UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALBERTO CÂNDIDO SOUSA ALENCAR

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ESTUDO DE FUNÇÕES

São Luís

2017

ALBERTO CÂNDIDO SOUSA ALENCAR

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ESTUDO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Valdiane Sales Araújo

São Luís

2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Alencar, Alberto Cândido Sousa

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ESTUDO DE FUNÇÕES / Alberto Cândido Sousa Alencar. - 2017

46 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Ensino da Matemática 2. Representações Semióticas 3. Funções. I. Araújo, Valdiane Sales. II. Título.

ALBERTO CÂNDIDO SOUSA ALENCAR

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ESTUDO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06/03/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof^{a}. Dr^{a} Valdiane Sales Araújo (Orientadora)
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Raimundo Luna Neres
Doutor em Matemática
Universidade CEUMA

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Agradecimento

À Deus.

À minha orientadora Profª. Drª. Valdiane Sales pelas sugestões, paciência, ensinamentos e disponibilidade.

Aos professores do PROFMAT, pela compreensão, pelas críticas, pelo incentivo e pela dedicação ao Programa.

À Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, pela iniciativa de criar e implantar este audacioso projeto, que tem por fim, a melhoria do ensino de matemática básica no Brasil.

À Universidade Federal do Maranhão-UFMA, por aceitar esta parceria para qualificar professores do Estado do Maranhão e estados vizinhos.

À Capes pelo suporte financeiro.

Aos colegas da turma PROFMAT-MA 2014, pelos momentos de aprendizagem e companheirismo. Em especial: Make Bruno e Sebastião Alves.

Resumo

Este trabalho versa sobre como a teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval pode auxiliar no aprendizado de funções. Mostra como o conteúdo de funções é abordado nos livros didáticos e como tem sido transmitido para os alunos. Mostra também a importância de ser adotada uma nova abordagem para tal assunto, de modo que seu aproveitamento esteja à altura de sua importância.

Palavras-chave: Ensino da Matemática. Representações Semióticas. Funções.

Abstract

In this work we tray to analyze functions in light of the semiotic Raymond Duval theory´s of. We show how content is presented to high school students. We also show the importance of adopting a different approach to this subject. A richer approach to symbols and signs for better learning.

Keywords: Mathematics Teaching. Semiotic Representations. Functions.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1 Introdução

É sabido que o rendimento escolar dos alunos no Brasil é bem abaixo do ideal, principalmente em matemática. Em nossa prática docente, nos deparamos com alunos que consideram a matemática a “pior” disciplina, isto é, aquela que eles sentem maior dificuldade de aprendizado. Uma das causas possíveis pode está na qualificação do professor, já que em nosso país, uma parte significativa dos profissionais da educação que ministram aula de matemática não são habilitados para tal. E sem a formação adequada, a metodologia aplicada em sala de aula não favorece o processo de ensino e aprendizagem, gerando dificuldades de aprendizagem, frustação e desapego com a disciplina.

O baixo desempenho nacional em matemática é uma das principais conclusões do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, na sigla em inglês), teste aplicado em 2015 pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O teste mostrou que mais de 70% dos alunos dos alunos brasileiros entre 15 e 16 anos não alcançam sequer o nível básico de proficiência em Matemática, isto é, são incapazes de resolver problemas simples envolvendo números. O escore médio do Brasil em Matemática foi de 377, enquanto a média da OCDE ficou em 490. Em uma comparação com outras 13 nações de características socioeconômicas semelhantes às brasileiras - filtro feito pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep), do Ministério da Educação (MEC) - o país só ganha da República Dominicana, que ficou com índice de 328.

É comum o aluno chegar ao ensino médio com lacunas em conteúdos básicos, desmotivados e com a idéia consolidada que matemática é “muito difícil”. É fácil perceber que para esse aluno o aprendizado está carente de significados. Continuar apresentando os conteúdos de forma previsível: definição + exemplos + atividades, só vai alimentar o desinteresse pela disciplina e, pior, pode comprometer a continuidade da permanência desse aluno na comunidade escolar.

Neste trabalho destacaremos a Teoria dos Registro de representações Semióticas de Raymond Duval como ferramenta para um melhor aprendizado de funções. A importância desse assunto não se limita apenas à matemática, pois a atuação de funções se faz presente também em outras ciências e em outros contextos. As funções oferecem condições propícias às aplicações, já que, como disse Ponte (1990),

> As funções são instrumentos por excelência para estudar problemas de variação. Uma dada grandeza pode variar no tempo, pode variar no espaço, pode variar segundo outras grandezas, e mesmo simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, pode desaparecer de todo, pode, em suma, obedecer às mais diversas leis ou constrangimentos . (PONTE, 1990, p. 57)

Apesar de ter o primeiro contato com o estudo de funções no último ano do ensino fundamental, é na 1ª série do ensino médio que o assunto é apresentado de forma bem mais detalhada e aprofundada. O conteúdo de funções é volumoso, com exceção das funções trigonométricas todas as outras são ministradas na série inícial do ensino médio, e se continuar sendo ministrado de forma mecânica, sem significados práticos e sem a participação do aluno, continuará com baixo aproveitamento.

Os alunos tem dificuldade para fazerem diferentes representações de um mesmo objeto matemático, e mais dificuldades ainda quando precisam mudar de representações, como passar da forma algébrica para a forma figural(gráfica). Nesse sentido, a teoria dos registros de representações semióticas pode auxiliar o aluno a perceber esses diferentes registros e a fazerem com segurança as conversões de um registro semiótico em outro.

2 Aspectos Históricos

Um dos temas matemáticos mais recorrentes do cotidiano é o de funções. É claro que o conhecimento sobre o tema, fora dos muros da escola, é empírico. Mas fica claro para o cidadão mediano que o preço da corrida de táxi é cobrado em função da distância percorrida, que o tempo gasto para se deslocar certa distância está em função da velocidade, etc. O estudo de funções analisa o comportamento da relação entre duas grandezas.

Hoje pode parecer simples, mas o conceito de função é consequência de uma evolução histórica, com a participação de vários povos e civilizações.

A origem do conceito de função é incerta, mas há evidências que tal conceito surgiu de forma intuitiva devido a necessidade de resolver problemas práticos onde havia interdependência entre duas grandezas distintas. Segundo Zuffi (2001),

> "[...] não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo]. Alguns deles consideram que os Babilônios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade [grifos do autor] (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a idéia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear." (ZUFFI, 2001, p. 128)

Segundo Costa(2004), no período de 20 séculos antes de Cristo até o século XIV, as relações funcionais eram, na sua maioria, descritas de maneira verbal ou por meio de relações númericas expressas por tabelas. A civilização babilônica construíram tabelas em argila onde para cada valor na primeira coluna existia um número correspondente na segunda. Como por exemplo, pode-se mencionar as tábuas de multiplicação, em que para cada número apresentado na primeira coluna, havia um número na segunda coluna que representava o resultado da multiplicação do número da primeira coluna por um valor fixo. Assim, nas tábuas babilônicas já aparecia uma representação de função em forma de tabelas sexagemais de quadrados e raízes quadradas, podendo ser entendidas como "funções tabuladas", isto há 2000 anos a. C. (Youschkevich, 1976, p. 97).

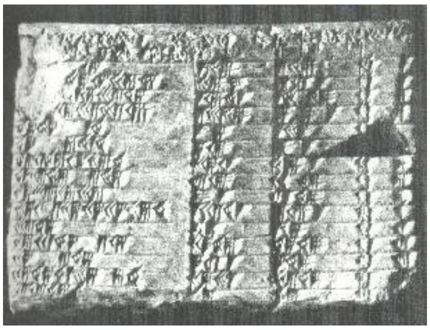


Figura 2.1: Plimpton: tábua matemática babilônica
Fonte: http: $//www.matematica.br/historia/babilonia.html$

Assim, passando da fase das primeiras noções sobre o conceito de função e chegando à Idade Moderna, o conceito de função apareceu mesmo pela primeira vez com Oresme (1323 - 1382) que descreveu graficamente a dependência entre a velocidade e o tempo usando linhas verticais e horizontais, para um corpo que se move com aceleração constante. A representação gráfica de funções, conhecida então como latitude de formas, continuou a ser um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu. Oresme chegou a sugerir uma extensão a três dimensões de sua "latitude de formas"em que uma função de duas variáveis independentes era representada como um volume formado de todas as ordenadas segundo uma regra dada, em pontos no plano de referência (Boyer, 1996, p. 56).

