Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação de Mestrado

Soluções Locais e Globais para uma Equação Parabólica Não Linear

Washington César Menezes Junior

São Luís - MA
Agosto de 2016

Soluções Locais e Globais para uma Equação Parabólica Não Linear

Washington César Menezes Junior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Renata de Farias Limeira Carvalho.

São Luís-MA

Agosto de 2016

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Menezes Junior, Washington César.
Soluções locais e globais para uma equação parabólica não linear / Washington César Menezes Junior. - 2016.
52 f.

Orientador(a): Renata de Farias Limeira Carvalho.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2016.

1. Equação do calor não linear. 2. Existência local. 3. Solução global. I. Limeira Carvalho, Renata de Farias. II. Título.

Soluções Locais e Globais para uma Equação Parabólica Não Linear

Washington César Menezes Junior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em:

_____ de Agosto de 2016.

Banca examinadora:

Profª. Drª. Renata de Farias Limeira Carvalho (Orientador)
UFMA

Profª. Drª. Sandra Imaculada Moreira Neto
UFMA

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana
UFS

A meus pais, irmãos, amigos e professores pela paciência e incentivo.

“Àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais além daquilo que pedimos ou pensamos”

(Paulo, O apóstolo - Bíblia Sagrada)

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, pela minha vida, família e amigos e que também permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como mestrando, mas que em todos os momentos é maior mestre que alguém pode conhecer.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro, um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

À Professora Renata de Farias Limeira Carvalho pela orientação, apoio e confiança, e pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho. Além do suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Agradeço a todos os professores do PPGMAT em especial ao Professor Marcos Araújo por terem me proporcionado o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

Agradeço a minha mãe Antônia, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Ao meu pai que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que para mim foi muito importante.

Obrigado meus irmãos e tios, pela contribuição valiosa que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

Meus agradecimentos aos amigos Leandro, Bruna, Dedé, os amigos de sala, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante 2014 e 2015.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados de existência local e global para uma equação do calor em $\mathbb{R}^N$ com não-linearidade não local no tempo.

Palavras-chave: Equação do calor não linear, Existência Local, Solução Global.

Abstract

In this work, we introduce results of local and global solution for a heat equation in $\mathbb{R}^N$ with nonlocal nonlinearity in time.

Keywords: Nonlinear heat equation, Local existence, Global Solution.

Sumário

Notação

χ_A função característica definida por $\chi_A(x) = 1$, se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$, se $x \notin A$;

$\overline{E}$ o fecho do subconjunto E no espaço topológico X;

$C(E;F)$ o espaço de funções contínuas do espaço topológico E no o espaço topológico F;

$C_b(E;F)$ o espaço de Banach de funções contínuas, limitadas do espaço topológico E no espaço de Banach F, equipado com a topologia da convergência uniforme;

$C_c(E;F)$ o espaço das funções contínuas $E \to F$ com suporte compacto em E;

$\mathcal{L}(E,F)$ o espaço de Banach de operadores lineares contínuos do espaço de Banach E no espaço de Banach F, equipado com a topologia da norma;

$\mathcal{L}(E)$ o espaço $\mathcal{L}(E,E)$;

$X^\star$ o dual do espaço topológico X;

$X \hookrightarrow Y$ se $X \subset Y$ com imersão contínua;

Ω subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$;

$U_T = (0,T] \times \Omega$;

$C_1^2(U_T) = \{u : U_T \to \mathbb{R}; u, D_x u, D_x^2 u, u_t \in C(U_T)\}$;

$\overline{\Omega}$ fecho de Ω em $\mathbb{R}^N$;

$\omega \subset\subset \Omega$ se $\overline{\omega} \subset \Omega$ e $\overline{\omega}$ compacto;

$\partial_t u = u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$;

$\partial_i u = u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$;

$\Delta = \displaystyle\sum_{i=i}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$;

$C_c(\Omega) = C_c(\Omega, \mathbb{R})$ ou $C_c(\Omega, \mathbb{C})$;

$C_b(\Omega) = C_b(\Omega, \mathbb{R})$ ou $C_b(\Omega, \mathbb{C})$;

$C(\overline{\Omega})$ o espaço das funções contínuas $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (ou $\overline{\Omega} \to \mathbb{C}$). $C(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach munido com a norma L^∞;

$C_0(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^\infty(\Omega)$;

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ o espaço de Fréchet de C^∞ das funções $\Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\Omega \to \mathbb{C}$) com suporte compacto em Ω, equipado com a topologia da convergência uniforme com todas as derivadas com subconjuntos compactos em Ω;

$\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições em Ω, sendo o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$;

$L^p(I, X)$ o espaço de Banach de (classes de) funções mensuráveis $u : I \to X$ tais que $\displaystyle\int_I \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty$ se $1 \leq p < \infty$, ou $\underset{t \in I}{sup\ ess} \|u(t)\|_X$ se $p = \infty$. $L^p(I, X)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sup_{t \in I} \text{ess} \, \|u(t)\|_X \, , \text{ se } p = \infty \end{cases}$$

$W^{1,p}(I, X)$ o espaço de Banach (de classes) de funções mensuráveis $u : I \to X$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p(I, X)$. $W^{1,p}(I, X)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,X)} = \|u\|_{L^p(I,X)} + \|u_t\|_{L^p(I,X)}$$

$C(\overline{I}, X)$ o espaço das funções contínuas $\overline{I} \to X$. Onde I é limitado, $C(\overline{I}, X)$ é um espaço de Banach equipado com a norma de $L^\infty(I, X)$;

Introdução

No estudo de equações diferenciais parciais, questões a respeito da existência, unicidade e positividade de soluções são bastante naturais. No caso das equações que modelam fenômenos que evoluem com o tempo é importante analisar também se uma solução está definida globalmente ou apenas localmente.

O objetivo deste trabalho é obter soluções locais e globais do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(s)ds, \text{em } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x), \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

Pretendemos estudar a existência da solução global quando u_0 é suficientemente pequeno e está no espaço de Lebesgue adequado, cujo expoente é determinado usando o argumento de *scaling*. Em contrapartida, existência local para o problema é feito de maneira usual como de costume para outras EDP´s. Nos baseamos no trabalho desenvolvido primeiramente por Thierry Cazenave, Flávio Dickstein e Fred B. Weissler [4].

No capítulo 1, serão apresentados um estudo sobre a integração vetorial, definições, propriedades para integrabilidade, como a própria definição de integral vetorial, para funções com valores em espaço de Banach. Introduziremos os espaços L^p e de Sobolev $W^{1,p}$ vetoriais, como generalizações para o caso real. Ainda no capítulo 1, será apresentado o teorema do ponto fixo de Banach e lema de Grönwall, que serão muitos úteis para as demonstrações dos teoremas de existência local e global.

No capítulo 2, abordaremos a equação do calor em $\mathbb{R}^N$, dando ênfase a sua notoriedade em problemas físicos. Construiremos a solução fundamental, indispensável para tratar de casos mais gerais. Faremos uma apresentação sobre o problema de valor inicial, para casos homogêneos e não homogêneos, construindo suas respectivas soluções. Ainda nessa linha de estudo, complementamos esse capítulo introduzindo alguns resultados da

Teoria de semigrupos.

O capítulo 3 é destinado aos teoremas de existência local e global para o problema (1). Apresentamos também a demonstração da unicidade, dependência contínua em relação aos dados inicias, assim como a demonstração da existência de solução maximal e alternativa *blow up* para a solução. Por último, faremos algumas estimativas para obtenção e construção da solução global.

Capítulo 1

Resultados de Análise Funcional

Este capítulo é destinado aos resultados de Análise Funcional, veremos aqui a definição de integração vetorial, os espaços L^p e $W^{1,p}$ vetoriais, suas propriedades básicas, além disso os Teorema de Ponto Fixo de Banach e Lema de Grönwall.

1.1 Funções Mensuráveis e Integração Vetorial

Apresentaremos nesta seção conceitos e resultados da teoria de integração vetorial. Para isto, definiremos alguns tipos de funções e demonstraremos o Teorema de Bochner e suas consequências. Para tal consideremos um espaço de Banach X e um espaço de medida $(I, \sum, \mu)$ onde $I \subset \mathbb{R}$, μ é a medida de Lebesgue e para cada conjunto mensurável $A \in \sum$, a função característica de A é denotada por χ_A.

Definição 1.1.1. *Uma função $\varphi : I \to X$ é uma função simples mensurável se existem conjuntos mensuráveis $A_1, ..., A_k \in \sum$ com $\mu(A_j) < \infty$ para j= 1,...,k, tais que $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$, e vetores $b_1, ..., b_k \in X$ tais que*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} b_i. \tag{1.1}$$

Definimos a integral de uma função simples mensurável $\varphi : I \to X$ por:

$$\int_I \varphi dt = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) b_i. \tag{1.2}$$

Definição 1.1.2. *Uma função $f : I \to X$ é mensurável se existe uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples mensuráveis tais que*

$$\varphi_n \to f \ \mu\text{-quase sempre.} \tag{1.3}$$

A verificação de que uma função é mensurável pela definição não é tarefa muito fácil. O teorema abaixo remedia em parte esta dificuldade cuja demonstração encontra-se em [2].

Teorema 1.1.3 (Teorema da mensurabilidade de Pettis)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função* $f : I \to X$.

(i) *f é mensurável;*

(ii) $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ *é mensurável.*

Definição 1.1.4. *Dizemos que a função mensurável* $f : I \to X$ *é Bochner - integrável se existir uma sequência de funções simples mensuráveis* $\varphi_n : I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, *tais que* $\varphi_n \to f$ *μ-quase sempre e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt = 0. \tag{1.4}$$

Note que

$$\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt \tag{1.5}$$

faz sentido, pois a função

$$\|\varphi_n - f\| : I \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

é uma função não negativa e pelo Teorema de Pettis é mensurável.

Lema 1.1.5. *Seja* $f : I \to X$ *uma função Bochner integrável. Então existe um vetor* $i(f) \in X$ *tal que para toda sequência* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *de funções simples mensuráveis que verifica (1.4), tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(t)dt = i(f). \tag{1.7}$$

o limite (1.7) acima é tomado com respeito à norma de X.

