

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM REDE – MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAIMUNDO DO NASCIMENTO VELOZO NETO

*Aplicações do Método de Indução Matemática à Geometria*

São Luís  
2017

RAIMUNDO DO NASCIMENTO VELOZO NETO

*Aplicações do Método de Indução Matemática à Geometria*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede – Matemática em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Orientador: Profa. Renata de Farias Limeira Carvalho**

**Doutora em Matemática**

São Luís

2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Velozo Neto, Raimundo do Nascimento.  
Aplicações do Método de Indução Matemática à Geometria  
/ Raimundo do Nascimento Velozo Neto. - 2017.  
62 f.

Orientador(a): Renata de Farias Limeira Carvalho.  
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade  
Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Demonstrações Matemáticas. 2. Geometria. 3.  
Método de indução matemática. I. Carvalho, Renata de  
Farias Limeira. II. Título.

*À minha mãe, Maria da Conceição Santos*

*Velozo.*

*Ao meu filho, Bruno de Moraes Velozo.*

*Dedico.*

## Resumo

Este trabalho trata do *Método de Indução Matemática*, em especial, de seu uso com vistas à solução de problemas geométricos. Inicialmente, são feitas algumas considerações acerca da expressão “raciocínio indutivo”, cujo sentido, conforme apropriadamente explicado no texto, difere do de “indução matemática”. É provada a proposição que garante o uso do método com base em seu fundamento, a saber, o axioma de indução matemática (um dos postulados que caracterizam os números naturais) e exibidos alguns exemplos de sua utilização em Álgebra e Teoria dos Números. Em seguida, são exploradas algumas aplicações do método de indução matemática à problemas de Geometria, seja para a obtenção de uma medida geométrica em termos de outra(s), para a demonstração de uma proposição que se insinua verdadeira, ou para a exibição das etapas de construção de uma dada figura.

**Palavras-chave:** Método de indução matemática. Demonstrações matemáticas. Problemas de Geometria.

## Abstract

This work deals with the *Method of Mathematical Induction*, in particular, its use with a view to the solution of geometric problems. It initially some considerations are made about the expression “inductive reasoning” whose it meaning, as appropriately must be explained in the text, that differs from that of “mathematical induction”. We prove the proposition that guarantees the use of the method based on its foundation, namely the axiom of mathematical induction (one of the postulates that characterize the natural numbers). It exhibited some examples of its use of Algebra and the Theory of Numbers. And then, some applications of the method of mathematical induction to the problems of Geometry are explored to obtain a geometric measure in terms of another(s), either for the demonstration of a proposition that insinuates itself true, or for the stages of construction of a figure given.

**Keywords:** Method of mathematical induction. Mathematical demonstrations. Problems in Geometry.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, à minha mãe, Dona Maria da Conceição, por ter dedicado, com todo carinho e genuíno amor de mãe, os melhores anos de sua vida à cuidar de meus irmãos e de mim. Ela é meu maior exemplo de determinação, honradez e amor à vida.

Ao meu filho, Bruno, que, com sua natural inocência de criança, inspira-me a ser alguém melhor e me fornece o “combustível” necessário para seguir adiante.

Aos meus irmãos, Carla e Segundo, cuja convivência ao longo dos anos muito contribuiu em minha formação como ser humano.

À Lidiane Durans, por ter me dado o que tenho de mais importante nesta vida e pela grande mãe que é, tranquilizando-me nos momentos em que não posso estar fisicamente presente com nosso filho.

À estimada professora Renata de Farias Limeira Carvalho, pela gentileza em aceitar ser minha orientadora no desenvolvimento deste trabalho e pela prestativa, segura e valiosa orientação efetivamente dada.

Às professoras Sandra Imaculada Moreira Neto e Valdiane Sales Araújo, pela honrosa presença na banca de defesa deste trabalho e pelas considerações realizadas ao cabo desta, o que, certamente, deu ao texto escrito mais fluidez, clareza e precisão.

Aos professores Neri Terezinha Both Carvalho, José Luiz Rosas Pinho e Rubens Starke, da UFSC, pelos exemplos de profissionalismo, seriedade e competência com que fomos brindados, meus colegas e eu, durante o período em que cursamos a Licenciatura em Matemática.

Aos colegas de mestrado das turmas PROFMAT 2013 e 2016, da UFMA, pela convivência e troca de experiências, em especial ao amigo Marcelo Omar Lima de Castro, pelas conversas (nas quais sempre me benefico de sua experiência) e pelo exemplo de cidadão que é.

Ao amigo Wagner de Jesus Pereira Sá, pelos constantes incentivo e confiança que, generosamente, recebo.

Aos criadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT, um projeto que pode ser considerado como uma ampliação em larga escala do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, o PAP-MEM, a cujo idealizador, o saudoso professor Elon Lages Lima, respeitosa e vivamente, menciono e agradeço.

Aos gestores do CE Dayse Galvão de Sousa, professores Lilian Assunção e Fernando Fonseca, pelo entendimento e compreensão demonstrados durante a “reta final” do curso (em particular, no período dos estudos com vistas à produção desta dissertação).

À CAPES, pelo suporte financeiro.

*“Um homem de moral...*

*...reconhece a queda e não desanima.*

*Levanta, sacode a poeira e dá a volta por cima.”*

*Paulo Vanzolini (cientista e compositor)*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 O método de indução matemática</b>	<b>12</b>
1.1 Raciocínio indutivo . . . . .	12
1.2 Indução matemática . . . . .	16
1.2.1 Exemplo de demonstração por indução matemática . . . . .	16
1.2.2 Princípio de indução matemática . . . . .	17
1.3 Demonstrações por indução em Álgebra e em Teoria dos Números . . . . .	19
1.3.1 Identidades e problemas aritméticos . . . . .	20
1.3.2 Desigualdades e (outros) problemas algébricos . . . . .	23
<b>2 Aplicações da indução matemática à problemas de Geometria</b>	<b>26</b>
2.1 Cálculo por indução . . . . .	26
2.2 Demonstração por indução . . . . .	35
2.3 Construções geométricas por indução . . . . .	43
<b>3 Considerações</b>	<b>51</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>
<b>A Demonstrações selecionadas</b>	<b>55</b>
A.1 Expressão da duplicação do lado de um polígono regular de $2^n$ lados . . . . .	55
A.2 Expressão da tangente do arco metade em função dos lados do triângulo . . . . .	56

# Lista de Figuras

1.1	Ilustração da idéia da indução matemática . . . . .	18
2.1	Polígono regular de $2^n$ lados, de perímetro $P$ , e sua corda $AB$ . . . . .	30
2.2	Quadrilátero convexo . . . . .	33
2.3	Quadrilátero não-convexo . . . . .	33
2.4	Semirretas terminando em um mesmo lado . . . . .	34
2.5	Semirretas “atingindo” mais do que 1 lado . . . . .	34
2.6	Quadrados $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ . . . . .	35
2.7	Quadrado $A_2B_2C_2D_2$ . . . . .	36
2.8	Triângulos $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_{n-1}CB$ e suas circunferências inscritas e exinscritas . . . . .	37
2.9	Circunferência exinscrita no triângulo $ABC$ . . . . .	38
2.10	Triângulo $ABC$ usado como auxiliar na demonstração do corolário 2.2.1 . . . . .	39
2.11	Circunferências $C_1, \dots, C_n$ , com $n \geq 3$ , passando por um mesmo ponto . . . . .	41
2.12	Circunferências $C_1$ e $C_2$ , auxiliares na prova do Lema 2.2.1 . . . . .	41
2.13	“Quadrilátero $OB_1A_3B_3$ ” . . . . .	42
2.14	Quadrilátero $X_1X_{2n-1}X_{2n}X_{2n+1}$ . . . . .	44
2.15	Triângulo $X_1X_2X_3$ , do caso $n = 3$ , base da indução . . . . .	45
2.16	Polígono de $n$ lados $X_1X_2 \dots X_n$ a partir dos vértices $A_1, \dots, A_n, A$ . . . . .	47
2.17	Retas paralelas $r_1$ e $r_2$ . . . . .	47
2.18	$T_n$ e $Q_n$ , intersecções das retas $AD$ e $r_2$ com a reta $XP_n$ . . . . .	48
2.19	Determinação dos pontos $P'_{n+1}, P''_{n+1}, \dots$ . . . . .	50
A.1	Polígono regular $A_1A_2 \dots A_{2^n}$ , inscrito em uma circunferência de raio $R$ . . . . .	55

## Introdução

Como seu próprio título indica, esta dissertação aborda o método de indução matemática, com ênfase em suas aplicações à Geometria.

A principal razão pela qual escolhemos este tema para estudo foi nosso entusiasmo pelas chamadas *demonstrações matemáticas*<sup>1</sup>, estes atos de persuasão fundamentados em argumentações lógico-dedutivas, por meio dos quais nos convencemos de que um fato matemático (uma proposição, um lema, um teorema, etc.) é válido.

Um episódio ocorrido quando ainda cursava o ensino médio me despertou a curiosidade e o interesse pela necessidade de se justificar uma afirmação matemática (por mais óbvia que esta possa parecer). Indagado sobre o porquê de o conjunto vazio ser subconjunto de qualquer conjunto, meu professor de Matemática à altura respondeu-me: *“Embora não seja exatamente como lhe digo, você pode se convencer da verdade deste fato bastando imaginar que, se eliminássemos deste conjunto todos os seus elementos, o que “sobraria” seria o vazio em seu interior.”* Apesar de, naquela ocasião, isto ter feito algum sentido para mim, passei algum tempo questionando-me sobre a natureza desta *prova*... Hoje, embora reconheça nesta passagem um ato de franqueza por parte de meu antigo mestre, preocupado em esclarecer a dúvida que o lançava e, ainda, de modo a ser compreendido, tenho convicção de que uma demonstração para o fato de que  $\emptyset \subset A$ , qualquer que seja o conjunto  $A$ , feita por *redução ao absurdo*, teria sido, por mim, naquele momento, plenamente compreendida e, por isso mesmo, aceita.

Além do mencionado acima, entendo ser conveniente citar a leitura que fiz do artigo intitulado *“Decorar é preciso, demonstrar também é”*, de autoria de Gilberto Garbi<sup>2</sup>, publicado há alguns anos na *Revista do Professor de Matemática*. Nele, o autor

---

<sup>1</sup> *“Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser chamada realmente de ciência se não puder ser demonstrada matematicamente.”* (Frase devida ao matemático, anatomista, botânico, inventor, cientista, poeta e escultor, Leonardo da Vinci [1452–1519], um dos homens mais importantes do Renascimento.)

<sup>2</sup> Gilberto G. Garbi é engenheiro e autor dos livros *A Rainha das Ciências* e *O Romance das Equações Algébricas*, publicados pela editora Livraria da Física. Seu artigo citado no texto pode ser consultado na página eletrônica da *Revista do Professor de Matemática*, bastando para isso acessar o campo “Artigos Publicados”.

---

trata do (falso) dilema entre compreender e memorizar (ou decorar e entender), alertando-nos para o fato de que o ideal seria que a compreensão precedesse a memorização, uma não excluindo a outra. Expõe o autor, ainda, as razões pelas quais considera prejudicial o enfoque utilitarista que, por vezes, é dado à Matemática, o que acaba por limitar o raciocínio e, como consequência, por dificultar a aquisição da capacidade de pensar de forma genérica e abstrata, algo tão importante às pessoas realmente cultas.

Portanto, chegada a hora de decidir sobre o tema desta dissertação, dúvidas não houveram. Em verdade, era apenas questão de se escolher a “melhor rota” a seguir, no que as disciplinas *Matemática Discreta* e *Aritmética* (cursadas nos primeiros semestres do mestrado) muito contribuíram, na medida em que nos expunham a importância e utilidade do método de demonstração por indução matemática na prova de problemas algébricos e aritméticos.

Os exercícios e problemas coligidos neste trabalho foram extraídos, em sua maioria, dos pequenos, porém de inestimável valor educativo, livros *Método de Inducción Matemática* e *Inducción en la Geometría*, da série *Lecciones Populares de Matemáticas*, da Editora Mir. O segundo deles faz, ainda, conexões com outras áreas da Matemática (além da Geometria), como a *Teoria dos Grafos* e a *Combinatória*, abordando problemas sobre mapas geográficos e boa coloração de mapas, aqui não explorados. Nos exercícios utilizo o símbolo ■ para marcar o final da demonstração, conquanto que, nos problemas, o símbolo □ é usado ao término da prova (intitulada por *solução*).

A seguir, é dada uma sucinta descrição de cada um dos dois capítulos em que este trabalho está dividido.

Um explicação acerca das diferenças existentes entre os significados das expressões *raciocínio indutivo* e *indução matemática*, além de alguns exemplos de demonstrações de problemas algébricos e aritméticos, realizadas com base no método de indução matemática, são fornecidos no Capítulo 1. Seu objetivo é “preparar o terreno” para o capítulo seguinte, que trata do uso da indução na Geometria.

O Capítulo 2 é o cerne desta dissertação. Nele, são exibidas algumas aplicações do método de indução matemática feitas em problemas extraídos da Geometria. Foi dividido em três seções, nas quais os problemas estão assim nomeados: problemas de *cálculo*, de *demonstrações* e de *construções geométricas*. Para além de uma “simples” compilação de exercícios-problema, este capítulo também se presta a apresentar diferentes

---

modos de se aplicar o método de indução, de acordo como o tipo de problema geométrico abordado. Além disso, os próprios problemas (em alguns casos, pelo menos) já haverão de despertar interesse por si próprios, na medida em que solicitam de quem pretenda resolvê-los (antes mesmo da aplicação da indução) boa dose de engenhosidade. Em alguns deles (especificamente, nos corolários), aliás, para sua resolução, não fizemos uso direto do método de indução; a decisão de incluí-los no trabalho é devida ao fato de que, no processo de busca da solução, são utilizados resultados que, por sua vez, foram demonstrados por indução.

Por fim, deve ser salientado que este trabalho pretende ser capaz de *induzir* professores e professoras (e a quem mais se ocupa de Matemática) a se apropriar do método de indução matemática, compreendendo sua atuação indispensável na prova de proposições que, de alguma forma, relacionam os números naturais, dominando suas facetas e seus diversos modos de utilização (em particular, aqueles mais ligados à Geometria, como os que aqui foram explorados) e, em sendo possível, criando condições para que os estudantes (em especial, os da escola básica e aqueles dos primeiros períodos do ensino universitário), desde logo, sejam postos em contato com esta elegante técnica de demonstração matemática e impressionante forma de se, por assim dizer, lidar com o infinito!

# 1 O método de indução matemática

## 1.1 Raciocínio indutivo

Denomina-se *indução* a todo raciocínio que compreende a passagem de proposições particulares a proposições gerais, com a peculiaridade de que a validade das últimas se desprende da validade das primeiras.

