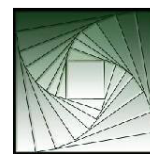




UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA UM MODELO  
DISSIPATIVO DE EQUAÇÃO DE PLACAS COM  $p$  -  
LAPLACIANO E TERMO DE MEMÓRIA

ALAN KARDEC REIS PACIENCIA

São Luís - MA  
Janeiro de 2017

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA UM MODELO  
DISSIPATIVO DE EQUAÇÃO DE PLACAS COM  $p$  -  
LAPLACIANO E TERMO DE MEMÓRIA

ALAN KARDEC REIS PACIENCIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática  
da Universidade Federal do Maranhão como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira  
de Araújo.

São Luís - MA  
Janeiro de 2017

Paciencia, Alan Kardec Reis

/ Estabilidade assintótica para um modelo dissipativo de equação de placas com  $p$ -Laplaciano e termo memória / Alan Kardec Reis Paciencia. – São Luís - MA, 2017.

55 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Equações de Placas. 3. Estabilidade Assintótica. 4. Pseudo Laplaciano. 5. Termo de Memória I. Título.

CDU : 501(812.1)

# ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA UM MODELO DISSIPATIVO DE EQUAÇÃO DE PLACAS COM $p$ - LAPLACIANO E TERMO DE MEMÓRIA

ALAN KARDEC REIS PACIENCIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática  
da Universidade Federal do Maranhão como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre em Matemática, aprovada em 05 de  
Janeiro de 2017.

## Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (Orientador)  
UFMA

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Renata de Farias Limeira Carvalho  
UFMA

---

Prof. Dr. Flank David de Moraes Bezerra  
UFPB

*A minha família, esposa e fi-  
lha.*

*“ A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.”*

*( Stephen Hawking )*

*“ Se tu o desejas, podes voar, só tens de confiar muito em ti.”*

*( Steve Jobs )*

# Agradecimentos

Inicialmente a Deus, por ter me fortalecido, cativado e me restabelecido nos momentos de desânimos, desmotivação e cansaços.

Aos meus pais, por sempre contribuir, e muito, em meio a tantas dificuldades pela minha formação.

A minha esposa, Samara dos Santos e Santos, pela paciência e companheirismo nas noites de intensos estudos.

Ao Prof. Marcos Antonio Ferreira de Araújo, por ter me acompanhado desde da graduação e agora como o meu orientador na pós graduação. Por ter também me auxiliado pacientemente durante todo o programa de pós graduação em Matemática.

Aos amigos do mestrado: Jadevilson Cruz, Geilson Mendes, Rondinelle, Geovan Carlos, Péricles, Washington, João Coelho, José Santana, Marlon César, Jadevaldo Cruz, Caio Damasceno, Dede Santos.

Aos amigos, amigas e alunos, por sempre me incentivarem com palavras positivas e construtivas ao longo dessa jornada.

E não menos importante, à CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado proporcionando meu desenvolvimento profissional e formação acadêmica.

# Resumo

No presente trabalho, estudaremos situações relacionadas a existência, unicidade, taxas de decaimento e comportamentos assintóticos de soluções para uma classe de equações de placas não linear e com termo de memória. Em particular, no primeiro capítulo revisamos alguns assuntos relacionados a uma série de resultados oriundos da teoria geral da análise funcional, os quais serão aplicados no decorrer dessa dissertação. No capítulo seguinte, abordaremos uma equação da placa de quarta ordem dissipativa com perturbações não lineares do tipo  $p$  - Laplaciano e localmente Lipschitz e com termo memória. Continuando, provamos a estabilidade exponencial de energia correspondente ao problema homogêneo com termo de memória de segunda ordem.

**Palavras-chave:** Equação de placa,  $p$  - Laplaciano, termo de memória, estabilidade assintótica, decaimento de energia.



# Abstract

In this work, we study situations involving the existence, uniqueness, decay rates and asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear equations cards and memory. In particular, in the first chapter we review some issues related to a number of results derived from the general theory of functional analysis, which will be applied during this dissertation. The next chapter will discuss an equation of the fourth order dissipative plate with nonlinear perturbations of type  $p$  - Laplacian and locally Lipschitz and memory. Continuing, we prove the exponential stability of energy corresponding to the homogeneous problem with second-order term of memory

**Keywords:** Plate equation  $p$  - Laplacian, memory, asymptotic stability, Energy decay.

# ÍNDICE DE NOTAÇÕES

## Geral

$|\Omega|$  := medida de Lebesgue de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ;

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$  e  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!$  para todo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ ;

$p' = \frac{p}{p-1}$  expoente conjugado de  $p$ ;

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$  para todo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ;

$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}^\Omega$ ;

$\hookrightarrow$  inclusão contínua;

$\hookrightarrow \hookrightarrow$  inclusão compacta;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  dualidade;

$(X, \|\cdot\|_X)$  espaço de Banach

## Operações de derivação

$$D^\alpha u = \begin{cases} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, & \text{se } \alpha \neq (0, \dots, 0) \\ u, & \text{se } \alpha = (0, \dots, 0) \end{cases}$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$$

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla|^{p-2} \nabla u)$$

## **Espaços de funções**

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é contínua}\}$$

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é } k \text{ - vezes continuamente diferenciável}\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é infinitamente diferenciável}\}$$

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \operatorname{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacta}\}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ ou } k = \infty$$

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid D^k u \text{ é } \alpha \text{ - Holder contínua}\}$$

$$\mathcal{D}(\Omega) := \text{espaço das funções teste}$$

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq K \text{ q.s. em } \Omega\}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$L_\mu^2(\mathbb{R}^+; X) = \{\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow X \mid \int_0^\infty \mu(s) \|\eta(s)\|_X^2 ds < \infty\}$$

$$L^p(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ é mensurável e } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty\}$$

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ é mensurável e } \|u(t)\|_X \leq K \text{ q.s em } (0, T)\}$$

$$C([0, T]; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ é contínua de } [0, T] \text{ em } X\}$$

$$C^k([0, T]; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ é } k - \text{vezes continuamente diferenciável de } [0, T] \text{ em } X\}$$

$$C_w([0, T]; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ é fracamente contínua de } [0, T] \text{ em } X\}$$

$$\mathcal{L}(X; Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ é linear e contínua}\}$$

### **Espaços duais**

$$X' = \mathcal{L}(X; \mathbb{R}) \text{ dual de } X$$

$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty$$

$$[W_0^{m,p}(\Omega)]' = W^{-m,p'}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$[H_0^m(\Omega)]' = H^{-m}(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}$$

$$[L^p(0, T; X)]' = L^{p'}(0, T; X'), \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$$

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), X)$$

### **Convergências**

$\rightarrow$  convergência forte

$\rightharpoonup$  convergência fraca

$\rightharpoonup^*$  convergência fraca estrela

## Memória

$$(g * u)(t) = \int_0^t g(t-s)u(x,s)ds$$

$$(g \square u)(t) = \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} |u(x,t) - u(x,s)|^2 dx ds$$

## Normas

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|$$

$$\|u(x)\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{\infty}$$

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_p$$

$$\|\eta\|_{\mu,X} = \left( \int_0^{\infty} \mu(s) \|\eta(s)\|_X^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\eta\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u(s)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u(x)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X$$

$$\|u\|_{C^k([0,T],X)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|_X$$

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |\langle \varphi, x \rangle|$$

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

# Sumário

|          |                                                                               |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                             | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Resultados de Análise Funcional</b>                                        | <b>6</b>  |
| 2.1      | Espaços de Banach e de Hilbert . . . . .                                      | 6         |
| 2.1.1    | Uma breve noção ao conceito de topologia fraca e fraca estrela . . .          | 10        |
| 2.2      | Alguns resultados importantes . . . . .                                       | 12        |
| 2.3      | O operador $p$ -Laplaciano . . . . .                                          | 16        |
| 2.3.1    | Uma desigualdade importante . . . . .                                         | 16        |
| 2.4      | Operadores lineares não limitados . . . . .                                   | 19        |
| 2.4.1    | Operador $A$ associado à uma forma bilinear . . . . .                         | 19        |
| 2.4.2    | Potências fracionárias do operador $A$ . . . . .                              | 20        |
| <b>3</b> | <b>Um modelo de placas com <math>p</math>-Laplaciano com termo de memória</b> | <b>21</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                                                          | 21        |
| 3.2      | Hipóteses e notações iniciais . . . . .                                       | 22        |
| 3.2.1    | Uma identidade para a memória . . . . .                                       | 23        |
| 3.3      | Existência e unicidade . . . . .                                              | 24        |
| 3.3.1    | Problema aproximado . . . . .                                                 | 24        |
| 3.3.2    | Estimativa a priori 1 . . . . .                                               | 25        |
| 3.3.3    | Passagem ao limite e solução fraca . . . . .                                  | 26        |
| 3.3.4    | Estimativa a priori 2 . . . . .                                               | 32        |
| 3.3.5    | Passagem ao limite e solução fraca mais regular . . . . .                     | 35        |
| 3.3.6    | Unicidade . . . . .                                                           | 35        |
| 3.4      | Decaimento exponencial de Energia . . . . .                                   | 37        |
|          | <b>Referências</b>                                                            | <b>42</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho tem com principal referência o trabalho de D. Andrade, M.A. Jorge Silva, T.F. Ma [8], seus resultados transportam conceitos e aplicações importante, onde, em particular os mesmos tratam fortemente da relação entre os termos do operador biharmônico, o operador  $p$ -Laplaciano, e o termo com memória; e também de, Cavalcanti e Ferreira [22]. Importante enfatizar, que [8] e [22] tem sido grandes contribuintes no que se diz respeito a equação diferenciais parciais, e em particular, equações de placas, sendo este último, um expoente na literatura brasileira.

Recentemente muitos estudos sobre equação de placa (de quarta ordem) e equação de onda (de segunda ordem), e também, perturbações não lineares das mesmas, tem sido estudados e desenvolvidos por matemáticos dentro da realidade de equação de evolução de segunda ordem, com respeito ao tempo  $t > 0$ . Dentro da linha de pesquisa de equações diferenciais parciais, constitui um primeiro momento, analisar questões relacionados a existência, unicidade e dependência contínuas de Problemas de Valor Inicial e de Fronteira. Em um segundo momento, é importante estudar as propriedades qualitativas das soluções globais obtidas inicialmente, como por exemplo, comportamento assintótico de soluções, que consiste basicamente, em decaimento exponencial, ou polinomial de soluções, ou mais ainda, a existência de atratores globais para o sistema dinâmico gerado por tais soluções do Problemas de Valor inicial e de Fronteira.

Sendo mais claro e específico, equações de placas com perturbações não linear do tipo  $\phi$  - Laplaciano

$$u_{tt} + \Delta_x^2 u - \operatorname{div}_x(\phi(\nabla_x u)) = F(x, u, u_t) \quad (1.1)$$

onde  $\phi(z) \approx |z|^{(p-2)}$ ,  $p \geq 2$  e  $F(x, u, u_t)$  representa, a adição de uma força externa e/ou uma dissipação linear(es) ou não linear(es). Neste exemplo, o operador  $\operatorname{div}_x(\phi(\nabla_x u))$  aparece como uma perturbação não linear de menor ordem do operador biharmônico  $\Delta_x^2$  na equação (1.1). No caso de equações da onda regida pelo operador  $\phi$ -Laplaciano com



dissipação viscosa  $-\Delta_x u_t$ , temos trabalhos importantes como os de Greenberg et al [16] em dimensões baixas. Em dimensões maiores, temos Tsutsumi [24] e Clements [17].

Retornando à equação (1.1), observamos que esta é um modelo de varios modelos importante que se aplicam em situações do cotidiano no que diz respeito a perturbações da equação da placa. Vejamos outros casos:

No caso bidimensional, a seguinte equação da placa não linear referente um modelo de Kirchhoff - Boussinesq

$$u_{tt} + ku_t + \Delta^2 u = \operatorname{div}\{|\nabla u|^2 \nabla u\} + \sigma \Delta\{f_1(u)\} - f_2(u)$$

definida sobre um domínio limitado  $\mathbb{R}^2$ , considerando três condições de fronteira.