Demonstração. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples mensuráveis que verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt = 0. \tag{1.8}$$

Como,

$$\begin{aligned} \left\| \int_I \varphi_n(t)dt - \int_I \varphi_p(t)dt \right\| &\leq \int_I \|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)\|\, dt \\ &\leq \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt + \int_I \|\varphi_p(t) - f(t)\|\, dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Assim, a sequência $\displaystyle\int_I \varphi_n(t)dt$ é de Cauchy. Existe, portanto, um vetor $i(f) \in X$ que verifica (1.7), como queríamos demonstrar. $\square$

Note tais parcelas em (1.9) podem ser tomadas tão pequenas quanto se queira, uma vez que tal propriedade verifica-se para funções simples mensuráveis. Além disso, tal limite independe da sequência escolhida, ou seja, qualquer sequência de funções simples mensuráveis que verifica (1.4) terá o mesmo limite. De fato, seja $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma outra sequência de funções simples mensuráveis,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_I \psi_n(t)dt - i(f) \right\| &\leq \left\| \int_I \psi_n(t)dt - \int_I f(t)dt \right\| + \left\| \int_I \varphi_n(t)dt - \int_I f(t)dt \right\| + \\
&\quad + \left\| \int_I \varphi_n(t)dt - i(f) \right\| \\
&\leq \int_I \|\psi_n(t) - f(t)\| \, dt + \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt + \\
&\quad + \left\| \int_I \varphi_n(t)dt - i(f) \right\|.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Portanto, a sequência $\int_I \psi_n(t)dt \to i(f)$, quando $n \to \infty$.

Definição 1.1.6. *O elemento $i(f)$ construído no Lema 1.1.5 é chamado de integral de f em I,*

$$i(f) = \int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(t)dt. \tag{1.11}$$

Se $I = (a, b)$ definimos:

$$\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \tag{1.12}$$

Se f for uma função com valores reais, definimos:

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt, se\ a > b. \tag{1.13}$$

Para cada conjunto mensurável $A \in \sum$, definimos a integral de Bochner da função f sobre A por:

$$\int_A f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \chi_A(t)\varphi_n(t)dt. \tag{1.14}$$

Teorema 1.1.7 (Bochner)**.** *Seja $f : I \to X$ uma função mensurável. Então f é integrável a Bochner se, e somente se, $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ é integrável. Além disso,*

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| \, dt. \tag{1.15}$$

Demonstração. Se f é integrável a Bochner, então consideremos a sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt = 0. \tag{1.16}$$

Devemos mostrar que $\int_I \|f(t)\| \, dt < \infty$.
Como $\|f(t)\| \leq \|\varphi_n(t)\| + \|\varphi_n(t) - f(t)\|$, dessa forma temos que $\|\varphi_n(t)\| : I \to \mathbb{R}$ é integrável, pois se $\varphi_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} \varphi_i \chi_{B_i}$, então $\sum\limits_{i=1}^{m_n} \|\varphi_i\| \, \mu(B_i) < \infty$.
Além disso, $\|\varphi_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ também é integrável, pois como $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt = 0$ então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt < \infty$. Portanto, $\|f(t)\|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha f mensurável e que $\|f(t)\|$ é integrável. Seja uma sequência de funções simples $g_n : I \to \mathbb{R}$ tal que $g_n \to \|f\|$ em $L^1(I)$ e ainda $|g_n| \leq g$ para alguma $g \in L^1(I)$ ambas as condições valendo em quase toda parte. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples mensuráveis $\varphi_n : I \to X$ tal que $\varphi_n \to f$ quase sempre. Então considere a seguinte sequência de funções dada por

$$h_n = \frac{\varphi_n \, |g_n|}{\|\varphi_n\| + \frac{1}{n}}, \tag{1.17}$$

para todo $t \in I$.
Observamos que h_n é uma função simples mensurável e integrável com $\|h_n\| \leq g$. De fato,

$$\begin{aligned} \|h_n\| &= \left\| \frac{\varphi_n \, |g_n|}{\|\varphi_n\| + \frac{1}{n}} \right\| \\ &= \frac{\|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\| + \frac{1}{n}} \cdot |g_n| \leq g, \text{quase sempre} \end{aligned} \tag{1.18}$$

e que $h_n \to f$ em X quase sempre. De fato, seja $\alpha_n = \dfrac{|g_n|}{\|\varphi_n\| + 1/n}$, assim $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.
Considere,

$$\begin{aligned} \|h_n - f\| &= \|\alpha_n \varphi_n - f\| \\ &= \|\alpha_n \varphi_n - \alpha_n f + \alpha_n f - f\| \\ &\leq |\alpha_n| \cdot \|\varphi_n - f\| + |\alpha_n - 1| \cdot \|f\| \\ &\leq 2 \cdot \|\varphi_n - f\| + |\alpha_n - 1| \cdot \|f\| \end{aligned} \tag{1.19}$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n(t) - f(t)\| = 0$.
Como $\|h_n - f\| \leq \| \, h_n\| + \|f\| \leq g + \|f\| \in L^1(I)$, então a função $\|h_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ é mensurável e integrável.
Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada em $\mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|h_n(t) - f(t)\| \, dt = \int_I \lim_{n\to\infty} \|h_n(t) - f(t)\| \, dt = 0. \tag{1.20}$$

Portanto, f é integrável no sentido de Bochner. Finalmente,

$$\begin{aligned}\left\|\int_I f(t)dt\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\int_I h_n(t)dt\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_I h_n(t)dt\right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\int_I \|h_n(t)\|\,dt \\ &= \int_I \lim_{n\to\infty}\|h_n(t)\|\,dt \\ &= \int_I \left\|\lim_{n\to\infty} h_n(t)\right\| dt \\ &= \int_I \|f(t)\|\,dt.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Portanto,

$$\left\|\int_I f(t)dt\right\| \leq \int_I \|f(t)\|\,dt. \tag{1.22}$$

□

Corolário 1.1.8 (Teorema da Convergência Dominada em $L^1(I,X)$)**.** *Seja* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções integráveis* $\varphi_n : I \to X$*, e sejam* $f : I \to X$ *mensurável e* $g \in L^1(I)$*. Se*

$$\begin{cases} \|\varphi_n(t)\| \leq g(t) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = f(t) \end{cases} \quad \textit{para quase todo } t \in I \textit{ e } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Então, f *é integrável e*

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n(t)dt. \tag{1.24}$$

Demonstração. Basta mostrar que $\|f\|$ é integrável.
Por hipótese sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = f(t)$, então $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n(t)\| = \|f(t)\|$,
como $\|\varphi_n(t)\| \leq g(t)$ isso implica que $\|f(t)\| \leq g(t) \in L^1(I)$.
Portanto, $\|f\|$ é integrável e pelo Teorema de Bochner, f é integrável. Além disso,

$$\|\varphi_n(t) - f(t)\| \leq \|\varphi_n(t)\| + \|f(t)\| \leq 2g(t) \in L^1(I), \tag{1.25}$$

isto é, a função $\|\varphi_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ é integrável. Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\,dt = \int_I \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n(t) - f(t)\|\,dt. \tag{1.26}$$

Portanto,

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n(t)dt. \tag{1.27}$$

□

Corolário 1.1.9. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Se $f : I \to X$ é uma função integrável, então a função $T \circ f : I \to Y$ é integrável e vale*

$$\int_I (T \circ f)(t)dt = T\left(\int_I f(t)dt\right). \tag{1.28}$$

Demonstração. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples integráveis tais que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n(t) - f(t)\| = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| = 0 \end{cases} \quad \text{quase toda parte.} \tag{1.29}$$

Aplicando o operador T em cada elemento da sequência obtemos uma nova sequência $(T \circ \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ que é uma sequência de funções simples e portanto integrável. Pela linearidade e continuidade de T, temos

$$\begin{aligned} \int_I (T \circ \varphi_n)(t)dt &= \int_I T(\varphi_n(t))dt \\ &= T\left(\int_I \varphi_n(t)dt\right) \end{aligned} \tag{1.30}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (T \circ \varphi_n)(t) &= \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n(t)) \\ &= T\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)\right) \\ &= T\left(\int_I \varphi_n(t)dt\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Portanto, $T \circ f : I \to Y$ é uma função mensurável. Como f é integrável, então $\|f\|$ é integrável, sendo T limitada e $\|T(f(t))\| \leq \|T\| \cdot \|f(t)\| \in L^1(I)$, então $\|T(f(t))\|$ é integrável e pelo Teorema de Bochner, $T \circ f$ também é integrável. Além disso, usando o fato de que

$$\|T(\varphi_n(t)) - T(f(t))\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi_n(t) - f(t)\| \tag{1.32}$$

segue

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_I \|T(\varphi_n(t)) - T(f(t))\|\, dt &\leq \lim_{n\to\infty} \int_I \|T\| \cdot \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt \\ &= \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt = 0 \end{aligned} \tag{1.33}$$

e pela Definição 1.1.6., temos

$$\begin{aligned}
\int_I (T \circ f)(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_I (T \circ \varphi_n)(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I T(\varphi_n(t))dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(T \int_I \varphi_n(t) \right) dt \\
&= T \left(\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(t)dt \right) \\
&= T \left(\int_I f(t)dt \right).
\end{aligned}$$

□

1.2 Os Espaços $L^p(I, X)$

Definição 1.2.1. *Seja $p \in [1, +\infty]$. Denotamos por $L^p(I, X)$ o conjunto de (classes) funções mensuráveis $f : I \to X$ tal que a função $t \mapsto \|f(t)\|$ pertence a $L^P(I)$.*

Para $f \in L^p(I, X)$ definimos:

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left\{ \int_I \|f(t)\|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \; p < \infty \tag{1.34}$$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \sup_{t\in I} ess \, \|f(t)\|, \; p = \infty. \tag{1.35}$$

Quando não há risco de confusão, nós denotamos $\|\cdot\|_{L^p(I,X)}$ por

$$\|\cdot\|_{L^p(I)}, \text{ou} \, \|\cdot\|_{L^p}, \text{ou} \, \|\cdot\|_p. \tag{1.36}$$

Denotamos por $L^p_{Loc}(I, X)$ o conjunto das funções $f : I \to X$ tal que $f|_J \in L^p(I, X)$ para cada subintervalo $J \subset I$ limitado.