Para descrever fenômenos da natureza através da Matemática, Galileu Galilei (1564-1642) utilizou grandezas físicas que se inter relacionavam como uma maneira de modelar funções, de forma a ter uma variável que dependia da outra. Diferentemente de seus contemporâneos, seu interesse não era descobrir a causa desses fenômenos, mas descrevê-los algebricamente para que, de posse das condições iniciais, pudesse prever o comportamento de determinados acontecimentos mediante as equações(Boyer, 1996, p. 62).

A primeira vez que foi usado o termo "função"foi em 1673 com Leibniz, que também foi responsável pela introdução da terminologia de "variável"e "constante". O termo "função"só foi usado dentro de um contexto matemático pela primeira vez em 1718, com Bernoulli, através de um artigo que mostrava sua definição de função de uma variável como uma quantidade composta por uma quantidade variável e constante.

O conceito de função teve como precursor Euler (1707-1783), que também utilizou pela primeira vez o símbolo $f(x)$: "Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que seja determinada por aquela, chama-se função da dita variável".

Figura 2.2: Leonard Euler

Fonte: http: $//www.coladaweb.com/biografias/euller$

Foi Dirichlet (1805-1859) que em 1837 apresentou um conceito geral para função, considerada a definição "formal" de função moderna, onde função é um caso especial de uma relação. "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor y, então se diz que y é função da variável independente x". Isto está próximo do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas os conceitos de conjunto e de número real não tinham ainda sido estabelecidos (Boyer, 1996, p. 63).

Figura 2.3: Dirichlet

Fonte: http: $//www.coladaweb.com/biografias/dirichlet$

O matemático português Bento de Jesus Caraça (1901-1948) definiu assim função:

> "Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \to y$. A x chama-se variável independente e a y, variável dependente". (CARAÇA, 1951, p. 29)

Existem ainda, segundo Caraça, dois modos de definição de função. A primeira chama-se definição analítica, que representa uma lei matemática de um certo fenômeno. A segunda chama-se definição geométrica, que relaciona a imagem geométrica num sistema de referencial cartesiano.

3 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Neste capítulo iremos discorrer sobre os aspectos da fundamentação teórica desse trabalho. Na primeira seção faremos uma breve explanação a respeito de Semiótica. Na seção seguinte discorreremos sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval.

3.1 Semiótica

Um dos grandes precursores da semiótica foi o matemático americano Charles Peirce (2005), que em seu livro intitulado "Semiótica"dá a seguinte definição:

> "Semiótica é a teoria geral das representações, que leva em conta os signos sob todas as formas e manifestações que assumem (linguísticas ou não), enfatizando especialmente a propriedade de convertibilidade recíproca entre os sistemas significantes que as integram." (PEIRCE, 2005, p. 87)

Maria Lucia Santaella é uma das principais divulgadoras da semiótica e do pensamento de Charles Peirce no Brasil. A autora mostra a semiótica como "a ciência dos signos", porém chama atenção para o fato de que essa definição pode causar alguns equívocos ao interpretar os signos como signos do zodíaco, quando na verdade representa signo como linguagem.

Às vezes deixamos passar despercebido o fato da nossa língua materna não ser a única forma de comunicação e expressão que utilizamos. Santaella (2002) afirma que estamos cercados por "uma rede intrincada e plural de linguagens" e nos comunicamos por meio de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes, objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, por meio do olhar, do sentir e do apalpar. Logo a autora define semiótica como

> "[...] a ciência geral de todas as linguagens, a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e sentido" (SANTAELLA, 2002, p. 32).

3.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval é o autor da Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Sua teoria analisa a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Alguns questionamentos são feitos por Duval(2011) no início de sua teoria com o intuito de direcionar seus estudos: Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?

Com o objetivo de dar resposta a essas perguntas, o autor diz que não devemos nos limitar ao campo matemático nem à sua história.

> "É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização."(DUVAL, 2011, p. 11)

Assim, o autor apresenta duas questões com o objetivo de analisar as condições e os problemas de aprendizagem em matemática:

> "1. Quais os sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
> 2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia ...) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática?."(DUVAL, 2011, p. 13)

Mas, do ponto de vista cognitivo, o que caracteriza a atividade matemática?

A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos, pois não há domínio do conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexo, mas, segundo o autor, nas duas características seguintes:

> "Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. A seguir, o

> fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar."(DUVAL, 2011, p. 17).

3.2.1 Tipos de registros semióticos

Duval(2011) ressalta que, há grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. Além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas geométricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesma se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente. Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática, usaremos o termo, segundo Duval(2011), "registro"de representação.

De acordo com o quadro a seguir são quatro, segundo Duval, os tipos de registros:

	Registros DISCURSIVOS Linearidade fundamentada na sucessão para a produção das expressões	Registros NAO DISCURSIVOS Apreensão simultânea de uma organização bidimensional
Registros MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos são não algoritmizáveis.	As LÍNGUAS: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio). Duas modalidades de produção: oral/escrita.	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas).
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: As transformações de expressões são algoritmizáveis.	AS ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais). Uma modalidade de produção: escrita.	Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas. GRÁFICOS CARTESIANOS. **Operações de zoom, interpolação, mudança de eixos.** ESQUEMAS.

Figura 3.1: Tipos de registros semióticos matemáticos

Fonte:Duval 2011

a) Os registros multifuncionais (são aqueles cujos tratamentos não são algoritmizáveis): é o caso das línguas, das três operações hierarquicamente incluídas(designação de objetos, enunciação e raciocínio) com duas modalidades de produção (oral ou escrita); da icônica e da configuração geométrica.

b) Os registros monofuncionais (são aqueles cujas transformações de expressões são algoritmizáveis): é o caso das escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) com uma modalidade de produção: escrita, e junção entre os pontos, orientação marcada por flechas, bem como gráficos cartesianos, além dos esquemas.

c) Os registros discursivos (são aqueles cuja linearidade é fundamentada na sucessão para a produção das expressões): é o caso das línguas, das três operações hierarquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio) com duas modalidades de produção (oral ou escrita); as representações auxiliares transitórias para as operações livres ou externas; assim como as escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) com uma modalidade de produção: escrita.

d) Os registros não discursivos (são aqueles que possuem uma apreensão simultânea de uma organização bidimensional): é o caso da produção à mão livre, icônico, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto, bem como a configuração geométrica, com três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, descontrução dimensional das formas); também junção dos pontos ou nós, e orientação marcada por flechas, assim como gráficos cartesianos, com operação de zoom, interpolação, mudança de eixos, além dos esquemas.

O quadro a seguir, elaborado por Duval(2011), é um exemplo de função exponencial nas sua variadas representações

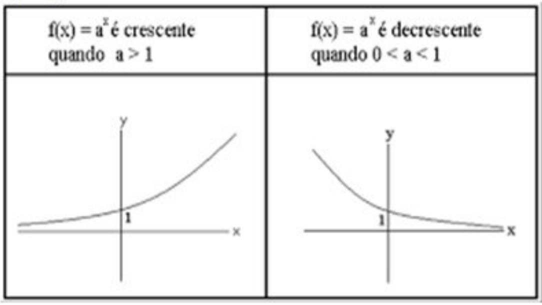
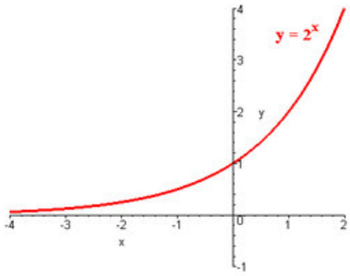
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	**Registro na língua natural** Supondo que você tem R$769,00 e aplica esse dinheiro em uma caderneta de poupança que paga juros de 1, 01 % ao mês. Determine o saldo de sua conta ao final de 4 meses.	
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	**Registro Simbólico** **a) Numérico:** {(0, 1); (1, 2); (2, 4); (3, 8);...} **b) Algébrico:** 	**Registro Gráfico** 

Figura 3.2: Função exponencial e suas várias formas de representação

Fonte:Duval 2011

Para Damm (2002), não existe domínio do entendimento matemático que possa ser adquirido pelo aluno sem o uso de uma representação. Assim, este autor demarca três aproximações para noção de representação:

a) As representações mentais: são representações internas e conscientes do sujeito, ou seja, referem-se às crenças, explicações e concepções de fenômenos físicos e naturais, ocorrendo no nível do pensamento.

b) As representações computacionais: são representações internas e não conscientes do sujeito, assim, o sujeito realiza algumas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para sua realização.

c) As representações semióticas: são externas e conscientes do sujeito, estando relacionadas:

> "[...] a um sistema particular de sistemas de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...] De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade de representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado)."(DAMM, 2002, p. 141).