No caso  $N$  - dimensional, Yang et al [96,97] trataram de uma classe de modelos de Kirchhoff por meio da equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \operatorname{div}\{|\nabla|^{m-1} \nabla u\} - \Delta u_t = h(x, u, u_t)$$

definida sobre um domínio de  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \leq 1$  natural e  $m \leq 1$  delimitando por uma constante que depende de  $N$  em dimensões mais altas, levando em consideração as condições de fronteiras pré - fixadas ou apoiadas.

Para completar o raciocínio, lembramos que um modelo corresponde ao fluxo de microestruturas elastoplásticas da forma

$$u_{tt} + u_{xxxx} + a(|u_x|^2)_x = 0$$

foi introduzido por An & Peirce [18] no caso bidimensional, onde  $a > 0$ , para o caso unidimensional. Assim sendo, ao observar o termo  $a(|u_x|^2)_x$  como um operador do tipo  $p$  - Laplaciano, notamos que este último modelo difere dos dois anteriores pelo sinal da perturbação oriunda do operador  $p$  - Laplaciano.

Em dimensões maiores com  $N \geq 3$  a dissipação forte  $-\Delta u_t$ , constitui papel importante no modelo de placa com perturbação de menor ordem do tipo  $p$  - Laplaciano

$$u_{tt} + \alpha \Delta^2 u - \Delta_p u = F(x, u, u_t) \quad (1.2)$$

onde

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad p \geq 2$$

e  $\alpha > 0$  é uma constante. De fato, para  $\alpha = 1$  a existência global e unicidade de soluções podem ser verificadas adicionando uma dissipação forte  $-\Delta u_t$ , assim como Yang et al [32]. Contudo, se considerarmos apenas uma dissipação fraca  $u_t$ , então, se torna difícil obter unicidade e a continuidade de soluções globais no caso  $N$  - dimensional, para  $N \geq 3$ . Ao

contrário, para  $N = 1$  ou  $N = 2$ , a boa colocação do problema (1.2) adicionando uma dissipação fraca, já é conhecida.

O presente trabalho, procura fornecer resultados relacionados a existência global de soluções para a equação (1.2) sob o efeito de um termo de memória. A seguir, buscaremos as propriedades qualitativas das soluções com respeito a estabilidade assintótica ao longo do tempo.

De forma mais concisa, estudaremos em um primeiro momento a existência de soluções e decaimento de energia para equação (1.2) em um domínio limitado de  $\mathbb{R}^N$ , considerando

$$F(x, u, u_t) := -(g * \Delta u)(t) + \Delta u_t - f(u) \quad (1.3)$$

onde a convolução em (1.3), representando um termo de memória não local (*memória sem história*), sendo dado por

$$(g * y)(t) = \int_0^t g(t-s)y(s)ds, \quad t > 0,$$

e a função  $g$  é chamada de *núcleo da memória*. Sendo assim, relacionando (1.2) e (1.3), estudamos no próximo capítulo um problema de valor inicial e de fronteira para a seguinte equação da placa não linear com memória

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t + f(u) = 0 \quad (1.4)$$

em  $\Omega \times (0, +\infty)$ , onde  $\alpha = 1$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado.

É importante enfatizar que o procedimento utilizado para estudar (1.4) gerou, em um primeiro momento, uma certa dificuldade técnica ao considerar um termo de memória do tipo  $\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds$ . Contudo, com um pouco mais de perícia, também podemos concluir a veracidade dos resultados de existência e comportamento assintótico substituindo o termo de memória de segunda ordem  $\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds$  por um termo de memória de quarta ordem  $\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds$ , a menos do sinal.

Continuando, nosso objetivo em um segundo momento foi de estender os conceitos estabelecidos anteriormente e acoplando à equação (1.2) uma memória com história para  $t < 0$ , de onde teremos de introduzir a história com deslocamento relativo. O motivo pra tal, é que a equação (1.4) não corresponde a um sistema autônomo, justamente pela convolução  $(g * \Delta u)(t) = \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds$ , que depende de  $t > 0$ , e é de segunda ordem. Em função disso, não poderíamos estudar a dinâmica assintótica para as soluções do problema por meio da teoria estabelecida para problemas autônomos. No entanto, para contornar essa situação, estudamos a existência de soluções para a equação (1.2) em domínio limitado de  $\mathbb{R}^N$ , definindo  $F(x, u, u_t)$  como

$$F(x, u, u_t) := \int_{-\infty}^t \mu(t-s)\Delta^2 u(s) + \Delta u_t - f(u) + h(x) \quad (1.5)$$

O comportamento assintótico de soluções também foi estudado quando a força externa  $h$  é identicamente nula, ou seja, quando  $h \equiv 0$ . Note que o termo integral (memória original) que surge em (1.5) pode ser reescrito como

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-s) \Delta^2 u(s) ds = \int_0^\infty \mu(s) \Delta^2 u(t-s) ds \quad (1.6)$$

Assim, combinando a equação (1.2) com as identidades (1.5) e (1.6), chegamos a seguinte classe de equações da placa não linear com memória, com história  $t < 0$

$$u_{tt} + \alpha \Delta^2 u - \Delta_p u - \int_0^\infty \mu(s) \Delta^2 u(t-s) ds - \Delta u_t + f(u) = h \quad (1.7)$$

em  $\Omega \times (0, +\infty)$ , com condições iniciais e de fronteira pré - estabelecidas, onde  $\alpha = \alpha(0) > 0$  é uma constante interligada ao núcleo de memória  $\mu$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado.

Por outro lado, nos deparamos com uma forma de modelar a equação da placa no caso bidimensional,  $N = 2$ , por meio de um sistema de equações de segunda ordem, do tipo "equação de ondas", a saber, o modelo de placas finas de Mindlin - Timoshenko como tratado em Lagnese [14]. Mais precisamente, consideremos o seguinte modelo de placas de Mindlin - Timoshenko

$$\begin{cases} \rho h w_{tt} & - & K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] & = & 0 \\ \frac{\rho h^3}{12} \psi_{tt} & - & D \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) + K \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & = & 0 \\ \frac{\rho h^3}{12} \varphi_{tt} & - & D \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) + K \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & = & 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

em  $\Omega \times (0, \infty)$ , onde  $\Omega$  é um domínio limitado de  $\mathbb{R}^2$ . As constantes positivas  $\rho$  representa a densidade,  $h$  representa a espessura uniforme da placa,  $K$  exprime o módulo de cisalhamento,  $D$  denota o módulo de rigidez à flexão e a constante  $0 < \mu < 1/2$  é chamada *coeficiente de Poisson*, sendo proveniente de considerações físicas sobre a placa. Já as funções  $\psi = \psi(x, y, t)$  e  $\varphi = \varphi(x, y, t)$  representam os ângulos de rotação de um filamento de placa e a função  $w = w(x, y, t)$  denota o deslocamento transversal da superfície média da placa, para  $(x, y) \in \Omega$  e  $t \geq 0$ .

De modo mais conciso, demotando por  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  os seguintes operadores lineares elípticos de segunda ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\psi, \varphi, w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mathcal{L}_2(\psi, \varphi) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

,

$$\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

estudamos o comportamento assintótico de soluções para o seguinte sistema de placas de Mindlin - Timoshenko com dissipação viscosa

$$\begin{cases} \rho h w_{tt} & - & K \mathcal{L}_1(\psi, \varphi, w) & - & D_0 \Delta w_t & = & 0 \\ \frac{\rho h^3}{12} \psi_{tt} & - & D \mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + K \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & - & D_1 \mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t) & = & 0 \\ \frac{\rho h^3}{12} \varphi_{tt} & - & D \mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + K \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & - & D_1 \mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t) & = & 0 \end{cases}$$

em  $\Omega \times (0, \infty)$ , com condições iniciais e de fronteira pré - estabelecidas.

# Capítulo 2

## Resultados de Análise Funcional

Este capítulo inicial, tem um caráter introdutório e particular sobre alguns conceitos. Aqui, vamos introduzir as notações que serão utilizadas em toda a dissertação, bem como, apresentar alguns dos resultados mais clássicos da teoria geral de análise não linear, análise funcional e espaços de Sobolev. Faremos uso de tais resultados no capítulo seguinte para facilitar a compreensão do conteúdo abordado e, também de tornar este trabalho autossuficiente e didaticamente lógico. Os teoremas, proposições, lemas e outros, serão apresentados sem nenhuma prova formal, salvo justificativas e exceções bem particulares.

### 2.1 Espaços de Banach e de Hilbert

Iniciaremos com alguns conceitos básicos da teoria dos espaços de Sobolev e análise funcional, seguindo as referências Adams & Fournier [26], Brézis [6], Folland [13], Lions [15] e Medeiros [20], que serviram de sustento ao longo de nosso trabalho.

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto. Para  $1 \leq p < \infty$  denotamos por  $L^p(\Omega)$  o conjunto das classes de funções Lebesgue mensuráveis  $u$ , tais que  $|u|^p$  é uma função integrável sobre  $\Omega$ . Em termos de conjuntos

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Em  $L^p(\Omega)$  podemos definir a norma usual como segue

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Deste modo,  $(L^p(\Omega); \|\cdot\|_p)$  é um espaço de Banach. No caso particular, quando  $p = 2$ , temos também que  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto escalar  $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$  e a norma  $\|u\|_2 = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ .

Para  $p = \infty$ , definimos  $L^\infty(\Omega)$  com sendo o conjunto das classes de funções Lebesgue mensuráveis  $u$ , limitadas quase sempre (q.s) sobre  $\Omega$ . Em termos de conjuntos

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável, } |u(x)| \leq K \text{ q.s em } \Omega\}$$

Neste caso, diz-se que o único número real  $K$  é um *majorante essencial* de  $u$  e denotado por  $A = \{K \in \mathbb{R} \mid |u(x)| \leq K \text{ q.s em } \Omega\}$ , podemos definir uma norma em  $L^\infty(\Omega)$  como

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf A$$

Neste modo,  $(L^\infty(\Omega); \|\cdot\|_\infty)$  é um Espaço de Banach.

Dado um multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  e um ponto  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , defini-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} \text{ e } \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!$$

O operador de Derivação de ordem  $\alpha$ , denotado por  $D^\alpha$ , é definido como

$$D^\alpha u = \begin{cases} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, & \text{se } \alpha \neq (0, \dots, 0) \\ u, & \text{se } \alpha = (0, \dots, 0) \end{cases}$$

Quando o multi-índice é da forma  $\alpha = (0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^N$ , o operador derivação  $D^\alpha$  também é representado pelas seguintes notações

$$D^i = D_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} = (\cdot)_{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Agora, para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , denotaremos por  $C^k(\Omega)$  o conjunto das funções  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis sobre o aberto  $\Omega$ . Quando  $k = 0$  dizemos simplesmente que  $C^0(\Omega)$  é o conjunto das funções contínuas sobre  $\Omega$  e, também, o denotaremos por  $C(\Omega)$ . Quando  $k = \infty$ , diremos que  $C^\infty(\Omega)$  é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis sobre  $\Omega$ . Para uma função  $u \in C^k(\Omega)$ , defini-se o *suporte* de  $u$  como  $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}^\Omega \subset \Omega$  e por  $C_0^k(\Omega)$  denotaremos as funções  $u$  de  $C^k$  cujo suporte é compacto em  $\mathbb{R}^N$ . Em termos de conjuntos

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é contínua}\}$$

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é infinitamente diferenciável}\}$$

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacta}\}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ ou } k = \infty$$

**Definição 2.1.1.** Diremos que uma sequência (ou sucessões) de funções  $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty$  converge à uma função  $\varphi \in C_0^\infty$  se, e somente se, existe um subconjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que

- (i)  $\text{supp}(\varphi) \subset K$  e  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente sobre  $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$

Com esta noção de convergência nos espaços  $C_0^\infty(\Omega)$ , o denotaremos também por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e o chamaremos de *espaços das funções teste*. Além disso, denotaremos também por  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos de  $X$  em  $\mathbb{R}$ , definimos o espaço das distribuições sobre  $\Omega$  com valores em  $\mathbb{R}$  por

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$$

onde a continuidade é entendida no sentido da convergência em  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Com relação à derivada de uma distribuição a valores reais, lembramos que para  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , sua derivada de ordem  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  é dada por

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A seguir vamos relembrar a definição dos *espaços de Sobolev*, os quais constituirão fundamental importância em nossas considerações futuras. Para  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , denotaremos por  $W^{m,p}(\Omega)$  o conjunto das classes de funções  $u$  em  $L^p(\Omega)$ , tais que suas derivadas  $D^\alpha u$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq m$ , ainda pertençam a  $L^p(\Omega)$ , onde a derivada se dá no sentido das distribuições. Em termos de conjuntos,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

Em  $W^{m,p}(\Omega)$  tem-se bem definida uma norma dada por

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

e

$$\|u\|_{m,p} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|$$

No caso particular  $p = 2$ , o espaço  $W^{m,2}(\Omega)$  ( $W_0^{m,2}(\Omega)$ ) é também um espaço de Hilbert com o correspondente produto interno e, usualmente, é denotado por  $H^m(\Omega)$  ( $H_0^m(\Omega)$ ).

