



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

RIGIDEZ DE PLANOS PROJETIVOS MINIMIZANTES DE ÁREA EM 3-VARIEDADES

GEOVAN CARLOS MENDONÇA CAMPOS

São Luís - MA

2016

RIGIDEZ DE PLANOS PROJETIVOS MINIMIZANTES DE ÁREA EM 3-VARIEDADES

GEOVAN CARLOS MENDONÇA CAMPOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal do Maranhão como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Ivaldo Paz Nunes.

São Luís-MA

2016

RIGIDEZ DE PLANOS PROJETIVOS MINIMIZANTES DE ÁREA EM 3-VARIEDADES

GEOVAN CARLOS MENDONÇA CAMPOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal da Maranhão como requi-
sito parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática, aprovada em 30/03/2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes - UFMA

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória - UFAL

Prof. Dr. Maxwell Mariano de Barros - UFMA

À minha família e amigos.

*“Eu sou o Alfa e o Ômega, o princípio e o fim, o primeiro
e o derradeiro.”*

(Apocalipse 22:13 - Bíblia Sagrada)

Agradecimentos

Agradeço à Deus, por ter me dado a oportunidade de chegar onde cheguei, por me dar forças todos os dias e por sempre estar presente em todos os momentos da minha vida.

A toda minha família, pelo apoio, incentivo, educação e dedicação, por todo o amor e respeito que me deram.

A todos os meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado.

Ao meu orientador, professor Dr. Ivaldo Paz Nunes pela atenção e colaboração. Aos meus professores que acreditaram em mim e que me fizeram gostar cada vez mais desta área.

À Universidade Federal do Maranhão por propiciar a realização deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos.

Resumo

Neste trabalho, dissertamos sobre o artigo “Area-minimizing Projective Planes in 3-Manifolds” devido a Hubert Bray, Simon Brendle, Michael Eichmair e André Neves. Neste artigo eles consideram uma 3-variedades Riemannianas compactas (M^3, g) com curvatura escalar positiva e que admitem planos projetivos mergulhados. Nestas condições eles provam uma estimativa superior, em termo do ínfimo da curvatura escalar de (M, g) , para a área do plano projetivo que possui a menor área dentro da classe de todas as superfícies $\Sigma \subset M$ homeomorfas ao plano projetivo. Além disso, eles provam que esta desigualdade é ótima. Mais precisamente, eles obtém que se a igualdade ocorre então a variedade Riemanniana (M^3, g) é isométrica ao espaço projetivo tridimensional $\mathbb{RP}^3$ com a métrica de curvatura seccional constante.

Palavras-chave: Variedade Riemanniana, Plano projetivo minimizante, Superfície mínima.

Abstract

In this work, we talk about the article “Area-Minimizing Projective Planes in 3-Manifolds” due to Hubert Bray, Simon Brendle, Michael Eichmair and André Neves. In this article they consider a compact Riemannian 3-manifold (M, g) with positive scalar curvature and an embedded projective plane. In these conditions they prove a higher estimate of curvature, in term of infimum of the scalar curvature of (M, g) , for the area of the projective plane that has the smallest area within the class of all surfaces $\Sigma \subset M$ homeomorphic to projective plane. Furthermore, they prove that this inequality is great. More precisely, they get that if this equality hold in (M^3, g) , so M is isometric to the three-dimensional projective space $\mathbb{RP}^3$ with constant sectional curvature.

Keywords: Riemanniana manifold, minimizing Projective Plan, Minimal surface.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Variedades Diferenciáveis	4
1.1.1 Estrutura Diferenciável e Exemplos	4
1.1.2 Aplicações Suaves e Diferencial de uma Aplicação	6
1.1.3 Fibrado Tangente	8
1.1.4 Variedades Orientáveis	9
1.1.5 Campos de Vetores e Colchete de Lie	11
1.2 Conceitos de Geometria Riemanniana	12
1.2.1 Métricas Riemannianas	12
1.2.2 Comprimento de Curvas e Volume	13
1.2.3 Conexão Afim	15
1.2.4 Transporte Paralelo	17
1.2.5 Conexão de Levi-Civita	18
1.2.6 Geodésicas	19
1.2.7 Curvatura	21
1.3 Imersão Isométrica	26
1.3.1 Primeira variação da área	33
1.3.2 Segunda variação da área	35
1.4 Variedades Riemannianas Completas	36
1.5 Variedades com Curvatura Seccional Constante	37
1.6 Fluxo de Ricci	38
1.7 Grupo fundamental e Espaço de recobrimento	40
1.8 Transversalidade	44
2 Planos Projetivos Minimizantes de Área	45
2.1 Prova do Teorema 2.0.1	46

2.1.1	Prova da desigualdade (2.3)	46
2.1.2	Prova da desigualdade (2.2)	48
2.2	Prova do Teorema 2.0.2	51
Referências		58

Introdução

A Teoria das Superfícies Mínimas é um tópico de estudo bastante clássico em Geometria Diferencial, tendo origem nos trabalhos de Lagrange no século XVIII sobre Cálculo das Variações, e uma área de pesquisa bastante ativa nos dias atuais.

Uma superfície mínima em uma variedade Riemanniana é uma superfície que é ponto crítico do funcional área. Apesar de ser um interessante objeto geométrico por si mesmo, superfícies mínimas podem ser utilizadas como ferramentas para obter conclusões sobre a topologia e a geometria do espaço ambiente.

Por exemplo, no término da década de 70, R. Schoen and S. T. Yau [12] observaram que se (M^3, g) é uma variedade Riemanniana compacta orientável com curvatura escalar positiva e $\Sigma \subset M$ é uma superfície compacta orientável mínima e estável (isto é, possui segunda variação do funcional área não-negativa), então Σ é homeomorfa à esfera S^2 . No caso em que Σ é não-orientável, tem-se que Σ é homeomorfa ao plano projetivo $\mathbb{RP}^2$. Inspirados por esta observação, eles provaram o seguinte teorema o qual afirma que a existência de curvatura escalar positiva impõe restrições sobre a topologia da variedade ambiente.

Teorema (Schoen and Yau, 1979). *Seja M uma variedade tridimensional compacta e orientável. Se $\pi_1(M)$ contém um subgrupo isomorfo ao grupo fundamental de uma superfície compacta orientável com gênero $g > 1$, então M não admite métrica Riemanniana com curvatura escalar positiva.*

Como aplicação do teorema acima, temos, por exemplo, que o toro $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ não admite métrica com curvatura escalar positiva.

Dois exemplos básicos de variedades Riemannianas tridimensionais orientáveis com curvatura escalar positiva que admitem, respectivamente, esferas e planos projetivos mínimos estáveis (de fato, minizantes de área) são o cilindro $S^2 \times \mathbb{R}$ com a métrica produto canônica e o espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$ com a métrica de curvatura constante.

Neste trabalho, iremos dissertar sobre o resultado do artigo [3], devido a H. Bray, S. Brendle, M. Eichmair e A. Neves em 2010. Neste artigo, eles provam um teorema de

rigidez para o espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$ em termos da área de planos projetivos minimizantes de área.

Mais precisamente, considere uma variedade Riemanniana compacta (M^3, g) com curvatura escalar positiva. Suponha que

$$\mathcal{F} = \{\Sigma \subset M : \Sigma \text{ é homeomorfa à } \mathbb{RP}^2\} \neq \emptyset$$

e seja

$$\mathcal{A}(M, g) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}} \text{area}(\Sigma, g).$$

Além disso, seja $\text{sys}(M, g)$ a sístole de (M, g) , ou seja,

$$\text{sys}(M, g) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva fechada não contrátil em } M\}.$$

O primeiro resultado provado em [3] é o seguinte:

Teorema A (Bray, Brendle, Eichmair and Neves, 2010). *Nas condições acima, temos que*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi \quad (1)$$

e

$$\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi} \text{sys}(M, g)^2 > 0, \quad (2)$$

onde R_g denota a curvatura escalar de M .

Observe que combinando as desigualdades (1) e (2), obtém-se

$$\text{sys}(M, g)^2 \inf_M R_g \leq 6\pi^2.$$

No espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$ com a métrica g com curvatura seccional constante igual a 1 temos $R_g \equiv 6$ e $\text{sys}(M, g) = \pi$. Logo, segue que $\mathcal{A}(\mathbb{RP}^3, g) = 2\pi$. Em particular, em $(\mathbb{RP}^3, g)$ temos a igualdade nas desigualdades acima.

No segundo resultado temos o teorema de rigidez:

Teorema B (Bray, Brendle, Eichmair and Neves). *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar positiva. Suponha que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Se $\mathcal{A}(M, g) \inf_M R = 12\pi$, então (M, g) é isométrica ao espaço projeto $\mathbb{RP}^3$ com a métrica de curvatura constante.*

Observamos que um resultado análogo de rigidez para o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ em termos da área de esferas minimizantes de área, foi provado por H. Bray, S. Brendle and Neves no artigo [4].

Este trabalho está organizado em dois capítulos. No capítulo 1, apresentaremos os pré-requisitos necessários para o bom entendimento dos resultados acima e de suas respectivas demonstrações. Nas seções 1.1 a 1.5, fornecemos os conceitos básicos referentes à variedades diferenciáveis, geometria Riemanniana e imersões isométricas. Na seção 1.6, definimos o fluxo de Ricci e enunciamos os fatos básicos que serão utilizados neste trabalho. Nas seções 1.7 e 1.8 apresentamos alguns conceitos e resultados sobre grupo fundamental, espaços de recobrimento e transversalidade. Finalmente, no capítulo 2, provamos os teoremas A e B, objetivos principais deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Diferenciáveis

1.1.1 Estrutura Diferenciável e Exemplos

Definição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ tais que:*

1. $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. *Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.*
3. *A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições 1 e 2.*

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou aplicação) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo 1 e 2 é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

Observação 1.1.2. *Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M . Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α . É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ são contínuas.*

Exemplo 1.1.3 $(\mathbb{R}^n)$. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.*

Exemplo 1.1.4 (Esfera S^n). Seja $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Podemos introduzir uma estrutura de superfície regular em S^n , definindo parametrizações

$$x_i^+ : U_i \rightarrow S^n, x_i^- : U_i \rightarrow S^n, i = 1, \dots, n+1,$$

obtidas do seguinte modo:

$$U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i = 0, x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 < 1\},$$

$$x_i^+(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}),$$

$$x_i^-(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -D_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}),$$

onde $D_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2)}$. Portanto, a família

$$\{(U_i, x_i^+), (U_i, x_i^-)\}, i = 1, \dots, n+1$$

é uma estrutura diferenciável em S^n . Geometricamente, isto equivale a cobrir a esfera S^n com vizinhanças coordenadas que são semiesferas perpendiculares aos vários eixos x_i .

Exemplo 1.1.5 ($\mathbb{RP}^n$). O espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$. Indicaremos por $\mathbb{RP}^n$ o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$; Isto é $\mathbb{RP}^n$ é o conjunto das “direções” de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vamos introduzir em $\mathbb{RP}^n$ uma estrutura diferenciável. Para isto, seja $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e observe, inicialmente, que $\mathbb{RP}^n$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

os pontos de $\mathbb{RP}^n$ serão indicados por $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Observe que, se $x_i \neq 0$,

$$[x_1, \dots, x_n] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right].$$

Definamos em $\mathbb{RP}^n$ subconjuntos $V_1, \dots, V_{n+1}$, dados por:

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}, i = 1, \dots, n+1.$$

Geometricamente, V_i é o conjunto das retas do $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$. Vamos mostrar que podemos tomar os V_i 's como vizinhanças coordenadas, onde as coordenadas em V_i são

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para isto, definamos aplicações $\mathbf{x}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ por

$$\mathbf{x}_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n], (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

e mostramos que a família $\{(\mathbb{R}^n, \mathbf{x})\}$ é uma estrutura diferenciável em $\mathbb{RP}^n$.

