cos \theta)}. \quad (4.7)$$

Note que A_3^3 está de acordo com (3.29), mantendo a ainda singularidade em $\theta = 0$. Entretanto, se considerarmos o seguinte elemento do grupo $SU(2)$, correspondente a rotações sucessivas [33] em torno do terceiro eixo do espaço interno:

$$\omega = e^{i\sigma_3 \frac{\phi}{2}} e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\sigma_3 \frac{\phi}{2}}, \quad (4.8)$$

a transformação de gauge (4.1) conduz (4.3) a [42, 50]:

$$A'_i = A_i^k \sigma^k, \quad (4.9)$$

de modo que $A_i^k \propto \varepsilon_{jik} \frac{x_j}{r^2}$, ε_{jik} é o símbolo de Levi-Civita e os x'_j s são as componentes esféricas usuais, as quais satisfazem $x_j x^j = r^2$.

O potencial vetor singular de Dirac, dado na expressão (4.3), desaparece porque o termo $\frac{i}{e} \omega \partial_i \omega^{-1}$ na transformação (4.1) tem o sinal contrário, a saber:

$$\frac{i}{e} \omega \partial_i \omega^{-1} = \frac{1}{er} \frac{\sin \theta}{(1-\cos \theta)} \delta_{i3} \sigma_3 = -\frac{4\pi}{eq_m} (A_i)_{Dirac} \sigma_3 \Rightarrow \quad (4.10)$$

$$\frac{i}{e} \omega \partial_i \omega^{-1} + \frac{4\pi}{eq_m} (A_i)_{Dirac} \sigma_3 = 0, \quad (4.11)$$

se a condição de quantização de Dirac (3.41) com $n = 2$ e $q_e = e$ for satisfeita, ou seja, $eq_m = 4\pi$.

Assim (4.11), torna-se:

$$\frac{i}{e} \omega \partial_i \omega^{-1} + (A_i)_{Dirac} \sigma_3 = 0. \quad (4.12)$$

Isso mostra que o termo $\frac{i}{e}\omega\partial_i\omega^{-1}$ da transformação de calibre (4.1) apresenta a mesma natureza singular que o potencial de Dirac.

O potencial (4.9) proposto por Wu e Yang também apresenta solução tipo-monopolo, pois com a definição do *field strength* não abeliano – consulte o apêndice³ B –:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.13)$$

o análogo ao campo magnético abeliano:

$$B_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}^a, \quad (4.14)$$

comporta-se como:

$$B_i^a \propto \frac{x_i x_a}{r^4} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (4.15)$$

A teoria de Wu e Yang, contudo, resulta em um problema com a definição da carga magnética, porque se consideramos a integral de superfície S de B_i^a , quando essa se estende ao infinito, obtemos um resultado nulo, ou seja:

$$\int_{s \rightarrow \infty} dS_i B_i^a = 0, \quad (4.16)$$

implicando em $q_m = 0$. Além disso, a singularidade na origem do potencial não abeliano gera uma dificuldade na definição da energia. O problema da carga magnética poder ser resolvido se o *field strength* não abeliano for projetado em uma direção privilegiada. Como veremos, o acoplamento do campo de Yang-Mills com o campo de Higgs solucionará tais empecilhos.

4.2 Modelo de George-Glashow

A descrição moderna da teoria do monopolo magnético foi dada de forma independente por 't Hooft e Polyakov [3, 4] em meados dos anos 70. Eles descobriram a existência de soluções tipo-monopolos no modelo $SO(3)$ de George-Glashow [5], em um processo de quebra espontânea de simetria pelo mecanismo de Higgs (veja o apêndice B), onde um campo de Yang-Mills A_μ é

³O sinal negativo no terceiro termo $-e\varepsilon^{abc}A_\mu^c A_\nu^b$ é uma convenção no modelo $SU(2)$, que decorre da relação comutação das matrizes de Pauli. Na próxima seção, assumiremos outra convenção, $+e\varepsilon^{abc}A_\mu^c A_\nu^b$, no modelo $SO(3)$ em virtude da relação de comutação dos seus geradores.

acoplado a um tripleto de campos escalares reais de Higgs $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ que se transforma na representação adjunta $-\omega\phi\omega^{-1}$, $\omega \in SO(3)$.

A densidade lagrangiana desse modelo é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a (W^{\mu\nu})^a + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^a (D^\mu\phi)^a - V(\phi^a\phi^a), \quad (4.17)$$

em que $a = 1, 2, 3$ é um índice associado ao espaço interno dos campos – definidos na álgebra de $SO(3)$ –, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ são índices relacionados ao espaço-tempo de Minkowski e:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.18)$$

$$(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c, \quad (4.19)$$

$$V(\phi^a\phi^a) = V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (4.20)$$

com “ e ” sendo a constante de acoplamento entre os campos de Yang-Mills e Higgs e associada às cargas elétrica e magnética.

Os campos elétricos e magnéticos não abelianos são determinados de forma análoga aos abelianos, respectivamente:

$$E_i^a = W_{0i}^a, \quad (4.21)$$

$$B_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}^a \text{ (ou } W_{ij}^a = \varepsilon_{ijk}B_k^a\text{)}. \quad (4.22)$$

As equações de movimento não homogêneas são:

$$(D_\mu W^{\mu\alpha})^a = e(J^\alpha)^a, \quad (4.23)$$

$$D_\mu (D^\mu\phi)^a = -\lambda(|\phi|^2 - v^2)\phi^a, \quad (4.24)$$

$$(D_\mu W^{\mu\alpha})^a = \partial_\mu (W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c, \quad (4.25)$$

dadas as definições:

$$(J^\alpha)^a = \varepsilon^{abc}(D^\alpha\phi)^b\phi^c, \quad (4.26)$$

$$D_\mu (D^\mu\phi)^a = \partial_\mu (D^\mu\phi)^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b (D^\mu\phi)^c \quad (4.27)$$

e considerando $(J^\alpha)^a$ como a a –ésima componente da densidade de corrente J^α .

Já as equações de movimento homogêneas para campo de Yang-Mills decorrem da identidade de Bianchi, similarmente ao caso abeliano [veja a equação (3.16)]:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (D_\beta W_{\mu\nu})^a = 0. \quad (4.28)$$

O tensor energia-momento é expresso como:

$$T_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta} W_{\mu\alpha}^a W_{\nu\beta}^a + (D_\mu \phi)^a (D_\nu \phi)^a - \mathcal{L} g_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

o qual satisfaz a lei de conservação:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (4.30)$$

Computamos o funcional da energia na maneira usual:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x T_{00} = \int d^3x [-g^{\alpha\beta} W_{0\alpha}^a W_{0\beta}^a + (D_0 \phi)^a (D_0 \phi)^a - \mathcal{L}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x [-2g^{\alpha\beta} W_{0\alpha}^a W_{0\beta}^a + (D_0 \phi)^a (D_0 \phi)^a + (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a \\ &\quad + E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a + 2V]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

O vácuo da teoria é obtido no regime estacionário e nos calibres puro e temporal:

$$W_{\mu 0}^a = (D_0 \phi)^a = E_i^a = B_i^a = 0. \quad (4.32)$$

Assim, a energia torna-se:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x [(D_i \phi)^a (D_i \phi)^a + 2V]. \quad (4.33)$$

Além disso, para configurações de energia mínima e finita, devemos exigir que os campos de Higgs sejam homogêneos no infinito:

$$(D_i \phi)^a = 0. \quad (4.34)$$

Portanto, encontrar configurações estáveis significa determinar os mínimos do potencial, os quais formam um esfera de vácuo de raio v :

$$|\phi|^2 = v^2 \quad (4.35)$$

No apêndice B, o mecanismo Higgs com de quebra de simetria de $SO(3)$ para $SO(2)$ apresenta o surgimento de dois bósons vetoriais massivos, os quais absorvem os dois campos

escalares ϕ^1 e ϕ^2 . Porque escolhemos uma estrutura de vácuo como em (B.63) por razões didáticas, o subgrupo não quebrado restante $SO(2)$ apresenta o gerador τ^3 aniquilando o vácuo. Ele é o gerador da carga elétrica dos bósons vetoriais massivos – veja a equação (B.87) –. Porém, para um escolha arbitrária de vácuo do campo de Higgs, o gerador não quebrado de rotações em uma direção genérica no espaço interno pode ser dado como uma combinação linear dos geradores τ^1 , τ^2 e τ^3 de $SO(3)$, os quais representam rotações em torno do seus respectivos eixos ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 [51]:

$$\tau^3 \xrightarrow{\text{para uma direção qualquer}} \hat{R} = \hat{\phi}^a \tau^a, \text{ em que } \hat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{v} \quad (4.36)$$

Olhemos para a derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + (A_\mu)_{\text{n\~{a}o abel}} = \partial_\mu + eA_\mu^a \tau^a; \quad (4.37)$$

comparando com aquela do caso abeliano:

$$D_\mu = \partial_\mu + \hat{Q} (A_\mu)_{\text{abel}}, \quad (4.38)$$

sendo \hat{Q} operador carga elétrica, podemos definir $(A_\mu)_{\text{abel}}$ como a uma decomposição no espaço interno do campo de Higgs, a saber:

$$(A_\mu)_{\text{abel}} = A_\mu^a \hat{\phi}^a, \quad (4.39)$$

com \hat{Q} dado por:

$$\hat{Q} = e\hat{\phi}^b \tau^b = e\hat{R} \quad (4.40)$$

O um fato interessante é que as componentes A_μ^a do campo não abeliano $(A_\mu)_{\text{n\~{a}o abel}}$ na base dos geradores de $SO(3)$ são as mesmas componentes do campo abeliano $(A_\mu)_{\text{abel}}$ na base das coordenadas normalizadas $\hat{\phi}^a$ do tripleto de Higgs.

4.3 Considerações Topológicas

Ao contrário do modelo de Wu-Yang, a descrição de George-Glashow admite soluções estáticas tipo-sólitons, possuindo energia finita, cujo comportamento assintótico é típico de um monopolo magnético. A configuração de energia mínima e finita introduz uma esfera de

vácuo $S_{v\u00e1cuo}^2$ para a teoria $-|\phi|^2 = v^2$, determinando um *manifold* no espa\u00e7o interno. Essa configura\u00e7\u00e3o \u00e9 atingida no limite assint\u00f3tico, quando $r \rightarrow \infty$; ou equivalentemente, quando fazemos a esfera S_r^2 , $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, no espa\u00e7o f\u00edsico crescer para infinito $S_{r \rightarrow \infty}^2$. O *manifold* $S_{r \rightarrow \infty}^2$ ent\u00e3o \u00e9 mapeado ao $S_{v\u00e1cuo}^2 - S_{r \rightarrow \infty}^2 \rightarrow S_{v\u00e1cuo}^2$ - estabelecendo assim uma classe de homotopia [42]. O grupo de homotopia associado, isomorfo ao conjunto dos n\u00fameros inteiro \u00e9:

$$\pi_2(S^2) \cong n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.41)$$

Como visto na se\u00e7\u00e3o 2.3.3, o par\u00e2metro n refere-se ao n\u00famero de vezes que a esfera $S_{r \rightarrow \infty}^2$ envolve $S_{v\u00e1cuo}^2$. As solu\u00e7\u00f5es com energia finita est\u00e3o associadas a diferentes classes de homotopia de acordo com o comportamento assint\u00f3tico dos campos ϕ^a . Por exemplo, se o comportamento assint\u00f3tico de ϕ for independente das coordenadas do espa\u00e7o f\u00edsico, suponhamos igual ao valor de v\u00e1cuo (B.63) do ap\u00eandice B:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

ent\u00e3o o mapeamento $S_{r \rightarrow \infty}^2 \rightarrow S_{v\u00e1cuo}^2$ \u00e9 equivalente ao mapeamento de $S_{r \rightarrow \infty}^2$ ao ponto $(0, 0, v)$. Nesse caso, o grupo de homotopia correspondente \u00e9 o trivial:

$$\pi_2(S^2) \cong n = 0, \quad (4.43)$$

pois n conta o n\u00famero de vezes que o *manifold* $S_{r \rightarrow \infty}^2$ rodeia o ponto $(0, 0, v)$. Estamos assim diante do setor topol\u00f3gico trivial $n = 0$.

Outra poss\u00edvel escolha \u00e9 considerar o comportamento assint\u00f3tico simetricamente esf\u00e9rico [4]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi^a \rightarrow \frac{vx^a}{r}, \quad (4.44)$$

em que $x_a x^a = r^2$ e os x^a 's s\u00e3o as componentes esf\u00e9ricas usuais. Dessa forma, o mapeamento entre os *manifolds* $S_{r \rightarrow \infty}^2 \rightarrow S_{v\u00e1cuo}^2$ n\u00e3o mant\u00e9m mais uma correspond\u00eancia trivial. Agora o grupo de homotopia n\u00e3o trivial satisfaz a seguinte rela\u00e7\u00e3o isom\u00f3rfica:

$$\pi_2(S^2) \cong n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.45)$$

indicando o n\u00famero de vezes que a esfera $S_{r \rightarrow \infty}^2$ circula $S_{v\u00e1cuo}^2$. Consideramos (+) para o sentido hor\u00e1rio e (-), anti-hor\u00e1rio, por conven\u00e7\u00e3o. Solu\u00e7\u00f5es tipo-monopolos com energia m\u00ednima s\u00e3o

dadas no setor topológico $n = +1$ e anti-monopolos, $n = -1$ [40]. Trataremos aqui apenas do primeiro caso, pois o segundo é descrito trivial e analogamente.

As soluções pertencentes a diferentes setores topológicos, ou similarmente, a diferentes classes de homotopia não podem ser deformadas continuamente uma a outra [3]. Isso acontece porque se tentarmos conectar as duas estruturas de vácuo (4.42) e (4.44) por uma transformação de calibre, esta apresentará singularidade⁴ no polo $(0, 0, v)$ da esfera $S^2_{v\underline{vacuo}}$. Essa transformação de gauge não pode ser definida globalmente e, portanto, existe uma barreira infinita separando os vácuos supracitados. Do ponto de vista energético, entendemos tal barreira da seguinte forma: configurações de mínima energia são determinadas para campos homogêneos, isto é:

$$(D_i\phi)^a = 0; \tag{4.46}$$

e no gauge temporal, o termo cinético de ϕ é do tipo:

$$K_\phi \propto |\partial_0\phi|^2. \tag{4.47}$$

Assim, a energia E necessária para sair do estado de vácuo (4.42) para (4.44) ao longo de $S^2_{v\underline{vacuo}}$ é proporcional ao volume V do espaço físico [38]:

$$E \propto VK_\phi = V |\partial_0\phi|^2. \tag{4.48}$$

No limite que $V \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \infty$; em vista disso, uma barreira infinita de energia separa os dois setores topológicos.

4.4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo George-Glashow

A condição de homogeneidade dos campos no vácuo (4.34), juntamente com o comportamento assintótico de (4.44), em ordem:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (D_i\phi)^a \rightarrow 0 \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} \phi^a \propto \frac{x^a}{r} \tag{4.49}$$

⁴Em geral, transformações ou mapeamento envolvendo simetria esférica exibem singularidades nos polos. A exemplo, temos a transformação (4.1) que tem a mesma natureza singular do potencial de Dirac. Existe também o conhecido mapeamento do manifold esférico a um plano, no qual são necessários no mínimo dois mapas para cobrir toda a esfera [32, 35].

resultam na seguinte equação:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (D_i \phi)^a \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\varepsilon_{ajk} \varepsilon_{jim} \frac{x_k x_m}{r^3} + e \varepsilon_{ajk} A_i^j \frac{x_k}{r} \right) \rightarrow 0. \quad (4.50)$$

De onde decorre que devemos escolher:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_i^j \rightarrow -\frac{1}{e} \varepsilon_{jim} \frac{x_m}{r^2}, \quad (4.51)$$

correspondendo ao comportamento assintótico de B_i^a :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B_i^a \rightarrow \frac{1}{e} \frac{x_a x_i}{r^4} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (4.52)$$

Isso é uma característica típica do campo de uma carga pontual de natureza coulombiana de acordo a expressão (3.24).

Podemos notar em (4.36) que o gerador \hat{R} não quebrado aniquila o vácuo (4.44) do setor topológico $n = +1$, ou seja $\hat{R} \in SO(2)$, o grupo de simetria remanescente. É natural então definir o potencial eletromagnético abeliano como a projeção em uma direção arbitrária no espaço interno, posto que esse potencial está associado ao grupo $U(1)$ o qual é isomorfo a $SO(2)$. O mais interessante é que isso pode ser obtido diretamente das equações de estabilidade (4.32) e homogeneidade (4.34) para os campos de Higgs, analogamente ao comportamento assintótico de (4.51). Dessa forma, o campo de Yang-Mills que satisfaz $(D_\mu \phi)^a = 0$ é apresentado como [51]:

$$A_\mu^a = \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^b \partial_\mu \hat{\phi}^c + \hat{\phi}^a \Pi_\mu, \quad (4.53)$$

para algum 4-vetor Π_μ constante arbitrário, identificado imediatamente como o 4-potencial abeliano pela condição (4.39), a saber:

$$\hat{\phi}^a A_\mu^a = \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b \partial_\mu \hat{\phi}^c + \hat{\phi}^a \hat{\phi}^a \Pi_\mu \Rightarrow \quad (4.54)$$

$$\Pi_\mu = \hat{\phi}^a A_\mu^a = (A_\mu)_{abel}. \quad (4.55)$$

Por conseguinte, a equação (4.53) torna-se:

$$A_\mu^a = \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^b \partial_\mu \hat{\phi}^c + \hat{\phi}^a (A_\mu)_{abel}. \quad (4.56)$$

Substituindo (4.56) na definição do *field strength* (4.18), encontramos:

$$W_{\mu\nu}^a = (W_{\mu\nu})'_{abel} \hat{\phi}^a \text{ ou} \quad (4.57)$$

$$(W_{\mu\nu})'_{abel} = W_{\mu\nu}^a \hat{\phi}^a, \quad (4.58)$$

sendo [42]:

$$\begin{aligned} (W_{\mu\nu})'_{abel} &= \partial_\mu (A_\nu)_{abel} - \partial_\nu (A_\mu)_{abel} + \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \left(\partial_\mu \hat{\phi}^b \right) \left(\partial_\nu \hat{\phi}^c \right) \\ &= (W_{\mu\nu})_{abel} + \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \left(\partial_\mu \hat{\phi}^b \right) \left(\partial_\nu \hat{\phi}^c \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pela transformação de dualidade (3.17), teremos:

$$\begin{aligned} (*W^{\mu\nu})'_{abel} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (W_{\alpha\beta})'_{abel} \Rightarrow \\ \partial_\mu (*W^{\mu\nu})'_{abel} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (W_{\alpha\beta})'_{abel} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (W_{\alpha\beta})_{abel} + \frac{1}{2e} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \left[\hat{\phi}^a \left(\partial_\alpha \hat{\phi}^b \right) \left(\partial_\beta \hat{\phi}^c \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Da equação (3.20), obtemos:

$$\partial_\mu (W^{\mu\nu})_{abel} = J_e^\nu; \quad (4.61)$$

mas as configurações de monopolo são dadas na ausência de carga elétrica – $J_e^\nu = 0$ –, de modo que:

$$\partial_\mu (W^{\mu\nu})_{abel} = 0. \quad (4.62)$$

Com (4.62), a expressão (4.60) fica:

$$\partial_\mu (*W_{\mu\nu})'_{abel} = \frac{1}{2e} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \left[\hat{\phi}^a \left(\partial_\alpha \hat{\phi}^b \right) \left(\partial_\beta \hat{\phi}^c \right) \right]. \quad (4.63)$$

Comparando (4.63) com a hipótese de Dirac (3.21):

$$\partial_\mu (*W^{\mu\nu})'_{abel} = J_m^\nu, \quad (4.64)$$

chegamos à definição da 4-corrente magnética⁵:

$$J_m^\nu = \frac{1}{2e} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \left[\hat{\phi}^a \left(\partial_\alpha \hat{\phi}^b \right) \left(\partial_\beta \hat{\phi}^c \right) \right]. \quad (4.65)$$

Note que J_m^μ depende somente dos campos de Higgs e satisfaz a equação de continuidade (3.22):

$$\partial_\mu J_m^\mu = 0. \quad (4.66)$$

⁵O índice m de J_m^ν é para indicar que J_m^ν é a 4-corrente magnética. Não confunda aqui m com índice do espaço interno, os quais representamos com índices superiores; nem confunda com índice espacial de Minkowski. Isso deve ficar claro no contexto.

A carga magnética topológica é então obtida como:

$$\begin{aligned} Q_m &= \int d^3x (J_m)_0 = \int d^3x (J_m)_0 = -\frac{1}{2e} \int d^3x \left\{ \varepsilon_0^{\mu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \left[\hat{\phi}^a \left(\partial_\alpha \hat{\phi}^b \right) \left(\partial_\beta \hat{\phi}^c \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2e} \int d^3x \left\{ \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \partial_i \left[\hat{\phi}^a \left(\partial^j \hat{\phi}^b \right) \left(\partial^k \hat{\phi}^c \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

O cálculo dessa integral exige muitos passos algébricos {o leitor interessado pode ver tal resolução detalhadamente no limite em que $r \rightarrow \infty$ na referência [42]}, resultando em:

$$Q_m = \frac{4\pi}{e} n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.68)$$

A equação (4.68) é o análogo não abeliano à condição de quantização de Dirac (3.41). Entretanto, “ e ” é a constante de acoplamento e não a carga elétrica do monopolo [lembre-se de que para o cálculo de (4.68), assumimos em (4.62) a ausência da carga elétrica do defeito]. Essa constante está relacionada ao autovalores do operador \hat{Q} em (4.40) e, conseqüentemente, às cargas elétricas dos bósons vetoriais massivos. Conforme já mencionado, n é o *Brower degree* e corresponde ao número de vezes que a esfera $S_{r \rightarrow \infty}^2$ envolve $S_{v\u00e1cuo}^2$. Ao passo que na descrição Dirac n surge no contexto da Mecânica Quântica, n aparece sendo um parâmetro topológico no modelo de George-Glashow, ou seja, um resultado da relação de homotopia entre $S_{r \rightarrow \infty}^2$ e $S_{v\u00e1cuo}^2$. Por isso, a carga magnética Q_m também é chamada de carga topológica. Se os campos evoluírem suavemente com tempo, o que é permitido pelas equações de movimento no regime não estacionário, n não pode mudar, conforme foi dito na seção 2.3.3. Assim, a carga magnética é topologicamente conservada, refletindo na equação de continuidade (4.66).

Uma outra discussão importante a ser feita é que no setor topológico trivial $n = 0$, onde vácuo é dado por $(0, 0, v)$, a carga magnética se anula. Nesse caso, as equações de Maxwell são as usuais na ausência de carga elétrica:

$$\partial_\mu (W^{\mu\nu})_{abel} = 0 \text{ e } \partial_\mu (*W^{\mu\nu})_{abel} = 0. \quad (4.69)$$

Entretanto, no setor $n = 1$, as equações de Maxwell sem fonte de carga elétrica tornariam-se:

$$\partial_\mu (W^{\mu\nu})_{abel} = 0 \text{ e } \partial_\mu (*W^{\mu\nu})'_{abel} = J_m^\nu, \quad (4.70)$$

em que

$$(*W^{\mu\nu})'_{abel} = (*W^{\mu\nu})_{abel} + (\text{termo extra de Higgs}).$$

Podemos então imaginar que tudo isso acontece como se a natureza singular da transformação de calibre (4.8) no polo introduzisse um termo extra, dependente do campo de Higgs, responsável por gerar a carga magnética topológica [51]. Curiosamente, essa natureza singular é a mesma do potencial vetor de Dirac – veja a equação (4.12).

Por fim, vale ressaltar que a definição de $(W_{\mu\nu})'_{abel}$ não é única. Qualquer escolha é válida, desde que a invariância de gauge e o comportamento assintótico $\lim_{r \rightarrow \infty} (D_i \phi)^a \rightarrow 0$ sejam mantidos. Segue como exemplo o $(W_{\mu\nu})'_{abel}$ de t'Hooft [3]:

$$(W_{\mu\nu})'_{abel} = W_{\mu\nu}^a \hat{\phi}^a - \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \left[\hat{\phi}^a \left(D_\mu \hat{\phi}^b \right) \left(D_\nu \hat{\phi}^c \right) \right]. \quad (4.71)$$

Mas esse é um caso mais geral de (4.59), onde $\hat{\phi}^a$ passa a ser $\hat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{|\phi|}$ e não $\hat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{v}$. Claramente, (4.71) tem irregularidade nos zeros dos campos de Higgs. Poder ser interpretado que tais zeros indicam a localização dos monopolos em \mathbb{R}^3 e que o *Brower degree* n está associado também ao número de zeros e, obviamente, de monopolos [40]. No caso de um único monopolo, o campo de Higgs tem apenas um zero – na origem –, correspondendo portanto a $n = 1$.