Observação 1.2.2. *O espaço $L^p(I, X)$ goza da maior parte das propriedades do espaço $L^p(I) = L^p(I, \mathbb{R})$, o que pode ser verificado aplicando-se os resultados clássicos para a função $t \mapsto \|f\|$.*

Seguem alguns desses resultados abaixo e podem ser encontrados em [3].

1.2.1 Propriedades dos Espaços $L^p(I, X)$

(i) $\|f\|_{L^p(I,X)}$ definida por (1.34) e (1.35) é uma norma no espaço $L^p(I, X)$. O espaço $L^p(I, X)$ munido com a norma acima é um espaço de Banach. Se $1 < p < \infty$, então $C_0^\infty(I, X)$ é denso em $L^p(I, X)$.

(ii) Uma função $f : I \to X$ pertence ao $L^p(I, X)$ se, e somente se, existir uma função $g \in L^p(I)$ tal que $\|f\| \leq g$ quase todo ponto de I.

(iii) Se $f \in L^p(I, X)$ e $\varphi \in L^p(I)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} \leq 1$, então $\varphi f \in L^r(I, X)$ e

$$\|\varphi f\|_{L^r(I,X)} \leq \|f\|_{L^p(I,X)} \|\varphi\|_{L^q(I)}. \tag{1.37}$$

Em particular, se $f \in L^p(I, X)$ e se J é um subintervalo aberto de I, então $f|_J \in L^p(I, X)$.

(iv) Se $f \in L^p(I, X) \cap L^q(I, X)$ com $p < q$, então $f \in L^r(I, X)$, para cada $r \in [p, q]$, e

$$\|\varphi f\|_{L^r(I,X)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(I,X)} \|\varphi\|^{1-\theta}_{L^q(I)} \tag{1.38}$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

(v) Se I é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ e $p \leq q$, então $L^q(I, X) \hookrightarrow L^p(I, X)$ e

$$\|f\|_{L^p(I,X)} \leq |I|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(I,X)} \tag{1.39}$$

para toda $f \in L^q(I, X)$.

(vi) Suponha $f : I \to X$ mensurável. Se $f \in L^p(J, X)$ para todo $J \subset\subset I$ e $\|f\|_{L^p(J,X)} \leq C$ para alguma constante C independente do intervalo J, então $f \in L^p(I, X)$ e $\|f\|_{L^p(I,X)} \leq C$.

(vii) Se Y é um espaço de Banach e se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, então para cada $f \in L^p(I, X)$ temos que $Af \in L^p(I, Y)$ e

$$\|Af\|_{L^p(I,Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|f\|_{L^p(I,X)}. \tag{1.40}$$

Em particular, se $X \hookrightarrow Y$ e $f \in L^p(I, X)$, então $f \in L^p(I, Y)$.

(viii) (*Teorema da Convergência Dominada em $L^p(I, X)$*) Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I, X)$ e $g \in L^p(I)$. Se $p < \infty$ e

$$\begin{cases} \|f_n(t)\| \leq g(t), \text{para quase todo } t \in I \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t), \text{ existe para quase todo } t \in I \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.41}$$

então $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \in L^p(I, X)$.

(ix) Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I, X)$ e $f \in L^p(I, X)$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f \in L^p(I, X)$, então existe uma $g \in L^p(I)$ e uma subsequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|f_{n_k}(t)\| \leq g(t)$ quase todo ponto $t \in I$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.2.3. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ e defina*

$$T_h f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } h \neq 0. \tag{1.42}$$

Então $T_h f(t) \in L^p(\mathbb{R}, X) \cap C_b(\mathbb{R}, X)$ e T_h é uma contração em $L^p(\mathbb{R}, X)$. Além disso, se $p < \infty$, então $\lim\limits_{h\to 0} T_h f = f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ em quase todo ponto. Além disso, T_h é um operador uniformemente limitado em $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Corolário 1.2.4. *Sejam $g \in L^1_{Loc}(I, X)$, $t_0 \in I$ e uma função $f \in C(I, X)$ definida por*

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \text{ para todo } t \in I. \tag{1.43}$$

Então, temos as seguintes propriedades abaixo:

(i) *f é diferenciável e $f' = g$ em quase todo ponto;*

(ii) $\displaystyle\int_I f(t)\varphi(t)dt = -\int_I g(t)\varphi'(t)dt$, *para toda $\varphi \in C_c^1(I)$.*

Demonstração. Como as propriedades (i) e (ii) acima são locais, podemos assumir que $I = \mathbb{R}$ e $g \in L^1(I, X)$. Temos:

$$T_h g(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \tag{1.44}$$

onde T_h é definida por (1.42). Assim a demonstração de (i) segue imediato da Proposição 1.2.3.

Agora considere $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Note que $\dfrac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \to \varphi'$ quando $h \to 0$, uniformemente em $\mathbb{R}$. Portanto,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)dt &= -\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}dt \\ &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t-h) - f(t)}{-h}\varphi(t)dt \\ &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} T_{-h}g(t)\varphi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)dt \end{aligned} \tag{1.45}$$

onde a última igualdade é consequência da Proposição 1.2.3. Portanto, tem -se (ii). □

Lema 1.2.5. *Se $f \in L^1_{Loc}(I, X)$ é tal que*

$$\int_I f(t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.46}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(I)$, então $f = 0$ em quase todo ponto.

As demonstrações das Proposição 1.2.3. e do Lema 1.2.5. podem ser vistas em [3].

Lema 1.2.6. *Se $f \in L^1_{Loc}(I, X)$ e verifica*

$$\int_I f(t)\varphi'(t)dt = 0 \tag{1.47}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(I)$, então existe um $x_0 \in X$ tal que $f(t) = x_0$ para todo $t \in I$.

Demonstração. Seja $\theta \in C_c^\infty(I)$ tal que $\displaystyle\int_I \theta(t)dt = 1$. Seja $\psi \in C_c^\infty(I)$. Considere $t_0 \in I$ tal que $\theta(t) = \psi(t) = 0$ para $t \leq t_0$, e seja $\varphi \in C_c^\infty(I)$ dada por

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \left\{ \psi(s) - \left(\int_{t_0}^t \psi(\sigma)d\sigma \right) \theta(s) \right\} ds. \tag{1.48}$$

Temos $\varphi' = \psi - \left(\displaystyle\int_I \psi(\sigma)d\sigma \right) \theta$. Portanto, substituindo em (1.48), tem-se

$$0 = \int_I f(t)\psi(t)dt - x_0 \int_I \psi(\sigma)d\sigma. \tag{1.49}$$

onde

$$x_0 = \int_I f(t)\theta(t)dt; \tag{1.50}$$

e então

$$\int (f(t) - x_0)\psi(t)dt = 0, \tag{1.51}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(I)$. O resultado agora segue pelo Lema 1.2.5. □

Lema 1.2.7. *Se $f, g \in L^1_{Loc}(I, X)$ verificam*

$$\int_I g(t)\varphi(t)dt = -\int_I f(t)\varphi'(t)dt, \tag{1.52}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(I)$, então dado $t_0 \in I$ existe um $x_0 \in X$ tal que

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(t)dt, \tag{1.53}$$

para quase todo $t \in I$.

Demonstração. Substituiremos g por ξg com $\xi \in C_c^\infty(I, X)$ podemos assumir tal que $I = \mathbb{R}$ e que $g \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}, X)$ tal que $g_n \to g$ em $L^1(\mathbb{R}, X)$. Para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\int_I g(t)\varphi(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(t)\varphi(t)dt \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t g_n(s)ds \right) \varphi'(t)dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t g(s)ds \right) \varphi'(t)dt
\end{aligned} \tag{1.54}$$

por integração por partes. Segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - \int_0^t g(s)ds \right) \varphi'(t)dt = 0 \tag{1.55}$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(I)$, o resultado segue do Lema 1.2.6. □

1.3 Os espaços de Sobolev $W^{1,p}(I, X)$.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma função $f \in W^{1,p}(I, X)$ se $f \in L^p(I, X)$ e se existe uma função $g \in L^p(I, X)$ tal que

$$\int_I g(t)\varphi(t)dt = -\int_I f(t)\varphi'(t)dt, \tag{1.56}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Pelo Lema 1.2.5. g é única, e definimos $f' = \dfrac{df}{dt} = g$. Para $f \in W^{1,p}(I, X)$, definimos

$$\|f\|_{W^{1,p}(I,X)} = \|f\|_{L^p(I,X)} + \|f'\|_{L^p(I,X)}\,. \tag{1.57}$$

Quando não houver risco de confusão podemos denotar $\| \ \|_{W^{1,p}(I,X)}$ por $\| \ \|_{W^{1,p}(I)}$ ou $\| \ \|_{W^{1,p}}$.

Observação 1.3.1. *O espaço $W^{1,p}(I, X)$ goza de maior parte das propriedades do espaço $W^{1,p}(I, X) = W^{1,p}(\mathbb{R}, X)$, com essencialmente as mesmas provas. Em particular, obtém-se facilmente os seguintes resultados e podem ser vistos em [3].*

1.3.1 Propriedades dos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(I, X)$

(i) $\| \cdot \|_{W^{1,p}(I,X)}$ é uma norma no espaço $W^{1,p}(I, X)$. O espaço $W^{1,p}(I, X)$ equipado com a norma $\| \cdot \|_{W^{1,p}(I,X)}$ é um espaço de Banach.

(ii) Se $f \in W^{1,p}(I, X)$ e se J é um subintervalo aberto de I, então $f|_J \in W^{1,p}(J, X)$.

(iii) Se $f \in W^{1,p}(I, X) \cap W^{1,q}(I, X)$ com $p < q$, então para cada $r \in [p, q]$ temos $f \in W^{1,r}(I, X)$.

(iv) Se I é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ e $p < q$, então $W^{1,q}(I, X) \hookrightarrow W^{1,p}(I, X)$.

(v) Suponha $f \in L^p(I, X)$. Se $f \in W^{1,p}(I, J)$ para todo $J \subset\subset I$ e $\|f'\|_{L^p(J,X)} \leq C$ para alguma constante C independente de J, então $f \in W^{1,p}(I, X)$ e $\|f'\|_{L^p(I,X)} \leq C$.

(vi) Se Y é um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ então para cada $f \in W^{1,p}(I, X)$, $Af \in W^{1,p}(I, Y)$ e

$$\|Af\|_{W^{1,p}(I,Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|f\|_{W^{1,p}(I,X)}\,. \tag{1.58}$$

Em particular, se $X \hookrightarrow Y$ e $f \in W^{1,p}(I, X)$, então $f \in W^{1,p}(I, Y)$.