Exemplos de proposições (ou afirmações) gerais são as seguintes:

- Todos são iguais perante a lei, sem distinção de qualquer natureza, garantindo-se aos brasileiros e aos estrangeiros residentes no País a inviolabilidade do direito à vida, à liberdade, à igualdade, à segurança e à propriedade, [...] (Constituição Federal, Capítulo I, artigo 5<sup>o</sup>).
- Em todo triângulo, o baricentro (ponto de intersecção das três medianas) divide cada uma das medianas de tal modo que o maior segmento é o dobro do menor.
- Um número cuja soma dos algarismos é múltiplo de 9 é, ele próprio, múltiplo de 9.

Suas correspondentes proposições particulares encontram-se abaixo, na mesma ordem das suas gerais:

- João, um maranhense, é igual perante a lei, a Francisco, um cearense.
- O baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$  divide o segmento  $AM_1$  na razão  $\frac{AG}{GM_1} = 2$ , sendo  $M_1$  o ponto médio do lado  $BC$ .
- 10008 é divisível por 9.

Entretanto, realizada com base apenas na veracidade de (alguns) casos particulares, a “indução”<sup>1</sup> nem sempre nos leva a conclusões verdadeiras.

---

<sup>1</sup>As aspas aí servem para sugerir que a palavra *indução* está sendo usado com o sentido de *processo de passagem de uma afirmação particular à sua correspondente geral*.

Vejam os isto nas duas situações abaixo.

### Situação 1

$$10008 \text{ é divisível por } 9. \quad (1.1.1)$$

Um número cuja soma dos algarismos é múltiplo de 9 é, ele próprio, múltiplo de 9.

$$(1.1.2)$$

Com base na Afirmação (1.1.1), obtivemos a Afirmação (1.1.2), que sabemos ser verdadeira.

### Situação 2

$$10008 \text{ é divisível por } 9. \quad (1.1.3)$$

Todos os números que começam com 1 e terminam com 8 são múltiplos de 9. (1.1.4)

Baseando-nos na Proposição Particular (1.1.3), chegamos à Proposição Geral (1.1.4), inverídica, como sabemos.

O emprego do raciocínio indutivo em Matemática, especificamente em situações envolvendo os números naturais, para que resulte em conclusão correta, deve, além de se basear na veracidade de uma proposição particular (ou de proposições particulares), submeter-se a mais um teste, qual seja, a constatação de que a veracidade do que se afirma para um dado natural  $n$  acarreta a veracidade desta afirmação para o natural  $n + 1$ . Nisto consiste o *método de indução matemática*, fundamentado no *princípio<sup>2</sup> de indução matemática*.

Mas, antes de tratar do método e do princípio, vejamos alguns exemplos de raciocínios em que, pretensamente, se aplica a indução corretamente.

**Exemplo 1.1.1.** Seja

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)},$$

onde  $n$  é um número natural (qualquer).

---

<sup>2</sup>Aqui, utilizo a palavra *princípio* como sinônimo de *axioma*. Embora não muito frequente na literatura sobre o assunto, esta prática pode ser vista, por exemplo, em [7], página 2.

Examinando os valores  $S_n$  para os primeiros 4 naturais, vemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}, \\ S_2 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}, \\ S_3 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{7}, \\ S_4 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Com base neste exame podemos afirmar, então, que, para todo número natural  $n$ , tem-se que

$$S_n = \frac{n}{2n+1}.$$

**Exemplo 1.1.2** (*Leibniz*). O notável matemático (jurista e filósofo) alemão *Gottfried Wilhelm Leibniz* demonstrou que  $n^3 - n$  é divisível por 3,  $n^5 - n$  é divisível por 5 e  $n^7 - n$  é divisível por 7, para todo número natural  $n$ . A partir disso, concluímos que  $k$  é divisor de  $n^k - n$ , quaisquer que sejam o número ímpar  $k$  e o número natural  $n$ .

Analisemos, agora, a razão pela qual não são aceitáveis os raciocínios utilizados nos dois exemplos anteriores (e daí porque o termo *pretensamente*, usado acima).

Em ambos os casos, chegamos à uma “conclusão” ou, em outras palavras, enunciamos uma proposição geral, referente a qualquer  $n$  natural, tomando como base o fato de que, em cada um deles, a proposição mostrou-se verdadeira para alguns valores de  $n$ .

Entretanto, embora a veracidade de uma afirmação possa ser constatada em alguns de seus casos particulares, isto por si só não garante a conclusão de sua veracidade “sempre”, ou seja, quando  $n$  assume todos os valores naturais. Portanto, ainda que haja indícios de que se trata de uma afirmação correta, é prematura sua conclusão com base apenas em alguns de seus casos particulares.

Casualmente, no Exemplo 1, a proposição geral enunciada é verdadeira (a justificativa será dada mais adiante); no entanto, no Exemplo 2, a proposição se mostra falsa para  $n = 2$  e  $k = 9$ , por exemplo, pois 9 não é divisor de  $2^9 - 2 = 510$ .

Vejamos, a seguir, mais alguns exemplos de proposições corretas em vários casos particulares, mas não no caso geral.

**Exemplo 1.1.3.** O trinômio  $n^2 + n + 41$ , pelo qual *Leonhard Euler* interessou-se, para  $n$  variando entre os naturais de 1 a 39, resulta um número *primo*. Seria de esperar, daí,

que para os demais naturais  $n$ , a expressão  $n^2 + n + 41$  resultasse, também, um primo. No entanto, é fácil ver que para  $n = 40$  este trinômio é igual a  $41^2$ , número composto.

E, claramente, se  $n = 41$ , tem-se também para o trinômio um número composto.

**Exemplo 1.1.4.** O matemático russo, *Dimitri Grave* conjecturou, no fim do século XIX, que, para todo primo  $p$ , um número do tipo  $2^{p-1} - 1$  não é divisível por  $p^2$ . Cálculos diretos davam conta de que esta afirmação era verdadeira para todos os números primos menores do que 1000. Mas a hipótese de Grave revelou-se falsa com a descoberta, por *W. Meissner*, em 1913, de que a congruência<sup>3</sup>

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

é satisfeita<sup>4</sup> para o primo  $p = 1093$ , o que significa dizer que  $2^{1092} - 1$  é divisível por  $1093^2$ .

**Exemplo 1.1.5.** É possível obter um quadrado perfeito entre os números  $991n^2 + 1$ , ao se fazer  $n = 1, 2, 3, \dots$ ? A resposta é sim, embora o valor mínimo de  $n$  para o qual o número  $991n^2 + 1$  é um quadrado perfeito seja

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

**Exemplo 1.1.6.** Em quantas partes  $n$  planos, dispostos de tal modo que todos passem por um mesmo ponto e não passem três por uma mesma reta, dividem o espaço? Levando em conta que um plano divide o espaço em duas partes; dois planos com uma reta em comum (e, portanto, com *um* ponto em comum) dividem o espaço em quatro partes; e três planos, com algum ponto em comum e não passando todos por uma mesma reta, dividem o espaço em oito partes, somos levados a conjecturar que, em geral,  $n$  planos dividem o espaço em  $2^n$  partes distintas.

Entretanto, pode-se demonstrar<sup>5</sup> que se  $A_n$  é o número de partes em que  $n$  planos, passando todos por um mesmo ponto e não passando três por uma mesma reta, dividem o espaço, então

$$A_n = n(n - 1) + 2.$$

O objetivo da exibição dos exemplos supracitados é prevenir quem quer que seja de conclusões baseadas em analogias mal argumentadas.

---

<sup>3</sup>Um número primo  $p$  que satisfaz a congruência

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

é chamado *primo de Wieferich*.

<sup>4</sup>Outro primo que cumpre a condição de Wieferich é  $p = 3511$  (consultar referência [16]).

<sup>5</sup>A demonstração desta proposição pode ser encontrada na referência [3].

## 1.2 Indução matemática

### 1.2.1 Exemplo de demonstração por indução matemática

Posto que, ao se adicionar 1 ao inteiro positivo  $n$ , obtém-se o inteiro  $n + 1$  (que é maior do que  $n$ , uma vez que um número natural  $m$  é dito ser maior do que  $n$  quando existe um natural  $p$  tal que  $n + p = m$ ), não há número inteiro algum que seja o *maior de todos*. Apesar disso, iniciando com o número 1, todos os inteiros positivos<sup>6</sup> podem ser alcançados, após um número finito de operações de “somar 1”, passando sucessivamente de  $n$  a  $n + 1$ . Esta é a essência de um método de raciocínio que os matemáticos batizaram de *demonstração por indução* ou *método de indução matemática*. Vejamos a aplicação deste método, na demonstração da dupla desigualdade abaixo.

**Proposição 1.2.1.** *Dado um natural qualquer  $n$ , tem-se que*

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < \frac{(n+1)^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2. \quad (1.2.1)$$

*Demonstração.* Inicialmente, representemos por  $P(n)$  a desigualdade da esquerda da expressão acima, isto é, consideremos

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < \frac{(n+1)^3}{3}.$$

Verificando diretamente a afirmação  $P(n)$  para os primeiros três valores de  $n$ , teremos que  $P(1)$ ,  $P(2)$  e  $P(3)$  são asserções verdadeiras, pois

$$P(1) : 1^2 < \frac{2^3}{3}$$

$$P(2) : 1^2 + 2^2 < \frac{3^3}{3}$$

$$P(3) : 1^2 + 2^2 + 3^2 < \frac{4^3}{3},$$

Queremos mostrar que  $P(n)$  é verdadeira para todo natural  $n$  (induzidos pelo fato de que a assertiva se verifica para os três primeiros casos iniciais). Iremos supor que a proposição se verifica para um dado valor particular  $n = k \geq 1$ . Isto quer dizer que consideraremos provada a afirmação

$$P(k) : 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3},$$

---

<sup>6</sup>Aqui, serão considerados como números inteiros positivos os elementos do conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

para um certo inteiro positivo  $k \geq 1$ . Agora, baseando-nos em  $P(k)$ , provemos a correspondente afirmação para  $n = k + 1$ , a saber,

$$P(k+1) : 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 < \frac{(k+2)^3}{3}.$$

Adicionando  $(k+1)^2$  a ambos os membros de  $P(k)$ , obtemos

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 < \frac{(k+1)^3}{3} + (k+1)^2,$$

e, para obter  $P(k+1)$  como consequência de  $P(k)$ , é suficiente mostrar que

$$\frac{(k+1)^3}{3} + (k+1)^2 < \frac{(k+2)^3}{3},$$

o que resulta imediato a partir da igualdade

$$\frac{(k+2)^3}{3} = \frac{k^3 + 6k^2 + 24k + 8}{3} = \frac{(k+1)^3}{3} + (k+1)^2 + 15k + \frac{4}{3}.$$

Desse modo, mostramos que  $P(k+1)$  é consequência de  $P(k)$ , com  $k \geq 1$  um natural arbitrário. Ademais, uma vez que já vimos que  $P(1)$  é verdadeira, podemos concluir que  $P(2)$  é, também, verdadeira. E, sabendo que  $P(2)$  é verdadeira, concluímos que  $P(3)$  é verdadeira, e assim sucessivamente. Portanto, considerando-se que cada inteiro positivo pode ser alcançado por meio deste processo (mencionado no início desta subseção), concluímos que  $P(n)$  é verdadeira para todo natural  $n$ .

Fica, assim, provada a desigualdade da esquerda em (1.2.1). ■

É claro que poder-se-ia mostrar a desigualdade da direita de modo análogo.

### 1.2.2 Princípio de indução matemática

Reflitamos, agora, acerca do *modus operandi*<sup>7</sup> da demonstração anterior. Inicialmente, foi provada a afirmação  $P(n)$  para  $n = 1$ . Em seguida, demonstrou-se que se a afirmação é verdadeira para um dado inteiro positivo  $k$ , então é, também, verdadeira para o inteiro positivo  $k + 1$ . Finalmente, concluiu-se, a partir destas duas provas, que a afirmação  $P(n)$  é verdadeira para todo inteiro positivo  $n$ .

<sup>7</sup>Expressão em latim que significa “modo de operação”. Utiliza-se para designar uma maneira de agir, operar ou executar uma atividade seguindo sempre os mesmos procedimentos.

Uma ilustração não-matemática da idéia de indução pode ser dada com o seguinte exemplo. Imaginemos uma fileira de peças de um dominó indexadas consecutivamente com os naturais e dispostas de tal modo que, se uma delas cai, digamos a assinalada com o inteiro positivo  $k$ , choca-se com a peça seguinte, relativa ao número  $k + 1$ . Está claro, então, o que deverá ocorrer se a peça número 1 for derrubada para trás. Aliás, o mesmo deverá ocorrer no caso de se derrubar um peça qualquer,  $n_0$ , por exemplo: todas as peças indexadas com o natural  $n \geq n_0$  também cairão! Este exemplo ilustra o método de indução matemática, o qual está descrito abaixo, de modo preciso.

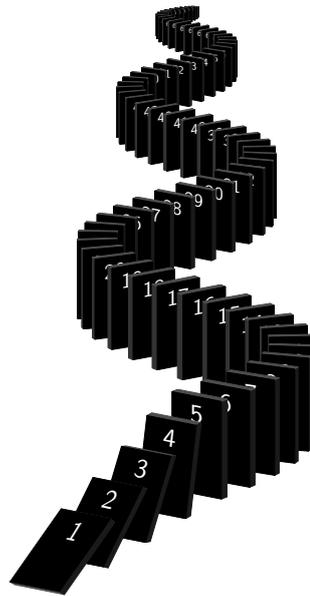


Figura 1.1: Ilustração da idéia da indução matemática

**Proposição 1.2.2** (MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA). *Seja  $P(n)$  uma afirmação referente a um inteiro positivo  $n$ . Concluímos que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq n_0$ , com  $n_0 \in \mathbb{N}$ , quando ocorrem as duas condições abaixo:*

- (i)  $P(n_0)$  é verdadeira.
- (ii) Supondo  $P(k)$  verdadeira, com  $k \geq n_0$  inteiro positivo fixo,  $P(k + 1)$  é verdadeira.

Nos casos vistos acima, consideramos sempre  $n_0 = 1$ . Mas, em Geometria, por exemplo, as proposições relacionadas com polígonos quaisquer de  $n$  lados só fazem sentido para  $n \geq 3$ .

A justificativa desta proposição é baseada no axioma abaixo, por vezes chamado *princípio de indução matemática*.

**Axioma 1.2.1** (PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA). Seja  $X \subset \mathbb{N}$  um subconjunto de naturais tal que:

- (i)  $1 \in X$ ;
- (ii)  $n + 1 \in X$  sempre que  $n \in X$  (isto é, para todo  $n \in X$ ,  $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$ ).

Assim, tem-se  $X = \mathbb{N}$ .