Duval (2011) usa o termo representação semiótica sempre que se refere a tipos distintos de representação utilizados em matemática, levando em conta que um registro de representação é um sistema semiótico que favorece a comunicação, a objetivação e o tratamento. Mais ainda, que possa ser convertido em outros sistemas semióticos, diferentemente dos códigos, já que possuem apenas a função de comunicação, assim não permitindo a faculdade de transformá-los em outros registros sem perder as características do objeto.

De acordo com a teoria de Duval, a construção do conhecimento ocorre a partir da conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo. Na realidade, a possibilidade de mudança de registro se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem conforme evidencia o pensamento do autor:

> "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação."(DUVAL, 2011, p. 14)

Nessa perspectiva, segundo o autor, de acordo com os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro, pois a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.

3.3 Os dois tipos de transformações de representações semióticas

Segundo Duval(2011) existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: **os tratamentos e as conversões.**

A transformação do tipo tratamento é uma operação que permanece num mesmo sistema de representação, enquanto a transformação do tipo conversão muda de sistema, porém conserva a referência aos mesmos objetos matemáticos.

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica	
Permanecendo no mesmo sistema: Tratamento	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: Conservação
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato *de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes*. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam conforme os tipos de registro entre ao quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Figura 3.3: Diferentes tipos de transformações

Fonte:Duval 2011

Exemplo 3.1. Resolva a equação $3x$ - 7 = 5.

Solução 3.1. $3x = 5 + 7$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

$$S = \{4\}.$$

Observe que foram utilizados somente procedimentos algébricos, com isso foi mantido o mesmo sistema de representação.

Apesar de ser óbvia a diferença entre as transformações apresentadas (tratamento e conversão) não é nenhuma surpresa os alunos confundirem essas transformações.

> " Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação.
> As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica."(DUVAL, 2011, p. 16)

A transformação do tipo tratamento está relacionada à forma de representação dos objetos os quais contém conteúdos próprios e não ao estudo do objeto matemático em si.

A seguir mostraremos uma situação-problema que envolve a transformação do tipo conversão.

Uma estamparia cobra uma taxa fixa, referente ao trabalho de desenvolvimento da estampa padrão, mais um valor por peça de roupa estampada. Para estampar camisetas de certa encomenda, o orçamento calculado estabelecia uma taxa fixa de R$ 30,00 mais R$ 2,50 por camiseta.

Observe o quadro.

Quantidade de camisetas	1	2	10	20	50	...	x
Valor cobrado (R$)	$\underbrace{32{,}50}_{30+2{,}50}$	$\underbrace{35}_{30+2{,}50\cdot 2}$	$\underbrace{55}_{30+2{,}50\cdot 10}$	$\underbrace{80}_{30+2{,}50\cdot 20}$	$\underbrace{155}_{30+2{,}50\cdot 50}$	...	$30+2{,}50\cdot x$

A relação entre a quantidade de camisetas e o valor cobrado é descrita por uma função, cuja fórmula é dada por:

valor cobrado

$$v = 30 + 2{,}50x$$

quantidade de camisetas

valor cobrado por camiseta

taxa fixa

Nesse caso, o valor cobrado está em função da quantidade de camisetas. Assim, dizemos que o "valor cobrado" (v) é a **variável dependente** e a "quantidade de camisetas" (x), a **variável independente** da função.

Figura 3.4: Exemplo de transformação do tipo conversão

Fonte:Joamir 2011

A conversão não deve se reduzir a uma forma limitada de tratamento ou mesmo de codificação. Não são regras de correspondência para passar de um registro a outro ou simplesmente codificações que caracterizam uma conversão, mas sim, a apreensão global e qualitativa que a conversão permite embutir nas mudanças de registros.

> "Há por trás da aplicação de uma regra de decodificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros."(DUVAL, 2011, p. 17)

Ainda que a conversão, sob o ponto de vista matemático, não possua nenhum papel determinante nos processos de justificação e prova, ela possui importância crucial do ponto de vista cognitivo, já que interfere diretamente na condução dos mecanismos subjacentes à compreensão. Na prática, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação, é a atividade de conversão a responsável pela construção do conhecimento, ou seja, pela apropriação do saber.

É importante não confundir o objeto com suas representações e, nesse caso, a mudança de registro torna-se necessária para a sua compreensão. A única maneira de atingir os objetos matemáticos é por meio de suas representações semióticas, ou seja, os objetos matemáticos apenas existem devido às suas representações.

A principal característica da atividade de conversão é a sua natureza cognitiva, que se evidencia nos dois tipos de fenômenos que podem ocorrer nesse tipo de operação:

a) as variações de congruência e de não congruência;

b) a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

É necessário comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Podem ocorrer duas situações: no primeiro caso a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma codificação simples, neste caso ocorre congruência. No segundo caso, ela não transparece na sua totalidade e, neste caso, ocorre a não congruência.

Para Duval(2011),existem na realidade muitos fatores que determinam o caráter congruente ou não congruente de uma conversão, o que conduz a determinar as situações intermediárias.

Observe o exemplo a seguir, representado por Duval(2011)

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unicidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa: y > x	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva: x > 0	Não "maior que zero" é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada tem o mesmo sinal: x.y > 0 O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Figura 3.5: Exemplo de variação de congruência ou de não congruência de uma conversão

Fonte:Duval 2011

No exemplo supracitado, existem três motivos que permitem determinar os graus de congruência ou de não congruência: correspondência semântica das unidades de significado, a unidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades.

> “[...] a tomada em conta desses três fatores permite determinar os graus de congruência ou de não congruência que são, geralmente, correlacionadas às variações de sucesso ou fracasso nas operações de conversão.” DUVAL(2011, p. 19)

Em relação à heterogeneidade da conversão, Duval sinaliza que não ocorre continuamente o fato da conversão efetuar-se, quando se invertem os registros de saída e o de entrada. Desse modo o fenômeno pode acarretar uma severa resistência de acertos assim que se inverte o sentido da conversão.

Muitas pesquisas mostram que as dificuldades de aprendizagem em matemática, em níveis distintos de ensino, aumenta de forma considerável em cada etapa em que se faz necessária uma mudança de registro ou uma mobilização de dois registros ao mesmo tempo.

> “No caso em que as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e bloqueios são mais fortes. Falando de outra maneira, o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monorregistros. Existe como um enclausuramento de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemático.”DUVAL(2011, p. 21)

Uma dos principais atributos da atividade matemática é a variedade dos registros de representação semiótica que ela provoca. Apesar disso, essa variedade é pouco explorada no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Nesse contexto,

> “Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. É enganosa a idéia de que todos os registros de representações de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou se deixem perceber uns aos outros.”(DUVAL, 2011, p. 31)

Ainda para Duval

> “Nessa perspectiva, a oposição muitas vezes feita entre a compreensão que seria conceitual ou puramente mental e as representações semióticas que seriam externas aparece como enganosa.”(DUVAL, 2011, p. 31)

SISTEMA DE PRODUÇÃO		MENTAL (interna)	MATERIAL (externa)	
			ORAL	VISUAL (suporte de papel ou tela de computador)
		produção para si próprio	produção para os outros	produção para si próprio ou para os outros
	SEMIÓTICO (produção intencional)	discurso interior OBJETIVAÇÃO E funções de tratamento	Interações verbais funções de COMUNICAÇÃO	Escrita, desenho funções de TRATAMENTO de comunicação e de objetivação
	NATURAL (produção automática)	memória visual ou icônica função de objetivação		

Figura 3.6: Sistemas de produção

Fonte:Duval 2011

De acordo com o quadro exposto, percebe-se que o sistema de produção encontra-se dividido em: mental (interna) e material (externa), semiótico (produção intencional) e natural (produção automática). Assim, a produção mental pode ser: produção para si próprio, discurso interior (objetivação e funções de tratamento), além de memória visual ou icônica com função de objetivação. A produção material pode ser oral ou visual (suporte de papel ou tela de computador). A produção material oral pode ser: produção para os outros e interações verbais (funções de comunicação). A produção material visual pode ser: produção para si próprio ou para os outros ou escrita e desenho com funções de tratamento de comunicação e de objetivação.