Com efeito, cada aplicação $\mathbf{x}_i$ é evidentemente biunívoca e $\bigcup \mathbf{x}_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^n$. Resta mostrar que $\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$ é aí diferenciável, $j = 1, \dots, n+1$. Ora, os pontos de $\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ são da forma:

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; y_j \neq 0\}.$$

Portanto $\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$, e, supondo $i > j$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i(y_1, \dots, y_n) &= \mathbf{x}_j^{-1}[y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n] \\ &= \mathbf{x}_j^{-1} \left[\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j} \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right] \\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right) \end{aligned}$$

que é evidentemente diferenciável.

1.1.2 Aplicações Suaves e Diferencial de uma Aplicação

Definição 1.1.6. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Exemplo 1.1.7. As funções reais diferenciáveis são as aplicações diferenciáveis $f : M \rightarrow R$. Para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , a função composta $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow R$ deve ser uma função diferenciável de m variáveis reais, definida num aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.1.8. *Sejam M, N_1, N_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ é de classe C^k se, e somente se, $f = (f_1, f_2)$, onde as coordenadas $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são de classe C^k . Realmente, considerando em $N_1 \times N_2$ os sistemas de coordenadas locais do tipo $y_1 \times y_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, vê-se que $(y_1 \times y_2) \circ f \circ x^{-1} = (y_1 \circ f_1 \circ x^{-1}, y_2 \circ f_2 \circ x^{-1})$. Lembremos, em seguida, que uma aplicação $g = (g_1, g_2) : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ é de classe C^k se, e somente se, ambas $g_1 : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ e $g_2 : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ são de classe C^k .*

Definição 1.1.9. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada curva em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M^n em p será indicado por $T_p M$, ao qual podemos munir com uma estrutura de espaço vetorial de dimensão n .

Se $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas em $p \in M$, então o espaço tangente $T_p M$ tem base

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Proposição 1.1.10. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

Demonstração: Sejam $\mathbf{x} : U \rightarrow M_1$ e $\mathbf{y} : V \rightarrow M_2$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Exprimindo φ nestas parametrizações, podemos escrever

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)), q = (x_1, \dots, x_n) \in U, (y_1, \dots, y_m) \in V.$$

Por outro lado, exprimindo α na parametrização $\mathbf{x}$, obteremos

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Portanto,

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), \dots, x_n(t))).$$

Decorre daí que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{(\frac{\partial}{\partial y_i})\}$ de $T_{\varphi(p)}M_2$, associada à parametrização $\mathbf{y}$, é dada por

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x'_i(0) \right). \quad (1.1)$$

A relação (1.9) mostra imediatamente que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α . Além disso, (1.9) pode ser escrita como

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (x'_j(0)), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ indica uma matriz $m \times n$ e $x'_j(0)$ indica uma matriz coluna com n elementos. Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de $T_p M_1$ em $T_{\varphi(p)} M_2$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$. $\square$

Definição 1.1.11. A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela proposição acima é chamada *diferencial de φ em p* .

1.1.3 Fibrado Tangente

Definição 1.1.12. Seja M uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de M é a união disjunta de todos os espaços tangentes de M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

É possível munir o conjunto TM de uma estrutura diferenciável. Seja $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável máxima de M . Indicaremos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α , defina

$$\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

por

$$\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ as coordenadas $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas de v na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$.

Mostremos agora que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathbf{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em TM . Como $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(d\mathbf{x}_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{\mathbf{x}_\alpha(q)}M, q \in U_\alpha$, temos que

$$\bigcup_\alpha \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

o que verifica a primeira condição da Definição 1.1.1. Seja agora

$$(p, v) \in \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta(q_\beta), d\mathbf{x}_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha, q_\beta \in U_\beta, v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = \mathbf{y}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = ((\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(v_\alpha)).$$

Como $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ é diferenciável, $d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$ é diferenciável.

Proposição 1.1.13. *TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. Além disso, com respeito a estrutura dada acima, a projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ dada por*

$$\pi(p, v) = p$$

é suave.

Demonstração: Ver [10]. □

1.1.4 Variedades Orientáveis

Definição 1.1.14. *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que:*

1. *para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo o item acima é chamada uma *orientação* de M e M é orientada.

Exemplo 1.1.15. Se M pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de modo que a intersecção $V_1 \cap V_2$ é conexa, então M é orientável. Pois como o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é $\neq 0$, ele não muda de sinal em $V_1 \cap V_2$; se é negativo em um ponto, basta trocar o sinal de uma das coordenadas para que ele passe a positivo nesse ponto, donde em $V_1 \cap V_2$.

Em particular

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável. Com efeito, seja $N = (0, \dots, 0, 1)$ o pólo norte e $S = (0, \dots, 0, -1)$ o pólo sul de S^n . Defina uma aplicação $\pi_1 : S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (projeção estereográfica a partir do polo norte) que leva $p = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de $S^n - \{N\}$ na intersecção do hiperplano $x_{n+1} = 0$ com a reta que passa por p e N . É imediato verificar que

$$\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

A aplicação π_1 é diferenciável, injetiva e aplica $S^n - \{N\}$ sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$. A projeção estereográfica π_2 a partir do pólo sul sobre o hiperplano x_{n+1} possui as mesmas propriedades.

Portanto, as parametrizações $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$ cobrem S^n . Observe que a intersecção $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n - \{N \cup S\}$ é conexa, logo S^n é orientável.

Definição 1.1.16. Sejam E, F espaços vetoriais orientados, com mesma dimensão. Dizemos que um isomorfismo linear $T : E \rightarrow F$ preserva orientação se transforma bases positivas de E em bases positivas de F . Caso contrário, dizemos que T inverte orientação.

Exemplo 1.1.17. Provemos agora que $\mathbb{RP}^n$ é orientável quando n é ímpar e não orientável quando n é par. Com isto em mente, consideramos a projeção canônica $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, que é um difeomorfismo local, e a aplicação antípoda $\alpha : S^n \rightarrow S^n$. Temos que $\pi \circ \alpha = \pi$. Se n é ímpar, definimos uma orientação em cada espaço tangente $T_y \mathbb{RP}^n, y = \pi(x)$, exigindo que o isomorfismo linear $\pi'(x) : T_x S^n \rightarrow T_y \mathbb{RP}^n$ seja positivo. Veja que, desde que $\pi'(-x) \circ \alpha'(x) = \pi'(x)$ e $\alpha'(x)$ é positivo, o isomorfismo $\pi'(-x)$ induziria a mesma orientação em $T_y \mathbb{RP}^n$. Isto define uma orientação em $\mathbb{RP}^n$.

Por outro lado, assuma que $\mathbb{RP}^n$ é orientável. Desde que S^n seja conexo, podemos escolher uma orientação para $\mathbb{RP}^n$ de tal maneira que $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é positivo. Agora fixe $x \in S^n$. Desde que o isomorfismo $\pi'(-x)$ e $\pi'(x)$ são ambos positivos, segue que $\alpha'(x) = \pi'(-x)^{-1} \circ \pi'(x)$ é positivo e portanto n é ímpar.

Definição 1.1.18. Um recobrimento duplo orientável é uma aplicação $p : \widetilde{M} \rightarrow M$, de classe C^k , com as seguintes propriedades:

- a) M é uma variedade conexa, $\widetilde{M}$ é uma variedade orientável, e p é um difeomorfismo local;
- b) Para cada $y \in M$, a imagem inversa $p^{-1}(y)$ contém exatamente dois pontos;
- c) Se $p(x_1) = p(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$, então o isomorfismo linear $p'(x_2)^{-1} \circ p'(x_1) : T_{x_1}\widetilde{M} \rightarrow T_{x_2}\widetilde{M}$ é negativo.

Exemplo 1.1.19. Quando n é par, a aplicação quociente $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é um recobrimento duplo orientável do espaço projetivo.

1.1.5 Campos de Vetores e Colchete de Lie

Definição 1.1.20. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a $\mathbf{x}$, $i = 1, \dots, n$. X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização.

Às vezes é conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto $\mathcal{D}$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}$ das funções em M , definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), f \in \mathcal{D},$$

A interpretação de X como um operador em $\mathcal{D}$ permite-nos considerar os inteirados de X . Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto temos o seguinte.

Lema 1.1.21. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.

Demonstração: Primeiro provaremos que se Z existe, ele é único. Admitamos, portanto, a existência de um tal Z . Seja $p \in M$ e $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ uma parametrização em p , e sejam

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões de X e Y nesta parametrização. Então para todo $f \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} XYf &= X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \\ YXf &= Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Portanto, Z é dado, na parametrização $\mathbf{x}$, por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

o que mostra a unicidade de Z .

Para a demonstração da existência, define-se Z_α em cada vizinhança coordenada $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ de M pela expressão anterior. Por unicidade, $Z_\alpha = Z_\beta$ em $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, o que permite definir z em toda a variedade M . $\square$

O campo vetorial Z dado pelo lema cima é chamado *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y ; Z é evidentemente diferenciável.

1.2 Conceitos de Geometria Riemanniana

1.2.1 Métricas Riemannianas

Definição 1.2.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , co $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Exemplo 1.2.2 (Toros). *O Toro mergulhado em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície de revolução gerada pelo círculo. Tomando o círculo com centro em $(R, 0)$ e raio $r < R$ com parametrização*

$\gamma(t) = (R + r \cos t, r \sin t)$ obtemos a parametrização para o toro bidimensional como superfície de revolução

$$\varphi(t, \phi) = ((R + r \cos t) \cos \phi, (R + r \cos t) \sin \phi, r \sin t)$$

cujas respectivas métricas são dadas por

$$G(t, \phi) = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos t)^2 \end{bmatrix}.$$

Outra métrica induzida de $\mathbb{R}^n$ importante para o toro, não localmente isométrica à métrica dada acima é a métrica plana do toro: considerando o toro como a superfície n -dimensional $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 \subset \mathbb{R}^{2n}$, a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{2n}$ induz uma métrica no toro. Com a parametrização $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ dada por

$$\varphi(\phi) = \varphi(\phi^1, \dots, \phi^n) = (\cos \phi^1, \sin \phi^1, \dots, \cos \phi^n, \sin \phi^n),$$

temos

$$g_{ij}(\phi) = \delta_{ij}.$$

1.2.2 Comprimento de Curvas e Volume

Seja $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável. O campo vetorial $dc \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado *campo velocidade* de c . A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um *segmento*. Se M é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$\mathfrak{L}_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt;$$

Seja $p \in M$ e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização, com $p \in \mathbf{x}(U)$, na orientação de M . Considere uma base ortonormal positiva $\{e_1, \dots, e_n\}$ em $T_p M$ e escreva $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q)$ na base $\{e_i\} : X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij} e_j$. Então

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{jl} a_{ij} a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj}.$$

Como o volume $\text{Vol}(X_1(p), \dots, X_n(p))$ do paralelepípedo formado pelos vetores $X_1(p), \dots, X_n(p)$ em $T_p M$ é igual a $\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}) , temos que

$$\text{Vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p).$$

se $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é outra parametrização positiva em torno de p , com $Y_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(p)$ e $h_{ij}(p) = \langle Y_i, Y_j(p) \rangle$, teremos

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})}(p) &= \text{Vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) \\ &= J \text{vol}(Y_1(p), \dots, Y_n(p)) = J \sqrt{\det(h_{ij})}(p), \end{aligned}$$

onde $J = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \det(d\mathbf{y}^{-1} \circ d\mathbf{x})(p) > 0$ é o determinante da diferencial da mudança de coordenadas.

Seja agora $R \subset M$ um conjunto aberto conexo, cujo fecho é compacto. Suporemos que R está contida em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ de uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ positiva, e que a fronteira de $\mathbf{x}^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Definimos o *volume* $\text{Vol}(R)$ em R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$\text{Vol}(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n.$$

A definição acima não depende do sistema de coordenadas.

Proposição 1.2.3. *Sejam g e h métricas em uma variedade Riemanniana M^n compacta tais que $g \leq h$, ou seja, $g_p(v, v) \leq h_p(v, v)$ então*

$$\text{Vol}(M, g) \leq \text{Vol}(M, h).$$

Demonstração: De fato, seja $p \in M$ e um sistema de coordenadas (U, x^i) em p , temos que

$$d\text{Vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

e

$$d\text{Vol}_h = \sqrt{\det(h_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Basta ver que

$$\sqrt{\det(g_{ij})} \leq \sqrt{\det(h_{ij})}.$$

De fato, primeiro observe que se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortonormal com respeito ao produto interno g , $\partial_j = a_{ij}u_i$ e $a = [a_{ij}]$, então

$$\det(g_{ij}) = (\det(a))^2.$$

Escolhemos agora $\{u_1, \dots, u_n\}$ satisfazendo as seguintes condições

- i) $\{u_1, \dots, u_n\}$ é ortonormal com respeito à métrica g ;
- ii) $h(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, ou seja, $\{u_1, \dots, u_n\}$ diagonaliza h .