Segue, então, uma demonstração do método de indução matemática, baseada no princípio de indução matemática.

*Demonstração (do Método de Indução Matemática).* Definamos o conjunto

$$S := \{m \in \mathbb{N}; P(n_0 - 1 + m) \text{ é verdadeira}\}.$$

Como, pela Condição (i),  $P(n_0 - 1 + 1) = P(n_0)$  é verdadeira, temos que  $1 \in S$ . Por outro lado, se  $m \in S$ , então  $P(n_0 - 1 + m)$  é verdadeira e, pela Condição (ii), teremos que  $P(n_0 - 1 + (m + 1))$  é verdadeira. Logo,  $m + 1 \in S$  e, pelo Axioma 1.2.1, tem-se que  $S = \mathbb{N}$ . Em consequência, temos que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$  ■

Não é sempre que a aplicação do método de indução matemática se atém de modo rígido ao esquema da Proposição 1.2.2. É necessário, por vezes, supor que a afirmação em questão é verdadeira para números sucessivos ( $k - 1$  e  $k$ , por exemplo) para então, a partir daí, provar-se sua veracidade para  $k + 1$ . É claro que, neste caso, a primeira parte do raciocínio consistirá em se constatar que a afirmação é verdadeira para os dois primeiros naturais para os quais esta faz sentido.

Ocorre, também, a necessidade de se provar, na segunda parte da demonstração, que uma dada afirmação é verdadeira para o natural  $n$  supondo-a válida para todos os naturais menores do que  $n$ .

## 1.3 Demonstrações por indução em Álgebra e em Teoria dos Números

Dada a estreita relação existente entre o método de indução matemática e o conceito de número, não é de estranhar o fato de ocorrer a maior parte de suas aplicações na Álgebra e na Teoria dos Números. Algumas dessas aplicações são expostas a seguir.

### 1.3.1 Identidades e problemas aritméticos

**Exercício 1.3.1.** Demonstre que a soma dos  $n$  primeiros números naturais, simbolizada por  $S(n)$ , é igual a  $\frac{n(n+1)}{2}$ , isto é,

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Demonstração.* Primeiro, constatemos a veracidade de  $S(n)$  para  $n = 1$ :

$$S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

A seguir, suponhamos que

$$S(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

para um dado natural  $k \geq 1$ . Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} S(k+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com o método de indução matemática, concluímos

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

qualquer que seja  $n$  natural. ■

**Exercício 1.3.2.** Calcule o valor da soma

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

onde  $n$  é um número natural (ver Exemplo 1.1.1).

*Demonstração.* Já vimos que

$$S_1 = \frac{1}{3}, \quad S_2 = \frac{2}{5}, \quad S_3 = \frac{3}{7} \quad \text{e} \quad S_4 = \frac{4}{9}.$$

A observação das somas acima sugere a hipótese de que  $S_n = \frac{n}{2n+1}$ , para todo natural  $n$ . Recorramos, com vistas à sua comprovação, ao método de indução matemática.

Esta hipótese é verificada para  $n = 1$  (além de também o ser para  $n = 2, 3$  e  $4$ ).

Suponhamos que a hipótese é verdadeira para  $n = k$ , com  $k \geq 1$ , isto é, que

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

Demonstremos, então, que a hipótese é verdadeira também para  $n = k + 1$ , ou seja, que

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\frac{k}{2k+1}} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)^2 + k(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Agora podemos afirmar, baseando-nos no método de indução matemática, que

$$S_n = \frac{n}{2n+1},$$

para todo natural  $n$ . ■

**Exercício 1.3.3.** Dado que o produto  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  se indica por  $n!$ , calcule

$$S_n = \sum_{i=1}^n i \cdot i! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!.$$

*Demonstração.* Para os primeiros 4 valores de  $S_n$ , tem-se que

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 = 3! - 1$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23 = 4! - 1$$

$$S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119 = 5! - 1.$$

A partir da observação dos casos particulares de  $S_n$  supracitados, somos levados a nos convencer de que

$$S_n = (n + 1)! - 1,$$

qualquer que seja o natural  $n$ .

Procedamos à sua comprovação matemática.

Para  $n = 1$ , a hipótese está correta, pois

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1.$$

Agora, admitamos a veracidade da conjectura para um certo natural  $k \geq 1$ , ou seja, suponhamos que

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1.$$

O que devemos mostrar agora é que

$$S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 2)! - 1.$$

E, de fato,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! \\ &= [(k + 1)! - 1] + (k + 1) \cdot (k + 1)! \\ &= (k + 1)! [1 + (k + 1)] - 1 \\ &= (k + 1)! (k + 2) - 1 \\ &= (k + 2)! - 1. \end{aligned}$$

Fica, assim, provado que  $S_n = \sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n + 1)! - 1, \forall n \geq 1$ . ■

**Exercício 1.3.4.** Mostre que 7 é divisor de  $2^{3n} - 1$ , para todo natural  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Para  $n = 1$ , tem-se que  $2^{3 \cdot 1} - 1 = 7 = 7 \cdot 1$ , um múltiplo de 7, portanto. Será admitido, como *hipótese de indução*<sup>8</sup>, que 7 divide  $2^{3k} - 1$ , para certo natural  $k \geq 1$ , ou seja, que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$7m = 2^{3k} - 1.$$

---

<sup>8</sup>Suposição (ii), feita quando do enunciado da Proposição 1.2.2.

Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned}
 2^{3(k+1)} - 1 &= 2^3 \cdot 2^{3k} - 1 \\
 &= (7 + 1) \cdot 2^{3k} - 1 \\
 &= 7 \cdot 2^{3k} + 2^{3k} - 1 \\
 &= 7 \cdot 2^{3k} + 7m \\
 &= 7 \cdot (2^{3k} + m),
 \end{aligned}$$

o que nos diz que 7 é um divisor de  $2^{3(k+1)} - 1$ , pois  $2^{3k} + m \in \mathbb{N}$ .

Logo, podemos afirmar que 7 é divisor de  $2^{3n} - 1$ , qualquer que seja o natural  $n \geq 1$ . ■

### 1.3.2 Desigualdades e (outros) problemas algébricos

**Exercício 1.3.5.** Seja a proposição

$$P(n) : n + H_1 + H_2 + \cdots + H_{n-1} = n \cdot H_n,$$

onde  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ . Prove que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq 2$ .

*Demonstração.* Se  $n = 2$ , então tem-se que  $2 + H_1 = 2 + 1 = 3 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ , o que nos diz que  $P(2)$  se verifica.

Suponhamos, agora, que  $P(n)$  seja verdadeira, ou seja, que

$$n + \sum_{i=1}^{n-1} H_i = n \cdot H_n,$$

para um certo  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ ; esta é, portanto, a *hipótese de indução* (H.I.) considerada.

Queremos mostrar que  $P(n+1)$  se verifica, isto é, que

$$(n+1) + \sum_{i=1}^n H_i = (n+1) \cdot H_{n+1}.$$

Assim, tem-se que

$$n+1 + \sum_{i=1}^n H_i = n + \sum_{i=1}^{n-1} H_i + H_n + 1 \stackrel{\text{H.I.}}{=} nH_n + H_n + 1.$$

Agora, levando-se em conta que  $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ , temos que

$$\begin{aligned}
 nH_n + H_n + 1 &= nH_n + H_{n+1} - \frac{1}{n+1} + 1 \\
 &= nH_n + \frac{n}{n+1} + H_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, sendo

$$\frac{n}{n+1} = n \frac{1}{n+1}$$

e colocando  $n$  em evidência, tem-se que

$$\begin{aligned} nH_n + \frac{n}{n+1} + H_{n+1} &= n \left( H_n + \frac{1}{n+1} \right) + H_{n+1} \\ &= nH_{n+1} + H_{n+1} \\ &= (n+1)H_{n+1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

**Exercício 1.3.6.** Demonstre, utilizando o método de indução matemática, que

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1}x = \frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x},$$

para todo inteiro positivo  $n \geq 1$  e todo real  $x \neq k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* A igualdade trigonométrica em questão é verdadeira para  $n = 1$ , uma vez que

$$\cos x = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} x}.$$

Agora, suponhamos a validade da proposição para um certo natural  $n = k \geq 1$ , ou seja, admitamos que

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^{k-1}x = \frac{\operatorname{sen} 2^k x}{2^k \operatorname{sen} x}.$$

Então, a proposição também é verdadeira para  $n = k + 1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^{k-1}x \cdot \cos 2^k x &= \frac{\operatorname{sen} 2^k x \cdot \cos 2^k x}{2^k \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} 2^k x \cdot \cos 2^k x}{2 \cdot 2^k \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1} x}{2^{k+1} \operatorname{sen} x}, \end{aligned}$$

uma vez que, pela expressão do seno do arco duplo, temos

$$\operatorname{sen} 2^{k+1} x = 2 \operatorname{sen} 2^k x \cdot \cos 2^k x.$$

Por fim, o método de indução matemática nos garante que

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1}x = \frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x},$$

para todo natural  $n \geq 1$  e todo real  $x \neq k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

**Exercício 1.3.7.** Demonstre que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24},$$

para todo número natural  $n > 1$ .

*Demonstração.* Inicialmente, indiquemos a desigualdade acima por  $S_n$ . Desse modo, tem-se que  $S_2$  se verifica, posto que  $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ .

Seja, então,  $S_k > \frac{13}{24}$  para certo inteiro positivo  $k > 1$ . Deve-se mostrar que, também, tem-se  $S_{k+1} > \frac{13}{24}$ .

Como

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} \text{ e}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2},$$

comparando  $S_k$  e  $S_{k+1}$ , vemos que

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

ou ainda,

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(2k+1)(k+1)}.$$

Assim, tem-se que  $S_{k+1} > S_k$ , visto que o segundo membro da igualdade acima é um número positivo, para qualquer  $k > 1$ . Finalmente, como  $S_k > \frac{13}{24}$ , pela propriedade *transitiva*<sup>9</sup> das desigualdades entre números reais, concluímos que  $S_{k+1} > \frac{13}{24}$ , finalizando a demonstração. ■

**Exercício 1.3.8** (Desigualdade de *Bernoulli*). Prove que  $(1+x)^n > 1+nx$ , para todo natural  $n > 1$ , sendo  $0 \neq x > -1$ .

*Demonstração.* A desigualdade é verdadeira para  $n = 2$ , posto que  $1+2x+x^2 > 1+2x$  ( $x^2 > 0$  neste caso). Ademais, supondo que a desigualdade se cumpre para um dado  $k > 1$ , isto é, que  $(1+x)^k > 1+kx$ , tem-se que

$$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + \underbrace{kx^2}_{>0} > 1 + (k+1)x,$$

o que prova a desigualdade para todo natural  $n > 1$  e  $0 \neq x > -1$ . ■

<sup>9</sup>É uma das propriedades da relação de ordem  $x < y$  em  $\mathbb{R}$ : se  $x < y$  e  $y < z$ , então  $x < z$ .

## 2 Aplicações da indução matemática à problemas de Geometria

Neste capítulo, procuro justificar a razão de ser deste trabalho. Serão exibidas, ao longo de suas seções (divididas pelo tipo de problema geométrico abordado), aplicações do método de indução matemática à Geometria.

Evidenciar diferentes aspectos do método de indução matemática é o que há de mais relevante neste capítulo. Além disso, é preciso dizer que é feita, ao longo deste trabalho, uma distinção entre *exercício* e *problema*, com este significando uma tarefa que requer mais trabalho e, aquele, algo mais ou menos “rotineiro”.

### 2.1 Cálculo por indução

Problemas de Geometria relacionados com cálculo, com o “fazer contas”, na determinação explícita de uma quantidade, de um comprimento, de um ângulo, de uma área, etc., assemelha-se em muito à aplicação mais *natural* do método de indução matemática, a saber, em Teoria dos Números e em Álgebra.

Esta subseção dedica-se à eles e às suas soluções.

**Problema 2.1.1.** Calcule o lado  $a_{2^n}$  de um polígono regular de  $2^n$  lados, inscrito em uma circunferência de raio  $R$ .

*Solução.* Se  $n = 2$  (devemos “começar” com 2 pois, como sabemos, não há polígono de  $2^1$  lados!), o polígono regular de  $2^n$  lados é um quadrado, cujo lado é  $a_4 = R\sqrt{2}$ . Empregando, agora, a *fórmula de duplicação*<sup>1</sup>

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}},$$

---

<sup>1</sup>Ver a demonstração desta fórmula no apêndice A.1.

encontramos

$$\begin{aligned}
 a_8 &= R\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \text{ no caso de um octógono regular,} \\
 a_{16} &= R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \text{ no caso de um polígono regular de 16 lados e} \\
 a_{32} &= R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \text{ no caso de um polígono regular de 32 lados.}
 \end{aligned}$$

Com isso, somos levados a crer que, para  $n \geq 2$ , o lado de um polígono regular de  $2^n$  lados é

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ radicais}}}. \quad (2.1.1)$$

Suponhamos agora que, em uma circunferência de raio  $R$ , o lado  $a_{2^n}$  de um polígono regular de  $2^n$  lados é dado pela igualdade (2.1.1).

Desse modo, baseando-nos na fórmula de duplicação referida acima, temos que

$$\begin{aligned}
 a_{2^{n+1}} &= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2 \frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ radicais}}}{4}}} \\
 &= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{\frac{4R^2 - R^2 \left(2 - \underbrace{\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ radicais}}\right)}{4}}} \\
 &= R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ radicais}}},
 \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que o lado  $a_{2^n}$  de um polígono regular de  $2^n$  lados, inscrito em uma circunferência de raio  $R$ , é expresso mediante a fórmula (2.1.1), para todo natural  $n \geq 2$ .  $\square$

*Observação 2.1.1.* Deduz-se, a partir da igualdade (2.1.1), que o comprimento  $C$  de uma circunferência de raio  $R$  é o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ radicais}}}$$

e, já que  $C = 2\pi R$ , também podemos deduzir que

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ radicais}}},$$

ou ainda, que

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ radicais}}}.$$

A afirmação a seguir é um corolário do problema anterior (e nos dá outro modo de expressar o número  $\pi$  como um limite).

**Corolário 2.1.1** (do Problema 2.1.1). *O número  $\pi$  é o limite do quociente*

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \cdots},$$

quando a quantidade de fatores (expressos pelas raízes quadradas) cresce indefinidamente. (A regra que determina estes fatores é a sugerida pelos três primeiros, escritos explicitamente acima.)

*Solução.* Para provar que o limite do quociente acima é igual a  $\pi$ , considerar-se-á  $S_{2^n}$  a área de um polígono regular de  $2^n$  lados, inscrito em uma circunferência de raio  $R$ ,  $h_{2^n}$  seu *apótema*<sup>2</sup> e, em seguida, será determinada a razão  $\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}}$ .