4.4.1 A Carga Magnética como o Fluxo Magnético

Por causa do comportamento assintótico de (4.52) e também em virtude da equação (4.58), a carga magnética Q_m é definida, por outro lado, como a integral de superfície fechada S – quando esta se estende ao infinito – da projeção do campo magnético ao longo da direção $\hat{\phi}^a$ [48, 52], ou seja, Q_m é dada em termos do fluxo:

$$Q_m = \oint_{s \rightarrow \infty} dS_i \cdot B_i = \oint_{s \rightarrow \infty} dS_i \cdot B_i^a \hat{\phi}^a = \frac{1}{v} \oint_{s \rightarrow \infty} dS_i \cdot B_i^a \phi^a = \frac{4\pi}{e} n \quad (4.72)$$

Repare que esse resultado é similar à condição de quantização de Dirac (4.68). Especialmente, a carga magnética elementar é obtida quando $n = 1$:

$$Q_m = \frac{4\pi}{e} \quad (4.73)$$

Observe a importância de projetar o campo B_i^a na direção do campo de Higgs para a definição de Q_m . Isso de fato corrige o problema que surgiu em (4.16) no modelo de Wu-Yang.

4.5 Os *Ansätze* de 't Hooft-Polyakov e Julia-Zee

Em virtude da simetria $SO(3)$ original da densidade lagrangiana (4.17) e dos comportamentos assintóticos (4.44) e (4.51) dos campos de Higgs e de Yang-Mills, respectivamente, pode-se propor uma solução simplificada das equações de movimento dos campos, escolhendo o *ansatz* simetricamente esférico de 't Hooft-Polyakov [3, 4, 53]:

$$\phi^a = \frac{x^a H(r)}{er^2}, \quad A_i^a = \varepsilon_{iak} \frac{x_k}{er^2} [W(r) \mp 1] \quad \text{e} \quad A_0^a = 0, \quad (4.74)$$

em que os x_a 's são as coordenadas esféricas usuais, tal que $x_a x^a = r^2$, e os parâmetros H e W são funções adimensionais de r .

As condições de contorno que satisfazem configurações de energia finita são {veja também [54]}:

$$H(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{r} = \pm ve, \quad (4.75)$$

$$W(0) = \pm 1 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = 0. \quad (4.76)$$

O sinal superior (inferior) corresponde ao monopolo (antimonopolo).

Soluções que suportam tanto carga magnética quanto elétrica são conhecidas como dyons. Elas surgem quando o gauge temporal é substituído por um *ansatz* também simetricamente esférico. A componente temporal A_0^a pode ser vista como um tripleto de Higgs extra, uma vez que os *ansätze* possuem a mesma estrutura. Essa ideia é conhecida como *correspondência de Julia-Zee* [53]:

$$A_0^a = \frac{x^a J(r)}{er^2}. \quad (4.77)$$

A função adimensional $J(r)$ no *ansatz* de Julia-Zee deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$J(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{J(r)}{r} = \pm veK, \quad (4.78)$$

sendo K uma constante adimensional que, conforme veremos, está relacionada às cargas elétrica e magnética, bem como estabelece a relação de proporcionalidade entre A_0^a e o campo de Higgs ϕ^a . O sinal superior refere-se ao dyon e o inferior, ao antidyon.

4.5.1 A Carga Elétrica como o Fluxo Elétrico

Analogamente à definição da carga magnética (4.72), a carga elétrica é dada pelo fluxo [48, 52]:

$$\begin{aligned} Q_e &= \oint_{s \rightarrow \infty} dS_i \cdot E_i = \oint_{s \rightarrow \infty} dS_i \cdot E_i^a \hat{\phi}^a \\ &= \frac{1}{v} \oint_{s \rightarrow \infty} dS_i \cdot E_i^a \phi^a = \pm \frac{4\pi}{e} K' = \pm K' Q_m, \end{aligned} \quad (4.79)$$

considerando-se K' como um parâmetro arbitrário introduzido na teoria [veja a equação (5.24)].

Uma vez que K' define a razão entre as cargas elétrica e magnética, o mesmo também está vinculado à constante K .

As soluções BPS das equações de movimento (4.23) e (4.24) nos *ansatze* de 't Hooft-Polyakov e Julia-Zee, descrevendo monopolos e dyons, respectivamente, serão apresentadas como limites de um modelo estendido com termos CPT-pares de violação de Lorentz nos setores de gauge e de Higgs.

Capítulo 5

Formalismo BPS

Em 1976, Bolgomol'nyi apresentou um método para encontrar soluções clássicas estáveis [41], o qual consiste em reescrever o funcional da energia na forma de quadrados perfeitos. Tais termos então são anulados afim de se minimizar a energia, originando equações diferenciais de primeira ordem, que além de serem mais fáceis de resolver, satisfazem as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange, fornecendo assim as soluções legítimas do sistema. Um outro fato interessante nesse procedimento é que, uma vez conhecidas as condições de contorno, é possível determinar a energia mínima sem contudo conhecer as soluções. Em seu artigo, Bolgomol'nyi discute a estabilidade das soluções topológicas tipo parede de domínios, linhas de vórtices, monopolos magnéticos e dyons. Coincidentemente, antes da publicação de Bolgomol'nyi, Prasad e Sommerfield [53] já houveram publicado em 1975 a aplicação da mesma técnica na obtenção de soluções estáveis para o monopolo de 't Hooft-Polyakov e para o dyon de Julia-Zee, no limite em que a razão entre os quadrados das massas dos campos Higgs e de Yang-Mills de perturbação tendem a zero – ou de forma equivalente, quando se faz o potencial nulo –. Esse método ficou conhecido como *formalismo BPS* e o limite anteriormente descrito, como limite de *Bolgomol'nyi-Prasad -Sommerfield (BPS)*, em homenagem aos três pesquisadores.

Explicaremos brevemente adiante o formalismo BPS para os casos do monopolo e do dyon no modelo $SO(3)$ de George-Glashow.

5.1 Formalismo BPS para o Monopolo

Partiremos do modelo SO(3) de George-Glashow (seção 4.2), onde o funcional da energia no regime estacionário, no gauge temporal e no limite BPS é escrito como:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x [B_i^a B_i^a + (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a], \quad (5.1)$$

em que $(D_i \phi)^a$ é dado em (4.19) e B_i^a , em (4.22).

Introduzindo o formalismos BPS, podemos reescrever (5.1) na forma:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x [B_i^a \mp (D_i \phi)^a]^2 \pm \int d^3x [B_i^a (D_i \phi)^a] \geq E_{BPS} = \pm \int d^3x [B_i^a (D_i \phi)^a]. \quad (5.2)$$

Com o uso da identidade $B_i^a (D_i \phi)^a = \partial_i (B_i^a \phi^a)$, a expressão (5.2) torna-se:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x [B_i^a \mp (D_i \phi)^a]^2 \pm \int d^3x \partial_i (B_i^a \phi^a) \geq E_{BPS} = \pm \int d^3x \partial_i (B_i^a \phi^a). \quad (5.3)$$

O limite inferior E_{BPS} em (5.3), conhecido como energia de *Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield*, é atingido quando anulamos o termo quadrado, obtendo a equação de estado BPS:

$$B_i^a = \pm (D_i \phi)^a \text{ ou } \varepsilon_{ijk} W_{jk}^a = \pm 2 (D_i \phi)^a. \quad (5.4)$$

O último termo no funcional da energia (5.3) poder ser convertido em uma integral de superfície S pelo teorema da divergência, como segue:

$$E_{BPS} = \pm \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (B_i^a \phi^a)$$

e identificado como a definição da carga magnética (4.73). Assim, a energia mínima da configuração é computada na forma:

$$E_{BPS} = v Q_m = v \frac{4\pi}{e}, \quad (5.5)$$

levando em conta o setor topológico $n = \pm 1$, onde temos considerado o sinal superior para o monopolo e inferior para o antimonopolo.

5.1.1 Equivalência entre a Equação BPS e as Equações de Euler-Lagrange

Mostraremos nesta seção que, de fato, a equação BPS (5.4) conduz às equações de movimento de segunda ordem. Para tanto, basta aplicarmos a derivada covariante em (5.4),

obtendo:

$$\varepsilon_{ijk} D_i W_{jk}^a = \pm 2 D_i (D_i \phi)^a = 0 \quad (5.6)$$

em que temos usado a identidade de Bianchi (4.28) – com $\alpha = 0$ –, a qual corresponde, conforme já mencionado, às equações de movimento homogêneas para o campo de Yang-Mills.

De (5.6), concluímos que:

$$D_i (D_i \phi)^a = 0. \quad (5.7)$$

A expressão acima é a equação de movimento para campo de Higgs (4.24) no regime estacionário, no gauge temporal e com $\lambda = 0$, cujo resultado é esperado no limite de BPS.

Além disso, podemos reescrever a equação BPS (5.4) como:

$$W_{jk}^a = \pm \varepsilon_{jki} (D_i \phi)^a, \quad (5.8)$$

da qual, tomando a derivada covariante D_j em ambos os membros, encontramos:

$$D_j W_{jk}^a = \pm \varepsilon_{jki} D_j (D_i \phi)^a = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{jki} [D_j, D_i] \phi^a. \quad (5.9)$$

Em vista da identidade,

$$[D_j, D_i] \phi^a = e \varepsilon^{abc} W_{ji}^b \phi^c, \quad (5.10)$$

a expressão (5.9) torna-se:

$$D_j W_{jk}^a = \pm e \varepsilon^{abc} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{jki} W_{ji}^b \right) \phi^c = e \varepsilon^{abc} (D_k \phi)^b \phi^c, \quad (5.11)$$

sendo que usamos novamente a equação BPS (5.4).

Identificamos a quantidade $\varepsilon^{abc} (D_k \phi)^b \phi^c$ em (5.11) como a densidade de corrente J_k , ou seja,

$$J_k = \varepsilon^{abc} (D_k \phi)^b \phi^c, \quad (5.12)$$

de onde somos levados à lei de Ampère [extraída de (4.23) com $\alpha = k$] no regime estacionário e no gauge temporal,

$$D_j W_{jk} = e J_k, \quad (5.13)$$

o que mostra a consistência do formalismo BPS.

5.2 Formalismo BPS para o Dyon

No caso do dyon, o procedimento é similar. Entretanto será necessário usar um “truque” trigonométrico, segundo veremos a seguir. O funcional da energia no regime estacionário para este modelo é:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x [E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a + (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a], \quad (5.14)$$

de onde, usando a relação:

$$\begin{aligned} E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a + (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a &= [E_i^a \mp \sin \gamma (D_i \phi)^a]^2 + [B_i^a \mp \cos \gamma (D_i \phi)^a]^2 \\ &\quad \pm 2 \sin \gamma (D_i \phi)^a E_i^a \pm \cos \gamma (D_i \phi)^a B_i^a \end{aligned} \quad (5.15)$$

encontramos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ [E_i^a \mp \sin \gamma (D_i \phi)^a]^2 + [B_i^a \mp \cos \gamma (D_i \phi)^a]^2 \right\} + \\ &\quad \pm \sin \gamma \int d^3x (D_i \phi)^a E_i^a \pm \cos \gamma \int d^3x (D_i \phi)^a B_i^a \\ &\geq E_{BPS} = \pm \sin \gamma \int d^3x (D_i \phi)^a E_i^a \pm \cos \gamma \int d^3x (D_i \phi)^a B_i^a. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A energia mínima E_{BPS} em (5.16), chamada de energia de *Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield*, é alcançada quando anulamos os termos quadrados, determinando as equações de estado BPS:

$$B_i^a = \pm \cos \gamma (D_i \phi)^a \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ijk} W_{jk}^a = \pm 2 \cos \gamma (D_i \phi)^a, \quad (5.17)$$

$$E_i^a = \pm \sin \gamma (D_i \phi)^a \quad \text{ou} \quad W_{0i}^a = \pm \sin \gamma (D_i \phi)^a. \quad (5.18)$$

Analogamente ao caso do monopolo na seção anterior, usamos as identidades:

$$B_i^a (D_i \phi)^a = \partial_i (B_i^a \phi^a), \quad E_i^a (D_i \phi)^a = \partial_i (E_i^a \phi^a), \quad (5.19)$$

que convertem as duas últimas integrais na energia (5.16) em integrais de superfície, pelo teorema da divergência. Dessa maneira, temos:

$$E_{BPS} = \pm \sin \gamma \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (E_i^a \phi^a) \pm \cos \gamma \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (B_i^a \phi^a). \quad (5.20)$$

Mais uma vez, as integrais superficiais são identificadas como as definições das cargas elétricas e magnéticas, respectivamente:

$$E_{BPS} = vQ_e \sin \gamma + vQ_m \cos \gamma, \quad (5.21)$$

para o setor topológico $n = \pm 1$; o sinal superior corresponde ao dyon e o inferior, ao antidyon.

A partir das equações BPS (5.17) e (5.18), podemos determinar o ângulo constante γ . Para tanto, basta calcularmos as integrais,

$$\oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (E_i^a \phi^a) = vQ_e = \pm \sin \gamma \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i [(D_i \phi)^a \phi^a], \quad (5.22)$$

$$\oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (B_i^a \phi^a) = vQ_m = \pm \cos \gamma \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i [(D_i \phi)^a \phi^a] \quad (5.23)$$

e tomarmos a razão entre elas, obtendo:

$$\tan \gamma = \frac{Q_e}{Q_m}. \quad (5.24)$$

Essa relação permite-nos inferir que:

$$\sin \gamma = \frac{Q_e}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{Q_m}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}}, \quad (5.25)$$

de onde é possível reescrever a energia mínima de (5.21) como:

$$E_{BPS} = v\sqrt{Q_e + Q_m}. \quad (5.26)$$

Perceba que pudemos determinar a energia conhecendo somente as condições de contorno, sem antes calcular as soluções, tanto na situação do monopolo, quanto na do dyon.

5.2.1 Equivalência entre as Equação BPS's e as Equações de Euler-Lagrange

Como na situação do monopolo, a equação BPS (5.17) conduz à equação de movimento de segunda ordem do campo de Higgs no limite BPS. Para ver isso, aplicamos a derivada covariante D_i em (5.17), a saber:

$$\varepsilon_{ijk} D_i W_{jk}^a = \pm 2 \cos \gamma (D_i D_i \phi)^a = 0, \quad (5.27)$$

donde decorre:

$$(D_i D_i \phi)^a = 0, \quad (5.28)$$

segundo esperávamos. Novamente, nesse resultado, temos usado a identidade de Bianchi.

A lei de Ampère estacionária e, obviamente, na ausência do gauge temporal [determinada de (4.23) com $\alpha = k$],

$$-D_0 W_{0k}^a + D_j W_{jk}^a = eJ_k, \quad (5.29)$$

também é recuperada aqui. Para tal finalidade, representamos a equação (5.17) como:

$$W_{jk}^a = \pm \cos \gamma \varepsilon_{jki} (D_i \phi)^a. \quad (5.30)$$

e tomamos a derivada covariante D_j em (5.30),

$$\begin{aligned} D_j W_{jk}^a &= \pm \cos \gamma \varepsilon_{jki} (D_j D_i \phi)^a = \pm \frac{1}{2} \cos \gamma \varepsilon_{jki} [D_j, D_i] \phi^a \\ &= e \varepsilon^{abc} \cos \gamma \left(\pm \frac{1}{2} \varepsilon_{jki} W_{ji}^b \right) \phi^c \\ &= (\cos^2 \gamma) e \varepsilon^{abc} (D_k \phi)^b \phi^c = (\cos^2 \gamma) e J_k. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Além disso, reescrevemos a equação BPS (5.18) na forma

$$\begin{aligned} -(D_i A_0)^a &= \pm \sin \gamma (D_i \phi)^a \Rightarrow \\ A_0^a &= \mp \sin \gamma \phi^a. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por outro lado, aplicando a derivada covariante D_0 em (5.18), encontramos:

$$\begin{aligned} D_0 W_{0i}^a &= \pm \sin \gamma (D_0 D_i \phi)^a = \pm e \varepsilon^{abc} \sin \gamma A_0^b (D_i \phi)^c \\ &= -(\sin^2 \gamma) e \varepsilon^{abc} (D_i \phi)^b \phi^c \Rightarrow \\ -D_0 W_{0k}^a &= (\sin^2 \gamma) e J_k, \end{aligned} \quad (5.33)$$

em que usamos a igualdade (5.32).

Somando (5.31) e (5.33), achamos:

$$-D_0 W_{0k}^a + D_j W_{jk}^a = e J_k,$$

conforme desejávamos.

Por analogia, a equação BPS (5.18) resulta imediatamente na lei de Gauss:

$$D_i W_{0i}^a = 0, \quad (5.34)$$

coincidindo com a equação de movimento (4.23) para o campo de Yang-Mills no regime estacionário e com base nos *ansatze* de 't Hooft-Polyakov e Julia-Zee.

Capítulo 6

Aspectos Gerais do MP e do MPE

6.1 O Modelo Padrão

No cenário da Mecânica newtoniana, a descrição de um sistema físico é a mesma quaisquer que sejam os referenciais inerciais, os quais estão conectados pela transformação de Galileu. A introdução das ideias de isotropia e homogeneidade do espaço estabelece ainda que as Leis de Newton independem da localização do observador no espaço e no tempo – absoluto –, bem como da orientação espacial do sistema. Portanto, um sistema físico – isolado – também é invariante perante as translações e rotações espaciais e evoluções temporais, implicando na conservação dos momentos linear e angular e da energia, respectivamente.

Durante muitos anos, a Mecânica Clássica foi sendo muito bem estabelecida porque todos o resultados teóricos estavam em perfeito acordo com a experiência. No século XIX, entretanto, depois da formulação da Eletrodinâmica de Maxwell, verificou-se uma inconsistência entre essas duas teorias, pois o Eletromagnetismo não é invariante perante a transformação de Galileu. Tal problema só foi solucionado com a formulação da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) por Albert Einstein em 1905. No contexto da TRR, referenciais inerciais distintos são relacionados pela transformação de Lorentz [55], a qual além de corresponder a rotações em três dimensões e *boosts* ao longo dos eixos coordenados espaço-temporais, deixa a teoria de Maxwell invariante e recupera a transformação de Galileu no limite de baixas velocidades. A TRR incorpora a transformação de Lorentz como uma simetria fundamental da natureza e, juntamente com a Mecânica Quântica, constituíram a base para desenvolvimento do Modelo Padrão (MP) [56].

O MP descreve as partículas elementares e as três forças fundamentais da natureza: a forte, que é estudada dentro da Cromodinâmica Quântica (QCD) e é responsável pela interação entre os quarks; a fraca, a qual explica a interação fraca no decaimento de partículas, no âmbito da Teoria Eletrofraca (ET); e a força eletromagnética, tratada dentro da Eletrodinâmica Quântica (QED) e encarregada de descrever essa interação em escala microscópica. A força da gravidade não é incluída no MP por problemas de renormalização e quantização do campo gravitacional. Tanto a QCD, quanto a ET e a QED são teorias de calibre e as forças de interação que elas descrevem são modeladas por bósons mediadores conhecidos como *bósons de calibre*. Na descrição unificada dessas três forças fundamentais, o MP tem como grupo de simetria de calibre o grupo composto $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [56–58].

Além da simetria de calibre, o MP exhibe também invariância perante a simetria discreta CPT [C (inversão da carga), P (inversão espacial), T (reversão temporal)]. Embora já se tenha sido observada a violação das simetrias C, P e T individualmente, bem como a composta CP [59], nunca foi visto a violação da simetria CPT e acredita-se que esta seja uma simetria fundamental da natureza.

6.2 O Modelo Padrão Estendido

No cenário do MP, a tentativa de incorporar a gravitação como uma Teoria Quântica de Campos e, assim, unificar a força gravitacional às três outras forças fundamentais tem sido um dos maiores anseios dos físicos teóricos nas últimas décadas. Entretanto, a principal dificuldade é a questão da renormalização e quantização do campo gravitacional. A partícula que seria mediadora dessa interação, o *gráviton*, nunca foi detectada. Isso levou ao desenvolvimento de algumas teorias, como a Teoria de Cordas [15] por exemplo, na qual os efeitos quânticos da gravidade surgem em uma faixa de energia da ordem de 10^{19} GeV, denominada *escala de Planck* – logo abaixo desse valor está a faixa na qual acontece a unificação das forças fraca, forte e eletromagnética: 10^{16} GeV; em seguida, tem-se a escala eletrofraca na ordem dos 100 GeV –. Essas *Teorias Além do Modelo Padrão*, como são conhecidas, almejam também explicar outros problemas não bem resolvidos pelo MP [60, 61]. Dentre eles, podemos destacar o desequilíbrio entre matéria e antimatéria [62], que supostamente está atrelada à violação da simetria CP

[59], o problema da matéria escura [63], a variação lenta da constante de estrutura fina [64–66], etc¹.

No contexto da Teoria de Cordas, a possibilidade da quebra espontânea da simetria de Lorentz foi apresentada por S. Samuel e A. Kosteletsky no início dos anos 90 [15–20]. A partir da violação espontânea dessa simetria na escala da energia de Planck, são originados valores esperados no vácuo de campos tensoriais, conhecidos como *campos de fundo*, os quais podem estar remanescidos em teorias definidas em escalas de energia menores, tal como o MP. Com base nisso, foi concebido o Modelo Padrão Estendido (MPE), cujos termos de Violação de Lorentz (VL) são inclusos em todo os setores do MP através do acoplamento dos campos de fundo com os campos do MP [21–23].

Ao nos referimos à VL, é necessário contudo levar em conta a diferença existente entre as duas perspectivas das transformações de Lorentz {o leitor poderá encontrar uma abordagem detalhada na referência [67]}:

1. *Ponto de vista passivo ou do observador* - quando fixamos os pontos do espaço-tempo e as bases de dois referenciais inerciais distintos são transformadas uma na outra.
2. *Ponto de vista ativo ou da partícula* - ao contrário, quando as bases são mantidas fixas e dois pontos do espaço-tempo, localizados com respeito às suas respectivas bases de referenciais inerciais diferentes, são transformados um no outro.

Diante dessas considerações, é esclarecido que a VL remete-se à transformação do ponto de vista ativo, implicando em variações na descrição física de um sistema quando a sua orientação ou o seu movimento muda em relação ao campo de fundo. Por conseguinte, o efeito resultante de tal campo é introduzir uma *anisotropia* no espaço-tempo, haja vista que ele não se transforma conforme um tensor genuíno de Lorentz. Em contrapartida, ao se considerar transformações de Lorentz passivas, a simetria não é quebrada.

Vale ressaltar ainda que o MPE preserva estrutura de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ do MP, bem como as propriedades de renormalização, hermiticidade e positividade da energia. E além da VL, a extensão do MP permite também introduzir a violação da simetria CPT. Um resultado interessante obtido por O. W. Greenberg [68] estabelece que a quebra da simetria CPT induz

¹Um apontamento geral desses problemas é dado na referência [60].

à VL. Todavia, a recíproca não válida, pois pode existir um sistema que apresente a VL sem violar a simetria CPT. Os termos de VL adicionados ao MP variantes perante a transformação CPT são comumente chamados de *CPT-ímpar*, enquanto que aqueles invariantes, de *CPT-par*.

6.2.1 O Setores de Gauge (não birrefringente) e de Higgs CPT-pares

Da mesma forma que o MP, o MPE é dividido em cinco setores, os quais são: setor de Higgs, de Gauge, de Yukawa, setor dos quarks e dos léptons. Neste trabalho, investigamos somente os setores Gauge² [da estrutura de calibre SU(2)] e de Higgs CPT-pares. Antes de introduzir as contribuições da VL, é útil apresentar os setores de Gauge e de Higgs, respectivamente:

$$\mathcal{L}_{Gauge} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}), \quad (6.1)$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) + \mu^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{2}\lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad (6.2)$$

em que ϕ é um dubleto de campo escalar complexo na representação fundamental, $W_{\mu\nu}$ é o *field strength* e μ e λ são constantes reais positivas. As contribuições aqui consideradas da VL nos correspondentes setores do MPE são dadas por:

$$\mathcal{L}_{Higgs}^{CPT-par} = \frac{1}{2}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_\mu\phi)^\dagger(D_\nu\phi) + \text{conj. hermitiano}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}_{Gauge}^{CPT-par} = -\frac{1}{2}(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W_{\alpha\beta}), \quad (6.4)$$

levando em conta que $(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ e $(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta}$ são os campos tensoriais de fundo violadores da simetria de Lorentz. Eles são definidos como sendo adimensionais; o primeiro pode ter parte real simétrica e imaginária antisimétrica, enquanto o segundo é real e possui as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, a saber:

$$\begin{aligned} (\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} &= -(\kappa_w)^{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} = -(\kappa_w)^{\mu\nu\beta\alpha}, \\ (\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} &= (\kappa_w)^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} + (\kappa_w)^{\mu\alpha\beta\nu} + (\kappa_w)^{\mu\beta\nu\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

além do duplo traço nulo:

$$(\kappa_w)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0, \quad (6.6)$$

²Existem também os setores de Higgs e de gauge CPT-ímpares, mas eles não são de interesse neste trabalho porque optamos por investigar apenas os setores CPT-pares. O leitor interessado em uma discussão mais completa sobre todos os setores pode consultar o artigo original do Kostelecky [22].

resultando num total de 19 componentes independentes, das quais 10 são do setor birrefringente e as 9 componentes restantes pertencem ao não birrefringente. As componentes birrefringentes são assim designadas porque introduzem a birrefringência no modelo, uma propriedade que está associada à rotação do plano de polarização da luz em decorrência de diferentes modos de polarização se propagarem com velocidades de fase distintas.