Observe que $\partial_j = \frac{a_{ij}\sqrt{\lambda_i}}{u_i\sqrt{\lambda_i}}$. Logo,

$$\det(h_{ij}) = (\det(a_{ij}\sqrt{\lambda_i}))^2 = \lambda_1 \dots \lambda_n \det(g_{ij}).$$

Como, $g \leq h$ temos que $\lambda_i \geq 1$ para todo i . Portanto $\det(g_{ij}) \leq \det(h_{ij})$. $\square$

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

1.2.3 Conexão Afim

Definição 1.2.4. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.2.5. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ u outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Observação 1.2.6. A última linha de c) faz sentido, pois $\nabla_X Y(p)$ depende só do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p . Com efeito, a parte (3) da definição 1.2.4 permite mostrar que a noção de conexão afim é, de fato, uma noção local. Escolhemos um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} X_i(y_j) X_j. \end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

Demonstração: Suponhamos inicialmente que existe uma correspondência satisfazendo a), b) e c). Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$ e seja $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$, $t \in I$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então podemos expressar o campo V localmente como $V = \sum_j v^j X_j$, $j = 1, \dots, n$ onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$.

Por a) e b), tem-se

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por c) e 1 da definição 1.2.4,

$$\begin{aligned} \frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla_{\left(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i \right)} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j. \quad (1.2)$$

A expressão acima nos mostra que existe uma correspondência satisfazendo às condições da proposição 1.2.5, então a tal correspondência é única.

Para mostrar a existência, definamos $\frac{DV}{dt}$ em $\mathbf{x}(U)$ por (1.2). É imediato verificar que (1.2) possui as propriedades desejadas. Se $\mathbf{y}(W)$ é uma outra vizinhança coordenada, com $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$ e definimos $\frac{DV}{dt}$ em $\mathbf{y}(W)$ por (1.2), as definições “concordam” em $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U)$, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $\mathbf{x}(U)$. Segue que a definição pode ser estendida para todo M , e isto conclui a demonstração. $\square$

1.2.4 Transporte Paralelo

Definição 1.2.7. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposição 1.2.8. *Seja M um variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$.*

Demonstração: Ver [6].

Definição 1.2.9. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica $\langle, \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle, \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.*

A definição 1.2.9 é justificada pela proposição seguinte que mostra que ∇ é compatível com $\langle, \rangle$, então podemos diferenciar o produto interno pela “regra do produto” usual.

Proposição 1.2.10. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e somente se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \quad (1.3)$$

Demonstração: É obvio que a equação (1.3) implica a Definição 1.2.9. Mostremos, portanto, a recíproca. Escolhendo uma base ortonormal $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}(M)$, $t_0 \in I$. Agora, estenda paralelamente cada um dos vetores $P_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$, ao longo de c . Como ∇ é compatível com a métrica, $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}(M)$, para todo $t \in I$. Podemos, portanto, escrever

$$V = \sum_i v^i P_i, W = \sum_i w^i P_i, i = 1, \dots, n$$

onde v^i e w^i são funções diferenciáveis em I .

Segue-se daí que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle.$$

□

1.2.5 Conexão de Levi-Civita

Teorema 1.2.11. *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo:*

- a) ∇ é simétrica, ou seja, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração: Suponhamos inicialmente a existência de uma tal ∇ . Então

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (1.4)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (1.5)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \quad (1.6)$$

Somando (2.2) e (2.3) e subtraindo de (2.5), teremos, usando simetria de ∇ , que

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Y], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}.$$

A expressão acima mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle, \rangle$. Portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defini ∇ pela expressão acima. É fáil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas. $\square$

É conveniente dizer que as funções Γ_{ij}^k definidos em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k X_k$ são os *coeficientes da conexão* ∇ em U . Temos que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^k g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}) , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1.7)$$

A equação (1.7) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel. Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante tem a expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k.$$

Observe que a derivada covariante difere da derivada usual no espaço euclidiano por termos que envolvem os símbolos de Christoffel.

1.2.6 Geodésicas

Definição 1.2.12. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.*

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante.

Vamos agora determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica γ em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ em torno de $\gamma(t_0)$. Em U ,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

γ será uma geodésica se e só se

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Logo o sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, k = 1, \dots, n,$$

fornece as equações procuradas.

Exemplo 1.2.13 (Geodésicas em $\mathbb{R}^n$). *Seja $M = \mathbb{R}^n$. Como a derivação covariante coincide com a usual, as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco.*

Exemplo 1.2.14 (Geodésicas em S^n). *Seja $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária de dimensão n . Os círculos máximos de S^n parametrizados pelo comprimento de arco são geodésicas. Dado $p \in S^n$ e um vetor unitário $v \in T_p S^n$, a intersecção com S^n do plano que contém a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, o ponto p e o vetor v é um círculo máximo que pode ser parametrizado como a geodésica passando por p com velocidade v .*

Proposição 1.2.15 (Teorema de Existência e Unicidade de Geodésicas). *Seja M uma variedade Riemanniana. Então para todos $p \in M$ e $v \in T_p M$, e para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$.*

Lema 1.2.16. *se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}, a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Proposição 1.2.17. *Dado $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação $C^\infty, \gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M, |w| < \epsilon\}$ tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w), t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com uma velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \epsilon$.*

Demonstração: A geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida para $|t| < \delta$ e para $|v| < \epsilon_1$. Pelo lema anterior, $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ está definida para $|t| < 2$. Tomando $\epsilon < \frac{\delta \epsilon_1}{2}$, a geodésica $\gamma(t, q, w)$ está definida para $|t| < 2$ e $|w| < \epsilon$. $\square$

A proposição 2.1.2 nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial na seguinte maneira. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição 2.1.2. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), (q, v) \in \mathcal{U}$$

é chamada a *aplicação exponencial* em $\mathcal{U}$.

Proposição 1.2.18. *Dado $q \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M .*

Demonstração: Calculemos $d(\exp_q)_0$:

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v))|_{t=0} = v \end{aligned}$$

Logo $d(\exp_q)_0$ é a identidade de $T_q M$, donde pelo teorema da função inversa, $\exp_q$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0. $\square$

1.2.7 Curvatura

Definição 1.2.19. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.2.20. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

1. R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$;
2. Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear.

Proposição 1.2.21. *O tensor curvatura satisfaz $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.*

Demonstração: De fato, temos

$$\begin{aligned}
 R(Y, X)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[Y, X]} Z \\
 &= -\nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{-[X, Y]} Z \\
 &= -\nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
 &= -R(X, Y)Z.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.22 (Primeira identidade de Bianchi). $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.

De agora em diante, escreveremos por conveniência, $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$.

Proposição 1.2.23. *a) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$*

b) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$

c) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$

d) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Definição 1.2.24. *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathcal{D}(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.2.25. *Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r + 1)$ dada por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \cdots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a *derivada covariante* $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r).$$

Proposição 1.2.26 (Segunda identidade de Bianchi). $\nabla R(X, Y, Z, W, T) + \nabla R(X, Y, W, T, Z) + \nabla R(X, Y, T, Z, W) = 0$.

É conveniente escrever o que foi visto acima em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ em torno do ponto $p \in M$. Ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l.$$

Assim R_{ijk}^l são as componentes da curvatura R em $(U, \mathbf{x})$. Se

$$X = \sum_i u^i X_i, Y = \sum_j v^j X_j, Z = \sum_k w^k X_k,$$

obtemos, pela linearidade de R ,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l.$$

Fazendo

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk} g_{ls} = R_{ijks},$$

podemos escrever as identidades da Proposição 1.2.23 como:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jiks}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk}$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}.$$

Exemplo 1.2.27. Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obtemos que

$$\nabla_X Z = (X z_1, \dots, X z_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

No que se segue convém usar a seguinte notação. Dado um espaço vetorial V , indicaremos por $|X \wedge Y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par $x, y \in V$.

Definição 1.2.28. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .

Lema 1.2.29. Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle R'(X, Y, W)Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Demonstração: Admita que $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_p M$, e faça $\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, Y, W, Z \rangle'$. Observe que R' satisfaz as propriedades *a), b), c)* e *d)* da proposição 1.2.23. Como

$$(X, Y, X, Y)' = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2,$$

temos que, para todo par de vetores $X, Y \in T_p M$,

$$R(X, Y, X, Y) = k_0(|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = K_0 R'(X, Y, X, Y).$$

Isto implica que, para todo X, Y, W, Z ,

$$R(X, Y, W, Z) = k_0 R'(X, Y, W, Z),$$

donde $R = k_0 R'$. A recíproca é imediata. $\square$

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecem com tanta frequência que elas merecem nomes.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos a seguinte média:

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

com $j = 1, \dots, n$. Ela é chamada *curvatura de Ricci* na direção x .

Definição 1.2.30. *Uma variedade riemanniana M é chamada uma variedade de Einstein se existe uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\text{Ric} = fg.$$

Neste caso, dizemos também que g é uma métrica de Einstein.

Lema 1.2.31 (Schur). *Seja M^n uma variedade conexa e de Einstein, ou seja $\text{Ric}(X, Y) = \Lambda g(X, Y)$, onde $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real. Temos que Λ é constante com $n \geq 3$ e M^3 tem curvatura seccional constante.*

Demonstração: Seja $\{e_i\}, i = 1, \dots, n \geq 3$, um referencial ortonormal e geodésico em um ponto $p \in M$ (ou seja, numa vizinhança $U \subset M$ de p , os e'_i s são ortonormais para todo $q \in U$ e, em p , $\nabla_{e_i} e_j = 0$.)

A segunda identidade de Bianchi em p se escreve

$$e_s(R_{hijk}) + e_j(R_{hiks}) + e_k(R_{hisj}) = 0,$$

onde R_{hijk} são as componentes do tensor curvatura neste referencial e levando-se em conta que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, observe que $\langle e_i, ek \rangle = g_{ik} = \delta_{ik} = \delta^{ik}$. Multiplicando a expressão acima por $\delta_{ik}\delta_{hj}$ e somando em i, j, h e k , obteremos: para a primeira parcela.

$$\begin{aligned} \sum_{ikjh} \delta_{hj} \delta_{ik} e_s(R_{hijk}) &= e_s \left(\sum_{ikjh} \delta_{hj} \delta_{ik} R_{hijk} \right) \\ &= e_s \left(\sum_{hj} \delta_{hj} R_{hj} \right) \\ &= e_s \left(\sum_{hj} \delta_{hj} (\Lambda \delta_{hj}) \right) \\ &= n e_s(\Lambda). \end{aligned}$$

para a segunda parcela,

$$\begin{aligned}
 \sum_{ikjh} \delta_{hj} \delta_{ik} e_j(R_{hiks}) &= -(\sum_{jh} \delta_{hj} e_j(\sum_{ik} \delta_{ik} R_{hisk})) \\
 &= (\sum_{jh} \delta_{hj} e_j(\Lambda \delta_{hs})) \\
 &= -e_s(\Lambda).
 \end{aligned}$$

e para a terceira parcela,

$$\sum_{ikjh} \delta_{hj} \delta_{ik} e_k(R_{hisj}) = -e_s(\Lambda).$$

Portanto, implica que, para todo s , $(n-2)e_s(\Lambda) = 0$. Pela arbitrariedade de p , Λ é constante em M .