Já o sistema de produção semiótico pode ser: um discurso interior com objetivação e funções de tratamento, interações verbais com funções de comunicação e escrita ou desenho com funções de tratamento de comunicação e de objetivação.

> "Muitas vezes, as representações mentais não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas."(DUVAL, 2011, p. 31)

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval concentra seus estudos na aprendizagem da matemática, segundo os aspectos cognitivos para a compreensão da mesma. Segundo o autor (2011) os sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações. Isto acontece porque eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos e acabam não reconhecendo o mesmo objeto, por meio de representações semióticas diferentes. Podemos usar como exemplo uma função que pode ser representada discursivamente por uma equação algébrica, por uma argumentação na língua natural, ou de forma não discursiva a partir de um gráfico cartesiano. Como podemos observar no quadro seguinte:

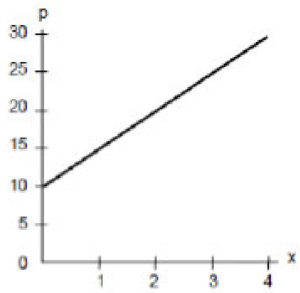
Língua natural: Textos escritos em língua portuguesa com regras convencionais de comunicação que permitem encontrar as informações, ou dados, para resolver o problema.	O gráfico a seguir ilustra o peso *p*, em gramas, de uma carta, incluindo o peso do envelope, em termos do número *x* de folhas utilizadas. O gráfico é parte de uma reta que passa pelo ponto com abscissa 0 e ordenada 10, 2 e pelo ponto com abscissa 4 e ordenada 29, 4.
Geométrico (figura): Quando temos figuras geométricas com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes ao problema.	
Geométrico (gráfico): Quando temos gráficos com regras de tratamento que permitem a identificação nos intervalos onde a função cresce ou decresce.	
Algébrico: Quando temos a escrita algébrica com suas regras de tratamento que levam à resolução do problema.	$p(x) = 4,8x + 10,2$

Figura 3.7: Exemplos de registros de representações semióticas

Fonte: O autor

No estudo da matemática devemos considerar as transições entre as representações, já que estes procedimentos provocam as atividades cognitivas do pensamento humano. Ao pretender pesquisar sobre como o aluno articula os diferentes registros de representação para o entendimento de funções, estaremos abordando o aspecto conceitual desses objetos bem como formas de elaborar, resolver e representá-los matematicamente. E, nestas resoluções e representações, o pensamento matemático é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos usados para representar os objetos e suas relações (GRANGER, 1979, p. 47).

Atualmente, nas situações de ensino e aprendizagem, o uso das representações semióticas são cada vez mais valorizadas. Comprovação disso é que pesquisas como a de Colombo, Flores e Moretti(2008) tem mostrado um movimento no sentido da utilização da teoria dos registros de representação semiótica de Duval:

> "Os dados coletados permitem dizer que as pesquisas estão articuladas em torno das principais dificuldades dos alunos, sejam estes do Ensino Fundamental, Médio ou Superior, que, ao utilizarem a noção de registro de representação semiótica, buscam possíveis soluções para minimizar tais dificuldades."(COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 19)

Sendo assim, é muito importante no ensino da matemática valorizarmos as diferentes representações semióticas de um mesmo objeto, de modo que não haja dúvida entre o objeto e sua representação. A mudança de registro pode propiciar a descoberta de diferentes aspectos de um mesmo objeto; também pode propiciar, no novo registro, tratamentos mais econômicos e/ou mais potentes; ou ainda, ter-se no segundo registro um suporte ou guia para melhor proceder no primeiro registro.

Qualquer tipo de representação possui uma forma especial de registro repleta de significados e, como a educação é um processo entremeado por comunicação, seja através do diálogo, gestos ou por meio da escrita, faz-se necessário discutir os diferentes registros de representação empregados no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos estudados, buscando estabelecer conexão entre eles.

A teoria dos registros de representações semióticas busca analisar de que forma as representações dos objetos matemáticos influenciam no processo de ensino e aprendizagem na matemática.

4 Função e representação semiótica

Neste capítulo discorreremos sobre como o conteúdo de funções deveria ser ministrado, segundo as Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão e de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais. Também será feito comentários, levando-se em conta a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, sobre como o conteúdo de funções tem aparecido em alguns livros didáticos.

4.1 O ensino de funções e os PCNs

As Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão (2014, p. 29), no capítulo sobre as competências ou capacidades nas áreas do conhecimento, diz: "A problematização é a etapa desencadeadora de toda construção do conhecimento na medida em que é o elemento inquiridor e motivador dos educandos na caminhada em prol de uma nova aprendizagem".

Segundo esse documento:

- A Matemática é usada de forma crescente, numa relação com as mais diversas áreas da atividade humana, ao mesmo tempo em que é perceptível sua presença no quotidiano. Nesse sentido, a educação matemática se estabelece com o objetivo de proporcionar a presença da Matemática nas mais diversas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes no trabalho com a Matemática.

- O professor é quem medeia questionamentos, quem organiza intencionalmente o processo, utilizando diferentes fontes de informação e linguagens e considera os múltiplos modos de aprender. Além disso, compete ao professor adequar os modos de ensinar à natureza dos conteúdos, discutir os significados matemáticos nos diversos contextos, organizar os tempos de aprendizagens, promover a regulação constante e contribuir para o alcance das competências de seus estudantes, tendo como referencial a resolução de problemas.

- O aluno deve ser capaz de investigar e analisar situações do cotidiano, para fazer suas interpretações, representado-as por meio dos recursos que a Matemática lhe presenteia, a saber: gráficos, tabelas, diagramas aplicados a situações-problema.

A construção dos quadros de competências por área do conhecimento, são apresentados nessas Diretrizes Curriculares, expressando a formação e desenvolvimento das aprendizagens de forma gradativa, veja:

Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias - Disciplina: Matemática - Ensino Médio:

O QUE DEVE SER APRENDIDO	O QUE DEVERÁ SER ENSINADO	COMO DEVERÁ SER ENSINADO	O QUE DEVE SER AVALIADO
Conhecer as variáveis de uma função e análise e dinâmica da variação interdependente entre elas.	FUNÇÕES	Problematize situações práticas do cotidiano nas resoluções situações-problema de função no contexto da vivência do aluno.	Elabore atividades em que os alunos utilizem os diferentes modos como uma grandeza pode variar em função da outra.

Figura 4.1: Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão, 2014

Fonte:DCEMA (2014, p. 117)

Para refletirmos sobre o que realmente os alunos precisam aprender sobre funções, trazemos o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM - 1997), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN - 1999), as Orientações Curriculares do Ensino Médio (2006) acerca dessas exigências.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) descrevem a relevância do estudo do conceito, destacando que, a partir do estudo de função, é possível

> descrever e estudar através de leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. (BRASIL, 1999, p. 96)

Ainda segundo os PCNs, os conteúdos matemáticos são organizados em três eixos: Álgebra (números e funções), Geometria e Análise de Dados. Destacando a importância do estudo das funções, o documento ressalta que para funções

> [...] o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algebricamente e graficamente. (PCNEM, 1997, p. 181)

Problemas contextualizados devem ser usados durante todo o aprendizado como motivadores. Dando continuidade ao exposto, os PCNEM indicam que se tenha como objetivos do ensino de funções desenvolver as seguintes competências matemáticas:

- Traduzir uma situação de uma linguagem para outra (língua materna, gráficos, linguagem algébrica);
- Selecionar diferentes formas de representações para a variação de duas variáveis;
- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica para expressar relações entre grandezas;
- Compreender o conceito de função e associá-lo a situações do cotidiano;
- Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes;
- Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio (2006) abordam três aspectos para o ensino de Matemática: os conteúdos escolhidos, a metodologia e a organização curricular. Os conteúdos são organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria e Análise.

Segundo o documento, o estudo de Funções deve:

- Ser iniciado a partir da relação entre duas grandezas;
- Incentivar o esboço dos gráficos que representam as situações do item anterior;
- Verificar o crescimento e decrescimento de funções;
- Apresentar modelos de funções associados às diferentes áreas de conhecimento;

4.2 O ensino de funções e o livro didático

Segundo o professor Elon Lages Lima, no livro Exame de Textos (2001): análise de livros de Matemática para o Ensino Médio, que a prática de pensar e agir de maneira ordenada no universo matemático depende da dosagem adequada de cada um desses componentes: conceituação, manipulação e aplicações. Juntamente com outros professores, na mesma obra, ele faz uma avaliação de 12 coleções de livros de matemática do ensino médio com o objetivo de oferecer algumas sugestões. A análise do livro-texto deve passar pela harmonia entre os três componentes básicos de ensino: conceituação, manipulação e aplicação. Assim o professor Elon define esses componentes:

a) Conceituação: compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. É importante destacar a importância que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações.

b) Manipulação: de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente em pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes secundários.

c) Aplicação: é o emprego de noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão de problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e tão necessário. As aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas.