As propriedades de $(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ são exigidas para que a contribuição da VL não seja trivialmente nula por contração dos índices. Já as condições de simetria para $(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta}$ são impostas de antemão para excluir termos supérfluos absorvidos em 4-divergências, enquanto a condição de duplo traço ignora termos que podem ser suprimidos por uma renormalização do termo cinético (6.1).

Nesta pesquisa, optamos por estudar apenas o setor não birrefringente, cujas componentes são parametrizadas pelo tensor $\kappa^{\mu\nu}$ [69]:

$$(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\mu\alpha} \kappa^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} \kappa^{\mu\beta} + g^{\nu\beta} \kappa^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta} \kappa^{\nu\alpha}). \quad (6.7)$$

O tensor $\kappa^{\mu\nu}$ é simétrico, tem o traço nulo e possui todas as componentes não birrefringentes, representadas como:

$$\kappa^{\mu\nu} = (\kappa_w)^{\mu\nu\alpha}_{\alpha}. \quad (6.8)$$

Em decorrência do isomorfismo existente entre os grupos SU(2) e SO(3), vamos investigar uma extensão do monopolo de 't Hooft-Polyakov e do dyon de Julia-Zee no modelo SO(3) de George-Glashow nos setores de Gauge (não birrefringente) e de Higgs CPT-pares. Nesse caso, o dubleto complexo de Higgs na representação fundamental é substituído por um tripleto real $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ na representação adjunta. Assim, tanto $W_{\mu\nu}$ como ϕ serão definidos na álgebra de SO(3) e o setor de Higgs considerado do MP passa a ter a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \text{Tr} [(D_\mu \phi) (D^\mu \phi)] + \mu^2 \text{Tr} (\phi^T \phi) - \frac{1}{2} \lambda [\text{Tr} (\phi^T \phi)]^2,$$

enquanto a sua contribuição para a VL:

$$\mathcal{L}_{Higgs}^{CPT-par} = \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} \text{Tr} [(D_\mu \phi) (D_\nu \phi)],$$

sendo $(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ agora definido com um tensor real e simétrico.

Capítulo 7

Monopolo Magnético com Violação da Simetria de Lorentz

Neste capítulo, vamos averiguar a existência de estados BPS [8] do monopolo de 't Hooft-Polyakov [52, 53] com os termos de violação da simetria de Lorentz, que preservam a simetria CPT, nos setores de gauge e de Higgs. Veremos quais os efeitos dos campos de fundo violadores, bem com as condições impostas sobre eles para a estabilidade de tais estados. Como já discutimos no capítulo anterior, o campo tensorial de fundo da VL CPT-par no setor de Higgs é representado por $(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}$. Por outro lado, no setor de gauge, o termo CPT-par da VL possui o tensor de fundo $(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta}$.

A densidade lagrangiana do modelo é expressa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a(W^{\mu\nu})^a - \frac{1}{4}(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta}W_{\mu\nu}^a(W_{\alpha\beta})^a + \\ & + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^a(D^\mu\phi)^a + \frac{1}{2}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_\mu\phi)^a(D_\nu\phi)^a - V(\phi^a\phi^a), \end{aligned} \quad (7.1)$$

em que V é dado por (4.20).

Em particular, estudamos o setor de gauge não birrefringente (6.8), onde, no conhecido *limite de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)*, quando $\lambda = 0$, ou seja, $V = 0$, a densidade lagrangiana reduz-se simplesmente a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a(W^{\mu\nu})^a - \frac{1}{2}\kappa^{\mu\beta}W_{\mu\nu}^a(W_\beta{}^\nu)^a + \\ & + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^a(D^\mu\phi)^a + \frac{1}{2}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_\mu\phi)^a(D_\nu\phi)^a. \end{aligned} \quad (7.2)$$

As equações de movimento do campo de Yang-Mills são dadas por – veja o apêndice C –:

$$(D_\mu W^{\mu\alpha})^m - \kappa^{\alpha\nu} D_\mu (W_\nu{}^\mu)^m + \kappa^{\mu\nu} D_\mu (W_\nu{}^\alpha)^m = -e [(J^\alpha)^m + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\alpha} J_\mu^m], \quad (7.3)$$

sendo $(D_\mu W^{\mu\alpha})^m$ e J_μ^m definidos em (4.25) e (4.26), respectivamente.

É interessante explicitarmos a lei de Gauss no regime estacionário¹, encontrada quando $\alpha = 0$ em (7.3), segundo a seguir:

$$\begin{aligned} & \partial_i [(1 + \kappa_{00}) (-\partial_i A_0^m + e\varepsilon^{mcb} A_0^c A_i^b) + \kappa_{0j} (\partial_i A_j^m - \partial_i A_j^m + e\varepsilon^{mcb} A_i^c A_j^b)] \\ & - \kappa_{ij} \partial_i (-\partial_j A_0^m + e\varepsilon^{mcb} A_0^c A_j^b) - (1 + \kappa_{00}) e\varepsilon^{abm} (-\partial_i A_0^a + e\varepsilon^{acn} A_0^c A_i^n) A_i^b \\ & = -e^2 [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] \varepsilon^{abm} \varepsilon^{pqb} A_0^p \phi^q \phi^a - e (\kappa_{\phi\phi})_{0i} \varepsilon^{abm} \phi^a (D_i \phi)^b. \end{aligned} \quad (7.4)$$

As equações homogêneas, conforme já mencionado em (4.28), provêm da identidade de Bianchi:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (D_\beta W_{\gamma\delta})^m = 0. \quad (7.5)$$

Além disso, apresentamos também a equação de movimento do campo de Higgs,

$$D_\mu (D^\mu \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} D_\mu (D_\nu \phi)^m = 0, \quad (7.6)$$

onde temos definido $D_\mu (D_\nu \phi)^m = \partial_\mu (D_\nu \phi)^m + e\varepsilon^{mna} A_\mu^n (D_\nu \phi)^a$.

Note que se $\kappa_{0i} \neq 0$ ou $(\kappa_{\phi\phi})_{0i} \neq 0$ em (7.4), então o gauge temporal $A_0^a = 0$ não é válido. Em vista disso, o modelo pode admitir somente a existência de dyons. Todavia, se considerarmos $\kappa_{0i} = (\kappa_{\phi\phi})_{0i} = 0$, podem haver tanto soluções tipo-monopolos quanto tipo-dyons.

Quando adotamos as condições $\kappa_{0i} = (\kappa_{\phi\phi})_{0i} = 0$, observamos que a lei de Gauss pode ser trivialmente satisfeita pelo calibre temporal $A_0^a = 0$ e assim teremos um defeito topológico somente com carga magnética.

O funcional de energia dessa configuração no estado estacionário é dado por²:

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} W_{ij}^a W_{ij}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{ik}^a W_{jk}^a + \frac{1}{2} (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i \phi)^a (D_j \phi)^a \right\}. \quad (7.7)$$

¹Não tratamos aqui a dinâmica dos dyons e dos monopolos. O leitor interessado nesse assunto pode consultar a referência [40]. Por isso, as soluções consideradas serão independentes do tempo.

²A discussão detalhada dos resultados pode ser vista na seção C.4 do apêndice C.

Considerando as relações³

$$W_{ij}^a = -\varepsilon_{ijk} B_k^a, \quad B_i^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk}^a, \quad (7.8)$$

a energia pode ser reescrita como:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ ([1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}) B_i^a B_j^a + [\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}] (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \right\}. \quad (7.9)$$

Vemos claramente que a energia será definida positiva se, e somente se, as matrizes $[1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}$ e $\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}$ assim forem .

Com a finalidade de implementar o formalismo BPS, primeiramente fazemos as seguintes definições:

$$\tilde{B}_k^a = N_{ki} B_i^a, \quad (7.10)$$

$$(\tilde{D}_k\phi)^a = R_{ki} (D_i\phi)^a, \quad (7.11)$$

tal que as matrizes N_{ki} e R_{ki} satisfaçam as propriedades:

$$N_{ki} N_{kj} = [1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}, \quad (7.12)$$

$$R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}, \quad (7.13)$$

respectivamente. Com isso, a energia fica expressa em uma forma mais simplificada,

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\tilde{B}_k^a \tilde{B}_k^a + (\tilde{D}_k\phi)^a (\tilde{D}_k\phi)^a \right]. \quad (7.14)$$

Um outro passo na implementação do formalismo BPS consiste em reorganizar (7.14) na forma:

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_k^a \mp (\tilde{D}_k\phi)^a \right]^2 \pm (\tilde{D}_k\phi)^a \tilde{B}_k^a \right\}. \quad (7.15)$$

Conforme adiante, mostramos que o termo $(\tilde{D}_k\phi)^a \tilde{B}_k^a$ pode ser escrito em função de uma derivada total:

$$\tilde{B}_k^a (\tilde{D}_k\phi)^a = N_{kj} R_{kp} \partial_p (B_j^a \phi^a) + \frac{1}{2} \phi^c N_{kj} R_{kp} \varepsilon_{jiq} D_p W_{iq}^c. \quad (7.16)$$

³Diferentemente da definição usual que vínhamos utilizando, introduzimos o sinal negativo em (7.8) para garantir que a carga magnética seja positiva, em vista das definições de $W_{\mu\nu}^a$ e $(D_\mu\phi)^a$ e do *ansatz*. Se assim não fosse, o monopolo teria que ser dado de forma não convencional no setor topológico $n = -1$, ao de invés $n = +1$.

O segundo termo em (7.16) será nulo se, e somente se, a condição a seguir sobre os coeficientes de Lorentz for imposta:

$$N_{kj}R_{kp} = R_{kp}N_{kj} = \Delta\delta_{jp}, \quad (7.17)$$

ou seja,

$$N_{kj}R_{kp}\varepsilon_{jiq}D_pW_{iq}^c = \Delta\varepsilon_{piq}D_pW_{iq}^c = 0, \quad (7.18)$$

devido à identidade de Bianchi. Desse modo, chegamos ao resultado desejado,

$$\tilde{B}_k^a(\tilde{D}_k\phi)^a = \Delta\partial_k(B_k^a\phi^a). \quad (7.19)$$

A relação (7.17) estabelece que as matrizes de quebra $[1 - \text{tr}(\kappa_{ij})]\delta_{ij} + \kappa_{ij}$ e $\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}$ sejam inversas uma da outra, isto é:

$$\Delta^2\delta_{ik} = \left\{ [1 - \text{tr}(\kappa_{ij})]\delta_{ij} + \kappa_{ij} \right\} \left[\delta_{jk} - (\kappa_{\phi\phi})_{jk} \right], \text{ com} \quad (7.20)$$

$$\Delta = \left\{ \det \left\{ [1 - \text{tr}(\kappa_{ij})]\delta_{ij} + \kappa_{ij} \right\} \det \left[\delta_{jk} - (\kappa_{\phi\phi})_{jk} \right] \right\}^{1/6}, \quad (7.21)$$

de maneira que $\Delta > 0$, pois as matrizes são definidas positivas.

Em virtude de tais considerações, podemos reescrever (7.15) como:

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_k^a \mp (\tilde{D}_k\phi)^a \right]^2 \pm \partial_k(\Delta B_k^a\phi^a) \right\} \quad (7.22)$$

$$\geq \pm \int d^3x \partial_k(\Delta B_k^a\phi^a). \quad (7.23)$$

A fim de minimizar a energia, zeramos o termo quadrático de (7.22) e encontramos a equação BPS (5.4) modificada:

$$\tilde{B}_k^a = \pm (\tilde{D}_k\phi)^a, \quad (7.24)$$

na qual o sinal superior (inferior) refere-se ao monopolo (antimonopolo), definido no setor topológico $n = +1$ (-1) – seguiremos essa convenção em todo o capítulo.

Assim, obtemos o limite inferior de (7.22), correspondendo a energia BPS

$$E_{BPS} = \pm \int d^3x \partial_k(\Delta B_k^a\phi^a). \quad (7.25)$$

A integral de volume em (7.25) pode ser convertida em uma integral de superfície S , com esta se estendendo ao infinito:

$$E_{BPS} = \pm \int d^3x \partial_k(\Delta B_k^a\phi^a) = \pm \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (\Delta B_i^a\phi^a) \quad (7.26)$$

e expressa em termos da carga magnética topológica modificada pela violação,

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_m &= \pm \frac{1}{v} \oint_{S \rightarrow \infty} dS_i (\Delta B_i^a \phi^a) \\ &= \Delta \frac{4\pi}{e} = \Delta Q_m\end{aligned}\tag{7.27}$$

sendo v o valor esperado do campo de Higgs no vácuo. Enfim, a energia BPS mínima fica dada simplesmente por⁴

$$E_{BPS} = v\tilde{Q}_m.\tag{7.28}$$

A equação BPS (7.24) no *ansatz* (4.74) de 't Hooft-Polyakov é equivalente ao par de equações diferenciais acopladas de primeira ordem:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) = \pm \frac{\Delta (1 - W^2)}{\eta r^2},\tag{7.29}$$

$$\frac{dW}{dr} = \mp \frac{\eta HW}{\Delta r}.\tag{7.30}$$

A constante $\eta > 0$ está relacionada com os coeficientes da quebra de Lorentz no setor de Higgs por meio de

$$\eta = \frac{1}{3} \text{tr} \left[\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right] = 1 - \frac{1}{3} \text{tr} \left[(\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right].\tag{7.31}$$

As soluções das equações BPS (7.29) e (7.30) devem satisfazer as condições de contorno semelhantes a (4.75) e (4.76),

$$H(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{r} = \pm ev,\tag{7.32}$$

$$W(0) = \pm 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = 0,\tag{7.33}$$

para configurações de energia finita e mínima.

Os comportamentos assintóticos das soluções próximo à origem ($r \rightarrow 0$) são da forma⁵

$$\frac{H}{r} \approx C_0 \frac{\Delta}{\eta} (ev)^2 r,\tag{7.34}$$

$$W \approx 1 - \frac{1}{2} C_0 (ev)^2 r^2,\tag{7.35}$$

⁴Independentemente do sinal, a energia sempre será positiva definida por causa das condições de contorno. Assim, configurações de monopolos e antimonopolos possuem a mesma energia, embora diferem por um sinal nas soluções.

⁵No que segue, consideraremos apenas o monopolo; os resultados para o antimonopolo são trivialmente encontrados.

enquanto para $r \gg 0$,

$$\frac{H}{r} \approx ev - \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{r}, \quad (7.36)$$

$$W \approx e^{-\frac{\eta}{\Delta} evr}. \quad (7.37)$$

É interessante ressaltar que o decaimento exponencial (7.37) ocorre por causa da massa dos bosons de calibre. Perceba que a massa ev dos bósons vetoriais [veja a equação (B.77) do apêndice B] é modificada pela presença da VL via o parâmetro $\frac{\eta}{\Delta}$: $ev \rightarrow \frac{\eta}{\Delta} ev$. Este regula o decaimento de W e, obviamente, do campo magnético. Em particular, o campo de Higgs H , cuja forma assintótica também é controlada por $\frac{\Delta}{\eta}$, apresenta o perfil (7.36) porque o bóson de Higgs possui massa nula no limite BPS.

As soluções de (7.19) e (7.20) são obtidas analiticamente, a saber:

$$H(r) = \frac{evr}{\tanh(\frac{\eta}{\Delta} evr)} - \frac{\Delta}{\eta}, \quad (7.38)$$

$$W(r) = \frac{\eta}{\Delta} \frac{evr}{\sinh(\frac{\eta}{\Delta} evr)}, \quad (7.39)$$

A partir da expressão (7.25), podemos também determinar a densidade de energia $\mathcal{E}(r)$ no *ansatz*,

$$\mathcal{E}(r) = \Delta \frac{Q_m}{er^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{H(1 - W^2)}{r} \right]. \quad (7.40)$$

Em seguida, apresentamos os perfis das funções H/r , W e \mathcal{E}/Δ . Em todos os gráficos, consideramos $e = v = 1$ e vários valores de $\frac{\eta}{\Delta}$ espelhados acima e abaixo da unidade. Lembrando que o valor $\frac{\eta}{\Delta} = 1$ (linha preta) é similar ao caso usual, onde não temos a influência da quebra da simetria de Lorentz.

Todos os perfis referem-se à mesma carga magnética $\tilde{Q}_m = \Delta$ ($Q_m = 1$) e, obviamente, à mesma energia BPS $E_{BPS} = \Delta$.

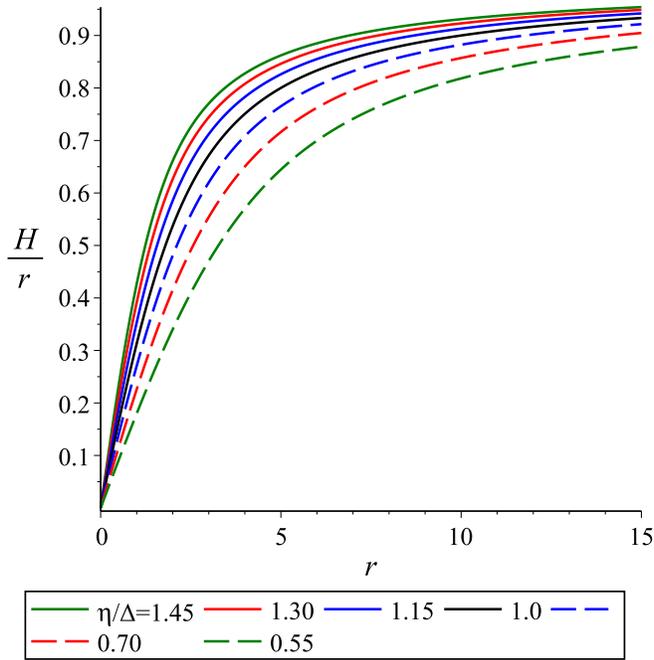


Figura 7.1: Campo de Higgs $\frac{H(r)}{r}$.

A figura 7.1 mostra que todas as curvas H/r convergem para 1 no infinito. O único efeito do parâmetro $\frac{\eta}{\Delta}$, ao passo que varia, é determinar quão rapidamente o campo de Higgs tende ao seu único valor de vácuo, em referência à situação padrão. Assim, vemos que para valores de $\frac{\eta}{\Delta} > 1$, as linhas ficam cada vez mais estreitas conforme $\frac{\eta}{\Delta}$ incrementa. Em contrapartida, para valores $0 < \frac{\eta}{\Delta} < 1$, os perfis vão se tornando mais largos com a diminuição de $\frac{\eta}{\Delta}$. Veja ainda que o espaçamento entre duas linhas adjacentes vai ficando menor, se $\frac{\eta}{\Delta}$ aumentar gradativamente.

Segundo observamos na figura 7.2, à medida que $\frac{\eta}{\Delta}$ se aproxima de zero entre os valores $0 < \frac{\eta}{\Delta} < 1$, o campo de Yang-Mills W fica menos localizado em relação ao caso usual e decai cada vez mais lentamente quando $r \rightarrow \infty$. De forma recíproca, quando $\frac{\eta}{\Delta} > 1$ e cresce continuamente, W vai ficando menos distribuído e tendendo a zero muito mais rápido. Da mesma maneira que acontece com o campo de Higgs, a separação entre duas curvas consecutivas torna-se menor com o aumento de $\frac{\eta}{\Delta}$.

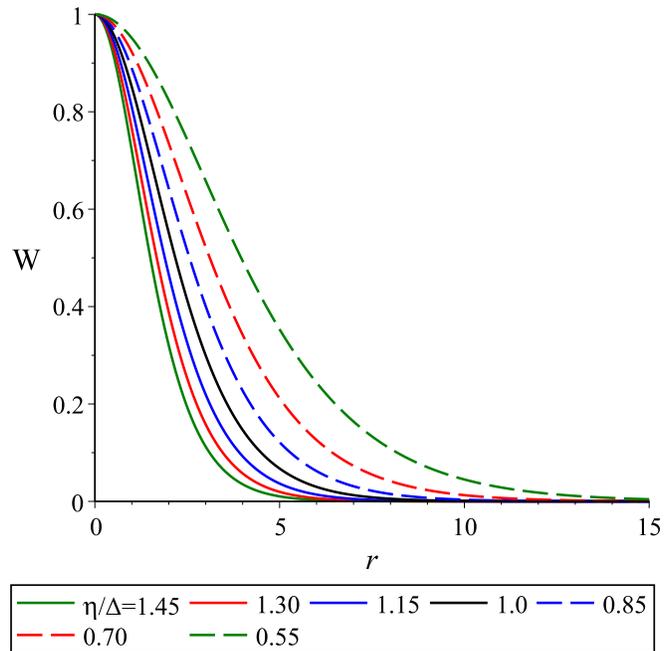


Figura 7.2: Campo de Yang-Mills $W(r)$.

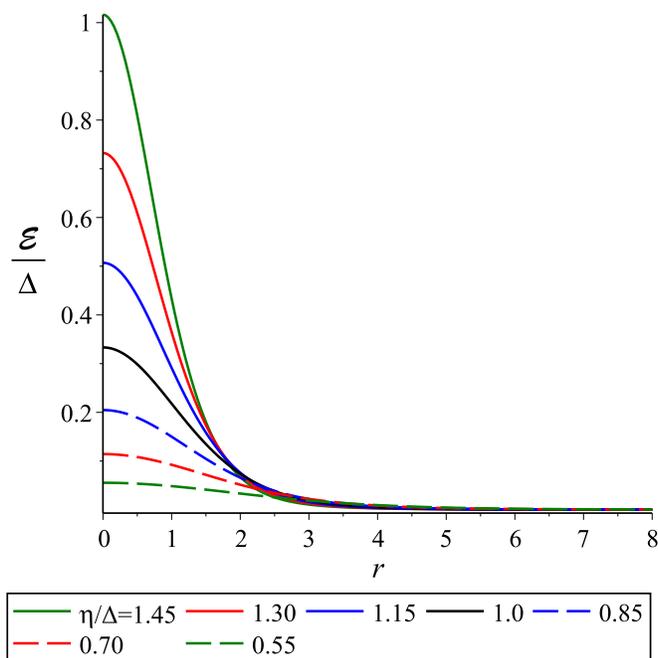


Figura 7.3: Densidade de energia BPS $\mathcal{E}(r)$.

Um comportamento similar ocorre com a densidade de energia (figura 7.3), a qual se torna menos (mais) localizada à proporção que $\frac{\eta}{\Delta}$ decresce (cresce). Repare que embora $\frac{\eta}{\Delta}$ modifique o comportamento assintótico das soluções usuais ($\frac{\eta}{\Delta} = 1$), somente Δ altera o valor da carga magnética e da energia. Portanto, isso implica em todas as curvas corresponderem à mesma energia $E_{BPS} = \Delta$ e, obviamente, à mesma massa do monopolo.

Capítulo 8

Dyon com Violação da Simetria de Lorentz

Investigaremos neste capítulo a formação de estados BPS do dyon de Julia-Zee, com a adição dos termos CPT-pares da VL nos setores de gauge não birrefringente e de Higgs, bem como as restrições necessárias sobre os campos de fundo para existência desse defeito. A energia da configuração no regime estacionário é dada por¹:

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{i0}^a W_{j0}^a + \frac{1}{4} W_{ij}^a W_{ij}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{ik}^a W_{jk}^a + \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + \frac{1}{2} [\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}] (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \right\}. \quad (8.1)$$

Com as definições²

$$E_i^a = -W_{0i}^a, \quad B_i^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{jk}^a, \quad (8.2)$$

a energia toma a seguinte forma:

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [(1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij}] E_i^a E_j^a + \frac{1}{2} \{[1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}\} B_i^a B_j^a + \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + \frac{1}{2} [\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}] (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \right\}. \quad (8.3)$$

¹A explicação mais minuciosa de nossos resultados é dada na seção C.5 do apêndice C.

²Mais uma vez enfatizamos que introduzimos o sinal negativo em (8.2) para garantir que as cargas elétrica e magnéticas sejam positivas, em vista das definições de $W_{\mu\nu}^a$ e $(D_\mu\phi)^a$ e do *ansatz*. Se o contrário fosse, o dyon teria que ser dado de maneira não convencional no setor topológico $n = -1$, ao de invés $n = +1$.

A positividade da energia é garantida se as matrizes $(1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij}$, $[1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}$ e $\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}$ forem definidas positivas e $1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00} > 0$.

Usando as definições

$$M_{ki}M_{kj} = (1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij} = [1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}, \quad (8.4)$$

$$R_{ki}R_{kj} = \delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}, \quad (8.5)$$

$$N_{ki}N_{kj} = [1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}, \quad (8.6)$$

a energia pode ser escrita como:

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} M_{ki}M_{kj} E_i^a E_j^a + \frac{1}{2} N_{ki}N_{kj} B_i^a B_j^a + \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + \frac{1}{2} R_{ki}R_{kj} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \right\}. \quad (8.7)$$

Sob as condições $\kappa_{0i} = 0$ e $(\kappa_{\phi\phi})_{0i} = 0$, é possível estabelecer soluções para a componente temporal do campo de Yang-Mills na forma:

$$A_0^m \propto \phi^m, \quad (8.8)$$

analogamente ao caso usual posposto por Bogolmol'nyi [8].