Considerando agora $n = 3$. Seja $e_1, e_2, e_3 \in T_p M$ um base ortonormal, e seja $K(e_i, e_j) = K(e_j, e_i)$ a curvatura seccional do espaço 2-dimensional de $T_p M$ gerado por e_i e e_j . Então:

$$\begin{aligned}
 -\text{Ric}(e_1, e_1) &= K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3) \\
 -\text{Ric}(e_2, e_2) &= K(e_2, e_1) + K(e_2, e_3) \\
 -\text{Ric}(e_i, e_j) &= K(e_3, e_1) + K(e_3, e_2)
 \end{aligned}$$

portanto

$$-\text{Ric}(e_1, e_1) - \text{Ric}(e_2, e_2) + \text{Ric}(e_3, e_3) = 2K(e_1, e_2).$$

Como para $i = 1, 2, 3$, $\text{Ric}(e_i, e_i) = -\Lambda$, temos $K(e_1, e_2) = \frac{\Lambda}{2}$. □

Definição 1.2.32. A curvatura escalar de uma variedade Riemanniana é dada por

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle,$$

com $j = 1, \dots, n$ e $\{z_1, \dots, z_n\}$ representa uma base ortonormal para $T_p M$.

1.3 Imersão Isométrica

Seja $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana de dimensão $m = n+k$. Se M é uma variedade diferenciável com dimensão n , existe uma imersão

$$f : M \rightarrow \overline{M}$$

e M é dotada da métrica induzida por esta imersão, então dizemos que f é uma imersão isométrica de (M, g) em $(\overline{M}, \overline{g})$.

Dessa forma, se $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ é uma imersão, então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset v\overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto v do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q M, q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$$

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M . $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$.

Proposição 1.3.1. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : (U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, x, y \in T_p M,$$

é uma aplicação bilinear simétrica.

Definição 1.3.2. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta = H_\eta(x, x)$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η .

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ por

$$\langle S_\eta, y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.3.3. *Seja $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração: *Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então $\langle N, Y \rangle = 0$, e portanto*

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= \langle -\bar{\nabla}_X N, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

□

Teorema 1.3.4 (Equação de Gauss). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM . Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Demonstração: Sejam X, Y extensões locais ortogonais de x, y respectivamente, e tangentes a M ; indicaremos por $\bar{X}, \bar{Y}$ as extensões locais de X, Y a $\bar{M}$. Então

$$\begin{aligned}
K(x, y) - \overline{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{X} - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{X}), Y \rangle(p) \\
&+ \langle \nabla_{[X, Y]} X - \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p)
\end{aligned}$$

Observe inicialmente que o último termo se anula, pois

$$\langle \nabla_{[X, Y]} X - \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p) = - \langle (\overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{X})^N, Y \rangle(p) = 0.$$

Por outro lado, se indicarmos por $E_1, \dots, E_m, m = \dim \overline{M} - \dim M$, campos locais ortonormais e normais a M , teremos que

$$B(X, Y) = \sum_i H_i(X, Y) E_i, H_i = H_{E_i}, i = 1, \dots, m.$$

Portanto, em p ,

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{X} = \overline{\nabla}_Y \left(\sum_i H_i(X, X) E_i + \nabla_X X \right) = \sum_i \{ H_i(X, X) \overline{\nabla}_Y E_i + \overline{Y} H_i(X, X) E_i \} + \overline{\nabla}_Y \nabla_X X.$$

Logo em p ,

$$\langle \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{X}, Y \rangle = - \sum_i H_i(X, X) H_i(Y, Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle. \quad (1.8)$$

Analogamente,

$$\langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{X}, Y \rangle = - \sum_i H_i(X, Y) H_i(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle. \quad (1.9)$$

Usando (1.8) e (1.9), o resultado segue. □

No caso de hiperfícies $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, a formula de Gauss admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp, |\eta| = 1$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ para a qual $S_\eta = S$ é diagonal, isto é, $S(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, \dots, n$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios de S . Então $H(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Portanto, podemos escrever

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p . A imersão f é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 1.3.5. *Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p .*

Definição 1.3.6. *Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. O vetor curvatura média de f em p é definido por*

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)(p) \in (T_p M)^\perp$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal para $T_p M$

Na definição acima, quando $p = 1$. Seja $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \vec{H}(p) &= \langle \vec{H}(p), \eta \rangle \eta \\ &= \sum_{i=1}^n \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle \eta \\ &= \sum_{i=1}^n \langle S_\eta(e_i), e_i \rangle \eta \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) \eta \\ &= H(p) \eta. \end{aligned}$$

Definição 1.3.7. *Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se que o traço $S_\eta = 0$.*

É claro que f é mínima se e só se $\vec{H}(p) = 0$.

Exemplo 1.3.8 (Helicóide). *O helicóide é dado pela parametrização*

$$\varphi(t, s) = (t \cos s, t \sin s, s),$$

onde $s, t \in \mathbb{R}$.

Seja $f : M \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersfície. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Temos

$$B(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle \eta = H_\eta(x, y) \eta.$$

Escolha agora uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ e seja $h_{ij} = H_\eta(e_i, e_j)$. Logo, $B(e_i, e_j) = h_{ij} \eta$. Portanto, pela equação de Gauss (1.3.4) temos

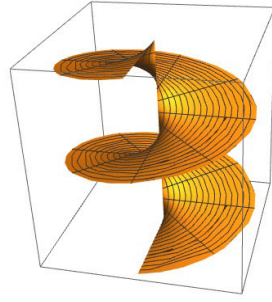


Figura 1.1: O helicóide é uma superfície mínima

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2.$$

Tomando o somatório em i, j de 1 a n temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n R_{ij} &= \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ij} + \left(\sum_{i=1}^n h_{ii} \right) \left(\sum_{j=1}^n h_{jj} \right) - \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ij} + H^2 - |B|^2. \end{aligned}$$

somando e subtraindo $2 \sum_{j=1}^n \bar{R}(e_i, \eta, e_i, \eta)$ obtemos,

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ij} + 2 \sum_{j=1}^n \bar{R}(e_i, \eta, e_i, \eta) - 2 \sum_{j=1}^n \bar{R}(e_i, \eta, e_i, \eta) + H^2 - |B|^2. \\ &= \bar{K} - 2 \text{Ric}_{\bar{g}}(\eta, \eta) + H^2 - |B|^2. \end{aligned}$$

Definição 1.3.9. *Sejam M^n uma variedade diferenciável com uma métrica g , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ e $u, v \in T_p M$, definimos por*

$$\text{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$$

o divergente de um campo X . E por

$$\Delta_g f = \text{tr} \text{Hess} f = \sum_{i=1}^n \text{Hess} f(e_i, e_i) = \text{div}(\nabla_g f)$$

o laplaciano da função f . Onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para t_M .

Teorema 1.3.10. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com bordo. Para algum campo de vetores suave com suporte compacto X em M ,*

$$\int_M \text{div} X dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle_g dV_{\tilde{g}}.$$

onde N é um campo de vetores normal unitário que aponta para fora ao longo de ∂M e $\tilde{g}$ é a métrica Riemanniana induzida em ∂M .

Proposição 1.3.11. *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, se $f : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta_{\tilde{g}}f = \Delta_gf - nH(f) - \text{Hess}_{\tilde{g}}f(N, N)$$

em cada $p \in M$, onde H é o vetor curvatura média da imersão e N é um campo unitário normal à M em uma vizinhança de p .

Demonstração: Denote por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\widetilde{M}$ respectivamente. Se $\{e_1, e_2, \dots, e_n = N\}$ é um referencial adaptativo em uma vizinhança de $p \in M$ em $\widetilde{M}$, temos em p

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}f &= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i(e_i f) - (\tilde{\nabla}_{e_i} e_i)(f)) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) - B(e_i, e_i)(f)) + N(Nf) - (\tilde{\nabla}_N N)(f) \\ &= \Delta_gf - \text{Hess}_{\tilde{g}}f(N, N) - \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)(f) \\ &= \Delta_gf - nH(f) - \text{Hess}_{\tilde{g}}f(N, N). \end{aligned}$$

□

Corolário 1.3.12. *Seja $x : (S^2, h) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a imersão canônica e x_j a função coordenada definida em $\mathbb{R}^3$ então*

$$\Delta_h x_j + 2x_j = 0$$

Demonstração: Seja $N = -x$ o campo normal unitário, temos

$$\begin{aligned} S_\eta(v) &= -(\tilde{\nabla}_v N)^T \\ &= (\tilde{\nabla}_v x)^T \\ &= v. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{1}{n} \text{tr} S_\eta N \\
&= \frac{1}{n} n(-x) \\
&= -x.
\end{aligned}$$

Seja $\gamma(t) = (1+t)x$, temos

$$\begin{aligned}
H_x(x_j) &= -x(x_j) \\
&= -\frac{d}{dt} x_j((1+t)x)|_{t=0} \\
&= -\frac{d}{dt} (1+t)x_j|_{t=0} \\
&= -x_j.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta_\delta x_j &= \Delta_h x_j - 2H(x_j) - \text{Hess}_\delta x_j(N, N) \\
0 &= \Delta_h x_j - 2(-x_j)
\end{aligned}$$

□

1.3.1 Primeira variação da área

Seja $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma variação de Σ com suporte compacto e bordo fixado. Isto é, $F = Id$ em K^c , com $K \subset M$ compacto,

$$F(x, 0) = x,$$

e para todo $x \in \partial\Sigma$,

$$F(x, t) = x.$$

O campo variacional da variação F é o campo F_t , onde temos $F_t \equiv 0$ em K^c .

Para calcular a primeira variação da área para esta família de superfícies, tomemos um sistema de coordenadas em Σ e definimos para cada Σ_t a métrica

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j})$$

Defina

$$\nu(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$$

A fórmula da área é

$$\text{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}$$

Usando a regra de Leibniz, segue que

$$\frac{d}{dt}_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \frac{d}{dt}_{t=0} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}$$

Para calcular $\frac{d}{dt}_{t=0} \nu(t)$ em um ponto x , podemos escolher um sistema de coordenadas tal que em x este é ortonormal, ou seja

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

Usando isso e o fato das derivadas com respeito a x_i e t comutarem, obtemos em x ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{t=0} \nu(t) &= \frac{1}{2} \text{tr}(g'_{ij}(0)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k g'_{kk}(0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^k \frac{d}{dt} \langle F_{x_i}, F_{x_i} \rangle \\ &= \sum_1^k \langle \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i} \rangle = \sum_1^k \langle \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i} \rangle \\ &= \text{div}_{\Sigma} F_t. \end{aligned}$$

Como $F_t \in T_x M$ este pode ser decomposto em uma parte tangente e outra normal à Σ . Temos,

$$\begin{aligned} \sum_1^k \langle \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i} \rangle &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}} \langle F_t, N_l \rangle N_l, F_{x_i} \rangle + \text{div}_{\Sigma} F_t^T \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle F_t, N_l \rangle \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle + \text{div}_{\Sigma} F_t^T \\ &= - \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle F_t, N_l \rangle \langle II(F_{x_i}, F_{x_i}), N_l \rangle + \text{div}_{\Sigma} F_t^T \\ &= - \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle II(F_{x_i}, F_{x_i}), \langle F_t, N_l \rangle N_l \rangle + \text{div}_{\Sigma} F_t^T \\ &= - \langle H, F_t \rangle + \text{div}_{\Sigma} F_t^T \end{aligned}$$

Onde N_l é uma base ortonormal do fibrado normal de Σ em x . Retomando e usando o Teorema de Stoke's para ver que $\int_{\Sigma} \text{div} F_t^T = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}_{t=0} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} - \langle H, F_t \rangle$$

1.3.2 Segunda variação da área

Suponha $\Sigma^k \subset M^n$ uma subvariedade mínima. Queremos calcular a segunda derivada do funcional área para uma variação de Σ . Seja F uma variação de Σ com suporte compacto. Assumiremos que F é uma variação normal, isto é, em Σ temos

$$F_t^T \equiv 0$$

Como antes, seja x_i coordenadas locais em Σ e seja

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j})$$

Defina

$$\nu(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$$

Derivando $\nu(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}$$

Relembrando que a primeira derivada pode ser escrita como

$$2 \frac{d}{dt} \nu(t) = \text{tr}(g'_{ij}(t) g^{lm}(t)) \nu(t), \quad (1.10)$$

onde o traço, aqui, significa $\sum_{i,j} g'_{ij}(t) g^{ij}(t)$. Para ver isso, relembramos que

$$\frac{d}{dt} \det(\delta_{ij} + ta_{ij}) = \text{tr}(a_{ij}).$$

Para calcular $\frac{d^2}{dt^2} \nu(t)$ em algum ponto $x \in \Sigma$, podemos escolher um sistema de coordenadas x_i ortogonal em x . Derivando (1.10) em x , temos

$$2 \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) = \text{tr}(g''_{ij}(0)) - \text{tr}(g'_{ij}(0) g'_{lm}(0)) + \frac{1}{2} [\text{tr}(g'_{ij}(0))]^2. \quad (1.11)$$

Desde que Σ é mínima, temos $\text{tr}(g'(0)) = 0$ e, portanto, obtemos

$$2 \frac{d^2}{dt^2} \nu(t) = \text{tr}(g''(0)) - \text{tr}(g'(0) g'(0)) = \text{tr}(g''(0)) - |g'(0)|^2, \quad (1.12)$$

onde a última igualdade é $\text{tr}(M^2) = |M|^2$, com M uma matriz simétrica.