No que segue,  $X$  denotará um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_X$  e  $H$  denotará um espaço de Hilbert com produto interno  $(\cdot, \cdot)_H$  e norma  $\|\cdot\|_H$ .

Terminaremos esta primeira seção apresentando os espaços de Banach, ou Hilbert, a valores abstratos  $L^p(a, b; X)$ ,  $C^k([a, b], X)$ ,  $C_w([a, b], X)$  e os espaços das distribuições

vetoriais  $\mathcal{D}'(a, b; X)$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Contudo, para nossos objetivos futuros é suficiente compreender os espaços acima com  $a = 0$  e  $b = T$ , onde  $T > 0$  é um número real positivo fixado ou  $T = \infty$ .

Para  $1 \leq p < \infty$ , representaremos por  $L^p(0, T; X)$  o conjunto das classes de funções vetoriais mensuráveis  $u : (0, T) \rightarrow X$ , tais que  $\|u(t)\|_X$  pertence a  $L^p(0, T)$ . Em termos de conjunto,

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ é mensurável, } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}$$

O espaço  $L^p(0, T; X)$  munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

torna-se um espaço de Banach.

Quando  $p = \infty$ , representaremos por  $L^\infty(0, T; X)$  o conjunto das classes de funções vetoriais mensuráveis  $u : (0, T) \rightarrow X$ , tais que  $\|u(t)\|_X$  pertence a  $L^\infty(0, T)$ . Em termos de conjunto,

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ é mensurável, } \|u(t)\|_X \leq K \text{ q.s. em } (0, T)\}$$

Em  $L^\infty(0, T; X)$  defini-se uma norma dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X,$$

o que o torna também um espaço de Banach.

Além disso, é fácil ver que valem as seguintes propriedades:

a) Se  $X \hookrightarrow Y$ , então  $L^p(0, T; Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

b)  $L^\infty(0, T; X) \xrightarrow{T < \infty} L^1(0, T; X)$ ,  $1 < p < \infty$

Para  $k \in \mathbb{N}$ , definimos também o espaço de Banach

$$C^k([0, T], X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciáveis de } [0, T] \text{ em } X\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{C^k([0, T], X)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|_X$$

Para abranger todos os espaços que surgirão mais adiante, lembraremos também o conceito *continuidade fraca* de funções a valores abstratos. Denotaremos por  $C_w([0, T], X)$  o espaço de todas as funções  $u : [0, T] \rightarrow X$  que é contínua de  $[0, T]$  em  $(x, \tau)$ , onde



$\tau = \sigma(X, X')$  designa a topologia fraca de  $X$ , ou seja, para toda  $\varphi \in X'$ , onde  $X'$  (é o dual de  $X$ ), a função  $t \mapsto \langle u(t), \varphi \rangle$  é contínua em  $[0, T]$ . Em termos de conjunto temos

$$C_w([0, T], X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ é contínua de } [0, T] \text{ em } (X, \tau)\}.$$

Um pouco mais adiante, em um subseção separada, faremos uma breve revisão sobre o conceito de topologia fraca para qua a definição não fique vaga no texto. Antes disso, vamos expor também o espaço das distribuições a valores abstratos.

Denotando por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço vetorial das transformações lineares e contínuas de  $X$  em  $Y$ , definimos o espaço das *distribuições vetoriais* de  $(0, T)$  com valores em  $X$  por

$$\mathcal{D}'(0, T; X) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), X).$$

Para  $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ , lembramos que sua derivada de ordem  $n$  no sentido das distribuições vetoriais é definida por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T) \quad (2.1)$$

Além disso, se  $f$  é derivável no sentido das distribuições vetoriais, então podemos enxergar  $\frac{df}{dt}$  como um elemento de  $\mathcal{D}'(0, T; X)$ , valendo a relação (2.1).

Fazendo uma conexão entre os espaços definidos acima. De fato, dada  $f \in L^p(0, T; X)$ , então pode-se identificar  $f$  com uma distribuição vetorial, que ainda denotaremos por  $f$ , de modo que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

onde a integral é entendida no sentido de Bochner. Com isto, podemos dizer com um certo abuso de notação, que

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X).$$

### 2.1.1 Uma breve noção ao conceito de topologia fraca e fraca estrela

Vamos estabelecer a seguir os conceitos de convergência fraca e fraca estrela num espaço de Banach  $X$  com norma  $\|\cdot\|_X$ . Consideremos inicialmente o *dual topológico*  $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ , que é também um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Além disso, podemos considerar o espaço de Banach *Bidual*  $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{R})$  de  $X$ , munido da norma

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f \in X', \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|.$$

Como é bem sabido da teoria de análise funcional, a aplicação

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto J_x \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} J_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto J_x(f) \end{aligned}$$

onde  $J_x(f) := \langle f, x \rangle$ , é um isomorfismo de  $X$  sobre  $J(X)$ . Isto nos permite identificar  $X$  com  $J(X) \subset X''$ .

Agora, para cada  $f \in X'$  consideremos o funcional

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) \end{aligned}$$

onde  $\varphi_f(x) := \langle f, x \rangle$ . Assim, percorrendo  $f \in X'$  obteremos uma família de aplicações  $\{\varphi_f\}_{f \in X'}$ . Sob estas considerações dizemos que:

(i) A *topologia fraca*  $\sigma(X, X')$  em  $X$  é a topologia mais grossa (menos fina) em  $X$  no qual são contínuas todas as funções  $\varphi_f$ ,  $f \in X'$ .

(ii) A *topologia fraca estrela*  $\sigma(X', X)$  em  $X'$  é a topologia mais grossa (menos fina) em  $X'$  no qual são contínuas todas funções  $J_x$ ,  $x \in X$ .

**Definição 2.1.2.** Diremos que uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  **converge fraco** para  $x \in X$ , quando  $\{x_n\}$  converge a  $x$  na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ . Isto é, para todo funcional  $f \in X'$  temos

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Denotaremos a convergência fraca de  $\{x_n\}$  a  $x$  por  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Definição 2.1.3.** Diremos que uma sequência  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$  **converge fraco estrela** para  $f \in X'$ , quando  $\{f_n\}$  converge a  $f$  na topologia fraca estrela  $\sigma(X', X)$ . Isto é, para todo funcional  $x \in X$  temos

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Denotaremos a convergência fraca estrela de  $\{f_n\}$  a  $f$  por  $x_n \xrightarrow{*} x$ .

Como é usual a **convergência forte** (em norma) de  $\{x_n\}$  a  $x \in X$ , será denotada por  $x_n \rightarrow x$ .

**Definição 2.1.4.** Um espaço de Banach  $X$  é chamado **reflexivo** quando  $J(X) = X''$ , onde a aplicação  $J$  definida acima, é chamado de mergulho canônico. O espaço  $X$  é chamado **separável** quando existe um subconjunto enumerável e denso  $Y \subset X$ .

Com relação aos espaços mencionados na seção 1.1, valem as seguintes identifi-  
ficações para  $1 \leq p < \infty$ ,  $q$  satisfazendo  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $m \geq 1$ ,

$$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega) \quad \text{e} \quad [L^\infty(\Omega)]' \not\cong L^1(\Omega),$$

$$[W_0^{m,p}(\Omega)] \cong W^{-m,p}(\Omega),$$

$$[L^p(0, T, X)]' \cong L^q(0, T, X').$$

## 2.2 Alguns resultados importantes

Nesta seção faremos uma coletânea de alguns resultados clássicos oriundos da teoria geral de análise funcional e espaços de Sobolev, os quais serão extremamente úteis ao longo desse trabalho. Nos resultados abaixo seguimos as notações introduzidas em Adams & Fournier [26], Brézis [6], Evans [10], Henry [9], Lions [15], Pazy [25] e Zheng [33]. Também usamos as referências em português de Cavalcanti & Domingos Cavalcanti [23], Medeiros [20], Medeiros & Milla Miranda [19].

**Lema 2.2.1.** *Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^N$ .*

- (i) *Se  $1 < p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é reflexivo. Entretanto,  $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  não são reflexivos.*
- (ii) *Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é separável. Entretanto,  $L^\infty(\Omega)$  não é separável.*

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Densidade). *Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^N$*

- (i) *Se  $k \geq 0$ , então  $C_0^k(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ , para  $1 \leq p < \infty$ .*
- (ii) *Se  $\Omega$  é de classe  $C^m$ ,  $m \geq 1$ , então  $C^m(\overline{\Omega})$  é denso em  $W^{m,p}(\Omega)$ , para  $1 \leq p < \infty$ .*

**Teorema 2.2.3** (Imersões de Sobolev). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira de classe  $C^m$ .*

- (i)  *$mp < N$ , então a seguinte inclusão é contínua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega), \quad \text{onde} \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

*Além disso, a inclusão é compacta para qualquer  $q$ , com  $1 \leq q < q^*$ .*

- (ii) *Se  $mp = N$ , então a seguinte inclusão é contínua e compacta*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para todo} \quad 1 \leq q < \infty$$

(iii) Se  $k + 1 > m - \frac{N}{p} > k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , então escrevendo  $m - \frac{N}{p} = k + \alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , temos que a seguinte inclusão é contínua

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

onde  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  representa o espaço das funções em  $C^k(\overline{\Omega})$  cujas derivadas de ordem  $k$  são  $\alpha$ -Holder contínuas. Além disso, se  $N = m - k - 1$ ,  $\alpha = 1$  e  $p = 1$ , então a inclusão vale também para  $\alpha = 1$ , e a inclusão  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$  é compacta para todo  $0 \leq \beta < \alpha$ .

**Teorema 2.2.4** (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). *Seja  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira de classe  $C^m$  e  $u \in W^{m,r} \cap L^q(\Omega)$  onde  $1 \leq r, q \leq \infty$ . Para qualquer inteiro  $j$  com  $0 \leq j < m$  e qualquer  $\theta$  com  $j/m \leq \theta \leq 1$ , temos*

$$\|D^j u\|_p \leq C \|u\|_{m,r}^\theta \|u\|_q^{1-\theta}, \quad (2.2)$$

desde que

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta \left( \frac{1}{r} - \frac{m}{N} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q}$$

e  $m - j - N/r$  não é um inteiro não negativo. Se  $m - j - N/r$  é um inteiro não negativo, (2.2) vale com  $\theta = j/m$ .

**Teorema 2.2.5** (Teorema de Interpolação). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira suave. Suponhamos que*

$$p \leq q \leq \infty \quad \text{se} \quad mp > N,$$

$$p \leq q < \infty \quad \text{se} \quad mp = N,$$

$$p \leq q \leq \frac{Np}{N - mp} \quad \text{se} \quad mp < N.$$

Então existe uma constante  $K = K(N, m, p, q, \Omega) > 0$  talque para todo  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ ,

$$\|u\|_q \leq K \|u\|_{m,p}^\theta \|u\|_p^{1-\theta},$$

onde  $\theta = (N/mp) - (N/mq)$ .