Fazendo-se uso da igualdade (2.1.1), pode-se concluir que

$$h_{2^n} = \sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}} = \frac{R}{2} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-2 \text{ radicais}}}$$

e que  $S_{2^n}$  é igual à soma das áreas de  $2^n$  triângulos isósceles de base  $a_{2^n}$  e altura  $h_{2^n}$ , os quais preenchem o polígono de  $2^n$  lados em questão. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 2^n \left( \frac{a_{2^n} h_{2^n}}{2} \right) \\ &= 2^{n-2} R^2 \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n-3 \text{ radicais}}} = 2^{n-2} \cdot R \cdot a_{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>*Apótema* de um polígono regular é o segmento de reta com extremidades no centro do polígono e no ponto médio de um de seus lados.

É claro que, neste caso, para que o raciocínio faça sentido, deve-se ter  $n \geq 3$ . As considerações a seguir dizem respeito, portanto, a polígonos cuja quantidade de lados é uma potência de 2 maior do que 4.

Então, com substituições convenientes, tem-se que

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}} = \frac{2^{n-1} a_{2^n} h_{2^n}}{2^{n-1} R a_{2^n}} = \frac{h_{2^n}}{R}.$$

Mas  $\frac{h_{2^n}}{R}$  é exatamente o cosseno da metade do ângulo central de um polígono regular de  $2^n$  lados, inscrito em uma circunferência de raio  $R$ , isto é,

$$\frac{h_{2^n}}{R} = \cos \frac{360^\circ}{2 \cdot 2^n} = \cos \frac{180^\circ}{2^n},$$

donde conclui-se que  $\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}} = \cos \frac{180^\circ}{2^n}$ . Daí, segue que

$$\frac{S_8}{S_{16}} \cdot \frac{S_{16}}{S_{32}} \cdot \dots \cdot \frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}} = \cos \frac{180^\circ}{8} \cdot \cos \frac{180^\circ}{16} \cdot \dots \cdot \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}}.$$

Além disso, tem-se também que  $\frac{S_4}{S_8} = \frac{2R^2}{2R^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \cos \frac{180^\circ}{4}$ . Logo, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \frac{S_4}{S_{2^n}} &= \frac{S_4}{S_8} \cdot \frac{S_8}{S_{16}} \cdot \frac{S_{16}}{S_{32}} \cdot \dots \cdot \frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}} \\ &= \cos \frac{180^\circ}{4} \cdot \cos \frac{180^\circ}{8} \cdot \cos \frac{180^\circ}{16} \cdot \dots \cdot \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que a área  $\pi R^2$  de um círculo de raio  $R$  é igual ao limite de  $S_{2^n}$  quando  $n$  cresce sem cota, isto é, que

$$\pi R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n},$$

tem-se que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} S_4}{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_4}{S_{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{180^\circ}{4} \cdot \cos \frac{180^\circ}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}} \right)$$

e, fazendo-se uso do fato de que, para qualquer  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , a igualdade  $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$  é verdadeira, segue que

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{180^\circ}{4} \cdot \cos \frac{180^\circ}{8} \cdot \cos \frac{180^\circ}{16} \cdot \dots \cdot \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right)} \dots}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

**Problema 2.1.2.** Dado um polígono regular de  $2^n$  lados, com perímetro  $P$ , indique uma igualdade que permita calcular o raio  $r_n$ , da circunferência nele inscrita, e o raio  $R_n$ , da circunferência à ele circunscrita, em termos do perímetro  $P$ .

*Solução.* Para o quadrado de perímetro  $P$ , temos que  $r_2 = \frac{P}{8}$  e  $R_2 = \frac{P\sqrt{2}}{8}$ .

A seguir, trataremos de determinar um modo de, a partir dos raios  $r_n$  e  $R_n$  das circunferências inscrita em e circunscrita a, respectivamente, um polígono regular de  $2^n$  lados, de perímetro  $P$ , os raios  $r_{n+1}$  e  $R_{n+1}$  das circunferências correspondentes a um polígono regular de  $2^{n+1}$  lados, de mesmo perímetro  $P$ . Para isto, consideremos  $AB$  o lado de um polígono regular de  $2^n$  lados de perímetro  $P$ , o ponto  $O$  seu centro,  $C$  o ponto médio do arco  $\widehat{AB}$  e  $D$  o ponto médio da corda  $AB$  (ver Figura 2.1). Ademais, seja  $EF$  o segmento de reta que une os pontos médios dos lados  $AC$  e  $BC$ , respectivamente, do triângulo  $ABC$  e  $G$ , o ponto médio de  $EF$ .

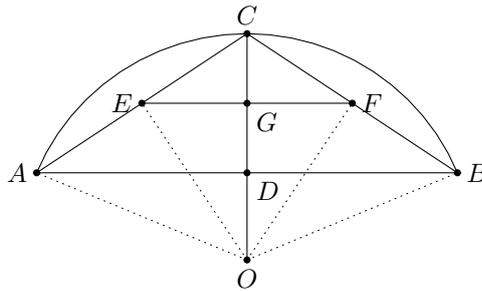


Figura 2.1: Polígono regular de  $2^n$  lados, de perímetro  $P$ , e sua corda  $AB$

Com isso, temos que  $EF$  é o lado de um polígono regular de  $2^{n+1}$  lados inscrito na circunferência de raio  $\overline{OE}$ , visto que, com base em consequências da construção acima,

$$\begin{aligned} \widehat{EOF} &= \widehat{EOC} + \widehat{FOC} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{AOC} + \frac{1}{2}\widehat{BOC} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{AOB}. \end{aligned}$$

Acima, foi utilizada a mesma notação para expressar um ângulo e sua medida. Assim, sendo  $\alpha$  a medida do ângulo  $\widehat{AOB}$ , escrever-se-á simplesmente  $\widehat{AOB} = \alpha$ .

Além disso, como os triângulos  $ABC$  e  $EFC$  são semelhantes, com razão de semelhança do segundo para o primeiro igual a  $\frac{1}{2}$ , o perímetro deste polígono é igual a

$$2^{n+1}\overline{EF} = 2^{n+1}\frac{\overline{AB}}{2} = 2^n\overline{AB},$$

isto é, igual a  $P$ .

Portanto, tem-se que  $r_{n+1} = \overline{OG}$  e  $R_{n+1} = \overline{OE}$ . Além disso, da igualdade  $\overline{OC} - \overline{OG} = \overline{OG} - \overline{OD}$  (de fácil constatação), ou, noutros termos, de  $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$ , temos que

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}. \quad (2.1.2)$$

E como, a partir do triângulo retângulo  $OEC$ , é verdadeira a igualdade  $\overline{OE}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OG}$ , isto é,  $R_{n+1}^2 = R_n \cdot r_{n+1}$ , temos que

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}. \quad (2.1.3)$$

Agora, de posse das duas igualdades em destaque acima, providenciemos um modo de se conjecturar a “fórmula fechada” para a determinação dos raios  $r_n$  e  $R_n$  das circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente, correspondentes a um polígono regular de  $2^n$  lados, de perímetro  $P$ .

Para os primeiros três valores inteiros de  $n$ , maiores do que 1, temos:

- $n = 2$ :

$$r_2 = \frac{P \cdot 1}{8} \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{P\sqrt{2}}{8}$$

- $n = 3$ :

$$r_3 = \frac{P \cdot (1 + \sqrt{2})}{16} \quad \text{e} \quad R_3 = \frac{P\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{16}$$

- $n = 4$ :

$$r_4 = \frac{P \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}})}{32} \quad \text{e} \quad R_4 = \frac{P\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{32}$$

As três observações acima não deixam dúvidas acerca de qual deve ser nossa hipótese: sendo  $n \geq 2$  um inteiro positivo, os raios  $r_n$  e  $R_n$  em questão devem ser dados por

$$r_n = \frac{P}{2^{n+1}} \cdot \left( \underbrace{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ parcelas}} \right)^{\overbrace{\hspace{10em}}^{n-2 \text{ fatores}}}$$

e

$$R_n = \frac{P}{2^{n+1}} \cdot \left( \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ fatores}} \right).$$

Usaremos indução sobre  $n \geq 2$ . É fácil constatar que a hipótese se verifica quando  $n = 2$ . Agora, supondo válida nossa hipótese para um dado número natural  $n \geq 2$  e, com base na igualdade (2.1.2), temos que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2^{n+1}} \cdot \left( \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ fatores}} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2^{n+1}} \cdot \left( \underbrace{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ parcelas}} \right) \\ &= \frac{P}{2^{n+2}} \cdot \left( \underbrace{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ parcelas}} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, para provar a expressão referente à  $R_{n+1}$  suporemos que é verdadeira a hipótese aventada para  $R_n$  e, utilizando a igualdade (2.1.3), teremos que

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \sqrt{\frac{2 \cdot P}{2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \left( \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ fatores}} \right)} \cdot \\ &\quad \sqrt{\frac{P}{2^{n+2}} \cdot \left( \underbrace{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ parcelas}} \right)} \\ &= \frac{P}{2^{n+2}} \cdot \left( \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ fatores}} \right). \end{aligned}$$

A igualdade acima deve deixar claro a razão pela qual o termo “fora do radical” é igual a  $\frac{P}{2^{n+2}}$ . Além disso, o segundo fator do produto acima vem de se provar a igualdade

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{2} \cdot \dots \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ fatores}} \cdot \left( \underbrace{1 + \dots + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ parcelas}} \right) &= \\ \underbrace{\left( 2 + \sqrt{2} \right) \cdot \left( 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} \right) \cdot \dots \cdot \left( 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}} \right)}_{n-1 \text{ fatores}}, & \end{aligned}$$

o que pode ser alcançado fazendo-se uso, uma vez mais, do método de indução matemática sobre  $n$ .

Desta feita, fica demonstrado o que se queria.  $\square$

**Problema 2.1.3.** Determine a soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados, não necessariamente convexo.

*Solução.* A soma dos ângulos internos de um triângulo (qualquer) é igual a  $180^\circ$ . E, uma vez que todo quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos (vide Figuras 2.2 e 2.3), a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a  $(4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$ .

Suporemos, a seguir, que a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de  $k$  lados, com  $k < n$ , é igual a  $(k - 2) \cdot 180^\circ$ , consideraremos um polígono qualquer de  $n > 3$  lados,  $A_1A_2 \dots A_n$ , e, por fim, mostraremos que a soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados resulta igual a  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

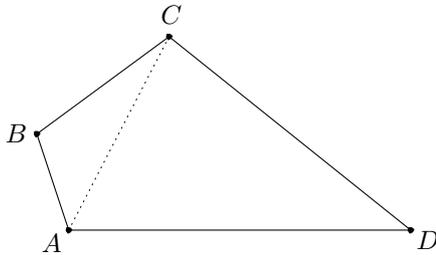


Figura 2.2: Quadrilátero convexo

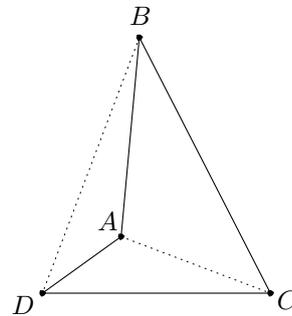
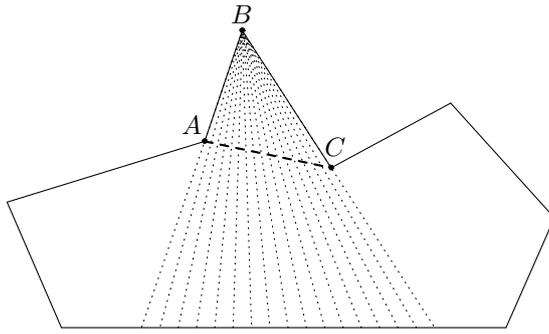
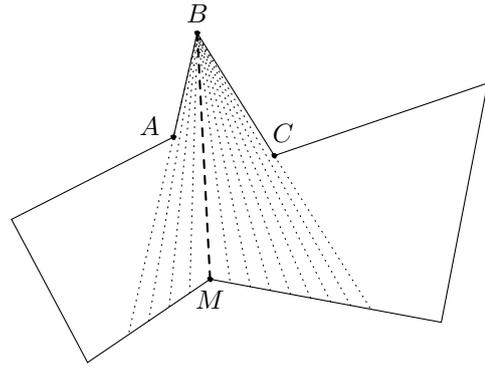


Figura 2.3: Quadrilátero não-convexo

Antes, porém, demonstremos que em todo polígono existe uma diagonal<sup>3</sup> que o divide em dois polígonos de menor número de lados (se o polígono em questão é convexo, esta afirmação é, evidentemente, verdadeira). Consideremos, pois, três vértices sucessivos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de um polígono de  $n$  lados. A seguir, tracemos, a partir do vértice  $B$  e até intersectar o contorno do polígono, todas as semirretas possíveis de ser traçadas de tal modo que a região interna do ângulo  $\widehat{ABC}$  fique completamente preenchida (as Figuras 2.4 e 2.5 exibem  $\widehat{ABC}$  como um ângulo agudo, pois isto não acarreta perda de generalidade ao raciocínio).

<sup>3</sup>*Diagonal* de um polígono (convexo ou não) é um segmento de reta com extremos em dois vértices não-adjacentes deste polígono. Notemos que a diagonal de um polígono não-convexo pode “atravessá-lo” e pode “estar fora dele” (como a diagonal  $BD$  da Figura 2.3).

Figura 2.4: Diagonal  $AC$ Figura 2.5: Diagonal  $BM$ 

Assim sendo, dois são os casos que podem se apresentar:

- (I) Todas as semirretas terminam em um mesmo lado do polígono (vide Figura 2.4). Neste caso, a diagonal  $AC$  divide o tal polígono em um triângulo e em um polígono de  $n - 1$  lados.
- (II) Nem todas as semirretas terminam em um mesmo lado do polígono (vide Figura 2.5). Neste caso, uma das semirretas irá passar por um vértice  $M$  do polígono, de modo a que a diagonal  $BM$  o divida em dois polígonos, cada um dos quais possuidor de uma quantidade de lados menor do que  $n$ .