Lema 1.3.13. *Em um ponto x , obtemos*

$$\begin{aligned} |g'(0)|^2 &= 4 |\langle II(.,.), F_t \rangle|^2, \\ \text{tr}(g''(0)) &= 2 |\langle II(.,.), F_t \rangle|^2 + 2 |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 + 2 \text{tr} \langle R_M(., F_t) F_t, . \rangle + 2 \text{div}_{\Sigma}(F_{tt}). \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [7]. □

Portanto, obtemos em x ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2_{t=0}} \nu(t) &= -|\langle II(.,.), F_t \rangle|^2 \\ &\quad + |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 - \text{tr}_{\Sigma} \langle R_M(e_i, F_t) e_i, F_t \rangle + \text{div}(F_{tt}). \end{aligned}$$

Agora integrando e usando a minimalidade de Σ obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2_{t=0}} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} \langle F_t, L F_t \rangle,$$

onde L é um operador auto-adjunto chamado *operador de estabilidade* definido em um campo de vetores normal X de Σ por

$$LX = \Delta_{\Sigma}^N X + \text{tr}[R_M(., X).] + \sum_{i,j=1}^k g(II(e_i, e_j), X) II(e_i, e_j),$$

e Δ_{Σ}^N é o Laplaciano no fibrado tangente.

Lema 1.3.14 (Desigualdade de estabilidade). *Suponha que $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ é uma hipersuperfície mínima estável, ou seja $\frac{d^2}{dt^2_{t=0}} \text{Vol}(F(\Sigma, t)) \geq 0$, com fibrado normal trivial, então para toda função Lipschitz η com suporte compacto*

$$\int_{\Sigma} (\inf_M \text{Ric}_M(\nu, \nu) + |II|^2) \eta^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2.$$

Demonstração: Ver [7]. □

1.4 Variedades Riemannianas Completas

Definição 1.4.1. *Uma variedade Riemanniana M é completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_p M$, i.e., se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.4.2. *A distância $d(p, q)$ é definida por $d(p, q) = \inf$ dos comprimentos de todas as curvas $f_{p,q}$, onde $f_{p,q}$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q .*

É fácil mostrar que com a distância d , definida acima, M é um espaço métrico e que a topologia induzida pela mesma coincide com a topologia inicial de M .

Teorema 1.4.3 (Hopf e Rinow). *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $\exp_p$ está definida em todo o $T_p M$.
- b) Os limitados e fechados de M são compactos.
- c) M é completa como espaço métrico.
- d) M é geodesicamente completa.
- e) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Corolário 1.4.4. *Se M é compacta então M é completa.*

Corolário 1.4.5. *Uma subvariedade fechada de uma variedade Riemanniana completa é completa na métrica induzida; em particular, as subvariedades fechadas de um espaço euclidiano são completas.*

1.5 Variedades com Curvatura Seccional Constante

Podemos mencionar algumas variedades com curvatura seccional constante, a saber, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com $K \equiv 0$ e a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional $K \equiv 1$. Nesta seção introduziremos uma variedade Riemanniana, o espaço hiperbólico H^n de dimensão n , que tem curvatura seccional $K \equiv -1$. As variedades $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n são completas e simplesmente conexas.

Teorema 1.5.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante K . Então o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M , com a métrica do recobrimento, é isométrico a:*

- a) H^n , se $K = -1$,
- b) $\mathbb{R}^n$, se $K = 0$,
- c) S^n , se $K = 1$.

1.6 Fluxo de Ricci

Definição 1.6.1. *Seja M uma variedade Riemanniana, e seja $g(t)$, $t \in [0, T)$, uma família de métricas Riemannianas em M . Dizemos que $g(t)$ é uma solução para o fluxo de Ricci se*

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}.$$

Exemplo 1.6.2 (Variedades de Einstein). *Seja (M, g_0) uma variedade Riemanniana. Dizemos que g_0 é uma métrica de Einstein se $\operatorname{Ric}_{g_0} = \rho g_0$ para alguma constante ρ . Neste caso, as métricas*

$$g(t) = (1 - 2\rho t)g_0$$

formam uma solução para o fluxo de Ricci.

Teorema 1.6.3. *Seja (M, g_0) uma variedade Riemanniana compacta. Então existe um número real $T > 0$ e uma família de métricas suave $g(t)$, $t \in [0, T)$ tal que $g(t)$ é uma solução do fluxo de Ricci e $g(0) = g_0$. Além disso, a solução $g(t)$ é única.*

Demonstração: Ver [1]. □

Teorema 1.6.4 (Princípio do máximo fraco para escalares). *Suponha, para $t \in [0, T]$ que $g(t)$ é uma família de métricas suaves, e $X(t)$ uma família de campos de vetores em uma variedade fechada M . Seja $F : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Suponha que $u \in C^\infty(M \times [0, T], \mathbb{R})$ é solução de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)} u + \langle X(t), \nabla u \rangle + F(u, t).$$

Suponha ainda que $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = F(\phi(t), t) \\ \phi(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se $u(., 0) \leq \alpha$, então $u(., t) \leq \phi(t)$ para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: Para a demonstração do Teorema 1.6.4 ver [13]. □

Observação 1.6.5 (Princípio do máximo fraco). *O Teorema 1.6.4 também vale no sentido de todas as três desigualdades inversas, ou seja, substituindo $\leq$ por $\geq$ nas desigualdades.*

Observação 1.6.6. *O princípio do máximo forte para escalares diz que de fato $u(., t) < \phi(t)$ para todo $t \in [0, T]$, a menos que $u(x, t) = \phi(t)$ para todo $x \in M$ e $t \in [0, T]$.*

Proposição 1.6.7. *Temos que*

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} R)(X, Y, Z, W) = (\Delta R)(X, Y, Z, W) + Q(R)(X, Y, Z, W)$$

para todos campos de vetores X, Y, Z, W .

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos assumir que os campos de vetores X, Y, Z, W são constantes em t . Neste caso temos,

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X &= - \sum_{k=1}^n \text{Ric}(X, e_k) e_k, & \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y &= - \sum_{k=1}^n \text{Ric}(Y, e_k) e_k, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z &= - \sum_{k=1}^n \text{Ric}(Z, e_k) e_k, & \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} W &= - \sum_{k=1}^n \text{Ric}(W, e_k) e_k. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\begin{aligned} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} R)(X, Y, Z, W) - \frac{\partial}{\partial t} R(X, Y, Z, W) &= -R(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, Z, W) \\ &\quad - R(X, Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} W) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Ric}(X, e_k) R(e_k, Y, Z, W) + \sum_{k=1}^n \text{Ric}(Y, e_k) R(X, e_k, Z, W) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \text{Ric}(Z, e_k) R(X, Y, e_k, W) + \sum_{k=1}^n \text{Ric}(W, e_k) R(X, Y, Z, e_k) \\ &= (\Delta R)(X, Y, Z, W) + Q(R)(X, Y, Z, W) - \frac{\partial}{\partial t} R(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

O resultado segue. □

Proposição 1.6.8. *O tensor de $\text{Ric}_{g(t)}$ satisfaz a equação de evolução*

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \text{Ric})(X, Y) = (\Delta \text{Ric})(X, Y) + 2 \sum_{p,q=1}^n R(X, e_p, Y, e_q) \text{Ric}(e_p, e_q).$$

Corolário 1.6.9. *A curvatura escalar de $g(t)$ satisfaz*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{g(t)} = \Delta R_{g(t)} + 2|\text{Ric}_{g(t)}|^2.$$

Demonstração: Isto segue da proposição anterior tomando o traço sobre X e Y . $\square$

Proposição 1.6.10. *Suponha que $\inf_M R_{g_0} = \alpha > 0$. Então $T \leq \frac{n}{2\alpha}$ e $\inf_M R_{g_t} \geq \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}$ para todo $t \in [0, T)$.*

Demonstração: Seja $T = \min\{T, \frac{n}{2\alpha}\}$. Definimos uma função $h : M \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h = R - \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h &= \Delta h + 2|\text{Ric}|^2 - \frac{2}{n} \left(\frac{n\alpha}{n - 2\alpha t} \right)^2 \\ &\geq \Delta h + \frac{2}{n} R^2 - \frac{2}{n} \left(\frac{n\alpha}{n - 2\alpha t} \right)^2 \\ &= \Delta h + \frac{2}{n} \left(R + \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t} \right) h \end{aligned}$$

em $M \times [0, \tau)$. Por definição de α , temos $h(p, 0) \geq 0$ para todo $p \in M$. Assim, o princípio máximo implica que $h(p, t) \geq 0$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0, \tau)$. Portanto, temos $\inf_M R_{g_t} \geq \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}$ para todo $t \in [0, \tau)$. Disto deduzimos que $T \leq \frac{n}{2\alpha}$. $\square$

1.7 Grupo fundamental e Espaço de recobrimento

Definição 1.7.1. *Sejam X, Y espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são ditas homotópicas quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A homotopia é considerada um processo de deformação contínuo da aplicação f na aplicação g .

Exemplo 1.7.2. *Seja $Y \subset E$, onde E é um espaço vetorial normado. Dadas as aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, suponhamos que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ esteja contido em Y . Então, definindo $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$, obtemos uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ entre f e g , a qual chamamos uma homotopia linear. Para cada $x \in X$ fixo e t variando de 0 a 1, o ponto $H(x, t)$ percorre o segmento de reta que liga o ponto $f(x)$ ao ponto $g(x)$.*

Proposição 1.7.3. *Considere dois espaços topológicos X e Y . A relação de homotopia $f \cong g$ é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y .*

□

Um caminho em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $a : J \rightarrow X$, definido num intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Os pontos $a(s_0)$ e $a(s_1)$ são chamados pontos finais do caminho.

Dizemos que $a, b : I \rightarrow X$ são homotópicos quando $a \cong b$. Assim, uma homotopia entre os caminhos a e b é uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= a(s), H(s, 1) = b(s), \\ H(0, t) &= a(0) = b(0), \\ H(1, t) &= a(1) = b(1), \end{aligned}$$

para todo $s, t \in I$.

Portanto, para se ter $a \cong b$, é necessário que ambos tenham os mesmos pontos finais $a(0) = b(0) = x_0$ e $a(1) = b(1) = x_1$. Em particular, caminhos fechados $a, b : I \rightarrow X$ são homotópicos quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$H(s, 0) = a(s), H(s, 1) = b(s), H(0, t) = H(1, t) = a(0) = a(1) = x_0$$

para todo $s, t \in I$.

Considere dois caminhos $a, b : [s_0, s_1] \rightarrow X$ tais que $a(s_1) = b(s_0)$ isto é, o ponto final de a coincide com o ponto inicial de b . O produto ab é o caminho $ab : [s_0, s_1] \rightarrow X$ definido por

$$ab = \begin{cases} a(2s - s_0), & \text{se } s \in [s_0, \frac{s_0+s_1}{2}], \\ b(2s - s_1), & \text{se } s \in [\frac{s_0+s_1}{2}, s_1]. \end{cases}$$

O caminho inverso de $a : [s_0, s_1] \rightarrow X$ é definido por $a^{-1} : [s_0, s_1] \rightarrow X$, dado por

$$a^{-1}(s) = a(s_1 - s), s \in [s_0, s_1].$$

Proposição 1.7.4. $a \cong a', b \cong b' \Rightarrow ab \cong a'b', e a^{-1} \cong (a')^{-1}$.