A escolha (8.8) estabelece ainda, na situação independente do tempo, que:

$$(D_0\phi)^a = 0. \quad (8.9)$$

Essas condições, uma vez levadas à lei de Gauss (7.4), conduzem a:

$$\begin{aligned} M_{ki}M_{kj}D_iD_jA_0^m &= 0 \\ M_{ki}M_{kj}D_i(D_j\phi)^m &= 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Por outro lado, se olharmos para a equação de movimento do campo de Higgs (7.6) no regime estacionário, temos:

$$R_{ki}R_{kj}D_i(D_j\phi)^m = 0. \quad (8.11)$$

Necessariamente, as equações (8.10) e (8.11) devem ser iguais, pois o campo de Higgs deve satisfazer uma única equação de movimento. A partir dessa observação, é preciso fazer a seguinte imposição sobre os campos de fundo:

$$\begin{aligned} M_{ki}M_{kj} &\propto R_{ki}R_{kj} \Rightarrow \\ M_{ki}M_{kj} &= \Lambda^2 R_{ki}R_{kj}, \quad M_{ki} = \Lambda R_{ki}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

em que o parâmetro Λ é dado por

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3 + 2\text{tr}(\kappa_{ij})}{3 - \text{tr}(\kappa_{\phi\phi})_{ij}}},$$

considerando-se $\Lambda > 0$, para preservar a positividade da energia.

Juntamente com os resultados (8.9) e (8.12), podemos reescrever a energia (8.7) como:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left[M_{ki} M_{kj} E_i^a E_j^a + N_{ki} N_{kj} B_i^a B_j^a + R_{ki} R_{kj} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \right]; \quad (8.13)$$

e tendo em conta as definições

$$\tilde{E}_i^a = M_{ik} E_k^a, \quad (8.14)$$

$$\tilde{B}_i^a = N_{ik} B_k^a, \quad (8.15)$$

$$\left(\tilde{D}_i\phi \right)^a = R_{ik} (D_k\phi)^a, \quad (8.16)$$

a expressão (8.13) fica dada em uma forma mais compacta e conveniente,

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\tilde{E}_i^a \tilde{E}_i^a + \tilde{B}_i^a \tilde{B}_i^a + \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right]. \quad (8.17)$$

Implementando o formalismo BPS em (8.17), encontramos:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \left[\tilde{E}_i^a \mp \sin \gamma \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right]^2 + \left[\tilde{B}_i^a \mp \cos \gamma \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right]^2 \right\} \\ \pm \sin \gamma \int d^3x \left[\tilde{E}_i^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right] \pm \cos \gamma \int d^3x \left[\tilde{B}_i^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right] \quad (8.18)$$

$$\geq \pm \sin \gamma \int d^3x \left[\tilde{E}_i^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right] \pm \cos \gamma \int d^3x \left[\tilde{B}_i^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right]. \quad (8.19)$$

O sinal superior refere-se ao dyon e o inferior, ao antidyon. Aliás, seguiremos essa convenção em todo o capítulo.

Com intuito de minimizar a energia, zeramos os dois primeiros termos em (8.18), obtendo as equações BPS modificadas:

$$\tilde{E}_i^a = \pm \sin \gamma \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a, \quad (8.20)$$

$$\tilde{B}_i^a = \pm \cos \gamma \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a. \quad (8.21)$$

Dessa forma, ao passo que o limite inferior (8.19) é atingido, determinamos a energia BPS

$$E_{BPS} = \pm \sin \gamma \int d^3x \left[\tilde{E}_i^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right] \pm \cos \gamma \int d^3x \left[\tilde{B}_i^a \left(\tilde{D}_i\phi \right)^a \right]. \quad (8.22)$$

É possível reorganizar $\tilde{E}_i^a \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a$ como:

$$\tilde{E}_i^a \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a = \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} \partial_j (E_k^a \phi^a) - \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} \phi^a (D_j E_k^a) = \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} \partial_j (E_k^a \phi^a), \quad (8.23)$$

em decorrência da lei de Gauss, $M_{ik} M_{ij} (D_j E_k^a) = 0$. De forma semelhante, podemos reescrever $\tilde{B}_i^a \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a$:

$$\tilde{B}_i^a \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a = N_{ik} R_{ij} \partial_j (B_k^a \phi^a) + \frac{1}{2} N_{ik} R_{ij} \phi^a \varepsilon_{kmn} (D_j W_{mn}^a). \quad (8.24)$$

Mas validade da identidade de Bianchi ($\varepsilon_{jmn} D_j W_{mn}^a = 0$) implica que devemos impor:

$$N_{ik} R_{ij} = R_{ij} N_{ik} = \Delta \delta_{kj}. \quad (8.25)$$

Assim, finalmente obtemos

$$\tilde{B}_i^a \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a = \Delta \partial_i (B_i^a \phi^a). \quad (8.26)$$

O resultado estabelecido em (8.25) é exatamente aquele que surge em (7.19), quando consideramos o monopolo. Obviamente, essa condição nos permite outra vez vincular os campos de fundo por

$$\Delta^2 \delta_{ik} = \left\{ [1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij} \right\} \left\{ \delta_{jk} - (\kappa_{\phi\phi})_{jk} \right\}, \text{ tal que} \quad (8.27)$$

$$\Delta = \left\{ \det \left\{ [1 - \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij} \right\} \det \left[\delta_{jk} - (\kappa_{\phi\phi})_{jk} \right] \right\}^{\frac{1}{6}}. \quad (8.28)$$

Com isso, a energia BPS (8.18) resume-se a

$$E_{BPS} = \pm \sin \gamma \int d^3 x \partial_j \left(\frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a \phi^a \right) \pm \cos \gamma \int d^3 x \partial_j (\Delta B_j^a \phi^a). \quad (8.29)$$

As duas integrais de volume podem ser convertidas em integrais de superfície S pelo teorema da divergência,

$$E_{BPS} = \pm \sin \gamma \oint_{S \rightarrow \infty} dS_j \left(\frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a \phi^a \right) \pm \cos \gamma \oint_{S \rightarrow \infty} dS_j (\Delta B_j^a \phi^a) \quad (8.30)$$

e estas, por suas vezes, definidas como as cargas topológicas elétrica e magnética modificadas pela quebra de Lorentz, em ordem:

$$\tilde{Q}_e = \pm \frac{1}{v} \oint_{S \rightarrow \infty} dS_j \left(\frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a \phi^a \right) = \tilde{Q}_m \tan \gamma, \quad (8.31)$$

$$\tilde{Q}_m = \pm \frac{1}{v} \oint_{S \rightarrow \infty} dS_j (\Delta B_j^a \phi^a) = \Delta \frac{4\pi}{e} = \Delta Q_m. \quad (8.32)$$

Em cujo resultado, temos usado a simetria do *ansatz*, juntamente com as equações BPS's (8.20) e (8.21).

Por conseguinte, a energia (8.30) torna-se

$$E_{BPS} = v \left(\tilde{Q}_e \sin \gamma + \tilde{Q}_m \cos \gamma \right). \quad (8.33)$$

A relação (8.31) nos permite fazer as identificações

$$\sin \gamma = \frac{\tilde{Q}_e}{\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{\tilde{Q}_m}{\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}}, \quad (8.34)$$

por meio das quais a energia BPS modificada (8.33) reduz-se simplesmente a

$$E_{BPS} = v \sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}. \quad (8.35)$$

A equação BPS (8.20), quando representada no *ansatz* de Julia-Zee, corresponde a

$$\left(\frac{J}{r} \right)' = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} \left(\frac{H}{r} \right)', \quad (8.36)$$

$$J = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} H. \quad (8.37)$$

Além disso, o estado BPS (8.21), no *ansatz* de 't Hooft-Polyakov, equivale ao sistema de equações diferenciais acopladas

$$\frac{dW}{dr} = \mp \frac{\eta}{\Delta} \cos \gamma \frac{HW}{r}, \quad (8.38)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) = \pm \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\cos \gamma} \frac{1 - W^2}{r^2}, \quad (8.39)$$

tendo em conta novamente

$$\eta = 1 - \frac{1}{3} \text{tr} \left[(\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right] > 0. \quad (8.40)$$

Como no caso do monopolo, as soluções de (8.38) e (8.39) devem obedecer as condições de contorno³

$$H(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{r} = ev, \quad (8.41)$$

$$W(0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = 0, \quad (8.42)$$

para determinar a energia finita e mínima.

³Consideraremos apenas o dyon. O resultados para o antidyon são trivialmente encontrados.

Em decorrência da relação (8.37), inferimos de (8.41) que J satisfaz

$$J(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{J(r)}{r} = ev \frac{\sin \gamma}{\Lambda}. \quad (8.43)$$

Próximo da origem ($r \rightarrow 0$), essas soluções se comportam como

$$\frac{H}{r} \approx C_0 \frac{\Delta}{\eta \cos \gamma} \frac{1}{(ev)^2 r}, \quad (8.44)$$

$$\frac{J}{r} \approx C_0 \frac{\Delta}{\Lambda \eta} (ev)^2 r \tan \gamma, \quad (8.45)$$

$$W \approx 1 - \frac{1}{2} C_0 (ev)^2 r^2, \quad (8.46)$$

ao passo que para $r \gg 0$,

$$\frac{H}{r} \approx ev - \frac{1}{\eta \cos \gamma} \frac{1}{r}, \quad (8.47)$$

$$\frac{J}{r} \approx ev \frac{\sin \gamma}{\Lambda} - \frac{\Delta}{\Lambda \eta} \frac{1}{r} \tan \gamma, \quad (8.48)$$

$$W \approx e^{-\frac{\eta}{\Delta} ev r \cos \gamma}. \quad (8.49)$$

Tais comportamentos são semelhantes àqueles do monopolo, à exceção de que agora a massa do bósons vetoriais também são modificas pelo fator $\cos \gamma$, além de $\frac{\eta}{\Delta}$. Perceba que o comportamento assitótico de J é modulado não só por $\sin \gamma$ – como no caso padrão –, mas também pela quebra $\frac{1}{\Lambda}$.

O sistema de equações (8.36), (8.38) e (8.39) tem como soluções analíticas as funções

$$H = \frac{evr}{\tanh(\frac{\eta}{\Delta} ev r \cos \gamma)} - \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\cos \gamma}, \quad (8.50)$$

$$J = \frac{evr \sin \gamma}{\Lambda \tanh(\frac{\eta}{\Delta} ev r \cos \gamma)} - \frac{\Delta}{\Lambda \eta} \tan \gamma, \quad (8.51)$$

$$W = \frac{\eta}{\Delta} \frac{evr \cos \gamma}{\sinh(\frac{\eta}{\Delta} ev r \cos \gamma)}. \quad (8.52)$$

Podemos apresentar também a densidade energia $\mathcal{E}(r)$ no *ansatz*, a qual pode ser extraída diretamente de (8.29) e escrita em termos de uma derivada total com o auxílio das equações BPS (8.36), (8.38) e (8.39), a saber:

$$\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_e(r) + \mathcal{E}_m(r), \quad (8.53)$$

sendo

$$\mathcal{E}_e(r) = \frac{\tilde{Q}_e}{e\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{H(1-W^2)}{r} \right] \right\}, \quad (8.54)$$

$$\mathcal{E}_m(r) = \frac{\tilde{Q}_m}{e\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{H(1-W^2)}{r} \right] \right\}, \quad (8.55)$$

as contribuições elétricas e magnéticas, em ordem.

A seguir, esboçamos os gráficos de H , J , W e \mathcal{E} . Todos os perfis foram plotados com $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\tilde{Q}_e = \tilde{Q}_m = 4\pi\Delta$ (ou equivalentemente $Q_e = Q_m = 4\pi$ e $e = 1$) e $\nu = 1$, correspondendo às configurações com a mesma energia $E_{BPS} = 4\sqrt{2}\pi\Delta$. As curvas pretas, referentes a $\frac{\eta}{\Delta} = 1$, são análogas ao caso padrão quando temos ausência da violação.

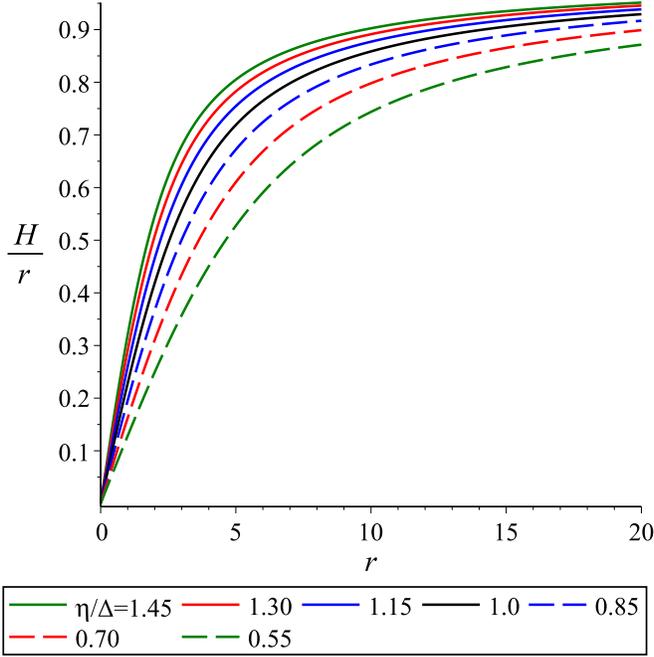


Figura 8.1: Campo de Higgs $\frac{H(r)}{r}$.

Veja na figura 8.1 que o comportamento do campo de Higgs é idêntico àquele do monopolo. A única distinção que surge aqui é pela presença do fator $\cos\gamma$ (ligado às cargas) no argumento de H , suavizando a convergência para o vácuo. Para valores de $\frac{\eta}{\Delta} > 1$, as curvas ficam cada vez mais concentradas de acordo com o aumento de tal parâmetro. Por outro lado, quando temos $0 < \frac{\eta}{\Delta} < 1$, os perfis tornam-se mais distribuídos com o decréscimo de $\frac{\eta}{\Delta}$. Observe também que a separação entre duas linhas sucessivas cresce se $\frac{\eta}{\Delta}$ diminuir.

A figura 8.2 evidencia que a forma da componente temporal do campo de Yang-Mills, obviamente, é igual ao campo de Higgs, salvo pelo fator $\frac{\sin\gamma}{\Lambda}$ associado às cargas e à quebra. Era de se esperar um comportamento similar pela própria estrutura do *ansatz* de Julia-Zee. Perceba que parâmetro Λ modifica somente o limete assintótico de J/r e, logo, do campo elétrico.

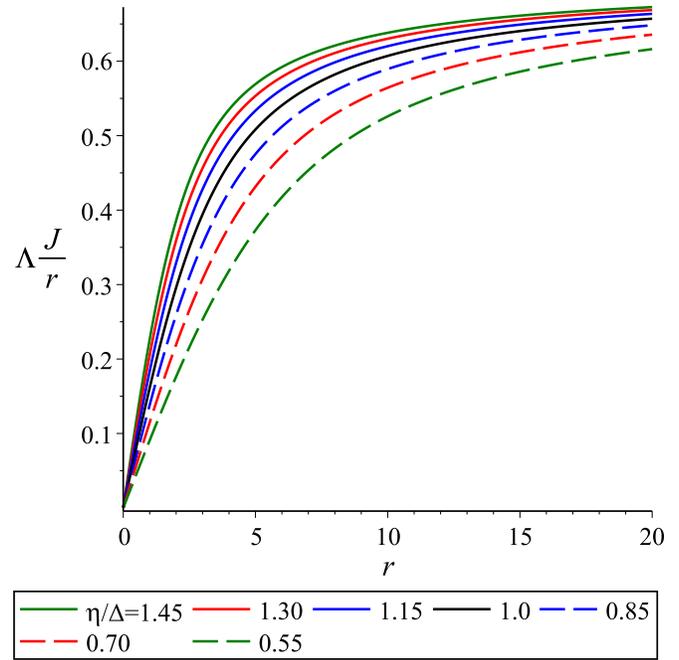


Figura 8.2: Componente temporal do campo de Yang-Mills $\frac{J(r)}{r}$.

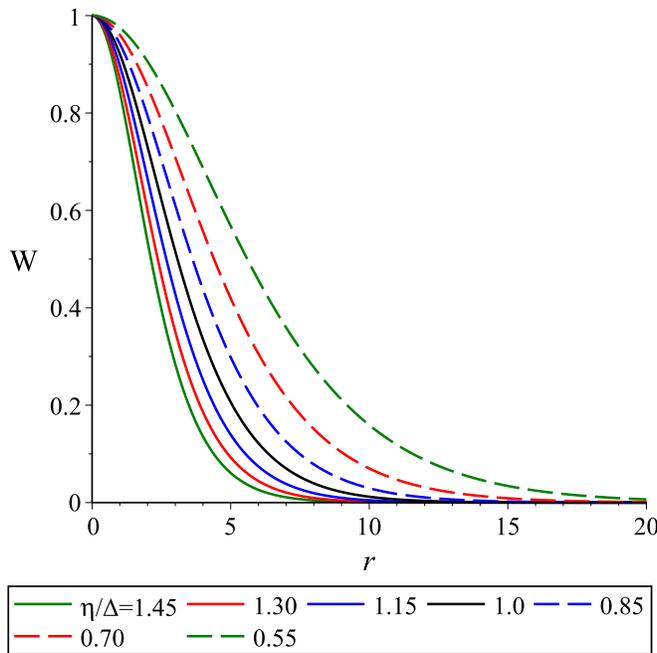


Figura 8.3: Componente espacial do campo de Yang-Mills $W(r)$.

Da mesma forma que aconteceu com o campo Higgs, a figura 8.3 mostra que o perfil da componente espacial do campo de Yang-Mills é semelhante ao do monopolo. Aliás, a diferença entre este e aquele comportamento também decorre do fator $\cos\gamma$, cujo efeito é tornar o decaimento de W mais suave. Portanto, no caso do dyon, a influência da quebra da simetria de Lorentz, $\frac{\eta}{\Delta}$, ainda continua sendo determinar também se campo espacial de Yang-Mills é mais (se $\frac{\eta}{\Delta}$ aumentar) ou menos (se $\frac{\eta}{\Delta}$ diminuir) localizado.

Na figura 8.4, apresentamos o esboço da densidade de energia BPS do dyon. Embora este perfil não mude apreciavelmente, quando comparado àquele do monopolo, percebe-se que a densidade de energia assume agora valores maiores na origem ($r = 0$). É claro, isso acontece por causa da contribuição do setor elétrico, o que torna o dyon mais massivo. Como já era intuitivo, a densidade de energia (e assim o dyon) torna-se mais concentrada quando $\frac{\eta}{\Delta}$ cresce do que quando decresce.

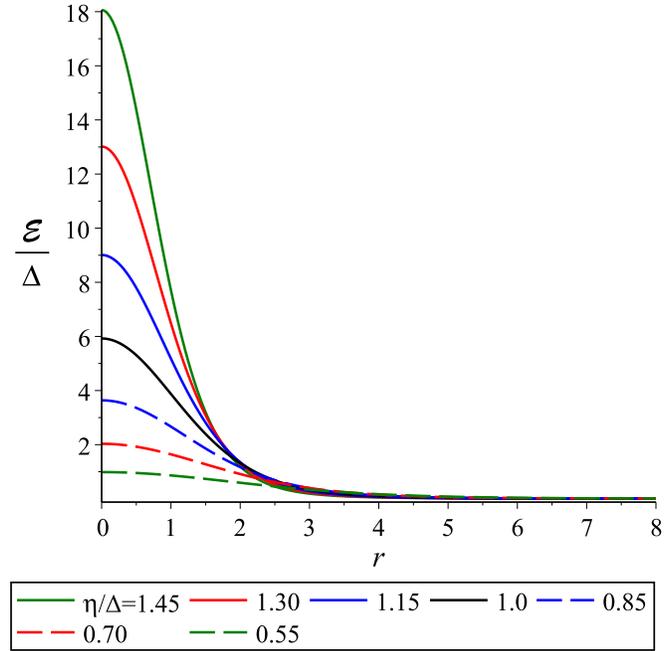


Figura 8.4: Densidade de energia BPS $\mathcal{E}(r)$.

Capítulo 9

Conclusões e Perspectivas

Inicialmente apresentamos uma contextualização geral acerca do monopolo magnético e do dyon, bem como apontamos aspectos gerais que levaram os físicos teóricos a investigarem os efeitos da violação da simetria de Lorentz no contexto do MPE.

No segundo capítulo, apontamos brevemente os principais conceitos sobre Topologia, com ênfase às noções de Homotopia, onde o mapeamento homotópico entre dois espaços topológicos (mais precisamente entre os dois manifolds definidos nesses espaços, $S_{r \rightarrow \infty} \rightarrow S_{v\u00e1cuo}$) introduziu um número inteiro n , o *winding number*, conduzindo à quantização da carga elétrica no modelo de George-Glashow, conforme foi visto no capítulo quatro.

No terceiro capítulo, fizemos uma discussão sobre a ousada e pioneira hipótese de Dirac a respeito da existência do monopolo magnético, a qual implica na simetria de dualidade do Eletromagnetismo e na quantização da carga elétrica. Vimos, contudo, que a principal dificuldade dessa teoria foi a singularidade apresentada pelo potencial vetor.

Como expomos no capítulo quatro, a descrição de um potencial vetor não singular foi dada somente no modelo unificado de Wu-Yang, em que o potencial de Dirac, associado ao grupo de simetria $U(1)$, foi imerso em um grupo maior $SU(2)$. Entretanto, tal modelo, que leva em conta somente o campo de Yang-Mills, resultou em um problema na definição da carga magnética e na finitude da energia. Ainda no mesmo capítulo, mostramos que esses empecilhos puderam ser resolvidos com o acoplamento do campo de Yang-Mills a um tripleto de campos escalares reais de Higgs no modelo $SO(3)$ de George-Glashow. A configuração de monopolo surge em um processo de quebra espontânea de simetria de $SO(3)$ para $SO(2)$ através do mecanismo de

Higgs. Nessa teoria, a carga magnética e a condição de quantização da carga elétrica surgem naturalmente da topologia do campo de Higgs, segundo pode ser revisto na equação (4.67).

Aprendemos no capítulo cinco o formalismo BPS, um poderoso método para encontrar as soluções de um sistema, a partir de equações de primeira ordem equivalentes às equações de Euler-Lagrange. Tais soluções são comumente conhecidas como *estados BPS*. Para o caso do monopolo e do dyon, elas são obtidas no limite de *Bogomol'nyi-Prasad -Sommerfield (BPS)*, onde o potencial é nulo.

No capítulo seis, mostramos o cenário do Modelo Padrão e a sua principal dificuldade: incluir a força da gravidade em um modelo unificado na escala de energia de Planck. Notamos que isso, somado a outros problemas teóricos e observacionais, foram fatores determinantes para se investigar o efeito da violação da simetria de Lorentz no âmbito do Modelo Padrão Estendido.

A nossa proposta de trabalho foi investigar uma extensão dos estados BPS do monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov e do dyon de Julia-Zee, levando em conta os termos CPT-pares da violação da simetria de Lorentz no setores de Gauge (em particular, no setor não birrefringente) e de Higgs. A existência desses estados estendidos impôs os vínculos sobre campos de fundo:

$$\kappa_{0i} = (\kappa_{\phi\phi})_{0i} = 0 \quad (9.1)$$

$$\text{tr}(\kappa_{\phi\phi})_{ij} < 3 \quad (9.2)$$

$$\Delta^2 \delta_{pr} = \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \left[\delta_{qr} - (\kappa_{\phi\phi})_{qr} \right], \text{ com} \quad (9.3)$$

$$\Delta = \left\{ \det \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \det \left[\delta_{qr} - (\kappa_{\phi\phi})_{qr} \right] \right\}^{\frac{1}{6}} > 0 \quad (9.4)$$

tanto para o monopolo quanto para o dyon; e ainda para este último,

$$[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij} = \Lambda^2 \left[\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right], \text{ tal que} \quad (9.5)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3 + 2\text{tr}(\kappa_{ij})}{3 - \text{tr}(\kappa_{\phi\phi})_{ij}}} > 0, \quad (9.6)$$

$$\text{tr}(\kappa_{ij}) > -\frac{3}{2}. \quad (9.7)$$

O efeito dos parâmetros de violação η , Λ foi determinar quão rápido as soluções convergem para os seus limites assintóticos, assim como estabelecer se o defeito seria mais ou menos

localizado. Em particular apenas Λ alterou o valor da energia e das cargas topológicas.

Além disso, vimos que a massa dos bósons vetoriais foram mudadas pelo fator $\frac{\eta}{\Delta}$ no caso do monopolo e por $\frac{\eta}{\Delta} \cos \gamma$ na situação do dyon. Notamos também que a única influência de Λ foi modificar o limite assintótico da componente temporal do campo de Yang-Mills e, assim, do campo elétrico.