Agora, em prosseguimento à demonstração da proposição principal do problema, consideremos  $A_1A_2 \dots A_n$  um polígono qualquer de  $n$  lados e nele tracemos a diagonal  $A_1A_k$ , que o divide no polígono  $A_1A_2 \dots A_k$ , de  $k$  lados, e no polígono  $A_kA_{k+1} \dots A_n$ , de  $n + 2 - k$  lados. Mas, segundo a hipótese admitida, as somas dos ângulos internos do polígono de  $k$  lados e do polígono de  $n + 2 - k$  lados (ambos polígonos com menor número de lados do que o  $n$ -ágono) são iguais a  $(k - 2) \cdot 180^\circ$  e  $[(n + 2 - k) - 2] \cdot 180^\circ$ , respectivamente, e, desse modo, ter-se-á que a soma dos ângulos internos de  $A_1A_2 \dots A_n$  será igual a

$$(k - 2) \cdot 180^\circ + [(n + 2 - k) - 2] \cdot 180^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ,$$

donde concluímos que nossa proposição é verdadeira, qualquer que seja  $n \geq 3$  natural.  $\square$

*Observação 2.1.2.* Notemos que esta demonstração não fez uso do modo, talvez mais frequente e natural, do método de indução matemática, qual seja, aquele em que a hipótese de indução é referente a um natural dado e fixo. Aqui, considerou-se que a afirmação é verdadeira para *todo* número natural  $k$  menor do que o natural  $n$  e, em seguida, provou-se a veracidade da proposição para  $n$ .

## 2.2 Demonstração por indução

Esta seção está dedicada a exemplos de aplicação do método de indução matemática à demonstração de teoremas de natureza geométrica. Em contraposição à seção anterior, em que havia a necessidade de, primeiro, realizar-se algumas observações sobre um dado resultado, nesta serão conjecturados certos fatos geométricos, sem que nada seja dito a respeito de sua veracidade em casos particulares.

Neste sentido, o Problema 2.1.3, por exemplo, poderia ter sido enunciado assim: demonstre que a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de  $n$  lados é igual a  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . Exemplos desta natureza estão postos nesta seção.

**Problema 2.2.1.** Demonstre que é possível dividir  $n$  quadrados em “pedaços” tais que seja possível formar um novo quadrado com estes mesmos pedaços.

*Solução.* Se  $n = 1$ , não há necessidade alguma de demonstração. Portanto, trataremos de demonstrar o problema considerando  $n \geq 2$ . Sejam, portanto,  $x$  e  $y$ , com  $x \geq y$ , os lados de dois quadrados dados  $ABCD$  e  $A_1B_1C_1D_1$ , respectivamente. Então, tomemos, nos lados do quadrado  $ABCD$ , de lados iguais a  $x$  (ver Figura 2.6), os segmentos  $AM$ ,  $BN$ ,  $CP$  e  $DQ$ , tais que

$$AM = BN = CP = DQ = \frac{x + y}{2},$$

“cortando-o” em seguida segundo as retas  $MP$  e  $NQ$ . Não é difícil concluir que estas retas são perpendiculares e intersectam-se no centro do quadrado  $ABCD$ , dividindo-o em quatro pedaços iguais entre si.

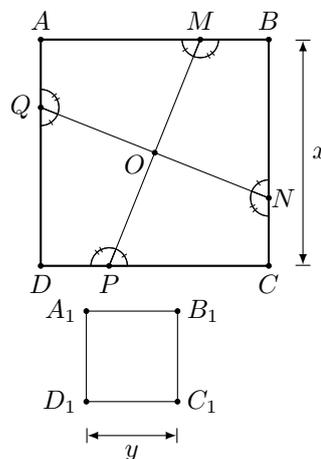


Figura 2.6: Quadrados  $ABCD$  e  $A_1B_1C_1D_1$

Agora, juntando estes pedaços ao quadrado  $A_1B_1C_1D_1$  (conforme indicado na Figura 2.7), a figura obtida também será um quadrado (já que os ângulos de vértices em  $M_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  e  $N_1$  serão ângulos rasos, os ângulos de vértices em  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$  serão retos e  $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = D_2A_2$ ). Provamos, com isso, que a proposição em questão é verdadeira para  $n = 2$ .

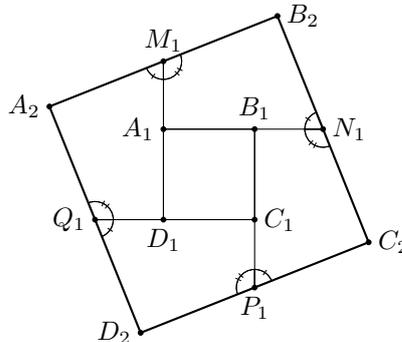


Figura 2.7: Quadrado  $A_2B_2C_2D_2$

Agora, suponhamos que a proposição em questão é verdadeira para o caso em que se tem  $n$  quadrados e consideremos os  $n + 1$  quadrados quaisquer  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, Q_{n+1}$ . Conforme demonstramos acima, é possível, a partir da divisão em pedaços de um entre dois quaisquer destes quadrados ( $Q_n$  e  $Q_{n+1}$ , por exemplo) e da junção dos pedaços obtidos ao segundo, formar um outro quadrado,  $Q'$ . Além disso, segundo a hipótese de indução, os  $n$  quadrados  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q'$  podem ser decompostos em pedaços que permitam formar um novo quadrado.

Como, por fim, conseguiu-se utilizar os  $n + 1$  quadrados para se obter um novo quadrado, damos por concluída a demonstração.  $\square$

**Problema 2.2.2.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Traçam-se, a partir do vértice  $C$ ,  $n - 1$  retas,  $CM_1, CM_2, \dots, CM_{n-1}$ , que o dividem em  $n$  triângulos menores, a saber, os triângulos  $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_{n-1}CB$ . Sejam  $r_1, r_2, \dots, r_n$  os raios das circunferências inscritas nestes triângulos. Sejam, ainda,  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  os raios das circunferências exinscritas<sup>4</sup> nestes triângulos (cada uma das quais inscrita no ângulo  $C$  do triângulo correspondente, como mostra a Figura 2.8). Por fim, sejam  $r$  e  $\rho$  os raios das circunferências inscrita e exinscrita, respectivamente, no próprio triângulo  $ABC$ . Prove que

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

<sup>4</sup>*Exinscrita* é o nome dado a uma circunferência tangente a um dos lados de um triângulo e às retas que contém seus outros dois lados.

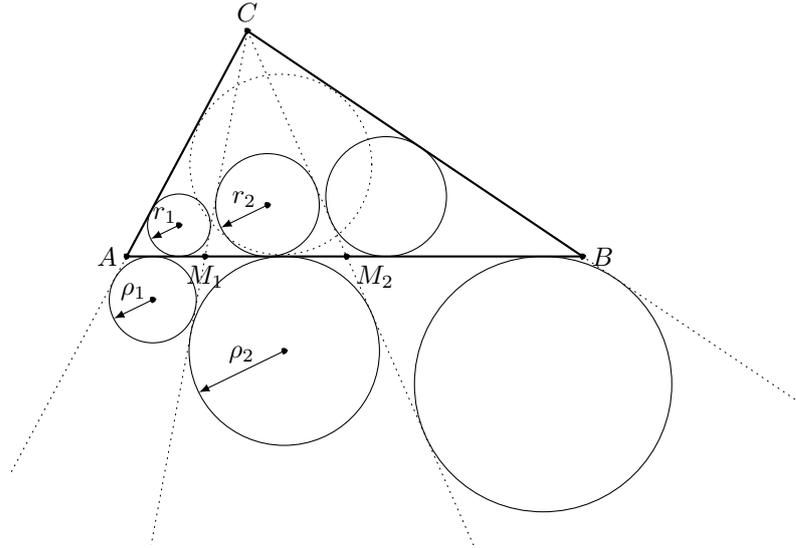


Figura 2.8: Triângulos  $ACM_1, \dots, M_{n-1}CB$  e suas circunferências inscritas e exinscritas

*Solução.* Inicialmente, representemos por  $S$  a área do triângulo  $ABC$  e por  $p$ , seu semiperímetro, isto é, se  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$  são as medidas dos seus lados, então  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Como é bem sabido,  $S = pr$ . De outro lado, se  $O$  é o centro da circunferência exinscrita no triângulo  $ABC$  (ver Figura 2.9), então temos que

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OCB} - S_{\triangle OAB} \\ &= \frac{b\rho}{2} + \frac{a\rho}{2} - \frac{c\rho}{2} \\ &= \frac{(a+b+c-2c)\rho}{2} \\ &= (p-c)\rho, \end{aligned}$$

e, em consequência,  $pr = (p-c)\rho$ , ou ainda,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{p-c}{p}.$$

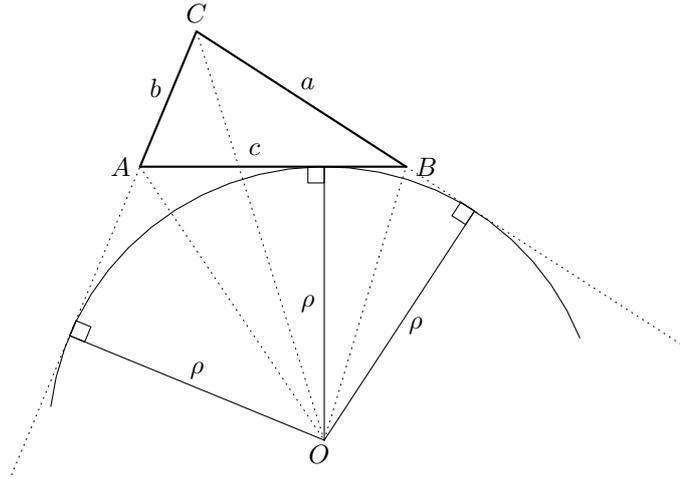
Além disso, da Trigonometria, temos as igualdades<sup>5</sup> abaixo

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \quad (2.2.1)$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ &= \frac{p-c}{p} \\ &= \frac{r}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

<sup>5</sup>As igualdades trigonométricas em questão encontram-se justificadas no apêndice A.2.

Figura 2.9: Circunferência exinscrita no triângulo  $ABC$ 

De posse destas importantes observações preliminares, efetivemos a demonstração do teorema proposto. Constatemos, pois, a veracidade da proposição para  $n = 2$ , isto é, para o caso em que o triângulo  $ABC$  fica dividido em dois triângulos, a saber,  $ACM$  e  $MCB$ .

Das fórmulas (2.2.1), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} &= \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{CMA}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{CMB}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} \\ &= \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{CMA}}{2} \cdot \underbrace{\operatorname{tg} \frac{180^\circ - \widehat{CMA}}{2}}_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} \\ &= \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} \\ &= \frac{r}{\rho}. \end{aligned}$$

Acima, o produto entre as fatores centrais é igual a 1 em vista de serem complementares os ângulos  $\frac{\widehat{CMA}}{2}$  e  $\frac{180^\circ - \widehat{CMA}}{2}$  e, em consequência, serem recíprocos os números  $\operatorname{tg} \frac{\widehat{CMA}}{2}$  e  $\operatorname{tg} \frac{180^\circ - \widehat{CMA}}{2}$ .

Suponhamos, agora, que a proposição a ser provada é verdadeira quando se tem  $n - 1$  retas. Em seguida, tomemos  $n$  retas  $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$  que dividem o triângulo  $ABC$  em  $n + 1$  triângulos menores, quais sejam  $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$ . Considerando dois quaisquer destes triângulos, digamos  $ACM_1$  e  $M_1CM_2$ , temos que

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}},$$

onde  $r_{12}$  e  $\rho_{12}$  são os raios das circunferências inscrita e exinscrita no triângulo  $ACM_2$  (a justificativa deste fato se baseia no que já foi provado acima). Finalmente, em con-

seqüência da hipótese feita, para os  $n$  triângulos  $ACM_2, M_2CM_3, \dots, M_nCB$  cumpre-se a igualdade

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

e, como consequência,

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho},$$

pelo que concluímos a demonstração.  $\square$

Como consequência imediata do teorema relativo ao Problema 2.2.2, tem-se a seguinte proposição.

**Corolário 2.2.1** (do Problema 2.2.2). *Sejam  $CM$  e  $CM'$  duas retas que dividem de dois modos um dado triângulo  $ABC$  em dois pares de triângulos:  $ACM, CMB$  e  $ACM', CM'B$ . Sejam, ainda,  $r_1, r_2$  e  $r'_1, r'_2$  os raios respectivos das circunferências inscritas nestes dois pares de triângulos. Se  $r_1 = r'_1$ , então  $r_2 = r'_2$  (e propriedade análoga se cumpre em se tratando dos raios das circunferências exinscritas).*

*Solução.* Para a prova deste corolário, serão usadas as notações relativas ao Problema 2.2.2 e a figura abaixo, que irá auxiliar nosso raciocínio.

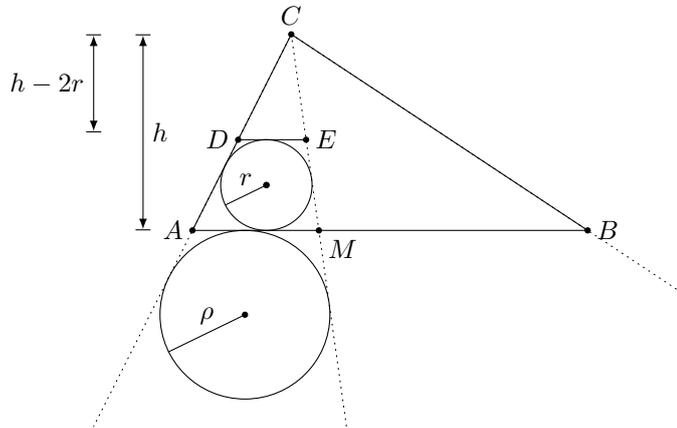


Figura 2.10: Triângulo  $ABC$ , auxiliar na demonstração do corolário 2.2.1

Sendo o segmento  $DE$  paralelo ao lado  $AB$  do triângulo  $ABC$  e tangente à circunferência a ele inscrita, tem-se que os triângulos  $ACM$  e  $ADE$  são semelhantes<sup>6</sup> e,

<sup>6</sup>Como é bem sabido, se a razão de semelhança entre dois triângulos é  $k$ , então a razão entre lados homólogos é  $k$ , a razão entre os raios das circunferências inscritas, circunscritas e exinscritas é  $k$  e, em geral, a razão entre dois elementos lineares (quaisquer) homólogos é  $k$ .

portanto, que

$$\frac{r}{h-2r} = \frac{\rho}{h} \Rightarrow \frac{r}{\rho} = \frac{h-2r}{h},$$

onde  $h \neq 0$  é a altura do triângulo  $ACM$ , relativamente ao vértice  $C$ .