**Teorema 2.2.6** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado e  $1 \leq p < \infty$ . Então existe uma constante  $C = C(p, |\Omega|) > 0$  tal que*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Teorema 2.2.7** (Fórmula de Green). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado com fronteira  $\Gamma$  suave. Se  $u, v \in H^2(\Omega)$ ,*

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS,$$

*onde  $\nu$  representa o vetor normal unitário exterior a  $\Gamma$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$  a derivada normal de  $u$ .*

**Teorema 2.2.8** (Desigualdade de Holder). *Sejam  $1 \leq p, q \leq \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$ , então  $uv \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

**Teorema 2.2.9** (Desigualdade de Holder Generalizada). *Sejam  $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_n \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \leq 1$ . Se  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, n$ , então  $f := \prod_{i=1}^n f_i \in L^r(\Omega)$  e*

$$\|f\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

**Lema 2.2.10** (Desigualdade de Gronwall). *Sejam  $\alpha \geq 0$  uma constante e  $\phi \in L^\infty(a, b)$ ,  $\beta \in L^1(a, b)$  tais que  $\beta > 0$ ,  $\phi \geq 0$ . Se*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^b \beta(s) \phi(s) ds, \quad a \leq t \leq b$$

*então*

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^b \beta(s) ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

**Lema 2.2.11** (Desigualdade de Young). *Seja  $1 < p, q < \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

**Lema 2.2.12** (Desigualdade de Young com  $\epsilon$ ). *Seja  $1 < p, q < \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $\epsilon > 0$  qualquer. Então*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q, \quad \forall a, b \geq 0.$$

*onde  $C_\epsilon = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$ . No caso particular em que  $p = q = 2$ , a desigualdade de Young com  $\epsilon > 0$  se reduz em  $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ ,  $\forall a, b \geq 0$ , sendo conhecida como desigualdade de Cauchy com  $\epsilon$ .*

**Teorema 2.2.13** (Aubin-Lions). *Sejam  $X_0, X_1, X$  três espaços de Banach com  $X_0$  e  $X_1$  reflexivos. Suponhamos que  $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$ , e para quaisquer  $p_0, p_1$  com  $1 < p_0, p_1 < \infty$ , consideremos o espaço*

$$W = \{u \mid u \in L^{p_0}(0, T; X_0), u_t \in L^{p_1}(0, T; X_1)\},$$

*munido da norma  $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; X)} + \|u_t\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}$ . Então,*

$$W \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X).$$

**Lema 2.2.14.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Se  $f \in L^p(0, T; X)$  e  $\frac{df}{dt} \in L^p(0, t; x)$ , então  $f \in C([0, T], X)$ , a menos de um conjunto de medida nula em  $[0, T]$ .*

**Lema 2.2.15.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach tal que  $X \hookrightarrow Y$ . Então*

$$[L^\infty(0, T; X) \cap C_w([0, T], Y)] \subset C_w([0, T], X).$$

*Se a inclusão de  $X$  em  $Y$  for densa e  $X$  for reflexivo, então vale também a inclusão contrária.*

**Teorema 2.2.16** (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet). *Seja  $(H, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot)_H)$  um espaço de Hilbert. Para todo funcional  $\varphi \in H'$ , existe um único  $f \in H$  tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle_{H', H} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

*Além disso,  $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H$ .*

**Teorema 2.2.17** (Teorema de Lax-Milgram). *Seja  $(H, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot)_H)$  um espaço de Hilbert e  $a(u, v)$  uma forma bilinear contínua e coerciva. Então para todo funcional  $\varphi \in H'$ , existe um único  $u \in H$  tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H', H}, \quad \forall v \in H.$$

*Além disso, se  $a(u, v)$  é simétrica, então  $u$  se caracteriza pela propriedade*

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle_{H', H} = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle_{H', H} \right\}.$$

**Teorema 2.2.18** (Compacidade Fraca). *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo. Se  $B \subset X$  é limitado, então  $B$  é compacto na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ , isto é, qualquer sequência  $\{x_n\} \subset B$  possui uma subsequência  $\{x_{n_k}\}$  convergente em  $X$  na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ .*

**Teorema 2.2.19** (Compacidade Fraca Estrela). *Seja  $X$  um espaço de Banach separável. Se  $F \subset X'$  é limitado, então  $F$  é compacto na topologia fraca estrela  $\sigma(X', X)$ , isto é, qualquer sequência  $\{f_n\} \subset F$  possui uma subsequência  $\{f_{n_k}\}$  convergente em  $X'$  na topologia fraca estrela  $\sigma(X', X)$ .*

## 2.3 O operador p-Laplaciano

O operador pseudo Laplaciano, que neste trabalho será chamado simplesmente de *operador p-Laplaciano*, e denotado por  $\Delta_p$ , é definido sob duas formas:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou

$$\Delta_p u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $p > 1$ . Estas duas formas assumidas pelo operador  $p$ -Laplaciano correspondem às derivadas de Fréchet em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  dos funcionais

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^p dx,$$

respectivamente. Cabe ressaltar que  $\Delta_p u$  é um operador de segunda ordem não linear, sendo que no caso particular  $p = 2$  o mesmo se reduz ao operador (linear) Laplaciano  $\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ . Por questões técnicas vamos utilizar, por todo esse trabalho, a primeira das formas estipuladas para o operador  $p$ -Laplaciano.

É interessante lembrar também que o operador  $p$ -Laplaciano aplica  $W_0^{1,p}(\Omega)$  no espaço  $W^{-1,p'}(\Omega) = [W_0^{1,p}(\Omega)]'$ , onde  $2 \leq p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\longmapsto \Delta_p u \end{aligned}$$

onde  $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ .

Vale a pena lembrar, que  $\Delta_p$  é um operador limitado, isto é, leva conjuntos limitados de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  em conjuntos limitados de  $W^{-1,p'}$ .

Vamos introduzir agora uma importante condição relacionada ao operador  $p$ -Laplaciano que usaremos com certa frequência mais adiante desse trabalho, a saber, a seguinte identidade

$$-\langle \Delta_p u, v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle_{L^{p'}(\Omega), L^p(\Omega)}$$

vale para todos  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

### 2.3.1 Uma desigualdade importante

A seguir fornecemos uma desigualdade que será útil ao trabalharmos com termos que envolvem o operador  $p$ -Laplaciano em nossas considerações futuras. Além de eficaz, veremos que esta desigualdade segue como consequência da desigualdade do valor médio para aplicações em  $\mathbb{R}^N$ .

**Lema 2.3.1.** *Exite uma constante  $M = M(p, N) > 0$  tal que*

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq M(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

o simbolo  $|\cdot|$  denota a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^N$  e  $p \geq 2$ .

*Demonstração.* Definamos inicialmente a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

onde  $F(x) := |x|^{p-2}x$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$ .

Note que as funções componentes de  $F$ , dadas por

$$F_j(x) = |x|^{p-2}x_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

são diferenciáveis em  $\mathbb{R}^N$ . De fato, simples cálculos implicam

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x) = (p-2)|x|^{p-4}x_i x_j \quad \text{se } i \neq j,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_j(x) = (p-2)|x|^{p-4}x_j + |x|^{p-2} \quad \text{se } i = j,$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ . Assim é claro que  $\frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x)$  são contínuas em  $\mathbb{R}^N - \{0\}$  e também é simples verificar pela definição que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_j(\mathbf{0}) = 0 = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x), \quad \mathbf{0} = (0, \dots, 0),$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ . Isto implica que as derivadas parciais das funções componentes  $F_j$  existem e são contínuas em  $\mathbb{R}^N$ , ou seja, as funções  $F_j$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}^N$  e, consequentemente, a aplicação  $F$  é também diferenciáveis em  $\mathbb{R}^N$ . Logo, fica bem definida a aplicação derivada operador linear

$$\begin{aligned} F' : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ x &\longmapsto F'(x) \end{aligned}$$

onde

$$F'(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Além disso, temos

$$||F'(x)|| \leq N^2(p-1)|x|^{p-2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad (2.3)$$

onde  $||\cdot||$  menciona a norma no espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ . Com efeito, note que

$$||F'(x)|| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N, |v| \leq 1} |F'(x) \cdot v| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N, |v| \leq 1} \left| \frac{\partial F(x)}{\partial v}(x) \right| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N, |v| \leq 1} \left| \left( \frac{\partial F_1}{\partial v}(x), \dots, \frac{\partial F_N}{\partial v}(x) \right) \right|,$$



o que aplica em

$$\|F'(x)\| \leq N \sup_{|v| \leq 1} \max_{1 \leq j \leq N} \left| \frac{\partial F_j}{\partial v}(x) \right|. \quad (2.4)$$

Agora, tomando  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  e observando que as funções  $F_j$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}^N$  segue que

$$\frac{\partial F_j}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \alpha_i, \quad j = 1, \dots, N$$

Logo,

$$\left| \frac{\partial F_j}{\partial v}(x) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \right| |\alpha_i| \leq \left( \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq N \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \right| |v|,$$

de onde segue que

$$\max_{1 \leq j \leq N} \left| \frac{\partial F_j}{\partial v}(x) \right| \leq N \max_{1 \leq i, j \leq N} \left| \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \right| |v| \leq N(p-1)|x|^{p-2}|v|,$$

ou ainda,

$$\sup_{|v| \leq 1} \max_{1 \leq j \leq N} \left| \frac{\partial F_j}{\partial v}(x) \right| \leq N(p-1)|x|^{p-2}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos (2.3) com desejada.

Dado  $x, y \in \mathbb{R}^N$  considere o segmento  $[y, x] \subset \mathbb{R}^N$ . Para todo  $\xi \in [y, x]$  segue de (2.3) que

$$\|F'(\xi)\| \leq N^2(p-1)|\xi|^{p-2}.$$

Mais ainda, para  $\xi \in [y, x]$  existe uma constante  $\theta = \theta(x, y) \in [0, 1]$  tal que  $\xi = (1-\theta)y + \theta x = y + \theta(x-y)$ . Logo,

$$|\xi|^{p-2} \leq (|y| + \theta|x-y|)^{p-2} \leq 2^{p-2}(|y| + |x|)^{p-2} \leq 2^{2(p-2)}(|y|^{p-2} + |x|^{p-2}).$$

Assim,

$$\|F'(\xi)\| \leq (2^{p-2}N)^2(p-1)(|y|^{p-2} + |x|^{p-2}), \quad \forall \xi \in [y, x] \quad (2.6)$$

Como  $F$  é diferenciável no segmento aberto  $(y, x)$ , contínua no segmento fechado  $[y, x]$  e vale a estimativa (2.6), então a Desigualdade de Valor Médio para aplicações implica que vale

$$|F(x) - F(y)| \leq M(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y|,$$

onde  $M = (2^{p-2}N)^2(p-1)$ . Concluindo a demonstração.  $\square$

## 2.4 Operadores lineares não limitados

Iniciaremos esta seção fazendo uma breve síntese sobre a construção de operadores lineares não limitados associados a uma forma bilinear. Posteriormente, relembremos alguns fatos sobre os operadores com potência fracionária, os quais terão papel importante em nossas considerações futuras. Para maiores detalhes sobre o assunto recomendamos os trabalhos de Kreyszig [11], Medeiros & Milla Miranda [19], Temam [30], Yosida [21] e Zheng [33].

### 2.4.1 Operador $A$ associado à uma forma bilinear

Sejam  $(V, \|\cdot\|_V, (\cdot, \cdot)_V)$  e  $(H, \|\cdot\|_H, (\cdot, \cdot)_H)$  dois espaços de Hilbert tais que  $V$  é denso em  $H$ , com inclusão  $V \hookrightarrow H$  contínua e compacta. Denotaremos por  $V'$  o dual de  $V$  e por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a dualidade entre  $V'$  e  $V$ . Identificando  $H$  com seu dual, por meio do Teorema da representação de Riesz, obtemos a seguinte de inclusões

$$V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'.$$

Considerando uma forma bilinear e contínua  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos definir um operador linear  $A : V \rightarrow V'$  dado por

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Mais ainda, o domínio do operador  $A$  é dinido como

$$D(A) = \{u \in V \mid Au \in H\},$$

e dizemos ainda que o operador linear  $A$  é definido pela terna  $\{V, H, a(\cdot, \cdot)\}$ .