Por fim, embora os coeficientes κ_{0i} e $(\kappa_{\phi\phi})_{0i}$ foram tomados nulos – condição indispensável para a existência do monopolo –, a nossa perspectiva de trabalho será investigar a existência de estados BPS do dyon – ou, em segundo plano, soluções de segunda ordem de Euler-Lagrange – para o caso mais geral em que κ_{0i} e $(\kappa_{\phi\phi})_{0i}$ são diferentes de zero. Ademais, estudaremos a formação dos estados BPS estados desses dois sólitos topológicos levando em conta também o setor birrefringente.

Apêndice A

Convenções e Unidades

- Usamos o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$, em que consideramos $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$; h é a constante de Planck e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; c é a velocidade da luz no vácuo; μ_0 e ε_0 são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica no vácuo, respectivamente.
- Consideramos a assinatura da métrica de Minkowski como $g_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.
- Os índices gregos vão de zero a 3, por exemplo: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; e os latinos de um a 3, como o modelo: $a, b, c = 1, 2, 3$ e $i, j, l = 1, 2, 3$; na maioria dos casos adotamos a, b, c, m e n para índices do espaço interno dos campos, enquanto i, j, l e k , para índices espaciais do espaço-tempo. Ao longo do texto, sempre que conveniente, essas questões são elucidadas e expostas sem ambiguidades, caso admitamos alguma definição diferente.

Apêndice B

Modelo de Yang-Mills-Higgs

O modelo de George-Glashow é uma teoria de Yang-Mills-Higgs, onde um campo de Yang-Mills A_μ é acoplado a um tripleto escalar real campo de Higgs $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, ambos definidos na álgebra de Lie de $SU(2)$. Ou, em virtude do isomorfismo existente entre $SU(2)$ e $SO(3)$, podemos interpretar esses campos como sendo definidos na álgebra de Lie de $SO(3)$. Entretanto, é importante lembrar que é necessário uma rotação de 4π em $SO(3)$ para gerar uma de 2π em $SU(2)$ [33]. Assim, o isomorfismo deve ser considerado apenas localmente. Por razões de melhor entendimento do mecanismo de quebra espontânea de simetria, vamos considerar essa última alternativa. Dessa forma, uma quebra de simetria de $SU(2)$ para $U(1)$ está em pé de igualdade em uma quebra de simetria de $SO(3)$ para $SO(2)$.

A densidade lagrangiana do modelo é dada por [38]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) + \text{Tr}[(D_\mu\phi)^T(D^\mu\phi)] - \mu^2 \text{Tr}(\phi^T\phi) - \frac{1}{2}\lambda [\text{Tr}(\phi^T\phi)]^2, \quad (\text{B.1})$$

em que μ^2 e λ são constantes; como veremos a constante e acopla o campo de Yang-Mills ao de Higgs e estará associada também às cargas.

O *field strength* é definido como:

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (\text{B.2})$$

E a derivada covariante:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + T(A_\mu)\phi, \quad (\text{B.3})$$

em que $T(A_\mu)$ é a representação irredutível de A_μ .

Para a teoria ser invariante de calibre, devemos ter:

$$A_\mu \rightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}. \quad (\text{B.4})$$

Note que $A_\mu \in AG$ (álgebra de Lie) de $SO(3)$ e $\omega \in G$ [grupo $SO(3)$, $\omega \omega^T = \omega^T \omega = 1$].

O campo de Higgs ϕ transforma-se na representação adjunta:

$$\phi \rightarrow \omega \phi \omega^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

Dessa maneira, também temos $\phi \in AG$.

Quando um elemento que pertence a álgebra atua em outro, isso é feito via comutador. Assim, a expressão (B.3), torna-se:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi]. \quad (\text{B.6})$$

Podemos escrever então A_μ e ϕ como combinação linear dos geradores de G , respectivamente:

$$A_\mu = e \tau^a A_\mu^a \quad (\text{B.7})$$

e:

$$\phi = \phi^a \tau^a, \quad (\text{B.8})$$

sendo os τ^a 's geradores antisimétricos [33] – por convenção, não estamos utilizando da unidade imaginária nos geradores e na relação de comutação, mas isso não altera o resultado geral –:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

os quais satisfazem a relação de ortogonalidade usual:

$$\text{Tr} (\tau^a \tau^b) = -\frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{B.10})$$

e a relação de comutação:

$$[\tau^a, \tau^b] = \varepsilon^{abc} \tau^c. \quad (\text{B.11})$$

Com todas essas definições, temos:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = [\partial_\mu e \tau^a A_\nu^a - \partial_\nu e \tau^a A_\mu^a] + [e \tau^a A_\mu^a, e \tau^b A_\nu^b] \\ &= e [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] \tau^a + e^2 A_\mu^c A_\nu^b \varepsilon^{cb} \tau^a \Rightarrow \end{aligned}$$

$$W_{\mu\nu} = eW_{\mu\nu}^a \tau^a, \quad (\text{B.12})$$

com:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{acb} A_\mu^c A_\nu^b. \quad (\text{B.13})$$

Consideremos ainda:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi] = \partial_\mu \phi^a \tau^a + [e\tau^a A_\mu^a, \phi^b \tau^b] \\ &= (\partial_\mu \phi^a) \tau^a + eA_\mu^c \phi^b \varepsilon^{cba} \tau^a \Rightarrow \\ D_\mu \phi &= (D_\mu \phi)^a \tau^a, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

em que:

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + e\varepsilon^{cba} A_\mu^c \phi^b. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo (B.8), (B.12) e (B.14) em (B.1), encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2e^2} \text{Tr} (W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \text{Tr} [(D_\mu \phi) (D^\mu \phi)] - \mu^2 \text{Tr} (\phi^T \phi) - \lambda [\text{Tr} (\phi^T \phi)]^2 = \\ &= \frac{1}{2e^2} \text{Tr} [eW_{\mu\nu}^a \tau^a e (W^{\mu\nu})^b \tau^b] - \text{Tr} [(D_\mu \phi)^a \tau^a (D^\mu \phi)^b \tau^b] + \\ &\quad - \mu^2 \text{Tr} [(\phi^a \tau^a)^T \phi^b \tau^b] - \lambda \left\{ \text{Tr} [(\phi^a \tau^a)^T \phi^b \tau^b] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^a (W^{\mu\nu})^b \left(-\frac{1}{2} \delta^{ab} \right) - (D_\mu \phi)^a (D^\mu \phi)^b \left(-\frac{1}{2} \delta^{ab} \right) + \\ &\quad - \mu^2 \phi^a \phi^b \frac{1}{2} \delta^{ab} - \lambda \left(\phi^a \phi^b \frac{1}{2} \delta^{ab} \right)^2 \Rightarrow \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a (W^{\mu\nu})^a + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^a (D^\mu \phi)^a - V(\phi^a \phi^a), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

sendo:

$$V(\phi^a \phi^a) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi^a)^2 \quad (\text{B.17})$$

B.1 Equações de movimento do campo de Yang-Mills

Haja vista que a densidade lagrangiana só depende dos campos e de suas derivadas de primeira ordem, a equação de Euler-Lagrange é dada de forma usual:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha^m} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\alpha^m)} \right) = 0. \quad (\text{B.18})$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha^m} = -e\varepsilon^{abm} A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^a - e\varepsilon^{abm} \phi^b (D^\alpha \phi)^a. \quad (\text{B.19})$$

E também:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta^m)} = -(W^{\nu\alpha})^m. \quad (\text{B.20})$$

Reescrevendo (B.18) com (B.19) e (B.20), obtemos:

$$\begin{aligned} -e\varepsilon^{abm} A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{abm} \phi^b (D^\alpha \phi)^a + \partial_\nu (W^{\nu\alpha})^m &= 0 \Rightarrow \\ \partial_\mu (W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{abc} A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c + e\varepsilon^{acb} \phi^b (D^\alpha \phi)^c &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Note que:

$$\begin{aligned} [\partial_\mu (W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{abc} A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c] \tau^a &= \frac{1}{e} [e\partial_\mu (W^{\mu\alpha})^a \tau^a + e^2 A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c \varepsilon^{bca} \tau^a] \\ &= \frac{1}{e} [\partial_\mu (W^{\mu\alpha}) + e^2 A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c [\tau^b, \tau^c]] \\ &= [\partial_\mu (W^{\mu\alpha}) + [eA_\mu^b \tau^b, e(W^{\mu\alpha})^c \tau^c]] \\ &= \frac{1}{e} [\partial_\mu (W^{\mu\alpha}) + [A_\mu, W^{\mu\alpha}]] \\ &= \frac{1}{e} (D_\mu W^{\mu\alpha}) \Rightarrow \\ (D_\mu W^{\mu\alpha}) &= e [\partial_\mu (W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{abc} A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c] \tau^a = e (D_\mu W^{\mu\alpha})^a \tau^a, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

em que:

$$(D_\mu W^{\mu\alpha})^a = [\partial_\mu (W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{abc} A_\mu^b (W^{\mu\alpha})^c]. \quad (\text{B.23})$$

Com a equação (B.23), (B.21) torna-se:

$$\begin{aligned} (D_\mu W^{\mu\alpha})^a + e\varepsilon^{acb} \phi^b (D^\alpha \phi)^c &= 0 \Rightarrow \\ (D_\mu W^{\mu\alpha})^a &= e (J^\alpha)^a, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

ou:

$$\begin{aligned} (D_\mu W^{\mu\alpha})^a \tau^a &= e (J^\alpha)^a \tau^a \Rightarrow \\ (D_\mu W^{\mu\alpha}) &= J^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

sendo J^α a densidade de corrente:

$$(J^\alpha)^a = \varepsilon^{abc} \phi^b (D^\alpha \phi)^c \quad e \quad (\text{B.26})$$

$$J^\alpha = e (J^\alpha)^a \tau^a. \quad (\text{B.27})$$

Analogamente ao caso abeliano, as equações de movimento homogêneas decorrem da identidade de Bianchi, a saber:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (D_\beta W_{\gamma\delta})^m = 0. \quad (\text{B.28})$$

B.1.1 Lei de Gauss

Para computarmos o análogo à lei de Gauss abeliana, fazemos $\alpha = 0$ em (B.24):

$$(D_\mu W^{\mu 0})^a = e\varepsilon^{abc} \phi^b (D^0 \phi)^c = e (J^0)^a. \quad (\text{B.29})$$

No regime estacionário, temos:

$$\begin{aligned} \partial_i (W^{i0})^a + e\varepsilon^{abc} A_i^b (W^{i0})^c &= e\varepsilon^{abc} \phi^b (\partial^0 \phi^c + e\varepsilon^{mnc} (A^0)^m \phi^n) \Rightarrow \\ -\partial_i (W_{i0})^a - e\varepsilon^{abc} A_i^b (W_{i0})^c &= e^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{mnc} \phi^b \phi^n A_0^m \Rightarrow \\ \partial_i \partial_i A_0^a + e\varepsilon^{acb} \partial_i (A_i^c A_0^b) + e\varepsilon^{abc} A_i^b \partial_i A_0^c + e^2 \varepsilon^{mnc} \varepsilon^{abc} A_i^b A_i^m A_0^n &= \\ &= -e^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{mnc} \phi^b \phi^n A_0^m. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Perceba que o gauge temporal satisfaz (B.30) trivialmente:

$$A_0^a = 0. \quad (\text{B.31})$$

B.1.2 Lei de Ampère

No regime estacionário e no gauge temporal, a lei de Ampère, calculada com $\alpha = i$ ($i = 1, 2, 3$), é dada por:

$$\begin{aligned} (D_\mu W^{\mu i})^a &= e\varepsilon^{abc} \phi^b (D^i \phi)^c = e (J^i)^a \Rightarrow \\ \partial_j (W_{ji})^a + e\varepsilon^{abc} A_j^b (W_{ji})^c &= e\varepsilon^{abc} \phi^b (D_i \phi)^c, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} &\{ \partial_j \partial_j A_i^a - \partial_i \partial_j A_j^a + e\varepsilon^{acb} [(\partial_j A_j^c) A_i^b + A_j^c (\partial_j A_i^b)] \} + \\ &+ [e\varepsilon^{abc} A_j^b \partial_j A_i^c - e\varepsilon^{abc} A_j^b \partial_i A_j^c + e^2 (A_j^b A_j^a A_i^b - A_j^b A_j^b A_i^a)] \\ &= e\varepsilon^{abc} \phi^b \partial_i \phi^c + e^2 (\phi^b A_i^a \phi^b - \phi^b A_i^b \phi^a). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

B.2 Equação de movimento do campo de Higgs

A equação de Euler-Lagrange para o campo de Higgs é expressa como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} \right) = 0. \quad (\text{B.34})$$

Assim:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} = (D^\mu \phi)^a \frac{\partial}{\partial \phi_m} (D_\mu \phi)^a - \mu^2 \phi^m - \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m. \quad (\text{B.35})$$

Mas nós sabemos que:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^a &= \partial_\mu \phi^a + e \varepsilon^{anc} A_\mu^n \phi^c \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \phi_m} (D_\mu \phi)^a &= \frac{\partial}{\partial \phi_m} (e \varepsilon^{nca} A_\mu^n \phi^c) = e \varepsilon^{nca} A_\mu^n \delta_{mc} \\ &= e \varepsilon^{nma} A_\mu^n. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Substituindo (B.36) em (B.35), obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} = (D^\mu \phi)^a e \varepsilon^{nma} A_\mu^n - \mu^2 \phi^m - \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m. \quad (\text{B.37})$$

Calculemos agora o segundo termo de (B.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} \left[\frac{1}{2} (D_\mu \phi)^a (D^\mu \phi)^a \right] = (D_\mu \phi)^a \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} (D^\mu \phi)^a \\ &= (D_\mu \phi)^a \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} (\partial_\mu \phi^a) = (D_\mu \phi)^a \delta_{ma} \eta_\mu^\beta = (D^\beta \phi)^m. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Com as expressões (B.37) e (B.38), (B.34) torna-se:

$$\begin{aligned} (D^\mu \phi)^a e \varepsilon^{nma} A_\mu^n - \partial_\beta (D^\beta \phi)^m &= \mu^2 \phi^m + \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m \Rightarrow \\ -\partial_\beta (D^\beta \phi)^m + e \varepsilon^{nma} A_\mu^n (D^\mu \phi)^a &= \mu^2 \phi^m + \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Ou de outra forma:

$$D_\beta (D^\beta \phi)^m = -\mu^2 \phi^m - \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m, \quad (\text{B.40})$$

em que:

$$D_\beta (D^\beta \phi)^m = -\partial_\beta (D^\beta \phi)^m - e \varepsilon^{mna} A_\beta^n (D^\beta \phi)^a.$$

B.2.1 Equação de movimento para o campo de Higgs no regime estacionário e no Gauge temporal

$$-\partial_i (D_i \phi)^m + e \varepsilon^{nma} (D^i \phi)^a A_i^n = -\mu^2 \phi^m - \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m. \quad (\text{B.41})$$

Ou de maneira mais compacta:

$$D_i (D_i \phi)^m = -\mu^2 \phi^m - \lambda (\phi^a \phi^a) \phi^m, \quad (\text{B.42})$$

com:

$$D_i (D_i \phi)^m = -\partial_i (D_i \phi)^m - e \varepsilon^{mna} A_i^n (D^i \phi)^a. \quad (\text{B.43})$$

B.3 Densidade de Energia

O tensor energia momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} W_{\alpha\nu}^a W_{\lambda\mu}^a + \frac{1}{2} (D_\nu \phi)^a (D_\mu \phi)^a - \mathcal{L} g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.44})$$

Assim, a densidade de energia é:

$$\mathcal{E} = T_{00} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} W_{\alpha 0}^a W_{\lambda 0}^a + \frac{1}{2} (D_0 \phi)^a (D_0 \phi)^a - \mathcal{L}. \quad (\text{B.45})$$

B.4 Quebra Espontânea de Simetria e Mecanismo de Higgs

Vamos procurar por configurações estacionárias – independentes do tempo – de energia e usar o gauge temporal satisfeito pela lei de Gauss (B.30). Nessas circunstâncias, $W_{\lambda 0}^a = (D_0 \phi)^a = 0$ e (B.45) fica como:

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} = \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a (W^{\mu\nu})^a - \frac{1}{2} (D_i \phi)^a (D^i \phi)^a + V(\phi^a \phi^a)$$

Encontraremos agora o vácuo da teoria. Para isso, escolhemos também configurações de campo homogêneas – independentes do espaço – no infinito e adotamos o gauge puro para as componentes espaciais de A_μ . Dessa forma, temos:

$$A_i = \omega \partial_i \omega^{-1} \Rightarrow \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned}
W_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j] = \partial_i A_j - \partial_j A_i + A_i A_j - A_j A_i \\
&= \partial_i (\omega \partial_j \omega^{-1}) - \partial_j (\omega \partial_i \omega^{-1}) + (\omega \partial_i \omega^{-1}) (\omega \partial_j \omega^{-1}) - (\omega \partial_j \omega^{-1}) (\omega \partial_i \omega^{-1}). \quad (\text{B.47})
\end{aligned}$$

Contudo, sabemos que:

$$\begin{aligned}
\omega \omega^{-1} = 1 &\Rightarrow \partial_i (\omega \omega^{-1}) = 0 \Rightarrow \omega \partial_i \omega^{-1} + (\partial_i \omega) \omega^{-1} = 0 \Rightarrow \\
&\omega \partial_i \omega^{-1} = -(\partial_i \omega) \omega^{-1}. \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

Substituindo (B.48) em (B.47), obtemos:

$$\begin{aligned}
W_{ij} &= \partial_i (\omega \partial_j \omega^{-1}) - \partial_j (\omega \partial_i \omega^{-1}) - (\partial_i \omega) \omega^{-1} (\omega \partial_j \omega^{-1}) + (\partial_j \omega) \omega^{-1} (\omega \partial_i \omega^{-1}) \\
&= \omega \partial_i \partial_j \omega^{-1} + (\partial_i \omega) (\partial_j \omega^{-1}) - \omega \partial_j \partial_i \omega^{-1} - (\partial_j \omega) (\partial_i \omega^{-1}) - (\partial_i \omega) (\partial_j \omega^{-1}) + (\partial_j \omega) (\partial_i \omega^{-1}) \Rightarrow \\
&W_{ij} = 0 \Rightarrow W_{ij}^a = 0. \quad (\text{B.49})
\end{aligned}$$

Para as configurações homogêneas no infinito, impomos:

$$\begin{aligned}
(D_i \phi)^a = 0 &\Rightarrow (D_i \phi) = 0 \Rightarrow \\
D_i \phi &= \partial_i \phi + [A_i, \phi] = \partial_i \phi + A_i \phi - \phi A_i \Rightarrow \\
&= \partial_i \phi + \omega \partial_i \omega^{-1} \phi - \phi \omega \partial_i \omega^{-1} = 0. \quad (\text{B.50})
\end{aligned}$$

Se escolhermos:

$$\phi_v = \omega \phi_0 \omega^{-1}. \quad (\text{B.51})$$

A expressão (B.51) é satisfeita; em que ϕ_v é o valor do campo de Higgs no vácuo e ϕ_0 é um campo constante a ser determinado. Assim, chegamos a uma configuração assintótica de densidade de energia dada simplesmente pelo potencial:

$$\mathcal{E} = V(\phi^a \phi^a) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi^a)^2 = \frac{1}{2} \mu^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4} \lambda |\phi|^4. \quad (\text{B.52})$$

Note que $V \geq 0$ para todo $\phi \neq 0$ e $V = 0$ se, e somente se, $\phi = 0$ – veja a figura B.1 –:

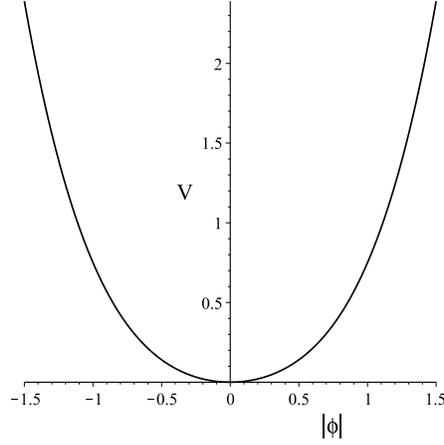


Figura B.1: Usamos $\lambda = \mu = 1$. A parte simétrica para $|\phi| < 0$ é apenas ilustrativa, já que não podemos ter $|\phi| < 0$.

Nesse caso, dizemos que o vácuo é trivial e invariante perante a transformação (B.5). Entretanto, agora vamos fazer $\mu^2 \rightarrow -\mu^2$ em (B.52) e investigar a estrutura de vácuo (veja a figura B.2):

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\mu^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4}\lambda |\phi|^4. \quad (\text{B.53})$$

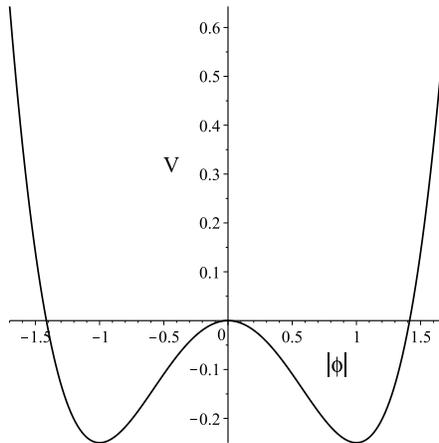


Figura B.2: Adotamos $\lambda = \mu = 1$. O valor mínimo do potencial ocorre para $|\phi| = 1$, compatível com a equação (B.58). A parte espelhada para $|\phi| < 0$ é apenas ilustrativa, haja vista que não podemos ter $|\phi| < 0$.

Calculando os pontos extremos de \mathcal{E} , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d|\phi|} &= -\mu^2 |\phi| + \lambda |\phi|^3 = 0 \Rightarrow \\ (-\mu^2 + \lambda |\phi|^2) |\phi| = 0 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\phi| = 0 \Rightarrow \phi = 0, \\ |\phi|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow |\phi| = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Verificando a natureza desses extremos, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{E}}{d(|\phi|)^2} &= -\mu^2 + 3\lambda |\phi|^2 \Rightarrow \\ \frac{d^2\mathcal{E}}{d(|\phi|)^2} \Big|_{|\phi|=0} &= -\mu^2 < 0 \text{ (ponto de máxima)} \text{ e} \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d(|\phi|)^2} \Big|_{|\phi|=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}} = -\mu^2 + 3\mu^2 = 2\mu^2 > 0 \text{ (ponto de mínimo)}. \quad (\text{B.56})$$

Portanto, a configuração mínima energia é dada quando:

$$|\phi_v|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (\text{B.57})$$

Substituindo (B.51) em (B.57), obtemos:

$$\begin{aligned} |\phi_v|^2 &= (\phi_v) (\phi_v)^T = (\omega \phi_0 \omega^{-1}) (\omega \phi_0 \omega^{-1})^T = (\omega \phi_0 \omega^T) (\omega \phi_0 \omega^T)^T = (\omega \phi_0 \omega^T) (\omega \phi_0^T \omega^T) = \\ &= \omega \phi_0^T \phi_0 \omega^T = \omega |\phi_0|^2 \omega^T = |\phi_0|^2 \omega \omega^T = |\phi_0|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow |\phi_0| = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \\ |\phi_0|^2 &= \phi^a \phi^a = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \left(\text{esfera de vácuo de raio } \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

B.4.1 Equação de movimento para o campo de Higgs (com quebra)

O potencial pode ser avaliado nessa configuração, resultando em:

$$V(\phi^a \phi^a) \Big|_{\phi^a \phi^a = \frac{\mu^2}{\lambda}} = -\frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda}. \quad (\text{B.59})$$

Podemos por *ad hoc* esse valor positivo no potencial (B.17), com $\mu^2 \rightarrow -\mu^2$, a fim de redefinir convenientemente o mínimo do potencial em zero, conforme segue:

$$\begin{aligned} V(|\phi|) &= -\frac{1}{2} \mu^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4} \lambda |\phi|^4 + \frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - |\phi_0|^2)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

em que denotamos $|\phi_0|^2$ simplesmente por v^2 .

Com esse potencial, a equação de movimento para o campo de Higgs com quebra de simetria torna-se:

$$D_\beta (D_\beta \phi)^m = -\lambda (|\phi|^2 - v^2) \phi^m, \quad (\text{B.61})$$

sendo:

$$D_\beta (D^\beta \phi)^m = -\partial_\beta (D^\beta \phi)^m - e\varepsilon^{mna} A_\beta^n (D^\beta \phi)^a.$$

B.4.2 A Escolha do Vácuo

Escolhemos o vácuo com o auxílio do gauge unitário ($\omega = 1$), como segue:

$$(A_i)_v = \omega \partial_i \omega^{-1} = 0. \quad (\text{B.62})$$

Adotamos também, por convenção, a seguinte estrutura para campo de Higgs no vácuo:

$$\phi_v = \omega \phi_0 \omega^{-1} = \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \text{ com } v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (\text{B.63})$$

A escolha pode ser totalmente arbitrária, pois todos os pontos na esfera de vácuo estão conectados por uma transformação do tipo (B.51).