Daí, com base na demonstração do problema anterior, temos que

$$\left(\frac{h-2r_1}{h}\right) \left(\frac{h-2r_2}{h}\right) = \frac{r}{\rho} = \left(\frac{h-2r'_1}{h}\right) \left(\frac{h-2r'_2}{h}\right).$$

Finalmente, supondo verdadeira a igualdade  $r_1 = r'_1$ , temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{h-2r_1}{h}\right) \left(\frac{h-2r_2}{h}\right) &= \left(\frac{h-2r_1}{h}\right) \left(\frac{h-2r'_2}{h}\right) \Rightarrow \\ \frac{h-2r_2}{h} &= \frac{h-2r'_2}{h} \Rightarrow \\ 1 - \frac{2r_2}{h} &= 1 - \frac{2r'_2}{h} \Rightarrow \\ r_2 &= r'_2. \end{aligned}$$

A demonstração da propriedade análoga referente aos raios  $\rho_1, \rho_2$  e  $\rho'_1, \rho'_2$  das circunferências exinscritas aos triângulos  $ACM, CMB$  e  $ACM', CM'B$ , nessa ordem, é feita de forma completamente similar à demonstração realizada acima, com base na proporção

$$\frac{\rho}{h+2\rho} = \frac{r}{h},$$

donde se deduzem as igualdades

$$\left(1 + \frac{2\rho_1}{h}\right) \left(1 + \frac{2\rho_2}{h}\right) = 1 + \frac{2\rho}{h} = \left(1 + \frac{2\rho'_1}{h}\right) \left(1 + \frac{2\rho'_2}{h}\right)$$

e, finalmente, a igualdade  $\rho_2 = \rho'_2$  entre os raios das circunferências exinscritas correspondentes (supondo, por hipótese, que  $\rho_1 = \rho'_1$ ).  $\square$

**Problema 2.2.3.** Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , com  $n \geq 3$ ,  $n$  circunferências que passam pelo ponto  $O$  e sejam, ainda,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  os outros pontos de intersecção entre as circunferências  $C_1$  e  $C_2$ ,  $C_2$  e  $C_3, \dots, C_{n-1}$  e  $C_n$ ,  $C_n$  e  $C_1$ , respectivamente (ver Figura 2.11). Seja  $B_1$  um ponto arbitrário da circunferência  $C_1$ , distinto de  $A_1$  e de  $O$ . Tracemos a reta secante  $B_1A_1$  que intersecta a circunferência  $C_2$  no ponto  $B_2$ ; em seguida, a secante  $B_2A_2$  que corta a circunferência  $C_3$  no ponto  $B_3$ <sup>7</sup>, e assim por diante. Demonstre que o ponto  $B_{n+1}$ , que se obtém, finalmente, na circunferência  $C_1$ , coincide com o ponto  $B_1$ .

<sup>7</sup>Se, eventualmente, o ponto  $B_2$  coincidir com  $A_2$ , traçaremos pelo ponto  $A_2$  a tangente à circunferência  $C_2$ .

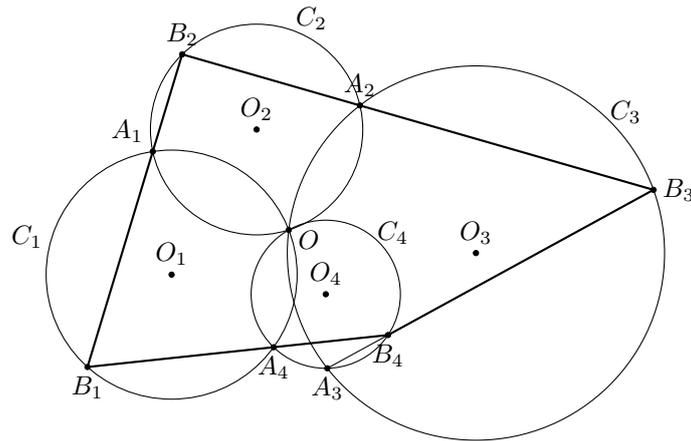


Figura 2.11: Circunferências  $C_1, \dots, C_n$ , com  $n \geq 3$ , passando por um mesmo ponto

Antes, porém, da demonstração do problema acima, justifiquemos o seguinte lema.

**Lema 2.2.1.** *Se  $O_1$  e  $O_2$  são os centros de duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$  que se intersectam em um ponto  $O$  e se  $B_1B_2$  é a reta secante que passa pelo outro ponto  $A_1$  de intersecção destas circunferências (ver Figura 2.12), então os ângulos  $\widehat{O_1OO_2}$  e  $\widehat{B_1OB_2}$  são congruentes.*

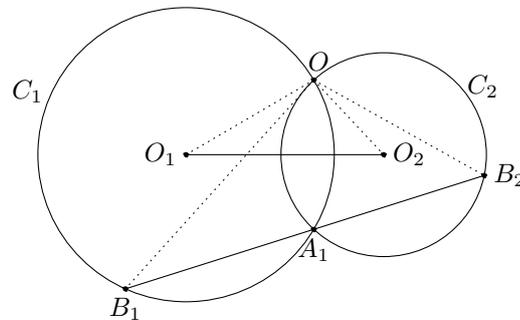


Figura 2.12: Circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , auxiliares na prova do Lema 2.2.1

*Demonstração.* Começemos por ver que o ângulo  $\widehat{B_1OB_2}$ , por ser ângulo inscrito na circunferência  $C_1$ , tem medida igual à metade da medida do ângulo central do arco que ele subentende (neste caso, é igual à metade da medida de  $\widehat{OO_1A_1}$ ). Por outro lado, é fácil ver que  $\widehat{OO_1O_2} = \frac{\widehat{OO_1A_1}}{2}$ , pois os triângulos (como também é fácil de observar)  $OO_1O_2$  e  $A_1O_1O_2$  são congruentes. Por raciocínio análogo, mostra-se que também são congruentes os ângulos  $\widehat{OO_2O_1}$  e  $\widehat{B_1B_2O}$ , pelo que concluímos que os ângulos  $\widehat{O_1OO_2}$  e  $\widehat{B_1OB_2}$  são congruentes. ■

Procedamos, agora, à demonstração do Problema 2.2.3.

*Solução.* Provemos a proposição para o caso inicial  $n = 3$ , conservando as notações estabelecidas no problema em questão. Assim, para mostrar que os pontos  $B_4$  e  $B_1$  coincidem, isto é, que a reta secante  $B_3A_3$  passa por  $B_1$ , é suficiente provar que o ângulo  $\widehat{B_1A_3B_3}$  é um ângulo raso, ou ainda, que o “quadrilátero  $OB_1A_3B_3$ ” é um triângulo, de vértices  $O$ ,  $B_1$  e  $B_3$  (ver Figura 2.13).

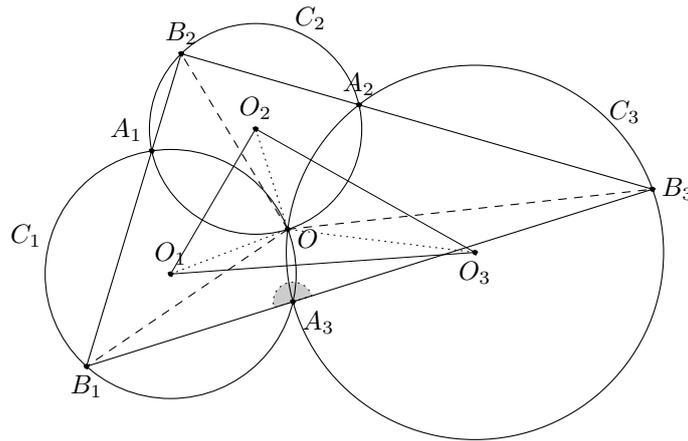


Figura 2.13: “Quadrilátero  $OB_1A_3B_3$ ”

Pelo lema demonstrado acima, temos que os triângulos  $O_1OO_2$  e  $B_1OB_2$  são semelhantes, assim como o são os triângulos  $O_2OO_3$  e  $B_2OB_3$ , o que significa que os ângulos  $\widehat{O_1OO_3}$  e  $\widehat{B_1OB_3}$  são congruentes. Além disso, como também são congruentes os ângulos  $\widehat{OB_1A_3}$  e  $\widehat{OO_1O_3}$ , bem como têm a mesma medida os ângulos  $\widehat{OO_3O_1}$  e  $\widehat{OB_3A_3}$ , temos que, relativamente ao “quadrilátero  $OB_1A_3B_3$ ”,

$$\begin{aligned}\widehat{B_1} + \widehat{O} + \widehat{B_3} + \widehat{A_3} &= 360^\circ \\ 180^\circ + \widehat{A_3} &= 360^\circ \\ \widehat{A_3} &= 180^\circ,\end{aligned}$$

isto é, os pontos  $B_1$ ,  $A_3$  e  $B_3$  são colineares. Então, se a reta  $B_3A_3$ , secante às circunferências  $C_1$  e  $C_3$ , intersecta  $C_1$  em um ponto  $B_4$ , deve-se ter que  $B_4 = B_1$ , pois, do contrário, esta reta teria três pontos em comum com a circunferência  $C_1$ , já que os pontos  $B_1$  e  $A_3$  pertencem a ela.

Finalmente, supondo verdadeira a proposição para o caso de se ter  $n - 1$  circunferências quaisquer, consideremos  $n$  circunferências  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ . Agora, traçando-se a secante que une o ponto  $B_{n-1}$  e o ponto de intersecção das circunferências

$C_{n-1}$  e  $C_1$ , com base na hipótese de indução, ter-se-á que os pontos  $B_1$  e  $B_{n-1}$  são coincidentes. Neste caso, recaímos na proposição para o caso  $n = 3$  (sendo  $C_1$ ,  $C_{n-1}$  e  $C_n$  as circunferências em questão), que já provamos ser verdadeira.

Portanto, a proposição encontra-se demonstrada para todo natural  $n \geq 3$ .  $\square$

## 2.3 Construções geométricas por indução

O método de indução matemática também pode ser aplicado à solução de problemas de construção geométrica, desde que neles figure um número inteiro positivo  $n$  (como já vimos ser o caso quando se está a tratar da construção de polígonos quaisquer de  $n$  lados).

A seguir, travaremos contato com três exemplos deste gênero.

**Problema 2.3.1.** Em um plano se tomam  $2n + 1$  pontos. Construa, usando o método de indução matemática, um polígono de  $2n + 1$  lados de tal modo que os pontos considerados sejam os pontos médios dos lados deste polígono.

*Solução.* O menor polígono para o qual faz sentido a afirmação acima é o triângulo. Então, se  $n = 1$ , o problema consiste em construir um triângulo a partir dos pontos médios de seus lados. Mas isto pode facilmente ser resolvido, bastando para tal se traçar, para cada um dos três pontos dados, a paralela à reta que passa pelos outros dois pontos (o caso de congruência de triângulos *ângulo-lado-ângulo* nos permitirá concluir que os pontos de intersecção entre estas retas serão vértices de um triângulo cujos pontos médios de seus lados são os pontos dados inicialmente).

Suponhamos, agora, que é possível (isto é, que sabemos) construir um polígono de  $2n - 1$  lados a partir dos pontos médios de seus lados. Assim, consideremos  $2n + 1$  pontos quaisquer no plano,  $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}, A_{2n+1}$ , pontos médios dos lados de um (certo) polígono de  $2n + 1$  lados,  $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ .

Consideremos o quadrilátero  $X_1X_{2n-1}X_{2n}X_{2n+1}$  (ver Figura 2.14). Os pontos  $A_{2n-1}$ ,  $A_{2n}$  e  $A_{2n+1}$  são os pontos médios de seus três lados  $X_{2n-1}X_{2n}$ ,  $X_{2n}X_{2n+1}$  e  $X_{2n+1}X_1$ . Seja  $A$  o ponto médio do quarto lado. Assim, tem-se que o quadrilátero  $A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A$  é um paralelogramo (para a prova deste fato, basta que se tracem as retas  $X_1X_{2n}$  e  $X_{2n-1}X_{2n+1}$  e se considerem os triângulos  $X_1X_{2n-1}X_{2n}$  e  $X_1X_{2n-1}X_{2n}$ , de um lado, e os triângulos  $X_{2n-1}X_{2n}X_{2n+1}$  e  $X_1X_{2n-1}X_{2n+1}$ , de outro). Ainda, posto que

conhecemos (pois os tomamos *a priori*) os pontos  $A_{2n-1}$ ,  $A_{2n}$  e  $A_{2n+1}$ , não é tarefa difícil construir o vértice  $A$  do paralelogramo. Além disso, os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_{2n-2}, A$  são os pontos médios dos lados do polígono de  $2n - 1$  lados  $X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}$ , o qual sabemos construir em virtude da hipótese de indução.

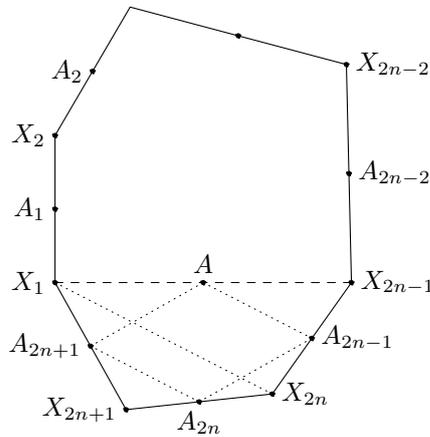


Figura 2.14: Quadrilátero  $X_1X_{2n-1}X_{2n}X_{2n+1}$

Finalmente, para concluirmos a demonstração, basta que se construam os segmentos  $X_1X_{2n+1}$  e  $X_{2n-1}X_{2n}$  (a partir dos pontos  $X_1$  e  $X_{2n-1}$ , que já conhecemos) de maneira a que os pontos  $A_{2n+1}$  e  $A_{2n-1}$  (também conhecidos) sejam seus pontos médios (não é difícil constatar que o traçado destes segmentos garante que o segmento de extremos  $X_{2n+1}$  e  $X_{2n}$  tem como ponto médio o ponto  $A_{2n}$ ).  $\square$

**Problema 2.3.2.** Tomam-se  $n$  pontos no plano (três a três não-colineares). Construa o polígono de  $n$  lados tal que seus lados sejam as bases dos triângulos isósceles cujos vértices são os  $n$  pontos dados e cujos ângulos nestes vértices são iguais a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ <sup>8</sup>, com  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 360^\circ$ .

*Solução.* Convencionaremos que, se algum dos ângulos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ( $\alpha_i$ , por exemplo) for maior do que  $180^\circ$ , o triângulo isósceles correspondente a este ângulo será considerado como estando dirigido para o lado interior do polígono a ser construído (e, neste caso, o ângulo no vértice deste triângulo será igual a  $360^\circ - \alpha_i$ ). Dividiremos a prova em duas partes.

**1ª Parte.** Analisemos o caso inicial  $n = 3$ . No intuito de auxiliar o raciocínio e guiar nossos argumentos, suporemos o problema resolvido, isto é, admitiremos conhecidos

<sup>8</sup>O problema anterior é um caso particular deste, quando se tomam  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 180^\circ$ .

os vértices  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  do triângulo buscado, cujos lados são bases dos triângulos isósceles de vértices nos pontos considerados  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , nos quais os ângulos são conhecidos e iguais a  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , respectivamente (ver Figura 2.15).