Relembrando ainda a teoria de análise funcional, que se  $a(\cdot, \cdot)$  for uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica, então o operador linear  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  é fechado, não limitado, positivo e definido, autoadjunto e uma bijeção (isomorfismo). Além disso, dotando o domínio  $D(A)$  com norma  $\|u\|_{D(A)} = \|Au\|_H$ , que é equivalente a norma do gráfico  $\|u\|_G^2 = \|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2$  obtemos que  $D(A)$  é um espaço de Hilbert denso em  $H$ . Um clássico exemplo de uma forma bilinear satisfazendo as condições acima é dada pelo produto interno  $(\cdot, \cdot)_V$  em  $V$ . Neste caso, considerando o operador  $A$  dado pela terna  $\{V, H, (\cdot, \cdot)_V\}$ , então  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  é tal que

$$(Au, v)_H = (u, v)_V, \quad \forall v \in V$$

Mediante às condições satisfeitas pelo operador  $A$  acima e usando também que a inclusão  $V \hookrightarrow H$  é compacta, segue da teoria espectral que existe uma base ortonormal

completa  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de  $H$  e uma sequência de números reais  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tais que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad \text{com } \lambda_j \rightarrow \infty \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

$$\omega_j \in D(A) \quad \text{e} \quad A\omega_j = \lambda_j \omega_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Note que vale ainda as seguintes relações

$$(\omega_i, \omega_j)_H = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad a(\omega_i, \omega_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

onde  $\delta_{ij}$  denota o delta de Kronecker.

### 2.4.2 Potências fracionárias do operador $A$

Sob as hipóteses da subseção anterior, podemos definir também os operadores com potências fracionárias  $A^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , do operador  $A$ . Mais ainda, os operadores  $A^s$  podem ser caracterizados em termos da base  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

Iniciamos observando que para  $s > 0$  o operador  $A^s : D(A^s) \subset H \rightarrow H$  é um operador linear não limitado, positivo definido, autoadjunto e injetivo, cujo o domínio  $D(A^s)$  é denso em  $H$ . Além disso, munindo  $D(A^s)$  com o produto interno e norma

$$(u, v)_{D(A^s)} = (A^s u, A^s v)_H \quad \text{e} \quad \|u\|_{D(A^s)} = \|A^s u\|_H,$$

obtemos que  $D(A^s)$  é um espaço de Hilbert. Mais ainda,  $D(A^{-s})$  é definido como sendo o dual de  $D(A^s)$  e com isto o operador  $A^s$  pode ser estendido como um isomorfismo de  $H$  em  $D(A^{-s})$ . Em  $D(A^{-s})$  consideramos o produto interno e norma como acima substituindo  $s$  por  $-s$ .

Usando novamente que a inclusão  $V \hookrightarrow H$  é compacta, pode-se definir  $A^s$ , para  $s > 0$ , em termos da base  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  por

$$A^s u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \omega_j)_H \omega_j, \quad \forall u \in D(A^s),$$

onde

$$D(A^s) = \left\{ u \in H \mid \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u, \omega_j)_H|^2 < \infty \right\}.$$

Neste caso, a norma em  $D(A^s)$  pode ser reescrita como

$$\|u\|_{D(A^s)} = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u, \omega_j)_H|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in D(A^s).$$

Ademais,  $D(A^{-s})$  é o complemento de  $H$  para a norma  $(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u, \omega_j)_H|^2)^{\frac{1}{2}}$  e  $A^{-s}$  é definido como acima, com  $-s$  no lugar de  $s$ .

**Lema 2.4.1.** *Se  $\alpha \geq 0$  e  $\beta > 0$ , então  $D(A^{\alpha+\beta}) \hookrightarrow D(A^\alpha)$ .*

# Capítulo 3

## Um modelo de placas com $p$ -Laplaciano com termo de memória

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos o problema da equação de placa com  $p$ -Laplaciano e com o termo de memória. Estudaremos existência, decaimento exponencial das soluções e obtenção de estimativas que envolva o termo de memória e o operador  $p$ -Laplaciano.

Seja  $N \geq 1$  natural e considere  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^N$  com fronteiras sua  $\Gamma = \partial\Omega$  e  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ . Neste capítulo estudaremos a existência e o comportamento assintótico (decaimento exponencial de energia) de soluções globais para a seguinte equação de placas não linear com memória

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (3.1)$$

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.3)$$

onde  $\Delta_p u$  denota o operador não linear  $p$ -Laplaciano introduzido na seção 1.3 do Capítulo 1,  $g$  é usualmente chamada de núcleo da memória e  $f(u)$  é uma não linearidade do tipo Lipschitz local. As hipóteses sobre tais termos serão atribuídas na seção seguinte. O termo de memória de segunda ordem que aparece na equação (3.1) representa complicações no decaimento de soluções.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 3.2 fixaremos as notações preliminares e as hipóteses sobre os devidos termos do problema (3.1)-(3.3). Na seção 3.3 apresentaremos o resultado de existência via método de Faedo-Galerkin, separando a demonstração em subseções para uma melhor leitura do texto. Por fim, na

seção 3.4 determinaremos um resultado de estabilidade exponencial para o sistema (3.1)-(3.3), ou melhor, que a energia associada a este problema possui decaimento exponencial ao longo do tempo.

## 3.2 Hipóteses e notações iniciais

Iniciaremos com as hipóteses precisas sobre o parâmetro  $p$  do operador  $p$ -Laplaciano e sobre as funções  $g$  e  $f$  presentes em (3.1)-(3.3).

Para  $N \in \mathbb{N}$  assumiremos que

$$2 \leq p \leq \frac{2N-2}{N-2} \text{ se } N \geq 3 \text{ e } p \geq 3 \text{ se } N = 1, 2. \quad (3.4)$$

Assumiremos também que o núcleo da memória  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função limitada de classe  $C^1$  satisfazendo as propriedades:

$$g(0) > 0 \text{ e } l := 1 - \mu_1 \int_0^\infty g(s) ds > 0 \quad (3.5)$$

onde  $\mu_1 > 0$  é a constante de imersão para  $\|\nabla u\|_2^2 \leq \mu_1 \|\Delta u\|_2^2$ , e existe uma constante  $k_1 > 0$  tal que

$$g'(t) \leq -k_1 g(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

Consideremos ainda que o termo forçante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz:

$$f(0) = 0, \quad |f(u) - f(v)| \leq k_2(1 + |u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

onde  $k_2 > 0$  é uma constante e

$$0 < \rho \leq \frac{4}{N-4} \text{ se } N \geq 5 \text{ e } \rho > 0 \text{ se } 1 \leq N \leq 4. \quad (3.8)$$

Além disso, suponhamos que

$$0 \leq \hat{f}(u) \leq f(u)u, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

onde  $\hat{f}(z) = \int_0^z f(s) ds$ .

Com a condição (3.4) segue do Teorema de Imersões de Sobolev, que vale a seguinte cadeia de imersões

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Mais ainda, a condição (3.8) garante que

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega).$$

Já as condições (3.7) e (3.9) incluem funções da forma

$$f(u) \approx |u|^\rho u + |u|^\alpha u, \quad 0 < \alpha < \rho.$$

Como de padrão, denotaremos por  $(\cdot, \cdot)$  o produto interno em  $L^2(\Omega)$  e por  $\|\cdot\|_p$  a norma em  $L^p(\Omega)$ . Além disso, introduzimos os seguintes espaços de Hilbert

$$\mathcal{H} = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 = H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

equipado com as normas

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Delta u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \quad \text{e} \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|\nabla \Delta u\|_2^2 + \|\Delta v\|_2^2,$$

que são provenientes dos respectivos produto internos em  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}_1$ , onde

$$H_\Gamma^3(\Omega) = \{u \in H^3(\Omega) \mid u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \Gamma\}.$$

### 3.2.1 Uma identidade para a memória

Agora vamos estabelecer uma identidade relativa ao termo de memória dada pela convolução

$$(g * u)(t) := \int_0^t g(t-s)u(s)ds.$$

Para facilitar a notação em considerações futuras, definamos:

$$(g \square u)(t) = \int_0^t g(t-s) \|u(t) - u(s)\|_2^2 ds$$

Com isto em mente, temos o

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$  e  $u \in C^1([0, T], H^2(\Omega))$ . Então, as seguintes identidades se verificam*

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (g \square \nabla u)(t) - \left( \int_0^t g(s)ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} \\ &= +\frac{1}{2} (g' \square \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta u_t(t))ds &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (g \square \Delta u)(t) - \left( \int_0^t g(s)ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 \right\} \\ &= +\frac{1}{2} (g' \square \Delta u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\Delta u(t)\|, \end{aligned}$$

*Demonstração.* A prova é obtida diferenciando o termo  $g \square y$  para  $y = \nabla u$  (e  $y = \Delta u$ ), como determinado em Muños Rivera et al [31] □

### 3.3 Existência e unicidade

Iniciaremos esta seção exibindo o conceito de solução fraca para o problema (3.1)-(3.3) que abordaremos neste capítulo.

**Definição 3.3.1.** *Seja  $I = [0, T]$  com  $T > 0$ , Diremos que uma função  $z := (u, u_t) \in C(I, \mathcal{H})$  é uma **solução fraca** para o problema (3.1)-(3.3) no intervalo  $I$ , se  $z(0) := (u_0, u_1) \in \mathcal{H}$  e*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u_t, \omega) + (\Delta u, \Delta \omega) + \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \omega \rangle + \\ & + \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \omega) ds + (\nabla u_t, \nabla \omega) + (f(u), \omega) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

quase sempre em  $I$ , para todo  $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

Pelas hipóteses (3.7)-(3.8) é simples verificar que, para  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , temos  $f(u) \in L^2(\Omega)$ . Assim, na definição acima faz sentido escrever  $(f(u), \omega)$  como um produto interno em  $L^2(\Omega)$ , sendo o problema (3.1)-(3.3) bem posto.

**Teorema 3.3.2.** *Sob as condições (3.4)-(3.9), temos:*

(i) *Se  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ , então o problema (3.1)-(3.3) possui uma única solução fraca*

$$(u, u_t) \in C([0, T]; \mathcal{H}), \quad \forall T > 0,$$

*satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \quad e \quad u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_1^0(\Omega)). \quad (3.11)$$

(ii) *Se  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$ , então a solução fraca do problema (3.1)-(3.3) possui regularidade*

$$u \in L^\infty(0, T; H_\Gamma^3(\Omega)) \quad e \quad u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \quad (3.12)$$

A prova de soluções será feita utilizando o método de Faedo-Galerkin. A prova a seguir é baseada em argumentos exibidos por Lions et al [15] e Yang [32]. Com respeito ao termo de memória seguiremos ideias análogas às introduzidas por Muños Rivera et al [31] e Cavallanti et al [17]. O que faremos a seguir é a demonstração de forma mais objetiva, nos furtando dos detalhes mais intrínsecos.

#### 3.3.1 Problema aproximado

Denotaremos por  $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  a base ortonormal bem regular de  $L^2(\Omega)$ , que também é ortogonal em  $H_0^1(\Omega)$  e  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , constituída por autofunções do operador biarmônico

$\Delta^2$  com condições de fronteira  $u = \Delta u = 0$  sobre  $\Gamma$ . Para  $m \in \mathbb{N}$  considremos também o subespaço de dimensão finita dado por

$$V_m := \text{Span}\{\omega_1, \dots, \omega_m\} = [\omega_1, \dots, \omega_m].$$

Dado  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ , queremos determinar soluções da forma

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^m y_{mj}(t)\omega_j, \quad (3.13)$$

para o seguinte problema aproximado

$$\begin{aligned} & (u_{tt}^m(t), \omega_j) + (\Delta u^m(t), \Delta \omega_j) + \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t), \nabla \omega_j \rangle + \\ & + \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \omega_j)ds + (\nabla u_t^m(t), \nabla \omega_j) + (f(u^m(t)), \omega_j) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

com condições iniciais

$$u^m(0) = u_0^m, \quad u_t^m(0) = u_1^m, \quad (3.15)$$

onde  $u_0^m$  e  $u_1^m$  são escolhidos de forma que

$$u_0^m \rightarrow u_0 \text{ em } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ e } u_1^m \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.16)$$

Contudo, observe que o problema aproximado (3.14)-(3.15) é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias, cuja a existência de solução local é assegurado pelo Teorema de Carathéodory. Logo, o problema aproximado (3.14)-(3.15) possui uma solução local  $u^m(t)$  da forma (3.13) em algum intervalo  $[0, T_m)$  com  $0 < T_m \leq T$ .