(vii) Se $p < \infty$, então $C_0^\infty(\mathbb{R}, X)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}, X)$.

(viii) Se $(f_n)_{n\geq 1} \subset W^{1,p}(I, X)$ tal que $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ em $L^p(I, X)$ quando $n \to \infty$ para algumas $f, g \in L^p(I, X)$, então $f \in W^{1,p}(I, X)$ e $f' = g$.

Teorema 1.3.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(I, X)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *$f \in W^{1,p}(I, X)$;*

(ii) *Existe uma $g \in L^p(I, X)$ tal que para alguns $s, t \in I$ temos*

$$f(t) = f(s) + \int_s^t g(\sigma)d\sigma. \tag{1.59}$$

Em particular, se f satisfaz (i) e (ii), então podemos dizer que $g = f'$ na propriedade (ii).

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) pode ser obtida pela Lema 1.2.7. e (ii) $\Rightarrow$ (i) segue-se do Corolário 1.2.4. □

1.4 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Os teoremas de pontos fixos constituem uma ferramenta muito útil da Análise Funcional garantindo existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, além de outras aplicações.

Definição 1.4.1. *Sejam M_1 e M_2 espaços métricos. Uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ é uma contração, se existir uma constante $k < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \text{ para todos } x, y \in M_1 \tag{1.60}$$

É notável que as contrações são funções uniformemente contínuas, logo contínuas.

Teorema 1.4.2 (Teorema do ponto fixo de Banach)**.** *Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único ponto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demonstração. Seja $k < 1$ a constante da contração f. Considere o número não negativo

$$i = inf\{d(f(x), x) : x \in M\}. \tag{1.61}$$

Inicialmente verificamos que $i = 0$. De fato, caso contrário teríamos $k^{-1}i > i$, e então existiria $x \in M$ tal que $d(f(x), x) < k^{-1}i$. Teríamos assim

$$d(f(f(x)), f(x)) \leq kd(f(x), x) < i \tag{1.62}$$

o que é incompatível com o fato de i ser o ínfimo.

Sabendo que $inf\,\{d(f(x),x) : x \in M\} = 0$, podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tal que $d(f(x_n),x_n) \to 0$. Pela desigualdade triangular, podemos estimar

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(f(x_n),x_n)) + d(f(x_m),x_m)) + d(f(x_n),f(x_m)) \\ &\leq d(f(x_n),x_n)) + d(f(x_m),x_m)) + kd(x_n,x_m) \end{aligned} \tag{1.63}$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{1}{1-k}\left[d(f(x_n),x_n) + d(f(x_m),x_m)\right] \to 0, \tag{1.64}$$

quando $n, m \to \infty$. Isso prova que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, como M é completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um certo $x_0 \in M$. Da continuidade de f temos $f(x_n) \to f(x_0)$, e da continuidade da métrica segue que

$$d(f(x_0),x_0) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n),x_n) = 0, \tag{1.65}$$

provando que x_0 é um ponto fixo para f. A unicidade segue da seguinte observação: se x_0 e x_1 são pontos fixos, então

$$d(x_0,x_1) = d(f(x_0),f(x_1)) \leq kd(x_0,x_1). \tag{1.66}$$

$\square$

1.5 Lema de Grönwall

O Lema de Grönwall é uma ferramenta usada para obter variadas estimativas em equações diferenciais. Em particular, é usado para provar a unicidade de uma solução para problemas de valor inicial.

Lema 1.5.1 (Lema de Grönwall)**.** *Sejam $T > 0$, $A \geq 0$ e $f \in L^1(0,T)$ uma função não negativa. Considere uma função não negativa $\varphi \in C([0,T])$ tal que*

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds, \tag{1.67}$$

para todo $t \in [0,T]$. Então

$$\varphi(t) \leq A \cdot exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \tag{1.68}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Capítulo 2

A Equação do Calor em $\mathbb{R}^N$

Chamaremos de Equação do calor homogênea e não homogênea, respectivamente, as seguintes equações:

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{2.1}$$

e

$$u_t - \Delta u = f \tag{2.2}$$

sujeitas às devidas condições iniciais e de contorno. Aqui $t > 0$ e $x \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto. A incógnita desconhecida é $u : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $u = u(t, x)$, e o Laplaciano Δ é tomado no que diz respeito às variáveis espaciais $x = (x_1, ..., x_n)$: $\Delta u = \Delta_x u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$. Em (2.2) a função $f : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ é dada. Por conseguinte, o nosso desenvolvimento em grande parte é paralelo à teoria correspondente para a equação de Laplace.

Interpretação Física.

A equação do calor, também conhecida como a *equação de difusão*, em aplicações típicas descreve a evolução no tempo da densidade u tais como alguma quantidade de calor, a concentração química, etc. Se $V \subset \Omega$ é qualquer sub-região lisa, a taxa de variação da quantidade total dentro V é igual ao negativo do fluxo líquido através de ∂V:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V u dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu dS, \tag{2.3}$$

F sendo a densidade de fluxo. Assim,

$$u_t = -\mathrm{div} F, \tag{2.4}$$

pois V é arbitrário. Em muitas situações, F é proporcional ao gradiente de u, mas com pontos em sentido contrário (uma vez que o fluxo sai a partir de regiões de maior concentração para de mais baixa):

$$F = -aDu \ (a > 0). \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$u_t = a\mathrm{div}(Du) = a\Delta u, \tag{2.6}$$

para a = 1 temos a equação de calor (2.1). A equação do calor aparece frequentemente, por exemplo, no estudo do movimento Browniano.

2.1 Solução Fundamental

2.1.1 Derivação da Solução Fundamental

Observa-se que a equação do calor envolve uma derivada em relação à variável tempo t, mais duas derivadas com relação às variáveis espaciais x_i $(i = 1, ..., N)$. Consequentemente, vemos que, se u resolve (2.1), então o mesmo acontece com $u(\lambda^2 t, \lambda x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Este *scaling* indica que o raio $\dfrac{r^2}{t}$ $(r = \|x\|)$ é importante para a equação de calor e sugere a procura de uma solução de (2.1) que tem a forma $u(t,x) = v(\frac{r^2}{t}) = v(\frac{\|x\|^2}{t})$ $(t > 0, x \in \mathbb{R}^N)$, para alguma função v ainda indeterminada.

Embora esta abordagem finalmente leve ao que nós queremos, é mais rápido procurar uma solução u tendo a estrutura especial

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \tag{2.7}$$

sendo $t > 0, x \in \mathbb{R}^N$, e as constantes α, β, bem como a função $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a serem determinadas. Chegamos a (2.7) se olharmos para uma solução u da equação do calor invariante pelo *scaling de dilatação*

$$u(t,x) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x). \tag{2.8}$$

Isto é, pedimos

$$u(t,x) = \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x) \tag{2.9}$$

para todo $\lambda > 0$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Escreva $\lambda = t^{-1}$ derivamos (2.7) e defina $v(y) := u(1, y)$. Vamos inserir (2.7) em (2.1), e posteriormente, calculamos

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \tag{2.10}$$

para $y := t^{-\beta} x$. Para transformar (2.10) em uma expressão envolvendo a variável y sozinha, tomamos $\beta = \dfrac{1}{2}$. Em seguida, os termos com t são idênticos, e assim (2.10) se reduz a

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0. \tag{2.11}$$

Simplificaremos ainda mais v sabendo que ela é radial, isto é, $v(y) = w(|y|)$ para alguma $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então (2.11) se torna

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{N-1}{r} w' = 0, \tag{2.12}$$

para $r = |y|$, $' = \dfrac{d}{dr}$. Agora, se nós ajustamos $\alpha = \dfrac{N}{2}$, isso simplifica (2.12) e teremos

$$\left(r^{N-1} w'\right)' + \frac{1}{2}\left(r^N w\right)' = 0. \tag{2.13}$$

Assim

$$r^{N-1} w' + \frac{1}{2} r^N w = a. \tag{2.14}$$

para alguma constante a. Assumindo $\lim\limits_{r\to\infty} w,\ w' = 0$, concluímos $a = 0$; de onde

$$w' = -\frac{1}{2} r w, \tag{2.15}$$

e para alguma constante b, temos

$$w = b e^{-\frac{r^2}{4}}. \tag{2.16}$$

Combinando (2.7), (2.16) e as nossas escolhas para α, β, concluímos que $\dfrac{b}{t^{N/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ resolve a equação de calor (2.1).

Este cálculo motiva o seguinte

Definição 2.1.1. *A função*

$$\Phi(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, & t > 0, x \in \mathbb{R}^N \\ 0, & t < 0, x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.17}$$

é chamada de solução fundamental da equação de calor.

Note-se que Φ é singular no ponto $(0,0)$. Nós, às vezes, escrevemos $\Phi(t,x) = \Phi(t, \|x\|)$ para enfatizar que a solução fundamental é radial na variável x . A escolha da constante de normalização $(4\pi)^{-N/2}$ é determinada pelo seguinte

Lema 2.1.2 (Integral da Solução fundamental)**.** *Para cada tempo $t > 0$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,x)\,dx = 1. \tag{2.18}$$

Demonstração. Calculemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,x)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\|z\|^2}\,dz \\ &= \frac{1}{\pi^{N/2}} \prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2}\,dz_i \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

$\square$

2.1.2 O Problema de Valor Inicial

Agora usaremos Φ para formar uma solução para o problema de valor inicial (ou de Cauchy)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{em } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{em } \{t=0\}\times\mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.20}$$

Notemos a que função $(t,x)\mapsto\Phi(t,x)$ resolve a equação do calor longe da indeterminação $(0,0)$ e, portanto, o mesmo acontece com $(t,x)\mapsto\Phi(t,x-y)$ para cada $y\in\mathbb{R}^N$ fixo. Por conseguinte, a função

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N}\Phi(t,x-y)u_0(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}u_0(y)dy \qquad \big(t>0, x\in\mathbb{R}^N\big) \end{aligned} \tag{2.21}$$

deve também ser uma solução para equação do calor (2.20).