B.4.3 A Perturbação dos Campos

Com (B.62) e (B.63), a perturbação dos campos em torno do vácuo é expressa por:

$$B_\mu^a = (A_\mu^a)_v + A_\mu^a = A_\mu^a \ll 1 \text{ e} \quad (\text{B.64})$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ v + \phi^3 \end{pmatrix}, \text{ em que } \phi^a \ll 1, \text{ } a = 1, 2, 3. \quad (\text{B.65})$$

A perturbação do *field strength* torna-se então:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + e\varepsilon^{acb} B_\mu^c B_\nu^b \approx \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a \equiv \mathcal{F}_{\mu\nu}^a. \quad (\text{B.66})$$

E a derivada covariante da perturbação:

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + e \varepsilon^{acb} A_\mu^c \phi^b$$

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^1 &= \partial_\mu \phi^1 + e \varepsilon^{1cb} A_\mu^c \phi^b = \partial_\mu \phi^1 + e (A_\mu^2 \phi^3 - A_\mu^3 \phi^2) \\ &= \partial_\mu \phi^1 + e [A_\mu^2 (v + \phi^3) - A_\mu^3 \phi^2] \approx \\ &\approx \partial_\mu \phi^1 + e A_\mu^2 v \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(D_\mu \phi)^1 = \partial_\mu \phi^1 + e A_\mu^2 v. \quad (\text{B.67})$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^2 &= \partial_\mu \phi^2 + e \varepsilon^{2cb} A_\mu^c \phi^b = \partial_\mu \phi^2 + e \varepsilon^{213} A_\mu^1 \phi^3 + e \varepsilon^{231} A_\mu^3 \phi^1 \approx \\ &= \partial_\mu \phi^2 - e A_\mu^1 \phi^3 = \partial_\mu \phi^2 - e A_\mu^1 (v + \phi^3) \approx \partial_\mu \phi^2 - e A_\mu^1 v \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(D_\mu \phi)^2 = \partial_\mu \phi^2 - e A_\mu^1 v. \quad (\text{B.68})$$

E por último:

$$(D_\mu \phi)^3 = \partial_\mu \phi^3 + e \varepsilon^{3cb} A_\mu^c \phi^b \approx \partial_\mu \phi^3. \quad (\text{B.69})$$

Nas equações de (B.66) a (B.69) foram considerados apenas termos de primeira ordem nas derivadas.

O potencial fica dado como:

$$\begin{aligned} V(\phi^a \phi^a) &= \frac{1}{2} \mu^2 [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2] + \frac{1}{2} \mu^2 (v + \phi^3)^2 + \\ &\frac{1}{4} \lambda [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (v + \phi^3)^2]^2. \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

B.4.4 Densidade Lagrangiana de Perturbação

No que segue, consideraremos somente termos de segunda ordem. Dessa forma, a densidade lagrangiana torna-se portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\approx -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a (\mathcal{F}^{\mu\nu})^a + \frac{1}{2} (ev)^2 \left(A_\mu^2 + \frac{1}{ev} \partial_\mu \phi^1 \right) \left((A^\mu)^2 + \frac{1}{ev} \partial^\mu \phi^1 \right) \\ &+ \frac{1}{2} (ev)^2 \left(A_\mu^1 - \frac{1}{ev} \partial_\mu \phi^2 \right) \left((A^\mu)^1 - \frac{1}{ev} \partial^\mu \phi^2 \right) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^3 \partial^\mu \phi^3 - \mu^2 (\phi^3)^2 \\ &+ \frac{1}{4} \mu^2 (v)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Definimos:

$$B_\mu^1 = (A^\mu)^1 - \frac{1}{ev} \partial^\mu \phi^2, \quad (\text{B.72})$$

$$B_\mu^2 = A_\mu^2 + \frac{1}{ev} \partial_\mu \phi^1, \quad (\text{B.73})$$

$$B_\mu^3 = A_\mu^3,$$

ou de maneira compacta:

$$B_\mu^a = (A^\mu)^a - \frac{\varepsilon^{3ab}}{ev} \partial^\mu \phi^b. \quad (\text{B.74})$$

E definimos ainda:

$$B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a = \mathcal{F}_{\mu\nu}^a. \quad (\text{B.75})$$

Substituindo (B.74) e (B.75) em (B.71), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \approx & -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}^a (B^{\mu\nu})^a + \frac{1}{2} (ev)^2 B_\mu^k (B^\mu)^k \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^3 \partial^\mu \phi^3 - \frac{1}{2} (\sqrt{2}\mu)^2 (\phi^3)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

em que $a = 1, 2, 3$ e $k = 1, 2$.

Assim, a densidade lagrangiana exibe três campos vetoriais massivos B_μ^a , sendo um sem massa e dois com massa:

$$M_B = ev = e \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}; \quad (\text{B.77})$$

e um campo de Higgs com massa:

$$M_\phi = \sqrt{2}\mu. \quad (\text{B.78})$$

Soluções BPS para dyons e monopolos são encontradas no conhecido *limite BPS* $\lambda = 0$ [8], ou seja, $V(|\phi|) = 0$. Isso equivale a fazer a razão entre os quadrados das massas (B.78) e (B.77) tender para zero, a saber:

$$\beta \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{M_\phi}{M_B} \right)^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda}{e^2} = 0. \quad (\text{B.79})$$

Embora, *a priori*, pareça que $M_B \rightarrow \infty$, quando $\lambda \rightarrow 0$, como mostra (B.77), isso não acontece de fato. O motivo é que quando $V(|\phi|) = 0$, a relação (B.77) nem existe. Nesse caso, o mecanismo que gera a massa $M_B = ev$ não está associado a um potencial com simetria

quebrada, mas à natureza não abeliana dos campos, que sustenta o vácuo do campo de Higgs na forma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi^a \rightarrow \phi_v^a = v \frac{x^a}{r},$$

sendo os x^a 's as coordenadas esféricas usuais, tais que $x_a x^a = r^2$.

B.4.5 Considerações Finais

O grupo $SO(3)$ possui três geradores, dois deles (τ^1 e τ^2) não aniquilam o vácuo $\phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

e um (τ^3), sim. A saber:

$$\tau^1 \phi_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.80})$$

$$\tau^2 \phi_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e} \quad (\text{B.81})$$

$$\tau^3 \phi_v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.82})$$

Assim, quando o sistema “escolhe” um valor de vácuo, a simetria remanescente é então do grupo $SO(2)$, pois possui apenas um gerador: o próprio τ^3 . Isso pode ser visto da seguinte forma: os geradores τ^1 , τ^2 , e τ^3 estão associados a rotações em torno dos eixos de ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 , respectivamente; as rotações ligadas a τ^1 e τ^2 modificam a estrutura de vácuo, ao passo que as conectadas a τ^3 , não; uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo ϕ^3 pode ser dada por:

$$\begin{pmatrix} SO(2) & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ com } SO(2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.83})$$

Expandido (B.83) em torno da unidade para rotações infinitesimais ($\theta \rightarrow \delta\theta \ll 1$), temos [33]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} SO(2) & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\approx \hat{1} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\theta = \\ &= \hat{1} + \begin{pmatrix} \tau_{SO(2)} & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\theta = \hat{1} + \tau^3 \delta\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

em que $\hat{1}$ é a matriz identidade e

$$\tau_{SO(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.85})$$

é o gerador não quebrado de $SO(2)$. Portanto, a correspondência entre τ^3 e $\tau_{SO(2)}$ é dada por:

$$\tau^3 = \begin{pmatrix} \tau_{SO(2)} & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.86})$$

Como a quebra de simetria ocorreu de $SO(3)$ para $SO(2)$ [ou de $SU(2)$ para $U(1)$], restando a penas um gerador τ^3 que aniquila o vácuo, ou equivalentemente, que deixa a lagrangiana de perturbação invariante, é de se esperar que a carga elétrica dos bósons vetoriais massivos seja dada em termos do subgrupo não quebrado $SO(2)$ [ou $U(1)$], especificamente em função de τ^3 analogamente a equação (B.27):

$$J^\alpha = e (J^\alpha)^3 \tau^3. \quad (\text{B.87})$$

Os geradores τ^1 e τ^2 são denominados quebrados e τ^3 , não-quebrado. Para cada gerador quebrado, surgiu um campo de Higgs não massivo, chamado de modo de Nambu-Goldstone. Esses modos foram "comidos" pelos bósons vetoriais B_μ^k , $k = 1, 2$ [veja equação (B.74)], os quais adquiriram massa. Um processo desse tipo é conhecido como *mecanismo de Higgs*. Todos esses resultados estão de acordo com o *teorema de Goldstone* [38].

Apêndice C

Monopolos Magnéticos e Dyons com Violação da Simetria de Lorentz

A densidade lagrangiana do modelo com os termos CPT-pares de violação da simetria de Lorentz (VL) no setor de gauge e de Higgs é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a (W^{\mu\nu})^a - \frac{1}{4}(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} (W_{\mu\nu})^a (W_{\alpha\beta})^a + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^a (D^\mu\phi)^a \\ & + \frac{1}{2}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu\phi)^a (D_\nu\phi)^a - V(\phi^a\phi^a), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

com as definições usuais:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{acb} A_\mu^c A_\nu^b, \quad (\text{C.2})$$

$$(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + e\varepsilon^{cba} A_\mu^c\phi^b, \quad (\text{C.3})$$

$$V(\phi^a\phi^a) = V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$E_i^a = -W_{0i}^a \text{ e} \quad (\text{C.5})$$

$$B_i^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}^a \text{ (ou } W_{ij}^a = -\varepsilon_{ijk}B_k^a). \quad (\text{C.6})$$

As propriedades de $(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ já foram discutidas no capítulo 7.

As soluções BPS para dyons e monopolos são obtidas no chamado *limite BPS* $\lambda = 0$ [8], isto é, $V(|\phi|) = 0$. Conforme já mencionado, investigamos somente o setor não birrefringente, dado pela parametrização [69]:

$$(\kappa_w)^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}\kappa^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}\kappa^{\mu\beta} + g^{\nu\beta}\kappa^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta}\kappa^{\nu\alpha}). \quad (\text{C.7})$$

Substituindo (C.7) em (C.1) no limite BPS, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a (W^{\mu\nu})^a - \frac{1}{2}\kappa^{\mu\beta} (W_{\mu\nu})^a (W_{\beta}{}^\nu)^a + \\ & + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^a (D^\mu\phi)^a + \frac{1}{2}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu\phi)^a (D_\nu\phi)^a\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

C.1 Equação de Movimento do Campo de Yang-Mills

A equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha^m} - \partial_\eta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\eta A_\alpha^m)} \right) = 0. \quad (\text{C.9})$$

Vamos calcular o primeiro termo de (C.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha^m} = & e\varepsilon^{abm} (W^{\alpha\mu})^a A_\mu^b + e\varepsilon^{abm}\kappa^{\alpha\mu} g^{\nu\lambda} W_{\mu\lambda}{}^a A_\nu^b + \\ & + e\varepsilon^{abm}\kappa^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} W_{\nu\beta}{}^a A_\mu^b + e\varepsilon^{bam}\phi^b (D^\alpha\phi)^a + \\ & + e\varepsilon^{abm}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\alpha}\phi^a (D_\mu\phi)^b.\end{aligned}\quad (\text{C.10})$$

Computando o segundo termo de (C.9), encontramos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\eta A_\alpha^m)} = (W^{\alpha\eta})^m - \kappa^{\eta\mu} g^{\alpha\nu} (W_{\mu\nu})^m + \kappa^{\alpha\mu} g^{\eta\nu} (W_{\mu\nu})^m. \quad (\text{C.11})$$

Substituindo (C.10) e (C.11) em (C.9), temos:

$$\begin{aligned}\partial_\eta (W^{\eta\alpha})^m + e\varepsilon^{mba} (W^{\mu\alpha})^a A_\mu^b - \kappa^{\alpha\mu} \partial_\eta (W_\mu{}^\eta)^m + \kappa^{\eta\mu} \partial_\eta (W_\mu{}^\alpha)^m + \\ + e\varepsilon^{abm}\kappa^{\alpha\mu} (W_\mu{}^\nu)^a A_\nu^b - e\varepsilon^{abm}\kappa^{\mu\beta} (W_\beta{}^\alpha)^a A_\mu^b \\ = -e\varepsilon^{mab}\phi^a (D^\alpha\phi)^b - e\varepsilon^{mab}(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\alpha}\phi^a (D_\mu\phi)^b.\end{aligned}$$

Fazemos as seguintes definições:

$$J_\mu^m = \varepsilon^{mab}\phi^a (D_\mu\phi)^b, \quad (\text{C.12})$$

$$(D_\eta W^{\eta\alpha})^m = \partial_\eta (W^{\eta\alpha})^m + e\varepsilon^{mba} (W^{\alpha\mu})^a A_\mu^b. \quad (\text{C.13})$$

E obtemos por fim:

$$\begin{aligned}(D_\eta W^{\eta\alpha})^m - \kappa^{\alpha\mu} D_\eta (W_\mu{}^\eta)^m + \kappa^{\eta\mu} D_\eta (W_\mu{}^\alpha)^m \\ = -e(J^\alpha)^m - e(\kappa_{\phi\phi})^{\mu\alpha} J_\mu^m.\end{aligned}\quad (\text{C.14})$$

As equações homogêneas não mudam e, como em (B.28), equivalem a identidade de Bianchi, uma vez que as propriedades geométricas dos campos são inalteradas:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (D_\beta W_{\gamma\delta})^m = 0. \quad (\text{C.15})$$

C.1.1 Lei de Gauss

Estaremos interessados em visualizar a lei de Gauss no regime estacionário (pois analisamos soluções estáticas), para verificar a validade ou não do gauge temporal. Ela é obtida quando $\alpha = 0$ em (C.14), saber:

$$\begin{aligned} \partial_i \{ [1 + \kappa_{00}] W_{0i}^m + \kappa_{0j} W_{ij}^m - \kappa_{ij} W_{0j}^m \} - (1 + \kappa_{00}) e \varepsilon^{abm} W_{0i}^a A_i^b + \\ + e \varepsilon^{abm} \kappa_{0i} W_{ij}^a A_j^b + e \varepsilon^{abm} \kappa_{ji} W_{0i}^a A_j^b = -e \mathfrak{S}^m \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

em que temos definido:

$$\mathfrak{S}^m = [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] J_0^m - (\kappa_{\phi\phi})_{0i} J_i^m. \quad (\text{C.17})$$

Ou também de forma explícita:

$$\begin{aligned} \partial_i [(1 + \kappa_{00}) (-\partial_i A_0^m + e \varepsilon^{mcb} A_0^c A_i^b) + \kappa_{0j} (\partial_i A_j^m - \partial_j A_i^m + e \varepsilon^{mcb} A_i^c A_j^b)] + \\ - \kappa_{ij} \partial_i (-\partial_j A_0^m + e \varepsilon^{mcb} A_0^c A_j^b) - (1 + \kappa_{00}) e \varepsilon^{abm} (-\partial_i A_0^a + e \varepsilon^{acn} A_0^c A_i^n) A_i^b \\ = -e^2 [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] \varepsilon^{abm} \varepsilon^{pqb} A_0^p \phi^q \phi^a - e (\kappa_{\phi\phi})_{0i} \varepsilon^{abm} \phi^a (D_i \phi)^b. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

C.1.2 Lei de Ampère

No regime estacionário, a lei de Ampère é determinada fazendo-se $\alpha = i$ ($i = 1, 2, 3$) em (C.14), isto é:

$$\begin{aligned} -D_0 W_{0i}^m - \kappa_{00} D_0 W_{0i}^m + \kappa_{0j} D_0 W_{ji}^m + \kappa_{ij} D_0 W_{0j}^m \\ D_j W_{ji}^m + \kappa_{ij} D_k W_{jk}^m - \kappa_{i0} D_j W_{0j}^m + \kappa_{j0} D_j W_{0i}^m + \kappa_{jk} D_j W_{ik}^m \\ = e J_i^m + e (\kappa_{\phi\phi})_{0i} J_0^m - e (\kappa_{\phi\phi})_{ji} J_j^m. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Em nosso caso particular de interesse, no qual assumimos $\kappa_{i0} = (\kappa_{\phi\phi})_{i0} = 0$ em (C.18), o gauge temporal $A_0^a = 0$ é válido. Dessa maneira, $D_0 W_{0i}^m = 0$ e (C.19) torna-se:

$$D_j (W_{jk})^m + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^m + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^m = e \tilde{J}_k^m, \quad (\text{C.20})$$

em que $\tilde{J}_k^m = J_k^m - (\kappa_{\phi\phi})_{kj} J_j^m$.

C.2 Equação de Movimento do Campo de Higgs

A equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} \right) = 0. \quad (\text{C.21})$$

Resolvendo o primeiro termo de (C.21):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} = (D^\mu \phi)^a \frac{\partial}{\partial \phi_m} (D_\mu \phi)^a + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^a \frac{\partial}{\partial \phi_m} (D_\nu \phi)^a. \quad (\text{C.22})$$

Mas nós sabemos que:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^a &= \partial_\mu \phi^a + e\varepsilon^{anc} A_\mu^n \phi^c \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \phi_m} (D_\mu \phi)^a &= \frac{\partial}{\partial \phi_m} (e\varepsilon^{nca} A_\mu^n \phi^c) = e\varepsilon^{nca} A_\mu^n \delta_{mc} = e\varepsilon^{nma} A_\mu^n. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Substituindo (C.23) em (C.22), encontramos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} = (D^\mu \phi)^a e\varepsilon^{nma} A_\mu^n + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^a e\varepsilon^{nma} A_\nu^n. \quad (\text{C.24})$$

Calculando o segundo termo de (C.21), temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \phi_m)} = (D_\beta \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\beta} (D_\mu \phi)^m. \quad (\text{C.25})$$

Com (C.24) e (C.25), (C.21) torna-se:

$$D_\mu (D^\mu \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} D_\nu (D_\mu \phi)^m = 0, \quad (\text{C.26})$$

em que definimos:

$$D_\nu (D_\mu \phi)^m = \partial_\nu (D_\mu \phi)^m + e\varepsilon^{mna} (D_\mu \phi)^a A_\nu^n. \quad (\text{C.27})$$

No regime estacionário, (C.26) transforma-se em:

$$D_i (D_i \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})_{0i} D_i (D_0 \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})_{0i} D_0 (D_i \phi)^m - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} D_i (D_j \phi)^m = 0 \quad (\text{C.28})$$

Estaremos interessados em investigar o caso particular

$$(\kappa_{\phi\phi})_{0i} = \kappa_{0i} = 0, \quad (\text{C.29})$$

no qual (C.28) se resume a:

$$R_{ki} R_{kj} D_i (D_j \phi)^m = 0, \quad (\text{C.30})$$

considerando:

$$R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}. \quad (\text{C.31})$$

C.3 Densidade de Energia

No regime estacionário, a densidade de energia torna-se simplesmente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = -\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{i0}^a W_{j0}^a + \frac{1}{4} W_{ij}^a W_{ij}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{ik}^a W_{jk}^a \\
&+ \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + \frac{1}{2} (D_i\phi)^a (D_i\phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \\
&+ \kappa_{0i} W_{0j}^a W_{ij}^a - (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a + \kappa_{ij} W_{i0}^a W_{j0}^a \\
&- [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + (\kappa_{\phi\phi})_{0i} (D_0\phi)^a (D_i\phi)^a.
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Da lei de Gauss (C.16), obtemos:

$$\begin{aligned}
&- [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^b (D_0\phi)^b + (\kappa_{\phi\phi})_{0i} (D_0\phi)^b (D_i\phi)^b \\
&= \partial_i \{ A_0^m [[1 + \kappa_{00}] W_{0i}^m + \kappa_{0j} W_{ij}^m - \kappa_{ij} W_{0j}^m] \} \\
&+ (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^m W_{0i}^m - \kappa_{0i} W_{0j}^m W_{ij}^m - \kappa_{ij} W_{0i}^a W_{0j}^a.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Substituindo (C.33) em (C.32), temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{i0}^a W_{j0}^a + \frac{1}{4} W_{ij}^a W_{ij}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{ik}^a W_{jk}^a \\
&+ \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + \frac{1}{2} (D_i\phi)^a (D_i\phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a \\
&+ \kappa_{0i} W_{0j}^a W_{ij}^a - (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a + \kappa_{ij} W_{i0}^a W_{j0}^a \\
&\partial_i \{ A_0^m [[1 + \kappa_{00}] W_{0i}^m + \kappa_{0j} W_{ij}^m + \kappa_{ij} W_{0j}^m] \} \\
&+ [1 + \kappa_{00}] W_{0i}^m W_{0i}^m - \kappa_{0i} W_{0j}^m W_{ij}^m - \kappa_{ij} W_{0i}^m W_{0j}^m.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Descartamos o termo de superfície em (C.34), o qual tende a zero no infinito:

$$\partial_i \{ A_0^m [[1 + \kappa_{00}] W_{0i}^m + \kappa_{0j} W_{ij}^m + \kappa_{ij} W_{0j}^m] \} = 0. \tag{C.35}$$

Assim, encontramos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{0i}^a W_{0j}^a + \frac{1}{4} W_{ij}^a W_{ij}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{ik}^a W_{jk}^a \\
&+ \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a + \frac{1}{2} (D_i\phi)^a (D_i\phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a.
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Podemos reescrever os dois primeiros de (C.36) como:

$$\frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{0i}^a W_{0j}^a = \frac{1}{2} [(1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij}] W_{0i}^a W_{0j}^a. \tag{C.37}$$

Agora definimos:

$$(1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij} = [1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij} \equiv M_{ki} M_{kj}. \quad (\text{C.38})$$

Substituindo (C.38) em (C.37), obtemos:

$$\frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{i0}^a W_{j0}^a = \frac{1}{2} (M_{ki} W_{0i}^a) (M_{kj} W_{0j}^a). \quad (\text{C.39})$$

Definimos ainda:

$$\tilde{E}_k^a \equiv \tilde{W}_{k0}^a = M_{ki} W_{0i}^a = M_{ki} E_i^a, \quad (\text{C.40})$$

em que \tilde{E}_k^a é o campo elétrico não abeliano modificado e consideramos:

$$E_i^a = -W_{0i}^a, \quad (\text{C.41})$$

como de costume. Então, com (C.40), (C.39) torna-se:

$$\frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) W_{0i}^a W_{0i}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{0i}^a W_{0j}^a = \frac{1}{2} \tilde{W}_{0k}^a \tilde{W}_{0k}^a = \frac{1}{2} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_k^a. \quad (\text{C.42})$$

O mesmo fazemos com os termos subsequentes de (C.36), conforme a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} W_{ij}^a W_{ij}^a - \frac{1}{2} \kappa_{ij} W_{ik}^a W_{jk}^a &= \\ &= \frac{1}{2} [B_j^a B_j^a + \text{Tr}(\kappa_{ij}) B_j^a B_j^a - \kappa_{ij} B_j^a B_i^a] \\ &= \frac{1}{2} \{[1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}\} B_i^a B_j^a, \\ &= \frac{1}{2} N_{ki} N_{kj} B_i^a B_j^a \\ &= \frac{1}{2} (N_{ki} B_i^a) (N_{kj} B_j^a) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{B}_k^a \tilde{B}_k^a, \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

em que temos usado as definições:

$$W_{jk}^a = -\varepsilon_{jkm} B_m^a, \quad (\text{C.44})$$

$$N_{ki} N_{kj} = [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} + \kappa_{ij}, \quad (\text{C.45})$$

$$\tilde{B}_k^a = N_{ki} B_i^a. \quad (\text{C.46})$$

E, por último, consideramos:

$$\frac{1}{2} (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i \phi)^a (D_j \phi)^a = \frac{1}{2} [\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij}] (D_i \phi)^a (D_j \phi)^a. \quad (\text{C.47})$$

Analogamente aos casos anteriores, definimos:

$$\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} = R_{ki}R_{kj}. \quad (\text{C.48})$$

Reescrevendo (C.47) com o auxílio de (C.48), encontramos:

$$\frac{1}{2} (D_i\phi)^a (D_i\phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a = \frac{1}{2} [R_{ki} (D_i\phi)^a] [R_{kj} (D_j\phi)^a]. \quad (\text{C.49})$$

Mais uma vez fazemos outra definição:

$$(\tilde{D}_k\phi^a) = R_{ki}(D_i\phi^a), \quad (\text{C.50})$$

com a qual, a equação (C.49) vem a ser:

$$\frac{1}{2} (D_i\phi)^a (D_i\phi)^a - \frac{1}{2} (\kappa_{\phi\phi})_{ij} (D_i\phi)^a (D_j\phi)^a = \frac{1}{2} (\tilde{D}_k\phi)^a (\tilde{D}_k\phi)^a. \quad (\text{C.51})$$

Podemos reescrever (C.36) com a ajuda das expressões (C.42), (C.43) e (C.51) e obter:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_i^a + \frac{1}{2} \tilde{B}_i^a \tilde{B}_i^a + \frac{1}{2} (\tilde{D}_i\phi)^a (\tilde{D}_i\phi)^a \\ &+ \frac{1}{2} [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] (D_0\phi)^a (D_0\phi)^a. \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