A seguir apresentaremos estimativas a priori que nos permitirão estender as soluções locais  $u^m(t)$  ao intervalo  $[0, T]$ , para qualquer  $T > 0$  dado, bem como extrair subsequências de soluções convenientemente convergentes para a solução fraca procurada.

### 3.3.2 Estimativa a priori 1

Multiplicando a equação aproximada (3.14) por  $u_t^m(t)$  e integrando sobre  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u^m(t)\|_p^p + \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(t)) dx \right\} + \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 = \\ & = \int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m(t)) ds. \end{aligned}$$

Da identidade para a memória fornecida pelo Lema 2.2.1 vem que

$$\int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m(t)) ds = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (g \square \nabla u^m)(t) - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u^m(t)\|_2^2 \right\}$$



$$+\frac{1}{2}(g'\square\nabla u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u^m(t)\|_2^2.$$

Logo, substituindo esta última expressão na anterior, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E^m(t) + \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}(g'\square\nabla u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u^m(t)\|_2^2. \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} E^m(t) = & \|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right) \|\nabla u^m(t)\|_2^2 + \frac{2}{p}\|\nabla u^m(t)\|_p^p + \\ & + 2 \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(t))dx + (g\square\nabla u^m)(t) \end{aligned}$$

Das condições (3.5)-(3.9) e como  $(g\square\nabla u^m)(t) \geq 0$ , vem que

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq E^m(t). \quad (3.18)$$

Além disso, da hipótese (3.6)

$$(g'\square\nabla u^m)(t) \leq -k_1(g\square\nabla u^m)(t) \leq 0.$$

Com isto, o lado direito da igualdade em (3.17) é não positivo. Assim, integrando (3.17) de 0 a  $t$  e usando (3.18) chegamos a seguinte estimativa

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\Delta u^m(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u_t^m(s)\|_2^2 ds \leq E^m(0).$$

Usando agora as hipóteses (3.7) e (3.9) em conjunto com as convergências em (3.16), concluímos

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u_m(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u_t^m(s)\|_2^2 ds \leq M_1, \quad (3.19)$$

para todos  $t \in [0, T_m) \subset [0, T]$  e  $m \in \mathbb{N}$ , onde  $M_1 = M_1(\|u_1\|_2, \|\Delta u_0\|_2) > 0$  é independente de  $t$  e  $m$ . Isto nos permite estender as soluções  $u^m(t)$  ao intervalo  $[0, T]$  e, em particular, notamos que

$$(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.20)$$

$$(u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.21)$$

### 3.3.3 Passagem ao limite e solução fraca

Das limitações em (3.20)-(3.21) e aplicando os Teoremas 1.2.18 (Compacidade fraca) e 1.2.19 (Compacidade fraca estrela), existe uma subsequência de  $(u^m)$ , que ainda denotaremos por  $(u^m)$ , tal que

$$u^m \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$\begin{aligned} u_t^m &\xrightarrow{*} u_t \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_t^m &\rightharpoonup u_t \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

Além disso, afirmamos que

$$u^m \rightarrow u \text{ em } C([0, T], H_0^1(\Omega)). \quad (3.23)$$

De fato, da estimativa (3.19) segue que  $(u^m)$  também é limitada no espaço

$$W := \{u \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\},$$

munido da norma  $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$ . Logo, existe uma subsequência de  $(u^m)$ , que ainda denotaremos por  $(u^m)$ , tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } W.$$

Como  $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , então pelo Teorema de Aubin-Lions, segue que  $W \hookrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Logo,

$$u^m \rightarrow u \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.24)$$

de onde segue que

$$\|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2 \rightarrow 0 \text{ q.s. em } [0, T] \quad (3.25)$$

Agora observe que de (3.22) vem que  $u^m, u, u_t^m, u_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  e pelo Lema 1.2.14 resulta que  $u^m, u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ . Disto e de (3.25) concluímos que (3.23) vale. Com estas convergências podemos passar limite no problema aproximado (3.14) e obter a solução fraca para o problema (3.1)-(3.3). De fato, em primeiro lugar consideremos uma função teste  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$  e  $m, j \in \mathbb{N}$  com  $m \geq j$ . Multiplicando (3.14) por  $\theta$  e integrando sobre  $(0, T)$  resulta que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left\{ (u_{tt}^m(t), \omega_j) + (\Delta u^m(t), \Delta \omega_j) + \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t), \nabla \omega_j \rangle \right\} \theta(t) dt + \\ &+ \int_0^T \left\{ \int_0^t g(t-s) (\Delta u^m(s), \omega_j) ds + (\nabla u_t^m(t), \nabla \omega_j) + (f(u^m(t)), \omega_j) \right\} \theta(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u_t^m(t), \omega_j) \theta'(t) dt + \int_0^T \left\{ (\Delta u^m(t), \Delta \omega_j) + \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t), \nabla \omega_j \rangle \right\} \theta(t) dt + \\ &\hspace{20em} (3.26) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T \left\{ \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \omega_j) ds + (\nabla u_t^m(t), \nabla \omega_j) + (f(u^m(t)), \omega_j) \right\} \theta(t) dt = 0$$

No presente capítulo, enfatizaremos às convergências dos termos que envolvem o operador  $p$ -Laplaciano e termo não linear  $f$ . Os limites dos outros termos em (3.26) segue imediatamente de (3.22).

Com respeito ao termo que envolve  $p$ -Laplaciano, devemos mostrar que

$$\int_0^T \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t), \nabla \omega_j \rangle \theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle \theta(t) dt.$$

ou seja,

$$- \int_0^T \langle \Delta_p(u^m(t)), \omega_j \rangle \theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} - \int_0^T \langle \Delta_p(u(t)), \omega_j \rangle \theta(t) dt. \quad (3.27)$$

De fato, em primeiro lugar, observamos que pelo Lema 1.3.1, existe uma constante  $M = M(p, N) > 0$  tal que

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq M(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Em particular, para  $x = \nabla u^m$  e  $y = \nabla u$ , segue que

$$||\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| \leq M(|\nabla u^m|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2})|\nabla u^m - \nabla u|.$$

Disto e usando a Desigualdade generalizada de Holder com  $\frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2} = 1$ , a hipótese (3.4), a estimativa (3.19) e a convergência (3.22), então

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle -\Delta_p(u^m(t)) + \Delta_p(u(t)), \omega_j \rangle \theta(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle \theta(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^T | \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle | |\theta(t)| dt \\ &\leq \|\theta\|_\infty \int_0^T \int_\Omega | |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) | |\nabla \omega_j| dx dt \\ &\leq C_p \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u^m(t)|^{p-2} + |\nabla u(t)|^{p-2}) |\nabla u^m(t) - \nabla u(t)| |\nabla \omega_j| dx dt \\ &\leq C_p \int_0^T \left( \|\nabla u^m(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} + \|\nabla u(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} \right) \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2 \|\nabla \omega_j\|_{2(p-1)} dt \\ &\leq C_p \int_0^T \left( \|\Delta u^m(t)\|_2^{p-2} + \|\Delta u(t)\|_2^{p-2} \right) \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2 \|\Delta \omega_j\|_2 dt \\ &\leq C_p \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2 dt, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C_p > 0$ , isto é, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\left| \int_0^T \langle -\Delta_p(u^m(t)) + \Delta_p(u(t)), \omega_j \rangle \theta(t) dt \right| \leq C \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2 dt \quad (3.28)$$

Agora utilizando a convergência (3.23) em (3.28), então o limite (3.27) segue.

Por outro lado, com respeito ao termo não linear  $f$ , devemos mostrar

$$\int_0^T (f(u^m(t)), \omega_j) \theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^T (f(u(t)), \omega_j) \theta(t) dt. \quad (3.29)$$

Primeiramente, usando a desigualdade de Holder generalizada com  $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$ , as condições (3.7)-(3.8), a estimativa (3.19) e a convergência (3.22), então para qualquer  $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ , obtemos

$$\begin{aligned} & |(f(u^m(t)) - f(u(t)), \phi)| \\ & \leq \int_{\Omega} |f(u^m(t)) - f(u(t))| |\phi| dx \\ & \leq k_2 \int_{\Omega} (1 + |u^m(t)|^\rho + |u(t)|^\rho) |u^m(t) - u(t)| |\phi| dx \\ & \leq k_2 \left( |\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+1)}} + \|u^m(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho + \|u(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho \right) \|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\phi\|_{2(\rho+1)} \\ & \leq C_p \left( |\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+1)}} + \|\nabla u^m(t)\|_2^\rho + \|\Delta u(t)\|_2^\rho \right) \|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\Delta \phi\|_2 \\ & \leq C_p \|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\Delta \phi\|_2, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C_p > 0$ . Assim, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|f(u^m(t)) - f(u(t))\|_{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'} \leq C \|u^m(t) - u(t)\|_2.$$

Disto e aplicando a convergência (3.23) vem que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (f(u^m(t)) - f(u(t)), \omega_j) \theta(t) dt \right| \\ & \leq \int_0^T |(f(u^m(t)) - f(u(t)), \omega_j)| |\theta(t)| dt \\ & \leq C \int_0^T \|f(u^m(t)) - f(u(t))\|_{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'} \|\Delta \omega_j\|_2 dt \\ & \leq C \int_0^T \|u^m(t) - u(t)\|_2 dt \\ & \leq C \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2 dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Isto prova o limite (3.29). Como já comentamos, os outros termos em (3.26) convergem de modo padrão usando os limites obtidos em (3.22). Assim sendo, passando o limite quando  $m \rightarrow \infty$  em (3.26) resulta que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_t(t), \omega_j) \theta'(t) dt + \int_0^T \{ (\Delta u(t), \Delta \omega_j) + \langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle \} \theta(t) dt + \\ & + \int_0^T \left\{ \int_0^l g(t-s) (\Delta u(s), \omega_j) ds + (\nabla u_t(t), \nabla \omega_j) + (f(u(t)), \omega_j) \right\} \theta(t) dt = 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{d}{dt} (u_t(t), \omega_j) \theta(t) dt + \int_0^T \{ (\Delta u(t), \Delta \omega_j) + \langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle \} \theta(t) dt + \\ & + \int_0^T \left\{ \int_0^l g(t-s) (\Delta u(s), \omega_j) ds + (\nabla u_t(t), \nabla \omega_j) + (f(u(t)), \omega_j) \right\} \theta(t) dt = 0 \end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$  e  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Como  $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  constitui uma base para  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , então

$$\int_0^T \left\{ \frac{d}{dt} (u_t(t), \omega) + (\Delta u(t), \Delta \omega) - \langle \Delta_p u(t), \omega \rangle \right\} \theta(t) dt + \quad (3.30)$$

$$+ \int_0^T \left\{ \int_l^0 g(t-s) (\Delta u(s), \omega) ds + (\nabla u_t(t), \nabla \omega) + (f(u(t)), \omega) \right\} \theta(t) dt = 0,$$

para todo  $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ . Logo, de (3.30) deduzimos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (u_t, \omega) + (\Delta u, \Delta \omega) - \langle \Delta_p u, \omega \rangle + \\ & \int_0^l g(t-s) (\Delta u(s), \omega) ds + (\nabla u_t, \nabla \omega) + (f(u), \omega) = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned}$$

para todo  $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Isto mostra a função  $u$  satisfaz (3.10) com

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.31)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.32)$$

de onde segue também a condição (3.11). Resta verifica que  $(u, u_t) \in C([0, T], \mathcal{H})$  e que vale as condições iniciais  $u(0) = u_0$  e  $u_t(0) = u_1$ . Contudo, a continuidade de  $u$  e  $u_t$  em  $[0, T]$  segue de modo análogo a Yang et al [32]. Concluindo que a função  $z = (u, u_t)$  é uma solução fraca para o problema (3.1)-(3.3)