Teorema 2.1.3 (Solução para o Problema de Valor Inicial)**.** *Assuma que* $u_0\in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$*, e defina* u *por (2.21). Então*

(i) $u\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$*;*

(ii) $u_t(t,x)-\Delta u(t,x)=0 \qquad \big(t>0, x\in\mathbb{R}^N\big)$*;*

(iii) $\displaystyle\lim_{\substack{(t,x)\to(t,x^0)\\ t>0, x\in\mathbb{R}^N}} u(t,x) = u_0(x^0)$ *para cada ponto* $x^0\in\mathbb{R}^N$*.*

Demonstração. **(a)** Uma vez que a função

$$\frac{1}{t^{N/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \tag{2.22}$$

é infinitamente diferenciável, com derivadas uniformemente limitadas em todas as ordens em $[\delta,\infty)\times\mathbb{R}^N$ para cada $\delta>0$, vemos que $u\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$. Além disso

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[(\Phi_t-\Delta_x\Phi)(t,x-y)\right]u_0(y)dy \\ &= 0 \quad (t>0, x\in\mathbb{R}^N) \end{aligned} \tag{2.23}$$

desde que Φ já resolve a equação do calor.

(b) Fixe $x^0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que

$$\left|u_0(y) - u_0(x^0)\right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \left\|y - x^0\right\| < \delta, \;\; y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.24}$$

Então se $\|x - x^0\| < \dfrac{\delta}{2}$, temos de acordo com o Lema 2.1.2

$$\begin{aligned} \left|u(t,x) - u_0(x^0)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t, x-y)\left[u_0(y) - u_0(x^0)\right] dy\right| \\ &\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y)\left|u_0(y) - u_0(x^0)\right| dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N - B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y)\left|u_0(y) - u_0(x^0)\right| dy \\ &:= I + J \end{aligned}$$

$$. \tag{2.25}$$

Agora

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t, x-y) dy = \varepsilon, \tag{2.26}$$

devido a (2.23) e ao Lema 2.1.2. Além disso, se $\|x - x^0\| \leq \dfrac{\delta}{2}$ e $\|y - x^0\| \geq \delta$, então

$$\left\|y - x^0\right\| \leq \|y - x\| + \frac{\delta}{2} \leq \|y - x\| + \frac{1}{2}\left\|y - x^0\right\|. \tag{2.27}$$

Assim, $\|y - x\| \geq \dfrac{1}{2}\left\|y - x^0\right\|$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} J &\leq 2\left\|u_0\right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^N - B(x^0,\delta)} \Phi(t, x-y) dy \\ &\leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{\left\|y-x^0\right\|^2}{16t}} dy \\ &= \frac{C}{t^{N/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{N-1} dr \to 0 \quad \text{quando } t \to 0^+. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Portanto, se $\|x - x^0\| < \dfrac{\delta}{2}$ e $t > 0$ é suficientemente pequeno, $|u(t,x) - u_0(x^0)| < 2\varepsilon$.

□

Observação 2.1.4. **(i)** *Em vista do Teorema 2.1.3 podemos escrever*

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = 0, & \textit{em } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ \Phi = \delta_0, & \textit{em } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.29}$$

onde δ_0 denota a medida de Dirac no $\mathbb{R}^N$ dando unidade de massa para o ponto 0.

(ii) *Observe que, se u_0 é limitada, contínua, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, então*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u_0(y)dy \tag{2.30}$$

é, de fato, positiva para todos os pontos $x \in \mathbb{R}^N$ e o tempo $t > 0$. Interpretamos esta observação dizendo que a equação do calor tem uma pertubação quando a força de velocidade propaga-se para o infinito. Se a temperatura inicial é não negativa e é em algum lugar positivo, a temperatura em qualquer momento posterior (não importa quão pequena) é positiva em toda parte.

2.1.3 O Problema Não Homogêneo

Agora vamos voltar nossa atenção para o problema de valor inicial da equação do calor não homogênea

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u = 0, & \text{em } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.31}$$

Como podemos produzir uma fórmula para a solução? Se lembrarmos a motivação que leva até (2.21), notamos que a função $(t,x) \mapsto \Phi(t-s, x-y)$ é ainda uma solução da equação do calor (para um dado $y \in \mathbb{R}^N, 0 < s < t$).

Agora para s fixo, a função

$$u = u(t;s,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)dy \tag{2.32}$$

resolve

$$\begin{cases} u_t(s,\cdot) - \Delta u(s,\cdot) = 0, & \text{em } (s,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(s,\cdot) = f(s,\cdot), & \text{em } \{t = s\} \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.33}$$

que é apenas um problema de valor inicial da forma (2.20), com o tempo de partida $t = 0$ substituído por $t = s$, e u_0 substituída por $f(s,\cdot)$. Assim $u(s,\cdot)$ não é, certamente, uma solução de (2.31).

No entanto *Princípio Duhamel* consulte [5], afirma que podemos construir uma solução de (2.31), por meio da integração com respeito a s teremos solução de (2.33). A ideia é a de considerar

$$u(t,x) = \int_0^t u(t;s,x)ds \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N). \tag{2.34}$$

Reescrevendo, temos

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)dyds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} f(s,y)dyds \quad \text{para todo } t > 0, x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para confirmar que a fórmula (2.35) funciona, vamos por simplicidade assumir que $f \in C_1^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ e f com suporte compacto.

Teorema 2.1.5 (Solução para o Problema Não homogêneo)**.** *Defina u por (2.35). Então*

(i) $u \in C_1^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$*;*

(ii) $u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \qquad \big(t > 0, x \in \mathbb{R}^N\big)$*;*

(iii) $\lim\limits_{\substack{(t,x)\to(t,x^0)\\ t>0, x\in\mathbb{R}^N}} u(t,x) = 0$ *para cada ponto* $x^0 \in \mathbb{R}^N$*.*

Demonstração. **(a)** Desde que Φ tem uma singularidade em $(0,0)$, não podemos justificar diretamente por meio de derivação sob o sinal de integração. Em vez disso avançaremos um pouco como na prova do Teorema 2.1.3.

Em primeiro lugar, mudaremos as variáveis, e escrevemos

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) f(t-s, x-y) dyds \tag{2.36}$$

Como $f \in C_1^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ e tem suporte compacto e $\Phi = \Phi(s,y)$ é suave perto de $s = t > 0$, calculemos

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) f_t(t-s, x-y) dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0, x-y) dy \end{aligned} \tag{2.37}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} f(t-s, x-y) dyds \quad (i,j = 1, ..., N). \tag{2.38}$$

Assim u_t, $D_x^2 u$ e, da mesma forma u, $D_x u$ pertencem a $C((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$.

(b) Então calculemos

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0, x-y) dy \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \\ &+ \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y \right) f(t-s, x-y) \right] dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0, x-y) dy \\ &:= I_\varepsilon + J_\varepsilon + K. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora

$$|J_\varepsilon| \leq \left(\|f_t\|_{L^\infty} + \left\|D^2 f\right\|_{L^\infty}\right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) dyds \tag{2.40}$$

pelo Lema 2.12. Integrando por partes, também encontramos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(s,y) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y\right) \Phi(s,y)\right] f(t-s, x-y) dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y) dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t,y) f(0, x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y) dy - K, \end{aligned} \tag{2.41}$$

uma que Φ resolve a equação do calor. Combinando (2.39)-(2.41), verificamos

$$\begin{aligned} u_(t,x) - \Delta u(t,x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y) dy \\ &= f(t,x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^N) \end{aligned} \tag{2.42}$$

o limite quando $\varepsilon \to 0$ é calculado da mesma forma que no Teorema 2.1.3. Finalmente note que $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq t\,\|f\|_{L^\infty} \to 0$.

Observação 2.1.6. *Podemos combinar os Teoremas 2.1.3 e 2.1.5 para descobrir que*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dyds \tag{2.43}$$

é, de acordo com as hipóteses sobre u_0 e f como descrito acima, uma solução de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u = u_0, & \text{em } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.44}$$

□

2.2 Alguns Resultados da Teoria de Semigrupos

A Teoria de semigrupos é um estudo abstrato de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem com os valores em espaços de Banach, motivado por operadores lineares, mas possivelmente ilimitados. Nesta seção, veremos alguns resultados básicos dessa teoria.

2.2.1 Definições e Propriedades Elementares

Começamos com um problema abstrato. Seja X um espaço de Banach, e considere então a equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} u'(t) = A\mathbf{u}(t), \quad (t \geq 0) \\ \mathbf{u}(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.45}$$

onde $' = \dfrac{d}{dt}$, $u_0 \in X$ é dada, e A é um operador linear. Mais precisamente suponha $D(A)$, o *domínio* de A, é um subespaço linear de X com o operador possivelmente ilimitado dado por

$$A : D(A) \to X. \tag{2.46}$$

Nós investigamos a existência e unicidade de uma solução

$$\mathbf{u} : [0, \infty) \to X \tag{2.47}$$

da EDO (2.45). O problema fundamental é verificar condições razoáveis para o operador A, de modo que

(i) a EDO tem uma única solução $\mathbf{u}$ para cada ponto $u_0 \in X$ inicial,

(ii) muitas EDP's (equações diferenciais parciais) interessantes podem ser expressas na forma abstrata (2.45).

Teremos em mente a situação em que X é um espaço de funções L^p e A é um operador diferencial parcial linear envolvendo outras variáveis na variável t. Neste caso, A é necessariamente um operador ilimitado.

2.2.2 Semigrupos

Vamos neste momento informalmente assumir que $\mathbf{u} : [0, \infty) \to X$ é uma solução da equação diferencial (2.45), de fato, tem uma única solução para cada ponto inicial $u_0 \in X$.

Notação. Então escrevemos

$$\mathbf{u}(t) = S(t)u_0 \quad (t \geq 0) \tag{2.48}$$

para exibir explicitamente a dependência de $\mathbf{u}(t)$ com valor inicial $u_0 \in X$. Para cada $t \geq 0$ podemos, portanto, considerar $S(t)$ como uma aplicação de X em X.