Demonstração: Se $H : a \cong a'$ e $K : b \cong b'$ são homotópicos, definimos $L : I \times I \rightarrow X$ por

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, t \in I \\ K(2s - 1, t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, t \in I. \end{cases}$$

Desde que $H(1, t) = K(0, t) = a(1) = b(0)$ para todo $t \in I$, seque que L está bem definido.

Desde que $L|_{([0, \frac{1}{2}] \times I)}$ e $L|_{([\frac{1}{2}, 1] \times I)}$ sejam contínuos, então L é contínuo. Claramente L é

uma homotopia entre ab e $a'b'$. Agora defina $G : I \times I \rightarrow X$, por $G(s, t) = H(1 - s, t)$. G é uma homotopia entre a^{-1} e $(a')^{-1}$.

□

Fixemos $x_0 \in X$ e denotemos por:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha]; \alpha : I \rightarrow X, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\},$$

isto é, o conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados em x_0 . O ponto x_0 é dito base de $\pi_1(X, x_0)$.

Definição 1.7.5. Em $\pi_1(X, x_0)$ denotamos e definimos o seguinte produto por:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\rightarrow [\alpha][\beta] = [\alpha\beta]. \end{aligned}$$

Proposição 1.7.6. $\pi_1(X, x_0)$, com o produto definido acima é um grupo.

O grupo acima é denominado o grupo fundamental com base em x_0 .

Proposição 1.7.7. Se x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa de X , então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi(X, x_1)$ são isomorfos.

□

Definição 1.7.8. Um espaço topológico X é dito simplesmente conexo quando uma das seguintes condições vale:

1. X é conexo e temos $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$.
2. Para todo caminho fechado $a : I \rightarrow X$, com base em x_0 , temos $a \cong \epsilon_{x_0}$.

Proposição 1.7.9. Se $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa.

□

Exemplo 1.7.10. Sabemos que em $\mathbb{R}^n$, todos os caminhos são homotópicos. Basta considerar homotopias lineares. Em particular, todos os caminhos fechados são homotópicos ao caminho constante $c(x) = x_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[e_{x_0}]\} \cong 0.$$

Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ induz um homeomorfismo

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), y_0 = f(x_0),$$

definido por $f_{\#}(\alpha) = [f \circ \alpha]$, onde $\alpha = [\alpha]$.

Considere dois espaços topológicos X, Y . Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada um *homeomorfismo local* se cada ponto $x \in X$ está contido em um aberto U tal que $V = f(U)$ é um aberto em Y e a restrição $f|_U$ é um homeomorfismo de U em V .

Exemplo 1.7.11. *As aplicações abaixo são homeomorfismos locais*

a) $\xi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \xi(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$

b) $\varsigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow T, \varsigma(s, t) = (e^{is}, e^{it})$

c) $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, \pi(x) = \{x, -x\}$

Definição 1.7.12. *Uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é chamada aplicação de recobrimento quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que*

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \quad (1.13)$$

é a união de pares disjuntos de conjuntos abertos U_{α} tais que, para cada α , a restrição $p|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow V$ é um homeomorfismo. O espaço $\tilde{X}$ é chamado espaço de recobrimento de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ é chamado uma fibra sobre x .

Os homeomorfismos locais do exemplo 1.7.11 são aplicações de recobrimento.

Proposição 1.7.13. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento onde X é conexo, então cada fibra $p^{-1}(x), x \in X$, tem a mesma cardinalidade, que é chamada número de folhas do recobrimento.*

Sejam $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas. Um levantamento de g , com respeito a f , é uma aplicação contínua $\tilde{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$ tal que $f \circ \tilde{g} = g$

Proposição 1.7.14 (Levantamento único de caminhos). *$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ recobrimento, $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ caminho com $\gamma(0) = x_0, \tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$, então existe um único levantamento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.*

Proposição 1.7.15. *$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ recobrimento, $\gamma, \mu : [0, 1] \rightarrow X$ caminhos com $\gamma(0) = \mu(0), \gamma(1) = \mu(1)$. Seja $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0) = \gamma(0) = \mu(0)$. Sejam $\tilde{\gamma}, \tilde{\mu} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ os levantamentos de γ e μ , respectivamente, a partir de $\tilde{x}_0$. Então $\gamma \cong \mu$ se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\mu}$ possuem o mesmo extremo final, ou seja, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\mu}(1)$.*

1.8 Transversalidade

Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação de classe C^k e $S^s \in N^n$ uma subvariedade de classe C^k . Diz-se que f é *transversal* a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ quando $f'(p).T_pM + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$, ou seja, quando a imagem de $f'(p)$ junto com o espaço tangente a S em $f(p)$ geram $T_{f(p)}N$. Diz-se que f é transversal a S se, para todo ponto $p \in f^{-1}(S)$, f é transversal a S em p .

Exemplo 1.8.1. *Seja $S = \{c\}$, então f é transversal a c se, e somente se, c é valor regular de f .*

Suponha X uma variedade compacta, não necessariamente mergulhada em uma outra variedade Y , e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave transversal à uma variedade Z em Y , onde $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X fechada de dimensão zero, ou seja, um conjunto finito. Definimos o número *intersecção módulo 2* da aplicação f com Z , $I_2(f, Z)$, sendo o número de pontos em $f^{-1}(Z)$ módulo 2.

Teorema 1.8.2. *Se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ são homotópicas e ambas transversais a Z , então $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.*

Capítulo 2

Planos Projetivos Minimizantes de Área

Seja M^3 uma variedade compacta com uma métrica Riemanniana g . Denotamos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as superfícies mergulhadas $\Sigma \subset M$ homeomorfas ao plano projetivo $\mathbb{RP}^2$.

Suponhamos que o conjunto definido acima é não vazio e definimos

$$\mathcal{A}(M, g) = \inf\{\text{area}(\Sigma, g) : \Sigma \in \mathcal{F}\}. \quad (2.1)$$

A definição 2.1 acima deve ser pensada como uma quantidade análoga à sístole de (M, g) , a qual é definida por

$$\text{sys}(M, g) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ é um laço não contrátil em } M.\}$$

Em 2.1, ao invés de minimizarmos o comprimento de laços não contráteis, minimizamos a área de planos projetivos.

Nosso objetivo neste capítulo é fornecer a demonstração dos seguintes teoremas, obtidos em [3].

Teorema 2.0.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta. Além disso, suponha que M contém um plano projetivo mergulhado. Então*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi \quad (2.2)$$

e

$$\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi} \text{sys}(M, g)^2 > 0, \quad (2.3)$$

onde R_g denota a curvatura escalar da métrica g .

Combinando as desigualdades acima obtemos

$$\text{sys}(M, g)^2 \inf_M R_g \leq 6\pi^2.$$

As desigualdades (2.2) e (2.3) são ambas ótimas em $\mathbb{RP}^3$. De fato, se g denota a métrica em $\mathbb{RP}^3$ com curvatura seccional constante 1, então $R_g = 6$ e $\text{sys}(\mathbb{RP}^3, g) = \pi$. Usando (2.2) e (2.3), concluímos que $\mathcal{A}(\mathbb{RP}^3, g) = 2\pi$.

Teorema 2.0.2. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta. Além disso, suponha que M contém um plano projetivo mergulhado. Se $\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g = 12\pi$, então, (M, g) é isométrica ao espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$ possivelmente após uma homotetia da métrica g . Em particular, se $\text{sys}(M, g)^2 \inf_M R_g = 6\pi^2$, então (M, g) é isométrico a $\mathbb{RP}^3$.*

Começaremos agora a demonstração de cada Teorema citado acima.

2.1 Prova do Teorema 2.0.1

2.1.1 Prova da desigualdade (2.3)

Inicialmente, consideremos uma superfície $\Sigma \subset M$, então a aplicação $i_\# : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ está bem definida como vimos no capítulo anterior. Sendo assim a proposição abaixo nos fornece uma primeira característica dessa aplicação.

Proposição 2.1.1. *Seja Σ uma superfície em $\mathcal{F}$. Então o homeomorfismo induzido $i_\# : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetivo.*

Demonstração: Por contradição, suponha que $i_\# : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ não é injetivo. Isso significa que toda classe de homotopia não trivial em $\pi_1(\Sigma)$ é trivial em $\pi_1(M)$.

Afirmamos que o fibrado $TM|_\Sigma$ é orientável. De fato, seja $x \in \Sigma$ e escolha uma orientação para $T_x M$. Seja agora $y \in \Sigma$, $y \neq x$. Então podemos definir uma orientação em $T_y M$ da seguinte maneira: seja $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma curva ligando x a y e seja $\{e_1, e_2, e_3\} \subset T_x M$ uma base ortonormal positiva. Para cada $t \in (0, 1]$, considere $P_\alpha^t : T_x M \rightarrow T_{\alpha(t)} M$ o transporte paralelo de $x = \alpha(0)$ a $\alpha(t)$ ao longo da curva α . Para cada $t \in (0, 1]$, definimos uma orientação em $T_{\alpha(t)} M$ decretando que $\{P_\alpha^t(e_1), P_\alpha^t(e_2), P_\alpha^t(e_3)\} \subset T_{\alpha(t)} M$ seja uma base ortonormal positiva. Em particular, isto define uma orientação em $T_y M$, pois $y = \alpha(1)$. Nossa tarefa agora é provar que esta orientação em $T_y M$ não depende da curva α . Seja $\beta : I \rightarrow \Sigma$ outra curva ligando x a y . Como a classe de homotopia $[\alpha * \beta^{-1}] \in \pi_1(\Sigma)$ é trivial em $\pi_1(M)$, pois $i_\# : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ não é injetivo, temos que as curvas α e β são homotópicas em M com extremos fixos. Seja $H : [0, 1] \times I \rightarrow M$

uma homotopia entre α e β . Defina $\gamma_s : I \rightarrow M$ por $\gamma_s(t) = H(s, t)$, para todo $s \in [0, 1]$. Logo, γ_s é uma curva em M ligando x a y para todo $s \in [0, 1]$. Considere para cada $s \in [0, 1]$ a base ortonormal $\{(P_{\gamma_s}^1)^{-1}P_\alpha(e_1), (P_{\gamma_s}^1)^{-1}P_\alpha(e_2), (P_{\gamma_s}^1)^{-1}P_\alpha(e_3)\} \subset T_x M$. Note que para $s = 0$, esta base coincide com a base ortonormal positiva $\{e_1, e_2, e_3\} \subset T_x M$. Logo, como estas bases variam continuamente em função de $s \in [0, 1]$, temos que $\{(P_{\gamma_s}^1)^{-1}P_\alpha(e_1), (P_{\gamma_s}^1)^{-1}P_\alpha(e_2), (P_{\gamma_s}^1)^{-1}P_\alpha(e_3)\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_x M$ para todo $s \in [0, 1]$. Em particular, para $s = 1$, ou seja, a base $\{P_\beta^{-1}P_\alpha(e_1), P_\beta^{-1}P_\alpha(e_2), P_\beta^{-1}P_\alpha(e_3)\} \subset T_x M$ é positiva. Isto implica que as bases $\{P_\alpha^1(e_1), P_\alpha^1(e_2), P_\alpha^1(e_3)\}$ e $\{P_\beta^1(e_1), P_\beta^1(e_2), P_\beta^1(e_3)\}$ de $T_y M$ determinam a mesma orientação. Portanto, o fibrado $TM|_\Sigma$ é orientável.

Desde que o fibrado tangente $T\Sigma$ é não orientável e $TM|_\Sigma = T\Sigma \oplus T\Sigma^\perp$, concluímos que Σ tem fibrado normal $T\Sigma^\perp$ não trivial.