Por outro lado, identificamos  $L^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]'$  com seu dual, por meio do Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, temos a seguinte cadeia de inclusões contínuas

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) &\hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \approx [L^2(\Omega)]' \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Com isto, podemos reescrever a expressão em (3.30), depois de integrar por partes, como

$$\begin{aligned} & - \left\langle \int_0^T u_t(t) \theta'(t) dt, \omega \right\rangle + \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle - \left\langle \int_0^T \Delta_p u(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle + \\ & + \left\langle \int_0^T (g * \Delta u)(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle - \left\langle \int_0^T \Delta^2 u_t(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle + \left\langle \int_0^T f(u(t)) \theta(t) dt, \omega \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

onde relebramos que  $(g * \Delta u)(t) = \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds$ . Novamente usando integração por partes,

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^T u_{tt}(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle + \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle - \left\langle \int_0^T \Delta_p u(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle + \\ & + \left\langle \int_0^T (g * \Delta u)(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle - \left\langle \int_0^T \Delta^2 u_t(t) \theta(t) dt, \omega \right\rangle + \left\langle \int_0^T f(u(t)) \theta(t) dt, \omega \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

para todo  $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , onde nesta última igualdade a notação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ significa a dualidade } \langle \cdot, \cdot \rangle_{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]', H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, concluímos que

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + (g * \Delta u) - \Delta u_t + f(u) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \quad (3.34)$$

Mais ainda, usando (3.31)-(3.32) e as inclusões em (3.33) deduzimos facilmente que

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &\in L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \\ \Delta u_t &\in L^2(0, T; [H^1(\Omega)]') \hookrightarrow L^2(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \\ (g * \Delta u), f(u) &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Resta verificar que

$$\Delta_p u \in L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \quad (3.36)$$

De fato, para  $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_p u(t), \phi \rangle| &= |\langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \phi \rangle| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-1} |\nabla \phi| dx \\ &\leq \left[ \int_\Omega |\nabla u(t)|^{2(p-1)} dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\nabla u(t)\|_{2(p-1)}^{p-1} \|\nabla \phi\|_2 \\ &\leq C_p \|\Delta u(t)\|_2^{p-1} \|\Delta \phi\|_2, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C_p > 0$ . Assim, de (3.31) existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\Delta u(t)\|_{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'} \leq C \quad \text{q.s em } [0, T]$$

Finalmente, combinando (3.34) com (3.35)-(3.36) concluimos

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + (g * \Delta u) - \Delta u_t + f(u) = 0 \quad \text{em } L^2(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]').$$

o que encerra a prova do item (i) do Teorema 3.3.2

### 3.3.4 Estimativa a priori 2

Agora consideramos  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$  e seja  $u^m(t)$  da forma (3.13) uma solução do problema aproximado (3.14)-(3.15), onde agora

$$u_0^m \rightarrow u_0 \quad \text{em } H_\Gamma^3(\Omega) \quad \text{e} \quad u_1^m \rightarrow u_1 \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \quad (3.37)$$

Pela escolha da base  $(\omega_j)$ , podemos multiplicar o problema aproximado (3.14) por  $-\Delta u_t^m$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 \} + \langle \Delta_p u^m(t), \Delta u_t^m(t) \rangle + \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 = \\ & = (f(u^m(t)), \Delta u_t^m(t)) + \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t)) ds. \end{aligned}$$

Notando que

$$\langle \Delta_p u^m, \Delta u_p^m \rangle = \frac{d}{dt} \langle \Delta_p u^m, \Delta u^m \rangle - J_1,$$

onde

$$J_1 = - \int_\Omega \{ (p-2) |\nabla u^m|^{p-4} (\nabla u^m \cdot \nabla u_t^m) \nabla u^m + |\nabla u^m|^{p-2} \nabla u_t^m \} \cdot \nabla \Delta u^m dx,$$

derivamos a seguintes igualdade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 + 2 \langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle \} + \\ & + \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned} J_2 &= (f(u^m(t)), \Delta u_t^m(t)) = \int_\Omega f(u^m(t)) \Delta u_t^m(t) dx, \\ J_3 &= \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t)) ds. \end{aligned}$$

No que segue vamos estimar o lado direito de (3.38). Para facilitar a notação o mesmo símbolo  $C$  denotará diferentes constantes que aparecerão no texto.

Da estimativa (3.19) e usando a desigualdade de Holder generalizada com  $\frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2} = 1$ , temos

$$\begin{aligned} J_1 &\leq (p-1) \int_{\Omega} |\nabla u^m(t)|^{p-2} |\nabla u_t^m(t)| |\nabla \Delta u^m(t)| dx \\ &\leq (p-1) \|\nabla u^m(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} \|\nabla u_t^m(t)\|_{2(p-1)} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2 \\ &= C_p \|\nabla u_t^m(t)\|_{2(p-1)} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C_p > 0$ . Como  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}(\Omega)$  e  $u_t^m$  é bem regular,

$$\|\nabla u_t^m(t)\|_{2(p-1)}^2 \leq \mu_2 \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2,$$

onde  $\mu_2 > 0$  é constante de imersão correspondente. Usando a desigualdade de Young, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|J_1| \leq \frac{1}{4} \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{C}{2} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2. \quad (3.39)$$

Além disso, das hipóteses (3.7)-(3.8), da estimativa (3.19) e como  $H_{\Gamma}^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ , segue que

$$\begin{aligned} \|f(u^m(t))\|_2^2 &= \int_{\Omega} |f(u^m(t))|^2 dx \\ &\leq 2k_2 \int_{\Omega} (|u^m(t)|^2 + |u^m(t)|^{2(\rho+1)}) dx \\ &= 2k_2 \left( \|u^m(t)\|_2^2 + \|u^m(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} \right) \\ &\leq C_{\rho} \left( \|\Delta u^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^{2(\rho+1)} \right) \\ &= C_{\rho} (1 + \|\Delta u^m(t)\|_2^{2\rho}) \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{C}{2} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Assim, novamente aplicando a Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \|f(u^m(t))\|_2 \|\Delta u_t^m(t)\|_2 \\ &\leq \|f(u^m(t))\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{C}{2} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Usando mais uma vez a estimativa (3.19) e a desigualdade de Young,

$$|J_3| \leq \left( \int_0^t g(t-s) \|\Delta u^m(s)\|_2 ds \right) \|\Delta u_t^m(t)\|_2$$



$$\begin{aligned}
&\leq M_1 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|\Delta u_t^m(t)\|_2 \\
&\leq C \frac{1}{4} \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Substituindo (3.39)-(3.41) em (3.38) e pondo

$$F^m(t) = \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 + 2\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle + 2C,$$

então

$$\frac{d}{dt} F^m(t) + \frac{1}{2} \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 \leq 2C + 2C \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 \tag{3.42}$$

Agora notamos que

$$\begin{aligned}
|\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle| &= |\langle |\nabla u^m(t)|^{p-2} \nabla u^m(t), \nabla \Delta u^m(t) \rangle| \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u^m(t)|^{p-1} |\nabla \Delta u^m(t)| dx \\
&\leq \|\nabla u^m(t)\|_{2(p-1)}^{p-1} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2 \\
&\leq \|\nabla u^m(t)\|_{2(p-1)}^{2(p-1)} + \frac{1}{4} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 \\
&\leq C_p \|\Delta u^m(t)\|_2^{2(p-1)} + \frac{1}{4} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Pela estimativa (3.19), existe uma constante  $C$  tal que

$$|\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle| \leq C + \frac{1}{4} \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2,$$

de onde segue que

$$\frac{1}{4} \|\nabla \Delta u(t)\|_2^2 + 2C + 2\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle \geq 0. \tag{3.43}$$

Combinando (3.42)-(3.43), existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt} F^m(t) + \frac{1}{2} \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 \leq C F^m(t). \tag{3.44}$$

Agora, integrando (3.44) sobre  $(0, t) \subset [0, T]$  e explorando os limites (3.37), resulta

$$F^m(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta u_t^m(\tau)\|_2^2 d\tau \leq C + C \int_0^t F^m(\tau) d\tau.$$

Portanto, usando a desigualdade de Growall e novamente (3.43) concluímos

$$\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\Delta u_t^m(\tau)\|_2^2 d\tau \leq M_2, \tag{3.45}$$

para todo  $t \in [0, T]$  e  $m \in \mathbb{N}$ , onde  $M_2 = M_2(\|\nabla u_1\|_2, \|\nabla \Delta u_0\|_2, T) > 0$ . Em particular,

$$(u^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_\Gamma^3(\Omega)), \tag{3.46}$$

$$(u_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{3.47}$$

### 3.3.5 Passagem ao limite e solução fraca mais regular

As limitações em (3.46)-(3.47) são suficientes para passar limite no problema aproximado e garantir que, quando os dados iniciais  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$ , a solução fraca de (3.1)-(3.3) possuem mais regularidade

$$u \in L^\infty(0, T; H_\Gamma^3(\Omega)), \quad (3.48)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \quad (3.49)$$

A conclusão do item (ii) do Teorema 3.3.2 segue, então, de maneira similar ao caso fraco. Além disso, como também veremos mais adiante, podemos concluir que neste caso  $u_{tt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , ou seja, que  $u$  satisfaz a equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + (g * \Delta u) - \Delta u_t + f(u) = 0 \quad \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

### 3.3.6 Unicidade

Sejam  $u$  e  $v$  duas soluções mais regulares do problema (3.1)-(3.3) e considere  $w = u - v$ . Então  $w$  satisfaz a equação

$$w_{tt} + \Delta^2 w - \Delta w_t = \Delta_p u - \Delta_p v - f(u) + f(v) - \int_0^t g(t-s) \Delta w(s) ds$$

em  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , com condições de fronteira  $w = \Delta w = 0$  sobre  $\Gamma$  e dados iniciais nulos. Como  $w_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , podemos multiplicar a equação acima por  $w_t(t)$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w_t(t)\|_2^2 \right\} + \|\nabla w_t(t)\|_2^2 = \\ & = \langle \Delta_p u(t) - \Delta_p v(t), w_t(t) \rangle - (f(u(t))p - f(v(t)), w_t(t)) + \\ & \quad + \int_0^t g(t-s) (\nabla w(s), \nabla w_t(t)) ds. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.2.1, deduzimos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla w(t)\|_2^2 + (g \square \nabla w)(t) \right\} + \|\nabla w_t(t)\|_2^2 \\ & \leq |\langle \Delta_p u(t) - \Delta_p v(t), w_t(t) \rangle| + \int_\Omega |f(u(t)) - f(v(t))| |w_t| dx. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Como anteriormente segue do Lema 1.3.1 que

$$|\langle \Delta_p u(t) - \Delta_p v(t), w_t(t) \rangle| \leq C \left( \|\nabla u(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} + \|\nabla v(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} \right) \|\nabla w(t)\|_{2(p-1)} \|\nabla w_t(t)\|_2$$

$$\leq C \|\Delta w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w_t(t)\|_2^2, \quad (3.51)$$

para alguma constante  $C > 0$

Além disso, das condições (3.7)-(3.8) e como  $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$ , então usando as desigualdades de Holder e Young, existe  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} & |(f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t))| \\ & \leq \int_{\Omega} |f(u(t)) - f(v(t))| |w_t(t)| dx \\ & \leq k_2 \int_{\Omega} (1 + |u(t)|^\rho + |v(t)|^\rho) |w(t)| |w_t(t)| dx \\ & \leq k_2 \left( |\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+1)}} + \|u(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho + \|v(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho \right) \|w(t)\|_{2(\rho+1)} \|w_t(t)\|_2 \\ & \leq C \|\Delta w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|w_t(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Combinando (3.50) com (3.51)-(3.52), resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla w(t)\|_2^2 + (g \square \nabla w)(t) \right\} + \\ & + \|\nabla w_t(t)\|_2^2 \leq C \|\Delta w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Pondo

$$\Phi(t) = \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla w(t)\|_2^2 + (g \square \nabla w)(t)$$

e usando a hipótese (3.5), então

$$\|\Delta w(t)\|_2^2 - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla w(t)\|_2^2 \geq l \|\Delta w(t)\|_2^2 \geq 0.$$

Como já é sabido

$$(g \square \nabla w)(t) \geq 0.$$

Assim, existe uma constante  $C > 0$  tal que (3.53) fica sob a forma

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) \leq C \Phi(t).$$

Como  $\Phi(0) = 0$ , obtemos

$$\|w_t(t)\|_2^2 + l \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq 0,$$

provando que  $w = 0$  em  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  (também em  $L^2(\Omega)$ ). Isto prova a unicidade.