Que propriedades satisfazem a família de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$? Claramente $S(t) : X \to X$ é linear. Além disso

$$S(0)u = u. \quad (u \in X). \tag{2.49}$$

e

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0 \quad (t, s \geq 0, u_0 \in X). \tag{2.50}$$

Condição (2.49) é simplesmente a nossa hipótese de que a EDO (2.45) tem uma única solução para todo ponto inicial. Finalmente, parece razoável supor que para cada $u_0 \in X$

$$\text{a função} \quad t \mapsto S(t)u_0 \quad \text{é continua de} \quad [0,\infty) \to X. \tag{2.51}$$

Definição 2.2.1. **(i)** *Uma família* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados definidos de* X *em* X *é chamado de semigrupo se satisfaz as condições (2.49) a (2.51).*

(ii) *Dizemos que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de contrações, se em particular satisfaz*

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad (t \geq 0) \tag{2.52}$$

onde $\| \;\|$ *denota a norma do operador. Assim*

$$\|S(t)u_0\| \leq \|u_0\| \quad (t \geq 0, u_0 \in X) \tag{2.53}$$

A noção de semigrupo de contrações capta muitas propriedades de um bom fluxo de X gerado pela EDO (2.45).

Definição 2.2.2. *Escrevemos*

$$D(A) := \left\{ u \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe em } X \right\} \tag{2.54}$$

e

$$Au := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad (u \in D(A)). \tag{2.55}$$

Chamamos $A : D(A) \to X$ *de gerador (infinitesimal) do semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *onde* $D(A)$ *é o domínio de* A.

Teorema 2.2.3 (Propriedades da Diferencial de Semigrupos)**.** *Assuma que* $u \in D(A)$. *Então*

(i) $S(t)u \in D(A)$ *para todo* $t \geq 0$,

(ii) $AS(t)u = S(t)Au$ *para todo* $t > 0$,

(iii) *A aplicação* $t \to S(t)u$ *é diferenciável para todo* $t > 0$,

(iv) $\dfrac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u \quad (t > 0)$.

Demonstração. **(a)** Seja $u \in D(A)$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} &= \lim_{s\to 0^+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} \quad \text{pela propriedade (2.50)}\\
&= S(t) \lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)u - u}{s}\\
&= S(t)Au
\end{aligned}$$

$$. \tag{2.56}$$

Assim, $S(t)u \in D(A)$ e $AS(t)u = S(t)Au$. Fica provado os (i) e (ii).

(b) Seja $u \in D(A)$, $h > 0$. Então se $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \left\{ \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right\} &= \lim_{h\to 0^+} \left\{ S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} \right) - S(t)Au \right\}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \left\{ S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h) - S(t))Au \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

como $\dfrac{S(h)u - u}{h} \to Au$ e desde que $\|S(t-h)\| \leq 1$ e pela continuidade de $S(\,\cdot\,)u$. Concluímos,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au. \tag{2.58}$$

similarmente

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = S(t)Au. \tag{2.59}$$

Assim, $\dfrac{d}{dt}S(t)u$ existe para todo tempo $t > 0$, e é igual a $S(t)Au = AS(t)u$.

Observação 2.2.4. *Como $t \to AS(t)u = S(t)Au$ é contínua, a aplicação $t \to S(t)$ é C^1 em $(0, \infty)$, se $u \in D(A)$.*

□

2.2.3 Exemplo de Semigrupo

Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ observamos que a série formada por

$$1 + \frac{|t|\,\|A\|}{1!} + \frac{|t|^2\,\|A\|^2}{2!} + ... \tag{2.60}$$

é convergente. Isto nos motiva definir a seguinte série

$$I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + ... + \frac{t^nA^n}{n!} + ... \tag{2.61}$$

onde I é o operador identidade de X, dessa forma (2.60) é absolutamente convergente, portanto é convergente para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos, assim definido uma função chamada de exponencial de A denotada por e^{tA}.

Definindo $(tA)^0 = t^0 A^0 = I$, podemos escrever (2.61) por

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \tag{2.62}$$

Observação 2.2.5. *$e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ e $\left\|e^{tA}\right\| \leq e^{|t|\|A\|}$*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA}\right\| &= \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}\right\| = \\
&= \left\|\frac{t^0 A^0}{0!} + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + ...\right\| \leq \\
&\leq \|I\| + \left\|\frac{tA}{1}\right\| + \left\|\frac{t^2 A^2}{2!}\right\| + ... = \\
&= \|I\| + |t|\,\|A\| + \frac{|t^2|\,\|A^2\|}{2!} + ... \leq \\
&\leq \|I\| + |t|\,\|A\| + \frac{|t|^2\,\|A\|^2}{2!} + ... = e^{|t|\|A\|}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

□

Teorema 2.2.6. *A função $E : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ dado por (2.62) satisfaz as seguintes condições:*

(i) *$E(0) = I$;*

(ii) *$E(t+s) = E(t)E(s)$;*

(iii) *$\left\|e^{tA} - I\right\| \to 0$ quando $t \to 0^+$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e considere

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \tag{2.64}$$

Como, para cada $t \geq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, e^{tA} é uma aplicação de $\mathbb{R}^+$ em $\mathcal{L}(X)$. É notável que E satisfaz (i), pois $E(0) = e^{0A} = I$.

Tome $E(t) = e^{tA}$ e $E(s) = e^{sA}$ com $A \in \mathcal{L}(X)$. Assim,

$$\begin{aligned}
E(t)E(s) = e^{tA}e^{sA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{s^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k s^{k-n}}{k!(n-k)!} \right) A^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k s^{n-k} \right) \frac{A^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (t+s)^n \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((t+s)\, A)^n}{n!} = e^{(t+s)A} = E(t+s)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

resulta que e^{tA} satisfaz (ii).

Além disso, de

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \tag{2.66}$$

temos

$$\begin{aligned}
\left\| e^{tA} - I \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| &= \left\| tA \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{n!} \right\| \\
&\leq \left\| tA \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} \right\| \\
&\leq \| tA \| \left\| \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(tA)^m}{m!} \right\| \\
&\leq t \, \|A\| \left\| e^{tA} \right\| \\
&\leq t \, \|A\| \, e^{t\|A\|}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

donde,

$$\left\| e^{tA} - I \right\| \to 0 \tag{2.68}$$

quando $t \to 0^+$, isto é e^{tA} satisfaz (iii). □

2.2.4 Semigrupo do calor em $\mathbb{R}^N$

O semigrupo do calor em $\mathbb{R}^N$ é a família de operadores $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ definidos da seguinte maneira:

$$(e^{0\Delta} u)(x) = u_0(x) \tag{2.69}$$

e

$$(e^{t\Delta}u)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u(y)dy, \quad t > 0 \tag{2.70}$$

Podemos verificar que o semigrupo do calor satisfaz:

(i) $e^{0\Delta}u = u_o$;

(ii) $e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta}e^{s\Delta}, \quad \forall t, s \geq 0.$

(iii) Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} + 1$ e seja $u_0 \in L^q$. Então $e^{t\Delta}u_0 \in L^r$ e

$$\left\| e^{t\Delta}u_0 \right\|_{L^r} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} \left\| u_0 \right\|_{L^q}. \tag{2.71}$$

Demonstração. A demonstração propriedade (iii) é feita usando a *Forma Geral da Desigualdade de Young* para mais detalhe consulte [6]. É suficiente mostrarmos que $\left\| e^{t\Delta} \right\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}$, pois com as hipóteses acima a *Desigualdade de Young* nos diz que

$$\left\| e^{t\Delta}u_0 \right\|_{L^r} \leq \left\| e^{t\Delta} \right\|_{L^p} \cdot \left\| u_0 \right\|_{L^q}. \tag{2.72}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\| e^{t\Delta} \right\|_{L^p}^p &= (4\pi t)^{-\frac{Np}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x\|^2 p}{4t}} dx \\ &= (4\pi t)^{-\frac{Np}{2}} (4t)^{\frac{N}{2}} p^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\|z\|^2} dz \\ &= (4\pi t)^{-\frac{Np}{2}} (4t)^{\frac{N}{2}} p^{-\frac{N}{2}} \pi^{\frac{N}{2}} \\ &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(p-1)} p^{-\frac{N}{2}} \\ &\leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(1-p)}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Portanto, $\left\| e^{t\Delta} \right\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}$. □

Observação 2.2.7. *A solução da equação (2.43) via Teoria de Semigrupo assume a forma*

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)ds. \tag{2.74}$$

Capítulo 3

Existência de Solução Local e Global para um Problema Não Local no Tempo

Este capítulo contém os resultados de existência local e global de soluções para a equação do calor não linear e podem ser encontrados em [4].

3.1 Existência Local

Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(s)ds, \text{em } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x), \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $p > 1$ e $0 < \gamma < 1$. Como de costume, a solução da equação (3.1) é uma função $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ tal que

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}u^p(\sigma)d\sigma ds, \tag{3.2}$$

para todo $0 \le t \le T$, onde $e^{t\Delta}$ é o semigrupo do calor em $\mathbb{R}^N$. É fácil verificar que se $u(t,x)$ é uma solução de (3.1) com condição inicial $u_0(x)$, então para todo $\lambda > 0$, $\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ é uma solução com condição inicial $\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}u_0(\lambda x)$. De fato, seja $\overline{u} = \lambda^\alpha u(\lambda^2 t, \lambda x)$, onde α é uma constante a ser determinada. Daí temos,

$$\overline{u}_t = \lambda^\alpha u_t(\lambda^2 t, \lambda x)\cdot\lambda^2 + u_t(\lambda^2 t, \lambda x)\cdot 0 = \lambda^{\alpha+2}u_t(\lambda^2 t, \lambda x)$$

e

$$\overline{u}_{x_i} = \lambda^\alpha u_{x_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i)\cdot 0 + u_{x_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i)\cdot\lambda = \lambda^{\alpha+1}u_{x_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i).$$

Derivando mais uma vez $\overline{u}_{x_i}$ com relação a x_i, obtemos

$$\overline{u}_{x_ix_i} = \lambda^{\alpha+1}u_{x_ix_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i)\cdot 0 + \lambda^{\alpha+1}u_{x_ix_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i)\cdot\lambda = \lambda^{\alpha+2}u_{x_ix_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i).$$