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma curva fechada suave em Σ que representa uma classe de homotopia não trivial de $\pi_1(\Sigma)$. Podemos supor que $\gamma'(0) = \gamma'(1)$. Para cada $t \in [0, 1]$, podemos encontrar um vetor unitário $\nu(t) \in T_{\gamma(t)}M$ que é ortogonal ao espaço $T_{\gamma(t)}\Sigma$. Mas que isso, podemos assumir que $\gamma(t)$ depende continuamente de t . Desde que fibrado normal de Σ é não trivial, temos que $\nu(0) = -\nu(1)$. Para cada $\epsilon > 0$, definimos a curva $\gamma_\epsilon : [0, 1] \rightarrow M$ por

$$\gamma_\epsilon(t) = \exp_{\gamma(t)}(\epsilon \sin(\pi t)\nu(t)).$$

Claramente, γ_ϵ é uma curva fechada em M . Podemos supor que $\gamma'(0) = \gamma'(1)$. Se escolhermos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então a curva γ_ϵ intersecta Σ apenas no ponto $\gamma_\epsilon(0) = \gamma_\epsilon(1)$. Note que

$$\begin{aligned} \gamma'_\epsilon(0) &= D_1(\exp)(\gamma(0), 0)\gamma'(0) + D_2(\exp)(\gamma(0), 0)(\epsilon\pi \cos(0)\nu(0)) \\ &= \gamma'(0) + \epsilon\pi\nu(0) \\ &= \gamma'(1) - \epsilon\pi\nu(1) \\ &= \gamma'_\epsilon(1). \end{aligned}$$

Logo, γ_ϵ intersecta Σ em um único ponto de maneira transversal e portanto seu número de interseção módulo 2 é igual a $I_2(\gamma_\epsilon, \Sigma) = 1$. Em particular, a classe de homotopia de γ_ϵ em $\pi_1(M)$ é não trivial.

Observe agora que a aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ dada por

$$H(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(s\epsilon \sin(\pi t)\nu(t))$$

define uma homotopia entre γ e γ_ϵ .

Portanto, γ e γ_ϵ determinam a mesma classe de homotopia em $\pi_1(M)$. Em particular, esta classe é trivial em $\pi_1(M)$ pois γ é homotópica a uma constante em M pois $i_\# :$

$\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ não é injetivo. Isto é uma contradição pois vimos acima que a classe de γ_ϵ é não trivial em $\pi_1(M)$.

Proposição 2.1.2 (Desigualdade de Pu). *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana homeomorfa a $\mathbb{RP}^2$. Seja $\text{sys}(\Sigma, g)$ a sístole de (Σ, g) definido como em 2, então*

$$\text{area}(\Sigma, g) \geq \frac{2}{\pi} \text{sys}(\Sigma, g)^2.$$

Demonstração: Ver [14].

Corolário 2.1.3 (Desigualdade (2.3)). *Temos $\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi} \text{sys}(M, g)^2 > 0$.*

Demonstração: Fixamos uma superfície arbitrária $\Sigma \in \mathcal{F}$. Seja γ um laço não contrátil em Σ . Pela proposição anterior, temos que o homeomorfo induzida $i_\# : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetivo. Logo γ é não contrátil em M . Portanto

$$L(\gamma) \geq \text{sys}(M, g)$$

Como γ é um laço não contrátil em Σ arbitrário, temos que $\text{sys}(\Sigma, g) \geq \text{sys}(M, g)$. Portanto, usando a desigualdade de Pu, obtemos

$$\text{area}(\Sigma, g) \geq \frac{2}{\pi} \text{sys}(\Sigma, g)^2 \geq \frac{2}{\pi} \text{sys}(M, g)^2.$$

Desde que $\Sigma \in \mathcal{F}$ é arbitrária, o resultado segue.

2.1.2 Prova da desigualdade (2.2)

O objetivo principal desta seção é a demonstração da desigualdade (2.2). A proposição abaixo nos dá um importante resultado para o desenvolvimento do trabalho.

Proposição 2.1.4. *Existe uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que $\text{area}(\Sigma, g) = \mathcal{A}(M, g)$.*

Demonstração: Ver [3]. □

Proposição 2.1.5. *Seja Σ uma superfície em $\mathcal{F}$ satisfazendo $\text{area}(\Sigma, g) = \mathcal{A}(M, g)$. Então*

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu, \nu) + |II|^2) d\mu_g \leq 4\pi,$$

onde II denota a segunda forma fundamental de Σ .

Demonstração:

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Suponha que Σ tenha dois lados, ou seja, existe um campo de vetores normais unitário ν globalmente definido sobre Σ . Desde que Σ minimiza área em $\mathcal{F}$ temos que Σ é uma superfície mínima estável. Logo pela desigualdade de estabilidade temos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu) + |II|^2) |V|^2 d\mu_g \leq \int_{\Sigma} |\nabla V|^2 d\mu_g,$$

para todo campo de vetores normais V ao longo de Σ .

Escolhendo $V = \nu$ obtemos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu) + |II|^2) d\mu_g \leq \int_{\Sigma} |\nabla \nu|^2 d\mu_g = 0.$$

Caso 2: Suponha que Σ tenha apenas um lado, ou seja, o fibrado normal de Σ é não-trivial.

Pelo teorema da uniformização, podemos encontrar um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \Sigma$ tal que a métrica φ^*g é conforme à métrica canônica em $\mathbb{RP}^2$. Podemos levantar a aplicação $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \Sigma$ para a aplicação $\widehat{\varphi} : S^2 \rightarrow \Sigma$. Claramente, $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(-x)$ para todo $x \in S^2$.

Podemos agora considerar o pullback do fibrado normal $N\Sigma$ sobre a aplicação $\widehat{\varphi} : S^2 \rightarrow \Sigma$. Como S^2 é simplesmente conexo temos que o fibrado pullback é trivial. Logo, podemos encontrar uma seção suave $\nu \in \Gamma(\widehat{\varphi}^*N\Sigma)$ tal que $|\nu(x)| = 1$ para todo $x \in S^2$. Para cada ponto $x \in S^2$, o vetor $\nu(x)$ é um vetor normal unitário de Σ no ponto $\widehat{\varphi}(x)$.

Como Σ tem apenas um lado temos que $\nu(x) = -\nu(-x)$ para todo $x \in S^2$. Podemos identificar S^2 com a esfera unitária do $\mathbb{R}^3$. Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, definimos uma seção normal $\sigma_j \in \Gamma(\widehat{\varphi}^*N\Sigma)$ por $\sigma_j(x) = x_j \nu(x)$ para todo $x \in S^2$. Note que $\sigma_j(x) = \sigma_j(-x)$ para todo $x \in S^2$. Então, existe uma seção $V_j \in \Gamma(N\Sigma)$ tal que $\sigma_j(x) = V_j(\widehat{\varphi}(x))$ para todo $x \in S^2$. Desde que $\sum_{j=1}^3 |\sigma_j(x)|^2 = 1$ para todo $x \in S^2$, concluímos que $\sum_{j=1}^3 |V_j|^2 = 1$ em cada ponto de Σ .

Desde que Σ minimiza área em $\mathcal{F}$ temos que Σ é uma superfície mínima estável. Logo pela desigualdade de estabilidade temos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu) + |II|^2) |V_j|^2 d\mu_g \leq \int_{\Sigma} |\nabla V_j|^2 d\mu_g,$$

para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.

Desde que a métrica φ^*g seja conforme à métrica canônica h de S^2 , temos

$$\int_{\Sigma} |\nabla V_j|^2 d\mu_g = \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla x_j|_{\varphi^*g}^2 d\mu_{\varphi^*g} = \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla x_j|_h^2 d\mu_h,$$

para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, onde na última igualdade usamos que a integral de Dirichlet é invariante por mudança conforme em dimensão 2. Usando a identidade $\Delta_h x_j + 2x_j = 0$, temos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu) + |II|^2) |V_j|^2 d\mu_g \leq \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla x_j|_h^2 d\mu_h. \quad (2.4)$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} \text{div}(x_j \nabla x_j) &= \langle \nabla x_j, \nabla x_j \rangle + x_j \text{div} \nabla x_j \\ &= |\nabla x_j|^2 + x_j \Delta_h x_j \\ &= |\nabla x_j|^2 - 2x_j^2. \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência

$$0 = \int_{S^2} \text{div}(x_j \nabla x_j) d\mu_h = \int_{S^2} |\nabla x_j|^2 d\mu_h - 2 \int_{S^2} x_j^2 d\mu_h.$$

Somando a desigualdade (2.4) sobre $j \in \{1, 2, 3\}$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu) + |II|^2) d\mu_g &\leq \frac{1}{2} \sum_1^3 \int_{S^2} |\nabla x_j|_h^2 d\mu_h \\ &= \sum_1^3 \int_{S^2} x_j^2 d\mu_h \\ &= \text{area}(S^2, h) = 4\pi. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1.6 (Desigualdade (2.2)). *Temos que*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi.$$

Demonstração:

Pela proposição anterior temos

$$\int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(\nu) + |II|^2) d\mu_g \leq 4\pi. \quad (2.5)$$

Usando a equação de Gauss

$$2 \operatorname{Ric}_g(\nu) = R_g - |II|^2 - 2K + |H|^2, \quad (2.6)$$

onde K e H denotam a curvatura Gaussiana e o vetor curvatura média de Σ respectivamente, podemos substituir (2.6) em (2.5) para obter

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} R_g + |II|^2 d\mu_g \leq 4\pi + \int_{\Sigma} K d\mu_g.$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M, g) \inf R_g &= \mathcal{A}(\Sigma, g) \inf R_g \\ &\leq \int_{\Sigma} R_g + |II|^2 d\mu_g \\ &\leq 8\pi + 2 \int_{\Sigma} K = 12\pi, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o Teorema de Gauss Bonnet. $\square$

2.2 Prova do Teorema 2.0.2

Nesta seção analisaremos a igualdade em (2.2). Para isso, fixaremos uma métrica Riemanniana g_0 em M . Pelo Teorema de Hamilton, existe um número real $T > 0$ e uma família de métricas $g(t)$, $t \in [0, T]$, tal que $g(0) = g_0$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)} \quad (2.7)$$

para todo $t \in [0, T]$. A equação de evolução (2.7) é conhecida como o fluxo de Ricci.

Lema 2.2.1. *A função $t \mapsto \mathcal{A}(M, g(t))$ é Lipschitz contínua.*

Demonstração: Como a variedade M é compacta, podemos encontrar um número real $\Lambda > 0$ tal que $\sup_M \|\operatorname{Ric}_{g(t)}\| \leq \Lambda$ para todo $t \in [0, T]$. Seja agora $p \in M$ e $v \in T_p M$, $v \neq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Ric}_{g(t)}\| &\leq \|\operatorname{Ric}_{g(t)}\| g(t) \\ &\leq \Lambda g(t). \end{aligned}$$

Portanto

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} g(t) \right| = | - 2 \operatorname{Ric}_{g(t)} | \leq 2\Lambda g(t).$$

Logo

$$-2\Lambda \leq \frac{\partial}{\partial t} \ln g(t) \leq 2\Lambda.$$

Integrando de t_0 a t_1 , onde $t_0, t_1 \in [0, T]$ e aplicando a exponencial, temos que

$$e^{-2\Lambda|t_0-t_1|} g(t_0) \leq g(t_1) \leq e^{2\Lambda|t_0-t_1|} g(t_0).$$

Portanto,

$$\operatorname{area}(\Sigma, e^{-2\Lambda|t_0-t_1|} g(t_0)) \leq \operatorname{area}(\Sigma, g(t_1)) \leq \operatorname{area}(\Sigma, e^{2\Lambda|t_0-t_1|} g(t_0)),$$

para toda superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$.