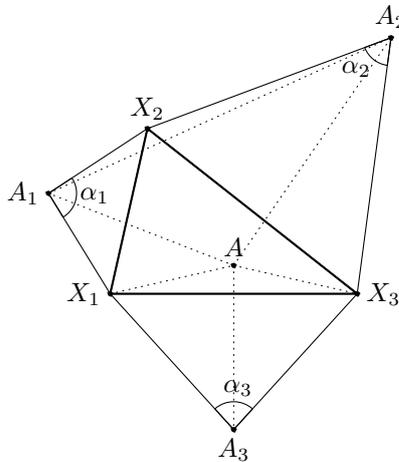


Figura 2.15: Triângulo  $X_1X_2X_3$ , do caso  $n = 3$ , base da indução

Por efeito da rotação<sup>9</sup> do plano de ângulo  $\alpha_1$  em torno do ponto  $A_1$ , o vértice  $X_1$  se transforma no vértice  $X_2$ . Já em razão da rotação do plano de ângulo  $\alpha_2$  em torno do ponto  $A_2$ , o vértice  $X_2$  é levado em  $X_3$ . Além disso, sabemos que ambas as rotações realizadas simultaneamente equivalem a uma única rotação de ângulo  $\alpha_1 + \alpha_2$ , em torno do ponto  $A$ , vértice do triângulo  $A_1AA_2$ , em que se tem  $\widehat{A_2A_1A} = \frac{\alpha_1}{2}$  e  $\widehat{A_1A_2A} = \frac{\alpha_2}{2}$ <sup>10</sup>.

O vértice  $X_1$  se transforma no vértice  $X_3$  em virtude desta rotação resultante, de ângulo  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Portanto, o vértice  $X_3$  é levado em  $X_1$  por efeito da rotação de ângulo  $-(\alpha_1 + \alpha_2)$  ou, o que é o mesmo, por efeito da rotação de ângulo  $360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ <sup>11</sup>, em

<sup>9</sup>Dado um ângulo de medida  $\alpha$ , a *rotação de centro  $O$  e ângulo (amplitude)  $\alpha$*  é a transformação (função) no plano  $\Pi$ ,  $R_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$ , que a cada ponto  $A \in \Pi$  associa o ponto  $R_{O,\alpha}(A) = A' \in \Pi$  de forma tal a que se tenha  $OA' = OA$ ,  $\widehat{AOA'} = \alpha$  e o sentido de  $A$  para  $A'$  (ao redor de  $O$ ) seja o anti-horário (para maiores detalhes, consultar [14]).

<sup>10</sup>Isto está baseado no seguinte resultado, demonstrado, por exemplo, em [13]):

**Proposição 2.3.1** (Composição de rotações). *Sejam  $R_{A,\alpha}$  e  $R_{B,\beta}$  rotações de centros em  $A$  e  $B$  e amplitudes (ou ângulos)  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. O ponto  $C$  tal que  $\widehat{BAC} = -\frac{\alpha}{2}$  e  $\widehat{ABC} = \frac{\beta}{2}$  é o centro da rotação composta das duas primeiras, de amplitude  $\alpha + \beta$ , isto é,*

$$R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha} = R_{C,\alpha+\beta},$$

em notação funcional.

<sup>11</sup>Para todo  $k$  positivo, as rotações de ângulos  $\alpha$  e  $\alpha + 360^\circ \cdot k$  são idênticas. Em particular, a rotação de ângulo  $-\alpha$ , com  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , é igual à rotação de ângulo  $360^\circ - \alpha$ .

torno do ponto  $A$ , o que, por conseguinte, nos permite concluir que o triângulo  $AX_1X_3$  é isósceles de base  $X_1X_3$  e de ângulo  $360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$  no vértice  $A$  (ou de ângulo  $\alpha_1 + \alpha_2$  em  $A$ , no caso de ser  $\alpha_1 + \alpha_2 < 180^\circ$ ).

Por estarmos supondo  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 360^\circ$ , temos que os pontos  $A$  e  $A_3$  não são coincidentes e, portanto, podemos construir, a partir deles, o lado  $X_1X_3$ . Para tanto, basta que se construam, em ambos os lados do segmento  $AA_3$  e com vértices em cada um dos seus extremos, ângulos de medidas  $\frac{360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ , em  $A$ , e  $\frac{\alpha_3}{2}$ , em  $A_3$ . Neste caso, os lados dos ângulos (em cada um dos lados do segmento  $AA_3$ ) se cortarão nos vértices  $X_1$  e  $X_3$  do triângulo procurado (em nossa auxiliar Figura 2.15, está sugerido que  $\alpha_1 + \alpha_2$  é ângulo obtuso e, em sendo assim, dever-se-ia construir no segmento  $AA_3$  e a partir de  $A$ , o ângulo de medida  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ ).

Por fim, determinar o vértice  $X_2$  é tarefa simples: a partir de qualquer dos pontos  $A_1$  e  $A_2$ , construimos o ângulo correspondente em um deles,  $\alpha_1$  em  $A_1$ , por exemplo, e marcamos a interseção do círculo de centro em  $A_1$  e raio  $\overline{A_1X_1}$  com o lado construído do ângulo  $\alpha_1$ .

**2ª Parte.** Nossa hipótese de indução será a suposição de que sabemos construir um polígono de  $n$  lados a partir dos vértices dos triângulos isósceles cujas bases são seus lados e que têm predeterminados ângulos nestes vértices. Queremos, então, construir um polígono de  $n + 1$  lados a partir dos vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$  dos triângulos isósceles que “descansam” em seus lados e que têm ângulos respectivamente iguais a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  nos vértices em questão.

Como fizemos na 1ª parte, iremos supor a construção do polígono que desejamos obter já realizada. Seja, então,  $X_1X_2 \dots X_nX_{n+1}$  o polígono de  $n + 1$  lados procurado (ver Figura 2.16). Consideremos, a seguir, o triângulo  $X_1X_nX_{n+1}$ . A partir dos vértices  $A_n$  e  $A_{n+1}$  dos triângulos isósceles  $X_nA_nX_{n+1}$  e  $X_{n+1}A_{n+1}X_1$  (cujas bases são os lados  $X_nX_{n+1}$  e  $X_{n+1}X_1$ ), podemos determinar (raciocinando como fizemos na prova do caso base da indução) o vértice  $A$  do triângulo isósceles  $X_1AX_n$ , que “repousa” na diagonal  $X_1X_n$ , cujo ângulo em  $A$  é igual a  $360^\circ - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$ .

Isto posto, nosso problema está reduzido ao problema da construção do polígono de  $n$  lados  $X_1X_2 \dots X_n$  a partir dos vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n, A$  dos triângulos isósceles que têm como bases seus lados e cujos ângulos nos referidos vértices são iguais a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 360^\circ - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$ .

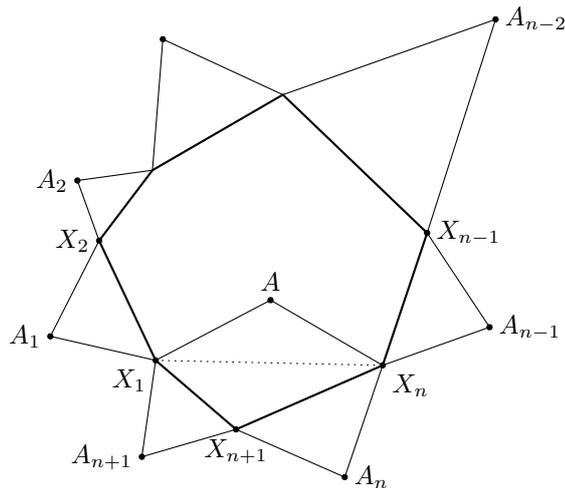


Figura 2.16: Polígono de  $n$  lados  $X_1X_2 \dots X_n$  a partir dos vértices  $A_1, \dots, A_n, A$

Ademais, em virtude de nossa hipótese indutiva, sabemos como construir este polígono de  $n$  lados. E, uma vez feito isso, o vértice  $X_{n+1}$  se torna fácil de ser determinado, sendo obtido, por exemplo, por meio da intersecção entre a circunferência de centro  $A_{n+1}$  e raio  $\overline{X_1A_{n+1}}$  e a semirreta de origem em  $A_{n+1}$  e que forma com  $X_1A_{n+1}$  um ângulo de medida  $\alpha_{n+1}$ .

□

**Problema 2.3.3.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas paralelas. Divida o segmento  $AB$  da reta  $r_1$  em  $n$  partes iguais, empregando apenas e tão somente a régua.

*Solução.* Mostremos, inicialmente, como determinar o ponto médio do segmento  $AB$ , isto é, analisemos o caso  $n = 2$ . Seja  $X$  um ponto arbitrário do plano, não pertencente a cada uma das retas  $r_1$  e  $r_2$ , tal que  $C$  e  $D$  são os pontos de intersecção das retas  $AX$  e  $BX$  com a reta  $r_2$  (ver Figura 2.17). Ainda, sejam  $T_2$  o ponto de intersecção das retas  $AD$

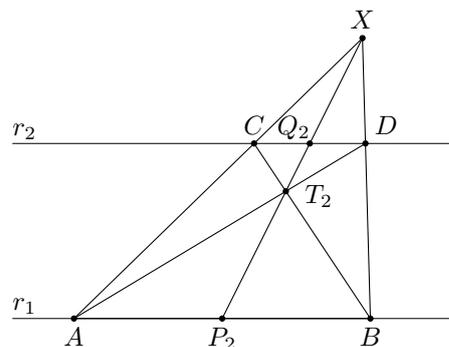


Figura 2.17: Retas paralelas  $r_1$  e  $r_2$

e  $BC$  e  $P_2$  o ponto de intersecção das retas  $XT_2$  e  $r_1$ . Demonstramos que  $P_2$  é o ponto procurado, isto é, que  $\overline{AP_2} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ .

Sendo  $Q_2$  o ponto de intersecção das retas  $XT_2$  e  $r_2$ , não é difícil constatar que são semelhantes os seguintes pares de triângulos:  $T_2P_2B$  e  $T_2Q_2C$ ,  $ABT_2$  e  $DCT_2$ ,  $SAP_2$  e  $XCQ_2$ ,  $XAB$  e  $XCD$ . E, da semelhança verificada acima, tem-se as proporções

$$\frac{\overline{P_2B}}{\overline{Q_2C}} = \frac{\overline{T_2B}}{\overline{T_2C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{P_2A}}{\overline{Q_2C}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}},$$

o que nos dá, como consequência,

$$\frac{\overline{P_2B}}{\overline{Q_2C}} = \frac{\overline{P_2A}}{\overline{Q_2C}},$$

permitindo-nos concluir que  $\overline{P_2A} = \overline{P_2B}$ , ou seja, que  $\overline{AP_2} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ . Isto demonstra a proposição para  $n = 2$ .

Suponhamos, agora, que sabemos construir, utilizando apenas a régua, o ponto  $P_n$  no segmento  $AB$  tal que  $\overline{AP_n} = \frac{1}{n}\overline{AB}$  (como consequência de supormos saber dividir  $AB$  em  $n$  partes iguais). Devemos mostrar que saberemos construir o ponto  $P_{n+1} \in AB$  tal que  $\overline{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overline{AB}$ . Para isso, consideremos um ponto arbitrário  $X$ , não pertencente à reta  $r_1$  nem à reta  $r_2$ . Assim, sejam  $T_n$  e  $Q_n$  os pontos de intersecção das retas  $AD$  e  $r_2$ , respectivamente, com a reta  $XP_n$  (ver Figura 2.18).

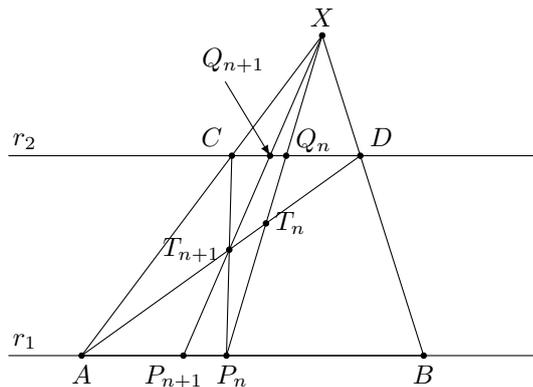


Figura 2.18:  $T_n$  e  $Q_n$ , intersecções das retas  $AD$  e  $r_2$  com a reta  $XP_n$

A reta que passa pelos pontos  $X$  e  $T_{n+1}$  (ponto de intersecção das retas  $AD$  e  $CP_n$ ) “corta” as retas  $r_1$  e  $r_2$  nos pontos  $P_{n+1}$  e  $Q_{n+1}$ , respectivamente. Demonstramos que  $P_{n+1}$  é o ponto buscado.

Novamente, faremos uso do utilíssimo conceito de semelhança de triângulos. Desse modo, da semelhança dos triângulos  $CQ_{n+1}T_{n+1}$  e  $P_nP_{n+1}T_{n+1}$  e dos triângulos

$CT_{n+1}D$  e  $P_nT_{n+1}A$  (em ambos os pares, de fácil verificação), temos que

$$\frac{\overline{P_{n+1}P_n}}{\overline{CQ_{n+1}}} = \frac{\overline{P_nT_{n+1}}}{\overline{CT_{n+1}}} = \frac{\overline{AP_n}}{\overline{CD}} \quad (2.3.1)$$

e, da semelhança dos triângulos  $XAP_{n+1}$  e  $XCCQ_{n+1}$  e dos triângulos  $XAB$  e  $XCD$ , temos

$$\frac{\overline{AP_{n+1}}}{\overline{CQ_{n+1}}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}. \quad (2.3.2)$$

As igualdades (2.3.1) e (2.3.2) nos dizem que

$$\frac{\overline{P_{n+1}P_n}}{\overline{AP_n}} = \frac{\overline{CQ_{n+1}}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP_{n+1}}}{\overline{AB}},$$

donde podemos, finalmente, obter a igualdade

$$\frac{\overline{P_{n+1}P_n}}{\overline{AP_{n+1}}} = \frac{\overline{AP_n}}{\overline{AB}}.$$

Mas como  $\overline{P_{n+1}P_n} = \overline{AP_n} - \overline{AP_{n+1}}$  e  $\overline{AP_n} = \frac{1}{n}\overline{AB}$  temos que

$$\frac{\frac{1}{n}\overline{AB} - \overline{AP_{n+1}}}{\overline{AP_{n+1}}} = \frac{\frac{1}{n}\overline{AB}}{\overline{AB}} \implies \frac{1}{n}\overline{AB} - \overline{AP_{n+1}} = \frac{1}{n}\overline{AP_{n+1}},$$

isto é,  $\frac{\overline{AB}}{n} = \frac{(n+1)\overline{AP_{n+1}}}{n}$ , pelo que concluímos em definitivo que

$$\overline{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overline{AB}.$$

(Com isso, mostramos que é possível determinar, qualquer que seja o natural  $n \geq 2$ , em um dado segmento de reta  $AB$ , um ponto  $P_n$  tal que  $\overline{AP_n} = \frac{1}{n}\overline{AB}$ .)