Assim,

$$\Delta\overline{u} = \sum_{i=1}^{N}\lambda^{\alpha+2}u_{x_ix_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i) = \lambda^{\alpha+2}\sum_{i=1}^{N}u_{x_ix_i}(\lambda^2 t, \lambda x_i) = \lambda^{\alpha+2}\Delta u(\lambda^2 t, \lambda x),$$

logo, como $\overline{u}$ satisfaz a equação (3.1), temos:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_t - \Delta\overline{u} &= \int_0^t (t-s)^{-\gamma}[\lambda^{\alpha}u(\lambda^2 s)]^p ds\\
\lambda^{\alpha+2}u_t(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda^{\alpha+2}\Delta u(\lambda^2 t, \lambda x) &= \lambda^{\alpha p}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}u^p(\lambda^2 s)ds\\
\lambda^{\alpha+2}(u_t(\lambda^2 t, \lambda x) - \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x)) &= \lambda^{\alpha p-2+2\gamma}\int_0^{\lambda^2 t}(\lambda^2 t - r)^{-\gamma}u^p(r)dr\\
\lambda^{\alpha+2}\int_0^{\lambda^2 t}(\lambda^2 t - s)^{-\gamma}u^p(s)ds &= \lambda^{\alpha p-2+2\gamma}\int_0^{\lambda^2 t}(\lambda^2 t - r)^{-\gamma}u^p(r)dr.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto,

$$\lambda^{\alpha+2} = \lambda^{\alpha p-2+2\gamma},$$

obtendo assim o valor de α

$$\alpha = \frac{4-2\gamma}{p-1}. \tag{3.4}$$

Já que

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}u_0(\lambda\cdot)\right\|_{L^q} &= \left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left\|\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}u_0(\lambda x)\right\|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&= \lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\|u_0(\lambda x)\|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&= \lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}-\frac{N}{q}}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\|u_0(y)\|^q dy\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&= \lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}-\frac{N}{q}}\|u_0(\cdot)\|_{L^q},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

para que a norma seja invariante para equação (3.5) devemos ter

$$q_{sc} = \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}. \tag{3.6}$$

Dessa forma, obtemos o expoente do espaço de Lebesgue onde veremos mais a seguir, se $\|u_0(x)\|_{L^{q_{sc}}}$ é suficientemente pequeno, então a solução é global.

Teorema 3.1.1 (Existência Local)**.** *Seja* $0 < \gamma < 1$ *e* $p > 1$. *Dado* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *então existe* $T > 0$ *e uma única solução* $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *de (3.1). u podendo ser estendida a um intervalo máximo* $[0, T_{max})$ *tal que, ou* $T_{max} = \infty$ *ou,* $T_{max} < \infty$ *e* $\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^N)} \to \infty$ *quando* $t \to T_{max}$. *Além disso, se* $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *para algum r tal que* $1 \leq r < \infty$, *então* $u \in C([0,T], L^r(\mathbb{R}^N))$.

Demonstração. **(i) Unicidade**

A Unicidade decorre do Lema de Grönwall. Com efeito, se u, v são duas soluções em algum intervalo $[0,T]$, então uma vez que, $\|u^p - v^p\|_{L^\infty} \leq C(p)\|u - v\|_{L^\infty}$ em $[0,T] \times \mathbb{R}^N$ e usando a propriedade (2.72) e (2.73). Obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{L^\infty} &= \left\| \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}\left[u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\right] d\sigma ds \right\|_{L^\infty} \\
&\leq \int_0^t \int_0^s \left\| e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}\left[u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\right]\right\|_{L^\infty} d\sigma ds \\
&\leq C(p) \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma ds \\
&= C(p) \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^\infty} ds d\sigma \\
&= \frac{C(p)}{1-\gamma} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, $u(t) \equiv v(t)$.

(ii) Existência Local

A existência local em um pequeno intervalo $[0,T]$ é provada por um argumento de ponto fixo no conjunto

$$E_T = \left\{ u \in L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N)); \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty} \right\}. \tag{3.8}$$

Definiremos o operador Ψ dado por

$$\Psi(u) = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma) d\sigma ds. \tag{3.9}$$

Observemos que E_T é um subespaço fechado e limitado do espaço métrico $L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$.

Mostraremos que Ψ tem um ponto fixo. Basta verificar, então, que as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $\Psi(E_T) \subset E_T$.

(b) $\Psi : E_T \to E_T$ é uma contração.

Vejamos,

(a) Seja $u \in E_T$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)\|_{L^\infty} &= \left\| e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}u^p(\sigma)d\sigma ds \right\|_{L^\infty} \\
&\leq \left\| e^{t\Delta}u_0 \right\|_{L^\infty} + \left\| \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}u^p(\sigma)d\sigma ds \right\|_{L^\infty} \\
&\leq \|u_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^p \, d\sigma ds \\
&= \|u_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^p \, ds d\sigma \\
&= \|u_0\|_{L^\infty} + \frac{1}{1-\gamma} \int_0^t (t-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^p \, d\sigma \\
&\leq \|u_0\|_{L^\infty} + \frac{2^p \|u_0\|_{L^\infty}^p}{1-\gamma} \int_0^t (t-\sigma)^{-\gamma} d\sigma \\
&\leq \|u_0\|_{L^\infty} + \frac{2^p T^{2-\gamma} \|u_0\|_{L^\infty}^{p-1}}{(1-\gamma)(2-\gamma)} \|u_0\|_{L^\infty}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto, se T é suficientemente pequeno tal que

$$\frac{2^p T^{2-\gamma} \|u_0\|_{L^\infty}^{p-1}}{(1-\gamma)(2-\gamma)} < 1 \tag{3.11}$$

temos

$$\|\Psi(u)\|_{L^\infty} \leq 2 \|u_0\|_{L^\infty}. \tag{3.12}$$

(b) Sejam $u, v \in E_T$.

Note que, em $[0,T] \times \mathbb{R}^N$,

$$\|u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\|_{L^\infty} \leq C(p)(\|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1} + \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1}) \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^\infty}, \tag{3.13}$$

e, além disso,

$$\|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^\infty} \leq \|u - v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \tag{3.14}$$

Logo, de (3.13) e (3.14), obtemos

$$\|u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\|_{L^\infty} \leq C(p)(\|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1} + \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1}) \|u - v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}. \tag{3.15}$$

Assim, com a desigualdade (3.15), calculemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)-\Psi(v)(t)\|_{L^\infty} &= \left\|\int_0^t\int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}[u^p(\sigma)-v^p(\sigma)]d\sigma ds\right\|_{L^\infty}\\
&\leq \int_0^t\int_0^s \left\|e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}[u^p(\sigma)-v^p(\sigma)]\right\|_{L^\infty} d\sigma ds\\
&\leq \int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\left\|u^p(\sigma)-v^p(\sigma)\right\|_{L^\infty} d\sigma ds\\
&= \int_0^t\int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma}\left\|u^p(\sigma)-v^p(\sigma)\right\|_{L^\infty} ds d\sigma\\
&= \frac{1}{1-\gamma}\int_0^t (t-\sigma)^{-\gamma}\left\|u^p(\sigma)-v^p(\sigma)\right\|_{L^\infty} d\sigma\\
&\leq \frac{C(p)}{1-\gamma}\int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma}(\|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1}+\|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1})\left\|u-v\right\|_{L^\infty} d\sigma\\
&\leq \frac{2^pC(p)\left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}}{1-\gamma}\left\|u-v\right\|_{L^\infty}\int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma}d\sigma\\
&= \frac{2^pC(p)\left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}T^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}\left\|u-v\right\|_{L^\infty}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, se T é suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{2^pC(p)\left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}T^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}<1, \tag{3.17}$$

Ψ é uma contração estrita.

Concluímos que $\Psi : E_T \to E_T$ tem um ponto fixo.

(iii) A Dependência Contínua em Relação ao Valor Inicial

Considerando u e v soluções de (3.1) associadas aos valores iniciais u_0 e v_0 respectivamente, obtemos

$$\|u(t)-v(t))\|_{L^\infty}\leq\left\|u_0-v_0\right\|_{L^\infty}+\frac{C(p)}{1-\gamma}\int_0^t(t-\sigma)^{1-\gamma}\left\|u(\sigma)-v(\sigma)\right\|_{L^\infty}d\sigma \tag{3.18}$$

Do Lema de Grönwall segue que

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^\infty}\leq\left\|u_0-v_0\right\|_{L^\infty}e^{\frac{CT^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}}. \tag{3.19}$$

(iv) A Existência do Intervalo Maximal

Em (ii) obtemos a existência de uma solução u do problema (3.1) em $[0,T]$ com valor inicial u_0. Definimos $T=T_1$, e conforme a demostração de (ii), temos uma solução v de (3.1) com valor inicial $u(T_1)$ e definida em $[0,\delta_1]$ tal

$$\frac{2^p\delta_1^{2-\gamma}\left\|u(T_1)\right\|_{L^\infty}^{p-1}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}<1. \tag{3.20}$$

Dessa forma, obtém-se uma solução v de (3.1) definida em $[0, T_2]$ com $T_2 = T_1 + \delta_1$. De fato, a função dada por

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), \text{ se } t \in [0, T_1] \\ v(t - T_1), \text{ se } t \in [T_1, T_1 + \delta_1] \end{cases} \tag{3.21}$$

é contínua pois $\widetilde{u}(T_1^+) = v(0) = u(T_1)$ e $\widetilde{u}(T_1^-) = u(T_1)$ e também é solução em $[0, T_1 + \delta_1]$.

Agora, começando com o dado inicial $u(T_2)$ se obtém uma solução no intervalo $[0, T_2 + \delta_2]$, com $\delta_2 > 0$. Por indução obtém-se uma sequência crescente $(T_n)_{n\geq 1}$ e sequência de soluções $(u_n)_{n\geq 1}$. Notamos que T_1, δ_1, δ_2,..., podem não ter a mesma magnitude, pois os dados iniciais $u(0)$, $u(T_1)$, $u(T_2)$..., podem ter normas diferentes.

Seja $T_1 < T_2$ e u_1 e u_2 soluções de (3.1) em $[0, T_1]$ e $[0, T_2]$ respectivamente. Da unicidade de soluções, segue que $u_1 = u_2$ em $[0, T_1]$. Seja I um conjunto de índices qualquer. Vamos considerar agora a família $(u_i(t))_{i\in I}$ de todas as soluções de (3.1) e definidas em uma família de intervalos $([0, T_i])_{i\in I}$.

Seja $T_{\max} = \sup\limits_{i\in I} T_i$. Assim, $T_{\max}$ pode ser $+\infty$.

Vamos definir a função $u(t)$ em $[0, T_{\max})$ por

$$u(t) = u_i(t), \text{ se } t \in [0, T_i], i \in I. \tag{3.22}$$

Da unicidade, resulta que $u(t)$ está bem definida. Também pode-se observar que $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ e que u satisfaz (3.1) para todo $t \in [0, T_{\max})$. Esta solução é chamada de **solução maximal** de (3.1).