É prática comum o uso do livro didático em nossas salas de aula, mas para trabalharmos com o melhor método e com a melhor abordagem ser faz necessário conhecermos previamente o livro didático adotado, ou a ser adotado, como alerta os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN's)

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1999, p. 87)

Após a análise do estudo de funções em alguns dos livros didáticos mais adotados pelas escolas de ensino básico do Brasil, percebemos a existência de limitações na conceituação e na maneira de apresentar o conteúdo para o aluno.

É comum o conceito de função ser apresentado com excesso de formalismo. Dessa forma, o aluno não é levado a construir o conceito a partir de situações cotidianas, o que facilitaria o entendimento e a utilização dessa ferramenta. Assim, muitas vezes, o aluno tem dificuldade de perceber e entender o conceito de função como variação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza.

Os livros poderiam enfatizar que uma função é uma tríade: domínio, contradomínio e lei de formação. Os comentários a esse respeito são vagos e não mostram claramente que ele representa a condição de existência da função, bem como o gráfico e a imagem da função são dependentes do domínio. Daí a dificuldade de o aluno perceber que para uma mesma função seu gráfico pode variar de acordo varia o domínio. Os livros poderiam valorizar as características e diferenças entre as variáveis dependente (y) e independente (x) , pois é comum o aluno não conhecer ou não saber diferenciar uma da outra.

Em geral, a quantidade de exemplos resolvidos poderia ser maior, o que daria mais opções de aprendizado para os alunos. O número de exemplos e atividades que exploram diferentes representações é muito pequeno, fazendo com que os alunos não conheçam ou não tenham segurança nas transformações de diferentes registros.

Os diferentes tipos de registros e suas devidas conversões, presentes na teoria de registro de representação semiótica de Raymond Duval, deveria ser mais explorada já que os alunos possuem extrema dificuldade nessas transformações, pois dependendo do contexto que se apresenta o problema pode existir outras representações mais adequadas à situação.

Um outro ponto negativo, constatado na análise dos livros didáticos, foi o pouco uso da interdisciplinaridade, que representa uma forma de desenvolver um trabalho de integração dos conteúdos de uma disciplina com outras áreas de conhecimento, característica marcante em importantes vestibulares do país. De acordo com DANTE(2010, p. 58): "As funções constituem a linguagem pela qual os fenômenos das ciências naturais e sociais são expressos."

Uma abordagem que envolva situações interessantes auxilia o aluno a entender o conceito de função e sua presença em situações que fazem parte de seu cotidiano. Livros didáticos que seguem essa tendência introduz nas noções iniciais de função diferentes tipos de registros semióticos: linguagem natural, algébrica, tabular, figural e geométrica. Segundo a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2011), a apreensão dos conceitos matemáticos implica em uma abordagem cognitiva desses conceitos, isto é, para conseguir a conceitualização e em seguida ter condições de aplicar os conceitos matemáticos, faz-se necessário uma organização de várias representações de um mesmo objeto matemático.

4.3 Abordagens dos livros didáticos

Na maioria das escolas brasileiras, principalmente nas escolas públicas, o livro didático é o principal recurso utilizado pelo professor para ministrar suas aulas. Daí a importância do cuidado na escolha de um livro didático. Analisar o livro a ser adotado é de fundamental importância para que se tenha o melhor aproveitamento possível dos conhecimentos, dadas as limitações de recursos. O professor deve conhecer bem o livro que irá utilizar em suas aulas e ter uma visão bem clara do que pretende alcançar com a abordagem apresentada no livro. Deve também verificar se o objetivo será alcançado com a explanação de cada conteúdo, se os exercícios apresentados e sugeridos vão ao encontro dos objetivos que se deseja alcançar dentro de cada assunto estudado.

Geralmente, depois de apresentar um estudo sobre conjuntos numéricos, os livros didáticos apresentam o primeiro capítulo sobre funções. A forma como os livros fazem essa introdução, às vezes, difere muito de um autor para outro.

Alguns iniciam com a noção de relação entre dois conjuntos. Para isso, apresentam dois conjuntos finitos e uma lei de associação entre os elementos desses conjuntos, que costumam ser números. Outros, numa bordagem mais moderna, trazem situações cotidianas, montam tabelas utilizando os dados envolvidos, relacionando-os convenientemente e só depois introduzem o conceito de função.

Mesmo com tantos recursos, o conceito de função ainda é algo abstrato e de difícil compreensão para o aluno.

A seguir traremos algumas abordagens desse conceito e analisaremos à luz da Teoria das Representações Semióticas.

4.3.1 Primeira abordagem

Uma introdução através de relações binárias utilizando diagramas e pares ordenados, como na Figura 4.2, é bastante útil quando se trata de subconjuntos numéricos finitos como, por exemplo, subconjuntos de números inteiros e naturais.

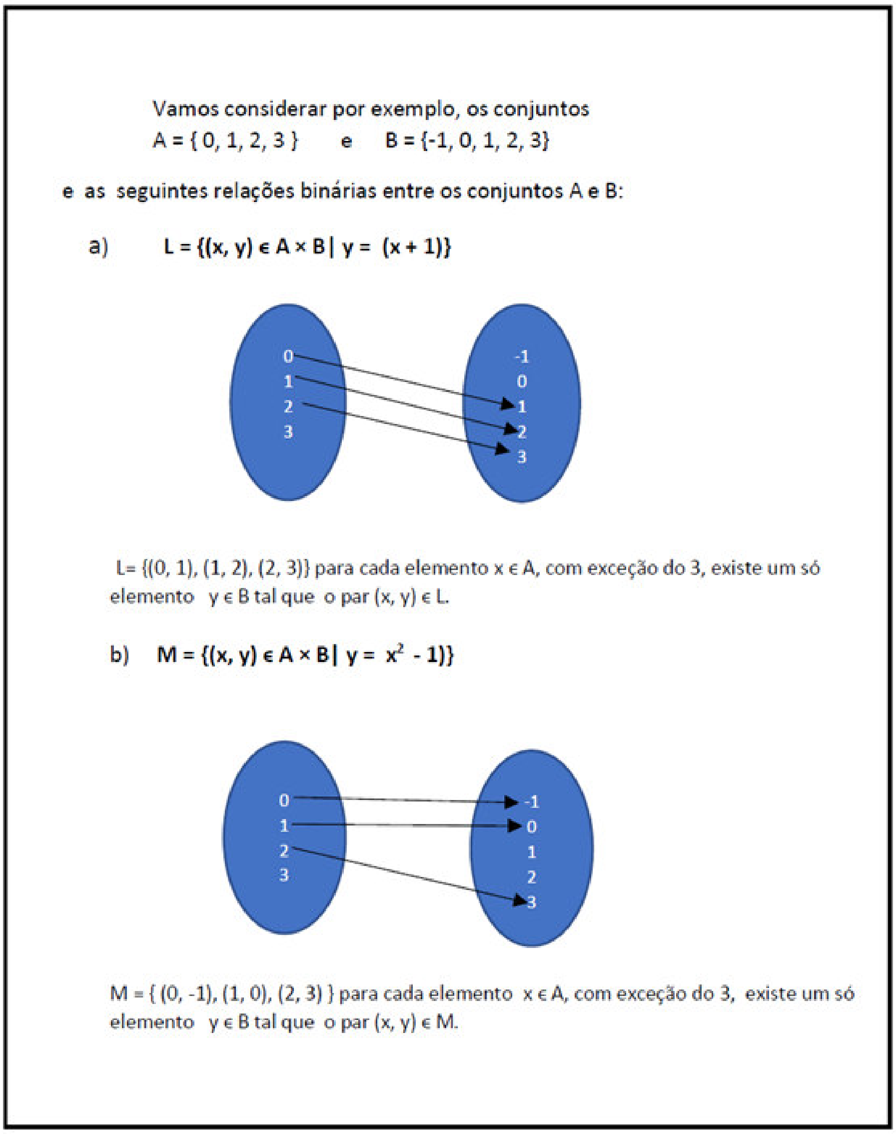


Figura 4.2: Exemplos de relações binárias

Fonte:O autor

Através da linguagem gráfica utilizando diagramas o aluno tem mais facilidade de compreender "o que é uma função", pois este tipo de representação já lhe é familiar. Mas, essa representação é muito limitada, não compreende casos como funções definidas em conjuntos infinitos, por exemplo. Com isso, a definição de domínio, contradomínio e imagem, utilizando diagramas, fica limitada aos conjuntos já citados anteriormente.