C.4 Monopolo BPS Estendido e Condições sobre os Campos de Fundo

A configuração tipo monopolo surge quando adotamos o gauge temporal $A_0^a = 0$ – ou de maneira equivalente $\tilde{E}_k^a = 0$ – em (C.52). Contudo, isso só é permitido se fizermos

$$(\kappa_{\phi\phi})_{0i} = \kappa_{0i} = 0 \quad (\text{C.53})$$

na lei de Gauss (C.18). Diante dessas condições, a energia torna-se:

$$E = \int d^3x \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\tilde{B}_i^a \tilde{B}_i^a + (\tilde{D}_i\phi)^a (\tilde{D}_i\phi)^a \right]. \quad (\text{C.54})$$

Usando o formalismo BPS, obtemos:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\tilde{B}_i^a \mp (\tilde{D}_i\phi)^a \right]^2 \pm \int d^3x \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i\phi)^a \geq E_{BPS} = \pm \int d^3x \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i\phi)^a. \quad (\text{C.55})$$

Zeramos o primeiro termo e encontramos a equação BPS modificada (o sinal superior corresponde ao monopolo e o inferior, ao antimonopolo):

$$\tilde{B}_i^a = \pm(\tilde{D}_i\phi)^a. \quad (\text{C.56})$$

Vamos reescrever o último termo em (C.55) de forma conveniente. Consideremos inicialmente:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i^a(\tilde{D}_i\phi)^a &= N_{ik}R_{ij}B_k^a(D_j\phi)^a \\ &= N_{ik}R_{ij}\left(B_k^a\partial_j\phi^a + e\varepsilon^{abc}B_k^aA_j^b\phi^c\right) \\ &= N_{ik}R_{ij}\partial_j(B_k^a\phi^a) - \phi^aN_{ik}R_{ij}D_jB_k^a \\ &= N_{ik}R_{ij}\partial_j(B_k^a\phi^a) - \frac{1}{2}\phi^a\varepsilon_{kpq}N_{ik}R_{ij}D_jW_{pq}^a. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Note que se a condição

$$N_{ik}R_{ij} = R_{ij}N_{ik} = \Delta\delta_{kj}, \quad (\text{C.58})$$

ou equivalentemente,

$$\Delta^2\delta_{pr} = \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})]\delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \left[\delta_{qr} - (k_{\phi\phi})_{qr} \right], \quad (\text{C.59})$$

$$\Delta = \pm \left\{ \det \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})]\delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \det \left[\delta_{qr} - (k_{\phi\phi})_{qr} \right] \right\}^{\frac{1}{6}} \quad (\text{C.60})$$

for satisfeita, então teremos

$$\varepsilon_{kpq}N_{ik}R_{ij}D_jW_{pq}^a = \Delta\varepsilon_{kpq}\delta_{kj}D_jW_{pq}^a = \Delta\varepsilon_{kpq}D_kW_{pq}^a = 0, \quad (\text{C.61})$$

por causa da identidade de Bianchi. Assim, (C.57) resulta em:

$$\tilde{B}_i^a(\tilde{D}_i\phi)^a = \partial_i(\Delta B_i^a\phi^a). \quad (\text{C.62})$$

Levando (C.62) em (C.55), encontramos a energia BPS:

$$E_{BPS} = \pm \int d^3x \partial_i(\Delta B_i^a\phi^a) = \pm \oint_{s \rightarrow \infty} dS_j(\Delta B_j^a\phi^a). \quad (\text{C.63})$$

Identificamos a expressão acima como a carga magnética modificada pela quebra de Lorentz,

$$\tilde{Q}_m = \pm \frac{1}{v} \oint_{s \rightarrow \infty} dS_j(\Delta B_j^a\phi^a). \quad (\text{C.64})$$

Não podemos identificar antecipadamente a integral em (C.63) como a definição da carga magnética, segundo fizemos no caso usual. Antes disso, precisamos verificar o comportamento dos campos no ansatz, obedecendo a equação BPS (C.56), a qual também no ansatz equivale ao sistema de equações diferenciais,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) = \pm \frac{\Delta}{\eta} \frac{1 - W^2}{r^2}, \quad (\text{C.65})$$

$$\frac{dW}{dr} = \mp \frac{\eta}{\Delta} \frac{HW}{r}, \eta = 1 - \frac{1}{3} \text{tr} \left[(k_{\phi\phi})_{ij} \right]. \quad (\text{C.66})$$

Multiplicamos convenientemente as equações (C.65) e (C.66) por $\frac{1}{ve} - v$ é o valor esperado do campo de Higgs no vácuo – para torná-las adimensionais como tais as funções H e W , a saber:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{H}{\rho} \right) = \pm \frac{\Delta}{\eta} \frac{1 - W^2}{\rho^2}, \quad (\text{C.67})$$

$$\frac{dW}{d\rho} = \mp \frac{\eta}{\Delta} \frac{HW}{\rho}, \rho = ver. \quad (\text{C.68})$$

Agora computamos a integral

$$\pm \oint_{s \rightarrow \infty} dS_j (B_j^a \phi^a) = \pm \oint_{s \rightarrow \infty} dS \frac{x_j}{r} B_j^a \phi^a \quad (\text{C.69})$$

$$= \pm \frac{4\pi}{e^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{H}{r} (1 - W^2) \right], \quad (\text{C.70})$$

onde verificamos que os campos devem satisfazer as condições de contorno usuais no infinito,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{r} = \pm ve, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = 0 \quad (\text{C.71})$$

e na origem

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{H(r)}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} W(r) = \pm 1 \quad (\text{C.72})$$

para evitar divergências.

Embora as equações BPS's (C.65) e (C.66) tenham sido modificadas pela quebra de Lorentz, o cálculo da integral (C.70) não sofreu nenhuma modificação. Dessa maneira, temos:

$$\pm \oint_{s \rightarrow \infty} dS_j (B_j^a \phi^a) = v \frac{4\pi}{e} = vQ_m. \quad (\text{C.73})$$

Com esse resultado, a energia reduz-se a

$$E_{BPS} = v \frac{4\pi}{e} \Delta = vQ_m \Delta = v\tilde{Q}_m, \quad (\text{C.74})$$

em que devemos impor $\Delta > 0$ para garantir a positividade da energia.

C.4.1 Comportamento Assintótico dos Campos

Analisemos também os perfis assintóticos das funções H e W . Para isso, linearizamos as equações BPS's (C.65) e (C.66), propondo as expansões até a primeira ordem (consideraremos somente o monopolo - sinal superior),

$$\frac{H}{r} \approx C_H + \delta H, \quad C_H = cte, \quad \delta H \ll 1, \quad (\text{C.75})$$

$$W \approx C_w + \delta W, \quad C_w = cte, \quad \delta W \ll 1. \quad (\text{C.76})$$

Dessa forma, obtemos para $r \rightarrow 0$ ($C_H = 0, C_w = 1$)

$$\frac{H}{r} \approx \delta H, \quad (\text{C.77})$$

$$W \approx 1 + \delta W. \quad (\text{C.78})$$

Consideremos então a equação BPS (C.67),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{H}{\rho} \right) = \frac{\Delta}{\eta} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1 - W^2}{\rho^2} \rightarrow \frac{\Delta}{\eta} \frac{0}{0}. \quad (\text{C.79})$$

Para interminação do tipo $\frac{0}{0}$ em (C.79), usamos a regra de L'Hospital,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{H}{\rho} \right) = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\eta} \frac{2W}{2\rho} \frac{dW}{d\rho} \approx - \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho}. \quad (\text{C.80})$$

Substituindo (C.77) e (C.78) em (C.68) e em (C.80), temos respectivamente:

$$\frac{d}{d\rho} (\delta W) \approx - \frac{\eta}{\Delta} \frac{1}{ev} \delta H, \quad (\text{C.81})$$

$$\frac{1}{ev} \frac{d}{d\rho} (\delta H) \approx - \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\delta W). \quad (\text{C.82})$$

Derivando (C.81), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \frac{d}{d\rho} (\delta W) &\approx - \frac{\eta}{\Delta} \frac{1}{ev} \frac{d}{d\rho} (\delta H) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\delta W) \Rightarrow \\ \frac{d \left[\frac{d}{d\rho} (\delta W) \right]}{\frac{d}{d\rho} (\delta W)} &\approx \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} (\delta W) \approx \rho \Rightarrow (\delta W) \approx -C_0 \frac{1}{2} \rho^2, \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

em que introduzimos a constante $-C_0$ por coerência.

Substituímos (C.83) em (C.82), encontrando:

$$\frac{1}{ev} \frac{d}{d\rho} (\delta H) \approx C_0 \frac{\Delta}{\eta} \Rightarrow (\delta H) \approx C_0 \frac{\Delta}{\eta} ev \rho. \quad (\text{C.84})$$

Portanto, para $r \rightarrow 0$, temos

$$\frac{H}{r} \approx C_0 \frac{\Delta}{\eta} (ev)^2 r, \quad (\text{C.85})$$

$$W \approx 1 - \frac{1}{2} C_0 (ev)^2 r^2. \quad (\text{C.86})$$

Analisemos agora o caso para $r \gg 0$ ($C_H = ev, C_w = 0$), onde

$$\frac{H}{r} \approx ev + \delta H, \quad (\text{C.87})$$

$$W \approx \delta W \quad (\text{C.88})$$

e as equações BPS (C.67) e (C.68) tornam-se

$$\frac{1}{ev} \frac{d}{d\rho} (\delta H) \approx \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\rho^2}, \quad (\text{C.89})$$

$$\frac{d}{d\rho} (\delta W) \approx -\frac{\eta}{\Delta} \delta W. \quad (\text{C.90})$$

Calculemos a solução imediata de (C.89),

$$d(\delta H) \approx ev \frac{\Delta}{\eta} \frac{d\rho}{\rho^2} \Rightarrow \delta H \approx -ev \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\rho}; \quad (\text{C.91})$$

e também de (C.90)

$$\frac{d(\delta W)}{\delta W} \approx -\frac{\eta}{\Delta} d\rho \Rightarrow \delta W \approx e^{-\frac{\eta}{\Delta} \rho}. \quad (\text{C.92})$$

Dessa forma, para $r \gg 0$, as soluções se comportam como

$$\frac{H}{r} \approx ev - \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{r}, \quad (\text{C.93})$$

$$W \approx e^{-\frac{\eta}{\Delta} ev r}. \quad (\text{C.94})$$

Note que devemos ter também $\eta > 0$ para garantir as convergências das soluções.

C.4.2 Equivalência entre as Equações BPS's e as Equações de Euler-Lagrange

Para o campo de Higgs

Consideremos a equação BPS (C.56):

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_i^a &= \pm(\tilde{D}_i\phi)^a \\
N_{ik}B_k^a &= \pm R_{il}(D_l\phi)^a \Rightarrow \\
R_{ij}N_{ik}B_k^a &= \pm R_{ij}R_{il}(D_l\phi)^a \\
\Delta\delta_{kj}B_k^a &= \pm R_{ij}R_{il}(D_l\phi)^a \\
\Delta B_j^a &= \pm R_{ij}R_{il}(D_l\phi)^a.
\end{aligned} \tag{C.95}$$

Aplicando a derivada covariante D_j em ambos os lados de (C.95), temos:

$$\Delta D_j B_j^a = \pm R_{ij}R_{il}D_j(D_l\phi)^a. \tag{C.96}$$

Por outro lado, sabemos da definição

$$B_j^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{j pq}W_{pq}^a, \tag{C.97}$$

a partir da qual encontramos

$$\Delta D_j B_j^a = -\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{j pq}D_j W_{pq}^a = 0, \tag{C.98}$$

por causa da identidade de Bianchi,

$$\varepsilon_{j pq}D_j W_{pq}^a = 0. \tag{C.99}$$

Portanto, com (C.96) e (C.98) somos levados à equação de movimento do campo de Higgs

$$R_{ij}R_{il}D_j(D_l\phi)^a = 0. \tag{C.100}$$

Para a Lei de Ampère

Vimos em (C.20) que lei de Ampère é dada por

$$D_j(W_{jk})^m + \kappa_{ki}D_j(W_{ij})^m + \kappa_{ij}D_j(W_{ki})^m = e\tilde{J}_k^m, \tag{C.101}$$

em que $\tilde{J}_k^m = J_k^m - (\kappa_{\phi\phi})_{pk} J_p^m = R_{ik} R_{ip} J_p^m$.

Por outro lado, da equação BPS (C.95), juntamente com a definição (C.97), obtemos:

$$W_{ij}^a = \mp \frac{1}{\Delta} \varepsilon_{ijk} \left[\delta_{kp} - (k_{\phi\phi})_{kp} \right] (D_p \phi)^a \Rightarrow \quad (\text{C.102})$$

$$\kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a = \mp \frac{1}{\Delta} \kappa_{ki} \varepsilon_{ijm} \left[\delta_{mp} - (k_{\phi\phi})_{mp} \right] D_j (D_p \phi)^a, \quad (\text{C.103})$$

$$\kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a = \mp \frac{1}{\Delta} \kappa_{ij} \varepsilon_{kim} \left[\delta_{mp} - (k_{\phi\phi})_{mp} \right] D_j (D_p \phi)^a. \quad (\text{C.104})$$

Somando (C.102), (C.103) e (C.104), temos

$$\begin{aligned} & D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a \\ &= \pm \frac{1}{\Delta} \left[\varepsilon_{kjm} - \kappa_{ki} \varepsilon_{ijm} - \kappa_{ij} \varepsilon_{kim} \right] \left[\delta_{mn} - (k_{\phi\phi})_{mn} \right] D_j (D_n \phi)^a. \end{aligned} \quad (\text{C.105})$$

Multiplicamos (C.105) por ε_{rsk} e fazemos as devidas simplificações, obtendo:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{rsk} \left[D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a \right] \\ &= \pm \frac{1}{\Delta} \left[\varepsilon_{rsk} \varepsilon_{kjm} - \varepsilon_{rsk} \kappa_{ki} \varepsilon_{ijm} - \kappa_{ij} \varepsilon_{rsk} \varepsilon_{kim} \right] \left[\delta_{mn} - (k_{\phi\phi})_{mn} \right] D_j (D_n \phi)^a. \end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

A relação (C.59),

$$\Delta^2 \delta_{pr} = \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \left[\delta_{qr} - (k_{\phi\phi})_{qr} \right],$$

permite-nos escrever (C.106) como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rsk} \left[D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a \right] &= \pm \frac{1}{\Delta} \left\{ \Delta^2 [D_r, D_s] \phi^a \right\} \\ &= \pm \Delta [D_r, D_s] \phi^a. \end{aligned} \quad (\text{C.107})$$

Usando a equação BPS (C.102) na identidade

$$[D_r, D_s] \phi^a = e \varepsilon^{abc} W_{rs}^b \phi^c, \quad (\text{C.108})$$

achamos:

$$[D_r, D_s] \phi^a = \pm \frac{1}{\Delta} e \varepsilon_{rsk} \left[\delta_{kp} - (k_{\phi\phi})_{kp} \right] \varepsilon^{abc} \phi^b (D_p \phi)^c. \quad (\text{C.109})$$

Substituindo (C.109) em (C.107), encontramos:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{rsk} \left[D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a \right] \\ &= e \varepsilon_{rsk} \left[\delta_{kp} - (k_{\phi\phi})_{kp} \right] \varepsilon^{abc} \phi^b (D_p \phi)^c, \end{aligned} \quad (\text{C.110})$$

de onde finalmente somos levados à lei de Ampère,

$$\begin{aligned} [D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a] &= e \left[\delta_{kp} - (\kappa_{\phi\phi})_{kp} \right] \varepsilon^{abc} \phi^b (D_p \phi)^c \\ &= e \tilde{J}_k^a, \end{aligned} \quad (\text{C.111})$$

conforme esperávamos.

C.5 Dyon BPS Estendido e Condições sobre os Campos de Fundo

Vamos averiguar a lei Gauss não abeliana (C.18) no regime estacionário e a equação de movimento para o campo de Higgs (C.26), respectivamente:

$$\begin{aligned} \partial_i [(1 + \kappa_{00}) (-\partial_i A_0^m + e \varepsilon^{mcb} A_0^c A_i^b) + \kappa_{0j} (\partial_i A_j^m - \partial_j A_i^m + e \varepsilon^{mcb} A_i^c A_j^b)] + \\ - \kappa_{ij} \partial_i (-\partial_j A_0^m + e \varepsilon^{mcb} A_0^c A_j^b) + \\ - (1 + \kappa_{00}) e \varepsilon^{abm} (-\partial_i A_0^a + e \varepsilon^{acn} A_0^c A_i^n) A_i^b \\ = -e^2 [1 + (\kappa_{\phi\phi})_{00}] \varepsilon^{abm} \varepsilon^{pqb} A_0^p \phi^q \phi^a - e (\kappa_{\phi\phi})_{0i} \varepsilon^{abm} \phi^a (D_i \phi)^b, \end{aligned} \quad (\text{C.112})$$

$$\begin{aligned} 0 &= D_0 (D_0 \phi)^m - D_i (D_i \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})_{00} D_0 (D_0 \phi)^m \\ &\quad - (\kappa_{\phi\phi})_{0i} D_i (D_0 \phi)^m - (\kappa_{\phi\phi})_{0i} D_0 (D_i \phi)^m + (\kappa_{\phi\phi})_{ij} D_i (D_j \phi)^m. \end{aligned} \quad (\text{C.113})$$

Se escolhermos

$$(\kappa_{\phi\phi})_{0i} = \kappa_{0i} = 0, \quad (\text{C.114})$$

podemos propor soluções para A_0^m como no caso usual:

$$A_0^m \propto \phi^m. \quad (\text{C.115})$$

No regime estacionário e com (C.115), obtemos:

$$(D_0 \phi)^m = 0. \quad (\text{C.116})$$

E as equações (C.112) e (C.113) tornam-se, em ordem:

$$[(1 + \kappa_{00}) \delta_{ij} - \kappa_{ij}] D_i D_j A_0^m = \{[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}\} = M_{ki} M_{kj} D_i D_j A_0^m = 0, \quad (\text{C.117})$$

$$\left[\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right] D_i(D_j\phi)^m = R_{ki}R_{kj}D_i(D_j\phi)^m = 0, \quad (\text{C.118})$$

em que:

$$D_i A_0^m = \partial_i A_0^m + e\varepsilon^{abc} A_0^b A_i^c. \quad (\text{C.119})$$

Ao substituírmos a relação (C.115) em (C.117), encontramos

$$M_{ki}M_{kj}D_i(D_j\phi)^m = 0. \quad (\text{C.120})$$

Para que as equações de movimento do campo de Higgs (C.118) e (C.120) sejam consistentes, devemos impor

$$M_{ki}M_{kj} \propto R_{ki}R_{kj} \Rightarrow M_{ki}M_{kj} = \Lambda^2 R_{ki}R_{kj}, \quad (\text{C.121})$$

$$\Lambda = \pm \sqrt{\frac{3 + 2\text{tr}(\kappa_{ij})}{3 - \text{tr}(\kappa_{\phi\phi})_{ij}}}. \quad (\text{C.122})$$

Vamos descartar o sinal negativo em (C.122) para garantir que a energia [expressa adiante em (C.123)] seja sempre positiva. Dessa maneira, temos:

$$M_{ki} = \Lambda R_{ki}. \quad (\text{C.123})$$

Com o auxílio de (C.116), a densidade de energia (C.52) reduz-se simplesmente a:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_i^a + \frac{1}{2}\tilde{B}_i^a\tilde{B}_i^a + \frac{1}{2}(\tilde{D}_i\phi)^a(\tilde{D}_i\phi)^a \quad (\text{C.124})$$

Agora, introduzimos o formalismo BPS usando uma relação trigonométrica para algum ângulo constante γ [52], a fim de colocar a energia em uma forma quadrada. Para tanto, analisemos a relação:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_i^a \mp \sin \gamma (\tilde{D}_i\phi)^a \right]^2 + \left[\tilde{B}_i^a \mp \cos \gamma (\tilde{D}_i\phi)^a \right]^2 &= \tilde{E}_i^a\tilde{E}_i^a \mp 2 \sin \gamma \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i\phi)^a + \\ &+ \sin^2 \gamma (\tilde{D}_i\phi)^a (\tilde{D}_i\phi)^a + \tilde{B}_i^a\tilde{B}_i^a \\ &\mp 2 \cos \gamma \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i\phi)^a + \cos^2 \gamma (\tilde{D}_i\phi)^a (\tilde{D}_i\phi)^a \\ &= \tilde{E}_i^a\tilde{E}_i^a + \tilde{B}_i^a\tilde{B}_i^a + (\tilde{D}_i\phi)^a (\tilde{D}_i\phi)^a \\ &\mp 2 \sin \gamma \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i\phi)^a \mp 2 \cos \gamma \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i\phi)^a \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_i^a + \tilde{B}_i^a \tilde{B}_i^a + (\tilde{D}_i \phi)^a (\tilde{D}_i \phi)^a &= \left[\tilde{E}_i^a \mp \sin \gamma (\tilde{D}_i \phi)^a \right]^2 + \left[\tilde{B}_i^a \mp \cos \gamma (\tilde{D}_i \phi)^a \right]^2 + \\ &\pm 2 \sin \gamma \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a \pm 2 \cos \gamma \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a. \end{aligned} \quad (\text{C.125})$$

Substituindo (C.125) em (C.124), o funcional da energia torna-se:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3 x \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3 x \left[\tilde{E}_i^a \mp \sin \gamma (\tilde{D}_i \phi)^a \right]^2 + \frac{1}{2} \int d^3 x \left[\tilde{B}_i^a \mp \cos \gamma (\tilde{D}_i \phi)^a \right]^2 \\ &\pm \sin \gamma \int d^3 x \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a \pm \cos \gamma \int d^3 x \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

$$\geq E_{BPS} = \pm \sin \gamma \int d^3 x \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a \pm \cos \gamma \int d^3 x \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a. \quad (\text{C.127})$$

Para minimizar a energia, zeramos os dois primeiros termos quadrados em (C.126), os quais levam às duas equações BPS's modificadas – o sinal positivo refere-se ao monopolo e o negativo, ao antimonopolo:

$$\tilde{E}_i^a = \pm \sin \gamma (\tilde{D}_i \phi)^a, \quad (\text{C.128})$$

$$\tilde{B}_i^a = \pm \cos \gamma (\tilde{D}_i \phi)^a. \quad (\text{C.129})$$

Assim, determinamos a energia BPS:

$$E_{BPS} = \pm \sin \gamma \int d^3 x \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a \pm \cos \gamma \int d^3 x \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a. \quad (\text{C.130})$$

Vamos reescrever esses dois termos de forma conveniente. Consideremos inicialmente:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a &= N_{ik} R_{ij} B_k^a (\tilde{D}_i \phi)^a \\ &= N_{ik} R_{ij} (B_k^a \partial_j \phi^a + e \varepsilon^{abc} B_k^a A_j^b \phi^c) \\ &= N_{ik} R_{ij} \partial_j (B_k^a \phi^a) - \phi^a N_{ik} R_{ij} D_j B_k^a \\ &= N_{ik} R_{ij} \partial_j (B_k^a \phi^a) - \frac{1}{2} \phi^a \varepsilon_{kpq} N_{ik} R_{ij} D_j W_{pq}^a. \end{aligned} \quad (\text{C.131})$$

Note mais uma vez que se a condição:

$$N_{ik} R_{ij} = R_{ij} N_{ik} = \Delta \delta_{kj}, \quad (\text{C.132})$$

ou de modo equivalente

$$\Delta^2 \delta_{pr} = \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \left[\delta_{qr} - (k_{\phi\phi})_{qr} \right] \quad (\text{C.133})$$

$$\Delta = \left\{ \det \left\{ [1 - \text{Tr}(\kappa_{ij})] \delta_{pq} + \kappa_{pq} \right\} \det \left[\delta_{qr} - (k_{\phi\phi})_{qr} \right] \right\}^{\frac{1}{6}}, \quad (\text{C.134})$$

for obedecida [já desconsideramos o sinal negativo em (C.134) para garantir a positividade da energia], então teremos:

$$\varepsilon_{kpq} N_{ik} R_{ij} D_j W_{pq}^a = \Delta \varepsilon_{kpq} \delta_{kj} D_j W_{pq}^a = \Delta \varepsilon_{kpq} D_k W_{pq}^a = 0, \quad (\text{C.135})$$

em decorrência da identidade de Bianchi. Assim, (C.131) torna-se:

$$\tilde{B}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a = \Delta \partial_i (B_i^a \phi^a). \quad (\text{C.136})$$

Consideremos agora:

$$\tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a = (M_{ik} E_k^a) [R_{ij} (D_j \phi)^a]. \quad (\text{C.137})$$

Mas, a condição (C.123) permiti-nos fazer:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a &= \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a (D_j \phi)^a \\ &= \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a (\partial_j \phi^a + e \varepsilon^{abc} A_j^b \phi^c) \\ &= \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} [\partial_j (E_k^a \phi^a) - \phi^a \partial_j E_k^a + e \varepsilon^{abc} E_k^a A_j^b \phi^c] \\ &= \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} \partial_j (E_k^a \phi^a) - \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} \phi^a D_j E_k^a. \end{aligned} \quad (\text{C.138})$$