Portanto, para provarmos que é possível dividir o segmento  $AB$  da reta  $r_1$  em  $n+1$  partes iguais entre si, ainda devemos determinar os pontos  $P'_{n+1}, P''_{n+1}, \dots$  tais que

$$\overline{P_{n+1}P'_{n+1}} = \frac{1}{n}\overline{P_{n+1}B}, \quad \overline{P'_{n+1}P''_{n+1}} = \frac{1}{n-1}\overline{P'_{n+1}B}, \dots,$$

o que pode ser feito com base na demonstração realizada acima.  $\square$

*Observação 2.3.1.* Outra maneira de se obter os pontos  $P'_{n+1}, P''_{n+1}, \dots$  mencionados acima (e, por conseguinte, de se provar a possibilidade da divisão de  $AB$  em  $n+1$  “pedaços” iguais) está descrita abaixo.

Traçamos, inicialmente, a partir do ponto  $X$  uma reta  $r_3$  paralela à reta  $r_1$ . Para fazê-lo usando apenas a régua (sem compasso ou qualquer outro instrumento de desenho), baseamo-nos na Figura 2.17 (que trata da divisão de um segmento  $AB$  em

duas partes iguais entre si), procedendo no sentido contrário<sup>12</sup> ao que seguimos para a construção do ponto médio de  $AB$  (é fácil ver, raciocinando por absurdo, que o algoritmo inverso daquele que nos permitiu obter o ponto médio de  $AB$  a partir do paralelismo entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  nos conduz à construção correta da reta paralela à reta  $r_1$ , supondo conhecido o ponto médio do segmento  $AB$ ).

A seguir, seja  $K_1$  o ponto de intersecção entre as retas  $P_{n+1}C$  e  $r_3$  e seja  $P'_{n+1}$  o ponto de intersecção entre as retas  $K_1Q_{n+1}$  e  $r_1$  (vide Figura 2.19).

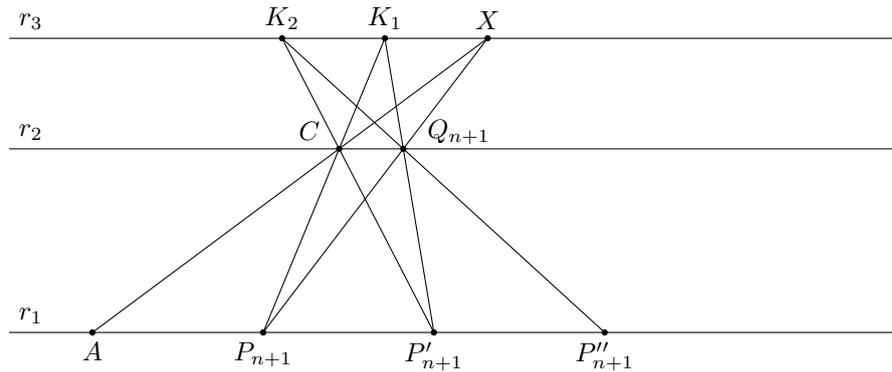


Figura 2.19: Determinação dos pontos  $P'_{n+1}, P''_{n+1}, \dots$

Sendo assim, tem-se que

$$\overline{P_{n+1}P'_{n+1}} = \overline{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \overline{AB}.$$

De fato, sejam  $S_1$  e  $S_2$  as áreas dos triângulos semelhantes  $\triangle AX P_{n+1}$  e  $\triangle CX Q_{n+1}$ , respectivamente, e  $S'_1$  e  $S'_2$  as áreas dos triângulos semelhantes  $\triangle P_{n+1} K_1 P'_{n+1}$  e  $\triangle CK_1 Q_{n+1}$ , respectivamente. Sejam, ainda,  $h$  a distância entre as retas  $r_2$  e  $r_3$  e  $H$ , a distância entre  $r_1$  e  $r_3$ . Então, tem-se que

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{S'_1}{S'_2}$$

e, como  $S_2 = S'_2$  (pois têm mesma base e alturas iguais), tem-se que  $S_1 = S'_1$ , pelo que concluímos que  $\overline{P_{n+1}P'_{n+1}} = \overline{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \overline{AB}$  (já que os triângulos com estas áreas têm alturas iguais), conforme queríamos mostrar.

<sup>12</sup>O sentido contrário acima referido é o que segue: traçamos a reta  $BX$  e, tomando um ponto  $T$  arbitrário nesta, traçamos a reta que passa pelos pontos  $P_2$  e  $T$ ; a seguir, traçamos a reta  $AX$  e a reta que passa pelos pontos  $B$  e o ponto de intersecção entre a reta  $AX$  e  $P_2T$ . O ponto de intersecção entre esta última reta construída e a que passa pelos pontos  $A$  e  $T$  pertence à reta paralela à  $r_1$ , passando pelo ponto  $X$ .

### 3 Considerações

O método de indução matemática (que, a propósito, é um método *dedutivo* de demonstração<sup>1</sup>, uma vez que nos permite deduzir, a partir do caso base da indução e da hipótese indutiva, a veracidade de uma dada proposição para todos os números naturais  $n$ ) constitui-se, por sua própria essência, em uma poderosa ferramenta (em alguns casos, a única) para a demonstração de teoremas de *natureza aritmética* ou, dito de modo preciso, de teoremas concernentes à propriedades gerais dos números naturais.

Entretanto, não obstante o caráter intrinsecamente aritmético do método de indução matemática, o objetivo maior destas notas foi o de estudar e exhibir algumas de suas aplicações em problemas oriundos da Geometria, ainda que, em alguns deles, a vantagem (e, mesmo, a necessidade) de sua utilização não seja evidente. Para tanto, estas aplicações foram extraídas de problemas ligados à questões de cálculo (como na determinação explícita de um comprimento, de um ângulo ou de uma área, por exemplo), à demonstração de teoremas (cujos enunciados baseiam-se em observações particulares de uma suposta condição geral) e à construções geométricas (desde que, naturalmente, neles conste um número inteiro positivo  $n$ ).

Além disso, alguns destes problemas geométricos aos quais empregamos o método de indução matemática na busca de sua solução já trazem consigo interesse próprio, isto é, requerem, para seu entendimento e conseqüente tomada de decisão (acerca do caminho a seguir para encontrar a solução), certa dose de criatividade e engenhosidade. E, nestes casos, é somente após essa reflexão sobre que conceitos estão associados ao (e podem ser úteis na tentativa de se resolver o) problema que a aplicação do método de indução torna-se necessária e eficiente. Outra observação a ser sublinhada é a de que, como corolário de um resultado provado por indução matemática, obtivemos (embora isto não tenha sido o objetivo deste trabalho) um modo alternativo de expressar o notável número  $\pi$  (como o limite de um certo quociente).

Este trabalho, de modo algum, tem a pretensão de esgotar o assunto (inclusive por isto constituir-se em tarefa de difícil consecução!). As principais referências utilizadas

---

<sup>1</sup>Ver epílogo (do matemático russo *Y. Gástev*) contido na referência [3], para maiores esclarecimentos.

para sua concretização, a saber, os estimulantes livretos *Método de Inducción Matemática* e, sobretudo, *Inducción en la Geometría*, da série *Lecciones populares de Matemáticas*, publicados pela Editora MIR<sup>2</sup>, dão-nos idéia do quanto há para ser conhecido e estudado sobre as aplicações da indução matemática à Geometria, além daquelas que, neste trabalho, foram expostas.

---

<sup>2</sup>Editora russa de livros técnicos e científicos, com traduções para vários idiomas (entre eles, o português e o espanhol) e que permanece ainda hoje com seu trabalho de divulgação e difusão de Ciência e Cultura, agora como empresa estatal da Federação Russa.

## Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T. M. **Calculus**, Vol. 1. Tradução de Griselda P. Xufré. Barcelona: Editorial Reverté S. A., 1965.
- [2] GOLOVINÁ, L. I.; YAGLOM, I. M. **Inducción en la Geometría**. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Editorial MIR, 1976. (Série *Lecciones populares de matemáticas*.)
- [3] SOMINSKI, I. S. **Método de Inducción Matemática**. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Editorial MIR, 1976. (Série *Lecciones populares de matemáticas*.)
- [4] FETISSOV, A. I. **Acerca de la Demostración en Geometría**. Tradução de Antonio M. García. Moscou: Editorial MIR, 1980. (Série *Lecciones populares de matemáticas*.)
- [5] FOMIN, D.; ITENBERG, I.; GENKIN, S. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010. (Coleção *Círculos Matemáticos*.)
- [6] LIMA, E. L., et al. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção *do Professor de Matemática*.)
- [7] ————. **Análise Real: Funções de Uma Variável**, Vol.1. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008. (Coleção *Matemática Universitária*.)
- [8] HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção *Textos Universitários*.)
- [9] ————. **Curso de Álgebra**, Vol. 1. 4ª edição. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010. (Coleção *Matemática Universitária*.)
- [10] SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. (Coleção *Matemática Universitária*.)
- [11] ————. **Introdução à Análise Combinatória**. São Paulo: Editora da Unicamp, 1998.

- [12] PÓLYA, G. **Matemáticas y Razonamiento Plausible**. Madrid: Editorial Tecnos S. A., 1966.
- [13] YAGLOM, I. M. **Geometric Transformations I**. New York: Random House, 1962.
- [14] WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. (Coleção *do Professor de Matemática*.)
- [15] OLIVEIRA, K. I.; FERNÁNDEZ, A. J. **Iniciação à Matemática**: Um Curso com Problemas e Soluções. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção *Olimpíadas de Matemática*.)
- [16] RIBENBOIM, P. **Números Primos**: Velhos Mistérios e Novos Recordes. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção *Matemática Universitária*.)
- [17] IEZZI, G.; DOMINGUES, H. H. **Álgebra Moderna**. 4ª edição. São Paulo: Editora Atual, 2006.
- [18] CARVALHO, N. T.; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos da Matemática I**. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2006.
- [19] LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESTERGOMBI, K. **Matemática Discreta**. Tradução: Ruy José de Queiroz. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção *Textos Universitários*.)
- [20] FILHO, D. C. de M. **Um Convite à Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção *do Professor de Matemática*.)
- [21] \_\_\_\_\_. **Manual de Redação Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. (Coleção *do Professor de Matemática*.)

## A Demonstrações selecionadas

Este apêndice está dedicado à justificativa de dois resultados utilizados ao longo do texto e que serviram de auxílio para a demonstração de uma dada proposição principal.

### A.1 Expressão da duplicação do lado de um polígono regular de $2^n$ lados

No Problema 2.1.1 nos referimos à chamada fórmula de duplicação do lado de um polígono regular de  $2^n$  lados.

Procedamos à sua dedução.

*Demonstração.* Sejam  $A_1A_2\dots A_{2^n}$  um polígono regular de  $2^n$  lados inscrito em uma circunferência de raio  $R$  e  $a_{2^n}$  a medida de seu lado. Então, é fácil ver que as bissetrizes dos ângulos centrais deste polígono intersectam a circunferência de raio  $R$  que o circunscreve nos pontos  $B_1, B_2, \dots, B_{2^n}$  tais que  $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1A_2} = \overline{A_2B_2} = \overline{B_2A_3} = \dots = \overline{A_{2^n}B_{2^n}} = a_{2^{n+1}}$ , isto é, a partir dessas bissetrizes obtemos um novo polígono regular com o dobro da quantidade de lados do anterior (vide Figura A.1).

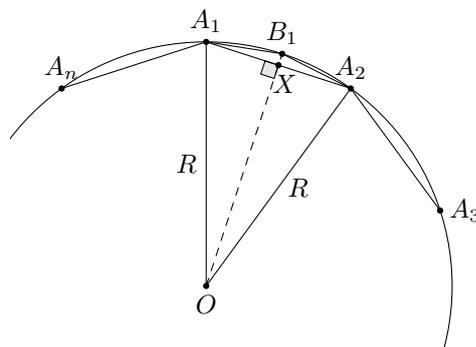


Figura A.1: Polígono regular  $A_1A_2\dots A_{2^n}$ , inscrito em uma circunferência de raio  $R$

Provemos, então, que

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}.$$

Da Figura A.1, temos que  $\overline{A_1B_1} = a_{2^{n+1}}$ ,  $\overline{A_1X} = a_{2^n}$  e, do fato de que são retângulos (em  $X$ ) os triângulos  $A_1XB_1$  e  $A_1XO$ , temos

$$\begin{aligned} a_{2^{n+1}}^2 &= \frac{a_{2^n}^2}{4} + \left( R - \sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}} \right)^2 \\ &= \frac{a_{2^n}^2}{4} + R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_{2^n}^2} + R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4} \\ &= 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}, \end{aligned}$$

donde concluímos a igualdade  $a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}$ . ■

## A.2 Expressão da tangente do arco metade em função dos lados do triângulo

As fórmulas (2.2.1) do Problema 2.2.2 podem ser demonstradas com base nas igualdades

$$\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

pois, desse modo, teremos que  $\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ .

Procedamos, portanto, à justificativa das duas igualdades.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, com  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ , e  $p = \frac{a+b+c}{2}$  seu semiperímetro. Seja  $X \in BC$  um ponto tal que a semirreta  $AX$  é a bissetriz interna do ângulo  $\hat{A} = \widehat{BAC}$ . Desse modo, vale a igualdade<sup>1</sup>

$$\overline{AX} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}. \quad (\text{A.2.1})$$

Assim, sendo  $S_{ABC}$ ,  $S_{ABX}$  e  $S_{AXC}$  as áreas dos triângulos  $ABC$ ,  $ABX$  e  $AXC$ , usando a fórmula de Herão e o fato de que, em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto

<sup>1</sup>Que, por sua vez, pode ser provada com base no fato de que a bissetriz interna de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos proporcionais aos demais lados (com respeito a cada segmento) e na Lei dos Cossenos (aplicada em qualquer dos triângulos em que fica dividido, por essa bissetriz, o triângulo original).

de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles determinam, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \frac{b \cdot \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} + c \cdot \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{2} \\
 &= b \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} + c \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} \\
 &= (b+c) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} \\
 &= \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} \sqrt{bcp(p-a)},
 \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{bcp(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Agora, para mostrar a igualdade relativa ao cosseno, fazemos uso da relação fundamental da Trigonometria, a saber,  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ .

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cos}^2 \frac{\widehat{A}}{2} &= 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2} \\
 &= 1 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \\
 &= \frac{bc - (p-b)(p-c)}{bc} \\
 &= \frac{bc - (-p+a+c)(-p+a+b)}{bc} \\
 &= \frac{(p-a)(b+c-p+a)}{bc} \\
 &= \frac{(p-a)p}{bc}
 \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\operatorname{cos} \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

o que completa a demonstração. ■