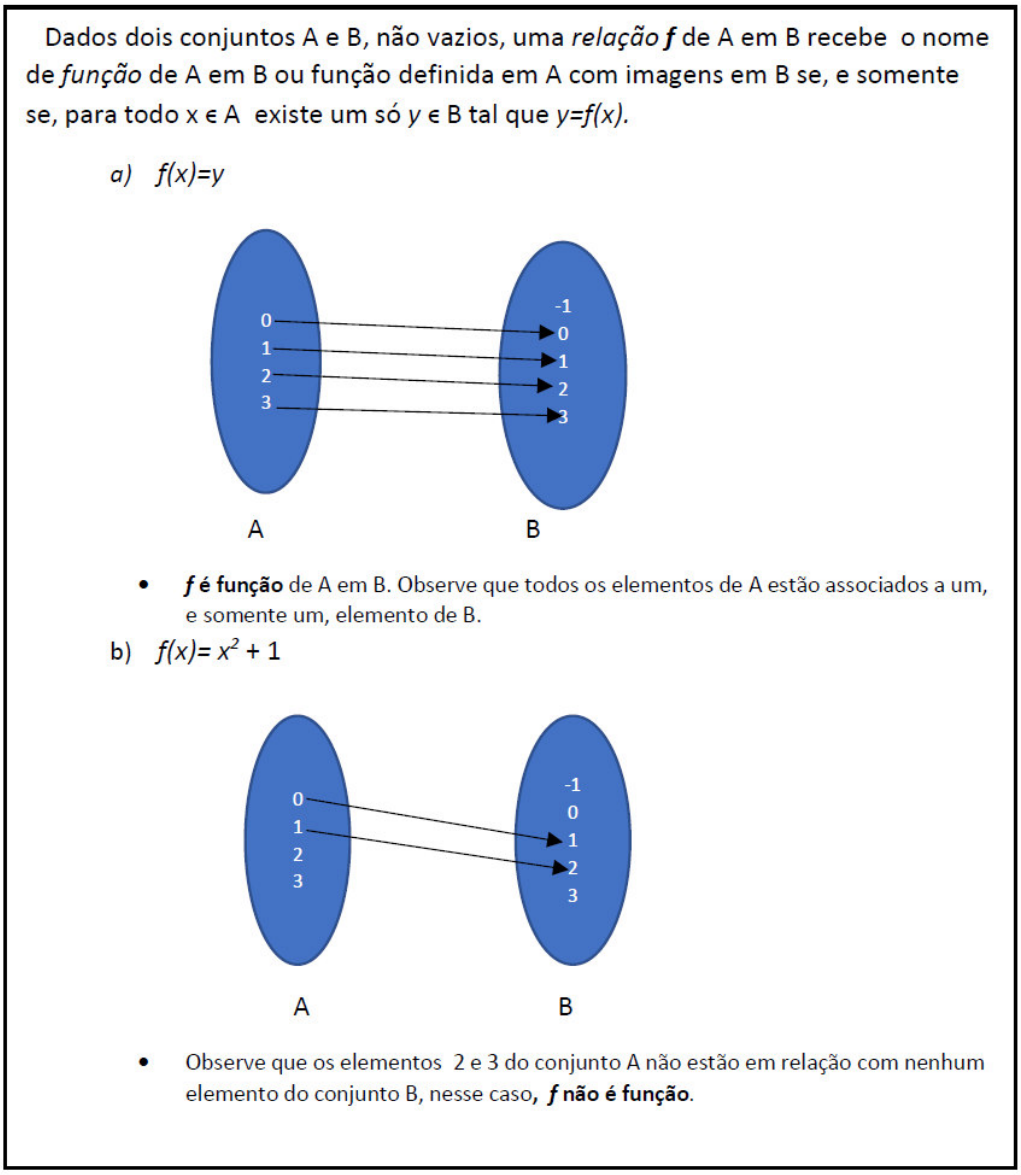


Figura 4.3: Representações binárias nos diagramas

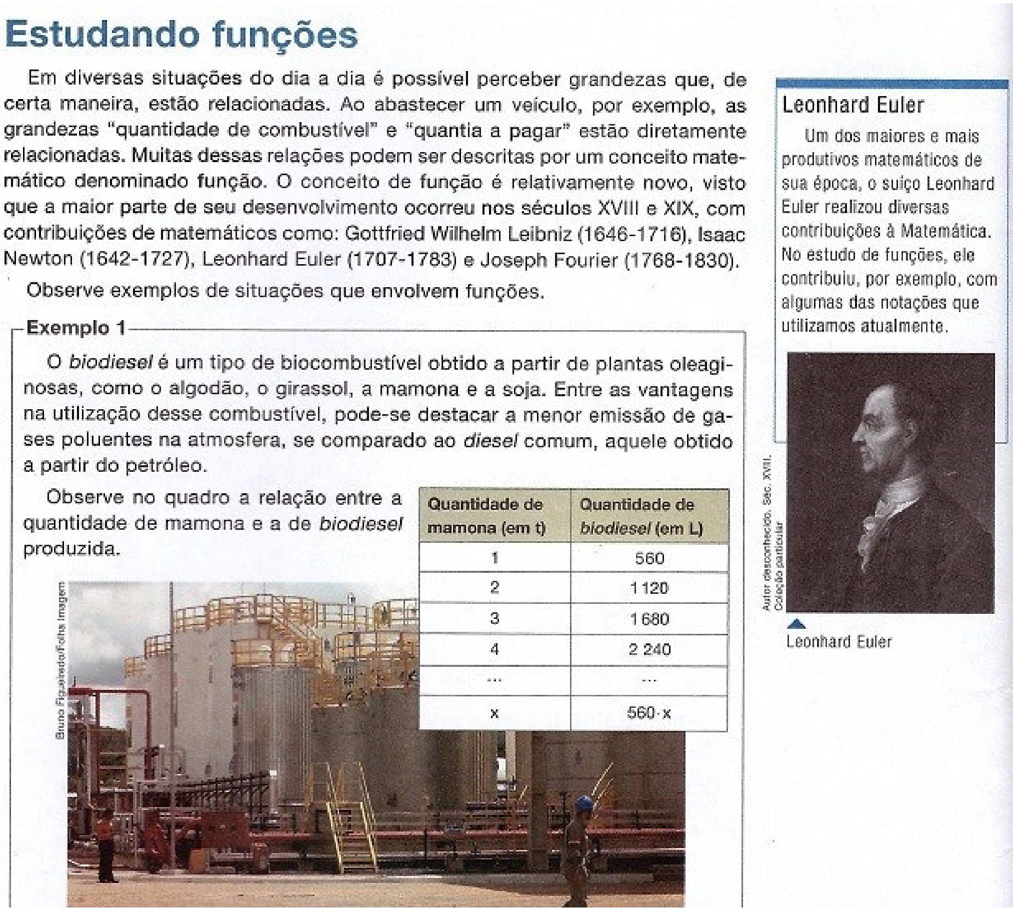
Fonte:O autor

A transição do entendimento da definição de função utilizando conjuntos quaisquer, ou situações que não podem ser representadas através de diagramas, geralmente é difícil, pois esse entendimento envolve abstrações que, na maioria das vezes, os alunos não estão familiarizados.

> Em Matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, pois diferentemente de outras áreas do conhecimento, os objetos matemáticos são abstratos, ou seja, não são diretamente perceptíveis ou observáveis com o auxilio de instrumentos (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.), necessitando, então, do uso de representações semióticas para a sua apreensão (DUVAL, 2011, p. 37).

4.3.2 Segunda abordagem

Observe a presença da contextualização e de diferentes representações semióticas no exemplo mostrado pela Figura 4.4 abaixo:



Estudando funções

Em diversas situações do dia a dia é possível perceber grandezas que, de certa maneira, estão relacionadas. Ao abastecer um veículo, por exemplo, as grandezas "quantidade de combustível" e "quantia a pagar" estão diretamente relacionadas. Muitas dessas relações podem ser descritas por um conceito matemático denominado **função**. O conceito de função é relativamente novo, visto que a maior parte de seu desenvolvimento ocorreu nos séculos XVIII e XIX, com contribuições de matemáticos como: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Fourier (1768-1830).