Portanto, a prova do Teorema (3.3.2) está completa.

### 3.4 Decaimento exponencial de Energia

Afim de determinar estabilidade exponencial para o sistema (3.1)-(3.3), vamos definir o funcional energia correspondente como

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p + \int_{\Omega} \hat{f}(u(t)) dx. \quad (3.54)$$

Tendo como principal resultado o

**Teorema 3.4.1.** *Sob as hipóteses do Teorema 3.3.2, a energia  $E(t)$  satisfaz, em ambos os casos, o seguinte decaimento exponencial*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

para constantes  $C > 0$  e  $\gamma > 0$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o decaimento exponencial de energia considerando soluções mais regulares  $u$  do problema (3.1)-(3.3). Usaremos o método de energia perturbado. Em primeiro lugar, definamos a energia modificada

$$F(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p + \int_{\Omega} \hat{f}(u(t)) dx \\ - \frac{1}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \square \nabla u)(t).$$

Usando as hipóteses (3.5) e (3.9), segue que

$$F(t) = E(t) - \frac{1}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \square \nabla u)(t) \geq lE(t).$$

Assim,

$$E(t) \leq \frac{1}{l} F(t).$$

Além disso, da condição (3.6) segue que  $F$  é decrescente, pois

$$F'(t) = -\|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g' \square \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ \leq -\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \frac{k_1}{2} (g \square \nabla u)(t).$$

Agora definamos a energia perturbada

$$F_{\epsilon}(t) = F(t) + \epsilon \Psi(t), \quad \epsilon > 0,$$

onde

$$\Psi(t) = \int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx$$

com isto, demonstraremos dois lemas auxiliares que serão cruciais para a conclusão do decaimento exponencial.

**Lema 3.4.2.** *Existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que*

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| \leq \varepsilon C_1 F(t), \quad \forall t \leq 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2\lambda_1} \|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{l} \max \left\{ 1, \frac{1}{\lambda_1} \right\} F(t), \end{aligned}$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \lambda w & \text{em } \Omega \\ w = \Delta w = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Então tomando  $C_1 = \frac{1}{l} \max \left\{ 1, \frac{1}{\lambda_1} \right\}$ , obtemos

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| = \varepsilon |\Psi(t)| \leq \varepsilon C_1 F(t),$$

como desejado. □

**Lema 3.4.3.** *Existe uma constante  $\varepsilon_1 > 0$  tal que*

$$F'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon F(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

*Demonstração.* É suficiente mostrar que existem constantes  $C_2, C_3 > 0$  tais que

$$\Psi'(t) \leq -F(t) + C_2 \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + C_3 (g \square \nabla u)(t). \quad (3.55)$$

De fato, para  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente temos

$$\begin{aligned} F'_\varepsilon(t) &= F'(t) + \varepsilon \Psi'(t) \\ &\leq -\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \frac{k_1}{2} (g \square \nabla u)(t) - \varepsilon F(t) + \varepsilon C_2 \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon C_3 (g \square \nabla u)(t) \\ &= -\varepsilon F(t) - (1 - \varepsilon C_2) \|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \left( \frac{k_1}{2} - \varepsilon C_3 \right) (g \square \nabla u)(t) \\ &\leq \varepsilon F(t), \end{aligned}$$

o que concluiria a prova do Lema 3.4.3

Resta verificar a veracidade da identidade (3.55). Com efeito, usando a equação (3.1) no sentido fraco, obtemos

$$\Psi'(t) = \|u_t(t)\|_2^2 - \|\Delta u(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_p^p + \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds -$$

$$- \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla u_t(t) dx - \int_{\Omega} f(u(t))u(t) dx.$$

Adicioando e subtraindo o termo  $F(t)$  na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} \Psi'(t) = & - F(t) + \frac{2}{3} \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \|\nabla u(t)\|_p^p \\ & - \frac{1}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \square \nabla u)(t) + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} \hat{f}(u(t)) - f(u(t))u(t) dx, \\ I_2 &= \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s), \nabla u(t)) ds, \\ I_3 &= - \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla u_t(t) dx. \end{aligned}$$

Da hipótese (3.9) temos  $I_1 \leq 0$  diretamente. Vanmos estimar a seguir os termos  $I_2$  e  $I_3$ .

Usando a desigualdade de Young, observe que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(t)\|_2 (\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|_2 + \|\nabla u(s)\|_2) ds \\ &\leq \left( \int_0^t g(t-s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2 \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|_2 ds \\ &\leq \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \eta \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|g\|_1 (g \square \nabla u)(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\mu_1}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \\ &+ \eta \mu_1 \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|g\|_1 (g \square \nabla u)(t). \end{aligned}$$

onde  $\eta > 0$  será escolhido de modo conveniente mais adiante. Também pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \eta \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\nabla u_t(t)\|_2^2 \\ &\leq \eta \mu_1 \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\nabla u_t(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -F(t) + \left( \frac{3}{2} \mu_2 + \frac{1}{4\eta} \right) \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4\eta} \|g\|_1 \right) (g \square \nabla u)(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( 1 - \mu_1 \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + 2\eta \mu_1 \|\Delta u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Agora note que de (3.5), obtemos

$$\Psi'(t) \leq -F(t) + C_2 \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + C_3(g \square \nabla u)(t) + \left(2\eta\mu_1 - \frac{1}{2}\right) \|\Delta u(t)\|_2^2.$$

Logo, tomando  $\eta > 0$  pequeno o suficiente temos que a desigualdade (3.55) é verdadeira. Isto encerra a prova do Lema 3.4.3  $\square$

Agora, usaremos os lemas anteriores para concluir a propriedade de decaimento. Seja

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{1}{2C_1}, \varepsilon_1 \right\}.$$

Com isto, tomando  $\varepsilon < \varepsilon_0$  segue do Lema 3.4.2 que

$$\frac{1}{2}F(t) \leq F_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}F(t), \quad t \geq 0. \quad (3.56)$$

A segunda desigualdade em (3.56) em conjunto com Lema 3.4.3 implica que

$$\frac{d}{dt}F_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon F(t) \leq -\frac{2}{3}\varepsilon F_\varepsilon(t).$$

Logo,

$$F_\varepsilon(t) \leq F_\varepsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t}.$$

Usando novamente (3.56) obtemos

$$F(t) \leq 3F(0)e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t}.$$

Finalmente, comparando as funções  $F$  e  $E$ , e notando que  $F(0) = E(0)$ , concluímos

$$E(t) \leq \frac{3}{l}E(0)e^{-\frac{3}{2}\varepsilon t}, \quad t \geq 0.$$

Isto prova o decaimento exponencial de soluções mais regulares  $u \in H_\Gamma^3(\Omega)$ , como era desejado. O mesmo resultado pode ser estendido para soluções fracas  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  usando argumentos de densidade.

Isto conclui a prova do Teorema 3.4.1  $\square$

# Conclusão

Neste trabalho, consideramos um modelo de equação de placas com  $p$ -Laplaciano com termo de memória, a equação (3.1)-(3.3), a saber

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds - \Delta u_t + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) = 0 \quad \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

O presente trabalho procurou fornecer resultados relacionados a existência global de soluções para a equação (3.1)-(3.3) sob o efeito de um termo de memória, que posteriormente buscamos as propriedades qualitativas das soluções com respeito a estabilidade assintótica ao longo do tempo (evolução). Em nosso trabalho é interessante salientar, a importância de se ter tomado cuidado com as ferramentas ao se trabalhar, com termo de memória e, com os operadores  $p$ -Laplaciano e biarmônico.



# Referências

- [1] A. Haraux & E. Zuazua, *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 100 (1988) 191 - 206.
- [2] A. Rawilson Oliveira. *Estabilidade assintótica de uma classe de equação quasilinear viscoelástica com história*, São Carlos, 2013.
- [3] A.N. Carvalho, *Sistemas dinâmicos não lineares* Departamento de Matemática ICMC - USP, São Carlos, 2011
- [4] BARTLE, Robert G. 1995, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*
- [5] BARROS, L. R. 2011. *Decaimento geral de soluções para um sistema acoplado de equações de onda com memória*.
- [6] BRÉZIS, H. 2010, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, Springer.
- [7] CUNHA, Carlos A.R da. 2007, *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP* - Florianópolis, SC : SBMAC - (Notas em Matemática Aplicada;v.32)
- [8] D. Andrade, M.A. Jorge Silva; T.F.Ma, *Exponential stability for a plate equation with  $p$  - Laplaciano and memory terms* Math. Meth. Sci.
- [9] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equation* Lecture Notes in Mathematics, 840. Springer-Verlag, Berlin - New York, 1981.
- [10] EVANS, L.C. *Partial Differential Equations*. Berkeley, 1997.
- [11] E. KREYSZIG. 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley e Sons.
- [12] GÓMEZ, Félix P. Q. 2009, *Tópicos em Termoelasticidade Linear*, Paraná .
- [13] G. B. Folland, *Real analysis - Modern Techniques and their applications* Second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley e Sons, Inc. New York, 1999.

- [14] J.E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 10. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989.
- [15] J.L.Lions & E. Maneges, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Application*, Vol.I, Springer - Verlag, Berlin, 1972 .
- [16] J.M. Greenberg, R.C.MacCary & V.N.Mizel, *On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation  $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$* . Chapman & Hall/CRC, London.
- [17] J. Clements, *Existence Theorems for a quasilinear evolution equation*, SIAM J. Appl. 26 (1974) 745 - 752.
- [18] L. An & A. Peirce, *The effect of microstructure on elastic-plastic models*, SIAM J. Appl. Math. 54 (1994), no. 3, 708 - 730..
- [19] L.A. Medeiros & M. Milla Miranda, *Espaços de Sobolev*(Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos), Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [20] L.A. Medeiros, *Tópicos em Equações Diferenciais - Parte I*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.
- [21] K. Yosida, *Functional Analysis (6th edition)*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [22] M.M, Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti & J. Ferreira, *Existence and decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Methods Appl. Sci. 24(2001). no. 14, 1043-1053.
- [23] M.M, Cavalcanti & V. N.Domingos Cavalcanti, *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*, EDUEM, Maringá, 2009.
- [24] M. Tsutsumi, *Some nonlinear evolution equation of second order*. Proc. Japan Acad. 47 (1971). Suppl. II, 950 - 955.
- [25] PAZY, A. 1983. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer - Verlag, New York.
- [26] R.A. ADAMS & J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Second Edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academia Press, Amsterdam, 2003.
- [27] RIVERA, Jaime E. M. 2008, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Academia das contas, Petrópolis - RJ, IM - UFRJ.

- [28] RIVERA, Jaime E. M. 2007, *Semigrupos e equações diferenciais parciais*. Instituto de Matemática, Petrópolis - RJ, IM - UFRJ.
- [29] RIVERA, J. E. M, BARRETO; R. K,. 1998, *Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, vol.31
- [30] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Science 68, Springer-Verlag, New York,1988.
- [31] R.K. Barreto & J.E. Muñoz Rivera, *Decay rates of solutions to thermoviscoelastic plates with memory*, IMA J. Appl. MATH. 60 (1998), NO. 3,263-283.
- [32] Yang Zhijian, *Global attractors and their Hausdorff dimensions for a class of Kirchhoff models*, J. Math. Phys. 51, 032701 (2010) 17 pp.
- [33] Z. Liu, S. Zheng. 1999, *Semigroups associated with dissipative systems*. Chapman & Hall/CRC, London.