(v) A Alternativa Blow up

Seja u a solução **maximal** de (3.1). Então valem as seguintes alternativas:
ou $T_{\max} = \infty$
ou $T_{\max} < \infty$ e $\lim\limits_{t\nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$

No primeiro caso, dizemos que u é solução global e no segundo caso dizemos que u explode ou sofre *blow up* quando t se aproxima do tempo finito $T_{\max}$.

Por contradição. Suponha que $T_{\max} < \infty$ e $\lim\limits_{t\nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty}$ não é infinito. Assim, existe uma sequência $t_j \nearrow T_{\max}$ tal que $\|u(t_j)\|_{L^\infty} \leq M < \infty$. Agora vamos fixar um δ satisfazendo

$$\frac{2^p C \delta^{2-\gamma} \|u(t_j)\|_{L^\infty}^{p-1}}{(1-\gamma)(2-\gamma)} < 1. \tag{3.23}$$

Para o valor inicial $u(t_j)$, temos uma solução v_j de (3.1) definida em $[0,\delta]$. Colocando u com v_j conforme (iv) do Teorema 3.1.1 onde

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), \text{ se } t \in [0,t_j] \\ v(t-t_j), \text{ se } t \in [t_j, j_j+\delta], \end{cases} \tag{3.24}$$

obtemos uma solução do problema (3.1) definida $[0,t_j+\delta]$. Assim, tomando j suficientemente grande, segue que $t_j+\delta > T_{\max}$. Assim, $\widetilde{u}$ é solução em um intervalo maior que o intervalo $[0,T_{\max}]$. Isto contradiz o fato de que u é solução maximal.

(vi) A Regularidade em $L^r(\mathbb{R}^N)$

Finalmente, a regularidade em L^r é provada da seguinte forma. Em vez de fazer o uso do argumento de ponto fixo em E_T, consideramos o conjunto $E = L^\infty((0,T),C_0(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))$ trabalhamos em

$$E_r = \left\{u \in E; \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty}, \|u\|_{L^\infty((0,T),L^r)} \leq 2\|u_0\|_{L^r}\right\} \tag{3.25}$$

equipado com a distância de E_T. Estimando $\|u^{p-1}u\|_{L^r}$ por $\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^r}$ no argumento do ponto fixo no item (ii), (a) e (b), obtém-se uma solução no mesmo intervalo $[0,T]$. Segue que $u \in C([0,T],L^r(\mathbb{R}^N))$, concluindo assim, a regularidade em L^r.

□

3.2 Existência Global

Nesta seção, obteremos uma solução global de (3.1) sob a hipótese (3.28). Na verdade obteremos uma classe mais geral de soluções, isto é, $u \in C((0,\infty),C_0(\mathbb{R}^N))$.

Teorema 3.2.1 (Existência Global). *Seja $0<\gamma<1$ e defina*

$$p_\gamma = 1 + \frac{4-2\gamma}{(N-2+2\gamma)^+} \tag{3.26}$$

e

$$p_\star = max\left\{\frac{1}{\gamma}, p_\gamma\right\} \in (0,\infty] \tag{3.27}$$

Sejam $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ e $u \in C([0,T_{max}),C_0(\mathbb{R}^N))$ uma solução correspondente de (3.1). Então se

$$p > p_\star \tag{3.28}$$

e $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N)$(onde q_{sc} é dado por (3.6)) com a norma $\|u_0\|_{L^{q_{sc}}}$ suficientemente pequena, então u existe globalmente.

Observação 3.2.2. *Segue aqui uma observação a respeito do Teorema 3.2.1. A condição $p > p_\gamma$ é equivalente a*

$$q_{sc} > \frac{N}{(N-2+\gamma)^+} \tag{3.29}$$

e a condição $\gamma > \dfrac{1}{p}$ é equivalente a

$$q_{sc} > \frac{N(p-1)}{4-\frac{2}{p}} \tag{3.30}$$

Assim, se deixarmos

$$q_\star = max\left\{\frac{N}{(N-2\gamma)^+}, \frac{N(p-1)}{4-\frac{2}{p}}\right\} > 1 \tag{3.31}$$

então $p > p_\star$ é equivalente a $q_{sc} > q$. É neste caso apenas que $\|u_0\|_{L^{q_{sc}}} \ll 1$ implica a existência global.

Demonstração. Seja $q > 0$ tal que

$$\frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} < \frac{N}{2q} < \frac{1}{p-1}, \quad q \geq p. \tag{3.32}$$

Sabendo que podemos escolher q desta forma graças à condição $p > \dfrac{1}{\gamma}$, temos, então

$$q > \frac{N(p-1)}{2} > q_{sc}, \tag{3.33}$$

defina

$$\beta = \frac{N}{2q_{sc}} - \frac{N}{2q} = \frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{N}{2q}. \tag{3.34}$$

Podemos verificar usando (3.28) e (3.32) a (3.34) que

$$\beta > \frac{1-\gamma}{p-1}, \quad p\beta < 1, \quad \frac{N(p-1)}{2q} + (p-1)\beta + \gamma = 2. \tag{3.35}$$

Consideremos o espaço

$$E_\delta = \left\{u \in L^\infty((0,\infty), L^q(\mathbb{R}^N)); t^\beta \|u(t)\|_{L^q} \leq \delta, \text{para todo } t > 0\right\}, \tag{3.36}$$

munido com a métrica

$$d(u,v) = \sup_{t\geq 0} t^\beta \|u(t) - v(t)\|_{L^q} \tag{3.37}$$

é um espaço métrico completo, para todo $u, v \in E_\delta$. Com $\delta > 0$ suficientemente pequeno a ser estimado mais adiante.

Dados $u \in E_\delta$ e $u_0 \in L^{q_{sc}}$, definimos sobre E_δ o operador Ψ dado por

$$\Psi(u) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta}(s-\sigma)^{-\gamma}u^p(\sigma)d\sigma ds, \tag{3.38}$$

mostraremos que Ψ satisfaz as seguintes condições:

(i) $\Psi(E_\delta) \subset E_\delta$;

(ii) $\Psi : E_\delta \to E_\delta$ é uma contração.

(i) Seja $u \in E_\delta$ por (2.71), temos

$$\begin{aligned}
t^\beta \left\| \Psi(u) \right\|_{L^q} &\leq t^\beta \left\| e^{t\Delta} u_0 \right\|_{L^q} + t^\beta \left\| \int_0^t \int_0^s e^{(t-s)\Delta} (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma) d\sigma ds \right\|_{L^q} \\
&\leq C_1 t^\beta t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_{sc}} - \frac{1}{p}\right)} \left\| u_0 \right\|_{L^{q_{sc}}} + \\
&\quad + C_1 t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \left\| \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma) d\sigma \right\|_{L^{\frac{q}{p}}} ds \\
&= C_1 \left\| u_0 \right\|_{L^{q_{sc}}} + C_1 t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \left\| \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma) d\sigma \right\|_{L^{\frac{q}{p}}} ds \\
&\leq C_1 \delta/2 + C_1 t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\| u^p(\sigma) \right\|_{L^{\frac{q}{p}}} d\sigma ds \\
&= C_1 \delta/2 + C_1 t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\| u(\sigma) \right\|_{L^q}^p d\sigma ds \\
&\leq C_1 \delta/2 + C_1 t^\beta \delta^p \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-\beta p} d\sigma ds.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-\beta p} d\sigma ds &= \\
&= \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-\beta p} d\sigma \right) \times \\
&\quad \times \int_0^t s^{1-\gamma-\beta p} (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} ds \\
&= C_2 \int_0^t s^{1-\gamma-\beta p} (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} ds \\
&= C_2 t^{2-\gamma-\beta p - \frac{N(p-1)}{2q}} \times \\
&\quad \times \left(\int_0^1 s^{1-\gamma-\beta p} (1-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} ds \right) \\
&= C_2 C_3 t^{2-\gamma-\beta p - \frac{N(p-1)}{2q}} = C_2 C_3 t^{-\beta},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

logo, substituindo (3.40) em (3.39), temos

$$t^\beta \left\| \Psi(u) \right\|_{L^q} \leq C_1 \delta/2 + C_1 C_2 C_3 \delta^p \leq \delta, \tag{3.41}$$

para δ suficientemente pequeno.

Portanto, concluímos que $\Psi(E_\delta) \subset E_\delta$.

(ii) Sejam $u, v \in E_\delta$. Temos que

$$\begin{aligned}
t^\beta \left\|\Psi(u)-\Psi(v)\right\|_{L^q} &\leq C_1 t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\|u^p(\sigma)-v^p(\sigma)\right\|_{L^{\frac{q}{p}}} d\sigma ds \\
&\leq C_1 C(p) t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left(\|u(\sigma)\|_{L^q}^{p-1} + \|v(\sigma)\|_{L^q}^{p-1}\right) \times \\
&\quad \times \left\|u(\sigma)-v(\sigma)\right\|_{L^q} d\sigma ds \\
&\leq 2C_1 C(p) t^\beta \delta^{p-1} d(u,v) \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-\beta p} d\sigma ds \\
&\leq 2C_1 C(p) C_2 C_3 t^\beta \delta^{p-1} t^{-\beta} d(u,v).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Assim,

$$t^\beta \left\|\Psi(u)-\Psi(v)\right\|_{L^q} \leq C\delta^{p-1} d(u,v), \tag{3.43}$$

com $C = 2C_1C_2C_3C(p)$, de modo que se δ é suficientemente pequeno, temos

$$C\delta^{p-1} < 1 \tag{3.44}$$

e $\Psi : E_\delta \to E_\delta$, é portanto, uma contração estrita. Assim Ψ tem um ponto fixo, o qual é uma solução global de (3.1). $\square$

Referências

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev spaces*. New York: Academic Press, 1975.

[2] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2010.

[4] CAZENAVE, T.; DICKSTEIN, F.; WEISSLER, F.B. *An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling*. v.68. Issue 4. p. 862-874. Feb, 2010.

[5] EVANS, L.C. *Partial differential equations*. 2.ed. New York: AMS, 1949.

[6] FOLLAND, G.B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. 2. ed. New York: Jonh Wiley, 1999.