Observe exemplos de situações que envolvem funções.

Exemplo 1

O *biodiesel* é um tipo de biocombustível obtido a partir de plantas oleaginosas, como o algodão, o girassol, a mamona e a soja. Entre as vantagens na utilização desse combustível, pode-se destacar a menor emissão de gases poluentes na atmosfera, se comparado ao *diesel* comum, aquele obtido a partir do petróleo.

Observe no quadro a relação entre a quantidade de mamona e a de *biodiesel* produzida.

Quantidade de mamona (em t)	Quantidade de *biodiesel* (em L)
1	560
2	1 120
3	1 680
4	2 240
...	...
x	$560 \cdot x$

Bruno Figueiredo/Folha Imagem

Leonhard Euler

Um dos maiores e mais produtivos matemáticos de sua época, o suíço Leonhard Euler realizou diversas contribuições à Matemática. No estudo de funções, ele contribuiu, por exemplo, com algumas das notações que utilizamos atualmente.

Autor desconhecido. Séc. XVIII. Coleção particular

Leonhard Euler

Figura 4.4: Exemplo de uma situação-problema

Fonte:Joamir, 2011

Nessa abordagem, a tabela substitui os diagramas (da abordagem anterior). Através da tabela o aluno percebe mais claramente a dependência entre as variáveis t (toneladas de mamonas) e L quantidade de litros de biodiesel produzido. Apesar disso, a generalização ainda é difícil, pois, por mais que acrescentemos valores a t, sempre haverá valores a serem acrescentados. Por exemplo, a tabela não contém uma linha correspondendo a $t = 2,5$ toneladas e, mesmo que acrescentássemos essa linha, não haveria uma linha correspondendo $t = 4,51$ toneladas, e assim por diante. Por isso, para representar todos os valores possíveis de t e os respectivos volumes, em litro, L é mais adequado usar uma equação que relacione t e L. Essa representação já é apontada na última linha da tabela, fazendo $t = x$ tem-se:

$$L(x) = 560.x$$

Perceba que essa equação substitui com vantagens a tabela anterior, pois fornece a quantidade em litros de combustível produzido e sua dependência da quantidade x de mamona utilizada a partir de $x = 1$, mesmo que essa quantidade não possa ser representada por um número inteiro. No entanto, para chegar a essa compreensão o aluno deve ter assimilado com clareza e relacionado os outros registros semióticos apresentados. Segundo Duval, a articulação entre os diferentes registros é fundamental para a compreensão do objeto. Portanto não basta uma abordagem rica em simbologia e diferentes representações, para haver aprendizado efetivamente, o aluno de ser capaz de reconhecer e representar um mesmo objeto matemático através de diferentes representações.

> “Se a conceitualização implica coordenação de registros de representação, o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão.”(DUVAL, 2011, p. 42).

Entre alguns fatores que contribuem para a dificuldade de entendimento do conceito de função, podemos destacar:

a) excesso de formalismo na definição de função;

b) os livros valorizam mais os problemas “fechados”, desprovidos de contextualização;

c) dificuldade de entendimento e no uso da simbologia de funções;

d) os livros tem valorizado mais a abordagem algébrica, limitando assim o acesso do aluno a outros diferentes registros;

e) pouco uso das diferentes representações;

f) não se tem valorizado a passagem de uma representação para outra.

5 Problemas envolvendo funções em exames nacionais e olimpíadas

Em exames nacionais como ENEM, SAEB e olimpíadas de matemática como a OBMEP e OBM, o conhecimento à cerca de funções sempre é cobrado. A seguir apresentaremos algumas questões retiradas dessas provas e analisaremo-as à luz da teoria de representação semiótica.

Espera-se que o aluno egresso do Ensino Médio consiga generalizar e transformar um registro de representação em outro, como por exemplo: um registro tabular em registro de representação gráfica.

As funções são exemplos em que as representações gráficas e tabulares se tornam imprescindíveis. Por meio de tabelas o aluno percebe como os valores numéricos da função se relacionam, e, ao mesmo tempo, organiza os dados da função e suas respectivas imagens.

De outra forma, os pares de números que se encontram na tabela podem ser associados, no sistema de eixos coordenados, a uma figura, o gráfico da função que descreve como se comportam as variáveis envolvidas no problema em estudo.

A linguagem algébrica é forte aliada no estudo de funções. É através da linguagem algébrica, que, o aluno aprende a modelar problemas envolvendo situações práticas e os problemas inerentes a própria matemática. O sistema de numeração que utilizamos serve como instrumento para indicar quantidades, para ordenar ou codificar objetos, na contagem e representação de grandezas. Já a Aritmética descreve e sistematiza as operações realizáveis com os números, ou seja, também serve como modelo de representação do real a partir de regras de utilização de um sistema particular de signos.

Uma parte significativa das dificuldades dos alunos no aprendizado em matemática pode ser, segundo Almouloud (2007), de origem didática e não necessariamente da matemática em si, pois

> “A coordenação dos diferentes registros de representação (escrita algébrica, as figuras geométricas, o discurso na língua natural ligados ao tratamento dos conhecimentos) não se opera espontaneamente, mesmo no

> curso de um ensino que mobilize uma diversidade de registros. [...], a dificuldade dos alunos para interpretar corretamente um problema e sua incapacidade em produzir a explicação de sua solução com um mínimo de vocabulário apropriado mostram sua limitação para entender os textos mais simples. Ao compreender o senso global, o aluno estará capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações das instruções e conseqüentemente a cometer erros. "(ALMOULOUD, 2007, p. 130).

Ainda nesse contexto, para Duval (2011)

> "O sujeito só apreende um determinado conceito matemático quando consegue mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação, ou seja, trocar espontaneamente de um registro de representação para outro."(DUVAL, 2011, p. 42)

5.1 Questão da OBMEP

O exercício apresentado nesta seção faz parte da prova da OBMEP de 2015, elaborada para o nível 3, que corresponde ao Ensino Médio do ensino regular.

O exercício analisado traz várias representações semióticas que são utilizadas frequentemente no estudo de funções:

1) **Registro de representação na língua natural:**

O enunciado da situação problema é colocada em linguagem natural, esta forma de representação semiótica pode ser entendida, segundo Duval(2011), como uma representação semiótica discursiva multifuncional.

2) **Registro de representação na relação entre dois conjuntos:**

Neste registro de representação há uma descrição na relação entre dois conjuntos: o primeiro conjunto é formado pelo horário de chegada dos clientes e o segundo com a duração do atendimento de cada cliente.

3) **Registro de representação tabular:** Nesta situação a análise também se inicia como uma forma aritmética, tendendo a encerrar-se como uma generalização da situação na forma algébrica. Na primeira coluna estão organizados, por ordem de chegada, os clientes que foram atendidos de 10h a 11h. Na segunda coluna são apresentados o horário em que cada cliente chegou ao banco e na coluna 3, o tempo, em minutos de atendimento de cada cliente.

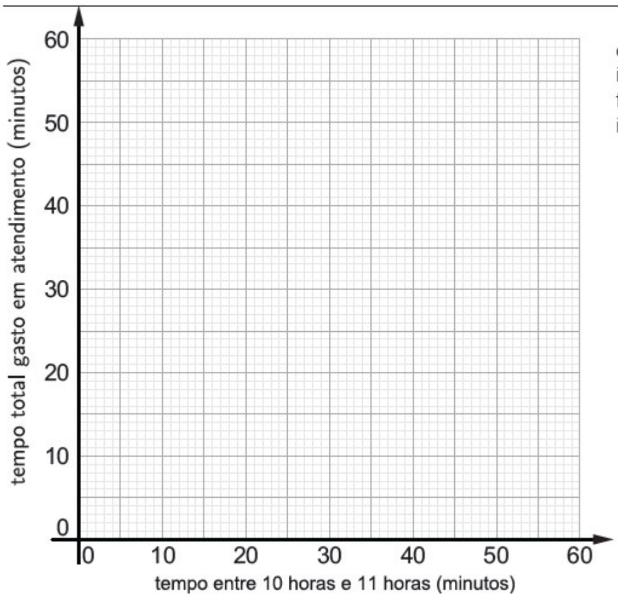
No atendimento ao cliente, um banco tem um único funcionário, que começa a trabalhar às 10 horas. Se o funcionário está livre quando um cliente chega, este é atendido imediatamente; caso contrário, o cliente deve aguardar sua vez em uma fila. Em certa manhã, no período entre 10 e 11 horas, chegaram ao banco seis clientes.

a) A tabela abaixo apresenta o horário da chegada e a duração do atendimento de cada um deles. Preencha a tabela com o tempo de espera na fila, horário de início e horário de término do atendimento de cada cliente.