Da lei de Gauss no regime estacionário (C.112), juntamente com as condições (C.114) e (C.115), obtemos:

$$(1 + \kappa_{00}) D_k E_k^a - \kappa_{jk} D_j E_k^a = 0 \Rightarrow \quad (\text{C.139})$$

$$M_{ik} M_{ij} D_j E_k^a = 0 \Rightarrow$$

$$M_{ik} M_{ij} \phi^a D_j E_k^a = 0. \quad (\text{C.140})$$

A partir do resultado (C.140), a expressão (C.138) torna-se:

$$\tilde{E}_i^a (\tilde{D}_i \phi)^a = \frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} (\partial_j E_k^a \phi^a). \quad (\text{C.141})$$

Utilizando (C.136) e (C.141), a energia (C.130) fica dada por:

$$E_{BPS} = \pm \frac{1}{\Lambda} \sin \gamma \int d^3 x [\partial_j (M_{ik} M_{ij} E_k^a \phi^a)] \pm \Delta \cos \gamma \int d^3 x \partial_i (B_i^a \phi^a). \quad (\text{C.142})$$

Definimos as quantidades abaixo como as cargas elétricas e magnéticas modificadas, respectivamente

$$\tilde{Q}_e = \pm \frac{1}{v} \int d^3 x \left[\partial_j \left(\frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a \phi^a \right) \right], \quad (\text{C.143})$$

$$\tilde{Q}_m = \pm \frac{1}{v} \int d^3 x \partial_i (\Delta B_i^a \phi^a). \quad (\text{C.144})$$

Para calcular (C.143) e (C.144), precisamos saber antes como os campos se comportam, obedecendo as equações BPS (C.128) e (C.129), cujas representações nos *ansatze* equivalem respectivamente a:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{J}{r} \right) = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right), \quad (\text{C.145})$$

$$J = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} H, \quad (\text{C.146})$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) = \pm \frac{\Delta}{\eta \cos \gamma} \frac{1 - W^2}{r^2}, \quad (\text{C.147})$$

$$\frac{dW}{dr} = \mp \frac{\eta}{\Delta} \cos \gamma \frac{HW}{r}, \quad \eta = 1 - \frac{1}{3} \text{tr} \left[(k_{\phi\phi})_{ij} \right]. \quad (\text{C.148})$$

Primeiramente verifiquemos a quantidade:

$$\begin{aligned} \pm \int d^3x [\partial_j (E_j^a \phi^a)] &= \pm \oint_{s \rightarrow \infty} dS_j E_j^a \phi^a \\ &= \pm \frac{1}{e^2} \oint_{s \rightarrow \infty} dS \frac{H}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.149})$$

Substituindo (C.145) em (C.149),

$$\pm \int d^3x [\partial_j (E_j^a \phi^a)] = \frac{1}{e^2} \frac{\sin \gamma}{\Lambda} \oint_{s \rightarrow \infty} dS \frac{H}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \quad (\text{C.150})$$

e depois (C.147) em (C.150),

$$\begin{aligned} \pm \int d^3x [\partial_j (E_j^a \phi^a)] &= \pm \frac{1}{e^2} \frac{\Delta}{\Lambda \eta} \tan \gamma \oint_{s \rightarrow \infty} dS \frac{H}{r} \frac{1 - W^2}{r^2} \\ &= \pm \frac{4\pi}{e^2} \frac{\Delta}{\Lambda \eta} \tan \gamma \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{H}{r} \frac{1 - W^2}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.151})$$

Vemos em (C.151) que os campos devem satisfazer as condições de contorno usuais, semelhantemente ao caso do monopolo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{r} = \pm e v, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = 0 \quad (\text{C.152})$$

e ainda

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{H(r)}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} W(r) = \pm 1. \quad (\text{C.153})$$

Como J é dado por (C.146), devemos ter também

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{J(r)}{r} = e v \frac{\sin \gamma}{\Lambda}, \quad (\text{C.154})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{J(r)}{r} = 0. \quad (\text{C.155})$$

para garantir as convergências [veja que (C.154) define K em (4.78)].

Assim, integral (C.151) resulta em:

$$\begin{aligned} \pm \int d^3x [\partial_j(E_j^a \phi^a)] &= v \frac{4\pi}{e} \frac{\Delta}{\Lambda\eta} \tan \gamma \\ &= v Q_m \frac{\Delta}{\Lambda\eta} \tan \gamma, \end{aligned} \quad (\text{C.156})$$

em que identificamos a quantidade

$$Q_m = \frac{4\pi}{e} \quad (\text{C.157})$$

como a carga magnética na ausência da quebra de Lorentz.

Com isso, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_e &= \pm \frac{1}{v} \int d^3x \left[\partial_j \left(\frac{1}{\Lambda} M_{ik} M_{ij} E_k^a \phi^a \right) \right] = \pm \frac{1}{v} \oint_{s \rightarrow \infty} dS_j (\Lambda R_{ij} R_{ik} E_k^a \phi^a) \\ &= \pm \frac{\Lambda\eta}{v} \frac{1}{e^2} \oint_{s \rightarrow \infty} \frac{H}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J}{r} \right) dS \\ &= \frac{\Lambda\eta}{v} \left(v Q_m \frac{\Delta}{\Lambda\eta} \tan \gamma \right) \\ &= \Delta Q_m \tan \gamma = \Delta Q_m \tan \gamma, \end{aligned} \quad (\text{C.158})$$

em que temos usado (C.149) e (C.156).

Como no caso do monopolo, os estados BPS's não modificam a integral

$$\pm \int_{S \rightarrow \infty} dS_j (B_j^a \phi^a) = \pm \frac{4\pi}{e^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{H}{r} (1 - W^2) \right], \quad (\text{C.159})$$

a qual é identificada como a carga magnética não modificada,

$$Q_m = \pm \frac{1}{v} \int_{S \rightarrow \infty} dS_j (B_j^a \phi^a), \quad (\text{C.160})$$

e torna (C.144) em:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_m &= \pm \frac{1}{v} \int d^3x \partial_i (\Delta B_i^a \phi^a) = \pm \frac{\Delta}{v} \int_{S \rightarrow \infty} dS_j (B_j^a \phi^a) \\ &= \Delta Q_m. \end{aligned} \quad (\text{C.161})$$

Com (C.161), (C.158) fica como – note que (C.162) define K' em (4.79) –:

$$\tilde{Q}_e = \tilde{Q}_m \tan \gamma, \quad (\text{C.162})$$

de onde determinamos:

$$\sin \gamma = \frac{\tilde{Q}_e}{\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{\tilde{Q}_m}{\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2}}. \quad (\text{C.163})$$

Portanto, podemos reescrever a energia (C.142) na simples forma

$$E_{BPS} = v\tilde{Q}_e \sin \gamma + v\tilde{Q}_m \cos \gamma, \quad (\text{C.164})$$

ou com (C.163),

$$E_{BPS} = v\sqrt{\tilde{Q}_e^2 + \tilde{Q}_m^2} \quad (\text{C.165})$$

C.5.1 Comportamento Assintóticos dos Campos

Podemos obter imediatamente os perfis assintóticos dos campos J , H e W a partir daqueles comportamentos de H e W para o monopolo. Isso pode ser feito por causa da simetria entre as equações BPS do monopolo e do dyon. Assim, basta fazermos (no que segue consideramos apenas o dyon)

$$\frac{\Delta}{\eta} \rightarrow \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\cos \gamma}, \quad (\text{C.166})$$

$$\frac{\eta}{\Delta} \rightarrow \frac{\eta}{\Delta} \cos \gamma \quad (\text{C.167})$$

nas soluções do monopolo, para encontrar (quando $r \rightarrow 0$)

$$\frac{H}{r} \approx C_0 \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\cos \gamma} (ev)^2 r, \quad (\text{C.168})$$

$$W \approx 1 - \frac{1}{2} C_0 (ev)^2 r^2 \quad (\text{C.169})$$

e quando $r \gg 0$,

$$\frac{H}{r} \approx ev - \frac{\Delta}{\eta} \frac{1}{\cos \gamma} \frac{1}{r}, \quad (\text{C.170})$$

$$W \approx e^{-\frac{\eta}{\Delta} ev r \cos \gamma}. \quad (\text{C.171})$$

Além disso, uma vez que

$$J = \frac{\sin \gamma}{\Lambda} H, \quad (\text{C.172})$$

temos (quando $r \rightarrow 0$)

$$\frac{J}{r} \approx C_0 \frac{\Delta}{\Lambda \eta} (ev)^2 r \tan \gamma \quad (\text{C.173})$$

e ainda quand $r \gg 0$,

$$\frac{J}{r} = ev \frac{\sin \gamma}{\Lambda} - \frac{\Delta}{\Lambda \eta r} \tan \gamma. \quad (\text{C.174})$$

Perceba que devemos ter também $\eta > 0$ para garantir as convergências das soluções.

C.5.2 Equivalência entre as Equações BPS's e as Equações de Euler-Lagrange

Para lei de Gauss

Vamos analisar primeiramente (C.128), como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^a &= \pm \sin \gamma \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a \\ M_{ik} E_k^a &= \pm \sin \gamma R_{ik} (D_k \phi)^a. \end{aligned} \quad (\text{C.175})$$

Em virtude de (C.123), podemos reescrever (C.175) na forma:

$$\begin{aligned} \Lambda R_{ik} E_k^a &= \pm \sin \gamma R_{ik} (D_k \phi)^a \Rightarrow \\ E_k^a &= \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} (D_k \phi)^a. \end{aligned} \quad (\text{C.176})$$

Aplicamos agora a derivada covariante em (C.176),

$$\begin{aligned} D_i E_k^a &= \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} (D_i D_k \phi)^a \\ M_{ri} M_{rk} D_i E_k^a &= \pm \Lambda \sin \gamma R_{ri} R_{rk} (D_i D_k \phi)^a = 0 \\ M_{ri} M_{rk} D_i E_k^a &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.177})$$

em que usamos os resultados (C.118) e (C.121).

Note que (C.177) é a lei de Gauss escrita como em (C.139).

Para o Campo de Higgs

Agora vamos averiguar as implicações de (C.129):

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_i^a &= \pm \cos \gamma \left(\tilde{D}_i \phi \right)^a \\
N_{ik} B_k^a &= \pm \cos \gamma R_{il} (D_l \phi)^a \\
R_{ij} N_{ik} B_k^a &= \pm \cos \gamma R_{ij} R_{il} (D_l \phi)^a \\
\Delta \delta_{kj} B_k^a &= \pm \cos \gamma R_{ij} R_{il} (D_l \phi)^a \\
B_j^a &= \pm \frac{\cos \gamma}{\Delta} R_{ij} R_{il} (D_l \phi)^a.
\end{aligned} \tag{C.178}$$

Similarmente ao caso anterior, aplicamos a derivada covariante em (C.178) e encontramos:

$$D_j B_j^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} D_j W_{kl}^a = 0 = \pm \frac{\cos \gamma}{\Delta} R_{ij} R_{il} (D_j D_l \phi)^a, \tag{C.179}$$

tendo em vista novamente o uso da identidade de Bianchi $\varepsilon_{ijk} D_i W_{jk}^a = 0$. Assim, de (C.179) somos levados à equação e movimento do campo de Higgs,

$$R_{ij} R_{il} (D_j D_l \phi)^a = 0, \tag{C.180}$$

conforme queríamos demonstrar.

Para a Lei de Ampère

Vamos mostrar que as equações BPS's resultam na lei Ampère (C.19), sob as condições (C.114) e (C.115), a saber:

$$\begin{aligned}
\{[1 + \text{tr}(\kappa_{pq})] \delta_{kj} - \kappa_{kj}\} D_0 E_j^m + D_j (W_{jk})^m \\
+ \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^m + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^m = e \tilde{J}_k^m,
\end{aligned} \tag{C.181}$$

em que temos usado as definições $E_j^m = -W_{0j}^m$ e $\tilde{J}_k^m = \left[\delta_{pk} - (\kappa_{\phi\phi})_{pk} \right] J_p^m = R_{ik} R_{ip} J_p^m$.

Consideremos a equação BPS (C.176),

$$E_k^a = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} (D_k \phi)^a. \tag{C.182}$$

Mas, por outro lado, sabemos que

$$E_k^a = -W_{0k}^a = -(-\partial_k A_0^a + e \varepsilon^{abc} A_0^b A_k^c) = \partial_k A_0^a + e \varepsilon^{abc} A_k^b A_0^c = D_k A_0^a. \tag{C.183}$$

Substituindo (C.183) em (C.182), encontramos:

$$D_k A_0^a = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} (D_k \phi)^a, \quad (\text{C.184})$$

de onde somos levados a concluir

$$A_0^a = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} \phi^a. \quad (\text{C.185})$$

Veja que (C.185) estabelece a proporcionalidade (C.115) desejada.

Aplicando a derivada covariante D_0 em (C.182), temos:

$$D_0 E_j^a = \pm \frac{\sin \gamma}{\Lambda} D_0 (D_j \phi)^a = \pm e \frac{\sin \gamma}{\Lambda} \varepsilon^{abc} A_0^b (D_j \phi)^c. \quad (\text{C.186})$$

Reescrevemos (C.186) com (C.185), obtendo:

$$D_0 E_j^a = e \frac{\sin^2 \gamma}{\Lambda^2} \varepsilon^{abc} \phi^b (D_j \phi)^c. \quad (\text{C.187})$$

Multiplicando (C.187) por $[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}$, achamos:

$$\{[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}\} D_0 E_j^a = e \frac{\sin^2 \gamma}{\Lambda^2} \{[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}\} \varepsilon^{abc} \phi^b (D_j \phi)^c. \quad (\text{C.188})$$

Por outro lado, de (C.121), temos:

$$\begin{aligned} M_{ki} M_{kj} &= \Lambda^2 R_{ki} R_{kj} \\ \{[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}\} &= \Lambda^2 \left[\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.189})$$

Substituindo (C.189) em (C.188), encontramos

$$\{[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{ij} - \kappa_{ij}\} D_0 E_j^m = e \sin^2 \gamma \left[\delta_{ij} - (\kappa_{\phi\phi})_{ij} \right] \varepsilon^{mbc} \phi^b (D_j \phi)^c. \quad (\text{C.190})$$

Agora escrevemos a equação BPS (C.178) na forma:

$$W_{ik}^m = \mp \frac{\cos \gamma}{\Delta} \varepsilon_{ikp} \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] (D_q \phi)^m \Rightarrow \quad (\text{C.191})$$

$$D_j W_{ik}^m = \mp \frac{\cos \gamma}{\Delta} \varepsilon_{ikp} \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] D_j (D_q \phi)^m \quad (\text{C.192})$$

$$\kappa_{ki} D_j (W_{ij})^m = \mp \frac{\cos \gamma}{\Delta} \kappa_{ki} \varepsilon_{ijp} \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] D_j (D_q \phi)^m, \quad (\text{C.193})$$

$$\kappa_{ij} D_j (W_{ki})^m = \mp \frac{\cos \gamma}{\Delta} \kappa_{ij} \varepsilon_{kip} \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] D_j (D_q \phi)^m. \quad (\text{C.194})$$

Somando (C.192), (C.193) e (C.194) e reorganizado os termos apropriadamente, determinamos

$$\begin{aligned} & D_j (W_{jk})^m + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^m + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^m \\ &= \pm \frac{\cos \gamma}{\Delta} [\varepsilon_{kjp} - \kappa_{ki} \varepsilon_{ijp} - \kappa_{ij} \varepsilon_{kip}] \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] D_j (D_q \phi)^m. \end{aligned} \quad (\text{C.195})$$

Multiplicando (C.195) por ε_{rsk} ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{rsk} [D_j (W_{jk})^m + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^m + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^m] \\ &= \pm \frac{\cos \gamma}{\Delta} [\varepsilon_{rsk} \varepsilon_{kjp} - \kappa_{ki} \varepsilon_{rsk} \varepsilon_{ijp} - \kappa_{ij} \varepsilon_{rsk} \varepsilon_{kip}] \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] D_j (D_q \phi)^m \end{aligned} \quad (\text{C.196})$$

e usando um resultado similar a (C.107), temos:

$$\varepsilon_{rsk} [D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a] = \pm \Delta \cos \gamma [D_r, D_s] \phi^a. \quad (\text{C.197})$$

Utilizamos equação BPS (C.191) na identidade

$$[D_r, D_s] \phi^a = e \varepsilon^{abc} W_{rs}^b \phi^c \quad (\text{C.198})$$

e encontramos

$$[D_r, D_s] \phi^a = \pm e \frac{\cos \gamma}{\Delta} \varepsilon_{rsp} \left[\delta_{pq} - (k_{\phi\phi})_{pq} \right] \varepsilon^{abc} \phi^b (D_q \phi)^c. \quad (\text{C.199})$$

Substituindo (C.199) em (C.197), achamos a relação

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{rsk} [D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a] \\ &= e \cos^2 \gamma \varepsilon_{rsk} \left[\delta_{kq} - (k_{\phi\phi})_{kq} \right] \varepsilon^{abc} \phi^b (D_q \phi)^c, \end{aligned} \quad (\text{C.200})$$

da qual estabelecemos a igualdade

$$D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a = e \cos^2 \gamma \left[\delta_{kq} - (k_{\phi\phi})_{kq} \right] \varepsilon^{abc} \phi^b (D_q \phi)^c. \quad (\text{C.201})$$

Somando (C.190) e (C.201), finalmente chegamos à lei de Ampère (C.181),

$$\begin{aligned} & \{[1 + \text{tr}(\kappa_{ij})] \delta_{kj} - \kappa_{kj}\} D_0 E_j^m + D_j W_{jk}^a + \kappa_{ki} D_j (W_{ij})^a + \kappa_{ij} D_j (W_{ki})^a \\ &= e \left[\delta_{kj} - (\kappa_{\phi\phi})_{kj} \right] \varepsilon^{mbc} \phi^b (D_j \phi)^c \\ &= e \tilde{J}_k^m, \end{aligned} \quad (\text{C.202})$$

como tinha de ser.

Referências Bibliográficas

- [1] P.A.M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. A **133**, (1931).
- [2] T. T. Wu, C.N. Yang, *In properties of matter under unusual conditions*, ed. H. Mark and S. Fernbach, (1969).
- [3] G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. B **79**, (1974).
- [4] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*. JETP Lett **20**, (1974).
- [5] H. Georgi and S.L. Glashow, *Spontaneously broken gauge symmetry and elementary particle masses*, Phys. Rev. D **6**, (1972).
- [6] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. **39**, (1895).
- [7] J.E. Allen, *The early history of solitons (solitary waves)*, Phys. Scripta **57**, (1998).
- [8] E.B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solution*, Sov. J. Nucl. Phys., (1976).
- [9] C. Montonen and D. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles?* Phys. Lett. B **72**, (1977).
- [10] G. 't Hooft, *Gauge theories with unified weak, electromagnetic and strong interactions*, rapporteur's talk given at the E.P.S. Int. Conf. on High Energy Physics, Palermo, (1975).
- [11] S. Mandelstam, *Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories*, Phys. Rep. C **53**, (1976).

- [12] R. A. Carrigan. Jr. and W. P. Trower, *Magnetic monopoles*, Plenum Press, (1983).
- [13] A. H. Guth , *Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Re. D **23** (1981).
- [14] J. Schwinger, *A Magnetic model of matter: A speculation probes deep within the structure of nuclear particles and predicts a new form of matter*, Science, (1969).
- [15] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory*, Phys. Rev. D **39**, (1989).
- [16] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories*, Phys. Rev. Lett. **63**, (1989).
- [17] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Photon and graviton masses in string theories*, Phys. Rev. Lett. **66**, (1991).
- [18] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings*, Phys. Rev. D **40**, (1989).
- [19] V. A. Kostelecký and R. Potting, *Expectation values, lorentz invariance, and cpt in the open bosonic string*, Phys. Lett B **381**, (1996).
- [20] V. A. Kostelecký and R. Potting, *CPT, strings, and meson factories*, Phys, Rev. D **51**, (1995).
- [21] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, (1997)
- [22] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *V. A. Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58**, (1998).
- [23] S. Coleman and S. L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **59** (1999).
- [24] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *Exact classical solution for the t'Hooft monopole and the Julia-Zee dyon*, Phys. Rev. Lett **35**, (1975).

- [25] J. Dixmier, *General Topology*, Spriger-Verlag, (1981).
- [26] M. A. Vilches, *Topologia geral*, Dep. de Análise-IME, UERJ, Rio de Janeiro.
- [27] N. Capitelli and G. Minian, *Notas de Topología Combinatoria*, Dep. de Mat., Univ. Buenos Aires, (2009).
- [28] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).
- [29] Sze-Tzen Hu, *Theory Homotopy*, Academic Press, (1959).
- [30] Cohen, *A course in simple Homotopy Theory*, Springer-Velarg New York, (1970).
- [31] E.L. Lima, *Introdução à Topologia Diferencial*, Brasília, (1961).
- [32] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, (1989).
- [33] J. M. F. Bassalo and M. S. Dorsa. Cattani, *Teoria de Grupos*, Livraria da Física, (2008).
- [34] P. Renreln, *Manifolds, tensores and forms, An introduction for mathematicians and physicists*, Cambridge, (2014).
- [35] Antônio S. T. Pires, *Geometria Diferencial para físicos*, Livraria da Física, (2015).
- [36] A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP **5**, (1957).
- [37] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, (1973).
- [38] Vallery Rubakov, *Classical theory of gauge fields*, Princeton University Press, (2002).
- [39] M. M. Ferreira Jr, *Nota de Aula: Parte I-Formulação covariante do campo eletromagnético*, Dep. Física., UFMA.
- [40] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge University Press, (2007).
- [41] E. B. Bolgol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, (1976).

- [42] J. Arafune, P. G. O. Freund and C.J. Goebel, *Topology of Higgs fields*, J. Math. Phys. **16**, (1975).
- [43] F. C. Simas, *Armadilhamento de Campos de Spin-0 em um anel imerso em (3,1) dimensões*, (2011).
- [44] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An introduction to solitons and instantons in Quantum Field Theory*, NH PL, (2003).
- [45] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Hamilton Printing Company, (1998).
- [46] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica*, Vol. 3, Pearson, (2011).
- [47] D.G. Boulware et al., *Scattering on magnetic charge*, Phys. Rev. D **14** (1976)
- [48] Y. M. Shnir, *Magnetic monopoles*, Springer, (2005).
- [49] W. Greiner, *Quantum Mechanics: An introduction*, Vol. 3, Springer, (2000).
- [50] F. A. Bais, *Configurations of $SO(3)$ monopoles with multiplete magnetic charge*, Phys. Lett. B **64** (1976) .
- [51] P. Goddard and DI Olive, *Magnetic monopoles in gauge theories*, Rep. Prog. Phys. **41** (1978).
- [52] S. Coleman, S. Parke, A. Neveu and C. Sommerfield, *Can one dent a dyon?*, Phys. Rev. D **15**, (1977).
- [53] M.K. Prasad and C.M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975).
- [54] R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and E. da Hora, *Generalized BPS magnetic monopoles*, Phys. Rev. D **86** (2012).
- [55] A.N. Rocha, B.F. Rizzuti and D.S. Mota, *Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos*, Rev. Bras. Ensino de Física **35**, (2013).

- [56] T. Morii, C.S. Lim and S.N. Mukherjee, *The physics of standard model and beyond*, World Scientific, (2004).
- [57] K. Moriyasu, *An elementary primer for gauge theory*, World Scientific, (1993).
- [58] P.H. Frampton, *Gauge fields theories*, Vol. 3, Wiley-VCH, (2008).
- [59] J.F. Donoghue, E. Golowich and B. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge, University Press, (1994).
- [60] A. G. de Lima, *Fases geométricas e holonomias em um ambiente com violação de simetria de Lorentz*, Dep. de Física-UFES, Espírito Santo, (2015).
- [61] P. M. de Aquino, *Física além do Modelo Padrão em teorias com dimensões extras*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física-USP, São Paulo, (2007).
- [62] J.M. Cline, *Baryogenesis, lectures at Les Houches Summer School*, Session 86: Particle Physics and Cosmology: the Fabric of Spacetime, (2006), <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0609145v3.pdf>.
- [63] D. Hooper, *Tasi lectures on dark matter*, Lectures given at Theoretical Advanced Study Institute (TASI), (2008). <http://arxiv.org/abs/0901.4090v1.pdf>.
- [64] A. Songaila and L. L. Cowie, *Astronomy: Fine-structure variable?*, Nature **398**, (1999).
- [65] P.C.W. Davies, T.M. Davies and C.H. Lineweaver, *Cosmology: Black holes constrain varying constants*, Nature **418**, (2002).
- [66] A. Songaila and L. L. Cowie, *Astrophysics: The inconstant constant?*, Nature **428**, (2004).
- [67] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos and M. T. D. Orlando, *Violação da Simetria de Lorentz*, Rev. Bras. Ensino de Física **29**, (2007).
- [68] O. W. Greenberg, *CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002).
- [69] B. Altschul, *Vacuum cerenkov radiation in Lorentz-violating theories without CPT violation*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007).