Seja $\Sigma_1 \in \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{area}(\Sigma_1, g(t_1)) = \mathcal{A}(M, g(t_1))$. Logo temos que

$$\begin{aligned} e^{-2\Lambda|t_0-t_1|} \mathcal{A}(M, g(t_0)) &= e^{-2\Lambda|t_0-t_1|} \operatorname{area}(\Sigma_1, g(t_0)) \\ &= \operatorname{area}(\Sigma_1, e^{-2\Lambda|t_0-t_1|} g(t_0)) \\ &\leq \operatorname{area}(\Sigma_1, g(t_1)) \\ &= \mathcal{A}(M, g(t_1)). \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos provar que

$$\mathcal{A}(M, g(t_1)) \leq e^{-2\Lambda|t_0-t_1|} \mathcal{A}(M, g(t_0)).$$

Logo

$$|\ln \mathcal{A}(M, g(t_1)) - \ln \mathcal{A}(M, g(t_0))| \leq 2\Lambda|t_0 - t_1|.$$

Dessa forma concluímos que a função dada por $t \mapsto \ln \mathcal{A}(M, g(t))$ é Lipschitz contínua para todo $t \in [0, T]$ e usando o Teorema do valor médio obtemos que a função $t \mapsto \mathcal{A}(M, g(t))$ também o é. $\square$

Proposição 2.2.2. *Temos*

$$\mathcal{A}(M, g(t)) \geq \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi t,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe $\tau \in (0, T]$ tal que

$$\mathcal{A}(M, g(\tau)) < \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi\tau.$$

Assim, por continuidade, podemos encontrar um número real $\epsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{A}(M, g(\tau)) < \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi\tau - 2\epsilon\tau.$$

Defina

$$t_0 = \inf\{t \in [0, T] : \mathcal{A}(M, g(t)) < \mathcal{A}(M, g_0) - (8\pi + \epsilon)t - \epsilon\tau\}.$$

Claramente $t_0 \in (0, \tau)$. Logo devemos ter

$$\mathcal{A}(M, g(t_0)) \leq \mathcal{A}(M, g_0) - (8\pi + \epsilon)t_0 - \epsilon\tau,$$

e

$$-\mathcal{A}(M, g(t)) \leq -\mathcal{A}(M, g_0) + 8(\pi + \epsilon)t + \epsilon\tau,$$

para todo $t \in [0, t_0]$.

Somando as desigualdades acima temos

$$\mathcal{A}(M, g(t_0)) - \mathcal{A}(M, g(t)) \leq -(8\pi + \epsilon)(t_0 - t).$$

Pela proposição 2.1.4 podemos encontrar uma superfície mergulhada $\Sigma \in \mathcal{F}$ satisfazendo

$$\text{area}(\Sigma, g(t_0)) = \mathcal{A}(M, g(t_0)).$$

Escolhendo Σ , temos

$$\begin{aligned} \text{area}(\Sigma, g(t_0)) - \text{area}(\Sigma, g(t)) &\leq \mathcal{A}(M, g(t_0)) - \mathcal{A}(M, g(t)). \\ &\leq -(8\pi + \epsilon)(t_0 - t), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, t_0]$.

Isto implica

$$\frac{d}{dt}\text{area}(\Sigma, g(t))|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\text{area}(\Sigma, g(t)) - \text{area}(\Sigma, g(t_0))}{t - t_0} \leq -(8\pi + \epsilon).$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{area}(\Sigma, g(t))|_{t=t_0} &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \text{tr}_{\Sigma} g'(t_0) d\mu_{g(t_0)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \text{tr}_{\Sigma} (-2 \text{Ric}_{g(t_0)}) d\mu_{g(t_0)} \\ &= - \int_{\Sigma} \left(\text{Ric}_{g(t_0)}(e_1, e_1) + \text{Ric}_{g(t_0)}(e_2, e_2) \right) d\mu_{g(t_0)}, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_2\}$ denota uma base ortonormal local em Σ com respeito a métrica $g(t_0)$.

Usando a Proposição (2.1.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{area}(\Sigma, g(t))|_{t=t_0} &= - \int_{\Sigma} (R_{g(t_0)} - \text{Ric}_{g(t_0)}(\nu, \nu)) d\mu_{g(t_0)} \\ &\geq -4\pi - \int_{\Sigma} (\text{Ric}_{g(t_0)}(\nu, \nu) + |II|^2) d\mu_{g(t_0)} \\ &\geq -8\pi, \end{aligned}$$

que é uma contradição. □

Proposição 2.2.3. *Suponha que $\mathcal{A}(M, g_0) = 2\pi$. Então*

$$\inf_M R_{g(t)} \leq \frac{6}{1-4t},$$

para todo $t \in [0, T] \cap [0, \frac{1}{4})$.

Demonstração: Pelo Corolário 2.1.2, temos

$$\mathcal{A}(M, g(t)) \inf_M R_{g(t)} \leq 12\pi,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Além disso, segue da Proposição 2.2.2 que

$$\mathcal{A}(M, g(t)) \geq \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi t = 2\pi(1 - 4t),$$

para todo $t \in [0, T]$.

Logo obtemos, desses fatos, que

$$2\pi(1 - 4t) \inf_M R_{g(t)} \leq 12\pi, \tag{2.8}$$

para todo $t \in [0, T]$. Com isto obtemos a proposição. □

Proposição 2.2.4. *Suponha que $\mathcal{A}(M, g_0) \inf_M R_{g_0} = 12\pi$. Então a variedade (M, g_0) tem curvatura seccional constante.*

Demonstração: Após aplicar homotetia na métrica g_0 se necessário, podemos assumir que $\mathcal{A}(M, g_0) = 2\pi$ e $\inf_M R_{g_0} = 6$. A curvatura escalar de $g(t)$ satisfaz a equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{g(t)} = \Delta R_{g(t)} + 2|\operatorname{Ric}_{g(t)}|^2.$$

Como

$$\operatorname{Ric}_{g(t)} = \operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ + \frac{R_{g(t)}}{n}g.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |\operatorname{Ric}_{g(t)}|^2 &= |\operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ|^2 + \left| \frac{R_{g(t)}}{n}g \right|^2 \\ &= |\operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ|^2 + \frac{R_{g(t)}^2}{n^2}|g|^2 \\ &= |\operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ|^2 + \frac{R_{g(t)}^2}{n}, \end{aligned}$$

onde o $\operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ = \operatorname{Ric}_{g(t)} - \frac{R_{g(t)}}{n}g$ denota o traço livre do Ricci de $g(t)$.

Logo, a equação de evolução pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{g(t)} &= \Delta R_{g(t)} + 2(|\operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ|^2 + \frac{R_{g(t)}^2}{3}) \\ &= \Delta R_{g(t)} + \frac{2}{3}R_{g(t)}^2 + 2|\operatorname{Ric}_{g(t)}^\circ|^2 \\ &\geq \Delta R_{g(t)} + \frac{2}{3}R_{g(t)}^2. \end{aligned}$$

Utilizando o princípio do máximo

$$\inf_M R_{g(t)} \geq \frac{6}{1-4t}$$

para todo $t \in [0, T]$. Em particular $T < \frac{1}{4}$.

Usando a Proposição (2.2.3), desigualdade (2.8) temos que a desigualdade acima é, de fato, uma igualdade. Logo pelo princípio do máximo forte, obtemos

$$R_{g(t)} = \frac{6}{1-4t}$$

em $M \times [0, T]$.

Substituindo na equação de evolução da curvatura escalar obtemos

$$\begin{aligned} 2|\mathring{\text{Ric}}_{g(t)}|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{6}{1-4t} \right) - \Delta \left(\frac{6}{1-4t} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{6}{1-4t} \right)^2 \\ &= \frac{24}{(1-4t)^2} - \frac{2}{3} \frac{36}{(1-4t)^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

em $M \times [0, T]$. Logo $\text{Ric}_{g(t)} = \frac{R_{g(t)}}{3}g$ para todo $t \in [0, T]$. Em particular a métrica g_0 é Einstein, portanto pelo lema de Schur g_0 tem curvatura seccional constante. $\square$

Pela proposição 2.2.4, o recobrimento universal de (M, g_0) é isométrico a S^3 . Consequentemente para concluir a prova do teorema, basta analisar o grupo fundamental de M .

Proposição 2.2.5. *Suponha que $\mathcal{A}(M, g_0) \inf_M R_{g_0} = 12\pi$. Então $|\pi_1(M)| = 2$.*

Demonstração: Podemos assumir que $\mathcal{A}(M, g_0) = 2\pi$ e $\inf_M R_{g_0} = 6$. Pela Proposição (2.1.4), existe uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que $\text{area}(\Sigma, g_0) = \mathcal{A}(M, g_0)$. Usando a Proposição (2.1.5), obtemos

$$12\pi = \text{area}(\Sigma, g_0) \inf_M R_{g_0} \leq \int_{\Sigma} (R_{g_0} + |II|^2) d\mu_{g_0} \leq 12\pi$$

Mas

$$\int_{\Sigma} R_{g_0} d\mu_{g_0} = \int_{\Sigma} 6 d\mu_{g_0} = 6 \int_{\Sigma} d\mu_{g_0} = 12\pi,$$

portanto $|II|^2$ é identicamente nula, logo a superfície Σ é totalmente geodésica.

Pela proposição 2.2.4, existe uma isometria local $F : S^3 \rightarrow (M, g_0)$. Note que F é uma aplicação de recobrimento. Além disso, podemos levantar Σ para uma superfície mergulhada $\tilde{\Sigma} \subset S^3$ a qual também é totalmente geodésica. Logo $\tilde{\Sigma}$ é um equador totalmente geodésico de S^3 .

Consideremos a aplicação induzida $i_{\#} : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$. Pela proposição 2.1.1 a aplicação é injetiva. Afirmamos que $i_{\#}$ é sobrejetiva. Para provar isto, consideramos uma curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$. O caminho α induz uma isometria $\psi : S^3 \rightarrow S^3$

satisfazendo $F \circ \psi = F$. Como Σ é totalmente geodésica e F uma isometria, então $\psi^{-1}(\tilde{\Sigma})$ também o é. Logo $\tilde{\Sigma}$ e $\psi^{-1}(\tilde{\Sigma})$ são “equadores”, portanto $\tilde{\Sigma} \cap \psi^{-1}(\tilde{\Sigma}) \neq \emptyset$. Seja $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma} \cap \psi^{-1}(\tilde{\Sigma})$ fixo. Podemos encontrar um caminho suave $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ e $\tilde{\gamma}(1) = \psi(\tilde{p})$. Agora definimos o caminho suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ por $\gamma(s) = F(\tilde{\gamma}(s))$, onde $\gamma(0) = F(\tilde{\gamma}(0)) = p$ e $\gamma(1) = F(\tilde{\gamma}(1)) = p$. Portanto, γ é uma curva fechada em Σ . Além disso, γ é homotópica a α , pois estas possuem os mesmos extremos em S^3 . Assim, concluímos que $[\alpha] = [\gamma] \in i_{\#}(\pi_1(\Sigma))$. Isto mostra que a aplicação $i_{\#} : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ é sobrejetiva. $\square$

Referências

- [1] BENDLE, Simon. 1981, *Ricci Flow and the Sphere Theorem*. vol 3. American Mathematical Society.
- [2] BIEZUNER, Rodney J. 2015, *Geometria Riemanniana-Notas de aula*. Programa de Pós-Graduação em Matemática(UFMG)
- [3] BRAY, Hubert; BRENDLE, Simon; EICHMAIR, Michael; NEVES, André. 2009, *Area-Minimizing Projective Planes in 3-Manifolds*. Cornell University Library.
- [4] BRAY, Hubert; BRENDLE, Simon and NEVES, André. 2010, *Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds*. Commun. Anal. Geom. **18**, 821-830
- [5] CARMO, Manfredo P. do . 2012, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5 ed. Rio de Janeiro.
- [6] CARMO, Manfredo P. do . 2011, *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro.
- [7] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. 2011, *A Course in Minimal Surfaces*. vol 121. American Mathematical Society
- [8] GUILLHEMIN, Victor; POLLACK, Alan. 1974, *Differential Topology*. Massachusetts Institute of Technology
- [9] LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2 ed. San Francisco
- [10] LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2 ed. San Francisco
- [11] LIMA, Elon L. 2007, *Variedades Diferenciáveis* .Rio de Janeiro.
- [12] SCHOEN, R ; YAU S. 1979, *Existence of Incompressible Minimal Surfaces and the Topology of Three Dimensional Manifolds with Non-Negative Scalar Curvature* Second Series, Vol. 110, No. 1 , pp. 127-142
- [13] TOPPING, Peter. 2006, *Lectures on The Ricci Flow*. Cambridge University Press.

- [14] PU, B. M. 1952, *Some inequalities in certain nonorientable Riemanniana manifolds*.
Pacific J. Math.