Cliente	Horário da chegada	Duração do atendimento (minutos)	Tempo de espera na fila (minutos)	Horário de início do atendimento	Horário de término do atendimento
1	10h 06min	6			
2	10h 15min	6			
3	10h 19min	15			
4	10h 29min	12			
5	10h 34min	7			
6	10h 42min	1			

b) Qual foi o tempo médio de espera dos clientes na fila?

c) Quais foram os intervalos de tempo em que duas pessoas ficaram esperando juntas na fila?



d) Faça o gráfico da função que fornece, para cada instante entre 10 e 11 horas, o tempo total que o funcionário gastou atendendo clientes até aquele instante.

Figura 5.1: Questão OBMEP 2015

4) **Registro de representação geométrica(gráfico):**

Embora o exercício não aborde no enunciado a representação gráfica, o último item (d) pede ao aluno que construa o gráfico que retrata a situação do item (a).

5.2 Questão do SAEB

Muito embora os alunos estudem por um bom período o conteúdo de funções, iniciando no 9° ano do ensino fundamental e vendo de uma forma mais detalhada e aprofundada no 1° ano do ensino médio, os resultados mostrados pelo SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, que tem como objetivo avaliar a qualidade do ensino básico) mostram que ao final do ensino básico os alunos tem mostrado um desempenho aquém do esperado em questões que envolvem o conteúdo de funções.

A seguir, como exemplo do exposto acima, mostraremos um quesito da prova de matemática aplicada pelo SAEB em 2011, aplicada aos alunos que estavam finalizando o ensino médio.

(SAEB) O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de 1.500 reais e acréscimo de 10 reais por peça fabricada.

O número x de peças fabricadas quando o custo é de 3.200 reais é

(A) 470.

(B) 150.

(C) 160.

(D) 170.

(E) 320.

Resposta correta: letra **D**

Apesar de ser uma questão de baixa complexidade, segundo análise do próprio SAEB (PDE e SAEB 2011: matrizes de referência, tópicos e descritores), houve um alto percentual de erro, 72%, mostrando o grau de dificuldade que os alunos sentem ao se deparar com esse tipo de problema, envovendo mudança de representações semióticas.

Observe que a questão traz vários tipos de representações semióticas muito comuns no estudo de funções:

1) **Registro de representação na língua natural:**

O enunciado da situação problema é colocada em linguagem natural,isto é, como uma representação semiótica discursiva multifuncional.

2) **Registro de representação na relação entre dois conjuntos:**

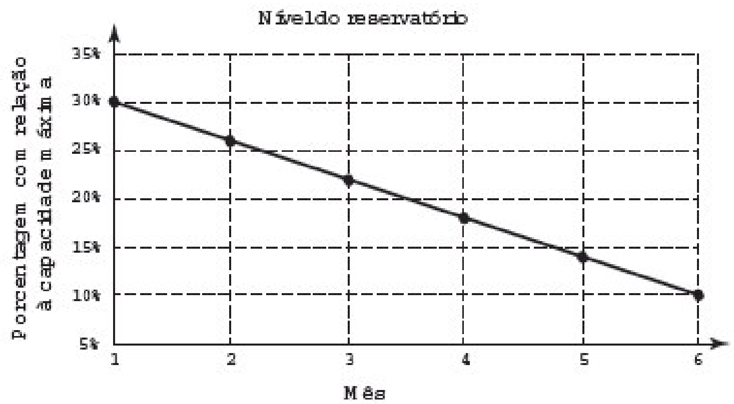
Neste registro de representação há uma descrição na relação entre dois conjuntos, sendo o primeiro conjunto representado pelo custo de produção e o segundo pelo número de peças fabricadas.

3) **Registro de representação algébrica:**

O problema inicia-se como uma forma aritmética, tendendo a encerrar-se como uma generalização da situação na forma algébrica. A representação algébrica pode ser entendida, segundo Duval(2011), como uma representação semiótica discursiva monofuncional, já que as transformações de expressões são algoritmizáveis.

5.3 Questão do ENEM

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

- **A** 2 meses e meio.
- **B** 3 meses e meio.
- **C** 1 mês e meio.
- **D** 4 meses.
- **E** 1 mês.

Figura 5.2: Questão ENEM 2016

Fonte:Inep, 2016

Resposta correta: letra **A**

Observe alguns tipos de representações semióticas presentes nesta questão:

1) **Registro de representação na língua natural:**

O enunciado da situação problema é colocada em linguagem natural,isto é, como uma representação semiótica discursiva multifuncional.

2) **Registro de representação na relação entre dois conjuntos:**

Neste registro de representação há uma descrição na relação entre dois conjuntos, sendo o primeiro conjunto representado pelos meses do ano e o segundo pela porcentagem com relação à capacidade máxima.

3) **Registro de representação geométrica(gráfico):**

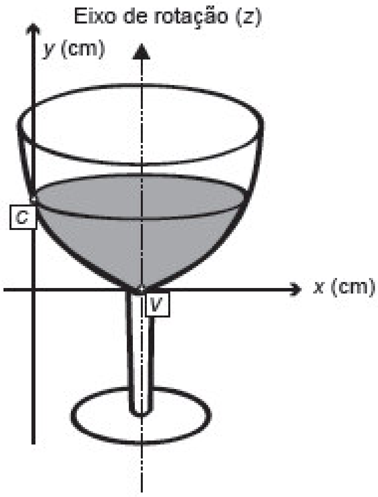
Esta forma de representação semiótica pode ser entendida, segundo Duval(2011), como uma representação semiótica não discursiva monofuncional. O gráfico da questão é representado por um segmento de reta.

4) **Registro de representação algébrica:**

Embora no enunciado da questão não apareça a forma algébrica, o aluno pode obtê-la como ferramenta para responder corretamente a questão.

5.4 Questão do ENEM

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo *z*, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde *C* é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto *V*, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo *x*.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

A 1.
B 2.
C 4.
D 5.
E 6.

Figura 5.3: Questão ENEM 2013

Fonte:Inep, 2013

Resposta correta: letra **E**

Observe a presença de diferentes registros semióticos na questão:

1) **Registro de representação na língua natural:**

O enunciado da situação problema é colocada em linguagem natural,isto é, como uma representação semiótica discursiva multifuncional.

2) **Registro de representação geométrica(figura):**

No enunciado da questão aparece uma figura que possui regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes ao problema.

3) **Registro de representação geométrica(gráfico):**

O gráfico presente na questão, uma parábola,segundo Duval(2011), é uma representação semiótica não discursiva monofuncional.

4) **Registro de representação algébrica:**

Encontra-se no enunciado da questão uma escrita algébrica(lei de correspondência) com suas regras de tratamento que levam à resolução do problema.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos.** In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007. (Coleção Papirus Educação).

BOYER,C. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. **Médias de desempenho do SAEB/2011 em perspectiva comparada: primeiros resultados SAEB 2011**. Brasília, DF, 2012a.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 8. ed. Lisboa: Gradiva Publicações, 1951.

COLOMBO, J.A.A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. **Registros de Representação Semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências**. Zetetiké, v.16, nº 29, jan-jun, p.41-72. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de Estudantes Universitários Sobre o Conceito de Função**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, p.135-154, 1999.

DANTE, L. R. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Tese (Livre Docência) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

Diretrizes Curriculares/Secretaria de Estado da Educação do Maranhão, SEDUC, 3. ed. São Luís, 2014.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S.D.A. (org). **Aprendizagem em Matemática**. Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2011.

GRANGER, G. G. **Langages et épistémologie**. Paris: Éditions Klincksieck, 1979.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio**. 1 ed. Rio de Janeiro: Elon L Lima, 2001.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, 1990.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2011.

YOUSCHKEVICH, A. P.. **The Concept of Function**. In: Arquive for History of Exact Sciences. Editions Springer, V. 16, no 1, p.37-85, 1976.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ano 8, n.9, 2001.